432

A. T. De Lury, Esqre,
from J. C. Glash

RECHERCHES

SUR LA

GÉOMÉTRIE

N. I. LOBATSCHEWSKY

traduction J. HOUEL.

Recherches géométriques sur la théorie des parallèles, suivies d'un extrait de la correspondance entre GAUSS et SCHUMACHER.

H. von HELMOLTZ

traduction HOUEL

Sur les faits qui servent de base à la Géométrie.

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
Libraire de S. M. le Roi de Suède et de Norwège
8, Rue de la Sorbonne, 8.

1895

ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

PAR

N. I. LOBATSCHEWSKY,

Conseiller d'État de l'Empire de Russie et Professeur à l'Université de Kasan;

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences
de Bordeaux;

SUIVI D'UN EXTRAIT DE LA CORRESPONDANCE DE GAUSS ET DE SCHUMACHER.

PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

Le travail remarquable dont nous donnons ici la traduction n'a de commun que le titre avec les nombreuses élucubrations des auteurs qui, avant et après Legendre, se sont efforcés, sans beaucoup de succès, de démontrer *à priori* l'axiome XI d'Euclide, plus connu sous le nom impropre de *postulatum*.

Le but de l'auteur (1) est, au contraire, de prouver qu'il n'existe *à priori* aucune raison d'affirmer que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne soit pas inférieure à deux angles droits, ou, ce qui revient au même, qu'on ne puisse mener, par un point donné, qu'une seule droite ne rencontrant pas une droite donnée dans le même plan.

Cette question a été, pendant plus de cinquante ans, l'objet des méditations de Gauss, qui, dès 1792, était déjà en possession des vrais principes sur lesquels il a fondé une doctrine complète, appelée par lui *Géométrie non-euclidienne*. Malheureusement, il n'a jamais publié ses recherches, dont nous ne connaissons les résultats que par quelques notices dispersées dans les *Gelehrte Anzeigen* de Gœttingue, et par quelques passages de sa *Correspondance* avec Schumacher, éditée récemment par M. Peters. Lorsqu'il eut connaissance des travaux de Lobatschewsky (commencés en 1829 et continués jusqu'en 1855) et de J. Bolyai (1832), il fit alors ce qu'il avait fait lorsque Abel et Jacobi eurent retrouvé, par leurs propres efforts, ses résultats inédits, relatifs aux transcendantes elliptiques. Il renonça à la propriété de ses découvertes, et se

(1) N. I. Lobatschewsky, né à Nijnéi-Novogorod en 1793, mort à Kasan en 1856.

contenta de donner son adhésion complète à la *Géométrie imaginaire* de Lobatschewsky, dont il trouvait seulement la dénomination mal choisie.

Malgré la haute valeur de ces recherches, elles n'ont attiré jusqu'ici l'attention d'aucun géomètre, ce qui ne fût pas arrivé si Gauss les eût communiquées lui-même aux savants, ou si, du moins, il les eût prises publiquement sous son patronage. Nous ne croyons pas cependant en exagérer la portée philosophique, en disant qu'elles jettent un jour tout nouveau sur les principes fondamentaux de la géométrie, et qu'elles ouvrent une voie encore inexplorée, pouvant conduire à des découvertes inattendues. Pour ne pas sortir de la question élémentaire, on ne peut nier qu'elles ne fassent faire un progrès immense aux méthodes d'enseignement, en reléguant parmi les chimères l'espoir que nourrissent encore tant de géomètres de parvenir à démontrer l'axiome d'Euclide autrement que par l'*expérience*. Désormais ces tentatives devront être mises au même rang que la quadrature du cercle et le mouvement perpétuel.

Nous croyons rendre service aux auteurs de Traités classiques [1], en mettant sous leurs yeux une traduction française d'un opuscule peu connu de Lobatschewsky [2], dans lequel la *Géométrie imaginaire* est établie en partant des premières propositions d'Euclide. Nous allons donner une idée du contenu de cet ouvrage.

Après avoir rappelé les principes connus sur lesquels il s'appuiera, l'auteur pose une définition des parallèles, plus générale que la définition ordinaire, et se réduisant à celle-ci, lorsqu'on admet l'axiome XI d'Euclide. Il démontre ensuite diverses propositions, dont une partie étaient connues de Legendre :

La somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut surpasser deux angles droits.

S'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des

---

(1) M. Richard Baltzer, dans la seconde édition de ses excellents *Éléments de Géométrie*, a, le premier, introduit ces notions exactes à la place qu'elles doivent occuper.

(2) *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, von Nicolaus Lobatschewsky, kaiserl. russ. wirkl. Staatsrath und ordentl. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan.* Berlin, 1840 (in-18, 61 pages).

angles soit égale à deux angles droits, cette somme sera aussi égale à deux angles droits dans tous les autres triangles rectilignes.

Si deux perpendiculaires à une même droite sont PARALLÈLES (dans l'acception généralisée du mot), *la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque est égale à deux angles droits.*

Etc.

Puis il établit, indépendamment de l'axiome d'Euclide, les principales propositions de la géométrie de la sphère. Enfin, il considère le cercle et la sphère dans le cas où le centre s'éloigne à l'infini, et où les rayons deviennent parallèles. On démontre dans ce cas que la somme des angles dièdres d'un angle trièdre dont les arêtes sont *parallèles*, est égale à deux angles droits. Par suite, dans les triangles sphériques tracés sur la sphère infiniment grande, il existe entre les angles et les côtés les mêmes relations que celles que la Géométrie ordinaire établit pour les triangles rectilignes.

De la trigonométrie de la sphère infinie, on passe à la trigonométrie de la sphère finie et à celle du plan. La trigonométrie sphérique est absolument la même dans la *Géométrie imaginaire* que dans la Géométrie ordinaire. La trigonométrie plane, au contraire, est essentiellement différente dans les deux systèmes. Ses formules, dans la *Géométrie imaginaire,* coïncident avec celles de la Géométrie ordinaire pour les triangles infiniment petits, comme cela a lieu pour celles de la trigonométrie sphérique. Pour des triangles de grandeur finie, elles se déduisent de celles de la trigonométrie sphérique, en y donnant aux côtés des triangles des valeurs imaginaires.

On peut résumer comme il suit l'ensemble des propositions de la Géométrie élémentaire qui ne dépendent pas de l'axiome XI (¹) : Égalité des triangles. A des côtés égaux (ou inégaux) sont opposés des angles égaux (ou inégaux dans le même sens), et réciproquement. Relations entre les angles formés dans un plan tout autour d'un point, ou d'un même côté d'une droite, avec les réciproques. L'angle extérieur à un triangle est plus grand que chacun des inté-

(¹) Bolyai : *Kurzer Grundriss eines Versuchs* u. s. w., § 32.

rieurs non adjacents. Elever ou abaisser une perpendiculaire. On n'en peut abaisser qu'une d'un point sur une droite. Cette perpendiculaire est la droite la plus courte. Partager une droite ou un angle en deux parties égales. Construire un triangle (ou un angle) égal à un triangle (ou à un angle) donné. Une droite peut avoir deux points communs avec un cercle, et pas plus. Trois points d'un cercle étant donnés, trouver son centre. Principales propriétés des cordes et des tangentes. Possibilité des polygones réguliers; construction des seuls polygones de 4, 8, 16,... côtés. Deux cercles ne peuvent avoir plus de deux points communs sans coïncider. La plupart de ces propositions ont leurs analogues dans la géométrie de la sphère, laquelle est tout entière indépendante de l'axiome XI.

Mais on ne peut plus, sans cet axiome, établir la théorie de la similitude, ni partager une droite en trois parties égales, ni calculer la grandeur de l'angle d'un polygone régulier. On peut faire passer un cercle par trois points donnés sur une sphère; mais on ne peut pas le faire passer par trois points donnés d'une manière quelconque sur un plan. Si trois points quelconques non en ligne droite pouvaient être placés sur une sphère, l'axiome XI d'Euclide serait démontré. Calcul de l'aire de la sphère.

Nous recommanderons spécialement aux lecteurs qui voudront entrer pleinement dans la pensée de Lobatschewsky, de s'y préparer par la méditation approfondie des vingt-huit premières propositions du premier livre d'Euclide, en faisant table rase de tout ce que l'on a écrit depuis sur ce sujet.

J. H.

ERRATA.

Page 25,	ligne 4,	*au lieu de*	$\Pi(a')$,	*lisez* $\Pi(\alpha')$
— 26,	— 12,	—	[prop. 32],	*lisez* [prop. 33]
— 42,	— 4,	—	reçues,	*lisez* reçus.

ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES

SUR LA

THÉORIE DES PARALLÈLES

Quelques-unes des théories de la géométrie élémentaire laissent encore beaucoup à désirer, et c'est à leur imperfection, je crois, qu'il faut attribuer le peu de progrès que cette science, en dehors des applications de l'analyse, a pu réaliser depuis Euclide.

Je compte parmi ces points défectueux l'obscurité qui règne sur les premières notions des grandeurs géométriques et sur la manière dont on se représente la mesure de ces grandeurs, ainsi que l'importante lacune que présente la théorie des parallèles, et que les travaux des géomètres n'ont encore pu combler. Les efforts de Legendre n'ont rien ajouté à cette théorie, cet auteur ayant été forcé de quitter la voie du raisonnement rigoureux pour se jeter dans des considérations détournées, et de recourir à des principes qu'il cherche, sans raison suffisante, à faire passer pour des axiomes nécessaires.

Mon premier essai sur les fondements de la géométrie a paru dans le *Courrier de Kasan,* pour l'année 1829. Désirant satisfaire à toutes les exigences des lecteurs, je me suis occupé ensuite de la rédaction de l'ensemble de cette science, et j'ai publié mon travail par parties dans les *Mémoires de l'Université de Kasan,* pour les années 1836, 1837 et 1838, sous le titre de *Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles*. L'étendue de ce travail a peut-être empêché mes compatriotes de suivre cette étude, qui, depuis Legendre, semblait avoir perdu son intérêt. Je n'en persiste pas moins à croire que la théorie des parallèles conserve toujours ses droits à l'attention des géomètres, et c'est pour cela que je me propose d'exposer ici ce qu'il y a d'essentiel dans mes recherches, en faisant d'abord remarquer, contrairement à l'opinion de Legendre, que les autres imperfections de principes, telles que la définition de la ligne droite, ne doivent point nous occuper ici, et sont sans aucune influence sur la théorie des parallèles.

Pour ne pas fatiguer le lecteur par une multitude de propositions dont les démonstrations n'offrent aucune difficulté, j'indiquerai seulement ici celles dont la connaissance est nécessaire pour ce qui va suivre.

---

1. *Une ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions.* J'entends par là que, si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne droite la surface qui la contient, cette ligne ne change pas de place.

2. Deux lignes droites ne peuvent se couper en deux points.

3. Une ligne droite, suffisamment prolongée dans les deux sens, pourra dépasser toute limite, et partagera ainsi en deux parties toute portion de plan limitée.

4. Deux lignes droites perpendiculaires à une troisième, et situées dans un même plan que cette troisième, ne peuvent se couper, quelque loin qu'on les prolonge.

5. Une ligne droite coupera toujours une autre droite, lorsqu'elle aura des points situés de part et d'autre de celle-ci.

6. Des angles opposés par le sommet et ayant leurs côtés situés sur les prolongements les uns des autres sont égaux. Cette proposition est vraie aussi pour les angles dièdres.

7. Deux lignes droites ne peuvent se couper, lorsqu'elles sont coupées par une troisième sous des angles égaux.

8. Dans un triangle rectiligne, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

9. Dans un triangle rectiligne, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit, et les deux angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.

10. Deux triangles rectilignes sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux, ou deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou deux côtés égaux et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal, ou enfin les trois côtés égaux.

11. Une droite perpendiculaire à deux autres droites situées dans un plan qui ne la contient pas est perpendiculaire à toute autre droite menée par son pied dans ce plan.

12. L'intersection d'une sphère avec un plan est un cercle.

13. Une droite perpendiculaire à l'intersection de deux plans perpendiculaires entre eux, et située dans l'un de ces deux plans, est perpendiculaire à l'autre.

14. Dans un triangle sphérique, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement.

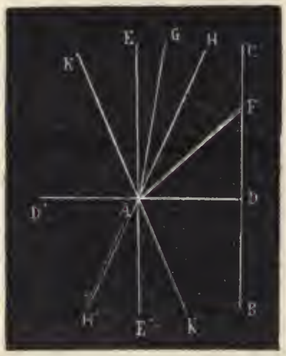
15. Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou bien un côté égal adjacent à deux angles égaux.

Les propositions que nous donnerons dans ce qui va suivre seront accompagnées de leurs explications et de leurs démonstrations.

16. Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

Soit abaissée, du point A (*fig.* 1), sur la droite BC, la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle droit EAD, il arrivera ou que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite DC, comme le fait AF, par exemple; ou bien que quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire AE, ne rencontreront pas DC. Dans l'incertitude si la perpendiculaire AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que AG, qui ne coupent pas DC, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne AH, parallèle à DC, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent aucune la ligne CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD. L'angle HAD, compris entre la parallèle HA et la perpendiculaire AD, sera dit *l'angle de parallélisme,* et nous le désignerons par $\Pi(p)$, p représentant la distance AD.

Fig. 1.



Si $\Pi(p)$ est un angle droit, le prolongement AE′ de la perpendiculaire AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC; et nous ferons remarquer, à ce propos, que, par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et par leurs prolongements AE′, AD′, toute droite partant du point A est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC, de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE′, toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

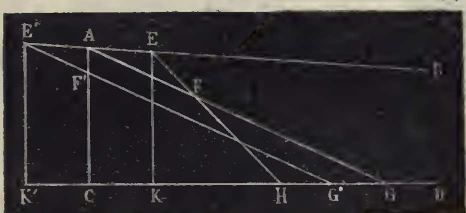
Si l'on a $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, alors, de l'autre côté de AD, il y aura une autre droite AK, faisant avec AD le même angle $DAK = \Pi(p)$, laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore le *sens du parallélisme.* Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC appartiennent aux droites *sécantes,* lorsqu'elles sont situées dans l'angle $HAK = 2\,\Pi(p)$ des deux parallèles; elles appartiennent, au contraire, aux droites *non sécantes* AG, lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur des deux angles $EAH = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{\pi}{2} - \Pi(p)$, entre les parallèles et la droite EE', perpendiculaire sur AD. De l'autre côté de la perpendiculaire EE', les prolongements AH', AK' des parallèles AH, AK seront également parallèles à BC. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle K'AH' appartiendront aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles K'AE, H'AE', aux droites non sécantes.

D'après cela, si l'on suppose $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, les droites ne pourront être que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé; de plus, les autres droites devront se distinguer en *non sécantes* et en *sécantes*. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallélisme est que la ligne devient sécante par la moindre déviation vers le côté où est située la parallèle; de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF, faisant, du côté de DC, un angle HAF aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.

17. *Une ligne droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points.*

Soit AB (*fig.* 2) parallèle à CD, et AC perpendiculaire sur CD. Considérons deux points pris à volonté sur la ligne AB et sur son prolongement au delà de la perpendiculaire. Supposons le point E situé, par rapport à la perpendiculaire, du même côté

Fig. 2.



que celle des directions de AB qui est considérée comme parallèle à CD. Abaissons du point E sur CD la perpendiculaire EK, et menons ensuite EF de manière qu'elle tombe à l'intérieur de l'angle BEK. Joignons les points A et F par une droite, dont le prolongement devra rencontrer CD quelque part en G [prop. 16]. Nous obtiendrons ainsi un triangle ACG, dans l'intérieur duquel pénétrera la ligne EF. Cette dernière ligne, ne pouvant rencontrer AC, par suite de la construction, et ne pouvant pas non plus rencontrer AG ni EK pour la seconde fois [prop. 2], coupera nécessairement CD quelque part, en H [prop. 3].

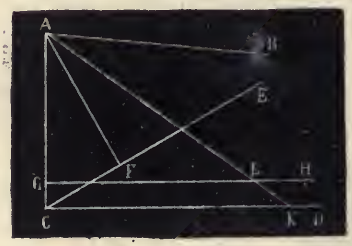
Soit maintenant E′ un point sur le prolongement de AB, et E′K′ une perpendiculaire abaissée sur le prolongement de CD. Menons la ligne E′F′, faisant avec AE′ un angle AE′F′ assez petit pour couper AC quelque part en F′. Tirons du point A la ligne AF, faisant avec AB un angle égal à AE′F′, et dont le prolongement coupera CD en G [prop. 16]. On formera ainsi un triangle AGC, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne E′F′. Or, cette ligne ne peut pas rencontrer une seconde fois AE; elle ne peut pas non plus couper AG, puisque l'angle BAG = BE′G′ [prop. 7]. Il faudra donc qu'elle rencontre CD quelque part en G′.

Donc, quels que soient les points E, E′, d'où partent les lignes EF, E′F′, et quelque peu qu'elles s'écartent de la ligne AB, elles couperont toujours la ligne CD, à laquelle AB est parallèle.

18. *Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.*

Soit AC (*fig.* 3) une perpendiculaire sur CD, et AB une parallèle à CD. Menons par le point C la ligne CE, faisant avec CD un angle aigu quelconque ECD, et abaissons du point A sur CE la perpendiculaire AF. Nous formerons ainsi un triangle rectangle ACF, dont l'hypoténuse AC sera plus grande que le côté AF de l'angle droit [prop. 9]. Faisons AG = AF, et plaçons AF sur AG; AB et FC prendront les positions AK et GH, de sorte que l'on aura l'angle BAK = FAC. Il faudra alors que AK coupe la droite DC quelque part en K [prop. 16], et il en résultera un triangle AKC, dans lequel la perpendiculaire GH rencontrera la ligne AK en L [prop. 3], et déterminera par là la distance AL du point A au point de rencontre de la ligne CE avec AB.

Fig. 3



De là résulte que CE coupera toujours AB, quelque petit que soit l'angle ECD. Donc CD est parallèle à AB [prop. 16].

19. *Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits.*

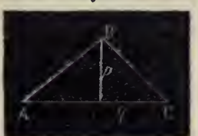
Supposons que, dans le triangle ABC (*fig.* 4), la somme des trois angles soit $\pi + \alpha$. Dans le cas où les côtés sont inégaux, soit BC le plus petit. Partageons BC en deux parties égales au point D; par A et D, menons la droite AD, sur le prolongement de laquelle nous prendrons DE = AD; joignons, enfin, le point E au point C par la droite EC. Dans les deux triangles égaux ADB, CDE, on a l'angle ABD = DCE, et l'angle BAD = DEC [prop. 6 et 10]. De là résulte que la somme des trois angles du triangle ACE doit être aussi égale à $\pi + \alpha$. En outre, le plus petit angle BAC [prop. 9] du triangle ABC a passé dans le triangle ACE, où il se trouve partagé en deux parties EAC, AEC. En continuant de la même manière à partager toujours en deux parties égales le côté opposé au plus petit angle, on finira nécessairement par obtenir un triangle dans lequel la somme des trois angles sera $\pi + \alpha$, mais où il se trouvera deux angles dont chacun sera moindre, en valeur absolue, que $\frac{1}{2}\alpha$. Or, le troisième angle ne pouvant être plus grand que π, il faut donc que α soit nul ou négatif.

Fig. 4.

20. *Si, dans un triangle rectiligne quelconque, la somme des trois angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle.*

Supposons que dans le triangle rectiligne ABC (*fig.* 5) la somme des trois angles soit égale à π; deux au moins de ces angles, A et C, devront être aigus. Abaissons, du sommet du troisième angle B, la perpendiculaire p sur le côté opposé AC : cette perpendiculaire partagera le triangle ABC en deux triangles rectangles, dans chacun desquels la somme des trois angles devra encore être égale à π, sans quoi elle serait dans l'un de ces deux triangles plus grande que π, ou dans le triangle total plus petite que π. On obtiendra donc ainsi un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit seront p et q, et au moyen duquel on pourra former un quadrilatère dont les

Fig. 5.



côtés opposés seront égaux entre eux, et dont les côtés adjacents p et q (*fig.* 6) seront perpendiculaires l'un à l'autre. Par la répétition de ce quadrilatère, on pourra en former un pareil dont les côtés seront np et q, et enfin un autre ABCD, ayant ses côtés perpendiculaires entre eux, et dans lequel $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Ce quadrilatère sera divisé par la diagonale BD en deux triangles rectangles égaux, BAD, BCD, dans chacun desquels la somme des trois angles est égale à π. Or, on peut prendre les nombres n et m assez grands pour que le triangle rectangle ABC (*fig.* 7), dont les côtés de l'angle droit sont $AB = np$, $BC = mq$, renferme dans son intérieur tout autre triangle rectangle donné BDE, lorsqu'on aura fait coïncider leurs angles droits. En menant la ligne DC, on obtient ainsi des triangles rectangles ayant deux à deux un côté commun. Le triangle ABC est formé par la réunion des deux triangles ACD, DCB, dans chacun desquels la somme des trois angles ne peut surpasser π; elle doit donc être, pour chacun, égale à π, sans quoi elle ne serait pas égale à π dans le triangle total. De même, le triangle BDC se compose des deux triangles DEC, DBE, d'où il s'ensuit que dans DBE la somme des trois angles doit être égale à π. Cela doit donc avoir lieu, en général, pour un triangle quelconque, puisque tout triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles.

Fig. 6.

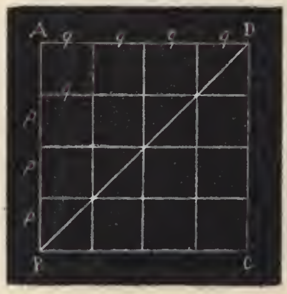


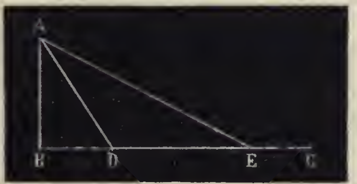
Fig. 7.

On conclut de là que deux hypothèses seulement sont possibles : ou la somme des trois angles est égale à π dans tous les triangles rectilignes, ou bien elle est dans tous moindre que π.

21. *Par un point donné, on peut toujours mener une ligne droite qui fasse avec une droite donnée un angle aussi petit que l'on voudra.*

Abaissons, du point donné A (*fig.* 8) sur la droite donnée BC, la perpendiculaire AB; prenons à volonté sur BC un point D; joignons AD; faisons DE = AD, et menons AE. Dans le triangle rectangle ABD, soit l'angle ADB = α; l'angle AED du triangle isoscèle ADE sera égal à $\frac{1}{2}\alpha$ ou $< \frac{1}{2}\alpha$ [prop. 8 et 20]. En continuant ainsi, on parviendra, à la fin, à un angle AEB, plus petit que tout angle donné.

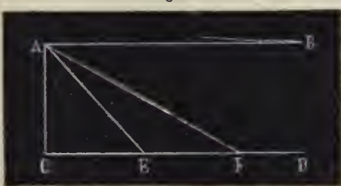
Fig. 8.



22. *Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque sera égale à* π.

Soient les droites AB, CD (*fig.* 9), parallèles entre elles, et perpendiculaires sur AC. Menons du point A les droites AE, AF, aux points E, F, pris sur la droite CD à des distances quelconques, FC > EC, du point C. En supposant que la somme des trois angles soit égale à $\pi - \alpha$ dans le triangle rectangle ACE, et à $\pi - \beta$ dans le triangle AEF, elle devra être égale, dans le triangle ACF, à $\pi - \alpha - \beta$, α et β ne pouvant être négatifs. Soient, de plus, les angles BAF = a, AFC = b; on aura $\alpha + \beta = a - b$. Si l'on écarte maintenant la ligne AF de la perpendiculaire AC, on pourra rendre aussi petit que l'on voudra l'angle a, compris entre AF et la parallèle AB; on pourra de même diminuer l'angle b indéfiniment. Par conséquent, les deux angles α et β ne peuvent avoir d'autres valeurs que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Fig. 9.



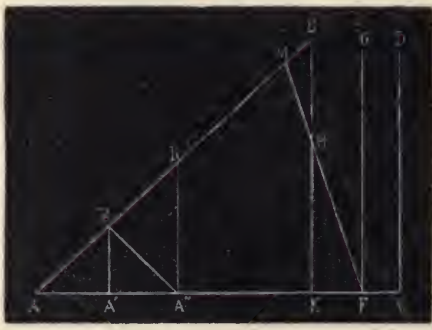
D'après cela, il faut que, dans tous les triangles rectilignes, la somme des trois angles soit égale à π, et qu'en même temps l'angle de parallélisme $\Pi(p)$ soit égal à $\frac{1}{2}\pi$, quelle que soit la distance p; ou bien il faut que, dans tous les triangles, la somme des angles soit $< \pi$, et qu'on ait à même temps $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

La première hypothèse sert de fondement à la *Géométrie ordinaire* et à la *Trigonométrie plane*. La seconde hypothèse peut être également admise, sans conduire à aucune espèce de contradiction dans les résultats, et elle est la base d'une nouvelle théorie géométrique, à laquelle j'ai donné le nom de *Géométrie imaginaire*, et que je me propose d'établir ici jusqu'au développement des équations entre les angles et les côtés des triangles tant rectilignes que sphériques.

23. *Étant donné un angle quelconque α, on peut toujours trouver une distance p telle que l'on ait* $\Pi(p) = \alpha$.

Soient AB et AC (*fig.* 10) deux droites formant, à leur intersection A, l'angle aigu α. Prenons à volonté sur AB un point B′; de ce point abaissons B′A′ perpendiculaire sur AC; faisons A′A″ = AA′; élevons en A″ la perpendiculaire A″B″, et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à une perpendiculaire CD, qui ne rencontre plus AB. C'est ce qui doit nécessairement arriver; car, si la somme des trois angles du triangle AA′B′ est égale à $\pi - a$, cette somme, dans le triangle AB′A″, sera égale à $\pi - 2a$; dans le triangle AA″B″, elle sera moindre que $\pi - 2a$ [prop. 20], et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne négative, auquel cas il serait impossible de former un triangle. La perpendiculaire CD pourrait être celle-là même qui forme la limite entre les perpendiculaires plus voisines du point A qui rencontrent AB, et les perpendiculaires plus éloignées qui ne le rencontrent pas. Dans tous les cas, il doit exister une telle perpendiculaire-limite FG, lorsqu'on passe des perpendiculaires sécantes aux perpendiculaires non sécantes. Menons maintenant par le point F la droite FH faisant avec FG l'angle aigu HFG, et située, par rapport à FG, du même côté que le point A. D'un point quelconque H de la droite FH abaissons sur AC la perpendiculaire HK, dont le prolongement devra par suite rencontrer AB quelque part en B, et former ainsi un triangle AKB, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne FH; ce prolongement rencontrera donc quelque part en M l'hypoténuse AB. L'angle GFH

Fig. 10.



étant arbitraire, et pouvant être supposé aussi petit que l'on voudra, FG sera donc parallèle à AB, et l'on aura AF $= p$ [prop. 16 et 18]

On voit aisément que, lorsque p diminue, l'angle α croît, et qu'il s'approche de $\frac{\pi}{2}$, lorsque p tend vers zéro. Au contraire, lorsque p croît, l'angle α diminue, et il s'approche de plus en plus de 0, à mesure que p tend vers ∞. Comme on peut choisir arbitrairement l'angle que l'on désignera par la notation $\Pi(p)$, lorsque p sera exprimé par un nombre négatif, nous poserons la relation

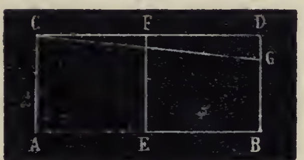
$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

relation qui aura lieu pour toutes les valeurs, tant positives que négatives, de p, aussi bien que pour $p = 0$.

24. *Si l'on prolonge de plus en plus loin deux lignes parallèles dans le sens de leur parallélisme, elles s'approcheront de plus en plus l'une de l'autre.*

Élevons sur la ligne AB (*fig.* 11) deux perpendiculaires AC $=$ BD, et joignons leurs extrémités C et D par une droite. Le quadrilatère CABD aura, en A et en B, deux angles droits, et en C et en D deux angles aigus [prop. 22], lesquels seront égaux entre eux, comme il est aisé de s'en convaincre, si l'on imagine le quadrilatère superposé à lui-même, en plaçant la ligne BD sur AC, et la ligne AC sur BD. Partageons AB en deux parties égales, et au point milieu E élevons sur AB la perpendiculaire EF, laquelle devra être en même temps perpendiculaire sur CD, puisque les quadrilatères CAEF, FEBD coïncideront l'un avec l'autre, si l'on plie la figure totale autour de FE. Donc la ligne CD ne peut être parallèle à la ligne AB; mais la parallèle à AB menée par le point C, savoir la ligne CG, devra s'écarter de CD vers AB [prop. 16], et retranchera de la perpendiculaire BD une portion BG $<$ CA. Le point C étant pris à volonté sur la ligne CG, il en résulte que CG s'approchera d'autant plus de AB, qu'on la prolongera plus loin.

Fig. 11.



25. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

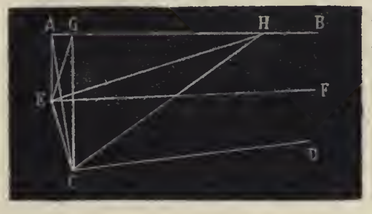
Supposons d'abord que les trois droites AB, CD, EF (*fig.* 12), soient situées dans un même plan et se succèdent dans l'ordre indiqué. Si les deux premières AB et CD sont parallèles chacune à la troisième EF, je dis que AB et CD seront aussi parallèles entre elles. Pour le démontrer, d'un point quelconque A de la ligne extrême AB, abaissons sur l'autre ligne extrême EF la perpendiculaire AE, laquelle rencontrera la ligne intermédiaire CD en un point C [prop. 3], et sous un angle DCE $< \frac{1}{2}\pi$ dans le sens de la direction de CD, qui est parallèle à la direction EF [prop. 22]. Une perpendiculaire AG, abaissée du même point sur CD, devra tomber dans l'ouverture de l'angle aigu ACG [prop. 9], et toute autre ligne AH, menée par A dans l'intérieur de l'angle BAC, devra rencontrer quelque part en H la droite EF parallèle à AB. Par conséquent, dans le triangle AEH, la ligne CD devra couper AH quelque part en K, puisqu'il est impossible qu'elle rencontre EF. Si AH était menée du point A dans l'intérieur de l'angle CAG, elle devrait couper le prolongement de CD entre les points C et G, dans le triangle CAG. De là résulte que AB et CD sont parallèles [prop. 16 et 18].

Fig. 12.

Si les deux lignes extrêmes AB, EF, sont supposées chacune parallèles à la ligne intermédiaire CD, alors toute ligne AK, menée par le point A dans l'intérieur de l'angle BAE, coupera la ligne CD en un point quelconque K, quelque petit que soit l'angle BAK. Sur le prolongement de AK, prenons à volonté un point L, et joignons-le au point C par la ligne CL; celle-ci devra rencontrer EF quelque part en M, de manière à former un triangle MCE. Le prolongement de la ligne AL à l'intérieur du triangle MCE ne peut rencontrer une seconde fois ni AC ni CM; donc ce prolongement rencontrera EF quelque part en H, et par conséquent AB et EF sont parallèles entre elles.

Supposons maintenant que les parallèles AB, CD (*fig.* 13), soient situées dans deux plans dont l'intersection soit EF. D'un point quelconque E de cette intersection, abaissons une perpendiculaire EA sur l'une quelconque AB des deux parallèles; puis, du pied A de la perpendiculaire EA, abaissons une nouvelle perpendiculaire sur l'autre parallèle CD, et joignons les extrémités E et C des deux perpendiculaires par la ligne EC. L'angle BAC doit être aigu [prop. 22]; donc une perpendiculaire CG, abaissée du point C sur AB, tombera en un point G, situé, par rapport à CA, du même côté que la direction suivant laquelle AB et CD sont considérées comme parallèles. Toute ligne EH, s'écartant si peu que ce soit de EF, appartiendra, avec la ligne EC, à un plan qui devra couper le plan des deux parallèles AB, CD le long d'une ligne quelconque CH. Cette dernière ligne rencontrera AB quelque part, et ce sera au même point H, commun aux trois plans, et par lequel la ligne EH devra aussi nécessairement passer. Donc EF est parallèle à AB. On demontrera de la même manière le parallélisme de EF et de CD.

Fig. 13.



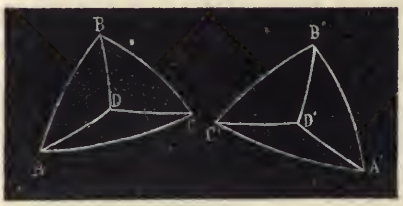
La supposition qu'une ligne EF est parallèle à l'une des deux autres droites parallèles entre elles AB, CD, revient donc à considérer EF comme l'intersection de deux plans contenant les deux parallèles AB, CD; par conséquent, deux lignes sont parallèles entre elles, lorsqu'elles sont parallèles à une même troisième, bien qu'elles ne soient pas situées toutes les trois dans un même plan. Ce dernier théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante : *Les intersections de trois plans deux à deux sont trois droites parallèles entre elles, toutes les fois que l'on suppose le parallélisme de deux de ces droites.*

26. *Deux triangles opposés sur la surface de la sphère ont même surface.*

Nous entendons ici par *triangles opposés* ceux qui sont formés par les intersections de la surface sphérique avec les trois mêmes plans, de part et d'autre du centre. Dans ces triangles, les côtés et les angles ont donc deux à deux une direction opposée.

Dans les triangles opposés ABC, A'B'C' (*fig.* 14, où l'un de ces triangles doit être considéré comme *retourné*), on a entre les côtés les égalités AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′, et les angles en A,B,C sont égaux à leurs correspondants en A′,B′,C′, dans l'autre triangle. Par les trois points A,B,C imaginons que l'on mène un plan, et que sur ce plan l'on abaisse du centre de la sphère une perpendiculaire, dont les prolongements dans les deux sens rencontrent les deux triangles opposés aux points D et D′ de la surface sphérique. Les distances du point D aux points A, B, C, mesurées sur la sphère en arcs de grands cercles, devront être égales [prop. 12], tant entre elles qu'aux distances D′A′, D′B′, D′C′, dans l'autre triangle [prop. 6]. Donc les triangles isoscèles formés autour des points D et D′ seront égaux deux à deux dans les deux triangles sphériques ABC, A′B′C′.

Fig. 14.



Nous prendrons pour caractère général de l'équivalence de deux surfaces la définition suivante : *Deux surfaces sont* ÉQUIVALENTES, *lorsqu'elles sont formées par l'addition ou la soustraction de parties* ÉGALES.

27. *Un angle trièdre est égal à la demi-somme de ses angles dièdres, moins un angle droit.*

Dans le triangle sphérique ABC (*fig.* 15), dont chaque côté est moindre que π, désignons les angles par A,B,C; prolongeons le côté AB, de manière à former le cercle entier ABA B′A, lequel partagera la sphère en deux parties égales. Dans l'hémisphère qui contiendra le triangle ABC, prolongeons encore les deux autres côtés au delà de leur intersection mutuelle C, jusqu'à leur rencontre avec le cercle en A′ et en B′. L'hémisphère se trouvera partagé ainsi en quatre triangles ABC, ACB′, B′CA′, A′CB, dont nous désignerons les surfaces par P, X, Y, Z. Il est évident que l'on a

Fig. 15.

$$P + X = B, \qquad P + Z = A.$$

La surface du triangle sphérique Y est équivalente à celle du triangle opposé ABC′, qui a le côté AB commun avec le triangle P, et dont le troisième sommet C′ est situé à l'autre extrémité du diamètre CD de la sphère, mené par le point C [prop. 26]. De là résulte

$$P + Y = C,$$

et comme d'ailleurs

$$P + X + Y + Z = \pi,$$

il s'ensuit que l'on a

$$P = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi).$$

On peut encore arriver à la même conclusion d'une autre manière, en s'appuyant seulement sur le théorème que nous avons démontré relativement à l'équivalence des surfaces [prop. 26].

Dans le triangle sphérique ABC (*fig.* 16), menons, par les milieux D,E des côtés AB, BC, le grand cercle FDEG, sur lequel nous abaisserons, des points A, B, C, les arcs perpendiculaires AF, BH, CG. Si l'arc perpendiculaire BH tombe entre D et E, le triangle résultant BDH sera égal à AFD, et le triangle BHE égal à EGC [prop. 6 et 15], d'où il résulte que la surface du triangle ABC est équivalente à celle du quadrilatère AFGC [prop. 26]. Si le point H coïncide avec le milieu E du côté BC (*fig.* 17), il n'y aura plus que deux triangles rectangles égaux AFD, BDE, par l'échange desquels on démontrera l'équivalence du triangle ABC et du quadrilatère AFEC. Si enfin le point H tombe en dehors du triangle ABC (*fig.* 18), la perpendiculaire CG pénétrant alors dans le triangle, on passera du triangle ABC au quadrilatère AFGC, en ajoutant le triangle FAD = DBH, et retranchant ensuite le triangle CGE = EBH. Imaginons maintenant que, dans le quadrilatère sphérique AFGC, on mène par les points A et G, ainsi que par les points F et C, des arcs de grands cercles; ces arcs AG, FC, seront égaux entre eux [prop. 15] : donc les triangles FAC, ACG seront aussi égaux [prop. 15], et l'angle FAC sera égal à l'angle ACG.

Fig. 16.

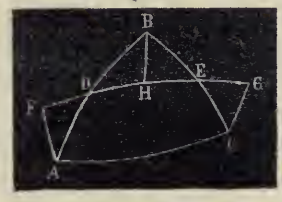
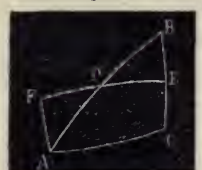


Fig. 17.

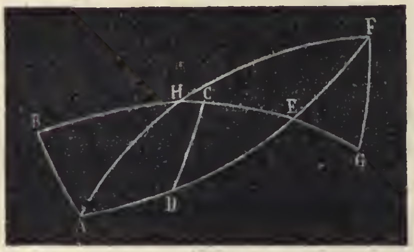


De là résulte que, dans tous les cas précédents, la somme des trois angles du triangle spherique est égale à la somme des deux angles égaux du quadrilatère, autres que les deux angles droits. D'après cela, pour tout triangle sphérique dont la somme des trois angles est S, on peut trouver un quadrilatère de même surface, ayant deux angles droits et les deux côtés perpendiculaires égaux entre eux, et dont chacun des deux autres angles est égal à $\frac{1}{2}$S.

Fig. 18.

Soit maintenant ABCD (*fig.* 19) le quadrilatère sphérique dont les côtés AB = CD sont perpendiculaires sur BC, et dont les angles en A et en D sont égaux chacun à $\frac{1}{2}$S. Prolongeons lès côtés AD et BC jusqu'à leur rencontre en E, et, au delà ce point E, portons encore sur le prolongement de AD la longueur EF = DE, et abaissons sur le prolongement de BC l'arc perpendiculaire FG. Partageons l'arc total BG en deux parties égales, et joignons le milieu H par des arcs de grands cercles aux points A et F. Les triangles EFG, DCE sont égaux [prop. 15]; on a donc FG = DC = AB. Les triangles ABH, HGF sont pareillement égaux, parce qu'ils sont rectangles et ont les côtés de l'angle droit égaux. Donc AH et HF appartiennent à un même cercle; l'arc AHF est égal à π. L'arc ADEF est pareillement égal à π, l'angle HAD = HFE $=\frac{1}{2}$S — BAH $=\frac{1}{2}$S — HFG $=\frac{1}{2}$S — HFE — EFG $=\frac{1}{2}$S — HAD — $\pi+\frac{1}{2}$S. Donc l'angle HFE $=\frac{1}{2}(S-\pi)$, ou, ce qui revient au même, = la mesure du fuseau AHFDA, laquelle à son tour est égale à celle du quadrilatère ABCD, comme on le voit aisément, lorsqu'on passe de l'un à l'autre, en ajoutant d'abord le triangle EFG, puis le triangle BAH, et retranchant ensuite les triangles DCE, HFG, égaux aux précédents. D'après cela $\frac{1}{2}(S-\pi)$ sera la mesure du quadrilatère ABCD, et en même temps aussi celle du triangle sphérique dont la somme des trois angles est égale à S.

Fig. 19.



28. *Lorsque trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles, la somme des trois angles dièdres est égale à deux angles droits.*

Soient AA′, BB′, CC′ (*fig.* 20), les trois parallèles formées par les intersections des trois plans [prop. 25]. Prenons à volonté sur ces droites trois points A, B, C, et imaginons que l'on mène par ces points un plan qui coupera les plans des parallèles suivant les droites AB, AC, BC. Menons, de plus, par la ligne AC et par un point quelconque D de la ligne BB′, un nouveau plan qui coupera le plan des parallèles AA′, BB′ suivant la droite AD, et le plan des parallèles CC′, BB′ suivant la droite CD, et qui fera avec le troisième plan des parallèlles AA′, CC′ un angle que nous désignerons par w. Soient X, Y, Z les angles dièdres des trois plans, suivant les arêtes AA′, BB′, CC′ respectivement. Soient enfin les angles plans BDC $= a$, ADC $= b$, ADB $= c$. Imaginons que, du point A comme centre, on décrive une surface sphérique dont les intersections avec les droites AC, AD, AA′ déterminent un triangle sphérique ayant pour côtés p, q, r, pour surface α, et pour angles w opposé au côté q, X opposé au côté r, et par suite $\pi + 2\alpha - w - X$ opposé au côté p [prop. 27]. De même CA, CD, CC′ couperont la sphère de centre C, en déterminant un triangle de surface β dont les côtés seront p', q', r', et les angles w opposé à q', Z opposé à r', et par suite $\pi + 2\beta - w - Z$ opposé à p'. Enfin DA, DB, DC détermineront sur une sphère de centre D un triangle sphérique dont les côtés l, m, n auront pour angles respectivement opposés $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$, Y, et dont la surface sera par conséquent $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$. Lorsque w diminue, les surfaces des triangles α et β diminuent en même temps, de telle sorte que $\alpha + \beta - w$ peut être rendu moindre que toute quantité donnée. Dans le triangle δ, les côtés l et m peuvent également être rendus indéfiniment petits [prop. 21]. Donc le triangle δ avec un de ses côtés, l ou m, peut être porté autant de fois que l'on voudra sur un grand cercle de la sphere, sans que l'hémisphère se trouve complètement couvert; par suite, δ s'évanouit en

Fig 20.

même temps que w, d'où résulte que l'on doit avoir nécessairement $X + Y + Z = \pi$.

29. *Dans un triangle rectiligne, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés ou ne se rencontrent pas, ou se rencontrent toutes en un même point.*

Supposons que dans le triangle ABC (*fig.* 21), il y ait intersection au point D entre les deux perpendiculaires ED, DF, élevées aux milieux E, F des côtés AB, BC. Menons aux sommets du triangle les lignes DA, DB, DC.

Fig. 21.

Dans les triangles égaux ADE, BDE [prop. 10], on a AD = BD; par une raison analogue, BD = CD. Le triangle ADC est donc isoscèle, et par conséquent la perpendiculaire abaissée du point D sur la base AC tombera au milieu G de cette base.

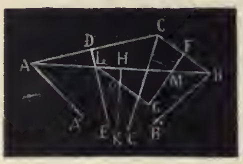
La démonstration n'éprouve aucun changement lorsque le point d'intersection D des deux perpendiculaires ED, FD se trouve soit sur la ligne AC elle-même, soit en dehors du triangle.

Donc, dans le cas où l'on admet que deux de ces perpendiculaires ne se coupent pas, la troisième ne pourra pas non plus rencontrer les deux autres.

30. *Les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés d'un triangle rectiligne seront toutes les trois parallèles entre elles, toutes les fois que l'on en supposera deux parallèles.*

Soient les perpendiculaires DE, FG, HK (*fig.* 22) élevées sur les milieux D, F, H des côtés du triangle ABC.

Fig. 22.



Supposons d'abord que les deux perpendiculaires DE, FG, qui rencontrent AB en L et en M, soient parallèles, et que la perpendiculaire HK se trouve entre les deux autres. A l'intérieur de l'angle BLE, tirons à volonté du point L la ligne LG, qui devra rencontrer FG quelque part en G, quelque petit que soit l'angle d'écart GLE [prop. 16]. Puisque, dans le triangle LGM, la perpendiculaire HK ne peut pas rencontrer MG [prop. 29], il faut donc qu'elle coupe LG quelque part en P, d'où l'on conclut que HK doit être parallèle à DE [prop. 16] et à MG [prop. 18 et 25].

Si l'on représente les côtés par

$$BC = 2a, \qquad AC = 2b, \qquad AB = 2c,$$

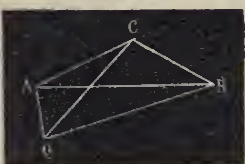
et que l'on désigne par A, B, C les angles respectivement opposé, à ces côtés, on a, dans le cas considéré,

$$\begin{aligned} A &= \Pi(b) - \Pi(c), \\ B &= \Pi(a) - \Pi(c), \\ C &= \Pi(a) + \Pi(b), \end{aligned}$$

comme il est aisé de s'en convaincre, à l'aide des lignes AA', BB', CC', menées par les points A, B, C, parallèlement à la perpendiculaire HK, et par suite aussi aux deux autres perpendiculaires DE, FG [prop. 23 et 25].

Supposons maintenant que les deux perpendiculaires HK, FG soient parallèles, alors la troisième perpendiculaire DE ne pourra pas les rencontrer [prop. 29]; donc ou elle leur sera parallèle, ou elle coupera AA'. La dernière hypothèse revient à dire que l'angle $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Si l'on diminue cet angle jusqu'à ce qu'il devienne égal à $\Pi(a) + \Pi(b)$, en donnant à la ligne AC la nouvelle position CQ (*fig.* 23), et si l'on désigne la longueur du troisième côté BQ par $2c'$, alors l'angle CBQ, qui se trouvera augmenté, devra être égal, d'après ce qui a été démontré plus haut, à $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, d'où il résulte $c' > c$ [prop. 23]. Mais, dans le triangle ACQ, les angles A et Q sont égaux; donc, il faut que dans le triangle ABQ, l'angle en Q soit plus grand que l'angle en A, d'où résulte $AB > BQ$ [prop. 9], c'est à dire $c > c'$.

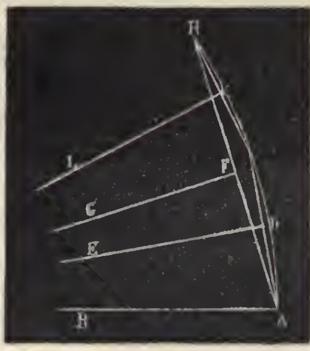
Fig 23.



31. *Nous appellerons* COURBE-LIMITE *(horicycle) la ligne courbe, située dans un plan, et telle que toutes les perpendiculaires élevées sur les milieux de ses cordes soient parallèles entre elles.*

Conformément à cette définition, on peut concevoir que la courbe-limite soit engendrée comme il suit : étant donnée une droite AB (*fig.* 24), par un point A, pris par cette droite, on mène, sous divers angles $CAB = \Pi(a)$, des cordes $AC = 2a$. L'extrémité C de chacune de ces cordes sera située sur la courbe-limite, dont on pourra ainsi déterminer successivement tous les points. La perpendiculaire DE, élevée sur le milieu de la corde AC, sera parallèle à la ligne AB, que nous nommerons *axe de la courbe-limite*. De même toute perpendiculaire FG, élevée sur le milieu d'une corde quelconque AH, sera parallèle à AB. Donc cette propriété devra aussi appartenir en général à toute perpendiculaire KL, élevée au milieu K d'une corde quelconque CH, quels que soient les points C, H de la courbe-limite qui forment les extrémités de cette corde [prop. 30]. De telles perpendiculaires devront donc recevoir, sans distinction, comme AB, le nom d'*axes de la courbe-limite.*

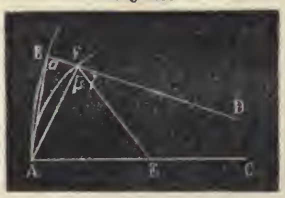
Fig. 24.



32. *Un cercle dont le rayon va en croissant se change en une courbe-limite.*

Soit AB (*fig.* 25) une corde de la courbe-limite. Par les extrémités A et B de la corde, menons deux axes, AC, BD, qui feront avec la corde des angles égaux BAC $=$ ABD $= \alpha$ [prop. 31]. Sur un de ces axes AC, prenons un point quelconque E comme centre d'un cercle, et menons l'arc de cercle AF depuis l'origine A de l'arc AC, jusqu'à sa rencontre en F avec l'autre axe BD. Le rayon FE du cercle, correspondant au point F, formera d'un côté, avec la corde AF, l'angle AFE $= \beta$, et de l'autre côté, avec l'axe BD, l'angle EFD $= \gamma$. L'angle compris entre les deux cordes BAF $= \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ [prop. 22], d'où résulte $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Or, comme l'angle γ peut décroître jusqu'à zéro, soit lorsque le point E se meut dans la diirection AC, F restant fixe [prop. 21], soit encore lorsque F s'approche de B sur l'axe BF, le centre E conservant sa position [prop. 22]; il s'ensuit que, l'angle γ décroissant ainsi, l'angle $\alpha - \beta$, ou l'inclinaison mutuelle des deux cordes AB, AF, et par suite aussi la distance du point B de la courbe-limite au point F du cercle,

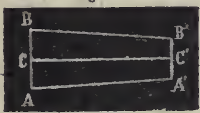
Fig. 25.



tendront vers zéro. Donc on peut appeler la courbe-limite *un cercle de rayon infiniment grand.*

33. Soient $AA' = BB' = x$ (*fig.* 26) deux droites parallèles entre elles dans la direction de A vers A′, et supposons que les parallèles à ces droites servent d'axes aux deux arcs de courbes-limites $AB = s$, $A'B' = s'$. On aura

Fig. 26.



$$s' = se^{-x},$$

e étant indépendant des arcs s, s', et de la droite x, distance des arcs s et s'.

Pour le démontrer, admettons que le rapport des deux arcs s, s' soit égal à celui des deux nombres entiers n, m. Entre les deux axes AA', BB', menons un troisième axe CC' qui retranche de l'arc AB une partie $AC = t$, et de l'arc $A'B'$ une partie $A'C' = t'$, située du même côté que t. Supposons que le rapport de t à s soit égal à celui des deux nombres entiers p, q, de sorte qu'on ait

$$s = \frac{n}{m} s', \qquad t = \frac{p}{q} s.$$

Partageons maintenant l'arc s par des axes en nq parties égales; il y aura mq de ces parties sur s' et np sur t. A ces parties égales de s et de t correspondent aussi des parties égales de s' et de t'; on a par conséquent

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}.$$

D'après cela, de quelque manière que l'on prenne les deux arcs t, t' entre les deux axes AA', BB', le rapport de t à t' restera toujours le même, tant que la distance x entre ces arcs restera la même. Si donc on pose, pour $x = 1$, $s = es'$, on aura, pour une valeur quelconque de x,

$$s' = se^{-x} \ (^1).$$

---

(1) En effet, si l'on suppose la distance des axes AA′, CC′ infiniment petite, d'où $t = ds$, $t' = ds'$, l'équation précédente donne

$$\frac{ds}{s} = \frac{ds'}{s'};$$

Le nombre e étant un nombre inconnu soumis à la seule condition $e > 1$, et d'un autre côté l'unité qui mesure la ligne x pouvant être prise arbitrairement, on pourra, pour simplifier le calcul, choisir cette unité de telle sorte que le nombre e devienne égal à la base des logarithmes de Neper.

On peut encore remarquer que $s' = 0$ pour $x = \infty$. Donc non seulement la distance de deux parallèles va en diminuant [prop. 24], mais encore, lorsqu'on prolonge les parallèles dans le sens du parallélisme, cette distance finit par s'évanouir. Les lignes parallèles présentent donc le caractère des asymptotes.

34. Nous appellerons *surface-limite* (horisphère) la surface engendrée par la révolution de la courbe-limite autour d'un de ses axes, lequel sera aussi, comme tous les autres axes de la courbe-limite, un axe de la surface-limite.

Une corde de longueur donnée est inclinée d'un angle constant sur les axes menés par ses extrémités, quels que soient les deux points de la surface-limite que l'on prenne pour les extrémités de cette corde.

Soient A, B, C [*fig.* 27] trois points de la surface-limite, AA′ l'axe de révolution, BB′ et CC′ deux autres axes, et par suite AB et AC des cordes sur lesquelles les axes sont inclinés d'angles égaux A′AB = B′BA, A′CA = C′CA [prop. 31]. Les deux axes BB′ et CC′, menés par les extrémités de la troisième corde BC, sont également parallèles et situés dans le même plan [prop. 25]. Une perpendiculaire DD′, élevée au milieu de la corde, dans le plan des deux parallèles AA′, BB′, sera parallèle aux trois axes AA′, BB′, CC′ [prop. 23 et 25]; une perpendiculaire EE′, menée

---

donc $\frac{ds}{s}$ est constant, quel que soit x, et l'on a, en considérant s comme fonction de x,

$$d\,\frac{ds}{s} = 0,$$

d'où, C et C′ étant des constantes arbitraires,

$$\frac{ds}{s} = C\,dx, \qquad s = C'e^{Cx}.$$

De plus, s décroît lorsque x croît [prop. 24]. Donc $C'e^{C}$ doit être moindre que l'unité. En représentant ce nombre par e^{-1}, e étant > 1, on a l'équation qu'il s'agissait de démontrer. (*Note du trad.*)

de la même manière sur le milieu de la corde AC, dans le plan des parallèles AA′, CC′, sera parallèle aux trois axes AA′, BB′, CC′ et

Fig. 27.

à la perpendiculaire DD′. Désignons maintenant par $\Pi(a)$ l'angle compris entre le plan qui contient les parallèles AA′, BB′, et le plan du triangle ABC, a pouvant être positif, négatif ou nul. Si a est positif, élevons, à l'intérieur du triangle ABC et dans le plan de ce triangle, la droite FD $= a$, perpendiculaire au milieu D de la corde AB. Si a était un nombre négatif, on mènerait FD $= a$ extérieurement au triangle, de l'autre côté de la corde AB. Si a était nul, le point F coïnciderait avec D. Dans tous les cas, on obtient deux triangles rectangles égaux AFD, DFB, et par conséquent FA $=$ FB. Élevons maintenant en F la ligne FF′ perpendiculaire sur le plan du triangle ABC.

Puisque l'angle D DF $= \Pi(a)$ et que DF $= a$, FF′ sera parallèle à DD′ et à la droite EE′, qui est située dans le même plan perpendiculaire au plan du triangle ABC. Imaginons maintenant que, dans le plan des parallèles EE′, FF′, on abaisse sur EF la perpendiculaire EK. Cette droite EK sera aussi perpendiculaire sur le plan du triangle AEC [prop. 13] et sur la ligne AD située dans ce plan [prop. 11]; par conséquent, AE, qui est perpendiculaire sur EK et sur EE′, sera aussi perpendiculaire sur FE [prop. 11]. Les triangles AEF, FEC sont donc égaux, parce qu'ils sont rectangles et ont les côtés de l'angle droit égaux; donc on a AF $=$ FC $=$ FB. Une perpendiculaire abaissée du sommet F du triangle isoscèle EFC sur la base BC passera par le milieu G de cette base. Un plan mené par cette perpendiculaire FG et par la ligne FF′ devra être perpendiculaire sur le plan du triangle ABC, et coupera le plan des parallèles BB′, CC′ suivant la ligne GG′, qui sera encore parallèle à BB et à CC′ [prop. 25]. Or, CG étant perpendiculaire sur FG, et par suite aussi sur GG′, il s'ensuit que l'angle C′CG $=$ B′BG [prop. 23].

De là résulte que, dans la surface-limite, chacun des axes peut être considéré comme un axe de révolution.

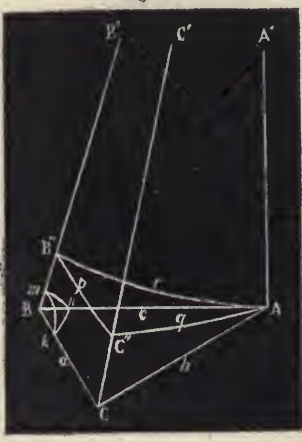
Nons appellerons *plan principal* tout plan mené par un axe de la surface-limite. D'après cela, tout *plan principal* coupe la surface-limite suivant la courbe-limite, tandis que, pour toute autre position du plan sécant, cette intersection est un cercle. Trois plans principaux qui se coupent deux à deux forment entre eux des angles dont la somme est égale à π [prop. 28]. Nous considérerons ces angles comme les angles du triangle de la surface-limite, qui a pour côtés les arcs de courbes-limites, formés par les intersections de la surface-limite avec les trois plans principaux. Les triangles de la surface-limite ont donc, entre leurs angles et leurs côtés, les mêmes relations que l'on démontre exister dans les triangles rectilignes en géométrie ordinaire.

35. Dans ce qui va suivre, nous représenterons par une lettre accentuée, telle que x', la grandeur d'une ligne, pour indiquer que cette ligne est liée à une autre ligne, désignée par la même lettre x sans accent, par la relation exprimée par l'équation

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2}\pi.$$

Soit maintenant ABC (*fig.* 28) un triangle rectiligne rectangle ayant pour hypoténuse $AB = c$, pour côtés de l'angle droit $AC = b$, $BC = a$, et pour angles opposés à ces derniers $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$. Au point A, élevons la perpendiculaire AA′ au plan du triangle ABC, et par les points B et C menons BB′ et CC′ parallèles à AA′. Les plans qui renferment deux à deux ces trois parallèles forment entre eux l'angle $\Pi(\alpha)$ suivant AA′, un angle droit suivant CC′ [prop. 11 et 13], et par suite l'angle $\Pi(\alpha')$ suivant BB′ [prop. 28].

Fig. 28.



Les intersections des lignes BA, BC, BB′ avec une surface sphérique, décrite du point B comme centre, déterminent un triangle sphérique dont les côtés sont $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$, et les angles respectivement opposés $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$.

D'après cela, l'existence d'un triangle rectiligne, ayant pour côtés a, b, c, et pour angles opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$, entraîne aussi celle d'un triangle sphérique (*fig.* 29) ayant pour côtés $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, et pour angles opposés $\Pi(b)$, $\Pi(a')$, $\frac{1}{2}\pi$.

Fig. 29.

Outre ces deux triangles, l'existence du triangle sphérique entraîne aussi réciproquement celle d'un triangle rectiligne pouvant avoir pour côtés a, α', β, et pour angles respectivement opposés $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$.

On peut ainsi passer de a, b, c, α, β, à b, a, c, β, α, et aussi à a, α', β, b', c.

Imaginons que par le point A (*fig.* 28), en prenant AA′ comme axe, on mène une surface-limite qui coupe les deux autres axes BB′, CC′ en B″ et C″, et dont les intersections avec les plans des parallèles forment un triangle de surface-limite ayant pour côtés $B''C'' = p$, $C''A = q$, $B''A = r$, et pour angles respectivement opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. On aura, par conséquent [prop. 34],

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \qquad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Détruisons maintenant le long de la ligne BB′ (*fig.* 30) la liaison des trois plans principaux, et étalons-les de façon qu'ils viennent tous les trois, avec toutes les lignes qu'ils contiennent, s'appliquer sur un même plan, sur lequel les arcs p, q, r se réuniront en un seul arc de courbe-limite, passant par le point A, et ayant pour axe AA′; de telle sorte que, d'un côté de AA′ seront situés : les arcs q et p; le côté b du triangle, lequel est perpendiculaire en A sur AA′; l'axe CC′ mené par l'extrémité de b parallèlement à AA′ et passant par le point C″ de réunion des arcs p et q; le côté a, perpendiculaire sur CC′ au point C; et l'axe BB′, mené par l'extrémité de a parallèlement à AA′, et passant par

Fig. 30

l'extrémité B″ de l'arc p; — de l'autre côté de AA′ seront situés : le côté c, perpendiculaire à AA′ au point A, et l'axe BB′, parallèle à AA′, et joignant l'extrémité de b à l'extrémité de B″ de l'arc r. La grandeur de la ligne CC″ dépend de b, et nous exprimons cette dépendance par l'équation $CC'' = f(b)$. On aura de même $BB'' = f(c)$. Si, en prenant CC′ pour axe, on décrit une nouvelle courbe-limite, à partir du point C, jusqu'à l'intersection D de cette courbe avec l'axe BB′, et que l'on désigne l'arc CD par t, on aura

$$BD = f(a), \qquad BB'' = BD + DB'' = BD + CC'',$$

et par suite,

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Remarquons, de plus, que l'on a [prop. 32]

$$t = pe^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha) . e^{f(b)}$$

Si la perpendiculaire au plan du triangle ABC (*fig.* 28), au lieu d'être élevée au point A, l'avait été au point B, les lignes c et r seraient restées les mêmes; les arcs q et t se seraient changés en t et q; les droites a et b, en b et a, et l'angle $\Pi(\alpha)$ en $\Pi(\beta)$. On aurait, par conséquent,

$$q = r \sin \Pi(\beta) . e^{f(a)},$$

d'où résulte, en substituant pour q sa valeur,

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) . e^{f(a)},$$

et, en changeant α en b', β en c,

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) . e^{f(a)},$$

d'où, en multipliant par $e^{f(b)}$,

$$\sin \Pi(b) . e^{f(b)} = \sin \Pi(c) . e^{f(c)}.$$

Il en résulte aussi

$$\sin \Pi(a) . e^{f(a)} = \sin \Pi(b) . e^{f(b)}.$$

Or, les droites a et b sont indépendantes l'une de l'autre, et de plus, pour $b = 0$, on a

$$f(b) = 0 , \quad \Pi(b) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Donc, pour toute droite a, on a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a),$$

ce qui donne

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).$$

On tire encore de là, par des échanges de lettres,

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$
$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta).$$

Si, dans le triangle sphérique rectangle (*fig.* 29), on désigne les côtés $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, avec les angles opposés $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha)$, par les lettres a, b, c, A, B, les équations précédentes prendront la forme des équations connues que l'on établit, en trigonométrie sphérique, pour les triangles rectangles, savoir :

$$\sin a = \sin c \sin A,$$
$$\sin b = \sin c \sin B,$$
$$\cos A = \cos a \sin B,$$
$$\cos B = \cos b \sin A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b,$$

équations au moyen desquelles on peut passer à celles qui sont relatives aux triangles sphériques quelconques. Donc la trigonométrie sphérique est indépendante de ce que, dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est ou n'est pas égale à deux angles droits.

