



29. 9. 72

S. 804. C. 7





S. 804. d. 7.

RECUEIL

DES PIÈCES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation.

TOME SEPTIEME.

*Qui contient une partie des Pièces de 1751, 1752,
1753, 1759, 1760 & 1761.*



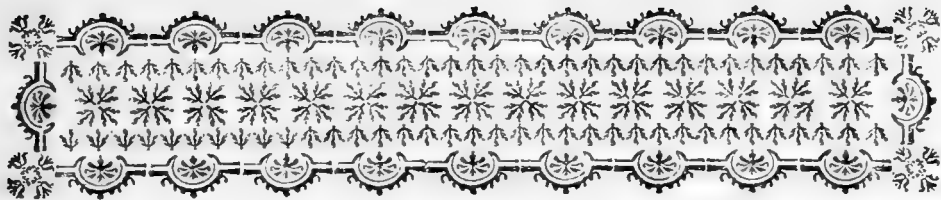
A PARIS,

Chez PANCKOUCKE, rue & à côté de la Comédie Française

M. DCC. LXIX.

Avec Approbation & Privilege du Roi.





AVERTISSEMENT,

Au sujet des Pièces qui composent ce Volume & de celles qui ont été réservées pour le Volume suivant.

LE sixieme Volume de ce Recueil parut en 1752, & il contenoit cinq Pièces : sçavoir, celles des années 1745 & 1747, sur la meilleure maniere de trouver l'heure en Mer. Depuis 1748 jusqu'à 1761 inclusivement, il y a 14 années dont nous allons parcourir la suite en peu de mots, pour que le Lecteur connoisse mieux la liaison des Pièces qu'on lui présente avec celles qui ont déjà été publiées.

En 1748 l'Académie adjugea le Prix à la Pièce de M. EULER sur les Inégalités du mouvement de Saturne & de Jupiter. Elle fut imprimée en 1749, & quelquefois elle se trouve reliée à la fin du sixieme Volume, elle est même indiquée dans le titre général ; quoi qu'il en soit elle se trouve chez Delatour, Libraire, rue saint Jacques, vis-à-vis la rue des Mathurins. Cette Pièce étoit destinée à commencer le septieme Volume du Recueil ; mais le Privilège ayant passé successivement entre les mains de plusieurs Libraires, cette Pièce est restée avec les précédentes dans le fond de Librairie de M. Delatour.

En 1749 il n'y eut point de Prix d'adjugé, il fut remis à 1751.

En 1750 il fut également remis.

En 1751 le sujet du Prix étoit la nature & la cause des Courans. M. BERNOULLI le remporta, & sa Pièce est la premiere de ce septieme Volume.

En 1752 il s'agissoit de déterminer les Inégalités de Saturne & de Jupiter ; la Pièce de M. EULER est la seconde de ce septieme Volume. Celle du P. BOSCOVICH, qui eut l'*Accessit*, & qui avoit été destinée à l'impression, ayant été publiée par l'Auteur à Rome en 1756, ne fera point imprimée dans ce Recueil.

En 1753 on demandoit la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands Vaisseaux. La Pièce de M. BERNOULLI, qui remporta le Prix, est la troisieme de ce Volume. Celles de M. EULER & de M. MATHON DE LA COUR, qui furent également destinées à l'impression, ne sont point encore imprimées.

A V E R T I S S E M E N T.

En 1754 le Prix ne fut point adjugé.

Pour 1755 l'Académie avoit proposé la maniere de diminuer le plus qu'il est possible le Roulis & le Tangage d'un navire ; la Pièce de M. CHAUCHOT, qui fut couronnée, fut imprimée à Paris chez Delatour, où elle se vend séparément, elle ne fera point partie de ce Volume.

Pour 1756, le sujet étoit la Théorie des inégalités que les Planetes peuvent causer au mouvement de la Terre ; la Pièce de M. EULER obtint le Prix, mais elle ne fera point dans ce Volume.

Pour 1757, l'Académie avoit proposé de nouveau la question du Roulis, & du Tangage des navires, le Prix fut adjugé à M. BERNOULLI ; mais sa Pièce n'est pas encore imprimée.

Pour 1758, il s'agissoit de la nature des Atmosphères des Planetes. La Pièce du P. FRISI, qui obtint le Prix, a été imprimée séparément en Italie, & ne fera point partie de ce Recueil.

Pour 1759, le sujet étoit : l'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un Vaisseau dans le Roulis & dans le Tangage, & la meilleure maniere de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts ; le Prix fut partagé entre deux Pièces, l'une de M. EULER, l'autre de M. GROIGNARD. La premiere n'est point encore imprimée ; la seconde, qui fut imprimée dès lors, pour l'utilité des Constructeurs, est la quatrième Pièce de ce Volume.

Pour 1760, l'Académie proposa d'examiner *S'il y avoit de l'altération dans le moyen mouvement des Planetes*, la Pièce de M. Charles EULER, qui eut le Prix, & celle du P. FRISI, qui eut l'*Accessit*, ne sont point encore imprimées.

La même année un Citoyen zélé ayant proposé un Prix extraordinaire sur la perfection des Verreries, l'Académie l'adjudgea à une Pièce de M. d'ANTIC ; elle fut imprimée la même année, c'est la cinquième de ce Volume.

Pour 1761, l'on proposa pour sujet, *la meilleure maniere de lester & d'arrimer un Vaisseau*. Le prix fut partagé entre les deux Pièces de M. Jean-Albert EULER & de M. l'Abbé BOSSUT ; elles forment la sixième & la septième de ce Volume.

On voit par le détail précédent que sept Pièces détachées qui ont été imprimées en divers temps, se sont trouvées suffisantes pour former un septième Volume de ce Recueil. Dans ces circonstances on a mieux aimé le publier dès-à-présent pour satisfaire le desir des Savans, que d'attendre l'impression d'un huitième Volume, qui eût été nécessaire pour pouvoir observer l'ordre chronologique dans l'arrangement de ces Mémoires.

SUR LA NATURE

ET LA CAUSE

DES COURANS,

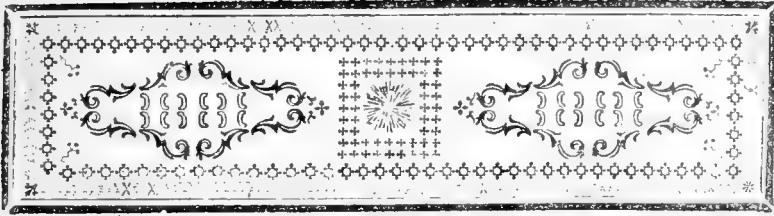
ET LA MEILLEURE MANIÈRE DE LES DÉTERMINER.

Pièce qui a remporté le Prix double , proposé par
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour
les années 1749 & 1751.

PAR M. DANIEL BERNOULLY , *Associé étranger*
de l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
Membre des Académies de Pétersbourg & de Boulogne,
&c. Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.

Prix 1749 & 1751.

A



M É M O I R E
S U R
L A N A T U R E
E T L A C A U S E D E S C O U R A N S .
E T L A M E I L L E U R E M A N I E R E D E L E S O B S E R V E R
E T D E L E S D É T E R M I N E R .

agitur tranquilla potestas
Quod violenta nequit.

P R E M I È R E P A R T I E .

Sur la nature & la cause des courans.

L

LA question que l'Académie Royale des Sciences avoit proposée pour le Prix de l'année 1749 me parut d'abord d'une nature à n'admettre que des solutions ou
Aij

trop faciles à voir pour de certains cas particuliers, ou trop imparfaites hors de ces cas. Il s'agissoit de la meilleure manière d'observer & de déterminer les courans sur mer, question extrêmement importante pour la navigation. Il peut arriver que cette question n'ait pas plus de difficulté que celle de déterminer le mouvement des eaux sur une grande rivière navigable : mais hors de ces cas, ou d'autres semblables, on tombe facilement dans le préjugé, qu'il n'est pas plus possible de satisfaire au problème, que s'il s'agissoit d'observer le fillage du vaisseau à fond de cale, sans avoir la moindre communication avec rien qui environne le vaisseau, ou d'observer le mouvement de la terre par des observations purement mécaniques, faites sur des objets terrestres. L'Académie m'a tiré de ce préjugé par l'addition qu'elle a faite à son problème ; les vues sont toujours tournées du côté de la manière d'observer les courans ; mais elle demande encore une théorie bien fondée sur la nature & la cause des courans. Comme cette seconde question, purement théorique, n'est pas de la nature de celles que l'Académie a coutume de proposer pour le second Prix, il m'est venu l'idée que cette illustre société, à la pénétration de laquelle rien ne sçauroit échapper, ne demandoit cette théorie que comme un moyen pour parvenir à la solution de sa première question principale : j'ai vu aussitôt qu'il falloit s'appliquer à déterminer les courans par eux-mêmes, & que le plus souvent il ne restoit aucun autre moyen de le faire. J'ai donc examiné avec le plus grand soin, dont je suis encore capable, quelles pourroient être les causes des courans, quelle sorte de mouvement en devoient prendre les eaux, quelles pourroient être les inégalités de ce mouvement par rapport aux différentes profondeurs des eaux, & enfin de quelle manière on pourroit mettre à profit ces inégalités pour en déterminer le mouvement qui se fait vers la surface de la mer. C'est là le plan de mes recherches

sur lequel je suis bien sûr de n'avoir aucun suffrage contre moi.

I I.

On distingue ordinairement les marées d'avec les courans , & c'est avec raison ; on connoît parfaitement la cause des marées , mais on ne convient pas également sur celle des courans. Il y a même des sçavans du premier ordre , dont je respecte infiniment l'autorité & la pénétration , qui ne donnent qu'une seule & même cause aux marées & aux courans , en regardant ceux-ci simplement comme une suite des marées. J'examinerai ce sentiment dans sa place , cette distinction ne convient pas avec notre sujet ; & nous ferons mieux d'entendre par *courant* tout mouvement horizontal & progressif des eaux de la mer , quelles que soient les variations de ce mouvement , ainsi nous n'excluons que le mouvement ondoyant des vagues.

I I I.

Il y a différentes espèces de courans , & chaque espèce paroît provenir d'une cause différente. L'expérience nous a appris qu'il y a des courans qui sont à-peu-près toujours les mêmes , qu'il y en a d'autres qui changent de force & de direction de six en six mois & qui reprennent leur état au bout de chaque année , que d'autres se règlent sur le mouvement de la lune , & enfin , qu'il y en a de tout-à-fait irréguliers. On voit aussi qu'il peut arriver que deux ou plusieurs de ces différentes espèces de courans concourent & ne forment en apparence qu'un seul & même courant , que j'appellerai *mixte* : enfin la théorie , que je me suis formée sur les courans , m'a conduit elle-même à une division d'une toute autre nature & très-essentielle , c'est celle de *courans simples* & *courans doubles* : j'appelle courant simple celui dont tou-

tes les eaux , depuis la surface jusqu'au fond , sont portées vers la même plage ; & courant double , quand les eaux ont un mouvement opposé ou presque tel vers la surface & vers le fond. Après avoir vu par ma théorie la nécessité des courans doubles dans plusieurs cas , & ramassant ensuite toutes les observations que je trouvois dans les auteurs sur cette matière , j'en ai trouvé un exemple dans *le Voyage autour du monde de Dampier* , auteur digne de foi , quoique beaucoup critiqué sur d'autres matières ; nous devons cette observation à un hasard , j'espère qu'elles deviendront beaucoup moins rares à l'avenir. Je commencerai ces recherches par les courans constants.

I V.

Il me paroît naturel de dire que les courans , qui demeurent constamment les mêmes , ne peuvent être causés ni par la lune , ni par le soleil , car les grands changemens en déclinaison de ces deux astres ne manqueroient pas d'y produire des changemens sensibles dans leur direction & dans leur force , outre que cet effet des deux astres ne sçauroit être expliqué , à mon avis , par les loix de la mécanique , comme je tâcherai de démontrer ci-dessous : toute la théorie des marées confirme cette remarque. Si nous renonçons donc à l'une & l'autre de ces deux causes , il ne nous reste absolument d'autre ressource , que le mouvement journalier de la terre , puisque sans l'action du soleil , sans celle de la lune & sans le mouvement diurne de la terre , il est évident que les eaux de la mer demeureroient dans un entier équilibre & dans un repos parfait ; c'est apparemment cette raison qui a engagé plusieurs Auteurs avant moi à attribuer les courans constants au mouvement journalier de la terre ; mais je ne sçache personne qui en ait bien montré le mécanisme : je tâcherai donc de l'expliquer le plus clairement qu'il me sera possible,

V.

Considérons la terre comme un grand noyau solide & sphérique tout couvert d'eau à la hauteur de quelques centaines de toises , qui tourne autour de son axe en vingt-quatre heures de tems : on sçait que quand même l'eau n'auroit d'abord aucun mouvement , elle seroit peu à peu entraînée par le noyau tournant jusqu'à ce que tout le systême parvienne à son état de permanence. Mais c'est une question , si dans cet état de permanence toutes les couches d'eau feront leur révolution parfaitement dans le même tems que le noyau solide ? Je dis que cela arriveroit , si tout notre systême étoit dans un vuide parfait ; l'adhérence des fluides , quelque petite qu'elle soit , doit nécessairement produire cet effet , & toutes les expériences physiques le confirment. Ainsi nous ne voyons encore rien qui puisse occasionner aucun courant.

V I.

Examinons donc à présent l'effet de l'atmosphère qui environne la surface des eaux. Il est encore certain , par la raison que je viens d'alléguer , quelque étendue qu'on donne à l'atmosphère , & quelque diminution qu'on suppose dans ses densités , que toute sa masse doit parfaitement suivre le tournoyement du noyau de la terre , après que tout le systême aura atteint son état de permanence , pourvu qu'on suppose que l'atmosphère ne soit enveloppée par aucune autre matière , & que toute sa matière ne reçoive absolument aucune autre impression. Mais une telle condition est sans doute absurde , de quelque façon qu'on l'envisage , & il faudra nous transporter au-delà des limites de notre atmosphère. Nous dirons donc que l'atmosphère de la terre est d'une étendue infinie ou bornée ; au premier cas , qui d'ailleurs n'est pas soutenable , il est visible que la matière de l'atmosphère , à une certaine distance de la terre , sera plus maîtrisée par le soleil , de

forte qu'elle ne pourra plus suivre librement le mouvement diurne de la terre , & cette conclusion suffit pour notre dessein ; aussi n'y aura-t-il personne qui croie qu'une telle atmosphère d'une étendue comme infinie pût tourner toute entière en vingt-quatre heures de tems autour de l'axe de la terre. Mais si cette atmosphère est bornée, personne ne croira non plus qu'il puisse régner un vuide parfait autour de cette atmosphère, & la matière qui lui est contigue en retardera le mouvement ; ce retardement se communiquera de couche en couche depuis les limites jusqu'à la surface de la terre. Il paroît que c'est dans ce retardement de la matière qui environne les eaux de la terre que consiste le vent alisé d'orient en occident ; du moins cette façon de l'expliquer est entièrement conforme aux loix de mécanique, & aux expériences physiques faites sur des fluides, qu'on fait tourner en rond par le moyen d'un cylindre vertical, placé au milieu des fluides, & qu'on tourne autour de son axe : Les fluides perdent sensiblement de leur vitesse angulaire depuis le cylindre vers les bords du vase qui les renferme, où les fluides sentent le même empêchement, que l'atmosphère souffre par la matière qui l'environne ; mais si l'air est empêché ou retardé dans sa rotation journalière, il faut que les eaux de la mer le soient aussi, & dans le même sens. C'est-là la cause du courant constant entièrement indépendant du soleil & de la lune ; suivant cette explication, le courant en question doit se faire d'orient en occident, & il observe effectivement cette direction.

V I I.

On auroit tort de regarder cette explication comme un de ces raisonnemens vagues assez ordinaires aux physiciens, qu'un esprit de précision voit être faux, & qu'il ne sçauroit refuter parce qu'ils sont trop vagues. M. d'Alembert, ce grand & illustre Géomètre, réfute à la vérité expressément ce sentiment dans sa dissertation sur
les

vents , qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin de 1746 ; mais il n'a pas fait attention que l'atmosphère ne sçauroit suivre avec une liberté entière le mouvement journalier de la terre dans ses limites. Il n'y a donc entre nous qu'une diversité d'hypothèse physique. Au reste, il s'en faut de beaucoup que nous connoissions assez la nature de l'adhérence des fluides, pour pouvoir déterminer géométriquement tous les effets qu'elle doit produire. Concevons un vase cylindrique vertical d'une grande hauteur, rempli d'un fluide , & au milieu de ce vase un cylindre solide, qui tourne uniformément autour de son axe ; le fluide sera sans doute peu à peu entraîné par le cylindre , & bientôt il aura atteint son mouvement uniforme. Dans cet état , le fluide qui touche immédiatement le cylindre tourne avec la même vitesse que la surface du cylindre , pendant que le fluide , qui touche immédiatement les bords du vase , demeure dans un entier repos : voilà comment les eaux , au fond de la mer , suivent parfaitement le noyau solide , & y demeurent dans un entier repos relatif ; voilà aussi comment l'air , qui touche immédiatement la surface de la mer , suit parfaitement le mouvement de celle-ci ; & enfin , comment on doit supposer que l'air perd tout son mouvement là où il touche immédiatement la matière , qui n'appartient plus au système de la terre. On me dira , que j'eusse mieux fait de considérer une sphère tournante à la place d'un cylindre ; on voit cependant que les premières conséquences que je viens de marquer sont les mêmes pour la sphère & pour le cylindre : & quand aux autres questions , que nous allons examiner , je ne les crois plus susceptibles d'aucune solution géométrique pour la sphère ; je n'ai donc voulu considérer qu'un cylindre & examiner le mouvement de tout le fluide compris entre le cylindre & les bords du vase ; M. Newton a déjà examiné cette question dans *ses princ. math. phil. Nat. au liv. 2. sect. 9 prop. 51.* & j'y renverrois simple-

ment le lecteur, si je n'y avois remarqué une faute essentielle. Un si grand homme n'en sçauroit faire qui ne soit remarquée tôt outard. Voici la proposition dont il s'agit.

VIII.

Problème. Si un cylindre solide d'une hauteur infinie est tourné uniformément autour de son axe vertical dans un fluide, & que tout le mouvement soit réduit à son état permanent, trouver le mouvement de tout le fluide qui environne le cylindre.

Solution. Concevons une section horizontale de tout le systême; soit ALF , celle du cylindre, dont le centre est en S ; qu'on tire ensuite la droite SQ , depuis le centre jusqu'au bord du vase, & qu'on prenne dans cette droite horizontale trois élémens égaux gh , hl & lm , qui marquent les épaisseurs des couches fluides concentriques: nous considérons chacune de ces couches élémentaires comme solide; en vertu de cette supposition chaque point d'une seule & même couche doit faire sa révolution dans un tems parfaitement égal. Pour voir que cette supposition est permise ici, il n'y a qu'à considérer les fluides comme un assemblage de particules solides extrêmement petites; mais cette considération même demande qu'on suppose les élémens gh , hl & lm constans, parce que le même fluide doit être supposé formé par des petites parties égales. Il est essentiel de faire cette remarque, parce que dans toute la solution analytique, il ne paroitra aucun vestige où il soit fait mention de cette constante. On pourroit donc croire facilement que, dans l'application de notre solution, il est permis de choisir telle constante qu'on voudroit; cependant cela n'est pas, & chaque autre constante donneroit une autre solution finale. Je suis surpris que M. Newton, qui prend le même élément pour constant, n'ait pas fait la même remarque.

Là-dessus j'observe 1°. que l'action étant toujours

égale à la réaction, l'adhérence mutuelle de deux couches contigues, de quelque nature qu'elle soit, exerce une force égale pour retarder la couche intérieure & pour accélérer la couche extérieure. 2°. Qu'une seule & même couche, telle que $h l$, soutient deux forces contraires, une intérieure en h qui tend à l'accélérer, & une extérieure en l qui tend à la retarder. 3°. Qu'à cause de l'état permanent ces deux forces doivent s'entre-détruire parfaitement. Tout cela jusqu'ici est parfaitement conforme aux remarques préliminaires de M. Newton : mais il a manqué, qu'on me permette de franchir le terme, dans l'application de la troisième remarque : pour y satisfaire, il fait la force en h égale à la force contraire en l : voici ses paroles : *Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones* (il entend par ce terme les forces de l'adhérence) *ex parte utraque sibi invicem aequari & fieri in regiones contrarias* : pendant qu'il devoit dire, *debent MOMENTA impressionum ex parte utraque sibi invicem aequari*. La correction est trop claire pour y insister.

Soit à présent $S h = x$; $h l = d x$; la force de l'adhérence en $h = \phi$ & en $l = \phi + d \phi$; il faut que le produit de ϕ par x soit égal au produit de $\phi + d \phi$ par $x + d x$, ce qui donne ϕx égale à une constante, au lieu qu'en négligeant la considération de l'inégalité des leviers $S h$ & $S l$ on parvient à la fautive équation $\phi = \text{const.}$ Supposant ensuite une relation donnée entre ϕ & les vitesses relatives élémentaires, cette relation donnera une équation entre les distances x & les vitesses du fluide qui y répondent. *C. Q. F. J.*

I X.

Coroll. 1. S'il y avoit une seule couche qui pût tourner avec une liberté entière dans sa couche voisine, il faudroit faire $\phi x = 0$ ou $\phi = 0$; cela demande que tout le système du cylindre & du fluide jusqu'à la couche en question tourne comme un même corps solide, chaque

point faisant sa révolution en temps égal, pendant que le reste de la masse fluide, au-delà de ladite couche, demeure dans un repos parfait.

X.

Coroll. 2. Si l'adhésion ϕ ne dépendoit aucunement de la vitesse, il arriveroit toujours ce que je viens de dire ; c'est à dire, que là, où le *momentum* de l'adhérence seroit le plus petit, se termineroit la révolution, que toutes les couches au delà demeureroient en repos, & toutes les autres en deçà feroient leur révolution en même tems, que le cylindre qu'on tourne ; cette remarque nous apprend ce qui arriveroit dans une suite de tuyaux ajustés, & emboîtés l'un dans l'autre, dont on affermiroit l'extérieur pendant qu'on tourneroit l'intérieur sur son axe ; car comme on suppose ordinairement que le frottement des corps solides ne dépend point de leur vitesse relatives, il n'arrivera pas toujours que tous les tuyaux soient entraînés ; quelques-uns des extérieurs pourront demeurer immobiles, & tous ceux qui seront mis en mouvement demeureront comme collés ensemble ; on voit aussi par la plus simple mécanique, que le dernier tuyau qui tourne sera toujours celui qui, avec son voisin, forme, non le moindre frottement, comme il s'ensuivroit de la solution de M. Newton, mais le moindre *momentum* de frottement.

X I.

Coroll. 3. Si au contraire on remplit un vase cylindrique d'un fluide, & si on y tourne sur son axe un cylindre solide, l'expérience nous apprend que tout le fluide se tourne en rond, & que les vitesses angulaires du fluide diminuent depuis la surface du cylindre, vers les bords du vase ; c'est là une preuve que l'adhérence des fluides est d'une nature tout-à-fait différente de celle du frottement des corps solides, & qu'elle dépend du petit

élément de vitesse relative, avec laquelle chaque couche est mue sur sa voisine. M. Newton suppose l'intensité de l'adhérence proportionnelle à ladite vitesse relative élémentaire, & cette hypothèse physique, de laquelle dépend la solution entière de notre question, me paroît aussi la plus vraisemblable : Il semble effectivement que les parties d'un fluide, qui sont obligées de se séparer, doivent être envisagées comme attachées ensemble par des fils infiniment subtils qu'on déchire, & qu'ainsi l'intensité de l'adhérence doit être censée proportionnelle au nombre des fils qui se déchirent dans un temps égal, & par conséquent proportionnelle à la vitesse relative. Il paroît même que c'est une loi générale de la nature, que toutes les variations causées par des causes infiniment petites sont proportionnelles à ces causes. La courbure des lames à ressort, par exemple, dépend absolument du même principe : chaque élément y fait, avec son voisin, un angle infiniment petit, qu'on suppose proportionnel au *momentum* de la force qui plie & courbe la lame. Je ne me fais donc point de peine d'employer la même hypothèse. Dans les corps solides, il faudroit encore faire attention à l'apression de chaque couche contre sa voisine, laquelle rend le frottement plus ou moins grand ; mais les expériences qu'on a faites sur l'adhérence des fluides, de même que l'idée que nous avons donnée de cette adhérence, prouvent également que la compression du fluide ne sçauroit faire varier l'intensité de l'adhérence.

X I I.

Pour appliquer notre solution générale & purement géométrique du §. 8. à notre sujet principal, nous considérerons près de l'équateur deux plans parallèles à l'équateur proches l'un de l'autre, qui coupent la terre, & nous ferons abstraction de l'adhérence des eaux contre

les deux plans ; soit la section du noyau solide de la terre ; représentée par le cercle AFL , & que AQ représente la hauteur verticale des eaux de la mer ; soit le rayon $A = r$; $AQ = a$; $Sg = x$; $gb = bl = lm = dx$; la vitesse absolue au point $A = C$; la vitesse absolue des eaux à la surface de la mer $= c$: Examinons à présent comment il faudra exprimer l'adhérence ϕ entre les deux orbes gb & bl , lesquels étant élémentaires peuvent être considérés comme solides. Or il est clair que l'adhérence entière entre deux orbes est d'abord d'autant plus grande , que le rayon des orbes est plus grand , parce que le nombre des particules adhérentes suit la proportion des rayons : mais outre cela cette adhérence est en vertu du §. 11. proportionnelle à la vitesse relative de la surface extérieure de l'orbe gb & de la surface intérieure de l'orbe bl ; il faudra donc exprimer cette petite vitesse relative ; soit la vitesse absolue de la surface intérieure de l'orbe $gb = v$, il faudra donc nommer $v + dv$ la vitesse absolue de la surface intérieure de l'orbe suivant bl , pendant que la vitesse absolue de la surface extérieure de l'orbe $gb = v + \frac{dx}{r} \times v$ à cause de la solidité supposée pour chaque orbe élémentaire : ainsi la petite vitesse relative est $= v + \frac{dx}{r} \times v - v - dv = \frac{v dx - r dv}{r}$; ainsi l'adhérence ϕ est en raison composée du rayon x & de la petite vitesse relative $\frac{v dx - r dv}{r}$ & par conséquent proportionnelle à la quantité $v dx - x dv$; or la quantité ϕx est $= \text{const.}$ (§. 8.) Il faut donc que $(v dx - x dv) x$ soit $= \text{const.}$ Il paroît d'abord ici qu'il est encore permis de choisir tel élément qu'on veut pour constant , puisque dans toute notre analyse nous ne nous sommes servis d'aucun élément constant ; cependant tout autre élément que celui de dx donneroit une fautive solution ; c'est pourquoi j'ai cru nécessaire d'expliquer préalablement ce paradoxe vers le milieu du §. 8. Nous aurons donc cette équation ,

$$(v dx - x dv) \times x = f dx$$

& nous verrons dans la suite ce qu'il faudra entendre

par le coefficient constant f : Divisant cette équation par x^3 , on aura $\frac{vdx-xdv}{x^3} = \frac{f dx}{x^3}$, dont l'intégrale avec l'addition de la constante convenable est

$$-\frac{v}{x} + \frac{c}{x} = \frac{f}{2x^2} - \frac{f}{2ax^2}.$$

Cette équation marque, que la différence des vitesses angulaires suit la proportion de la quantité $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+a}$. La quantité f se détermine par la condition, qu'en faisant $x = SQ = r+a$, la vitesse v devient $=c$.

