Poemes.

PREMIERS PRINCIPES

DE

GÉOMÉTRIE MODERNE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
26786 Quai des Grands-Augustins, 55.

PREMIERS PRINCIPES

DE

GÉOMÉTRIE MODERNE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

PAR

ERNEST DUPORCQ,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
INGÉNIEUR DES TÉLÉGRAPHES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

INTRODUCTION.

Les exigences de la préparation aux examens sont actuellement telles que les professeurs de Mathématiques spéciales se voient le plus souvent forcés de laisser complètement de côté tous les sujets dont les programmes officiels ne font pas explicitement mention. Chaque année, les cours de Géométrie analytique prennent une extension plus considérable, au détriment de l'enseignement de la Géométrie, qui se trouve de plus en plus négligé. Il semble pourtant que l'étude des travaux de Poncelet, de Chasles et de Laguerre, contribuerait, mieux que l'examen des divers modes de discussion de l'équation en S, à développer l'esprit géométrique des élèves, ce qui doit être, bien qu'on ait trop souvent paru le perdre de vue, le principal but de l'étude des Mathématiques.

Quoi qu'il en soit, les bons élèves des classes de Spéciales, les étudiants des Facultés des Sciences et les candidats à l'Agrégation s'intéresseront toujours aux méthodes géométriques, qui leur permettent souvent de résoudre avec élégance des problèmes dont la solution analytique serait parfois des plus laborieuses; dans tous les cas, ces considérations leur fourniront toujours des indications précieuses.

Ils ont avant tout à leur disposition l'excellent *Traité* de M. Rouché, qui renferme un exposé clair et substantiel d'un certain nombre des méthodes de la Géométrie moderne, ainsi que le très intéressant *Traité de Géométrie analytique* de M. Picquet, dont ce géomètre n'a malheureusement publié que le volume consacré au plan.

Nous avons rédigé ces pages à l'usage de ceux qui désirent se familiariser un peu plus avec le maniement des méthodes de la Géométrie moderne. C'est dire que ce travail, que nous avons voulu faire très court, n'a aucunement la prétention d'être complet. Sophus Lie y est à peine cité; la plupart des travaux de Cayley, de Cremona, d'Halphen, de Plücker, de Klein, etc., n'y sont pas mentionnés; nous ne disons rien non plus des élégantes méthodes de la Géométrie cinématique, dont M. Mannheim a su tirer un si heureux parti. Il est inutile d'ajouter qu'en aucun point nous n'abordons la théorie des courbes et des surfaces. De plus, parmi les sujets traités, la plupart sont loin de l'être complètement; nous avons surtout voulu ouvrir des horizons nouveaux à nos jeunes lecteurs.

Après avoir précisé le caractère hautement analytique de la Géométrie moderne, et donné quelques notions préliminaires sur les transformations des figures, nous étudions les divisions et les faisceaux homographiques ou en involution, puis les transformations homographiques et corrélatives dans le plan et dans l'espace. Nous appliquons ensuite ces théories à l'étude de propriétés des courbes et des surfaces du second degré. Nous terminons par une étude sommaire de l'inversion, des transformations quadratiques planes, et disons quelques mots de la transformation de Lie.

Nous nous sommes efforcé de mettre les lecteurs en mesure de se servir eux-mêmes des méthodes indiquées pour résoudre les problèmes qu'ils ont à traiter; aussi avons-nous donné un grand nombre d'exemples variés, tout en adoptant, dans ces applications, une rédaction assez concise pour exiger de nos lecteurs ces quelques efforts de réflexion sans lesquels tout travail reste le plus souvent sans profit réel.

Des notes nombreuses donnent de brèves indications historiques.

Quant aux figures, nous les avons peu multipliées, nous conformant ainsi aux idées de Chasles lui-même, et convaincu que des notations convenablement choisies permettent généralement de suivre une démonstration mieux qu'une figure qui détourne forcément l'attention.

Au cours de la rédaction de ce travail, notre éminent maître, M. Mannheim, a bien voulu nous aider de quelques précieux conseils : nous le prions d'agréer à ce sujet l'expression de notre profonde reconnaissance.

Tous nos remercîments à notre camarade, M. A. Mercier, Ingénieur des Télégraphes, qui a accepté de nous aider dans la revision des épreuves.

PREMIERS PRINCIPES

DE

GÉOMÉTRIE MODERNE.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

Comme toutes les branches de la Science mathématique, la Géométrie a fait dans ce siècle des progrès considérables; l'introduction des imaginaires et l'emploi des transformations des figures en ont été les principaux facteurs.

Emploi des imaginaires.

1. L'introduction des imaginaires est une conséquence de l'application de l'Analyse à l'étude de la Géométrie, permise par l'usage des coordonnées de Descartes (1). Au moyen de la Géométrie analytique on put soumettre à un même traitement des courbes ou des surfaces jouissant de propriétés différentes; par exemple, l'équation des cercles ayant un même axe radical est la même, que ces cercles se coupent ou non; par suite, les propriétés relatives à des cercles qui passent par deux points fixes s'étendront, en général, aux cercles ayant même axe radical et ne le coupant pas; or il arrivera souvent que ces propriétés seront faciles à prouver géométriquement dans le premier cas, et que la démonstration ne pourra plus s'appliquer dans le second, bien que la propriété continue à subsister. C'est Monge qui se permit le premier de généraliser ainsi des résultats démontrés sur une figure présentant des *propriétés contingentes* spéciales, sans influence sur le résultat lui-même, mais utilisables dans sa démonstration. Ce procédé fut ensuite employé systématiquement, sous le nom de *principe de continuité,* par Poncelet, qui sut en tirer de féconds résultats dans son *Traité des propriétés projectives des figures* (paru en 1822), Ouvrage qui exerça la plus grande influence sur le développement de la Géométrie moderne.

2. Ce principe de continuité revient à introduire les imaginaires en Géométrie; comme le lecteur le verra plus tard, quand il aura abordé l'Analyse, on ne peut étudier facilement les propriétés de la plupart des fonctions d'une variable réelle qu'en étendant la définition de ces fonctions aux valeurs imaginaires de la variable; les singularités que les fonctions ainsi définies présentent dans le domaine imaginaire ont leur répercussion sur les propriétés des fonctions primitivement données dans le domaine réel; pour citer un exemple, ce n'est que par l'emploi de cette méthode qu'on parviendra à énoncer des théorèmes généraux sur la convergence des développements en série des fonctions; elle per-

(1) DESCARTES (1596-1650). Son *Application de l'Algèbre à la théorie des courbes* parut en 1637. La Géométrie analytique à trois dimensions ne se développa que plus tard, à la suite du *Traité des courbes à double courbure,* que Clairaut composa en 1731, à l'âge de 16 ans.

mettra, en général, de coordonner entre eux des résultats sans rapport apparent.

Il va en être de même en Géométrie : les imaginaires vont servir de lien entre des propriétés souvent très différentes au prime abord, qui se trouveront n'être au fond que des cas particuliers d'une même proposition, et ce n'est que grâce aux conventions de langage qu'elles permettent d'établir qu'on pourra énoncer des théorèmes présentant un haut degré de généralité.

3. L'introduction en Géométrie de ces quantités imaginaires résulte immédiatement de l'emploi des coordonnées de Descartes. Celles-ci font, en effet, correspondre à tout point de l'espace l'ensemble (x, y, z) de trois nombres réels, qu'on nomme *coordonnées* de ce point. Inversement, à tout ensemble de trois nombres réels correspond un point et un seul. On *conviendra* également de dire qu'il correspond un point à un ensemble de trois coordonnées, lors même qu'une ou plusieurs d'entre elles seront des quantités imaginaires : ce point sera alors dit un *point imaginaire*.

Ainsi un point imaginaire correspond à l'ensemble de trois quantités, dont l'une au moins est imaginaire; à l'ensemble des trois imaginaires respectivement conjuguées correspond un nouveau point : on l'appelle le point *imaginaire conjugué* du précédent; par exemple, les points $(0, i, 1-i)$ et $(0, -i, 1+i)$ sont imaginaires conjugués.

Les *plans imaginaires* se définissent d'une manière analogue : ils correspondent à des relations du premier degré, à coefficients imaginaires, entre les coordonnées x, y, z et sont le lieu des points réels ou imaginaires, dont les coordonnées satisfont à ces relations. A tout plan imaginaire correspond un plan imaginaire conjugué.

On considérera de même des surfaces algébriques d'un degré quelconque à coefficients imaginaires.

4. Pour exprimer qu'une surface passe par un point donné, on n'a qu'une relation à écrire entre les coefficients de son équation; mais, si l'on veut que ces coefficients soient réels, et si le point donné est imaginaire, cette relation équivaut à

deux relations ne renfermant plus d'imaginaires, et les surfaces, dont les coefficients satisfont à ces relations, passent, non seulement par le point imaginaire considéré, mais aussi par son imaginaire conjugué. Il en est de même des courbes représentées par deux équations algébriques à coefficients réels.

Par exemple, il ne peut passer qu'une droite réelle par un point imaginaire, car le point imaginaire conjugué achève de la déterminer. On voit d'ailleurs bien que la droite qui joint deux points imaginaires conjugués est réelle. De même, deux plans imaginaires conjugués se coupent suivant une droite réelle.

5. Toute quantité qui résulte de la donnée de plusieurs points ou de plusieurs surfaces réels est une certaine fonction des coordonnées de ces points ou des coefficients de ces surfaces; on définira la même quantité, dans le cas de points ou de surfaces imaginaires, comme étant la valeur, réelle ou imaginaire, prise par cette fonction pour les coordonnées ou les coefficients imaginaires considérés.

Soient, par exemple, a et b deux points réels de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) : on sait que les coordonnées de tout point m de la droite ab peuvent s'écrire

$$\frac{x_1 + \rho x_2}{1 + \rho}, \quad \frac{y_1 + \rho y_2}{1 + \rho}, \quad \frac{z_1 + \rho z_2}{1 + \rho},$$

la variable ρ désignant le rapport $\frac{am}{mb}$.

Si l'on considère le paramètre ρ comme une variable imaginaire, les formules précédentes représenteront les coordonnées d'un point quelconque, réel ou imaginaire, de la droite ab, que les points a et b soient eux-mêmes réels ou imaginaires. La valeur du paramètre ρ, qui correspond au point m, représente alors, *par définition*, le rapport $\frac{am}{mb}$. Pour la valeur

$$\rho = -1,$$

les coordonnées du point m deviennent infinies; on dit qu'à cette valeur de ρ correspond le *point à l'infini* de la droite ab.

6. Soient, de même, a, b et c trois points non en ligne droite, réels ou imaginaires, de coordonnées (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3); les coordonnées de tout point m du plan abc peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \frac{\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \frac{\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3}{\alpha + \beta + \gamma},$$

α, β et γ étant trois quantités, réelles ou imaginaires, qui se trouvent déterminées, pour chaque point m, à un facteur constant près, au moyen de trois équations homogènes compatibles entre elles. Ces quantités α, β et γ sont appelées les *coordonnées barycentriques* du point m par rapport au triangle abc. A tout ensemble (α, β, γ) correspond ainsi un point m du plan abc, qui reste le même, si α, β et γ varient proportionnellement. Si la somme de ces trois coordonnées est nulle, les coordonnées cartésiennes du point m deviennent infinies : on dit alors que (α, β, γ) représente un point à l'infini du plan abc.

7. Soient, enfin, a, b, c et d quatre points non situés dans un même plan, réels ou imaginaires, de coordonnées (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) et (x_4, y_4, z_4) : les coordonnées d'un point quelconque, m, de l'espace, peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}, \\ \dfrac{\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 + \delta y_4}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}, \\ \dfrac{\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 + \delta z_4}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}, \end{array} \right.$$

ces coordonnées barycentriques se trouvent déterminées à un facteur constant près, au moyen de trois équations homogènes indépendantes. A quatre coordonnées barycentriques dont la somme est nulle correspond un point à l'infini.

Étant donnés deux points m_1 et m_2 de coordonnées $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$, on voit aisément, au moyen des formules du n° 5, que les expressions

$$(2) \qquad \alpha_1 + \rho\alpha_2, \quad \beta_1 + \rho\beta_2, \quad \gamma_1 + \rho\gamma_2, \quad \delta_1 + \rho\delta_2$$

représentent les coordonnées barycentriques d'un point quelconque de la droite $m_1 m_2$, le paramètre ρ étant le même qu'au § 5, si l'on a choisi les coordonnées barycentriques des points m_1 et m_2 de manière que leurs sommes soient égales entre elles.

8. Étant donnée l'équation cartésienne d'une surface de degré m, on en déduira l'*équation barycentrique* de cette surface en substituant aux coordonnées cartésiennes les expressions (1) du paragraphe précédent : cette équation sera homogène et de degré m par rapport aux coordonnées barycentriques.

Si, maintenant, nous substituons à ces coordonnées barycentriques les expressions (2) du § 7, nous obtiendrons une équation en ρ qui nous fournira les points communs à la surface et à la droite $m_1 m_2$; comme on peut toujours supposer (à moins que la droite n'appartienne à la surface) que le point m_2 n'est pas sur la surface, cette équation sera de degré m : l'équation en ρ aura donc m racines, réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues. On a donc, grâce aux conventions des points imaginaires, l'énoncé général suivant :

Une droite quelconque coupe une surface de degré m en m points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

Un ou plusieurs de ces points peuvent d'ailleurs être à l'infini sur la droite $m_1 m_2$: il suffit que la valeur de ρ, à laquelle correspond le point à l'infini de la droite, soit une racine, simple ou multiple, de l'équation considérée. On dit, dans ce cas, que la droite $m_1 m_2$ est une direction *asymptotique* de la surface.

9. Si le point m_1 est sur la surface considérée, l'équation en ρ obtenue admet zéro pour racine; si, quel que soit le point m_2, cette racine est multiple d'ordre p, on dit que le point m_1 est, sur la surface, un *point multiple* d'ordre p. On peut, dans ce cas, disposer du point m_2 de manière à annuler

le coefficient de ρ^p : la droite $m_1 m_2$ est alors dite *tangente* en m_1 à la surface; comme, d'ailleurs, le coefficient considéré est de degré p, par rapport aux coordonnées du point m_2, on voit que ce point appartient à un cône de degré p; dans le cas d'un point simple, ce cône se réduit à un plan, qui est le *plan tangent* à la surface au point m_1.

Si le point m_1 est un point à l'infini (c'est-à-dire, par définition, tel que la somme de ses coordonnées soit nulle), le plan tangent devient un plan *asymptote* à la surface.

Des considérations analogues s'appliquent aux courbes planes.

10. En particulier, si l'on considère l'intersection d'une surface par son plan tangent en m_1, et si m_2 désigne un point de ce plan, l'équation en ρ envisagée précédemment contient ρ^2 en facteur, d'après la définition même que nous venons de donner du plan tangent; par suite, le point m_1 est un point double de la courbe d'intersection. Ainsi :

L'intersection d'une surface par un de ses plans tangents présente un point double ou multiple au point de contact.

La réciproque est immédiate.

11. En particulier, une surface du second degré coupe un de ses plans tangents suivant une courbe du second degré présentant un point double, m_1. Soit m_2 un autre point de cette courbe : l'équation en ρ, relative à la droite $m_1 m_2$, ne renfermant qu'un terme en ρ^2, et devant avoir une racine différente de zéro, est identiquement satisfaite; par suite, tous les points de la droite $m_1 m_2$ appartiennent à la courbe du second degré obtenue : on en déduit que celle-ci se compose de deux droites, réelles ou imaginaires. Ainsi :

L'intersection d'une surface du second degré par un de ses plans tangents se compose de deux droites, réelles ou imaginaires.

Si une surface du second degré admet un point double, tout plan passant par ce point la coupera suivant une courbe du second degré admettant aussi ce point pour point double, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, suivant deux droites. La surface considérée sera alors un *cône* du second degré.

En dehors de ce cas, une surface du second degré n'aura que des points simples, où elle admettra des plans tangents; par suite :

Par tout point d'une surface du second degré, il passe deux génératrices.

Soit Δ l'intersection des plans tangents à une surface du second degré en deux de ses points, m et m'; les génératrices qui passent par ces points s'obtiendront évidemment en les joignant aux deux points, a et a', où la quadrique coupe la droite Δ. On voit ainsi que les quatre génératrices issues des points m et m' se coupent deux à deux; mais les génératrices telles que ma et $m'a'$ ne se rencontrent pas. On peut donc distinguer deux *systèmes* de génératrices, tels que toute génératrice de l'un des systèmes coupe toutes celles de l'autre système, sans en rencontrer aucune du système dont elle fait partie.

On en déduit encore que :

Toute surface du second degré peut être engendrée par une droite mobile assujettie à rencontrer trois droites fixes.

12. Au moyen de la théorie de l'élimination on peut montrer que :

Trois surfaces, de degrés m, n et p, ont, en général mnp points communs, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie.

Si l'une de ces surfaces est un plan, on voit que :

Deux courbes planes, de degrés m et n, se coupent généralement en mn points.

L'intersection de deux surfaces de degrés m et n est par suite une courbe qui coupe en mn points un plan quelconque, c'est-à-dire une courbe d'*ordre* mn. En particulier, deux surfaces du second degré se coupent suivant une courbe du quatrième ordre, qu'on appelle une *biquadratique gauche*.

13. D'après la définition du plan (n° 2), les quatre coordonnées des points d'un plan sont reliées par une équation linéaire et homogène, et réciproquement. En particulier, les points à l'infini, dont les coordonnées ont une somme nulle, doivent être considérés comme appartenant à un même plan, qu'on appelle le *plan de l'infini*. C'est là un résultat purement analytique, qui provient uniquement de la définition analytique du plan.

Toutes les surfaces de mêmes directions asymptotiques coupent le plan de l'infini suivant une même courbe plane. De même, dans le plan, toutes les courbes de même directions asymptotiques passent par les mêmes points de la *droite de l'infini* de ce plan.

14. Il est essentiel de bien se rendre compte que les définitions précédentes permettent simplement d'employer le langage géométrique pour exprimer des opérations analytiques; le point n'est plus qu'une expression conventionnelle, et n'a plus qu'un sens purement analytique; il ne représente rien de géométrique, lorsqu'il est imaginaire, pas plus qu'une surface à coefficients imaginaires, le tétraèdre de référence étant supposé réel.

Mais la définition même des quantités imaginaires, considérées ainsi en Géométrie, nous permet d'exprimer en langage géométrique des opérations analytiques, qui, de cette manière, s'énoncent parfois très simplement, malgré leur complication. Nous pourrons d'ailleurs, dans nos raisonnements, nous laisser guider par les considérations géométriques, qui se présenteront naturellement à l'esprit, en supposant réalisées certaines relations *contingentes* entre les éléments à envisager. Les énoncés auxquels nous aboutirons n'auront pas, dans leur expression générale, d'interprétation géométrique; mais, dans divers cas particuliers, chacun d'eux pourra correspondre à des propriétés géométriques différentes.

Premières notions sur les transformations.

15. Comme nous l'avons dit au début, l'emploi systématique des *transformations* des figures constitue une des caractéristiques de la Géométrie moderne.

Transformer une figure, c'est en déduire, par des procédés bien déterminés, une autre figure, de sorte que certains éléments se correspondent deux à deux, et des propriétés de l'une des figures on déduit des propriétés de l'autre.

On peut diviser les transformations en deux grandes classes : les premières font se correspondre les éléments de deux courbes ou de deux surfaces : c'est, par exemple, le cas des représentations géographiques sur un plan, qui font correspondre à tout point d'une sphère un point d'un plan. Les autres transforment au contraire les éléments de tout l'espace.

16. Parmi les transformations de la première classe, la *projection stéréographique* était déjà connue de Ptolémée.

L'étude de la perspective fournit ensuite naturellement des figures en correspondance; mais Desargues et Pascal semblent être les premiers qui aient eu recours à des considérations de figures correspondantes pour découvrir des théorèmes. C'est dans le Traité des *Planiconiques* de La Hire (1673) qu'apparaît pour la première fois une méthode suffisamment générale de transformation projective, obtenue par des constructions dans le plan, et qui revient à la transformation homologique. Mais ce n'est que dans le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet que se trouvent employés systématiquement deux procédés de transformation, à savoir la *transformation homologique* et la *transformation par polaires réciproques*. Ces transformations furent bientôt généralisées par Chasles, dans son *Mémoire sur la dualité et l'homographie* (1830), où sont développées les propriétés de la transformation *homographique* et de la transformation *corrélative*. Ces deux transformations permirent à Chasles de faire une étude très complète des courbes et des surfaces du second degré.

Une autre transformation, d'une importance capitale, fut imaginée un peu plus tard (1836) par Bellavitis, et reçut de Liouville (1847) le nom de transformation *par rayons vecteurs réciproques*. Dans le plan, cette transformation n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la *transformation quadratique* dont la découverte semble due à Steiner ([1]).

Depuis, sous l'influence de Cremona, de Sophus Lie, etc., on a imaginé des transformations plus générales; nous parlerons sommairement de quelques-unes des plus simples à la fin de cet Ouvrage.

17. La transformation homographique et la transformation quadratique appartiennent au type des *transformations ponctuelles,* dans lesquelles les figures se correspondent point par point; à un lieu de points de la première figure correspond ainsi un lieu de points de la seconde.

A une courbe Γ, passant par deux points a et b d'une courbe C de la première figure, correspond donc, dans la seconde, une courbe Γ' qui passe par les points a' et b', transformés de a et b, et situés sur la courbe C', transformée de C. Si le point b tend sur C vers le point a, C et Γ deviennent, par définition, tangentes en a; b' tend alors vers a' et les courbes C' et Γ' deviennent également tangentes en a'. Ainsi, des courbes, et, par suite, des surfaces tangentes se transforment en courbes et en surfaces tangentes; autrement dit, les transformations ponctuelles sont des *transformations de contact.*

18. On peut obtenir des transformations de contact ([2]) par un procédé beaucoup plus général. Considérons d'abord, pour simplifier, le cas de figures planes.

Au lieu de faire correspondre, à tout point $m(\alpha, \beta)$ du plan, un autre point dont les coordonnées soient des fonctions déterminées de α et β, associons-lui une courbe C, dont l'équation soit de la forme

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

([1]) *Journ. de Crelle,* t. III; 1828.

([2]) C'est le grand géomètre norvégien, M. Sophus Lie, qui a montré l'importance de ces transformations.

Lorsque le point m décrit une courbe (m), la courbe C reste tangente à une enveloppe (C), qui est, par définition, le lieu des points où se coupent deux positions infiniment voisines de la courbe C. A toutes les courbes qui passent par deux points, m_1 et m_2, de la courbe (m) correspondent ainsi des enveloppes tangentes aux courbes C_1 et C_2; si le point m_2 tend sur (m) vers le point m_1, la courbe C_2 tend à se confondre avec C_1 et les points communs à C_1 et à C_2 tendent, d'après la définition même de l'enveloppe (C), vers les points où celle-ci touche C_1. Aux courbes tangentes en m_1 à (m) correspondent donc des courbes tangentes à (C) aux points de contact de C_1. La transformation en question est donc bien une transformation de contact.

19. Supposons, par exemple, que la courbe C ait pour équation

$$f(x-\alpha, y-\beta)=0,$$

autrement dit que la courbe C_1 soit amenée à coïncider avec C_2 par la translation qui transporte m_1 en m_2. Si le point m décrit une droite, il est bien évident que l'enveloppe de C se compose des tangentes parallèles à cette droite; on en déduit que, si le point m décrit une courbe quelconque (m), les points où C touche son enveloppe sont les points de contact des tangentes menées à cette courbe parallèlement à la tangente en m à (m).

20. Comme autre exemple, supposons que, ω désignant un point fixe du plan, on fasse correspondre à tout point m la perpendiculaire D menée en m à la droite ωm. Si le point m décrit une courbe (m), cette perpendiculaire enveloppe une courbe qu'on nomme l'*antipodaire* de la courbe (m); inversement, la courbe (m) est nommée la *podaire* de cette enveloppe par rapport au point ω. D'après ce qui précède, le point où la droite D touche son enveloppe ne dépend que de la tangente en m à la courbe (m); il ne changera donc pas si nous substituons à cette courbe le cercle qui la touche en m et qui passe par ω; mais, dans ce cas, l'enveloppe de D est évidemment le point a, diamétralement opposé à ω dans ce cercle.

On voit donc que le point a, où D touche l'antipodaire de (m), est tel que la normale en m à (m) passe par le milieu de ωa : on retrouve ainsi une construction bien connue de la normale à la podaire d'une courbe.

21. Dans l'espace, les transformations de contact peuvent, en outre des transformations ponctuelles, s'obtenir de deux manières : dans la première, on fait correspondre une courbe, et dans la seconde une surface, à tout point de l'espace.

Considérons d'abord le second cas : à tout point $m(\alpha, \beta, \gamma)$, on fait correspondre une surface S d'équation

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Si le point m décrit une surface $[m]$, la surface S reste généralement tangente à une surface enveloppe $[S]$ en un nombre fini de points, qui sont les points communs à trois positions infiniment voisines de S. A toutes les surfaces tangentes en m à $[m]$ correspondent ainsi des surfaces tangentes à $[S]$ aux points de contact de S.

Dans le premier cas, à tout point $m(\alpha, \beta, \gamma)$, on fait correspondre une courbe C d'équations

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Si le point m décrit une courbe (m), la courbe C engendre une surface (C); à toutes les courbes de l'espace tangentes entre elles en un point m correspondent ainsi des surfaces qui se touchent en tous les points d'une courbe C. Si, maintenant, la courbe (m) engendre une surface $[m]$, la surface (C) reste tangente à une enveloppe $[C]$, qui touche chacune des courbes C considérées en un nombre fini de points; ces points seront les mêmes pour toutes les surfaces $[m]$ tangentes entre elles en m.

22. On voit que, par une transformation de contact, à une surface ou à une courbe tangente à un plan donné en un point donné (ou encore à ce point donné lui-même), on fait correspondre, suivant les cas, une surface ou une courbe admettant des plans tangents fixes en un ou plusieurs points fixes. Il y a donc lieu d'envisager, avec Sophus Lie, l'élément géométrique constitué par l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point : on le nomme *élément de contact.*

On dira qu'un élément de contact appartient à un point, quand il sera formé de ce point et d'un plan mené par ce point; il appartiendra à une courbe ou à une surface, quand il sera formé d'un point de cette courbe ou de cette surface et d'un plan la touchant en ce point.

On voit ainsi qu'un point, une courbe ou une surface possèdent une double infinité d'éléments de contact; nous dirons que ceux-ci forment une *multiplicité.* On peut dire, dès lors, que :

Par une transformation de contact, à toutes les multiplicités qui admettent un certain élément de contact commun, correspondent des multiplicités auxquelles appartiennent un ou plusieurs éléments de contact fixes.

Dans ce qui va suivre, après avoir indiqué les notions indispensables sur les divisions homographiques et en involution, nous étudierons spécialement les transformations homographiques et corrélatives, que nous appliquerons à l'étude des coniques et des quadriques. Nous nous occuperons ensuite de la transformation par rayons vecteurs réciproques et indiquerons quelques exemples d'autres transformations.

CHAPITRE II.

DIVISIONS ET FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES.

Divisions et faisceaux homographiques.

23. Nous avons défini précédemment (5) le rapport $\frac{m_3 m_1}{m_3 m_2}$ de deux segments d'une même droite; étant donnés quatre points en ligne droite, m_1, m_2, m_3 et m_4, le rapport

$$\frac{m_3 m_1}{m_3 m_2} : \frac{m_4 m_1}{m_4 m_2}$$

est appelé le *rapport anharmonique* (¹) de ces quatre points considérés dans l'ordre $m_1 m_2 m_3 m_4$ et se représente par le symbole $(m_1 m_2 m_3 m_4)$.

(¹) Cette dénomination est due à CHASLES (*Aperçu historique*, Note IX), qui a fait du rapport anharmonique la base de son *Traité de Géométrie supérieure*. PAPPUS (IVᵉ siècle après J.-C.) (*Collections mathématiques*, Propos. 129) avait déjà considéré ce rapport et montré qu'il est projectif.

Dans le cas où ce rapport est égal à -1, on l'appelle *harmonique* et l'on dit que les points m_3 et m_4 divisent harmoniquement le segment $m_1 m_2$. Comme on a évidemment

$$(m_1 m_2 m_3 m_4) = (m_3 m_4 m_1 m_2),$$

les points m_1 et m_2 divisent aussi harmoniquement le segment $m_3 m_4$.

Étant donnés trois points en ligne droite, a, b et c, il est bien évident que la donnée du rapport $(abcm) = k$ définit la position d'un point m sur la droite abc, et, réciproquement, à tout point m de cette droite correspond une valeur de k. Quand le point m coïncide avec les points a, b ou c, k prend une valeur infinie, nulle ou égale à l'unité. Enfin le point à l'infini de la droite correspond à la valeur $\frac{ca}{cb}$ de k.

24. On dit qu'il existe une *relation homographique* entre deux variables, réelles ou complexes, k et k', quand celles-ci sont liées *algébriquement*, de sorte qu'à toute valeur de l'une corresponde une valeur *unique* de l'autre. Cette relation algébrique doit donc contenir k et k' au premier degré, c'est-à-dire être de la forme

$$akk' + bk + ck' + d = 0,$$

les coefficients étant réels ou imaginaires. Trois seulement de ces coefficients sont distincts : une relation homographique se trouve donc déterminée par la donnée de trois couples de valeurs correspondantes de k et de k'.

Si k et k' définissent, comme nous venons de l'indiquer (23), sur deux droites D et D′ les positions de deux points m et m', on dit que ces points déterminent sur les *bases* D et D′ deux *divisions homographiques*, et les points m et m' sont dits *homologues*.

25. Cela posé, soient a, b, c trois points quelconques de la droite D, a', b', c' trois points quelconques de la droite D′; enfin m et m' deux points variables sur ces droites, tels que les rapports anharmoniques $(abcm)$ et $(a'b'c'm')$ soient égaux. La relation entre ces rapports étant homographique, les points m et m' forment deux divisions homographiques, dans lesquelles se correspondent les points a et a', b et b', c et c', ces couples de points homologues étant obtenus (n° 23) lorsque les deux rapports anharmoniques considérés deviennent infinis, nuls ou égaux à l'unité. La correspondance homographique (m, m') est donc celle qui se trouve définie (n° 24) par la donnée des trois couples aa', bb' et cc' de points homologues, et l'on a ce théorème :

Dans deux divisions homographiques, deux groupes homologues de quatre points ont même rapport anharmonique.

26. Le point à l'infini de D, qui correspond (n° 23) à la valeur $\frac{ca}{cb}$ du rapport $(abcm)$, a, en général, pour homologue un point à distance finie sur D′, à moins que l'on n'ait

$$\frac{c'a'}{c'b'} = \frac{ca}{cb}.$$

On voit donc que *deux divisions homographiques où les points à l'infini se correspondent sont des divisions semblables.*

27. On obtient un exemple très simple de divisions homographiques de la manière suivante : Étant données trois droites, D, D′ et Δ, faisons se correspondre sur D et D′ les points m et m' où ces droites rencontrent un plan variable issu de Δ. A tout point m ne correspond qu'un point m' et réciproquement : les points m et m' déterminent donc sur D et D′ deux divisions homographiques.

On voit ainsi (n° 25) que le rapport anharmonique des quatre points où la droite D rencontre quatre plans menés par Δ est égal à celui des quatre points où ces plans coupent une autre droite quelconque, D′; autrement dit :

Le rapport anharmonique des quatre points où quatre plans issus d'une même droite rencontrent une transversale quelconque est constant.

On appelle ce rapport anharmonique le *rapport anhar-*

monique des quatre plans : il n'est d'ailleurs bien défini que si l'on considère les quatre plans dans un ordre bien déterminé. C'est aussi le rapport anharmonique des quatre droites concourantes suivant lesquelles ces quatre plans coupent un plan quelconque.

28. Si D, D' et Δ sont trois génératrices d'un même système d'une surface du second degré, les droites mm', qui rencontrent ces trois droites, engendreront cette surface. On voit ainsi que :

Le rapport anharmonique des quatre points où quatre génératrices d'un même système rencontrent une génératrice quelconque de l'autre système est constant (1).

Le plan $mm'\Delta$ est d'ailleurs tangent à la surface considérée au point μ où mm' coupe Δ; à tout point μ de Δ correspond ainsi un plan tangent passant par Δ; le rapport anharmonique de quatre points μ étant, d'après le théorème précédent, égal à celui des quatre points m correspondants, on voit ainsi que :

Le rapport anharmonique de quatre plans tangents menés par une même génératrice est égal à celui des quatre points de contact.

29. Supposons maintenant que les droites D et D' soient dans un même plan : la droite mm' passe alors par un point fixe, celui où ce plan coupe la droite Δ. Il faut remarquer que, dans ce cas, le point commun aux deux bases coïncide avec son propre homologue.

Réciproquement, considérons deux divisions homographiques, dont les bases D et D' concourent en un point a, qui est à lui-même son homologue. Soient b, b' et c, c' deux autres couples de points homologues, et soit ω le point où se coupent les droites bb' et cc'. Les points m et m' où une transversale menée par ω coupe D et D' forment sur ces droites deux divisions homographiques, où se correspondent

(1) CHASLES, *Aperçu historique*, Note IX.

b et b', c et c', a coïncidant avec son homologue : ce sont donc les deux divisions considérées.