36. Considérons maintenant de nouveau le triangle rectiligne ABC (*fig.* 31), ayant pour côté a, b, c et pour angles respectivement opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Prolongeons l'hypoténuse c au delà du point B, et prenons $BD = \beta$; au point D, élevons sur BD la perpendiculaire DD′, qui sera parallèle au prolongement BB′ du côté a au delà du point B. Par le point A, menons encore à DD′ la parallèle AA′, qui sera en même temps parallèle à CB′ [prop. 25]. Par conséquent l'angle $A'AD = \Pi(c + \beta)$, $A'AC = \Pi(b)$, d'où

Fig. 31.

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta).$$

Fig. 32.

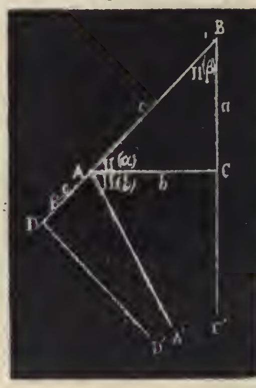
Portons β à partir du point B sur l'hypoténuse c; à l'extrémité D (*fig.* 32), élevons sur AB, à l'intérieur du triangle, la perpendiculaire DD', et par le point A menons à DD' la parallèle AA'; la ligne BC, avec son prolongement CC' sera la troisième parallèle. Alors l'angle CAA' $= \Pi(b)$, DAA' $= \Pi(c-\beta)$, d'où

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b).$$

Cette dernière équation subsiste encore lorsqu'on a $c = \beta$ ou $c < \beta$. Si l'on a $c = \beta$ (*fig.* 33), la perpendiculaire AA', élevée sur AB au point A, sera parallèle au côté BC $= a$, avec son prolongement CC'; par conséquent $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, tandis que l'on a aussi $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$ [prop. 23]. Si l'on a $c < \beta$, l'extrémité de β tombera au delà du point A, en D (*fig.* 34), sur le prolongement de l'hypoténuse AB. La perpendiculaire DD' élevée sur AD, et la parallèle AA', menée par le point A à cette perpendiculaire seront toutes deux parallèles au côté BC $= a$ et à son prolongement CC'. Ici, l'angle DAA' $= \Pi(\beta - c)$; donc [prop. 23]

Fig. 33.

Fig. 34.



$$\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c-\beta).$$

La combinaison des deux équations trouvées donne

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c-\beta) + \Pi(c+\beta),$$
$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta),$$

d'où résulte

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}.$$

En substituant ici la valeur [prop. 35]

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \cos \Pi(c),$$

il vient

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta).$$

β étant ici un nombre arbitraire, puisque l'on peut choisir à volonté l'angle $\Pi(\beta)$ du côté a avec le côté c, entre les limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, et par suite β entre les limites 0 et ∞, on en conclura, en faisant successivement $\beta = c, 2c, 3c, \ldots$, que l'on a, pour toute valeur positive du nombre n,

$$\operatorname{tang}^n \frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(nc).$$

Considérons maintenant n comme le rapport de deux lignes x et c, et admettons que l'on ait

$$\cot \frac{1}{2}\Pi(c) = e^c :$$

on trouvera que, pour toute ligne x en général, positive ou négative, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x},$$

e pouvant être un nombre quelconque plus grand que l'unité, puisque l'on a $\Pi(x) = 0$ pour $x = \infty$.

Comme l'unité qui sert à mesurer les lignes est arbitraire, on peut faire en sorte que e représente la base des logarithmes de Neper.

37. Parmi les équations trouvées plus haut [prop. 36], il suffit de connaître les deux suivantes :

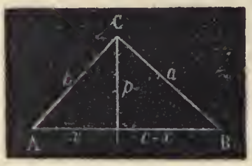
$$\begin{aligned} \sin \Pi(c) &= \sin \Pi(a) \sin \Pi(b), \\ \sin \Pi(\alpha) &= \sin \Pi(b) \cos \Pi(\beta), \end{aligned}$$

en appliquant la dernière aux deux côtés de l'angle droit a et b, pour déduire de leur combinaison les deux autres équations du nº 35, sans qu'il y ait ambiguïté dans les signes algébriques, tous les angles étant ici aigus. On parvient d'une manière semblable aux deux équations

$$\tan \Pi(c) = \sin \Pi(\alpha) \tan \Pi(a), \tag{1}$$
$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta). \tag{2}$$

Considérons maintenant un triangle rectiligne ayant pour côtés a, b, c (*fig.* 35), et pour angles respectivement opposés A, B, C. Si A et B sont des angles aigus, la perpendiculaire p, abaissée du sommet C sur le côté opposé c, tombera dans l'intérieur du triangle, et partagera le côté c en deux parties : soit x celle de ces parties qui est adjacente à l'angle A, $c-x$ celle qui est adjacente à l'angle B. On formera ainsi deux triangles rectangles qui donneront, en appliquant l'équation (1), les relations

Fig. 35.



$$\tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(p),$$
$$\tan \Pi(b) = \sin A \tan \Pi(p);$$

et ces relations continueraient de subsister lors même qu'un des angles, B, par exemple, serait droit (*fig.* 36), ou obtus (*fig.* 37). On a donc généralement, pour un triangle quelconque,

$$\sin A \tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(b). \tag{3}$$

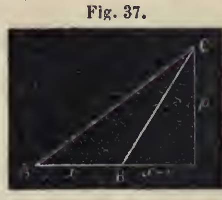
Dans un triangle dont les angles A et B sont aigus (*fig.* 35), on a encore [équation (2)]

$$\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(c-x) = \cos B \cos \Pi(a),$$

équations qui subsistent encore pour un triangle dans lequel un des angles A, B serait droit ou obtus. Ainsi, pour $B = \frac{1}{2}\pi$ (*fig.* 36), on devra prendre $x = c$; la première équation se change alors dans celle que nous avons trouvée plus haut [équation (2)]; l'autre se vérifie d'elle-même.

Fig. 36.

Fig. 37.



Pour $B > \frac{1}{2}\pi$ (*fig*. 37), la première équation n'est pas altérée, tandis que la seconde devient

$$\cos \Pi(x-c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a).$$

Or, on a $\cos\Pi(x-c) = -\cos\Pi(c-x)$ [prop. 23], et d'ailleurs $\cos(\pi - B) = -\cos B$. Si l'angle A est droit ou obtus, on remplacera x par $c-x$ et $c-x$ par x, pour ramener ce cas au précédent.

Pour éliminer x entre les deux équations, remarquons que l'on a [prop. 37]

$$\begin{aligned}\cos\Pi(c-x) &= \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}\\ &= \frac{1-e^{2x-2c}}{1+e^{2x-2c}}\\ &= \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c)\cot^2\frac{1}{2}\Pi(x)}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c)\cot^2\frac{1}{2}\Pi(x)}\\ &= \frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}.\end{aligned}$$

En mettant pour $\cos \Pi(x)$, $\cos \Pi(c-x)$ leurs valeurs, il vient

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\cos B + \cos\Pi(b)\cos A}{1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B},$$

d'où résulte

$$\cos\Pi(a)\cos B = \frac{\cos\Pi(c) - \cos A\cos\Pi(b)}{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)},$$

et enfin

$$\sin^2\Pi(c) = \Big[1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\Big]\Big[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\Big],$$

On trouvera de même

$$(4)\quad \begin{aligned}\sin^2\Pi(a) &= \Big[1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\Big]\Big[1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\Big],\\ \sin^2\Pi(b) &= \Big[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\Big]\Big[1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\Big].\end{aligned}$$

De ces trois équations on tire encore

$$\frac{\sin^2\Pi(b)\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)} = \left[1 - \cos A \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\right]^2.$$

On conclut de là, sans ambiguïté de signe,

$$\cos A \cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1. \tag{5}$$

En substituant ici pour $\Pi(c)$ sa valeur, conformément à l'équation (3),

$$\sin\Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C}\operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(c),$$

il vient

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\sin C}{\sin A\sin\Pi(b) + \cos A\sin C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}.$$

Si l'on remplace maintenant $\cos\Pi(c)$ par cette expression dans l'équation (4), on a

$$\cot A\sin C\sin\Pi(b) + \cos C = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}. \tag{6}$$

L'élimination de $\sin\Pi(b)$ au moyen de l'équation (3) donne

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)}\cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B}\sin C\sin\Pi(a).$$

D'ailleurs, l'équation (6) donne, par des échanges de lettres,

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)} = \cot B\sin C\sin\Pi(a) + \cos C.$$

On conclut des deux dernières équations

$$\cos A + \cos B\cos C = \frac{\sin B\sin C}{\sin\Pi(a)}. \tag{7}$$

Les quatre équations qui exprimeront les relations entre les côtés a, b, c, et les angles opposés A, B, C, dans un triangle rectiligne seront d'après cela [équations (3), (5), (6), (7)]

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b),\\&\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1,\\&\cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)},\\&\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.\end{aligned}\right.$$

Si les côtés du triangle sont très petits, on pourra se contenter des déterminations approchées [prop. 36]

$$\begin{aligned}&\cot \Pi(a) = a,\\&\sin \Pi(a) = 1 - \tfrac{1}{2}a^2,\\&\cos \Pi(a) = a,\end{aligned}$$

et de même pour les autres côtés b, c. Pour un tel triangle, les équations (8) deviennent donc

$$\begin{aligned}&b \sin A = a \sin B,\\&a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,\\&a \sin(A + C) = b \sin A,\\&\cos A + \cos(B + C) = 0.\end{aligned}$$

Les deux premières de ces 4 équations sont celles que fournit la géométrie ordinaire. Les deux dernières, combinées avec les premières, conduisent à la relation

$$A + B + C = \pi.$$

Donc la géométrie imaginaire se change dans la géométrie ordinaire lorsque l'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petits.

J'ai publié, dans les *Mémoires de l'Université de Kasan*, quelques recherches sur la mesure des lignes courbes, des figures planes, des aires et des volumes des corps, ainsi que sur l'application de la géométrie imaginaire à l'analyse ([1]).

([1]) Voyez aussi un Mémoire de l'auteur publié en français dans le *Journal de Crelle* (tome XVII, p. 295-320, 1837), sous le titre de *Géométrie imaginaire*. *(Note du trad.)*

Les équations (8) constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire. Il n'existe donc pas d'autre moyen que les observations astronomiques pour s'assurer de l'exactitude des calculs auxquels conduit la géométrie ordinaire. Cette exactitude s'étend très loin, comme je l'ai fait voir dans un de mes Mémoires. Ainsi, dans les triangles qui sont accessibles à nos moyens de mesure, on n'a pas encore trouvé que la somme des trois angles différât d'un centième de seconde de deux angles droits.

Il est encore à remarquer que les quatre équations (8) de la géométrie plane se changent dans les équations de la géométrie sphérique, lorsqu'on remplace les côtés a, b, c, par $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, et que l'on pose en même temps

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a}.$$
$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1} \operatorname{tang} a,$$
$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \frac{1}{\sqrt{-1} \sin a},$$

et de même pour les deux autres côtés b et c. De cette manière, les équations (8) se changent dans les suivantes :

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \cot a,$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

EXTRAIT

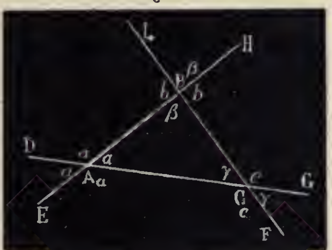
DE LA CORRESPONDANCE DE GAUSS ET DE SCHUMACHER.

SCHUMACHER A GAUSS.

Je prends la liberté de vous soumettre une tentative que j'ai faite pour démontrer, sans le secours des parallèles ni d'aucune théorie, la proposition que la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°, d'où suivrait alors la démonstration de l'axiome d'Euclide. Les seuls principes que je suppose établis sont que la somme de tous les angles formés autour d'un point est égale à 360° ou à 4 angles droits, et que les angles opposés par le sommet sont égaux.

Prolongeons indéfiniment les côtés d'un triangle rectiligne ABC (*fig.* 1), ou, en d'autres termes, considérons un système de trois droites dans un plan, formant, par leurs intersections, le triangle ABC. On a, pour les trois sommets, les équations

Fig. 1.



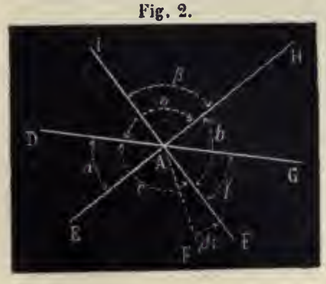
$$2a + 2\alpha = 4\text{ dr.},$$
$$2b + 2\beta = 4\text{ dr.},$$
$$2c + 2\gamma = 4\text{ dr.},$$

d'où

$$\alpha + \beta + \gamma = 6\text{ dr.} - (a + b + c).$$

Ces relations subsistant, de quelque manière que soient situés les points A,B,C, ou, ce qui revient au même, de quelque manière que les trois droites soient menées dans le plan, laissons immobiles les lignes DG, EH, et faisons passer IF par le point A (*fig.* 2), de manière qu'elle fasse avec EH le même angle que dans sa position primitive, ou, plus généralement, puisque cet angle est arbitraire, de manière qu'elle tombe toujours dans l'intérieur de l'angle a. Nous aurons alors

Fig. 2.



$$a + b + c = 4\text{ dr.}$$

Donc

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\,\text{dr}.$$

Pourrait-on objecter à cela que l'on a bien, par hypothèse,

$$b\,(fig.\ 1) = b\,(fig.\ 2),$$

mais que l'égalité

$$c\,(fig.\ 1) = c\,(fig.\ 2)$$

doit être démontrée?

Il me semble qu'à cause de la valeur arbitraire laissée aux angles, cette démonstration n'est pas indispensable.

Tels sont les principes de la démonstration sur laquelle j'attends votre jugement. J'ajouterai seulement, pour justifier mon raisonnement, qu'il est bien vrai que la seconde opération fait disparaître le triangle ABC; mais elle ne fait pas disparaître les angles du triangle. De quelque manière que les lignes soient situées, on a toujours

$$\text{IBH} = \beta, \qquad \text{GCF} = \gamma, \qquad \text{DAE} = \alpha,$$

aussi bien dans le triangle fini que dans le triangle évanouissant; la somme

$$\text{IAH} + \text{GAF} + \text{DAE}$$

est donc toujours égale à la somme des angles d'un triangle rectiligne.

Ainsi, on démontrera la proposition pour un triangle quelconque (dont les angles sont A,B,C), en tirant les lignes DG, EH, de façon que l'on ait

$$\alpha = \text{A},$$

et faisant, de plus,

$$\text{IAH} = \text{B}, \qquad \text{GAF} = \text{C}.$$

Si alors IAF n'était pas une ligne droite, mais une ligne brisée IAF$'$, l'angle c se trouverait, il est vrai, plus petit de dc; mais l'angle b serait plus grand d'autant, et, par suite, la somme de ces angles n'aurait pas changé, et nous aurions ce qui nous est nécessaire pour la démonstration, l'égalité

$$b + c\,(fig.\ 1) = b + c\,(fig.\ 2).$$

Copenhague, 3 mai 1831.

GAUSS A SCHUMACHER.

A bien examiner ce que vous m'écrivez au sujet des parallèles, vous avez employé, dans vos syllogismes, sans l'énoncer explicitement, une proposition qui peut se formuler ainsi :

Si deux droites qui se coupent, (1) et (2), font respectivement, avec une troisième droite (3) qui les rencontre, les angles A′, A″, et qu'une quatrième droite (4), située dans le même plan, soit coupée pareillement par (1) sous l'angle A′, alors (4) sera coupée par (2) sous l'angle A″.

Or, non seulement cette proposition a besoin de démonstration, mais on peut dire qu'au fond elle constitue le théorème lui-même qu'il s'agit de démontrer.

Depuis quelques semaines, j'ai commencé à mettre par écrit quelques résultats de mes propres méditations sur ce sujet, qui remontent en partie à quarante années, et dont je n'avais jamais rien rédigé, ce qui m'a forcé trois ou quatre fois à recommencer tout le travail dans ma tête. Je ne voudrais pourtant pas que tout cela pérît avec moi [1].

Gœttingue, 17 mai 1831.

SCHUMACHER A GAUSS.

Je vais vous importuner encore une fois avec la théorie des parallèles.

Fig. 3.

Prolongeons indéfiniment les côtés du triangle rectiligne, et prenons un rayon R assez grand pour que les rapports $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ deviennent moindres qu'une quantité donnée quelconque. Avec ce rayon, décrivons du centre C le demi-cercle DEFG. Les côtés a, b, c pouvant être considérés comme

---

(1) En parcourant la table des matières que doit contenir le quatrième volume de l'édition des *Œuvres* de Gauss, publiée en ce moment par l'Académie de Gœttingue, nous n'avons vu annoncer aucun article qui parût se rapporter au projet annoncé ici par le grand géomètre. Il serait bien regrettable que ces recherches si profondes et si originales *eussent péri avec lui !* (N. d. Tr.)

s'évanouissant par rapport à ce demi-cercle, et, par suite, les points A, B comme coïncidant avec C, ce demi-cercle sera la mesure des trois angles du triangle, dont la somme différera alors de 180° aussi peu que l'on voudra.

Il me semble que, si l'on ne rejette pas la notion de la grandeur indéfiniment croissante, cette démonstration prouve très simplement que, dans tout triangle rectiligne *fini*, la somme des angles est égale à 180°, ou plutôt que la constante qui, si la géométrie d'Euclide n'était pas vraie, devrait être ajoutée à la somme des angles pour compléter 180°, est moindre que toute grandeur donnée; et comme on peut répéter la même démonstration pour un triangle quelconque, cette constante ne peut pas non plus dépendre de la grandeur du triangle.

Lübeck, 25 mai 1831.

SCHUMACHER A GAUSS.

...... J'aurais désiré trouver dans votre lettre votre jugement sur la manière dont je démontre que la somme des angles d'un triangle rectiligne ne diffère de 180° que d'une quantité moindre que toute quantité donnée. Vous croirez sans peine que votre appréciation est de la plus haute importance pour moi, qui sais avec quelle facilité vous découvrez le point faible d'une démonstration. Je n'en ai encore rien communiqué à personne, si ce n'est à vous, à mes aides et au professeur Hansen, de Seeberg. Aucun de nous n'y a découvert de paralogisme.

Si quelqu'un trouvait indispensable (ce que je ne pense pas) de démontrer cette proposition, que l'on peut, dans un cercle de rayon infini (j'emploie ce mot d'*infini* pour abréger le discours), considérer les sommets d'un triangle comme des centres de ce cercle coïncidant entre eux, il serait facile de faire rigoureusement cette démonstration.

Il me semble que, quand deux points sont à une distance finie l'un de l'autre, cette distance doit être considérée comme nulle vis-à-vis d'une ligne infinie. Ces points coïncident donc l'un avec l'autre, relativement à cette ligne infinie.

Altona, 29 juin 1831.

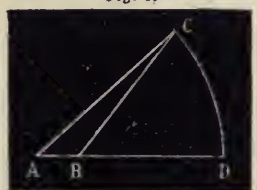
GAUSS A SCHUMACHER.

Au sujet des parallèles, je vous aurais déjà communiqué avec grand plaisir mon opinion en réponse à votre première lettre, si je n'avais pas supposé que, sans des développements suffisants, elle ne pouvait guère vous être d'une grande utilité. Pour que de tels développements fussent véritablement convaincants, il faudrait peut-être de longues pages d'explications sur ce que vous n'avez eu besoin que d'indiquer en quelques lignes, et ces explications exigeraient un calme d'esprit qui me fait défaut en ce moment. Je vous en dirai cependant quelques mots, pour vous prouver ma bonne volonté.

Vous attaquez directement le cas d'un triangle quelconque. Mais vous auriez pu appliquer le même raisonnement, en réduisant d'abord la question au cas le plus simple, et énonçant ainsi le théorème :

(1) *Dans tout triangle dont un côté est fini, le second côté, et, par suite aussi, le troisième, étant infinis, la comme des deux angles adjacents au côté fini est égale à* 180°.

Fig. 4.



Démonstration d'après votre manière. — L'arc de cercle CD est aussi bien la mesure de l'angle CAD que celle de l'angle CBD, parce que, dans un cercle de rayon infini, un déplacement fini du centre doit être considéré comme nul. Donc

$$\mathrm{CAD} = \mathrm{CBD}, \qquad \mathrm{CAD} + \mathrm{CBA} = \mathrm{CBD} + \mathrm{CBA} = 180°.$$

Le reste s'achève sans difficulté. On a, en effet, d'après ce théorème,

Fig. 5.

$$\alpha + \beta + \delta = 180,$$
$$180 = \varepsilon + \delta,$$
$$\gamma + \varepsilon = 180,$$

d'où, en faisant la somme de ces égalités,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180.$$

Pour ce qui est maintenant de votre démonstration du théorème (1), je commencerai par protester contre l'usage que vous faites d'une grandeur infinie, en la traitant comme une quantité *déterminee (vollendeten)*, ce qui n'est jamais permis en mathématiques. L'infini n'est qu'une *façon de parler*, parce qu'il s'agit en réalité de *limites*, dont certains rapports peuvent approcher autant que l'on voudra, tandis que d'autres sont susceptibles de croître indéfiniment. Dans ce sens, la géométrie *non-euclidienne* ne renferme en elle rien de contradictoire, quoique, à première vue, beaucoup de ses résultats aient l'air de paradoxes. Ces contradictions apparentes doivent être regardées comme l'effet d'une illusion, due à l'habitude que nous avons prise de bonne heure de considérer la géométrie euclidienne comme *rigoureuse*.

Dans la géométrie non-euclidienne, il n'y a jamais, dans les figures, de similitude sans égalité. Par exemple, les angles d'un triangle équilatéral ne sont pas seulement différents de $\frac{2}{3}$ d'angle droit, mais encore ils peuvent varier suivant la grandeur des côtés; et, si les côtés croissent au delà de toute limite, ils peuvent devenir aussi petits que l'on voudra. Il y a donc déjà contradiction à vouloir *dessiner* la ressemblance d'un tel triangle au moyen d'un triangle plus petit. On peut seulement *indiquer* sa disposition générale. De cette manière, l'*indication* d'un triangle infini serait, à la limite, celle-ci (*fig.* 7) :

Fig. 6.

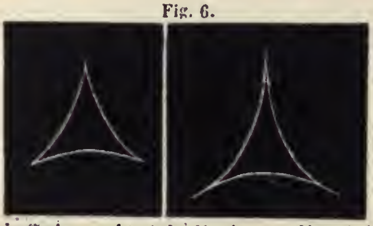


Fig. 7.

Dans la géométrie euclidienne, rien n'est grand d'une manière absolue; mais il n'en est pas de même dans la géométrie non-euclidienne, et c'est précisément là son caractère essentiel. Ceux qui n'accordent pas ce fait, établissent déjà par cela même toute la géométrie euclidienne; mais, comme je l'ai dit, d'après ma conviction, ce n'est de leur part qu'une pure illusion. Dans le cas en question, il n'y a rien absolument de contradictoire à dire que, si l'on donne les points A, B et la direction AC, C pouvant s'éloigner indéfiniment, alors, bien que l'angle DBC s'approche de plus en plus de l'angle DAC, il n'en est pas moins impossible d'abaisser la différence de ces angles au-dessous d'une certaine grandeur finie.

Fig. 8.

Votre introduction de l'arc CD rend, sans nul doute, votre conclusion plus spécieuse. Mais si l'on veut développer clairement ce que vous n'avez fait qu'indiquer, il faudra s'exprimer ainsi :

On a

Fig. 9.

$$CAB : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'},$$

et tandis que AC croît indéfiniment, CD et CD' d'une part, et, d'autre part, ECD et E'CD' s'approchent continuellement de l'égalité.

Ces deux choses n'ont pas lieu dans la géométrie non-euclidienne, si l'on entend par là que les rapports géométriques de ces quantités s'approchent autant que l'on voudra de l'égalité. En effet, dans la géométrie non-euclidienne, la demi-circonférence d'un cercle de rayon r a pour valeur

$$\frac{1}{2}\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

k étant une constante que l'expérience nous indique comme extrêmement grande par rapport à tout ce qui est mesurable pour nous. Dans la géométrie euclidienne, elle devient infinie.

Dans le *langage figuré* de la théorie de l'infini, on devrait donc dire que les circonférences de deux cercles infinis, dont la différence des rayons a une grandeur finie, diffèrent elles-mêmes d'une grandeur qui est à chacune d'elles dans un rapport fini.

Il n'y a rien ici de contradictoire, si l'homme, être fini, ne s'aventure pas à vouloir traiter quelque chose d'infini comme un objet donné et susceptible d'être embrassé par ses forces de compréhension habituelles.

Vous voyez qu'ici le débat vient toucher immédiatement au terrain de la métaphysique.

Gœttingue, 12 juillet 1831.

GAUSS A SCHUMACHER.

J'ai eu dernièrement occasion de relire l'opuscule de Lobatschewsky, intitulé : *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelenlinien.* Cet opuscule contient les éléments de la géométrie qui devrait exister, et dont le développement formerait un enchaînement rigoureux, si la géométrie *euclidienne* n'était pas vraie. Un certain Schweikardt (¹) a donné à cette géométrie le nom de *géomé-*

(¹) Autrefois à Marbourg, maintenant professeur de jurisprudence à Kœnigsberg.

trie astrale, Lobatschewsky celui de *géométrie imaginaire.* Vous savez que depuis cinquante-quatre ans (depuis 1792) je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçues, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatschewsky aucun fait nouveau pour moi; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique. Je crois devoir appeler votre attention sur ce livre, dont la lecture ne peut manquer de vous causer le plus vif plaisir.

Gœttingue, 28 novembre 1846.

SUR LES

FAITS QUI SERVENT DE BASE A LA GÉOMÉTRIE

PAR M. HELMHOLTZ.

Extrait des *Actes de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de Heidelberg*, tome IV, p. 197.

Traduit de l'allemand par J. HOÜEL [1].

Mes recherches sur la manière dont s'opère la localisation dans le champ visuel m'ont conduit à réfléchir sur les origines de la considération générale de l'espace. Il se présente ici une première question, dont la réponse ne peut être donnée que par les Sciences exactes : c'est de distinguer quelles sont, parmi les propositions de la Géométrie, celles qui expriment des vérités de fait, et celles, au contraire, qui sont de simples définitions, ou des conséquences des définitions et des expressions que l'on a choisies pour les énoncer. Cette recherche est complètement indépendante de la question ultérieure de l'origine de notre connaissance des propositions qui expriment des faits. La première question n'est donc pas aussi facile à résoudre qu'on le croit communément, parce que les figures de la Géométrie sont des idéaux, dont les figures matérielles du monde réel ne peuvent jamais qu'approcher, sans satisfaire pleine-

---

[1] La question de l'origine des idées géométriques étant une de celles qui préoccupent le plus en ce moment les savants des pays voisins, nous avons cru faire chose utile en contribuant à faire connaître les idées de l'illustre physicien de Heidelberg. Nous profitons de quelques changements indiqués par l'Auteur depuis la publication de son Mémoire, et modifiant certains points des conclusions du travail primitif. *(Note du Trad.)*.

ment aux exigences de l'idée, et parce qu'aussi, pour vérifier expérimentalement l'invariabilité de la forme des corps et l'exactitude des figures du plan et de la ligne droite que nous rencontrons dans les corps solides, il nous faut employer précisément les propositions géométriques elles-mêmes, dont il s'agit d'établir une sorte de démonstration expérimentale.

D'un autre côté, on peut se convaincre, avec un peu de réflexion, comme le montrera la suite de cette Note, que la série des axiômes géométriques, que l'on pose habituellement dans la Géométrie élémentaire, est insuffisante, et qu'en réalité on suppose encore tacitement une suite de plusieurs autres faits. On a bien cherché, dans des Traités récents, à compléter les axiômes d'Euclide; mais on manquait d'un principe qui pût faire reconnaître si la lacune était comblée. Comme nous ne pouvons nous représenter clairement que des relations d'étendue telles qu'il est possible d'en figurer dans l'espace réel, cette clarté d'intuition nous jette facilement dans l'illusion de regarder comme une chose évidente par elle-même ce qui est véritablement une propriété particulière, et sans évidence intrinsèque, du monde extérieur en présence duquel nous vivons.

On surmonte cette difficulté à l'aide de la Géométrie analytique, dont les calculs reposent sur de pures idées de grandeur, et qui n'emploie dans ses démonstrations aucune intuition visuelle. On pourrait donc, pour décider la question qui nous occupe, la ramener à la recherche de celles des propriétés analytiques de l'espace et des grandeurs étendues, que l'on a dû admettre au commencement de la Géométrie analytique, comme base de ses propositions.

J'avais entrepris cet examen, et j'étais déjà parvenu aux principaux résultats, lorsqu'a paru la Leçon d'habilitation de Riemann *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie,* dans laquelle le même sujet est étudié à un point de vue qui ne diffère pas essentiellement du mien. J'ai appris à cette occasion que Gauss s'était aussi occupé de cette même question, et que son célèbre Mémoire sur la courbure des surfaces formait une partie de ces recherches, la seule qu'il ait publiée.

Riemann commence par expliquer comment les propriétés générales de l'espace, sa continuité, la multiplicité de ses dimensions peuvent s'exprimer analytiquement, en ramenant la détermination de chaque unité particulière à la *diversité* (1) qui le constitue, c'est-à-dire de chaque point, à la mesure de n grandeurs (coordonnées), variables d'une manière continue et indépendamment les unes des autres. Lorsque la connaissance de n de ces quantités sera nécessaire, l'espace sera, comme l'appelle Riemann, une *diversité* étendue dans n sens (2), et nous dirons qu'il a n dimensions.

Le système des couleurs forme aussi une *diversité* analogue, triplement étendue.

Or, dans l'espace, tout élément linéaire, quelle que soit sa direction, est comparable à un autre quelconque sous le rapport de la grandeur. Soient u, v, w les mesures de nature quelconque qui déterminent la position d'un point, et $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ celles qui déterminent la position d'un point voisin. La mesure de l'élément linéaire ds, dans notre espace réel, est toujours la racine carrée d'une fonction homogène du second degré des quantités du, dv, dw, quelle que soit la nature des mesures u, v, w. Nous pouvons donner à cette propriété le nom de *théorème de Pythagore généralisé*. Ce théorème forme la base de notre étude ; il possède un haut degré de généralité, parce qu'il est entièrement indépendant de l'établissement de tout système particulier de mesure.

Riemann admet cette expression comme hypothèse, en démontrant qu'elle est la forme algébrique la plus simple qui réponde aux conditions du problème. Mais il reconnaît expressément que c'est une hypothèse, et mentionne, comme pouvant être légitime, la supposition que ds soit la racine quatrième d'une fonction homogène du quatrième degré.

La suite des recherches de Riemann devient très claire, lorsqu'on se restreint à deux dimensions. Dans ce cas, il résulte déjà des recherches de Gauss sur la courbure des surfaces, que la forme la plus générale d'un espace à deux dimensions dans lequel a lieu, pour l'élément linéaire, le théorème de Pythagore sous la forme généralisée dont nous venons de parler, est une surface courbe quelconque de notre espace réel, sur laquelle les déterminations

---

(1) *Varietas* (GAUSS, *Theoria residuorum biquadraticorum*, Comm. 2da, art. 38, *Werke*, t. II, p. 110). — *Mannigfaltigkeit* (GAUSS, *Anzeige zu derselben*, ibid., p. 176, 178). — (*Note du trad.*)

(2) *Eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit*.

d'étendue se font suivant les règles ordinaires de la Géométrie analytique.

Pour que des figures de grandeur finie soient mobiles dans tous les sens sur une telle surface, sans altération de leurs mesures prises sur la surface même, et pour qu'on puisse les faire tourner autour d'un point quelconque, il faut que la surface ait dans toutes ses parties une mesure de courbure constante. Si cette mesure de courbure est positive, la surface sera une surface sphérique, ou pourra s'appliquer par flexion sans extension sur une surface sphérique. Cette sphère devient un plan, lorsque la mesure de courbure est nulle, ou, lorsqu'elle est négative, une des surfaces que le professeur Beltrami a étudiées sous le nom de surfaces pseudo-sphériques.

Riemann étend maintenant ces propositions à un nombre quelconque de dimensions; il montre dans ce cas comment il faut déterminer la mesure de courbure. La forme la plus générale d'un espace de trois dimensions est, comme il résulte de ses recherches, une figure limitée par trois équations dans un espace à six dimensions.

Après avoir résolu le problème général, il restreint finalement la solution, en ajoutant la condition que les figures finies soient mobiles dans toutes les directions et puissent tourner dans tous les sens, sans altération de forme. Alors, la mesure de courbure d'un tel espace imaginaire doit être constante, et pour que cet espace soit infiniment étendu, il faut que cette mesure de courbure soit égale à zéro. Dans ce dernier cas, cet espace a les mêmes attributs que notre espace réel, et peut recevoir le nom d'*espace plan*, par comparaison avec les espaces imaginaires de dimensions plus élevées.

Mes propres recherches avec leurs résultats sont en grande partie contenues implicitement dans les recherches de Riemann. Sur un seul point, elles ajoutent quelque chose de nouveau; c'est en ce qui concerne l'établissement du théorème de Pythagore généralisé, tel que Riemann l'emploie au début de son travail. La condition que Riemann n'introduit qu'à la fin de son étude, savoir, que les figures possèdent, sans changement de forme, le degré de mobilité que suppose la Géométrie, je l'avais introduite dès le début, et cette condition restreint alors le champ des hypothèses que l'on peut faire sur l'expression de l'élément linéaire, à ce point que la forme acceptée par Riemann subsiste seule à l'exclusion de toutes les autres.

Mon point de départ était que toute mesure primordiale de l'étendue repose sur la constatation de la coïncidence, et qu'ainsi un système de mesures de l'étendue doit supposer ces conditions, sans lesquelles il ne peut être question de constater la coïncidence.

Les hypothèses admises dans mes recherches sont les suivantes :

1. *Concernant la continuité et les dimensions :* Dans l'espace de n dimensions, le lieu de chaque point peut être déterminé par la mesure de n grandeurs, variables d'une manière continue et indépendamment les unes des autres ; de sorte que (en exceptant, lorsqu'il y a lieu, certains points, lignes ou surfaces, ou en général certaines figures de moins de n dimensions), dans chaque mouvement du point, les grandeurs qui servent de coordonnées varient d'une manière continue, et il y en a au moins une parmi elles qui ne reste pas constante.

2. *Concernant l'existence des corps mobiles et solides par eux-mêmes :* Entre les $2n$ coordonnées de chaque couple de points d'un corps solide par lui-même et mis en mouvement, il existe une équation, qui est la même pour tous les couples de points superposables.

Quoiqu'on ne dise rien de plus sur la nature de cette équation, elle est renfermée cependant dans d'étroites limites, parce que, pour m points, il existe $\frac{m(m-1)}{2}$ équations, renfermant mn grandeurs inconnues, parmi lesquelles $\frac{n(n-1)}{2}$ doivent rester variables arbitrairement, en vertu du postulat suivant. Si m est plus grand que $n+1$, il y aura plus d'équations que d'inconnues, et comme toutes ces équations doivent être formées d'une manière identique, on a ainsi une condition qui ne peut être remplie que par des équations de nature particulière.

3. *Concernant la liberté du mouvement :* Tout point peut se transporter d'une manière continue en tout autre point. Seulement, pour les différents points d'un seul et même système solide par lui-même, il existe des restrictions à ces mouvements, qui sont assujettis aux équations qui existent entre les coordonnées des points pris deux à deux.

Des hypothèses 2 et 3, il résulte que, si un système solide de points A peut, dans une certaine position, être amené à coïncider avec un second système B, la même chose peut encore avoir lieu dans toute autre position de A; car, de la même manière que A peut être amené à sa seconde position, B peut aussi y être amené.

4. *Concernant l'indépendance entre la forme des corps solides et leur rotation :* Si un corps se meut de façon que $n-1$ de ses points restent immobiles, et que ceux-ci soient choisis de telle manière que tout autre point du corps ne puisse plus parcourir qu'une ligne, la rotation, étant prolongée, ramène sans retournement le corps à sa position initiale.

Cette dernière proposition, qui, comme le montrent nos recherches, n'est pas contenue implicitement dans les précédentes, correspond à la propriété que, dans les fonctions complexes, on appelle la *monodromie*.

Dès que ces trois conditions seront remplies, on en déduira, par une voie purement analytique, qu'il existe une fonction homogène du second degré des quantités du, dv, dw, qui reste invariable dans la rotation, et qui donne ainsi une mesure de l'élément linéaire indépendante de la direction [1].

Nous sommes ainsi parvenus au point de départ de Riemann, et l'on en conclut ensuite, d'après la méthode même suivie par ce géomètre, que si le nombre des dimensions est fixé à trois, et que l'on exige l'extension infinie de l'espace, aucune autre Géométrie n'est possible que celle qui a été enseignée par Euclide, ou celle de Lobatchefsky, qui, comme Beltrami l'a démontré, se trouve réalisée dans les surfaces pseudo-sphériques.

Le premier postulat, que Riemann aussi a établi, n'est autre chose que la définition analytique de la continuité de l'espace et de la multiplicité de son étendue.

Les postulats 2, 3, 4 doivent évidemment être supposés satisfaits pour qu'il puisse être question de superposition. Ces hypothèses sont donc les conditions de possibilité de la superposition, et quoiqu'elles ne soient pas, la plupart du temps, énoncées explici-

---

[1] La démonstration mathématique sera donnée prochainement avec développement dans les *Comptes rendus des séances de la Société Royale de Gœttingue.*

tement, elles servent de base aux démonstrations élémentaires de la Géométrie, laquelle fonde toutes ses mesures d'étendue sur la superposition.

Le système de ces postulats ne fait donc aucune supposition que l'on ne fasse aussi dans la Géométrie ordinaire. Au point de vue théorique, il offre l'avantage que, par cela seul qu'il est complet, il est plus facile à contrôler.

Il est à remarquer qu'ici nous avons fait plus clairement ressortir comment il faut supposer aux corps de la nature une solidité d'un caractère déterminé et un degré particulier de mobilité, pour qu'un système de mesures, tel que celui de la Géométrie, puisse présenter une signification réelle. L'indépendance entre la superposition des systèmes solides de points, et le lieu, la position et la rotation relative de ces systèmes est un fait sur lequel est fondée la Géométrie.

Cela devient encore plus manifeste, quand on compare l'espace avec d'autres *diversités* étendues dans plusieurs sens, par exemple, avec le système des couleurs. Tant que nous n'avons pas dans celui-ci d'autre moyen de mesure que celui qui est donné par la loi du mélange, il n'existe pas, comme pour l'espace, de relation de grandeur entre les points pris *deux à deux,* qui puisse être comparée avec la relation qui a lieu entre deux autres points; mais il n'en existe qu'entre des groupes de *trois* points, lesquels doivent, de plus, être situés en ligne droite, c'est à dire, entre des groupes de trois couleurs, dont une peut résulter du mélange des deux autres.

On trouve une autre différence dans le champ visuel de chacun des deux yeux, où aucune rotation n'est possible, tant que nous nous restreignons aux mouvements naturels des yeux. Quels sont les changements particuliers qui en résultent pour les mesures au coup d'œil? C'est ce que j'ai expliqué dans mon *Traité d'Optique physiologique,* ainsi que dans une communication faite à la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de Heidelberg, le 5 mars 1865.

Comme toute mesure physique, celle de l'espace doit aussi s'appuyer sur une loi invariable d'uniformité dans les phénomènes naturels.

2

LA SCIENCE ABSOLUE DE L'ESPACE

PAR J. BOLYAI

PRÉCÉDÉ D'UNE

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE W. ET DE J. BOLYAI

PAR M. FR. SCHMIDT

NOTE DU TRADUCTEUR.

Depuis que la publication de la Correspondance de Gauss avec Schumacher a exhumé les idées du grand géomètre sur la théorie des parallèles, le nom de Bolyai est devenu inséparable de ces profondes découvertes. C'était donc un devoir pour la science européenne d'arracher à un injuste oubli la mémoire des deux hommes qui ont illustré ce nom.

L'auteur de la Notice dont nous publions la traduction, M. Fr. Schmidt, s'est consacré à cette œuvre de réparation avec un dévouement infatigable, que n'ont rebuté ni la lenteur des communications entre les diverses parties de l'empire hongrois, ni la difficulté de se procurer, dans la patrie même de Bolyai, les détails nécessaires sur les deux hommes qui l'ont rendue célèbre.

C'est encore au savant architecte de Temesvár que nous devons la possession du rarissime opuscule de J. Bolyai, que nous avons reproduit à la suite de la Notice sur l'auteur, certain qu'il ne manquera pas d'exciter l'intérêt de tous ceux qui aiment vraiment la science.

Par cette publication, la Société des Sciences physiques et naturelles continue l'œuvre qu'elle a commencée en insérant dans son précédent volume les recherches de Lobatschewsky sur le même sujet.

Puisse cet hommage rendu au géomètre hongrois décider ses compatriotes à tirer de ses papiers, déposés au Collége de Maros Vásárhely, les remarquables travaux qu'ils doivent renfermer, et dont nous ne connaissons encore que les titres !

J. H.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DES DEUX MATHÉMATICIENS HONGROIS

WOLFGANG ET JOHANN BOLYAI DE BOLYA

PAR M. FRANZ SCHMIDT,

ARCHITECTE A TEMESVÁR.

L'esquisse biographique que je vais tracer est encore fort incomplète; mais comme il n'y a guère lieu de s'attendre à voir paraître prochainement une histoire détaillée des deux hommes éminents auxquels sont consacrées ces pages, je me suis décidé à publier les documents que j'ai pu rassembler, d'après les renseignements imprimés, oraux ou manuscrits que j'ai pu me procurer, dans l'espoir que les personnes qui sont à même de fournir des informations plus nombreuses ou plus précises seront engagées par cet essai à les livrer bientôt à la publicité.

Ces deux hommes, le père et le fils, après avoir consacré leur puissante intelligence à une science bien peu cultivée dans leur patrie, vivant à l'extrémité de la Transylvanie, dans une contrée magnifique, mais où le commerce des livres n'a point encore pénétré, se sont trouvés hors d'état de propager et de faire apprécier leurs découvertes, qui maintenant, longtemps après leur mort, attirent de plus en plus l'attention des hommes de science chez toutes les nations cultivées de l'Europe. Les noms de Gauss, de Gerling, de Baltzer, de Grunert en Allemagne, de Hoüel, de Battaglini, de Forti en France et en Italie, sont garants que les travaux des Bolyai ne tomberont pas dans l'oubli; et, j'en ai la conviction, la prédiction de Baltzer, que le nom de Bolyai sera un jour prononcé avec respect, est déjà accomplie.

I.

Wolfgang Bolyai de Bolya (en hongrois, *Bolyai Farkas*) (1) naquit le 9 février 1775 à Bolya, dans la partie de la Transylvanie dite le Pays des Sicules *(Székelyföld)*. Dès sa jeunesse, ayant longtemps souffert d'une maladie des yeux, il donna des preuves d'une mémoire extraordinaire, en récitant sans faute des pages entières après une seule lecture. Il fit ses premières études à Enyed, et plus tard, à Klausenburg. Pour compléter son instruction, il partit pour l'Allemagne avec un fils du baron Simon Kemény, se rendit en 1797, d'abord à Iéna, puis à Gœttingue, où Bolyai se consacra aux sciences philosophico-mathématiques. Malheureusement, les deux amis étaient encore si peu versés dans la science de l'économie domestique, que, Kemény étant allé chercher dans son pays de nouveaux moyens de subsistance, le pauvre Bolyai dut rester pour gage, en attendant son retour.

Bolyai fit à Gœttingue la connaissance de Gauss, et se lia avec lui d'une amitié qui dura toute la vie de ces deux hommes, et qui fut la consolation des mauvais jours de privations et d'amertumes, au milieu desquels s'écoula la longue existence du savant hongrois. Les lettres de Gauss à son ami ont été envoyées par celui-ci, en 1855, au professeur Sartorius von Waltershausen, qui travaillait alors à sa Biographie de Gauss (2). Il est bien à souhaiter que cette correspondance si intéressante soit bientôt publiée.

Cette liaison avec Gauss ne contribua pas peu aux progrès de Bolyai dans les mathématiques. Gauss avait une haute estime pour la science de Bolyai, et fondait sur lui de grandes espérances.

Bolyai, dit Sartorius von Waltershausen (3), est un esprit hors ligne, dont Gauss a dit, il y a longtemps, que c'était le seul homme qui eût complètement saisi ses vues métaphysiques sur les Mathématiques. D'après les quelques pages que nous avons de lui, c'est un penseur profond, un beau caractère; son expression originale rappelle

(1) Wurzbach, Biographisches Lexikon, 2e partie. Vienne, 1857.

(2) Nous devons ce renseignement au professeur Szabó, de Maros Vásárhely. *(Note du Trad.)*

(3) *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856, p. 17,

souvent le style de Jean Paul. Confiné dans un coin écarté de la terre, isolé de toute âme à la hauteur de la sienne; naguère encore (1849), dans ses vieux jours, au milieu du tumulte d'une révolution dévastatrice, entouré du carnage et des horreurs de la guerre civile, réduit à quelques débris de sa modeste fortune, mais fort du noble calme d'une conscience pure, il jette, au delà du spectacle déchirant des souffrances que s'impose la folie humaine, un regard d'espoir sur les vagues de l'éternité; il se plaint seulement de n'avoir jamais eu le bonheur de pouvoir se frayer à lui-même son chemin, tout ayant presque toujours tourné contre lui. « Cependant, » dit-il dans une lettre, « je me croirai les mêmes droits qu'à mes pareils, les autres » vermisseaux, jusqu'à ce que bientôt, réconcilié avec mon sort, » j'aille trouver le repos dans une tombe ignorée. »

Benzenberg aussi, dans une lettre écrite à Gauss, en 1801, exprime son opinion sur Bolyai, en disant que c'est un des hommes les plus extraordinaires qu'il ait jamais rencontrés.

Un des jeunes amis de Gauss, Ide, de Brunswick, écrivait à ce dernier, le 23 mai 1799 : « Bolyai assistera sûrement à la fête du tir qui aura bientôt lieu ici, mais seulement en philosophe, pour y trouver matière à réflexions sur les folies humaines. C'est là sa maxime, comme je l'ai reconnu dans mainte occasion. Il ne manque pas à une seule de ces assemblées mondaines, non certes pour s'amuser avec les autres, mais pour y raffermir la sérénité de son âme. »

Après la mort de Gauss (1855), le roi de Hanovre fit envoyer à Bolyai la grande médaille d'argent et de bronze, frappée à la mémoire de l'illustre géomètre. Les savants de Gœttingue restèrent jusqu'à la fin en correspondance suivie avec Bolyai, et le tinrent au courant de tout ce qui s'était produit dans le monde scientifique depuis la mort de son ami.

II.

De retour dans son pays, en 1802, Bolyai fut nommé professeur de mathématiques, de physique et de chimie au Collége Réformé de Maros-Vásárhely. Dans cette chaire, qu'il a occupée pendant près d'un demi-siècle, il a eu pour élèves la plupart des professeurs actuels de la Transylvanie, et une grande partie de la noblesse du pays.

Outre les devoirs de sa place, qu'il a toujours remplis avec une conscience scrupuleuse et un zèle soutenu, Bolyai, dans les premières années de son professorat, s'occupa aussi de poésie. Il a laissé cinq tragédies en prose, imprimées en langue hongroise, sans nom d'auteur, en 1817, et dont voici les titres : 1° *Pausanias;* 2° *Mahomet;* 3° *Simon Kemény;* 4° *le Triomphe de la Vertu sur l'Amour;* 5° *la Victoire de l'Amour sur la Vertu.* Les premières de ces pièces ont, à ce qu'il paraît, un vrai mérite poétique. Plus tard (1818) parut *le Procès de Paris,* drame en cinq actes. En 1819, il traduisit en hongrois l'*Essay on Man,* de Pope, et le publia précédé de la traduction d'un choix de poésies anglaises et allemandes. La tournure poétique de son esprit et la vivacité extraordinaire de son imagination se montrent de la manière la plus frappante jusque dans ses ouvrages mathématiques.

Dans la suite, son ardeur créatrice se tourna vers la musique, et le violon, son instrument favori, l'aida à exprimer en mélodies ses sentiments et ses pensées. Rien de tout cela ne lui fit négliger la science, et l'activité de sa plume se consacra presque entièrement aux études mathématiques. Les ouvrages de Bolyai ont paru successivement dans l'ordre suivant, tous sans nom d'auteur :

(a) *Az arithmetica eleje (az elő-szóban irt módón) B. B. F. Mathesist és Physicát tanító által. Maros-Vásárhelyt, 1830. Nyomtatott a reformat Kollégyom betűivel Felső Visti Kali Josef által.* « Éléments d'Arithmétique (d'après les principes indiqués » dans la Préface), par le Professeur de Mathématiques et de Phy- » sique. Maros-Vásárhely, 1830. Imprimé avec les caractères du » Collége Réformé, par Joseph Kali de Felső Vist. » In-8°, avec une préface de XVIII pages, 1 page d'*errata*, 162 pages de texte, et un tableau représentant l'Arbre de la Science. — Cet ouvrage est complètement épuisé. L'exemplaire de la bibliothèque du Collége Réformé est enrichi de remarques de Johann Bolyai. Ce Traité de Mathématiques, qui devait se composer de cinq parties, a été, comme la plupart des livres de Bolyai, publié par voie de souscription; mais, comme cela arrive d'ordinaire, les souscripteurs avaient plus promis que tenu. Voici le contenu du premier volume :

Introduction, explication des signes, égalité, parties, nombre, espace. Division de l'Arithmétique en *pure* et *appliquée.* Addition, soustraction. Définition du positif et du négatif, avec de nombreux exemples et des représentations graphiques. Limites. Fractions. Multiplication et division ; proportions géométriques. Puissances, racines, logarithmes. Introduction au Calcul différentiel, au Calcul intégral et au Calcul de variations, avec des notations particulières à l'auteur, telles que

$$\sin x = \textcircled{S}x, \qquad \cos x = \textcircled{$\mathfrak{S}$}\,x\ , \qquad \mathrm{tang}\,x = \textcircled{t}\,x\ ,$$

$$\text{sin verse}\,x = \textcircled{$\backsim$}\,x,\ \text{cos verse}\,x = \textcircled{$\backsim$}\,x\ , \qquad \mathrm{cotang}\,x = \textcircled{T}\,x\ ,$$

$$\text{séc}\,x = \textcircled{\S}\,x\ , \qquad \text{coséc}\,x = \textcircled{$\mathfrak{\S}$}\,x\ , \qquad \text{arc sin}\,x = \textcircled{aS}\,x\ ,$$

$$\text{log vulg}\,x = \textcircled{l}\,x\ , \quad \text{log nat}\,x = \textcircled{L}\,x\ , \qquad f(x) = \textcircled{$|$}\,x,$$

$$d_n f(x,y,\dots) = {}^{n}\!\partial\textcircled{$|$}\,xy\dots, \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \overset{n}{\textcircled{$|$}}\,x\ , \qquad \sqrt{-1} = \dot{1}\ .$$

Les souscripteurs n'ayant pas rempli leurs engagements, les quatre parties de l'ouvrage qui restaient à publier n'ont pu, malheureusement, paraître.

(**b**) *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiæque publico ordinario. Tomus primus. Maros-Vásárhelyini, 1832. Typis Collegii Reformatorum, per Josephum et Simeonem Kali de Felsõ Vist.* — In-8, 4 planches en taille-douce.

(**c**) *Tentamen juventutem*, etc. *Tomus secundus. Ibidem*, 1833. In-8, 10 planches.

Ces deux volumes (**b**) et (**c**) ont été encore publiés par souscription. Ils forment l'œuvre principale de W. Bolyai, à laquelle l'auteur renvoie constamment dans ses écrits postérieurs. Le PREMIER VOLUME contient :

Préface de deux pages : *Lectori salutem*. Un tableau in-folio (*Explicatio Signorum. Arbor arithmeticæ geometriæque corradicata coronisque confluentibus. Ordo quo geometria tractabitur primo in plano ; secundo, redeundo e plano in abyssum spatii*). *Index rerum* (I-XXXII). *Errata* (XXXIII-LXXIV). *Errores recentius detecti* (LXXV-XCVIII). Vient ensuite le texte (p. 1-502), Puis, avec une pagination spéciale et un faux-titre, l'Appendice composé par

Johann Bolyai, fils de Wolfgang : APPENDIX *scientiam spatii absolute veram exhibens : a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore* JOANNE BOLYAI *de eadem, Geometrarum in Exercitu Cæsareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.* 26 pages de texte, 2 pages d'*errata*. — Enfin (pages I-XVI), en langue hongroise, les noms des souscripteurs, la nomenclature mathématique, et des additions à ce volume, par W. Bolyai. Des quatre planches de figures, les trois premières se rapportent au corps du texte, la dernière à l'*Appendix*.

Voici un aperçu des matières traitées dans ce premier volume : Division de l'ensemble des sciences. Introduction. — *(Radix)*. Coup d'œil général sur l'arithmétique. Axiomes. Addition, soustraction, grandeurs incommensurables, limites, quantités variables, fractions, multiplication, division, proportions géométriques, règle des signes dans la multiplication et la division; interversion des facteurs, multiplication des facteurs égaux, formation des puissances, racines, logarithmes. — *(Truncus)*. Représentation des grandeurs par des temps. Addition, soustraction, multiplication, division, fractions, proportions, limites, puissances, racines, logarithmes, quantités imaginaires (traitées avec beaucoup de développement). Théorème du binôme; séries logarithmiques, leur convergence ; module des logarithmes, logarithmes imaginaires.— *(Corona)* (p. 178-442). Fonctions, leur formation; différentielle d'une fonction d'une seule variable. Éléments du calcul intégral. Différentielles partielles. Exemples tirés de la géométrie et de la mécanique. Différentielle d'une série convergente. $\frac{0}{0}$, . Quadrature des sections coniques. Rectification. Exemples tirés de la Dynamique. Cubature des corps. Différentielles des fonctions trigonométriques et circulaires. Tangentes, longueur d'un arc de courbe, sous-tangentes, normales, sous-normales, $\frac{\infty}{\infty}$. Théorème de Taylor, avec la détermination du reste; développements de $(1+x)^e$, $(1+z)^{-1}$. Théorème de Taylor pour le cas de plusieurs variables. Maxima et minima; applications géométriques. Éléments du calcul des variations. — *(Rami coronæ arboris)*. Théorie des équations. Équation $x^{17}-1=0$, sa construction géométrique. Transformation des équations. Résolution des équations numériques (d'après Newton et Lagrange). Méthode d'élimination de Bézout. Équations indéterminées. Fractions continues; leurs applications aux équations. Démonstration de Gauss que toute équation a une racine (1).

Depuis la page 444 jusqu'à la fin : Coup d'œil général sur la géométrie (2). — Vient ensuite l'*Appendix* de Joh. Bolyai, à l'impression duquel ce dernier a contribué lui-même pour 104 florins 54 kreuzers (3). Ce Mémoire contient une exposition nouvelle et rationnelle de la Théorie des parallèles, qui se rencontre pour les résultats avec les travaux similaires faits à Kasan, vers la même époque, par Lobatschewsky (4), sans qu'aucun des deux géomètres eût connaissance des découvertes de l'autre. Gauss s'était aussi occupé de cet objet dans sa jeunesse, et depuis encore (5), mais il n'a jamais rien publié de ses recherches. Nous savons seulement qu'elles

---

(1) *Primitiæ messis ditissimæ — quasi stella venientis solis nuncia — veteranum juvenis opus — adinstar Herculis dum serpentem infans disrupit.* (Page 425.)

(2) Cette partie traite, entre autres choses, de la définition du plan et de la ligne droite, à un point de vue analogue à celui qu'il a développé plus tard dans l'ouvrage (b), quoiqu'en partant d'un principe un peu différent. Il s'occupe ensuite de la théorie des parallèles, et, à propos des divers systèmes qui sont possibles lorsqu'on n'admet pas l'axiôme XI d'Euclide, il ajoute : « *Appendicis Auctor, rem acumine singulari aggressus, Geometriam pro omni casu absolute veram posuit, quamvis e magna mole, tantum summe necessaria, in Appendice hujus tomi exhibuerit, multis (ut tetraedri resolutione generali, pluribusque aliis disquisitionibus elegantibus) brevitatis studio omissis.* Il dit plus loin : *Nihilominus tamen quæstio suboritur : quid si novum axioma detur, per quod determinetur u* (ce que Lobatschewsky nomme l'ANGLE DE PARALLÉLISME)? *Tentamina idcirco, quæ olim feceram, breviter exponenda veniunt, ne saltem alius quis operam eamdem perdat.*

W. Bolyai parle en plusieurs endroits avec une sincère admiration du beau travail de son fils. Ainsi, il dit :

(T. I, p. 502). *Nec operæ pretium est plura referre; quum res tota ex altiori contemplationis puncto, in ima penetranti oculo, tractetur in Appendice sequente, a quovis fideli veritatis puræ alumno digna legi.*

(T. II, p. 380). *Denique aliquid Auctori Appendicis... addere fas sit: qu tamen ignoscat, si quid non acu ejus teligerim.*

(3) *Tentamen* (T. II, p. 384),

(4) Lobatscheswky, *Geometrische Untersuchungen*, Berlin, 1840. (Voy. *Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat.*, T. IV, 1er cah., p. 87.)

(5) *Corresp. de Gauss et de Schumacher*, T. II, p. 261. (*Mém. de la Soc. de Sc. phys. et nat.*, T. IV, 1er cah., p. 123.)

étaient en complet accord avec celles de nos deux auteurs. Il ne s'en est pas moins écoulé près de quarante années avant que ces vues profondes fussent arrachées à l'oubli, et le Dr R. Baltzer, de Dresde, s'est acquis des titres impérissables à la reconnaissance de tous les amis de la science, en attirant, le premier, leur attention sur les travaux de Bolyai, dans la seconde édition de ses excellents *Éléments de Mathématiques* (Dresde, 1866-67). Suivant les traces de Baltzer, le professeur Hoüel, de Bordeaux, dans une récente brochure intitulée : *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire,* a donné des extraits du livre de Bolyai, qui contribueront certainement à faire rendre à ces idées nouvelles la justice qu'elles méritent. Ces extraits seront d'autant mieux accueillis que les ouvrages de Bolyai sont maintenant complètement épuisés.

Les additions à ce premier volume, celles du moins qui forment les pages LIX-XCVIII, semblent avoir été imprimées plusieurs années après le reste de l'ouvrage. Elles contiennent des études sur la convergence des séries.

Le Tome second du *Tentamen* renferme : La suite de l'exposition de la Géométrie et de la Trigonométrie, les Sections coniques, la Stéréométrie et la Trigonométrie sphérique. De plus, dans un Appendice, les éléments de la Perspective, de la Gnomonique et de la Chronologie. Puis des Additions au *Tome premier* (Théorie des combinaisons, calculs d'intérêts, applications des logarithmes). Enfin une addition à l'*Appendix* du premier volume. Il existe encore quelques exemplaires de ce Tome II dans le commerce.

Lorsque le *Tentamen* tomba entre les mains de Gauss, celui-ci en devina immédiatement l'auteur.

(**d**) *Az Arithmetikának, Geometriának és Physikának eleje, a M. Vásárhelyi Kollégyom béli alsobb Tanulók számára a helybéli Professor áltál. Első Kötet. M. Vásárhelyen,* 1834. Éléments d'Arithmétique, de Géométrie et de Physique, pour les élèves du Gymnase élémentaire de Maros-Vásárhely, par le professeur de cet établissement. Première partie, 1834. In-8.— Préface et Table des matières (p. I-X); texte (p. 1-90). — De ce Traité, qui devait comprendre cinq parties, la première partie seulement a paru. Elle contient les mêmes matières que le volume indiqué (**a**), moins l'Introduction au calcul différentiel, au calcul intégral et au calcul des variations. — Il en reste encore un petit nombre d'exemplaires.

(**e**) *A marosvásárhelyt 1829 nyomtatott Arithmetika elejének rővidített részint bővitett, általán jobbitott, s tisztálttabb kiadása —A szerző által M. Vásárhelyt.* 1843.— Les Éléments d'Arithmétique imprimés à Maros-Vásárhely en 1829, en partie abrégés, en partie développés; édition revue, améliorée et corrigée par l'auteur. Maros-Vásárhely, 1843. — In-8. — Préface et Table des matières (p. I-XLIV), texte (p. 1-386), 2 planches en taille-douce. — Comme l'annonce le titre, le livre est une édition augmentée et corrigée du livre désigné par (**a**). Dans sa Préface, l'auteur s'exprime ainsi sur cette nouvelle édition : « Il voulait d'abord, dans sa vieillesse, » reproduire sous une forme épurée les idées auxquelles il était » parvenu dans sa jeunesse par la seule méditation : mais on ne » peut s'attendre à trouver dans l'automne des grappes sur la vigne, » si la grêle ne l'a épargnée dans l'été. En second lieu, il voulait, » comme professeur, simplifier et développer la première édition, » et du moins pouvoir remplacer l'usage du tome I du *Tentamen* » latin. Si, outre le système, il se rencontre souvent quelque chose » d'insolite, la faute en est à une longue maladie des yeux et à un » défaut de connaissances. Pendant cette maladie, l'auteur a dû se » soumettre à un genre de vie qui lui interdisait l'usage de ses » yeux; il a donc été forcé, jusqu'au rétablissement de sa vue, de » retrouver par la simple méditation toutes ses connaissances ma» thématiques antérieures. »

Cet ouvrage n'est point une traduction littérale du *Tentamen*. Il contient seulement, avec des suppressions et des additions, la partie arithmétique de l'ouvrage latin. Par exemple, on n'y trouve plus la démonstration de Gauss, le calcul de variations, etc.; d'autre part, les caractères de convergence des séries y sont plus développés. En beaucoup d'endroits, l'auteur renvoie au *Tentamen*. — On peut encore trouver des exemplaires de cet ouvrage.

(**f**) *Arithmetica eleje kezdőknek.* Éléments d'arithmétique pour les commençants. — Sans titre ni date. D'après une note marginale de l'auteur, l'ouvrage semble avoir été imprimé en 1845. Il contient, en 40 pages in-8, les quatre opérations fondamentales, la règle de trois, la règle de société, les fractions décimales, les éléments du calcul littéral ; addition, soustraction, puissances, racines, progressions géométriques, et applications aux calculs d'intérêt.