X I I I.

Coroll. 1. Si on suppose $f=0$, la vitesse angulaire devient par-tout la même, & cela arrive en supposant $\frac{c}{r+a} = \frac{c}{r}$. En effet, si on détermine par notre précédent article la valeur de f pour le cas de $\frac{c}{r+a} = \frac{c}{r}$, on obtient $f=0$; aussi la vérité de ce corollaire est-elle manifeste par elle-même.

X I V.

Coroll. 2. Si on suppose $f=2rC$, on obtient $v = \frac{c}{r}C$; cela arrive en supposant $c = \frac{r}{r+a}C$; on aura donc en ce cas les vitesses absolues réciproquement proportionnelles aux distances du fluide à l'axe du cylindre. On voit en général qu'on ne sçauroit déterminer les vitesses absolues, sans que cette vitesse soit connue pour deux points tels que A & Q .

X V.

Coroll. 3. Comme le rayon du noyau solide de la terre représenté par SA peut être censé incomparablement plus grand que la profondeur de la mer, représentée par AQ , nous pourrons supposer $x=r+Z$, & considérer Z comme incomparablement plus petit que r . En ce cas la différence des vitesses angulaires devient $\frac{fZ}{r^2}$, & par conséquent proportionnellé à l'élévation des eaux par-dessus le fond de la mer. Comme les courans ne se font sentir que par la différence des vitesses angulaires,

c'est à cette différence qu'il convient de faire attention. Cependant pour peu que les courans soient sensibles, la différence des vitesses angulaires ne diffère pas sensiblement des vitesses absolues : Voici un exemple qui le confirme. La différence des vitesses absolues pour les points A & Q est $C - c$, & la différence des vitesses angulaires pour les mêmes points est $C - \frac{r}{r+a} \times c$. Soit donc $C = 1435$; $c = 1434$; $r = 19616000$; $a = 1000$; ces positions conviennent avec un courant qui fait un pied par seconde dans une mer qui auroit mille pieds de profondeur; en ce cas les deux dites différences sont à peu près comme 13 à 14 & par conséquent presque égales.

X V I.

Scholie. Si au lieu de faire $\phi x = \text{const.}$ nous supposons $\phi = \text{const.}$ comme M. Newton a fait, nous aurions cette équation

$$v dx - x dv = f dx,$$

laquelle donneroit après son intégration

$$-\frac{v}{x} + \frac{c}{r} = \frac{f}{r} - \frac{f}{x}$$

& cette équation est conforme à tout ce que M. Newton dit sur cette matière. Il est même à remarquer, que les deux solutions ne diffèrent pas entre elles, tant qu'on considère la profondeur de la mer comme incomparablement plus petite que le rayon de la terre solide, puisque la différence des vitesses angulaires devient encore en ce cas proportionnelle à A , c'est-à-dire, à l'élévation des eaux par-dessus le noyau solide. Au reste, s'il s'agissoit ici de déterminer encore la nature du vent alisé oriental, qui dépend tout-à-fait de la même cause, il faudroit dans l'estime de l'adhérence ϕ avoir égard aux diminutions des densités de l'air, qui font diminuer dans une certaine raison le nombre des particules adhérentes, après quoi le calcul se fera de la même façon que ci-dessous; je me contenterai d'avoir indiqué cette précaution.

X V I I.

Voilà donc quelle est la cause & la nature de ce courant général & constant d'orient en occident, que tous les Navigateurs reconnoissent, sur-tout dans la zone torride; & quoique nous ayons fondé nos conclusions sur l'action d'un cylindre tournant dans un fluide, il est visible qu'une portion de sphère telle qu'est la zone torride par rapport à la terre, ne sçauroit manquer de faire à peu-près le même effet: mais quand nous considérerions la mer depuis l'équateur jusqu'aux poles, nous pourrions toujours tirer de notre théorie cette conséquence, qu'il doit se former un courant d'orient en occident; que la vitesse de ce courant commence au fond de la mer; qu'elle augmente en progression arithmétique depuis le fond de la mer jusqu'à la surface, & que c'est dans la surface que le courant doit être plus rapide: cependant tout cela suppose encore toute la terre inondée à la même hauteur.

X V I I I.

On voit bien à présent que cette cause générale & permanente, que nous avons expliquée, peut être diversifiée d'une infinité de manières par l'irrégularité de la terre solide. Ici les calculs ne trouvent sans doute plus lieu; mais je fais souvent plus de cas de l'estime naturelle d'un homme versé dans la mécanique & dans l'hydrodynamique, que des plus sublimes calculs, toujours fondés sur des hypothèses, qui ne sont jamais exactement vraies, qu'on perd de vûe aussitôt pour se jeter tout entier dans l'analyse sans aucun examen ultérieur de la violence qu'on leur fait, de sorte qu'on tombe à la fin dans des résultats tout-à-fait ridicules, pendant qu'une bonne estime nous approche toujours du vrai: Mais pour former une telle estime, il faut avoir toujours devant les yeux la cause & la nature des courans suivant la théorie

que nous avons exposée, & tous les obstacles qui s'y opposent jusqu'à une très-grande étendue; il faut sur tout joindre à la théorie une connoissance de toutes les expériences physiques qu'on a faites sur de pareilles matières. On voit en général, sans autre examen, que les eaux changeront de direction lorsqu'elles trouvent de côté des passages plus libres & plus ouverts; que leur vitesse augmentera lorsqu'elles enfilent des passages qui vont en se rétrécissant, comme il arrive, par exemple, au détroit de Magellan; c'est par la même raison que le flux & reflux, qui sont insensibles dans la pleine mer méditerranée, deviennent très-sensibles au Golfe de Venise: On voit aussi que les eaux pourront couler vers un même endroit, par des chemins opposés, & diminuer par-là ou détruire le courant; le courant contraire pourra même emporter le courant naturel, de sorte que les eaux soient portées d'occident en orient.

X I X.

Ce n'est pas seulement la conformation des terres qu'on voit élevées au-dessus de la mer qui dirige & change les courans; celle du fond de la mer ne sçauroit manquer de faire souvent le même effet. M. de Buffon a fait la même remarque dans son excellente Histoire naturelle, art. 13 des courans. La sagacité de cet illustre sçavant, ne me permet pas d'apporter d'autres preuves ou éclaircissemens sur cet effet des chaînes de montagnes & des vallées, qui forment le fond de la mer. Je ne m'arrêterai qu'à une seule remarque essentielle par l'usage que j'en ferai pour observer & mesurer les courans sur mer. C'est que les chaînes de montagnes, dont la direction est presque perpendiculaire à celle du courant, doivent sans doute arrêter presque entièrement toutes les eaux qui sont dans les vallées. Les chaînes pourront être éloignées de 10, 20, 30 degrés ou davantage, & faire encore le même effet. Pour vérifier entièrement cette

remarque, nous aurons encore recours à notre expérience du cylindre solide tourné uniformément dans un vase cylindrique rempli de fluide ; il est bien clair que si ce cylindre étoit garni de plusieurs aîles parallèles à son axe, ces aîles seroient le même effet qu'un cylindre solide, qui s'étendît jusqu'au bout des aîles ; il fera facile de confirmer cet effet par des expériences : quand il n'y auroit même qu'une seule aîle, l'expérience ne laisseroit pas d'être presquela même. Si donc le rayon du cylindre tourné est $=b$, la largeur des aîles $=c$, la distance depuis la surface du cylindre jusqu'aux bords du vase $=e$, il convient de supposer un cylindre dont le rayon soit $=b+c$, & de centrer le fluide réduit à la largeur $e-c$; ce n'est qu'après ces changemens que l'on pourra faire une juste application de toute la théorie que nous avons exposée depuis le §. 8. jusqu'au §. 16.

X X.

Ce que nous venons de dire nous fait voir que les courans s'étendront rarement jusqu'au fond de la mer ; à mon avis cela ne pourra arriver que dans les mers peu profondes ; on pourra se trouver à pic d'une grande vallée ; les eaux y pourront avoir plus de mille toises de profondeur, il pourra y avoir un courant considérable vers la surface de la mer ; mais je suis bien éloigné de croire pour cela, que ce courant s'étende jusqu'au fond de la mer ; cela supposeroit le fond de la mer tout-à-fait uni & sphérique ; il y a plutôt toutes les apparences qu'il n'y aura plus aucun courant sensible au-delà de 50, 60, ou tout au plus de cent toises de profondeur. Les rapports des plongeurs, & plusieurs autres observations, me confirment entièrement dans cette opinion. C'est par cette raison que je distinguerai dans la suite *le fond de la mer* d'avec *le fond du courant* en entendant par ce dernier terme la région horizontale où les courans commencent à se former, & au-dessous de

laquelle les eaux sont comme tout-à-fait calmes & sans aucun mouvement commun avec celui du courant ; je ne prétends pourtant pas que les courans finissent brusquement & perdent tout d'un coup tout ce qu'ils avoient encore de mouvement un peu au-dessus ; les eaux pourront conserver un petit reste de mouvement bien plus bas , mais je suis persuadé qu'il sera toujours au dessous de ces limites comme insensible par rapport au mouvement des eaux près la surface de la mer. Ces réflexions nous conduisent à l'examen d'un tout autre obstacle.

X X I.

Supposons maintenant une grande digue tout le long d'un méridien d'un pôle à l'autre , puisque les terres de toute l'Amérique forment presque une telle digue ; il est question d'examiner l'effet que fera une telle digue sur le courant général qui se fait d'orient en occident. Les eaux ne sçauroient en ce cas faire tout le tour de la terre ; il faut cependant pour chaque endroit de la mer qu'il y arrive autant d'eau qu'il en part. Dira-t-on donc que ladite digue détruira entièrement le courant général ? On annéantiroit par-là l'effet de l'adhérence de l'air contre les eaux de la surface de la mer ; cette adhérence, si bien avérée par toutes les expériences, fait que chaque goutte d'eau à la surface de la mer doit être considérée comme animée par une petite force tangentielle d'orient en occident.

Après ces réflexions on est porté à croire que l'effet de ladite adhérence consistera simplement à élever les eaux du côté oriental de la digue , & à les baisser du côté occidental, de manière que chaque parallèle prenne la figure d'un tour de spirale , & que les eaux demeurent entièrement en repos sous cette figure de la surface de la mer. Je crois bien que ce sera là une partie de l'effet , mais non pas l'effet tout entier ; car les eaux , disposées de cette façon , ne sçauroient absolument point tenir l'équi-

libre , puisque l'adhérence qui agit de la manière que nous avons indiquée ne change en rien l'action de la pesanteur. Voici donc enfin comment je crois qu'on peut se débarrasser de toutes ces difficultés & de toutes ces contradictions apparentes ; c'est de dire que vers la surface les eaux couleront continuellement depuis le côté occidental de la digue jusqu'à l'autre côté opposé , en faisant tout le tour de la terre ; que les eaux s'éleveront insensiblement dans leur route , qu'elles seront les plus hautes près du côté oriental de la digue , & qu'enfin cet excès continuel de hauteur est employé à former au-dessous dudit courant oriental un autre courant contraire en tout au premier. J'appellerai dans la suite ce second courant , opposé à celui qui se fait au-dessus , *contrecourant*.

X X I I.

Voilà une circulation des eaux de la mer , à laquelle je ne sçache pas que personne ait encore pensé ; elle paroitra peut-être d'abord contraire aux loix de mécanique , & supposer un certain faux principe de mouvement perpétuel : cette idée me parut d'abord à moi-même trop hardie ; mais après y avoir murement réfléchi , j'en ai été entièrement convaincu. Je m'avisai donc , pour m'éclaircir sur cette conjecture , de faire l'expérience qui suit.

Expérience. Si on remplit d'eau un petit vase formé en parallélepipède long de 10 à 12 pouces , large & haut d'environ deux pouces ; si ensuite on y jette de petits brins de papier mâché , ou d'autres petits corps qui aillent légèrement à fond , & qu'enfin on souffle par-dessus la surface de l'eau d'un bout du vase à l'autre , on verra tous les petits corps , qui sont au fond du vase , se mouvoir vers l'endroit d'où part le soufflé , pendant que tout ce qui nage sur l'eau s'en éloigne.

Cette expérience suffit seule pour éclaircir & pour prouver notre nouvelle théorie sur les courans & les con-

trecourans. Nous aurons cependant occasion de nous étendre sur cette matière , & de la mettre dans tout son jour.

X X I I I.

On voit bien que les terres de l'Amérique ne sçauroient manquer de faire à peu-près le même effet que cette digue dont nous avons parlé ; nous sommes donc en droit de supposer un contrecourant constant & général d'occident en orient , au dessous du courant général oriental. Ces contrecourans feront cependant de même que les courans extrêmement diversifiés par la conformation irrégulière des terres , des côtes & du fond de la mer ; ils pourront même dans quelques endroits reprendre le dessus & reparoître sous la forme des courans. Il paroît que cela arrive tout le long des côtes de la Guinée depuis le Cap Verd jusqu'à la Baie de Fernando-poo, où les courans vont d'occident en orient ; car le grand promontoire de l'Afrique ne permet pas au courant général de se former tout le long desdites côtes. Toutes ces variations sont d'une grande ressource pour expliquer plusieurs phénomènes qu'on a remarqués sur les courans. La théorie des vents & des autres changemens de notre atmosphère dépend en grande partie du principe de la circulation des fluides , qui peut être produite de plusieurs manières, comme nous verrons ci-dessous.

X X I V.

J'ai dit sur la fin du §. 21. que les eaux doivent se tenir plus hautes du côté oriental de la grande digue que du côté occidental ; les terres de l'Amérique doivent donc encore faire le même effet : Par conséquent le baromètre doit se tenir plus bas aux bords de la mer du nord qu'à ceux de la mer du sud , & cela est effectivement ainsi : car M. Bouguer , dans son ouvrage sur la figure de la terre , fruit précieux de la puissante & effi-

cace protection que le plus grand monarque de la terre accorde aux sciences, dit expressément, que le mercure se soutenoit dans le vuide au bord de la mer (du sud près l'équateur) à 28 pouces 1 ligne; il ajoute que les plus grandes variations n'y font que de deux ou tout au plus de trois lignes, & il me semble que cet illustre académicien parle de ladite hauteur de 28 pouces 1 ligne, comme de la hauteur moyenne. Comparons cette observation avec celle d'un académicien, feu M. Richer, qui a été envoyé par ordre de Louis le Grand en l'Isle de Cayenne, parcillement pour y faire les observations astronomiques & physiques les plus recherchées dans ces temps-là. Voici comme M. Richer s'exprime là-dessus dans le recueil de ses observations pag. 68. » On étoit » en peine de sçavoir si vers l'équateur la hauteur du vis- » argent dans les baromètres étoit la même qu'à Paris ou » non : de quoi je me suis éclairci par les observations » que j'ai faites en Cayenne pendant une année entière, » où j'ai remarqué que la plus grande hauteur n'a ja- » mais surpassé vingt-sept pouces 1 ligne dans un lieu » qui n'étoit élevé au-dessus de la superficie de la mer » que de vingt-cinq à trente pieds ». Comme le lieu de l'observation a été d'un côté un peu élevé par-dessus la surface de la mer, & que de l'autre la hauteur de 27 pouces 1 ligne est annoncée comme la plus grande qui ait été observée, nous sommes encore fondés à prendre cette hauteur pour moyenne dans un lieu où les variations sont presque nulles. En comparant donc l'observation de M. Richer avec celle de M. Bouguer, nous voyons que le baromètre se tient d'un pouce entier plus bas près de l'Isle de Cayenne que vis-à-vis au bord de la mer du sud. Si on vouloit attribuer cette différence des hauteurs barométriques toute entière à une élévation actuelle des eaux près de l'Isle de Cayenne, nous trouverions par la règle de M. Bouguer, que les eaux de la mer sont sous l'équateur de 152 toises plus hautes près des côtes

orientales de l'Amérique que près des côtes occidentales. Si cette élévation des eaux paroït excessive , il faudroit tâcher de trouver encore une autre raison de la petite hauteur barométrique en l'Isle de Cayenne ; mais quelle que soit l'élévation des eaux près des côtes orientales de l'Amérique , elle diminueroit uniformément sous l'équateur d'occident en orient , si tout le reste du noyau de la terre étoit inondé , & les eaux de la mer auroient tout le long de l'équateur une petite pente égale vers l'orient , & cette pente seroit d'environ une seconde & demie , si l'élévation des eaux près de l'Isle de Cayenne étoit de 152 toises. Ainsi l'adhérence de l'air entraîne les eaux près la surface de la mer à contre-mont de ladite pente. Mais si la grande hauteur du baromètre sous l'équateur est de 28 pouces 1 ligne , & la petite de 27 pouces 1 ligne , la hauteur moyenne sera de 27 pouces 7 lignes , & je présume qu'elle sera à peu près telle sous l'équateur autour de la longitude des Philippines. Les côtes orientales de l'Afrique pourroient bien faire en partie le même effet , & élever les eaux de la mer rouge par-dessus celles de la mer méditerranée les plus proches ; conformément à l'opinion de plusieurs auteurs. J'ai cependant appris de bonne main que la hauteur barométrique est à peu près égale des deux côtés de l'Isthme de Panama ; mais aussi les courans y sont-ils bien différens du courant général d'est. Je ne sçai pas non plus si M. Richer aura pris toutes les mesures qu'on doit prendre pour pouvoir bien juger des hauteurs absolues des baromètres ; mais ce seroit outrer infiniment la chose , que de présumer dans ses observations des erreurs d'un pouce. Nous ne pouvons donc nous dispenser d'adopter les faits tels que nous les avons indiqués , quoiqu'ils soient peut-être moins sensibles. Il seroit fort à souhaiter qu'on fit dans tous les cours de navigation des journaux exacts des hauteurs barométriques ; la physique en général & notre question en particulier , en pourroient retirer de très-

très-grands avantages , & on peut presque toujours saisir un moment favorable pour faire ces observations , quand même la mer est assez agitée. Mais comme ces sortes d'observations demandent qu'on soit bien informé de toutes les circonstances qui peuvent faire varier les hauteurs absolues des baromètres , j'ajouterai ici une remarque singulière que j'ai faite sur cette matière ; si cette petite digression paroïssoit à quelques-uns trop étrangère à notre question , je les prie de passer l'article qui suit.

X X V.

On sçait qu'il est rare que les hauteurs absolues de différens baromètres s'accordent parfaitement entre elles : plusieurs causes peuvent concourir à produire ces petites inégalités. Une petite inégalité entre les pesanteurs spécifiques de différentes sortes de mercure , les différens degrés de chaleur , qui changent un peu la pesanteur spécifique d'un même mercure , la nature des tuyaux capillaires , dans lesquelles le mercure monte moins haut que dans des tuyaux plus larges , & enfin l'imperfection du vuide , sont les causes qu'on allégué ordinairement ; mais il y en a encore une autre qu'on n'a pas remarquée jusqu'ici , que je sçache. Elle consiste en ce que tous les fluides forment autour d'eux dans le vuide une atmosphère ou une vapeur élastique ; & ces vapeurs ont des propriétés singulières. Plusieurs expériences que j'ai faites , avec une excellente pompe pneumatique , m'ont fait d'abord remarquer l'activité de ces vapeurs : j'observois que le mercure dans l'*index* appliqué à la pompe ne montoit jamais si haut , qu'il se tenoit dans un bon baromètre ; ce défaut étoit ordinairement de 4 à 5 lignes , & quand il faisoit bien chaud il alloit jusqu'à 8 lignes. La pompe étoit cependant parfaitement bonne , & le vuide s'y conservoit pendant plusieurs jours de suite. Je reconnus donc qu'une certaine vapeur élastique , qui se formoit toujours à mesure qu'on la pompoit, en étoit la

véritable cause. La plus petite humidité suffit pour fournir une quantité immense de ces vapeurs. C'est cette vapeur élastique, qui fut sans doute la cause d'un phénomène que je me souviens d'avoir lû dans les Mémoires de l'Académie; c'est que des tuyaux barométriques ayant été lavés avec de l'esprit de vin en dedans, & puis remplis de mercure, celui-ci s'y est tenu constamment de 7, 8 à 9 lignes, si je me souviens bien, plus bas que dans les autres baromètres. Voici à présent quelques propriétés sur ces vapeurs élastiques; mais que je ne fais encore que présumer. 1°. Il m'a paru que l'activité de ces vapeurs n'est pas augmentée en les resserrant dans un plus petit espace; c'est qu'à mesure qu'on resserre les vapeurs, les parties se réunissent & reprennent la forme du fluide primitif. 2°. L'activité de ces vapeurs est augmentée par une plus grande chaleur, & diminuée par un plus grand froid. 3°. Il m'a paru que ces vapeurs demandent un certain degré de chaleur déterminé pour se former, & qu'au-dessous de ce degré elles ne se forment point du tout; voici ce qui m'a induit à former cette hypothèse. J'avois un baromètre à double branche, l'une remplie de mercure & l'autre d'huile de tartre, qui étoit fort bien fait, & qui ne me paroïssoit aucunement susceptible aux changemens du froid & du chaud; ayant une fois couché ce baromètre sur la table & puis relevé, je fus fort surpris de voir cet instrument changé en thermomètre extrêmement sensible; cependant il ne s'étoit absolument point glissé d'air dans la boule d'en-haut, & d'ailleurs les changemens thermométriques étoient de beaucoup trop grands pour être attribués à cette cause; je reconnus enfin qu'il s'étoit glissé une petite quantité, presque imperceptible, d'huile de tartre au-dessus de la surface du mercure dans la boule d'en-haut, laquelle par l'élasticité de sa vapeur produisoit le phénomène en question; je fis longtemps des observations avec cet instrument, & l'ayant une fois exposé à un grand froid d'environ onze degrés au-dessous de zéro du thermomètre de M. Reaumur, je remarquai

qu'il ne varioit plus fenfiblement , quoique le thermomètre fimple mis à côté eut encore baiffé de trois degrés , & que le baromètre n'eut point changé pendant cette augmentation du froid. 4°. Tous les fluides fourniffent une telle vapeur ; mais l'élafticité refpective pour un même degré de chaleur n'eft pas la même : le mercure n'en eft pas exempt ; mais s'il eft tout-à-fait bien purifié , l'activité de fa vapeur eft prefque infenfible. J'ai approché la flamme d'une bougie de l'extrémité du mercure d'un baromètre lumineux jufqu'à faire bouillonner le mercure , il ne defcendoit que de quelques lignes , pendant que dans d'autres baromètres , dont le vuide étoit également parfait , mais dont le mercure n'étoit pas purifié , j'ai pu faire defcendre le mercure d'autant de pouces qu'il y avoit de lignes dans le premier ; peut-être auffi que les tuyaux des autres baromètres renfermoient une petite humidité. Je conclus de ces remarques que , pour obvier à l'inconvénient defdites vapeurs élaftiques , il faut fe fervir de tuyaux parfaitement fecs & les remplir d'un mercure bien purifié , & enfin examiner les baromètres ainfi conftruits par la flamme d'une bougie de la façon que je viens de le dire. Pour faire voir que ces précautions ne font pas inutiles , je citerai les obfervations barométriques qui ont été faites en l'ifle de Gorée par Mef- fieurs Varin , des Hayes & de Glos ; la plus grande hauteur depuis le 31 mars 1682 jufques au 4 juillet de la même année y a été obfervée de 27 pouces 9 lignes & $\frac{3}{4}$, & la plus petite de 27 pouces 3 lignes & $\frac{1}{4}$; à quoi il eft ajouté : » On a obfervé qu'ordinairement à la Gorée » le baromètre étoit plus bas quand le thermomètre étoit » plus haut ; & généralement le baromètre étoit plus » haut la nuit que le jour de deux , trois ou quatre li- » gnes ; & il faifoit plus de changement du matin jufqu'au » foir , que du foir jufqu'au matin «. Je m'affure que tout cela n'étoit qu'un effet de la vapeur élaftique dont je viens de parler , & qui jette tout d'un coup un doute de

4 lignes sur les hauteurs absolues du baromètre observé en l'île de Gorée près du Cap-verd.

X X V I.

Les remarques que je viens de faire, pourroient bien nous laisser douter de l'observation de M. Richer pour 3 ou 4 lignes ; mais je ne crois pas qu'il faille pousser ses doutes plus loin. M. de la Condamine, qui a fait les mêmes observations, à en juger par la relation du voyage depuis la côte de la mer du sud jusqu'aux côtes du Brésil & de la Guyane, & à qui rien n'a pu échapper de ce qui a pu rendre toutes ses observations plus sûres & plus exactes, en pourra décider : mais je n'ai rien trouvé dans ladite relation qui en décide absolument, quoique j'y aie trouvé plusieurs circonstances qui me confirment dans l'opinion que la mer est réellement plus haute sur les côtes du Brésil, qu'au bord de la mer du sud sous les mêmes parallèles. Messieurs Bouguer & de la Condamine font aussi fort mention d'une petite variation journalière du baromètre, observée par M. Godin, que j'attribue de même à l'activité de la vapeur élastique du baromètre ; surquoi je m'en rapporte au jugement de ces Messieurs qui auront fait les observations thermométriques correspondantes. Mais en voilà assez, peut-être trop, sur la cause & la nature du courant général & constant d'orient en occident. Je ne ferai donc plus qu'examiner en deux mots si ce courant peut être considéré comme une suite du flux & reflux de la mer.

X X V I I.