On en déduit que :

Lorsque deux points homologues de deux divisions homographiques coïncident, la droite qui joint deux points homologues quelconques passe par un point fixe.

De cette propriété résulte immédiatement que :

Étant données trois divisions homographiques portées par des bases concourant en un même point, avec lequel coïncident trois points homologues, le plan déterminé par trois points homologues quelconques passe par une droite fixe.

30. Au lieu de faire se correspondre homographiquement les points de deux droites, on peut considérer aussi des correspondances homographiques entre les plans menés par deux droites. A tout plan mené par une droite Δ, correspondra un seul plan mené par une droite Δ', et réciproquement : on obtiendra alors ce qu'on appelle deux *faisceaux homographiques* de plans.

L'étude des faisceaux homographiques se ramène à celle des divisions homographiques : considérons, en effet, deux droites quelconques D et D'; soient m un point de D, et m' le point où D' coupe le plan homologue du plan Δm, mené par Δ'; ces points m et m' se correspondent homographiquement sur D et D'.

Les faisceaux homographiques présentent donc des propriétés analogues à celles des divisions homographiques. On voit, par exemple, que :

Le rapport anharmonique de quatre plans d'un faisceau est égal à celui des quatre plans homologues dans un faisceau homographique.

31. Les traces sur deux plans, distincts ou confondus, de deux faisceaux homographiques de plans, déterminent deux faisceaux homographiques de droites.

Soient, dans un plan, Δ une droite, et a et a' deux points quelconques; m désignant un point quelconque de Δ, les droites am et $a'm$ engendrent deux faisceaux homographiques ; car à toute droite menée par l'un des points a ou a' n'en correspond qu'une menée par l'autre. D'ailleurs, la droite aa' se correspond évidemment à elle-même.

Réciproquement, *si, dans deux faisceaux homographiques de droites, situées dans un même plan, deux rayons homologues coïncident, les points d'intersection des autres rayons homologues sont en ligne droite.*

On démontrera ce théorème d'une manière analogue à celui du n° 29; ce sera, pour les lecteurs novices, un exercice utile et d'ailleurs facile.

De ce théorème, on déduit immédiatement que :

Lorsque deux plans homologues de deux faisceaux homographiques coïncident, la droite commune à deux plans homologues quelconques décrit un plan, qui passe par le point commun aux deux arêtes.

Par suite :

Étant donnés trois faisceaux homographiques de plans, dont les arêtes sont dans un même plan, avec lequel coïncident trois plans homologues, le point d'intersection de trois plans homologues quelconques décrit une droite.

32. Deux divisions homographiques peuvent avoir la même base; soient, dans ce cas, m et m' deux points homologues, et ρ et ρ' les paramètres qui définissent leur position sur la droite : ρ et ρ' sont liés par une relation homographique, si l'on y fait $\rho' = \rho$, on obtient une équation du second degré dont chaque racine fournit un point m coïncidant avec son homologue. Ainsi :

Dans deux divisions homographiques de même base, il existe deux points qui coïncident avec leurs homologues.

On les nomme *points doubles* de l'homographie considérée.

Soient donc a et b les points doubles d'une homographie, c et c', m et m' deux couples de points homologues; on a (n° 25) :

$$(abcm) = (abc'm'),$$

d'où l'on déduit

$$(abmm') = (abcc').$$

Ainsi, *le rapport anharmonique* $(abmm')$ *est constant.*

33. Étant données deux surfaces du second degré Q et Q′, admettant une génératrice commune Δ, tout plan mené par cette droite touche respectivement Q et Q′ en deux points m et m', tels que l'un d'eux étant donné l'autre se trouve déterminé : ces points forment donc sur Δ deux divisions homographiques. Leurs points doubles correspondront à deux plans qui toucheront chacun Q et Q′ au même point. Ainsi :

Lorsque deux surfaces du second degré ont une génératrice commune, elles se touchent en deux points de cette droite.

34. Aux propriétés des divisions homographiques de même base, en correspondent d'analogues des faisceaux homographiques de même arête et on les démontre de même.

Ainsi, deux faisceaux homographiques de droites, qui ont le même sommet et sont dans un même plan, possèdent deux *rayons doubles,* réels ou imaginaires.

Considérons, par exemple, un angle réel de grandeur donnée, qui tourne dans son plan autour de son sommet; ses deux côtés sont homologues dans deux faisceaux homographiques de même sommet, car, l'un étant donné, l'autre s'en déduit. Ces faisceaux ont deux rayons doubles, qui sont donc tels, d'après leur définition même, que chacun d'eux fasse avec lui-même un angle égal à l'angle donné. Or, soient m et m' les coefficients angulaires de deux rayons homologues, par rapport à deux axes rectangulaires menés par le sommet des faisceaux : ils sont liés par la relation

$$m - m' = (1 + mm')k,$$

k désignant la tangente trigonométrique de l'angle donné. Les coefficients angulaires des rayons doubles sont donc les racines de l'équation

$$1 + m^2 = 0.$$

Ces rayons sont donc indépendants de la grandeur de l'angle donné; on les appelle *droites isotropes*, et leurs points à l'infini sont appelés les *ombilics* ou les *points cycliques* du plan; ce sont, comme on voit, deux points imaginaires conjugués.

D'après ce qui précède (nº 32) le rapport anharmonique de deux droites isotropes et de deux droites réelles faisant un angle donné ne dépend que de la grandeur de cet angle; on le vérifie aisément, car ce rapport anharmonique a évidemment pour valeur

$$\frac{m-i}{m+i} : \frac{m'-i}{m'+i},$$

ou, en posant

$$m = \operatorname{tang}\omega, \qquad m' = \operatorname{tang}\omega',$$

$$\frac{\sin\omega - i\cos\omega}{\sin\omega + i\cos\omega} \, \frac{\sin\omega' + i\cos\omega'}{\sin\omega' - i\cos\omega'} = e^{2iV},$$

en désignant par V l'angle considéré.

Cette propriété, indiquée pour la première fois par Laguerre ([1]), permet de définir l'angle de deux droites quelconques, dont le plan est réel ou imaginaire. En effet, puisque sur toute droite réelle du plan de l'infini se trouvent deux points cycliques, le lieu de ceux-ci est une courbe du second degré, qu'on désigne sous le nom d'*ombilicale* ou de *cercle de l'infini*. Un plan imaginaire quelconque coupe cette courbe en deux points, qui sont les points cycliques de ce plan, et qui en définissent les droites isotropes. Enfin l'angle de deux droites d'un plan se déduit de la valeur du rapport anharmonique de ces droites et des droites isotropes de leur plan.

Involution.

35. D'après la définition même des divisions homographiques, deux divisions homographiques à une troisième sont homographiques entre elles. Soient en particulier deux divisions homographiques (1) et (2), de même base, ayant pour points doubles a et b. Soit m' le point homologue dans (2) d'un point quelconque m de (1), et soit m'' le point qui correspond dans (2) au point m' considéré comme un point de la

([1]) Laguerre, *Note sur la théorie des foyers* (*Nouv. Ann. de Math.*, 1853).

division (1) : les points m et m'' déterminent, d'après la remarque précédente, deux divisions homographiques, dont a et b sont évidemment les points doubles. En général, le point m'' ne coïncide pas avec m; mais, si m et m'' se confondent pour une position de m autre que a et b, il en sera ainsi quel que soit m, car m et m'' engendrent alors deux divisions homographiques ayant trois points doubles, et, par suite (n° 24), confondues.

On dit, dans ce cas, que les divisions (1) et (2) forment une *involution* [1]; les points m et m' sont alors *réciproques*.

D'après cette définition, *une involution est déterminée par deux couples de points homologues,* car une involution qui admet pour couples de points homologues m, m' et n, n' coïncide avec l'homographie telle que les points m, m' et n aient pour homologues les points m', m et n', qui se trouve bien déterminée par ces conditions (n° 24).

Si m et m' sont deux points homologues d'une involution de points doubles a et b, on aura (n° 32)

$$(abmm') = (abm'm)$$

ou

$$(abmm') = -1.$$

Donc (n° 23) :

Deux points homologues dans une involution sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles.

On en déduit que le point à l'infini a pour homologue le milieu O du segment limité par les points doubles; en désignant par ∞ le point à l'infini, on a donc

$$(maO\infty) = (m'a\infty O)$$

ou

$$\frac{Om}{Oa} = \frac{Oa}{Om'}$$

qu'on peut écrire

$$Om.Om' = \overline{Oa}^2.$$

---

(1) La théorie de l'*involution* est due à CHASLES (*Aperçu historique,* Note X).

36. Aux propriétés des divisions en involution correspondent des propriétés des faisceaux de plans ou de droites en involution. Par exemple :

Deux rayons homologues d'une involution de droites sont conjugués harmoniques par rapport aux rayons doubles.

Les côtés d'un angle droit qui pivote autour de son sommet engendrent deux faisceaux en involution; car ces côtés, qui se correspondent homographiquement (nº 34), sont évidemment réciproques. Les rayons doubles de cette involution sont encore les droites isotropes issues du sommet de l'angle droit. Par suite :

Deux droites rectangulaires sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes de leur plan, issues de leur point commun.

Autrement dit :

Les points à l'infini de deux droites rectangulaires sont conjugués harmoniques par rapport aux points cycliques.

37. Les côtés d'un angle qui admet des bissectrices données engendrent aussi deux faisceaux en involution, dont les rayons doubles sont évidemment les deux bissectrices données. Réciproquement, lorsque les rayons doubles d'une involution sont rectangulaires, ils sont les bissectrices de l'angle formé par deux rayons homologues quelconques. Les droites isotropes issues du sommet des faisceaux sont homologues dans cette involution, puisqu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux rayons doubles rectangulaires. On voit ainsi que :

Lorsque les droites isotropes sont homologues dans une involution de droites, deux rayons homologues quelconques sont également inclinés sur deux droites rectangulaires fixes.

38. On obtient une involution de droites de la manière suivante :

Soient

a un point d'une courbe du second degré C;

ω un point quelconque du plan;
enfin m et m' les points où C rencontre une sécante quelconque issue de ω.

A toute droite am ne correspond évidemment qu'une droite am' (en supposant que C ne se compose pas de deux droites), et ces droites sont réciproques; par suite, elles forment une involution. Celle-ci admet deux rayons doubles, $a\alpha$ et $a\beta$, qui coupent C en α et en β, et les droites $\omega\alpha$ et $\omega\beta$ sont évidemment tangentes en ces points à C; ce sont d'ailleurs les seules tangentes à C issues de ω, car une involution n'admet que deux rayons doubles. Ainsi :

Une courbe du second degré est aussi de la seconde classe (¹).

39. Toute involution de droites peut être obtenue comme la précédente; autrement dit :

La corde interceptée sur une courbe du second degré, C, *par deux rayons homologues d'une involution de droites issues d'un point* a *de* C, *passe par un point fixe.*

Soit, en effet, ω le point d'intersection de deux positions mm' et nn' de la corde considérée; les droites qui joignent a aux points où C rencontre une sécante quelconque issue de ω, forment, d'après ce qui précède, une involution, qui coïncide avec l'involution considérée, puisqu'elle a en commun avec elle les deux couples de rayons homologues am, am' et an, an'. Le point ω se trouve évidemment sur le rayon homologue de la tangente en a à C.

En particulier, si l'involution considérée est formée de droites rectangulaires, la corde interceptée passe par un point fixe de la normale en a, théorème dû à Frégier (²).

Supposons que, dans ce dernier cas, la conique C ait ses asymptotes rectangulaires : la droite de l'infini étant alors une

---

(¹) D'après une dénomination due à Gergonne, la *classe* d'une courbe représente le nombre des tangentes menées d'un point à cette courbe. Celle d'une surface est de même le nombre des plans tangents menés à cette surface par une droite.

(²) *Annales de Mathématiques*, 1816.

des positions de la corde interceptée par les côtés d'un angle droit de sommet a, le point de Frégier est le point à l'infini de la normale en a; autrement dit, la corde interceptée reste constamment parallèle à cette normale. On en déduit que :

Les cercles admettant pour diamètres les cordes d'une hyperbole équilatère parallèles à une même direction, passent par les points de l'hyperbole où les normales ont cette direction [1].

40. Du premier théorème du paragraphe précédent on déduit que deux involutions de même sommet ont en commun un couple de rayons homologues, qu'on obtient en joignant le sommet a des faisceaux aux points où la conique C considérée coupe la droite $\omega\omega'$, ω et ω' désignant les deux points fixes qui correspondent aux deux involutions.

En particulier, il existe toujours dans une involution un couple de rayons homologues rectangulaires, qui sont les bissectrices de l'angle formé par les rayons doubles.

Génération des courbes et des surfaces du second degré.

41. Nous avons étudié précédemment (n° 31) le lieu des points communs aux rayons homologues de deux faisceaux homographiques situés dans un même plan, et dont deux rayons homologues coïncident. Si cette dernière condition n'est plus remplie, le lieu en question devient une courbe du second degré.

Soient, en effet, μ et μ' les points où deux rayons homologues des deux faisceaux coupent une droite quelconque, Δ, de leur plan : ils déterminent deux divisions homographiques de même base. Le point m, commun aux deux rayons homologues, ne peut donc se trouver sur Δ que si μ et μ' coïncident tous deux avec un des points doubles de ces deux divisions. La courbe (m) coupe donc Δ en deux points; ainsi :

Le lieu des points communs aux rayons homologues de deux

---

[1] Cette remarque permettait de résoudre aisément le problème proposé en 1892 au concours d'admission à l'École Polytechnique.

faisceaux homographiques d'un même plan est une courbe du second degré (¹).

Cette courbe passe évidemment par les sommets a et a' de ces faisceaux, car au rayon aa' du faisceau de sommet a correspond un rayon $a't'$ issu de a', et ces deux rayons homologues se coupent en a'. Comme la droite $a't'$ est d'ailleurs la position vers laquelle tend le rayon $a'm$, quand le rayon am tend vers aa', cette droite est tangente en a' à la courbe (m).

Réciproquement, a et a' étant deux points quelconques d'une courbe du second degré, et m un point variable sur cette courbe, les rayons am et $a'm$ engendrent deux faisceaux homographiques; en effet, l'un de ces rayons étant donné, l'autre se trouve bien déterminé. Si donc on connaît, outre a et a', trois points quelconques de la courbe du second degré, celle-ci se trouvera déterminée, puisque l'on connaîtra trois couples de rayons homologues dans les deux faisceaux. On voit ainsi que :

Cinq points déterminent en général une courbe du second degré.

42. Ainsi m_1, m_2, m_3 et m_4 désignant quatre points d'une courbe du second degré, et a et a' deux autres points quelconques de cette courbe, les rayons $a'm_1$, $a'm_2$, $a'm_3$ et $a'm_4$ correspondent homographiquement aux rayons am_1, am_2, am_3 et am_4; on a donc :

$$a'(m_1 m_2 m_3 m_4) = a(m_1 m_2 m_3 m_4).$$

Autrement dit :

Le rapport anharmonique des quatre droites, qui joignent à quatre points fixes d'une courbe du second degré un point variable de cette courbe, est constant.

On peut donc l'appeler le rapport anharmonique des quatre points fixes sur la courbe du second degré.

Supposons que m_3 et m_4 soient les points cycliques; de la

(¹) CHASLES, *Aperçu historique*, Note XV.

constance du rapport anharmonique $a(m_1 m_2 m_3 m_4)$ résulte alors (nº **34**) l'invariabilité de l'angle $m_1 a m_2$; nous voyons donc que :

Lorsqu'une courbe du second degré passe par les points cycliques, les droites qui joignent deux points fixes de cette courbe à un point qui la décrit font entre elles un angle fixe.

C'est une propriété qui appartient, comme on sait, aux cercles étudiés en Géométrie élémentaire, et peut servir à les définir. Nous désignerons donc sous le nom de *cercle* toute courbe du second degré passant par les points cycliques.

43. Si, au lieu de considérer dans un plan deux faisceaux homographiques de droites, on considère dans l'espace deux faisceaux homographiques de plans, la démonstration du nº **41** permet de voir que la surface engendrée par la droite commune aux plans homologues de ces faisceaux rencontre généralement en deux points une droite quelconque de l'espace. Par suite :

La droite commune aux plans homologues de deux faisceaux homographiques engendre en général une surface du second degré.

Si D et D' désignent deux droites quelconques, et m un point variable sur une troisième droite Δ, les plans Dm et D'm se correspondent évidemment homographiquement. La surface engendrée par leur droite commune contient évidemment les trois droites D, D' et Δ. On obtient donc le théorème suivant, qui complète les résultats trouvés précédemment (nº **11**) :

Il existe généralement une surface du second degré contenant trois droites données arbitrairement.

44. On désigne sous le nom de *cubique gauche* [1] une

---

[1] Les cubiques gauches sont étudiées par CHASLES dans la Note XXXIII de l'*Aperçu historique*, et dans les *Comptes rendus* en 1857.

courbe algébrique qui coupe en trois points un plan quelconque.

De cette définition résulte immédiatement que si deux surfaces du second degré ont une génératrice commune, le reste de leur intersection est une cubique gauche, puisque (n° 12) il existe dans un plan quelconque quatre points communs $(2 \times 2) = 4$ aux deux quadriques, dont l'un appartient à la génératrice commune.

Tout plan, P, passant par cette génératrice commune, D coupe chacune des deux quadriques suivant une autre droite; le point commun aux deux droites ainsi obtenues est le seul point du plan P, commun aux deux quadriques et extérieur à la droite D : celle-ci est donc nécessairement une corde de la cubique. Elle la rencontre aux deux points où les quadriques se touchent (n° 33).

Soient a, b, c trois points fixes d'une cubique gauche, et m un point variable sur cette courbe. Les trois plans déterminés par le point m et les côtés du triangle abc engendrent trois faisceaux homographiques, car à tout plan de l'un des faisceaux n'en correspond évidemment qu'un dans chacun des deux autres. Si l'on connaît trois positions du point m ces trois faisceaux homographiques se trouveront déterminés, puisque l'on aura trois plans homologues dans chacun d'eux; par suite :

Une cubique gauche est déterminée par six points.

Réciproquement :

Le point commun aux plans homologues de trois faisceaux homographiques de plans décrit une cubique gauche.

Soient, en effet, A, B, C les arêtes des trois faisceaux considérés; le lieu cherché appartient à la surface du second degré engendrée (n° 43) par l'intersection des plans homologues des faisceaux A et B, ainsi qu'à celle qui correspond aux faisceaux A et C. Ces deux surfaces ayant en commun l'arête A, le reste de leur intersection est une cubique gauche, ce qui démontre le théorème. Il y a exception si, les arêtes A, B et C étant dans un même plan, ce plan coïncide avec trois plans homologues : le point commun à trois plans homologues quelconques décrit alors (n° 31) une droite; il peut encore décrire une conique, dans le cas particulier où, dans deux des faisceaux envisagés, deux plans homologues coïncident.

On peut remarquer qu'il existe une surface du second degré contenant une cubique gauche et deux quelconques de ses cordes : elle se trouve engendrée par l'intersection des plans déterminés par ces cordes et par un point variable sur la cubique.

Une cubique gauche coupe généralement en six points une surface du second degré arbitraire.

Soit, en effet, A une corde quelconque d'une cubique gauche Γ; il existe plusieurs quadriques contenant à la fois cette corde et la cubique : considérons-en deux. Elles admettent (n° 12) huit points en commun avec une quadrique quelconque, Q. Deux de ces points sont évidemment ceux où la droite A coupe la quadrique Q, et les six autres sont communs à cette quadrique et à Γ.

On en déduit que, *si trois quadriques ont une génératrice commune* A, *elles n'ont en général que quatre points communs en dehors de cette droite;* car la cubique commune aux deux premières coupe la troisième en six points dont deux sont sur la droite A.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES ET CORRÉLATIVES.

Transformations homographiques.

45. Dans le Chapitre précédent, nous avons considéré des figures formées de points en ligne droite, ou de plans menés par une même droite, et se correspondant point par point, ou plan par plan. Nous allons étudier maintenant une correspondance ponctuelle de deux figures quelconques de l'espace, telle que ces figures se correspondent à la fois *point par point et plan par plan,* de telle sorte qu'à tout point ou à tout plan de l'une ne corresponde qu'un point ou qu'un plan de l'autre : on dit alors que ces figures se correspondent *homographiquement :* c'est, par exemple, le cas de deux figures semblables.

D'après cette définition, à la droite commune à deux plans de l'une des figures correspond la droite commune aux deux plans homologues de l'autre; ainsi, *à une droite correspond une droite.*

A tout point m d'une droite D de la première figure, correspond un point m' de la droite homologue D' de la seconde figure, et réciproquement : les points m et m' forment donc sur D et D' deux divisions homographiques. On en déduit immédiatement (n° 25) que :

Étant données deux figures homographiques, le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite de l'une des figures est égal à celui des quatre points homologues de l'autre.

Pour une raison analogue, une transformation homographique n'altère pas le rapport anharmonique de quatre plans d'un faisceau.

46. Soit S une surface de degré m, dans la première figure : une droite D la coupe (n° 8) en m points; ceux-ci ont pour homologues m points de la droite D', qui sont les points communs à cette droite et à la surface S' : cette dernière est donc, comme S, de degré m. Par suite :

Une transformation homographique n'altère pas le degré d'une surface.

On verrait, de même, qu'elle n'en altère pas la *classe,* c'est-à-dire le nombre des plans tangents qu'on peut lui mener par une droite arbitraire.

47. De la définition même de la transformation homographique résulte évidemment que deux transformées homographiques d'une même figure se correspondent homographiquement; autrement dit, deux transformations homographiques successives reviennent à une seule.

Quand un ensemble de transformations est tel que deux transformations quelconques de cet ensemble, appliquées successivement, peuvent être remplacées par une seule transformation appartenant à cet ensemble, on dit que ces transformations forment un *groupe.* On voit donc que :

Les transformations homographiques forment un groupe.

48. Ces propriétés fondamentales établies, nous commencerons par étudier la correspondance homographique de deux

figures planes : elles se correspondront point par point et droite par droite.

Dans le plan P de la première figure, soient a, b, c et d quatre points quelconques, réels ou imaginaires, tels que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite : il en sera de même de leurs homologues a', b', c', d' dans le plan de la seconde figure. Aux six droites qui joignent deux à deux les quatre points a, b, c, d correspondent les droites qui joignent les points homologues. A toute droite am, menée par a, correspond la droite $a'm'$, telle (n° 45) que les rapports anharmoniques $a(bcdm)$ et $a'(b'c'd'm')$ soient égaux; on détermine de même la droite $b'm'$ homologue d'une droite quelconque bm, passant par b. On peut donc obtenir ainsi l'homologue m' de tout point m de la première figure; par suite, la donnée des quatre points a, b, c, d et de leurs homologues suffit pour déterminer la correspondance homographique des deux figures planes considérées.

Voyons maintenant si ces quatre couples peuvent être choisis arbitrairement; en les prenant ainsi, nous pouvons déjà faire correspondre à tout point m de l'une des figures un seul point de l'autre, au moyen de la construction précédente : nous allons voir que si le point m décrit une droite, il en est alors de même du point m'; il en résultera que la correspondance ponctuelle (m, m') est bien homographique.

En effet, si le point m décrit une droite, les rayons am et bm décrivent deux faisceaux homographiques, dont deux rayons homologues coïncident; il en est, par suite, de même des rayons $a'm'$ et $b'm'$, et il en résulte (n° 31) que le point m' décrit aussi une droite. On en conclut que :

On peut transformer homographiquement une figure plane de sorte que quatre points quelconques, dont trois ne sont pas en ligne droite, aient pour homologues quatre points quelconques, assujettis à la même condition, et cela, d'une seule manière.

A deux droites parallèles, menées par a et b, correspondent en général deux droites concourantes issues de a' et b' : leur point commun est l'homologue du point à l'infini dans la direction de ces parallèles. Les points à l'infini d'un plan étant, d'après leur définition même (n° 13), sur une même droite, on voit que :

Les homologues de tous les points à l'infini sont en ligne droite.

49. Deux figures *en perspective* offrent un exemple très simple de correspondance homographique. A tout point m d'un plan P, on fait correspondre le point m' d'un plan P', tel que la droite mm' passe par un point fixe ω de l'espace. La droite à l'infini du plan P a évidemment pour homologue l'intersection du plan P' avec le plan mené par ω parallèlement au plan P.

Dans une telle transformation, tout point commun aux plans P et P' coïncide évidemment avec son homologue. Réciproquement, *deux figures qui se correspondent homographiquement dans deux plans* P *et* P', *de sorte que tout point de l'intersection* D *de ces plans coïncide avec son homologue, sont perspectives l'une de l'autre.*

Soient, en effet, a et b deux points du plan P, a' et b' leurs homologues : les droites ab et $a'b'$, étant homologues, doivent couper D au même point; par suite, les droites aa' et bb' sont dans un même plan et se coupent en un point ω. Soient α et β deux points quelconques de la droite D : d'après le n° 48, toute transformation homographique telle que les points α, β, a et b du plan P aient pour homologues les points α, β, a' et b' du plan P', coïncide avec la transformation considérée : or il en est ainsi de la transformation homographique (m, m') telle que la droite mm' passe par ω. Les deux figures considérées sont donc en perspective du *point de vue* ω.

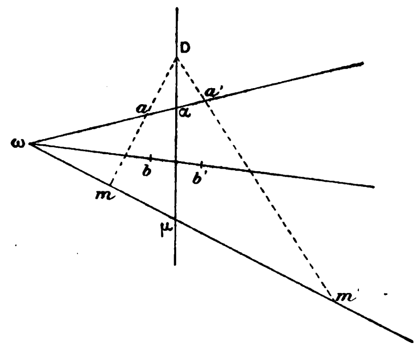
50. En rabattant le plan P' sur le plan P autour de l'intersection D, on obtient dans le même plan P deux figures homographiques telles que tous les points d'une certaine droite D coïncident avec leurs homologues. Ce cas particulier de l'homographie s'appelle l'*homologie* (¹); la droite D est

(¹) Cette dénomination est due à Poncelet (*Traité des propriétés projectives*), qui a donné le premier la théorie des figures homologiques. Celles-ci avaient pourtant été employées déjà par La Hire (*Planiconiques*; 1673) et par Le Poivre (de Mons) (1704).

appelée l'*axe d'homologie :* on voit que *deux droites homologues se coupent sur l'axe d'homologie.*

Soient a et a' deux points homologues de deux figures homologiques, et α le point où aa' coupe l'axe d'homologie D.

Fig. 1.



L'homologue de la droite $a\alpha$ est la droite $a'\alpha$ (puisque α coïncide avec son homologue), c'est-à-dire la même droite. Ainsi, la droite qui joint deux points homologues coïncide avec son homologue. Il en résulte que le point ω, commun à deux de ces droites, aa' et bb', coïncide également avec son homologue. Soit maintenant m un point quelconque de la première figure et μ le point où ωm coupe D : la droite $\omega m \mu$, dont deux points, ω et μ, coïncident avec leurs homologues, se confond aussi avec son homologue, et contient donc le point m'. Ainsi *les droites qui joignent deux points homologues passent par le point* ω ; ce point est appelé le *centre d'homologie.*

On démontrerait d'une manière absolument analogue que deux figures homographiques d'un même plan, telles que les droites joignant deux points homologues passent par un point fixe, jouissent aussi de cette propriété que les droites homologues se coupent sur une droite fixe.

Dans certains cas, le centre d'homologie peut se trouver sur l'axe d'homologie.

Quand l'axe d'homologie est la droite de l'infini, toutes les droites homologues sont parallèles : ce cas particulier de l'homologie est l'*homothétie.*

51. D'après le théorème fondamental du n° 48, lorsque deux figures homographiques sont dans un même plan, il ne peut exister quatre points non en ligne droite coïncidant avec leurs homologues, à moins que les deux figures ne coïncident. Dans le cas particulier où trois points en ligne droite coïncident avec leurs homologues, il en est de même de tous les points de la droite qui passent par ces points : cela résulte immédiatement de ce que deux divisions homographiques dont trois points coïncident avec leurs homologues sont confondues; on se trouve alors dans le cas des figures homologiques; et, en dehors de l'axe d'homologie, le centre d'homologie jouit aussi de la propriété de coïncider avec son homologue.

Dans le cas général de deux figures homographiques situées dans un même plan, *il existe seulement trois points qui coïncident avec leurs homologues.* Soient, en effet, a et a', b et b' deux couples de points homologues. Les droites homologues issues de a et a' se coupent (n° 41) sur une certaine conique A, qui passe par le point de rencontre ω des droites homologues ab et $a'b'$; de même les droites homologues issues de b et b' se coupent sur une autre conique B, qui passe aussi par le point ω. Ces coniques A et B se coupent en trois points, outre le point ω, et il est bien évident que ces points coïncident avec leurs homologues. On les appelle les *trois points doubles* des figures homographiques considérées; les droites qui les joignent deux à deux forment de même *trois droites doubles.*

L'homographie se trouvera déterminée par la donnée des trois points doubles α, β, γ et d'un couple de points homologues m et m'. Étant donné un point n, on déterminera son homologue n' en remarquant que le rapport anharmonique $\alpha(\beta\gamma nn')$ est égal au rapport $\alpha(\beta\gamma mm')$, par exemple.

Si les points β et γ sont les points cycliques, on voit (n° 34) que les angles $n\alpha n'$ et $m\alpha m'$ sont égaux. Ainsi toute droite passant par α a pour homologue une autre droite issue de α et faisant avec elle un angle fixe. Par une rotation d'un certain angle autour de α, on peut donc faire coïncider les droites homologues issues de ce point; les deux figures sont alors amenées à être homologiques, et l'axe d'homologie est, comme on le voit aisément, la droite de l'infini, de sorte que les figures sont devenues homothétiques; ainsi, *si les points cycliques sont deux des points doubles d'une homographie, celle-ci est une similitude.* Le troisième point double est le *centre de similitude.*

52. Passons maintenant à l'étude des figures homographiques dans l'espace. Étant données deux de ces figures, soient a, b, c, d, e cinq points de la première, tels que quatre d'entre eux ne soient pas dans un même plan; il en sera de même de leurs homologues a', b', c', d', e' dans la seconde figure. Aux dix plans déterminés par les cinq premiers points, pris trois à trois, correspondent les plans déterminés par les points homologues. A tout plan abm, mené par ab, correspond le plan $a'b'm'$, mené par $a'b'$, et tel que les rapports anharmoniques $ab(cdem)$ et $a'b'(c'd'e'm')$ soient égaux. On détermine de même les plans $b'c'm'$ et $c'a'm'$, homologues de plans quelconques bcm et cam, menés par les droites bc et ca. On peut donc, finalement, obtenir l'homologue m' de tout point m de la première figure. On voit, par suite, que la donnée des cinq points a, b, c, d, e et de leurs homologues suffit à déterminer la correspondance homographique des deux figures considérées.

Nous allons montrer maintenant que ces cinq couples de points homologues peuvent être choisis arbitrairement. En les prenant arbitraires, nous pouvons déjà, au moyen de la construction précédente, faire correspondre à tout point m de l'une des figures un point m' de l'autre; nous allons voir que, si le point m décrit une droite, il en est de même du point m' : il en résultera évidemment qu'à des droites concourantes correspondront des droites concourantes, et que, par suite, à un plan correspondra un plan.

Or, si le point m décrit une droite, les plans abm, bcm et cam décrivent trois faisceaux homographiques, dont trois plans homologues coïncident; il en est, par suite, de même des plans $a'b'm'$, $b'c'm'$ et $c'a'm'$, et il en résulte (n° 31) que le point m' décrit aussi une droite. Nous voyons donc que si le point m décrit un plan (qui peut être le plan de l'infini), il en est de même du point m' : la correspondance (m, m') est donc bien homographique; on en conclut que :

On peut transformer homographiquement une figure quelconque de l'espace, de sorte que cinq points quelconques, réels ou imaginaires, dont quatre ne sont pas dans un même plan, aient pour homologues cinq points arbitraires, assujettis à la même condition, et cela d'une seule manière.

Au plan de l'infini d'une des figures correspond, en général, un plan à distance finie dans l'autre.

53. Si deux figures homographiques sont telles que tous les points d'un certain plan P coïncident avec leurs homologues, on dit que ces figures sont *homologiques.* Soient a et b deux points de la première figure, a' et b' leurs homologues, et soit Δ l'intersection du plan P avec le plan aba'. La droite Δ coïncidant, par hypothèse, avec son homologue, l'homologue du plan $a\Delta$ est le plan $a'\Delta$, c'est-à-dire ce plan lui-même : ce dernier passe donc par l'homologue b' du point b. On voit donc que les quatre points a, a', b et b' sont dans un même plan. Soit ω le point commun aux droites aa' et bb' : on verra, comme au n° 50, que ce point se confond avec son homologue, et que toute droite qui joint deux points homologues passe par ce point, qui est appelé *centre d'homologie.*

Réciproquement, si les droites qui joignent deux points homologues de deux figures homographiques passent par un point fixe, ces figures sont homologiques; on le démontrerait d'une manière analogue.

Le centre d'homologie peut, dans certains cas, se trouver dans le plan d'homologie.

Les figures *homothétiques* sont des figures homologiques admettant pour plan d'homologie le plan de l'infini.