(**g**) *Ürtan elemei kezdőknek.* Éléments de la science de l'espace pour les commençants. — Également sans titre ni date. D'après une note, imprimé en 1846; 42 pages de texte, in-8. A cet opuscule appartiennent 5 planches de figures, qui n'ont jamais été imprimées. L'auteur en avait dessiné de sa main un double exemplaire. Dans son testament, il fait observer à ce sujet « que ces » figures peuvent être facilement reproduites par ceux qui en » auront besoin, puisque ce sont des enfants qui ont dessiné celles » qui existent. » Ces mots se rapportent à un troisième exemplaire, avec figures dessinées par un petit-fils de W. Bolyai (un fils de Johann). Les trois exemplaires sont la propriété du Collége Réformé de Maros Vásárhely.

Voici le contenu de l'ouvrage : Définition de l'espace, de la surface, de la ligne, du point, de la ligne droite, des parallèles (avec renvoi à l'*Appendix*); angles, triangles, leur égalité et leur similitude. Quadrilatères, leur surface; théorème de Pythagore. Cercle. Définitions de l'abscisse et de l'ordonnée. Calcul de l'aire des polygones et du cercle. Applications à la géométrie pratique : mesure des hauteurs, nivellement, calcul des surfaces. Introduction à la trigonométrie, en 4 pages, contenant les définitions du sinus, du cosinus, de la tangente, de la sécante; formules pour sin $(a \pm b)$. Puis deux pages de corrections et d'additions.

Le dernier ouvrage de W. Bolyai, le seul qu'il ait composé en langue allemande, est intitulé :

(**h**) *Kurzer Grundriss eines Versuchs :* I. Die Arithmetik, *durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.* II. *In der* Geometrie, *die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. d. gl. nicht nur scharf zu bestimmen; sondern auch ihr Seyn im Raume zu beweisen : und da die Frage,* ob zwey von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel nicht $= 2R$, sich schneiden oder nicht? *niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie* Euclid *das* XI) *aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die* Ja-*Antwort, andere auf das* Nein *so zu bauen, dass die Formeln der letzten, auf einen Wink auch in der ersten gültig seyen. — Nach* *einem lateinischen Werke von* 1829, *M. Vásárhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen. Maros Vásárhely,* 1851.

Courte esquisse d'un essai : I. Pour présenter l'*Arithmétique* d'une manière évidente et rigoureusement logique, en la débarrassant, à l'aide de conceptions convenables, des quantités imaginaires et des infiniment petits; II. En *Géométrie,* non seulement pour déterminer avec précision les notions de la ligne droite, du plan, de l'angle en général, des figures sans angles, des figures courbes, des différentes espèces d'égalité, etc.; mais encore pour démontrer leur existence dans l'espace; et — comme à la question de savoir « si » deux droites coupées par une troisième se coupent ou ne se cou- » pent pas lorsque la somme des angles intérieurs n'est pas égale à » 2 angles droits », personne au monde ne peut répondre sans poser un axiôme (tel que l'axiôme XI d'Euclide), — pour séparer la partie de la géométrie indépendante de cette question, et fonder une géométrie sur la réponse *affirmative,* une autre sur la réponse *négative,* de telle sorte que les formules de celle-ci puissent s'appliquer aussi immédiatement à la première. — D'après un ouvrage latin publié en 1829 à Maros-Vásárhely, et des ouvrages hongrois imprimés dans la même ville. — In-8, 88 pages de texte.

L'ouvrage donne (p. 2-42), sous une forme condensée, les principales définitions de l'Arithmétique, y compris le calcul différentiel et intégral, d'après le même système d'exposition que dans le *Tentamen.* — Page 43 : « Des principes de la Géométrie (autant » qu'on peut les exposer brièvement et sans figures). » L'auteur fait mention du travail déjà cité de Nic. Lobatschewsky (Berlin, 1840), et le compare avec celui de Johann Bolyai, au sujet duquel il dit : « Quelques exemplaires de l'ouvrage publié ici ont été » envoyés à cette époque à Vienne, à Berlin, à Gœttingue.... De » Gœttingue, le géant mathématique, qui du sommet des hauteurs » embrasse du même regard les astres et la profondeur des abîmes, » a écrit qu'il était ravi de voir exécuté le travail qu'il avait com- » mencé pour le laisser après lui dans ses papiers. » — L'auteur donne encore un court extrait des principes de la géométrie contenus dans le tome I du *Tentamen.* Son style est très original, souvent difficile à comprendre.

III.

Le 9 mars 1832, Bolyai fut nommé membre correspondant de la section mathématique de l'Académie Hongroise.

Comme professeur, Bolyai, par son zèle ardent, exerçait une puissante influence. Dans sa vie privée, c'était un vrai type d'originalité, et il court beaucoup d'anecdotes sur ses singularités et ses distractions. Une de ses occupations favorites était la construction de modèles de fours et d'appareils de chauffage. Il eut la joie de voir adopter de son vivant le poêle-Daniel, construit d'après la théorie des tuyaux, et qui a introduit une réforme complète dans l'économie domestique de la Transylvanie. — Il avait fait couvrir sa voiture avec des lattes.

Les ornements de son antique demeure étaient son violon et ses modèles de fours. A la muraille enfumée pendaient les portraits de son ami Gauss, de Shakespeare, qu'il appelait le fils de la Nature, et de Schiller, qu'il en appelait le petit-fils. Devant une table grossière était assis un vieillard, vêtu de pantalons hongrois en grosse étoffe noire, de hautes bottes *(czismen)*, d'une jaquette de flanelle blanche, coiffé d'un chapeau à forme basse et à larges bords : c'était Wolfgang Bolyai.

Dans l'année 1849, Bolyai fut mis à la retraite. Il fit alors faire son cercueil, écrivit les lettres de faire part de sa mort, et les fit imprimer en 1855 [*Jelentés* (annonce), 8 pages in-8, 1855]. Dans son testament, il ordonna que ses funérailles fussent aussi simples que possible, et qu'on sonnât simplement la cloche de l'École, comme signe qu'il fallait partir pour la dernière et la grande leçon. La croyance de Bolyai à l'immortalité de l'âme était inébranlable. Il regardait la terre comme un bourbier où languit l'esprit enchaîné; la mort comme un ange libérateur, qui conduit l'âme au sortir de sa captivité dans des régions plus heureuses. Son noble et beau caractère est attesté par sa générosité qui ne connaissait pas de bornes, et par son excessive modestie.

Sa tombe ne devait porter aucune marque. Il permit seulement à l'un de ses amis de planter un pommier au milieu du gazon sous lequel il devait reposer, en mémoire des trois pommes, dont les deux premières, celle d'Ève et celle de Paris, avaient changé la terre en un enfer, et dont l'autre, celle de Newton, l'avait replacée au rang des corps célestes.

Le jour de la mort de Bolyai, le Collége Réformé publia la lettre de faire part dont nous avons parlé, en y ajoutant ces mots :

« L'Administration du Collége Réformé annonce la triste nou-
» velle qu'après quarante-sept ans de bons et infatigables services
» et cinq ans passés dans le repos, le professeur émérite, corres-
» pondant de l'Académie Hongroise, BOLYAI FARKAS (Wolfgang)
» a cessé de vivre le 20 novembre 1856, à 9 heures et demie du
» soir, âgé de près de 82 ans. Les derniers devoirs lui seront
» rendus le 23, à deux heures après midi. Par respect pour la
» volonté du défunt, l'inhumation aura lieu de la manière décrite
» ci-dessus. »

Bolyai a laissé deux fils, dont l'un Johann, est mort en 1860, capitaine retraité du corps I. et R. du Génie; l'autre, Gregor, agriculteur auprès d'Hermanstadt, est encore vivant.

Dans les papiers de J. Bolyai se trouvent des notes sur les manuscrits laissés par son père, qui se composent d'un grand nombre d'élégies, de six hexamètres latins à la mémoire de son ami Gauss; de plusieurs cahiers illisibles, écrits pour son usage personnel; d'une Géographie mathématique; de recherches sur le théorème de Wilson, et d'un Mémoire sur les fractions continues : le tout en langue hongroise. Ces manuscrits, ainsi que tous les ouvrages imprimés de W. Bolyai, sont devenus, d'après son testament, la propriété du Collége Réformé de Maros Vásárhely.

IV.

Johann Bolyai de Bolya (en hongrois *Bolyai János,*) fils du précédent, naquit à Klausenburg, en Transylvanie, le 15 décembre 1802. Il étudia dans une des institutions fondées en Transylvanie par l'Académie Impériale du Génie de Vienne, et il en sortit, le 7 septembre 1822, comme cadet du Génie. Le 1er septembre 1823, il fut promu sous-lieutenant; et le 16 juin 1833, il fut mis à la retraite comme capitaine.

J. Bolyai était un profond mathématicien, et de plus un violoniste distingué, et un tireur d'armes de première force. Ce dernier talent ne fut pas étranger à sa mise si prompte à la retraite [1].

A l'exception de l'*Appendix* du premier volume du *Tentamen*, mentionné à l'article (**b**), J. Bolyai n'a rien imprimé. Cependant, le peu que nous avons de lui nous donne le droit de penser que les manuscrits qu'il a laissés doivent receler plus d'un trésor caché ; et les possesseurs des papiers de J. Bolyai rendraient un grand service à la Géométrie, s'ils se décidaient à les soumettre à l'examen d'un homme compétent et dévoué à la science.

J. Bolyai est mort en 1860, à Maros Vásárhely. Nous n'avons encore pu, malgré nos demandes réitérées, obtenir une date plus précise. En vertu d'un règlement militaire, ses papiers furent jetés dans deux caisses, que l'on tint fermées, jusqu'au jour où, à l'exception de quelques travaux sur l'art militaire, tous ces papiers furent déposés à la Bibliothèque du Collége Réformé, conformément à une disposition du testament de Bolyai père ; c'est là que sont actuellement réunis tous les écrits de Johann. A en juger à première vue, ces papiers doivent comprendre plus de mille pages. Une partie est écrite sur de petites feuilles de toute grandeur, et se trouve dans un complet désordre.

Dans les dernières années de sa vie, J. Bolyai s'était presque exclusivement occupé de linguistique. Il avait conçu le projet gigantesque de créer une langue universelle pour la parole, comme on en a une pour la musique. Il vivait retiré du commerce des hommes, absorbé tout entier par son idée. D'après tous les renseignements qui nous sont parvenus, c'était un caractère bizarre et tout à fait original, mais une brillante intelligence.

En 1853, il voulut faire imprimer une partie de ses travaux mathématiques ; car on a trouvé parmi ses papiers une feuille de titre et des fragments d'un Mémoire intitulé : *Principia doctrinæ novæ quantitatum imaginariarum perfectæ uniceque satisfacientis, aliæque disquisitiones analyticæ et analytico-geometricæ cardinales gravissimæque ; auctore Johan. Bolyai de eadem, C. R.*

[1] Se trouvant en garnison avec des officiers de cavalerie, Bolyai fut provoqué par treize d'entre eux, et il accepta tous les cartels, à condition qu'on lui permettrait après chaque duel de jouer un morceau de violon. Il sortit vainqueur de ses treize duels, laissant ses treize adversaires sur le carreau.

austriaco castrensium capitaneo pensionato. Vindobonæ, vel Maros Vásárhelyini, 1853.

Là s'arrêtent les renseignements qui nous sont parvenus sur deux hommes, dont les talents n'ont pu malheureusement trouver dans leur patrie l'estime et le respect qui leur étaient dus. A l'étranger, les hommes de science ont su apprécier le nom de Bolyai, sans que la Hongrie se soit encore associée à cet hommage. Il appartiendrait cependant à l'Académie des Sciences de Pest de veiller à ce que les écrits posthumes des Bolyai ne soient pas perdus pour les contemporains et pour la postérité. Notre patrie doit à deux de ses plus illustres enfants, elle doit à l'Europe savante de ne pas laisser périr des œuvres qui jetteraient tant d'éclat sur la science hongroise, et que les géomètres de tout pays accueilleraient avec tant d'intérêt.

Temesvár, décembre 1867.

EXPLICATION DES SIGNES.

$\overline{a\,b}$	l'ensemble de *tous* les points situés en ligne droite avec les points a et b.
$\overrightarrow{a\,b}$	celle des moitiés de la droite $\overline{a\,b}$ qui commence au point a et qui comprend le point b.
$\overline{a\,b\,c}$	l'ensemble de *tous* les points situés dans le même plan que les trois points (non en ligne droite) a, b, c.
$\overrightarrow{a\,b\,c}$	celle des moitiés du plan $\overline{a\,b\,c}$ qui part de la droite $\overline{a\,b}$ et qui comprend le point c.
$a\,b\,c$	*la plus petite* des parties dans lesquelles $\overline{a\,b\,c}$ est partagé par les droites $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$, ou l'*angle* dont les côtés sont $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$.
$a\,b\,c\,d$	(le point d étant situé à l'intérieur de $a\,b\,c$, et les droites $\overline{b\,a}$, $\overline{c\,d}$ ne se coupant pas) la portion de $a\,b\,c$ comprise entre $\overrightarrow{b\,a}$, $b\,c$, $\overrightarrow{c\,d}$; tandis que $b\,a\,c\,d$ désignera la portion de $\overline{a\,b\,c}$ comprise entre $\overline{a\,b}$ et $\overline{c\,d}$.
$\llcorner$	signe de la perpendicularité.
$\vert\vert\vert$	signe du parallélisme.
$\wedge$	un angle.
R	un angle droit.
$\equiv$	indique que deux quantités sont superposables.
$ab \stackrel{\wedge}{=} cd$	$cab = acd$.
$x \rightsquigarrow a$	x converge vers la limite a.
$\triangle$	triangle.
$\square$	carré.
$\mathsf{C}\,r$	la circonférence du cercle de rayon r.
$\odot r$	l'aire du cercle de rayon r.

LA

SCIENCE ABSOLUE DE L'ESPACE

indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*);

SUIVIE DE LA QUADRATURE GÉOMÉTRIQUE DU CERCLE, DANS LE CAS DE LA FAUSSETÉ DE L'AXIÔME XI,

PAR JEAN BOLYAI,

Capitaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne.

---

§ 1.

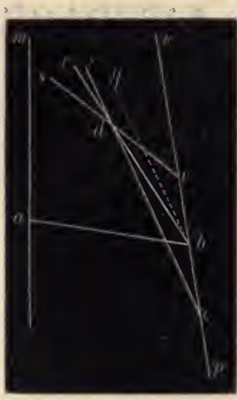
Si la droite $\overrightarrow{am}$ n'est pas coupée par la droite $\overrightarrow{bn}$, située dans le même plan, mais qu'elle soit coupée par toute autre droite $\overrightarrow{bp}$, comprise dans l'angle abn, on dira que $\overrightarrow{bn}$ est *parallèle* à $\overrightarrow{am}$, c'est à dire qu'on aura $bn \parallel\!| \; am$.

Il est facile de voir qu'*il existe une telle droite* $\overrightarrow{bn}$, *et une seule,* passant par un point quelconque b (pris hors de $\overline{am}$), et que la somme des angles bam, abn ne peut surpasser $2\,R$. Car, en faisant mouvoir bc autour de b jusqu'à ce que l'on ait $bam + abc = 2\,R$, il y aura un instant où $\overrightarrow{bc}$ *commencera* à ne plus couper $\overrightarrow{am}$, et c'est alors qu'on aura $bc \parallel\!| \; am$.

Il est clair, en même temps, que $bn \parallel\!| \; em$, quel que soit le point e pris sur $\overline{am}$.

Si, tandis que le point c s'éloigne à l'infini sur $\overrightarrow{am}$, on prend toujours $cd = cb$, on aura constamment $cbd = cdb < nbc$. Or $nbc \rightharpoonup 0$; donc aussi $adb \rightharpoonup 0$.

§ 2.



Si $bn \parallel\!| \, am$, on a aussi $cn \parallel\!| \, am$. Soit, en effet, d un point quelconque de $macn$. Si c est sur $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{bd}$ coupera $\overrightarrow{am}$, puisque $bn \parallel\!| \, am$. Donc cd coupera aussi $\overrightarrow{am}$. Si c est situé sur $\overrightarrow{bp}$, soit $bq \parallel\!| \, cd$; bq tombera à l'intérieur de abn (§ 1), et coupera par conséquent $\overrightarrow{am}$; donc $\overrightarrow{cd}$ coupera aussi $\overrightarrow{am}$. Donc toute droite $\overrightarrow{cd}$ (dans acn) coupe, dans l'un et l'autre cas, la droite $\overrightarrow{am}$, sans que $\overrightarrow{cn}$ elle-même coupe $\overrightarrow{am}$. Donc on a toujours $cn \parallel\!| \, am$.

§ 3.

Si br et cs sont l'une et l'autre $\parallel\!| \, am$, et que c ne soit pas situé sur $\overline{br}$, alors $\overrightarrow{br}$ et $\overrightarrow{cs}$ ne se couperont pas. Car si $\overrightarrow{br}$ et $\overrightarrow{cs}$ avaient un point commun d, alors (§ 2) dr et ds seraient l'une et l'autre $\parallel\!| \, am$, $\overrightarrow{dr}$ (§ 1) coïnciderait avec $\overrightarrow{ds}$, et c tomberait sur $\overline{br}$, ce qui est contre l'hypothèse.

§ 4.

Si $man > mab$, il y aura, pour tout point b de $\overrightarrow{ab}$, un point c de $\overrightarrow{am}$, tel qu'on aura $bcm = nam$. On peut, en effet (§ 1), mener bd de façon que $bdm > nam$, et en faisant $mdp = man$, b sera compris dans $nadp$. Si donc on transporte nam le long de am, jusqu'à ce que $\overrightarrow{an}$ arrive sur $\overrightarrow{dp}$, il faudra que $\overrightarrow{an}$ ait passé par b, et que l'on ait eu quelque part $bcm = nam$.

§ 5.

Si $bn \parallel\!| \; am$, il y a sur $\overline{am}$ un point f tel que $fm \triangleq bn$. En effet, on peut faire en sorte que l'on ait (§ 1) $bcm > cbn$, et, si $ce = cb$, il en résultera $ec \triangleq bc$, d'où $bem < ebn$. Faisons mouvoir le point p sur ec. L'angle bpm, pour p voisin de e, commencera par être $<$ l'angle pbn correspondant, et pour p voisin de c, il finira par être $> pbn$. Or, l'angle bpm va en croissant d'une manière continue depuis bem jusqu'à bcm, puisque (§ 4) il n'existe aucun angle $> bem$ et $< bcm$, auquel bpm ne puisse devenir égal. Pareillement pbn décroît d'une manière continue depuis ebn jusqu'à cbn. Il existe donc sur ec un point f tel que $bfm = fbn$.

§ 6.

Si $bn \parallel\!| \; am$, et que e soit un point quelconque de $\overline{am}$, g un point quelconque de $\overline{bn}$, on aura alors $gn \parallel\!| \; em$ et $em \parallel\!| \; gn$.

Car on a (§ 1) $bn \parallel\!| \; em$, d'où (§ 2) $gn \parallel\!| \; em$. Si l'on fait maintenant $fm \triangleq bn$ (§ 5), alors $mfbn \equiv nbfm$, et par suite, puisque $bn \parallel\!| \; fm$, on a aussi $fm \parallel\!| \; bn$, et, d'après ce qui précède, $em \parallel\!| \; gn$.

§ 7.

Si bn et cp sont l'une et l'autre $\parallel\!| \; am$, et que c ne soit pas situé sur $\overline{bn}$, on aura aussi $bn \parallel\!| \; cp$.

En effet, $\overrightarrow{bn}$ et $\overrightarrow{cp}$ ne se coupent pas (§ 3). D'ailleurs, am, bn et cp sont ou ne sont pas dans un même plan, et, dans le premier cas, am est ou n'est pas à l'intérieur de $bncp$.

1° Si am, bn, cp sont dans un même plan, et que am tombe à l'intérieur de $bncp$, alors toute droite $\overrightarrow{bq}$ menée à l'intérieur de nbc, coupera $\overrightarrow{am}$

quelque part en d, puisque bn ||| am. De plus, à cause de dm ||| cp (§ 6), il est clair que $\overrightarrow{dq}$ coupera $\overrightarrow{cp}$; donc on a bn ||| cp.

2° Si bn et cp sont du même côté de am, l'une d'elles, cp par exemple, sera comprise *entre* les deux autres droites $\overline{bn}$, $\overline{am}$. Or, toute droite $\overrightarrow{bq}$, intérieure à nba, rencontre $\overrightarrow{am}$; par suite, elle rencontre aussi cp. Donc bn ||| cp.

3° Si les plans mab, mac font entre eux un angle, alors cbn et abn ne pourront avoir de commun que la ligne $\overline{bn}$, tandis que $\overline{am}$ (dans abn) n'aura rien de commun avec $\overrightarrow{bn}$, et par suite aussi nbc n'aura rien de commun avec $\overline{am}$. Or, tout plan $\overrightarrow{bcd}$, mené par la droite $\overrightarrow{bd}$ (situé dans nba), rencontrera $\overrightarrow{am}$, puisque $\overrightarrow{bq}$ rencontre $\overline{am}$ (à cause de bn ||| am). En faisant donc mouvoir $\overrightarrow{bcd}$ autour de $\overline{bc}$, jusqu'à ce que ce plan *commence* à quitter $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bcd}$ viendra alors coïncider avec $\overrightarrow{bcn}$. Par la même raison, ce même plan viendra coïncider avec $\overrightarrow{bcp}$; donc bn est dans le plan bcp.

Si, de plus, br ||| cp, alors (am étant aussi ||| cp) br sera, par la même raison, dans le plan bam, et aussi (puisque br ||| cp) dans le plan bcp. Donc $\overline{br}$, étant commune aux deux plans mab, pcb, n'est autre chose que la ligne $\overline{bn}$; donc bn ||| cp [*].

Si donc cp ||| am, et que b soit extérieur à $\overline{cam}$, alors l'intersection $\overrightarrow{bn}$ des plans bam, cap est ||| à la fois à am et à cp.

§ 8.

Si bn est ||| et ≏ cp (ou plus brièvement, si bn ||| ≏ cp), et que am (dans $nbcp$) soit ⊥ sur le milieu de bc, alors bn ||| am.

En effet, si $\overrightarrow{bn}$ rencontrait $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{cp}$ rencontrerait aussi $\overrightarrow{am}$ au même point (à cause de $mabn$ ≡

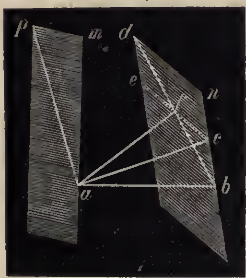
[*] En plaçant ce 3e cas avant les deux précédents, ceux-ci pourraient se démontrer avec plus de brièveté et d'élégance, comme le 2e cas du § 10.
(Note de l'Auteur.)

macp, et ce point serait commun aux lignes $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{cp}$ elles-mêmes, tandis qu'au contraire $bn \;|||\; cp$. D'autre part, toute droite $\overrightarrow{bq}$, intérieure à cbn, rencontre $\overrightarrow{cp}$; elle rencontre donc aussi $\overrightarrow{am}$. Par conséquent, $bn \;|||\; am$.

§ 9.

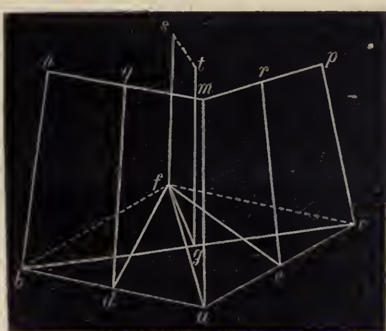
Si $bn \;|||\; am$, $map \perp mab$, et que l'angle dièdre $dnba$ des plans nbd, nba (prolongés du même côté de $mabn$ où se trouve map) soit $< R$; alors map et nbd se couperont.

Soit, en effet, $bam = R$, $ac \perp bn$ (que c coïncide ou non avec b), et $ce \perp bn$ (dans nbd); on aura (par hypothèse) $ace < R$, et af ($\perp ce$) tombera dans ace. Soit $\overrightarrow{ap}$ l'intersection des plans $\overrightarrow{abf}$, $\overrightarrow{amp}$ (qui ont le point a commun) : on aura $bap = bam = R$ (puisque $bam \perp map$). Si enfin l'on fait mouvoir $\overrightarrow{abf}$ autour des points fixes a et b, jusqu'à ce qu'il s'applique sur $\overrightarrow{abm}$, $\overrightarrow{ap}$ tombera sur $\overrightarrow{am}$, et puisque $ac \perp bn$ et $af < ac$, il est clair que af aura son extrémité entre $\overrightarrow{bn}$ et $\overrightarrow{am}$, et que par suite bf tombera à l'intérieur de abn. Or, *dans cette position*, $\overrightarrow{bf}$ rencontre $\overrightarrow{ap}$ (puisque $bn \;|||\; am$); donc $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bf}$ se rencontrent aussi *dans la position primitive,* et le point de rencontre est commun à $\overrightarrow{map}$ et à $\overrightarrow{nbd}$. Donc $\overrightarrow{map}$ et $\overrightarrow{nbd}$ se coupent.



On en conclut facilement que $\overrightarrow{map}$ et $\overrightarrow{nbd}$ se coupent toutes les fois que la somme des angles dièdres qu'ils forment avec mab est $< 2R$.

§ 10.



Si bn et cp sont l'une et l'autre $|||\simeq am$, on aura aussi $bn \;|||\simeq cp$.

En effet, ou les plans mab, mac font entre eux un angle, ou ils forment un même plan.

1° Si le premier cas a lieu, menons $\overrightarrow{qdf} \perp$ sur le milieu de

ab. Alors dq sera $\perp$ ab, et par suite $dq \parallel\!| \; am$ (§ 8). De même, si $\overrightarrow{ers}$ est $\perp$ sur le milieu de ac, on aura $er \parallel\!| \; am$, d'où $dq \parallel\!| \; er$ (§ 7). On en conclut aisément (d'après le § 9) que $\overrightarrow{qdf}$ et $\overrightarrow{ers}$ se rencontrent, et que leur intersection $\overrightarrow{fs}$ est $\parallel\!| \; dq$ (§ 7); de plus, à cause de $bn \parallel\!| \; dq$, on a aussi $fs \parallel\!| \; bn$. On a en outre (pour tout point f de $\overline{fs}$) $fb = fa = fc$, et $\overline{fs}$ est située dans le plan $\overrightarrow{tgf}$ $\perp$ sur le milieu de bc. Or on a (§ 7), à cause de $fs \parallel\!| \; bn$, $gt \parallel\!| \; bn$. On démontrera de même que $gt \parallel\!| \; cp$. Mais gt $\perp$ sur le milieu de bc; donc $tgbn \equiv tgcp$ (§ 1), et $bn \parallel\!| \triangleq cp$.

2° Si bn, am et cp sont dans un même plan, soit la droite fs, *extérieure* à ce plan, et $\parallel\!| \triangleq am$. Alors, d'après ce qu'on vient de voir, $fs \parallel\!| \triangleq$ à chacune des droites bn, cp, et par suite on a aussi $bn \parallel\!| \triangleq cp$.

§ 11.

Considérons l'ensemble formé par le point a et par *tous* les points tels que, pour un quelconque d'entre eux b, lorsque $bn \parallel\!| \; am$, on ait aussi $bn \triangleq am$, et désignons cet ensemble par F [*]; et soit L [**] l'intersection de F avec un plan quelconque mené par la droite am. Sur toute droite $\parallel\!| \; am$, F a un point, et un seul; et il est évident que L est divisée par am en deux parties susceptibles de coïncider. Nous appellerons $\overrightarrow{am}$ l'*axe de* L. Il est clair encore que, dans un plan quelconque passant par la droite am, il y a, pour l'*axe* $\overrightarrow{am}$, une seule ligne L. Toute ligne L, ainsi définie, s'appellera le L de $\overrightarrow{am}$ (dans le plan, bien entendu, que l'on considère). Il est évident que, par la révolution de L autour de la droite am, on engendrera le F dont $\overrightarrow{am}$ est dite l'*axe*, et qui est, réciproquement, *le* F *de l'axe* $\overrightarrow{am}$.

§ 12.

Soit b un point quelconque du L de $\overrightarrow{am}$, et $bn \parallel\!| \triangleq am$ (§ 11). Alors le L de $\overrightarrow{am}$ et le L de $\overrightarrow{bn}$ *coïncideront*.

---

[*] *Sphère-limite* de Lobatschewsky (*H.*).
[**] *Cercle-limite* de Lobatschewsky (*H.*).

Soit, en effet, L' le L de $\overrightarrow{bn}$; soit c un point quelconque de L', et $cp \parallel\!| \bumpeq bn$ (§ 11). A cause de $bn \parallel\!| \bumpeq am$, on aura aussi $cp \parallel\!| \bumpeq am$ (§ 10); par conséquent c sera situé sur L. Et si c est un point quelconque de L, et que $cp \parallel\!| \bumpeq am$, alors aussi $cp \parallel\!| \bumpeq bn$ (§ 10); donc c est également situé sur L' (§ 11). Donc L et L' sont identiques, et toute droite $\overrightarrow{bn}$ ($\parallel\!| am$) est un nouvel axe de L, et est $\bumpeq$ par rapport à tous les axes de L.

La même propriété se démontrerait de la même manière pour la surface F.

§ 13.

Si l'on a $bn \parallel\!| am$, $cp \parallel\!| dq$, et $bam + abn = 2R$, alors on aura aussi $dcp + cdq = 2R$.

Soient, en effet, $ea = eb$, et $efm = dcp$ (§ 4). A cause de

$bam + abn = 2R = abn + abg$, on aura $ebg = eaf$. Si donc on a encore $bg = af$, le $\Delta\, ebg \equiv \Delta\, eaf$, $beg = aef$, et g tombera sur $\overrightarrow{fe}$. On a, de plus, $gfm + fgn = 2R$ (puisque $egb = efa$). D'ailleurs $gn \parallel\!| fm$ (§ 6); donc, si $mfrs \equiv pcdq$, alors $rs \parallel\!| gn$ (§ 7), et r tombe soit en dedans, soit en dehors de fg (si l'on n'a pas $cd = fg$, auquel cas la proposition serait évidente).

1° Dans le premier cas, frs n'est pas plus grand que $2R - rfm = fgn$, puisque $rs \parallel\!| fm$. Mais comme $rs \parallel\!| gn$, frs n'est pas $< fgn$. Donc $frs = fgn$, et $rfm + frs = gfm + fgn = 2R$. On a donc aussi $dcp + cdq = 2R$.

2° Si r tombe en dehors de fg, alors $ngr = mfr$. Soit $mfgn \equiv nghl \equiv lhko$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que fk devienne $= fr$ ou commence à surpasser fr. On a ici $ko \parallel\!| hl \parallel\!| fm$ (§ 7). Si k tombe en r, alors ko tombe sur rs (§ 1), et par suite $rfm + frs = kfm + fko = kfm + fgn = 2R$. Mais si r tombe à l'intérieur de hk, alors (d'après 1°) on a $rhl + krs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq$.

§ 14.

Si l'on a $bn \parallel\!| \ am$, $cp \parallel\!| \ dq$ et $bam + abn < 2R$, on aura aussi $dcp + cdq < 2R$.

Car, si $dcp + cdq$ n'était pas $< 2R$, cette somme (d'après le § 1) serait $= 2R$. Alors on aurait aussi (§ 13) $bam + abn = 2R$, ce qui est contre l'hypothèse.

§ 15.

En considérant ce que nous avons établi dans les §§ 13 et 14, *nous désignerons par Σ le système de géométrie qui repose sur l'hypothèse de la vérité de l'axiôme XI d'Euclide, et par S le système fondé sur l'hypothèse contraire.*

Tous les résultats que nous énoncerons, sans désigner expressément si c'est dans le système Σ ou dans le système S qu'ils ont lieu, devront être considérés comme énoncés d'une manière absolue, c'est-à-dire qu'ils seront donnés comme vrais, soit qu'on se place dans le système Σ, soit qu'on se place dans le système S.

§ 16.

Si am est l'axe d'une ligne L, cette ligne L, dans le système Σ, sera une droite $\perp am$.

Soit, en effet, bn l'axe en un point quelconque b de L; on aura, dans Σ, $bam + abn = 2bam = 2R$, d'où $bam = R$. Et si c est un point quelconque de $\overline{ab}$, et que l'on ait $cp \parallel\!| \ am$, on aura (§ 13) $cp \triangleq am$, et par conséquent c sera sur L (§ 11).

Mais, dans S, il n'existe nulle part sur L ou sur F trois points en ligne droite. — En effet, quelqu'un des axes am, bn, cp (am, par exemple) tombe entre les deux autres, et alors (§ 14) bam et cam sont l'un et l'autre $< R$.

§ 17.

Dans S, L est encore une ligne, et F une surface. Car (§ 11) tout plan mené perpendiculairement à l'axe $\overrightarrow{am}$ par un point quelconque de F, coupe F suivant une circonférence de cercle, dont le plan (§ 14) n'est perpendiculaire à aucun autre axe $\overrightarrow{bn}$. Si l'on fait tourner F autour de bn, un point quelconque de F (§ 12) restera sur F, et la section de F par un plan non perpendiculaire à $\overrightarrow{bn}$ décrira une surface. Or, quels que soient les points a, b pris sur F, F pourra (§ 12) coïncider *avec lui-même,* de manière que a tombe en b. Donc F est une *surface uniforme.*

Il résulte de là (§§ 11 et 12) que L est une *ligne uniforme* [*],

§ 18.

L'intersection de F avec un plan quelconque, mené par un point a de F obliquement à l'axe am, est, dans le système S, une circonférence de cercle.

Soient, en effet, a, b, c trois points de cette section, et bn, cp des axes. $ambn$ et $amcp$ feront un angle, sans quoi le plan déterminé par a, b, c (§ 16) comprendrait am, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les plans perpendiculaires sur les milieux des droites ab, ac se coupent (§ 10) suivant un certain axe $\overrightarrow{fs}$ de F, et l'on a $fb = fa = fc$. Soit $ah \perp fs$, et faisons tourner fah autour de fs; a décrira une circonférence de rayon ha, passant en b et en c, et située à la fois dans F et dans $\overline{abc}$; de plus, F et abc n'ont rien de commun que la $\bigcirc ha$ (§ 16).

Il est encore évident qu'en faisant tourner la portion fa de ligne L (comme rayon) dans F autour de a, son extrémité décrira la $\bigcirc ha$.

§ 19.

La perpendiculaire bt à l'axe bn de L (menée dans le plan de L) est, dans le système S, la tangente à la ligne L.

---

[*] Il n'est pas nécessaire de restreindre la démonstration au système S; on peut établir facilement qu'elle est vraie d'une manière absolue pour S et pour Σ. (*Note de l'Auteur.*)

En effet, L n'a de commun avec $\overrightarrow{bt}$ que le point b (§ 14). Mais,

si bq est situé dans le plan tbn, alors le centre de la section faite dans le F de $\overrightarrow{bn}$ par le plan mené suivant bq perpendiculairement à tbn (§ 18), est évidemment placé sur $\overrightarrow{bq}$; et si bq est un diamètre, il est clair que $\overrightarrow{bq}$ coupera en q le L de $\overrightarrow{bn}$.

§ 20.

Deux points quelconques de F déterminent une ligne L (§§ 11 et 18); et puisque (§§ 16 et 19) L est perpendiculaire à tous ses axes, tout angle de lignes L dans F est égal à l'angle des plans menés par ses côtés perpendiculairement à F.

§ 21.

Deux lignes L, $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bd}$, dans la même surface F, faisant avec

une troisième ligne L, savoir, avec ab, des angles intérieurs dont la somme est $< 2R$, se rencontreront.

Nous désignerons par $\overline{ap}$, dans F, la ligne L mené par a et p, et par $\overrightarrow{ap}$ celle des moitiés de cette ligne, à partir de a, qui contient le point p.

En effet, si am, bn sont des axes de F, les plans $\overrightarrow{amp}$, $\overrightarrow{bnd}$ se couperont (§ 9), et F rencontrera leur intersection (§§ 7 et 11). Donc $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bd}$ se rencontreront.

Il résulte de là que l'axiôme XI et toutes les conséquences que l'on en déduit en géométrie et en trigonométrie (plane), sont vrais d'une manière absolue dans F, les lignes L jouant le rôle de lignes droites. Par conséquent, les fonctions trigonométriques seront prises ici dans le même sens que dans le système Σ; et la circonférence du cercle tracé dans F et ayant pour rayon une portion de ligne L égale à r, aura pour longueur $2\pi r$; et de même $\odot r$ (dans F) sera $= \pi r^2$ (π désignant $\frac{1}{2} \bigcirc 1$ dans F, c'est-à-dire le nombre connu 3, 1415926....).

§ 22.

Soit $\overline{ab}$ la ligne L de $\overrightarrow{am}$, et c un point de $\overrightarrow{am}$. Imaginons que l'angle cab (formé par la droite $\overrightarrow{am}$ et la ligne L désignée par $\overrightarrow{ab}$) soit transporté d'abord le long de $\overrightarrow{ab}$, puis le long de $\overrightarrow{ba}$, et de part et d'autre jusqu'à l'infini. La trajectoire $\overline{cd}$ du point c sera la ligne L de $\overrightarrow{cm}$.

En effet, si l'on désigne cette dernière par L', soient d un point quelconque de $\overline{cd}$, $dn \,|||\, cm$, et b le point de L situé sur $\overline{dn}$. On aura $bn \triangleq am$ et $ac = bd$, et par suite $dn \triangleq cm$; donc d est sur L'. D'ailleurs, si d est sur L' et si $dn \,|||\, cm$, et que b soit le point de L commun avec $\overline{dn}$, on aura $am \triangleq bm$ et $cm \triangleq dn$, d'où il résulte que $bd = ac$, et que d tombera sur la trajectoire du point c; L' sera donc identique avec $\overline{cd}$.

Nous représenterons la relation d'une telle ligne L' avec L par la notation $L' \parallel L$.

§ 23.

Si la ligne L représentée par cdf est $\parallel$ abe (§ 22); si, de plus, $ab = be$, et que $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{ep}$ soient des axes, on aura évidemment $cd = df$. Si a, b, e sont trois points quelconques de $\overline{ab}$, et que l'on ait $ab = n.cd$, on aura aussi $ae = n.cf$, et par conséquent (ce qui s'étend évidemment au cas de ab, ae, dc incommensurables), $ab : cd = ae : cf$. Le rapport $ab : cd$ est donc INDÉPENDANT DE ab, ET COMPLÈTEMENT DÉTERMINÉ AU MOYEN DE ac. Nous désignerons la valeur de ce rapport $ab : cd$ par la lettre capitale (telle que X) qui correspondra à la lettre minuscule (telle que x) par laquelle nous représenterons ac.

§ 24.

Quels que soient x et y, on a $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§ 23). En effet, ou l'une des quantités x, y est multiple de l'autre (par exemple, y est multiple de x), ou elle ne l'est pas.

Si $y = nx$, soit $x = ac = cg = gh = \ldots$, jusqu'à ce que l'on ait $ah = y$. Soit, de plus, $cd \parallel gk \parallel hl$. On aura (§ 23) $X = ab : cd = cd : gk = gk : hl$, et par conséquent

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

ou

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}$$

Si x, y sont des multiples de i, $x = mi$, $y = ni$, on aura, d'après ce qu'on vient de voir, $X = I^m$, $Y = I^n$, et par conséquent

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}$$

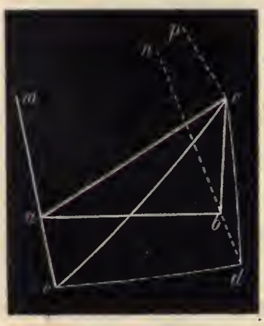
Cette conclusion s'étend aisément au cas où x et y sont incommensurables.

Si l'on a $q = y - x$, il en résultera évidemment $Q = Y : X$.

Il est clair que, dans le système Σ, on a, pour toute valeur de x, $X = 1$. Dans le système S, au contraire, on a $X > 1$, et pour des valeurs quelconques de ab et de abe, il existe une ligne $cdf \parallel abe$, telle que $cdf = ab$, d'où il résulte $ambn \equiv amep$, quoique la première de ces deux figures soit un multiple quelconque de la seconde : résultat singulier, mais qui ne prouve évidemment pas l'absurdité du système S.

§ 25.

Dans tout triangle rectiligne, les circonférences de rayons égaux aux côtés sont entre elles comme les sinus des angles opposés.



Soient, en effet, $abc = R$, et $am \perp bac$, et soient bn et $cp \parallel\!| am$. On aura $cab \perp ambn$, et par suite (à cause de $cb \perp ba$), $cb \perp ambn$; par conséquent, $cpbn \perp ambn$. Supposons que le F de $\overrightarrow{cp}$ coupe les droites $\overline{bn}$, $\overline{am}$ respectivement en d, e, et les bandes $cpbn$, $cpam$, $bnam$ suivant les lignes L, cd, ce, de. Alors (§ 20) $\wedge cde$ sera égal à l'angle de ndc, nde, et par suite $= R$; et l'on aura, par la même raison, $ced = cab$. Or (§ 21), dans le $\triangle$ *ced*, formé par des lignes L (en supposant toujours ici le rayon $= 1$), on a

$$ec : dc = 1 : \sin dec = 1 : \sin cab.$$

On a aussi (§ 21)

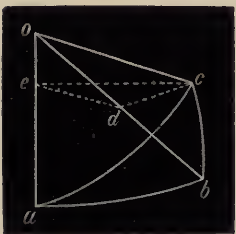
$$ec : dc = \bigcirc ec : \bigcirc dc \text{ (dans } F) = \bigcirc ac : \bigcirc bc \text{ (§ 18)}.$$

Par conséquent on en conclut

$$\bigcirc ac : \bigcirc bc = 1 : \sin cab,$$

d'où il résulte que la proposition énoncée se trouve établie pour un triangle quelconque.

§ 26.



Dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés.

Soient, en effet, $abc = R$, et $ced \perp$ au rayon oa de la sphère. On aura $ced \perp aob$, et (boc étant aussi $\perp boa$), $cd \perp ob$. Or, dans les triangles ceo, cdo, on a (§ 25)

$$\begin{aligned}\bigcirc ec : \bigcirc oc : \bigcirc dc &= \sin coe : 1 : \sin cod \\ &= \sin ac : 1 : \sin bc.\end{aligned}$$

Mais on a aussi (§ 25)

$$\bigcirc ec : \bigcirc dc = \sin cde : \sin ced.$$

Donc

$$\sin ac : \sin bc = \sin cde : \sin ced.$$

Mais $cde = R = cba$, et $ced = cab$. Par conséquent

$$\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a.$$

De là découle toute la Trigonométrie sphérique, qui se trouve ainsi établie indépendamment de l'Axiôme XI.

§ 27.

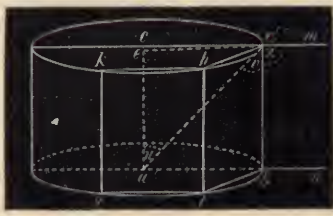
Si ac et bd sont $\perp ab$, et qu'on transporte $\wedge\, cab$ le long de $\overrightarrow{ab}$, on aura, en désignant par cd le chemin décrit par le point c,

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Soit, en effet, $de \perp ca$. Dans les triangles ade, adb, on a (§ 25)

$$\bigcirc\, ed : \bigcirc\, ad : \bigcirc\, ab = \sin u : 1 : \sin v.$$

En faisant tourner $bacd$ autour de ac, le point b décrira $\bigcirc\, ab$, et le point d décrira $\bigcirc\, ed$. Désignons ici par $\odot\, cd$ le chemin de la ligne cd. Soit, de plus, un polygone quelconque $bfg...$, inscrit dans $\odot\, ab$. En menant par tous les côtés bf, fg,... des plans $\perp \odot\, ab$, on formera ainsi dans $\odot\, cd$ une figure polygonale d'un même nombre de côtés, et l'on pourra démontrer, comme au § 23, que l'on a



$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \cdots,$$

et par suite

$$dh + hk + \cdots : bf + fg + \cdots = cd : ab.$$

Si l'on fait tendre chacun des côtés bf, fg,... vers la limite zéro, il est clair que l'on aura

$$bf + fg + \cdots \sim \bigcirc\, ab,$$

et

$$dh + hk + \cdots \sim \bigcirc\, ed.$$

On a donc aussi

$$\bigcirc\, ed : \bigcirc\, ab = cd : ab.$$

Or, nous avions déjà

$$\bigcirc\, ed : \bigcirc\, ab = \sin u : \sin v.$$

Par conséquent

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Si ac s'éloigne de bd à l'infini, alors le rapport $cd : ab$, et par suite aussi le rapport $\sin u : \sin v$ restent *constants*. Or $u \sim R$ (§ 1), et si $dm \parallel\!| bn$, $v \sim z$. Donc $cd : ab = 1 : \sin z$.

Nous désignerons ce chemin cd par $cd \parallel ab$.

§ 28.

Si $bn \parallel\!| \triangleq am$, et que c soit un point de $\overrightarrow{am}$, en posant $ac = x$, on aura (§ 23)

$$X = \sin u : \sin v.$$

Car cd et ae étant $\llcorner\, bn$, et $bf \llcorner\, am$, on aura (comme au § 27)

$$\bigcirc\, bf : \bigcirc\, cd = \sin u : \sin v.$$

Or, on a évidemment $bf = ae$. Donc

$$\bigcirc\, ea : \bigcirc\, dc = \sin u : \sin v.$$

Mais dans les surfaces F de am et de cm, qui coupent $ambn$ suivant ab et cg, on a (§ 21)

$$\bigcirc\, ea : \bigcirc\, dc = ab : cg = X.$$

Donc aussi

$$X = \sin u : \sin v.$$

§ 29.

Si $bam = R$, $ab = y$, et $bn \parallel\!| \, am$, on aura, dans le système S,

$$Y = \text{cotang}\, \tfrac{1}{2}\, u.$$

En effet, si l'on suppose $ab = ac$, $cp \parallel\!|\, am$ (et par suite

$bn \parallel\!| \triangleq cp$), et $pcd = qcd$, on peut mener (§ 19) $ds \llcorner\, \overrightarrow{cd}$, de telle sorte que $ds \parallel\!|\, cp$, et par suite (§ 1) $dt \parallel\!|\, cq$. Si, de plus, $be \llcorner\, \overrightarrow{ds}$, alors (§ 7) $ds \parallel\!|\, bn$; par conséquent (§ 6), $bn \parallel\!|\, es$, et (à cause de $dt \parallel\!|\, cg$), $bq \parallel\!|\, et$. Donc (§ 1) $ebn = ebq$. Soit bcf une ligne L de bn, et fg, dh, ck, el des lignes L de ft, dt, cq, etc. On aura évidemment (§ 22) $hg = df = dk = hc$; partant $cg = 2\, ch = 2\, v$. Il est clair que l'on a de même $bg = 2\, bl = 2\, z$. Or $bc = bg - gc$; par suite $y = z - v$, d'où (§ 24) $Y = Z : V$. On a enfin (§ 28)

$$Z = 1 : \sin \tfrac{1}{2}\, u, \qquad V = 1 : \sin\left(R - \tfrac{1}{2}\, u\right).$$

Donc

$$Y = \text{cotang}\, \tfrac{1}{2}\, u\ [*].$$

---

[*] L'angle u est celui que Lobatschewsky représente par $\Pi\,(ab)$. (Voyez *Études géométriques*, etc., n° 36.) *(H.)*

§ 30.

Il est facile de voir (d'après le § 25) que la résolution du problème de la *Trigonométrie plane*, dans le système S, exige

l'expression de la circonférence au moyen du rayon. Or, c'est ce que l'on peut obtenir par la rectification de la ligne L.

Soient ab, cm, $c'm'$ des droites $\perp \overrightarrow{ac}$, et b un point quelconque de $\overrightarrow{ab}$. On aura (§ 25)

$$\sin u : \sin v = \bigcirc p : \bigcirc y,$$
$$\sin u' : \sin v' = \bigcirc p : \bigcirc y';$$

par conséquent,

$$\frac{\sin u}{\sin v} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\sin v'} \cdot \bigcirc y'.$$

Or, on a (§ 27)

$$\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'.$$

Donc

$$\frac{\sin u}{\cos u} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \cdot \bigcirc y',$$

ou

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \operatorname{tang} u' : \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'.$$

Soient, de plus, cn et $c'n'$ ||| ab, et cd, $c'd'$ des lignes $L \perp \overline{ab}$. On aura encore (§ 21)

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r',$$

d'où

$$r : r' = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'.$$

Faisons croître p à partir de a jusqu'à l'infini : alors $w \to z$, $w' \to z'$; d'où il résulte aussi

$$r : r' = \operatorname{tang} z : \operatorname{tang} z'.$$

Désignons par i le rapport *constant* $r : \operatorname{tang} z$ (*indépendant* de r). Si l'on suppose $y \to 0$, alors

$$\frac{r}{y} = \frac{i \operatorname{tang} z}{y} \to 1,$$

et par suite

$$\frac{y}{\text{tang } z} \backsim i.$$

D'après le § 29, il vient

$$\text{tang } z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1}).$$

Donc

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \backsim i,$$

ou (§ 24)

$$\frac{2y.\, I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \backsim i.$$

Or, on sait que la limite de cette expression, pour $y \backsim 0$, est $\frac{i}{\log \text{nat } I}$. Donc

$$\frac{i}{\log \text{nat } I} = i,$$

et par conséquent

$$I = e = 2{,}7182818\ldots,$$

nombre qui se présente encore ici d'une manière remarquable. En désignant désormais par i la droite dont le I est $= e$, on aura

$$r = i \text{ tang } z.$$

Nous avons d'ailleurs trouvé (§ 21) $\bigcirc y = 2\pi r$. Donc

$$\bigcirc y = 2\pi i \text{ tang } z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right) \text{ [*]}$$

$$= \frac{\pi y}{\log \text{nat } Y}(Y - Y^{-1}) \text{ (§ 24).}$$

§ 31.

Pour la résolution trigonométrique de tous les triangles rectilignes rectangles (d'où l'on déduit aisément celle des triangles

[*] Ou, en introduisant, pour plus de simplicité, la notation des fonctions hyperboliques,

$$\bigcirc y = 2\pi i \text{ Sh } \frac{y}{i}.$$

(H.)

rectilignes quelconques), dans le système S, il suffit de trois équations. Soient a, b les côtés de l'angle droit, c l'hypoténuse; α, β les angles respectivement opposés à a, b. Ces trois équations seront celles qui exprimeront des relations

I. Entre a, c, α;

II. Entre a, α, β;

III. Entre a, b, c.

De ces équations on tirera ensuite les trois autres par l'élimination.

I. Des §§ 25 et 30 il résulte

$$1 : \sin \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1})$$

$$= \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

équation entre c, a, α [*].

II. Du § 27 on tire (βm étant ||| γn)

$$\cos \alpha : \sin \beta = 1 : \sin u.$$

Or, on a (§ 29) $1 : \sin u = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$; donc

$$\cos \alpha : \sin \beta = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

équation entre α, β, a [**].

III. Soient $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$; $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma' \parallel \alpha\alpha'$ (§ 27), et $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$. On aura évidemment (comme au § 27)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(C + C^{-1}).$$

---

[*] $\sin \alpha \ \mathrm{Sh}\frac{c}{i} = \mathrm{Sh}\frac{a}{i}.$

[**] $\cos \alpha = \sin \beta \ \mathrm{Ch}\frac{a}{i}.$

Par conséquent,

$$\tfrac{1}{2}(C + C^{-1}) = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}) . \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

ou

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right) . \left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right),$$

équation entre a, b, c [*].

Si $\gamma\alpha\delta = R$, et qu'on ait $\beta\delta \perp \alpha\delta$, alors il viendra

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin \alpha,$$

et

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\gamma) = 1 : \cos \alpha.$$

En désignant donc par $\bigcirc x^2$, pour une valeur quelconque de x, le produit $\bigcirc x . \bigcirc x$, on aura évidemment

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Or, nous avons trouvé (§ 27 et § 31, II)

$$\bigcirc d = \bigcirc b . \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}).$$

Par conséquent [**]

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)^2 . \left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)^2,$$

autre relation entre a, b, c, dont le second membre se ramène aisément à une forme *symétrique* ou *invariable* [***].

Enfin, des équations

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}), \quad \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1})$$

---

[*] $\mathrm{Ch}\,\frac{c}{i} = \mathrm{Ch}\,\frac{a}{i}\,\mathrm{Ch}\,\frac{b}{i}.$

[**] $\mathrm{Sh}^2\,\frac{c}{i} = \mathrm{Ch}^2\,\frac{a}{i}\,\mathrm{Sh}^2\,\frac{b}{i} + \mathrm{Sh}^2\,\frac{a}{i}.$

[***] $\mathrm{Sh}^2\,\frac{c}{i} = \mathrm{Ch}^2\frac{a}{i}\,\mathrm{Ch}^2\,\frac{b}{i} - 1$

$= \mathrm{Sh}^2\,\frac{a}{i}\,\mathrm{Sh}^2\,\frac{b}{i} + \mathrm{Sh}^2\,\frac{a}{i} + \mathrm{Sh}^2\,\frac{b}{i}.$

on tire (d'après II)

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}\right) \text{ [*]},$$

équation entre α, β, c.

§ 32.

Il reste encore à montrer brièvement le moyen de résoudre les problèmes dans le système S. Après l'avoir expliqué sur les exemples les plus ordinaires, nous verrons enfin ce que peut donner cette théorie.

I. Soit $\overline{ab}$ une ligne dans le plan, et $y = f(x)$ son équation en coordonnées rectangulaires. Désignons par dz un accroissement quelconque de z, et par dx, dy, du les accroissements de x, de y et de l'aire u, correspondants à cet accroissement dz. Soit $bh \parallel cf$; exprimons (§ 31) $\frac{bh}{dx}$ au moyen de y, et cherchons la *limite* de $\frac{dx}{dy}$, lorsque dx tend vers la limite zéro (ce qui est toujours sous-entendu, lorsqu'on cherche de pareilles limites). On connaîtra alors la limite de $\frac{dy}{bh}$, et par suite tang hbg; et par conséquent (hbc ne pouvant évidemment être ni $>$, ni $<R$, et par suite étant $= R$), la *tangente* en b à la ligne bg sera déterminée au moyen de y.

II. On peut démontrer que l'on a

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} = 1.$$

On déduit de là la limite de $\frac{dz}{dx}$, et l'on en tire, par l'intégration, l'expression de z au moyen de x. Étant donnée une courbe réelle quelconque, on peut trouver son équation dans le système S. Cher-

---

[*] $$\cot\alpha \cot\beta = \text{Ch}\,\frac{c}{i}.$$

chons, par exemple, l'équation d'une ligne L. Soit $\overrightarrow{am}$ l'axe de la ligne L; toute droite menée par a, autre que $\overline{am}$, rencontrant L (§ 19), la droite quelconque $\overrightarrow{cb}$, partant d'un point de $\overrightarrow{am}$, rencontrera L. Or, si bn est un axe, on a

$$X = 1 : \sin cbn \ (\S\ 28),$$

$$Y = \cot \tfrac{1}{2}\, cbn \ (\S\ 29),$$

d'où l'on tire

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1},$$

ou

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1},$$

ce qui est l'équation cherchée [*]. On tire de là

$$\frac{dy}{dx} = X.\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\frac{bh}{dx} = 1 : \sin cbn = X.$$

Donc

$$\frac{dy}{bh} = (X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} = X^2.\,(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} = X^2.\,(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} = X.\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\frac{dz}{dx} = X^2\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

---

[*] On peut écrire cette équation sous la forme

$$\mathrm{Ch}\,\frac{y}{i} = e^{\frac{x}{i}}.$$

d'où, en intégrant, on tire (comme au § 30)

$$z = i\,(X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i \cot cbn \text{ [*]}.$$

III. On a évidemment

$$\frac{du}{dx} \backsim \frac{hfcbh}{dx}.$$

Si cette quantité n'est pas donnée en y, il faut l'exprimer au moyen de y, puis en tirer u par l'intégration.

En posant $ab = p$, $ac = q$, $cd = r$ et $cabd = s$, on pourra faire voir (comme dans II) que l'on a $\dfrac{ds}{dq} \backsim r$, quantité égale à

$$\tfrac{1}{2}\, p \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right),$$

d'où, en intégrant,

$$s = \tfrac{1}{2}\, pi \left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}\right) \text{ [**]}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat sans intégration. Si l'on établit, par exemple, les équations du cercle (d'après le § 31, III), de la droite (d'après le § 31, II), d'une section conique (d'après ce qui précède), on pourra exprimer aussi les aires limitées par ces lignes.

On sait qu'une surface t, || à une figure plane p (à la distance q), est à p dans le rapport des secondes puissances des lignes homologues, c'est-à-dire dans le rapport de $\frac{1}{4}\left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1$. Il est aisé de voir, de plus, que le calcul du volume, traité de la même manière, exige deux intégrations (la différentielle elle-même ne pouvant se déterminer que par l'intégration). Il faut avant tout

---

[*] $$z = i \,\mathrm{Sh}\, \frac{y}{i}.$$

[**] $$s = ip \,\mathrm{Sh}\, \frac{q}{i}.$$

chercher le volume renfermé entre p et t, et l'ensemble de toutes les droites $\llcorner\, p$ et reliant les limites de p et de t. On trouve, pour le volume de ce solide (soit au moyen de l'intégration, soit autrement)

$$\frac{1}{8}\, pi\left(e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}}\right) + \frac{1}{2}\, pq \text{ [*]}.$$

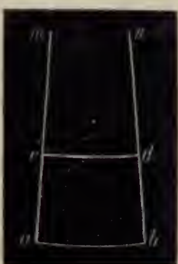
Les surfaces des corps peuvent aussi se calculer dans le système S, ainsi que les *courbures*, les *développées* et les *développantes* des lignes quelconques, etc. Quant à la courbure, dans le système S, ou elle sera la courbure de la ligne L elle-même, ou on la déterminera soit par le rayon d'un cercle, soit par la *distance* d'une droite à la courbe $\parallel$ à cette droite; et il est aisé de faire voir, d'après ce qui précéde, qu'il n'y a pas, dans un plan, d'autres lignes uniformes que les lignes L, les lignes circulaires et les courbes $\parallel$ aux lignes droites.

IV. Pour le cercle, on a (comme dans III)

$$\frac{d\odot x}{dx} \sim \bigcirc x,$$

d'où (§ 29), en intégrant, on tire

$$\odot x = \pi i^2 \left(e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}\right) \text{ [**]}$$



V. Soit $u = cabdc$ l'aire comprise entre une ligne L, $ab = r$, une $\parallel$ à cette ligne $cd = y$, et les droites $ac = bd = x$. On a

$$\frac{du}{dx} \sim y, \quad \text{et (§ 24)} \quad y = re^{-\frac{x}{i}},$$

d'où, en intégrant,

$$u = ri\left(1 - e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

---

[*] $$\frac{1}{2}\, p\left(\frac{1}{2}\, i\,\mathrm{Sh}\,\frac{2q}{i} + q\right).$$

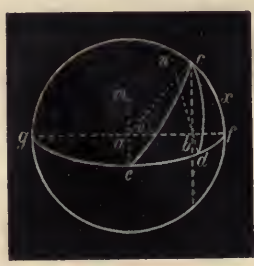
[**] $$\odot x = 4\,\pi\, i^2\, \mathrm{Sh}^2\, \frac{x}{2i}.$$

Si x croît jusqu'à l'infini, alors, dans le système S, $e^{-\frac{x}{i}} \sim 0$, et par suite

$$u \sim ri.$$

C'est cette limite que nous appellerons la *grandeur* de $mabn$.

On verra de la même manière que, si p est une figure tracée sur F, l'espace compris entre p et l'ensemble des axes menés par les divers points du contour de p est égal à $\frac{1}{2}\,pi$.



VI. Soient $2u$ l'angle au centre de la calotte sphérique z, p la circonférence d'un grand cercle, et x l'arc fc, correspondant à l'angle u. On aura (§ 25)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc bc,$$

d'où

$$\bigcirc bc = p \sin u.$$

On a d'ailleurs

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \qquad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

De plus,

$$\frac{dz}{dx} \sim \bigcirc bc,$$

$$\frac{dz}{du} \sim \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

et, en intégrant,

$$z = \frac{\text{sin verse } u}{2\pi}\,p^2.$$

Imaginons la surface F sur laquelle est située la circonférence p (passant par le milieu f de la calotte). Menons par af et ac les plans $\overrightarrow{fem}$, $\overrightarrow{cem}$, perpendiculaires à F, et coupant F suivant feg, ce; et considérons la ligne L, cd (menée par c perpendiculairement à feg), et la ligne L, cf. On aura (§ 20) $cef = u$, et (§ 21) $\frac{fd}{p} = \frac{\text{sin verse } u}{2\pi}$, d'où $z = fd.\,p$. Or (§ 21) $p = \pi.\,fdg$; donc

$z\,\pi . fd. fdg$. Mais (§ 21) $fd. fdg = fc. fc$; par conséquent,

$$z = \pi . fc. fc = \odot fc, \text{ dans } F.$$

Soit maintenant $bj = cj = r$; on aura (§ 30)

$$2r = i\,(Y - Y^{-1}),$$

d'où (§ 21)

$$\odot 2r \text{ (dans } F) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

On a aussi (IV)

$$\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2}).$$

Donc $\odot 2r$ (dans F) $= \odot 2y$, et par suite *la surface z du segment de sphère est égale au cercle décrit avec la corde fc comme rayon.* Donc la sphère totale a pour surface

$$\odot fg = fdg . p = \frac{p^2}{\pi},$$

et les surfaces des sphères sont entre elles comme les secondes puissances des circonférences de leurs grands cercles.

VII. On trouve de même que, dans le système S, le volume de la sphère de rayon x est égal à

$$\frac{1}{2}\pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x \text{ [*]}.$$

La surface engendrée par la révolution de la ligne cd autour de ab est égale à

$$\frac{1}{2}\pi i p\,(Q^2 - Q^{-2}) \text{ [**]},$$

et le solide engendré par $cabdc$ est égal à

$$\frac{1}{4}\pi i^2 p\,(Q - Q^{-1})^2 \text{ [***]}.$$

---

[*] $\pi i^3 \operatorname{Sh}\frac{2x}{i} - 2\pi i^2 x.$

[**] $\pi i p \operatorname{Sh}\frac{2q}{i}.$

[***] $\pi i^2 p \operatorname{Sh}^2 \text{—}.$

Nous supprimons, pour abréger, la méthode par laquelle on peut obtenir sans intégration tous les résultats obtenus jusqu'ici, à partir de (IV).