Il est d'abord certain qu'on n'a rien remarqué dans ce courant général qui ait le moindre rapport avec la lune, qui est pour la plus grande partie la cause du flux & reflux. On sçait aussi que l'action de la lune consiste à allonger un peu le diamètre de la terre, dont la direction, passe par la lune : cette action jointe au mouvement jour-

nalier de la terre, fait toute la cause du flux & reflux de la mer en tant qu'il est produit par la lune. Supposons à présent que la lune réponde au point A (fig. 2.), & que l'ellipse presque circulaire $AECFBGDHA$, représente la surface de la mer, AB étant le diamètre un peu allongé de la terre. Si un moment après la lune répond au point a , il faut que les eaux prennent la figure $aecfbgdha$, qui ne diffère en rien de la figure précédente, excepté la position : ce changement de position ne scauroit se faire sans que les deux ménisques $AHDhA$ & $BFCfB$ se vident pour remplir les deux autres ménisques $AECeA$, & $BGDgB$. Il n'est donc plus question que d'examiner par quel mouvement des eaux se forme cette transfusion continuelle. On voit d'abord que pour la plus grande partie ce mouvement consistera en ce que les eaux baissent verticalement dans les deux premiers ménisques & montent dans les deux autres ; mais il est clair aussi que les eaux prendront en même temps un mouvement horifontal, & il n'est question que de ce seul mouvement. Si on disoit que toutes les eaux du ménisque $AHDhA$ iront remplir le ménisque $DGBgD$, & que ce sera la même chose des deux ménisques suivans, ce seroit là le courant général oriental ; mais il n'y a absolument aucune raison qui puisse nous empêcher de renverser l'ordre de ce mouvement, & de dire, que les eaux $AHDhA$, seront transportées en $AECeA$, & ainsi des deux ménisques suivans, ce qui formeroit un courant général occidental. On n'est donc pas plus fondé à tirer de cette cause un courant oriental qu'un autre tout-à-fait contraire. Pour déterminer le vrai mouvement horifontal des eaux, nous partagerons les quatre ménisques en deux parties égales par les petites verticales Hh, Gg, Ff & Ee . Alors on voit que les eaux des deux demi-ménisques $AHhA$ & $CFfC$, ont une pente tout-à-fait égale pour aller remplir le ménisque $AECeA$, ou plutôt les deux demi-ménisques contigus $AEeA$,

& $CEcC$, & que de la même façon les deux demi-ménisques $BGgB$ & $DGgD$ seront emplis par les eaux des deux autres demi-ménisques $FBfF$ & $HDhH$. C'est là visiblement le vrai mouvement ; aussi est-il entièrement conforme aux observations qu'on a faites sur le flux & reflux. suivant cette explication , le mouvement se fera d'occident en orient depuis H jusqu'en E , de même que depuis I jusqu'en G , & il y aura un mouvement d'orient en occident depuis F jusqu'en E , & depuis H jusqu'en G . Ces mouvemens forment un flux & reflux sans produire jamais un mouvement progressif continu. On remarquera qu'aux points cardinaux A, B, C & D , la vitesse des eaux est la plus grande , & qu'elle est nulle aux points intermédiaires E, G, F & f . Cependant la chose ne sera entièrement telle que dans les mers profondes à une grande étendue , & elle peut être extrêmement changée par la configuration particulière des côtes & d'un grand nombre d'autres circonstances. A mon avis , il faudroit recourir à une structure toute particulière du noyau solide de la terre , qui donnât plus de facilité à se mouvoir d'orient en occident que d'occident en orient , pour pouvoir déduire le courant oriental général de l'action de la lune ; mais ce seroit là multiplier les hypothèses sans aucune nécessité ; après tout je ne rejette pas cette opinion comme entièrement absurde , mais comme peu naturelle & ne pouvant subsister qu'avec les secours d'autres hypothèses entièrement précaires : Je suis même porté à croire que certains courans particuliers peuvent réellement être une suite du flux & reflux.

X X V I I I.

Je viens maintenant aux courans qui changent de direction de six en six mois , & qui reprennent assez régulièrement leur état au bout de chaque année. On sçait qu'il y a de tels courans périodiques. Messieurs de Buffon , Varenne , Dampier & d'autres auteurs en citent un

grand nombre d'exemples. Ces courans ne peuvent être une fuite du courant général ni du flux & reflux, ni être causés par la structure de la terre ; il faut nécessairement les déduire de l'action du soleil, puisque leur état, tant en direction qu'en force, dépend uniquement des saisons & de la position du soleil. Il est clair aussi que le soleil ne peut pas former ces courans réciproques de six en six mois par le principe de son attraction, par lequel il concourt avec la lune à former le flux & reflux de la mer ; car comme l'action de la lune prédomine beaucoup à cet égard sur celle du soleil, la période de ces courans seroit plutôt de mois en mois que d'année en année. Tâchons donc de développer la vraie manière de laquelle le soleil peut former ces courans en question ; nous en connoîtrons beaucoup mieux leur nature : ces recherches nous mèneront à de nouvelles réflexions fort intéressantes. Nous commencerons cet examen en supposant d'abord toute la terre inondée & en faisant premièrement abstraction de l'inclinaison de l'écliptique, c'est-à-dire, en supposant un équinoxe perpétuel & universel.

X. X I X.

Il est clair que les eaux sous l'équateur seront beaucoup plus échauffées par le soleil que vers les poles, elles y seront donc encore, comme on sçait, plus dilatées & perdront par-là une petite partie de leur pesanteur spécifique ; ainsi la pesanteur spécifique des eaux sera à cet égard d'autant plus grande qu'elles seront plus proches des poles. Le Père Feuillée a observé assidument les variations des pesanteurs spécifiques des eaux de la mer ; il a trouvé huit grains de diminution sur deux onces trois dragmes cinquante-sept grains depuis la hauteur de Gibraltar jusqu'à l'équateur, ce qui donne les pesanteurs spécifiques de ces deux eaux en raison de 1197 à 1180. Le principe de l'équilibre demande donc que les eaux s'élevent un peu sous l'équateur & se baissent vers les po-

les ; tout cela découle immédiatement des premiers éléments de la physique & de l'hydrostatique. Supposons , par exemple , la pesanteur spécifique moyenne des eaux sous l'équateur à celle qui répond à la latitude de 60 degrés , comme 120 à 121 , & donnons 1200 toises de profondeur à la mer ; en ce cas , la mer fera de dix toises plus haute sous l'équateur que sous le parallèle qui en est éloigné de 60 degrés ; mais , par-là même , la surface de la mer prendra une petite pente depuis l'équateur vers les poles , de sorte qu'elles ne feront plus tout-à-fait de niveau : cette pente fera que les eaux coulent continuellement depuis l'équateur vers les deux poles ; mais par-là la mer deviendrait bientôt plus haute vers les poles , pendant qu'elle y doit nécessairement être un peu plus basse : Que doit on répondre à cette contradiction apparente ? Il n'y a absolument aucun autre moyen que celui de dire qu'il y aura une circulation continuelle. Voici comment se formera cette circulation. Je dis que les eaux au lieu de s'élever de dix toises sous l'équateur ne s'y élèveront que d'environ cinq toises ; il arrivera par-là que , d'un côté , les eaux de la mer vers la surface descendront depuis l'équateur vers les poles à cause de la petite pente , & que de l'autre les eaux retournent par le bas des poles vers l'équateur étant sollicitées à ce mouvement par l'excès du poids des colonnes d'eau qui sont par cette distribution plus pesantes près des poles que sous l'équateur. Voilà une légère ébauche d'une nouvelle circulation des eaux de la mer , qui forme un courant & un contre-courant continuel de l'équateur vers les poles , & des poles vers l'équateur. Mais avant que d'entrer dans un plus grand détail sur ces courans , je tâcherai de dissiper les doutes qu'on pourroit se former contre le principe qui en fait la base.

X X X.

C'est ici surtout que les loix ordinaires de la mécanique

nique semblent entièrement renversées. On voit un certain mouvement perpétuel sans voir distinctement aucune force qui l'entretienne. Avec tout cela, la nature est extrêmement fertile à produire une infinité de mouvemens perpétuels physiques plus ou moins réguliers suivant les circonstances. C'est que dans la théorie de la mécanique, on suppose qu'un corps est toujours animé également vers un centre de force quelconque, s'il en est également éloigné; tout le principe de la conservation des forces vives est uniquement fondée sur cette supposition: on peut même en ce cas donner une étendue infiniment plus grande à ce principe, qu'on n'a encore remarqué: Voici ce principe dans toute son étendue. » Qu'on s'imagine un tel nombre de points qu'on » voudra, comme autant de centres de forces, que ces » points soient tous matériels ou en partie immatériels, » qu'ils décrivent des courbes quelconques, qu'on leur » suppose une loi d'attraction ou de gravitation telle qu'on » voudra; il n'y a qu'à combiner chaque point avec cha- » que point, examiner ensuite pour chaque combinaison, » quelle seroit la force vive, si un des deux points étant » immobile, l'autre s'en étoit approché en ligne droite » de la même quantité, que ces deux points le sont ap- » prochés dans le système; & la somme de toutes ces for- » ces vives donnera constamment la force vive de tout » le système «.

La généralité de ce théorème nous fait voir d'abord l'impossibilité de ce qu'on appelle mouvement perpétuel purement mécanique; mais le mécanisme suivant lequel nous avons expliqué au précédent article notre nouvelle circulation des eaux de la mer, n'est pas compris dans le cas de ce théorème général sur la conservation des forces vives, puisque chaque goutte d'eau change de nature en changeant continuellement son volume, sa densité & sa pesanteur spécifique: ainsi ces sortes de circulations perpétuelles peuvent fort bien subsister avec

les principes de mécanique généralement reconnus. J'établirai notre théorie par des raisons & expériences physiques d'une manière à n'en pas douter, après que nous aurons examiné l'effet que les différentes chaleurs doivent produire dans l'air.

X X X I.

Notre question sur les courans est tellement liée avec celle des vents réguliers, que je ne saurois me dispenser d'en faire presque un seul & même sujet : Nous avons vu ci-dessus, que l'adhérence des fluides, qui est la cause du courant général oriental, doit produire en même-temps un vent oriental constant & d'autant plus sensible, que l'air est plus élevé par-dessus la surface de la mer : nous allons voir que c'est tout le contraire dans le cas dont il s'agit ici.

La dilatation qu'un certain degré de chaleur produit dans l'air est beaucoup plus grande, que dans l'eau : j'ai trouvé par des expériences, que les dilatations des eaux pour des variations égales dans les thermomètres faits d'esprit-de-vin, sont fort inégales; elles sont imperceptibles dans les eaux, qui sont peu éloignées du point de la congellation; ensuite ces variations augmentent dans les eaux moins froides & deviennent enfin presque uniformes. Il paroît que c'est là une propriété commune à tous les fluides; si on compare les variations d'un thermomètre à esprit-de-vin avec celles d'un thermomètre à mercure, on voit que dans les froids excessifs près à geler l'esprit de-vin, le premier thermomètre ne montre plus que des variations très-petites pendant que l'autre fait des variations très-sensibles : je ne doute pas qu'un thermomètre à mercure comparé avec un thermomètre à air ne montre de pareilles diminutions dans les froids excessifs; &, par les diminutions de la marche du mercure, on pourroit juger à peu près, à quel degré de froid le mercure se geleroit. On voit donc que les eaux

de la mer ne souffriront plus aucun changement sensible vers les équinoxes au-delà de 50 ou 60 degrés de latitude , pendant que la densité de l'air augmentera jusqu'aux poles. On a éprouvé des froids à Kamtschatka , à Tornao , à Kola , &c. qui augmentent presque de la moitié la densité d'un air tel que celui de nos étés, de sorte que les densités de ces deux sortes d'air peuvent être censées être en raison de 3 à 2. Mais cette grande inégalité ne trouve lieu que bien près de la terre, y ayant toutes les apparences , que toute la masse d'air prend la même température au-dessus d'une certaine hauteur. C'est là la raison pourquoi dans la zone torride le froid augmente à mesure qu'on s'élève par-dessus la surface de la mer. M. Bouguer a fait là dessus d'excellentes remarques : Mais en passant dans les saisons moyennes les alpes de la Suisse , on ne sent pas à beaucoup près ces grandes augmentations de froid ; & je ne doute pas que près des poles on ne sentît un air d'autant plus chaud , qu'on s'élèveroit davantage, si on pouvoit faire ces observations. Je suis fort porté à croire qu'à la hauteur verticale d'environ 300 toises l'air commence à prendre sa température uniforme ; mais j'entends des élévations qui seroient prises en plein air & dans les lieux où il n'y auroit point de montagnes. Si je ne me trompe, dans cette conjecture , la pression de l'air doit élever le mercure dans le baromètre d'environ six lignes plus haut vers les poles que vers l'équateur , & cela s'accorde fort bien avec ce que j'ai dit au § 24 fondé sur l'observation de M. Richer , que j'ai comparée avec celle de M. Bouguer ; de laquelle comparaison il résulte que la hauteur moyenne du baromètre sous l'équateur n'est que de 27 pieds 7 lignes , si cependant , ce que je répète , l'observation de M. Richer est tout à fait sûre. C'est sans doute cette uniformité de chaleur dans les régions hautes de l'air , qui fait que les hauteurs barométriques diffèrent si peu vers les poles & près de l'équateur. On voit

aussi pourquoi , dans les pays septentrionaux, une élévation de 65 pieds suffit pour faire baisser le mercure d'une ligne , pendant que , selon M. Bouguer , dont je respecte toujours l'autorité , il faut s'élever de 90 pieds près de l'équateur pour la première ligne de descente du baromètre.

X X X I I.

Examinons maintenant l'effet que doit produire cette inégalité dans les pressions des colonnes d'air. Il est clair que son premier effet sera d'applatir tant soit peu la surface de la mer vers les poles & d'élever les eaux vers l'équateur : la pente de la surface de la mer depuis l'équateur vers les poles , dont nous avons déjà parlé au § 29 , en sera un peu augmentée, mais ce ne sera que d'environ un demi pied sur tout le quart du méridien : ce premier effet sera donc comme insensible. Mais le second effet sera de produire une circulation perpétuelle d'air ; cette circulation se fera depuis les poles vers l'équateur près la surface de la mer , pendant qu'une quantité d'air égale retourne de l'équateur vers les poles dans une plus haute région de l'atmosphère. Ce n'est ici qu'une esquisse de notre système sur les courans & sur les vents réguliers ; nous entrerons dans un plus grand détail ci-dessous.

X X X I I I.

Je crains toujours, malgré tout ce que je viens dire , que ces circulations d'eau & d'air ne paroissent trop paradoxes pour pouvoir être admises. Je ne me ferai donc point de peine de les établir davantage par des expériences physiques.

1. *Expérience.* Qu'on échauffe bien une chambre à fourneau , pendant que l'anti-chambre demeure froide ; qu'on ouvre ensuite la porte entre les deux chambres & qu'on y tienne deux bougies allumées , l'une tout au bas & l'autre tout au haut , on verra que la flamme de la

première fera fort sensiblement dirigée vers la chambre échauffée & celle de l'autre vers l'anti-chambre froide. Si on tient la bougie à la mi-hauteur de la porte , la flamme n'en est point agitée du tout. Cette expérience suffit sans doute toute seule pour établir la circulation de l'air , que j'ai indiquée.

Explication. La raison de cette circulation d'air consiste en ce que le poids d'une colonne d'air dans la chambre chaude est plus petit que celui d'une colonne tout-à-fait semblable dans la chambre froide; ainsi l'air d'en bas coulera continuellement de la chambre froide dans la chambre chaude: & , comme l'élasticité de l'air doit demeurer la même dans les deux chambres , il faut que la chambre chaude se vuide continuellement d'autant d'air qu'elle en reçoit , ce qui ne sçauroit se faire que par la partie supérieure de la porte , parce que la différence entre les poids des colonnes d'air , doit nécessairement produire cette circulation continue. Il n'est presque pas possible , que d'autres n'aient fait cette observation avant moi.

2. *Expérience.* Dans les mines profondes , où il règne souvent un air extrêmement échauffé par les exhalaisons , on peut rafraîchir l'air & le faire circuler continuellement par le moyen d'un long tuyau , qui depuis l'air libre descend jusqu'au fond de la mine : l'air entre continuellement dans le tuyau par l'ouverture d'en-haut & la circulation se fait d'autant plus vite que l'air de dehors est plus froid. Cette expérience a été faite en Suède & elle est rapportée dans les transactions Philosophiques de Londres.

Explication. L'air extérieur étant plus froid que celui des mines en question , on n'a qu'à supposer la circulation commencée pour voir qu'elle doit continuer sans fin , puisque l'air frais étant entré dans le tuyau ne sçauroit prendre dans l'instant la température des mines & doit par conséquent demeurer plus pesant que celui des mines ; mais l'air qui sort par l'ouverture inférieure du

tuyau entre dans un grand espace , où il a tout le tems pour s'échauffer , sans cependant refroidir sensiblement celui des mines par son mélange. Ainsi la circulation continuera toujours. Cela étant ainsi , il est facile de voir que la moindre chose , qui ne sçauroit jamais manquer d'arriver d'elle-même , suffit pour commencer & pour former une circulation , qui s'augmente d'abord & puis se continue par ses propres forces.

Quant à la circulation des fluides , on n'a qu'à mettre une grande marmite remplie d'eau à côté du feu pour voir une circulation tout-à-fait semblable à celle que nous avons supposée : la nature se plaît à former ces sortes de circulation jusques dans les matières subtiles : celles de la matière magnétique sont assez connues ; cependant celles-ci se forment par un tout autre principe. Les expériences sur l'électricité montrent de même manifestement une circulation de la matière électrique : on peut même , par le moyen de cette matière , produire dans les corps solides des mouvemens réguliers , qui durent tant que l'électricité subsiste : on sçait que de petites boules d'ivoire suspendues près d'un corps électrisé s'en approchent & s'en éloignent alternativement par des balancemens réguliers. La raison de ces balancemens perpétuels doit être tirée de notre §. 30. c'est que la boule d'ivoire est plus fortement attirée par le corps électrisé en s'en approchant , qu'elle ne l'est en s'en éloignant , les distances étant égales. On ne doutera pas de cette raison , quand on considère que la force attirante devient même répulsive , si on donne assez de tems à ce changement. J'ajouterai ici deux expériences sur cette matière , tant parce qu'elles confirment nos principes , que parce que ce mémoire s'adresse à une Société , qui reçoit toujours avec bonté toutes les nouvelles observations & expériences faites sur des matières aussi intéressantes , que l'est aujourd'hui l'électricité.

3. *Expérience.* Si on met une aiguille *a c* (fig. 3.) de

fer ou de bois auprès d'un globe de fer fortement électrisé par communication AB , & que l'aiguille soit librement mobile au point b ; cette aiguille fera d'abord irrégulièrement agitée : mais bientôt elle s'élancera jusqu'à faire le tour & alors elle continuera à tourner toujours dans le sens qu'elle a commencé sa première révolution & quelquefois avec une rapidité étonnante. J'ai diversifié ces expériences de plusieurs façons, que je passe sous silence, mon dessein n'étant que de confirmer notre principe; car considérant le centre C du globe AB comme un centre de forces, & prenant dans l'orbite de l'extrémité de l'aiguille deux points d & e également éloignés du centre C , il semble que l'extrémité de l'aiguille est attirée plus fortement au point d qu'au point e , si elle tourne dans le sens $d a e c d$; & plus fortement au point e qu'au point d , si elle tourne dans le sens contraire: & cette raison explique parfaitement ces expériences.

Voici à présent une autre expérience, qui montre la façon de circuler de la matière électrique & que cette matière est sujette aux loix hydrodynamiques comme les fluides ordinaires, de laquelle j'ai prévu le succès avant que de la faire: je l'imaginois d'abord dans le dessein de produire des tournoyemens toujours dans le même sens.

4. *Expérience.* Soit $a b$ (fig. 4.) une verge de fer fichée verticalement dans un gâteau de résine & électrisée par communication; qu'on fasse ensuite une aiguille de fer telle que $e c d f$ recourbée à angle droit par les deux bouts $c e$ & $d f$, chacun dans le plan horizontal & à contre-sens; que les extrémités $e f$ soient pointues; qu'on mette cette aiguille sur la pointe de la verge $a b$ de manière à se tenir horizontalement & à tourner librement, on verra que l'aiguille commencera peu-à-peu à tourner & toujours dans le sens $e c f d$; Si on donne à l'aiguille une impression contraire, son mouvement sera peu-à-peu retardé pour faire ensuite ses tournoyemens naturels &

avec beaucoup de vitesse. De nuit le cercle *ecfd* paroît lumineux. Cette expérience prouve clairement, que la matière électrique passe continuellement de la verge dans l'aiguille au point *b* & que là elle se divise en deux torrens opposés pour sortir par les deux pointes *e* & *f*, & enfin que la réaction de ce fluide, forcé à changer de direction dans les coudes *c* & *d*, fait tourner l'aiguille dans le sens *e c f d*.

X X X I V.

Je me flatte après toutes ces raisons tant physiques que mécaniques, qu'on n'aura plus aucune peine à admettre les circulations des eaux de la mer & de l'air telles que je les ai expliquées aux §. §. 29. & 32. & cela d'autant moins qu'elles sont très conformes aux phénomènes qu'on a remarqués sur les moussons & sur les courans périodiques anniverfaires. Examinons donc à présent de plus près la nature de ces circulations fans sortir encore de notre hypothèse de l'inondation entière de la terre & de la coincidence de l'écliptique avec l'équateur.

J'ai allégué vers le milieu du §. 31. une raison physique, qui me fait croire, que cette circulation des eaux ne s'étend pas au-delà du 50^e degré de latitude; je regarde donc la vitesse horizontale des eaux comme nulle tant près de l'équateur, où les eaux ne font que monter du fond de la mer vers la surface, que près desdites latitudes, où les eaux descendent de la surface vers le fond. Je présume aussi que le courant sera le plus sensible autour du 25^e degré de latitude, qu'il sera dirigé vers le nord dans les pays septentrionaux & vers le sud dans les pays méridionaux, pendant que les contre-courans auront une direction contraire de part & d'autre, & cette double circulation des eaux se feroit uniformément pendant tout le cours de l'année, si le Soleil décrivoit constamment l'équinoctial.

X X X V.

Il est facile à présent de voir les changemens périodiques qui doivent arriver par l'obliquité de l'écliptique; supposons, par exemple, que le soleil décrive le tropique du Cancer: ce ne sera, sans doute, plus l'équateur qui partagera les deux circulations & où la vitesse horizontale des Eaux sera nulle; ce sera plutôt un parallèle septentrional qui ne sçauroit être fort éloigné du tropique du Cancer. Il suit de là que, sous l'équateur, il doit se former un courant dirigé vers le nord depuis l'équinoxe du printems jusqu'à l'équinoxe d'automne & un courant tout contraire pendant les autres six mois. Si on considère un parallèle entre l'équateur & le tropique du Cancer, il pourra arriver que le courant dirigé vers le nord ne dure que deux ou trois mois d'été suivant la latitude du lieu, & que pendant tout le reste de l'année on sente un courant contraire. Ces exemples suffisent pour voir ce qui doit arriver dans tous les parallèles & pendant toute l'année, tant que l'on suppose toute la terre inondée. On remarquera cependant que les changemens se feront toujours un peu plus tard, parce que l'effet du soleil est toujours postérieur à sa position. Mais ces courans périodiques seront extrêmement changés par les terres fermes, par la configuration des côtes, par les Isles, par la conformation du fond de la mer & par un grand nombre d'autres circonstances. Je suis cependant persuadé qu'en combinant cette théorie avec celle que nous avons donnée sur le courant général d'est, la simple inspection d'une grande mappe-monde suffira pour voir l'origine de tous les courans réguliers tels qu'on les remarque.

X X X V I.

L'explication que je viens de donner des courans périodiques anniveriaires nous fait voir en meme-tems la

source des vents périodiques & leur nature; il n'y a qu'à appliquer le précédent article au §. 32. pour comprendre tous les changemens de dits vents pendant le cours de l'année. Je pourrois faire voir ici une conformité frappante entre notre théorie & les observations constatées sur les vents, si cet examen appartenoit immédiatement à notre sujet. D'autres ont considéré à la vérité avant moi la raréfaction de l'air causée par la chaleur du Soleil pour en déduire une théorie sur les vents; comme ils n'ont pas fait attention aux circulations, que je crois d'avoir si bien établies, & qu'on voit très-souvent aux yeux par le mouvement contraire des nuages des régions basses & des régions hautes de l'air, cette hypothèse n'a pas dû les mener bien loin. Ce que j'ai dit au §. 27. montre aussi à mon avis l'insuffisance de ce principe pour en déduire le vent général d'est. Il me semble toujours que les variations de la chaleur du jour à la nuit ne sçauroient produire qu'une espèce de flux & reflux de l'air alternativement d'orient en occident, & d'occident en orient, que l'expérience même confirme assez, & qu'il n'y a pas plus de raison d'en déduire un vent oriental permanent que d'en déduire un vent occidental constant. Je ne me lasse point d'admirer les sublimes calculs, que M. d'Alembert a sçu employer pour expliquer le vent oriental; mais comme ces sortes de calculs sont fondées sur la conception qu'on se forme de la manière dont les fluides reprennent leur état d'équilibre, c'est à celle-ci que se réduit toute la question, & il me semble que la nôtre du §. 27. est plus naturelle & qu'elle répond à tous les phénomènes; je la croirois entièrement sûre, si je n'avois pas Messieurs de Buffon & d'Alembert contre moi, ou pour mieux dire, si ces illustres sçavans autorisoient notre théorie, car enfin leur sentiment n'est pas contradictoire à notre théorie. Si nous combinons le mouvement de l'air, qui près la surface de la mer se fait depuis les deux poles vers l'équateur,

nous trouvons la raison , pourquoi généralement parlant le vent alisé est nord-est dans l'hémisphère septentrional & sud-est dans l'hémisphère méridional , & notre théorie bien entendue nous fournit une explication très-ample & très-naturelle de toutes les variations anniverfaires de ces vents alisés. Remarquons aussi , que le même mouvement de l'air depuis les poles vers l'équateur dans la région basse de l'atmosphère , fournit une nouvelle source du vent général d'est dans la zone torride : car cet air continuellement transporté dans un plus grand parallèle , doit aussi continuellement augmenter la vitesse d'occident en orient pour suivre le mouvement journalier de la terre ; & , comme il n'y a aucune force qui lui imprime cette augmentation de vitesse d'occident en orient , excepté l'adhérence des fluides qui ne sçauroit la produire toute entière , il faut nécessairement qu'il en provienne un mouvement d'air relatif d'orient en occident. C'est apparemment de cette façon qu'il arrive que généralement parlant les vents d'est sont plus froids que les vents d'ouest : car un vent qui part dans son origine des régions polaires vers l'équateur , & qui doit être bien froid , se tournera à l'est à mesure qu'il avance ; & au contraire un vent qui va d'abord directement de l'équateur vers les poles , & qui doit naturellement être chaud , se tournera à l'ouest. On pourroit appliquer ce raisonnement aux courans , & dire que les eaux qui partent d'abord directement de l'équateur vers les poles par la surface de la mer , prennent peu-à-peu une direction de l'ouest à l'est : mais je ne crois pas ces changemens de direction dans les courans en question bien sensibles ; parce que l'adhérence mutuelle est beaucoup plus grande dans l'eau que dans l'air , que les grands continens forcent l'eau à suivre le mouvement journalier de la terre , & enfin parce que le mouvement des courans d'eau est plus lent que celui des courans d'air.