54. Considérons maintenant deux figures homographiques telles que trois points d'une certaine droite Δ coïncident avec leurs homologues : il en est alors évidemment de même de tous les points de cette droite. A tout plan P passant par Δ, correspond un plan P′ issu également de cette droite. Les plans P et P′ se correspondent dans un faisceau homographique qui n'admet généralement que deux plans doubles, Π_1 et Π_2. Les points homologues situés dans chacun de ces plans forment, d'après ce qui précède (n° 50), des figures

homologiques, dont les centres d'homologie ω_1 et ω_2 sont deux points qui se correspondent à eux-mêmes dans la transformation homographique considérée. La droite $\omega_1\omega_2$ se correspond évidemment à elle-même, ainsi que tous les plans qui passent par cette droite; il en est de même des plans Π_1 et Π_2 (¹).

55. Il peut encore arriver que tous les plans P, issus de Δ, coïncident avec leurs homologues P'; dans ce cas, il existe un centre d'homologie ω dans chacun de ces plans; tous ces centres sont en ligne droite, car la droite $\omega_1\omega_2$ qui joint deux d'entre eux se correspondant à elle-même, ainsi que tout plan issu de Δ, le point où $\omega_1\omega_2$ coupe un tel plan coïncide avec son homologue, et est donc le centre d'homologie situé dans ce plan. Dans ce cas, il existe donc deux droites Δ et Δ_1 dont tous les points coïncident avec leurs homologues; il en est de même de tous les plans qui passent par ces droites. Deux figures symétriques par rapport à une droite offrent un exemple de ce cas particulier d'homographie : les droites Δ et Δ_1 sont alors l'axe de symétrie et la droite à l'infini des plans normaux à cet axe.

56. D'après le théorème fondamental du n° 52, deux figures homographiques dont cinq points coïncident avec leurs homologues sont en général confondues; il y a exception si quatre de ces points sont dans un même plan : tous les points de ce plan coïncident alors (n° 48) avec leurs homologues, et les deux figures sont homologiques, à moins que trois des points considérés ne soient en ligne droite.

Dans le cas général, *deux figures homographiques admettent quatre points doubles.* Soient, en effet, A, B et C trois droites situées dans un même plan P de la première figure, A', B' et C' leurs homologues dans la seconde. L'intersection des plans homologues issus de A et A' décrit (n° 43) une surface du second degré passant par l'intersection Δ des plans

(¹) Deux figures égales qu'on peut amener en coïncidence par une rotation autour d'un axe donnent un exemple de ce cas : la droite Δ est l'axe de rotation, et les points ω_1 et ω_2 sont les points cycliques des plans normaux à cet axe.

homologues P et P'; il en est de même des surfaces du second degré qui correspondent aux faisceaux B et B' et aux faisceaux C et C'. Tout point commun à ces trois surfaces, et n'appartenant pas à la droite Δ, coïncide évidemment avec son homologue; or il existe quatre de ces points, car (n° 44) trois quadriques qui ont une génératrice commune ont en général en commun quatre points en dehors de cette droite.

Les faces du tétraèdre des points doubles sont *quatre plans doubles;* ses arêtes sont *six droites doubles.* D'après la manière même dont sont déterminés ces points doubles, deux d'entre eux peuvent être infiniment voisins : cela a lieu lorsque la cubique commune à deux des quadriques considérées est tangente à la troisième; la droite qui joint les deux points infiniment voisins est alors tangente à la cubique.

Les droites A, B et C n'étant pas supposées concourantes, les seuls points du plan P communs aux trois quadriques considérées sont ceux de la droite Δ. Si donc ces trois quadriques ont en commun une infinité de points, en outre de ceux de Δ, le lieu de ces points ne devra couper le plan P qu'en des points de Δ. Les trois quadriques peuvent ainsi admettre une génératrice commune, de système différent de Δ; la conique commune alors à deux d'entre elles coupe la troisième en deux points qui sont les points doubles ω_1 et ω_2 du cas du n° 54. Les trois quadriques peuvent encore admettre en commun deux génératrices coupant Δ : c'est le cas du n° 55. Enfin, les trois quadriques peuvent se décomposer chacune en deux plans tels que l'un de ces plans appartienne à la fois à ces trois surfaces : c'est le cas des figures homologiques; le centre d'homologie est fourni par l'intersection des trois autres plans obtenus dans la décomposition précédente.

57. De ce qu'une transformation homographique n'altère pas le rapport anharmonique (n° 45) de quatre droites concourantes situées dans un même plan, il résulte immédiatement qu'elle n'altère pas non plus le rapport anharmonique de quatre points situés sur une conique (n° 42); car une conique passant par quatre points a, b, c, d peut être définie comme le lieu des points m du plan $abcd$ tels que le rapport anharmonique $m(abcd)$ ait une valeur donnée; sa trans-

formée sera le lieu des points m' du plan $a'b'c'd'$ tels que le rapport anharmonique $m'(a'b'c'd')$ ait la même valeur.

On en conclut que si quatre points d'une conique C ont pour homologues dans une transformation homographique quatre points d'une conique C', tels que les rapports anharmoniques de ces deux groupes de quatre points soient égaux sur les deux coniques, C' est l'homologue de C. On peut donc toujours faire se correspondre homographiquement deux coniques arbitraires, et transformer, par exemple, une conique quelconque en l'ombilicale (nº 34), ou en un cercle quelconque.

58. Soient A, B, C et D quatre fonctions linéaires et homogènes de quatre paramètres α, β, γ et δ. Si à tout point de coordonnées barycentriques $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ par rapport à un certain tétraèdre de référence, on fait correspondre le point dont les coordonnées barycentriques sont A, B, C et D, on aura bien défini une transformation homographique; car, si le point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ décrit un plan, il en est évidemment de même du point (A, B, C, D). On peut d'ailleurs obtenir ainsi la transformation homographique la plus générale, car on peut, à un facteur constant près, déterminer les seize coefficients qui figurent dans les fonctions A, B, C et D par la condition que cinq points donnés aient pour homologues cinq autres points donnés, ce qui fournit quinze équations.

On aurait obtenu des résultats analogues dans le cas de figures planes.

Transformations corrélatives.

59. Nous avons déjà fait remarquer (nº 31) l'étroite analogie qui existe entre les propriétés des divisions et des faisceaux homographiques : elles peuvent en effet se ramener les unes aux autres au moyen d'une transformation des plus importantes, la *transformation dualistique* ou *corrélative*.

A tout point de l'une des figures elle fait correspondre un plan de l'autre, et réciproquement. Ainsi, à des points m situés dans un même plan P correspondront des plans P' passant par un même point m', qui correspondra lui-même ainsi au plan P.

A des points en ligne droite, c'est-à-dire communs à deux plans, correspondront des plans passant par deux points, et, par suite, par une droite. Ainsi, *à une droite correspond une droite.*

Une surface S, lieu d'un point m, a pour transformée la surface S' enveloppée par le plan M' qui correspond au point m; le point m' où ce plan M' touche S' est, par définition, commun à trois positions infiniment voisines de ce plan, qui correspondent à trois positions infiniment voisines de m sur S; c'est donc le point qui correspond au plan déterminé par ces trois positions de m, c'est-à-dire au plan tangent en m à S. Les surfaces S et S' sont dites *corrélatives,* et l'on voit que chacune d'elles peut être déduite de l'autre de deux manières, et être définie soit comme l'enveloppe d'un plan, soit comme le lieu d'un point.

Les points communs à la surface S et à une droite D ont pour transformés les plans tangents à la surface S' menés par la droite D' homologue de D : ces plans tangents seront en même nombre que les points auxquels ils correspondent; par suite :

La classe d'une surface est égale au degré d'une surface corrélative.

A une courbe plane correspond une surface enveloppée par des plans issus d'un point fixe, c'est-à-dire un *cône;* d'une manière générale, à une courbe correspond une surface enveloppée par un plan ne renfermant qu'un paramètre arbitraire, c'est-à-dire une *surface développable.* Les génératrices de cette surface, intersections de deux plans tangents infiniment voisins, correspondent aux droites joignant deux points infiniment voisins de la courbe, c'est-à-dire aux tangentes à celle-ci.

Les sections planes de deux surfaces algébriques corrélatives sont des courbes de la même classe.

Soient, en effet, S et S' deux surfaces corrélatives; aux tangentes à S menées par un point a dans un plan A correspondent les tangentes à S' menées dans le plan A', corrélatif du point a, et par le point a', corrélatif du plan A : le nombre de ces tangentes représente donc à la fois la classe des sections planes de S ou de S′. Ce théorème peut encore s'énoncer :

Les cônes circonscrits à deux surfaces corrélatives sont du même degré.

A tout point m d'une droite D ne correspond qu'un plan M mené par D′, et réciproquement; si donc μ désigne le point où le plan M′ coupe une droite quelconque Δ, les points m et μ déterminent sur D et Δ deux divisions homographiques; le rapport anharmonique de quatre points m est donc égal à celui des quatre points μ, et, par suite, des quatre plans M′ qui leur correspondent. Ainsi :

Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal à celui des quatre plans corrélatifs.

60. De cette dernière propriété, nous allons, par un raisonnement semblable à celui du n° 52, déduire des résultats analogues.

Étant données deux figures dualistiques, soient, en effet, dans l'une, A′, B′, C′, D′ et E′ les plans corrélatifs de cinq points a, b, c, d et e de l'autre. On peut obtenir le plan M′, corrélatif d'un point quelconque m, en remarquant que le rapport anharmonique des quatre plans déterminés, par exemple, par la droite ab et les points c, d, e et m est égal à celui des quatre points où les plans C′, D′, E′ et M′ coupent la droite A′B′. On déterminera ainsi le plan M′, par exemple, au moyen des trois points où il coupe les droites A′B′, B′C et C′A′.

D'ailleurs, si les cinq points et les cinq plans considérés sont quelconques, le plan M′, que la construction précédente permet d'associer à tout point m, lui correspond bien dualistiquement : c'est ce que nous allons montrer.

En effet, si le point m décrit une droite quelconque, les plans abm, bcm et cam décrivent trois faisceaux homographiques, dont trois plans homologues coïncident avec le plan abc. Il en résulte que le plan M′ défini par la construction précédente coupe les droites A′B′, B′C′ et C′A′ en trois points homologues de trois divisions homographiques, dans lesquelles trois points homologues coïncident avec le point commun à ces trois droites. Par suite (nº 31), le plan M′ passe par une droite fixe.

Ainsi donc, à tous les points d'une droite Δ correspondent par notre construction des plans passant par une droite fixe Δ'; à des droites Δ passant par un même point m correspondent d'ailleurs évidemment des droites Δ' situées dans un même plan M′. Il en résulte qu'aux points d'un même plan correspondent des plans passant par un même point; par suite, la correspondance (m, M′) est bien dualistique, et nous voyons que :

On peut transformer dualistiquement une figure de sorte que cinq quelconques de ses points, dont quatre n'appartiennent pas à un même plan, aient pour corrélatifs cinq plans quelconques, dont quatre ne soient pas concourants, et cela d'une seule manière.

Dans le cas de figures planes, on obtiendrait des résultats analogues, en faisant se correspondre *quatre points et quatre droites arbitraires.*

61. D'après la définition même des figures homographiques et corrélatives, on voit que deux transformations corrélatives successives équivalent à une transformation homographique, et que deux transformations successives, l'une corrélative et l'autre homographique, équivalent à une transformation corrélative. Par suite, plusieurs transformations successives, homographiques ou corrélatives peuvent être remplacées par une seule transformation, qui est elle-même homographique ou corrélative, selon que les transformations successives comprennent un nombre pair ou impair de corrélations. Ainsi donc :

L'ensemble des homographies et des corrélations constitue un groupe de transformations.

62. De là résulte que deux figures corrélatives à une troisième sont homographiques; dans ces deux figures homographiques, il existe généralement quatre plans doubles (nº 56); on en déduit que :

Si l'on considère deux transformations corrélatives d'une même figure, il existe généralement quatre points de celle-ci tels que les plans qui correspondent à chacun d'eux dans les deux transformations coïncident.

Dans certains cas particuliers, il y aura une infinité de points dont les plans homologues coïncideront : cela aura lieu lorsque les deux transformées par dualité seront homologiques, ou lorsqu'elles appartiendront aux homographies particulières étudiées dans les nºs 54 et 55.

63. En désignant, comme au nº 58, par A, B, C et D quatre fonctions linéaires et homogènes de quatre paramètres α, β, γ et δ, on aura évidemment une transformation corrélative en faisant correspondre à tout point de coordonnées barycentriques (α, β, γ, δ) le plan représenté par l'équation

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}t = 0;$$

aux points d'un plan correspondront en effet ainsi des plans concourant en un même point.

Comme au nº 58, on voit d'ailleurs que la transformation corrélative la plus générale peut être obtenue par ce procédé qui permet de faire correspondre à cinq points arbitraires cinq plans donnés.

64. Nous terminerons ce Chapitre par quelques applications de la transformation corrélative.

Nous avons obtenu précédemment (nº 38) le théorème suivant :

Une courbe du second degré est aussi de la seconde classe.

Par une transformation dualistique plane, on en déduit le théorème corrélatif :

Une courbe de la seconde classe est aussi du second degré.

Ces deux énoncés réciproques nous montrent que les courbes du second degré et celles de la seconde classe ne forment qu'une famille; on les désigne sous le nom de *coniques :* nous voyons ainsi qu'à toute propriété projective des coniques correspondra sa corrélative.

Il y a cependant une exception : le théorème dont nous sommes partis ne s'applique pas (n° 32) aux courbes du second degré formées de deux droites; de même, l'ensemble de deux points forme bien une enveloppe de la seconde classe, et non du second degré.

D'après une remarque du n° 59, une surface du second degré, c'est-à-dire dont les sections planes sont du second degré, et, par suite, de la seconde classe, a pour corrélative une surface dont les sections planes sont aussi de la seconde classe, et, par suite, du second degré; comme toute surface de la seconde classe peut être considérée comme corrélative d'une surface du second degré, on voit ainsi que :

Une surface de la seconde classe est aussi du second degré.

Corrélativement :

Une surface du second degré est aussi de la seconde classe.

On désigne sous le nom de *quadriques* les surfaces du second degré ou de la seconde classe.

Les théorèmes précédents ont cependant des cas d'exception : aux cônes du second degré on ne peut généralement mener aucun plan tangent par une droite quelconque. De même une conique constitue bien une enveloppe de la seconde classe, bien que, en général, une droite quelconque ne la coupe pas en deux points.

65. Aux théorèmes que nous avons démontrés au n° 41 et au n° 42 correspondront, par exemple, les corrélatifs suivants :

1° *La droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques d'un même plan enveloppe une conique;*

2° *Cinq tangentes déterminent en général une conique;*

3° *Le rapport anharmonique des quatre points où quatre* *tangentes fixes d'une conique coupent une tangente variable de cette courbe est constant* [1].

Supposons qu'une de ces quatre tangentes soit la *droite de l'infini :* on dit alors que la conique est une *parabole;* le rapport anharmonique considéré se réduit alors au rapport de deux segments, et l'on voit ainsi que :

Trois tangentes fixes à une parabole interceptent sur une tangente variable des segments dont le rapport reste constant.

Transformons enfin par corrélation la généralisation du théorème de Frégier (n° 39) : aux deux faisceaux en involution issus d'un point *a* d'une conique C correspondent, sur une tangente A′ à la transformée C′ de C, deux divisions en involution; à la corde interceptée sur C par deux rayons homologues correspond le point commun à deux tangentes menées à C par deux points homologues. Ce point décrit une droite qui passe par les points de contact des tangentes issues des points doubles de l'involution.

En particulier, si ces points doubles sont les points cycliques, C′ est une parabole, et les tangentes issues de deux points homologues de l'involution deviennent (n° 37) deux tangentes rectangulaires. Leur point commun décrit la droite qui joint les points de contact des tangentes menées à la parabole par les points cycliques : cette droite est appelée la *directrice* de la parabole. On voit donc que :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est sa directrice [2].

---

(1) CHASLES, *Aperçu historique*, Note XVI.

(2) Ce théorème est dû à LA HIRE (*Sectiones conicæ*, Liv. VIII).

CHAPITRE IV.

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES.

Théorème de Desargues-Sturm et ses conséquences.

66. Comme nous l'avons vu précédemment (n° **41**), il ne passe qu'une conique par cinq points dont quatre ne sont pas en ligne droite, cette conique se composant de deux droites lorsque trois des points considérés sont en ligne droite.

De là résulte que, étant donnés quatre points a, b, c, d, dont trois ne sont pas en ligne droite, il n'existe qu'une conique circonscrite au quadrangle *abcd*, et passant par un point quelconque m. Si donc m et m' désignent les deux points où une droite quelconque Δ coupe une conique circonscrite au quadrangle *abcd*, on voit qu'à tout point m de Δ ne correspond ainsi qu'un point m'. Comme, d'ailleurs, ces points sont évidemment réciproques, ils déterminent donc une involution sur Δ, d'où le théorème suivant connu sous le nom de *théorème de Desargues-Sturm*.

Les coniques circonscrites à un quadrangle déterminent une involution sur une droite quelconque (¹).

Parmi ces coniques, il en existe évidemment trois qui sont formées chacune par deux des côtés opposés du quadrangle considéré. On en déduit que :

Les trois couples de points où une droite quelconque coupe les côtés opposés d'un quadrangle se correspondent dans une involution (²).

En particulier, si la transversale considérée est une des trois diagonales du quadrangle, les extrémités de cette diagonale sont les points doubles de l'involution déterminée sur cette droite par les coniques circonscrites au quadrangle. Ainsi :

Les coniques circonscrites à un quadrangle en divisent harmoniquement les trois diagonales (³).

67. Parmi les coniques circonscrites au quadrangle *abcd*, celles qui passent par un des points doubles de l'involution

---

(¹) Ce théorème est une généralisation, due à STURM (*Ann. de Mathém.*, t. XVII), d'un théorème énoncé par DESARGUES (1593-1662) et relatif aux points où une transversale coupe une conique et les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit.

(²) PAPPUS, *Collections mathém.*, Proposition 130.

(³) *Ibid.*, Proposition 131.

(m, m') coupent Δ en deux points infiniment voisins, et sont d'ailleurs les seules qui jouissent de cette propriété. Ainsi :

Il existe deux coniques passant par quatre points et tangentes à une droite.

Si cette droite est la droite de l'infini, les coniques qui la touchent sont, par définition, des paraboles; par suite :

Il existe deux paraboles circonscrites à un quadrangle.

68. Le théorème de Desargues a pour corrélatif le suivant :

Les tangentes menées d'un point aux coniques tangentes à quatre droites forment une involution ([1]).

Parmi ces coniques qui sont maintenant considérées comme des courbes de la seconde classe, il en existe trois qui sont formées chacune de deux sommets opposés du quadrilatère déterminé par les quatre droites considérées; par suite :

Les trois couples de droites qui joignent un point quelconque aux sommets opposés d'un quadrilatère sont trois couples de rayons homologues d'une involution.

Enfin le théorème du n° 67 fournit dualistiquement le suivant :

Il existe deux coniques passant par un point et tangentes à quatre droites.

69. Nous allons immédiatement appliquer ces théorèmes corrélatifs de celui de Desargues à l'étude des propriétés focales des coniques.

D'une manière générale, on nomme *foyer* d'une courbe plane un point tel que les deux droites isotropes issues de ce point soient tangentes à la courbe ([2]). On aura donc les

---

([1]) Ce théorème est dû à STURM (*Annales de Math.*, t. XVII).

([2]) Cette définition des foyers est due à PLÜCKER (*Journal de Crelle*, 1833, p. 84-91). Elle n'est qu'une généralisation d'une propriété trouvée par PONCELET (*Traité des propr. proj.*, Art. 457) relative aux foyers des coniques et qui suffit à les définir.

foyers d'une courbe en prenant les points communs aux tangentes menées à cette courbe par les points cycliques. Par suite une courbe de classe n aura généralement n^2 foyers; en particulier, les coniques ont en général quatre foyers. Les paraboles étant tangentes à la droite de l'infini, on ne pourra leur mener qu'une autre tangente par chacun des points cycliques; elles n'ont donc qu'un foyer à distance finie.

Si la courbe considérée a une équation cartésienne à coefficients réels, à toute tangente imaginaire à cette courbe correspond la tangente imaginaire conjuguée; par suite n foyers sont les intersections de droites imaginaires conjuguées, et sont donc réels.

70. D'après cette définition des foyers, lorsque deux sommets opposés d'un quadrilatère sont les points cycliques, les coniques inscrites à ce quadrilatère ont les mêmes foyers : on dit alors qu'elles sont *homofocales*.

L'involution formée par les tangentes menées d'un point quelconque à des coniques homofocales admet donc comme rayons homologues les droites isotropes issues de ce point, puisque ces droites joignent le point considéré à deux des sommets opposés du quadrilatère circonscrit à ces coniques. Les rayons doubles de cette involution sont donc (n° 37) rectangulaires et sont les bissectrices de l'angle formé par deux rayons homologues quelconques, en particulier par les rayons qui joignent le point considéré à deux foyers correspondants. On voit donc que :

Les tangentes menées d'un point à une conique sont également inclinées sur les droites qui joignent ce point à deux foyers correspondants.

Par tout point, il passe deux coniques d'un système homofocal : elles se coupent orthogonalement, les tangentes étant les bissectrices des droites qui joignent le point considéré à deux foyers correspondants.

71. Du théorème de Desargues on déduit aisément un théorème célèbre dû à Pascal [1] et qui s'énonce ainsi :

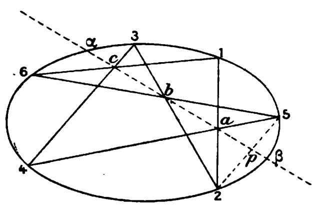
---

[1] Ce théorème fut trouvé par PASCAL (1623-62) à l'âge de seize ans.

Lorsqu'un hexagone est inscrit à une conique, les points d'intersection de ses côtés opposés sont en ligne droite.

Soient, en effet, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 six points d'une conique, il s'agit de montrer que la droite qui joint les points *a* et *b*,

Fig. 2.



communs aux côtés opposés 12, 45 et 23, 56, passe par le point *c*, où se coupent 34 et 61.

Désignons par *α* et *β* les points où la droite *ab* coupe la conique et par *p* celui où elle rencontre la diagonale 25. Les côtés 16 et 25 du quadrangle 1256 coupent la droite *ab* en deux points homologues de l'involution que déterminent les deux couples *ab* et *αβ*; il en est de même des côtés 34 et 25 du quadrangle 2345; par suite, les droites 16 et 34 passent toutes deux par le point homologue du point *p* dans cette involution : elles se coupent donc bien sur *ab*.

Ce théorème permet évidemment de construire linéairement une conique définie par cinq points.

Un ou plusieurs des côtés de l'hexagone inscrit peuvent être tangents à la conique : les deux sommets adjacents appartenant à chacun de ces côtés sont alors infiniment voisins. S'il en est, par exemple, ainsi pour deux côtés opposés de l'hexagone, on obtient ce théorème :

Les tangentes menées à une conique en deux sommets opposés d'un quadrilatère inscrit à cette conique se coupent sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés de ce quadrilatère.

On obtient donc ainsi quatre points en ligne droite.

Si trois des côtés de l'hexagone sont tangents à la conique, le théorème de Pascal se réduit au suivant :

Les tangentes menées à une conique aux sommets d'un triangle inscrit coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

72. Le théorème de Pascal a pour corrélatif le suivant :

Lorsqu'un hexagone est circonscrit à une conique, les diagonales qui joignent les sommets opposés sont concourantes (¹).

On en déduit les cas particuliers suivants, qui correspondent à ceux que nous avons indiqués pour le théorème de Pascal :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une conique, les diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés sont concourantes.

Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés sont concourantes.

73. Les théorèmes de Desargues ou de Pascal et leurs corrélatifs permettent évidemment de construire linéairement, par points ou par tangentes, une conique déterminée par cinq points ou par cinq tangentes.

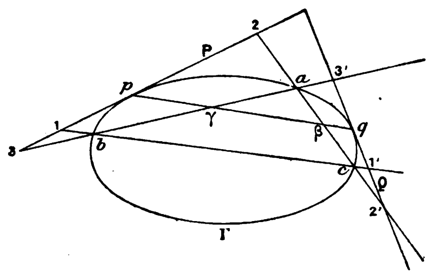
Nous avons vu d'ailleurs (nᵒˢ 67 et 68), comment on peut obtenir les deux coniques dont on donne quatre points et une tangente, ou quatre tangentes et un point.

Proposons-nous maintenant d'obtenir une conique dont on donne trois points a, b, c et deux tangentes P et Q. Soient p et q les points de contact de ces droites avec une conique T répondant à la question. D'après le théorème de Desargues, toutes les coniques bitangentes à T en p et q déterminent une involution sur la droite ab, par exemple : dans cette involution se correspondent les points a et b, ainsi que les points 3 et 3′ où la droite ab coupe P et Q (*fig.* 3); enfin le point γ est un des points doubles de cette involution. Le

(¹) BRIANCHON, *Journal de l'École Polytechnique*, 1806.

point β, où pq coupe la droite ac, est de même un des points doubles de l'involution déterminée sur cette droite par les deux couples de points a et c, 2 et 2′, ceux-ci étant les points où ac coupe P et Q.

Fig. 3.



Réciproquement, γ étant un point double de l'involution $(a, b; 3, 3')$ et pq une droite quelconque issue de ce point, il existe une conique qui passe par a et b et qui touche P et Q en p et en q.

En joignant deux à deux les points doubles des involutions $(a, b; 3, 3')$ et $(a, c; 2, 2')$ on obtiendra donc quatre cordes de contact des droites P et Q avec quatre coniques répondant à la question. On voit en même temps que les points doubles de l'involution $(b, c; 1, 1')$ seront chacun sur deux de ces cordes.

Dans le cas particulier où P et Q sont deux droites isotropes issues d'un point f, les coniques cherchées sont les coniques circonscrites au triangle abc et admettant f pour foyer [1]. On voit qu'il existe quatre de ces coniques. Les directrices, qui correspondent à f, coupent chacun des côtés du triangle abc au même point qu'une des bissectrices de l'angle d'où ce côté est vu du point f.

En transformant corrélativement les constructions précédentes, on obtiendra quatre coniques inscrites à un triangle

---

[1] La détermination de ces coniques constitue un problème utile en Astronomie, qui a été résolu pour la première fois par HALLEY (*Transactions philosophiques*, 1676, n° 128). LA HIRE en donna ensuite une construction plus élégante et plus facile.

et passant par deux points. En particulier, il existe quatre cercles inscrits à un triangle.

Les raisonnements qui précèdent se seraient appliqués aussi pour déterminer les quatre coniques circonscrites (ou inscrites) à un triangle et bitangentes à une conique donnée.

Pôles et polaires.

74. On dit que deux points sont *conjugués* à une conique, quand ils divisent harmoniquement la corde de la conique qui passe par ces points; on dit encore que la conique est *conjuguée* à ces points. Par exemple, toutes les hyperboles équilatères sont conjuguées aux points cycliques.

Corrélativement, deux droites sont dites *conjuguées* à une conique, lorsqu'elles divisent harmoniquement l'angle des tangentes menées à la conique par leur point commun. Par exemple, deux droites rectangulaires, issues d'un foyer d'une conique, sont conjuguées à cette courbe.

D'après ces définitions, il résulte du théorème de Desargues que les points doubles de l'involution déterminée sur une droite par les coniques circonscrites à un quadrangle sont à la fois conjugués à toutes ces coniques; le théorème de Desargues prend ainsi la forme suivante :

Si deux points sont conjugués en même temps à deux des coniques circonscrites à un quadrangle, ils le sont par rapport à toutes ces coniques.

75. Le lieu des conjugués d'un point par rapport à une conique est appelé la *polaire* de ce point. Nous allons voir que :

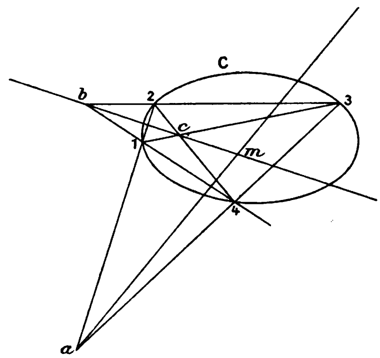
La polaire d'un point par rapport à une conique est une droite ([1]).

Soient, en effet, 12 et 34 les points où une conique C

([1]) Ce théorème était connu d'APOLLONIUS; mais la théorie des pôles est due au géomètre LA HIRE (1640-1718) (*Sectiones conicæ*, Livres 1 et 2; 1685). Les mots de *pôle* et de *polaire* sont dus à SERVOIS et à GERGONNE (*Ann. de Math.*, t. I et III).

(*fig.* 4) coupe deux sécantes quelconques issues d'un point *a*. Sur une droite quelconque *am*, issue du point *a*, toutes les coniques circonscrites au quadrangle 1234 déterminent une involution dont *a* est évidemment un point double; l'autre point double est donc le conjugué harmonique de *a* par rap-

Fig. 4.



port aux points où la droite *am* coupe une quelconque des coniques considérées. On voit ainsi que le point *a* admet la même polaire par rapport à toutes les coniques circonscrites au quadrangle 1234.

La polaire du point *a* par rapport à C coïncide donc, en particulier, avec celle de ce point par rapport à la conique formée par les deux droites 14 et 23. Or, à cause de la propriété du rapport harmonique d'être projectif, la polaire d'un point par rapport à un angle est évidemment une droite issue du sommet de cet angle. La polaire cherchée est donc une droite passant par le point *b*, où se coupent 14 et 23; elle passe de même par le point *c*, où se coupent 13 et 24.

On voit que les droites qui joignent le point *a* aux deux points où *bc* rencontre C coupent cette courbe en deux points confondus; la polaire d'un point est donc la corde de contact des tangentes issues de ce point. Il en résulte que, si *a* est sur C, sa polaire devient la tangente à cette courbe en ce point.

La démonstration précédente s'applique tant que la conique considérée est une conique véritable, c'est-à-dire ne se compose ni de deux points, ni de deux droites. Dans ce dernier cas, elle ne tombe d'ailleurs en défaut que si le point considéré est le point commun aux deux droites; la polaire de ce point devient alors indéterminée.

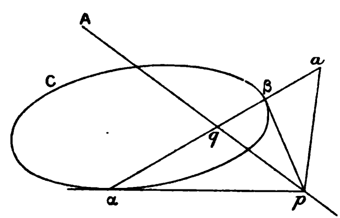
76. La propriété des points conjugués d'un même point d'être en ligne droite a pour corrélative la suivante :

Les droites conjuguées d'une droite fixe par rapport à une conique sont concourantes.

Leur point commun est appelé le *pôle* de la droite. On voit que, par rapport à une conique véritable, toute droite a un pôle bien déterminé.

77. Considérons donc une telle conique C, et soient p et q deux points d'une droite arbitraire A, conjugués à cette conique. La polaire de chacun de ces points passe évidemment par l'autre; soient a le point commun à ces polaires, et α et

Fig. 5.



β les points où C coupe la polaire aq du point p. Les points a et q divisant harmoniquement le segment $\alpha\beta$, les droites pa et pq sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes $p\alpha$ et $p\beta$ menées de p à C : la droite pa est donc conjuguée de A par rapport à C : il en est de même de la droite qa; le point a est donc le pôle de la droite A d'après la définition précédente. Les points p et q étant conjugués de a par rapport à C, on voit d'ailleurs que A est la polaire du point a. Ainsi :

Le pôle de la polaire d'un point est ce point lui-même.

On voit en même temps que :

Les polaires des points d'une droite passent par le pôle de cette droite,

et que :

Les pôles des droites issues d'un point sont sur la polaire de ce point.

Le triangle *apq* est dit *conjugué* à C : ses sommets sont deux à deux conjugués à cette conique, ainsi que ses côtés.

78. Le pôle de la droite de l'infini est appelé le *centre* de la conique : il se trouve au point de rencontre des asymptotes. Les droites issues du centre sont nommées *diamètres*. D'après ces définitions, les points a et a' où un diamètre coupe la conique sont conjugués harmoniques par rapport au centre et au point à l'infini de ce diamètre; autrement dit, ils sont symétriques par rapport au centre. Celui-ci, tel que nous venons de le définir, est donc bien un centre de symétrie de la conique.

Dans le cas où celle-ci est une parabole, c'est-à-dire est tangente à la droite de l'infini, le centre devient le point de contact de cette droite, et se trouve donc rejeté à l'infini.

D'après la définition du centre, deux diamètres conjugués harmoniquement par rapport aux asymptotes sont deux droites conjuguées à la conique : on les appelle alors des *diamètres conjugués*. Le pôle d'un diamètre, qui se trouve à la fois sur le diamètre conjugué et sur la polaire du centre, est donc le point à l'infini du diamètre conjugué. Par suite :

Le lieu des milieux des cordes d'une conique parallèles à un même diamètre est son diamètre conjugué.

79. Dans l'involution formée par les diamètres conjugués d'une conique, il n'y a, en général (n° 40), qu'un couple de rayons conjugués rectangulaires : on les nomme *axes* de la conique, et l'on voit bien, par suite de la propriété qui précède, que ce sont des axes de symétrie de la courbe. Dans le cas où la conique est un cercle, ses asymptotes sont des

droites isotropes, et deux diamètres conjugués quelconques sont alors rectangulaires.