On peut démontrer que *la limite de toute expression contenant la lettre i* (et fondée par conséquent sur l'hypothèse qu'*il existe une grandeur i*), *lorsque i croît jusqu'à l'infini, donne l'expression correspondante dans le système* Σ (et par suite dans l'hypothèse où *il n'existe pas de grandeur i*), *pourvu qu'il ne se rencontre pas d'équations identiques*. Mais il faut se garder de croire que *le système lui-même puisse être changé à volonté* (car il est entièrement *déterminé en soi et par soi*); c'est seulement l'*hypothèse* qui peut varier, et que l'on peut successivement changer, tant que l'on n'est pas conduit à une absurdité. En *supposant* donc que, dans une telle expression, la lettre i, au cas où le système S serait celui de la réalité, désigne la quantité unique dont le I a pour valeur e; si l'on vient à reconnaître que c'est le système Σ qui est *réellement vrai, imaginons que la limite en question* soit prise au lieu de l'expression primitive. Alors il est évident que *toutes les expressions fondées sur l'hypothèse de la réalité du système S seront* (dans ce cas) *absolument vraies, lors même qu'on ignore complètement si c'est le système Σ qui est ou non le système de la réalité.*

Ainsi, par exemple, de l'expression obtenue au § 30 on tire facilement (soit au moyen de la différentiation, soit autrement) la valeur connue dans le système Σ,

$$\bigcirc x = 2\pi x.$$

De I (§ 31) on conclut, par des transformations convenables,

$$1 : \sin \alpha = c : a;$$

de II on tire

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = 1,$$

et par suite

$$\alpha + \beta = R.$$

La *première* équation de III devient identique, et par suite elle est vraie dans le système Σ, quoiqu'elle n'y détermine rien. De la *seconde* on conclut

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ce sont là les équations fondamentales connues de la Trigonométrie plane dans le système Σ. On trouve, de plus (d'après le § 32), dans le système Σ, pour l'aire et le volume dans III, la même valeur pq. On a, d'après IV,

$$\odot x = \pi x^2.$$

D'après VII, la sphère de rayon x est $= \frac{4}{3} \pi x^3$, etc. Les théorèmes énoncés à la fin de VI sont évidemment *vrais sans conditions*.

§ 33.

Il reste encore à exposer (comme nous l'avons annoncé au § 32) quel est le but de cette théorie.

I. Est-ce le système Σ ou le système S qui a lieu dans la réalité? C'est ce qu'on ne saurait décider.

II. Toutes les hypothèses tirées de la *fausseté* de l'Axiôme XI (en prenant toujours ces mots dans le sens du § 32) sont *absolument vraies*, et en ce sens, *ne s'appuient sur aucune hypothèse*. Il y a donc *une Trigonométrie plane* a priori, *dans laquelle le système seul vrai reste inconnu*, et où l'on ignore seulement les grandeurs *absolues* des expressions, mais où un *seul* cas connu fixerait évidemment tout le système. La Trigonométrie sphérique, au contraire, est établie d'une manière absolue au § 26.

On a, sur la surface F, une géométrie entièrement analogue à la géométrie plane dans le système Σ.

III. S'il était *établi* que c'est le système Σ qui a lieu, il ne resterait plus rien d'inconnu sur ce point. Mais s'il était *établi* que le système Σ *n'est pas vrai*, alors (§ 31), *étant donnés*, par exemple, *d'une manière concrète*, les côtés x, y et l'angle rectiligne qu'ils comprennent, il est clair qu'il serait impossible en soi et par soi de résoudre absolument le triangle, c'est-à-dire de déterminer *a priori* les autres angles et les rapports du troisième côté aux deux côtés donnés, à moins que l'on ne déterminât les quantités X, Y. Pour cela, il faudrait que l'on eût *sous forme concrète* quelque longueur a dont le A fût connu. Alors i serait l'*unité naturelle de longueur* (comme e est la base des logarithmes *naturels*). Si l'existence de cette quantité i est supposée reconnue, nous verrons comment on peut la construire, au moins avec une grande approximation, pour la pratique.

IV. Dans le sens expliqué (I et II), on pourra évidemment appliquer partout la méthode analytique moderne (si utile, lorsqu'on l'emploie dans des limites convenables).

V. Enfin, le lecteur ne sera pas fâché de voir que, dans le cas où c'est le système S, et non le système Σ, qui a réellement lieu, on peut construire une figure rectiligne égale à un cercle.

§ 34.

Par d, on mènera $dm \parallel\!| \; an$ de la manière suivante. Du point d abaissons $db \perp an$; en un point quelconque a de la droite $\overline{ab}$, élevons $ac \perp an$ (dans le plan dba), et abaissons $de \perp ac$. On aura (§ 27)

$$\bigcirc\, ed : \bigcirc\, ab = 1 : \sin z,$$

pourvu que dm soit $\parallel\!|$ bn. Or, $\sin z$ n'est pas > 1; donc ab n'est pas $> de$. Donc un quadrant décrit du centre a dans bac, avec un rayon $= de$, aura un point b ou o commun avec $\overrightarrow{bd}$. Dans le premier cas, on a évidemment $z = R$. Dans le second cas, on aura (§ 25)

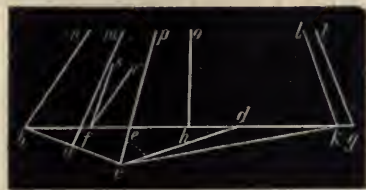
$$\bigcirc\, ao \,(= \bigcirc\, ed) : \bigcirc\, ab = 1 : \sin aob,$$

et par suite $z = aob$. Si donc on prend $z = aob$, dm sera $\parallel\!|$ bn.

§ 35.

Si c'est le système S qui a lieu, on pourra, comme il suit, mener une droite $\perp$ à l'un des côtés d'un angle aigu, et qui soit en même temps $\parallel\!|$ à l'autre côté.

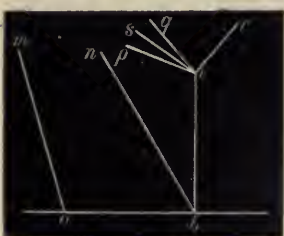
Soit $am \perp bc$, et supposons $ab = ac$ assez petit (§ 19) pour que, si l'on mène $bn \,|||\, am$ (§ 34), abn soit $>$ que l'angle donné.



Menons, de plus, $cp \,|||\, am$ (§ 34), et soient nbg, pcd égaux l'un et l'autre à l'angle donné. $\overrightarrow{bg}$ et $\overrightarrow{cd}$ se rencontreront; car si $\overrightarrow{bg}$ (tombant, *par construction*, à l'intérieur de nbc) coupe $\overrightarrow{cp}$ en e, on aura (à cause de $bn \triangleq cp$) $ebc < ecb$, et par suite $ec < eb$. Soient $ef = ec$, $efr = ecd$, et $fs \,|||\, ep$; fs tombera dans l'angle bfr. Car, puisque $bn \,|||\, cp$, d'où $bn \,|||\, ep$, et $bn \,|||\, fs$, on aura (§ 14) $fbn + bfs < 2R = fbn + bfr$. Donc $bfs < bfr$. Par conséquent, $\overrightarrow{fr}$ coupe $\overrightarrow{ep}$, et par suite $\overrightarrow{cd}$ coupe aussi $\overrightarrow{eg}$ quelque part en d. Soient maintenant $dg = dc$, et $dgt = dcp = gbn$. On aura (à cause de $cd \triangleq gd$) $bn \triangleq gt \triangleq cp$. Soit k (§ 19) le point où la ligne L de bn rencontre $\overrightarrow{bg}$, et kl l'axe de cette ligne L. On aura $bn \triangleq kl$, et par suite $bkl = bgt = dcp$. D'ailleurs, $kl \triangleq cp$. Donc k tombe évidemment en g, et $gt \,|||\, bn$. Si l'on élève maintenant $ho \perp$ sur le milieu de bg, on aura construit $ho \,|||\, bn$.

§ 36.

Étant donnés la droite $\overrightarrow{cp}$ et le plan $\overline{mab}$, soit $cb \perp \overline{mab}$, bn (dans $\overline{bcp}$) $\perp bc$, et $cq \,|||\, bn$ (§ 34). La rencontre de $\overrightarrow{cp}$ (si cette ligne tombe à l'intérieur de bcq) avec

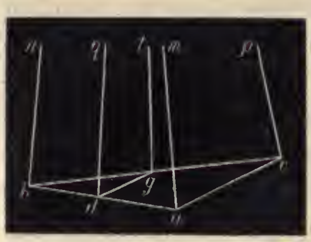


$\overrightarrow{bn}$ (dans $\overline{cbn}$), et par suite avec $\overline{mab}$, peut se déterminer. Et si l'on donne les deux plans $\overline{pcq}$, $\overline{mab}$, et que l'on ait $cb \perp \overline{mab}$, $cr \perp \overline{pcq}$, et (dans $\overline{bcr}$), $bn \perp bc$, $cs \perp cr$, bn tombera dans $\overline{mab}$, et cs dans $\overline{pcq}$; et lorsqu'on aura trouvé l'intersection de $\overrightarrow{bn}$ et de $\overrightarrow{cs}$ (si elle a lieu), la perpendiculaire menée par cette intersection, dans $\overline{pcq}$, à la droite $\overrightarrow{cs}$ sera évidemment l'intersection de $\overline{mab}$ et de $\overline{pcq}$.

§ 37.

Sur $\overline{am}$ $|||$ bn il se trouve un point a, tel qu'on a $am \triangleq bn$.

Si (d'après le § 34) on construit, hors de $\overline{nbm}$, gt $|||$ bn, et



qu'on fasse $bg \perp gt$, $gc = gb$, et cp $|||$ gt; soit mené $\overrightarrow{tgd}$ de telle manière qu'il fasse avec $\overrightarrow{tgb}$ un angle égal à celui que fait $\overrightarrow{pca}$ avec $\overrightarrow{pcb}$. Cherchons ensuite (§ 36) l'intersection $\overline{dq}$ de $\overrightarrow{tgd}$ avec $\overrightarrow{nba}$, et soit enfin $ba \perp dq$.

On aura, à cause de la similitude des triangles de lignes L tracés sur le F de bn (§ 21), $db = da$, et $am \triangleq bn$.

Il est facile d'en conclure que, des lignes L étant données par leurs seules extrémités, on peut obtenir de cette manière, dans F, une quatrième proportionnelle, ou une moyenne proportionnelle, et exécuter, sans recourir à l'Axiôme XI, toutes les constructions géométriques qui se font sur le plan dans le système Σ. Ainsi, par exemple, on pourra diviser géométriquement $4\,R$ en un nombre quelconque de parties égales, si l'on sait faire cette division dans le système Σ.

§ 38.

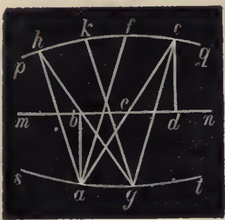
Si l'on construit (§ 37) par exemple, $nbq = \frac{1}{3}\,R$, et qu'on mène (§ 35), dans le système S, $am \perp \overrightarrow{bq}$ et $|||$ bn; si l'on détermine, de plus (§ 37), $jm \triangleq bn$, on aura, en posant $ja = x$ (§ 28),

$$X = 1 : \sin \tfrac{1}{3}\,R = 2,$$

et x sera construit *géométriquement*. On peut calculer nbq de manière que ja diffère de i aussi peu que l'on voudra, ce qui aura lieu pour $\sin nbq = \frac{1}{e}$.

§ 39.

Si (dans un plan) pq et st sont $\|$ à la droite mn (§ 27), et que les perpendiculaires ab, cd à mn soient égales entre elles, on aura évidemment $\Delta\, dec \equiv \Delta\, bea$; par suite, les angles (peut-



être mixtilignes) ecp, eat coïncideront, et l'on aura $ec = ea$. Si, de plus, $cf = ag$, alors $\Delta\, acf \equiv \Delta\, cag$, et chacun d'eux est la moitié du *quadrilatère* $fagc$. Si $fagc$, $hagk$ sont deux de ces quadrilatères, de base ag, compris entre pq et st, on démontrera leur équivalence (comme chez Euclide), ainsi que l'équivalence des triangles agc, agh, de base commune ag, et ayant leurs sommets sur $\overline{pq}$. On a, de plus, $acf = cag$, $gcq = cga$, et $acf + agc + gcq = 2\,R$ (§ 32); par suite, on a aussi $cag + acg + cga = 2\,R$. Donc, dans tout triangle acg de cette espèce, la somme des angles $= 2\,R$. Soit que la droite ag coïncide avec ag ($\parallel mn$), ou non, l'équivalence des triangles agc, agh, *tant sous le rapport de leurs aires que sous celui de la somme de leurs angles*, est évidente.

§ 40.

Des triangles équivalents abc, abd (*que nous supposerons désormais rectilignes*), *ayant un côté égal, ont des sommes d'angles égales.*

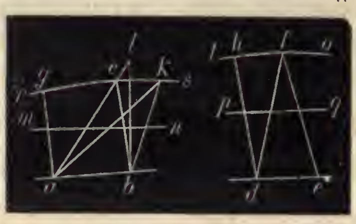
Menons, en effet, mn par les milieux de ac et de bc, et soit (par le point c) $\overline{pq} \parallel mn$. Le point d tombera sur $\overline{pq}$. Car, si $\overrightarrow{bd}$

coupe $\overline{mn}$ au point e, et par conséquent $\overline{pq}$ à la distance $ef = eb$, on aura $\Delta abc = \Delta abf$, et par suite aussi $\Delta\, abd = \Delta\, abf$, d'où il s'ensuit que d tombe en f. Mais si $\overrightarrow{bd}$ ne coupe pas $\overline{mn}$, soit c le point où la perpendiculaire au milieu de ab rencontre $\overline{pq}$, et soit $gs = ht$, de sorte que $\overline{st}$ rencontre $\overrightarrow{bd}$ prolongée en un certain point k (ce qui peut se faire comme on l'a vu au § 4). Soient, de plus, $sl = sa$, $lo \parallel st$, et o l'intersection de $\overrightarrow{bk}$ avec $\overline{lo}$. On aurait alors $\Delta\, abl = \Delta\, abo$ (§ 39), et par suite $\Delta\, abc > \Delta\, abd$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

§ 41.

Des triangles équivalents abc, def ont des sommes d'angles égales.

Menons mn par les milieux de ac et de bc, et pq par les milieux de df et de fe; et soient $rs \parallel mn$, $to \parallel pq$. La perpendiculaire



ag à rs sera égale à la perpendiculaire dh à to, ou elle en différera; par exemple, dh sera la plus grande. Dans chacun de ces deux cas, la $\bigcirc\, df$, décrite du centre a, aura avec $\overrightarrow{gs}$ quelque point commun k, et alors (§ 39) on aura $\triangle\, abk = \triangle\, abc = \triangle\, def$. Or, le $\triangle\, akb$ (§ 40) a même somme d'angles que le $\triangle\, def$, et (§ 39) même somme d'angles que le $\triangle\, abc$. Donc les triangles abc, def ont même somme d'angles.

Dans le système S, la réciproque de ce théorème est vraie. Soient, en effet, abc, def deux triangles ayant même somme d'angles, et $\triangle\, bal = \triangle\, def$. Ces derniers triangles auront, d'après ce qui précède, la même somme d'angles, et il en sera par suite de même des triangles abc, abl. Il résulte de là évidemment

$$bcl + blc + cbl = 2\,R.$$

Or (§ 31) la somme des angles de tout triangle, dans le système S, est $< 2\,R$. Donc l tombe nécessairement en c.

§ 42.

Soit u le *supplément* à $2\,R$ de la somme des angles du $\triangle\, abc$,

v le *supplément* à $2\,R$ de la somme des angles du $\triangle\, def$. On aura

$$\triangle\, abc : \triangle\, def = u : v.$$

Soit, en effet, p la valeur commune de chacun des triangles acg, gch, hcb, dfk, kfe, et soit $\triangle\, abc = mp$, $\triangle\, def = np$. Désignons par s la somme des angles d'un quelconque des triangles égaux à p. On aura évidemment $2\,R - u = ms - (m-1).\,2\,R = 2\,R - m\,(2\,R - s)$, et $u = m\,(2\,R - s)$; de même $v = n\,(2\,R - s)$. Donc $\Delta\, abc : \Delta\, def = m : n = u : v$. La démonstration s'étend sans peine au cas de l'incommensurabilité des triangles abc, def.

On démontre de la même manière que les triangles sur la surface de la sphère sont entre eux comme les excès des sommes de leurs angles sur $2\,R$. Si deux des angles du Δ sphérique sont droits, le troisième z sera l'*excès* en question. Or, en désignant par p la circonférence d'un grand cercle, ce Δ est évidemment $= \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{p^2}{2\pi}$ (§ 32, VI). Par conséquent, un triangle quelconque dont l'excès des angles sur $2\,R$ est z, est $= \frac{zp^2}{4\pi^2}$.

§ 43.

Ainsi, dans le système S, l'aire d'un Δ rectiligne s'exprime au

moyen de la somme des angles. Si ab croît jusqu'à l'infini, alors (§ 42) le rapport $\Delta\, abc : (R - u - v)$ sera constant. Or $\Delta\, abc \sim bacn$ (§ 32, V), et $R - u - v \sim z$ (§ 1). Donc

$$bacn : z = \Delta\, abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.$$

On a, de plus, évidemment (§ 30)

$$bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang}\, z : \text{tang}\, z'.$$

Or, pour $y' \sim 0$, on a

$$\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \sim 1, \text{ et aussi } \frac{\text{tang}\, z'}{z'} \sim 1.$$

Par conséquent,

$$bdcn : bacn = \text{tang}\, z : z.$$

Mais nous avons trouvé (§ 32)

$$bdcn = r.\, i = i^2\, \text{tang}\, z.$$

Donc

$$bacn = z.\, i^2.$$

En désignant désormais, pour abréger, par $\triangle$ tout triangle dont le supplément de la somme des angles est z, nous aurons ainsi

$$\triangle = z.\, i^2.$$

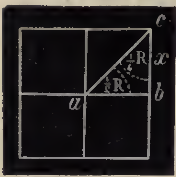
On conclut de là facilement que, si $or \mathbin{|||} am$ et $ro \mathbin{|||} ab$, l'*aire* comprise entre $\overline{or}$, $\overline{st}$, $\overline{bc}$ (laquelle est évidemment la limite absolue de l'aire des triangles rectilignes indéfiniment croissants, ou la limite de $\triangle$ pour $z \sim 2\,R$), sera égale à $\pi i^2 = \odot\, i$ (dans F). En désignant cette limite par $\square$, on aura encore (§ 30)

$$\pi\, i^2 = \text{tang}^2 z.\, \square = \odot\, r \text{ (dans } F) \text{ (§ 21)}$$
$$= \odot\, s \text{ (§ 32, VI)},$$

en représentant la corde cd par s. Si maintenant, au moyen d'une perpendiculaire élevée sur le milieu du rayon donné s du cercle dans un plan (ou du rayon de forme L du cercle dans F), on construit (§ 34) $db \mathbin{|||} \triangleq cn$; en abaissant $ca \perp db$, et élevant $cm \perp ca$, on aura z; d'où (§ 37), en prenant arbitrairement un rayon de forme L pour unité, *on pourra déterminer géométriquement* $\text{tang}^2 z$, *au moyen de deux lignes uniformes de même courbure* (lesquelles, leurs seules extrémités étant données, et leurs axes construits, pourront évidemment être traitées comme des droites dans la recherche de leur commune mesure, et équivaudront sous ce rapport à des droites).

On peut, en outre, construire comme il suit un quadrilatère, par exemple, un quadrilatère régulier, d'aire $= \square$. Soit $abc = R$, $bac = \frac{1}{2}\, R$, $acb = \frac{1}{4}\, R$, et $bc = x$. On pourra exprimer X (§ 31, II) par de simples racines carrées, et le construire (§ 37).

Connaissant X, on pourra déterminer x (§ 38, ou encore §§ 29 et 35). L'octuple du $\triangle\, abc$ est évidemment $= \square$, et par là *un*



cercle plan se trouve carré géométriquement au moyen d'une figure rectiligne et de lignes uniformes de même espèce (c'est-à-dire de lignes équivalentes à des droites quant à leur comparaison entre elles). Un cercle de la surface F est planifié de la même manière; alors ou l'Axiôme XI d'Euclide est vrai, ou l'on a la quadrature géométrique du cercle, quoique rien jusqu'ici ne décide laquelle des deux propositions a réellement lieu.

Toutes les fois que $\tang^2 z$ est ou un nombre entier, ou un nombre fractionnaire rationnel, dont le dénominateur (après réduction à la plus simple expression) est ou un nombre premier de la forme $2^m + 1$ (dont $2 = 2^0 + 1$ est un cas particulier), ou un produit d'autant de nombres premiers de cette forme que l'on voudra, dont chacun (à l'exception de 2, qui peut seul entrer un nombre quelconque de fois) n'entre qu'*une seule fois* comme facteur; on pourra, par la théorie des polygones donnée par Gauss (et pour de telles valeurs de z seulement), construire une figure rectiligne $= \tang^2 z = \odot\, s$. Car la division de $\square$ (le théorème du § 42 s'étendant facilement à des polygones quelconques) exige évidemment le partage de $2\,R$, lequel (comme on peut le démontrer) n'est possible géométriquement que sous la condition précédente. Dans tous les cas pareils, ce qui précède conduit facilement au but; et toute figure rectiligne peut être transformée géométriquement en un polygone régulier de n côtés, si n est de la forme indiquée par Gauss.

Il resterait encore, pour compléter entièrement nos recherches, à démontrer l'impossibilité de décider (sans avoir recours à quelque hypothèse) si c'est le système Σ, ou quelqu'un des systèmes S (et lequel) qui a lieu réellement. C'est ce que nous réserverons pour une occasion plus favorable.

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT,

PAR W. BOLYAI.

(*Tentamen*, t. II, p. 380 et suiv.)

Qu'il me soit permis d'ajouter ici quelques remarques appartenant à l'auteur de l'*Appendice,* qui voudra bien me pardonner si je n'ai pas toujours bien rendu sa pensée.

Les formules de la Trigonométrie sphérique (démontrées dans le Mémoire précédent, indépendamment de l'Axiôme XI d'Euclide) *coïncident avec les formules de la Trigonométrie plane, lorsque l'on considère* (pour nous servir d'une façon de parler provisoire) *les côtés d'un triangle sphérique comme réels, ceux d'un triangle rectiligne comme imaginaires;* de sorte que, lorsqu'il s'agit des formules trigonométriques, on peut regarder le plan comme une sphère imaginaire, en prenant pour sphère réelle celle dans laquelle $\sin R = 1$.

On démontre (§ 30) qu'il existe une certaine quantité i (dans le cas où l'Axiôme d'Euclide n'a pas lieu), telle que la quantité correspondante I est égale à la base e des logarithmes naturels. Dans ce cas, on établit encore (§ 31) les formules de la Trigonométrie plane, et de telle manière (§ 32, VII) que les formules sont encore vraies pour le cas de la réalité de l'axiôme en question, en prenant les limites des valeurs pour $i \rightarrow \infty$. Ainsi le système euclidien est en quelque sorte la limite du système anti-euclidien pour $i \rightarrow \infty$. Prenons, dans le cas de l'existence de i, l'unité $= i$, et étendons les définitions des sinus et des cosinus aux arcs imaginaires, de sorte que, p désignant un arc soit réel, soit imaginaire, l'expression

$$\frac{e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}}{2}$$

soit toujours appelée le *cosinus* de p, et l'expression

$$\frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

le *sinus* de p.

On aura alors, pour q réel,

$$\frac{e^q - e^{-q}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \sin\left(-q\sqrt{-1}\right) = -\sin\left(q\sqrt{-1}\right),$$

et de même

$$\frac{e^q + e^{-q}}{2} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2}$$

$$= \cos\left(-q\sqrt{-1}\right) = \cos\left(q\sqrt{-1}\right),$$

en admettant que, dans le cercle imaginaire comme dans le cercle réel, les sinus de deux arcs égaux et de signe contraire soient égaux et de signe contraire, et que les cosinus de deux arcs égaux et de signe contraire soient égaux et de même signe.

On démontre, au § 25, d'une manière absolue, c'est-à-dire indépendamment de l'axiôme en question, que, dans tout triangle rectiligne, *les sinus des angles sont entre eux comme les circonférences qui ont pour rayons les côtes opposés à ces angles*. On démontre en outre, pour le cas de l'existence de la quantité i, que la circonférence de rayon y est égale à $\pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right)$, ce qui, pour $i = 1$, devient $\pi\left(e^{y} - e^{-y}\right)$.

Par suite (§ 31), dans un Δ rectiligne rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b, et l'hypoténuse c, et dont les angles opposés aux côtés a, b, c sont α, β, R, on a (pour $i = 1$) :

D'après I,

$$1 : \sin\alpha = \pi\left(e^{c} - e^{-c}\right) : \pi\left(e^{a} - e^{-a}\right).$$

et par conséquent,

$$1 : \sin \alpha = \frac{e^{c} - e^{-c}}{2\sqrt{-1}} : \frac{e^{a} - e^{-a}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= -\sin\left(c\sqrt{-1}\right) : -\sin\left(a\sqrt{-1}\right)$$

$$= \sin\left(c\sqrt{-1}\right) : \sin\left(a\sqrt{-1}\right);$$

D'après II,

$$\cos \alpha : \sin \beta = \cos\left(a\sqrt{-1}\right) : 1;$$

D'après III,

$$\cos\left(c\sqrt{-1}\right) = \cos\left(a\sqrt{-1}\right).\cos\left(b\sqrt{-1}\right).$$

Ces formules, comme toutes les formules de Trigonométrie plane qui en découlent, coïncident complètement avec les formules de la Trigonométrie sphérique, à cela près que si, par exemple, les côtés et les angles d'un $\triangle$ rectiligne rectangle sont désignés par les mêmes lettres que ceux d'un $\triangle$ sphérique rectangle, les côtés du $\triangle$ rectiligne devront être divisés par $\sqrt{-1}$ pour que l'on obtienne les formules relatives au $\triangle$ sphérique.

Il vient ainsi, pour un $\triangle$ sphérique,

par I, $\quad 1 : \sin \alpha = \sin c : \sin a;$

par II, $\quad 1 : \cos a = \sin \beta : \cos \alpha;$

par III, $\quad \cos c = \cos a \cos b.$

Le lecteur pouvant se trouver arrêté par l'omission d'une démonstration (p. 233), il ne sera pas inutile de faire voir, par exemple, comment de l'équation

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

on déduit la formule

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

ou le théorème de Pythagore pour le système euclidien. C'est probablement ainsi que l'auteur y est parvenu, et les autres conséquences s'en tirent d'une manière analogue.

On a, par la formule connue,

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.3.i^3} + \frac{k^4}{2.3.4.i^4} + \cdots,$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2.3.i^3} + \frac{k^4}{2.3.4.i^4} - \cdots,$$

et par suite

$$e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} = + 2\frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.4\, i^4} + \cdots = 2 + \frac{k^2 + u}{i^2},$$

en désignant par $\frac{u}{i^2}$ la somme de tous les termes qui suivent $\frac{k^2}{i^2}$; et l'on a $u \backsim 0$, lorsque $i \backsim \infty$. Car tous les termes qui suivent $\frac{k^2}{i^2}$ étant divisés par i^2, le premier de ces termes sera $\frac{k^4}{3.4.i^2}$; et comme le rapport d'un terme au précédent est partout $< \frac{k^2}{i^2}$, la somme est moindre qu'elle ne serait, si ce rapport était $=\frac{k^2}{i^2}$, c'est-à-dire moindre que

$$\frac{k^4}{3.4.i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3.4\,(i^2 - k^2)},$$

quantité qui évidemment $\backsim 0$ lorsque $i \backsim \infty$. De l'équation

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}}\right)$$

il résulte (en appelant w, v, λ des quantités analogues à u)

$$2 + \frac{c^2 + w}{i^2} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{(a+b)^2 + v}{i^2} + 2 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{i^2}\right),$$

d'où

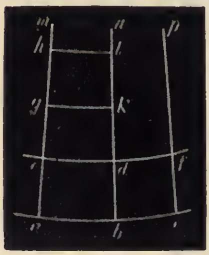
$$c^2 = \frac{a^2 + 2\,ab + b^2 + a^2 - 2\,ab + b^2 + v + \lambda - w}{2},$$

quantité qui $\backsim a^2 + b^2$.

Remarque. — Le rayon de la sphère dans laquelle le sinus total $1 = i$ est l'ordonnée y d'une ligne L, égale à $i = 1$ et menée par une des extrémités de L perpendiculairement à l'axe passant par l'autre extrémité. Car, dans la surface appelée F (§ 21), *toute la Géométrie euclidienne a lieu, les lignes L jouant le rôle des lignes droites;* et pour un rayon de forme L égal à 1, lequel sera le sinus total dans F, le rayon de la même circonférence dans son plan sera le y en question; ce qui s'applique facilement à la sphère imaginaire à laquelle le plan se ramène dans le système anti-euclidien.

(*Kurzer Grundriss u. v. w.*, p. 82).

Lobatschewsky et l'Auteur de l'*Appendix* considèrent l'un et l'autre deux points a, b de la sphère-limite et les axes correspondants $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$ (§ 23). Ils démontrent que, si α, β, γ désignent les arcs de cercle-limite ab, cd, hl, séparés par les segments d'axe $ac = 1$, $ah = x$, on a



$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x.$$

Lobatschwesky représente la valeur de $\frac{\gamma}{\alpha}$ par e^{-x}, e ayant une valeur quelconque > 1, dépendante de l'unité de longueur qu'on a choisie, et pouvant être supposée égale à la base népérienne.

L'auteur de l'*Appendix* est conduit directement à introduire la base des logarithmes naturels. Si l'on pose $\frac{\alpha}{\beta} = \delta$, et que γ, γ' soient des arcs situés aux distances y, i de α, on aura

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \delta^y = Y, \qquad \frac{\alpha}{\gamma'} = \delta^i = I,$$

d'où

$$Y = I^{\frac{y}{i}}.$$

Il démontre ensuite (§ 29) que, si u est l'angle que fait une droite avec la perpendiculaire y à sa parallèle, on a

$$Y = \cot \tfrac{1}{2} u.$$

Si l'on pose donc $z = \frac{\pi}{2} - u$, il viendra

$$Y = \operatorname{tang}\left(z + \tfrac{1}{2} u\right) = \frac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} \frac{1}{2} u}{1 - \operatorname{tang} z \operatorname{tang} \frac{1}{2} u},$$

d'où l'on tire, en ayant égard à la valeur de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = Y^{-1}$,

$$\operatorname{tang} z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(I^{\frac{y}{i}} - I^{-\frac{y}{i}}\right) \text{ (§ 30).}$$

Si maintenant y est la demi-corde de l'arc de cercle-limite $2r$, on prouve (§ 30) que $\frac{r}{\operatorname{tang} z} =$ constante. En représentant par i cette constante, et faisant tendre y vers zéro, on aura $\frac{2r}{2y} \sim 1$, d'où

$$2y \sim 2i \operatorname{tang} z \sim i \frac{I^{\frac{2y}{i}} - 1}{I^{\frac{y}{i}}},$$

ou en posant $\frac{2y}{i} = k$, $I = e^{l}$,

$$k I^{\frac{y}{i}} \sim e^{kl} - 1 \sim kl(1 + \omega),$$

ω étant infiniment petit en même temps que k. Donc, à la limite, $1 = l$, et par suite $I = e$.

La circonférence tracée sur la sphère-limite avec l'arc r de courbe-limite pour rayon, a pour longueur $2\pi r$. Donc

$$\bigcirc y = 2\pi r = 2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i (Y - Y^{-1}).$$

Dans le $\triangle$ rectiligne où α, β désignent les angles opposés aux côtés a, b, on a (§ 25)

$$\begin{aligned} \sin\alpha : \sin\beta &= \bigcirc a : \bigcirc b = \pi i (A - A^{-1}) : \pi i (B - B^{-1}) \\ &= \sin\left(a\sqrt{-1}\right) : \sin\left(b\sqrt{-1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi dans la Trigonométrie plane comme dans la Trigonométrie sphérique, les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés, si ce n'est que, sur la sphère, les côtés sont réels, et que dans le plan on doit les considérer comme imaginaires, de même que si le plan était une sphère imaginaire.

On peut arriver à cette proposition sans avoir déterminé préalablement la valeur de I. Si l'on désigne, en effet, la constante $\frac{r}{\text{tang}\, z}$ par q, on aura, comme précédemment,

$$\bigcirc y = \pi q (Y - Y^{-1}),$$

d'où l'on déduit la même proportion que ci-dessus, en prenant pour i la distance pour laquelle le rapport I est égal à e.

Si l'axiôme XI n'est pas vrai, il existe un i déterminé, qu'il faut substituer dans les formules. Si, au contraire, cet axiôme est vrai, il faudra faire dans les formules $i = \infty$. Car, dans ce cas, la quantité $\frac{\alpha}{\gamma} = Y$ est toujours $= 1$, la sphère-limite étant un plan, et les axes étant des parallèles dans le sens d'Euclide. L'exposant $\frac{y}{i}$ doit donc être nul, et par suite $i = \infty$.

Il est facile de voir que nos formules de Trigonométrie plane s'accordent avec celles de Lobatschewsky. Prenons, par exemple la formule de l'art. 37, p. 116,

$$\text{tang}\, \Pi(a) = \sin B\, \text{tang}\, \Pi(p),$$

a étant l'hypoténuse d'un $\triangle$ rectangle, p un côté de l'angle droit, et B l'angle opposé à ce côté. Notre formule du § 31, I, donne

$$1 : \sin B = (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}).$$

Or, en faisant, pour abréger, $\frac{1}{2}\Pi(k) = k'$, on a

$$\begin{aligned} \text{tang}\, 2p' : \text{tang}\, 2a' &= (\cot a' - \text{tang}\, a') : (\cot p' - \text{tang}\, p') \\ &= (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}) \\ &= 1 : \sin B. \end{aligned}$$

Hommage de l'a.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

OU

COMMENTAIRE

SUR

LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES

ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

Par J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1883

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

OU

COMMENTAIRE

SUR

LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES

ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

Par J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1883

PRÉFACE.

Cet Opuscule, dont un extrait avait paru il y a vingt ans dans l'*Archiv der Mathematik und Physik*, t. XL, 1863, a été publié intégralement en 1867 par les soins de M. Gauthier-Villars.

Bien qu'il n'en reste plus aujourd'hui d'exemplaires en librairie, le but que je m'étais proposé en écrivant ces pages ne me semble pas atteint, et les réformes que je réclamais dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire n'ont pas encore été réalisées.

Si l'on excepte un ou deux Traités, rédigés en France par des mathématiciens distingués, qui ont reconnu avec moi la nécessité d'un remaniement dans les définitions et dans l'établissement des principes, rien, ou peu s'en faut, n'a été changé dans la routine scolaire. Les nouveaux auteurs n'ont fait qu'entasser sur les mêmes fondements vermoulus quelques débris tombés des hauteurs de l'édifice géométrique, ou se sont évertués à essayer tous les changements d'ordre possibles que l'on peut faire subir aux propositions.

Je n'ai pas voulu pour cela abandonner la lutte, sûr que je suis de l'appui de savants distingués auxquels, malheureusement, la poursuite de leurs découvertes dans les hautes régions de la Science ne permet pas de consacrer leur temps précieux à une lutte qui n'a plus guère qu'un intérêt pédagogique, et qui exige plutôt du bon sens que du génie.

Malgré ce premier insuccès de ma tentative, la conviction profonde que je conserve sur la nécessité de réformer les Traités élémentaires de Géométrie me fait un devoir de continuer mes efforts. L'édition de mon Opuscule de 1867 étant épuisée, j'ai profité de l'obligeance de l'éminent éditeur, dont le dévouement est toujours prêt quand il s'agit de rendre quelque service à la Science, et qui a bien voulù se charger d'une nouvelle réimpression.

La situation n'ayant pas changé, et les mêmes critiques pouvant encore être formulées, je n'ai pas eu beaucoup de modifications à introduire dans cette édition nouvelle. J'ai seulement modifié quelques passages de l'*Introduction,* et j'ai remplacé l'ancienne *Note I* de l'*Appendice* par un article plus étendu, déjà reproduit dans plusieurs recueils français et étrangers et qui complète quelques idées développées dans le Volume actuel.

Si les auteurs français sont en général restés indifférents aux considérations que j'ai présentées sur leurs méthodes, j'ai du moins la consolation de voir ces idées se répandre à l'étranger, d'où elles reviendront peut-être un jour dans notre pays. Les méthodes fondées sur les *Éléments* d'Euclide, déjà en possession depuis des siècles des écoles de la Grande-Bretagne et de la Scandinavie, sont, depuis quelques années, devenues classiques en Italie. En Russie, on traduit et l'on rajeunit Euclide, en lui conservant sa rigueur et y ajoutant la clarté moderne. L'Allemagne a depuis longtemps l'excellent Traité du Dr Baltzer, qui est à sa cinquième édition. D'autre part, une nouvelle École s'annonce, celle des disciples de Grassmann, ayant pour but de renouveler les bases de la Géométrie, en prenant pour point de départ la considération du mouvement. La France sera forcée tôt ou tard de suivre cette impulsion, et si je ne puis assister à cette réforme si ardemment désirée, j'aurai du moins la satisfaction d'y avoir contribué dans la mesure de mes faibles moyens

Bordeaux, 22 septembre 1883.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

INTRODUCTION.

Depuis le temps où le génie de la Grèce s'est illustré par l'invention de la Géométrie rationnelle, on s'est occupé, à toutes les périodes d'activité intellectuelle, de discuter les vérités fondamentales sur lesquelles cette science repose; et cependant, quels qu'aient été le nombre et le mérite des savants qui ont pris part à ce débat, les questions pendantes, relatives aux premiers principes, semblent attendre encore leur solution définitive.

Les auteurs modernes qui ont écrit les premiers sur la Géométrie, en prenant naturellement l'antiquité pour modèle, n'ont pas toujours aperçu la diversité des points de vue des géomètres auxquels ils faisaient des emprunts (¹). De là les incohérences de principes qui se sont perpétuées dans les livres élémentaires jusqu'à nos jours, et que la force de l'habitude empêche de reconnaître, malgré leur contraste choquant avec l'état actuel de la Science.

Sans doute ces imperfections n'ont pas échappé à la généralité des mathématiciens éminents de notre époque. Malheureusement on serait tenté de croire que ces vices des méthodes didactiques, adoptées pour l'enseignement des éléments, n'étendent pas leur influence funeste jusqu'à la région des hautes théories, où se font

---

(¹) *Voir*, par exemple, la Note IV, où est expliquée la divergence des doctrines développées par Euclide et par Archimède, et que les auteurs modernes ont cru pouvoir confondre en une seule.

les brillantes découvertes, et les maîtres de la Science ne paraissent pas se préoccuper de délivrer les leçons données aux commençants des fausses idées qui s'y rencontrent et d'appuyer de leur imposante autorité les changements que réclament les méthodes en usage.

En attendant que le secours nous vienne d'en haut, j'ai cru qu'il ne serait peut-être pas inutile de recourir à une autre autorité, consacrée par une tradition plus de vingt fois séculaire, et dont le nom seul commande l'attention. Euclide, il est vrai, compte aujourd'hui chez nous plus d'admirateurs que de lecteurs, et cet abandon a son excuse dans l'absence d'une traduction française en langage géométrique moderne, pareille à celles qu'ont données depuis longtemps Barrow, en Angleterre, et Lorenz, en Allemagne, et tout récemment M. V.-Zakhartchenko, en Russie. Il n'est pas étonnant que la forme pesante et embarrassée du texte ancien, reproduite dans nos versions littérales, ait puissamment contribué à rebuter les lecteurs. Pourvus d'une traduction plus lisible, nos auteurs modernes, en étudiant sérieusement le grand géomètre grec, auraient pu constater les fautes de méthode et de logique qui déparent leurs ouvrages et qu'Euclide se serait bien gardé de commettre.

Le but principal du présent travail est de mettre en lumière la supériorité d'Euclide sur la plupart des auteurs contemporains, pour tout ce qui touche l'exposition des premiers principes de la Géométrie. Notre admiration pour l'auteur des *Éléments* ne nous entraînera pas, il est vrai, jusqu'à proposer la substitution pure et simple du texte d'Euclide aux Traités modernes. La forme de l'exposition, même dans une traduction libre, choquerait les habitudes des lecteurs. Ensuite, plusieurs passages, défigurés peut-être par les commentateurs ou les copistes, devraient être modifiés. Enfin les tendances des Mathématiques modernes visent à introduire de plus en plus dans l'enseignement la méthode analytique et inductive, dont les avantages sur la méthode dogmatique des anciens ne sont plus aujourd'hui contestés.

Mais, tel qu'il est, le vieil Euclide offre encore à nos auteurs actuels la matière de nombreux emprunts, qui amélioreraient notablement leurs ouvrages. Ils y verraient avec quel soin les axiomes sont posés et réduits au moindre nombre possible. Ils apprendraient que jamais Euclide n'a songé à donner de la ligne droite la prétendue définition qui se lit en tête de presque tous nos Traités classiques, et que tant de gens attribuent au grand géomètre, sur la foi de quelques traductions infidèles (¹).

Pour établir sur une base solide les principes de la Géométrie, il faut commencer par établir les axiomes sur lesquels la Science repose, et savoir préciser la dépendance qui existe entre chacune des propositions et les axiomes admis.

Cette question conduit à chercher ce que deviendraient les propositions d'Euclide, à partir de la 29ᵉ, dans le cas où l'on ferait abstraction de l'axiome des parallèles, et nous dirons, à ce propos, quelques mots des découvertes profondes faites sur cet objet, dans les premières années de ce siècle, par Lobatchefsky et Bolyai, qui, tous les deux, sans s'être entendus, sont parvenus en même temps à reconstituer la théorie que Gauss possédait depuis longues années sans la communiquer au public. Cette nouvelle géométrie, après avoir soulevé de vives oppositions, fondées en grande partie sur des malentendus, a fini par trouver accès chez la généralité des mathématiciens, et déjà elle a rendu de grands services à l'Analyse, en lui offrant un nouveau moyen de représentation géométrique des symboles analytiques, dont la représentation par la Géométrie usuelle n'est qu'un cas particulier.

La source de ce désaccord passager entre les géomètres doit être cherchée, croyons-nous, dans le faux point de vue métaphysique où l'on s'est placé en considérant la Géométrie comme une science de pur raisonnement et ne voulant admettre parmi ses axiomes que des vérités *nécessaires* et du domaine de la logique abstraite. On a été conduit ainsi à attribuer aux axiomes une nature toute différente de celle des autres vérités géométriques que l'expérience nous révèle en dehors de toute étude scientifique, et que le géomètre rattache à ces axiomes comme conséquences.

Cependant la Géométrie, de même que la Mécanique et la Phy-

(¹) Ce théorème sur la ligne de plus courte distance ne signifie pas autre chose que l'énoncé des conditions de minimum de l'intégrale définie $\int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ et ne peut être compris qu'après l'explication, plus ou moins élémentaire, de l'opération indiquée par le signe sommatoire. Autrement, on fait du Calcul intégral comme M. Jourdain faisait de la prose, et nous ajoutons qu'on le fait mal. (*Voir* Note IV.)

sique, a pour objet l'étude d'une grandeur concrète, l'étendue (¹), affectant nos sens d'une certaine manière, et c'est seulement par les révélations des sens que nous avons pu connaître les propriétés fondamentales de cette espèce particulière de grandeur. Ces propriétés, indéfinissables et indémontrables, sont les termes de comparaison obligés auxquels nous ne pouvons que rapporter les autres propriétés, à l'aide du raisonnement.

D'après cela, les sens peuvent seuls nous mettre en relation avec l'étendue, et ils nous en font connaître déjà un grand nombre de propriétés, sans emprunter le secours de la logique déductive. Parmi ces propriétés, les unes sont tellement simples, tellement faciles à constater, que la force de l'habitude, jointe à la tradition constante de l'École, a bien pu faire oublier leur véritable origine, et le rôle essentiel qu'ont joué les sens dans leur découverte. On a confondu, sous le nom d'*axiomes*, ces vérités avec les vérités abstraites, qui se rapportent à la science des grandeurs en général ou à l'Arithmétique universelle (²).

D'autres propriétés, enseignées également par l'expérience et jouissant de la même certitude immédiate que les précédentes, se déduisent néanmoins de celles-ci comme conséquences, et on les a classées, sous le nom de *théorèmes*, à côté des vérités plus cachées, que le raisonnement seul pouvait faire apercevoir.

Le partage de ces vérités fondamentales en axiomes et en théorèmes est, jusqu'à un certain point, arbitraire. Ainsi, lorsque deux de ces vérités sont des conséquences réciproques l'une de l'autre, on peut prendre celle des deux que l'on voudra pour axiome, l'autre devenant alors un théorème.

Le nombre des axiomes peut varier, suivant l'ordre que l'on adopte dans la subordination des propositions. Il y a cependant un minimum au-dessous duquel ce nombre ne saurait être réduit, comme le prouvent les tentatives infructueuses auquelles nous faisions tout à l'heure allusion.

Nous nous proposons, dans ce travail, de présenter quelques

(¹) *Voir* Note I.

(²) Ainsi, parmi les douze propositions qu'Euclide désigne sous le nom de κοιναὶ ἔννοιαι, les trois dernières seules appartiennent spécialement à la Géométrie. Les sept premières s'appliquent à toute espèce de grandeur.

considérations sur le nombre et la nature des axiomes nécessaires de la Géométrie rationnelle. Nous avons dû examiner, à cette occasion, les idées qui ont servi de base aux *Éléments* de Legendre, et qui dominent encore dans la plupart des Traités modernes, auxquels celui de Legendre a servi de type. Pour y reconnaître de nombreuses inexactitudes, il nous a suffi d'en faire la comparaison avec les principes d'Euclide et les discussions des géomètres qui ont su se pénétrer de l'esprit de l'immortel auteur des anciens *Éléments*.

L'ouvrage d'Euclide lui-même, quelque supériorité que l'on doive lui reconnaître sur ses successeurs, ne nous a pas paru à l'abri de toute critique, et nous avons cru pouvoir y signaler de légères imperfections, qu'il serait d'ailleurs aisé de faire disparaître, sans altérer au fond l'admirable enchaînement des vérités que renferme ce chef-d'œuvre de logique.

L'immense succès qu'ont eu les *Éléments* de Legendre, à leur apparition, n'est pas dû seulement à la renommée scientifique de cet illustre analyste. Il tient aussi aux éminentes qualités de précision et de clarté qui distinguent la rédaction de ce livre, où l'auteur a si bien su reproduire la forme et le style des géomètres de l'antiquité. Malheureusement Legendre, entraîné par l'exemple de ses contemporains, n'a pas su conserver dans toute leur pureté les méthodes vraiment géométriques des anciens, et il les a profondément altérées, en y mêlant les procédés arithmétiques de l'Analyse moderne.

Chez Euclide, la Géométrie forme une science complète, qui se suffit à elle-même et n'invoque nulle part, dans ses démonstrations, le secours de la science des nombres. C'est plutôt celle-ci qui empruntera à la Géométrie ses dénominations et qui, rendue sensible aux yeux par le moyen des figures, pourra fonder ses premiers principes sur une évidence tout intuitive.

Legendre, au contraire, introduit à chaque instant dans ses raisonnements des considérations qui supposent les grandeurs géométriques remplacées par des nombres. C'est ainsi qu'il parle de produit de lignes multipliées par des lignes ou par des surfaces. Dans les démonstrations où il fait usage des proportions, il applique immédiatement aux proportions entre lignes des théorèmes d'Arithmétique établis seulement pour les proportions entre nombres rationnels, et l'extension au cas des incommensurables, qu'il croit démontrer par un artifice imité des géomètres anciens, ne peut être justifiée, tant que l'on n'a pas défini avec plus de précision l'égalité de deux rapports entre quantités incommensurables. Nous n'insisterons pas davantage sur les défauts de ces méthodes, qui aujourd'hui sont en partie abandonnées.

Nous nous occuperons plus particulièrement des propositions fondamentales du *premier Livre,* qui se rattachent immédiatement aux axiomes. Comme nous l'avons déjà fait entendre, si l'on n'avait d'autre but que de mettre *hors de doute* chacune des vérités géométriques, on pourrait faire un bien plus large appel à l'expérience, en supprimant la plupart des démonstrations dans cette partie de la Géométrie, et prenant pour axiomes le plus grand nombre des propositions énoncées. Nul homme de bon sens aujourd'hui ne se donnerait la peine de réfuter un sophiste niant que, pour aller d'un point à une droite, la perpendiculaire soit plus courte que l'oblique, et ce n'est pas l'évidence qui manquerait à cette proposition pour être rangée parmi les axiomes de la Géométrie.

Mais l'auteur d'un Traité de Géométrie ne doit pas seulement chercher à convaincre l'esprit du lecteur, il doit chercher à l'éclairer et, s'il ne s'attache pas à établir avec soin l'enchaînement et la subordination des propositions, il arrivera à rassembler des vérités qui resteront isolées et stériles. Faute de connaître le lien qui les unit, le lecteur ne sera nullement préparé à passer des vérités connues à d'autres plus cachées, et il aura perdu l'occasion de se familiariser, sur des exemples simples, avec les procédés de recherche de la Géométrie.

Il importe donc de bien préciser d'abord quelle est la nature des axiomes, et de les réduire au plus petit nombre possible. Pour nous guider dans cette recherche, nous ne perdrons jamais de vue cette maxime, trop souvent méconnue, que *les vérités simples doivent pouvoir se démontrer simplement.* Si quelqu'un des premiers principes de la Science ne peut se déduire d'une manière courte et facile des principes précédemment posés, on aura lieu de soupçonner qu'il n'en est pas une conséquence et qu'il est lui-même un axiome indémontrable. Il faut donc se défier des démonstrations longues et compliquées, par lesquelles on a souvent prétendu établir des propositions qu'on s'obstinait à ne pas admettre parmi les axiomes. Par un examen approfondi, on a fini généralement par constater qu'il en est de ces démonstrations comme des appareils ingénieux au moyen desquels on espère quelquefois réaliser le mouvement perpétuel. Il s'en faut de bien peu que l'appareil ne marche; mais il ne marche pas. D'autres fois, on s'aperçoit que la proposition à démontrer n'avait pas été rattachée à celles dont elle est naturellement la conséquence.

Si nous appliquons ces considérations à l'examen des Traités de Géométrie qui ont paru jusqu'à ce jour, nous verrons sans peine qu'ils laissent presque tous à désirer sous ces divers rapports.

Au point de vue de la rigueur des déductions et du choix des axiomes, aucun Traité, jusqu'à présent, n'a surpassé les *Éléments* d'Euclide, malgré quelques points défectueux, qu'il serait facile de corriger. Si les démonstrations d'Euclide n'ont pas toujours la simplicité qui semble régner dans les Ouvrages modernes, cela tient bien moins au fond même de ces démonstrations qu'à la forme dogmatique adoptée par l'auteur dans sa préoccupation de fermer avant tout la bouche à des sophistes que la Grèce avait le tort de prendre au sérieux. De là son habitude de démontrer toujours qu'une chose *ne peut pas ne pas être,* au lieu d'établir qu'elle *est* et de faire voir en même temps *pourquoi* elle est et comment on a été conduit à reconnaître son existence. Il suffirait souvent de quelques légères modifications pour transformer les raisonnements indirects d'Euclide en raisonnements directs. On ne peut d'ailleurs lui faire un reproche de n'avoir pas usé dans certains cas des procédés beaucoup plus courts de l'Analyse moderne.

On est forcé de convenir aussi que l'ordre des propositions du *premier Livre* d'Euclide n'est pas complètement satisfaisant; il semble quelquefois que l'auteur ait rangé ses propositions sans avoir égard à leur simplicité ou à leur importance, et en s'imposant pour seule condition que la démonstration de chaque proposition ne s'appuyât que sur les propositions qui la précèdent (¹).

Si l'on joint à cela l'absence d'une bonne traduction française, faite en dehors de toute préoccupation archéologique, et repro-

---

(¹) *Voir* les notes relatives aux propositions 5 et 13 du premier Livre d'Euclide, pages 19 et 25.

duisant les idées de l'auteur dans le langage plus clair et plus précis de la Géométrie moderne, on comprend que la lecture d'Euclide puisse offrir quelque difficulté aux commençants, et ainsi s'explique, jusqu'à un certain point, l'oubli où il est tombé dans nos écoles.

Et cependant, pour un géomètre intimement pénétré de l'esprit de rigueur qui règne dans cet admirable Ouvrage, et joignant à cela la connaissance des ressources de la science actuelle, rien ne serait plus aisé que de tirer du Livre des *Éléments* un Traité aussi correct pour le fond des idées, et débarrassé de ce que la forme offre d'aride et de rebutant [1]. Il lui suffirait de subordonner les propositions à un ordre plus rationnel, de remplacer autant que possible les démonstrations *par l'absurde* par des démonstrations directes, plus simples et plus lumineuses, et enfin d'invoquer, quand il y a lieu, le grand principe des *limites*, que les anciens n'avaient osé formuler dans toute sa généralité.

Sans vouloir entreprendre une tâche aussi longue, je me bornerai ici à soumettre aux auteurs, qui seraient disposés à concourir à cette œuvre si utile, le résultat de mes recherches sur le *premier Livre* d'Euclide.

J'ai commencé par donner la traduction des trente-deux premières propositions de ce Livre, qui font l'objet de mon travail. En abandonnant le système littéral suivi par R. Simson et par Peyrard, j'ai pris pour modèle l'édition allemande de Lorenz, où le langage ordinaire est remplacé autant que possible par les signes algébriques, plus concis et plus clairs.

J'indique, dans les notes placées au bas des pages, les endroits où le texte d'Euclide m'a semblé défectueux ou incomplet, tout en pensant, avec R. Simson, qu'une grande partie des défauts signalés peut être attribuée à la maladresse des commentateurs par les mains desquels les *Éléments* nous ont été transmis, et qui ne se sont pas fait faute de substituer leurs idées à celles de l'auteur, quand ils n'en comprenaient pas la portée.

Je me suis efforcé de délimiter avec plus de précision les axiomes purement géométriques, en les rattachant à leur origine expéri-

---

[1] C'est ce que vient de réaliser avec succès le récent éditeur des *Éléments*, M. V.-Zakhartchenko.

mentale. Parmi les vérités qu'Euclide a rassemblées sous le nom de *Notions communes,* j'ai déjà fait remarquer que les sept premières appartiennent à la science des grandeurs en général. Les deux suivantes (les axiomes 8 et 9) ne sont pas, à proprement parler, des axiomes, mais des définitions. Enfin on n'y trouve pas l'énoncé de certains principes fondamentaux, qui se rattachent à l'origine expérimentale de la science géométrique.

Les *demandes* sont au nombre de trois. Nous proposons d'en ajouter une quatrième, dont Euclide fait souvent un usage tacite, quoiqu'il semble avoir voulu d'abord l'éviter à l'aide des propositions 2 et 3. Nous *demanderons* qu'une figure invariable de forme puisse être transportée d'une manière quelconque dans son plan ou dans l'espace (¹).

J'expose ensuite, sous forme de commentaire sur les 32 premières propositions d'Euclide, l'esquisse d'un plan suivant lequel on pourrait reconstruire plus régulièrement cette partie du *premier Livre.* J'ai essayé de montrer comment, en ne perdant jamais de vue l'origine des idées géométriques, et rapportant toujours chaque proposition à sa véritable source, on introduit dans la théorie plus de clarté et de généralité, tout en restant plus près des applications pratiques, et l'on est tout préparé, par l'analogie des procédés, à l'étude des méthodes de la nouvelle Géométrie.

Les premières propositions du *premier Livre* pourront se classer d'après les divisions suivantes :

1° Propriétés des angles ayant même sommet.

2° Propriétés des angles ayant des sommets différents (théorie des parallèles).

3° Propriétés d'un triangle. — Égalités et inégalités dans un triangle.

4° Comparaison de deux triangles. — Cas d'égalité. — Cas d'inégalité.

Viendraient ensuite les propriétés des quadrilatères et des polygones en général.

Mon but n'étant nullement de rédiger le commencement d'un Traité classique, je me suis attaché à la discussion des principes

---

(¹) *Voir* Notes I et II.

et à la comparaison des méthodes, sans chercher à proportionner les développements suivant la régularité didactique.

L'Appendice, composé de plusieurs Notes trop longues pour trouver place dans le texte, est terminé par quelques réflexions sur l'importance de l'enseignement de la Géométrie élémentaire, sur les moyens de rendre cet enseignement plus fructueux au double point de vue de la théorie et des applications, et sur les avantages que la Géométrie présente sur l'Analyse abstraite, comme première préparation à l'étude des parties plus élevées des Mathématiques.

LES

XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DU PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Un *point* est ce qui n'a pas de parties.
2. Une *ligne* est une longueur sans largeur ([1]).
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne *droite* est celle qui est située semblablement par rapport à tous ses points ([2]).
5. Une *surface* est ce qui a seulement longueur et largeur ([3]).
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface *plane* est celle qui est située semblablement par rapport aux lignes droites qu'elle contient ([4]).
8. Un *angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui

---

([1]) Cette définition rappelle vaguement l'origine expérimentale de la notion de ligne.

([2]) Cette définition, conçue en termes assez obscurs, veut dire sans doute que la ligne droite est composée semblablement en tous ses points, ou qu'elle est superposable à elle-même dans toutes ses parties. C'est, en effet, de cette propriété fondamentale que découlent toutes les autres propriétés de la ligne droite.

([3]) Même remarque que pour la définition 2.

([4]) Définition aussi peu claire que celle de la ligne droite. Elle doit signifier que le plan est une surface superposable à elle-même dans toutes ses parties. R. Simson la remplace par la propriété du plan de contenir tout entière toute droite qui a deux points communs avec lui. (*Voir* la Note III.)

se rencontrent dans un plan, et qui ont des directions différentes [1].

9. Lorsque les lignes qui comprennent un angle plan sont droites, l'angle est appelé *rectiligne.*

10. Lorsqu'une droite, rencontrant une autre droite, fait avec elle deux angles adjacents égaux, chacun de ces angles est un angle *droit,* et la première droite est dite *perpendiculaire* sur la seconde.

11. L'angle *obtus* est celui qui est plus grand qu'un angle droit.

12. L'angle *aigu* est celui qui est plus petit qu'un angle droit.

13. On nomme *limite* ce qui est l'extrémité de quelque chose [2].

14. On nomme *figure* ce qui est entouré par une ou par plusieurs limites [3].

15. Un *cercle* est une figure plane, entourée par une seule ligne [4], appelée *circonférence,* et telle que toutes les droites, appelées *rayons,* menées à cette circonférence, d'un certain point situé à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles.

16. Ce point se nomme le *centre* du cercle.

17. Un *diamètre* du cercle est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la circonférence : cette droite partage le cercle en deux parties égales [5].

18. Un *demi-cercle* est la figure comprise entre le diamètre et l'une des portions égales dans lesquelles ce diamètre partage la circonférence.

19. Un *segment* de cercle est la figure comprise entre une droite et l'une des portions inégales dans lesquelles cette droite partage la circonférence.

---

[1] On ne voit guère, d'après les termes de cette définition, ce qu'il faut entendre par deux lignes non droites qui n'ont pas la même direction (μὴ ἐπ' εὐθείαις κειμένων). R. Simson suppose ici quelque interpolation d'un copiste maladroit, et il est d'avis de fondre cette définition avec la suivante, en supprimant tout ce qui ne se rapporte pas aux lignes droites. D'ailleurs Euclide n'introduit pas une seule fois, dans la suite de l'Ouvrage, la considération des angles curvilignes.

[2] R. Simson considère cette définition comme superflue.

[3] Le mot *figure* se prend maintenant dans un sens plus général.

[4] Une ligne rentrant sur elle-même.

[5] Cette dernière phrase est l'énoncé d'un théorème, qui est du reste une conséquence immédiate de la définition du cercle.

20. On appelle figures *rectilignes* celles qui sont entourées par des droites;

21. Figures *trilatères,* celles qui sont entourées par trois droites;

22. Figures *quadrilatères,* celles qui sont entourées par quatre droites;

23. Figures *multilatères,* celles qui sont entourées par plus de quatre droites.

24. Parmi les figures trilatères, on nomme *triangle équilatéral* celle qui a ses trois côtés égaux;

25. Triangle *isoscèle* (¹), celle qui a seulement deux côtés égaux;

26. Triangle *scalène,* celle qui a ses trois côtés inégaux;

27. Triangle *rectangle,* celle qui a un angle droit;

28. Triangle *obtusangle,* celle qui a un angle obtus;

29. Triangle *acutangle,* celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, on nomme *carré* celle qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles droits;

31. *Rectangle,* celle qui a ses angles droits, sans avoir tous ses côtés égaux;

32. *Losange,* celle qui a tous ses côtés égaux, sans avoir ses angles droits;

33. *Parallélogramme* (²), celle qui a ses côtés opposés égaux deux à deux seulement, et ses angles opposés égaux, mais non droits.

34. Toutes les autres figures de quatre côtés s'appellent simplement *quadrilatères* (³).

(¹) Un grand nombre d'auteurs persistent à écrire *isocèle, hypothénuse, parallélipipède,* au lieu de *isoscèle, hypoténuse, parallélépipède.* Ce sont là autant de barbarismes.

(²) Nous avons substitué au mot *rhomboïde* du texte le mot par lequel cette figure est généralement désignée aujourd'hui, quoique ce mot soit tiré d'une définition différente. Il est d'ailleurs employé partout dans la suite par Euclide lui-même. (*Voir* liv. I, prop. 34 et suiv.)

(³) Le mot *trapèze,* qui se trouve dans le texte, se prend maintenant dans un sens plus restreint.

DEMANDES.

On demande de pouvoir :

1. Mener une ligne droite d'un point quelconque à un autre point quelconque;

2. Prolonger indéfiniment, suivant sa direction, une ligne droite finie;

3. Décrire un cercle d'un point quelconque comme centre et avec une distance quelconque (comme *rayon*).

AXIOMES (¹).

1. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles (²).

2. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront égales (³).

3. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux (⁴).

4. Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront inégales (dans le même sens) (⁵).

5. Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux (dans le même sens) (⁶).