On aura remarqué que, suivant notre théorie, les mouvemens des eaux & de l'air sont précisément opposés entre eux près la surface de la mer. Cette circonstance ne sçauroit manquer de changer un peu la chose à cause de cette adhérence des fluides, dont nous avons si souvent parlé, & qui est la cause que tous les vents de durée produisent des courans du même côté : il se pourra donc faire que tout près la surface de mer les courans en question soient tout-à-fait insensibles, ou peut-être même qu'ils prennent une direction contraire à leur direction naturelle ; mais je suis persuadé qu'ils seront tels que je les ai décrits, pour peu que les eaux soient profondes : c'est ainsi que les vents arrêtent souvent les eaux d'une rivière vers la surface à son embouchure, & qu'elle ne laisse pas de jeter la même quantité d'eau dans la mer. Qu'on me permette d'alléguer ici deux observations faites par Dampier, qui éclaircissent toute notre théorie, & qui prouvent que dans de très petites profondeurs les courans peuvent être entièrement opposés. Ce célèbre voyageur dit dans le second tome de son *Voyage autour du Monde*, p. 387, édition de Rouen, de 1715. « Ce » n'est pas une chose extraordinaire de voir deux cou- » rans opposés en même-temps & en même lieu, la sur- » face de l'eau courant d'un côté, & le reste du côté » contraire ; j'ai vû moi-même étant à l'ancre, le cable » emporté par deux courans contraires, le bas du cable » tors d'un côté, & le haut d'un autre. « Nous voyons notre théorie sur les courans & contre-courans & sur la circulation des eaux de la mer, confirmée par cet exemple. En voici un autre qui prouve que les courans peuvent être opposés dans de très-petites profondeurs. Le même auteur dit au même endroit que les courans repoussent quelquefois le navire, la poupe avant contre-vent & marée ; c'est là un effet qu'un courant simple ne sçauroit jamais produire, & il faut que le navire nage entre-

deux eaux, qui aient un mouvement contraire pour être sujet à un tel accident. Il arrive aussi souvent que le vaisseau obéit peu ou point du tout au gouvernail sans qu'on en voie aucune raison; cela ne sçauroit arriver à mon avis que lorsque le vaisseau se trouve dans un double courant: ce double courant tend à mettre le vaisseau dans une certaine position déterminée dont il est difficile de le détourner. Nous voyons donc qu'il peut y avoir des courans à moins de 16 pieds de profondeur & entièrement opposés à ceux de la surface. Cette remarque est très-essentielle à notre sujet. Il pourroit y avoir à la surface de la mer un courant du nord au midi: je suppose qu'on soit à même d'observer parfaitement ce courant, il ne faudroit pas d'abord conclure de cette observation que le vaisseau sera porté vers le Sud, puisqu'il pourroit par un contre-courant plus fort dériver vers le nord.

X X X V I I I.

La circulation de l'air qui se fait, dans chaque hémisphère, nous fournit encore une explication assez naturelle des saisons sèches & humides. Je présume que cette région verticale d'air, qui sépare les deux tourbillons, qui dans le temps des équinoxes est à l'équateur, qui s'approche alternativement des deux tropiques, est toujours plus sujette aux pluies que les autres régions. La description qu'on nous fait des saisons sèches & humides me paroît fort conforme à cette conjecture. M. Dampier dit, par exemple, au tome 2. page 358. *en général les pays ou les parages qui sont sous la ligne ou auprès ont le plus fort des pluies aux mois de mars & de septembre: mais je ne m'arrêterai pas à cette remarque, ne l'ayant faite que pour confirmer notre système en général.*

X X X I X.

Voilà les deux grandes causes primitives des courans, l'une constante & l'autre périodique anniverfaire. Je se-

rai encore mention d'une troisième, différente de la seconde, si on l'examine de près. Il est clair que notre hémisphère septentrional doit être plus chargé d'eau pendant les six mois d'hiver, que pendant le reste de l'année; il faut donc qu'une certaine quantité d'eau aille & revienne de six en six mois d'un hémisphère en l'autre; le passage des eaux se fera sous la forme d'un courant simple sans produire aucun contre-courant par le fond. Je ne m'arrêterai pas à ces courans, parce qu'ils ne sçauroient qu'être extrêmement petits. Je remarquerai plutôt que ce flux & reflux annuel d'un hémisphère à l'autre, quoique fort petit, par rapport à la masse de la terre, ne sçauroit cependant manquer de causer une petite nutation annuelle de l'axe de la terre.

X L.

Les courans périodiques Lunaires ne peuvent être que des suites du flux & reflux de la mer: l'irrégularité de la terre diversifie le mouvement des marées à l'infini; elle leur donne quelquefois le mouvement des courans, en ce que les eaux sont portées d'un même côté, pendant quelques jours de suite; on pourroit même concevoir une telle structure, comme j'ai déjà insinué ci-dessus, qui fit que les eaux coulissent constamment d'un même côté dans certains endroits particuliers; les marées deviendroient de vrais courans, & ces courans ne manqueroient pas d'avoir des inégalités périodiques Lunaires, mais comme toute cette matière a déjà été traitée par d'autres avec toute l'exactitude possible, je ne m'y arrêterai pas.

X L.

Ces variations de chaleur du jour à la nuit pourroient bien encore produire quelque mouvement dans les eaux de la mer, sous la forme de marées de douze en douze heures solaires. Mais ce mouvement sera peut-être imper-

ceptible, parce qu'un temps de 24 heures ne suffit pas pour changer considérablement, & à de grandes profondeurs, la chaleur & la densité des eaux. Il seroit à souhaiter que nous eussions un grand nombre d'observations sur le degré de chaleur des eaux de la mer, faites en différentes heures du jour, en différentes saisons, en différentes hauteurs, & à plusieurs différentes profondeurs: la physique en général, & notre sujet en particulier, en tireroient de grandes lumières, tout comme des observations barométriques. M. de Buffon dit dans son histoire naturelle, *tom. 1. pag. 440*, que les plongeurs assurent qu'il fait fort froid dans les vallées de la mer: cette circonstance me confirme dans ma conjecture (§ 20) que les montagnes du fond de la mer, sur tout celles qui sont perpendiculaires à la direction des courans, les arrêtent; car si les eaux des vallées de la mer avoient un mouvement sensible, elles ne pourroient avoir une température fort différente de celle des autres eaux, tant parce que les eaux se mêleroient trop, que parce qu'étant continuellement transportées d'un endroit à l'autre, elles ne pourroient changer assez tôt leur degré de chaleur.

L'air recevra une beaucoup plus grande impression des changemens journaliers du chaud & du froid que les eaux: aussi suis-je persuadé que ces changemens causent, pendant les 24 heures, alternativement un petit vent oriental & occidental. Les vents de terre & les vents de mer, dont Dampier donne une description fort exacte, & qui proviennent sans doute des variations du chaud & du froid, pendant le jour & la nuit, prouvent assez que lesdits changemens suffisent pour produire ces allées & venues réciproques de l'air. Voici comme il me semble qu'on doit expliquer les vents de terre & les vents de mer. Les rayons du soleil échauffent l'air beaucoup plus par reverberation, qu'ils ne le font immédiatement; c'est-là la raison pourquoi l'air de la Zone-Torride devient d'autant plus froid qu'il est d'autant plus élevé par-dessus la

surface de la mer ; cela étant , le soleil échauffera moins l'air de mer que l'air de terre , parce que les eaux sont transparentes , & moins propres à la reverbération que la terre : d'où je conclus que pendant le jour l'air de terre est plus chaud que l'air de mer ; & que pendant la nuit c'est le contraire , parce que la chaleur moyenne doit être de part & d'autre égale ; d'autres causes peuvent concourir à produire le même effet : ainsi on voit , par la première expérience du § 33 , que pendant le jour l'air de mer sera porté vers la terre , & qu'il reviendra vers la mer par la haute région ; cette circulation augmentera jusqu'à midi , après quoi elle diminuera ; après le coucher du soleil elle commencera à se faire en sens contraire ; elle se renforcera jusqu'à minuit , & finira au lever du soleil ; pour recommencer peu après la première circulation : tout cela est conforme à l'expérience. Ce qui confirme notre explication , est que , dans les saisons humides pendant lesquelles les variations journalières de la chaleur sont extrêmement petites , ces vents alternatifs s'évanouissent presque entièrement.

Ces vents de terre & vents de mer sont très propres pour confirmer les circulations telles que nous les avons décrites : car si on vouloit supposer que tout l'air apporté par le vent de mer dans l'isle y soit retenu pendant tout le jour , les petites isles seroient bientôt surchargées d'air. Supposons , par exemple , une petite isle ronde , de 44000 pieds de circonférence , elle sera assez grande , suivant les observations de Dampier , pour former lesdits vents. Je ne donnerai au vent de mer qu'une vitesse moyenne de cinq pieds par seconde , & il faudroit au bout des 12 heures , que l'air de l'isle fût deux fois plus dense qu'il n'eût été au commencement du vent de mer. Il est cependant sûr que les densités de l'air y restent à peu près les mêmes , il faut donc que l'air s'échappe par la haute région à mesure qu'il arrive près la surface de la mer.

XLII.

Voilà ce que j'avois à dire de principal sur les courans réguliers, soit constans soit périodiques. Je passe donc aux courans variables irréguliers, & en quelque façon accidentels. C'est une chose également conforme à la théorie & à l'expérience, que les vents frais poussent devant soi les eaux de la pleine mer, & forment des courans du même côté, qui durent aussi longtems que les vents. Ces courans ne font d'abord qu'un effet de l'adhérence mutuelle de l'air & de l'eau : ces premières eaux entraînées, rencontrent des eaux calmes, ce qui fait qu'elles se lèvent un peu, & commencent à former des ondes, qui augmentant peu à peu, forment enfin de grosses lames ; celles-ci sont ensuite directement exposées au vent : ce n'est plus alors la simple adhérence qui entraîne les eaux, c'est, en même temps, une impulsion du vent très-forte ; cette double action peut causer des courans assez rapides. Ces courans primitifs, formés en pleine mer, pourront encore être changés, d'une infinité de façons, par les terres voisines, par la différente configuration des côtes, par la conformation du fond d'une mer peu profonde, &c. ; ils pourront causer des inondations, d'autant plus grandes, que les courans ont plus d'étendue & qu'ils sont arrêtés plus brusquement. Si ce que j'ai dit au § 24, fondé sur l'observation barométrique de M. Richer, est vrai, nous voyons que le courant général d'est, arrêté par les terres de l'Amérique, élève les eaux autour de l'isle de Cayenne de 552 toises, il s'ensuit qu'un courant de la même force, & de dix degrés d'étendue, pourra élever les eaux de plus de quatre toises. Il est clair aussi, que les eaux entraînées doivent être remplacées, & ce remplacement pourra causer, par un second effet, d'autres courans accidentels, qui ne doivent pas être considérés comme produits immédiatement par les vents, puisqu'ils peuvent être hors

des limites des vents. Dans les endroits d'où partent les vents, les eaux pourront baisser considérablement, surtout lorsque d'autres eaux ne peuvent pas remplacer librement celles qui sont entraînées, tout comme il arrive aux bords de la mer du Sud; ces baiffemens font quelquefois assez considérables, & durent assez longtemps pour détruire les effets du flux de la mer, de manière qu'il paroisse y avoir un reflux continuel de plusieurs jours de suite.

XLIII.

Les grandes variations barométriques peuvent encore causer des courans accidentels : cette cause accompagne le plus souvent celle que nous venons d'exposer ; mais elle agit par un autre principe. Si le baromètre vient tout d'un coup à baisser considérablement, il faut que la mer s'élève au même endroit ; & si nous considérons que les mêmes variations barométriques s'étendent ordinairement fort loin, nous voyons que les eaux doivent couler en grande quantité vers le milieu de tout cet espace, qui peut être de 30 ou 40 degrés à la ronde.

LXIV.

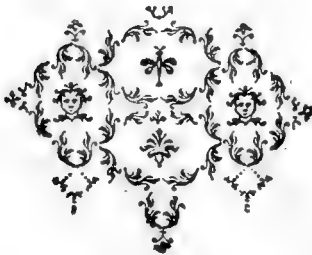
Il me semble encore que dans la Zone Torride, la quantité des abondantes pluies, pendant la saison humide, peut tellement surpasser l'évaporation des eaux, & au contraire que dans la bande, où il règne au même temps la saison sèche, l'évaporation peut tellement prédominer, que l'équilibre entre les eaux des deux bandes en soit sensiblement dérangé, & que ce défaut d'équilibre occasionne des courans. A ces causes, on pourroit en ajouter plusieurs autres ; les simples rivières peuvent causer des courans sensibles jusqu'à de grandes distances ; les moindres forces suffisent pour entretenir des courans circulaires superficiels, sur-tout dans les golfes : quelques-uns prétendent qu'il y a un tel courant

tout le long des côtes de la mer Méditerranée, & que les eaux circulent continuellement tout le long des côtes Européennes jusqu'au détroit de Gibraltar; & que de-là elles s'en retournent tout le long des côtes Africaines. En examinant ces causes, on se souviendra toujours qu'un très-petit défaut d'équilibre est capable de produire des courans sensibles. C'est une vérité que tous les phénomènes du flux & reflux prouvent absolument.

X L V.

Je finirai cette première partie par une réflexion générale sur la nature des courans, qui servira de base à notre seconde partie. Nous avons démontré, par rapport au courant simple général d'est, causé par l'adhérence des fluides, que la vitesse doit diminuer uniformément depuis la surface jusqu'au fond de la mer, en supposant un fond de niveau & tout uni; c'est une vérité que toutes les expériences physiques confirment: mais quand même on substituerait une autre cause, elle ne laissera pas de faire à peu près le même effet dans les courans simples, l'adhérence des eaux contre le fond sera toujours assez forte pour que les eaux y soient comme entièrement arrêtées; & comme, depuis la surface jusqu'au fond, chaque lit d'eau d'une même épaisseur, doit produire une même diminution de vitesse, il faut que les vitesses diminuent uniformément. Je me souviens qu'en me promenant un jour tout le long d'un canal droit, large d'environ 16 pieds, & profond de trois pieds, dont les eaux couloient tout doucement, & qui charroit par hasard des feuilles d'arbre, les unes vers la surface, d'autres vers le milieu, & d'autres enfin plus bas jusqu'à toucher le fond; je vis toujours les feuilles supérieures devancer les inférieures assez uniformément, & que celles du fond furent presque sans aucun mouvement. J'ai expliqué ensuite aux §§ 19 & 20, comment les énormes inégalités du fond de la mer diminuent ex-

trêmement les profondeurs des courans : c'est ce qui m'a engagé à considérer au milieu des eaux, un fond des courans, qui peut être beaucoup au-dessus du fond de la mer. J'envisagerai de la même manière les courans doubles ou plus composés, parce que la même raison y subsiste. Cette supposition si naturelle m'a toujours paru conforme aux relations des plongeurs, & aux observations faites avec la sonde. D'ailleurs quand même il y auroit en pleine mer des endroits où le fond des courans fût extrêmement profond, ces courans ne pourroient être que très-foibles, & presque sans aucune conséquence, à cause de la quantité d'eau déterminée qu'ils amènent.



S E C O N D E P A R T I E .

*Sur la meilleure manière d'observer & de déterminer
les courans.*

I.

IL s'agit à présent d'examiner si l'on pourra toujours connoître les courans, & en déterminer la direction & la vitesse; c'étoit d'abord l'unique question de l'Académie. Il faudroit être bien peu versé dans l'histoire de la navigation, pour ignorer d'un côté son importance, & de l'autre le peu de progrès qu'on y a encore fait. Il n'y a aucun doute que les plus grands génies, préférant toujours l'utile au brillant, n'en aient déjà fait l'objet de leurs recherches. Comme je n'ai rien trouvé de satisfaisant, sur cette matière, dans aucun auteur, je me serois taxé moi-même d'une trop grande témérité de l'entreprendre, si je n'avois fait réflexion que l'illustre Académie a trop de pénétration pour ne rien proposer d'impossible par la nature; & en même temps trop d'équité pour rejeter des idées qui, quoiqu'imparfaites, ne laissent pas d'être utiles, & peut-être les meilleures; & qu'une bonne logique est souvent plus capable de nous conduire à de pareilles idées, qu'une grande fertilité d'esprit.

I I.

Commençons par les réflexions les plus générales. Dans toutes les questions de pratique, il faut d'abord chercher dans la théorie, les principes sur lesquels on prétend fonder les moyens que la pratique doit fournir. Tant qu'on ne voit aucun de ces principes, on n'avancera pas plus que si on cherchoit un mouvement perpé-

tuel purement mécanique, auquel bien des gens qui ne manquoient ni de bon sens ni de talens, ne se le-roient jamais appliqués, s'ils avoient suivi ce précepte. Or, si un observateur se trouve dans un système, dont toutes les parties se meuvent uniformément & dans une direction parallèle, sans avoir aucune communication ni directe ni indirecte avec aucun objet pris hors du système, il lui est tout-à-fait impossible de s'apercevoir de ce mouvement.

I I I.

La réflexion que nous venons de faire nous mène d'abord à cette conclusion indubitable, sçavoir, que si on suppose toutes les eaux d'un courant, mues avec une vitesse uniforme, parallèle & constante, depuis la surface jusqu'au fond de la mer, & qu'un navire nage au milieu de ces eaux, il fera entièrement impossible de s'apercevoir de ce courant, tant qu'on n'aura aucune communication ou relation avec rien qui soit hors du système commun du courant & du vaisseau, puisque le navire aura toujours le même mouvement que le courant, s'il n'est poussé par aucune force, & que le sillage du vaisseau fera le même que s'il n'y avoit aucun courant. Ainsi pour déterminer ces fortes de courans, il faut recourir à quelque principe indépendant du courant; & il est facile de faire une énumération parfaite de tous les principes possibles pour examiner ensuite l'usage qu'on en peut faire. Ces principes ne sçauroient être que les astres, ou l'air, ou quelque terre voisine, ou enfin le fond de la mer. J'examinerai en peu de mots l'usage qu'on peut faire de chacun de ces quatre principes, en faisant d'abord abstraction du sillage du vaisseau, qui n'est que le mouvement relatif du vaisseau & du courant, qu'on peut & qu'on doit toujours déterminer à part, pour réduire la question au cas le plus simple, qui est de supposer le vaisseau simplement emporté par le courant, sans

avoir aucun mouvement relatif avec le courant.

I V.

Quant aux astres, ils ne pourront être d'aucun usage qu'au bout d'un grand intervalle de temps, en cherchant le plus souvent, & le mieux qu'on peut, les variations en longitude & en latitude. C'est effectivement par ce seul principe qu'on a reconnu l'existence des courans en pleine mer; mais comme les courans sont fort variables d'un endroit à l'autre, il est impossible de tirer aucun fruit de ce principe pour déterminer les courans en tout temps & en tout lieu. On voit aussi que l'air ne peut servir, tout au plus, que pour déterminer le mouvement relatif des eaux & de l'air; de sorte qu'il n'y a rien à espérer non plus de ce côté-là. Si l'on se trouve dans le voisinage de quelque terre, ou côte, ou île, la simple géométrie enseigne tout ce qu'on peut faire pour voir le chemin du vaisseau, en tant qu'il est emporté par le courant: ce cas est trop facile & trop rare pour que je m'y arrête. Quant au fond de la mer, supposé qu'on puisse l'atteindre, toutes les opérations qu'on peut faire pour déterminer les courans par son moyen, se réduiront au principe de l'ancrage. J'examinerai ce cas ci-dessous, & je ne fais ces remarques préliminaires, que pour ne point sortir de la seule route qui peut conduire, en quelque façon, à tous les moyens possibles de déterminer les courans, & nous mettre en état d'en choisir les meilleurs.

V.

Nous voyons donc qu'en supposant toutes les eaux, qui forment un certain courant, mues d'une vitesse & direction commune depuis la surface jusqu'au fond de la mer, il n'y a aucun autre moyen de satisfaire à notre question, que celui de rapporter le mouvement des eaux au fond de la mer: ce moyen est à la vérité le plus sûr & le plus exact, mais il est fort rare de se trouver dans

les circonstances qu'il demande ; & hors de ces circonstances, nous sommes réduits à ne rien espérer davantage. Voilà sans doute la raison du peu de progrès qu'on a fait jusqu'ici sur notre question : c'est qu'on n'a pas envisagé les courans comme ils doivent l'être.

J'aurois moi-même renoncé à toute espérance d'aller plus loin , si je n'avois examiné scrupuleusement les causes & la nature des courans avant que de penser aux moyens de pouvoir les déterminer. Nous avons vu , dans notre première Partie, que les courans, bien loin d'être les mêmes pour toute la profondeur de la mer , sont nécessairement fort inégaux , & que les eaux ne sçauroient qu'être comme entièrement calmes au-dessous d'une certaine profondeur. Cette heureuse propriété nous fournit un principe tout nouveau pour déterminer les courans ; c'est celui de rapporter le mouvement des eaux qui sont vers la surface , aux eaux qui sont au-dessous du *fond des courans*. Ce dernier principe nous seroit devenu absolument inutile , si toute la masse d'eau n'avoit qu'un seul & même mouvement depuis la surface jusqu'au fond de la mer.

V I.

Il est évident que nous avons fait jusqu'ici une énumération parfaite de tous les principes , & qu'ainsi nous ne pouvons encore nous être écartés du chemin de parvenir à la meilleure solution de notre problême ; Nous voyons donc qu'excepté le cas de quelque terre voisine & visible , qui ne mérite pas que nous nous y arrêtions davantage , nous n'aurons plus aucun autre principe à considérer que celui du fond de la mer , & celui du fond du courant : cette considération m'engage à diviser notre question en deux cas. Le premier sera celui où l'on pourra atteindre le fond de la mer ; & le second, quand on pourra avoir quelque communication avec la région des eaux calmes , qui sont au-dessous du fond du
courant ;

courant ; hors de ces deux cas , j'ose avancer positivement qu'il est tout-à-fait impossible de déterminer les courans en pleine mer ; car enfin quel autre point pourroit-on considérer , qui fût ou fixe , ou dont le mouvement fût connu, pour y rapporter le mouvement des eaux ? J'avouerai même que le premier cas ne sçauroit être bien fréquent en pleine mer ; mais je crois par-contre, qu'il sera fort rare qu'on ne se trouve dans le second cas ; & pour peu qu'on veuille se relâcher de l'exaétitude entière , je suis persuadé qu'on s'y trouvera toujours : je me flatte que ceux qui auront daigné lire avec attention notre première partie en conviendront avec moi. Ainsi le principe le plus général & le plus utile sera celui de rapporter le mouvement des courans aux eaux calmes , qui sont au dessous du fond des courans. C'est cependant un principe auquel personne n'a encore pensé, que je sçache. J'aurai d'autant plus de soin à l'examiner & à le mettre à profit.

V I I.

Avant que de m'engager dans ces recherches de pratique , il sera bon de remarquer encore que les changemens du mouvement des eaux d'un seul & même courant par rapport à leurs différentes profondeurs , peuvent se faire assez brusquement ; c'est ce que nous avons encore établi dans notre première partie , tant par des raisons solides que par des observations faites par Dampier : ainsi , pour déterminer entièrement les courans , il ne suffira pas de rechercher le mouvement des eaux à la surface de la mer ; il faudra trouver encore une manière d'en déterminer le mouvement depuis la surface de la mer , jusqu'au fond du courant : cela nous servira non-seulement à connoître plus distinctement la nature des courans par observations , mais il en résultera encore une beaucoup plus grande utilité pour la navigation ; les courans pourront souffrir des changemens sensibles de-

puis la surface de la mer jusqu'à la profondeur qui répond à la quille du vaisseau , & en ce cas on jugera mieux de la dérive par le mouvement des eaux qui auroient 6 ou 7 pieds de profondeur , que par celui qu'il y auroit tout près de la surface. Tâchons à présent de tirer le plus d'usage qu'il nous sera possible , des deux principes que j'ai exposés au §. 6. les seuls qu'on peut employer.

V I I I.

On profitera du fond de la mer , en jettant l'ancre ; le vaisseau étant amarré , c'est sans doute une chose très-facile d'observer le courant , s'il y en a un , & d'en déterminer la vitesse & la direction. Si on veut se contenter de connoître le mouvement des eaux à la surface , on pourra se servir de cet instrument qu'on emploie pour trouver le sillage du vaisseau ; c'est un morceau de bois fait en forme de navette garni par le bas d'un morceau de plomb & attaché à une ficelle , qui est roulée sur un espèce de devidoir , & distinguée de distance en distance par des nœuds : on jettera la navette dans la mer , qui sera aussitôt emportée par le courant ; on comptera le nombre des nœuds qui se dévident dans un temps donné , & par-là on saura aussitôt la vitesse du courant , près la surface de la mer ; on remarquera aussi la direction de la ficelle , qui sera la même que celle du courant ; cette manœuvre est trop connue pour que je m'arrête à la décrire avec un plus grand détail , & à marquer les précautions qu'il faut prendre pour la faire avec plus d'exactitude.

I X.

La méthode précédente ne pouvant servir qu'à déterminer le mouvement des eaux à la surface de la mer , il faudra recourir à une autre méthode pour déterminer le mouvement des eaux à telle profondeur , qu'on voudra.

A cet effet il n'y a qu'un seul moyen , ou s'il n'est pas le seul , du moins sera-t-il visiblement le meilleur ; il consiste à attacher une boule d'un diamètre & d'une pesanteur spécifique donnée à une longue ficelle , à descendre cette boule dans les eaux de la mer à telle profondeur qu'on voudra , à observer l'inclinaison de la ficelle , & la direction de son plan vertical : on sçait qu'on peut connoître exactement la vitesse des eaux qui poussent la boule par l'inclinaison de la ficelle ; & la direction du plan vertical de la ficelle, marquera immédiatement celle des eaux. J'ai pensé à cette méthode , & j'en ai même fait plusieurs essais sur mer , avec beaucoup de succès l'année 1733 , & par conséquent longtems avant que l'Académie ait fait imprimer une pièce de M. Poléni , qu'elle avoit couronnée , & dans laquelle l'auteur indique cette même méthode ; au reste elle exige beaucoup de discussions géométriques , que je réserve pour la fin de ce mémoire , pour n'en point interrompre le fil. C'est une matière que j'ai examinée avec d'autant plus de soin, qu'elle doit servir de base à presque tout ce que nous avons à proposer sur notre sujet.