80. D'après la définition d'un triangle conjugué à une conique (n° 77), la dernière des propriétés énoncées au n° 66 peut être exprimée ainsi :

Les coniques circonscrites à un quadrangle sont conjuguées à son triangle diagonal.

Je dis que, réciproquement, lorsqu'un point a admet la même polaire A par rapport à deux coniques C et C', il est à l'intersection de deux de leurs cordes communes.

Soient, en effet, m un des points communs à C et à C', et μ le point où la droite am coupe la polaire A : le conjugué harmonique m' de m par rapport au segment $a\mu$ est à la fois sur C et sur C'. Ainsi donc, la droite qui joint a à l'un quelconque des points communs aux coniques C et C' est une des cordes communes à ces coniques. La propriété annoncée en résulte. On voit, de plus, que :

Les coniques, conjuguées à un triangle, qui passent par un point donné, passent par trois autres points fixes.

On déduit de là, que, lorsque les quatre points communs à deux coniques sont distincts, elles n'admettent qu'un triangle conjugué commun. Lorsque les deux coniques se touchent en un seul point, leur triangle conjugué commun est infiniment aplati, mais il reste encore unique. Au contraire, si les coniques sont bitangentes, il est bien évident qu'elles admettent une infinité de triangles conjugués communs, dont un des côtés coïncide avec la corde de contact, le sommet opposé étant le point de concours des tangentes communes.

Un triangle conjugué commun à deux coniques est évidemment conjugué à toutes les coniques qui passent par leurs points communs, ou encore, comme on dit, aux coniques du *faisceau ponctuel* déterminé par les deux premières. Ainsi donc, il n'existe, en général, que trois points qui admettent la même polaire par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel.

81. *Les polaires d'un même point par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel sont concourantes.*

Soit, en effet, m' le point où se coupent les polaires d'un point m par rapport à deux coniques C et C' d'un faisceau ponctuel. Les points m et m' étant à la fois conjugués à ces deux coniques, le sont (n° 74) à toutes celles du faisceau considéré, et les polaires de m concourent donc bien en m'. Ces points m et m' sont évidemment réciproques.

Si l'on considère une des coniques du faisceau qui sont formées de deux droites, les points m et m' sont conjugués à cette conique; autrement dit, les droites qui joignent ces points au point α, commun aux droites considérées, divisent harmoniquement leur angle. Les droites telles que αm et $\alpha m'$ déterminent donc une involution à laquelle appartient, bien évidemment, le couple formé par les côtés du triangle conjugué commun issus de α. Ainsi :

Si m et m', p et p' désignent deux couples de points conjugués à la fois à deux coniques, dont $\alpha\beta\gamma$ désigne le triangle conjugué commun, les six droites αm et $\alpha m'$, αp et $\alpha p'$, $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ sont en involution.

On en déduit encore (n° 68) que les deux droites $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ sont tangentes à une même conique, inscrite au quadrilatère $mpm'p'$. Par suite :

Il existe une conique inscrite à la fois au triangle $\alpha\beta\gamma$ et au quadrilatère $mpm'p'$.

82. Les transformations homographiques et corrélatives conservant les rapports harmoniques, deux points conjugués à une conique se transforment, homographiquement, en points conjugués, et, corrélativement, en droites conjuguées à la transformée de la conique. Par suite, les propriétés d'un pôle et de sa polaire se conservent par ces transformations.

Par exemple, en transformant corrélativement le théorème du n° 81, on obtient le suivant :

Les pôles d'une même droite par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel sont en ligne droite.

Par *faisceau tangentiel* de coniques, nous entendons ici les coniques inscrites à un même quadrilatère. En particulier, si la droite considérée est la droite de l'infini, les pôles envisagés deviennent les centres des coniques du faisceau, et, comme les trois coniques de ce faisceau, qui sont formées de deux points, ont évidemment pour centres les milieux des segments limités par ces points, on voit que :

Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère est la droite qui passe par les milieux des trois diagonales (¹).

83. Transformons encore corrélativement la proposition rappelée au début du n° **80** : nous aurons la suivante :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une conique, son triangle diagonal est conjugué à cette conique.

Ainsi donc, les six points où se coupent deux à deux les tangentes communes à deux coniques sont deux à deux sur les côtés du triangle conjugué commun, qu'ils divisent harmoniquement.

Considérons, en particulier, une famille de coniques homofocales, c'est-à-dire inscrites à un quadrilatère dont deux sommets opposés sont les points cycliques (n° 70) : la droite de l'infini en est une diagonale; les deux autres, qui joignent entre eux les foyers conjugués, divisent harmoniquement le segment limité par les points cycliques, c'est-à-dire qu'elles sont rectangulaires. Ces deux diagonales sont d'ailleurs deux droites conjuguées à toutes les coniques homofocales considérées, et passent par le pôle de la droite de l'infini : ce sont donc les axes communs à ces coniques. Comme, d'ailleurs, les foyers les divisent harmoniquement, on voit finalement que :

Les quatre foyers d'une conique sont situés sur ses axes et sont deux à deux symétriques par rapport au centre.

84. Étant donnée une conique Γ, différente de deux droites

(¹) Théorème dû à NEWTON, *Principes*.

ou de deux points, à tout point du plan ne correspond qu'une polaire par rapport à Γ, et, réciproquement, à toute droite ne correspond qu'un pôle; d'ailleurs, à des pôles en ligne droite correspondent des droites concourantes. La correspondance entre un pôle et sa polaire est donc (n° 59) corrélative. On voit d'ailleurs qu'en appliquant cette transformation successivement deux fois à une figure, on retrouve cette figure elle-même, ce qu'on exprime en disant qu'elle est *involutive*. On l'appelle *transformation par polaires réciproques* [1] par rapport à la *conique directrice* Γ.

85. Nous donnerons plus tard quelques applications de ce mode de transformation. Nous nous bornerons actuellement à montrer qu'on peut toujours faire se correspondre par polaires réciproques deux coniques données C et C'.

En effet, supposons d'abord que C et C' soient deux coniques concentriques ayant les mêmes directions d'axes; considérons une conique Γ, dont les axes de symétrie coïncident avec ceux de C et de C', et qui soit telle que le carré de la longueur de chacun de ses axes soit moyen proportionnel entre les carrés des longueurs des axes de C et de C', qui ont la même direction. C et C' sont évidemment polaires réciproques par rapport à Γ. Il existe d'ailleurs quatre coniques Γ qui répondent aux conditions précédentes, les carrés de leurs axes ayant pour valeurs $\pm aa'$ et $\pm bb'$, en désignant par a et b, a' et b' les longueurs, réelles ou imaginaires, des axes de C et de C'.

Étant données deux coniques quelconques, on les transforme d'ailleurs en coniques coaxiales par une transformation homographique qui fait correspondre à deux des sommets de leur triangle conjugué commun les points à l'infini de deux directions rectangulaires. Donc :

On peut, en général, de quatre manières différentes, faire

---

[1] Quelques exemples de ce procédé de transformation se trouvent déjà dans un Mémoire de 1806 de BRIANCHON (n° 64) et dans les *Annales de Mathématiques* de GERGONNE. C'est PONCELET qui l'a mis en usage avec succès dans le *Traité des propriétés projectives*.

se correspondre par polaires réciproques deux coniques données.

Problèmes et théorèmes divers.

86. Proposons-nous d'abord le problème suivant :

Trouver le lieu des points où se coupent les droites conjuguées à une conique donnée C, *menées par deux points fixes* a *et* b.

Une droite arbitraire A étant menée par a, on obtient une droite conjuguée B passant par b en joignant ce point au pôle de A. Or ce pôle est, sur la polaire du point a, conjugué par rapport à C du point où cette polaire coupe A. Ainsi donc les droites correspondantes A et B s'obtiennent en joignant les points a et b aux points conjugués à C sur la polaire de a ou sur celle de b. Ces droites engendrent donc évidemment deux faisceaux homographiques, et le lieu cherché est donc une conique Γ passant par a et b; elle passe de plus évidemment par les points où C coupe les polaires des points a et b. On voit donc que :

Il existe une conique passant par deux points quelconques et par les points de contact des tangentes menées de ces points à une conique quelconque.

Les tangentes en a et b à Γ s'obtiennent en prenant les droites conjuguées de la droite ab menées par ces points; autrement dit, elles se coupent au pôle de ab par rapport à C. Ainsi la droite ab a le même pôle par rapport aux coniques C et Γ.

D'après la définition même de Γ, les tangentes menées à C par un point de cette conique Γ sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent ce point aux points a et b; si, en particulier, ces points sont les points cycliques, la conique Γ est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à C. On voit ainsi que :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique est un cercle concentrique à cette conique [1].

---

[1] LA HIRE, *Sectiones conicæ*, L. VIII, 1685.

On désigne ce cercle sous le nom de *cercle de Monge* ou de *cercle orthoptique* ([1]) de la conique.

87. Considérons les points communs aux cercles orthoptiques de deux coniques C et C′ : de ces deux points on voit C et C′ sous des angles droits. L'involution des tangentes menées de chacun de ces points aux coniques du faisceau tangentiel déterminé par C et C′ (n° 68) comprend donc deux couples de rayons homologues rectangulaires : elle se compose donc de droites rectangulaires. On voit donc que :

Il existe deux points d'où l'on voit sous un angle droit toutes les coniques d'un faisceau tangentiel ([2]).

Autrement dit :

Les cercles orthoptiques des coniques d'un faisceau tangentiel passent par deux points fixes.

En particulier, on voit, en considérant les coniques formées de couples de points, que :

Les cercles qui admettent pour diamètres les trois diagonales d'un quadrilatère ont même axe radical.

Si un des côtés de ce quadrilatère est la droite de l'infini, ces cercles se réduisent aux hauteurs du triangle formé par les trois autres côtés, et de leur point commun on voit sous un angle droit toutes les coniques inscrites au quadrilatère, qui sont ici les paraboles inscrites au triangle considéré ; on voit donc, en tenant compte du résultat du n° 65, que :

L'orthocentre d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice.

Ce théorème est dû à Steiner.

([1]) Cette dénomination est due à M. Picquet (*Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sect. con.*, 1872).

([2]) Plücker, *Analitisch-geometrische Entwicklungen*, t. II, p. 1898 ; 1831.

88. Le premier des théorèmes obtenus au n° 86, transformé par dualité, fournit le suivant :

Étant donnée une conique Γ *et deux droites quelconques* A *et* B, *il existe une conique touchant les droites* A *et* B *et les quatre tangentes menées à* Γ *aux points où cette courbe coupe* A *et* B.

Cette conique touche toutes les cordes de Γ telles que les droites qui joignent leurs extrémités au sommet de l'angle formé par les droites A et B divisent harmoniquement cet angle. Ce sommet a d'ailleurs la même polaire par rapport à cette conique et par rapport à Γ.

Si, en particulier, les droites A et B sont deux droites isotropes, on voit ainsi que :

Les cordes d'une conique Γ *vues d'un point fixe sous un angle droit, enveloppent une conique admettant ce point pour foyer et sa polaire par rapport à* Γ *pour directrice.*

Si ce point fixe est au centre de Γ, l'enveloppe est donc un cercle concentrique.

89. Du théorème général qui précède, on déduit une importante propriété qu'on peut énoncer ainsi :

S'il existe un quadrilatère inscrit à une conique C *et circonscrit à une conique* C′, *il en existe une infinité* ([1]).

Soit, en effet, ω le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère inscrit à C et circonscrit à C′, et soient a et b les points où C coupe une tangente quelconque à C′. Considérons l'involution admettant pour couples de rayons homologues les droites ωa et ωb, d'une part, et, d'autre part, les diagonales du quadrilatère. D'après le théorème précédent, les cordes interceptées sur C par les rayons homologues de cette involution enveloppent une conique qui touche évidemment

([1]) Ce théorème est un cas particulier d'un théorème célèbre dû à PONCELET, d'après lequel, s'il existe un polygone de n côtés inscrit à une conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité.

la droite ab et les côtés du quadrilatère considéré, et qui coïncide, par conséquent, avec C'. La propriété énoncée se trouve donc démontrée et l'on voit de plus que :

Tous les quadrilatères inscrits à C *et circonscrits à* C' *ont le même point de rencontre des diagonales.*

D'après un cas particulier du théorème de Brianchon, signalé précédemment (n° 72), ce point fixe appartient également aux droites qui joignent les points où C' touche les côtés opposés de tous ces quadrilatères.

En particulier, si la conique C' est une parabole, et si C est un cercle, un des quadrilatères en question admet pour sommets adjacents les points cycliques; deux des côtés opposés de ce quadrilatère sont donc les tangentes isotropes menées à la parabole : la droite qui joint leurs points de contact est, comme on sait, la directrice. Par suite :

Le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère inscriptible circonscrit à une parabole est sur la directrice.

90. Voici maintenant quelques applications du théorème de Desargues-Sturm :

D'après ce théorème, si deux points sont à la fois conjugués à deux coniques d'un faisceau ponctuel, ils le sont à toutes les coniques de ce faisceau. Supposons d'abord que ces deux points soient les points cycliques : nous aurons alors la propriété suivante :

Toutes les coniques qui passent par les points communs à deux hyperboles équilatères sont des hyperboles équilatères.

Il en est ainsi, en particulier, de celles de ces coniques qui sont formées de droites; autrement dit, les cordes communes à deux hyperboles équilatères sont deux à deux rectangulaires, d'où résulte que :

Les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle passent par son orthocentre, et réciproquement.

91. Considérons maintenant deux coniques à axes parallèles; les points à l'infini de ces axes sont conjugués à la fois à ces deux coniques, et aussi, par suite, à toutes celles du faisceau ponctuel qu'elles déterminent. Les points cycliques étant d'ailleurs conjugués harmoniques par rapport à ces points, on voit donc que :

Si deux des coniques d'un faisceau ponctuel ont leurs axes parallèles, il en est de même de toutes et l'une de ces coniques est un cercle.

Il en résulte encore que :

Les cordes communes à un cercle et à une conique sont également inclinées sur les axes, et réciproquement.

92. Nous avons vu précédemment (n° 81) que les polaires d'un point a par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel concouraient en un point m. Proposons-nous de rechercher le lieu du point m quand le point a décrit une droite D.

Soient C et C′ deux des coniques considérées : les polaires du point a par rapport à ces coniques passent par les pôles α et α' de la droite D relatifs à ces courbes; d'ailleurs, à toute polaire issue de α ne correspond qu'un point a de D, et, par suite, qu'une polaire issue de α', et réciproquement; ces polaires engendrent donc deux faisceaux homographiques de sommets α et α'. Le lieu du point m est donc une conique qui contient α et α'. Lorsque le point a se trouve sur un des côtés du triangle conjugué commun à C et à C′, le point m coïncide évidemment avec le sommet opposé de ce triangle; la conique (m) est donc circonscrite à ce triangle, quelle que soit la droite D. Cette conique, qui passe par le pôle α de D par rapport à l'une quelconque C des coniques du faisceau ponctuel, coïncide donc aussi avec le lieu de ces pôles. Ainsi :

Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel est une conique circonscrite au triangle conjugué commun à ces coniques [1].

---

[1] PONCELET, *Traité des propr. projectives*, art. 370.

En particulier, si la droite fixe est la droite de l'infini, on voit que :

Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrangle est une conique.

Cette conique a évidemment pour points à l'infini les points à l'infini des paraboles circonscrites au quadrangle.

Elle passe d'ailleurs par les milieux des six côtés de ce quadrangle, car le milieu d'un de ces côtés et le point à l'infini de la droite à laquelle il appartient sont évidemment conjugués à toutes les coniques considérées. On voit ainsi que :

Les milieux des six côtés d'un quadrangle, ainsi que les points de rencontre des côtés opposés, sont neuf points d'une même conique.

Lorsque l'un des sommets du quadrangle est l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres, cette conique est un cercle, puisque (n° 90) les points cycliques sont alors les deux points doubles de l'involution formée par les points à l'infini des coniques circonscrites au quadrangle. Celles-ci sont en effet des hyperboles équilatères, et le lieu des centres devient un cercle; on voit ainsi que :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points de ce triangle.

93. Supposons maintenant que le quadrangle considéré soit inscriptible à un cercle; les paraboles qui lui sont circonscrites ont alors (n° 91) leurs axes rectangulaires; le lieu des centres des coniques circonscrites est donc une hyperbole équilatère. Tout point de ce lieu est d'ailleurs, d'après ce que nous avons vu dans le précédent numéro, le point commun à tous les diamètres des coniques considérées qui sont conjugués d'une même direction, puisque ces différents diamètres sont les polaires d'un même point de la droite de l'infini. Soient m un point de ce lieu, ω le centre du cercle circonscrit au quadrangle et γ le centre de la conique C du faisceau, qui passe par m. La tangente à C en m est parallèle à la direction conjuguée du diamètre γm dans la conique C : la droite ωm, qui est le diamètre conjugué de cette direction dans un cercle, lui est donc perpendiculaire; autrement dit, cette droite est normale en m à la conique C. Ainsi :

Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrangle inscrit dans un cercle de centre ω est une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de ces coniques. Cette courbe est en même temps le lieu des pieds des normales abaissées du point ω sur les coniques considérées.

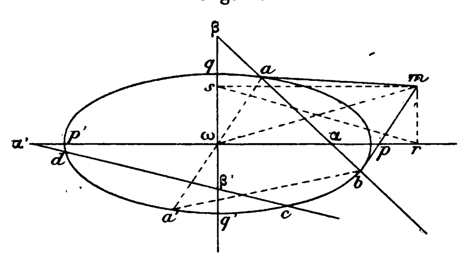
Cette hyperbole équilatère coupe en quatre points chacune des coniques du faisceau; par suite :

D'un point quelconque ω on peut mener à une conique C *quatre normales. Leurs pieds, le point ω et le centre de* C *sont sur une même hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de* C.

On nomme cette hyperbole *l'hyperbole d'Apollonius* du point ω relativement à la conique C : elle a, en effet, été employée pour la première fois par le géomètre grec Apollonius (vers 247 av. J.-C.).

94. Étant donnée une corde ab d'une conique C, proposons-nous de déterminer la corde cd telle que les normales

Fig. 6.



aux quatre points, a, b, c et d, soient concourantes. Considérons l'involution déterminée sur l'axe $p\omega p'$ de C par les coniques circonscrites au quadrangle $abcd$: les sommets p et p'

en sont deux points conjugués, ainsi que les points α et α' situés sur les cordes ab et cd; enfin, l'hyperbole d'Apollonius, circonscrite au quadrangle $abcd$, passe par le centre ω et par le point à l'infini de l'axe; le point ω est donc le point central de cette involution; on a, par suite (n° 35),

$$\overline{\omega\alpha}.\overline{\omega\alpha'} = \overline{\omega p}.\overline{\omega p'}.$$

Soit, maintenant, r la projection sur pp' du pôle m de la corde ab; on a

$$\overline{\omega\alpha}.\overline{\omega r} = \overline{\omega p}^2.$$

De la comparaison de ces deux égalités on déduit

$$\omega\alpha' = -\omega r.$$

De même

$$\omega\beta' = -\omega s.$$

La corde cd est donc symétrique, par rapport au centre ω, de la droite rs qui joint les projections sur les axes du pôle m de la corde ab.

95. Lorsque le point m décrit une droite, ses projections r et s forment évidemment deux divisions semblables; la droite de l'infini est donc une des positions de la droite rs, dont l'enveloppe est, par suite, une parabole qui touche les axes de C aux points où ils coupent la droite décrite par le point m. Si celle-ci est tangente à C au point a, les points c et d seront les pieds de deux normales menées d'un point de la normale en a. On voit ainsi que :

Si un point décrit une normale à une conique, les pieds des trois autres normales menées de ce point sont les sommets d'un triangle dont les côtés enveloppent une parabole tangente aux axes.

96. Soit a' le point de la conique C diamétralement opposé à a; dans le triangle aba', la droite ba' est parallèle à la droite qui joint les milieux des côtés aa' et ab, c'est-à-dire au diamètre ωm conjugué de la direction ab. D'autre part, les diagonales ωm et rs du rectangle ωrms sont également inclinées sur les axes; enfin *rs* et *cd* sont parallèles. Par suite, les cordes *ba'* et *cd* sont également inclinées sur les axes, et il en résulte (91) que leurs extrémités sont sur un même cercle. Ainsi :

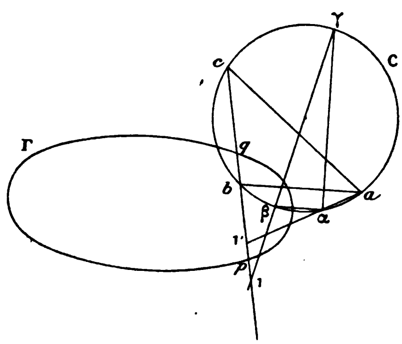
Si l'on considère les pieds de quatre normales concourantes à une conique, le cercle qui passe par trois d'entre eux passe aussi par le point diamétralement opposé au quatrième.

Ce théorème est de Joachimsthal.

Coniques harmoniquement circonscrites ou inscrites à une conique.

97. Étant donnés une conique Γ et un triangle $\alpha\beta\gamma$ conjugué à cette conique, considérons une conique C circonscrite à ce triangle. Soient a un point quelconque de C, A sa polaire

Fig. 7.



par rapport à Γ; enfin, b et c, p et q les points où cette polaire coupe les coniques C et Γ : je dis que les points b et c divisent harmoniquement le segment pq.

En effet, les points 1 et 1' où pq coupe les droites $\beta\gamma$ et $a\alpha$ divisent harmoniquement la corde pq, car la droite $a\alpha$, qui joint les pôles a et α par rapport à Γ des droites bc et $\beta\gamma$ est la polaire du point 1.

Les couples de droites $\gamma\alpha$ et $a\beta$, $\alpha\beta$ et $a\gamma$ divisent de même harmoniquement la corde pq. Les points p et q sont donc les points doubles de l'involution déterminée sur la droite A par les coniques circonscrites au quadrangle $a\alpha\beta\gamma$; les points b et c qui se correspondent dans cette involution sont donc conjugués par rapport aux points p et q. Ainsi le triangle abc est conjugué par rapport à Γ. On voit donc que :

Lorsqu'il existe un triangle inscrit dans une conique C *et conjugué à une conique* Γ, *il en existe une infinité.*

On dit alors que la conique C est *harmoniquement circonscrite* (1) à la conique Γ.

98. De ce théorème il résulte que :

Deux triangles conjugués à une même conique sont inscrits à une même conique, et réciproquement.

En effet, si abc et $\alpha\beta\gamma$ sont deux triangles conjugués à Γ, la conique circonscrite au quadrangle $a\alpha\beta\gamma$ et qui passe par le point b passe forcément par le point c, d'après la démonstration précédente. Et, réciproquement, si abc et $\alpha\beta\gamma$ sont deux triangles inscrits à C, la conique conjuguée au triangle $\alpha\beta\gamma$ et par rapport à laquelle bc est la polaire du point a, coupe bc en deux points p et q conjugués par rapport aux points b et c.

Si b et c sont les points cycliques, Γ est une hyperbole équilatère de centre a, et le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ passe par a; autrement dit :

Les cercles harmoniquement circonscrits à une hyperbole équilatère passent par son centre.

On peut encore dire que :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

---

(1) SMITH, *Proc. of the London math. Soc.*, n° 14, p. 85. On trouvera des détails intéressants sur ce sujet dans le travail de M. Picquet cité plus haut.

99. Le théorème précédent a pour corrélatif le suivant :

Deux triangles conjugués à une même conique sont circonscrits à une même conique, et réciproquement [1].

De ces deux théorèmes, il résulte enfin que :

Deux triangles inscrits à une même conique sont aussi circonscrits à une même conique, et réciproquement.

On en déduit aisément que :

S'il existe un triangle inscrit à une première conique, et circonscrit à une seconde, il en existe une infinité [2].

Si l'un de ces triangles admet les points cycliques pour sommets, les coniques inscrites à ce triangle sont les paraboles ayant pour foyer le troisième sommet, et les coniques circonscrites sont les cercles passant par ce sommet; on voit ainsi que :

Le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer.

Autrement dit :

Le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

100. D'après une définition précédente (n° 97) une conique C est harmoniquement circonscrite à une conique Γ quand il existe un triangle T inscrit à C et conjugué à Γ, et il en existe alors une infinité. Or nous avons vu (n° 84) qu'on pouvait, par polaires réciproques, transformer l'une en l'autre les coniques C et Γ : les triangles T considérés se transforment ainsi en triangles T′ circonscrits à Γ et conjugués à C. Ainsi donc :

Une conique C, *harmoniquement circonscrite à une conique* Γ, *peut être considérée soit comme circonscrite à des*

---

(1) CHASLES, *Tr. des sect. con.*, p. 140.
(2) *Voir* la note du n° 89.

triangles conjugués à Γ, *soit comme conjuguée à des triangles circonscrits à* Γ [1].

On dit encore que Γ est *harmoniquement inscrite* à C.

101. Des trois théorèmes du n° 99 on déduit le suivant :

Si C *et* C′ *sont deux coniques, l'une inscrite et l'autre circonscrite à un triangle* T, *les sommets de ce triangle et ceux du triangle conjugué commun à* C *et à* C′ *sont six points d'une même conique.*

Soit, en effet, T′ un des triangles, autres que T, circonscrits à C et inscrits à C′; il existe une conique Γ conjuguée à la fois aux triangles T et T′. Il est bien évident que, par polaires réciproques relativement à Γ, les deux coniques C et C′ se transformeront l'une en l'autre; il en résulte que le triangle conjugué à la fois à ces deux coniques est aussi conjugué à Γ; par suite, les sommets de ce triangle et ceux du triangle T sont bien sur une même conique.

Supposons, par exemple, que C et C′ soient des coniques ayant les mêmes axes : leur centre commun et les points à l'infini des axes sont alors les sommets du triangle conjugué commun à ces coniques. Par suite, on pourra, par leur centre et par les sommets du triangle T, faire passer une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes communs, c'est-à-dire une hyperbole d'Apollonius relative à C′; par suite, les normales à C′ aux sommets du triangle T seront concourantes. Ainsi :

C *et* C′ *étant deux coniques concentriques, à axes parallèles, s'il existe des triangles circonscrits à* C *et inscrits à* C′, *les trois normales menées à* C′ *aux sommets de l'un de ces triangles sont concourantes.*

Examinons encore le cas où deux des sommets du triangle conjugué commun à C et à C′ sont les points cycliques : C et C′ sont alors deux hyperboles équilatères concentriques, et l'on

---

(1) SALMON, *Sect. con.*, p. 326; CREMONA, *Introd.*, p. 87.

voit que le cercle circonscrit au triangle T passe par leur centre commun. D'ailleurs, ce cercle est circonscrit à une infinité de triangles circonscrits à l'hyperbole C : l'un d'eux a pour côtés les deux asymptotes de cette conique; le troisième côté de ce triangle touche donc C en son milieu, qui est précisément le centre du cercle considéré. L'hyperbole C est donc le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles inscrits à C′ et circonscrits à C ([1]).

102. Soient C et C′ deux coniques harmoniquement circonscrites à une troisième Γ, *a* un de leurs points communs et A sa polaire par rapport à Γ. Cette droite coupe, par hypothèse, C et C′ en des points conjugués à Γ. L'involution déterminée sur A par les coniques du faisceau ponctuel auquel appartiennent C et C′, comprenant ainsi deux couples de points homologues conjugués à Γ, il en est de même de tous les couples de points homologues de cette involution. Autrement dit, toutes les coniques du faisceau ponctuel déterminé par C et C′ sont circonscrites à un triangle de sommet *a*, conjugué à Γ : toutes ces coniques sont donc harmoniquement circonscrites à Γ. Ainsi :

Lorsque deux coniques d'un faisceau ponctuel sont harmoniquement circonscrites à une même conique, il en est de même de toutes les coniques de ce faisceau.

Celles de ces coniques qui sont formées de droites sont alors constituées par deux droites conjuguées à Γ. On voit ainsi, en particulier, que :

Si deux des couples de côtés opposés d'un quadrangle sont formés de droites conjuguées à une même conique, il en est de même du troisième.

Du théorème général qui précède, il résulte que toutes les coniques circonscrites à un triangle *abc* et harmoniquement

([1]) Ces considérations permettaient de résoudre avec élégance le problème proposé en 1896 au Concours général (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. XV, p. 566; 1896).

circonscrites à une conique Γ passent par un quatrième point fixe d. Les droites ab et cd, par exemple, sont alors conjuguées à Γ; autrement dit, la droite cd passe par le pôle γ de la droite ab. On en déduit que

Deux triangles tels que les côtés de l'un soient les polaires des sommets de l'autre par rapport à une même conique sont homologiques.

103. Ainsi donc, si C et C′ sont deux coniques harmoniquement circonscrites à une troisième Γ, leurs cordes communes sont deux à deux conjuguées à Γ. En particulier, si C et C′ sont bitangentes, leur corde de contact est sa propre conjuguée; autrement dit, elle touche Γ. On en déduit, par exemple, l'énoncé suivant :

A deux triangles inscrits à une même conique on circonscrit deux coniques bitangentes entre elles : l'enveloppe de leur corde commune est la conique conjuguée à la fois à ces deux triangles.

Si C et C′ sont homothétiques, la droite qui joint leurs points communs à distance finie passe par le centre de Γ. Par exemple, si deux cercles sont harmoniquement circonscrits à Γ, leur axe radical passe par le centre de cette conique; ce point a donc même puissance par rapport à tous les cercles harmoniquement circonscrits à Γ; autrement dit, ceux-ci coupent orthogonalement un cercle fixe concentrique à cette conique. Ce cercle est évidemment le lieu des centres des cercles points harmoniquement circonscrits, c'est-à-dire des points communs aux droites isotropes conjuguées à Γ : c'est donc (n° 80) le cercle orthoptique de cette conique, d'où l'énoncé suivant dû à M. Faure [1] :

Les cercles harmoniquement circonscrits à une conique en coupent orthogonalement le cercle orthoptique.

La donnée d'un triangle conjugué à une conique équivalant

[1] FAURE, *Nouv. Ann. de Math.*, t. XIX, p. 234.

à trois conditions linéaires imposées à cette conique, il existe toujours un cercle unique conjugué à un triangle. Le cercle conjugué à un triangle circonscrit à une conique étant (n° 100) harmoniquement circonscrit à cette conique, il résulte du théorème précédent que :

Le lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et telles que la somme des carrés de leurs axes ait une valeur donnée est un cercle concentrique à l'orthocentre du triangle (1).

En particulier,

Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites à un triangle est le cercle conjugué à ce triangle.

104. Aux théorèmes du n° **102** correspondent, par dualité, des théorèmes corrélatifs; on voit en particulier que :

Si deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère sont conjugués à une conique, il en est de même du troisième (2).

Extension aux cônes du second degré.

105. Soit A la polaire d'un point a par rapport à une conique C; considérons un cône de sommet s et de directrice C; le rapport harmonique étant projectif, on voit que toute droite issue de a coupe le plan sA au point conjugué de a par rapport à ceux où cette droite rencontre le cône. Le plan sA est appelé *plan polaire* du point a par rapport au cône, ou encore, *plan diamétral conjugué* de la droite sa, car il est bien évident que, lorsque le point a décrit cette droite, son plan polaire reste invariable. Réciproquement, tout plan issu de s admet un *diamètre conjugué*.

En joignant le sommet s aux sommets d'un triangle con-

---

(1) Théorème dû à Steiner.

(2) Hesse, *Journal de Crelle*, t. XX, p 301; 1840.

jugué à C, on obtient un *trièdre conjugué* au cône : chacune de ses arêtes est le *diamètre conjugué* de la face opposée.

Si la conique C est l'ombilicale, le cône correspondant est un *cône isotrope :* ses trièdres conjugués sont trirectangles.

106. Les propriétés obtenues aux nos 97-99 permettent d'énoncer des théorèmes relatifs aux trièdres conjugués à un cône. On voit ainsi, par exemple, que :

Étant donnés deux cônes de même sommet, s'il existe un trièdre inscrit au premier et conjugué au second, il en existe une infinité.

En particulier, si le second cône est isotrope, on voit que :

Si un cône passe par les arêtes d'un trièdre trirectangle, il est capable d'une infinité de tels trièdres.

Un tel cône est dit *équilatère.*

Si c'est, au contraire, le premier des cônes considérés dans l'énoncé précédent qui est isotrope, on trouve que :

S'il existe un trièdre trirectangle circonscrit à un cône du second degré, il en existe une infinité.

107. De même, de ce que deux coniques d'un même plan n'admettent en général qu'un triangle conjugué commun, on déduit que deux cônes de même sommet ont en général un seul trièdre conjugué commun. Si ces deux cônes sont bitangents, ils admettent une infinité de trièdres conjugués communs, dont une des faces est déterminée par les arêtes de contact, l'arête opposée étant le diamètre conjugué de cette face.

Si l'un des deux cônes considérés est isotrope, on voit ainsi que :

Il n'existe généralement qu'un trièdre trirectangle conjugué à un cône du second degré.

Les plans des faces de ce trièdre sont évidemment des plans de symétrie du cône, puisqu'ils partagent en parties égales les cordes normales à chacune de ces faces.