---

(1) Nous traduisons ainsi les mots κοιναὶ ἔννοιαι (notions communes), titre sous lequel Euclide réunit des énoncés de natures fort différentes et qui ne doit pas être pris dans le sens que l'on attache, dans nos Traités modernes, au mot *axiome*. Les sept premiers énoncés expriment des vérités relatives à toute espèce de grandeurs, aussi bien qu'aux grandeurs géométriques; les énoncés 8 et 9 sont de simples définitions; les trois derniers seuls sont des axiomes géométriques proprement dits. Nous ne saurions admettre l'opinion de Peyrard, qui, d'après certains manuscrits, range ces trois derniers énoncés parmi les *demandes*. On voit aisément que ce sont là des propositions d'un tout autre caractère, et il est bien plus conforme à l'esprit d'Euclide d'en faire, avec Barrow, R. Simson et Lorenz, les fondements expérimentaux de la science géométrique.

(2) $A = B$, $A = C$; donc $B = C$.

(3) $A = B$, $A' = B'$; donc $A + A' = B + B'$.

(4) $A = B$, $A' = B'$; donc $A - A' = B - B'$.

(5) $A \gtrless B$, $A' = B'$; donc $A + A' \gtrless B + B'$.

(6) $A \gtrless B$, $A' = B'$; donc $A - A' \gtrless B - B'$.

6. Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles (1).

7. Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles (2).

8. Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles (3).

9. Le tout est *plus grand que* la partie (4).

10. Tous les angles droits sont égaux (5).

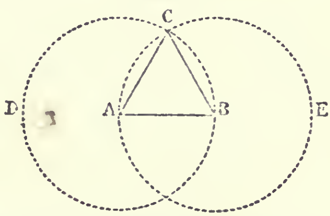
11. Si deux droites sont rencontrées par une troisième, qui forme avec elles deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme soit moindre que deux angles droits, ces deux droites, prolongées indéfiniment, finiront par se rencontrer du côté où elles forment les deux angles valant ensemble moins de deux angles droits (6).

12. Deux droites ne peuvent entourer un espace (7).

PROPOSITION 1.

Sur une droite finie donnée AB (*fig.* 1), *construire un triangle équilatéral.*

Fig. 1.



Du centre A, avec le rayon AB, décrivons le cercle BCD [dem. 3];

(1) $A = B$; donc $2A = 2B$.

(2) $A = B$; donc $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$.

(3) Définition de l'*égalité géométrique*.

(4) Définition des mots *plus grand que*, ou de l'*inegalité* en général.

(5) Legendre et d'autres auteurs ont cru nécessaire de faire de cet énoncé un théorème distinct, bien que ce soit une conséquence immédiate de la définition de la ligne droite.

(6) Axiome connu improprement sous le nom de *postulatum* d'Euclide. (*Voir* à ce sujet la Note 9.)

(7) C'est-à-dire qu'entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite.

du centre B, avec le rayon BA, décrivons le cercle ACE. Du point C, où ces deux cercles se coupent (1), menons aux points A et B les droites CA, CB [dem. 1]. ABC sera le triangle demandé.

En effet, puisque l'on a

$$AC = AB \text{ [déf. 15]}$$

et

$$BC = BA,$$

il en résulte

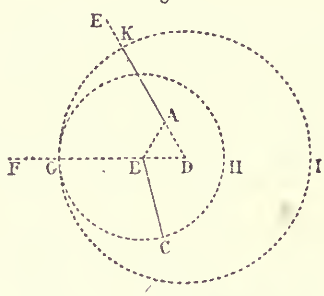
$$AC = BC \text{ [ax. 1]}.$$

Par conséquent AC = AB = BC, et il s'ensuit [déf. 24] que le triangle construit sur AB est équilatéral.

PROPOSITION 2.

A partir d'un point donné A (*fig.* 2), *placer une droite égale à une droite donnée* BC (2).

Fig. 2.



Menons de A en B la droite AB [dem. 1]. Sur cette droite, construisons le triangle équilatéral ABD [pr. 1]. Prolongeons les

(1) La démonstration d'Euclide semble incomplète, en ce qu'elle ne fait pas voir que les deux cercles se coupent nécessairement. Il suffit, pour la compléter, de faire remarquer que chacun des deux cercles a un point intérieur et un point extérieur par rapport à l'autre cercle.

(2) Cette proposition est devenue, pour les auteurs modernes, un cas particulier d'une demande plus générale, que tous font, au moins tacitement, savoir : *Qu'une figure peut être transportée d'une manière quelconque, dans son plan ou, plus généralement, dans l'espace, sans qu'aucun de ses éléments, distances mutuelles ou angles, change de grandeur.*

droites DA et DB vers E et F [dem. 2]. Du centre B, avec le rayon BC, décrivons le cercle CGH; et du centre D, avec le rayon DG, décrivons le cercle GIK [dem. 3]. La droite AK = BC sera placée à partir du point A, comme on le demandait.

En effet, puisqu'on a

$$DK = DG \text{ [déf. 15]},$$

et

$$DA = DB \text{ [déf. 24]},$$

il en résulte

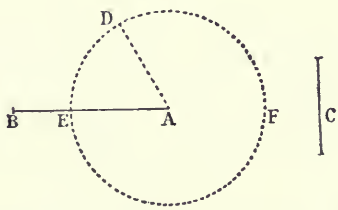
$$AK = BG \text{ [ax. 3]}.$$

Or on a BC = BG, et par suite AK et BC sont l'une et l'autre égales à BG; par suite AK = BC [ax. 1].

PROPOSITION 3.

Étant données deux droites inégales, AB, C (*fig.* 3), *retrancher de la plus grande* AB *une droite égale à la plus petite* C (¹).

Fig. 3.



Au point A plaçons une droite AD = C [pr. 2], et du centre A, avec le rayon AD, décrivons le cercle DEF [dem. 3], rencontrant AB en E. On aura ainsi retranché de AB la ligne AE = C.

Car on a AE = AD [déf. 15]; d'ailleurs C = AD. Donc AE = C [ax. 1], et par suite BE = AB — C (²).

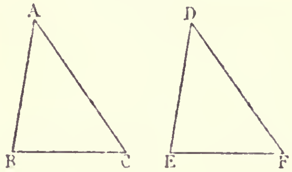
(¹) Même observation que pour la proposition précédente.

(²) Si l'on donne la droite AD toute prête placée au point A, la construction se réduit à tracer simplement le cercle DEF [dem. 3], et l'on a immédiatement AE = AD [déf. 15].

PROPOSITION 4.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 4) *ont les deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF, *et si les angles*

Fig. 4.



BAC, EDF, *compris entre les côtés égaux, sont égaux, ces triangles auront leurs bases* BC, EF *égales ; les triangles seront égaux et les angles restants, opposés aux côtés égaux,* ABC *et* DEF, ACB *et* DFE, *seront égaux chacun à chacun.*

Appliquons, en effet, le triangle ABC sur le triangle DEF ([1]), et, pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E, puisque AB = DE. Ensuite, AB étant placé sur DE, et l'angle BAC étant égal à EDF, AC prendra la direction de DF, et, puisque AC = DF, le point C tombera sur le point F. Donc, puisque B coïncide avec E, et C avec F, BC coïncidera avec EF ; car, s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, renfermeraient entre elles un espace, ce qui est impossible [ax. 12]. Donc on a [ax. 8]

BC = EF, triangle ABC = triangle DEF,
angle ABC = angle DEF, angle ACB = angle DFE.

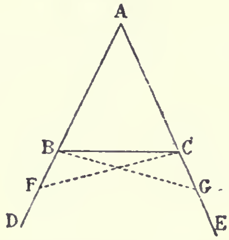
PROPOSITION 5.

Dans tout triangle isoscèle ABC (*fig.* 5), 1° *les angles à la base* ABC, ACB *sont égaux entre eux ;* 2° *si l'on prolonge les côtés*

([1]) Il semble qu'à partir d'ici Euclide admette implicitement la demande dont il est question dans les notes précédentes. Il en fait usage non seulement pour la démonstration actuelle, mais encore dans d'autres cas (prop. 8, par exemple).

égaux AB, AC, *les angles formés au-dessous de la base,* DBC, ECB, *seront aussi égaux entre eux.*

Fig. 5.



Sur le prolongement BD de AB, prenons à volonté un point F, et sur AE > AF, prenons une longueur AG = AF [pr. 3, note]. Menons ensuite FC, GB.

1° Dans les triangles ACF, ABG, on a AF = AG, AC = AB, et l'angle A est commun. Donc [pr. 4]

$$FC = GB, \quad ACF = ABG, \quad AFC = AGB.$$

Comme on a d'ailleurs AF = AG et AB = AC, il en résulte [ax. 3] BF = CG. Par conséquent, dans les triangles FBC, GCB, on a

$$BF = CG, \quad FC = BG, \quad BFC = BGC.$$

Donc [pr. 4] FBC = GCB, c'est-à-dire que les angles *au-dessous* de la base sont égaux.

2° De plus, BCF = CBG; et, comme on a d'ailleurs

$$ABG = ACF, \quad CBG = BCF,$$

il en résulte [ax. 3] ABC = ACB, c'est-à-dire que les angles *à la base* sont égaux ([1]).

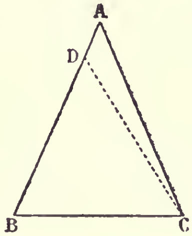
PROPOSITION 6.

Si, dans un triangle ABC (*fig.* 6), *deux angles* ABC, ACB

([1]) Cette démonstration aurait pu être abrégée, si Euclide eût appliqué la proposition 4 aux triangles ABC et ACB, et s'il eût placé, comme il eût été plus naturel de le faire, la proposition 13 en tête de ce Livre. (*Voir* la note relative à cette dernière proposition, page 25.)

sont égaux entre eux, les côtés AC, AB, *opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.*

Fig. 6.



Si les côtés AC, AB ne sont pas égaux, soit AB le plus grand. Prenons sur AB la longueur BD = AC [pr. 3], et menons DC. Dans les deux triangles ABC, DCB, on a BD = AC, BC commun, et DBC = ACB; donc [pr. 4]

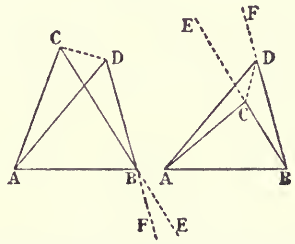
triangle DBC = triangle ABC,

ce qui est impossible [ax. 9] ([1]). Donc AC et AB ne peuvent être inégaux. Donc AC = AB.

PROPOSITION 7.

Si l'on joint les extrémités d'une même base AB (*fig.* 7) *à deux points différents* C, D, *situés d'un même côté de cette*

Fig. 7.



base, les deux distances CA, CB *du premier point* C *aux extré-*

([1]) Il serait peut-être plus clair de remarquer que de l'égalité des triangles il résulterait que l'angle DCB = ABC [pr. 4], et comme, par hypothèse, ABC=ACB, on aurait DBC = ACB [ax. 1], ce qui est absurde [ax. 9]. On éviterait ainsi la considération des aires des deux triangles.

mités de la base ne peuvent être égales chacune à chacune au deux distances DA, DB *du second point* D *aux mêmes extrémités.*

Soit, en effet, s'il est possible, AD = AC et BD = BC. Menons CD [et prolongeons BC vers E, BD vers F].

Puisque AD = AC, on a

$$ADC = ACD \text{ [pr. 5]},$$

et par suite

$$ADC > DCE \text{ [ax. 9]},$$

et à plus forte raison

$$FDC > DCE.$$

Mais on a en même temps BD = BC, d'où résulterait

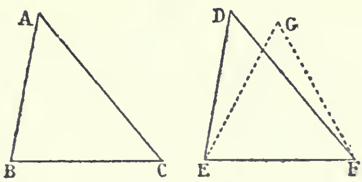
$$FDC = DCE \text{ [pr. 5]},$$

ce qui serait en contradiction avec ce qui précède.

PROPOSITION 8.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 8) *ont leurs deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF, *et leurs bases* BC, EF *aussi égales entre elles, les angles, tels que* BAC, EDF, *compris entre des côtés égaux, sont égaux.*

Fig. 8.



Portons le triangle ABC sur le triangle DEF, en plaçant le point B sur le point E, et dirigeant BC suivant EF.

Puisque BC = EF, le point C tombera sur F. Or on a

$$BA = ED \quad \text{et} \quad CA = FD.$$

Par conséquent, le point A tombera sur le point D; car, si A tombait en un autre point G, on devrait avoir

$$GE = AB = DE \quad \text{et} \quad GF = AC = DF \text{ [ax. 1]},$$

en même temps que G différerait de D, ce qui est impossible [pr. 7]. Donc BA coïncidera avec DE, et AC avec DF. On a donc [ax. 8]

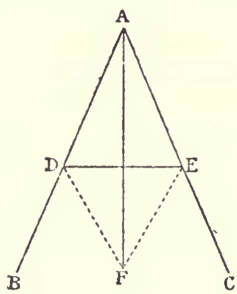
angle BAC = angle EDF [et triangle BAC = triangle EDF].

[Donc, *si deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, ils peuvent coïncider l'un avec l'autre, et ils sont égaux*].

PROPOSITION 9.

Partager un angle rectiligne donné BAC (*fig.* 9) *en deux parties égales.*

Fig. 9.



Prenons sur AB un point quelconque D, et retranchons de AC la droite AE = AD [pr. 3, note]. Menons DE, et construisons sur DE le triangle équilatéral DEF [pr. 1]. Si l'on mène AF, cette droite partagera l'angle BAC en deux parties égales.

Car les deux triangles ADF, AEF ayant AF commun, AD = AE, DF = EF, il en résulte [pr. 8]

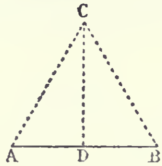
DAF = EAF.

PROPOSITION 10.

Partager une droite finie donnée AB (*fig.* 10) *en deux parties égales.*

Construisons sur AB le triangle équilatéral ABC [pr. 1]. Partageons l'angle ACB en deux parties égales par la droite CD

Fig. 10.



[pr. 9] : cette droite partagera AB en deux parties égales au point D.

Car, les deux triangles ACD, BCD ayant

$$AC = CB, \quad CD \text{ commun}, \quad \text{angle } ACD = \text{angle } BCD,$$

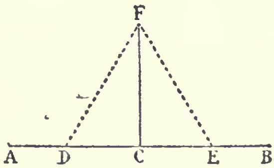
on a [pr. 4]

$$AD = DB.$$

PROPOSITION 11.

En un point donné C (*fig.* 11) *d'une droite donnée* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Fig. 11.



Prenons sur AB un point quelconque D, et faisons CE = CD [pr. 3, note]. Construisons sur DE le triangle équilatéral DEF [pr. 1], et menons FC. La droite FC sera pependiculaire à AB au point C.

Car les deux triangles DCF, ECF ayant CF commun, DC = CE, DF = EF, on a [pr. 8]

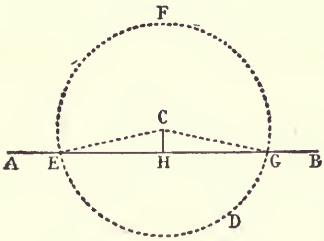
$$DCF = ECF.$$

Donc [déf. 10] FC est perpendiculaire sur AB.

PROPOSITION 12.

D'un point donné C (*fig.* 12), *abaisser une perpendiculaire sur une droite indéfinie donnée* AB.

Fig. 12.



Prenons, au delà de AB par rapport à C, un point quelconque D; décrivons, du centre C, avec le rayon CD, le cercle EFG; partageons EG en deux parties égales au point H [pr. 10], et menons CH : cette ligne CH sera perpendiculaire sur AB.

Car, en menant CE, CG, on a EH = HG, CH commun, et [déf. 15] EC = CG. Donc [pr. 8]

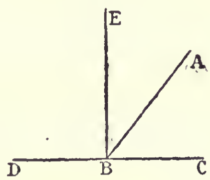
$$EHC = CHG.$$

Donc [déf. 10] CH est perpendiculaire sur AB.

PROPOSITION 13.

Les angles adjacents ABD, ABC (*fig.* 13), *que forme une droite* AB *avec une autre droite* CD, *à laquelle elle se termine,*

Fig. 13.



sont : 1° tous les deux droits, ou bien 2° leur somme est égale à deux angles droits.

1° Si ces angles sont égaux entre eux, ils sont tous les deux droits [déf. 10].

2° S'ils sont inégaux, comme ABC, ABD, élevons sur DC, au point B, la perpendiculaire BE [pr. 11]. Alors CBE, EBD seront deux angles droits [déf. 10].

Puisque

$$CBE = CBA + ABE,$$

on a, en ajoutant de part et d'autre EBD [ax. 2],

$$CBE + EBD = CBA + ABE + EBD.$$

De même, puisque

$$ABD = DBE + EBA,$$

on a, en ajoutant de part et d'autre CBA,

$$ABD + CBA = DBE + EBA + CBA.$$

Par conséquent [ax. 1],

$$ABD + CBA = CBE + EBD$$

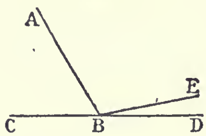
c'est-à-dire que l'on a

$$ABD + CBA = 2 \text{ droits } (^1).$$

PROPOSITION 14.

Si en un point B *d'une droite* AB (*fig.* 14), *deux droites* BC, BD *font avec la première* AB, *et de côtés différents de* AB, *des*

Fig. 14.



angles adjacents ABC, ABD, *dont la somme soit égale à deux*

---

(1) On peut s'étonner qu'Euclide ait employé un si grand appareil de logique pour prouver que l'angle CBD, formé par les deux directions BD, BC, est égal à la somme de ses deux parties, égales ou inégales, et surtout qu'il ait donné aussi tard une proposition qui aurait dû venir une des premières de ce Livre, comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la note sur la proposition 5, page 19.

angles droits, ces deux droites BC, BD *seront le prolongement l'une de l'autre.*

En effet, si BD n'est pas le prolongement de BC, soit BE ce prolongement. On aura alors [pr. 13]

$$\text{CBA} + \text{ABE} = 2 \text{ droits}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$\text{CBA} + \text{ABD} = 2 \text{ droits}.$$

Donc [ax. 1 et 10]

$$\text{ABC} + \text{ABD} = \text{ABC} + \text{ABE}.$$

Donc, en retranchant ABC de part et d'autre [ax. 3],

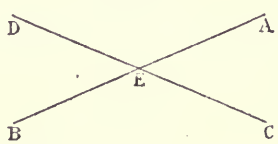
$$\text{ABD} = \text{ABE},$$

ce qui est impossible [ax. 9]. Par conséquent, BE ne peut être en ligne droite avec BC, et le même raisonnement s'appliquera pareillement à toute autre droite différente de BD. Donc BC et BD sont le prolongement l'une de l'autre (1).

PROPOSITION 15.

Si deux droites AB, CD (*fig.* 15) *se coupent mutuellement, elles forment des angles opposés par le sommet égaux deux à deux, savoir* CEA = DEB *et* CEB = AED.

Fig. 15.



On a, en effet [pr. 13],

$$\text{CEA} + \text{AED} = 2 \text{ droits},$$

et

$$\text{AED} + \text{DEB} = 2 \text{ droits}.$$

(1) On peut faire sur cette proposition la même remarque que sur la précédente.

Donc [ax. 1 et 10]

$$\text{CEA} + \text{AED} = \text{AED} + \text{DEB};$$

par suite, en ôtant de part et d'autre AED [ax. 3],

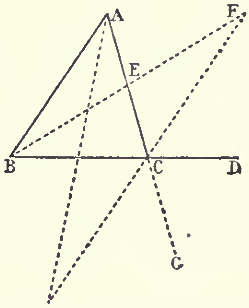
$$\text{CEA} = \text{DEB}.$$

On démontrerait de même que CEB = AED.

PROPOSITION 16.

Si l'on prolonge un côté BC *d'un triangle* ABC (*fig.* 16), *l'angle extérieur* ACD *est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents* CBA, BAC.

Fig. 16.



Partageons AC en deux parties égales au point E [pr. 10]; menons BE et prolongeons cette droite d'une quantité EF = EB [pr. 3, note]. Menons CF.

Puisque l'on a

$$\text{AE} = \text{EC}, \quad \text{BE} = \text{EF} \quad \text{et} \quad \text{AEB} = \text{FEC} \text{ [pr. 15]},$$

il en résulte [pr. 4]

$$\text{BAE} = \text{ECF}.$$

Mais on a [ax. 9]

$$\text{ACD} > \text{ECF}.$$

Par conséquent,

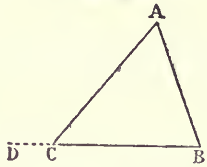
$$\text{ACD} > \text{BAE}.$$

De même, en partageant BC en deux parties égales, et prolongeant AC vers G, on démontrera que BCG, c'est-à-dire ACD [pr. 15], est plus grand que CBA.

PROPOSITION 17.

Dans tout triangle ABC (*fig.* 17), *la somme de deux angles quelconques* ABC, ACB *est moindre que deux angles droits.*

Fig. 17.



Prolongeons BC vers D. On a [pr. 16]

$$ABC < ACD.$$

Par conséquent [ax. 4],

$$ABC + ACB < ACD + ACB.$$

Or on a [pr. 13]

$$ACD + ACB = 2 \text{ droits}.$$

Donc

$$ABC + ACB < 2 \text{ droits}.$$

On démontrerait de même que chacune des deux sommes

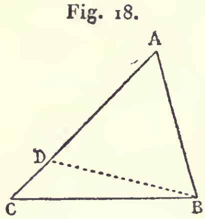
$$BAC + ACB, \quad CAB + ABC$$

est moindre que deux angles droits.

PROPOSITION 18.

Deux côtés AC, AB *d'un triangle* ABC (*fig.* 18) *étant inégaux, au plus grand côté* AC *est opposé un plus grand angle* ABC.

Fig. 18.



Soit $AC > AB$. Prenons $AD = AB$ [pr. 3, note], et menons BD.

On aura alors [pr. 16]

$$ADB > ACB.$$

Mais

$$ADB = ABD \text{ [pr. 5]}.$$

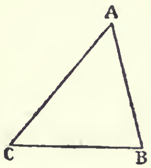
Donc ABD > ACB, et à plus forte raison

$$ABC > ACB.$$

PROPOSITION 19.

Deux angles ABC, ACB *d'un triangle* ABC (*fig.* 19) *étant inégaux, au plus grand angle* ABC *est opposé un plus grand côté* AC.

Fig. 19.



Si l'on n'avait pas AC > AB, il faudrait que l'on eût ou AC = AB ou AC < AB.

Si AC = AB, on aurait [pr. 5] ABC = ACB;

Si AC < AB, on aurait [pr. 18] ABC < ACB.

Ces deux conclusions étant contraires à l'hypothèse ABC > ACB, il s'ensuit que l'on ne peut pas ne pas avoir AC = AB ou > AB.

PROPOSITION 20.

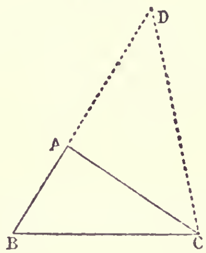
Dans tout triangle ABC (*fig.* 20), *la somme de deux côtés quelconques* AB, AC *est plus grande que le troisième* BC.

Prolongeons AB vers D; faisons AD = AC [pr. 3, note], et menons CD.

Puisque AD = AC, on a ACD = ADC [pr. 4]. Or on a

BCD > ACD [ax. 9]; par suite, BCD > ADC. Donc [pr. 19] BD > BC, c'est-à-dire BA + AC > BC.

Fig. 20.



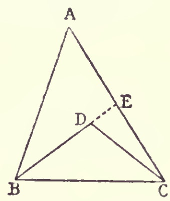
On démontrerait de la même manière que l'on a

$$AB + BC > AC \quad \text{et} \quad BC + CA > AB.$$

PROPOSITION 21.

Si des deux extrémités B, C *de la base* BC (*fig.* 21) *du triangle* ABC *on mène deux droites* BD, CD *à un point* D *intérieur au triangle,* 1° *la somme de ces deux droites est moindre que celle*

Fig. 21.



de deux autres côtés BA, CA *du triangle; mais* 2° *l'angle* BDC *qu'elles comprennent est plus grand que l'angle* BAC *du triangle, opposé à la même base* BC.

1° Prolongeons BD jusqu'à la rencontre de AC en E. Dans le triangle ABE, on a [pr. 20]

$$BA + AE > BE;$$

par suite, en ajoutant CE de part et d'autre [ax. 4],

(1) $$BA + AC > BE + EC.$$

On a maintenant, dans le triangle CDE [pr. 20],

$$DE + EC > DC,$$

d'où, en ajoutant DB de part et d'autre,

$$BE + EC > DC + DB. \quad (2)$$

En comparant les inégalités (1) et (2), on en tire, à plus forte raison,

$$BA + AC > DC + DB.$$

2° On a [pr. 16]

$$BDC > BEC \quad \text{et} \quad BEC > BAC.$$

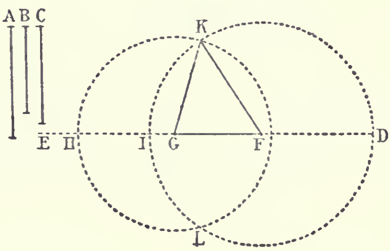
Donc, à plus forte raison,

$$BDC > BAC.$$

PROPOSITION 22.

Construire un triangle (fig. 22) dont les côtés soient égaux à trois lignes données A, B, C, *telles que la somme de deux quelconques d'entre elles soit plus grande que la troisième.*

Fig. 22.



Tirons une droite DE, terminée en D, indéfinie vers E. Prenons DF = A, FG = B, GH = C [pr. 3]. Décrivons du centre F, avec le rayon FD, le cercle DKL, et du centre G, avec le rayon GH, le cercle KLH, qui coupe le cercle DKL en K. Menons KF, KG; KFG sera le triangle demandé.

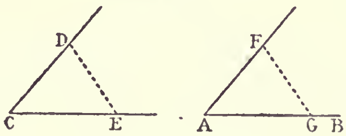
En effet, FD = FK [déf. 15]; or FD = A : donc aussi KF = A [ax. 1]. De même, puisque GK = GH et que GH = C, on a GK = C.

On a d'ailleurs aussi $FG = B$. Donc le triangle FGK a ses trois côtés égaux respectivement aux lignes données, A, B, C [1].

PROPOSITION 23.

En un point A *d'une droite donnée* AB (*fig.* 23), *construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné* DCE.

Fig. 23.



Sur CD et sur CE prenons arbitrairement deux points D, E, et menons DE. Construisons ensuite le triangle AFG tel que l'on ait

$$AF = CD, \quad AG = CE, \quad DE = FG \text{ [pr. 22]}.$$

On aura [pr. 8]

$$FAG = DCE.$$

PROPOSITION 24.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 24 *et* 25) *ont deux côtés égaux chacun à chacun*, $AB = DE$, $AC = DF$, *et l'angle compris par ces côtés inégal*, $BAC > EDF$, *le côté* BC, *opposé au plus grand angle, est plus grand que le côté* EF, *opposé au plus petit angle.*

Construisons sur DE, au point D, l'angle $EDG = BAC$ [pr. 23];

---

[1] Euclide a oublié de justifier la restriction contenue dans l'énoncé, que la somme de deux quelconques des côtés est plus grande que le troisième. Or il résulte de cette hypothèse que $DG > HG$, et que $HG >$ la différence GI entre DF et GF. Donc, d'une part, le point D est *extérieur* au cercle HKL, et, d'autre part, le point I est *intérieur* au même cercle. Donc le cercle DKL, ayant des points extérieurs et des points intérieurs au cercle HKL, coupera nécessairement ce dernier cercle en deux points.

faisons $DG = AC = DF$ [pr. 3]. [Prolongeons DF vers H, DG vers I (*fig.* 25) et] menons EG, FG [1].

Fig. 24.

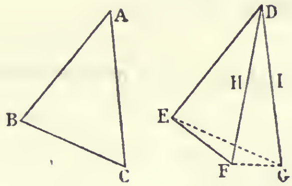
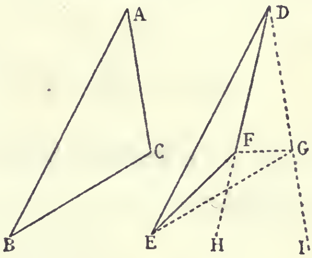


Fig. 25.



Puisqu'on a $AB = DE$, $AC = DG$, $BAC = EDG$, il en résulte [pr. 5] $BC = EG$.

Or on a $DG = DF$, d'où [pr. 5] $HFG = IGF$.

Par conséquent, $EFG > FGI$, et, comme $FGI > FGE$, on a, à plus forte raison, $EFG > FGE$.

Donc [pr. 19] EG ou $BC > EF$.

PROPOSITION 25.

Si deux triangles ABC, DEF (*fig.* 26) *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* $AB = DE$, $AC = DF$, *et le troisième côté inégal,* $BC > EF$, *l'angle* BAC, *opposé au plus grand côté, est plus grand que l'angle* EDF, *opposé au plus petit côté.*

Car, si l'on n'avait pas $BAC > EDF$, il faudrait que l'on eût ou $BAC = EDF$, ou $BAC < EDF$.

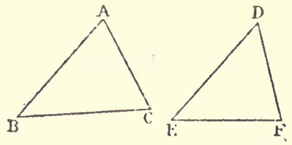
Dans le premier cas, il en résulterait [pr. 4] $BC = EF$; dans

---

[1] Nous avons réuni dans la même démonstration les deux cas que peut présenter la figure, et dont un seul (*fig.* 24) avait été considéré par Euclide. R. Simson remarque que l'on pourrait toujours ramener la figure à ce premier cas, en prenant pour DE le plus petit des deux côtés DE, DF; car alors les deux points G, F, étant sur un cercle décrit du centre D, et à l'intérieur duquel se trouve le point E, il est visible que E sera du même côté que D par rapport à la base FG.— Nous n'avons pas considéré le cas où EG passe par le point F, le théorème étant alors évident.

le second [pr. 24], $BC < EF$. Ces deux conséquences étant

Fig. 26.

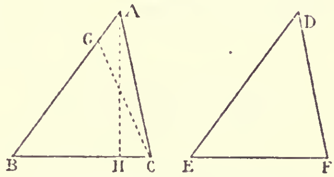


contraires à l'hypothèse $BC > EF$, on a donc nécessairement $BAC > EDF$.

PROPOSITION 26.

Si deux triangles ACB, DEF (*fig.* 27) *ont deux angles égaux chacun à chacun*, $ABC = DEF$, $ACB = EFD$, *et un côté égal qui soit ou adjacent* (Ier cas) *aux angles égaux* ($BC = EF$), *ou*

Fig. 27.



opposé (IIe cas) *à l'un d'eux* ($AB = DE$), *les deux autres côtés seront égaux chacun à chacun, et le troisième angle* BAC *sera égal au troisième* EDF.

Ier cas. — Si les côtés adjacents aux angles égaux, BC et EF, sont égaux, on a :

1° $AB = DE$. Car, si AB et DE étaient inégaux, soit, par exemple, $AB > DE$. Prenons alors $BG = ED$, et menons CG. Puisque

$$BG = ED, \quad BC = EF, \quad GBC = DEF,$$

il en résulte.

$$BCG = EFD \text{ [pr. 4]}$$

Or, par hypothèse,

$$BCA = EFD.$$

On aurait donc

$$BCA = BCG,$$

ce qui est impossible [ax. 9]. Donc AB et DE ne sauraient être inégaux.

2° Puisque

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad ABC = DEF,$$

on a [pr. 4]

$$AC = DF \quad \text{et} \quad BAC = EDF.$$

IIe cas. — Si les côtés opposés à l'un des angles égaux, AB et DE, sont égaux, alors on a :

1° BC = EF. Car, si BC et EF étaient inégaux, soit, par exemple, BC > EF. Prenons alors BH = EF, et menons AH. Puisque

$$BH = EF, \quad AB = DE, \quad ABC = DEF,$$

il en résulte

$$BHA = EFD \text{ [pr. 4]}.$$

Or, par hypothèse,

$$BCA = EFD.$$

On aurait donc

$$BHA = BCA,$$

ce qui est impossible [pr. 17]. Donc BC et EF ne sauraient être inégaux.

2° Puisque

$$BC = EF, \quad AB = DE, \quad ABC = DEF,$$

on a [pr. 4]

$$AC = DF, \quad \text{et} \quad BAC = EDF.$$

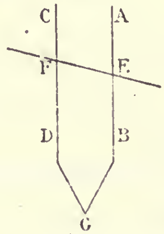
PROPOSITION 27.

Si deux droites AB, CD (*fig.* 28), *coupées par une troisième* EF, *font avec elle des angles* alternes-internes (¹) *égaux* AEF, EFD, *elles sont parallèles.*

(¹) Nous introduisons, pour plus de simplicité, dans les énoncés d'Euclide, les dénominations appliquées par les géomètres modernes aux divers couples d'angles formés par deux droites qui en rencontrent une troisième. Nous ne reproduisons pas ici les définitions de ces angles, qui se trouvent dans tous les Traités de Géométrie.

Car, si les droites AB, CD n'étaient pas parallèles, alors, en les prolongeant suffisamment dans un sens ou dans l'autre, elles finiraient par se rencontrer. Supposons, s'il est possible, que cette rencontre ait lieu en G. Dans le triangle EFG, on aurait

Fig. 28.

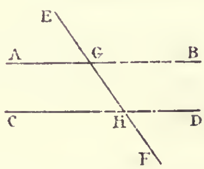


alors AEF > EFD [pr. 16], ce qui est contraire à l'hypothèse admise AEF = EFD. Donc AB et CD ne peuvent se rencontrer de ce côté. Par la même raison, ces lignes ne peuvent se rencontrer de l'autre côté. Donc [déf. 35] AB et CD sont parallèles.

PROPOSITION 28.

Si deux droites AB, CD (*fig.* 29), *coupées par une troisième* EF, *font avec elle :* 1° *ou deux angles correspondants égaux* EGB, GHD, 2° *ou deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires* BGH, GHD, *elles sont parallèles.*

Fig. 29.



1° Puisque EGB = GHD et que EGB = AGH [pr. 15], il en résulte AGH = GHD. Donc [pr. 27] AB et CD sont parallèles.

2° Puisque l'on a

$$BGH + GHD = 2 \text{ dr. [hypothèse]}$$

et

$$AGH + BGH = 2 \text{ dr. [pr. 13]},$$

il en résulte [ax. 1 et 10]

$$AGH + BGH = BGH + GHD.$$

En retranchant BGH de part et d'autre, il reste [ax. 3]

$$AGH = GHD.$$

Donc [pr. 27] AB et CD sont parallèles [1].

PROPOSITION 29.

Si deux droites parallèles AB, CD (*fig.* 29) *sont rencontrées par une troisième droite* EF, *elles feront avec celle-ci : 1° des angles alternes-internes égaux* AGH, GHD; 2° *des angles dirigés dans le même sens* (correspondants) *égaux* EGB, GHD; 3° *des angles intérieurs d'un même côté supplémentaires* BGH, GHD.

1° Si les angles AGH, GHD étaient inégaux, soit AGH > GHD. On aurait alors, en ajoutant de part et d'autre BGH [ax. 4],

$$AGH + BGH > BGH + GHD.$$

Or

$$AGH + BGH = 2 \text{ dr. [pr. 13]},$$

et par suite

$$BGH + GHD < 2 \text{ dr.}$$

---

[1] Toutes les propositions établies jusqu'ici se démontrent sans le secours de l'axiome 11. On pourrait encore joindre à ces propositions le théorème démontré par Legendre, que *la somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut surpasser deux angles droits* (*voir* Note VI, p. 80). Les théorèmes qui suivent s'appuient sur l'axiome 11. Il est aisé, d'après cela, de se rendre compte de l'ordre dans lequel Euclide a rangé ses propositions. Il a voulu séparer nettement toutes celles qui sont indépendantes de l'axiome 11, et celles qui lui sont subordonnées, afin sans doute que les objections qui pourraient s'élever contre ce nouveau principe n'atteignissent que les théorèmes qui en dépendent *nécessairement*, les vingt-huit premières propositions restant hors de cause.

Il s'ensuivrait donc [ax. 11] que AB et CD, prolongées, se rencontreraient et ne seraient pas parallèles [déf. 35], ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, AGH et GHD ne peuvent être inégaux. Donc $AGH = GHD$.

2° Puisque l'on a

$$AGH + GHD \quad \text{et} \quad AGH = EGB \text{ [pr. 15]},$$

il en résulte

$$EGB = GHD.$$

3° Puisque $EGB = GHD$, on a, en ajoutant BGH de part et d'autre [ax. 2],

$$EGB + BGH = BGH + GHD.$$

Or

$$EGB + BGH = 2 \text{ dr. [pr. 13]}.$$

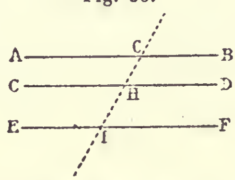
Donc aussi

$$BGH + GHD = 2 \text{ dr. } (^1).$$

PROPOSITION 30.

Deux droites AB, CD (*fig.* 30), *parallèles à une troisième* EF, *sont parallèles entre elles.*

Fig. 30.



Coupons ces trois droites par la droite GI. Puisque AB et EF sont parallèles, on a $AGI = GIF$ [pr. 29]. De même, puisque CD et EF sont parallèles, on a $GIF = GHD$. Donc $AGI = GHD$, et par suite AB et CD sont parallèles [pr. 27].

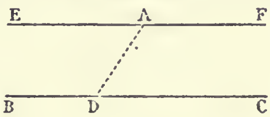
---

(1) Il eût été peut-être plus naturel de commencer par établir ce troisième cas, qui n'est qu'un autre énoncé de l'axiome 11, pour en déduire ensuite les deux autres.

PROPOSITION 31.

Par un point donné A (*fig.* 31) *mener une droite parallèle à une droite donnée* BC.

Fig. 31.

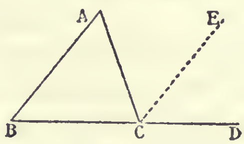


Sur BC prenons un point quelconque D, et menons AD. Construisons l'angle DAE = ADC [pr. 23], et prolongeons EA vers F. La ligne EF sera parallèle à BC [pr. 27] ([1]).

PROPOSITION 32.

Si l'on prolonge un côté BC (*fig.* 32) *d'un triangle* ABC, 1° *l'angle extérieur ainsi formé* ACD *est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents* CAB, ABC; 2° *la somme des trois angles* ABC, BCA, CAB *du triangle est égale à deux angles droits.*

Fig. 32.



1° Par le point C, menons CE parallèle à AB [pr. 31]. Les parallèles AB, CE étant coupées par AC, on a [pr. 29, 1°] BAC = ACE. Ces mêmes parallèles étant coupées par BD, on a [pr. 29, 2°] ABC = ECD. Donc [ax. 2]

$$BAC + ABC = ACE + ECD = ACD.$$

([1]) Cette proposition aurait été mieux placée avant la proposition 29. (*Voir* la Note relative à la proposition 28.)

2° Puisque $BAC + ABC = ACD$, on a, en ajoutant ACB de part et d'autre [ax. 2],

$$BAC + ABC + ACB = ACD + ACB.$$

Or

$$ACD + ACB = 2 \text{ dr. [pr. 13]}$$

Donc aussi

$$BAC + ABC + ACB = 2 \text{ dr.}$$

EXPOSITION DES PREMIERS PRINCIPES

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

§ 1.

La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la *solidité* ou de l'*invariabilité* des figures (¹).

Elle emprunte, en outre, à l'*expérience* un certain nombre de données que l'on appelle *axiomes*. — Nous verrons que les axiomes de la Géométrie peuvent se réduire à quatre.

§ 2.

On appelle *surface* la limite de deux portions de l'espace.

Nous nous élevons à l'idée abstraite de surface par la considération d'une enveloppe ou cloison matérielle, dont nous réduisons indéfiniment l'épaisseur.

La limite de deux portions de surface s'appelle *ligne*.

Deux surfaces qui se rencontrent se limitent réciproquement.

L'intersection de deux surfaces est donc une ligne.

On s'est élevé à l'idée abstraite de ligne, soit par la considération d'une tige très mince, soit par celle de la rencontre de deux cloisons, ou de la trace laissée sur la superficie d'un corps par le contact d'une autre surface.

La limite de deux portions de ligne s'appelle *point*.

Une ligne peut être limitée par sa rencontre avec une surface ou avec une autre ligne.

(¹) *Voir* Note I.

Ainsi l'intersection de deux lignes ou d'une surface et d'une ligne est un point.

L'intersection de trois surfaces est aussi un point.

L'idée de point est venue de la considération d'un corps, dont les dimensions étaient indéfiniment réduites.

§ 3.

Nous avons défini les mots *surface, ligne, point,* en partant de l'idée de surface pour arriver jusqu'au point.

On peut suivre l'ordre inverse, en introduisant plus explicitement l'idée de mouvement [1].

On dira alors, en partant de l'idée de *point,* comme idée primitive, qu'une ligne est l'ensemble des positions occupées successivement dans l'espace par un point qui se meut.

De même, on peut considérer une surface comme l'ensemble des positions occupées successivement par une ligne qui se déplace, et qui en même temps peut changer de forme.

Toutes ces idées peuvent être rappelées par les représentations matérielles qui leur ont primitivement donné naissance.

§ 4.

L'étude des lignes et des surfaces constitue l'objet de la Géométrie.

On donne le nom de *figure* à un ensemble quelconque de points, de lignes ou de surfaces, considéré comme invariable de forme.

Axiome I. — *Trois points suffisent, en général, pour fixer dans l'espace la position d'une figure.*

§ 5.

L'expérience nous apprend cependant que, lorsqu'une figure se meut en tournant autour de deux de ses points, supposés fixes,

---

[1] *Voir* Note II.

il y a un ensemble de points, situés sur une certaine ligne, qui restent immobiles pendant que les autres se déplacent.

Ces points sont disposés sur la route que suivrait un rayon lumineux pour passer de l'un des points fixes à l'autre (en supposant ces deux points situés dans un même milieu homogène).

La ligne qui contient tous ces points, et qui nous apparaît comme la trajectoire habituelle des rayons lumineux, s'appelle la *ligne droite*. Donc :

AXIOME II. — *Il existe une ligne, appelée* LIGNE DROITE, *dont la position dans l'espace est complètement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne s'applique exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs* (¹).

Ainsi, d'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite (²).

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue, quelque loin qu'on les prolonge au delà de ces deux points.

En d'autres termes, on admet qu'une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens, et qu'elle ne peut l'être que d'une seule manière.

§ 6.

Si, en joignant deux points d'une surface par une ligne droite, la partie de la droite comprise entre ces deux points se trouve d'un certain côté de la surface, on dit que la surface est *concave* de ce côté, ou *convexe* du côté opposé.

L'expérience nous montre certaines surfaces, comme celle des eaux tranquilles, qui ne sont concaves d'aucun côté, et sur lesquelles une ligne droite, menée entre deux de leurs points, s'applique dans toute son étendue.

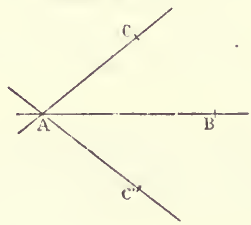
Une telle surface s'appelle une *surface plane* ou un *plan*.

(¹) *Voir* Note III.

(²) C'est, sous une autre forme, l'axiome 12 d'Euclide.

Soient A, B, C (*fig.* 33) trois points d'une surface plane. Si l'on joint le point C à un point quelconque A de la droite AB, la droite CA sera, ainsi que la droite AB, comprise tout entière

Fig. 33.



dans la surface. Si l'on fait mouvoir le point A tout le long de la droite AB, la ligne CA prendra une infinité de positions, qui par leur ensemble engendreront la surface.

Ainsi la surface plane peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite tournant autour d'un point fixe, et glissant le long d'une droite fixe qui ne passe pas par ce point.

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points A et B, ou, ce qui revient au même, autour de la droite AB comme charnière, jusqu'à ce qu'un point C du plan, non situé sur la droite AB, vienne rencontrer l'ancienne position du plan en un point C', situé de l'autre côté de AB par rapport à C, l'ancienne position pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de C'A le long de AB, et la nouvelle par le mouvement de CA le long de la même droite AB, il est clair que ces deux positions ne formeront qu'une seule et même surface, puisque leurs lignes génératrices coïncident dans chaque position; en sorte que la surface *retournée* coïncidera avec sa position primitive.

En général, si l'on donne à deux plans trois points communs, non en ligne droite, le même raisonnement fait voir que les deux plans coïncideront dans toute leur étendue. Donc :

Axiome III. — *Il existe une surface telle qu'une ligne droite, qui passe par deux quelconques de ses points, y est renfermée tout entière, et qu'une portion quelconque de cette surface peut être appliquée exactement sur la surface elle-même, soit directement, soit après qu'on l'a retournée, en lui faisant faire* *une demi-révolution autour de deux de ses points. Cette surface est le* PLAN.

Par trois points non en ligne droite, ou par une droite et un point situé hors de cette droite, ou encore, par deux droites qui se coupent, on peut toujours faire passer un plan, et l'on n'en peut faire passer qu'un.

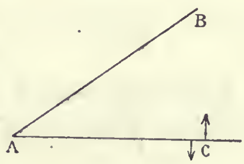
§ 7.

Lorsque deux droites se rencontrent, on dit qu'elles forment un *angle*.

On peut se représenter un angle comme la quantité plus ou moins grande dont il faut faire tourner une droite autour d'un de ses points pour la faire passer d'une position à une autre, en supposant que le mouvement s'accomplisse dans le plan mené par les deux positions.

On peut passer de la position AB (*fig.* 34) à la position AC, en

Fig. 34.



tournant dans un sens ou dans l'autre : l'angle décrit n'est pas généralement le même dans les deux cas.

§ 8.

Pour aller d'un point A à un autre point B, en suivant une ligne droite, il faut connaître : 1° la *direction* de cette droite; 2° la *longueur* de la portion de cette droite comprise entre les deux points.

Pour déterminer la direction d'une droite, on commence par imaginer un plan passant par les deux points A, B, et dans ce plan une droite fixe AC, menée par le point A. La direction de la droite AB sera connue, si l'on donne l'*angle* CAB qu'elle fait avec la droite fixe AC, c'est-à-dire la quantité dont il faut tourner, *dans le plan* ABC, suivant un sens convenu, pour passer de la position AC à la position AB.

Si l'on donne ensuite la *distance* AB, c'est-à-dire la quantité dont on doit s'avancer sur la droite AB, on aura enfin la position du point B.

§ 9.

Il est facile de s'expliquer pourquoi l'on a pris la ligne droite pour mesurer les distances, le plan pour mesurer les angles.

1° C'est que d'abord, par deux points donnés, on peut toujours mener une ligne droite, de même que, par deux droites concourantes données, on peut toujours faire passer un plan. — Il pourrait n'en plus être de même si l'on prenait une ligne courbe ou une surface conique de forme donnée.

2° En second lieu, toute portion de ligne droite ou de plan peut être superposée à une ligne droite ou à un plan, de sorte que l'on peut constater immédiatement l'égalité ou l'inégalité de deux distances ou de deux angles.

§ 10.

Lorsqu'une droite, après avoir tourné toujours dans le même sens, revient à son ancienne position, on dit qu'elle a accompli un *tour* entier.

Lorsque la droite vient se placer sur son prolongement, on dit qu'elle a fait un *demi-tour*.

Lorsqu'elle s'arrête de manière à former avec sa première position et le prolongement de celle-ci deux angles égaux, elle a décrit un *quart de tour* ou *angle droit,* et sa nouvelle position est dite *perpendiculaire* à la première.

Le prolongement de la perpendiculaire est aussi une perpendiculaire.

La première droite est aussi perpendiculaire à la seconde.

Tous les angles droits sont égaux.

On a pris pour unité de mesure angulaire le quart de tour ou angle droit [1].

---

[1] *Voir* Note V.

§ 11.

On appelle *cercle* une ligne courbe tracée sur un plan, et dont tous les points sont à la même distance d'un point fixe, appelé *centre*.

Si l'on fait tourner une droite dans un plan autour d'un de ses points, chacun des autres points de la droite décrira dans ce mouvement un cercle.

La distance constante d'un point du cercle au centre s'appelle *rayon*.

Si l'on fait tourner un cercle dans son plan autour de son centre, le cercle ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Un *diamètre* est une droite passant par le centre, et terminée de part et d'autre au cercle.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour de son centre et dans son plan, de telle sorte qu'un diamètre donné revienne coïncider avec son ancienne position, on voit que l'une des deux parties du cercle viendra coïncider avec l'autre. Donc un diamètre divise le cercle et la portion de plan qu'il entoure, chacun, en deux parties égales.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour d'un de ses diamètres, jusqu'à ce que son plan revienne coïncider, *par retournement,* avec son ancienne position, le cercle coïncidera encore avec lui-même, ce qui montre que les deux moitiés du cercle peuvent se superposer de deux manières différentes.

Deux cercles de même rayon coïncident nécessairement, dès que l'on fait coïncider leurs plans et leurs centres.

§ 12.

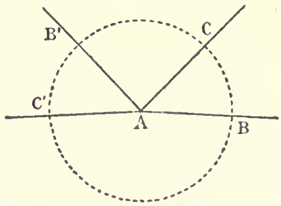
Tandis qu'une droite tourne autour d'un de ses points, supposé fixe, considérons le cercle décrit par un quelconque des points mobiles de la droite.

Pendant que la droite accomplit un tour entier, elle parcourt le cercle entier.

Lorsqu'elle fait un demi-tour, elle parcourt le demi-cercle.

Si on la fait tourner d'angles égaux à partir de deux positions AB, AB′ (*fig.* 35), les arcs décrits BC, B′C′ seront égaux. — Car, si l'on fait tourner le cercle autour de son centre jusqu'à ce que AB′ vienne se placer sur AB, l'égalité des angles fait voir

Fig. 35.



que AC′ tombera sur AC, et par suite les arcs BC, B′C′ devront coïncider.

Si un angle est égal à la somme ou à la différence de deux autres, l'arc correspondant au premier angle sera égal à la somme ou à la différence des arcs correspondants aux deux autres angles.

De là résulte que :

1° Un angle droit comprend entre ses côtés un quart de cercle ou *quadrant;*

2° Si un angle est multiplié par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est multiplié par le même nombre entier;

3° Si un angle est divisé par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est divisé par le même nombre entier;

4° Si deux angles ont entre eux un rapport quelconque, les arcs correspondants ont entre eux le même rapport.

Donc l'arc compris entre les côtés d'un angle varie proportionnellement à cet angle [1].

Si l'on veut donc comparer un angle à son unité, pour arriver à sa représentation numérique, il revient au même de comparer l'arc correspondant à cet angle avec l'arc correspondant à l'unité d'angle, et que l'on prend naturellement pour unité d'arc.

---

[1] En d'autres termes, si l'on prend pour unité d'arc l'arc correspondant à l'unité d'angle, en exécutant les opérations nécessaires pour l'évaluation numérique de l'angle, on se trouvera exécuter en même temps les opérations qui conduisent à l'évaluation numérique de l'arc, et l'on arrivera de part et d'autre au même résultat.

L'unité d'angle étant l'angle droit, l'unité d'arc sera le quadrant.

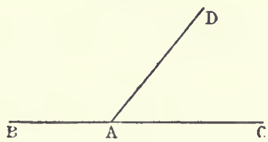
On exprime cette correspondance en disant qu'un *angle au centre* a pour *mesure* l'arc compris entre ses côtés.

L'avantage de la substitution des arcs de cercle aux angles consiste à offrir une représentation plus facile à saisir, et à faciliter les opérations graphiques que l'on doit exécuter sur les angles.

§ 13.

Une droite AD (*fig.* 36), qui en rencontre une autre, fait avec les deux parties AB, AC de celle-ci deux angles dont la somme est l'angle CAB = un demi-tour ou deux angles droits.

Fig. 36.



Ces deux angles sont dits *supplémentaires,* et chacun d'eux est le *supplément* de l'autre.

Si l'on ajoute deux angles supplémentaires, il est clair que leurs côtés non communs seront en ligne droite.

Si deux droites se traversent mutuellement, les angles opposés par le sommet sont égaux, comme ayant même supplément. — On pourrait encore démontrer cette égalité, en retournant la figure de manière que chacun des côtés de l'angle supplémentaire commun vînt coïncider avec l'ancienne position de l'autre côté, auquel cas les deux angles en question seraient amenés à coïncider [1].

On peut encore énoncer la même proposition, en disant que les deux arcs de cercle compris entre deux rayons et entre les prolongements de ces rayons sont égaux entre eux.

---

[1] Nous ferons un continuel usage de ce procédé de *retournement* toutes les fois qu'il s'agira de démontrer l'égalité de deux parties d'une même figure. On peut présenter ce procédé autrement, en concevant que l'on plie en deux la figure autour de son axe de symétrie, qui est ici la bissectrice de l'angle supplémentaire.

§ 14.

Deux droites quelconques, rencontrées par une troisième, forment avec celle-ci huit angles, égaux deux à deux et supplémentaires deux à deux, et auxquels, pour les désigner plus facilement, on a donné les noms de *correspondants*, d'*alternes-internes*, d'*internes d'un même côté*, etc.

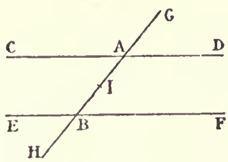
Si l'on suppose qu'une quelconque des cinq relations suivantes ait lieu :

1° Angles correspondants } égaux,
2° ...... alternes-internes
3° ...... alternes-externes
4° Angles internes d'un même côté } supplémentaires,
5° ...... externes..............

les quatre autres relations ont nécessairement lieu.

Lorsque ces cinq relations existent, les droites CD, EF ne peuvent avoir aucun point commun (*fig.* 37). Concevons, en effet,

Fig. 37.



que la moitié de gauche de la figure soit rendue mobile, et qu'on lui fasse faire un demi-tour, dans son plan, autour du milieu I de la droite AB. Lorsque le point A sera arrivé en B et le point B en A, on voit aisément que les deux moitiés de la figure coïncideront dans tous leurs points, quelque loin que l'on suppose les droites prolongées. Il ne saurait donc y avoir un point de concours des droites dans une des moitiés de la figure, sans qu'il en existât un autre dans l'autre moitié; et comme l'existence simultanée de deux points de rencontre est contraire à la nature de la ligne droite, il s'ensuit que les deux droites n'ont aucun point commun.

Donc, si l'on fait glisser un angle, de grandeur invariable, le long d'un de ses côtés, supposé fixe, le côté mobile se détache entièrement de son ancienne position, et ne conserve plus avec elle aucun point commun.

Deux droites situées dans le même plan, et ne pouvant se rencontrer, si loin qu'on les prolonge l'une et l'autre, sont dites *parallèles*.

Ainsi deux droites qui forment avec une troisième des angles satisfaisant à l'une des cinq conditions ci-dessus sont parallèles.

En particulier, deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

En d'autres termes, par un point donné hors d'une droite, on ne peut pas mener plus d'une perpendiculaire à cette droite.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, par un point pris hors d'une droite, on peut toujours mener une parallèle à cette droite (¹).

§ 15.

La parallèle étant menée, si on la fait tourner tant soit peu autour de l'un de ses points, elle finira par atteindre la première ligne, lorsqu'on les prolongera suffisamment l'une et l'autre; de sorte que la position de parallélisme est *unique*.

C'est là un nouveau principe, qui n'est pas renfermé dans les axiomes précédents, et que nous énoncerons ainsi :

Axiome IV. — *Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

Il résulte de là que :

1° Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles;

2° Deux droites parallèles étant rencontrées par une sécante, les angles formés satisfont aux cinq relations du paragraphe précédent.

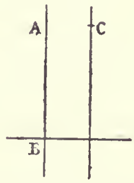
En particulier, toute perpendiculaire à l'une des parallèles est perpendiculaire à l'autre.

Donc, par un point donné hors d'une droite, on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite. Car, si AB (*fig.* 38)

(¹) *Voir* Note VII.

est une perpendiculaire menée à la droite donnée en un quelconque de ses points, la parallèle à AB, menée par le point donné C,

Fig. 38.



sera la perpendiculaire demandée. Nous avons d'ailleurs vu, dans le paragraphe précédent, que cette perpendiculaire est la seule qui puisse être abaissée du point C sur la droite donnée.

§ 16.

Deux angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux. On le voit en les comparant à l'angle formé par l'intersection de leurs côtés prolongés.

Réciproquement, deux angles étant égaux et leurs côtés dirigés dans le même sens, si leurs premiers côtés sont parallèles, leurs seconds côtés seront aussi parallèles.

Il résulte de là que, étant donné un système quelconque de droites, si l'on transporte ce système dans son plan, de manière qu'une des droites du système reste constamment parallèle à son ancienne position, chacune des autres droites restera également parallèle à son ancienne position.

On dit, dans ce cas, que le système a subi un *mouvement de translation parallèlement à lui-même*.

Plus généralement, si les deux côtés d'un angle tournent, dans le même sens, chacun d'une même quantité angulaire, autour de deux quelconques de leurs points, la grandeur de l'angle n'aura pas changé. Et réciproquement, si l'on transporte un angle dans son plan, sans le retourner, chacun des côtés de l'angle fera le même angle avec son ancienne position.

En particulier, deux angles qui ont les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.

Si l'on fait tourner un système de droites dans un plan, autour d'un point quelconque qui lui soit invariablement lié, toutes les droites feront avec leurs anciennes positions respectives des angles égaux, dont la valeur commune est dite l'*angle de rotation* du système.

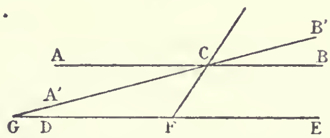
§ 17.

Deux droites concourantes forment avec une troisième des angles alternes-internes inégaux, dont le plus petit est celui qui est dirigé vers le point de concours.

En d'autres termes, si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur ainsi formé est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

Cette proposition est presque évidente, si l'on s'appuie sur l'axiome IV. En effet, si, de la position de parallélisme, on fait passer la droite AB (*fig.* 39) à la position A'B', en la faisant tour-

Fig. 39.



ner autour du point C, de manière qu'elle rencontre la droite DE en G, il est clair que, dans ce mouvement, l'angle BCF aura augmenté, tandis que son alterne-interne CFD sera resté constant. Donc, puisqu'on avait, avant le mouvement, BCF $=$ CFD, on aura, après le mouvement, B'CF $>$ CFD. De même, A'CF $<$ CFE.

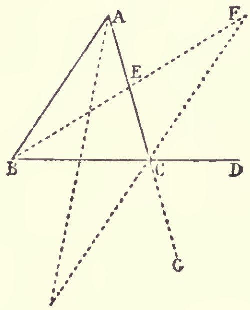
On voit en même temps que la valeur commune des différences B'CF — CFD, CFE — A'CF est égale à l'angle G que font entre elles les droites A'B' et DE. Donc l'angle extérieur, formé par le prolongement d'un côté d'un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents, et la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

§ 18.

Si la manière précédente d'établir le théorème sur l'inégalité des angles alternes-internes formés par des droites concourantes est la plus directe et la plus simple, on ne peut nier cependant qu'elle ne s'appuie sur un axiome dont ce théorème ne dépend pas nécessairement, et il semble alors plus logique de l'établir sans le secours de cet axiome. C'est ce qu'a fait Euclide [pr. 16], et sa démonstration peut être présentée comme il suit :

Soit ABC (*fig.* 40) le triangle donné. Je dis que l'angle ACD est plus grand que son alterne-interne BAC. En effet, joignons

Fig. 40.



B au milieu E de la droite AC, et faisons tourner le triangle EBA autour du point E, jusqu'à ce que EA vienne s'appliquer sur son prolongement EC, et par suite le point A sur le point C. L'autre côté EB de l'angle BEA viendra s'appliquer sur son prolongement. La ligne BA partira donc du point C pour aller rencontrer BEF dans l'intérieur de l'angle ACD. Donc l'angle ECF ou BAE sera contenu dans l'angle ACD. Donc enfin l'angle A est moindre que son alterne-interne ACD.

Par la même raison, les deux droites AB, AC étant coupées par BC, l'angle ABC sera moindre que son alterne-interne BCG, ou que son correspondant ACD = BCG.

Donc l'angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

En d'autres termes, dans un triangle, chaque angle est moindre que le supplément de l'un quelconque des deux autres.

Donc la somme de deux quelconques des angles d'un triangle est moindre que deux angles droits.

Tout triangle a au moins deux angles aigus.

Deux droites partant d'un même point ne peuvent avoir une perpendiculaire commune.

Si l'on mène, d'un même point à une droite donnée, une perpendiculaire et une oblique, l'oblique fera un angle aigu avec la partie de la droite qui va du pied de l'oblique au pied de la perpendiculaire.

§ 19.

Après avoir établi ces inégalités indépendamment du *quatrième axiome,* on démontrera, comme Euclide [pr. 32], les théorèmes d'égalité fondés sur cet axiome.

Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur est égal à la somme des deux intérieurs non adjacents.

La somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

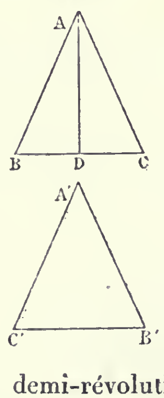
Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Deux angles d'un triangle, étant donnés, déterminent le troisième.

§ 20.

Du triangle isoscèle. — Soit ABC (*fig.* 41) un triangle isoscèle, dans lequel AB = AC. Retournons le plan de ce triangle,

Fig. 41.



en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice AD de l'angle A; ou, ce qui revient au même, plions la figure en deux, en faisant tourner une des moitiés autour de AD comme charnière. On voit alors que les deux moitiés de la figure se recouvrent parfaitement.

Si l'on ne veut pas d'abord introduire la bissectrice, on commencera par faire voir que le triangle retourné A′B′C′ peut se placer sur sa première position ABC. Alors la bissectrice de l'angle C′B′A′ coïncide avec celle de l'angle BAC, le milieu de C′B′ avec le milieu de BC, etc. Donc :

Théorème. — Dans un triangle isoscèle : 1° les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ; 2° la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base ; 3° elle partage cette base en deux parties égales.

Autre énoncé. — Si d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et deux obliques égales entre elles : 1° ces obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire ; 2° elles sont également inclinées sur la perpendiculaire ; 3° elles sont également inclinées sur la base donnée.

Donc tout point à égale distance des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.

Si donc chacun des deux points A et B de la droite AB (*fig.* 43) est équidistant des extrémités C et C′ de la droite CC′, AB sera perpendiculaire sur le milieu de CC′.