On pourra donc reconnoître les courans de toise en toise de hauteur verticale , & on jugera de cette hauteur verticale par la longueur de la ficelle mouillée , multipliée par le cosinus de son inclinaison. On sçaura par là toutes les variations des courans ; & quand la ficelle ne marquera plus aucune variation ni inclinaison sensible , ce sera une marque que la boule attachée à la ficelle sera parvenue dans la région des eaux calmes. Nous serions bien plus en état de raisonner sur la nature des courans , & de perfectionner nos méthodes , si nous trouvions dans les auteurs un grand nombre de ces sortes d'observations si faciles à faire , quand le vaisseau est à l'ancre : il est fâcheux que nous n'en trouvions aucune. On sera aussi attentif que le vaisseau soit bien amarré dans le temps qu'on fait les observations ; car si le vaisseau chaf-

soit sur l'ancre , la détermination des courans ne seroit pas juste.

X.

J'estime à la vérité le mouillage comme le moyen le plus exact de déterminer les courans ; mais il faut avouer aussi , d'un autre côté , que c'est un moyen incommode , s'il faut jeter l'ancre uniquement dans cette vûe , & que d'ailleurs il est rare que la mer ne soit trop profonde pour mouiller l'ancre , la plus grande profondeur des mouillages n'étant que de 40 ou 50 brasses. J'ai cependant fait réflexion , à l'égard de cette difficulté , qu'on pourroit bien employer le même principe pour des profondeurs beaucoup plus grandes : on donne aux cordeaux des sondes jusqu'à 200 brasses de longueur ; on pourroit donc attacher à ces cordeaux de petites ancrs qui n'auroient pas plus de 18 à 20 livres de poids , qui est celui qu'on donne aux corps des sondes : cette petite ancre ne seroit destinée qu'à amarrer une petite bouée ou un morceau de liège , qui flotteroit sur l'eau ; moyennant ce petit morceau de liège arrêté à la surface de la mer , il seroit facile de déterminer le courant , surtout si on vouloit se contenter de le connoître tel qu'il est à la surface ; on n'auroit qu'à attacher au morceau de liège cette ficelle , dont j'ai parlé au §. 8. & à faire ensuite la même opération , qu'on fait pour trouver le fillage. Il est aisé à comprendre que tout cela sera fort facile à exécuter sur la chaloupe , dont je prévois que le secours sera fort souvent nécessaire pour la solution de notre question : mais si l'on vouloit déterminer le courant dans toute la profondeur de la manière que j'ai exposée au §. 9. je trouve que le meilleur moyen en sera de retenir la chaloupe , moyennant la rame , toujours près du morceau de liège , & de faire cependant sur la chaloupe les mêmes observations , que j'ai proposées de faire audit §. 9. sur le vaisseau amarré.

X I.

Voilà tout ce que j'ai pu imaginer pour mettre à profit notre premier principe , qui est de se servir du fond de la mer : on voit même assez clairement que c'est tout ce qu'on peut faire. Voyons à présent quels moyens nous restent lorsqu'on ne trouve point de fond avec la sonde. S'il y a de tels moyens , ils ne peuvent absolument être fondés que sur le seul principe qui nous reste , & qui consiste à rapporter le mouvement des lits d'eau de différentes profondeurs , aux eaux calmes , qui sont au-dessous du fond des courans. Nous sommes donc réduits à supposer qu'on puisse atteindre le fond des courans , ou du moins une région vers le fond , où les eaux n'aient plus qu'un mouvement insensible. Sans une semblable supposition nous aurions actuellement épuisé toute cette matière ; mais les raisons que nous avons exposées dans notre première partie pour l'établir , me semblent si convaincantes , & cette hypothèse me paroît si conforme aux observations & aux expériences , qui ont quelque rapport avec cette matière , que je croirois avoir grand tort , si je n'en faisois pas notre ressource principale. Je n'hésiterois pas même d'adopter cette hypothèse , quand toute notre théorie sur les causes des courans seroit fautive ; car enfin quelles que puissent être les causes des courans , elles ne sçauroient être qu'extrêmement petites vers le fond de la mer , & les moindres obstacles seront capable d'en prévenir tout l'effet : à mon avis , une chaîne de montagnes pourra arrêter les courans jusqu'à des distances énormes , de sorte que les courans passent par dessus les montagnes du fond de la mer , sans se mêler presque avec les eaux plus basses ; c'est de cette manière que se forme la région des eaux calmes ; c'est ainsi que le vent général d'est est arrêté par les terres de l'Amérique , & qu'on ne le trouve dans la mer du sud , qu'à une très-grande distance des côtes ; la même chose arrivera.

à bien plus forte raison aux eaux de la mer , & cela d'autant plus , qu'il n'y a nul doute que de pareils obstacles ne reviennent de distance en distance , & que tout le fond de la mer entière n'en soit couvert. Je prie le lecteur de se rappeler tout ce que j'ai dit sur cette matière dans notre première partie : cette hypotèse doit d'ailleurs nous faire d'autant moins de peine , que les courans sont nécessairement d'autant plus foibles par eux-mêmes , qu'ils sont plus profonds. J'avoue que les profondeurs des courans sensibles pourront être inégales ; il y aura peut-être des courans , qui ne seront sensibles que jusqu'à la profondeur de 8 ou 10 brasses , d'autres jusqu'à 20 ou 30 : apparemment il sera rare d'en trouver de plus profonds , & il se peut qu'il n'y en ait aucun qui ait plus de 50 brasses de profondeur : moins les courans seront profonds , plus on pourra les déterminer exactement ; & j'ai trouvé qu'on peut les déterminer avec assez d'exactitude jusqu'à cent brasses de profondeur : au-delà de cette profondeur , on commence à rencontrer des obstacles que nous verrons cependant n'être qu'accidentels , qui peu-à-peu augmentent jusqu'à devenir enfin insurmontables.

X I I.

Supposons à la place du vaisseau un simple radeau , qui flotte sur les eaux de la mer ; ce radeau aura tout-à-fait le même mouvement que le courant près de sa surface. S'il se trouve sur ce radeau un observateur muni d'un globe attaché à un long cordeau qu'il fasse descendre dans les eaux de la mer , à plusieurs différentes profondeurs , il arrivera ou que le cordeau conservera sa direction verticale , & en ce cas l'observateur pourra être assuré qu'il n'y a point de courant , ou bien que le cordeau prenne successivement de différentes inclinaisons , ce qui marquera aussitôt qu'on se trouve dans un courant. Je suppose que moyennant ces inclinaisons

observées on puisse déterminer exactement les vitesses des différens lits d'eau, relativement à celle du radeau, & c'est-là un article que je traiterai ci-dessous, avec toute l'attention qu'il mérite ; si l'on se trouve dans un courant simple, le cordeau sera incliné de plus en plus, à mesure qu'on le file, & les vitesses relatives qui répondront à toutes ces inclinaisons augmenteront suivant notre théorie à peu près en même raison que les profondeurs verticales ; mais il arrivera bientôt que cette loi soit visiblement interrompue, & que le cordeau commence à n'augmenter que très-peu son inclinaison, c'est alors une marque que la boule attachée au cordeau s'approche du fond du courant. Enfin, la boule pourra être censée avoir atteint la région des eaux calmes, quand le cordeau ne montrera plus de variations sensibles, quoiqu'on en file encore plusieurs brasses. Alors la dernière inclinaison du cordeau donnera à connoître la vitesse absolue du courant à la surface de la mer, & par les vitesses relatives qu'on a observées précédemment, on pourra déterminer aussi les vitesses absolues de chaque lit d'eau, à telle profondeur qu'on voudra : si on se trouve dans un double courant, ou dans un autre courant composé, la méthode fera entièrement la même. Je remarquerai seulement que les vitesses relatives n'iront pas en augmentant depuis la surface jusqu'au fond du courant ; elles n'augmenteront que jusqu'à une certaine profondeur, & puis elles décroîtront ; les vitesses relatives formeront donc à une certaine profondeur ce qu'on appelle *maximum*, & la boule étant parvenue dans cette région, le cordeau ne montrera aucune variation sensible pendant quelque temps ; on pourroit croire d'avoir actuellement atteint la région des eaux calmes pendant qu'on en seroit encore fort éloigné ; il ne faudra donc pas s'arrêter à ces premières apparences, & filer encore plusieurs brasses de cordeau ; si après cela le cordeau se rapproche de la verticale, il faudra continuer l'opération jusqu'à ce qu'on

foit sûr d'avoir atteint la région des eaux calmes. Voilà une petite ébauche de notre nouvelle méthode, fondée sur le seul principe qui nous restoit, qui a ce grand avantage, qu'on peut la suivre en tout temps, & en tout lieu. Mais cette première idée que nous venons de donner de notre méthode, demande plusieurs éclaircissements & corrections.

X I I I.

Si nous considérons maintenant un vaisseau à la place du radeau, il pourra arriver que le vaisseau flotte, (car je fais encore abstraction de son sillage) dans un courant assez variable pour avoir des inégalités depuis la surface de la mer, jusqu'à la profondeur de la quille: en ce cas il y aura quelque inégalité entre la vitesse absolue du vaisseau & celle de la surface du courant. On observera donc alors que le cordeau s'incline sensiblement aussitôt que la boule est plongée dans l'eau; la quantité de cette première inclinaison & la position du plan vertical qui passe par le cordeau donneront à connoître le mouvement relatif des eaux de la surface, & celui du vaisseau: les observations suivantes doivent être rapportées pareillement au mouvement du vaisseau; & enfin la dernière observation montrera le mouvement absolu du vaisseau, qui fait sa vraie dérive en tant qu'elle est produite par les courans: ce n'est que celle-ci qui intéresse la navigation; mais sçachant le mouvement absolu du vaisseau, & connoissant en même-temps par toutes les observations réunies le mouvement relatif de chaque lit d'eau, avec celui du vaisseau, on en pourra déterminer le mouvement absolu de chaque lit d'eau, & toutes les inégalités du courant, tant en direction qu'en force: ainsi les observations intermédiaires ne sontournées que du côté de la physique. Ce que j'ai dit au §. 37. de la première partie, fait assez voir que cette réflexion n'est pas à négliger.

X I V.

Nous avons supposé encore que le vaisseau flotte simplement dans les eaux de la mer, sans souffrir aucune autre impression que celle du courant; il faut tâcher de se mettre autant qu'il est possible dans le cas de cette supposition; les mariniers sçauront mieux que moi ce qu'il convient de faire pour cet effet; s'il faut amener toutes les voiles, ou s'il convient mieux d'en isser d'autres qui arrêtent le vaisseau, de façon qu'on ne remarque plus aucun sillage: peut-être que le meilleur expédient sera de faire les observations sur la chaloupe, qu'on abandonneroit à elle même, sans employer ni rame ni voile; encore conviendrait-il d'examiner si le vent ne fait pas cheminer la chaloupe par l'effort qu'il exerce contre les bords: en ce cas quelques legers coups de rame pourront prévenir le petit sillage. Je conseillerois de jeter à la mer un corps flottant d'une pesanteur spécifique presque égale à celle des eaux de la mer; il sera facile aux rameurs de gouverner la chaloupe de manière qu'elle n'ait pas le moindre mouvement sensible relativement au corps flottant. En général les calmes & une mer unie sont extrêmement favorables pour la détermination des courans: les tempêtes & une mer fort agitée rendront toutes ces observations fort difficiles & douteuses. Ce sont-là des inconvéniens qu'aucune industrie humaine ne pourra éviter; dans la mer Pacifique, on fera toujours à même d'observer les courans avec beaucoup d'exactitude.

X V.

La mauvaise humeur & le peu de complaisance des Capitaines de vaisseau sont souvent le plus grand obstacle aux observations qu'on pourroit faire; la plupart des Physiciens & astronomes, qui se sont trouvés sur mer, s'en sont plaint: Ceux qui commandent le vaisseau pour-

roient bien se refuser aux conseils que je viens de donner, & prétendre qu'on observe le courant sur le vaisseau, au milieu du cinglage : notre méthode s'étend à la vérité jusques-là ; mais il est à remarquer que la détermination des courans est d'une nature à faire craindre presque toujours quelque petite erreur, qui par elle-même seroit de très-peu de conséquence, mais qui doit devenir d'autant plus grande que le sillage est plus rapide. Il conviendra donc de ne pas aller à pleines voiles, pendant qu'on fait les observations ; après avoir ferlé ou du moins cargué les voiles, on attendra quelques momens que le vaisseau ait pris son sillage uniforme. M. Bouguer, à qui les mathématiques, la physique & la navigation sont redevables de tant d'importantes découvertes, a démontré dans son excellent mémoire inséré aux mémoires de l'Académie de l'année 1745, page 314, que, dans un vaisseau du premier rang, une ou deux minutes de temps suffisent pour censurer tel le sillage. Cette uniformité du sillage durant les observations est très-essentielle ; c'est pourquoi il faut ne rien changer, ni aux voiles, ni au gouvernail pendant tout ce temps. Ensuite on plongera d'abord la boule dans l'eau tout près de la surface, pour connoître le mouvement relatif du vaisseau, par rapport aux eaux de la surface ; c'est ce mouvement apparent qu'on prend pour le sillage. J'exprimerai la direction & la force de ce mouvement, observé par AB (*fig. 5.*) ; après cela on descendra la boule jusques dans la région des eaux calmes, & l'on reconnoitra toujours d'avoir atteint cette région quand le cordeau ne varie plus, ni en direction, ni en inclinaison sur plusieurs brasses de descente de la boule : observant alors de rechercher l'inclinaison du cordeau, & la direction de son plan vertical, on en pourra déduire le mouvement du vaisseau relativement aux eaux calmes, c'est-à-dire, le mouvement vrai du vaisseau. J'exprimerai la direction & la force de ce mouvement par AC ; si on tire ensuite la droite

BC , celle-ci marquera la direction & la force du courant tel qu'il est près de la surface de la mer. Cette méthode demande quelques éclaircissemens & réflexions.

X V I.

(a) Comme la position & la grandeur de la ligne BC dépend de la juste détermination des lignes AB & AC , il peut arriver que de petites erreurs dans la détermination de ces deux lignes jettent une erreur beaucoup plus grande sur la ligne BC , qu'elle n'eût été, si l'on eût suivi la méthode exposée aux §. §. 13 & 14.

(b) On remarquera toujours que AC marque le vrai mouvement du vaisseau, pendant que AB exprime son mouvement relatif, par rapport aux eaux de la surface de la mer; ainsi la ligne BC exprimera la direction & la force du courant près de la surface de la mer. Mais les observations intermédiaires qu'on aura faites sur l'inclinaison du cordeau, & sur la direction de son plan vertical, détermineront entièrement le courant pour telle profondeur qu'on voudra; car si l'on faisoit, par exemple, une observation à la profondeur de dix brasses, & qu'on trouvât le mouvement relatif du vaisseau avec les eaux de dix brasses de profondeur répondre à la ligne AD , la droite DC exprimeroit le courant pour la profondeur de dix brasses.

(c) Si le courant conserve la même direction dans toute sa profondeur, chaque point D se trouvera dans la droite BC ; mais si les eaux du courant changent de direction dans leurs différentes profondeurs, ces points intermédiaires tels que D pourront s'écarter de la ligne BC .

(d) La dérive du vaisseau causée par le courant peut être exprimée en un certain sens par la même droite BC ; mais je trouve qu'on n'attache pas à ce mot de *dérive* un sens assez précis: ce n'est cependant que pour connoître en tout temps la dérive, qu'on souhaite si fort

de pouvoir déterminer les courans. Je ferai donc un article à part sur cette importante matière.

X V I I.

On appelle communément dérive, la différence entre la vraie route du vaisseau, & sa route estimée : il faut donc pour attacher un même sens au mot de *dérive*, convenir sur la façon d'estimer la route du vaisseau, & par conséquent sur la manière d'estimer sa vitesse & sa direction. Nous avons supposé qu'on estime la vitesse, soit par la navette qu'on jette dans l'eau, soit par l'inclinaison du cordeau en plongeant la boule tout près de la surface de la mer, ces deux manières reviennent au même; & on voit que la vitesse du vaisseau estimée de l'une ou de l'autre manière, n'est proprement que la vitesse relative du vaisseau, par rapport aux eaux de la surface de la mer; En ce sens donc la dérive du vaisseau doit être réellement exprimée par *BC*. Mais je ne sais s'il n'y a pas quelque équivoque sur l'estime de la direction du vaisseau : si on veut que la ligne *BC* marque la dérive du vaisseau, il faut estimer la direction du vaisseau, par celle du plan vertical du cordeau, en plongeant la boule près de la surface de la mer, & il est à remarquer que cette direction n'est pas précisément celle de la quille, qu'on prend, si je ne me trompe, pour la direction de la route du vaisseau. Il est vrai que l'une & l'autre manière d'estimer la direction de la route du vaisseau reviendroient encore au même, si le vaisseau ne dériveroit que par l'action d'un courant, qui ne souffrît aucune variation depuis la surface de la mer, jusqu'à la profondeur de la quille; mais si le courant est sensiblement variable tout près de la surface, & surtout si un vent de côté fait dériver en même-temps le vaisseau, il est sûr que la direction de la quille n'est plus la même, avec celle du plan vertical du cordeau; en tenant la boule plongée un peu au-dessous de la surface de la mer, l'an-

gle compris entre ces deux directions donnera principalement l'estime de la dérive du vaisseau, en tant qu'elle est produite par le vent ; mais si l'on suit les régles que nous avons données pour la construction des lignes *AB* & *AC*, alors la ligne *BC* marquera la vraie dérive, sur laquelle la dérive causée par le vent n'aura aucune influence, & le point *C* marquera le vrai lieu du vaisseau. On voit bien au reste que dans toutes ces opérations il n'y a point de distinction à faire entre les courans & les marées, les uns & les autres faisant la même impression sur le vaisseau. Cependant un physicien les reconnoîtra facilement par les variations, qu'il observera aux mouvemens des eaux, en réitérant les mêmes observations de trois en trois heures.

X V I I I.

Je n'ai mis le précédent article que pour me conformer aux principes ordinaires de la Navigation, car en adoptant nos principes, on est en état de déterminer immédiatement la ligne *AC* & le point *C*, qui marquent la vraie route & le vrai lieu du vaisseau, sans qu'on ait besoin de s'embarasser en aucune façon des courans, des marées ou des vents de côté, ni des dérives qu'ils causent. En tenant la boule plongée dans la région des eaux calmes, l'inclinaison du cordeau & la direction de son plan vertical marqueront à chaque moment le vrai fillage, & la vraie route du vaisseau. Il n'y aura alors plus d'autre dérive ou erreur à craindre, que celle qui pourroit provenir d'une variation inconnue de la déclinaison de l'aiguille aimantée : l'expérience pourra décider, si un journal dressé conformément à notre principe, ne sera pas plus exact qu'un autre qu'on formeroit selon les principes ordinaires, surtout si on prend soin de vérifier souvent par des observations astronomiques la déclinaison de l'aiguille. Il n'y a en ce cas plus rien à craindre, que les fautes d'observations qui ne scau-

roient être de grande conséquence , comme devant naturellement se redresser d'elles-mêmes par leur grand nombre , puisqu'il n'y a point de raison pour les trouver plutôt trop grandes , que trop petites , ou pour s'écarter de la vraie direction , plutôt d'un côté que de l'autre : il n'est pas de ces erreurs comme de celles que les courans jettent sur l'estime ordinaire de la route , parce que les courans peuvent porter le vaisseau d'un même côté pendant une longue navigation.

X I X.

La grande utilité & l'excellence de nos méthodes & de nos principes , doit nous faire redoubler notre attention pour tout ce qui peut contribuer à la justesse des observations. Pour mesurer l'angle d'inclinaison du cordeau , on se servira d'un quart de cercle , dont l'alidade mobile soit garnie de deux petits anneaux , l'un placé précisément au centre du quart de cercle , & l'autre à l'extrémité de l'alidade , & on fera passer le cordeau par ces deux anneaux : cette alidade sera librement mobile , & son centre de gravité placé au centre du quart de cercle : de cette manière on pourra filer le cordeau à travers les deux anneaux , sans que l'alidade en soit dérangée. Quant à la meilleure manière de s'affurer sur mer de la position horizontale de l'alidade immobile , c'est un article qui a déjà été examiné souvent , & avec tout le succès qu'on pouvoit espérer : je ne m'arrêterai donc pas à cette recherche , non plus qu'à celle de la meilleure manière d'observer la direction du plan vertical du quart de cercle , qui doit être le même que celui du cordeau prolongé , à quoi on sera attentif. Ce n'est pas dans ces recherches que l'Académie fera consister ce que notre pratique peut avoir d'essentiel , surtout dans une question de cette nature. La seule difficulté qui me fait de la peine , consiste dans l'action des eaux contre le cordeau , qui tient la boule suspendue ; Dans les courans qui n'au-

roient qu'une vingtaine de toises de profondeur , cette difficulté ne fera d'aucune importance : mais elle augmentera à mesure que les courans feront plus profonds, & si l'on vouloit supposer des courans dont le mouvement fût sensible à plus de cent toises de profondeur , ce ne seroit plus qu'assez imparfaitement qu'on pourroit déterminer ces courans : mais je suis fort trompé, si de tels courans existent ; quoiqu'il en soit , notre méthode étant l'unique , il ne s'agit que de lui donner toute la perfection dont elle est susceptible, & de remédier autant qu'il est possible aux inconvéniens qui se présentent. Cette nouvelle tâche nous fournira en même-temps quelques réflexions particulières pour la détermination des courans. Nous ne pouvons plus nous dispenser dans ces recherches du secours de l'analyse.

X X.

Proposition 1. Si on nomme Z la hauteur verticale de laquelle un corps tombant librement acquière la vitesse relative du courant & de la boule , l'effort horizontal du courant contre la boule est égal au poids d'un cylindre d'eau , dont la base est le grand cercle de la boule & la hauteur $\frac{1}{2} Z$.

On a fait , & surtout M. Newton , un grand nombre d'expériences , qui confirment cette proposition avec une exactitude surprenante : il est vrai cependant que , dans les mouvemens extrêmement lents , les expériences s'écartent un peu de la proposition. M. Robins a démontré par d'autres expériences que les mouvemens extrêmement rapides s'en éloignent beaucoup d'avantage ; mais pour les mouvemens moyens , tels que ceux des courans sensibles , cette règle satisfera toujours avec toute l'exactitude imaginable : avec tout cela je ne la traite que comme une vérité physique , quoique je n'ignore pas les théories qu'on emploie pour la démontrer ; car ces mêmes théories ne satisfont pas à beaucoup près avec autant d'exactitude aux expériences , quand les corps

présentent aux fluides une autre surface qu'une surface sphérique. Il en est tout autrement de l'action d'un filet ou d'une veine d'eau, qui donne perpendiculairement contre une surface plane. Cette action peut-être déterminée par les vraies loix de la mécanique, parce qu'on voit clairement la façon d'agir. Les expériences bien imaginées & exécutées en confirment exactement la théorie, de même que celle de la réaction; & cependant depuis les temps de Mariote, qui a été trompé par de fausses expériences, la plupart des phyliciens & des mathématiciens la supposent encore de la moitié plus petite qu'elle n'est.

X X I.

Proposition 2. L'effort horifontal d'un courant contre la surface d'un cylindre vertical, est égal au poids d'un prisme d'eau, dont la bafe est la section du cylindre par l'axe & la hauteur $\frac{1}{3} Z$.

Cette proposition est fondée sur la théorie ordinaire qu'on se forme dans ces fortes de questions: je doute cependant si elle satisfait aux expériences avec autant de précision que la précédente; quoiqu'il en foit, elle fera toujours assez exactement vraie pour l'usage que nous en ferons.

X X I I.

Coroll. Si l'on suppose les pesanteurs spécifiques de l'eau & de la boule ou du cylindre, comme g & γ , & si le diamètre de la boule, ou celui de la bafe du cylindre est $=d$, on trouve que le rapport du poids de la boule plongée, à l'effort horifontal du courant contre la boule, est comme $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\gamma - g} \cdot d$ à $\frac{1}{3} g Z$, & que le rapport du poids du cylindre plongé, à l'effort du courant contre le cylindre vertical, est comme $\sqrt{\gamma - g} \cdot d$ à $\frac{28}{31} g Z$, en supposant la proportion d'Archimède entre la circonférence & le diamètre d'un cercle.

XXIII.

Problème. La boule, ou le cylindre, étant suspendu par un fil & plongé dans un courant, déterminer la relation qu'il y a entre la vitesse du courant & l'inclinaison du fil, en faisant abstraction de l'effort du courant contre le fil.

Solution. Soit le sinus total = 1, le sinus de l'angle d'inclinaison du fil, c'est-à-dire, de l'angle que le fil fait avec la verticale = m ; on sçait, par les élémens de la mécanique, que le poids du corps plongé est généralement à l'effort du courant contre le corps comme $\sqrt{1 - mm}$

à m : cette analogie donne pour la boule $Z = \frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g}$

$\frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \cdot d$ & pour le cylindre vertical, $Z = \frac{33}{28} \cdot \frac{\gamma - g}{g}$

$\frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \cdot d$. si on exprime les quantités d & Z par

pouces, alors la quantité $2\sqrt{181Z}$, marque le nombre de pouces que le courant fait dans une seconde de temps, que j'appellerai N ; substituant donc pour Z , la valeur trouvée, nous aurons pour la boule

$$N = 2\sqrt{181Z} = 4\sqrt{\frac{181}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - mm}}} \cdot d$$

& pour le cylindre vertical

$$N = \sqrt{\frac{5973}{7} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - mm}}} \cdot d$$

soit, par exemple, $d = 12$ pouces; $\gamma = \frac{5}{4}g$, l'inclinaison du fil de 45 degrés, on trouve en ce cas, $N = 53,8$ pour la boule, & $N = 50,5$ pour le cylindre, & ces nombres marquent autant de pouces que le courant fait dans une seconde de temps.

X X I V.