Si le cône considéré est bitangent au cône isotrope de même sommet, et dans ce cas seulement, il est conjugué à une infinité de trièdres trirectangles ayant une arête commune. Les plans normaux à cette arête coupent alors le cône suivant des coniques dont les axes sont indéterminés, c'est-à-dire suivant des cercles : le cône est donc de révolution. Ainsi :

Un cône de révolution est bitangent au cône isotrope de même sommet, et réciproquement.

CHAPITRE V.

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES QUADRIQUES.

Pôles et plans polaires : 108-110. Définitions et propriétés des pôles et des plans polaires. — 111. Droites et tétraèdres conjugués. — 112. Centre, diamètres, axes. — 113. Transformation par polaires réciproques.

Intersection de deux quadriques : 114-115. Détermination des quadriques par des points ou des plans tangents. — 116. Génératrices communes. — 117-118. Quadriques bitangentes et inscrites l'une à l'autre.

Faisceaux et réseaux de quadriques : 119-120. Quadriques d'un faisceau ponctuel tangentes à un plan. Propriétés corrélatives. — 121. Quadriques homofocales. — 122-124. Cônes d'un faisceau ponctuel et coniques d'un faisceau tangentiel. — 125. Foyers et focales. — 126. Lieu des centres des quadriques d'un faisceau tangentiel. — 127-129. Réseaux de quadriques. — 130-131. Théorèmes relatifs à quatre coniques d'un réseau. — 132. Propriétés des focales des quadriques d'un faisceau tangentiel. — 133. Lieu des droites conjuguées d'une droite par rapport aux quadriques d'un faisceau. — 134. Centres des quadriques d'un faisceau ponctuel. — 135. Cubique des normales.

Quadriques harmoniquement circonscrites et inscrites : 136-137. Définitions. — 138-139. Théorème de Hesse et application. — 140. Hyperboloïdes équilatères circonscrits à un tétraèdre orthocentrique. — 141. Quadriques menées par cinq points. — 142. Construction linéaire d'une quadrique. — 143-144. Théorème de Faure et applications. — 145. Théorèmes de M. Picquet. — 146-147. Cubiques gauches harmoniquement circonscrites à une quadrique.

Pôles et plans polaires.

108. Lorsque deux points divisent harmoniquement une corde d'une quadrique, ils sont dits *conjugués* à cette surface.

Le lieu des conjugués d'un point par rapport à une quadrique est un plan.

Soit, en effet, Q une quadrique quelconque. Par le point donné *a*, menons un plan quelconque qui coupe la quadrique Q suivant une conique C. Les points du lieu situés dans ce plan sont évidemment ceux de la polaire du point *a* relativement à C.

D'ailleurs, si C′ désigne la section de Q par un autre plan issu du point *a*, les polaires de ce point par rapport aux deux coniques C et C′ sont dans un même plan, car elles passent toutes deux par le conjugué du point *a* situé sur la droite commune aux plans de C et de C′. Il en résulte que les points du lieu, appartenant à un plan quelconque issu de *a*, sont ceux d'une droite qui rencontre les deux polaires précédentes; le lieu est donc constitué par le plan de ces polaires. Ce plan est appelé le *plan polaire* (¹) du point *a* relativement à Q. Le cône de sommet *a*, qui admet pour directrice la conique suivant laquelle la quadrique Q coupe le plan polaire de *a*, est évidemment *circonscrit* à Q le long de cette conique.

Lorsque le point *a* est sur la quadrique Q, ses polaires par rapport aux coniques de Q dont les plans passent par *a* sont tangentes en *a* à ces coniques; le plan polaire de ce point devient alors le plan tangent à Q en *a*.

La démonstration précédente s'applique tant que Q est une quadrique véritable, c'est-à-dire n'est ni une conique, ni un cône. Dans ce dernier cas, elle ne tombe d'ailleurs en défaut que si le point *a* est le sommet du cône : son plan polaire est alors indéterminé.

109. Corrélativement, lorsque deux plans divisent harmoniquement le dièdre formé par les deux plans tangents menés à une quadrique par leur intersection, ils sont dits *conjugués* à cette surface. Le théorème précédent a donc pour corrélatif le suivant :

Les plans conjugués d'un plan fixe par rapport à une quadrique sont concourants.

Leur point commun est appelé le *pôle* du plan fixe. On voit

(¹) C'est Monge qui, dans sa *Géométrie descriptive*, a étendu aux quadriques la théorie des pôles, que La Hire avait inventée pour les coniques.

que, par rapport à une quadrique véritable, tout plan a un pôle bien déterminé.

110. Soient donc : Q une telle quadrique; P un plan quelconque qui coupe Q suivant une conique C; enfin *abc* un triangle conjugué à C.

Le plan polaire de chacun des points a, b, c passe évidemment par les deux autres : soit p le point commun à ces trois plans polaires, et soient β et γ les points où Q coupe la droite ap. Les plans tangents à Q issus de bc doivent (n° **108**) toucher Q en des points situés à la fois dans les plans polaires des points b et c : ce sont donc les plans $bc\beta$ et $bc\gamma$. D'autre part, les points a et p divisant harmoniquement le segment $\beta\gamma$, les plans bca et bcp divisent harmoniquement le dièdre formé par les plans $bc\beta$ et $bc\gamma$; le plan bcp est donc conjugué du plan P par rapport à Q; il en est de même des plans cap et abp; le point p est donc le pôle du plan P, d'après la définition précédente. Les points a, b et c étant conjugués de p relativement à Q, on voit d'ailleurs que P est le plan polaire du point p. Ainsi :

Le pôle du plan polaire d'un point est ce point lui-même.

On voit en même temps que :

Les plans polaires des points d'un plan passent par le pôle de ce plan,

et que :

Les pôles des plans issus d'un point sont dans le plan polaire de ce point.

111. On en déduit immédiatement que si un point appartient à la fois à deux plans, son plan polaire passe par les pôles de ces plans; autrement dit :

Les plans polaires des points d'une droite Δ passent par une droite Δ' qui est aussi le lieu des pôles des plans issus de Δ.

Les droites Δ et Δ' sont donc réciproques, elles sont dites *conjuguées* à la quadrique. Puisque le plan polaire de tout point de Δ passe par Δ', on voit que tout plan P issu de Δ' coupe Δ en un point qui est le pôle de Δ' par rapport à la conique suivant laquelle le plan P coupe la quadrique Q. Donc :

Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques d'une quadrique dont les plans passent par cette droite est sa droite conjuguée.

Le tétraèdre *pabc* considéré dans le numéro précédent est dit *conjugué* à Q; ses sommets sont deux à deux conjugués à cette quadrique, ainsi que ses faces et ses arêtes opposées. Chacune de ses faces est un triangle conjugué à la conique suivant laquelle son plan coupe Q. Enfin, chacun de ses trièdres est conjugué au cône circonscrit à Q issu du sommet de ce trièdre. Ce trièdre est également dit *conjugué* à la quadrique; chacune de ses arêtes passe par le pôle de la face opposée.

112. Le pôle du plan de l'infini est appelé le *centre* de la quadrique : il est le sommet du *cône asymptote,* enveloppe des plans tangents à la quadrique en ses points à l'infini.

Les droites issues du centre sont nommées *diamètres.*

On voit, comme dans le cas des coniques (n° 78), que le centre ainsi défini est bien un centre de symétrie de la surface.

Dans le cas où celle-ci est un *paraboloïde,* c'est-à-dire touche le plan de l'infini, le centre devient le point de contact de ce plan et se trouve donc rejeté à l'infini.

D'après la définition du centre, un trièdre conjugué au cône asymptote est aussi conjugué à la quadrique; ses trois arêtes forment trois *diamètres conjugués.* Le pôle d'une face de ce trièdre est le point à l'infini de l'arête opposée. Donc :

Le lieu des milieux des cordes d'une quadrique parallèles à une même direction est le plan diamétral conjugué.

Un diamètre et la droite de l'infini du plan diamétral conjugué formant deux droites conjuguées à la quadrique, on voit encore que :

Le lieu des centres des sections d'une quadrique par des *plans parallèles à un même plan diamétral est le diamètre conjugué.*

On voit encore que les axes du cône asymptote (n° 107) sont des axes de symétrie de la quadrique. Les plans qu'ils déterminent deux à deux sont les trois *plans principaux* de cette surface. Dans le cas où le cône asymptote est de révolution, il en est de même de la quadrique, qui est alors (n° 107) bitangente au cercle de l'infini, et réciproquement. Ainsi :

Les quadriques de révolution sont bitangentes à l'ombilicale, et réciproquement.

Enfin, si le cône asymptote est isotrope, la quadrique est une sphère, et trois diamètres conjugués quelconques forment alors un trièdre trirectangle.

113. Nous avons vu que, étant donnée une véritable quadrique, à tout point correspond (n° 108) un plan polaire unique et à tout plan (n° 109) un pôle unique; enfin, aux points d'un plan correspondent (n° 110) des plans concourants. Il en résulte qu'en faisant correspondre à tout point son plan polaire, on obtient une correspondance corrélative (n° 59) qui est d'ailleurs *involutive;* on l'appelle *transformation par polaires réciproques.*

Nous reviendrons plus tard sur cette transformation dont la considération nous facilitera dès maintenant (n° 122) l'exposé d'un certain nombre de propriétés des quadriques.

Intersection de deux quadriques.

114. L'équation générale d'une surface du second degré étant homogène et du premier degré par rapport à dix coefficients arbitraires, il en résulte qu'une telle surface est, en général, définie par la donnée de neuf points quelconques. Il suffit, pour cela, que les neuf équations homogènes linéaires auxquelles doivent satisfaire les dix coefficients admettent un système unique de solutions. Elles pourront être indéterminées dans certains cas.

En effet, la donnée de huit points quelconques d'une quadrique permettra généralement d'exprimer ses dix coefficients en fonction linéaire et homogène de deux paramètres variables λ et λ', de sorte que son équation sera de la forme

$$\lambda Q + \lambda' Q' = 0.$$

Cette quadrique passera donc par tous les points communs aux quadriques représentées par les équations

$$Q = 0 \qquad \text{et} \qquad Q' = 0,$$

qui, comme nous le savons (nº 12), appartiennent à une biquadratique gauche. Donc :

Toutes les quadriques qui passent par huit points contiennent généralement une même biquadratique gauche.

La donnée de sept points d'une quadrique permettrait de même, en général, de la mettre sous la forme

$$\lambda Q + \lambda' Q' + \lambda'' Q'' = 0,$$

ce qui montre que cette quadrique doit passer par tous les points communs aux quadriques

$$Q = 0, \qquad Q' = 0, \qquad Q'' = 0,$$

points qui sont généralement au nombre de huit. Donc :

Toutes les quadriques qui passent par sept points passent généralement par un huitième (¹).

Ce huitième point lui-même sera indéterminé, si les sept points considérés sont sur une même cubique gauche; toutes les quadriques passant par ces points contiendront alors la cubique gauche; cela résulte du nº 44.

De même, toutes les quadriques contenant cinq points d'une conique, ou trois points d'une droite, contiendront cette conique ou cette droite.

115. Les quadriques se transformant dualistiquement (nº 64)

(¹) LAMÉ, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, 1818.

en quadriques, les propriétés précédentes ont pour corrélatives les suivantes :

Toutes les quadriques tangentes à huit plans en touchent une infinité, qui enveloppent une surface développable du quatrième ordre, l'*ordre* d'une surface développable étant le nombre des plans tangents qu'on peut lui mener d'un point arbitraire.

Toutes les quadriques tangentes à sept plans en touchent généralement un huitième.

116. Comme nous l'avons déjà vu, la biquadratique gauche commune à deux quadriques peut se décomposer en une droite et une cubique gauche; lorsque deux quadriques ont ainsi une génératrice commune, la cubique gauche qui constitue le reste de leur intersection coupe d'ailleurs en deux points la génératrice commune : les deux quadriques se touchent évidemment en ces deux points.

Lorsque deux quadriques ont en commun deux génératrices d'un même système A et B, on voit aisément que le reste de leur intersection se compose de deux génératrices de l'autre système. Soit, en effet, m un de leurs points communs, extérieur aux droites A et B : il existe une droite passant par m et coupant A et B; celle-ci ayant trois de ses points situés sur les deux quadriques appartient à ces deux surfaces. La propriété annoncée en résulte.

117. La biquadratique gauche peut encore se décomposer en deux coniques, chacune de celles-ci pouvant d'ailleurs se décomposer en deux droites. Lorsque deux quadriques ont ainsi deux coniques communes, elles se touchent évidemment aux deux points où elles coupent toutes deux la droite commune aux plans de ces coniques.

Réciproquement, *lorsque deux quadriques se touchent en deux points a et b n'appartenant pas à une même génératrice, elles se coupent suivant deux coniques.* Soit, en effet, m un de leurs points communs; le plan mab coupe les deux quadriques suivant des coniques qui se touchent en a et b, et passent de plus par le point m, c'est-à-dire suivant des coniques confondues, ce qui démontre le théorème.

Ce théorème a pour corrélatif le suivant :

Lorsque deux quadriques se touchent en deux points n'appartenant pas à une même génératrice, l'enveloppe de leurs plans tangents communs se compose de deux cônes du second degré.

118. *Si deux quadriques se touchent en trois points a, b et c dont deux n'appartiennent pas à une même génératrice, elles se touchent en tous les points d'une conique.*

En effet, d'après le paragraphe précédent, le plan *abc* coupe les deux quadriques suivant une même conique C. Soit d'ailleurs *p* le point où se coupent les plans tangents à la fois aux deux quadriques aux points *a*, *b* et *c*. Ce point est le pôle du plan *abc* par rapport aux deux quadriques : le cône de sommet *p* et de base C est donc circonscrit à ces deux surfaces le long de la conique C.

Faisceaux et réseaux de quadriques.

119. Toutes les quadriques qui passent par huit points arbitraires forment un *faisceau ponctuel* de quadriques qui (n° 114) contiennent une même biquadratique gauche. Par tout point de l'espace, extérieur à cette courbe, il passe une seule quadrique du faisceau ponctuel.

Ces diverses quadriques coupent évidemment un plan quelconque P suivant des coniques circonscrites à un même quadrangle. Trois de ces coniques sont donc formées de droites : les trois quadriques qui contiennent chacune un de ces couples de droites sont tangentes au plan considéré. On voit donc que :

Dans tout faisceau ponctuel de quadriques, il en existe trois qui touchent un plan donné arbitrairement.

Si le plan P est le plan de l'infini, on voit en particulier que :

Tout faisceau ponctuel de quadriques comprend trois paraboloïdes.

Les trois points de contact avec le plan P sont évidemment les sommets du triangle conjugué commun aux coniques suivant lesquelles les quadriques en question coupent ce plan. On voit donc que :

Dans tout plan, il existe un triangle conjugué commun aux quadriques d'un faisceau ponctuel.

Si le plan coupe deux des quadriques du faisceau suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une même conique Γ, on voit encore (n° 102) qu'il en est de même des sections de toutes les quadriques du faisceau par le plan P. Si la conique Γ est le cercle de l'infini, on voit ainsi que :

Si deux des quadriques d'un faisceau ponctuel sont équilatères, il en est de même de toutes.

On nomme, en effet, *équilatère* toute quadrique dont le cône asymptote est équilatère.

120. Les propriétés précédentes ont pour corrélatives des propriétés concernant les quadriques tangentes à huit plans arbitraires, c'est-à-dire appartenant à un même *faisceau tangentiel.*

On voit ainsi que :

Par tout point de l'espace, il passe trois quadriques d'un faisceau tangentiel. Les plans tangents à ces trois surfaces au point considéré sont les faces d'un trièdre conjugué à la fois à toutes les quadriques du faisceau.

121. Un faisceau ponctuel de quadriques est évidemment défini par deux quadriques, celles-ci pouvant d'ailleurs être des cônes. De même, un faisceau tangentiel se trouve défini par deux quadriques, qui peuvent d'ailleurs être constituées par des coniques.

En particulier, le cercle de l'infini et une quadrique quelconque Q définissent un faisceau tangentiel de quadriques qu'on appelle, comme nous le verrons dans la suite, *quadriques homofocales* à Q.

De cette définition résulte immédiatement que :

Par tout point de l'espace, il passe trois quadriques d'un système homofocal; elles s'y coupent orthogonalement.

En effet, les plans tangents à ces trois surfaces au point considéré doivent être les faces d'un trièdre conjugué au cercle de l'infini, c'ést-à-dire d'un trièdre trirectangle. Les arêtes de ce trièdre, qui est conjugué à la fois à toutes les quadriques de la famille considérée, sont donc les axes des cônes circonscrits à ces surfaces ([1]).

122. La transformation par polaires réciproques (n° **113**) étant une transformation corrélative, il en résulte (n° **62**) que si l'on considère deux quadriques Q et Q', il doit exister en général *quatre* points dont les plans polaires par rapport à Q et à Q' coïncident. Soient α l'un de ces points, m un point commun à Q et à Q', enfin p le point où la droite αm coupe le plan polaire A de α par rapport à Q où à Q' : il est évident que le conjugué harmonique de m par rapport aux points α et p doit être à la fois sur Q et sur Q'. Ainsi toute droite issue de α et qui rencontre la courbe commune à Q et à Q' coupe cette courbe en un second point. Cette courbe Γ étant du quatrième degré, on voit donc que dans tout plan issu de α il n'existe que deux génératrices du cône de sommet α et de directrice Γ. Ce cône est donc du second degré. Ainsi :

Lorsqu'un point a le même plan polaire relativement à deux quadriques, il est le sommet d'un cône du second degré contenant la courbe commune à ces surfaces.

La réciproque est évidente.

Le plan A coupe Q et Q' suivant des coniques qui admettent généralement un seul triangle conjugué commun, $\beta\gamma\delta$. Il est bien évident que le plan polaire de β, par exemple, est le plan $\alpha\gamma\delta$ relativement à Q ou à Q'. Ainsi :

Il existe généralement quatre cônes du second degré pas-

([1]) CHASLES, *Aperçu historique*, Note XXXI.

sant par une même biquadratique; ils déterminent un tétraèdre conjugué à la fois à toutes les quadriques qui passent par cette courbe (1).

123. Dans certains cas particuliers, il peut y avoir plus de quatre points qui admettent les mêmes plans polaires relativement à deux quadriques (n° 62). Nous savons (nos 62, 55, 56) que, dans ce cas, il existera au moins une droite Δ telle que tous ses points admettent les mêmes plans polaires.

Soient α et β les points où Δ coupe Q : leurs plans polaires par rapport à Q passent par ces points eux-mêmes; comme ils sont aussi les plans polaires de ces points relativement à Q′, on voit donc que Q et Q′ sont nécessairement bitangentes en α et β.

Réciproquement, lorsque deux quadriques sont bitangentes, il est bien évident que tout point m de la corde de contact $\alpha\beta$ a le même plan polaire relativement aux deux quadriques, ce plan polaire se trouvant défini par le point m', conjugué harmonique de m par rapport au segment $\alpha\beta$, et par la droite Δ' où se coupent les plans tangents communs en α et en β. Sur cette droite Δ', il existe d'ailleurs deux points admettant les mêmes plans polaires par rapport à Q et à Q′ : ces points sont les points doubles de l'involution déterminée sur Δ' par les deux couples de points où cette droite coupe Q et Q′. Ces points sont les sommets de deux cônes du second degré qui passent par les deux coniques d'intersection de Q et de Q′. Ainsi :

Lorsque deux coniques se coupent en deux points, il existe deux cônes du second degré qui les contiennent.

Si les quadriques Q et Q′ passent par les côtés d'un même quadrilatère gauche, les diagonales de ce dernier sont des cordes de contact des deux quadriques; elles admettent donc le même plan polaire relativement à ces deux surfaces.

Enfin, si Q et Q′ se touchent en tous les points d'une courbe plane, tous les points du plan de cette courbe jouissent de la propriété en question.

---

(1) Poncelet, *Traité des prop. proj.*, Art. 616.

124. Le dernier théorème du n° 122 a pour corrélatif la propriété suivante :

Les plans tangents communs à deux quadriques sont généralement tangents à quatre coniques dont les plans sont les faces d'un tétraèdre conjugué à la fois à ces deux quadriques [1].

D'après la première propriété énoncée au n° 122, les sommets de ce tétraèdre sont d'ailleurs les sommets des cônes circonscrits aux deux quadriques.

Il n'y a d'exception que si les deux quadriques considérées sont bitangentes; leurs plans tangents communs enveloppent alors (n° 117) deux cônes du second degré bitangents, qui se coupent suivant deux coniques.

125. Si l'on considère les traces des quadriques d'un faisceau ponctuel sur un plan tangent à l'un des cônes de ce faisceau, on a évidemment des coniques bitangentes; car l'une d'elles, intersection du plan et du cône considérés, se compose d'une droite double.

Réciproquement, pour qu'un plan coupe les quadriques d'un faisceau ponctuel suivant des coniques bitangentes, il faut que l'une de ces coniques se compose d'une droite double, et, par suite, que l'une des quadriques du faisceau tangentes au plan considéré soit un cône.

Corrélativement, étant donné un faisceau tangentiel de quadriques, si l'on considère un point d'une des coniques de ce faisceau, les cônes circonscrits aux quadriques et issus de ce point sont bitangents, et réciproquement.

Considérons en particulier une famille de quadriques homofocales, c'est-à-dire un faisceau tangentiel déterminé par une quadrique quelconque Q et le cercle de l'infini. Le plan de l'infini est donc alors une des faces du tétraèdre conjugué à la fois à ces quadriques, et les trois sommets de cette face devant former un triangle conjugué à la fois à Q et au cercle de l'infini sont les points à l'infini des axes de Q (n° 112).

---

[1] PONCELET, *Mémoire sur les polaires réciproques* (*Journ. de Crelle*, 1829).

Ainsi :

Les quadriques d'une famille homofocale ont les mêmes axes.

Outre le cercle de l'infini, cette famille comprend trois coniques situées dans les trois plans principaux. On les nomme les *focales* des quadriques considérées, et tout point de ces courbes est désigné sous le nom de *foyer* (¹).

D'après la remarque faite au début de ce paragraphe, on voit que les cônes circonscrits aux quadriques et issus d'un foyer sont bitangents entre eux. Ils sont donc, en particulier, bitangents au cône issu de ce foyer et passant par le cercle de l'infini; ces cônes sont donc de révolution. On peut encore dire que le cône isotrope issu d'un foyer est bitangent à toutes les quadriques considérées. On voit donc que :

Les focales d'une quadrique sont le lieu des sommets des cônes isotropes bitangents à cette surface, ou encore le lieu des sommets des cônes de révolution qui lui sont circonscrits.

On voit en particulier que le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par chaque focale se compose des deux autres (²).

Dans le cas où la quadrique est de révolution, c'est-à-dire bitangente au cercle de l'infini, elle n'admet qu'une focale, intersection des deux cônes isotropes circonscrits à cette quadrique. Les sommets de ces cônes sont nommés les *foyers principaux* de la quadrique : ce sont évidemment les foyers de la méridienne situés sur l'axe de révolution.

126. On peut étendre aux quadriques un grand nombre de propriétés des coniques.

Par exemple, toutes les quadriques d'un faisceau ponctuel

(¹) Les foyers des quadriques ont été considérés pour la première fois par CHASLES (*Aperçu historique*, Note XXXI). Les focales avaient déjà été obtenues par STEINER (*Journal de Crelle*, 1820) comme le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits.

(²) Les propriétés des foyers d'une conique situés dans l'espace sont dues à CH. DUPIN (*Corresp. sur l'École Polytechnique*, 1804).

déterminent évidemment une involution sur une droite quelconque. Les points doubles de cette involution sont conjugués à la fois à toutes ces quadriques, et l'on voit ainsi que, si deux points sont conjugués en même temps à deux des quadriques d'un faisceau ponctuel, ils le sont à toutes. Autrement dit :

Les plans polaires d'un point fixe relativement aux quadriques d'un faisceau ponctuel passent par une même droite.

Corrélativement :

Les pôles d'un même plan par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel sont en ligne droite.

Cette droite contient en particulier les pôles du plan considéré par rapport aux quatre coniques appartenant au faisceau. En particulier, si l'on considère des coniques homofocales, le lieu des pôles du plan fixe contient le pôle de ce plan par rapport au cercle de l'infini; autrement dit :

Le lieu des pôles d'un plan par rapport aux quadriques d'un système homofocal est une droite normale à ce plan.

Enfin, si le plan qu'on considère est le plan de l'infini, on voit que :

Le lieu des centres des quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite qui passe par les centres des quatre coniques de ce faisceau.

127. On dit que les quadriques qui passent par sept points forment un *réseau ponctuel.* Nous avons déjà vu (n° 114) que ces quadriques passent par un huitième point fixe, qui peut se déduire des sept points donnés. On peut évidemment déterminer une quadrique du réseau par la donnée de deux autres points arbitraires.

Lorsque quatre quadriques appartiennent à un même réseau ponctuel, la biquadratique commune à deux d'entre elles et la biquadratique commune aux deux autres sont sur une même quadrique, et réciproquement.

Considérons, en effet, la quadrique du réseau qui passe par deux points arbitrairement choisis sur les deux biquadratiques en question : elle contient évidemment ces deux courbes, puisqu'elle passe par neuf points de chacune d'elles. Réciproquement, si deux biquadratiques gauches sont sur une même quadrique, elles se coupent évidemment en huit points communs à la quadrique considérée et à toutes les quadriques qui passent par l'une ou l'autre des biquadratiques.

128. Il résulte de ce théorème que :

Si deux points a et b sont conjugués à la fois à trois quadriques Q_1, Q_2 *et* Q_3 *d'un réseau ponctuel, ils le sont à toutes les quadriques de ce réseau.*

Soit, en effet, Q_4 une quadrique quelconque du réseau : d'après le théorème précédent, il existe une quadrique Q appartenant à la fois aux deux faisceaux ponctuels (Q_1, Q_2) et (Q_3, Q_4). Les points *a* et *b* conjugués à Q_1 et Q_2 le sont donc (n° 126) à Q; et puisqu'ils sont conjugués à la fois à Q et à Q_3, ils le sont aussi à Q_4. On en déduit que :

Les plans polaires d'un point fixe relativement aux quadriques d'un réseau ponctuel passent par un même point.

Corrélativement :

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques d'un réseau tangentiel est un plan.

En particulier :

Le lieu des centres des quadriques d'un réseau tangentiel est un plan [1].

129. Le théorème du n° 127 a des applications intéressantes. On en déduit immédiatement que :

Si quatre quadriques sont telles que la biquadratique com-

---

[1] GERGONNE, *Annales de Mathématiques*, T. XVII, p. 200.

mune à deux d'entre elles et la biquadratique commune aux deux autres soient sur une même quadrique, il en est de même quelle que soit la manière de grouper deux à deux ces quatre surfaces (¹).

Supposons, par exemple, que deux des quadriques considérées se composent chacune de deux plans. On voit alors que :

Si deux quadriques Q_1 *et* Q_2 *sont bitangentes à une troisième* Q, *les plans des coniques suivant lesquelles* Q *coupe* Q_1 *et* Q_2 *étant respectivement* A_1 *et* B_1, A_2 *et* B_2, *il existe une quadrique bitangente à* Q_1 *et* Q_2, *et passant par les coniques d'intersection de* Q_1 *par les plans* A_2 *et* B_2, *et de* Q_2 *par les plans* A_1 *et* B_1.

130. En considérant les sections par un même plan des quatre quadriques envisagées dans le théorème général du paragraphe précédent, on obtient un théorème analogue de Géométrie plane :

Si quatre coniques sont telles qu'il existe une conique passant par les points communs à deux d'entre elles et par les points communs aux deux autres, il en est de même quelle que soit la manière de grouper ces coniques.

Examinons en particulier le cas où deux des quatre coniques considérées se composent de droites doubles : nous avons alors la propriété suivante :

Si deux coniques C *et* C' *sont bitangentes à une troisième* Γ, *les cordes de contact étant respectivement* D *et* D', *il existe une conique* Γ' *bitangente à* C *et à* C', *les cordes de contact étant respectivement* D' *et* D.

131. Aux propriétés des numéros précédents correspondent évidemment des propriétés corrélatives. Occupons-nous d'abord des propriétés relatives aux coniques.

(¹) CHASLES, *Comptes rendus*, 1860.

On voit que :

Si quatre coniques sont telles que le faisceau tangentiel déterminé par deux d'entre elles et le faisceau tangentiel déterminé par les deux autres admettent une conique commune, il en est de même quelle que soit la manière de grouper deux à deux ces coniques.

Si l'on suppose que l'une des coniques considérées soit formée par les points cycliques, on voit ainsi que :

Si trois coniques sont telles que l'une d'elles soit homofocale à une conique du faisceau tangentiel déterminé par les deux autres, il en est de même de chacune d'elles.

Autrement dit, C_1, C_2 et C étant trois coniques d'un même faisceau tangentiel et C'_2 une conique homofocale à C_2, il existe une conique C' homofocale à C et appartenant au faisceau tangentiel (C_1, C'_2); par suite, le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel (C_1, C'_2) coïncide avec celui des coniques du faisceau (C_1, C_2). D'ailleurs les ombilics communs aux coniques d'un faisceau tangentiel sont évidemment les foyers des coniques du faisceau formées de deux points. De l'ensemble de ces remarques il résulte que :

Si l'on considère l'ensemble des coniques homofocales aux coniques d'un faisceau tangentiel, tous les faisceaux tangentiels déterminés par deux d'entre elles ne comprennent que des coniques de cet ensemble. Leurs foyers coïncident avec les ombilics qu'elles admettent deux à deux. Leur lieu coïncide, par exemple, avec celui des points de rencontre des tangentes menées à ces coniques par les foyers de l'une d'elles.

Si l'on considère, en particulier, un faisceau tangentiel formé de coniques bitangentes entre elles, le pôle ω de la corde de contact est un point double qui constitue une conique du faisceau; les coniques homofocales à cette dernière sont évidemment les cercles de centre ω. Ainsi :

Si deux coniques sont homofocales à deux coniques bitan-

gentes, leurs tangentes communes sont circonscrites à un même cercle.

Le lieu des foyers des coniques du faisceau coïncide alors avec celui des points de contact des tangentes menées de ω aux coniques homofocales à l'une des coniques du faisceau; si C_1 et C_2 désignent deux de ces coniques, les foyers de C_1 sont donc les points de contact des tangentes menées de ω à une conique homofocale à C_2. On voit ainsi que :

Quand deux coniques sont bitangentes, les foyers de l'une sont sur une conique homofocale à l'autre, et les tangentes à cette conique menées en ces points passent par le pôle de la corde de contact.

Par suite :

Le lieu du second foyer des coniques admettant un foyer F *et bitangentes à une conique donnée* Γ *se compose des deux coniques homofocales à* Γ *qui passent par* F. *Les tangentes en* F *à ces coniques constituent d'ailleurs le lieu du pôle de la corde de contact.*

Les foyers d'une conique bitangente à une conique Γ étant d'ailleurs, d'après ce qui précède, deux ombilics opposés de Γ et d'un cercle, on peut encore dire que :

Si l'on considère les cercles tangents aux deux tangentes menées à une conique Γ *par un point* F, *le point d'intersection des deux autres tangentes communes à chacun de ces cercles et à* Γ *a pour lieu les deux coniques homofocales à* Γ *qui passent par* F.

132. En examinant de même le théorème corrélatif de celui du n° 129, et en supposant que l'une des quadriques considérées soit le cercle de l'infini, on obtient des théorèmes analogues aux précédents. Par exemple :

Si l'on considère l'ensemble des quadriques homofocales aux quadriques d'un faisceau tangentiel, tous les faisceaux tangentiels déterminés par deux d'entre elles ne comprennent *que des quadriques de cet ensemble. Leurs focales coïncident avec les coniques appartenant à ces faisceaux tangentiels.*

On peut d'ailleurs appliquer directement le théorème corrélatif général. Soient par exemple Q_1 et Q_2 deux quadriques circonscrites l'une à l'autre, ω le sommet du cône circonscrit commun et φ_1 une des focales de Q_1. Cette dernière quadrique appartient au faisceau tangentiel déterminé par la conique φ_1 et le cercle de l'infini Γ; elle appartient aussi au faisceau tangentiel déterminé par Q_2 et par la quadrique constituée par le point double ω. Il existe donc une quadrique commune aux faisceaux tangentiels (Γ, Q_2) et (φ_1, ω). Autrement dit :

Quand deux quadriques sont inscrites l'une à l'autre, toute focale de l'une est sur une quadrique homofocale à l'autre, et le pôle du plan de cette focale par rapport à cette quadrique coïncide avec le pôle du plan de contact des deux quadriques données.

L'une des quadriques considérées dans ce dernier théorème peut d'ailleurs être constituée par une conique située sur l'autre quadrique. On voit ainsi que :

Par une focale d'une quadrique Q passe une quadrique admettant pour focale une section de Q par un plan quelconque.