Autre énoncé. — Si l'on joint, dans un cercle, le centre aux deux extrémités d'une corde : 1° les deux rayons feront avec la corde des angles égaux ; 2° la bissectrice de l'angle des deux rayons (laquelle est aussi la bissectrice de l'arc) est perpendiculaire à la corde ; 3° elle partage cette corde en deux parties égales.

Donc, si deux cercles ont deux points communs, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

Remarque. — La bissectrice de l'angle A (*fig.* 41) satisfait à quatre conditions :

1° Elle passe au point A ;

2° Elle partage l'angle A en deux parties égales ;

3° Elle passe au milieu D de BC ;

4° Elle est perpendiculaire à BC.

Or deux de ces quatre conditions, combinées convenablement, déterminent complètement la droite AD. De là résultent autant de réciproques du théorème précédent. Ainsi, dans un triangle isoscèle :

La droite qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à cette base, et bissectrice de l'angle au sommet;

La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base partage cette base et l'angle au sommet, chacun en deux parties égales;

La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base passe au sommet, et partage l'angle au sommet en deux parties égales.

On peut énoncer encore ces réciproques comme il suit :

Dans un cercle, la droite qui joint le centre au milieu d'une corde est perpendiculaire à la corde et bissectrice de l'arc;

La perpendiculaire abaissée du centre sur une corde est bissectrice de la corde et de l'arc;

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc.

§ 21.

Considérons maintenant un triangle qui a deux angles égaux, ces deux angles étant nécessairement aigus.

En retournant le triangle et l'appliquant sur son ancienne position; ou encore, en pliant la figure autour de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base ([1]), on voit que les deux moitiés de la figure coïncident l'une avec l'autre; par conséquent, le *triangle est isoscèle.*

Autre énoncé. — Deux obliques également inclinées sur la base sont égales, et par suite s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Si deux droites, coupées par une troisième, forment avec celle-ci des angles $\left\{\begin{array}{l}\text{internes}\\ \text{externes}\end{array}\right\}$ d'un même côté égaux, ou des angles $\left\{\begin{array}{l}\text{correspondants}\\ \text{alternes-internes}\\ \text{alternes-externes}\end{array}\right\}$ supplémentaires, les trois droites forment un triangle isoscèle.

([1]) Cette perpendiculaire rencontre les deux côtés *au-dessus* de la base (axiome IV et corollaires).

Dans ce cas, on désigne souvent les deux premières droites sous le nom d'*anti-parallèles* par rapport à la troisième.

§ 22.

Soit enfin un triangle, dans lequel le sommet se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de la base.

En retournant la figure, ou en la pliant autour de la perpendiculaire, on voit que le *triangle est isoscèle.*

Ainsi un triangle dans lequel la perpendiculaire élevée au milieu de la base passe par le sommet est isoscèle.

Autre énoncé. — Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est équidistant des deux extrémités de cette droite.

Autre énoncé. — Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales.

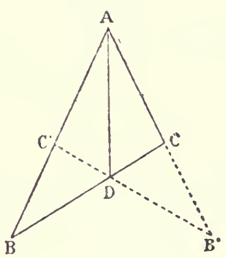
De cette proposition, jointe à sa réciproque du § 20, il résulte que la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités de cette droite.

En d'autres termes, c'est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par les extrémités de la droite.

§ 23.

Inégalités dans un triangle quelconque. — Si deux côtés AB,

Fig. 42.



AC (*fig.* 42) d'un triangle sont inégaux, au plus grand côté AB est opposé un plus grand angle C. (Voir *Euclide,* I, 18.)

Autrement, en retournant le triangle et le placant sur son ancienne position (ou, ce qui revient au même, en pliant le triangle autour de la bissectrice AD de l'angle au sommet), on forme le triangle BDC', dans lequel l'angle AC'D, extérieur au triangle, est plus grand que l'angle intérieur non adjacent B.

Réciproquement, si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté. (*Euclide*, I, 19.)

§ 24.

Dans un triangle, un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres. (*Euclide*, I, 20.)

Il s'ensuit que, dans un triangle, un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.

Corollaires. — Dans un polygone, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.

En d'autres termes, une ligne droite est plus courte qu'une ligne polygonale ayant les mêmes extrémités.

Un contour polygonal convexe est plus court qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe en aboutissant aux mêmes extrémités.

Un contour polygonal fermé et convexe est moindre qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe de toutes parts [1].

§ 25.

Si d'un point on mène à une droite une perpendiculaire et diverses obliques :

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;

2° Si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.

Autre énoncé. — Si la hauteur d'un triangle ne tombe pas au milieu de la base, au plus grand segment est adjacent un plus grand côté.

---

[1] Pour la comparaison des longueurs curvilignes aux longueurs rectilignes, *voir* Note VIII.

Pour démontrer cette proposition , si les obliques sont de côtés différents de la perpendiculaire, on compare l'une d'elles à une oblique égale à l'autre et menée du même côté de la perpendiculaire que la première. Le triangle formé par les deux obliques a alors un angle obtus, opposé à l'oblique la plus éloignée; donc celle-ci est la plus longue.

On peut encore énoncer cette proposition ainsi :

Tout point hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est plus rapproché de celle des deux extrémités de la droite qui est située du même côté que lui par rapport à la perpendiculaire.

§ 26.

Réciproquement, dans un triangle non isoscèle, la *hauteur* est plus rapprochée du petit côté.

Autre énoncé. — De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Tout point inégalement distant des deux extrémités d'une droite est hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite, et il est du même côté de cette perpendiculaire que celle des extrémités de la droite dont il est le plus rapproché.

§ 27.

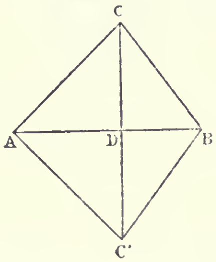
Cas d'égalité des triangles. — 1° Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. (*Euclide,* I, 4.)

2° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. La démonstration donnée par Legendre (liv. I, pr. VII) est plus simple que celle d'Euclide (I, 26, Ier cas) (1).

(1) Dans le IIe cas, où le côté égal est *opposé* à l'un des angles égaux, la démonstration d'Euclide a l'avantage d'être indépendante de l'axiome des parallèles.

3° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. — Adossons les deux triangles (*fig.* 43) de manière que leurs sommets C, C′ se trouvent de côtés différents de la base commune AB. Chacun des points A, B étant équidistant des points C et C′, la ligne AB est perpendiculaire sur le milieu de CC′. Si donc on replie la figure autour de AB, le point C′ tombera en C.

Fig. 43.



Autrement, la perpendiculaire AB sur la base du triangle isoscèle ACC′ étant bissectrice de l'angle au sommet, on a $CAB = BAC'$, ce qui ramène au premier cas d'égalité.

On peut dire encore que, les triangles CAC′, CBC′ étant isoscèles, on a l'angle $ACC' = AC'C$, l'angle $BCC' = BC'C$, d'où $ACC' \pm BCC' = AC'C \pm BC'C$, c'est-à-dire $ACB = AC'B$, etc.

§ 28.

Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés de même nom égaux chacun à chacun.

1° Si ce sont les deux côtés de l'angle droit, on est dans le premier cas du paragraphe précédent.

2° Si ce sont l'hypoténuse et un autre côté, on adosse les deux triangles rectangles de manière à former un triangle isoscèle, que sa *hauteur* partage en deux triangles égaux.

Cette dernière proposition est un cas particulier de la suivante :

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal.

§ 29.

Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, au plus grand angle est opposé un plus grand côté. (*Euclide,* I, 24.)

Réciproquement, si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième inégal, au plus grand côté est opposé un plus grand angle. (*Euclide*, I, 25.)

APPENDICE.

NOTE I.

Du rôle de l'expérience dans les Sciences exactes.

I

La plupart des phénomènes qui se passent sous nos yeux ne sont pas susceptibles d'une détermination *exacte*, et, lorsqu'ils se reproduisent, nous n'avons aucun moyen de nous assurer de leur parfaite identité. Il en est cependant — et ce sont naturellement les plus simples — pour lesquels la détermination est possible avec une approximation et une précision assez grandes pour que l'incertitude que nous laissons subsister soit pour nous sans inconvénient.

Quand la comparaison exacte est possible, on peut procéder à l'étude des lois de la transformation d'un phénomène dans un autre, et si ces lois sont assez simples pour que nous réussissions à les reconnaître, leur ensemble constituera l'objet d'une *science exacte*.

La construction d'une telle science se compose essentiellement de deux parties distinctes : l'une, qui est fondée sur l'observation et l'expérience, consiste à rassembler des faits et à en conclure par induction les lois et les principes qui serviront de base à la science; l'autre, qui n'est qu'une branche de la Logique générale, s'occupe de combiner ces principes fondamentaux, de manière à déduire la représentation des faits observés et à prédire en outre des faits nouveaux.

L'observation des faits ne peut, en général, avoir lieu avec une rigoureuse exactitude, et n'est jamais complète. Rien ne peut donc nous garantir *a priori* que les lois fournies par l'induction seront toutes vraies, ni qu'elles seront suffisantes.

On reconnaîtra leur fausseté lorsque, combinées par les procédés logiques, elles aboutiront à des conséquences contradictoires, ou lorsque les faits nouveaux qu'elles conduiraient à prévoir seront en désaccord avec la réalité objective.

Il peut se faire, d'autre part, que les lois admises ne soient pas toutes distinctes et indépendantes les unes des autres, et que quelques-unes d'entre elles fassent partie des conséquences que l'on peut tirer de la combinaison des autres.

On voit ainsi quel est le rôle, dans l'établissement des principes, de la partie de la science qui s'occupe de leur combinaison, abstraction faite de leur origine expérimentale et des rapports de leurs conséquences avec les faits réels. C'est elle qui doit constater d'abord si les principes sont compatibles entre eux, et ensuite s'ils sont irréductibles à un moindre nombre. Une science fondée sur des principes qui satisfont à ces conditions est absolument vraie, au point de vue rationnel et abstrait, quand même elle ne se trouverait pas conforme aux faits réels qu'elle était destinée à représenter. C'est, dans ce cas, à la partie expérimentale et inductive qu'il faut s'en prendre; ce sont les hypothèses fondamentales qu'il faut changer. La partie purement logique, quoique devenue inutile, était irréprochable.

Cette partie logique des sciences exactes constitue ce qu'on appelle les *Mathématiques* proprement dites. Celles-ci se divisent à leur tour en *Mathématiques pures,* contenant les théories logiques applicables à l'étude de toutes les classes de faits indistinctement, et en *Mathématiques appliquées,* traitant de l'application de ces théories générales à des classes particulières de faits, et des procédés spéciaux qui s'adaptent le mieux à chacune de ces classes.

II.

On donne le nom d'*opération* à l'acte qui transforme un phénomène dans un autre, de sorte qu'à une succession de phénomènes correspond une combinaison d'opérations.

Pour appliquer la Logique à la combinaison des opérations, il n'est nullement nécessaire de connaître leur sens réel et la manière dont elles s'exécutent. Il suffit d'avoir constaté certaines propriétés abstraites de ces opérations, auxquelles on pourrait donner le nom de *propriétés combinatoires* (1).

On peut construire une théorie abstraite des opérations fondée uniquement sur la considération de ces propriétés, et comprenant ainsi comme cas particulier l'Algèbre ordinaire.

Un nombre étant la loi de formation d'une quantité par l'addition d'unités

(1) Pour en donner un exemple, la théorie de la multiplication algébrique repose tout entière sur les propriétés exprimées par les égalités suivantes :

1° Pour $a = a'$, $b = b'$, on a $a.b = a'.b'$ (*uniformité*);

2° $(a + b).c = a.c + b.c$ (propriété *distributive*);

3° $a.b = b.a$ (propriété *commutative*);

4° $(a.b).c = a.(b.c)$ (propriété *associative*);

5° $a \times 0 = 0$;

6° $a \times 1 = a$.

égales, l'Arithmétique n'est autre chose que la théorie abstraite de la combinaison de cette sorte d'opérations.

Les opérations peuvent être simples, comme le sont les opérations fondamentales de l'Algèbre; elles jouissent alors de propriétés simples, et la théorie de leur combinaison peut recevoir un grand développement. D'autres fois, elles sont d'une nature plus complexe : telles sont les constructions géométriques, dont la combinaison se fait le plus souvent d'après des lois spéciales pour chaque cas particulier, sans qu'on puisse la soumettre à des procédés généraux.

Les opérations complexes peuvent généralement se ramener aux opérations simples. C'est cette décomposition d'opérations dans leurs éléments qui caractérise les théories dites *analytiques* (Géométrie analytique, Mécanique analytique, etc.). On donne le nom de *synthétiques* aux théories où l'on emploie immédiatement les opérations complexes.

La différence essentielle entre les théories analytiques et les théories synthétiques tient ainsi à ce que, dans les premières, les opérations ont des propriétés simples, qui permettent d'établir des procédés généraux pour leur combinaison, et fournissent des méthodes régulières et directes pour la solution des problèmes. Dans les théories synthétiques, au contraire, la complication et la variété plus grandes des opérations s'opposent à la formation de règles simples pour leur application, et la solution, tout en exigeant moins d'intermédiaires, est d'ordinaire le résultat d'un tâtonnement, que l'exercice, bien plus que les méthodes générales, peut mettre en mesure d'abréger.

III.

Les grandeurs se divisent en grandeurs *discrètes* ou *numériques*, et en grandeurs *concrètes* ou *continues*.

Les grandeurs discrètes se composent d'individus considérés comme identiques par rapport à la propriété d'après laquelle est dénommée l'espèce de l'*unité,* qui est aussi l'espèce de la quantité. La quantité se forme par la *répétition* ou *multiplication* de l'unité. La loi qui préside à cette opération s'appelle un *nombre*. Une quantité discrète est complètement connue quand on donne son espèce et son nombre.

La théorie mathématique des quantités discrètes ne s'occupe que des nombres qui les représentent, indépendamment de leur espèce. Les nombres pouvant être définis et comparés avec une exactitude parfaite, leur théorie se présente immédiatement avec toute sa rigueur, et l'Arithmétique des nombres entiers forme la branche la plus simple des Mathématiques pures.

Nous n'entreprendrons pas ici d'examiner quelle a été la part de l'expérience dans la formation de l'Arithmétique, tant élémentaire que supérieure. Nous remarquerons seulement que, si l'expérience, c'est-à-dire l'examen des résultats obtenus en calculant sur des exemples particuliers, a été souvent un auxiliaire puissant dans la recherche, par induction, des propriétés des nombres les plus cachées, elle joue toutefois, comme base des principes et des démonstrations, un rôle des plus restreints, si même elle y intervient en quoi que ce soit.

Les quantités concrètes se forment par accroissement continu (par addition). Elles sont considérées comme étant de même nature dans toutes leurs parties, relativement aux propriétés qu'exprime leur dénomination.

Celles que nous avons sous les yeux ne sont pas susceptibles d'être définies et comparées avec une complète exactitude, comme l'étaient les quantités discrètes, et cela tient à la fois à l'indécision de leurs limites et à l'imperfection de nos sens et de nos moyens d'observation. On ne peut donc les soumettre directement à une théorie mathématique, et l'on est forcé de remplacer leur étude par celle de grandeurs idéales, définies par les propriétés dont nos moyens de mesure plus ou moins grossiers nous permettent de constater approximativement l'existence dans les objets matériels.

Ainsi l'étude de l'étendue des corps réels, dont la forme ne peut être parfaitement définie ni parfaitement observée, doit être précédée de l'étude abstraite de corps idéaux, de formes rigoureusement déterminées à l'aide de procédés de mesure complètement exacts, et cette dernière étude se ramène elle-même à celle de figures privées d'une ou de deux de leurs dimensions, et finalement à la considération du point privé de toute étendue.

De même, la science du mouvement physique prend pour base, ou, si l'on veut, pour canevas, la Mécanique abstraite, qui aux hypothèses de la Géométrie en ajoute certaines autres, suggérées plus ou moins directement par l'expérience; elle opère ainsi sur des corps géométriques, aux propriétés desquels elle ajoute l'idée de *masse*, et qui sont soumis à des causes de mouvement appelées *forces*, définies par l'effet qu'elles produisent ou tendent à produire en vertu des lois admises. Aux diverses branches de la Physique des corps réels correspondent des branches spéciales de la Mécanique abstraite, appuyées sur de nouvelles hypothèses, que l'on choisit de manière à pouvoir les traiter par les méthodes mathématiques, et à en déduire des résultats aussi voisins que possible des phénomènes que l'on veut représenter.

Il importe essentiellement, dans ces sciences rationnelles et abstraites, de distinguer les hypothèses, considérées en elles-mêmes, lesquelles sont *a priori* essentiellement arbitraires, à la seule condition de n'être pas contradictoires entre elles, de la valeur de ces hypothèses, considérées au point de vue des applications. Toute science abstraite, fondée sur des hypothèses non contradictoires et développée conformément aux règles de la logique, est en elle-même *absolument vraie*. Mais elle peut bien n'avoir aucun rapport avec les phénomènes naturels, et se trouver fausse lorsqu'on l'examine au point de vue de la réalité physique. C'est ce qui arrive quand les hypothèses ont été choisies d'une manière erronée ou incomplète, soit par suite d'une induction fondée sur des observations trop inexactes ou trop restreintes, soit par suite de simplifications illégitimes que l'on aura introduites pour faciliter l'étude mathématique.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces considérations générales, et nous nous bornerons à en développer les applications à la plus simple des sciences physiques : l'étude des corps sous le rapport de l'étendue, ou la *Géométrie*.

IV.

Au point de vue de l'étendue, un corps ne se distingue d'un autre que par ses limites. C'est donc sur les limites des corps que devra porter exclusivement l'étude de l'étendue. Deux corps qui ont les mêmes limites sont identiques au point de vue géométrique.

De même que l'on connaîtrait la forme d'un corps matériel, si l'on pouvait en détacher, sans la déformer, l'enveloppe qui le contient, on supposera le corps idéal entouré d'une enveloppe sans épaisseur, et la matière du corps retirée de cette enveloppe ou anéantie. C'est cette enveloppe ou *surface* qui constituera, à proprement parler, le corps géométrique. Pareillement, l'étude d'une portion de surface se ramènera à celle des limites de ses parties, ou des *lignes*, l'étude des lignes à celle de leurs limites, ou des *points*.

La Géométrie est fondée avant tout sur l'hypothèse de l'existence d'un espace *immobile* et *indéfini*, dans lequel on peut conserver l'indication du lieu occupé à un instant donné par un corps, et où les corps géométriques peuvent se déplacer en gardant identiquement les propriétés qui correspondent à la notion physique de solidité. On admet que deux corps solides, qui ont pu tour à tour coïncider avec un troisième, sont susceptibles de coïncider entre eux, dans quelque partie de l'espace qu'on les transporte l'un et l'autre.

La propriété de l'invariabilité des figures, que nous avons prise comme point de départ, ne peut, non plus que celle de l'immobilité de l'espace, admettre une définition rigoureuse. L'idée d'invariabilité de forme nous vient de l'expérience. Nous ne pouvons, en effet, observer que des changements relatifs de figure et des déplacements relatifs. Tout ce que nous affirmons relativement à l'identité absolue de lieu et de forme est uniquement fondé sur l'identité de nos sensations.

Après avoir acquis l'idée de grandeur ou d'étendue par la considération du mouvement (voir la Note suivante), nous constatons que certains corps, ceux surtout qui offrent au toucher le plus de résistance, nous présentent toujours, de quelque manière qu'on les déplace, des dimensions et des configurations que nous jugeons être les mêmes, c'est-à-dire qui, appréciées d'après le mouvement de l'œil, en tenant compte de la distance, nous causent des impressions toujours identiques. Nous donnons à ces corps le nom de *corps solides*.

L'hypothèse de l'invariabilité de figure ne peut, par conséquent, être assise sur des expériences susceptibles d'une approximation indéfinie et présentant une certitude objective. Nous l'acceptons, parce qu'elle nous semble plus conforme à nos impressions physiologiques, et qu'elle explique de la manière la plus simple les phénomènes qui affectent nos sens.

Cette hypothèse n'a pas besoin d'être admise tout d'abord dans son entière généralité, et l'étude de la Géométrie montre que son ensemble découle comme conséquence de certains cas particuliers convenablement choisis.

La notion d'invariabilité de forme étant admise, c'est l'expérience qui nous suggère celle de la possibilité du transport d'un corps invariable dans l'espace tel que nous le connaissons, absolument comme une figure plane ou sphérique peut être déplacée sur le plan ou sur la sphère sans changer de forme. Mais il ne serait pas absurde *a priori* de supposer l'existence d'un espace dans lequel ce transport serait impossible sans une déformation plus ou moins profonde, exactement comme cela a lieu pour une figure tracée sur un cône ou sur un ellipsoïde.

Une autre notion essentiellement expérimentale, c'est la distinction entre la droite et la gauche, sans laquelle il serait impossible de définir indépendamment l'une de l'autre deux rotations effectuées autour d'un même axe dans des sens opposés. Cette notion ne peut évidemment s'expliquer qu'en la rapportant à notre propre corps.

L'expérience nous apprend ensuite qu'un corps matériel, fixé par un seul de ses points, peut prendre une infinité de positions différentes.

Il en est de même aussi d'un corps fixé par deux de ses points; seulement, dans ce cas, la liberté du mouvement est plus restreinte.

De plus, en continuant ce mouvement dans le même sens, le corps finira par reprendre exactement sa position primitive.

On constate ensuite que, lorsqu'un corps tourne autour de deux de ses points, il y a, outre ces deux points, une suite continue d'autres points, en nombre infini, qui restent immobiles pendant le mouvement du corps. Cette suite s'étend, non seulement entre les deux points fixes, mais encore au delà, dans les deux sens, quelque loin que le corps soit prolongé. Elle forme une ligne se prolongeant indéfiniment des deux côtés, et à laquelle on donne le nom de *ligne droite*.

De ce mode de génération il résulte que deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue. En d'autres termes, par deux points donnés on peut donc mener une ligne droite, et une seule (¹).

Si, enfin, on fixe trois points d'un corps, le corps cesse d'être mobile, à moins que ces trois points ne se trouvent en ligne droite.

L'expérience fait naître en nous l'idée d'une surface superposable à elle-même par retournement, et par suite comprenant tout entière une ligne droite avec laquelle elle a deux points communs. Cette surface est le *plan*.

Telles sont les principales hypothèses sur lesquelles s'appuient les vingt-huit premières propositions d'Euclide, et qui conduisent à la démonstration de l'existence des parallèles. On pourrait poursuivre l'étude de la Géométrie sans admettre d'hypothèse nouvelle, et les travaux de Lobatchefsky et de J. Bolyai ont fait voir que les précédentes suffisent à elles

---

(¹) Lobatchefsky et W. Bolyai ont essayé de se passer de cet axiome de la ligne droite, en démontrant, à l'aide des propriétés intuitives de la sphère, l'existence du plan, dont ils tirent celle de la ligne droite, comme conséquence. Mais leur démonstration présente encore quelques points obscurs, qui n'ont pas été complètement éclaircis. (*Voir* la Note III.)

seules pour la construction d'une Géométrie complète, comprenant comme cas particulier celle que l'expérience nous indique comme la plus conforme aux propriétés réelles de l'étendue.

Cette Géométrie *générale* peut être développée jusqu'au bout, sans que rien n'oblige à déterminer d'une manière quelconque un certain paramètre arbitraire, qui entre dans la plupart des relations métriques. Elle est absolument vraie indépendamment de cette détermination, et si l'expérience venait à nous offrir un espace où les relations métriques fondamentales fussent vérifiées pour une valeur de ce paramètre autre que zéro, toutes les déductions obtenues seraient vérifiées pour cet espace. C'est ainsi que M. Beltrami a constaté que la Géométrie plane de Lobatchefsky et de Bolyai trouve sa réalisation complète dans les surfaces à courbure constante négative.

Mais, pour obtenir avec l'expérience un accord aussi complet que possible, on est amené à choisir, parmi toutes les valeurs que peut prendre le paramètre en question (¹), la valeur zéro, qui se trouve en même temps correspondre au cas le plus simple et le plus facile à traiter. On obtient de cette manière la Géométrie *euclidienne* ou Géométrie ordinaire. Ce choix du paramètre répond, sous sa forme élémentaire, à l'hypothèse d'une direction unique pour le parallélisme.

Jusqu'à quel point ce choix était-il imposé par l'expérience? C'est ce qu'on n'avait jamais su avec précision avant les dernières recherches de Legendre et de Lobatchefsky (²). On savait déjà que les observations les plus précises n'avaient indiqué jusque-là aucun désaccord avec la Géométrie euclidienne. Mais ce sont ces deux géomètres qui ont démontré les premiers que, si l'accord a lieu pour des figures de grandes dimensions, il a lieu à plus forte raison pour des figures de dimensions moindres, et leurs conclusions ont donné à la vérification expérimentale de l'hypothèse euclidienne une valeur et une portée incomparablement supérieures à ce que l'on peut obtenir d'analogue pour les autres sciences physiques.

Ce n'est pas ainsi, on le sait, que l'expérience a parlé aux premiers inventeurs de la Géométrie, qui, comme le font encore beaucoup de modernes, ont confondu les données expérimentales avec celles de la raison pure. L'hypothèse euclidienne a été admise au nom de ce qu'on appelle *l'évidence,* c'est-à-dire d'un troisième moyen de connaître intermédiaire entre l'expérience et le raisonnement, et participant à la fécondité de l'une et à la certitude de l'autre. Pour nous *l'évidence* n'est autre chose qu'une expérience assez souvent répétée pour que la force de l'habitude nous en ait fait

---

(¹) Ce paramètre pourrait recevoir non seulement des valeurs négatives qui répondraient à la Géométrie de Lobatchefsky ou Géométrie *hyperbolique* (*voir* Klein, *Math. Annalen*, t. VI, p. 112), comme on l'a nommée dans ces derniers temps, mais encore des valeurs positives, comme dans la Géométrie *elliptique*, où les lignes de plus courte distance peuvent se rencontrer en plus d'un point.

(²) *Voir* Note VI.

perdre la conscience, et dont les résultats, conservés par la mémoire, nous dispensent de la reproduire matériellement chaque fois que nous voulons y recourir. Il nous est impossible d'admettre cette entité, si commode à invoquer quand les raisons solides font défaut.

On a remarqué, en jugeant soit d'après une construction géométrique, soit d'après les indications d'un œil exercé, que, si l'on fait tourner tant soit peu une parallèle à une droite autour d'un de ses points, on obtient une rencontre des deux droites. Cela a suffi pour faire introduire ce fait parmi les principes, et on l'y a maintenu, parce que toutes ses conséquences se sont trouvées conformes aux expériences les plus variées de la vie de chaque jour, aussi bien qu'aux mesures scientifiques les plus précises.

Il nous paraît donc bien établi que la Géométrie, comme la Mécanique, l'Optique, la Théorie de la Chaleur ou celle de l'Électricité, se compose : 1° d'une partie *physique*, plus restreinte, à la vérité, que dans les autres sciences, mais à laquelle sont dues les hypothèses fondamentales relatives aux propriétés de l'espace, et qui comprend aussi les applications de cette science à l'étude de la nature : l'Astronomie pratique, la Géodésie, la Topographie, etc.; 2° d'une partie *théorique* et *abstraite*, qui met en œuvre les hypothèses, quelles qu'elles soient, fournies par la partie physique, et qui seule a droit au titre de *science exacte*. C'est à cette dernière partie seule qu'appartient la *certitude mathématique*, laquelle ne porte que sur l'accord des hypothèses avec leurs conséquences, et nullement sur la valeur des hypothèses elles-mêmes. Le contrôle des hypothèses appartient exclusivement à la partie physique, qui, après les avoir suggérées à la science abstraite, a encore à apprécier leur exactitude, soit directement, soit d'après leurs conséquences.

NOTE II.

Sur le mouvement géométrique.

C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de Géométrie la considération du *mouvement*.

L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du *mouvement géométrique*, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.

Ce mouvement géométrique, qu'il faut se garder de confondre avec le mouvement *dans le temps*, objet de la *Cinématique*, ne peut pas dépendre d'une autre science que de la *Géométrie pure*.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions nouvelles de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu et malgré eux; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de Géométrie dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique plus ou moins déguisée.

NOTE III.

Sur les axiomes relatifs à l'existence du plan et de la ligne droite.

Nous avons admis, pour plus de simplicité, comme deux axiomes indépendants, l'existence de la ligne droite et celle du plan. Les deux géomètres dans les Ouvrages desquels nous trouvons la vraie théorie des parallèles, Bolyai et Lobatchefsky, ont poussé plus loin leurs recherches, et ont fondé les définitions du plan et de la ligne droite sur d'autres axiomes plus simples et d'une évidence plus frappante. Voici à peu près comment Bolyai établit ces notions (¹).

On peut d'abord définir l'*égalité* de deux distances indépendamment de la ligne qui sert à les mesurer, et sans laquelle on ne pourrait définir ce que c'est qu'une distance plus grande qu'une autre. Si A et B, A′ et B′ sont deux systèmes de points, on peut imaginer que chacun de ces systèmes fasse partie d'un système solide quelconque (²). Si l'on peut transporter l'une de ces figures sur l'autre de manière que, A étant placé sur A′, B puisse se placer sur B′, on dira que les *distances* AB, A′B′ sont *égales*.

Le point A étant considéré comme fixe, l'ensemble de tous les points B de l'espace également distants de A forme une surface continue et fermée, appelée *sphère*, et dont le point A est le *centre*.

Une sphère partage l'espace en deux parties, l'une *intérieure*, l'autre *extérieure*. Un point ne peut passer de l'une de ces parties dans l'autre sans avoir rencontré la sphère.

Une sphère ne fait que glisser sur elle-même, lorsqu'on la fait tourner d'une manière quelconque autour de son centre.

Deux sphères de centres différents ne peuvent coïncider.

D'un centre donné, on peut toujours décrire une sphère passant par un point donné.

On peut aussi, d'un centre donné, décrire une sphère qui renferme dans son intérieur une figure donnée quelconque de dimensions finies.

(¹) *Tentamen in elementa Matheseos*, etc., t. I, p. 468 et suiv.; Maros Vásárhely, 1833. — *Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.*, §. 33 et suiv; Maros Vásárhely, 1851.

(²) *Voir* la Note I.

Soient S, S′ deux sphères de centres O, O′, et telles que chacune d'elles passe par le centre de l'autre. Puisque chacune de ces sphères a une partie intérieure à l'autre sphère, il faudra nécessairement qu'elles aient des points communs. Si A est un de ces points, et qu'on fasse tourner l'ensemble des deux sphères autour des deux centres supposés fixes, A décrira le lieu des points communs aux deux sphères. Ce lieu sera une courbe fermée C, pouvant glisser sur elle-même, et à laquelle nous donnerons le nom de *cercle*.

Si l'on retourne la figure, de manière que O vienne en O′ et O′ en O, S coïncidera avec S′ et S′ avec S. Par suite le cercle C retombera sur son ancienne position. Donc le cercle est superposable à lui-même par retournement.

Des centres O et O′ décrivons deux autres sphères S_1, S'_1, égales entre elles, et enveloppant respectivement les sphères S et S′. Chacun des centres O, O′ sera à la fois intérieur aux deux sphères, d'où l'on conclut aisément que les deux sphères, ayant une partie intérieure commune, doivent nécessairement se rencontrer. On verrait de même que leur intersection est un nouveau cercle C_1, pouvant glisser sur lui-même, et superposable à lui-même par retournement.

Si l'on construit ainsi deux séries de sphères égales, s'étendant d'une manière continue jusqu'à l'infini, le lieu des cercles suivant lesquels elles se coupent deux à deux s'étendra indéfiniment, et formera une surface pouvant glisser sur elle-même, lorsqu'on la fait tourner autour des points O, O′, et superposable à elle-même par retournement. Nous appellerons cette surface un *plan*.

Lorsqu'on retourne la figure en plaçant O en O′ et O′ en O, on peut faire en sorte qu'un point A du cercle C revienne sur son ancienne position. De part et d'autre de A, les points du cercle se placeront deux à deux les uns sur les autres, et se distribueront ainsi symétriquement par rapport à A. Si l'on désigne par M, M′ deux quelconques de ces points symétriques, ils pourront être considérés comme les positions simultanées de deux mobiles partant de A et parcourant le cercle en sens contraire. Ces mobiles se rencontreront nécessairement en un point B, qui, avec A, partagera le cercle en deux moitiés superposables AMB, AM′B.

Le retournement de la figure pourra être considéré comme produit par une demi-révolution autour des points A et B, que le retournement laisse immobiles.

Dans la demi-révolution de la figure autour de A et de B, chaque point m du plan, appartenant au cercle c, décrit un demi-cercle, en venant se placer sur un point m' du même cercle c, et tant que ce cercle ne se réduira pas à un point unique, il ne pourra revenir à sa première position qu'après avoir achevé la révolution entière.

Or, dans chaque cercle c, il y a deux points qui se trouvent dans leur position primitive après la demi-révolution. Donc ces points ont dû décrire des cercles nuls, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas changé de place pendant la révolution.

L'ensemble de tous ces points forme une ligne qui reste immobile lorsqu'on la fait tourner autour de deux de ces points. Cette ligne s'appelle la *ligne droite*.

Transportons maintenant la droite le long d'elle-même, de manière que deux de ses points a, b tombent sur deux autres points a', b' de la première position. La nouvelle position restera immobile, lorsqu'on la fera tourner autour de a' et de b', et l'on en conclut qu'elle coïncidera nécessairement dans toute son étendue avec l'ancienne position, les points de celle-ci étant les seuls qui décrivent des cercles nuls. Donc on peut faire glisser une droite le long d'elle-même sans qu'elle cesse de coïncider avec sa première position.

Si d'un point α comme centre on décrit un sphère qui enveloppe les points A et B, et rencontre la droite en b et b', la portion de droite ab pourra être placée de manière que a tombe en b' et b en a. Alors se trouvera comblée la lacune qui existait encore entre A et B.

En faisant maintenant tourner la figure autour de OO′, la portion de droite AB engendrera une portion de plan qui comblera la lacune laissée dans l'intérieur du cercle C.

Si l'on fait tourner la droite ab autour de a de manière que b reste dans le plan, la droite restera tout entière dans le plan. Car, si elle en sortait d'un côté, elle ne serait plus superposable à elle-même, lorsqu'on ferait faire au plan une demi-révolution autour des points du cercle qui sont les milieux des deux arcs ab.

On peut donc joindre par une droite le point a à un point quelconque m du plan.

Si l'on fait mouvoir la droite am le long d'une autre droite quelconque bm, tracée sur le plan, la droite mobile décrira le plan.

Si l'on fait tourner le plan autour du point a de manière que bm rencontre toujours deux positions de am, le plan ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Il en sera de même si l'on fait glisser de la même manière la droite am le long d'elle-même.

Donc le plan est une surface superposable à elle-même lorsqu'on la fait glisser sur elle-même d'une manière quelconque, et de plus superposable à elle-même par retournement.

De là résulte que par trois points non en ligne droite on peut toujours faire passer un plan et un seul.

NOTE IV.

Sur la définition de la ligne droite.

Supposons un observateur placé au milieu d'une vaste plaine. Il aperçoit de loin un point, et veut se transporter en ce point.

L'*instinct* le porte à marcher dans la *direction* suivant laquelle ce point lui envoie ses impressions lumineuses. La preuve que ce procédé est *instinctif*, c'est qu'il est suivi par tous les animaux.

L'*expérience,* aidée de la réflexion, lui apprend plus tard qu'en suivant cette route il accomplit le trajet en moins de temps que s'il se fût écarté de la direction des rayons lumineux.

De là cette vérité vulgaire, mais assez complexe au point de vue géométrique : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* C'est cet énoncé que les auteurs de la plupart des Traités de Géométrie ont cru pouvoir prendre pour définition de la ligne droite.

En discutant l'origine et la véritable signification de cette notion du sens commun, nous verrons sans peine que l'inscription d'une telle proposition en tête des éléments de Géométrie indique que l'on n'a pas suffisamment analysé les idées très simples qui se rapportent à cet objet.

Certains philosophes de l'antiquité, au lieu de Proclus, voulant railler agréablement la 20e proposition d'Euclide, prétendaient que les ânes eux-mêmes l'admettaient sans démonstration. On peut répondre à cela que les ânes, en suivant telle route plutôt que telle autre pour atteindre leur but, ne se préoccupent en aucune façon de la longueur du chemin. Leur instinct les porte à marcher dans la ligne suivant laquelle l'objet impressionne leurs sens, et cette ligne sera la ligne droite, parce que c'est la route que suivent la lumière, le son, etc. Il n'est pas impossible, d'ailleurs, que les animaux fassent quelquefois acte d'intelligence, en adoptant le chemin que l'expérience leur a montré être le plus court.

C'est donc l'expérience, aidée de la mémoire et de la réflexion, qui nous apprend que le chemin rectiligne est, toutes choses égales d'ailleurs, le plus tôt parcouru.

Le jugement concordant, que l'on forme en appréciant *au coup d'œil* la longueur du chemin, doit être rapporté à la même origine, puisque l'idée de grandeur, que nous transmet immédiatement le sens de la vue (abstraction faite des notions fournies par les autres sens, ainsi que par la mémoire et la réflexion), n'a pas d'autre source que le mouvement plus ou moins considérable que doit exécuter l'axe de l'œil pour parcourir tel ou tel contour.

Il nous paraît donc établi que l'adoption du chemin rectiligne a une origine primitivement instinctive et irréfléchie, et que sa propriété de *minimum,* qui en a fait conserver l'usage, nous a été révélée par l'expérience.

Examinons maintenant de plus près quelle est la signification de ce jugement, quelle en est l'exacte interprétation géométrique, après qu'on l'a, pour ainsi dire, épuré par la faculté d'abstraction, et dépouillé de toutes les circonstances physiques qui avaient accompagné sa formation.

Le chemin de *direction constante* [1], que nous parcourons en suivant le rayon lumineux, nous conduit à l'idée d'une ligne de direction constante, en remplaçant, par la pensée, notre corps par un point, c'est-à-dire en rédui-

---

[1] Nous jugeons que la direction est constante, parce que nous n'avons fait aucun effort pour imprimer à notre corps un mouvement de rotation.

sant indéfiniment les dimensions de notre corps par rapport à ce qui l'environne; ce qui donne à l'idée de chemin une précision de plus en plus grande.

En appliquant le même procédé d'abstraction aux autres chemins possibles, on a dû continuer d'abord, sans s'en rendre compte, à mesurer la longueur du chemin par le nombre des pas, le temps du parcours par le temps employé à faire un pas; l'idée de temps n'étant ici, du reste, qu'une idée auxiliaire, qui doit être éliminée à la fin de l'opération intellectuelle. Dans le langage abstrait, cela revient à supposer le mobile décrivant un polygone, et à admettre, comme un fait d'expérience, qu'un côté d'un polygone est moindre que la somme de tous les autres.

Pour aller plus loin, pour acquérir des notions relatives à la longueur des lignes courbes, on est forcé de recourir à un nouveau procédé, au procédé du passage à la limite, qui remplace la comparaison directe devenue impossible.

Il ne suffit pas, en effet, de faire appel ici à l'idée vague que chacun a ou croit avoir de la longueur d'une courbe. On peut bien, il est vrai, définir nettement ce qu'on entend par un arc plus grand ou plus petit qu'un autre, lorsque ces deux arcs sont comptés *sur une même courbe, dans le même sens et à partir d'une origine commune*. Mais déjà, dès qu'il ne s'agit plus du cercle ou de l'hélice, il n'est plus possible de comparer directement deux arcs de la même courbe, lorsqu'ils ne sont pas comptés à partir de la même origine. A plus forte raison, cette comparaison est-elle impossible, lorsque l'on considère des arcs pris sur des courbes différentes.

Il faut bien, cependant, que l'on trouve un moyen de suppléer à cette comparaison directe, sans quoi, en disant que telle ligne est plus ou moins longue que telle autre, on ne ferait que prononcer une phrase *absolument vide de sens*. Voyons donc quels moyens peuvent proposer ceux qui se refusent à invoquer le principe des limites.

1° Le temps employé par le mobile pour parcourir un certain chemin. — Mais il faut alors supposer tacitement que la *vitesse* est la même dans les deux chemins que l'on veut comparer. Qu'est-ce maintenant que la vitesse? Ou, si l'on renonce à définir la vitesse, en l'admettant au nombre des quantités *primitives*, qu'est-ce que deux vitesses égales? — De quelque manière que l'on essaye de répondre à cette question, on se trouvera toujours obligé, tôt ou tard, de passer par les notions de limites, et l'on n'aura fait que reculer inutilement la difficulté, en introduisant des auxiliaires inutiles, pour faire une comparaison qu'on aurait aussi bien pu faire directement.

2° On applique un fil flexible sur la courbe, puis on le redresse. — On suppose ici le fil *inextensible*. Qu'est-ce donc qu'un fil inextensible, dès qu'il cesse d'être en ligne droite ou d'être appliqué sur la même courbe? Toutes les définitions que l'on peut tenter de donner du phénomène physique de l'allongement d'un fil curviligne reviennent, en définitive, à ôter à ce fil (supposé infiniment mince) son caractère de courbe continue, pour en faire un polygone à côtés *très petits*, et ce n'est que dans le passage à la limite que l'on arrive à supposer ces côtés *infiniment petits*. On voit donc que, là encore, on n'a fait qu'obscurcir la question en la compliquant de notions physiques étrangères.

Telles sont les difficultés insurmontables que l'on rencontre, lorsqu'on veut définir la plus simple des figures de Géométrie au moyen d'une de ses propriétés *secondaires*, qui n'est, au fond, qu'un théorème d'une nature assez compliquée, et exigeant, pour être compris, la connaissance préalable d'un grand nombre d'autres propositions (1).

Nous disons que la propriété de minimum de la ligne droite est une propriété secondaire. En effet, aucune des propositions fondamentales de la Géométrie ne repose sur cette propriété, du moins quand on prend, pour arriver à leur démonstration, la voie la plus directe et la plus naturelle.

La propriété dont il s'agit a son analogue dans toutes les figures symétriques, sans que cependant on ait jamais songé à la prendre comme définition pour une autre figure que pour la ligne droite. Que dirait-on, en effet, d'un auteur qui définirait le cercle comme la courbe d'aire *maximum* parmi celles d'un périmètre donné? Il serait difficile de déduire simplement, de cette définition, les propriétés fondamentales du cercle. Et cependant c'est ce même procédé que la plupart des auteurs suivent pour la ligne droite, et la force de l'habitude nous empêche seule d'en sentir l'étrangeté.

L'origine de cette prétendue définition de la ligne droite remonte à une fausse interprétation d'un passage d'Archimède. Lorsque ce grand géomètre voulut, le premier, aborder les problèmes de la rectification du cercle et de la quadrature de la sphère, il lui fallut bien définir ce qu'il entendait par *longueur* d'une ligne courbe ou par *aire* d'une surface courbe. Pour y parvenir, il posa comme des *principes* (ὑποθέσεις) certaines propositions, sur lesquelles il s'appuya comme sur de nouveaux axiomes :

1° La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

2° Un contour convexe est moindre qu'un contour qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités.

3° La surface plane est la plus petite de toutes celles qui sont terminées au même contour.

Etc.

On peut aisément montrer, comme chacun sait, que la méthode d'exhaustion, employée par les Anciens dans leurs démonstrations, est identique, pour le fond, avec la méthode des limites, par laquelle les Modernes l'ont remplacée. La limite d'une quantité variable n'est déterminée, en effet, que par l'exclusion de toutes les valeurs de la variable, autres que celle que l'on ne peut définir directement, et que la variable ne peut en général jamais atteindre; et ce procédé est précisément celui de la méthode d'exhaustion.

En suivant le même ordre d'idées, on reconnaîtra facilement que les prin-

---

(1) Ce théorème dépend, en effet, comme nous l'avons déjà remarqué, de la recherche des conditions de minimum de l'intégrale $\int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$.

cipes que nous venons de rapporter, étant interprétés d'après les idées modernes, ne sont autre chose que des *définitions* de la longueur d'une ligne courbe, ou de l'aire d'une surface courbe. Ainsi Archimède, ne pouvant définir directement la ligne droite qui représente une longueur curviligne, a défini celle-ci comme quelque chose plus grand que tous les contours rectilignes inscrits, et plus petit que tous les contours rectilignes circonscrits. Comme on peut faire en sorte que deux contours rectilignes, pris dans chacune de ces deux séries, soient rendus aussi peu différents que l'on voudra l'un de l'autre, il en résulte que ces deux séries tendent vers une limite commune, qui est la longueur de la courbe. On voit donc que nous sommes arrivés à la définition moderne de la longueur de l'arc de courbe, sans faire autre chose que de traduire et de développer l'idée d'Archimède, et que les principes que nous avons cités, loin de contenir une définition de la ligne droite, servent au contraire à définir, au moyen de la ligne droite, la longueur de la ligne courbe.

On peut remarquer en même temps que les auteurs qui ont fait cette confusion au sujet de la ligne droite auraient dû, pour rester conséquents avec eux-mêmes, prendre le troisième principe pour définition du plan, les propriétés exprimées par les principes 1 et 3 étant complètement analogues.

NOTE V.

Sur l'unité angulaire.

Les diverses fonctions trigonométriques, le sinus, la tangente, etc., sont définies d'abord pour le premier quadrant, dans l'intervalle duquel elles parcourent entièrement la série de leurs valeurs numériques. C'est par l'introduction des signes + et — que l'on parvient à donner, aux angles non compris entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, des fonctions trigonométriques, qui ne sont autres que celles de certains angles du premier quadrant, prises avec des signes convenables. On sait, en effet, que, pour obtenir les fonctions trigonométriques d'un angle < 0 ou $> \frac{\pi}{2}$, on commence par ajouter ou retrancher le nombre de quadrants nécessaire pour ramener l'angle donné à être compris dans le premier quadrant, de sorte qu'il suffit d'avoir une Table des fonctions trigonométriques dressée seulement pour le premier quadrant.

Si l'on exprime maintenant un angle en prenant le quadrant pour unité, et le soumettant à la division décimale, l'angle se composera d'une partie entière, positive ou négative, et d'une partie décimale, que l'on pourra toujours supposer positive. L'opération de l'addition ou de la soustraction des quadrants sera alors complètement analogue à celle du changement de caractéristique dans les logarithmes décimaux. C'est déjà là un premier avantage du choix de la véritable unité angulaire.

Si, comme quelques auteurs l'ont proposé, on prenait le cercle entier pour unité, le quadrant serait représenté par la fraction 0,25, et, pour opérer la réduction d'un angle au premier quadrant, on serait obligé d'altérer les deux premières décimales, ce qui serait beaucoup moins simple dans la pratique.

L'adoption, comme unité angulaire, du centième de quadrant ou *grade* n'a d'autre raison d'être que le désir de se rapprocher du degré sexagésimal. Il n'en peut résulter aucun avantage sérieux, mais seulement une complication dans l'écriture, et une perpétuelle confusion des degrés *nouveaux*, des minutes *nouvelles*, etc., avec les degrés *anciens*, les minutes *anciennes*, etc.

Nous avons signalé une première analogie entre la division décimale du quadrant et les logarithmes décimaux du système de Briggs. La raison de cette analogie est facile à saisir. Si l'on considère une exponentielle à exposant complexe,

$$a^{x+iy},$$

i désignant la racine carrée de -1, la partie réelle de l'exposant est un logarithme réel, le coefficient de i un arc de cercle; de sorte qu'on peut regarder les arcs de cercle comme des logarithmes imaginaires. D'après cela, si l'on rapporte les logarithmes au système décimal, les déplacements de la virgule dans la valeur numérique de l'exponentielle répondront à des changements de la seule caractéristique; et, d'après la nature des exponentielles réelles, qui ne sont pas des fonctions à période réelle, la caractéristique pourra prendre toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$.

De même, si l'on adopte la division décimale pour les logarithmes imaginaires, les changements de quadrant, qui reviennent à la multiplication de l'exponentielle par une puissance de i, correspondront à des changements de la *caractéristique* du logarithme imaginaire; et, d'après le caractère périodique de l'exponentielle imaginaire, cette exponentielle parcourra le cycle entier de ses valeurs, lorsqu'on fera varier la caractéristique de 0 à 4, ou encore, ce qui revient au même, de -2 à $+2$, l'addition d'une unité à la caractéristique équivalant à la multiplication par i.

Ainsi, de même que 10 est la base des logarithmes réels décimaux, $e^{\frac{2i}{\pi}}$ sera celle des logarithmes imaginaires décimaux.

Les autres unités angulaires dont on fait usage ont aussi leurs analogues dans les logarithmes, et il est aisé de s'en rendre compte au moyen des considérations précédentes.

Dans le calcul littéral, on emploie constamment les logarithmes *naturels*, relatifs à la base e, et l'on prend pour unité angulaire l'arc égal au rayon. Dans ce cas, l'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux réels n'est plus un nombre entier; c'est le logarithme naturel de 10, ou le nombre 2,302585.... L'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux imaginaires est, de même, le nombre irrationnel $\frac{\pi}{2}$. Pour calculer numérique-ment dans ce système *naturel*, on serait donc obligé de se servir de caractéristiques *fractionnaires*, ce qui serait peu commode dans la pratique.

Il reste à chercher l'analogue de la division sexagésimale du cercle. Il faut, pour cela, remonter dans l'antiquité au temps où les astronomes faisaient usage de la division sexagésimale du rayon, et où le calcul proprement dit était trop méprisé des hommes de science pour qu'ils songeassent à en perfectionner les méthodes. Les inventeurs des logarithmes se sont bien gardés de reprendre ces traditions, en choisissant 60 ou 90 pour bases de leurs systèmes, et la numération sexagésimale des logarithmes imaginaires n'a plus aujourd'hui rien qui lui corresponde dans la numération des nombres réels, du moins dans les pays qui, comme la France, ont soumis leur système métrique à la division décimale.

On se demande souvent pourquoi les astronomes français, après avoir proposé les premiers la division décimale du quadrant (¹), que les étrangers appellent encore la *division française*, ont été eux-mêmes les premiers à l'abandonner. Il y a, pour expliquer ce fait, une raison très grave dans la nécessité où sont les astronomes de puiser sans cesse dans des registres d'observations, qui, à toutes les époques, ont été construits d'après le système sexagésimal. On conçoit quel immense travail entraînerait la conversion de tant de nombres d'un système dans l'autre, et quelle source d'erreurs et de confusion résulterait d'un tel remaniement, sans parler des inconvénients qu'éprouveraient les observateurs actuels, forcés de changer leurs habitudes et leurs instruments. L'Astronomie, enchaînée par son passé, a donc sagement fait de renoncer à un perfectionnement qui, en somme, aurait présenté plus de dangers que d'avantages réels.

Mais les astronomes observateurs ne sont pas seuls à se servir des Tables trigonométriques. Or, *pour tout autre usage que le calcul immédiat des observations faites avec des instruments portant la division sexagésimale*, il est *incontestable* que la division décimale présenterait des avantages immenses, et nous ne pouvons comprendre la persistance avec laquelle la plupart des calculateurs la rejettent. Il n'est pas besoin d'une bien grande expérience du calcul pour voir combien on gagnerait à l'adopter dans les calculs de Mécanique céleste, de Géodésie, de Topographie, en un mot, dans tous les cas où l'on n'a pas à lire ses nombres dans un registre d'observations astronomiques.

La seule raison valable que l'on pourrait nous opposer, c'est le manque de bonnes Tables trigonométriques décimales. Les seules Tables à sept figures construites dans ce système, celles de Hobert et Ideler, de Borda et de Callet, sont mal disposées pour les usages pratiques, l'intervalle des divisions étant trop considérable. Les tables de Plauzoles, à six figures, sont beaucoup plus commodes, et cependant elles sont peu répandues. Pour que les calculateurs pussent jouir des avantages de la division décimale, il faudrait

---

(¹) *Voir*, pour plus de détails, l'Introduction des *Tables décimales* de Hobert et Ideler. Berlin, 1799.

que l'on tirât des grandes Tables manuscrites du Cadastre ([1]) une série de Tables répondant aux divers degrés de précision dont on a besoin dans les calculs, c'est-à-dire des Tables à sept, à six, à cinq et à quatre figures. Si cette publication était faite avec les mêmes soins et une disposition aussi convenable que celle des bonnes Tables sexagésimales publiées récemment en Allemagne, nous sommes convaincu que le seul système vraiment rationnel reprendrait bientôt faveur, et que les Tables sexagésimales ne trouveraient plus place que dans les observatoires, où elles devront longtemps encore être exclusivement en usage.

NOTE VI.

Sur l'axiome 11 (dit postulatum) d'Euclide.

Des recherches déjà anciennes, mais qui ont passé inaperçues jusqu'à ces derniers temps, ont mis hors de doute que la démonstration de l'axiome 11 d'Euclide (notre axiome IV) ne peut pas se déduire des axiomes précédents. Ces recherches ont été faites vers l'année 1829, par deux géomètres, Lobatchefsky et J. Bolyai, qui, par des méthodes différentes et indépendamment l'un de l'autre, sont parvenus presque en même temps à retrouver les résultats que Gauss possédait déjà depuis près de quarante ans. Malheureusement ce grand mathématicien n'a jamais publié ses travaux sur ce sujet, et sans la publication récente de sa correspondance avec Schumacher, nous ignorerions encore l'existence des nouvelles théories qu'il a appuyées de son imposante autorité.

Je n'entrerai pas ici dans l'exposition complète de ces théories, que l'on trouvera développées avec détails dans la brochure de Lobatchefsky dont j'ai donné une traduction ([2]). Je me contenterai d'en faire connaître les points principaux, et d'indiquer sommairement ce que la *Géométrie abstraite*, fondée sur la négation de l'axiome 11, a de commun avec la *Géométrie euclidienne* ou *expérimentale*, et en quoi elle s'en écarte.

La théorie des parallèles ne fait qu'un avec la proposition 32 d'Euclide sur la somme des angles d'un triangle rectiligne. Aussi plusieurs géomètres, au lieu d'essayer la démonstration directe de l'axiome 11, ont fait porter leurs efforts sur la détermination de la somme des angles d'un triangle.

([1]) Il existe deux exemplaires de ces Tables, déposés l'un à la Bibliothèque de l'Observatoire de Paris, l'autre à celle de l'Institut. Voy. *Nouvelles Annales de Mathématiques, Bulletin de Bibliographie*, 1855, p. 14; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 mai 1858, et *Annales de l'Observatoire*, t. IV.

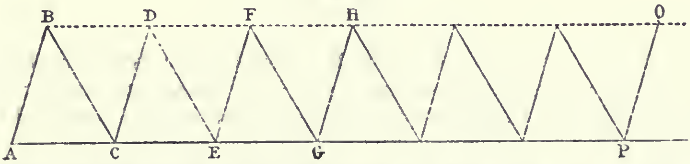
([2]) *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, par N. I. Lobatchefsky, suivi d'un extrait de la *Correspondance de Gauss et de Schumacher*. Paris, Gauthier-Villars, 1866.

On peut d'abord établir, comme Legendre l'a fait (¹), quelques propositions complémentaires des 28 premières propositions d'Euclide, et indépendantes comme elles de l'axiome 11.

I. *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux angles droits.*

Désignons, pour abréger, par $\int ABC$ (*fig.* 43) la somme des trois angles du triangle ABC, et soit, s'il est possible, $\int ABC > 2$ dr. Sur AC prolongé portons les longueurs $CE = EG = \ldots = AC$, et sur ces bases construisons les triangles DCE, FEG, ..., tous égaux à ABC.

Fig. 43.



L'angle BCD, supplément de la somme des angles ACB et $DCE = BAC$, sera, d'après l'hypothèse admise, $<$ ABC. Donc [*Eucl.*, I, 24] $BD < AC$.

On voit d'ailleurs [*Eucl.*, I, 4] que tous les triangles BCD, DEF,... sont égaux entre eux. Donc $BD = DF = FH = \ldots$.

Soit maintenant δ la différence $AC - BD$. Si l'on construit n triangles consécutifs égaux à ABC, la différence entre la droite totale $AP = n.\,AC$ et la somme des droites $BD + DE + \ldots = n.\,BD$ sera $n\delta$; et, en prenant n assez grand, on pourra faire en sorte que $n\delta$ surpasse la longueur finie $AB + PQ = 2AB$.

Mais on aurait alors $AP - (BDF\ldots Q) > AB + PQ$, d'où il résulterait que le côté AP du polygone ABD...QPA serait plus grand que la somme de tous les autres, ce qui est contraire aux corollaires de la proposition 20 du premier livre d'Euclide [§ 24, p. 57].

Il est donc impossible qu'il existe un triangle rectiligne dont les angles aient une somme plus grande que deux angles droits.

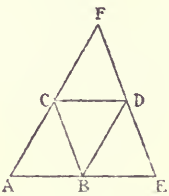
II. *S'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, cette somme sera égale aussi à deux angles droits pour tous les triangles rectilignes possibles.*

1° Soit ABC (*fig.* 44) un triangle rectiligne tel que $\int ABC = 2$dr. Faisons le triangle $BCD = ABC$, en prenant l'angle $BCD = CBA$ et $CD = AB$, d'où $BCD = A$, $CBD = BCA$, $BD = AC$.

(¹) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 369. — *Éléments de Géométrie*, 3ᵉ à 8ᵉ édition. — *Voir* encore Lobatchefsky, *Études sur les parallèles*, nᵒˢ 19 et 20.

Prolongeons AB, AC de longueurs BE = AB, CF = AC; menons DE, DF Des égalités précédentes et de $\int$ABC = 2 dr., il résulte DBE = BAC = DCF, d'où l'on conclut que chacun des triangles DBE, DCB est égal à ABC. On en déduit ensuite aisément que la somme des angles en D est = 2 dr., et

Fig. 44.

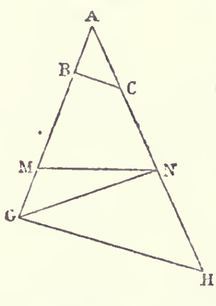


par suite EDF est une ligne droite. Donc on peut construire un triangle AEF, ayant ses côtés doubles respectivement de ceux du triangle proposé ABC; de plus, équiangle avec ABC, et ayant par suite la somme de ses angles = 2 dr.

On pourra répéter cette construction autant de fois que l'on voudra, et obtenir ainsi un triangle dont les côtés seront aussi grands que l'on voudra, et la somme des angles égale encore à 2 dr.

2° Si un triangle AMN (*fig.* 45) a un angle A commun avec le triangle ABC dont la somme des angles = 2 dr., on aura aussi $\int$AMN = 2 dr. Construisons, en effet, d'après ce qu'on vient de voir, un triangle AGH, dont

Fig. 45.

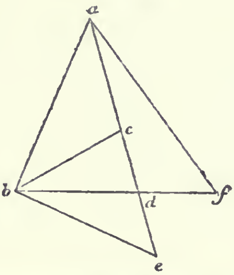


les côtés AG, AH soient respectivement plus grands que AM, AN, et tel que l'on ait $\int$AGH = $\int$ABC = 2 dr.; menons GN. La somme totale $\int$AMN + $\int$MNG + $\int$NGH = la somme des angles en M + la somme des angles en N + $\int$AGH, et, par suite, = 6 dr.; et comme aucune des trois sommes partielles ne peut surpasser 2 dr. [prop. 1], il faut que chacune d'elles soit = 2 dr. Donc $\int$AMN = 2 dr.

3° Soit maintenant *abc* (*fig.* 46) un triangle quelconque. Si ses angles ne sont pas égaux à ceux du triangle ABC pour lequel $\int$ABC = 2 dr., il faudra que l'un au moins d'entre eux soit moindre que l'angle correspondant de

ABC, sans quoi l'on aurait $\int abc < 2\,\text{dr}$. Supposons donc $bac >$ BAC; faisons $baf =$ BAC et menons bf à volonté. D'après 2°, abf et ABC ayant un angle commun, $\int abf = 2\,\text{dr}.$; abd et abf ayant un angle commun, $\int abd = 2\,\text{dr}.$; abd et abc ayant un angle commun, $\int abc = 2$ dr.

Fig. 46.



Outre ces théorèmes et les 28 premières propositions d'Euclide, voici un aperçu des propositions de la Géométrie qui s'établissent indépendamment de l'axiome 11 [1].

Une droite peut avoir avec un cercle un ou deux points communs, et pas davantage. Trois points étant donnés sur un cercle, trouver le centre de ce cercle. Possibilité des polygones réguliers; construction effective de ceux de 4, 8, 16, ... côtés seulement. Deux cercles peuvent avoir, sans coïncider, un ou deux points communs, et pas davantage.

Propriétés des figures sphériques, en partie analogues aux 28 premières propositions d'Euclide. Égalité des triangles sphériques. Triangles sphériques isoscèles, etc. Trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés sur la sphère [2]. Déterminer le rayon d'une sphère par une construction plane. Tracer un grand cercle par deux points donnés, ou perpendiculaire sur le milieu d'un arc de cercle donné, ou partageant un angle donné en deux parties égales, etc. Petits cercles et arcs de grands cercles tangents. Construction des polygones sphériques réguliers de 4, 8, 16,... côtés. Aire du triangle sphérique et de la sphère totale. La somme des angles d'un triangle sphérique dont les côtés sont infiniment petits par rapport au rayon de la sphère a pour limite deux angles droits.

Si donc on construit la surface qui est la limite d'une sphère passant par un point donné, et dont le rayon croît jusqu'à l'infini, les triangles tracés sur cette surface auront la somme de leurs angles égale à deux angles droits, et par conséquent toutes les conséquences qui découlent de l'axiome 11 en Géométrie plane sont vraies, dans l'hypothèse contraire, pour ces triangles

---

(1) Bolyai, *Kurzer Grundriss eines Versuchs, u. s. w.*

(2) Ce problème n'est résoluble pour trois points quelconques donnés sur un plan que lorsqu'on admet l'axiome 11. Si trois points quelconques, non en ligne droite, pouvaient toujours être placés sur une sphère, l'axiome 11 serait démontré.

tracés sur la *sphère-limite*. En particulier, on peut appliquer à ces triangles les formules de la Trigonométrie rectiligne ordinaire, et en déduire ensuite les formules de la Trigonométrie sphérique, qui se trouvent ainsi établies indépendamment de la théorie des parallèles ([1]).

Mais cette sphère-limite coïncide-t-elle avec un plan ? Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'elle n'en diffère pas sensiblement dans l'étendue accessible à nos mesures, les triangles rectilignes que nous connaissons ayant une somme d'angles que nous ne pouvons pas distinguer de 2 angles droits ([2]). Rien ne nous démontre cependant qu'il en soit de même pour des triangles rectilignes plus grands, et que la somme des angles de ces triangles ne finisse pas par être sensiblement moindre que 2 droits.