Scholie 1. Toutes ces propositions supposent que le fil ne souffre aucun effort par l'action du courant; mais si cet effort est sensible, par rapport à celui du corps suspendu, le fil en fera courbé, & l'angle d'inclinaison changé. On pourroit, à la vérité, déterminer ces changemens par le calcul, si les vitesses relatives du courant étoient entièrement connues; mais comme une telle correction est en quelque façon douteuse, il faut faire tout ce qui est possible pour diminuer l'action du courant contre le cordeau auquel le corps plongé est attaché; & il n'y a d'autre remède à cela, que celui de se servir de cordeaux les plus forts que l'industrie humaine puisse imaginer, sans augmenter leur épaisseur: c'est-là un article si essentiel, que je demande qu'on n'y épargne ni soin ni frais. Je ne sçais quelle sorte de matière, ni quel tissu il faudra donner à ces cordeaux pour les rendre les plus forts; mais quelques expériences me font croire qu'il peut être permis de supposer des cordeaux d'un quart de ligne de diamètre, qui puissent soutenir 20 liv. de poids sans se rompre: peut-être en pourra-t-on faire de cette épaisseur, qui puissent soutenir un plus grand poids: si je me trompe beaucoup dans cette estime, il sera facile d'imiter nos calculs pour telle autre supposition qu'on voudra faire à cet égard. Si les cordeaux étoient d'un tissu & d'une matière à se gonfler sensiblement sous l'eau, il faudroit y faire attention, & mesurer toujours leur épaisseur lorsqu'ils sont mouillés.

X X V.

Scholie 2. Pour avoir quelque idée de l'effort que le courant peut faire contre le cordeau de la boule, & pour voir si on peut négliger cet effort, par rapport à celui que soutient immédiatement la boule, je ne considérerai ici que le cas le plus simple. Soit la longueur du cordeau = l ,

fon diamètre = d ; & fupposons que le cordeau foit arrêté dans la situation verticale, pendant que le même courant, porté avec une vîteffe uniforme, donne contre le cordeau & la boule. En ce cas, nous voyons par les § 20 & 21, que l'effort du courant contre la boule fera à celui du même courant contre le cordeau comme $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{14} \cdot dd$ est à $\frac{1}{4} l^2$, ou comme 1 à $\frac{56}{33} \cdot \frac{l^2}{d^2}$. Ainfi, fi la boule n'avoit qu'un pied de diamètre, & que la longueur du cordeau fut de 600 pieds, & le diamètre du cordeau de $\frac{1}{4}$ ligne, les deux efforts en queftion feroient comme 369 à 700; & par conféquent, le cordeau foutiendrait un effort prefque double de celui que la boule fouffre par le même courant. Il eft vrai qu'il y a plusieurs autres circonftances à confidérer, qui rendent cet effort, contre le cordeau, confidérablement plus petit. Mais après avoir examiné toutes ces circonftances, j'ai trouvé que l'effort de la boule fera, pour notre exemple, tout au plus le double de celui du cordeau. J'avoue que c'eft ici un grand inconvénient: faudra-t-il donc fe contenter d'employer notre méthode pour les courans beaucoup moins profonds? Je ne crois pas qu'il faille venir à une telle extrémité; tâchons plutôt de remédier à cet inconvénient, autant qu'il eft poffible. Quand une méthode eft bonne par fon effence, il eft rare qu'on ne puiffe remédier aux inconvéniens phyfiques qu'on y rencontre. Du moins trouverons nous tous les fecours que nous pouvons fouhaiter dans la géométrie, pourvu qu'on veuille fe donner affez de peine pour faire toutes les obfervations que les méthodes géométriques demandent.

X X V I.

Scholie 3. On peut changer d'une infinité de façons le volume & la pefanteur fpécifique des corps à plonger, & donner par-là une proportion quelconque du poids qu'ils ont fous l'eau, à l'effort du courant d'une certaine

vitesse contre les mêmes corps. On pourroit rendre la résistance du cordeau insensible, par rapport à celle du corps plongé, en augmentant le volume de ce corps & en diminuant son poids sous l'eau. Mais on tombe par-là dans d'autres inconvéniens : car l'inclinaison du cordeau deviendroit trop grande, & ses variations, relativement à celles du courant, trop petites. Je crois, après avoir bien considéré toutes les circonstances, qu'il convient de faire toujours que la plus grande inclinaison du cordeau soit d'environ 45 degrés. Je vais donc donner toutes les mesures, en quantité absolue, pour ce cas.

1. Si l'on exprime, pour la boule, le diamètre d par des pouces, son poids sous l'eau fera en livres = 0, 0218.

$\frac{\gamma - g}{g} \cdot d^3$, & l'effort du courant contre la boule, sera de même égal à ce poids.

2. Si on plonge un cylindre, dont le diamètre = d , & la hauteur = a en pouces, son poids sera = 0, 0327.

$\frac{\gamma - g}{g} \cdot a d d$, & cette quantité exprimera aussi la résistance.

3. Si on multiplie ces poids marqués par $\sqrt{2}$, on aura la tension du cordeau pour la boule = 0, 0308. $\frac{\gamma - g}{g} \cdot d^3$, & pour le cylindre.

$$= 0, 0462 \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot a d d.$$

4. La force du cordeau doit être proportionnelle à sa tension, & comme il faut ménager autant qu'il est possible l'épaisseur du cordeau, il me semble qu'il suffira de multiplier la tension par $\frac{1}{2}$, & de rendre la force du cordeau égale au produit. Je supposerai ici que les forces des cordeaux sont en raison quarrée de leurs diamètres, quoique cette règle ne réponde pas avec une précision entière aux expériences. Si donc un cordeau d'un quart de ligne de diamètre, peut soutenir 20 livres (§. 24.) ; on aura la

force d'un cordeau, dont le diamètre est δ , = 3 2 0 $\delta \delta$, en exprimant δ par lignes; & si nous faisons les deux tiers de cette force égaux à la tension du cordeau, nous aurons pour la boule $\delta = 0, 0 1 2 0 d \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, & pour

le cylindre $\delta = 0, 0 1 4 7 d \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} a}$

Dans ces deux équations, on se souviendra d'exprimer les quantités a & d par pouces, & qu'alors le diamètre δ , sera exprimé par lignes. S'il s'agissoit de rapporter toutes ces grandeurs à une même mesure, il n'y auroit qu'à diviser lesdites quantités par 12, pour avoir la valeur de δ , exprimées par parties de pouces. Les deux équations que nous venons de donner, marquent généralement le plus petit diamètre qu'il soit permis de donner au cordeau. On ne sçauroit donc diminuer l'action du courant contre le cordeau au delà de ce terme.

5. En supposant au cordeau le plus petit diamètre, tel que nous venons de le déterminer, il est facile de déterminer généralement la proportion qu'il y a entre l'action du courant contre la boule, ou le cylindre, & celle du même courant & uniforme contre le cordeau, comme nous avons fait dans un cas particulier, au §. 25, où nous avons vu que l'action contre la boule, est à l'action contre le cordeau, supposé vertical, comme 1 à $\frac{56}{33} \cdot \frac{l \delta}{d}$. cette proportion deviendra donc, en donnant au cordeau le plus petit diamètre possible, comme 1 à $\frac{56}{33} \times \frac{l}{d} \times 0,$

0 0 1 0 $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, ou comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0, 0 0 1 7 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$;

& on remarquera toujours que dans le facteur $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, on doit exprimer la quantité d par pouces. Si le corps

plongé est cylindrique, l'action du courant contre le cylindre est à l'action contre le cordeau vertical, comme $a d$, est à $l \delta$, ou comme 1 est à $\frac{a}{l} \times \frac{\delta}{d}$, & substituant pour δ sa plus petite valeur en pouces, cette raison sera comme 1 à $\frac{a}{l} \times 0,0012 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} a$, & il faudra encore ici se servir de pouces dans le facteur

$$\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} a.$$

Si l'on considère à présent, l'inclinaison du cordeau, l'action contre le cordeau sera diminuée dans l'un & l'autre corps, en raison de 1 à $1 - m m$, tant à cause de l'obliquité, que parce que la profondeur du courant n'est plus que $l \times \sqrt{1 - m m}$, & faisant $m m = \frac{1}{2}$, les efforts du courant contre la boule & son cordeau, seront en raison de 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} d$, & les mêmes efforts contre le cylindre & son cordeau, seront en raison de 1 à $\frac{l}{a} \times 0,0006 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} a$.

X X V I I.

Scholie 4. Examinons à présent ce qu'il convient d'observer à l'égard des pesanteurs spécifiques, & des dimensions des corps à plonger. Dans cet examen, il faut reprendre les équations du §. 23, qui marquent une relation entre les vitesses des courans, les pesanteurs spécifiques & les dimensions des corps; en sorte que la vitesse du courant étant donnée, il faut satisfaire, avant toute chose, à ces équations, en supposant $m = \sqrt{1 - m m}$, puisque nous voulons que le cordeau mesure le courant sous un angle d'environ 45 degrés. Nous avons donc pour la

boule $N = 4 \sqrt{\frac{181}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g}} \cdot d$, & pour le cylindre

$$N = \sqrt{\frac{5973}{7} \cdot \frac{\gamma - g}{g}} \cdot d$$

ce qui donne pour la boule $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = \frac{N}{4} \sqrt{\frac{3}{181d}}$, &

pour le cylindre $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = N \sqrt{\frac{7}{5973d}}$

Ces équations déterminent les pesanteurs spécifiques des corps à plonger pour des courans considérés comme déterminés ; elles nous apprennent qu'il faut pour les mêmes dimensions des corps à plonger , faire la différence des pesanteurs spécifiques proportionnelle au quarré de la vitesse du courant.

Il ne nous reste plus à déterminer , que les dimensions des corps à plonger ; or nous avons trouvé dans la 5^e. note du paragraphe 26. que les actions du courant contre la boule , & contre le cordeau sont comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} d$: Si nous mettons donc à la place de $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}$ sa valeur $\frac{N}{4} \sqrt{\frac{3}{181d}}$, ce rapport sera comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \times \frac{N}{4} \sqrt{\frac{3}{181}}$, ou comme 1 à $0,000273 N \cdot \frac{l}{d}$. Un calcul pareil nous donne ce rapport pour le cylindre comme 1 à $0,000205 N \cdot \frac{l}{\sqrt{ad}}$. On se souviendra que N marque le nombre de pouces que le courant fait dans une seconde de temps , que l marque la longueur du cordeau mouillé , & incliné sous un angle de 45 degrés , de sorte qu'il faut supposer la profondeur verticale de la boule ou du cylindre = $l \sqrt{\frac{1}{2}}$. Nous avons au reste supposé que les eaux heurtent avec la même vitesse contre le corps plongé , & contre le cordeau mouillé , tout comme si le vaisseau ne faisoit que filer dans

des eaux calmes. Nous ne pouvions nous dispenser de faire une pareille hypothèse, parce que les inégalités des vitesses relatives, sont inconnues dans les courans; & quand même on les connoîtroit, les règles pour le choix le plus avantageux des choses arbitraires deviendroient trop compliquées, si on vouloit les perfectionner d'avantage, en considérant encore les inégalités du mouvement des eaux contre les parties du système. Il ne s'agit pas non plus d'observer exactement ces règles, mais seulement de s'y conformer à peu près.

Les expressions que nous avons données pour le rapport des actions du fluide, contre le corps plongé, & contre le cordeau, nous apprennent qu'il faut généralement prendre une boule aussi grande que les autres circonstances pourront le permettre, puisque la première action est à la seconde, tout le reste étant égal, comme d à une constante: Il faut par la même raison se servir d'un cylindre aussi large & aussi haut qu'on pourra, sans tomber dans d'autres inconvéniens considérables, & il est à remarquer qu'on profite autant à augmenter la hauteur a qu'à augmenter en même raison le diamètre d , quoique la solidité augmente en raison quarrée de d & en raison simple de a . On voit aussi qu'un corps cylindrique répond mieux à nos vues, qu'une boule; car faisant ces corps d'une résistance égale, les efforts du courant contre la boule & contre le cylindre seront comme 547 à 111, & par conséquent cet effort sera plus petit pour le cylindre, que pour la boule: Mais si on vouloit se servir d'un corps cylindrique, il seroit bon de le charger de plom par sa base, afin qu'il conserve mieux sa position verticale sous les eaux; on pourroit même l'attacher au costeau par le milieu de sa hauteur au lieu de l'attacher par le centre de l'une des surfaces planes.

X X V I I I.

Conclusion. Tout ce que nous avons dit depuis le §. 20. concerne

concerne la configuration des corps à plonger, leur grandeur & leur pesanteur spécifique les plus avantageuses pour diminuer l'action du courant contre les cordeaux, auxquels ils sont attachés, & nous apprend quelle épaisseur il faudra donner aux cordeaux. Nous avons vu qu'un corps cylindrique est préférable en quelque façon à un corps sphérique, & qu'il faut donner généralement aux corps à plonger le plus de volume qu'on peut, sans tomber dans des inconvéniens qui ne regardent pas notre sujet en lui-même. On commencera l'observation par la boule, ou par le cylindre le plus pesant, garni d'un cordeau suffisamment gros pour résister au poids du corps & à l'effort du courant; ces premières observations serviront à reconnoître à peu près la vitesse relative du vaisseau ou de la chaloupe, par rapport au fond du courant, & la profondeur du courant, & par là on sçaura à peu près la valeur des lettres N & l : après cela les équations du §. 27. donneront à connoître quelle pesanteur spécifique il faut donner au corps à plonger, & enfin les équations de la note 4 du §. 26. marquent le diamètre des cordeaux correspondans. La règle générale est de faire la différence des pesanteurs spécifiques exprimée $\frac{z-g}{g}$ proportionnelle aux carrés de la vitesse N & le diamètre du cordeau proportionel à la simple vitesse pour les corps d'un même volume: connoissant toutes leddites valeurs, le §. 27. nous apprendra aussi le rapport entre la résistance du corps plongé, & celle du cordeau, & cette dernière connoissance nous mettra enfin en état de calculer assez justement la correction qu'il faudra employer pour chaque observation. J'éclaircirai ces règles par l'exemple suivant.

Exemple. Supposons que les eaux puissent être censées n'avoir plus de mouvement à la profondeur de 100 pieds, c'est-à-dire, donnons au courant sensible une profondeur de 100 pieds: si le cordeau doit incliner de

45 degrés, il faut supposer $l = 141$ pieds : donnons à la boule deux pieds de diamètre de même qu'au cylindre, auquel nous donnerons aussi deux pieds de hauteur, & nous aurons $d = a = 2$ pieds ou = 24 pouces : Supposons enfin que la vitesse absolue du vaisseau, ou de la chaloupe, soit de 3 pieds ou de 36 pouces par seconde, cela donnera $N = 36$. Nous aurons en ce cas pour la boule (§. 27.) $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = \frac{36}{4} \sqrt{\frac{3}{181.24}}$ ou $\frac{\gamma - g}{g} = \frac{81.3}{181.2}$, ce qui fait à peu près $\frac{1}{18}$: c'est-à-dire, qu'il faudroit faire les pesanteurs spécifiques de la boule & des eaux de la mer, en raison de 19 à 18 ; après cela la note 4 du §. 26. nous dit de faire $a = 0, 0120 d \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} d$, ce qui fait pour notre cas 0, 34 parties d'une ligne qu'il faudroit donner au diamètre du cordeau. Un tel cordeau peut soutenir un effort de 37 livres avant que de rompre ; le poids de la boule sous l'eau, sera d'environ 17 livres, mais hors de l'eau elle aura environ 39 livres de poids. Je remarquerai donc ici en passant, qu'on ne doit point roidir le cordeau avant que la boule soit entièrement plongée. Enfin l'effort du courant contre la boule fera à celui que le cordeau incliné de 45 degrés, souffre perpendiculairement par le même mouvement relatif des eaux en vertu du §. 27. comme 1 à 0, 069. Nous voyons donc que nous sommes parvenus à rendre l'action contre la boule $14\frac{1}{2}$ fois plus grande que celle qui se fait contre le cordeau, quoique nous aions supposé que les eaux heurtent contre toute la longueur du cordeau avec la même vitesse que contre la boule : cependant cette supposition augmente de beaucoup l'action des eaux contre le cordeau, lorsqu'on ne prétend pas d'observer le courant au milieu du sillage, & qu'on veut bien laisser simplement flotter le vaisseau ou la chaloupe pendant toutes les observations, suivant la méthode que j'ai indiquée au §. 14,

car en ce cas les eaux n'ont point de mouvement relatif avec le cordeau près de la surface de la mer ; & si ces vitesses relatives vont en progression arithmétique depuis la surface de la mer jusqu'à la boule , il faudra retrancher les deux tiers de l'action des eaux contre le cordeau , de sorte que leur action sera environ 43 ou 44 fois plus grande contre la boule , que contre le cordeau : cette dernière action pourroit donc déjà être négligée sans peine ; mais si le mouvement relatif des eaux étoit plus rapide , si la profondeur du courant étoit plus grande , s'il étoit impossible de rendre les cordeaux aussi forts que nous l'avons supposé , & enfin s'il falloit mettre une plus grande proportion entre la force du cordeau & sa tension , que celle de 3 à 2 , pour prévenir avec d'autant plus de sûreté tous les accidens , l'action des eaux contre le cordeau en deviendroit plus grande ; c'est pourquoi je ne laisserai pas de montrer ci-dessous la correction qu'il faudra employer pour déterminer les courans , par l'inclinaison du cordeau. Voilà ce qui concerne la boule , & on suivra la même route pour trouver les résultats du cylindre : on trouvera donc $\frac{v-g}{g} = \frac{10}{153}$ ou à peu près = $\frac{1}{15}$, c'est-à-dire , qu'il faudra faire la pesanteur spécifique par rapport à celle des eaux de la mer en raison de 17 à 16 : après cela on aura $n=0$, 433 parties de ligne : un cordeau d'un tel diamètre peut soutenir un poids de 60 livres : le poids du cylindre sera d'environ 481 livres , mais sous l'eau il n'aura qu'un poids d'environ 28 livres. Enfin si le cordeau & le cylindre attaché sont considérés comme entraînés avec la même vitesse contre les eaux , l'action des eaux sera environ 19 fois plus grande contre le cylindre que contre le cordeau ; mais si on fait les observations sans aucun filage , l'action des eaux contre le cordeau en deviendra beaucoup plus petite , & ne sera plus qu'environ la $\frac{1}{17}$ partie de celle qui se fait contre le cylindre. Voici encore quelques remarques. .

1. Comme nous avons suffisamment diminué le rapport de l'action des eaux contre le cordeau à celle qui se fait contre le corps plongé, il ne sera pas nécessaire de suivre nos règles pour les courans, qui seroient moins que trois pieds par seconde, car les pesanteurs spécifiques du corps à plonger & des eaux de la mer deviendroient trop égales, & on tomberoit par là dans de nouveaux inconveniens : mais on fera attentif à suivre ces règles quand les courans ou plutôt quand le vaisseau a un mouvement absolu de plus de trois pieds ou 36 pouces par seconde. Si cependant ces courans étoient en même temps extrêmement profonds, on ne fera pas mal de donner plus d'étendue à nos règles.

2. On fera les différences entre les pesanteurs spécifiques, proportionnelles aux quarrés des vitesses absolues du vaisseau : ainsi les poids des corps d'un même volume sous l'eau, seront pareillement proportionels aux quarrés de ces vitesses. Si nous supposons donc la plus grande vitesse absolue du vaisseau de cinq pieds par seconde, la plus grande quantité $\frac{v-g}{g}$ deviendrait

$$= \frac{25}{9} \times \frac{1}{18} = \text{à peu près } \frac{2}{13} \text{ pour la boule de deux pieds de diamètre, \& la même quantité deviendra } = \frac{25}{9} \times \frac{1}{16}$$

$$= \text{à peu près } \frac{4}{23} \text{ pour un cylindre de deux pieds de diamètre \& d'autant de hauteur : ainsi les pesanteurs spécifiques de la boule \& des eaux de la mer feront comme 15 à 13, \& celles du cylindre \& des eaux de la mer feront comme 27 à 23.}$$

3. Les diamètres des cordeaux suivent la proportion des vitesses absolues du vaisseau; nous aurons donc pour la boule le plus grand diamètre du cordeau $= \frac{5}{3} \times 0,34 = 0,57$ & pour le cylindre $= 0,72$. ces déterminations ne dépendent point de la profondeur des courans.

4. Le rapport entre les actions des eaux contre les corps plongés & contre leurs cordeaux, suit encore la proportion des vitesses absolues du vaisseau, indiquées par N , pourvu que les courans aient la même profondeur ; il suit de là, qu'en observant les courans, suivant la méthode du §. 14, l'action des eaux contre la boule fera au moins 26 fois plus grande que contre son cordeau, & au moins 34 fois plus grande contre le cylindre que contre son cordeau.

5. Le même rapport suit la raison réciproque des profondeurs des courans ; ainsi, si nous voulions prendre toutes les choses au pis & donner 600 pieds de profondeur au courant, l'action des eaux contre la boule ne seroit plus que $4 \frac{1}{3}$ fois plus grande que celle qui se feroit contre son cordeau, & $5 \frac{1}{3}$ fois pour le cylindre. Ce ne sera donc que pour les courans énormément profonds, qu'on doit se mettre en peine des corrections que nous donnerons ci-dessous.

6. L'action des eaux contre le cordeau du cylindre est par elle-même plus grande que celui de la boule ; mais cette action, relative à celle qui se fait contre le corps attaché, est plus petite pour le cylindre que pour la boule ; le cylindre a encore cet autre avantage, que sa pesanteur spécifique n'approche pas si fort de celle des eaux comme dans la boule. Un troisième avantage est qu'on peut augmenter la hauteur du cylindre, sans en diminuer davantage la pesanteur spécifique, & augmenter par-là le rapport entre les actions des eaux contre le cylindre & son cordeau ; au lieu qu'en augmentant d'avantage le volume de la boule, il faut toujours approcher d'avantage la pesanteur spécifique de la boule à celle des eaux (§. 27.). On doit donc préférer à tous ces égards les corps cylindriques aux sphériques. Si on ne croioit pas la relation communément adoptée entre la vitesse des eaux & leur effort contre la surface cylindrique assez juste, on pourroit déterminer cette

relation par des expériences préalables, faites sur les cylindres qu'on destine à cet usage.

7. L'inconvénient d'une trop grande égalité entre les pesanteurs spécifiques des corps à plonger & des eaux de la mer, n'est pas si considérable, qu'on ne puisse suivre nos règles lors même que le vaisseau fait moins de trois pieds par seconde : mais comme la pesanteur spécifique des eaux de la mer est un peu variable, il sera bon en ce cas d'examiner chaque fois la vraie pesanteur spécifique des eaux, de la manière que le père Feuillée l'a fait.

8. La remarque précédente regarde les courans extrêmement profonds, les seuls qui nous embarrassent encore : mais il est très-naturel que ces sortes de courans ne sçauroient qu'avoir très-peu de mouvement; de même que les eaux d'une même rivière également large perdent de leur vitesse dans les endroits où la rivière devient plus profonde. La quantité Nl sera à peu près toujours la même dans toute l'étendue d'un même courant; &, si cela est, les courans profonds pourront être observés aussi exactement que les autres, pourvu qu'on soit sur ses gardes, par rapport à la vraie valeur de la quantité $\frac{v-g}{g}$. Mais quand je suppose la vitesse N

d'autant plus petite que le courant est plus profond, je considère le vaisseau ou la chaloupe n'avoir d'autre vitesse absolue, que celle des eaux près de la surface de la mer: ce qui est toujours en notre pouvoir de faire. Ce sera toujours une chose extrêmement difficile, que d'observer les courans avec une précision entière, sans vouloir arrêter le sillage, lors même que tous les obstacles accidentels concourent à rendre ces observations plus difficiles & moins sûres.

9. Si j'ai dit qu'on peut diminuer l'action des eaux contre le cordeau, par rapport à celle qui se fait contre le corps plongé, en augmentant le volume des

corps plongés , il est à remarquer à cet égard , qu'on pourroit tellement augmenter le volume & la résistance de ces corps, qu'elle devint sensible par rapport à celle de la chaloupe , & peut-être même à celle du vaisseau. M. Bouguer réduit la surface de la proue d'un vaisseau du premier rang à 150 pieds quarrés ; & la surface d'un cylindre de deux pieds de diamètre & d'autant de hauteur se réduit à $2 \frac{1}{4}$ pieds quarrés pour la résistance : ainsi la résistance d'un tel vaisseau par sa proue est environ 56 fois plus grande que celle d'un cylindre , tel que nous avons choisi pour exemple. Mais un vaisseau qui seroit 8 fois plus petit , seroit sa résistance par la proue quatre fois plus petite , & sa surface se réduiroit à $37 \frac{1}{4}$ pieds quarrés , qui ne seroit plus que 18 fois plus grande que celle dudit cylindre. En général si on nomme n le nombre des tonneaux que le vaisseau pèse , la quantité $\left(\frac{n}{3300} \right)^{\frac{2}{3}} \times 150$, marquera en pieds quarrés la surface plane équivalente à la proue pour la résistance ; car M. Bouguer donne 3300 tonneaux au vaisseau dont il parle , & on peut supposer ici les vaisseaux être des corps semblables. La surface plane, dont la résistance seroit égale à celle de la proue d'une chaloupe , ne sçauroit manquer d'être assez petite. Comme j'ignore les dimensions des chaloupes , je me suis avisé d'une autre manière pour trouver à peu près cette surface. J'estime que deux rameurs, en ramant assez vigoureusement, peuvent donner à la chaloupe une vitesse de 4 $\frac{1}{2}$ pieds par seconde ; & je sçai, par des expériences très ingénieuses & d'une grande utilité pour plusieurs points qui concernent la navigation , qu'un de mes amis, & grand Géomètre , a bien voulu faire sur ma prière , qu'un rameur , ramant sur un bâteau qui fait 4 $\frac{1}{2}$ pieds par seconde , fait autant qu'un poids de 7 livres qui tirent continuellement le bâteau. La force d'un rameur, réduite en poids, devient ensuite d'autant

plus petite , que le bateau va plus vite : on peut donc supposer que les deux rameurs de la chaloupe font autant qu'un poids de 14 livres ; ainsi la résistance des eaux contre la proue de la chaloupe , qui fait $4\frac{1}{2}$ pieds par seconde , doit être égale à 14 livres , ce qui donne la surface plane , dont la résistance soit égale à celle de la proue de la chaloupe , égale à environ $\frac{7}{2}$ d'un pied carré ; & par conséquent quatre à cinq fois plus petite que celle de notre cylindre équivalente à $2\frac{1}{3}$ pieds carrés : cela suffit pour voir que l'action du corps , plongé contre la chaloupe , doit être très-grande & qu'elle peut en quelque façon être sensible contre un vaisseau. J'examinerai dans l'article suivant quelle influence cette action pourroit avoir sur nos observations , & comment il faudra se précautionner contre les erreurs qui pourroient en résulter.