Considérons encore une quadrique de révolution bitangente à une quadrique Q; soient F et F′ ses foyers principaux et soient S et S′ les sommets des cônes circonscrits à la fois à cette quadrique et à Q. La quadrique Q, le couple des points S et S′, celui des points F et F′ et l'ombilicale sont quatre surfaces d'un même réseau tangentiel, car la quadrique de révolution considérée appartient évidemment au faisceau tangentiel déterminé par les deux premières et au faisceau tangentiel déterminé par les deux dernières. Il existe donc une quadrique tangente aux plans tangents communs à Q et à l'ombilicale, c'est-à-dire homofocale à Q, et tangente en même temps aux plans tangents communs aux surfaces formées par les deux couples de points considérés, c'est-à-dire passant par le quadrilatère gauche FSF'S'. Donc :

Si l'on considère les quadriques de révolution bitangentes à une quadrique fixe Q *et ayant un foyer principal donné* F, *le lieu du second foyer principal se compose des trois quadriques homofocales à* Q, *qui passent par* F. *Les génératrices de ces surfaces qui passent par* F *constituent le lieu des sommets* S *et* S' *des cônes circonscrits à la fois à* Q *et aux quadriques de révolution considérées.*

133. Nous avons vu précédemment (nº 126) que les plans polaires d'un point m par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel passent par une même droite Δ. Proposons-nous de chercher le lieu de cette droite quand le point m décrit une droite D.

Soient Q_1 et Q_2 deux des quadriques considérées : les plans polaires du point m relatifs à ces surfaces passent par les droites D_1 et D_2, conjuguées de D par rapport à ces quadriques. D'ailleurs à tout plan polaire issu de D_1 ne correspond qu'un pôle m sur D, et, par suite, qu'un plan polaire issu de D_2, et réciproquement. Ces plans polaires engendrent donc deux faisceaux homographiques d'arêtes D_1 et D_2. Leur intersection engendre donc une quadrique passant par D_1 et D_2. Lorsque le point m se trouve sur une des faces du tétraèdre conjugué commun à Q et à Q', la droite Δ passe évidemment par le sommet opposé de ce tétraèdre. La quadrique engendrée par Δ est donc circonscrite à ce tétraèdre, quelle que soit D. Cette quadrique qui passe par la droite D_1 conjuguée de D par rapport à l'une quelconque Q_1 des quadriques du faisceau ponctuel, coïncide donc aussi avec le lieu de ces droites. Ainsi :

Les droites conjuguées d'une droite fixe par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel sont les génératrices d'un même système d'une quadrique circonscrite au tétraèdre conjugué commun aux quadriques du faisceau.

Corrélativement :

Les droites conjuguées d'une droite fixe par rapport aux *quadriques d'un faisceau tangentiel engendrent une quadrique inscrite au tétraèdre conjugué commun aux quadriques du faisceau.*

134. Proposons-nous maintenant de chercher le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel.

Soient a, b, c trois points du plan considéré, A, B et C leurs plans polaires par rapport à l'une des quadriques du faisceau. Quand cette quadrique varie, les plans A, B et C, qui pivotent autour de droites fixes (nº **126**), engendrent trois faisceaux homographiques. Leur point commun décrit donc (nº **44**) une cubique gauche. Ainsi :

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel est une cubique gauche.

Si le plan fixe est le plan de l'infini, on voit que :

Le lieu des centres des coniques d'un faisceau ponctuel est une cubique gauche.

Cette cubique passe évidemment par les sommets des cônes du faisceau et ses points à l'infini sont ceux où les paraboloïdes du faisceau touchent le plan de l'infini.

135. Si le faisceau considéré comprend une sphère, ces points de contact déterminent un triangle conjugué au cercle de l'infini (**119**). Autrement dit, les directions asymptotiques de la cubique gauche sont rectangulaires : on dit alors qu'elle est *équilatère*. Ses asymptotes sont d'ailleurs parallèles aux axes de toutes les quadriques du faisceau.

Tout point m de cette cubique étant le centre d'une des quadriques du faisceau, la droite commune aux plans polaires de ce point par rapport à ces quadriques est nécessairement dans le plan de l'infini. Par exemple, le plan polaire de m par rapport à la sphère ω du faisceau est parallèle au plan tangent en m à la quadrique Q du faisceau qui passe par ce point; or la droite ωm est normale au premier de ces plans; elle est donc normale en m à la quadrique Q. Ainsi :

Le lieu des centres des quadriques qui passent par l'inter-

section d'une sphère et d'une quadrique est une cubique équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de ces quadriques. Cette courbe est en même temps le lieu des pieds des normales menées à ces quadriques par le centre de la sphère.

Cette cubique coupe en six points chacune des quadriques du faisceau; par suite :

D'un point quelconque ω *on peut mener à une quadrique* Q *six normales. Leurs pieds, le point* ω *et le centre de* Q *sont sur une même cubique équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de* Q.

Le cône de sommet ω qui passe par cette cubique étant évidemment du second degré, on voit ainsi que :

Les six normales menées d'un point à une quadrique sont sur un même cône du second degré, dont trois génératrices sont parallèles aux axes de la quadrique et qui passe par le centre de celle-ci (¹).

Quadriques harmoniquement circonscrites et inscrites.

136. On peut étendre aux quadriques un certain nombre de propriétés démontrées dans le Chapitre V sur les coniques harmoniquement circonscrites.

On dira de même qu'une quadrique circonscrite à un tétraèdre conjugué à une seconde quadrique est *harmoniquement circonscrite* à cette surface.

Lorsqu'il existe un tétraèdre inscrit à une quadrique Q *et conjugué à une quadrique* Q', *tout point de* Q *est un sommet d'une infinité de tétraèdres analogues.*

Soit, en effet, Q une quadrique circonscrite à un tétraèdre *abcd* conjugué à une quadrique Q'. Soient α un point quelconque de Q et β un des deux points où le plan polaire de α par rapport à Q' coupe la conique d'intersection de Q par le

(¹) CHASLES, *Journal de Mathématiques;* 1838.

plan *bcd*. Cette conique étant harmoniquement circonscrite à Q', β est un sommet d'un triangle βmn inscrit à cette conique et conjugué à Q'. Le tétraèdre βmna est donc conjugué à Q'. La section de Q par le plan *mna* est donc une conique harmoniquement circonscrite à Q' : or cette conique passe par le point α, car le plan *mna* est le plan polaire du point β, point qui est dans le plan polaire du point α. Le point α est donc un sommet d'un triangle $\alpha\gamma\delta$ inscrit à cette conique et conjugué à Q'. On voit donc enfin qu'il existe un tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ conjugué à Q' et inscrit à Q, admettant pour sommet un point quelconque, α, de cette dernière surface.

137. De même que deux coniques (85), deux quadriques Q_1 et Q_2 peuvent être transformées l'une en l'autre par polaires réciproques.

On peut, en effet, transformer homographiquement ces quadriques en quadriques coaxiales, en faisant correspondre à trois des sommets de leur tétraèdre conjugué commun les points à l'infini de trois directions rectangulaires.

Ceci posé, Q_1 et Q_2 étant deux quadriques coaxiales, considérons une quadrique coaxiale Q, qui soit telle que le carré de la longueur de chacun de ses axes soit moyen proportionnel entre les carrés des longueurs des axes correspondants de Q_1 et de Q_2; Q_1 et Q_2 sont évidemment polaires réciproques par rapport à Q. Il existe d'ailleurs huit quadriques Q qui répondent aux conditions précédentes, les carrés de leurs axes ayant pour valeurs $\pm aa'$, $\pm bb'$ et $\pm cc'$, en désignant par a, b et c, a', b' et c' les longueurs, réelles ou imaginaires, des axes de Q_1 et de Q_2. Donc :

On peut, en général, de huit manières différentes, faire se correspondre par polaires réciproques deux quadriques données.

Si Q_1 est harmoniquement circonscrite à Q_2, les tétraèdres inscrits à Q_1 et conjugués à Q_2 se transforment ainsi en tétraèdres circonscrits à Q_2 et conjugués à Q_1. Ainsi donc :

Une quadrique Q_1 harmoniquement circonscrite à une quadrique Q_2 peut être considérée soit comme circonscrite à une *infinité de tétraèdres conjugués à Q_2, soit comme conjuguée à une infinité de tétraèdres circonscrits à Q_2.*

138. Soient $abcd$ et $\alpha\beta\gamma\delta$ deux tétraèdres conjugués à une même quadrique Q'. Considérons une quelconque Q des quadriques qui passent par les sept points $a, b, c, d, \beta, \gamma, \delta$. Cette quadrique étant harmoniquement circonscrite à Q', le plan polaire $\alpha\gamma\delta$ de β par rapport à Q' coupe Q et Q' suivant des coniques C et C' telles que C est harmoniquement circonscrite à C'. La polaire $\alpha\delta$ de γ par rapport à C' coupe donc C en deux points conjugués à C' : l'un de ces points étant δ, l'autre est donc α. La conique C et, par suite, la quadrique Q passent donc par α. D'où le théorème suivant dû à Hesse (¹) :

Lorsque deux tétraèdres sont conjugués à une même quadrique, leurs huit sommets sont les points communs aux quadriques d'un réseau ponctuel. Autrement dit, toute quadrique qui passe par sept de ces points passe par le huitième.

139. Étant donnés un tétraèdre $abcd$ et un triangle $\beta\gamma\delta$, il existe toujours une quadrique Q' conjuguée à ce tétraèdre et à ce triangle, cette quadrique étant ainsi assujettie à neuf conditions linéaires. D'après ce qui précède, le pôle α du plan $\beta\gamma\delta$ relativement à Q' est le huitième point commun aux quadriques qui passent par les sept points $a, b, c, d, \beta, \gamma, \delta$. Les arêtes opposées du tétraèdre $abcd$ coupent le plan P du triangle $\beta\gamma\delta$ en des points conjugués à la conique d'intersection C de Q' par ce plan : soient p et q ceux de ces points qui se trouvent sur ac et bd, et m le point où l'arête ab perce le plan P. Toutes les coniques conjuguées au triangle $\beta\gamma\delta$ et aux deux points p et q formant évidemment un faisceau ponctuel, les polaires d'un point quelconque m de leur plan passent par un point fixe m' : on peut le construire en remarquant (n° 81) que les six droites qui joignent β aux points γ et δ, p et q, m et m', sont en involution : on aura donc aisément le point m' par l'intersection des droites $\beta m'$ et $\gamma m'$, par exemple. Les points m et m' étant conjugués à la quadrique

(¹) *Journal de Crelle*, 1843, p. 147.

Q', le plan $m'cd$ est donc, relativement à cette surface, le plan polaire du point m; il passe donc par le pôle α du plan P, point dont on peut achever la détermination en construisant de même les plans αbc et αbd, par exemple ([1]).

Cette construction est en défaut si le point m' est sur cd : dans ce cas, il y a une infinité de coniques conjuguées au triangle $\beta\gamma\delta$ et aux trois couples de points où le plan P rencontre les arêtes opposées du tétraèdre $abcd$; il existe alors (n° **81**) une conique inscrite à la fois au triangle $\beta\gamma\delta$ et au quadrilatère déterminé dans le plan P par les faces du tétraèdre $abcd$.

Il en résulte que les deux trièdres $abcd$ et $a\beta\gamma\delta$, par exemple, sont circonscrits à un même cône; ils sont, par suite (n° **106**), inscrits à un même cône. Il en est de même des trièdres $bacd$ et $b\beta\gamma\delta$. Les sept points considérés sont donc situés sur deux cônes qui ont en commun la génératrice ab : ils sont donc sur une même cubique gauche. Le point α est alors indéterminé sur cette courbe.

140. Soient $abcd$ un tétraèdre conjugué à une quadrique Q et P le plan polaire d'un point α par rapport à cette surface, que ce plan P coupe suivant une conique C. D'après le théorème du n° **136**, toutes les quadriques qui passent par les cinq points a, b, c, d, α coupent le plan P suivant des coniques harmoniquement circonscrites à C, et, réciproquement, d'après le n° **138**, toutes les quadriques circonscrites au tétraèdre $abcd$ et qui coupent le plan P suivant des coniques harmoniquement circonscrites à C passent par le point α. Supposons, en particulier, que Q soit une sphère de centre α; la conique C devient alors le cercle de l'infini, et le tétraèdre $abcd$ est tel que ses hauteurs concourent en α; il est dit *orthocentrique*. D'autre part, les quadriques harmoniquement circonscrites au

([1]) La construction du huitième point commun aux quadriques qui passent par sept points a été résolue par divers auteurs, parmi lesquels MM. Hesse (*Journal de Crelle*, t. 26 et 99), Serret et Picquet (*Ibid.*, t. 73 et 99), Zeuthen, Reyé (*Ibid.*, t. 100), Schröter, Caspary, etc. La solution précédente que j'avais publiée en 1892 dans la *Revue de Math. spéc.* revient à celle de Schröter (*Journal de Crelle*, t. 99, p. 131).

cercle de l'infini dont les cônes asymptotes sont équilatères (n° **106**) sont dites elles-mêmes *équilatères*. On voit donc que :

Les quadriques circonscrites à un tétraèdre orthocentrique et passant par son orthocentre sont équilatères, et, réciproquement, les quadriques équilatères circonscrites à un tétraèdre orthocentrique passent par son orthocentre.

141. Étant donnés cinq points a, b, c, d, α et un plan P, il existe toujours une quadrique unique Q conjuguée au tétraèdre $abcd$ et telle que le point α soit le pôle du plan P par rapport à cette quadrique, qu'on assujettit en effet ainsi à neuf conditions linéaires. Il résulte donc du numéro précédent que :

Toutes les quadriques qui passent par cinq points coupent un plan quelconque suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une conique fixe Γ ([1]).

En particulier, celles qui sont formées de plans coupent le plan considéré suivant des droites conjuguées à la conique fixe. On en déduit immédiatement que :

Le plan P *rencontre la droite déterminée par deux des points et le plan déterminé par les deux autres, en un point et suivant une droite qui sont pôle et polaire relativement à* Γ.

On trouve donc immédiatement les dix polaires de dix points par rapport à Γ.

142. Les propriétés précédentes permettent de construire le quatrième point où une biquadratique gauche définie par huit points coupe le plan P de trois de ces points ([2]).

Soit, en effet, Γ la conique du plan P à laquelle sont har-

([1]) La conique Γ est désignée par M. P. Serret (*Géométrie de direction*, 1869, p. 57) sous le nom de *conique conjuguée au pentagone gauche* des cinq points.

([2]) Cette construction a été indiquée par M. Picquet (*Journal de Crelle*, t. 99, 1886).

moniquement circonscrites toutes les quadriques qui passent par les cinq des points donnés extérieurs au plan P. Celles de ces quadriques qui passent en outre par les trois autres points a, b, c donnés dans le plan P ont un quatrième point fixe dans ce plan, celui où se coupent les trois droites qui joignent les sommets du triangle abc aux pôles des côtés opposés relativement à Γ : cette construction résulte de ce que (nº **102**) les coniques harmoniquement circonscrites à une conique fixe qui passent par trois points, ont un quatrième point fixe commun. On construit d'ailleurs facilement le pôle d'une droite par rapport à une conique qui, comme Γ, est déterminée par la condition que trois droites données soient les polaires de trois points donnés, en se servant de la propriété énoncée à la fin du nº **102**.

Si, en outre des huit points précédents, on en donne un neuvième, on pourra déterminer de même un cinquième point de la section par le plan abc de la quadrique définie par les neuf points considérés.

Ayant ainsi obtenu une conique de cette quadrique, il devient facile d'en achever la construction et de déterminer par des constructions linéaires le second point où cette surface rencontre une sécante arbitraire menée par un des points donnés.

143. Soit a un point commun à deux quadriques Q_1 et Q_2 harmoniquement circonscrites à une quadrique Q; et soit A le plan polaire de a par rapport à Q. Ce plan coupe, par hypothèse, Q_1 et Q_2 suivant des coniques C_1 et C_2 harmoniquement circonscrites à la section C de Q par ce plan. Toutes les quadriques qui passent par les points communs à Q_1 et à Q_2 coupent le plan A suivant des coniques qui passent par les points communs à C_1 et à C_2, et qui sont, par suite (nº **102**), harmoniquement circonscrites à C : toutes ces quadriques sont donc harmoniquement circonscrites à Q. Ainsi :

Quand deux quadriques d'un faisceau ponctuel sont harmoniquement circonscrites à une même quadrique, il en est de même de toutes les quadriques de ce faisceau.

Si les quadriques Q_1 et Q_2 se coupent suivant deux coniques, l'ensemble des plans de ces coniques constitue une quadrique du faisceau : ces plans sont donc conjugués à Q. En particulier, si Q_1 et Q_2 sont inscrites l'une à l'autre, le plan de leur courbe de contact est tangent à Q.

Si Q_1 et Q_2 sont homothétiques, le plan de leur conique commune située à distance finie passe par le centre de Q. Par exemple, si deux sphères sont harmoniquement circonscrites à Q, leur plan radical passe par le centre de cette quadrique; ce point a donc même puissance par rapport à toutes les sphères harmoniquement circonscrites à Q; autrement dit, celles-ci coupent orthogonalement une sphère fixe S concentrique à cette quadrique.

La sphère S est donc le lieu des centres des sphères points, ou cônes isotropes, harmoniquement circonscrits à Q, ou, ce qui revient au même, le lieu des sommets des cônes circonscrits à Q et harmoniquement inscrits aux cônes isotropes de mêmes sommets. Autrement dit, les cônes circonscrits à Q issus des points de S sont inscriptibles à des trièdres trirectangles, ce qui montre enfin que la sphère S constitue le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à Q.

En résumé :

Le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une quadrique est une sphère concentrique, qu'on nomme sa sphère orthoptique (1).

Les sphères harmoniquement circonscrites à une quadrique en coupent orthogonalement la sphère orthoptique (2).

144. La sphère orthoptique d'une quadrique est le lieu des points communs à trois plans tangents menés à cette quadrique par les côtés d'un triangle conjugué au cercle de l'infini; par une transformation homographique, on voit donc que :

Si, par les côtés d'un triangle variable conjugué à une conique C, *on mène trois plans tangents à une quadrique* Q, *le lieu de leur point commun est une quadrique qui passe par* C

(1) Cette généralisation du théorème de La Hire (n° 80) est due à MONGE.

(2) Théorème de FAURE.

et par rapport à laquelle le plan de C *admet le même pôle que relativement à* Q.

Corrélativement :

L'enveloppe des plans interceptés sur une quadrique Q *par les arêtes des trièdres conjugués à un cône* S *est une quadrique inscrite au cône* S, *et par rapport à laquelle le sommet de* S *admet le même plan polaire que par rapport à* Q.

Si le cône S est isotrope, on voit que l'enveloppe des plans interceptés sur une quadrique par les arêtes des trièdres trirectangles issus d'un même point est une quadrique de révolution admettant ce point pour foyer principal. Si ce point est le centre de la quadrique, l'enveloppe est donc une sphère concentrique.

145. De même que les sections par un même plan des quadriques d'un faisceau ponctuel forment un faisceau ponctuel de coniques, de même, les cônes issus d'un même point et circonscrits aux quadriques d'un faisceau tangentiel forment un faisceau tangentiel de cônes. Si deux de ces cônes sont harmoniquement inscrits à un même cône, ils le sont donc tous.

Si l'on considère, par exemple, les cônes circonscrits aux quadriques d'un faisceau tangentiel, et issus d'un point commun aux sphères orthoptiques de deux quadriques de ce faisceau, tous ces cônes se trouvent être harmoniquement inscrits au cône isotrope de même sommet; ce sommet appartient donc aux sphères orthoptiques de toutes les quadriques du faisceau. Par suite :

Les sphères orthoptiques des quadriques d'un faisceau tangentiel passent par un même cercle [1].

La perpendiculaire au plan de ce cercle en son centre est évidemment le lieu des centres des quadriques considérées (n° 126).

---

[1] PICQUET, *Bull. de la Soc. philom.*, p. 196-200; 1865.

Soient maintenant Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 quatre quadriques d'un même *réseau* tangentiel, et Q la quadrique de ce réseau qui (d'après le théorème corrélatif de celui du n° 127) appartient à la fois aux deux faisceaux tangentiels déterminés respectivement par les couples de quadriques Q_1 et Q_2, Q_3 et Q_4. Soient S_1, S_2, S_3, S_4 et S les sphères orthoptiques de ces quadriques. D'après le théorème précédent, les deux cercles communs aux sphères S_1 et S_2 d'une part, S_3 et S_4 d'autre part, sont situés sur la sphère S. Ces deux cercles ont donc deux points communs, qui appartiennent à la fois aux sphères S_1, S_2, S_3 et S_4. Par suite :

Les sphères orthoptiques des quadriques d'un réseau tangentiel passent par deux points fixes [1].

Le plan normal au segment limité par ces deux points en son milieu est évidemment le lieu des centres des quadriques du réseau (n° 128).

146. Comme on a déjà pu le remarquer à diverses reprises, certains théorèmes de Géométrie plane sur les coniques ont pour analogues dans l'espace des théorèmes de deux sortes : les uns étant relatifs à des quadriques, et d'autres à des cubiques gauches.

Aux propriétés des coniques harmoniquement circonscrites à une conique correspondent, par exemple, ainsi que nous venons de le voir, des théorèmes se rapportant aux quadriques harmoniquement circonscrites à une quadrique. On peut aussi considérer des cubiques gauches harmoniquement circonscrites à des quadriques.

Si une cubique gauche passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué à une quadrique, elle est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués à cette quadrique.

Soit, en effet, Γ une cubique gauche circonscrite à un tétraèdre T conjugué à une quadrique Q; toutes les quadriques qui contiennent cette cubique sont alors harmoniquement

---

[1] PICQUET, *Bull. de la Soc. philom.*, p. 196-250; 1863.

circonscrites à Q : par suite, α étant un point quelconque de Γ, elles coupent le plan polaire P de α par rapport à Q suivant des coniques harmoniquement circonscrites à cette quadrique. Or ces coniques ne sont évidemment assujetties qu'à passer par les trois points β, γ et δ où le plan P coupe la cubique Γ; il faut donc que le triangle $\beta\gamma\delta$ soit conjugué à la quadrique Q.

Réciproquement, si un triangle $\beta\gamma\delta$ inscrit à la cubique Γ est conjugué à la quadrique Q, le pôle α du plan $\beta\gamma\delta$ par rapport à Q est sur la cubique. En effet, le plan polaire de β par rapport à Q doit couper la cubique aux sommets d'un triangle conjugué à Q, et, comme γ et δ sont deux de ces sommets, le troisième est nécessairement α.

La cubique Γ est dite *harmoniquement circonscrite* à Q.

147. Supposons que le tétraèdre T soit orthocentrique et que la quadrique Q soit la sphère Σ conjuguée à ce tétraèdre. D'après ce qui précède, toute cubique gauche circonscrite au tétraèdre T et passant par le centre O de Σ coupera le plan polaire de O par rapport à Σ, c'est-à-dire le plan de l'infini, aux trois sommets d'un triangle conjugué à l'ombilicale; autrement dit :

Les cubiques gauches circonscrites à un tétraèdre orthocentrique et passant par son orthocentre sont équilatères.

Réciproquement :

Toute cubique équilatère circonscrite à un tétraèdre orthocentrique passe par son orthocentre.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS.

Applications des transformations homographiques et corrélatives.

148. Dans l'étude que nous venons de faire des principales propriétés des coniques et des quadriques, nous avons généralement déduit divers théorèmes d'un énoncé général qui les comprenait comme cas particuliers. Les transformations homographiques et corrélatives permettent souvent d'opérer d'une manière inverse : une propriété démontrée dans un cas particulier peut, en effet, fréquemment fournir un théorème plus général au moyen d'une transformation homographique. Nous en avons déjà vu un exemple dans les nos 85 et 137, dans lesquels nous avons montré que deux coniques ou deux quadriques peuvent être transformées l'une en l'autre par polaires réciproques : nous avons, par une transformation homographique, étendu au cas général cette propriété facile à concevoir dans le cas où les deux coniques ou les deux quadriques envisagées ont les mêmes axes. Nous allons encore indiquer quelques exemples de ce procédé de généralisation.

149. Les propriétés descriptives des cercles fournissent ainsi des propriétés des coniques.

Considérons, par exemple, les cordes d'un cercle vues sous un angle donné d'un point fixe, m', de cette courbe. Leur enveloppe est évidemment un cercle concentrique au premier. Si nous faisons une transformation homographique telle que les points cycliques se transforment en deux points quelconques a et b et le point m' en un point m, le cercle considéré se transforme en une conique Γ circonscrite au triangle mab, et les côtés d'un angle de grandeur donnée issu de m' ont pour transformées deux droites issues de m et telles (34) que le rapport anharmonique de ces droites et des droites ma et mb ait une valeur donnée. On voit donc que :

Les cordes interceptées sur une conique par les rayons homologues de deux faisceaux homographiques issus d'un même point de cette conique enveloppent une conique bitangente à la première aux points où elle coupe les rayons doubles des faisceaux considérés.

Considérons encore les cordes interceptées sur un cercle par les parallèles à des directions données issues d'un point variable de ce cercle : elles enveloppent encore un cercle concentrique. Par une transformation homographique, les points à l'infini des directions données deviennent deux points a et b, le cercle donné se transforme en une conique Γ, et aux cordes considérées correspondent les cordes interceptées sur Γ par les droites ma et mb, m se déplaçant sur Γ : on voit que cette enveloppe est une conique bitangente à Γ aux points où elle coupe la droite ab. Dans le cas particulier où les directions envisagées sont rectangulaires, l'enveloppe se réduit au centre du cercle donné; à cette hypothèse correspond, dans le cas général, celle que les points a et b sont conjugués à Γ : l'enveloppe considérée se réduit alors au pôle de la droite ab par rapport à cette conique. Autrement dit :

Il existe une infinité de triangles inscrits à une conique et circonscrits à un même triangle conjugué à cette conique.

Voici encore un exemple d'un théorème presque intuitif dans le cas de cercles, et qui fournit une propriété générale de deux coniques :

Soit a un point commun à deux cercles de centres f et f' : les tangentes en a à ces courbes, étant normales aux droites af et af', sont également inclinées sur ces droites. Par suite, il existe une conique de foyers f et f' qui touche ces deux tangentes; cette conique touche évidemment aussi les tangentes aux deux cercles menées en leur second point commun b. Une transformation homographique fait correspondre aux deux cercles deux coniques quelconques, les droites isotropes issues de f et de f' ayant pour transformées les tangentes à ces coniques aux points qui correspondent aux points cycliques; aux points a et b correspondent enfin les deux autres points communs à ces coniques. On voit ainsi que :

Les huit tangentes menées à deux coniques en leurs points communs touchent une même conique.

Corrélativement :

Les points de contact des tangentes communes à deux coniques sont huit points d'une même conique.

150. On pourrait multiplier les applications de ce genre; nous en indiquerons quelques-unes dans la suite; nous nous limiterons pour le moment à trois exemples.

Proposons-nous d'abord le problème suivant :

Trouver le lieu des foyers des paraboles qui passent par deux points fixes a et b et dont l'axe a une direction donnée.

Faisons une transformation homographique telle qu'aux points a et b correspondent les points cycliques de la nouvelle figure, et qu'aux points cycliques de la figure primitive correspondent deux points quelconques α et β. Le point à l'infini des axes considérés se transforme en un point γ de la droite $\alpha\beta$, et le lieu cherché a pour transformé le lieu du point d'intersection des tangentes menées par α et β aux cercles tangents en γ à la droite $\alpha\beta$. Or on voit sans peine, au moyen des propriétés élémentaires des rayons vecteurs d'une conique, que ce nouveau lieu est la conique de foyers α et β qui passe par γ; ce lieu est donc tangent aux droites qui joignent α et β aux points cycliques. Le lieu demandé est donc une conique tangente aux droites qui joignent les points cycliques aux points a et b, c'est-à-dire une conique de foyers a et b; une des asymptotes de cette conique est, d'ailleurs, parallèle à la direction donnée des axes.

151. Étant donnée une conique Γ, soit M un point arbitraire, et soient P et Q les points de contact des tangentes menées de M à Γ. Le cercle circonscrit au triangle MPQ coupe Γ en deux autres points P' et Q', tels (86) que le pôle M' de $P'Q'$ par rapport à Γ soit sur le cercle considéré. Nous allons montrer que les points M et M' et les deux foyers réels (ou les deux foyers imaginaires) de Γ sont quatre points d'un même cercle [1].

Transformons homographiquement la figure, de manière que les points M et M' aient pour transformés les points cycliques que nous désignerons par m et m'; la conique Γ se transforme en une conique γ et le cercle considéré a pour transformé (86) le cercle orthoptique de γ. Les deux foyers réels (ou imaginaires), F et F' de Γ, deviennent deux sommets opposés f et f' du quadrilatère formé par les tangentes

[1] Problème proposé en 1891 au Concours d'admission à l'École Normale (*voir*, par exemple, *Revue de Math. spéc.*, octobre 1891, p. 195).

à γ issues des points i et j, transformés des points cycliques de la première figure. Le problème initial se ramène donc à montrer que les points m, m', f, f', i et j sont sur une même conique; autrement dit, que les quatre points f, f', i et j sont sur un même cercle. Or les points i et j sont sur le cercle orthoptique considéré, puisque celui-ci est le transformé d'un cercle de la première figure; par suite, les tangentes if et if' sont rectangulaires, ainsi que les tangentes jf et jf'. Il en résulte que le cercle de diamètre ff' passe par i et j, ce qui démontre la propriété annoncée.

152. Considérons un cercle C passant par le centre ω d'une hyperbole équilatère H et tangent à cette courbe en un point a. Soit b le point diamétralement opposé à a dans l'hyperbole, et soient m et n les points communs à cette courbe et au cercle en question. La corde mn et le diamètre ab sont rectangulaires, car ces droites sont, en direction, symétriques de la tangente en a, la première par rapport aux axes (91), et la seconde par rapport aux asymptotes de H.

Le point n, par exemple, est donc (90) l'orthocentre du triangle abm, et, par suite, d'après un théorème connu de Géométrie élémentaire, si l'on désigne par h le point commun aux droites ab et mn, on a la relation

$$\overline{ha}.\overline{hb}+\overline{hm}.\overline{hn}=0.$$

Les points a, ω, m et n étant sur un même cercle, on a, d'ailleurs,

$$\overline{ha}.\overline{h\omega}=\overline{hm}.\overline{hn}.$$

De ces deux relations on déduit que h est le milieu du segment ωb. Le point m est donc équidistant des points ω et b, et, par suite, son symétrique p par rapport au centre ω est aussi équidistant des points ω et a. Le point a est donc sur le cercle de centre p qui passe par ω, et l'on voit, par suite, que :

Si, par le centre ω et par un point m d'une hyperbole équilatère, on mène les cercles tangents à la courbe en des points autres que m, ces points sont sur un cercle passant par ω et dont le centre est le symétrique p de m par rapport à ω.

Transformons homographiquement ce résultat : au triangle déterminé par le point ω et les points cycliques correspond un triangle arbitraire T; H se transforme en une conique Γ conjuguée à ce triangle, et le théorème précédent devient le suivant :

Étant donné un triangle T *conjugué à une conique* Γ, *on peut par tout point* m *de* Γ *faire passer quatre coniques circonscrites au triangle* T *et tangentes à* Γ *en des points différents de* m. *Ces points sont sur une même conique circonscrite à* T.

Supposons, en particulier, que le triangle T ait pour côtés la droite de l'infini et les axes de Γ. Les quatre coniques à considérer sont alors les hyperboles d'Apollonius relatives à Γ, qui passent par un point m de cette conique et lui sont tangentes; les quatre points de contact ainsi obtenus sont alors sur une même hyperbole d'Apollonius.

Les normales en ces quatre points sont donc concourantes. Or la normale au point m rencontre chacune d'elles au point où celle-ci touche la développée de Γ, puisque cette dernière équivaut à deux normales infiniment voisines menées de ce point à Γ. Inversement, les tangentes menées à la développée aux points où elle coupe la normale en m sont concourantes. Ainsi :

Si, à une développée de conique à centre on mène une tangente quelconque, celle-ci coupe la développée en quatre points différents du point de contact. Les tangentes à la développée en ces quatre points sont concourantes (¹).

153. Nous avons eu déjà l'occasion de définir (**84** et **113**) la transformation par polaires réciproques dans le plan et dans l'espace. Cette transformation, dont Poncelet fit un usage étendu, fut le premier exemple d'une transformation corrélative.

Nous avons vu comment, grâce à un théorème de La-

(¹) Ce théorème est dû à Laguerre. L'auteur de cet Ouvrage l'avait retrouvé en 1892 (*Revue de Math. spéc.*, fév. 1892, p. 257).

guerre (34), les relations angulaires peuvent se transformer, en général, par une transformation homographique ou corrélative; mais elles se transforment d'une manière particulièrement simple par polaires réciproques par rapport à une sphère ou à un cercle.

Il est bien évident, en effet, que l'angle de deux plans est égal à celui des droites qui joignent aux pôles de ces plans le centre de la sphère directrice; et l'on a une propriété analogue dans le plan.

La raison de cette simplicité de transformation des propriétés angulaires, c'est que, par exemple, dans le plan, les polaires des points cycliques par rapport à un cercle, qui sont évidemment les tangentes à ce cercle en ces points, sont les droites isotropes issues du centre ω de ce cercle. On voit, par suite, que la transformée d'un cercle quelconque, c'est-à-dire d'une conique passant par les points cycliques, est tangente aux droites isotropes issues de ω, ou, autrement dit, que cette transformée admet ω pour foyer. De même, dans l'espace, les polaires réciproques des sphères, relativement à une sphère, sont des quadriques de révolution admettant pour foyer principal le centre de la sphère directrice.