Il n'y a, en effet, aucune incompatibilité entre les premiers axiomes (nos axiomes, I, II et III) et la supposition que la somme des angles d'un triangle soit moindre que 2 angles droits. J. Bolyai et Lobatchefsky ont tiré les conséquences de cette supposition, sans jamais se trouver en contradiction avec la logique, mais seulement avec l'expérience, telle que nous la permettent nos moyens limités.

Si la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits, on peut alors mener, par un point donné, une infinité de droites différentes, qui ne rencontrent pas une droite donnée. Celle de ces droites qui s'approche le plus de la droite donnée est dite *parallèle* à cette droite. Deux droites parallèles sont asymptotes l'une de l'autre.

Il n'y a plus, dans cette hypothèse, de figures planes semblables. On ne peut plus partager par les procédés élémentaires une droite en trois parties égales, ni circonscrire un cercle à un triangle rectiligne quelconque. La somme des angles d'un triangle varie entre 2 angles droits et zéro, et peut diminuer indéfiniment, lorsqu'on fait croître les côtés à l'infini. L'angle d'un polygone régulier n'est plus constant, et diminue indéfiniment lorsqu'on fait croître le côté du polygone jusqu'à l'infini.

Au contraire, la somme des angles d'un triangle rectiligne infiniment petit tend vers 2 angles droits, comme celle des angles d'un triangle sphérique infiniment petit.

Les formules de la Trigonométrie rectiligne relatives à l'hypothèse où l'on rejette l'axiome 11 présentent une grande analogie avec celles de la Trigonométrie sphérique; elles s'en déduiraient en attribuant aux côtés du triangle sphérique des valeurs imaginaires.

([1]) Lagrange avait reconnu l'indépendance entre les formules de la Trigonométrie sphérique et l'axiome 11, et il croyait pouvoir tirer de là une démonstration de cet axiome. Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme insuffisantes. C'est ainsi qu'il s'exprimait dans ses conversations avec Biot. (*Communiqué par M. Lefort.*)

([2]) D'après les calculs de Lobatchefsky, les observations astronomiques indiquent que, pour un triangle dont les côtés seraient à peu près égaux à la distance de la Terre au Soleil, la somme des angles ne diffère pas de 2 dr. de 3 dix-millièmes de seconde.

Lobatchefsky a fait voir (1) que l'on pourrait construire sur cette hypothèse un système complet de Géométrie, à laquelle il a donné le nom de *Géométrie imaginaire*. Les expressions des éléments différentiels des lignes courbes, des surfaces et des volumes sont les mêmes que dans la *Géométrie réelle* ou *expérimentale*, les intégrales seules étant différentes.

En résumé, l'expérience ne nous ayant montré aucun triangle rectiligne, si grand qu'il soit, dont la somme des angles soit moindre que deux angles droits, la Géométrie d'Euclide est certainement vraie, au moins dans les limites de nos observations. Aussi suffira-t-elle toujours dans la pratique, et l'étude de la *Géométrie abstraite* n'offrira jamais d'intérêt qu'au point de vue philosophique, où elle acquiert, au contraire, une importance capitale.

NOTE VII.

Sur la théorie des parallèles.

Si l'on juge de la *direction* d'une droite par l'angle dont elle s'écarte d'une direction donnée, deux droites qui forment avec une troisième des angles correspondants égaux *seront de même direction*, et le théorème démontré au § 14 pourra s'énoncer ainsi :

Deux droites de même direction ne peuvent se rencontrer, et sont parallèles.

Cette proposition pourrait être prise pour axiome, en considérant l'idée de *direction* comme une donnée fondamentale de l'expérience. Dès lors, il serait évident que deux droites qui se rencontrent ont des directions différentes, et par suite celles qui ont la même direction ne peuvent se rencontrer.

Dans cet ordre d'idées, l'axiome réciproque, c'est-à-dire l'axiome IV du § 15, pourrait s'énoncer comme il suit :

Dans un plan, une droite quelconque rencontre toutes celles qui n'ont pas la même direction.

Cet énoncé devient encore plus évident, lorsqu'on le rapproche de ce que nous avons dit (§ 6) de la génération rectiligne du plan.

Cette manière de présenter la théorie des parallèles est plus simple et plus symétrique que la méthode ordinaire, et nous semble avantageuse pour un *premier enseignement* de la Géométrie (2). En revenant plus tard sur

---

(1) *Géométrie imaginaire* (*Journal de Crelle*, t. XVII, 1837). — *Pangeometrie* (Kazan, 1855). — *Voir* aussi J. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, etc.

(2) *Voir* Note IX.

cet objet, on montrerait, comme nous l'avons fait au § **14**, que le parallélisme des droites de même direction est une conséquence des axiomes précédents.

NOTE VIII.

Sur la longueur d'une ligne courbe.

On démontre, dans la plupart des Traités de Calcul intégral, ce théorème, *qu'il existe une limite commune, finie et déterminée, pour les périmètres des polygones infinitésimaux inscrits et circonscrits à un arc de courbe donné.* On peut présenter cette démonstration sous une forme tout à fait élémentaire, sans employer l'algorithme de l'Analyse transcendante.

La démonstration repose sur le *principe fondamental* du Calcul intégral ([1]), savoir, que, dans une somme d'éléments infiniment petits, on peut, sans changer la limite de cette somme, altérer chacun de ces éléments d'une fraction de lui-même infiniment petite. — En effet, en remplaçant toutes ces fractions par la plus grande d'entre elles, qui est encore infiniment petite, on voit que l'altération de la somme est moindre que cette fraction *maximum* de la somme elle-même, c'est-à-dire que, si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sont tous moindres que ε, on a $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots < \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$. La somme des α étant supposée finie, l'altération sera donc moindre qu'une fraction infiniment petite d'une quantité finie, et par suite elle sera infiniment petite. Donc l'altération de la limite sera la limite d'un infiniment petit, c'est-à-dire *zéro*.

Cette démonstration ne repose, comme on voit, sur aucune considération qui dépasse les principes que l'on a souvent occasion d'invoquer en Géométrie élémentaire.

Disons en passant que ce principe fournit immédiatement les démonstrations les plus simples des théorèmes sur l'équivalence de deux prismes ou de deux pyramides de même base et de même hauteur.

Supposons maintenant que l'on ait un triangle dont un seul angle soit infiniment petit. Le côté opposé à cet angle sera infiniment petit *par rapport à chacun des deux autres*, et il en sera de même, à plus forte raison, de la différence de ces deux côtés *par rapport à chacun d'eux* ([2]). Nous énoncerons ce résultat d'une manière abrégée, en disant que les deux côtés qui comprennent l'angle infiniment petit *diffèrent infiniment peu* l'un de l'autre.

Il résulte de là que, si l'on projette, par des parallèles de direction quel-

---

([1]) Duhamel, *Éléments de Calcul infinitésimal*, t. I, p. 35.

([2]) Le rapport de cette différence à chacun des côtés serait même infiniment petit *du second ordre*, si le triangle était rectangle.

conque, orthogonale ou non, une droite de longueur donnée sur un axe faisant avec cette droite un angle infiniment petit, la différence entre la droite et sa projection sera infiniment petite *par rapport* à chacune d'elles; en d'autres termes, la droite et sa projection *différeront infiniment peu.*

Donc, si la droite qui ferme un contour polygonal fait avec chacun des côtés de ce contour des angles infiniment petits, la longueur de cette droite ne différera qu'infiniment peu de celle du contour polygonal.

Cela posé, considérons un arc d'une courbe, que nous supposerons plane, pour plus de simplicité, et admettons que cet arc soit entièrement convexe (¹). D'après les corollaires de la proposition 20 du premier Livre d'*Euclide* (§ 24), on voit : 1° que le contour d'un polygone inscrit dans l'arc convexe croît à mesure que l'on établit de nouveaux sommets intermédiaires, en subdivisant les arcs; 2° que le contour d'un polygone circonscrit au même arc diminue à mesure que l'on trace de nouveaux côtés, dont les points de contact subdivisent les arcs; 3° qu'un quelconque des contours inscrits est toujours moindre qu'un quelconque des contours circonscrits.

On en conclut d'abord : 1° que les contours inscrits, dont on augmente le nombre des côtés suivant une certaine loi, allant d'une part toujours en croissant, mais restant d'autre part toujours moindres qu'un polygone circonscrit quelconque, tendront nécessairement vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision;

2° Que les contours circonscrits, allant toujours en diminuant par la subdivision des arcs, et restant toujours supérieurs à un polygone inscrit quelconque, tendront aussi vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision.

Il reste à prouver que tous ces contours, tant inscrits que circonscrits, tendent vers une seule et même limite, indépendante de la loi de subdivision.

Considérons un côté d'un contour inscrit, et un polygone inscrit dans l'arc sous-tendu par ce côté. Si ce côté est assez petit, sa direction, ainsi que la direction d'un côté quelconque du polygone en question, fera un angle aussi petit qu'on voudra avec la tangente en un quelconque des points de l'arc. Donc, d'après la proposition démontrée ci-dessus, le côté et le polygone diffèrent l'un de l'autre *infiniment peu.*

Soient maintenant deux polygones inscrits quelconques, à côtés suffisamment petits. Si nous les comparons l'un et l'autre au polygone formé par la réunion de tous leurs sommets, et correspondant par conséquent à une subdivision de chacun des deux systèmes d'arcs, chaque côté de l'un quelconque des deux contours primitifs différera infiniment peu de la portion correspondante du troisième contour. Donc chacun des deux premiers contours différera infiniment peu du troisième, et par suite les deux premiers contours différeront infiniment peu l'un de l'autre. Donc ils ne peuvent tendre que vers une seule et même limite.

(¹) S'il ne l'était pas, on le décomposerait en portions convexes.

On étendrait de même ce résultat à deux polygones circonscrits, ou à un polygone inscrit comparé avec un polygone circonscrit.

Ainsi se trouve établie l'existence de la *longueur* d'une courbe plane.

Il en résulte en même temps :

1° Que cette longueur est plus grande que celle d'une ligne droite ayant les mêmes extrémités;

2° Qu'une courbe convexe est plus courte qu'une courbe quelconque qui l'enveloppe de toutes parts sans la couper, ou qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités;

3° Que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est égale à l'unité.

Le même mode de démonstration servirait à établir l'existence de la longueur d'une courbe non plane, et celle de l'aire d'une surface courbe.

NOTE IX.

Réflexions sur l'enseignement de la Géométrie élémentaire.

Tout le monde s'accorde à répéter que l'un des buts de l'enseignement des Mathématiques doit être de donner plus de rectitude à l'esprit, en lui offrant un modèle d'une logique inflexible, appliquée à des principes certains. Pour que ce but soit atteint, il faut évidemment que l'enseignement ne se départe jamais de cette rigueur qui distingue les Mathématiques de toutes les autres Sciences, et c'est là une condition essentielle pour que cette étude soit fructueuse, aussi bien comme gymnastique intellectuelle que comme source d'applications pratiques.

Mais la rigueur, telle que nous la concevons, n'est nullement compromise par l'omission volontaire de la démonstration d'une proposition, tandis qu'elle l'est par l'introduction d'une démonstration fausse ou incomplète. La logique n'a rien à souffrir d'une lacune laissée provisoirement dans la suite des raisonnements, pourvu que cette lacune soit clairement indiquée, et qu'on ne cherche pas à la dissimuler.

C'est d'après cette manière de voir que nous concevons la possibilité d'un enseignement gradué de la Géométrie élémentaire, conduit, à tous ses degrés, d'après un plan unique et invariable, toujours soumis aux règles de la plus sévère logique, et où les difficultés ne se montreraient qu'à mesure que les esprits seraient préparés à les aborder.

Pour cela, l'étude de la Géométrie devrait être reprise successivement à divers points de vue, correspondant aux divers degrés d'initiation des élèves. Pour les commençants, il s'agit avant tout de se familiariser avec les figures et leurs dénominations, d'apprendre des faits, d'entrevoir leurs applications les plus simples et les plus immédiates, celles surtout qui se rapportent aux usages de la vie ordinaire. On devra donc, au début, multiplier les axiomes, employer, au lieu de démonstrations, les vérifications expérimentales, l'analogie, l'induction, en ne laissant jamais oublier que ce mode d'exposition est essentiellement provisoire. On exercera l'élève aux tracés graphiques, au maniement des instruments, à la solution de divers problèmes de levé des plans et d'arpentage, à la construction des figures en relief au moyen de fils ou d'argile plastique, à la représentation de ces figures à l'aide de leurs projections, etc., etc. Le maître saura proportionner au degré de développement intellectuel de l'élève la part plus ou moins grande qu'il devra faire au raisonnement, dans cette première ébauche des études géométriques; et la grande variété d'applications qu'offrent la Géographie, l'Astronomie, l'Arpentage, la Stéréotomie, etc. suffira pour donner à cet enseignement un intérêt soutenu.

On pourra mêler à la Géométrie pure et appliquée l'étude des propriétés les plus simples des nombres entiers, que l'on représentera par des points régulièrement distribués sur des droites ou sur des plans, ou encore par des longueurs de droites, des aires de rectangles ou des volumes de parallélépipèdes. Cette manière de traiter l'Arithmétique conduit aussi promptement que la méthode abstraite aux règles du Calcul, et chaque raisonnement acquiert une plus grande clarté par cette représentation qui parle aux yeux.

On exposera ensuite le système des poids et mesures, tandis que, d'un autre côté, on étudiera les propriétés des proportions entre nombres rationnels.

Remarquons que les diverses théories que nous venons d'énumérer, et qui devront servir de préliminaires à l'étude rigoureuse de la Géométrie, ne sont pas destinées, selon nous, à faire l'objet d'une suite unique de leçons. On ne doit pas craindre de se répéter, dans un enseignement scientifique, et les élèves devront suivre successivement plusieurs cours gradués, dont chacun comprendra les matières du cours précédent, plus les nouveaux développements qu'on y ajoutera, en faisant au raisonnement une plus large part.

Mais les programmes de ces cours successifs ne devront pas être tracés au hasard, indépendamment les uns des autres. Il faudra se garder, avant tout, d'altérer l'ordre des propositions pour substituer à une démonstration difficile un raisonnement plus simple en apparence et moins rigoureux. Si une démonstration présente quelques difficultés pour l'intelligence de l'élève, qu'on la supprime, sans la remplacer autrement que par des explications, des analogies, des vérifications expérimentales. Mais que la subordination des vérités géométriques, telle que l'exigera plus tard une étude scientifique et approfondie, soit conservée sans altération à tous les degrés de l'enseignement. Qu'il y ait unité de plan, et que les cours les plus élémentaires ne diffèrent des cours les plus élevés que par des suppressions, de telle sorte que la place de chaque démonstration soit toujours réservée, et qu'on n'ait plus qu'à l'y intercaler, lorsque l'esprit de l'élève sera suffisamment préparé.

Le premier enseignement sera donc exclusivement expérimental, et peu à peu on fera voir à l'élève comment toutes les vérités n'ont pas besoin d'être séparément constatées par l'expérience, et comment elles sont les conséquences d'un certain nombre d'entre elles, nombre que l'on restreindra de plus en plus, à mesure que l'on avancera dans l'étude de la Science, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux axiomes fondamentaux, dont le nombre ne peut plus être réduit.

Telle doit être, à notre avis, la première période de l'enseignement géométrique, et le programme que nous venons d'esquisser comprend toutes les notions mathématiques nécessaires aux commençants. Parallèlement à cet enseignement, l'élève pourra suivre utilement des cours élémentaires de Cosmographie, de Mécanique, de Physique, de Chimie, où il rencontrera à chaque instant des applications de ses connaissances en Géométrie et en Arithmétique.

Le second degré d'enseignement se rapprocherait, d'après nos idées, du système actuellement suivi dans les classes de science des lycées français. En Géométrie, on adopterait la méthode euclidienne dans toute sa rigueur, et le cadre des études embrasserait à peu près les *Éléments* d'Euclide et les premières notions sur les sections coniques.

On joindrait à cette étude celle des premières notions d'Algèbre, en rattachant les règles du calcul algébrique aux propriétés des figures par des raisonnements analogues à ceux du second Livre d'Euclide. On établirait ainsi par la Géométrie, en même temps que par l'Analyse abstraite, les principales règles de la multiplication algébrique, la résolution des équations du second degré, les principaux théorèmes sur les maxima et les minima, etc.

L'étude rigoureuse de la Géométrie conduisant tout naturellement au principe des limites et à la considération de l'incommensurabilité, on serait alors amené à introduire les symboles appelés *nombres incommensurables*, et à revenir sur la théorie des proportions, en l'étendant à des grandeurs continues, généralement incommensurables.

On pourrait passer de là à l'étude des logarithmes et de la Trigonométrie.

Mais cette étude de la Géométrie scientifique et rigoureuse doit elle-même être graduée, comme celle de la Géométrie *expérimentale*. S'il peut être avantageux, dans une première exposition, de s'attacher autant que possible à la méthode des anciens, afin d'établir d'abord avec brièveté et précision les faits fondamentaux de la Science, il nous semble, au contraire, que dans les revisions successives du cours de Géométrie, on devra s'étudier de préférence à faire comprendre, par des applications aux vérités simples et désormais bien connues de la Géométrie élémentaire, les grandes méthodes et les puissants procédés de l'Analyse moderne. On pourra, de cette manière, sans sortir du cadre d'Euclide, initier l'élève à tous les procédés qu'il aura plus tard à appliquer dans les parties les plus élevées de la Science.

Ainsi, on sait quelles sont, en Géométrie et en Arithmétique, les nombreuses applications du principe des limites.

L'étude des lieux géométriques, employés comme moyens généraux de résolution des problèmes déterminés, conduira naturellement à la notion de fonction d'une ou de deux variables indépendantes. En y joignant même le mouvement, on aura une représentation sensible des fonctions de trois et même de quatre variables.

Le cercle et les sections coniques donneront lieu d'appliquer la méthode des tangentes, et de présenter la méthode des limites sous la forme plus commode de la méthode infinitésimale.

On reviendra alors avec plus de détails sur les questions de maxima et de minima, et on les ramènera à la méthode des tangentes, dans le cas d'une seule variable indépendante.

Les quadratures et les cubatures des lignes et des surfaces pourront s'effectuer non seulement par les méthodes détournées des Anciens, mais encore par les méthodes directes sur lesquelles est fondé le Calcul intégral. Ainsi l'équivalence de deux prismes de même base et de même hauteur pourra s'établir par la division en tranches infiniment minces, comme nous l'avons déjà indiqué dans la Note précédente.

C'est alors qu'il conviendra d'introduire les notions de *longueur* d'une ligne courbe quelconque et d'*aire* d'une surface courbe quelconque, en justifiant et généralisant les définitions restreintes et incomplètes qu'on en avait données, au moyen des polygones réguliers, en traitant du cercle et des trois corps ronds.

On peut enfin, sans sortir du même cadre, donner des exemples de courbes enveloppes, d'applications de la méthode inverse des tangentes, etc.

En un mot, la Géométrie d'Euclide peut servir de texte à une exposition de tous les principes fondamentaux de l'Analyse moderne, et l'on conçoit quel fruit un esprit intelligent pourrait retirer d'une telle préparation à l'étude de la Géométrie analytique et du Calcul infinitésimal.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

8544 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
8544 Quai des Augustins, 55.

CONSIDÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA

GÉNÉRALISATION SUCCESSIVE DE L'IDÉE DE QUANTITÉ

DANS L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR M. J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques à la Faculté des sciences de Bordeaux.

1.

Les calculs abstraits qui font l'objet des Mathématiques pures sont des combinaisons de certaines opérations fondamentales, dont l'emploi plus ou moins réitéré suffit pour déterminer les inconnues d'une question, soit avec une exactitude rigoureuse, soit avec une approximation illimitée.

Les opérations sont possibles sous certaines conditions, et dépendent de la nature des objets qui leur sont soumis et du champ de variation plus ou moins restreint où elles doivent avoir lieu.

On appelle en général *quantité* tout ce qui peut être l'objet d'une opération mathématique.

La définition de la quantité comprend non seulement les objets réels, considérés au point de vue du nombre et de la grandeur, mais encore les signes d'opération eux-mêmes.

Ainsi, un nombre est le symbole de l'addition de plusieurs quantités, considérées, par définition, comme identiques entre elles et que l'on nomme *unités*. Les opérations sur les nombres sont entièrement indépendantes de la nature des unités, et elles ne s'appliquent qu'au symbole de l'opération de la *numération*, en vertu de laquelle les groupes d'unités sont connus.

Une portion de ligne droite peut être considérée comme le signe du déplacement d'un point ou d'une infinité de points, que l'on transporte à une distance donnée et dans une direction donnée. On désigne ce signe de déplacement sous le nom de *vecteur*.

Un angle, au lieu de signifier l'écart existant entre deux directions fixes, deviendra le symbole de la rotation autour d'un point fixe d'une droite qui passe d'une direction donnée à une autre, en entraînant tous les points liés invariablement avec elle. Considéré sous cet aspect, le signe de l'opération de la rotation correspondante à un angle donné prend le nom de *verseur*.

Cette conception de la quantité tend à prévaloir de plus en plus dans les Mathématiques, de même que la méthode fondée sur l'étude *génétique* des quantités finira par l'emporter, au point de vue de l'enseignement et des recherches scientifiques, sur les anciennes méthodes contemplatives, qui règnent encore presque sans partage dans les Traités de Géométrie élémentaire.

D'après ce que nous venons de dire, il faut se garder de confondre, comme on le fait trop souvent, la notion de *quantité* avec celle de *grandeur*, qui correspond à un cas très particulier de la *quantité* (1). Nous conserverons au mot *grandeur* sa signification habituelle, tandis que nous entendrons le mot *quantité* dans son sens le plus large.

2.

Les règles de la combinaison des opérations mathématiques dépendent uniquement de certaines propriétés essentielles de ces opérations, que l'on pourrait appeler *propriétés combinatoires*.

Ce n'est pas d'après les effets physiques auxquels elles correspondent, ou d'après les moyens matériels qui servent à les effectuer que l'on classe les opérations. Leurs définitions générales expriment seulement l'ensemble des propriétés combinatoires

(1) Le mot de *quantité* lui-même, en ayant égard à son étymologie, ne représente pas exactement l'idée que nous y attachons. Mais nous avons reculé devant l'introduction d'un néologisme de plus.

qu'elles possèdent, et l'on appelle du même nom des opérations qui, tout en présentant des dissemblances apparentes dans leurs applications comme dans leurs moyens d'exécution, ont le même ensemble de propriétés essentielles.

Nous commencerons l'étude des opérations fondamentales de l'Analyse par le cas le plus simple, celui qui a servi de type aux cas plus compliqués, et dans lequel on peut reconnaître immédiatement l'existence des propriétés combinatoires des opérations. En passant ensuite aux cas plus généraux, nous désignerons par les mêmes noms les opérations qui jouiront des mêmes propriétés combinatoires, et c'est la condition de la permanence de ces propriétés qui nous servira de guide dans le choix des définitions des opérations généralisées. C'est en cela que consiste ce que Hankel a nommé le *principe de permanence des règles du calcul.*

Il peut arriver que, dans certains cas, la nature même de la généralisation appliquée à l'idée de quantité rende impossible la conservation de certaines propriétés des opérations. C'est ce qui a lieu lorsqu'on veut étendre les règles du calcul aux opérations de la Géométrie à trois dimensions, et de là proviennent les difficultés que l'on rencontre dans le *Calcul des Quaternions.*

3.

Considérons d'abord une multitude d'objets, désignés tous par une même dénomination, qui exprime une qualité commune quelconque. Chacun de ces objets sera une *unité.*

En faisant abstraction de toute autre qualité que la qualité commune, toutes les unités seront considérées comme *égales entre elles.*

Si avec ces unités on forme divers groupes, ces groupes, au point de vue où nous sommes placés, ne différeront entre eux que par le *nombre* des unités dont chacun est composé.

Le *nombre* est une propriété primordiale et indéfinissable, et l'on n'ajoute guère à la clarté de cette idée en disant que *le nombre est la loi de formation d'une collection d'unités au moyen des unités individuelles.*

On a inventé, pour distinguer les nombres, des noms et des signes spéciaux, comme *un, deux, trois,* etc., ou 1, 2, 3, etc. Ces noms et ces signes ont été conçus d'une manière plus ou moins systématique, susceptible d'une plus ou moins grande extension. La méthode suivie dans cette nomenclature porte le nom de *numération.*

Toutes les méthodes systématiques de numération, les seules qui puissent s'étendre aux nombres un peu considérables, reposent sur le groupement successif des unités élémentaires en unités d'ordres de plus en plus élevés. Ces groupes étant formés, on considère le nombre total comme le résultat de la fusion de tous ces groupes partiels en un groupe unique, c'est-à-dire comme le résultat d'une *addition* de ces groupes.

L'*addition* est, en général, l'opération qui consiste à réunir deux ou plusieurs groupes d'unités en un seul, et, connaissant les nombres d'unités de chaque groupe partiel, à en conclure le nombre d'unités du groupe total.

Dans la numération ordinaire, on définit un nombre quelconque comme étant le résultat de l'addition de groupes des divers ordres successifs. D'après cela on peut dire que l'opération de la *numération* est un cas particulier de l'addition. Donc la numération jouira de toutes les propriétés de l'addition.

Nous commencerons par étudier les propriétés de l'addition dans le cas le plus simple, celui où les unités sur lesquelles on opère sont des objets réels et distincts.

Nous n'avons pas à nous occuper des moyens par lesquels on réalise physiquement cette réunion des groupes d'unités en un seul. Ces moyens varient avec la nature des unités; ainsi l'on opère soit en comptant les unes à la suite des autres les unités contenues dans les groupes successifs, soit en portant les unes au bout des autres les diverses unités de longueur qui composent plusieurs longueurs données, etc. Nous n'avons ici à nous occuper que des opérations faites au moyen des nombres.

Dans chacun des cas que nous venons de citer, le nombre des objets ne peut varier lorsqu'on les compte dans le même ordre, sans en introduire de nouveaux et sans en supprimer. Donc l'addition est une opération conduisant à un résultat unique et déterminé, ce que l'on exprime en disant que

1° *L'addition est une opération* UNIFORME.

Pour que l'addition d'un nombre à un autre n'altère pas la valeur de cet autre, il faut et il suffit que le premier nombre soit nul, ce que l'on désigne par le symbole zéro.

Si nous convenons d'appeler *module* d'une opération la valeur qu'il faut donner à l'un des termes de l'opération pour que l'introduction de ce terme n'ait pas d'influence sur le résultat, nous pourrons dire que

2° *Le* MODULE *de l'addition est* ZÉRO.

Si, en comptant une à une, à la suite les unes des autres, les unités qui composent deux groupes a et b, on commence une première fois par le groupe a, une seconde fois par le groupe b, on aura compté les mêmes unités, seulement dans un ordre différent, ce qui ne peut influer sur le nombre total, puisque les unités sont considérées comme identiques entre elles. Donc, dans l'addition de deux nombres, on peut intervertir l'ordre des termes. On verrait pareillement qu'il en est de même pour l'addition de plusieurs nombres. Cette propriété de l'addition s'énonce en disant que

3° *L'addition est une opération* COMMUTATIVE.

Si, dans l'addition d'un nombre quelconque de groupes, on remplace deux ou plusieurs groupes par leur somme, on verrait encore de la même manière que le changement de situation des unités n'en peut altérer le nombre. Donc on peut *associer* deux ou plusieurs groupes pour en former un seul, c'est-à-dire que

4° *L'addition est une opération* ASSOCIATIVE.

Telles sont les quatre propriétés fondamentales de l'addition, sur lesquelles reposent toutes les règles relatives à cette opération.

Nous appellerons *addition* toute opération possédant ces quatre propriétés.

L'addition est toujours possible, lorsque le champ de variation de la grandeur de même espèce que les grandeurs ajoutées est illimité, comme l'est, par exemple, la série des nombres. Mais il y a des cas où l'opération devient impossible, si le champ de variation de la grandeur est restreint. Ainsi l'on ne pourrait porter sur une longueur de 6 mètres la somme de deux longueurs, l'une de 3 mètres et l'autre de 4 mètres.

4.

On nomme opération *inverse* d'une opération donnée, considérée comme *directe*, une autre opération ayant pour but de trouver un des *termes* de l'opération directe, connaissant tous les autres termes et le résultat de cette dernière opération.

L'opération inverse de l'addition, la *soustraction*, a ainsi pour but, connaissant la somme $c = a + b$ de deux nombres et l'un de ces nombres a, de trouver l'autre nombre b.

La soustraction est, comme l'addition, une opération *uniforme;* mais elle ne jouit pas des autres propriétés de l'addition.

La somme c, dont a et b sont les parties, est dite *plus grande* que chacune de ces parties; ou, ce qui revient au même, chacune des parties a et b est dite *moindre* que la somme c.

Étant donnés deux nombres a, c, l'opération de la soustraction $c - a$ sera toujours possible si c est plus grand que a ou tout au moins égal à a. Dans ce dernier cas, le *reste* sera égal au module zéro de l'addition.

Si c est plus petit que a, la soustraction $c - a$ est impossible, et le symbole $c - a$ est absurde.

Si un polynôme a ses termes les uns additifs, les autres soustractifs, on obtiendra sa valeur en effectuant les opérations dans l'ordre indiqué, ce qui donne le même résultat que si l'on retranchait la somme des termes soustractifs de celle des termes additifs; mais, pour que cette dernière opération soit possible, il faut que la somme des termes additifs surpasse celle des termes soustractifs. Dans ce cas, on pourra intervertir à volonté l'ordre des termes du polynôme, en conservant à chacun d'eux son signe, et considérant chaque terme soustractif comme devant être retranché indifféremment des termes additifs qui le précèdent ou de ceux qui le suivent.

D'après cela, si l'on ajoute ou qu'on retranche à chacun des nombres a, b un même nombre d, tant que d sera moindre que b, la différence $(a - d) - (b - d) = a' - b'$ sera égale à $a - b$, et l'on aura $a - d > b - d$ ou $a' > b'$. Mais si le nombre d surpasse b, le reste $b - d$ prendra la forme *négative* $-(d - b)$, sans que le résultat final ait cessé d'être égal à $a - b$. On continuera, dans ce cas, à écrire $a' > b'$ ou $a' - b' > 0$, b' étant le nombre négatif $-(d - b)$. Donc, au point de vue de l'addition et de la soustraction, on devra considérer les symboles d'opération appelés *nombres négatifs* comme étant moindres que tout nombre positif et que zéro, et comme d'autant plus petits que leur valeur numérique est plus grande.

5.

L'addition de plusieurs quantités numériques égales entre elles se nomme *multiplication;* la valeur commune des quantités ajoutées est dite le *multiplicande;* le nombre des quantités ajoutées est le *multiplicateur,* et le résultat est le *produit.*

L'addition, étant généralement une opération uniforme, l'est encore dans le cas particulier des termes égaux. Donc

1° *La multiplication est une opération uniforme.*

En vertu de la commutativité et de l'associativité de l'addition, on peut remplacer l'addition des nombres égaux au multiplicande par celle des unités qui les composent, puis *associer* ensemble toutes les *premières* unités de chaque groupe, puis toutes les *deuxièmes* unités, et ainsi de suite. Il en résultera autant de groupes qu'il y avait d'unités dans le multiplicande, chaque groupe étant formé d'autant d'unités qu'il y en avait dans le multiplicateur. Il résulte de là que le produit n'est pas altéré lorsqu'on échange entre eux les rôles du multiplicande et du multiplicateur.

On verrait de même, en considérant un produit de trois facteurs $(a \times b) \times c$, ou, comme on écrit plus simplement $a \times b \times c$, que l'on peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs. Il suffit de considérer $a \times b$ comme un groupe de nombres a, et de réunir les c premiers nombres a de chaque groupe, puis les c deuxièmes nombres a, etc., jusqu'aux c $b^{\text{ièmes}}$ nombres a, ce qui donnera b groupes de c fois a, c'est-à-dire $a \times c \times b$.

De même pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs.

Par conséquent,

2° *La multiplication est une opération commutative.*

On démontre de même que

3° *La multiplication est une opération associative.*

Le produit de a par l'unité, ainsi que le produit de l'unité par a étant l'un et l'autre égaux à a, il en résulte que si l'un des facteurs d'une multiplication est l'unité, le produit sera égal à l'autre facteur. Donc

4° *Le module de la multiplication est l'*UNITÉ.

Si le multiplicande est le module zéro de l'addition, le résultat est évidemment nul.

Pour que la multiplication ne perde pas dans ce cas sa propriété commutative, et que l'on ait encore $a \times 0 = 0 \times a$, il suffit de convenir que la multiplication de a par zéro est une autre manière d'écrire $0 \times a$. Dès lors on pourra dire que

5° *Si l'un des facteurs d'un produit est zéro, le produit est aussi zéro.*

Si le multiplicande est un polynôme

$$\pm a \pm b \pm c \pm \ldots,$$

et que l'on effectue l'addition de m quantités égales à ce polynôme, on trouvera pour résultat un polynôme ayant pour termes ceux du multiplicande multipliés chacun par m et précédés chacun de son signe primitif. Donc

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots) \times m = (a \times m) \pm (b \times m) \pm (c \times m) + \ldots.$$

On énonce cette proposition en disant que

6° *La multiplication est une opération* DISTRIBUTIVE *relativement à l'addition et à la soustraction.*

6.

L'opération inverse de la multiplication est la *division,* qui a pour but, connaissant un produit et l'un de ses facteurs, de trouver l'autre facteur. En vertu de la commutativité de la multiplication, cette définition peut se ramener à dire que la division consiste à trouver combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Ce nombre se nomme *quotient* ou *rapport* des deux nombres donnés.

Cette opération est le plus souvent impossible, tant que l'on n'introduit dans les calculs que les nombres entiers; car, sur n nombres entiers consécutifs, un seul est divisible par n.

Mais l'Arithmétique enseigne à trouver dans tous les cas combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, c'est-à-dire à déterminer entre quels multiples consécutifs du diviseur le dividende est compris. On dit alors que *le quotient est connu à moins d'une unité près.*

7.

Si l'on a $a = b \times c$, on en tire, d'après les propriétés de la multiplication, n étant un nombre quelconque,

$$a \times n = (b \times n) \times c.$$

Donc on aura

$$\frac{a}{b} = c = \frac{a \times n}{b \times n}.$$

On ne change donc pas le rapport de deux nombres en multipliant ces deux nombres par un même nombre arbitraire.

Un nombre quelconque c peut être représenté par le rapport de deux nombres a et b, tels que a soit égal à $b \times c$. D'après ce que nous venons de voir, ces deux nombres a, b peuvent être remplacés par des équimultiples quelconques. On peut aussi supposer que ces deux nombres représentent des unités d'une même espèce quelconque.

L'égalité de deux rapports

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

s'appelle une *proportion*.

En multipliant les deux rapports par le produit $b \times b'$, on en déduira l'égalité des produits de chacun des dividendes par le diviseur de l'autre.

Réciproquement, si a est un multiple de b, l'égalité

$$(2) \qquad a \times b' = a' \times b$$

entraînera la proportion (1).

Si a était divisible par a', la même égalité (2) donnerait aussi la nouvelle proportion

$$(3) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

8.

Le produit de m facteurs égaux à a est dit la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de a, et l'on désigne cette puissance par le symbole a^m, a étant la *base* et m l'*exposant*.

Des propriétés de la multiplication résulte la règle pour la multiplication de deux puissances, exprimée par l'égalité

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

On en tire réciproquement, en posant $m + n = p$, la règle pour la division des puissances,

$$a^p : a^n = a^{p-n}.$$

Pour $p = n$, le quotient $a^n : a^n$ devient égal à l'unité, tandis que la formule précédente donne

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

On fera rentrer ce cas dans le cas général, en convenant que le symbole a^0 désigne l'unité, quel que soit a. Ainsi, tout nombre élevé à une puissance d'exposant égal au *module* zéro de l'addition représentera le *module* 1 de la multiplication.

Si l'on fait le produit de n puissances de même exposant m, on aura

$$a^m \times a^m \times a^m \times \ldots = (a^m)^n = a^{m \times n} = (a^n)^m.$$

On trouve encore l'égalité

$$\begin{aligned}(a^m \times a^{m'} \times a^{m''} \times \ldots)^n &= a^{mn} \times a^{m'n} \times a^{m''n} \times \ldots \\ &= a^{mn + m'n + m''n + \ldots}, \\ &= a^{(m + m' + m'' + \ldots) \times n}.\end{aligned}$$

Ces deux relations expriment des propriétés de l'élévation aux puissances analogues à la commutativité et à la distributivité dans la multiplication des exposants.

9.

L'élévation aux puissances a^b, ne jouissant pas de la commutativité relativement à ses deux termes a et b, donnera lieu à deux opérations inverses distinctes, répondant aux deux problèmes suivants :

1° Étant donnés la puissance $a^b = c$ et l'exposant b, trouver la base a;

2° Étant données la puissance $a^b = c$ et la base a, trouver l'exposant b.

Les cas de possibilité de ces deux opérations sont encore plus restreints que ceux de la division.

L'Arithmétique nous enseigne à trouver la *racine* a' de la plus grande $b^{\text{ième}}$ puissance contenue dans c, et aussi l'exposant b' de la plus haute puissance de a contenue dans le même nombre c. La solution de ces deux problèmes fournit ensuite les moyens d'obtenir d'autres solutions indéfiniment approchées.

10.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour les nombres absolus, qui représentent des objets isolés, inertes et invariables, s'appliquent également au cas où les unités sont des portions égales d'une même grandeur continue, telle qu'une ligne droite indéfinie, une grandeur angulaire, un temps, etc.

Si l'on juxtapose à la suite les unes des autres des unités de longueur, par exemple, ces unités formeront une ligne unique, que l'on pourra représenter par le *nombre* des unités juxtaposées. Si l'on place de même les unes au bout des autres plusieurs des longueurs ainsi obtenues, on formera une ligne contenant un nombre d'unités égal à la somme des nombres des unités contenues dans les diverses parties, et l'on appellera cette ligne la *somme* de ces mêmes parties.

Il existera ainsi une correspondance exacte entre l'addition des nombres abstraits d'unités et la juxtaposition des segments représentés par ces nombres. D'après cela, cette juxtaposition pourra être désignée par le même nom d'*addition* que l'opération arithmétique, et il est facile de vérifier qu'elle possède toutes les propriétés que nous avons reconnues dans l'addition des nombres d'unités d'espèce quelconque.

Il en sera de même pour la soustraction des longueurs, tant que l'on considèrera celles-ci comme des grandeurs existantes et invariables. On ne pourra, par exemple, soustraire une plus grande longueur d'une plus petite.

Maintenant, au lieu de considérer les lignes comme ayant des grandeurs existantes, et susceptibles d'augmentation indéfinie, mais ne pouvant décroître au delà de zéro, introduisons dans nos symboles l'idée de variation et de mouvement, et, au lieu de cette forme immobile de la ligne considérée en elle-même, substituons-y la notion d'un symbole d'opération, d'un *vecteur* indiquant qu'un point mobile doit se transporter à une certaine distance, sur une certaine droite et dans un certain sens. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur le calcul des quantités *positives* subsistera; mais nous pourrons maintenant généraliser les opérations que nous avons décrites, et arriver à faire disparaître par ce moyen les cas d'impossibilité que nous avons rencontrés.

Étant donnée une droite indéfinie dans les deux sens, si un point, mobile sur cette droite, se déplace une première fois d'une distance de a unités dans un certain sens, que nous appellerons le sens *direct* pour le distinguer du sens opposé ou sens *rétrograde;* s'il se déplace une seconde fois de b unités dans le même sens direct, l'effet définitif de ces deux déplacements successifs sera identique à celui qui résulterait d'un déplacement unique, dans le même sens, et d'une distance de $a + b$ unités de longueur.

Si l'on étudie maintenant les propriétés de cette opération de déplacement, on reconnaît que :

1° Le résultat de ces deux déplacements combinés sera *uniforme,* comme celui de l'addition des nombres a et b;

2° Si l'on permute l'ordre des déplacements, le résultat ne changera pas;

3° Si l'on considère plusieurs déplacements successifs, on pourra remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par le déplacement correspondant à la somme de leurs longueurs;

4° Si l'un des déplacements est nul, le déplacement total se réduira à l'autre déplacement partiel.

Donc l'opération de la combinaison de plusieurs déplacements de même sens jouit des mêmes propriétés que l'addition des nombres, et pourra, par conséquent, recevoir le nom d'*addition* des déplacements.

11.

Considérons maintenant deux déplacements de sens contraires. Si nous supposons, pour fixer les idées, que le premier ait lieu dans le sens direct et le second dans le sens rétrograde, il est clair que le résultat de ces deux déplacements équivaudra à un déplacement unique, dirigé dans le même sens que celui des deux premiers qui a la plus grande longueur, et ayant lui-même une longueur égale à la différence des longueurs des déplacements combinés. Ainsi, si a et b sont les longueurs données, le déplacement résultant sera,

pour $a > b$, un déplacement de longueur $a - b$ dans le sens direct, et, pour $a < b$, un déplacement de longueur $b - a$ dans le sens rétrograde.

Donc, si dans le calcul on se sert de symboles représentant uniquement la longueur sans indiquer la direction, ce cas le plus simple de la combinaison de deux déplacements opposés présentera deux solutions différentes, qui non seulement seront exprimées par deux notations différentes, $a - b$ et $b - a$, mais qui exigeront, de plus, qu'on y joigne la désignation du sens dans lequel doit être compté le résultat.

Pour trouver le moyen de remédier à ces inconvénients, remarquons d'abord que l'opération en question, considérée en elle-même, quel que soit le sens du résultat, jouit des mêmes propriétés que l'addition. En effet,

1° Le résultat d'un déplacement a, direct ou rétrograde, suivi d'un déplacement b, direct ou rétrograde, équivaudra à un déplacement unique et déterminé, soit direct, soit rétrograde;

2° Le résultat ne change pas si l'on effectue le déplacement b avant le déplacement a, en leur conservant leurs sens respectifs;

3° Si l'on considère trois déplacements successifs a, b, c, déterminés chacun en grandeur et en sens, on pourra obtenir le résultat de leur combinaison soit en combinant a avec b, et le résultat avec c, soit en combinant a avec le résultat de b et de c;

4° Le résultat est égal à a, si b est de longueur nulle.

On reconnaît ici les propriétés fondamentales de l'addition des nombres, et l'on est dès lors conduit à donner le nom d'*addition* à la combinaison des déplacements de sens différents, en convenant de faire représenter aux lettres $a, b, c, \ldots$, non plus seulement les longueurs des déplacements, mais encore leurs sens respectifs.

Dès lors le symbole $a + b$ ne signifiera plus que la longueur a doit être augmentée de la longueur b, mais que le déplacement a, de longueur et de sens donnés, doit être suivi du déplacement b, de longueur et de sens donnés. Cette nouvelle opération pourra indifféremment correspondre à une addition ou à une soustraction des longueurs a et b.

Si nous désignons par c le résultat des deux déplacements a et b, nous pourrons écrire, l'opération directe étant commutative,

$$a + b = c, \qquad \text{ou} \qquad b + a = c.$$

L'opération inverse, qui consiste, étant données la somme c et l'une des deux composantes a ou b, à déterminer l'autre composante, portera naturellement le nom de *soustraction*, et s'indiquera par le même signe que la soustraction des nombres. On aura ainsi

$$a = c - b, \qquad \text{ou} \qquad b = c - a.$$

Or, cette soustraction, qui change le résultat du déplacement $c = a + b$ dans le seul déplacement a, s'opère évidemment en faisant succéder au déplacement c un déplacement égal et de sens contraire au déplacement b. Nous pouvons donc considérer le symbole de soustraction $- b$ comme représentant un déplacement égal et de sens contraire à b; de sorte que le signe — peut être interprété comme un symbole indiquant le renversement du sens d'un déplacement.

Dans le cas particulier où a et b sont deux déplacements d'égale longueur et de sens opposés, la succession de ces deux déplacements ramènera le point décrivant à sa place primitive, et par suite le déplacement résultant ne changera pas la position initiale; ce déplacement sera donc égal au *module* de l'opération, c'est-à-dire à zéro. On aura donc dans ce cas

$$a + b = 0.$$

L'opération inverse de cette addition donnera

$$a = 0 - b, \qquad \text{ou} \qquad b = 0 - a,$$

ce que l'on peut écrire plus simplement

$$a = - b, \qquad \text{ou} \qquad b = - a.$$

D'après cela, l'addition du déplacement a peut être remplacée par la soustraction du déplacement b, et *vice versa*. Cela revient à incorporer au symbole a ou b le signe + ou — dont il est précédé, et alors tout polynôme à termes additifs et soustractifs deviendra, par cette incorporation, un polynôme à termes tous additifs. Ainsi $a - b - c + d$ pourra être considéré comme représentant la résultante des déplacements a, $-b$, $-c$, d, c'est-à-dire comme égal à $a + (-b) + (-c) + d$, où l'on peut remplacer $-b$ et $-c$ par b' et c', ce qui donne

$$a + b' + c' + d.$$

On voit que, dans le cas des quantités *dirigées*, c'est-à-dire des quantités pouvant croître indéfiniment dans deux sens opposés, telles que les déplacements sur une ligne droite indéfinie, les quantités angulaires, le temps, etc., l'addition et la soustraction ne constituent plus, au fond, qu'une seule et même opération, appliquée dans l'un ou l'autre des deux sens, et que la soustraction, pouvant toujours se transformer en addition, pourra participer alors aux propriétés fondamentales de l'addition.

Ainsi, dans le cas, où nous sommes placés, d'un champ de variation illimité dans les deux sens, la soustraction, comme l'addition, sera toujours possible.

Pour abréger le langage, on convient d'appeler *quantités positives* les symboles qui représentent des déplacements dans le sens *direct*, et *quantités négatives* les symboles qui représentent des déplacements dans le sens *rétrograde*.

On prend généralement, pour représenter les quantités positives ou négatives, des segments de l'axe fixe pris dans le sens direct ou dans le sens rétrograde à partir de l'origine des distances.

Nous désignerons à l'avenir par le nom de *vecteurs* ces symboles de déplacement d'un point mobile.

12.

L'addition de m vecteurs égaux entre eux (en longueur et en direction) s'appelle la *multiplication* de l'un de ces vecteurs par m. Le *produit* sera de même signe que le multiplicande.

Les deux nombres qui représentent le multiplicande et le multiplicateur sont commutatifs entre eux, c'est-à-dire, par exemple, qu'un mobile parcourt la même distance en marchant pendant 6 secondes avec une vitesse de 2 mètres, ou pendant 2 secondes avec une vitesse de 6 mètres.

On peut donc procéder à la multiplication des vecteurs de la même manière que pour les quantités abstraites, la nature des unités étant déterminée par des considérations étrangères aux règles de l'Arithmétique.

On peut aussi étendre la commutativité aux signes. Ainsi, si l'on a à multiplier un vecteur négatif $-a$ par m, le produit sera formé de $a \times m$ unités négatives, et peut être exprimé par $-(a \times m)$, c'est-à-dire par un vecteur de longueur égale à $a \times m$ unités portées dans le sens négatif. Or on parviendrait au même résultat en multipliant le vecteur changé de signe $+a$ par le multiplicateur $-m$ changé de signe, pourvu que l'on définît la multiplication par $-m$ comme consistant à multiplier le multiplicande par le nombre m, et à changer ensuite le signe du produit. On satisfait de cette manière au principe de permanence des règles de calcul.

Ce dernier résultat ne changera pas, si l'on échange entre elles les natures des facteurs en même temps que leurs signes. Ainsi le vecteur $-a$, multiplié par le nombre m, donnera le même produit que le vecteur $-m$ multiplié par le nombre a.

On peut donc maintenant appliquer cette nouvelle opération de la multiplication par un nombre abstrait *négatif* au cas où le vecteur considéré $-b$ serait négatif, et le produit par $-m$ s'obtiendra en multipliant d'abord $-b$ par m, puis en changeant le signe du produit $-(b \times m)$, ce qui donnera $+(b \times m)$ pour le produit de $-b \times -m$. De là la règle des signes dans la multiplication.

13.

Les propriétés de la multiplication des vecteurs sont les mêmes que pour les nombres absolus, et conduisent aux mêmes règles pour la multiplication de deux polynômes, l'un ayant pour termes des vecteurs, l'autre étant composé soit de nombres absolus, soit de nombres positifs et négatifs, qui se comportent comme des vecteurs.

14.

Nous avons vu que la nature de chacun des deux facteurs d'un produit n'influe en rien sur la manière d'obtenir la valeur numérique du produit. On peut donc, à volonté, faire représenter aux symboles qui désignent les facteurs et le produit soit des nombres abstraits, soit des unités de nature quelconque, pourvu que les nombres ne soient pas altérés.

D'après cela, la division de deux vecteurs ne différera de la division des nombres absolus que par la règle qu'il faudra observer pour les signes et qui coïncide avec celle que nous avons trouvée pour la multiplication.

De même que nous avons pu représenter un nombre absolu, d'une infinité de manières, par le rapport de deux grandeurs absolues, de même tout nombre abstrait, positif ou négatif, pourra, d'une infinité de manières, être représenté par le rapport de deux vecteurs, le signe de l'un de ces vecteurs pouvant être choisi à volonté.

15.

Toutes les propriétés des rapports démontrées pour les nombres absolus (n° 7) s'étendent aussi aux vecteurs, en ayant égard aux signes.

De la généralisation de la multiplication découle celle de l'élévation aux puissances.

Le produit d'un nombre pair de facteurs, tous positifs ou tous négatifs, est toujours positif.

Le produit d'un nombre impair de facteurs, tous positifs ou tous négatifs, est de même signe que chacun des facteurs.

De là résulte que :

1° Toute puissance de degré pair d'un nombre, soit positif, soit négatif, est positive;

2° Toute puissance de degré impair d'un nombre, soit positif, soit négatif, est de même signe que ce nombre.

Il s'ensuit de là, réciproquement, que la puissance de degré pair a^{2n} peut provenir de l'élévation à la puissance $2n$ soit du nombre $+a$, soit du nombre $-a$. Donc l'extraction de la racine $(2n)^{\text{ième}}$ d'un nombre positif *n'est pas une opération uniforme,* puisqu'elle peut être représentée par deux nombres différents $+a$ et $-a$.

L'extraction de la racine $(2n)^{\text{ième}}$ d'un nombre négatif quelconque est une opération impossible, aucun nombre, soit positif, soit négatif, ne pouvant répondre à la question.

L'extraction d'une racine de degré impair $2n+1$ d'une puissance parfaite a^{2n+1} est possible et l'est d'une seule manière, quel que soit le signe de cette puissance.

L'autre problème inverse de l'élévation aux puissances, la recherche de l'exposant est, comme l'extraction des racines, sujet à des exceptions sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

16.

Jusqu'ici l'opération inverse de la multiplication n'a été possible que dans des cas particuliers, ceux où le dividende est un multiple exact du diviseur.

Cette impossibilité est absolue, toutes les fois que les unités que l'on considère sont, par leur nature, indivisibles. Ainsi il est absolument impossible de distribuer dix hommes en trois groupes égaux. Une roue dentée ayant 35 dents, on ne pourra jamais déterminer le nombre des dents de la roue à laquelle elle transmet le mouvement, de manière que celle-ci tourne quatre fois plus vite.

Mais, dans le cas des nombres d'unités appartenant à des grandeurs continues, comme les distances, les temps, etc., et dans le cas des signes d'opération représentés par ces grandeurs, le choix de l'unité étant essentiellement arbitraire, on pourra toujours concevoir cette unité divisée en autant de parties égales que l'on voudra, et prendre une de ces parties pour nouvelle unité. Cette division de l'unité s'opère par des moyens spéciaux à chaque espèce de quantités, soit exactement, soit avec une approximation indéfinie.

Dans cette hypothèse, si l'on propose de diviser un nombre par un nombre b, on commencera par partager chacune des unités de a en b parties égales. Les a unités contiendront ensemble $a \times b$ de ces parties, et par suite, la quantité représentée par le nombre a d'unités primitives le sera maintenant par le nombre $a \times b$ de nouvelles unités.

Ce nombre étant à présent divisible par b, le quotient de la division sera représenté par a nouvelles unités. Puisque chacune de celles-ci est le résultat de la division de l'ancienne unité par b, on pourra la représenter par le symbole $\frac{1}{b}\cdot$ Donc l'ensemble des a nouvelles unités sera égal à a fois la quantité $\frac{1}{b}$, ou à $\frac{1}{b} \times a$, relativement à l'ancienne unité.

Donc le résultat de la division de a par b est égal à a fois la $b^{\text{ième}}$ partie de l'ancienne unité, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \times a,$$

ce que l'on exprime en disant que le quotient de deux nombres est une *fraction* ayant le dividende pour *numérateur* et le diviseur pour *dénominateur*.

Nous emploierons désormais la notation $\frac{a}{b}$ pour désigner la valeur commune des résultats de ces deux opérations.

On peut facilement vérifier que cette fraction $\frac{1}{b} \times a$, étant multipliée par b, reproduit le dividende a.

Si b est un nombre absolu, $\frac{a}{b}$ sera de même signe que a; si b est un nombre négatif, $\frac{a}{b}$ sera de signe opposé à celui de a, comme cela résulte des règles de la multiplication de $\left(\frac{1}{b} \times a\right)$ par b.

La multiplication qui donne $\frac{1}{b} \times a$ pourra être considérée comme étant commutative, si dans le produit $a \times \frac{1}{b}$ on définit la multiplication par $\frac{1}{b}$ comme équivalente à la division par b.

Si, au lieu de multiplier $\frac{1}{b}$ par a, on multipliait $\frac{c}{b}$ ou $\frac{1}{b} \times c$ par a, on voit facilement que l'on aurait les diverses égalités

$$\left(\frac{1}{b}\times c\right)\times a=\frac{1}{b}\times(c\times a)=\frac{1}{b}\times(a\times c)=\left(\frac{1}{b}\times a\right)\times c$$
$$=\frac{c}{b}\times a=\frac{c\times a}{b}=\frac{a\times c}{b}=\frac{a}{b}\times c.$$

Il s'ensuit de là que l'expression $\frac{c}{b} \times a$ pourra être remplacée par $a \times \frac{c}{b}$, si l'on définit le produit d'un nombre entier par une fraction comme étant obtenu en multipliant l'entier par le numérateur de la fraction, et en divisant le produit par le dénominateur de cette même fraction.

Si l'on remplace maintenant l'entier a par une fraction $\frac{a}{d}$, il résulte de la même définition que le produit de $\frac{a}{d}$ par $\frac{c}{b}$ est égal à $\frac{a \times c}{d \times b}$. De même pour un plus grand nombre de facteurs.

17.

La multiplication des fractions se ramenant à deux multiplications de nombres entiers, l'une et l'autre commutatives et associatives, on voit que la multiplication des fractions jouit également de ces deux propriétés.

De l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ il résulte que toute division par un nombre b peut être changée en une multiplication par la fraction $\frac{1}{b}$.

De même $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\left(a\times\frac{1}{b}\right)\times\left(c\times\frac{1}{d}\right)=a\times\frac{1}{b}\times c\times\frac{1}{d}.$

Donc, à l'aide des fractions on peut changer toutes les divisions en multiplications.

De l'égalité $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$ on conclut que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est le quotient de la division de $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, ce qui donne la règle connue de la division des fractions.

De la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ on conclut, en faisant $d = c$, d'où $\frac{c}{d} = \frac{c}{c} = 1$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}.$$

De là on tire les règles pour la réduction au même dénominateur et pour la simplification des fractions.

On a $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{1}{d} \times a + \frac{1}{d} \times b = \frac{1}{d} \times (a + b) = \frac{a + b}{d}$, d'où l'on conclut aisément la propriété *distributive* de la multiplication des fractions par rapport à l'addition.

De là résulte encore $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, etc.

Tous ces résultats subsistent lorsqu'on remplace les quotients de nombres entiers par des quotients de nombres fractionnaires.

18.

Les nombres entiers et les nombres fractionnaires s'appellent d'un nom commun *nombres rationnels*.

Les règles pour l'élévation aux puissances des nombres rationnels sont les mêmes que pour les nombres entiers. On a, m et n désignant des *entiers* positifs,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Il en résulte, pour $p > n$,

$$\frac{a^p}{a^n} = a^{p-n}.$$

Pour $p = n$, le quotient serait l'unité, tandis que la règle précédente donnerait pour ce quotient l'expression a^0. Pour que la règle subsiste, il suffit de définir, comme nous l'avons déjà fait au nº 8, la puissance d'exposant zéro d'un nombre quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, mais différent de zéro, comme représentant l'unité.

Pour $p < n$, le quotient $\frac{a^p}{a^n}$ est égal à

$$\frac{1}{a^{n-p}},$$

tandis que la règle ci-dessus donnerait

$$a^{n-p} = a^{-(p-n)}.$$

Cette règle subsistera donc, si l'on définit une puissance négative a^{-m} comme représentant l'unité divisée par a^m.

On peut aisément s'assurer que, d'après ces conventions, les règles établies plus haut pour le calcul des puissances positives s'appliqueront toutes aux puissances à exposants négatifs.

On pourra ainsi mettre une fraction sous la forme du produit de son numérateur par la puissance de degré — 1 de son dénominateur.

19.

On voit maintenant comment l'introduction des fractions permet d'étendre généralement aux proportions entre nombres fractionnaires toutes les propriétés que nous avions établies, avec des restrictions, pour le cas des nombres entiers.

Les résultats des quatre premières opérations sur les nombres entiers ou fractionnaires peuvent désormais s'exprimer exactement par des fractions.

On peut aussi transformer, si l'on y trouve avantage, un résultat fractionnaire en un autre résultat, soit exact, soit approché, exprimé au moyen de fractions d'espèce choisie d'avance.

Quant aux racines des nombres entiers, à la recherche desquelles se ramène l'extraction des racines des fractions, on démontre que celles qui ne sont pas exprimables en nombres entiers ne le sont pas non plus en nombres fractionnaires. Mais on peut, à l'aide des fractions, trouver des valeurs dont les $m^{\text{ièmes}}$ puissances différeront aussi peu que l'on voudra d'un nombre donné quelconque, sauf restriction dans le cas où le nombre proposé serait négatif et la racine cherchée d'indice pair.

20.

D'après ce que nous venons de voir, il n'existe aucun nombre fractionnaire qui, élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance, reproduise un nombre entier ou fractionnaire, pris au hasard, en dehors des exceptions, relativement très rares, que présentent les nombres qui sont des puissances exactes.

Mais nous venons de voir aussi qu'il existe une infinité de fractions dont les puissances $n^{\text{ièmes}}$ approchent d'un nombre donné a, les unes formant une série croissante de valeurs dont les $n^{\text{ièmes}}$ puissances approchent de a par défaut, les autres formant une série décroissante donnant des approximations par excès, et cela de telle sorte qu'un terme de la première série pourra différer aussi peu que l'on voudra d'un terme de la seconde, sans que cette différence puisse jamais devenir nulle.

Cela tient à ce que la série des nombres fractionnaires peut croître par degrés aussi rapprochés que l'on voudra, mais en laissant toujours des lacunes qu'il est impossible de remplir; tandis qu'une grandeur continue, comme une ligne, un angle, un temps, etc., ne peut varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On peut donc, lorsque la série numérique fait défaut, employer, comme mode de représentation, des grandeurs linéaires, par exemple, au moyen desquelles il est possible, comme on l'a déjà vu, d'exprimer les nombres soit entiers, soit fractionnaires.

Par exemple, si l'on considère, dans un carré ABDC, le côté AB et la diagonale BC, une construction très simple montre que le carré ABDC est divisible en quatre triangles égaux, tandis que le carré construit sur BC contient huit de ces triangles; d'où l'on conclut que le carré de la diagonale est double de celui du côté. Le rapport des aires de deux rectangles, dont les bases sont commensurables entre elles ainsi que les hauteurs, étant égal au produit du rapport des bases par celui des hauteurs, il en résulte que les aires de deux carrés dont les côtés sont commensurables entre eux auront pour rapport la deuxième puissance du rapport des côtés. Si l'on compare le carré de AB à un carré dont le côté a pour rapport avec AB une quelconque des fractions dont le carré approche de 2 par défaut ou par excès, ce nouveau carré aura une aire qui approchera autant que l'on voudra de l'aire 2 du carré de la diagonale, et celui-ci sera dit la *limite* du carré variable correspondant tour à tour aux *fractions approchées*.

On démontre que, si deux séries de grandeurs, l'une croissante, l'autre décroissante, sont telles que la différence d'un terme de la première avec un terme de la seconde puisse décroître indéfiniment, ces grandeurs ne peuvent pas s'approcher indéfiniment de deux limites différentes, de sorte que la limite commune des deux suites est connue dès que l'on peut trouver une quantité qui soit à la fois plus grande que chacune des quantités de la série croissante et plus petite que chacune des quantités de la série décroissante.

Dans l'exemple actuel, les lignes dont les carrés approchent indéfiniment du double du carré de AB ont pour limite commune la diagonale AD. Les fractions que représentent ces lignes n'ont pas de limite exprimable en nombres. Si cette limite était exprimable en nombre, on la désignerait par $\sqrt{2}$. Bien qu'aucun nombre ne puisse représenter la diagonale, si l'on interprète géométriquement les opérations d'arithmétique, la construction du côté du carré double sera possible, et comme cette construction correspond à l'extraction de la racine carrée arithmétique toutes les fois que celle-ci est possible, on pourra la désigner, pour le cas actuel, par le signe $\sqrt{2}$.

Or l'Arithmétique permettant de calculer deux suites de nombres correspondant aux deux séries de longueurs approchées, le symbole $\sqrt{2}$ exprimera quelles sont les opérations à faire pour obtenir les deux suites de nombres représentant des longueurs dont la limite est le résultat de l'opération géométrique $\sqrt{2}$.

Ces considérations sont indépendantes de la possibilité de la construction géométrique de la limite des deux suites de valeurs approchées. Il suffit que l'existence de ces deux suites soit démontrée, et que l'on puisse soit construire, soit calculer leurs termes. Faute d'une détermination directe et exacte de la limite, on aura toujours dans la connaissance de ces deux suites un moyen pour comparer cette limite inconnue avec une grandeur donnée, et l'on constatera que cette grandeur diffère de la limite, lorsqu'on pourra trouver un terme de la suite croissante plus grand ou un terme de la suite décroissante plus petit que cette grandeur. Si, au contraire, on reconnaît qu'il n'y a aucun terme de la suite croissante qui soit plus grand, ni aucun terme de la suite décroissante qui soit plus petit, alors la grandeur proposée sera la limite elle-même.