10. Comme les corps à plonger sont très - pesants hors de l'eau , & que les cordes seroient de beaucoup trop foibles pour les soutenir ; j'ai déjà dit qu'il ne faut pas roidir les cordes avant que les corps soient entièrement sous l'eau ; il faudra donc s'aviser d'une manière de descendre les corps dans les eaux de la mer ; & de les en tirer sans employer le cordeau : & cela peut se faire très-facilement : je dirai seulement qu'il n'y auroit pas grand mal d'attacher le corps par un bout de corde assez forte pour le suspendre en l'air , & qui n'auroit pas plus de longueur qu'il en faut pour descendre le corps dans la mer : mais si on craignoit la petite erreur qui en résulteroit sur nos observations , on pourra s'y prendre de la façon qu'on jugera la plus commode. Voilà les remarques que j'ai crû nécessaires pour mieux éclaircir nos méthodes , & pour mieux en perfectionner l'usage.

X X I X.

Avant que de venir à l'analyse de l'action des eaux
contre

contre les cordeaux , de la courbure de ces cordeaux qu'elle cause , & de la correction de leurs inclinaisons qu'elle demande , je dirai encore quelques mots sur la 9^e. remarque du précédent article. Nous avons dit dans cette remarque , que l'action des corps plongés est très grande contre les chaloupes , & qu'elle peut être sensible contre un vaisseau. Il paroît d'abord que cette action doit jeter de grandes erreurs sur nos manières d'observer les courans : mais, si on y réfléchit bien, on voit qu'elle ne peut rien déroger ni à leur bonté , ni à leur justesse. Il n'y aura qu'à plonger deux corps en même-temps , l'un jusques dans la région des eaux calmes , & l'autre à telle profondeur qu'on voudra : l'inclinaison du cordeau du premier montrera exactement la vitesse absolue du système , & celle de l'autre cordeau indiquera le mouvement relatif des eaux de la même profondeur par rapport au mouvement du système ; lequel étant déjà connu , on en déduira le mouvement absolu des eaux , c'est-à-dire , le courant pour telle profondeur qu'on voudra , tout comme nous avons dit au §. 15. Effectivement le mouvement de la chaloupe ou du navire changé par l'action , ou plutôt par la réaction des corps plongés est compris dans le cas du sillage , que nous avons démontré audit article pouvoir être déterminé en même temps que le courant : on remarquera seulement que ce n'est pas un sillage entièrement uniforme tant que les corps plongés changent de position ; ainsi il faudra toujours avant que d'examiner l'inclinaison des cordeaux laisser écouler environ une demi-minute de temps pour mettre le système dans le cas de l'uniformité. Il est donc vrai , que l'action des corps plongés contre la chaloupe ou contre le vaisseau , n'apporte jamais aucun obstacle à notre manière de déterminer les courans depuis leur surface jusqu'au fond : je trouve cependant que notre article 18^e. en souffre quelque petit changement. J'ai démontré dans cet article une manière facile

de déterminer la vraie route & le mouvement réel du vaisseau, sans se mettre aucunement en peine des dérives, de quelques causes qu'elles proviennent : mais, comme cette manière demande qu'on plonge un corps jusques dans la région des eaux calmes ou censées telles, il est clair que le vaisseau en fera un peu retardé, de sorte que le vrai sillage durant les observations sera un peu plus lent, que lorsque le corps n'est pas plongé dans les eaux : cette considération demande donc une petite correction. Pour trouver cette correction déjà fort petite en elle même, nous pourrons supposer que le vaisseau sille simplement, & oppose directement la proue aux eaux par son mouvement réel & absolu tout comme s'il n'y avoit ni courant ni aucune dérive, & il faudra faire attention, que la force du vent demeure la même pendant ce petit intervalle : soit à présent Q le nombre des pieds quarrés, auquel se réduit la proue, & q celui pour le corps plongé ; qu'on nomme c la vitesse absolue du vaisseau du temps de l'observation, je dis que la vitesse absolue du même vaisseau après avoir retiré le corps de-

viendra presqu'aussitôt $= c \sqrt{\frac{Q \times q}{Q}}$, ou à peu près

$= c \times \frac{q}{2Q} c$, de sorte que la petite quantité $\frac{q}{2Q} c$ marque

la correction à faire pour avoir la vraie vitesse absolue du vaisseau, hors le temps des observations. Si donc n marque encore le nombre des tonneaux que le vaisseau pèse, nous aurons, en vertu de la remarque 9^e. du §. 28.,

$Q = \left(\frac{n}{3300}\right)^{\frac{2}{3}} \times 150$; & si le corps plongé est un cy-

lindre de deux pieds de hauteur & de diamètre, il faut

faire $q = \frac{8}{3}$, & la quantité $\frac{q}{2Q}$ deviendra $= \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{150}$.

$$\left(\frac{3300}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1,971}{\sqrt[3]{n n}} c.$$

Ainsi, si le vaisseau est de 1000 tonneaux, on trouve la différence des deux vîtesses = 0, 0197 c, ou environ $\frac{1}{50}$ c, & les deux vîtesses seront comme 50 à 51. La différence est donc très-petite; mais, comme elle subsiste toujours pendant tout le cours d'une longue navigation dans un même sens, il ne faut pas la négliger.

La correction que nous venons de donner pour connoître le vrai mouvement absolu du vaisseau, par le corps plongé jusques dans les eaux calmes, suppose que le vaisseau donne contre les eaux avec toute la vîtesse absolue, tout comme le corps plongé; mais si le courant, près de la surface de la mer est sensible par rapport au sillage, on voit que ladite supposition n'a plus lieu, parce que le vaisseau & le corps plongé donnent contre les eaux avec des vîtesses inégales. On peut encore trouver en ce cas, combien le mouvement du vaisseau est changé par l'immersion du corps; mais il faut préalablement déterminer le sillage ou le mouvement relatif du vaisseau par rapport aux eaux près de la surface de la mer, ce qui se fait en ne plongeant le corps qu'à la profondeur de 7 à 8 pieds.

Je ne m'arrêterai pas à donner toutes ces corrections, on les trouvera sans peine par la simple considération que la force du vent, qui fait siller le vaisseau, est supposée la même; d'où l'on déduit facilement combien ce sillage & le mouvement absolu sont changés en retirant les corps des eaux. Dans ces recherches, il faut examiner si le courant est contraire ou favorable, ou s'il se fait de côté; & lorsqu'il est contraire, il faut encore distinguer les deux cas, s'il est plus ou moins rapide que le sillage, parce qu'il dépend de-là de sçavoir si l'action des eaux, contre le corps plongé, doit être supposée affirmative ou négative. Il y a des cas où ces corrections ne laissent pas d'être assez douteuses; ce sont ceux où la

force du vent est très-petite, car alors il peut arriver que le corps plongé tire le vaisseau contre les eaux par la poupe; mais une telle action sera toujours très-petite. Au reste, toutes ces recherches ne regardent pas les courans, que j'ai déjà dit pouvoir être également déterminés, quelque grande qu'on suppose l'action des eaux contre les corps plongés; elles ne tendent qu'à rectifier l'estime du sillage absolu, en tant que celui-ci est tant soit peu dérangé par l'immersion des corps, lorsque ces corps sont grands & que les navires sont petits.

X X X.

Je viens enfin à notre dernier point, qui est celui de trouver par le calcul, l'action des eaux contre les cordaux, la courbure de ces cordaux qui en résulte, & le changement de leur inclinaison. J'ai indiqué, fort au long, toutes les mesures qu'il est possible de prendre pour diminuer cette action, par rapport à celle qui se fait contre les corps plongés; je suis sûr que ces mesures suffiront pour pouvoir négliger l'effort des eaux contre les cordaux, lorsqu'on ne plonge pas les corps au-delà d'environ vingt brasses de profondeur; mais on auroit tort de le négliger entièrement, quand on les plonge beaucoup plus profondément. C'est ici le seul inconvénient qui me fait encore de la peine dans tout mon système, puisque sans cet inconvénient il n'y auroit plus aucun empêchement de descendre les corps aussi profondément qu'on voudroit, & jusques à ce que le cordeau ne montrât plus absolument aucun changement. Si je prens cet inconvénient à cœur, ce n'est pas qu'on ne puisse déterminer, avec toute la précision nécessaire, la correction qu'il demande; c'est plutôt parce que je crains que cette sorte de correction ne devienne trop incommode, & trop peu intelligible pour les pilotes, ou de ceux qui pourroient entreprendre d'observer les courans. Ce que j'ai dit jusqu'ici, est facile à être réduit en règles; mais ce qui me

reste à dire demandera quelque connoissance de géométrie dans ceux qui voudront l'appliquer à l'observation des courans.

X X X I.

Soit donc AB (*fig. 6.*) la figure du cordeau sous l'eau, chargé à l'extrémité B d'un cylindre dont le diamètre est d , & la hauteur $= a$; qu'on tire la verticale AC , & l'horizontale BC , de même que les deux tangentes BO & AN , prolongées du côté opposé jusqu'en H & F avec les verticales BG, FE , & les horizontales HG, AE ; soit encore Z la hauteur verticale génératrice de la vitesse relative du point B contre les eaux, ainsi l'action des eaux contre le cylindre fera comme $\frac{2}{3} a d Z$,

laquelle multipliée par le rapport $\frac{HB}{HG}$, donnera la force appliquée au point B dans la direction de la tangente, & cette force exprimera la tension du cordeau qui est partout la même, si on fait abstraction du poids du cordeau sous l'eau; ainsi si on fait le sinus total $= 1$, & le sinus de l'angle $HBG = \mu$, on aura la tension du cordeau $= \frac{2 a d Z}{3 \mu}$; prenons à présent deux points intermédiaires

infiniment proches quelconques a & b ; qu'on tire les horizontales ad & bc , avec la petite verticale ac ; soit $Ad = x$, $d a = y$, $A a = s$, $a c = dx$, $b c = dy$, $a b = ds$, & la hauteur verticale génératrice de la vitesse relative de l'élément ab contre les eaux $= \xi$; on sçait, par les règles de la mécanique, que l'action perpendiculaire des eaux contre l'élément du cordeau ab , fera

comme $\frac{2}{3} d s \times \delta \times \xi \times \frac{dx^2}{ds}$, comme $\frac{2}{3} \frac{\delta \xi dx^2}{ds}$, en indiquant le diamètre du cordeau par δ : or, on démontre.

dans la mécanique, que l'élément ds est au rayon osculateur R , comme la force perpendiculaire appliquée à l'é-

lément du cordeau $\frac{2}{3} \times \frac{\delta \xi dx^2}{ds}$ est à la tension du cordeau

$\frac{2}{3} \times \frac{a dZ}{\mu}$; cette analogie nous donnera donc pour l'équa-

tion générale de la courbe $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi dx^2}{a dZ ds}$.

On peut réduire cette équation différentielle du second ordre à une autre du premier ordre; car prenant l'élément ds pour constant, & mettant pour le rayon osculateur sa valeur

$\frac{dx ds}{-ddy}$, on aura $\frac{-ddy}{dx} = \frac{\mu \delta \xi dx^2}{a dZ ds}$, ou

$$\text{bien } -\xi dx = \frac{a dZ ds ddy}{\mu \delta dx^2}, \text{ ou}$$

$$-\xi dx = \frac{a dZ ds ddy}{\mu \delta (ds^2 - dy^2)};$$

L'intégrale de cette dernière équation est, l'élément ds

étant constant, $\int \xi dx = \frac{a dZ}{2 \mu \delta} \log. \frac{ds - dy}{ds + dy} + \text{const.}$

La constante se détermine par l'angle $A F E$, qui fait l'angle de l'inclinaison du cordeau qu'on observe: Si le sinus de cet angle est $=m$, la constante en question

deviendra $\frac{a dZ}{2 \mu \delta} \log. \frac{1+m}{1-m}$ & notre équation fera

$$\int \xi dx = \frac{a dZ}{2 \mu \delta} \log. \frac{(1+m) \cdot (ds - dy)}{(1-m) \cdot (ds + dy)}.$$

Ces sortes d'équations peuvent être intégrées par les méthodes des approximations, avec autant d'exactitude qu'on juge nécessaire; après quoi on mettra pour x toute la profondeur AC , & on trouvera une relation entre μ & m , & par conséquent, entre l'angle $H B G$ & l'angle $A F E$. Cet angle $H B G$, fait l'angle corrigé; lequel, s'il pouvoit être remarqué immédiatement, donneroit la

quantité Z : tout comme nous avons fait voir ci-dessus, en faisant abstraction de l'action des eaux contre le cordeau. Je ne dirai rien ici de la meilleure méthode d'approcher à cette équation, parce qu'il y a une autre méthode infiniment plus aisée, & qui fera d'une précision suffisante que je vais exposer.

X X X I I.

Comme il s'agit de trouver le vrai angle $H B G$, par le moyen de l'angle $A F E$, ou $N A C$, qu'on aura observé, on remarquera que la différence entre les angles $A F E$ & $H B G$, est égale à l'angle $A N O$, exprimé par

$\int \frac{ds}{R}$: ainsi cette quantité $\int \frac{ds}{R}$ est précisément la correc-

tion que nous cherchons, & qu'il faudra retrancher de l'angle observé $N A C$. Pour trouver la quantité $\int \frac{ds}{R}$

très-commodément, il n'y a qu'à supposer que la courbe AB , s'éloigne peu d'une lig. droite. Car, reprenant notre équation primitive, exposée dans le précédent article,

$\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi dx^2}{a d Z ds}$, on pourra l'envisager sous cette forme

$\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi}{a d Z} dx \times \frac{dx}{ds}$ & puis supposer le facteur $\frac{dx}{ds}$ const-

ant & égal à $\sqrt{1 - mm}$ ou à $\sqrt{1 - \mu\mu}$ ou plus exacte-

ment égal au cosinus de l'angle $\frac{1}{2} A F E + \frac{1}{2} A B G$; quelle qu'on choisisse de ces quantités, je supposerai

ledit facteur $\frac{dx}{ds} = M$; & nous aurons $\frac{ds}{R} = \frac{\mu M \delta \xi}{a d Z} dx$

& par conséquent la correction cherchée ou

$$\int \frac{ds}{R} = \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{\int \xi dx}{a Z}.$$

Dans l'application on pourra supposer d'abord $\mu = m$,

& $M = \sqrt{1 - mm}$, & puis chercher, pour ces suppositions, la valeur de $\int \frac{ds}{R}$. Si on demande ensuite une plus grande justesse, il n'y a qu'à retrancher l'angle $\int \frac{ds}{R}$, déjà trouvé de l'angle observé $A F E$, substituer pour μ , le sinus de la différence de ces deux angles, & pour M , le cosinus de l'angle $\frac{1}{2} A F E \times \frac{1}{2} H B G$, & chercher une seconde fois le petit angle $\int \frac{ds}{R}$, qu'on pourra prendre pour la vraie correction, car une troisième seroit tout-à-fait superflue.

Il n'y a donc plus d'autre difficulté, que d'exprimer en nombre la quantité $\int \frac{\xi dx}{AZ}$; & cela suppose qu'on connoisse, pour chaque point d , la quantité variable ξ , par rapport à la quantité constante Z , puisque la courbure du cordeau dépend des variations intermédiaires du courant. Comme il ne s'agit ici que d'une petite correction, il suffira, à la vérité, de connoître à peu près la relation entre ξ & x ; mais toujours faudra-t-il la connoître, en quelque façon, sans quoi il vaudroit presque mieux de ne point employer de correction: plus on connoitra exactement ladite relation, plus la correction désirée sera juste. Avant que de nous engager dans les discussions nécessaires sur cet article, j'indiquerai la manière de s'y prendre du côté de l'analyse.

X X X I I I.

Soit la hauteur verticale $AC = A$, & qu'on exprime la relation entre ξ & x par autant de termes qu'on voudra de l'équation indéfinie, que voici :

$$\xi = Z \left(x + \frac{6x}{A} + \frac{7xx}{A^2} + \frac{dx^3}{A^3} + \frac{ex^4}{A^4} + \&c. \right)$$

Plus

Plus on prendra de termes, plus on obtiendra d'exactitude; mais aussi plus on aura de peine à surmonter. Je ferai voir ensuite de quelle façon on pourra déterminer les coefficients inconnus $\alpha, \epsilon, \gamma, \&c.$ Cependant je crois que pour l'usage que nous prétendons de faire de cette équation, les quatre premiers termes pourront suffire.

Si nous substituons à présent pour ξ , ladite valeur; nous trouverons, après avoir intégré tous les termes, & puis substitué A à la place de x , l'angle

$$ANO = \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a} \times \left(\alpha + \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{3} \gamma + \frac{1}{4} \delta + \frac{1}{5} \epsilon + \&c. \right)$$

Voici à présent quelques réflexions sur les coefficients inconnus $\alpha, \epsilon, \gamma, \&c.$

(1) Si on fait les observations pendant que le vaisseau file à pleines voiles, & qu'en même temps le courant soit peu sensible, il faut que ξ soit dans chaque point presque égale à Z , parce que chaque point du cordeau est entraîné avec une même vitesse, & que le mouvement du courant, qui fait varier la vitesse relative, est supposé peu sensible; & comme il ne s'agit pas pour la correction en question, de connoître exactement la valeur de ξ , on pourra simplement supposer $\alpha = 1$, & tous les autres coefficients $\epsilon, \gamma, \delta, \&c., = 0$: on aura donc, en ce cas, l'angle ANO , à peu près $= \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a}$.

Exemple. Soit le diamètre du cordeau δ , d'une demi ligne, le diamètre du cylindre d , de deux pieds, c'est-à-dire, $\frac{\delta}{d} = \frac{1}{576}$; qu'on suppose le corps plongé jusqu'à la profondeur verticale A , de 100 pieds, & que le cylindre attaché au cordeau, ait sa hauteur a , de deux pieds, on aura $\frac{A}{a} = 50$: ainsi l'angle ANO sera $= \frac{50}{576} \mu M$. Supposons ensuite qu'on ait remarqué l'angle NAd , précisément de 45 degrés, il faudra d'abord supposer, en

N

vertu du précédent article, $\mu = \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $M = \sqrt{\frac{2}{3}}$; cela donnera l'angle cherché $ANO = \frac{25}{576} \equiv 0,04330$, c'est-à-dire, de 2 degrés 29', & par conséquent, le vrai angle HBG , de 42 degrés 31'. Si on veut employer ensuite une seconde correction, il faudra faire $\mu =$ au sinus de 42 degrés 31', & $M =$ au cosinus de $\frac{42^{\text{d}} 31' + 45^{\text{d}}}{2}$ ou = au cosinus de 43 degrés 45', c'est-à-dire, $\mu = 0,67580$, & $M = 0,69161$; ce qui donne pour la seconde correction l'angle $ANO = 0,04057$, ou de 2 degrés 19', & par conséquent, le vrai angle HBG , de 42 degrés 41'. Une troisième correction importerait à peine la valeur d'une minute, trop petite pour s'y arrêter. Nous voyons, par cet exemple, que l'erreur qui résulte de la courbure du cordeau, n'est pas fort considérable; & la manière dont nous l'avons corrigée, nous laisse à peine douter d'une ou de deux minutes. Nous avons cependant commencé par le cas le plus fâcheux. Mais s'il falloit descendre les corps à des profondeurs verticales beaucoup plus grandes, la correction augmenteroit à proportion, & elle iroit jusqu'à près de 7 degrés, s'il falloit plonger le corps jusqu'à la profondeur de 300 pieds; de manière que si le cordeau montrait une inclinaison de 45 degrés, il ne faudroit plus l'estimer que de 38 degrés, laquelle différence est très-considérable, pour l'usage qu'on veut faire de l'observation de ces inclinaisons. Nos corrections deviennent en même temps un peu plus douteuses, parce que le cordeau s'écarte d'avantage de la ligne droite; mais elles seront toujours suffisamment sûres pour notre dessein, puisque nous ne sommes pas dans le cas de nous mettre en peine d'un petit nombre de minutes.

(2) Si on veut observer le courant sur une chaloupe, ou sur un vaisseau qui flotte avec une liberté entière avec

le courant, tel qu'il est à la surface de la mer, & si on suppose, en même temps, que c'est un courant simple, qui diminue ses vitesses en même raison que les distances, depuis le fond du courant; les vitesses relatives des eaux contre le cordeau, seront proportionnelles aux profondeurs x , & on aura $\xi = \frac{x \cdot x}{A A} Z$, & l'angle $A N O$, sera

$$\text{exprimé par } \mu M \times \frac{\delta}{a} \times \frac{A}{a}.$$

Si nous supposons donc, par exemple, les mêmes circonstances que dans l'exemple précédent, nous aurons pour première correction, l'angle $A N O$, de $46'$, & on pourra se passer entièrement de la seconde correction.

(3) Si le vaisseau filloit dans un courant simple, dont le mouvement fût considérable par rapport au mouvement du sillage, on pourroit se contenter de supposer

$$\xi = Z \left(a + \frac{6x}{A} + \frac{\gamma x x}{A A} \right).$$

Dans les courans composés, dont on ne connoîtroit aucune loi ni variation, on pourra mettre un ou deux termes de plus, en supposant

$$\xi = Z \left(a + \frac{6x}{A} + \frac{\gamma x x}{A A} + \frac{\delta x^3}{A^3} + \frac{\epsilon x^4}{A^4} \right):$$

dans ces derniers cas il faut tâcher de connoître les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. C'est ce qui nous reste à montrer.

X X X I V.

Pour trouver la valeur desdits coefficients, il n'y a qu'à plonger successivement le corps à plusieurs différentes profondeurs, & noter à chaque fois l'inclinaison du cordeau avec la profondeur correspondante du corps, & il faudra faire autant d'observations, qu'il y a d'inconnues à déterminer dans l'équation supposée. Ainsi on commencera par plonger le corps tout près de la surface de la mer, & on remarquera l'inclinaison du cordeau; cette première observation donnera à connoître la vitesse du

vaisseau, relativement aux eaux de la surface de la mer, & puis la hauteur verticale génératrice de cette vitesse : on comparera cette hauteur verticale avec Z , ou avec la pareille hauteur verticale répondante à la dernière observation ; & si elle en faisoit, par exemple, la cinquième partie, on feroit d'abord $x = \frac{1}{5}$. On descendra ensuite le corps à la profondeur, par exemple, de 20 pieds, & puis de 40 pieds, &c. ; on comparera ces profondeurs avec celle de la dernière observation, indiquée par A , & on remarquera à chaque fois l'inclinaison du cordeau, par le moyen de laquelle on pourra connoître la valeur de z pour telle profondeur de x qu'on voudra : ainsi on aura autant de cas connus qu'on voudra, qui devant tous être compris dans l'équation supposée, on fera enfin en état de déterminer tous les coefficients inconnus α, ϵ, γ , &c. On voit donc qu'on peut se servir des observations intermédiaires, pour déterminer la valeur de z , pour telle hauteur verticale x qu'on veut ; mais il est à remarquer que si on veut suivre cette méthode, avec toute l'exactitude qu'elle permet, il faudra d'abord corriger la seconde observation par la première, & puis la troisième par la première & la seconde, & ainsi de suite. Ce sont là cependant des corrections du second ordre, dont on pourra se passer.

Cette application suffira, sans doute, pour ceux qui ont quelque connoissance de géométrie, & ce n'est qu'en faveur de ceux-ci que je me suis engagé dans ces dernières discussions, pour faire voir qu'il n'y a absolument aucun inconvénient dans nos méthodes, auquel on ne puisse remédier avec une précision suffisante.

X X X V.

S'il arrivoit enfin, qu'à mesure qu'on descend les corps on vit le plan vertical du cordeau changer de direction, il sera bon de rapporter tous les plans des observations précédentes, au plan de la dernière observation, & de

réduire le mouvement relatif des différens lits d'eau au mouvement pris dans la direction du dernier plan ; cette précaution n'a pas , à la vérité , toute la force de la précision de géométrie , mais elle peut suffire dans cette occasion , où il ne s'agit que d'une certaine petite correction.

XXXVI.

Il nous reste une remarque à faire , si nous voulons employer la même exactitude pour tous les points essentiels de notre méthode. Nous avons vu comment on peut déterminer les vitesses & les directions relatives de tous les lits d'eau ; ces mouvemens relatifs deviennent des mouvemens absolus , en les rapportant aux eaux calmes , qui sont au dessous du fond du courant ; & nous avons supposé qu'on peut plonger les corps assez profondément pour atteindre la région des eaux calmes , ou du moins celle des eaux qu'on puisse censur telles sans aucune erreur sensible. Nous avons tellement appuyé cette supposition , dans notre première partie , qu'on n'aura , comme j'espère , aucune peine à l'admettre. J'ai dit enfin , qu'on reconnoitra d'avoir atteint cette région , lorsqu'on remarquera que l'inclinaison du cordeau ne varié plus ; mais c'étoit en supposant encore , que l'action des eaux contre le cordeau est nulle. On remarquera donc maintenant , que nous avons évalué cette action , que ce n'est pas l'angle $A F E$ qui doit demeurer invariable , mais l'angle corrigé $H B G$; le premier montrera des variations , quoiqu'à la vérité extrêmement petites , quand même le corps qu'on continue de descendre auroit atteint des eaux parfaitement calmes. Il faudra donc toujours corriger l'angle observé $A F E$, conformément au §. 33. ; & ce n'est qu'après cette correction , qu'on pourra juger si l'on aura atteint la région des eaux calmes , ou s'il faudra descendre davantage le corps pour y parvenir , en examinant si cet angle corrigé ne varie plus sensiblement , ou s'il varie encore , puisque c'est l'angle $H B G$ qui ne varie pas dans les eaux calmes.

X X X V I I.