Par exemple, aux coniques de foyer ω, qui passent par trois points a, b et c, vont correspondre, par polaires réciproques relativement à un cercle de centre ω, les cercles tangents aux polaires des points a, b et c. De la construction bien connue des quatre cercles inscrits à un triangle, on déduit donc aisément une solution du problème de Halley (n°73), qui revient d'ailleurs à celle que nous avons indiquée, comme on s'en rend compte en remarquant qu'aux centres des quatre cercles en question correspondent les polaires du point ω par rapport aux quatre coniques à déterminer, c'est-à-dire leurs directrices relatives au foyer ω.

154. Indiquons deux applications de la transformation par polaires réciproques relativement à un cercle ou à une sphère.

Transformons d'abord la propriété suivante : les cordes d'un cercle Γ, vues sous un angle donné d'un point fixe ω de ce cercle, enveloppent un cercle C concentrique à Γ. Prenons bien évidemment, les traces sur le plan P des plans tangents à Q aux points où Γ coupe les génératrices ωi et ωj. Ces deux plans tangents passent d'ailleurs par le pôle p, par rapport à Q, du plan de Γ; les tangentes en i et j à Γ' se coupent donc au point p', où ωp perce le plan P.

Dans le cas particulier où le plan P est parallèle au plan tangent en ω, le point p' devient le centre de Γ'.

158. La représentation précédente permet donc de ramener l'étude des propriétés des coniques Γ', qui passent par i et j, à celle des sections planes Γ de la quadrique Q, et réciproquement. En voici un premier exemple :

Les deux points communs à deux coniques Γ_1 et Γ_2, situées sur Q, ont pour projections sur P les deux points, autres que i et j, où se coupent Γ'_1 et Γ'_2. Autrement dit, la seconde corde commune aux coniques Γ'_1 et Γ'_2 est la projection sur P de l'intersection des plans de Γ_1 et de Γ_2. Or, si nous considérons trois sections planes de Q, les intersections de leurs plans, pris deux à deux, passent évidemment par le point commun à ces trois plans; leurs projections sur P sont donc concourantes. Par suite :

Quand trois coniques d'un même plan ont deux points communs, les trois droites qui joignent les autres points que ces coniques ont deux à deux en commun sont concourantes.

En particulier :

Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux sont concourants.

159. Comme autre application, transformons le théorème suivant, qui résulte de ceux du n° 102 : si trois coniques harmoniquement circonscrites à une même conique C ont pour corde commune ij, les cordes communes conjuguées qu'elles admettent deux à deux, passent par le pôle α de ij par rapport à C.

Or, aux coniques harmoniquement circonscrites à C vont correspondre sur Q les sections par les plans qu'interceptent sur cette quadrique les arêtes des trièdres obtenus en joignant le point ω aux sommets des triangles conjugués à C, trièdres qui sont donc conjugués au cône de sommet ω et de directrice C. Les plans ainsi déterminés sont donc tels que les droites communes à trois quelconques d'entre eux, pris deux à deux, se coupent en un point de $\omega\alpha$; par suite, ces plans coupent tous $\omega\alpha$ au même point. Donc :

Les trièdres conjugués à un cône du second degré dont le sommet appartient à une quadrique, interceptent sur celle-ci des plans qui passent par un point fixe [1].

160. La représentation plane d'une quadrique permet de ramener ainsi les unes aux autres un grand nombre de questions relatives aux figures tracées sur une quadrique ou sur un plan.

Considérons, par exemple, sur la quadrique Q une biquadratique gauche passant par le centre de projection ω : sa projection sur le plan P est une cubique passant par les points i et j. On obtient d'ailleurs ainsi toutes les cubiques du plan P qui passent par i et j, car une telle cubique se trouve définie par la donnée de sept autres points (neuf points définissant en général une cubique), et les projections de ces sept points sur Q déterminent, avec ω, une biquadratique gauche située sur Q. Ainsi, l'étude des cubiques du plan P qui passent par i et j se ramène à celle des biquadratiques gauches de Q qui passent par ω [2].

A toutes les biquadratiques considérées qui passent par six points, en outre du point ω, correspondent donc des cubiques qui passent par six points, en outre des points i et j. Or les premières de ces courbes passent, d'après le n° 114, par un huitième point fixe; par suite, les cubiques considérées ont un neuvième point fixe. On voit ainsi comment l'étude des neuf points communs à deux cubiques d'un même plan peut se ramener à celle des huit points communs à trois quadriques.

---

(1) Dans le cas particulier où les trièdres considérés sont trirectangles, on a un théorème dû à FRÉGIER (1816).

(2) Cette remarque est due à M. PICQUET (*Bull. de la Soc. de Math.*, 1894, p. 25).

Inversion.

161. Un cas particulièrement intéressant de la transformation que nous venons d'étudier, est celui où les points i et j sont les points cycliques du plan P : il se produit lorsque, le point ω étant un ombilic de Q, le plan P est parallèle au plan tangent à Q en ce point. Les sections planes de Q se projettent ainsi sur le plan P suivant des cercles et réciproquement.

Dans le cas particulier où la quadrique Q est une sphère S, et où le plan tangent en ω est parallèle au plan P, on obtient la *projection stéréographique* qui était déjà connue de Ptolémée. Dans ce cas, la sphère S et le plan P peuvent d'ailleurs être considérés comme des surfaces se correspondant dans une transformation qui s'étend à tout l'espace, la *transformation par rayons vecteurs réciproques* ou par *inversion*, due à Bellavitis (1836).

C'est une transformation ponctuelle qui, étant donné un *pôle* fixe ω, fait correspondre à tout point m un point m' de la droite ωm, tel que le produit $\overline{\omega m}.\overline{\omega m'}$ ait une valeur donnée qu'on nomme *puissance* de la transformation. On voit que les points m et m' sont *réciproques;* autrement dit, l'inversion est une transformation *involutive.*

162. Si l'on considère la sphère Σ de centre ω dont le carré du rayon est égal à la puissance d'inversion, on voit que les points m et m' sont deux points conjugués à cette sphère, situés sur un même diamètre. L'inversion est donc un cas particulier de la transformation définie de la manière suivante :

Étant donnés une quadrique Q et un point fixe ω, on fait correspondre à tout point m le point m' où la droite ωm coupe le plan polaire de m par rapport à Q : on définit bien ainsi une transformation *involutive.*

Le transformé du point ω est indéterminé dans le plan polaire de ce point, puisque la droite ωm est alors indéterminée. Il existe encore un autre cas où le point m' est indéterminé : c'est celui où la droite ωm se trouve dans le plan polaire du point m, ce qui ne se produit que si elle est tangente à la quadrique Q au point m : le point m' est alors indéterminé sur la droite ωm, et, réciproquement, le point m correspond à tout point de cette droite. Désignons par Π le plan polaire de ω, et par Γ sa conique d'intersection avec Q.

Supposons que le point m engendre une surface (m) ne contenant ni le pôle ω, ni la conique Γ. Aux points d'intersection de cette surface avec le plan Π correspondent des points infiniment voisins de ω, situés sur les génératrices du cône de sommet ω qui admet pour directrice l'intersection en question; la surface (m') admet donc en ω un point multiple dont la multiplicité est égale au degré de (m). D'autre part, si l'on considère une droite quelconque issue de ω, à tout point de (m) situé sur cette droite correspond un point de (m'). On voit donc que le degré de (m') est double de celui de (m). D'autre part, la conique Γ est, sur (m'), une courbe multiple d'ordre égal au degré de (m), car chaque point de Γ correspond aux divers points d'intersection de (m) avec la droite qui le joint au pôle ω.

Dans le cas où la surface (m) admet ω pour point multiple d'ordre p, le degré de (m') et l'ordre de multiplicité de Γ diminuent de p unités, comme on le voit aisément. Si, au contraire, (m) admet Γ comme courbe multiple d'ordre q, le degré de (m) et l'ordre de multiplicité du pôle ω diminuent de $2q$ unités. Ainsi :

A une surface de degré n, admettant le pôle pour point multiple d'ordre p et les points de Γ pour points multiples d'ordre q, correspond une surface de degré $(n-p-2q)$, admettant le pôle pour point multiple d'ordre $(n-2q)$ et les points de Γ pour points multiples d'ordre $(n-p)$.

Dans le cas de l'inversion, la courbe Γ est l'ombilicale; on voit ainsi que l'inverse d'un plan est une sphère passant par le pôle, que l'inverse d'une sphère est une sphère, que l'inverse d'une quadrique est une surface du quatrième degré, admettant le pôle pour point double et l'ombilicale pour ligne double.

163. Il est d'ailleurs facile de trouver directement plusieurs de ces résultats.

Il est bien évident, en effet, que, si l'on considère toutes les inversions de même pôle, les différentes transformées d'une même figure seront homothétiques par rapport au pôle. Or, étant donnée une sphère quelconque, elle se transforme évidemment en elle-même, si l'on prend pour puissance d'inversion la puissance du pôle par rapport à cette sphère. Par suite :

La transformée d'une sphère est une sphère.

Dans le cas où la sphère se transforme en elle-même, deux points réciproques de cette sphère se correspondent évidemment aussi dans une transformation homologique, le centre d'homologie étant le pôle d'inversion et le plan d'homologie étant son plan polaire par rapport à la sphère. Par suite, à une courbe sphérique d'un certain degré en correspondra une du même degré; on en déduit que dans le cas général :

L'inversion conserve le degré des courbes sphériques.

Rappelons, enfin, que la figure inverse d'un plan est une sphère passant par le pôle, le plan tangent à cette sphère au pôle étant parallèle au plan considéré. La projection stéréographique est donc bien un cas particulier de l'inversion.

A deux plans vont donc correspondre deux sphères passant par le pôle ω et par le cercle qui correspond à l'intersection des deux plans. Comme les plans tangents en ω à ces deux sphères sont parallèles aux plans considérés, elles se coupent en tous leurs points communs sous un angle égal à celui des plans donnés. Comme, d'autre part, à des surfaces tangentes correspondent des surfaces tangentes, on voit que :

L'inversion conserve les angles.

164. Comme nous l'avons déjà remarqué (162) deux points a et b qui sont réciproques dans une inversion sont tels que toute sphère passant par a et b coupe orthogonalement une sphère fixe S. Il en résulte que :

Les figures inverses de deux figures inverses l'une de l'autre sont encore inverses l'une de l'autre.

En effet, si nous transformons par inversion la première figure, à la sphère S correspond une sphère S′ et aux points a et b deux points a' et b' tels que toutes les sphères qui passent par a' et b' coupent orthogonalement S′.

Si nous avions pris pour pôle d'inversion un point de S, la sphère S′ se réduirait à un plan, et les points a' et b' seraient symétriques par rapport à ce plan. On voit donc que :

On peut toujours transformer par inversion deux figures inverses en deux figures symétriques par rapport à un plan.

Deux courbes d'une même sphère qui sont perspectives l'une de l'autre peuvent être considérées comme des figures inverses; en les transformant par inversion, on aura donc encore deux figures inverses. En particulier :

Quand deux figures situées sur une même sphère sont en perspective, leurs projections stéréographiques se correspondent par rayons vecteurs réciproques.

165. Lorsqu'une courbe ou une surface se transforme en elle-même par inversion on dit qu'elle est *anallagmatique*. Du premier théorème du numéro précédent on déduit donc que :

L'inverse d'une figure anallagmatique est aussi anallagmatique.

On voit aussi que :

On peut, par inversion, transformer une figure anallagmatique en une figure ayant un plan de symétrie.

Enfin :

Une courbe anallagmatique plane peut être considérée comme la projection stéréographique de l'intersection d'une sphère et d'un cône.

Or, si l'on considère l'intersection d'une sphère S et d'un cône Σ, tout plan T tangent au cône coupe la sphère suivant un cercle qui est visiblement bitangent à cette intersection. Ce cercle coupe d'ailleurs orthogonalement le cercle de la sphère situé dans le plan polaire du sommet du cône. Par une projection stéréographique, ce cercle se transforme donc en un cercle Γ d'un plan P coupant orthogonalement un cercle fixe et ayant pour centre la projection du pôle du plan tangent T. Quand le plan T varie en restant tangent au cône Σ, son pôle décrit une courbe plane, située dans le plan polaire du sommet de Σ, et dont le degré est égal à la classe de ce cône. Le centre du cercle Γ décrit la projection de cette courbe sur le plan P, et la courbe anallagmatique envisagée est définie comme étant l'enveloppe du cercle Γ. On nomme *déférente* le lieu du centre de ce cercle, et *cercle directeur* le cercle qu'il coupe orthogonalement. Le centre de ce dernier est (157) la projection du sommet de Σ.

166. Les courbes anallagmatiques dont la déférente est une conique sont appelées *cycliques planes*. Le cône Σ est alors de la seconde classe, et, par suite :

Toute cyclique plane est la projection stéréographique d'une biquadratique sphérique (¹).

D'autre part, par toute biquadratique, il passe quatre cônes du second degré Σ; par suite, toute biquadratique sphérique est anallagmatique de quatre manières; il en résulte que :

Toute cyclique plane est anallagmatique de quatre manières.

Toute cyclique plane a donc quatre déférentes, qui sont toutes quatre des coniques, puisque les quatre cônes Σ sont de la seconde classe. Ces quatre coniques sont d'ailleurs les projections sur le plan P des coniques C de l'espace qui correspondent aux cônes Σ par polaires réciproques relativement à la sphère S. Par suite, les coniques C appartiennent à un même faisceau tangentiel, qui comprend la sphère S. Par tout point ω de l'espace, il passe donc quatre plans tangents à ces coniques et à la sphère S. Si le point ω est en particulier le centre de projection, ces quatre plans se cou-

(¹) LAGUERRE, *Bull. de la Soc. philom.*, 1867.

pent deux à deux suivant les génératrices de la sphère qui se croisent en ω. Les traces de ces plans sur le plan P sont donc des droites isotropes; il en résulte que les quatre déférentes ont quatre tangentes isotropes communes; autrement dit :

Les quatre déférentes sont homofocales.

A chaque déférente correspond un cercle directeur; le centre de chacun d'eux est la projection sur le plan P d'un des quatre cônes Σ considérés. Or ces quatre sommets déterminent un tétraèdre conjugué à la sphère S, et les cercles directeurs sont les projections stéréographiques des sections de S par les faces de ce tétraèdre. On en déduit que :

Les quatre cercles directeurs se coupent deux à deux orthogonalement.

Les sommets de trois des cônes Σ déterminent un triangle à la fois conjugué à la sphère S et au quatrième cône Σ; ce triangle est donc conjugué aussi à la conique C, polaire réciproque de ce dernier cône par rapport à Σ. Dans la projection on voit donc que :

Les centres de trois cercles directeurs sont les sommets du triangle conjugué à la fois au quatrième cercle directeur et à la déférente correspondante.

Les théorèmes qui précèdent permettent, étant donnés une déférente et son cercle directeur, de déterminer les trois autres déférentes et leurs cercles directeurs.

167. On peut considérer sous le nom de *transformation anallagmatique* la transformation qui fait correspondre dans le plan à une courbe quelconque, la courbe anallagmatique admettant la courbe donnée pour déférente, le cercle directeur étant donné : c'est une transformation de contact, qui à tout point m du plan fait correspondre le cercle ayant ce point pour centre et orthogonal à un cercle fixe Γ. A deux points conjugués au cercle Γ correspondent ainsi deux cercles qui se coupent orthogonalement, car ils peuvent, d'après ce qui précède, être considérés comme les projections stéréographiques des sections d'une sphère par deux plans conjugués à cette sphère.

A tous les points m d'une droite D correspondent ainsi des cercles qui passent par deux points fixes α et β, réciproques par rapport au cercle directeur. Si la droite D est tangente à une enveloppe quelconque, les points α et β décrivent la transformée anallagmatique de cette enveloppe. On voit ainsi qu'à chaque tangente commune à deux déférentes correspondent deux points communs à leurs transformées.

Considérons en particulier la famille de courbes anallagmatiques ayant le même cercle directeur Γ et dont les déférentes sont des coniques passant par quatre points fixes de ce cercle directeur. Considérons deux de ces déférentes et une de leurs tangentes communes D : à cette droite correspondent deux points α et β communs aux deux cycliques correspondantes. D'autre part, les deux points de contact de D avec les deux déférentes sont (n° 67) les points doubles de l'involution déterminée sur D par le faisceau des déférentes considérées; ils sont donc conjugués au cercle Γ, qui appartient à ce faisceau. Les cercles qui correspondent à ces points, et qui touchent les deux cycliques considérées en α et en β, se coupent donc orthogonalement en ces points; il en est donc de même des deux cycliques. Ainsi :

Les cycliques ayant un même cercle directeur et dont les déférentes passent par quatre points fixes de ce cercle forment un système orthogonal.

D'après la définition même des courbes anallagmatiques, les points communs au cercle directeur et à la déférente sont des cercles de rayon nul bitangents à ces courbes ou, d'après la définition de Plücker (n° 69), des foyers de ces courbes. On montre que, dans le cas des cycliques, la donnée de quatre foyers situés sur un même cercle directeur suffit à déterminer tous les autres; le théorème précédent peut donc s'énoncer ainsi :

Les cycliques homofocales forment un système orthogonal.

La démonstration que nous venons de donner peut s'étendre, dans l'espace, aux *surfaces* anallagmatiques dont la surface déférente est une quadrique, et qu'on nomme *cyclides*. A des déférentes passant par une même biquadratique gauche de la sphère directrice correspondent alors des cyclides qui forment un système triplement orthogonal ([1]).

168. Lorsque la déférente est une conique bitangente au cercle directeur, la cyclique correspondante se décompose en deux cercles. En effet, d'après ce que nous avons vu, si l'on fait passer une sphère par le cercle directeur, la courbe anallagmatique est la projection stéréographique de l'intersection de cette sphère par le cône qui, par rapport à cette sphère, correspond à la déférente par polaires réciproques. Or, dans le cas actuel, ce cône est un cône du second degré bitangent à la sphère, qu'il coupe donc suivant deux cercles.

169. Un autre cas de réduction est celui où la déférente est une parabole. Le cône qui correspond par polaires réciproques à cette parabole, par rapport à une sphère menée par le cercle directeur, passe en effet alors par le centre de la projection stéréographique considérée. Ce centre de projection appartient donc à l'intersection de ce cône avec la sphère, et cette courbe se projette donc suivant une cubique circulaire, qui est anallagmatique de quatre manières.

Comme les droites qui joignent un point d'une biquadratique gauche aux sommets des cônes qui la contiennent sont évidemment des cordes de cette courbe, on voit que les quatre pôles d'anallagmatie se trouvent alors sur la cubique. On se rend compte aisément qu'ils sont les points de contact des quatre tangentes à cette courbe parallèles à son asymptote réelle.

170. Les sections planes d'un tore offrent un exemple simple de cycliques. Le tore étant, en effet, l'enveloppe d'une

---

([1]) Dans l'Ouvrage de M. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*, le lecteur trouvera d'intéressants développements de ces propriétés, qui ont été étudiées par MM. Mannheim, Moutard, Laguerre, Darboux, Humbert, etc.

sphère Σ de grandeur donnée, dont le centre décrit un cercle Γ, toute section par un plan P peut être considérée comme l'enveloppe des cercles C suivant lesquels le plan P coupe les sphères Σ. Or tout point de l'axe du tore a même puissance par rapport aux sphères Σ; par suite, le point ω où cet axe perce le plan P a même puissance par rapport aux cercles C, dont le centre décrit d'ailleurs l'ellipse suivant laquelle le cercle Γ se projette orthogonalement sur le plan P. Le cercle directeur est, dans ce cas, concentrique à la déférente : les cycliques ainsi obtenues sont aussi appelées *spiriques.*

Dans le cas d'un plan bitangent au tore, on se rend compte aisément que la déférente est bitangente au cercle directeur. Par suite :

La section d'un tore par un plan bitangent se compose de deux cercles.

En remarquant que la figure inverse d'un tore par rapport à un point de son axe est encore un tore, M. Mannheim a généralisé le théorème précédent, dû à Villarceau, et obtenu l'énoncé suivant :

Toute sphère bitangente à un tore le coupe suivant deux cercles.

171. Comme autre application de l'inversion, transformons le théorème suivant, dont la démonstration est immédiate : Si l'on considère tous les cercles d'un plan P qui ont en un point a une tangente donnée, le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée se compose de deux droites rectangulaires issues du point a.

En prenant pour pôle d'inversion un point quelconque β de l'espace, le plan P se transforme en une sphère passant par β, les cercles considérés deviennent des cercles A de cette sphère ayant en un point α une tangente donnée; enfin les droites du plan P qui ont une direction donnée ont pour transformées des cercles B de la sphère ayant en β une tangente donnée. Le lieu considéré se transforme donc en celui des points de contact des cercles A et B, qui se compose donc de deux cercles orthogonaux passant par a et b.

Soit m un point de ce lieu : la tangente commune menée en ce point aux deux cercles A et B qui s'y touchent rencontre à la fois les deux tangentes fixes données qui passent par α et β; le lieu peut donc être considéré comme celui des points de contact des tangentes à la sphère qui en rencontrent deux tangentes fixes. Ainsi :

Le lieu des points de contact des tangentes à une sphère qui s'appuient sur deux tangentes fixes se compose de deux cercles qui se coupent orthogonalement aux points de contact des tangentes fixes (1).

172. Deux points réciproques d'une inversion étant deux points conjugués à une sphère fixe appartenant à un même diamètre, chacun d'eux est évidemment la projection du centre de la sphère sur le plan polaire de l'autre par rapport à cette sphère; on en déduit que :

La podaire d'un point ω par rapport à une surface et la polaire réciproque de cette surface par rapport à une sphère de centre ω sont deux figures inverses, ω étant le pôle d'inversion.

D'après le théorème général du n° **162**, il résulte de là que :

La podaire d'un point ω par rapport à une surface de classe n est, en général, une surface de degré $2n$, admettant le point ω et les points de l'ombilicale pour points multiples d'ordre n.

Les cas d'exception sont ceux où la surface considérée est telle que sa polaire réciproque par rapport à une sphère de centre ω passe par ω ou par l'ombilicale; il faut pour cela que cette surface soit tangente au plan de l'infini ou inscrite au cône isotrope de sommet ω. Par exemple :

La podaire d'un point ω par rapport à un paraboloïde est une surface du troisième degré passant par l'ombilicale et admettant ω pour point double.

---

(1) Cette application est due à M. Mannheim, *Bull. de la Soc. math.*, t. XXV, p. 79; 1897.

La podaire d'un foyer principal d'une quadrique de révolution par rapport à cette surface est une sphère.

On voit, d'une manière générale, que les podaires des quadriques sont des inverses de quadriques, et réciproquement.

Les propriétés analogues ont lieu dans le plan. On voit, en particulier, que l'inverse d'une conique par rapport à un de ses foyers est la podaire d'un cercle, podaire qu'on nomme *limaçon de Pascal.* La podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est inverse de cette hyperbole elle-même, car celle-ci se transforme évidemment en elle-même par polaires réciproques relativement au cercle décrit sur son axe transverse comme diamètre : cette podaire est connue sous le nom de *lemniscate de Bernoulli.*

Transformons, par exemple, par inversion le premier théorème énoncé dans le n° 153, en prenant pour pôle le centre ω de l'hyperbole équilatère considérée : celle-ci se transforme en lemniscate, et aux quatre cercles considérés correspondent les tangentes menées à cette lemniscate par un de ses points; leurs points de contact sont sur une même droite. Cette droite correspond d'ailleurs à un cercle passant par ω et dont le centre décrit l'hyperbole considérée : l'enveloppe de ce cercle est donc une lemniscate, puisque cette enveloppe est homothétique de la podaire du lieu du centre, et son inverse est une hyperbole équilatère. En résumé :

Par tout point d'une lemniscate de Bernoulli, on peut mener quatre tangentes à cette courbe : leurs points de contact sont sur une droite dont l'enveloppe est une hyperbole équilatère.

D'après ce que nous venons de dire, par polaires réciproques relativement à une sphère Σ, de centre ω, il correspond à une sphère S une quadrique de révolution admettant ω pour foyer principal et dont la sphère principale S' (podaire de ω) est une figure inverse de S. Par suite, à toutes les sphères S orthogonales à une sphère fixe correspondront ainsi des quadriques de révolution dont les sphères principales couperont orthogonalement une sphère fixe. Du théorème de Faure (n° 143), on déduit ainsi le suivant :

Étant donnés un point fixe ω et une quadrique Q, la sphère *qui passe par les projections du point ω sur les faces d'un tétraèdre conjugué à Q coupe orthogonalement une sphère fixe, quel que soit le tétraèdre considéré.*

Dans le cas particulier où Q est un hyperboloïde équilatère, cette sphère fixe se réduit à un plan.

Si le point ω est le centre de Q, ce point a même puissance par rapport aux différentes sphères considérées; cette puissance est, comme on sait, égale au carré du rayon de l'équateur des quadriques de révolution admettant ω pour foyer principal et les sphères en question pour sphères principales. Par suite :

Les quadriques de révolution harmoniquement inscrites à une quadrique fixe dont elles admettent le centre pour foyer principal ont le même rayon équatorial.

Transformations quadratiques.

173. La transformation par inversion est un cas particulier de la *transformation quadratique,* que nous nous bornerons à définir dans le cas de figures planes.

Considérons deux transformations corrélatives d'une figure plane : à tout point m de cette figure correspondent ainsi deux droites qui se coupent en un point m' : la transformation quadratique fait correspondre le point m' au point m.

Une transformation corrélative plane faisant, d'après le n° 63, correspondre à tout point (α, β, γ) la droite

$$Ax + By + Cz = 0,$$

A, B et C étant trois fonctions linéaires de α, β et γ, se trouve définie si l'on assujettit les droites corrélatives de huit points donnés à passer par huit points donnés. Si l'on ne se donne que sept couples de points associés de cette manière, la corrélation ne sera plus définie; l'équation de la corrélative d'un point donné renfermera linéairement un paramètre arbitraire. Par suite, toutes les corrélations ainsi obtenues seront telles que les diverses corrélatives d'un même point m passeront par un même point m'. D'après la définition de la transformation quadratique, les points m et m' se correspondent dans une telle transformation. On voit donc que :

En général, une transformation quadratique se trouve définie par la donnée de sept couples de points correspondants.

Nous savons (n° 62) qu'il existe en général trois points qui ont les mêmes corrélatives dans deux corrélations données; dans une transformation quadratique, il y aura donc généralement trois *pôles* tels que le point correspondant à chacun d'eux sera indéterminé sur une droite; nous désignerons les trois droites ainsi obtenues sous le nom de *droites singulières* de la transformation. Le point commun à deux de ces droites correspond d'ailleurs à tout point de la droite déterminée par les deux pôles correspondants.

174. De la définition même de la transformation quadratique, il résulte qu'une telle transformation, suivie d'une transformation homographique, revient encore à une transformation quadratique. Or, étant donnée une transformation quadratique arbitraire (m, m'), de pôles α, β, γ et de droites singulières A, B, C, considérons une transformation homographique (m', m'') dans laquelle les droites A, B et C correspondent aux droites bc, ca et ab. La transformation (m, m'') sera une transformation quadratique spéciale, telle que la droite qui joint deux des pôles soit la droite singulière qui correspond au troisième de ces pôles : on la désigne sous le nom de *transformation du second ordre*. On voit donc que :

Toute transformation quadratique revient à une transformation du second ordre, suivie d'une homographie.

Nous pouvons donc nous borner à l'étude de la transformation du second ordre.

Nous désignerons le triangle des pôles sous le nom de *triangle fondamental.*

175. Par suite de la définition de la transformation quadratique, si le point m décrit une droite Δ, son conjugué m', dans une transformation du second ordre, décrit généralement une conique. En effet, les droites qui correspondent au point m dans les deux corrélations envisagées pivotent chacune autour d'un point fixe et engendrent deux faisceaux homographiques dont les rayons homologues se coupent sur une conique. Cette conique passe d'ailleurs par les trois pôles, dont chacun correspond au point où la droite Δ coupe le côté opposé du triangle fondamental.

Il n'y a exception que si la droite Δ passe par un des pôles; les faisceaux homographiques envisagés ont en effet alors un rayon homologue commun, qui est la droite singulière correspondant à ce pôle, et le point m' décrit alors aussi une droite passant par ce pôle.

A une courbe (m) de degré n correspondra en général une courbe (m') de degré $2n$; en effet, toute conique circonscrite au triangle fondamental coupe (m) en $2n$ points, et cette conique se transforme en une droite qui coupe (m') aux $2n$ points correspondants. D'ailleurs la courbe (m') admet les pôles pour points multiples de degré n, puisque chacun de ces pôles correspond aux n points où la courbe (m) coupe le côté opposé du triangle fondamental.

Le degré de (m') s'abaisse d'ailleurs, quand la courbe (m) passe par un des pôles, du nombre d'unités qui exprime l'ordre de multiplicité de ce pôle, et l'ordre de multiplicité des deux autres pôles sur (m') s'abaisse du même nombre.

Ainsi :

A une conique correspond en général une courbe du quatrième degré admettant les pôles pour points doubles.

A une conique passant par un des pôles correspond une cubique admettant ce pôle pour point double et passant par les deux autres.

A une conique passant par deux des pôles correspond une conique passant par ces deux pôles.

A une cubique passant par les trois pôles correspond une cubique analogue.

176. Nous avons remarqué qu'à toute droite A issue d'un des pôles α, correspond une droite A' issue du même pôle. Les droites A et A' engendrent évidemment deux faisceaux homographiques. D'autre part, comme le conjugué du pôle β est indéterminé sur $\alpha\gamma$, la droite $\alpha\gamma$ est la transformée de $\alpha\beta$;

de même $\alpha\beta$ correspond à $\alpha\gamma$. Il en résulte (n° 35) que les faisceaux homographiques A et A′ sont réciproques, ou, autrement dit, que les droites A et A′ sont conjuguées dans une involution admettant $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ pour rayons conjugués. Par suite :

Une transformation du second ordre est involutive et se trouve définie par son triangle fondamental et par un couple de points conjugués.

Les rayons doubles de l'involution AA′ se correspondent à eux-mêmes; ainsi, par chaque pôle, il passe deux droites doubles de la transformation, qui sont conjuguées par rapport aux côtés du triangle fondamental. Deux droites doubles issues de deux pôles différents se coupent évidemment en un point double : la donnée d'un tel point suffit, avec celle du triangle fondamental, pour définir la transformation, qui admet trois autres points doubles. On voit que le triangle fondamental est le triangle diagonal du quadrangle déterminé par les *quatre points doubles.*

En se donnant ces quatre points doubles, on définit donc encore la transformation; celle-ci revient, par suite, à associer à tout point m le point fixe m' où concourent les polaires du point m relativement aux coniques qui passent par les quatre points doubles. On voit ainsi que sur toute droite Δ il existe un couple de points conjugués : ce sont les points doubles p et q de l'involution déterminée sur cette droite par les coniques du faisceau considéré. A la droite Δ correspond, par suite, la conique circonscrite au triangle fondamental et qui passe par p et q.

177. Si, par exemple, le faisceau linéaire de coniques qui définit la transformation est composé d'hyperboles équilatères, les points cycliques forment le couple de points conjugués situés sur la droite de l'infini : ils se transforment donc l'un en l'autre. A la droite de l'infini, correspond le cercle circonscrit au triangle fondamental, et à tout cercle correspond une quartique circulaire à trois points doubles.

Cette transformation particulière jouit encore d'une autre propriété importante, qui provient d'ailleurs de ce que les droites isotropes issues d'un même pôle se transforment l'une en l'autre : elle conserve les angles de deux droites issues d'un même pôle. On voit, en effet, qu'à ces droites correspondent leurs symétriques par rapport aux droites doubles menées par le pôle considéré.

178. Comme application de cette transformation spéciale, nous allons traiter le problème suivant :

Trouver le lieu du quatrième point commun à deux paraboles circonscrites à un triangle donné et dont les axes font entre eux un angle donné ([1]).

Prenons le triangle donné pour triangle fondamental d'une transformation du second ordre : puisqu'il correspond une droite à toute conique circonscrite au triangle fondamental et que, d'autre part, le cercle Γ circonscrit à ce triangle correspond à la droite de l'infini, les paraboles P circonscrites au triangle fondamental auront pour transformées les droites Δ tangentes au cercle Γ; au quatrième point m commun à deux paraboles P correspondra le point m' d'intersection des droites Δ correspondantes, et les points à l'infini de ces paraboles auront pour conjugués les points a où ces droites Δ touchent Γ. L'angle des axes de ces deux paraboles est donc égal à celui des droites qui joignent les points a à l'un quelconque des pôles. Si cet angle a une valeur donnée, le point m' décrit évidemment un cercle concentrique à Γ, c'est-à-dire bitangent à Γ aux points cycliques; le point m décrit alors la transformée de ce cercle, c'est-à-dire une courbe du quatrième degré à trois points doubles, bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques.

Dans le cas particulier où l'angle donné est droit, les deux tangentes Δ sont parallèles, et le lieu cherché se réduit au cercle circonscrit au triangle donné, résultat évident, puisque les points communs à deux paraboles dont les axes sont rectangulaires sont (n° 91) sur un même cercle.

([1]) Problème proposé en 1874, au Concours d'admission à l'École Polytechnique.