On désignera par un même symbole quelconque et la grandeur continue qui est la limite des *valeurs approchées*, et la suite indéfinie des nombres rationnels qui représentent ces mêmes valeurs approchées. Ce symbole, qui rappelle la loi de formation des *valeurs approchées* d'une quantité incommensurable avec l'unité, se nomme, pour abréger, un nombre *incommensurable.*

Cette imperfection de l'Arithmétique, qui ne peut représenter exactement qu'une partie infiniment restreinte des quantités continues, est sans inconvénient aucun dans les applications à l'étude de la nature, puisque les opérations d'approximation numérique peuvent toujours être poussées assez loin pour que l'erreur commise échappe à nos moyens d'observation.

21.

L'introduction des nombres incommensurables rendra toujours possibles les deux opérations inverses de celle de l'élévation aux puissances pour des valeurs entières ou fractionnaires de la *base.* En effet, l'Arithmétique fournit les moyens de trouver les valeurs de x qui satisfont à l'une ou l'autre des équations

$$x^m = b, \qquad a^x = b,$$

la première pour m entier (et pour b positif si m est pair), la seconde pour a positif ainsi que b.

Si l'exposant m est divisible par n, la racine $n^{\text{ième}}$ de a^m sera $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, puisque $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$. Le principe de permanence des règles de calcul nous conduit à continuer l'emploi de la formule

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

quels que soient les entiers m et n, et d'introduire ainsi l'emploi des exposants fractionnaires comme équivalent à celui des radicaux. On vérifierait aisément que les règles relatives aux puissances entières ont lieu également pour les puissances fractionnaires.

On peut même considérer $\frac{m}{n}$ comme étant une quelconque des fractions qui convergent vers un certain nombre incommensurable, et l'on verra qu'en même temps $a^{\frac{m}{n}}$ convergera vers une certaine limite déterminée, qui sera une puissance de a d'exposant incommensurable, et qui pourra, dans certains cas, être elle-même un nombre commensurable.

Une puissance d'exposant incommensurable d'une base positive a une seule valeur. Si la base est négative, la même puissance n'est plus exprimable en nombres commensurables ou incommensurables.

Si la base a est positive, ainsi que la puissance b, l'équation $a^x = b$ est toujours résoluble, et d'une seule manière. Si $a > 1$, l'exposant x sera positif ou négatif, suivant que b lui-même sera > 1 ou < 1; l'inverse aura lieu pour $a < 1$.

22.

Ainsi, à l'aide des nombres positifs ou négatifs, entiers ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables, on peut dans tous les cas exécuter les opérations d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, d'élévation aux puissances sur les nombres de toutes les espèces désignées.

Il y a encore toutefois exception pour l'extraction des racines, lorsque, la puissance ayant une valeur négative, l'indice de la racine est un nombre pair ou un nombre incommensurable. Il en peut être de même pour la recherche de l'exposant, lorsque l'équation $a^x = b$, et que a et b ne sont pas tous les deux positifs.

De plus, l'extraction des racines peut admettre, selon les cas, 2, 1 ou 0 solutions.

Ces irrégularités, analogues à celles que nous avons vues disparaître dans les cas traités jusqu'ici, grâce aux extensions apportées à la notion de quantité, nous font soupçonner encore cette fois la nécessité d'apporter à cette notion une généralisation nouvelle.

23.

Jusqu'à présent, nous avons considéré les nombres *dirigés*, c'est-à-dire les symboles représentant des quantités telles que les déplacements rectilignes, qui peuvent se faire parallèlement à une droite donnée et dans deux sens opposés.

Considérons maintenant des déplacements rectilignes dirigés d'une manière quelconque dans le plan, et que l'on pourra représenter par une longueur rectiligne faisant un angle donné avec une direction fixe, prise pour origine des angles. Nous donnerons encore le nom de *vecteurs* à ces symboles de déplacement.

L'opération du déplacement d'un point d'une position à une autre peut être désignée de plusieurs manières, dont la plus simple est celle qui consiste à employer deux nombres, l'un exprimant la longueur du déplacement, et l'autre exprimant l'angle que fait la direction du déplacement avec l'origine des angles, ce second nombre étant placé sous forme d'indice à la droite du premier. Ainsi le déplacement dont la longueur est r et qui fait avec l'origine des angles un angle p, compté dans le sens des angles croissants, sera représenté, du moins provisoirement, par le symbole r_p. Le nombre r est dit la *longueur* ou le *module* du vecteur ; p est son *argument*.

24.

Si l'on suppose une portion quelconque du plan liée invariablement avec le point décrivant du vecteur, et entraînée avec ce point de manière que la droite indéfinie dont le vecteur r_p faisait d'abord partie soit assujettie à glisser le long de r_p, tous les points du plan décriront des droites égales et parallèles à r_p, de sorte que le vecteur r_p ne représente pas seulement le déplacement déterminé d'un point, mais encore le déplacement d'une portion de plan, parcourant une longueur donnée r, parallèlement à une droite d'inclinaison donnée p.

On voit, par conséquent, que, si l'on considère le déplacement r_p sous ce dernier point de vue, la ligne r_p pourra être remplacée par toute autre droite égale, parallèle et de même sens.

25.

Si l'on fait parcourir au point décrivant d'abord une ligne AB, puis une seconde ligne BC (le sens du parcours étant indiqué par l'ordre des lettres), ce point sera finalement transporté de A en C, comme il l'aurait été par le déplacement unique AC. Donc, la combinaison de deux déplacements successifs AB, BC pouvant être remplacée par le déplacement AC, on aura le droit de la définir comme *égale* à AC.

Examinons maintenant quelles sont les propriétés de cette combinaison de déplacements.

1° Cette combinaison est *uniforme*.

2° Le vecteur AC se réduit à AB, lorsque la longueur de BC se réduit à zéro, quelque direction que l'on puisse attribuer à la longueur évanouissante. De même, si AB s'évanouit, AC se réduit à BC. Donc le *module* de l'opération est *zéro*.

3° Étant donnés deux vecteurs a et b, si le point mobile parcourt une première fois a, puis b, et une seconde fois b, puis a, il aura parcouru les côtés d'un parallélogramme, pour arriver chaque fois d'une extrémité à l'autre de la même diagonale. Donc l'opération est *commutative*.

4° Si l'on parcourt d'abord AB et BC, ce qui revient à parcourir AC, puis, que l'on parcoure CD; si, d'autre part, on parcourt AB, puis le résultat BD des déplacements BC et CD; on aura, dans les deux cas, pour résultat final le même déplacement AD. On en conclut que l'opération est *associative.*

Donc l'opération de la combinaison des déplacements consécutifs possède toutes les propriétés caractéristiques de l'addition. Elle pourra donc être appelée elle-même *addition des vecteurs*, et représentée par le signe $+$.

26.

L'opération inverse de l'addition $AB + BC = AC$ consiste à trouver un déplacement BC qui, ajouté à AB, reproduise AC. Or, si l'on désigne par CB le vecteur de même longueur que BC, mais de sens opposé, on aura, d'après la définition de l'addition $AC + CB = AB$. Si l'on représente par le signe — l'opération inverse de l'addition, on aura donc $AC - BC = AC + CB = AB$. Donc la soustraction s'effectue en ajoutant au terme additif le terme soustractif pris en sens contraire. Ainsi, comme nous l'avons déjà vu dans la théorie des déplacements positifs ou négatifs, l'addition d'un vecteur se change en soustraction, et *vice versa*, lorsqu'on renverse le sens dans lequel ce vecteur est parcouru.

Ce renversement du sens d'un vecteur équivaut à l'augmentation ou à la diminution de son argument de deux angles droits, de sorte que

$$r_{p\pm\pi} = - r_p.$$

En général, un vecteur r_p ne change pas lorsqu'on augmente son argument d'un multiple pair, positif ou négatif, de la demi-circonférence; il changera seulement de signe, si l'on augmente son argument d'un multiple impair quelconque de la demi-circonférence; c'est-à-dire que l'on a

$$r_{p+2k\pi} = r_p,$$

$$r_{p+(2k+1)\pi} = - r_p,$$

ou, en réunissant ces deux formules en une seule,

$$r_{p+k\pi} = (-1)^k r_p.$$

Si l'on a plusieurs vecteurs de même argument à combiner ensemble par addition ou par soustraction, on se retrouvera dans le même cas que dans l'addition des *lignes dirigées,* et si l'on opère par la même règle que celle que nous avons suivie pour l'addition des quantités positives et négatives, on obtiendra pour résultat un vecteur ayant pour longueur l'excès de la somme des longueurs des vecteurs dont la direction répond à l'angle p, diminuée de la somme des longueurs des vecteurs de direction opposée, cette longueur pouvant être positive ou négative.

Cela revient à introduire des vecteurs de longueur négative, que l'on pourra changer en vecteurs de longueur positive en augmentant l'argument d'une demi-circonférence. Ainsi pour changer le signe d'un vecteur, il suffira de changer sa longueur de signe, ce qui équivaut à augmenter l'argument de deux angles droits,

$$-r_p = (-r)_p = r_{p\pm\pi}.$$

L'addition et la soustraction des vecteurs parallèles à une même droite donne donc pour résultat

$$\begin{aligned} r_p + r'_p - r''_p \pm \ldots &= r_p + r'_p + (-r'')_p \pm \ldots \\ &= (r + r' - r'' \pm \ldots)_p. \end{aligned}$$

27.

La multiplication d'un vecteur r_p par un nombre entier ρ, revient à l'addition de ρ vecteurs égaux à r_p, ce qui donne

$$r_p \times \rho = (r\rho)_p.$$

Le résultat est le même, comme on le voit facilement, dans le cas où ρ est fractionnaire ou incommensurable.

Si l'on porte sur l'origine des angles l'unité de longueur $O1$ et la longueur $O\rho$ dont le rapport à $O1$ est le nombre ρ, on obtiendra le produit du vecteur $OA = r_p$ par $\rho = \dfrac{O\rho}{O1}$ en construisant sur la base $O\rho$, homologue à $O1$, un triangle $O\rho B$

semblable au triangle $O1A$; le côté OB du nouveau triangle représentera le vecteur $OA \times \rho$.

Si l'on fait maintenant tourner le triangle $O\rho B$ autour de O d'un angle $\varphi = \rho O \rho' = BOB'$, les vecteurs ρ et $OB = (r \times \rho)^p$ seront changés en ρ_φ et $(r \times \rho)_{p+\varphi}$. Examinons les propriétés de cette nouvelle opération.

1° Elle est *uniforme.*

2° Le résultat $(r \times \rho)_{p+\varphi}$ étant donné par deux opérations commutatives et indépendantes entre elles, une multiplication de longueurs et une addition d'arguments, l'opération est *commutative.*

3° Si l'on introduit un autre opérateur de plus $\rho'_{\varphi'}$ le résultat des deux opérations consécutives sera $(r \times \rho \times \rho')_{p+\varphi+\varphi'}$. Les opérations qui donnent la longueur et l'argument étant associatives, l'opération finale l'est aussi. Donc la construction est une opération *associative.*

4° Si l'un des vecteurs a une longueur égale à l'unité et un argument nul, c'est-à-dire s'il se réduit à l'unité absolue, le résultat se réduit à l'autre vecteur. Donc le *module* de cette opération est l'*unité.*

5° Si la longueur de l'un des vecteurs s'annule, la longueur du vecteur résultant sera nulle aussi. Donc le résultat sera égal au *module zéro de l'addition.*

6° Considérons deux vecteurs AB, BC, et leur somme AC. Si on les soumet tous les trois à l'opération en question relativement au vecteur ρ_φ, il faudra d'abord multiplier leurs modules par ρ, ce qui donne un triangle $AB'C'$ semblable à ABC et semblablement placé. Ensuite on fera tourner ce triangle de l'angle φ, ce qui augmentera de φ les arguments des trois vecteurs. Donc pour opérer sur la somme $AB + BC = AC$, on ajoutera les résultats obtenus en opérant sur les deux parties. Donc l'opération est distributive relativement à l'addition.

Il résulte de là que l'opération en question, jouissant des propriétés fondamentales de la multiplication, doit être assimilée à cette dernière opération. Donc la multiplication de deux ou plusieurs vecteurs s'effectue en multipliant entre eux les modules et ajoutant les arguments, de sorte que l'on a

$$r_p \times r'_{p'} = (r \times r')_{p+p'}.$$

L'opération inverse, qui prendra le nom de *division,* consistera dans la division des longueurs accompagnée de la soustraction des arguments, de sorte qu'on aura

$$\frac{r_p}{r'_{p'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{p-p'}.$$

On peut donner à cette opération la forme d'une multiplication, en écrivant

$$\left(r \cdot \frac{1}{r'}\right)_{p+(-p')} = r_p \times \left(\frac{1}{r'}\right)_{-p'}.$$

L'élévation aux puissances se fait en élevant la longueur du vecteur à la puissance proposée m, et en multipliant l'argument par m, d'où

$$(r_p)^m = (r^m)_{pm}.$$

Cette formule est vraie pour m entier, quels que soient r et p.

La première des deux opérations inverses de l'élévation des vecteurs aux puissances, l'extraction des racines, sera toujours possible; en d'autres termes, l'élévation d'un vecteur à une puissance fractionnaire quelconque peut toujours s'effectuer.

Soit, par exemple, un vecteur r_p, dont nous supposerons d'abord la longueur r positive, et soit $m = \frac{\mu}{\nu}$ un nombre fractionnaire quelconque, positif ou négatif. On aura

$$(r_p)^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(r^{\frac{\mu}{\nu}}\right)_{\frac{\mu}{\nu}p}.$$

Si la longueur r était négative, on la changerait en une longueur positive en augmentant l'argument p d'une demi-circonférence, ce qui donnerait

$$[(-r)_p]^{\frac{\mu}{\nu}} = (r_{p+\pi})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(r^{\frac{\mu}{\nu}}\right)_{\frac{\mu}{\nu}(p+\pi)}.$$

En particulier, si l'on suppose r négatif et $p = 0$, ou, ce qui revient au même, r positif et $p = \pi$, et que l'exposant soit une fraction de dénominateur pair, on aura

$$(-r)^{\frac{\mu}{2\nu}} = (r_\pi)^{\frac{\mu}{2\nu}} = \left(r^{\frac{\mu}{2\nu}}\right)_{\frac{\mu}{2\nu}\pi}.$$

Ainsi on a

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = (1_\pi)^{\frac{1}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}}.$$

La racine carrée de -1 est donc représentée par un vecteur de longueur 1, faisant un angle droit avec l'origine des angles. On voit, en effet, qu'en faisant subir deux fois de suite à un vecteur de longueur $+1$ l'opération désignée par $1_{\frac{\pi}{2}}$, et qui consiste en une rotation d'un quadrant, on change ce vecteur en un autre égal à -1; donc $\left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1$, et par conséquent

$$1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}.$$

On désigne généralement ce vecteur $1_{\frac{\pi}{2}}$ par la lettre i.

28.

Lorsqu'un vecteur est défini géométriquement, par la seule considération du résultat final de l'opération, nous avons vu que ce résultat n'est pas changé si l'on altère l'argument d'un multiple quelconque de 2π. Donc la racine $n^{\text{ième}}$ d'un vecteur défini géométriquement a un module de longueur déterminée, mais elle admet une infinité d'arguments différents, qui déterminent n directions distinctes, convenant toutes au vecteur cherché. Ainsi l'on a, quel que soit l'entier k,

$$\sqrt[n]{r_p} = \sqrt[n]{r_{p+2k\pi}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}}.$$

Les extrémités de tous ces vecteurs sont situées sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$, qu'elles partagent en n parties égales. Deux solutions sont ou ne sont pas identiques de position, suivant que les nombres $2k$ et $2k'$ qui leur correspondent sont ou non *congrus suivant le module* n. Si l'on a

$$2k'\pi = 2k\pi + 2nh\pi,$$

c'est-à-dire

$$k' \equiv k \ (\text{mod. } n),$$

alors $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2k'\pi}{n}$ différeront par un multiple de 2π, et les rayons correspondants à ces valeurs coïncideront.

Si nous comparons ce résultat à celui que nous avons trouvé pour l'opération analogue relative aux nombres positifs ou négatifs, on voit que les irrégularités et les cas d'impossibilité ont maintenant disparu.

D'abord l'extraction des racines est maintenant une opération multiforme, dont le nombre de solutions est constamment égal à l'indice de la racine, ou, plus généralement, au dénominateur de l'indice fractionnaire réduit à sa plus simple expression.

Ensuite cette opération est toujours possible, quels que soient la quantité r_p et l'indice $\frac{m}{n}$ de l'exposant fractionnaire.

29.

Si l'exposant μ était incommensurable, on pourrait le considérer comme la limite d'une fraction de dénominateur infiniment grand, et les côtés du polygone dont les sommets correspondent aux diverses solutions de la question se réduisant à zéro, un point quelconque de la circonférence de rayon r^μ pourrait représenter la puissance $(r_p)^\mu$. Cette puissance n'a donc que son module qui soit déterminé, son argument étant quelconque.

Il en serait autrement si l'argument p n'était plus défini seulement par une direction dans le plan, mais par le nombre fractionnaire ou incommensurable de circonférences qu'il renferme. Dans ce cas, l'élévation aux puissances devient une opération *uniforme,* quelle que soit la nature de l'exposant, entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel, comme c'est le cas lorsqu'on donne non seulement la position du point r_p sur le plan, mais encore le nombre de fois qu'il a fait le tour de l'origine, dans chacun des deux sens, pour parvenir du point de départ à la position finale.

Ainsi, lorsque l'expression r_p est employée pour désigner un point du plan, abstraction faite de la nature du chemin parcouru pour y arriver, l'opération de l'élévation aux puissances est *multiforme* ou *infinitiforme* suivant que l'exposant est fractionnaire ou incommensurable. Dans les deux cas, les points correspondants aux solutions sont situés sur un cercle, où ils occupent soit les sommets d'un polygone régulier, soit la circonférence entière.

Au contraire, si r et p sont l'un et l'autre des nombres donnés, la valeur de p fera connaître combien de fois, dans le déplacement correspondant à r_p, le point décrivant aura fait le tour de l'origine dans un sens plus que dans l'autre. L'opération est alors possible, et cela d'une seule manière, comme dans le calcul des nombres positifs.

30.

Il nous reste à nous occuper de la seconde opération inverse de l'élévation aux puissances, c'est-à-dire de la recherche de l'exposant ou du *logarithme*, étant données la *base* et la *puissance*. Mais il faut auparavant présenter quelques remarques sur l'expression des *verseurs* sous la forme de puissances.

La fonction r_p peut se décomposer dans le produit de deux facteurs, savoir la *longueur* ou le *module* r, et le *coefficient de rotation* ou *verseur* 1_p. Pour l'élever à une puissance m, on élève à cette puissance le facteur r, et dans l'autre facteur 1_p on multiplie par m l'argument p.

Si l'on veut étendre aux quantités r_p la règle pour l'élévation aux puissances des produits de facteurs numériques, il faut pouvoir mettre 1_p sous la forme d'une puissance dont l'exposant contienne p en facteur. Soit ε la base de cette puissance; on aura alors

$$(1) \qquad 1_p = \varepsilon^p,$$

d'où

$$r_p = r\varepsilon^p, \qquad (r_p)^m = r^m \varepsilon^{mp}.$$

Pour avoir la valeur de l'indéterminée ε, faisons, dans l'égalité précédente (1), $p = \frac{\pi}{2}$. La valeur de 1_p sera alors $1_{\frac{\pi}{2}} = i$. Donc

$$i = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}},$$

et par suite, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{2}{\pi}$,

$$i^{\frac{2}{\pi}} = \varepsilon.$$

Maintenant on aura, pour une puissance quelconque de ε,

$$\varepsilon^p = 1_p = i^{\frac{2p}{\pi}}. \tag{2}$$

Donc la quantité ε ou $i^{\frac{\pi}{2}}$ peut être considérée comme la base d'un système de logarithmes. Ces logarithmes, considérés comme des angles évalués en parties du rayon, seront les exposants des puissances de la base ε qui représentent les *verseurs* correspondants à ces angles.

Si l'on voulait prendre i pour base, on aurait les nouveaux logarithmes en multipliant les anciens par $\frac{2}{\pi}$, de sorte que le logarithme d'un verseur 1_p serait égal à la valeur numérique de l'angle p évaluée *en parties du quadrant*.

Ainsi toute quantité de longueur 1 peut se mettre sous la forme d'une puissance de la base i, de même que toute quantité d'argument nul peut s'exprimer par une puissance de la base e.

Mais l'usage simultané de ces deux bases dans les calculs conduirait à des complications inextricables. Nous verrons bientôt comment on peut éliminer l'une d'elles et exprimer les verseurs, aussi bien que les longueurs, au moyen des puissances de l'autre.

31.

Les quantités que nous désignons sous le nom de vecteurs ont été jusqu'à présent représentées par un symbole composé des deux coordonnées polaires du point du plan qu'elles déterminent. Nous allons maintenant introduire un autre mode de représentation.

Étant donné un vecteur r_p, on peut le décomposer en deux autres vecteurs, d'arguments choisis à volonté, et dont les longueurs s'obtiennent par la construction d'un parallélogramme ayant r_p pour diagonale.

Le mode de décomposition le plus important est celui dans lequel les arguments des deux composantes seront zéro et $\frac{\pi}{2}$, les modules pouvant être, suivant les cas, positifs ou négatifs.

En désignant ces modules par x et y, le vecteur aura pour expression

$$r_p = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}} = x.1_0 + y.1_{\frac{\pi}{2}},$$

ou enfin

$$(1) \qquad r_p = x + iy.$$

Considéré sous cette forme, un vecteur prend le nom de *quantité complexe*, qui rappelle que le vecteur est la somme de deux composantes irréductibles entre elles. A l'avenir nous emploierons concurremment les deux dénominations.

32.

Si l'on suppose maintenant la longueur r égale à l'unité, la valeur de r_p se réduira au verseur 1_p, et les coordonnées x et y ne dépendront plus que de l'angle p. Ces deux fonctions de p, ainsi définies géométriquement, sont connues sous les noms de *cosinus* et de *sinus* de l'angle p.

Dès lors l'égalité (1) deviendra

$$(2) \qquad 1_p = \cos p + i \sin p,$$

et de cette nouvelle forme donnée à 1_p on peut, à l'aide des principes précédents, joints à un autre principe nouveau, déduire toutes les formules de la Trigonométrie. Ce principe nouveau, qui n'a pas d'analogue dans l'Algèbre des quantités *dirigées*, est le *principe de décomposition*. Il consiste en ce que, si deux quantités complexes sont égales entre elles, leurs *composantes rectangulaires* doivent être égales chacune à chacune. Ainsi de l'équation

$$a + ib = a' + ib'$$

on conclut les deux égalités

$$a = a', \qquad b = b'.$$

Les propriétés des quantités complexes reposant sur leur définition géométrique, ce principe peut être considéré comme évident.

Par des considérations élémentaires, on parvient à établir les développements des fonctions $\cos p$ et $\sin p$ en séries convergentes pour toutes les valeurs de p. On voit ensuite que la somme de ces séries, multipliées respectivement par l'unité et par i, n'est autre chose que la série qui représente le développement de e^x et dans laquelle on aura remplacé x par ip.

Si donc on prend pour définition de l'opération e^x l'opération par laquelle on exprime aussi approximativement que l'on voudra la limite de la somme

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

la valeur de $\cos p + i \sin p$ sera donnée par la même opération effectuée sur ip au lieu de x, de sorte que l'on aura

$$1_p = \cos p + i \sin p = e^{ip}.$$

33.

Nous adopterons dorénavant, au lieu de la notation 1_p, le symbole e^{ip}, et il est aisé de se convaincre que cette exponentielle *imaginaire* jouit de toutes les propriétés des exponentielles réelles.

D'abord, pour la multiplication, l'égalité $1_p \times 1_q = 1_{p+q}$ peut s'écrire

$$e^{ip} \times e^{iq} = e^{i(p+q)}.$$

De là résultent les règles de la division, de l'élévation aux puissances de degré réel, de l'extraction des racines, etc., dans le cas des exponentielles à exposants imaginaires.

De même, si l'on multiplie entre elles les deux séries qui expriment e^x et $1_p = e^{ip}$, on obtiendra une série de même forme, qui n'est autre que le développement de e^x dans lequel on aurait remplacé x par $x + ip$, et que nous désignerons, par définition, comme le développement de e^{x+ip}. On conclut de là que l'on aura, pour le produit de deux exponentielles, l'une à exposant réel, l'autre à exposant imaginaire,

$$e^x \times e^{ip} = e^{x+ip}.$$

De même pour le cas de deux exponentielles à exposants complexes.

Nous sommes donc autorisés désormais à remplacer dans tous les cas la notation 1_p par la notation e^{ip}, qui a l'avantage de rattacher au calcul des exponentielles celui des symboles de rotation ou *verseurs*, en rapportant les exponentielles imaginaires à la même base e que les exponentielles à exposants réels, et en assimilant, par conséquent, les arguments multipliés par i à des logarithmes imaginaires de même base que les logarithmes réels.

D'après cela on aura

$$i = 1_{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2}},$$

et la base provisoire ε que nous avons mentionnée plus haut, sera exprimée par

$$\varepsilon = i^{\frac{2}{\pi}} = e^i.$$

Au lieu de r_p, nous écrirons de même re^{ip}.

34.

Il est maintenant facile de définir l'élévation d'une quantité complexe re^{ip} à une puissance complexe d'exposant $m + in$. En mettant la quantité complexe re^{ip} sous la forme $e^{\log r + ip}$, la puissance d'exposant $m + in$ de cette exponentielle s'obtiendra en multipliant l'exposant $\log r + ip$ par $m + in$, ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{(\log r + ip)(m+in)} &= e^{m \log r - np + i(n \log r + mp)} \\ &= r^m e^{-np}[\cos(n \log r + mp) + i \sin(n \log r + mp)]. \end{aligned}$$

On résoudra avec la même facilité les deux problèmes inverses du problème de l'élévation aux puissances.

1° *Trouver une quantité z dont la puissance d'indice $m+in$ soit égale à re^{ip}.*

De l'égalité

$$z^{m+in} = re^{ip} = e^{\log r+ip},$$

on tire

$$z = e^{\frac{\log r+ip}{m+in}} = e^{\frac{(\log r+ip)(m-in)}{m^2+n^2}} = e^{\frac{m\log r+np+i(mp-n\log r)}{m^2+n^2}}$$

2° *Trouver à quelle puissance il faut élever une quantité re^{ip} pour obtenir un résultat donné se^{iq}.*

L'équation du problème est

$$(re^{ip})^{\lambda} = e^{(\log r+ip)\lambda} = se^{iq} = e^{\log s+iq}.$$

En égalant les exposants des deux exponentielles, il viendra

$$\lambda = \frac{\log s+iq}{\log r+ip} = \frac{\log r\log s+pq+i(q\log r-p\log s)}{(\log r)^2+p^2}.$$

En particulier, le logarithme d'un nombre complexe re^{ip} est égal à $\log r+ip$.

Si nous nous trouvons dans le cas où l'argument p est déterminé seulement à un multiple de la circonférence près, le logarithme de re^{ip} sera susceptible d'une infinité de valeurs, comprises dans la formule

$$\log r+i(p+2k\pi).$$

Si $p=0$, r étant positif, la valeur générale du logarithme sera

$$\log r+2ik\pi;$$

une de ces déterminations est réelle et égale au logarithme arithmétique.

De même, la valeur générale du logarithme de $-r$ est

$$\log(-r) = \log r+(2k+1)i\pi,$$

et aucune de ces déterminations n'est réelle.

On tire de là

$$\log 1 = 2ki\pi, \qquad \log(-1) = (2k+1)i\pi.$$

Si l'on donnait la quantité complexe sous la forme $x + iy$, on pourrait la ramener d'abord à la forme re^{ip}, en posant

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p,$$

d'où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos p = \frac{x}{r}, \quad \sin p = \frac{y}{r}.$$

On aura dès lors

$$\log(x+iy) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\,\text{arc tang}\,\frac{+y}{+x} + 2ki\pi,$$

en indiquant par la notation arc tang $\frac{+y}{+x}$ celui des deux arcs moindres que 2π dont la tangente est égale à $\frac{y}{x}$ et dont le cosinus et le sinus sont de mêmes signes respectivement que x et y.

35.

Jusqu'à présent l'usage que nous avons fait de la décomposition d'une quantité complexe a été une conséquence des propriétés communes aux opérations faites sur les quantités complexes et aux opérations faites sur les quantités réelles.

Nous avons opéré sur les parties constituantes, r et p, ou x et y, d'une quantité complexe de la même manière que si ces parties eussent été des quantités complexes, tous les résultats des paragraphes précédents subsistant dans cette dernière hypothèse.

Mais il est une classe de problèmes que l'on résout à l'aide des quantités complexes, en s'appuyant sur des considérations qui n'ont pas leurs analogues dans le calcul des quantités réelles.

Une quantité complexe re^{ip} ou $x + iy$ est déterminée par deux nombres indépendants l'un de l'autre, et deux quantités complexes ne peuvent être égales si elles n'ont pas même longueur et même argument (à un multiple de 2π près), ou si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires ne sont pas égales de part et d'autre. Ainsi l'égalité

$$re^{ip} = r'e^{ip'}$$

entraîne les deux conditions

$$r = r', \qquad p = p' + 2k\pi;$$

l'égalité $x + iy = x' + iy'$ se décompose de même en deux autres,

$$x = x', \qquad y = y'.$$

En général, une équation entre des quantités complexes $w = u + iv$, $z = x + iy$, formée au moyen des règles du calcul algébrique, se ramène à la forme

(1) $$\varphi(u,v,x,y) + i\chi(u,v,x,y) = 0,$$

et elle se décompose en deux autres équations entre quantités réelles,

(2) $$\varphi(u,v,x,y) = 0, \qquad \chi(u,v,x,y) = 0.$$

Mais il ne faut pas oublier que ce dédoublement de l'équation complexe repose essentiellement sur la supposition de la réalité des quantités représentées par les symboles u, v, x, y. Si l'on venait à les remplacer par des valeurs complexes, l'équation (1) n'entraînerait plus les équations (2), mais pourrait se décomposer d'une infinité de manières différentes.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(x + iy)^2 + a(x + iy) + b = 0,$$

qui, pour x, y, a, b réels, se décompose dans les deux suivantes,

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0, \qquad 2xy + ay = 0,$$

d'où l'on tire les quatre systèmes de solutions

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{4} - b}, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{a}{2}, \\ y = \pm\sqrt{b - \dfrac{a^2}{4}}, \end{cases}$$

les deux premiers devant être choisis dans le cas de $\frac{a^2}{4} - b > 0$, et les deux autres dans le cas de $\frac{a^2}{4} - b < 0$.

Posons maintenant, s, t, u, v devant être réels,

$$x = s + it, \qquad y = u + iv;$$

l'équation (1) deviendra

$$[s + it + i(u + iv)]^2 + a[s + it + i(u + iv)] + b = 0,$$

et elle se décomposera dans les deux suivantes

$$(s - v)^2 - (t + u)^2 + a(s - v) + b = 0,$$
$$2(s - v)(t + u) + a(t + u) = 0,$$

d'où les quatre solutions

$$\begin{cases} t + u = 0, \\ s - v = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \end{cases} \qquad \begin{cases} s - v = -\frac{a}{2}, \\ t + u = \pm \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = it + v - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \\ y = iv - t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v + it - \frac{a}{2}, \\ y = iv - t \pm \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}, \end{cases}$$

qui montrent que les valeurs complexes de x et de y sont, dans chaque cas, susceptibles d'une infinité de déterminations, parmi lesquelles se trouvent les déterminations réelles, correspondant à des valeurs nulles de v et de t.

36.

Des équations (2) du n° précédent résulte l'équation

$$\varphi(u, v, x, y) - i\chi(u, v, x, y) = 0.$$

Or, si dans la fonction $F(u + iv, x + iy)$ on change i en $-i$, le résultat ne diffèrera du précédent que par le signe de i. Donc, si une équation a lieu entre les variables complexes $u + iv$, $x + iy$, où x et y sont supposés des nombres réels, la même équation subsistera lorsqu'on changera, dans les variables ainsi que dans les constantes, i en $-i$, c'est-à-dire lorsqu'on y remplacera toutes les quantités complexes par leurs *conjuguées*.

Cette transformation des quantités en leurs conjuguées revient à changer le sens des ordonnées positives dans le plan, ou, ce qui est la même chose, à changer le sens des rotations positives. En coordonnées polaires, cela revient à changer re^{ip} en re^{-ip}, c'est-à-dire, i en $-i$, ou, ce qui est équivalent, p en $-p$.

La quantité conjuguée $x - iy$ ou re^{-ip}, bien que déterminée complètement lorsque l'on connaît $x + iy$ ou re^{ip}, ne peut pas être considérée comme une fonction analytique de $x + iy$ ou re^{ip}. En effet, si l'on pose

$$x + iy = re^{ip} = z,$$

on voit aisément que $x - iy$ ou re^{-ip} ne peut pas s'exprimer au moyen des opérations de l'Analyse exécutées sur la seule quantité z. On a, en effet,

$$iy = z - x, \qquad \text{d'où} \qquad x - iy = 2x - z = z - 2iy,$$

x et y ne pouvant être éliminés à la fois. De même, on aurait

$$e^{ip} = \frac{z}{r} \quad \text{et} \quad r = ze^{-ip}, \qquad \text{d'où} \qquad re^{-ip} = \frac{r^2}{z} = ze^{-2ip},$$

expressions qui ne peuvent se réduire à des fonctions de z seul.

Il en est de même d'une fonction analytique quelconque de x et de y, qui est déterminée par la connaissance de $z = x + iy = re^{ip}$, mais qui généralement ne peut pas s'exprimer au moyen d'une opération analytique faite sur cette variable complexe. C'est que la détermination de la valeur de cette fonction exige une opération qui ne fait pas partie des opérations analytiques, et qui est fondée sur l'hypothèse de la réalité des deux éléments, x et y, ou r et p, de la variable complexe, réalité dont la condition ne peut être exprimée par les opérations communes aux quantités réelles et aux quantités complexes, qui seules portent le nom de fonctions analytiques.

En effet, si l'on admettait pour x et y des valeurs complexes $x = s + it$, $y = u + iv$, d'où

$$x + iy = s - v + i(t + u) = \xi + i\eta,$$

la connaissance de $\xi + i\eta$ déterminerait seulement $s - v$ et $t + u$, mais ne donnerait pas les valeurs séparées de s et t, non plus que celles de u et v. Donc, tandis que les règles de l'algèbre s'appliquent sans altération au cas où x et y seraient elles-mêmes des quantités complexes, la transformation d'une quantité en sa conjuguée ne s'applique qu'au cas où la variable $z = x + iy$ a ses deux coefficients x et y réels, condition incompatible avec la généralisation donnée aux opérations analytiques, en vertu de laquelle ces opérations sont également applicables à toutes les natures de quantités, réelles ou complexes.

37.

Il y a donc lieu de distinguer deux sortes de dépendances en vertu desquelles une fonction de deux variables indépendantes peut être liée à une variable complexe. Dans le cas général, la fonction dépend des valeurs des deux coefficients x, y de la variable complexe, et peut être considérée comme une fonction des deux variables indépendantes x, y, mais non comme une fonction d'une fonction donnée de ces deux variables. Telles sont les fonctions

$$x, \quad y, \quad x - iy, \quad xy, \quad x^2 + y^2, \quad \log(x + y), \quad \text{etc.}$$

Dans d'autres cas, la fonction ne dépend que du seul groupe $x + iy$, et ne varie pas tant que ce groupe ne changera pas de valeur, par exemple lorsqu'on remplacera x et y par les valeurs complexes $x' + ix''$, $y' + iy''$, assujetties aux conditions

$$x' - y'' = x, \qquad x'' + y' = y.$$

Ces fonctions peuvent s'exprimer, exactement ou approximativement, à l'aide d'opérations analytiques faites sur le groupe $x + iy$. Cauchy a donné à ces fonctions le nom de fonctions *monogènes*.

Le caractère de ces fonctions est d'avoir une *dérivée* par rapport au groupe $z = x + iy = re^{i\varphi}$, tandis que, dans les fonctions non monogènes, l'accroissement de la fonction pour des variations infinitésimales de x et de y n'est pas proportionnel à celui de $x + iy$, et par suite les deux accroissements ne peuvent avoir un rapport tendant vers une limite indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$.

En effet, si l'on considère une fonction de deux variables $F(x, y)$, il faut, pour qu'elle ait une dérivée par rapport à $x + ay$, que le rapport $\frac{dF(x,y)}{dx + ady}$ ait une limite indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$. Or, ce rapport peut s'écrire sous la forme

$$\frac{F'(x)dx + F'(y)dy}{dx + ady} = \frac{F'(x) + F'(y)\frac{dy}{dx}}{1 + a\frac{dy}{dx}},$$

et pour qu'il ne dépende pas de $\frac{dy}{dx}$, il faut que l'on ait

$$F'(x) : F'(y) = 1 : a,$$

d'où il résulte

$$F'(y) = aF'(x). \tag{1}$$

Alors on a

$$\frac{dF(x,y)}{d(x + ay)} = F'(x) = \frac{1}{a}F'(y),$$

valeur indépendante de $\frac{dy}{dx}$.

Cette condition (1) indique que $F(x, y)$ est exprimable analytiquement au moyen de $x + ay$. Si l'on pose, en effet, $x + ay = z$, d'où $x = z - ay$, il vient

$$F(x, y) = F(z - ay, y).$$

Si cette fonction se réduit à une fonction de z seul, sa dérivée partielle prise par rapport à y sera nulle, ce qui donnera, comme condition nécessaire et suffisante,

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial F}{\partial y},$$

ce qui s'accorde avec la condition (1) de la monogénéité. Donc dans ce cas la fonction $F(z - ay, y)$ se réduit à une fonction $f(z)$ de z seul ou de $x + ay$, dont la différentielle $df(x + ay)$ sera $f'(x + ay)\, d(x + ay)$, et qui aura, par suite, une dérivée dépendante, comme $f(z)$, de la seule quantité $x + ay$.

(18 juillet 1882.)

REMARQUES

SUR

L'ENSEIGNEMENT DE LA TRIGONOMÉTRIE[1]

PAR M. J. HOÜEL

Professeur de Mathématiques à la Faculté des sciences de Bordeaux.

I

La Trigonométrie peut être enseignée à deux points de vue différents, dont le mode habituel d'exposition adopté aujourd'hui pour cette science est un mélange, ne présentant ni la simplicité de l'un, ni la fécondité de l'autre.

On peut, suivant l'esprit de l'ancienne Géométrie, définir le sinus, le cosinus, la tangente, etc., comme étant les rapports deux à deux des côtés d'un triangle rectangle, ce qui restreint d'abord ces définitions au cas de l'angle aigu. On fait voir ensuite comment le besoin de généraliser certaines formules relatives au calcul des triangles peut conduire à attribuer des sinus, des cosinus, etc., aux angles obtus, en introduisant l'emploi des quantités négatives et justifiant cette introduction *a posteriori*. Enfin, on reconnaît, à l'occasion des problèmes analogues à ceux de l'Astronomie, que la généralisation doit encore s'étendre au

(1) Cette Note a été publiée pour la première fois dans le *Giornale di Matematiche*, t. XIII, 1875, et elle a été reproduite, depuis, dans d'autres recueils étrangers, et incomplètement dans un journal français. Malgré cette publicité multiple, les remarques qui font le sujet de cette Note ne semblent pas être parvenues à la connaissance des lecteurs français à qui elle était principalement destinée. C'est ce qui m'engage à la réimprimer aujourd'hui, en profitant de l'hospitalité que la *Société des Sciences physiques et naturelles* veut bien lui accorder.

J. H.

cas des angles compris entre deux et quatre quadrants, et enfin aux angles de grandeur quelconque, positive ou négative.

Cette méthode, essentiellement synthétique, a l'inconvénient de ne donner aucune lumière sur la nature des quantités négatives, qui se présentent ici comme des symboles conventionnels, conduisant au but par des compensations d'absurdités. De plus, elle ne prépare pas l'esprit aux méthodes générales de la Géométrie analytique, dont la Goniométrie n'est cependant qu'un cas particulier : l'étude des relations entre les arcs d'un cercle et les coordonnées de leurs extrémités.

Il y aurait, croyons-nous, un avantage considérable à se placer tout d'abord au point de vue de la méthode cartésienne. La Goniométrie, ainsi présentée, prendrait une forme plus simple et plus intuitive. Elle offrirait un premier exemple de la discussion des coordonnées des points d'une courbe; on pourrait la prendre comme point de départ pour l'explication de la vraie théorie des quantités négatives, et cette explication serait alors bien plus lumineuse que celle que l'on rencontre invariablement dans les Traités d'Algèbre, et dont le thème constant est le fameux problème des courriers.

On commencerait par remarquer que la direction d'un rayon mobile autour d'un point fixe est déterminée quand on connaît le point où ce rayon coupe une circonférence quelconque, décrite du point fixe comme centre, et dont on peut, pour plus de simplicité, supposer le demi-diamètre égal à l'unité de longueur. On détermine, en même temps que cette direction, l'angle que fait le rayon mobile avec un demi-diamètre fixe du cercle, dont la *direction* sera prise pour l'*origine des angles*, de même que le point où ce demi-diamètre rencontre la circonférence sera dit l'*origine des arcs*.

Un angle peut être défini comme l'ensemble de deux droites de directions différentes et invariables l'une par rapport à l'autre; ou encore — et c'est le point de vue qui tend à prévaloir dans la Géométrie moderne — un angle est le *symbole d'une opération* consistant à faire tourner un rayon mobile autour d'un point, de manière qu'il passe d'une direction donnée à une autre direction donnée.

Nous avons expliqué ailleurs comment les rotations exprimées par ce symbole sont susceptibles de signes, et doivent être considérées comme *positives* ou comme *négatives,* suivant que le sens de la rotation est *direct* ou *rétrograde.*

Il en est de même pour les distances comptées sur des axes fixes, et qui sont *positives* ou *négatives,* suivant qu'on les considère comme des *symboles de déplacements rectilignes* effectués dans le sens *direct* ou *rétrograde.*

Deux angles différant entre eux d'un nombre entier de *tours,* parcourus soit dans le sens direct, soit dans le sens rétrograde, sont déterminés par le même point du cercle. Il suffit donc, pour déterminer toutes les directions possibles dans un plan, de savoir déterminer tous les angles compris entre zéro et quatre angles droits.

On y parvient par la connaissance des projections du point correspondant de la circonférence sur le diamètre origine des angles ou *axe horizontal,* et sur un autre diamètre, que l'on choisit, pour plus de simplicité, perpendiculaire au premier, et qu'on nomme *axe vertical.* Pour fixer chacune de ces projections, il suffit de déterminer sa position relativement au centre.

Concevons un point partant du centre, et marchant d'abord sur l'axe horizontal, par exemple, vers l'origine des arcs. Les chemins parcourus dans ce sens *s'ajouteront,* suivant la signification *arithmétique* de ce mot. Si, après avoir parcouru une certaine partie du rayon du cercle, le point se met à marcher dans le sens opposé, sa distance au centre sera *diminuée* (dans l'acception *arithmétique*) de la quantité dont le point aura reculé, et cela aussi longtemps que le point n'aura pas atteint de nouveau le centre. Lorsque le point atteint le centre et le dépasse (sur le *prolongement,* en arrière du centre, de l'axe origine des angles), la distance recommence à croître, mais en sens opposé. De là une complication des divers cas qui pourront se produire, lorsqu'on voudra combiner entre elles des positions du point non situées toutes les deux sur la direction même de l'origine des arcs. Il faut, pour s'y reconnaître aisément, avoir un moyen de distinguer non seulement la grandeur des distances, mais en outre le sens dans lequel elles devront être portées.

On évitera cette complication en cessant de séparer les deux notions de *grandeur* et de *sens* des chemins parcourus, et les incorporant en une seule, au moyen d'une définition plus générale de l'addition et de la soustraction.

Nous appellerons *addition* d'une distance l'opération qui consiste à déplacer un point mobile d'une quantité égale à cette distance dans un sens convenu, vers la droite, par exemple. Nous appellerons de même *soustraction* d'une distance l'opération (inverse de la précédente) qui consiste à déplacer le point mobile de cette distance dans le sens contraire, soit vers la gauche. D'après cela, l'origine étant le point qui correspond à une distance égale à *zéro*, toute distance a comptée à droite de l'origine sera $0 + a$ ou simplement $+ a$ ou a; toute distance à gauche sera $0 - a$, ou simplement $- a$.

Une discussion très simple conduit aux règles de l'addition et de la soustraction des polynômes algébriques.

On appliquera de même la notion de signe aux distances comptées sur l'axe vertical.

Cela posé, tout point du cercle est déterminé par les deux distances du centre aux deux projections du point sur les deux axes, les deux distances devant être de signes donnés, et l'une au moins de grandeur donnée. En effet, la somme des carrés des deux distances devant être égale à l'unité, la grandeur de l'une déterminera celle de l'autre, tandis que les signes seront indépendants entre eux.

Ces deux distances sont dites les *coordonnées* du point du cercle, et on les distingue par les noms de *cosinus* et de *sinus*.

Le rapport des deux coordonnées est représenté, à l'aide d'une construction fort simple, par un point de la *tangente* au cercle menée à l'origine des arcs, et ce point se trouve au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal, suivant que les deux coordonnées sont de même signe ou de signes contraires. En donnant un signe à la distance de ce point à l'origine des arcs, comme on l'a fait pour les distances comptées sur les deux axes, et ayant égard à la corrélation qui règne entre la position du point et les signes des coordonnées, on arrive à la règle des signes pour la division, et par suite pour la multiplication. De même pour le rapport inverse de la tangente *(cotangente),* et pour les inverses du cosinus et du sinus (*sécante* et *cosécante*).

La projection d'une longueur sur un axe quelconque étant déterminée en grandeur et en direction par le produit de la ligne multipliée par le cosinus qu'elle fait avec la partie positive de l'axe, on obtient immédiatement les formules pour le cosinus et le sinus de la somme de deux angles, et, par suite, toutes les autres formules goniométriques et leurs applications à la mesure des triangles, sans qu'il y ait lieu à les soumettre à une nouvelle discussion.

II

L'enseignement de la Trigonométrie est compliqué bien inutilement par l'habitude traditionnelle d'introduire dès le début l'usage de Tables donnant, non les valeurs numériques des fonctions angulaires, mais leurs *logarithmes*. Il serait infiniment préférable de commencer par exposer la construction des Tables des valeurs naturelles de ces fonctions, et cela avec très peu de détails techniques, en se fondant uniquement sur la méthode de la bissection successive des angles. Ce serait un excellent exercice pour les élèves de construire eux-mêmes, d'après les prescriptions indiquées, une petite Table trigonométrique, à deux ou trois décimales, et dont les intervalles seraient assez rapprochés pour rendre l'interpolation facile. Cette Table, revue avec soin, devrait être la seule que l'on mît entre leurs mains; avec son aide, en y joignant le secours de la règle à calcul, ils seraient à même de résoudre promptement toutes les questions de Trigonométrie avec une approximation bien supérieure à l'exactitude de leurs constructions graphiques, et beaucoup plus promptement que par l'emploi des logarithmes, surtout quand on complique les formules d'angles auxiliaires, en vue, suivant la phrase adoptée, de les rendre *calculables par logarithmes.*

L'usage prématuré des logarithmes trigonométriques, dans un enseignement s'adressant à des jeunes gens encore peu experts dans la pratique du calcul, ne peut que retarder leurs progrès dans cet art et leur en fermer l'intelligence. Le mal est grave surtout lorsqu'on met dans leurs mains novices les grandes Tables qui conviennent seulement aux praticiens exercés, et dont le maniement n'apprend rien de plus, au point de vue de la théorie, que celui des Tables à trois ou quatre figures. On fausse en même temps leurs idées, en leur laissant supposer qu'une approximation à un dix-millionnième près de la valeur d'un résultat correspond aux cas ordinaires de la réalité. Aussi voit-on des élèves qui ne manifestent aucun étonnement lorsqu'on leur demande de calculer le diamètre de la Terre à un centimètre près. De pareils exercices, conséquence logique de l'emploi des grandes Tables, sont-ils propres à initier les jeunes gens à la solution des questions pratiques, comme on en a la prétention? Il est permis d'en douter.

Ce vice capital de la méthode s'étend à tout ce qui se rapporte à l'enseignement du calcul numérique. Au lieu d'occuper durant tant de mortelles heures les pauvres écoliers à transcrire des nombres à *sept* figures (le nombre *sept* est, paraît-il, un nombre sacré en Mathématiques comme ailleurs), et de noyer leurs idées dans des flots de chiffres, ne serait-il pas mieux de faire plus souvent appel à leur intelligence et à leur bon sens, et de leur montrer que l'*art* du calcul, loin d'être une routine aveugle et abrutissante, fournit, au contraire, au calculateur des occasions continuelles de développer les ressources de son esprit d'invention, en lui offrant des sujets d'expériences aussi variés qu'intéressants, et donnant lieu à l'emploi de procédés plus ou moins exacts, plus ou moins expéditifs? Loin de là, dans les Traités même les plus en vogue, on ne trouve pas un seul mot pour avertir l'écolier que l'on perd absolument son temps en prenant avec *sept* figures le logarithme d'un nombre connu seulement à un centième ou un millième près de sa valeur, et qu'il est insensé de conserver dans une addition plus de chiffres dans une partie des termes qu'il n'en existe dans le terme qui en a le moins. Il n'est pourtant pas besoin de réfléchir longtemps pour se convaincre de l'absurdité de semblables pratiques!

Là où des fautes aussi grossières passent inaperçues, il ne faut pas s'étonner de l'absence de toute indication sur la manière de calculer, au moyen des différences tabulaires, la limite supérieure de l'erreur du résultat, de quelque utilité que soit cette détermination, tant pour l'appréciation de l'exactitude de la valeur obtenue que pour la comparaison des avantages respectifs des diverses méthodes qu'on peut employer pour un même calcul.

Disons maintenant quelques mots sur l'usage des angles auxiliaires employés pour transformer à tout prix les formules proposées en expressions monômes, quelque laborieuse que doive être cette transformation. Nous montrerons sans peine que les formules ainsi obtenues ne sont pas en général les plus aisément *calculables par logarithmes*, et que, la plupart du temps, la simplicité apparente des valeurs auxquelles on parvient n'est qu'un leurre et une illusion d'optique.

Personne d'abord ne niera que la recherche d'un logarithme dans les Tables trigonométriques, si perfectionnées qu'elles soient, exige beaucoup plus de temps et d'attention que la recherche analogue dans les Tables des logarithmes des nombres : la moindre pratique du calcul suffit pour faire apprécier la différence. La substitution de la Table trigonométrique à la Table des logarithmes des nombres ne peut donc être avantageuse qu'autant qu'elle diminue notablement le nombre des *lectures*. Or, c'est précisément le contraire qui arrive dans la plupart des cas.

Considérons, par exemple, les formules pour la résolution d'un triangle sphérique dont on connaît deux côtés a, b et l'angle compris C. Ces formules, telles qu'elles se présentent immédiatement, sont les suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C, \\ \cot b \sin a - \cot B \sin C = \cos a \cos C, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

Les formules, dites *calculables par logarithmes*, qu'on en déduit sont celles-ci :

$$
(2)\quad \begin{cases}
\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} a \cos C, & \operatorname{tang} A = \dfrac{\sin\varphi \operatorname{tang} C}{\sin(b-\varphi)}; \\[2mm]
\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang} b \cos C, & \operatorname{tang} B = \dfrac{\sin\psi \operatorname{tang} C}{\sin(a-\psi)}; \\[2mm]
\cos c = \dfrac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi} = \dfrac{\cos b \cos(a-\psi)}{\cos\psi}. &
\end{cases}
$$

L'emploi des formules (2) exige 16 lectures, pour obtenir successivement

$$
\begin{array}{lllll}
\log\cos C, & \log\operatorname{tang} a, & \varphi, & \sin\varphi, & \\
 & \log\operatorname{tang} b, & \psi, & \sin\psi, & \\
\log\operatorname{tang} C, & \log\sin(b-\varphi), & A, & \log\sin(a-\psi), & B, \\
\log\cos a, & \log\cos(b-\varphi), & & \log\cos\varphi, & \\
[\text{ou bien } \log\cos b, & \log\cos(a-\psi), & & \log\cos\psi], &
\end{array}
$$

plus 2 soustractions d'angles pour obtenir $b-\varphi$ et $a-\psi$. Or, tant que la routine s'obstinera à conserver la division sexagésimale du cercle, toute opération sur les angles devra être considérée comme exigeant le même travail qu'une lecture.

Les formules (1) étant mises sous la forme

$$
(3)\quad \begin{cases}
\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos A), \\[2mm]
\cot A = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \cdot \dfrac{\cos b}{\sin c}\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}\cos C\right), \\[2mm]
\cot B = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b} \cdot \dfrac{\cos a}{\sin c}\left(1 - \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}\cos C\right),
\end{cases}
$$

leur calcul n'exige que 15 lectures, *dont* 6 *dans la Table des nombres,* pour obtenir

$$
\begin{array}{cccc}
\log\cos a, & \log\operatorname{tang} a, & \log\cos b, & \log\operatorname{tang} b, \\
 & \log\cos C, & \log\sin C, &
\end{array}
$$

$$
N = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b}\cos C, \qquad N' = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}\cos C, \qquad N'' = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos C,
$$

$$
\log(1-N), \quad \log(1-N'), \quad \log(1+N''), \quad A, \quad B, \quad C,
$$

et aucune soustraction d'angles.

Voici le tableau complet des calculs de l'exemple numérique, que M. Serret a développé à l'aide des angles auxiliaires dans son *Traité de Trigonométrie* (p. 180) :

$a = 113°.\ 2'.56'',64$		$\cos C$ ...	$-\bar{1},876\ 7036$	$\dfrac{\tang b}{\tang a}$ ...	$-0,518\ 0004$
$b = 82.39.28,40$		$\tang a$ ...	$-0,371\ 1149$	$\dfrac{\cos b}{\sin C}$ ...	$\bar{1},288\ 1502$
$C = 138.50.13,69$		$\tang b$ ...	$0,889\ 9153$	$1-N$ ...	$\bar{1},887\ 6267$
$\sin C$ ...	$\bar{1},818\ 3589$	N''	$1,137\ 7338$	$\cot A$ ...	$-\bar{1},694\ 5773$
$\cos a$ ...	$-\bar{1},592\ 7532$	N	$\bar{1},357\ 9032$	$A = 116°\ 20'\ 2'',21$	
$\cos b$ ...	$\bar{1},106\ 5091$	N'	$0,395\ 5940$	$\dfrac{\tang a}{\tang b}$ ...	$-\bar{1},481\ 1996$
$1+N''$ ...	$1,168\ 2617$	$N''_1 =$	$13,732\ 00$	$\dfrac{\cos a}{\sin C}$ ...	$-\bar{1},774\ 3943$
				$1-N'$ ...	$-0,172\ 0236$
$\cos c$ ...	$-\bar{1},867\ 5240$	$N_1 =$	$0,227\ 9834$	$\cot B$ ...	$-\bar{1},427\ 6175$
$c = 137°.29'.\ 4'',63$		$N' =$	$2,486\ 0165$	$B = 104°\ 59'\ 8'',38$	

Nous avons inscrit dans ce tableau *tous* les calculs qu'un opérateur un peu exercé ne doit pas faire *de tête* ou à l'aide de la règle à calcul. Le nombre des lectures serait encore diminué de 3, si l'on faisait usage des Tables de logarithmes d'addition et de soustraction.

On peut maintenant juger de la différence de longueur entre les calculs actuels et les opérations faites d'après les méthodes artificielles, où l'on emploie les angles auxiliaires, ou même celles qui, comme les analogies de Neper ou les formules de Delambre et Gauss, exigent un assez grand nombre d'additions et de soustractions d'angles.

Nous concluons de là que l'usage direct des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique est de tous les procédés de calcul le plus expéditif, et c'est une pure illusion de croire que l'on gagne quoi que ce soit à transformer ces formules en expressions monômes, soit à l'aide d'angles auxiliaires, soit même à l'aide de formules qui se prêtent d'elles-mêmes à cette transformation. Il convient donc de rayer des livres d'enseignement cette locution, aussi mal choisie que la méthode qu'elle sert à désigner : « Rendre une formule calculable par logarithmes ».

Il se rencontre, nous en convenons, des cas spéciaux où l'emploi des angles auxiliaires est avantageux ; mais ces cas ne se présentent jamais dans les théories qui constituent les Éléments de Trigonométrie. Tout au plus conviendrait-il de donner, *comme simples exercices*, quelques exemples de ces transformations, et de saisir par là une occasion pour en faire ressortir, non les avantages, mais les inconvénients.

III

Les résultats des calculs trigonométriques peuvent être affectés de deux causes d'erreur tout à fait distinctes, dépendant l'une de l'inexactitude nécessaire des Tables logarithmiques, l'autre des erreurs auxquelles sont sujettes les données de la question. On peut toujours, par le choix de Tables assez étendues, faire en sorte que l'erreur due à la première cause disparaisse devant celle qui provient de la seconde.

Supposons un élément x d'un triangle, déterminé au moyen des éléments connus $p, q, \ldots$ ou de leurs fonctions angulaires, par la formule

$$f(x) = \varphi(p, q, \ldots),$$

$f(x)$ désignant une fonction algébrique ou angulaire. Les logarithmes pris immédiatement dans la Table sont sujets à une certaine erreur maximum $d\omega$, qui peut se trouver doublée pour les logarithmes calculés par interpolation, et portée ainsi à une unité du dernier ordre décimal. Si l'on suppose les éléments dont dépendent $p, q, \ldots$ exactement connus, et la fonction $\varphi(p, q, \ldots)$ calculée au moyen des logarithmes, l'erreur tabulaire $\pm d\omega$, affectant le logarithme de la quantité p, équivaudra à une erreur $dp = \pm \frac{p\,d\omega}{\mathrm{M}}$ affectant la fonction p elle-même (M étant le module des logarithmes décimaux), et par suite elle produira dans $\varphi(p)$

une erreur égale à $\pm\frac{d\omega}{M}.p\frac{\partial\varphi}{\partial p}$; et de même pour les autres fonctions $q,\ldots$. Donc l'erreur totale commise sur $\log\varphi(p,q,\ldots)$ sera

$$\frac{d\omega}{\varphi(p,q,\ldots)}\left(\pm p\frac{\partial\varphi}{\partial p}\pm q\frac{\partial\varphi}{\partial q}\pm\ldots\right),$$

et, si on désigne par K la somme des valeurs absolues des termes de la parenthèse, le maximum de cette erreur sera

$$\frac{K\,d\omega}{\varphi(p,q,\ldots)}.$$

Cette erreur étant égale à celle de $\log f(x)$, c'est-à-dire à $\frac{Mf'(x)\,dx}{f(x)}$, on aura donc, à cause de $f(x)=\varphi(p,q,\ldots)$,

$$dx=\frac{K\,d\omega}{Mf'(x)}.$$

Si l'on vient à changer la *forme* de la relation constante qui existe entre les quantités $x,p,q,\ldots$, les expressions de K et de $f'(x)$ changeront, et par suite aussi la valeur de dx. Dans ce cas donc il y a lieu d'examiner quelle est la forme de cette relation qui, pour une étendue donnée des Tables, donnera pour dx la valeur minimum correspondante à tel ou tel système de valeurs de $p,q,\ldots$.

Considérons, par exemple, les deux formules, équivalentes entre elles,

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)}.$$

La première, mise sous la forme

$$\log\cos c=\log\cos a-\log\cos b,$$

donne, pour maximum de l'erreur que l'on peut commettre sur c,

$$dc=\frac{2}{M}\cot c.d\omega.$$

L'autre formule donne de même

$$dc = \frac{1}{M} \sin c . d\omega,$$

et l'on voit qu'elle est plus avantageuse que la première, quand c doit être un petit angle, le rapport des deux erreurs étant $\frac{2\cos c}{\sin^2 c}$, ou à peu près $\frac{2}{c^2}$. Ainsi, si l'on suppose dans la première formule $a = 50°$, $b = 49°$, la différence tabulaire du logarithme de cos c à 7 figures étant 43 pour 10″, une erreur d'une unité sur la dernière décimale entraînera une erreur de $\frac{10''}{43}$ ou d'environ 0″,25 sur la valeur de l'angle c; tandis que, si l'on prend la seconde formule, une erreur d'une demi-unité sur la valeur de log tang $\frac{1}{2}c$ ne donnera sur l'angle qu'une erreur égale à

$$2 . \frac{\frac{1}{2} . 10''}{2111} < 0'',01.$$

Mais il en est tout autrement quand on considère les erreurs provenant des données. Dans ce cas, l'inconnue x étant liée aux données $a, b, \ldots$ par une relation

$$f(x) = \mathrm{F}(a, b, \ldots),$$

la valeur de l'erreur, prise sans tenir compte de l'inexactitude des Tables,

$$dx = \frac{1}{f'(x)} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} da + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} db + \ldots \right),$$

ne changera pas de grandeur de quelque manière que l'on transforme la relation. Dans ce cas donc, on ne peut rien gagner, au point de vue de l'exactitude, à choisir une formule plutôt qu'une autre, et l'on ne devra songer qu'à prendre la plus simple.

En prenant le même exemple que tout à l'heure, supposons chacun des angles a, b sujet à une erreur de $1''$.

1re Formule.	Erreur possible.	2e Formule.	Erreur possible.
$\cos a \ldots \bar{1},808\,0675$ ...	25	$\text{tang}\,\frac{1}{3}(a+b) \ldots 0,068\,5011$ ...	43
$\cos b \ldots \bar{1},816\,9429$ ...	24	$\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b) \ldots \bar{3},940\,8584$ ...	2406
$\cos c \ldots \bar{1},991\,1426$ ...	49	somme .... $\bar{2},009\,3595$ ...	2449
$c = 11^\circ\,32'\,38'',75$ ...	$11'',4$	$\text{tang}\,\frac{1}{2}c$ .... $\bar{1},004\,6798$ ...	1225
		$\frac{1}{2}c = 5^\circ.46'.19'',365$	$5'',1$
		$c = 11^\circ.32'.38'',73$	$10'',2$

On voit que les deux formules donnent la même approximation, et que la première a sur la seconde l'avantage d'une plus grande simplicité.