179. Nous avons vu précédemment qu'à toute conique il correspond une quartique ayant pour points doubles les sommets du triangle fondamental. Les tangentes en chaque sommet sont les droites conjuguées de celles qui joignent ce sommet aux points où le côté opposé coupe la conique considérée. Si celle-ci est inscrite au triangle fondamental, on voit que les points doubles seront de rebroussement. Si elle lui est conjuguée, les tangentes en chaque pôle seront conjuguées aux côtés du triangle fondamental issus de ce point; ces tangentes correspondent alors aux tangentes menées des pôles à la conique conjuguée au triangle : il en résulte qu'elles coupent la quartique en trois points infiniment voisins; autrement dit, elles sont d'inflexion.

Si nous transformons de cette manière le second théorème énoncé au n° 152, en prenant T pour triangle fondamental; nous voyons donc que :

Lorsqu'une quartique a trois points doubles d'inflexion, les quatre tangentes qu'on peut lui mener d'un de ses points ont leurs points de contact en ligne droite (¹).

180. *Si* A, B, C, A′, B′ *et* C′ *désignent six droites tangentes à une même conique, il existe une transformation du second ordre telle que les droites* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′ *soient respectivement réciproques* (²).

Les trois pôles sont les points (AA′), (BB′) et (CC′), et l'on achève de déterminer la transformation en se donnant les points réciproques (AB) et (A′B′); les droites A et A′, B et B′ sont bien alors réciproques. Quant aux droites réciproques issues du point (CC′), elles forment un faisceau involutif, dont on a deux couples de rayons conjugués en joignant le point (CC′), d'une part aux points (AA′) et (BB′) et, d'autre part, aux points (AB) et (A′B′) : ce faisceau involutif est donc celui des tangentes menées de (CC′) aux coniques inscrites au qua-

(¹) LAGUERRE, *Nouvelles Annales*, 1878. *Voir* aussi le problème proposé au Concours général en 1893.

(²) DUPORCQ, *Bull. de la Soc. math.*, p. 81; 1898.

drilatère formé par les droites A, A′, B, B′. La propriété annoncée en résulte.

S'il existe une conique tangente à la droite A et circonscrite au pentagone A′BB′CC′, celle-ci se transformera ainsi en une conique tangente à la droite A′ et circonscrite au pentagone AB′BC′C. Par suite :

Si A, A′, B, B′, C *et* C′ *sont six tangentes à une conique, telles que la conique circonscrite au pentagone* A′BB′CC′ *touche la droite* A, *la conique circonscrite au pentagone* AB′BC′C *touchera la droite* A′.

Corrélativement :

Soit 123456 *un hexagone inscrit à une conique et tel que la conique inscrite au pentagone* 23456 *passe par le point* 1 : *la conique inscrite au pentagone* 14365 *passera par le point* 2 [1].

181. Étant données deux transformations corrélatives (a, A_1) et (a, A_2), qui à tout point a d'un plan P font respectivement correspondre des droites A_1 et A_2 d'un plan P′ dont nous désignerons le point d'intersection par a', la transformation (a, a') représente la transformation quadratique la plus générale, d'après la définition même (nº 173) de cette transformation.

Considérons maintenant une autre transformation analogue (a, a''), résultant de deux nouvelles transformations corrélatives (a, A_3) et (a, A_4), et proposons-nous de chercher les points a du plan P tels que les points a' et a'' correspondants coïncident.

Il faut et il suffit pour cela que les quatre droites A_1, A_2, A_3 et A_4 soient concourantes.

Cherchons donc d'abord le lieu des points a tels que les trois droites A_1, A_2 et A_3 soient concourantes. Quand le point a décrit une droite arbitraire Δ, les droites A_1, A_2 et A_3 pivotent autour de trois points fixes λ_1, λ_2 et λ_3 : le point commun aux droites A_1 et A_2 décrit (nº 175) une conique passant par λ_1 et

(1) HUMBERT, *Comptes rendus*, 1898. — On voit que de l'existence d'une conique inscrite à un pentagone et passant par un point on déduit celle de cinq coniques analogues.

λ_2, et les droites A_1 et A_3 se coupent de même sur une conique passant par λ_1 et λ_3. Les trois points, autres que λ_1, qui sont communs à ces deux coniques correspondent à trois positions du point a sur Δ, pour chacune desquelles les trois droites corrélatives A_1, A_2 et A_3 sont concourantes. Le lieu cherché est donc une cubique Γ_4, qui passe d'ailleurs évidemment par les trois positions α, β et γ du point a pour lesquelles les droites A_1 et A_2 coïncident.

Nous obtiendrons de même une cubique Γ_3, telle que les droites A_1, A_2 et A_4 correspondant à ses points soient concourantes. Les deux cubiques Γ_3 et Γ_4 se couperont en six points différents de α, β et γ, et tels que les points a' et a'' correspondants coïncident. Ainsi :

Étant données dans un même plan deux transformations quadratiques d'une même figure plane, il existe généralement six points de cette figure tels que les deux points correspondants coïncident.

182. Ceci posé, considérons toutes les transformations quadratiques (a, a'') telles que pour cinq positions données 1, 2, 3, 4, 5 du point a le point a'' coïncide avec le point a', conjugué du point a dans une transformation quadratique donnée. Toutes les cubiques qui passent par ces cinq points et par les pôles α, β, γ de la transformation (a, a') ont un neuvième point fixe 6, et il résulte de la démonstration qui précède que le point $6'$ coïncide avec $6''$. Donc :

La donnée de cinq couples de points conjugués dans une transformation quadratique de deux figures planes en détermine un sixième [1].

183. Voici une application de cette propriété. Elle repose sur le théorème suivant :

Étant données dans l'espace deux positions d'une même

---

[1] DUPORCQ (*C. R.*, 16 mai 1898). — Dans le cas où les cinq couples donnés sont conjugués dans une transformation homographique, le sixième couple n'est plus déterminé : il existe alors une infinité de couples de points conjugués, qui se correspondent homographiquement sur deux coniques.

droite, les plans perpendiculaires au milieu des segments qui joignent deux positions d'un même point de cette droite passent par une droite fixe, quel que soit le point choisi sur la droite.

Soient, en effet, a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2 les deux positions prises par trois points a, b et c de la droite considérée. Soit m un point quelconque de l'intersection des plans perpendiculaires aux segments a_1, a_2 et b_1, b_2 en leurs milieux : ce point est équidistant des points a_1 et a_2, ainsi que des points b_1 et b_2. Les triangles ma_1b_1 et ma_2b_2 sont donc égaux; en les faisant coïncider, on amènera aussi en coïncidence c_1 et c_2; par suite, le point m est équidistant de ces points, et se trouve, par suite aussi, dans le plan normal au milieu du segment c_1c_2.

Ceci posé, considérons dans l'espace deux positions P_1 et P_2 d'un plan P, et soit P' un plan fixe; désignons par a_1 et a_2 les deux positions d'un même point a du plan P, et faisons correspondre à ce point la droite A_3 suivant laquelle le plan P' coupe le plan normal au milieu du segment a_1a_2. D'après le théorème précédent, cette transformation est corrélative, car, si le point a décrit une droite du plan P, la droite A_3 passe par un point fixe du plan P'. En considérant une troisième position P_3 du plan P, on associera de même à tout point a de ce plan la droite A_2 du plan P', située dans le plan normal au milieu de a_1a_3.

Des deux transformations corrélatives (a_1A_3) et (a_1A_2) nous déduisons une transformation quadratique (a, a') : le point a', commun aux droites A_3 et A_2, est, par suite, équidistant des points a_1, a_2 et a_3; c'est, en définitive, le point où le plan P' coupe l'axe de la circonférence $(a_1a_2a_3)$.

Or, en se donnant les distances de cinq points donnés du plan P à cinq points donnés du plan P', on ne détermine pas la position du plan P, puisqu'il faut, comme on sait, six conditions indépendantes pour déterminer dans l'espace la position d'une figure égale à une figure donnée. Le plan P peut donc se déplacer dans l'espace de sorte que cinq de ses points restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan fixe P'. Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre de ses positions. On aura deux transformations quadratiques (a, a') et (a, a'') en associant au point a les points où le plan P′ coupe les axes des circonférences $(a_1 a_2 a_3)$ et $(a_1 a_2 a_4)$. Or dans ces transformations on a cinq couples de points conjugués, indépendants des quatre positions choisies du plan P; il en existe donc un sixième, d'après le numéro précédent. Donc :

Si un plan P *se déplace dans l'espace de sorte que cinq de ses points restent sur des sphères dont les centres appartiennent à un plan fini* P′, *il existe dans le plan* P *un sixième point jouissant de la même propriété* (¹).

On voit ainsi que si 6 et 6′ forment le sixième couple de points conjugués dans toutes les transformations quadratiques qui admettent cinq couples donnés de points conjugués 1 et 1′, 2 et 2′, 3 et 3′, 4 et 4′, 5 et 5′, on peut placer les deux figures 123456 et 1′2′3′4′5′6′ dans une *position relative arbitraire,* et relier par six tiges articulées les points correspondants sans que le système obtenu cesse d'être déformable.

184. La transformation quadratique est un cas particulier des *transformations birationnelles :* on nomme ainsi les transformations telles qu'à tout point de l'une des figures ne corresponde en général qu'un point de l'autre. Il existe toujours alors des *points singuliers* dont les conjugués ne sont pas déterminés.

Ces transformations ont été étudiées par le géomètre italien Cremona, qui a montré qu'elles peuvent toujours se ramener à une suite de transformations quadratiques.

Transformation de Lie.

185. On peut imaginer beaucoup d'autres modes de transformation des figures; on peut, d'une manière générale, faire se correspondre entre eux d'une infinité de manières tous les êtres géométriques qui dépendent d'un même nombre de pa-

(¹) DUPORCQ, *loc. cit.*

ramètres arbitraires. Par exemple, on peut associer entre eux les points de l'espace et les cercles d'un plan, les droites de l'espace et les sphères, etc.

Parmi ces diverses transformations, les transformations de contact sont celles qui méritent le plus d'être étudiées, car elles jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles, où les a introduites le génie de Sophus Lie.

Au début de cet Ouvrage, nous avons déjà indiqué (nos 18 à 22) comment peuvent s'obtenir ces transformations : comme nous l'avons vu, on peut définir chacune d'elles en associant à tout point de l'espace une *multiplicité* (n° 22) qui peut être, selon les cas, une surface, une courbe ou un point. Toutes les multiplicités qui correspondent ainsi aux divers points de l'espace, et dépendent, par suite, de trois paramètres indépendants, forment ce qu'on nomme un *complexe*. Si l'on ne considère que les multiplicités qui correspondent aux points d'une surface S, on obtient une *congruence :* toutes ces multiplicités contiennent chacune un ou plusieurs éléments de contact d'une même multiplicité fixe, qui est justement celle qui correspond à la surface S dans la transformation de contact envisagée.

186. Une classe intéressante de transformations de contact comprend celles dans lesquelles les multiplicités qui correspondent aux divers points m de l'espace sont des droites Δ. Ces droites forment un complexe; aux points d'une courbe correspondent les génératrices d'une surface réglée, et, à ceux d'une surface, les droites d'une congruence.

A deux courbes passant par un même point m correspondent ainsi deux surfaces réglées admettant Δ pour génératrice commune : ces deux surfaces se touchent donc, comme on sait, en deux points de Δ; les deux éléments de contact ainsi communs à ces surfaces correspondent tous deux à l'élément de contact commun aux deux courbes envisagées. Si le point m décrit une surface S on voit donc que les droites Δ de la congruence correspondante touchent chacune en deux points la multiplicité qui correspond à S; celle-ci est appelée la *focale* de la congruence. Elle a deux nappes, qui peuvent, dans certains cas, être algébriquement distinctes.

Ce cas se produit, par exemple, si le complexe des droites Δ est formé par les tangentes à une multiplicité fixe : c'est ce qui arrive pour la transformation de Lie, dont nous allons dire quelques mots; les droites Δ sont alors celles du complexe formé par les droites isotropes.

187. L'exposé de cette transformation se simplifie au moyen des remarques suivantes :

Nous avons vu (n° 28) que le rapport anharmonique des quatre points où une génératrice d'une quadrique rencontre quatre génératrices fixes de l'autre système est constant : on peut l'appeler le *rapport anharmonique des quatre génératrices* en question. Nous désignerons de plus par *demi-quadrique* l'ensemble formé par les génératrices d'un même système d'une quadrique.

Ceci posé, étant données deux demi-quadriques Q et Q', si l'on associe deux à deux leurs génératrices G et G' de manière qu'à toute génératrice G ne corresponde qu'une génératrice G' et réciproquement, on dira que G et G' *divisent homographiquement* les demi-quadriques Q et Q'. Si l'on considère sur chacune de ces surfaces une génératrice de système différent de celui de G ou de G', les génératrices G et G' correspondantes y tracent évidemment deux divisions homographiques; on en déduit l'égalité des rapports anharmoniques des quatre génératrices G et des quatre génératrices G' correspondantes.

188. Soient maintenant Q, Q' et Q'' trois demi-quadriques passant par une même conique Γ, et ayant une génératrice commune A. Considérons d'autre part les génératrices Δ d'une autre demi-quadrique S, contenant également la conique Γ. Chaque droite Δ coupe Q, Q' et Q'' en trois points extérieurs à Γ, par chacun desquels il passe une génératrice G, G' ou G'' des demi-quadriques Q, Q' ou Q''. Ces génératrices se correspondent homographiquement sur ces surfaces, car la donnée de l'une détermine évidemment les deux autres; d'ailleurs la génératrice A se correspond évidemment à elle-même.

Réciproquement, considérons sur Q, Q' et Q'' trois divisions homographiques de génératrices G, G' et G'' telles que la génératrice A coïncide avec ses homologues. A tout groupe de droites homologues G, G′ et G″ correspond une droite unique [1] Δ, qui s'appuie à la fois sur G, G′, G″ et Γ. Ces droites Δ engendrent une demi-quadrique passant par Γ, car une telle demi-quadrique est définie par deux positions de Δ, et, d'autre part, les trois divisions homographiques considérées sont déterminées par la donnée de deux groupes de génératrices homologues (en outre de celui des génératrices A).

189. Ces remarques faites, passons à l'étude de la *transformation de Lie*. On peut la définir en disant qu'*à tout point de l'espace elle fait correspondre une droite isotrope, de telle manière que, à des points en ligne droite correspondent des génératrices d'un même système d'une sphère.*

Nous allons montrer qu'on peut définir une telle transformation de sorte qu'à cinq points arbitraires de l'espace, 1, 2, 3, 4 et 5, correspondent cinq droites isotropes quelconques, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 et Δ_5.

Désignons en effet par D_{123} la droite isotrope unique qui s'appuie à la fois sur Δ_1, Δ_2 et Δ_3; considérons de même les droites D_{124} et D_{125}. Ces trois droites isotropes appartiennent à la sphère déterminée par les génératrices Δ_1 et Δ_2 : elles définissent donc une *demi-sphère* S_{12}. Soit maintenant m un point quelconque de l'espace : au plan $12m$ faisons correspondre sur S_{12} la génératrice D_{12} telle que le rapport anharmonique des quatre génératrices D_{123}, D_{124}, D_{125} et D_{12} soit égal au rapport anharmonique $12\,(345m)$. Définissons de même, sur les demi-sphères S_{23} et S_{31}, analogues à S_{12}, des génératrices D_{23} et D_{31}, correspondant aux plans $23m$ et $31m$. Désignons enfin par Δ la droite isotrope unique qui s'appuie

---

[1] On suppose, bien entendu, que Δ coupe G, G′ et G″ en dehors de Γ. Il n'existe qu'une telle droite, car la quadrique ΓGG′ ne peut couper Q″ suivant une génératrice G″ : elle la couperait en effet aussi suivant une génératrice de système différent; il faudrait donc que G et G′ coupassent Q″ en des points d'une même génératrice, de système différent de celui de A; or on suppose que les génératrices, autres que A, suivant lesquelles Q″ coupe Q et Q′, ne sont pas confondues. Il n'y a exception que si G, G′ et G″ se coupent en un même point de Γ.

à la fois sur D_{12}, D_{23} et D_{31}. A tout point m de l'espace correspond ainsi une droite isotrope Δ, et réciproquement.

Supposons maintenant que le point m décrive une droite quelconque : les plans $12m$, $23m$ et $31m$ engendrent alors trois faisceaux homographiques, dans lesquels trois plans homologues se confondent avec le plan 123; les droites D_{12}, D_{23} et D_{31} décrivent donc sur les demi-sphères S_{12}, S_{23} et S_{31} trois divisions homographiques, dans lesquelles trois génératrices homologues se confondent avec la droite D_{123}, qui correspond au plan 123 sur chaque demi-sphère. Par suite (nº 188) la droite Δ engendre bien une demi-sphère. Réciproquement toute demi-sphère correspond à une droite de l'espace.

190. L'existence de la transformation de Lie se trouvant ainsi établie, cherchons la relation géométrique à laquelle doivent satisfaire quatre droites isotropes, A, B, C et D, qui correspondent à quatre points a, b, c et d d'un même plan. Aux droites ab et cd correspondent les *demi-sphères* AB et CD, qui ont une génératrice commune, correspondant au point d'intersection des droites ab et cd. Les *sphères* AB et CD ayant ainsi une première génératrice commune, en ont une seconde, qui rencontre les quatre droites A, B, C et D; ces quatre droites s'appuient donc sur une même droite isotrope. Ainsi :

Aux points d'un plan correspondent des droites isotropes s'appuyant sur une même droite isotrope.

La réciproque est immédiate.

191. Puisque toute demi-sphère correspond à une droite de l'espace, il en est de même de tout cône isotrope. Chacun d'eux correspond à une droite d'un certain complexe; on peut encore dire que, dans la *transformation inverse,* les droites de ce complexe correspondent aux divers points de l'espace.

Si l'on considère tous les cônes isotropes qui ont une génératrice commune, chacun d'eux correspond à une droite passant par le point auquel correspond cette génératrice, et aussi, d'après le numéro précédent, située dans un plan fixe. On en déduit que le complexe des droites auxquelles correspondent des cônes isotropes est tel que toutes celles qui passent par un point fixe sont dans un plan fixe, et réciproquement. On dit qu'elles forment un *complexe linéaire*.

Toutes les droites de ce complexe (A) qui rencontrent une droite fixe, D, correspondent, dans la transformation inverse de celle de Lie, aux points de la demi-sphère S que la transformation de Lie associe à D; comme ces points appartiennent aussi à une autre demi-sphère S′ (telle que S et S′ forment une même *sphère*), les droites en question rencontrent aussi une autre droite D′. On dit que les droites D et D′ sont *conjuguées au complexe*. On peut donc dire que :

Par la transformation de Lie, toute sphère correspond à deux droites conjuguées à un complexe linéaire.

192. La transformation de Lie est surtout intéressante par ses applications à la théorie des surfaces, car elle transforme les lignes asymptotiques d'une surface en lignes de courbure de sa transformée. Mais elle peut aussi être employée avec avantage dans l'étude de la géométrie des sphères.

Par exemple, le théorème suivant :

Toutes les droites qui rencontrent trois droites fixes en rencontrent une infinité,

fournit le suivant :

Toutes les sphères tangentes à trois sphères fixes en touchent une infinité.

L'enveloppe de ces sphères, qui correspond à une hyperboloïde, est donc une surface qui peut être considérée de deux manières comme l'enveloppe d'une sphère à un paramètre variable : c'est la *cyclide de Dupin* (1).

(1) Sur la transformation de Lie, on consultera avec profit une conférence de M. Klein (*Nouv. Ann.*, janvier 1896).

EXERCICES.

1. Si a, b, c et d désignent quatre points fixes d'une cubique gauche et Δ une corde quelconque de cette courbe, le rapport anharmonique $\Delta(a, b, c, d)$ est constant.

2. Le rapport anharmonique de quatre tangentes à une conique est égal à celui des quatre points de contact.

3. Soient C et C′ deux cercles fixes, et Γ un cercle variable, orthogonal à C; l'axe radical de C et de Γ, et l'axe radical de C′ et de Γ, se correspondent dans deux figures homologiques.

Problème analogue dans l'espace.

4. Étant données dans l'espace deux figures homographiques, à toutes les droites Δ issues d'un point de l'une correspondent des droites Δ' issues du point homologue. Les droites Δ qui coupent les droites Δ' correspondantes forment un cône du second degré; le point commun à ces droites décrit une cubique gauche.

5. Étant donnés dans un plan trois couples de points conjugués de deux figures homographiques, ainsi qu'une des droites doubles, construire le point d'intersection des deux autres droites doubles.

Problème analogue dans l'espace.

6. Soient :

abc et $a'b'c'$ deux triangles d'un même plan;
α le point commun aux droites bc et $b'c'$;
α' celui où se coupent les parallèles menées respectivement à ces droites par a et a'.

Les trois droites analogues à $\alpha\alpha'$ sont concourantes.

7. Étant données dans le plan deux figures corrélatives, le lieu des points de l'une situés sur leurs droites corrélatives est une conique, qui est bitangente à sa corrélative.

Problème analogue dans l'espace.

8. Prouver qu'il existe des corrélations dans lesquelles tout point est situé sur son plan corrélatif.

Toute droite passant par un point et située dans le plan corrélatif coïncide alors avec sa corrélative : on dit que ces droites forment un *complexe linéaire*. Deux figures correspondantes dans cette corrélation sont aussi dites *conjuguées au complexe*.

9. Tout complexe linéaire est défini par cinq droites.

10. On désigne sous le nom de *congruence linéaire* l'ensemble des droites qui s'appuient sur deux droites fixes : une congruence se trouve définie par quatre droites.

Lorsque six droites 1, 2, 3, 4, 5 et 6 appartiennent à un même complexe linéaire, les trois congruences linéaires (1234), (3456) et (5612) ont en commun deux droites.

11. La droite qui joint un point de l'axe non focal d'une conique à un foyer coupe la directrice correspondante au même point que la droite qui joint les pieds des normales menées du point considéré à la conique.

12. Sur les normales à une conique, les segments compris entre le point d'incidence et les axes sont entre eux comme les carrés des longueurs des axes.

13. La longueur des normales menées à une conique par un point de l'axe non focal est dans un rapport constant avec la distance de ce point aux foyers.

14. Par chaque point d'une parabole on porte, parallèlement à une direction fixe et dans un sens déterminé, une longueur égale à la distance de ce point au foyer. L'extrémité de cette longueur décrit une parabole, dont l'axe passe par un point fixe, indépendant de la direction choisie.

15. Le centre d'une hyperbole équilatère et le pôle d'une corde quelconque sont conjugués au cercle décrit sur cette corde comme diamètre.

16. On considère deux coniques bitangentes admettant pour centres deux points donnés et vues toutes deux d'un point donné sous un angle droit. Le pôle de la corde de contact est l'un ou l'autre des deux points fixes.

17. A une conique fixe et à un cercle variable passant par les foyers on mène les tangentes communes. Lieu de leurs points de contact avec le cercle.

18. A une conique fixe et aux hyperboles équilatères concentriques

et passant par les foyers on mène les tangentes communes. Lieu de leurs points de contact avec ces hyperboles.

19. Étant donnés deux points fixes a et a', lieu des points m et m' tels que le quadrilatère $ama'm'$ soit inscriptible à un cercle et que la parabole inscrite à ce quadrilatère ait pour foyer un point donné. Enveloppe de la droite mm' et enveloppe de la parabole considérée.

20. Les hyperboles équilatères conjuguées à un triangle passent par les centres des cercles inscrits et exinscrits.

21. On considère les triangles conjugués à une conique et d'orthocentre donné : lieu de leurs sommets et enveloppe de leurs côtés. Lieu des centres des cercles inscrits à ces triangles.

22. On considère une hyperbole équilatère H de centre ω, et le cercle qui passe par les points communs à cette courbe et à une droite fixe D : montrer que le pôle de la seconde corde commune, par rapport à H, reste fixe quand cette conique varie en conservant le même centre.

23. S'il existe des triangles inscrits à un cercle C et circonscrits à un cercle C′, le demi-produit de leurs diamètres est égal, en valeur absolue, à la puissance par rapport à C du centre de C′.

24. Étant données deux hyperboles équilatères concentriques H et H′, pour qu'il existe des triangles inscrits à H et circonscrits à H′, il faut et il suffit que les foyers de H′ soient sur les directrices de H.

25. On considère deux coniques coaxiales, C et C′, telles qu'il existe des triangles T inscrits à C et circonscrits à C′ : les normales à C aux sommets de T sont (n° 101) concourantes.

1° Le centre ω de l'hyperbole d'Apollonius correspondante est sur C′.

2° Le lieu du point de rencontre des normales est une conique.

3° Les cercles circonscrits aux triangles T coupent orthogonalement un cercle fixe.

4° Les normales à C′ aux points de contact des côtés du triangle T sont concourantes.

5° Le cercle qui passe par ces trois points de contact passe par ω.

26. Étant données deux coniques, les triangles déterminés, l'un par trois de leurs points communs, l'autre par trois de leurs tangentes communes, sont homologiques.

27. Étant donnés deux triangles homologiques ABC et A′B′C′, le triangle des droites (BC′, B′C), (AC′, A′C), (AB′A′B) et le triangle des points (bc', $b'c$), (ac', $a'c$), (ab', $a'b$) sont aussi homologiques.

28. On considère les hyperboles équilatères qui passent par un point fixe et sont bitangentes à une conique donnée. Enveloppe de la corde de contact.

29. Les sphères qui passent par trois points fixes d'une cubique gauche la coupent en trois autres points dont le plan a une direction fixe.

30. Toutes les quadriques qui passent par cinq points d'une biquadratique gauche la coupent en trois autres points dont le plan passe par un point fixe de la biquadratique.

31. Soient $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$ et $c_1 c_2 c_3 c_4$ les points où une biquadratique gauche coupe trois plans. Les plans $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ et $a_4 b_4 c_4$ coupent la courbe en quatre autres points situés dans un même plan.

32. Lieu des sommets des cônes qui contiennent une conique fixe et dont un axe passe par un point fixe du plan de cette courbe.

33. Étant donné un quadrilatère symétrique par rapport à une diagonale, le lieu des foyers des coniques inscrites est un cercle.

34. Étant données deux coniques ayant leurs foyers en ligne droite, lieu des ombilics des coniques homofocales.

35. On considère deux quadriques de révolution dont les axes se rencontrent; leurs plans tangents communs touchent une troisième quadrique de révolution, dont l'axe est dans le plan des deux premiers. Les six foyers principaux forment les sommets d'un quadrilatère.

36. Lieu des sommets des tétraèdres conjugués à la fois à deux quadriques qui varient en restant concentriques et homothétiques.

37. Étant donnés cinq points dans l'espace, les cinq quadriques admettant l'un pour centre et conjuguées au tétraèdre des quatre autres sont homothétiques.

38. Lieu des points d'un plan tels que les cônes du second degré ayant ces points pour sommets et passant par cinq points fixes soient tangents à ce plan. Enveloppe de la génératrice de contact.

39. Lieu de l'orthocentre des triangles déterminés par une cubique équilatère sur des plans parallèles.

40. Étant donnée une sphère Σ admettant pour centre un point d'une cubique équilatère, il existe une infinité de tétraèdres inscrits à la cubique et conjugués à Σ. Les sphères circonscrites à ces tétraèdres passent par deux points fixes de la cubique. Lieu des centres de ces sphères.

41. Lieu des points de contact des tangentes de direction donnée menées aux paraboles inscrites à un triangle.

42. Lieu des points de contact des tangentes de direction donnée menées aux paraboles qui passent par deux points et dont l'axe a une direction donnée.

43. Lieu des points de contact des tangentes de direction donnée menées à des quadriques homothétiques et passant par une conique fixe.

44. Par un point fixe on mène les tangentes à chacune des coniques d'un système homofocal; les normales aux points de contact se coupent sur une droite fixe.

45. Lieu du point de rencontre des normales menées aux coniques d'un système homofocal en leurs points de rencontre avec une droite fixe.

46. Étant donnés un point ω et deux droites A et B, on considère les coniques de foyer ω admettant pour directrices correspondantes, l'une A et l'autre B, et tangentes, la première à B et la seconde à A; leurs paramètres sont égaux.

47. Enveloppe des coniques de foyer et de paramètre donnés, tangentes à une droite fixe, ou passant par un point fixe.

48. Étant données deux coniques admettant un même foyer ω, on prend sur chacune d'elles deux points m et m', tels que l'angle $m\omega m'$ ait une valeur donnée. Lieu du point de rencontre des tangentes en m et en m'.

49. Étant donnés deux triangles abc et $a'b'c'$, lieu des points m et m' de leurs plans, tels que les distances ma, mb et mc soient respectivement égales aux distances $m'a'$, $m'b'$ et $m'c'$.

50. Étant donné un hexagone 123456 inscrit à une conique, les points 5, 6, (15, 26), (16, 25), (35, 46), (36, 45) sont sur une même conique.

51. Étant donnés, dans un plan, quatre couples de points, (a, a'),

(b, b'), (c, c'), (d, d'), il existe généralement dans ce plan deux couples de points (x, x') tels que chacun des quatre quadrilatères analogues au quadrilatère $aa'xx'$ soit inscriptible.

52. Soit Q une quadrique passant par le sommet d'un cône équilatère S. Les plans interceptés sur Q par les arêtes des trièdres trirectangles situés sur S enveloppent un cône de second degré.

53. Étant données deux coniques telles qu'il existe des triangles inscrits à l'une et circonscrits à l'autre, les centres des cercles circonscrits à ces triangles sont sur une conique. L'enveloppe de ces cercles est une cyclique.

54. Toutes les cycliques qui passent par sept points passent par un huitième.

55. Toutes les cycliques qui passent par cinq points fixes d'une cyclique donnée la coupent en trois autres points. Le cercle qui passe par ces trois points coupe la cyclique en un quatrième point fixe.

56. Il existe une infinité de coniques touchant une cyclique en quatre points équidistants du centre des déférentes.

57. Étant donnés trois couples de points (a, a'), (b, b') et (c, c'), lieu des points m tels que les cercles maa', mbb' et mcc' se coupent en un point m'. Enveloppe de la droite mm'.

58. Étudier la transformation qui associe entre eux les points où deux plans fixes coupent les droites d'une congruence linéaire (*projection gauche*).

59. Étant donnés deux triangles abc et $a'b'c'$ dans un même plan, lieu des points m et m' tels que les droites ma, mb et mc soient respectivement parallèles aux droites $m'a'$, $m'b'$ et $m'c'$.

60. Si trois coniques sont bitangentes à une même conique et circonscrites à un triangle abc, les trois autres points où elles se coupent deux à deux déterminent un triangle homologique au triangle abc.

61. Toute quartique à trois points doubles admet quatre tangentes doubles qui déterminent quatre triangles homologiques au triangle des points doubles.

62. Étant donnée une conique fixe C et deux points fixes p et q, on associe les points m et m' tels que la conique qui passe par ces points

et par les points d'intersection de C avec leurs polaires passe aussi par p et q. On définit ainsi une transformation du second ordre dont les points doubles sont les points de rencontre des tangentes menées à C de p et q. Cas particulier où pq touche C.

63. Toutes les quadriques conjuguées à cinq segments dont les extrémités appartiennent à deux plans fixes sont aussi conjuguées à un sixième segment analogue.

64. On considère dans l'espace deux quadrilatères plans, admettant pour couples de sommets opposés, le premier a et a', b et b', c et c'; le second, α et α', β et β', γ et γ', a, b et c étant en ligne droite, ainsi que α, β et γ. Si l'on relie par six tiges articulées les sommets a et α', α et a', b et β', β et b', c et γ', γ et c', on obtient un système déformable.

65. Étudier la transformation de contact qui associe à tout point de l'espace la droite commune à ses plans polaires relativement à deux quadriques fixes. Montrer qu'à un plan correspond une cubique gauche.

66. Dans la transformation de Lie, toutes les droites isotropes ayant une même direction correspondent aux points d'un plan qui passe par une droite fixe X. Cette droite appartient au complexe linéaire (A) des droites auxquelles correspondent des cônes isotropes. Aux éléments de contact de X correspondent ceux de l'ombilicale.

67. Étant donné un élément de contact arbitraire, déterminer celui qui lui correspond dans la transformation de Lie. Ce dernier correspond en général à deux éléments de contact conjugués au complexe (A). Aux éléments de contact de ce complexe correspondent une infinité d'éléments de contact, qui sont ceux d'un même plan isotrope le long d'une droite isotrope. Enfin les éléments de contact de l'ombilicale correspondent à une infinité d'éléments de contact du complexe (A), appartenant à une droite de ce complexe rencontrant X.

68. A toute demi-quadrique engendrée par des droites du complexe (A) correspond un cercle, qui se réduit à une droite, quand la demi-quadrique contient X.

69. Si l'on considère un hyperboloïde formé par des droites de (A) s'appuyant sur X, ses génératrices du même système que X se transforment en sphères concentriques.

70. Étant donné un point fixe ω, à tout point m on associe le cercle

de centre ω, admettant pour axe la droite ωm, et dont le rayon est égal à la distance ωm : on définit ainsi la transformation *apsidale*. Un plan se transforme ainsi en cylindre de révolution; en déduire la construction de deux éléments de contact correspondants. (La transformée d'un ellipsoïde de centre ω est une *surface de l'onde*.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE II.

DIVISIONS ET FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES ET CORRÉLATIVES.

CHAPITRE IV.

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES.

CHAPITRE V.

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES QUADRIQUES.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

26786 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.