On fera peut-être surpris de me voir examiner si scrupuleusement l'action des eaux contre le cordeau, sans que j'aie encore fait mention du dérangement causé par son propre poids. Je n'ai pas manqué d'examiner ce second point; mais le calcul m'ayant appris qu'il n'est presque d'aucune importance, j'ai cru pouvoir me dispenser d'en parler plutôt. Voici, à présent, ce qui en est. Si le cordeau AB est d'une pesanteur spécifique, plus grande que celle des eaux de la mer, l'inclinaison du cordeau en sera diminuée au point A , & augmentée au point B : nous considérerons ce changement à part, en faisant abstraction de l'impulsion des eaux contre le cordeau; il faudra après cela, supposer deux forces au point A , l'horizontale AE , & la verticale AL , de même qu'au point B la force horizontale BD , & la verticale BG , dont la première est égale à l'action des eaux contre le corps plongé, & la seconde, égale au poids que le corps a sous l'eau. Soit, à présent, le sinus de l'angle $HBG = \mu$, celui de l'angle $AFE = m$, le poids que le corps a sous l'eau = P ; on aura $BG = P$; $BD = \frac{\mu P}{\sqrt{1 - \mu\mu}}$. Or on démontre, dans la mécanique, que la force AE est égale à la force BD ; nous avons donc $AE = \frac{\mu P}{\sqrt{1 - \mu\mu}}$: Soit enfin, le poids que le cordeau a sous l'eau = π ; on démontre encore, dans la mécanique, que la force AL est = $P + \pi$; si nous faisons donc cette analogie $AE : AL :: m : \sqrt{1 - mm}$; nous aurons par-là, cette équation

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu\mu}} = \frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \times \frac{P + \pi}{P} \text{ qui détermine l'angle corri-}$$

gé HBG , quelque grande que soit la courbure causée par le poids du cordeau. Cette équation devient beau-

coup plus simple en supposant le cordeau sous l'eau presque droit, & la différence entre les angles $H B G$ & $A F E$, très-petites; supposition qu'on peut faire sans la moindre erreur sensible, comme nous verrons par un exemple: on trouve en ce cas l'angle $H B G$, moins l'angle $A F E$,

indiqué par $-\int \frac{ds}{R} = m \sqrt{1 - mm} \times \frac{\pi}{P}$. Voici à présent

un exemple conforme à notre théorie, qui nous confirmera dans la supposition, que nous avons faite, que cette correction sera ordinairement fort petite.

Exemple. Faisons les mêmes positions que nous avons faites dans l'exemple de la première note du §. 33, & supposons, outre cela, que la pesanteur spécifique du corps plongé, soit à celle de l'eau, comme 17 à 16; & celle du cordeau à celle de l'eau, comme 7 à 5; c'est la proportion que j'ai trouvée, à peu près, aux cordes de chanvre. Si donc le corps est plongé jusqu'à la profondeur de 100 pieds, & que l'angle d'inclinaison soit de 45 degrés, la longueur du cordeau sera d'environ 142 pieds, & nous aurons

$$\frac{\pi}{P} = \frac{142}{2} \times \frac{1}{(4 \cdot 12 \cdot 12)^2} \times \frac{2}{5} \times \frac{16}{1} = 0,00137 \text{ \& } m \sqrt{1 - mm}$$

$\times \frac{\pi}{P} = 0,00068$, ce qui ne fait qu'un angle d'environ

2 min. & un tiers. Cette correction est donc très-petite, quoiqu'elle ne soit jamais plus grande que pour un angle de 45 dégr. On pourroit plonger le corps jusqu'à la profondeur de 600 pieds, & l'angle de correction ne seroit encore que de 14'. Mais si l'expérience faisoit voir qu'on fût obligé de se servir de cordeaux beaucoup plus épais & plus forts que nous n'avons supposé, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons de marquer. Ayant égard à cette correction de deux minutes & un tiers, il faudra la retrancher de la première du §. 33, que nous avons trouvée pour les mêmes suppositions de 2 dé-

grés 19', & nous aurons pour correction entiere 2 degrés 16' $\frac{2}{3}$, & l'angle corrigé $H B G$, de 42 degrés 43' 20".

X X X V I I I.

Je ferai encore une petite réflexion sur la maniere de connoître les hauteurs verticales, depuis la surface de la mer, jusqu'au corps attaché au cordeau. Si on nomme l la longueur du cordeau mouillé, qu'il faut toujours observer, on voit d'abord que la profondeur verticale du corps plongé sera à peu près égale à $l \sqrt{1 - mm}$, puisque le cordeau fait presque une ligne droite, sous un angle d'inclinaison dont le cosinus est exprimé par $\sqrt{1 - mm}$. Il faut cependant remarquer que la vraie profondeur verticale sera le plus souvent un peu plus grande que $l \sqrt{1 - mm}$. J'ai trouvé par le moyen de notre équation générale du §. 31, dont j'ai fait l'analyse suivant toutes les règles d'approximation, en supposant d'abord $dy = m ds - d^2$, & en traitant d^2 de fort petite, par rap-

port à dy , j'ai trouvé, dis-je, $d^2 = \frac{m \sqrt{1 - mm} \cdot d \cdot dx \int \xi dx}{a d Z}$

ou bien $d^2 = \frac{m \sqrt{1 - mm} \cdot d \cdot \int \xi dx}{a d Z}$ & puis $x = s \sqrt{1 - mm} +$

$\frac{m m d \int dx \int \xi dx}{a d Z}$, & par conséquent, toute la profondeur

verticale $AC = l \sqrt{1 - mm} + \frac{m m d \int dx \int \xi dx}{a d Z}$

Dans cette correction, j'ai négligé la courbure qui résulte par le poids que le cordeau retient sous l'eau, comme étant beaucoup plus petite que celle qui provient de l'action des eaux contre le cordeau. Je n'étalerai pas ici tous les détours que j'ai pris pour arriver à cette correction, parce que je crois qu'on peut s'en passer dans l'exécution de nos méthodes, qui ne demandent pas une exacte détermination des profondeurs verticales du corps plongé.

plongé. J'éclaircirai pourtant l'application de notre formule par un exemple, afin qu'on voie jusqu'où peut aller la correction dont nous parlons.

Exemple. Soit l'inclinaison du cordeau de 45 degrés; la longueur du cordeau mouillé AB ou $l = 141\frac{1}{2}$ pieds; nous aurions sans la correction la profondeur verticale $AC = 100$ pieds : pour trouver la correction indi-

quée par $\frac{mm \delta f d x f \xi d x}{a d Z}$, il faut connoître les variations ξ

que j'ai fait voir ci-dessus pouvoir se déterminer à l'aide des observations précédentes. Soit $\xi = Z$; nous aurons $f \xi d x = Z x$ & $f d x f \xi d x = \frac{1}{2} Z x x$ pour un point quelconque d & $\xi = \frac{1}{2} Z AC^2$ pour le point C ; supposons après cela $\delta = \frac{1}{2}$ ligne, $d = a = 2$ pieds &

nous aurons la correction $\frac{mm \delta f d x f \xi d x}{a d Z} = \frac{1}{40} AC$, c'est-

à-dire que la hauteur verticale AC devient après la correction égale à 102 pieds 2 pouces, au lieu de 100 pieds qu'on trouve sans la correction : cette correction servira pour les foibles courans qu'on voudra observer pendant que le vaisseau fille à pleines voiles. Si le vaisseau est simplement emporté par le courant,

on pourra supposer $\xi = \frac{x x}{AC^2} \times Z$ & on aura $f d x f \xi d x = \frac{1}{12} \cdot \frac{x^4 Z}{AC^2}$ & en particulier, pour le point $C = \frac{1}{12} Z \times AC^2$, de sorte que la correction devient six fois plus petite que dans l'hypothèse précédente & qu'elle ne fera plus que de $4\frac{1}{3}$ pouces.

X X X I X.

Nous voyons, après toutes ces discussions & corrections, que la géométrie nous fournit de suffisans remèdes contre toutes les difficultés qui pourront se rencontrer ; ceux qui auront bien voulu approfondir nos méthodes,



seront certainement en état de déterminer, assez exactement, les courans, non seulement près de la surface de la mer, mais dans toute leur profondeur, quand même on voudroit supposer aux eaux un mouvement sensible jusqu'à la profondeur de 600 pieds. Mais quant à ceux qui ne trouveront pas toutes ces ressources en eux-mêmes, je leur conseillerois d'observer simplement les courans de dix en dix pieds de profondeur verticale, jusqu'à la profondeur de cent pieds, sans employer aucune correction, pour peu qu'ils hésitent sur la manière de la faire. Mais s'il arrivoit après cela, que l'inclinaison du cordeau eût encore des variations sensibles, depuis la profondeur de 90 pieds jusqu'à celle de cent pieds, je présume qu'une bonne induction, fondée sur toutes les observations réunies sous un même point de vue, suffira le plus souvent, pour juger de l'inclinaison que prendroit le cordeau s'il étoit plongé jusques dans les eaux parfaitement calmes. Au reste je prévois sans peine, que le dernier degré de perfection dépendra, pour la plus grande partie, d'une longue expérience & habitude, qu'on aura prises dans l'observation des courans, suivant les règles que nous en avons données. Si on avoit fait actuellement un certain nombre de ces fortes d'observations, quelqu'en eût été le résultat, j'en aurois pu tirer un très-grand fruit, & je me serois trouvé en état de parler avec assurance sur plusieurs points que je n'ai osé traiter qu'hypothétiquement & par des conjectures, quoique toujours appuyées par des connoissances physiques bien avérées.

X L.

Je finirai enfin ce long Mémoire par un essai de machine, par le moyen de laquelle on puisse observer les courans à telle profondeur qu'on voudra, sans tomber dans les inconvéniens que nous avons pris tant de soin à éviter & à corriger. On pourroit faire une lentille *PQR S*

(fig. 7) telle qu'on emploie pour les pendules ; d'un pied ou de deux pieds de diamètre. Je suppose cette figure , afin que le corps offre toujours le tranchant au mouvement relatif des eaux ; on chargera cette lentille , entre les deux plaques , avec du plomb fondu , par exemple , jusqu'à la hauteur du demi rayon BS , de manière qu'étant suspendue par les deux extrémités de l'axe qui passe par le centre B , & plongée sous l'eau , la ligne BS garde toujours sa situation verticale : il est clair que la lentille conservera cette position malgré le mouvement relatif des eaux , parce que les eaux agissent également sur la partie supérieure de la lentille , & sur sa partie inférieure. On fera en sorte que la lentille tourne librement sur son axe , entre deux pièces de métal , par lesquelles elle est suspendue & qui les réunissent ; la tête de cette double pièce de métal sera enfin attachée à un très-long cordeau ; le même axe de la lentille soutiendra , de la même façon , une boule G , d'un diamètre d'environ 3 pouces , & d'une pesanteur spécifique plus grande que l'eau ; cette boule G , sera mise dans la situation H , par l'action des eaux , sans que la position de la lentille en soit dérangée , & l'angle HBG montrera la vitesse relative des eaux & de la boule. On pourroit donc construire , au dedans de la lentille , quelques pièces d'horlogerie , qui au bout d'un certain temps , comme par exemple 4' , arrêtaient la boule dans sa position ; l'usage d'un tel instrument consisteroit à le plonger assez profondément pour être entièrement sûr qu'il ait atteint la région des eaux calmes ; mais il faudroit que cela se fit en moins de 4' , & à le retirer après les 4' écoulées , pour pouvoir observer l'angle HBG : par cette observation on sçaura la vraie vitesse absolue du vaisseau. Quant à la direction du mouvement absolu du vaisseau , on peut supposer qu'elle est la même que celle du plan vertical qui passe par le cordeau. Si cependant cette supposition faisoit de la peine , il faudroit recourir à une aiguille aimantée , ajoutée à l'instrument

dont je viens de faire une légère ébauche, & qui fût affermie, dans sa position, au même instant que la boule est arrêtée.

Si j'ai fait mention d'une telle machine, ce n'est pas que je la croie assez parfaite pour en faire usage ; toute mon intention n'a été que d'indiquer les principes qu'il faudroit observer dans la construction d'un semblable machine.

F I N.

RECHERCHES

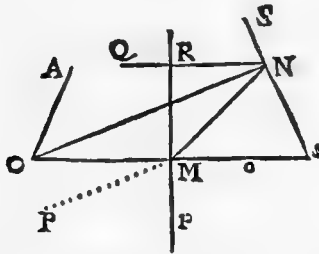
S U R

LES INÉGALITÉS

DE JUPITER ET DE SATURNE.

PAR M. LEONARD EULER,

*De l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celles de
Londres, de Petersbourg, de Berlin, &c.*



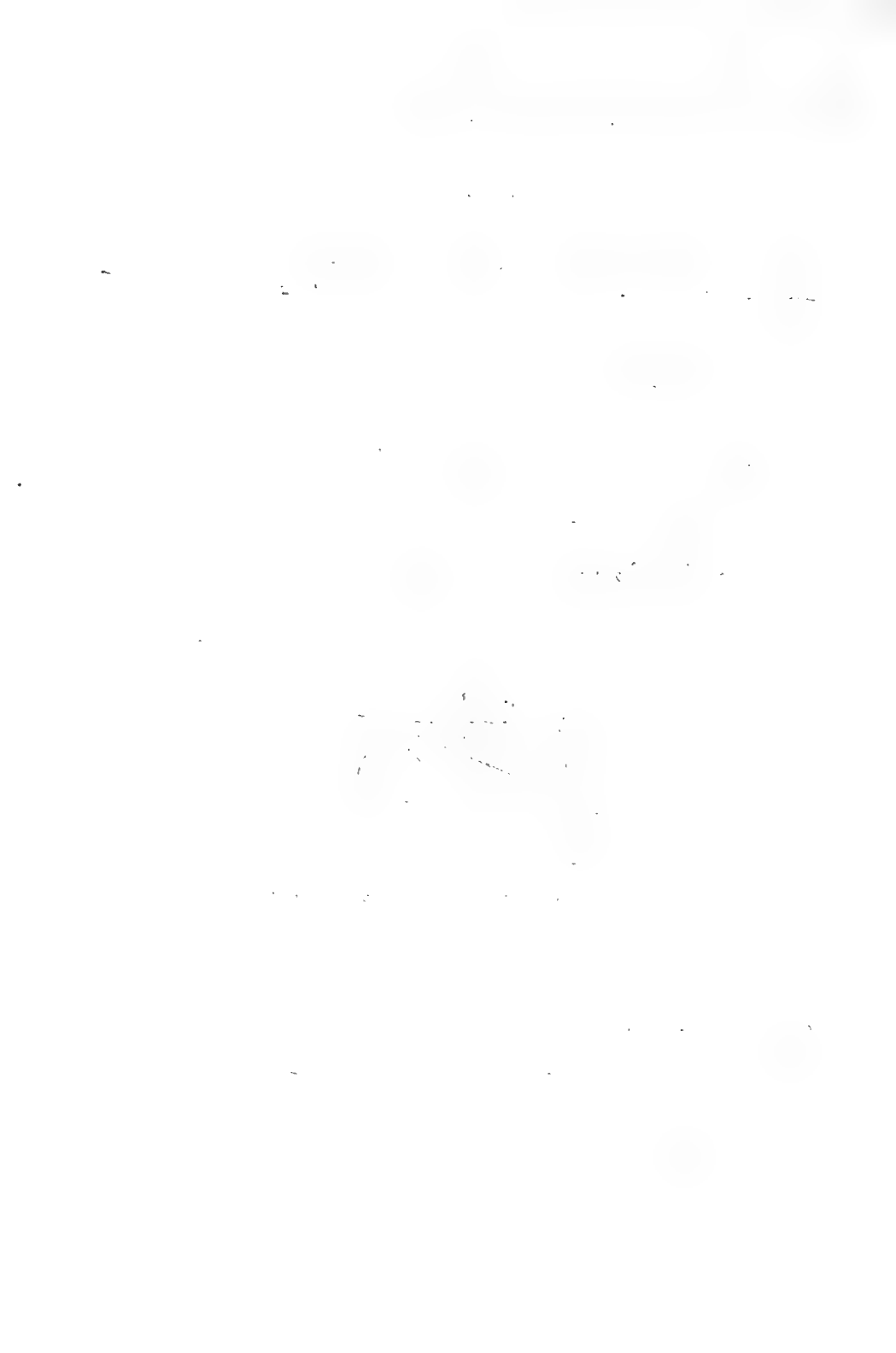
Cette Figure se rapporte à la page 6 de ce Mémoire.

A P A R I S,

Chez PANCKOUCKE, rue & à côté de la Comédie Française.

M. D C C. L X I X.

Avec Approbation & Privilège du Roi.



RECHERCHES

SUR

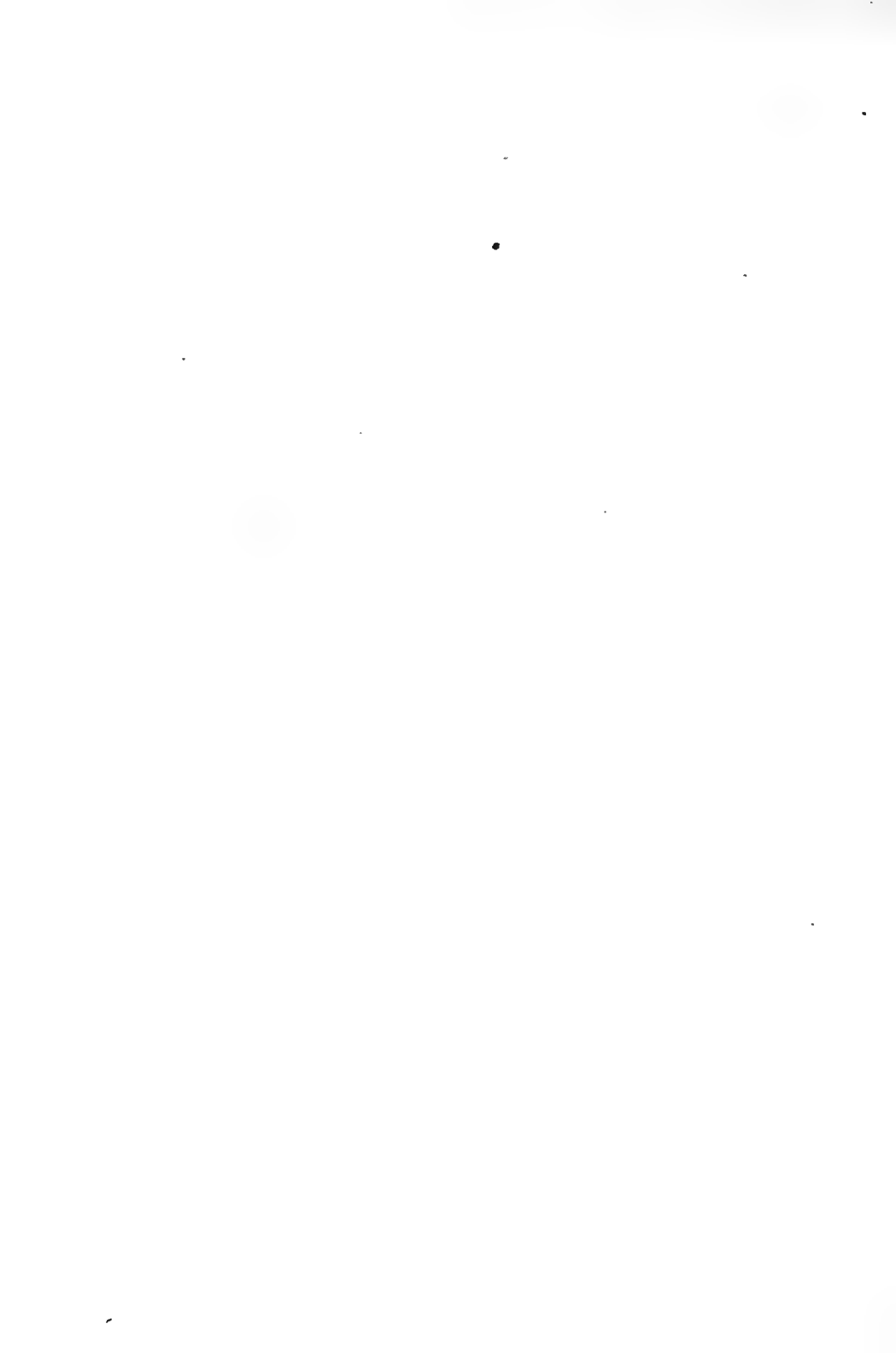
LES IRRÉGULARITÉS

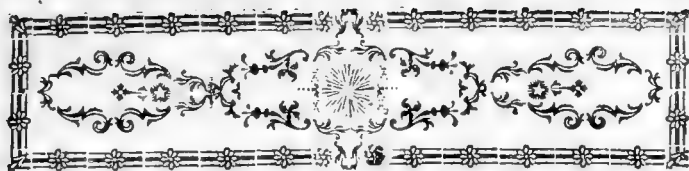
DU MOUVEMENT

DE JUPITER ET DE SATURNE.

Pièce qui a remporté le Prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1752.

Par M. LEONARD EULER, Associé Etranger de l'Académie Royale des Sciences, & Membre de celles de Petersbourg, de Berlin, de Londres, &c.





RECHERCHES

SUR LES IRRÉGULARITÉS

DU MOUVEMENT

DE JUPITER ET DE SATURNE.

*Nihil est enim , quod aut natura extremum invenerit , aut
doctrina primum. Ad HERENN. Lib. III.*

§. I.

*Sur la cause des irrégularités du mouvement
de Jupiter & de Saturne.*

LES observations astronomiques nous ont fait connoître que les Planètes de Jupiter & de Saturne ne suivent pas exactement , dans leur mouvement , les règles établies par Kepler , & que le dernier principalement s'en écarte très-sensiblement , surtout lorsque ces deux Planètes se trouvent près de leur conjonction. C'est donc aux observations que nous devons cette connoissance , mais c'est aussi tout ce que

nous en pouvons attendre ; car il y a bien de l'apparence que quelque soin que les Astronomes apportent à bien observer ces dérangemens , ils ne parviendront jamais à une connoissance suffisante de l'ordre qui règne sans doute dans ces irrégularités , pour pouvoir prédire en tout tems combien ces Planètes s'écarteront , dans leur mouvement , des règles de Kepler. Il n'y a donc que la Théorie qui puisse nous servir de guide dans cette recherche ; & c'est de-là uniquement qu'il faut tâcher de tirer les règles que ces deux Planètes observent dans leur mouvement , quelque irrégulier qu'il puisse paroître. Il faut donc commencer par bien déterminer la cause dont ces dérangemens sont l'effet ; ou , ce qui revient au même , il faut connoître les forces qui produisent dans le mouvement de ces Planètes les inégalités dont il est question.

Or la Théorie de Newton , en tant qu'elle établit l'attraction universelle des corps célestes , nous découvre d'abord les forces qui doivent troubler le mouvement de Jupiter & de Saturne ; puisque ces deux Planètes , qui surpassent les autres plusieurs fois en grosseur , ne sauroient manquer d'agir assez sensiblement l'une sur l'autre , sur tout lorsqu'elles ne sont pas fort éloignées de leur conjonction. Il n'y a donc pas le moindre doute que l'attraction mutuelle de ces deux Planètes ne soit la véritable cause des irrégularités qu'on observe dans leur mouvement : il s'agit seulement de savoir si cette force attractive suit exactement la proportion renversée des quarrés des distances , comme Newton avoit supposé , ou non.

En effet , si cette proportion répondoit si mal au mouvement de l'apogée de la Lune , comme on a eu lieu de croire jusqu'ici , on seroit bien autorisé à douter que la même proportion subsiste dans les forces , dont les autres Planètes agissent les unes sur les autres. Mais depuis que M. Clairaut a fait cette importante

importante découverte, que le mouvement de l'apogée de la Lune est parfaitement d'accord avec l'hypothèse Newtonienne sur la loi d'attraction, il ne reste plus le moindre doute sur la généralité de cette proportion; & puisque cette même proportion convient si exactement au mouvement de la Lune, malgré toutes les objections qu'on a cru être bien fondé à faire, on pourra maintenant soutenir hardiment que les deux Planètes de Jupiter & de Saturne s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés de leur distance; & que toutes les irrégularités qui se peuvent découvrir dans leur mouvement sont infailliblement causées par cette action mutuelle. Voilà donc déjà la véritable cause de tous ces dérangemens de quelque nature qu'ils puissent être; & si les calculs qu'on prétend avoir tirés de cette Théorie ne se trouvent pas assez bien d'accord avec les observations, on sera toujours en droit de douter plutôt de la justesse des calculs, que de la vérité de la Théorie. Car quoique la Théorie nous conduise aisément à des équations qui renferment le mouvement des Planètes, de quelques forces qu'elles soient sollicitées, pour peu qu'on ait manié ces équations, on tombera aisément d'accord que leur résolution est assujettie à de très grandes difficultés; & quelques précautions qu'on ait prises dans ce travail, on ne sauroit parvenir qu'à des approximations, par le moyen desquelles on ne pourra pas assurer si le résultat ne s'écarte pas beaucoup plus de la vérité qu'on ne pense.

Dans ces circonstances embarrassantes, il n'est pas surprenant que l'Académie Royale des Sciences n'ait pas été entièrement contente de la pièce qu'elle avoit couronnée du prix sur cette même matière, il y a quatre ans; car quoique les calculs qu'elle renferme soient tirés de cette Théorie avec bien de la peine, & que

la plupart des irrégularités que ces calculs ont fournies, se trouvent confirmées par les observations, il s'en faut cependant beaucoup que l'auteur ait épuisé cette importante matière. Car la méthode dont il s'est servi pour arriver à ses approximations, outre qu'elle conduit à des calculs extrêmement ennuyans, demeure toujours fort assujettie à des doutes sur la suffisance de ses résultats; vu que le nombre de toutes les inégalités étant actuellement infini, celles que l'Auteur a développées dépendent aussi, suivant la méthode qu'il a employée, des autres qu'il a négligées; ce qui en rend les valeurs incomplètes. Je tâcherai donc de remédier à cet inconvénient, en me servant d'une méthode qui me paroît tout-à-fait nouvelle, & qui ne mêle pas si fort ensemble les diverses inégalités qu'elle fait découvrir. Cependant je crois que je me pourrai dispenser de la recherche des inégalités qui se rencontrent dans la ligne des nœuds, & dans l'inclinaison mutuelle des orbites de ces deux Planètes, puisqu'il me semble que la pièce mentionnée a parfaitement bien développé cette partie de la question.

§. II.

Réduction de la Question à l'Analyse pure.

QUE les deux Planètes en Question se meuvent donc avec le Soleil dans le même plan; & soit le centre du Soleil en O , de Jupiter en M , & de Saturne en N . Nommons la masse du Soleil = \odot , celle de Jupiter = ζ , & le Saturne = ♄ , & ayant tiré les droites OM , ON & MN ; les forces, dont ces trois corps agissent entr'eux, seront telles :

I. Le Soleil O est follicité par les forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{felon } OM = \frac{\mathcal{Z}}{OM^2} \\ \text{felon } ON = \frac{\mathcal{B}}{ON^2} \end{array} \right.$

II. Jupiter M est follicité par les forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{felon } MO = \frac{\odot}{OM^2} \\ \text{felon } MN = \frac{\mathcal{B}}{MN^2} \end{array} \right.$

III. Saturne N est follicité par les forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{felon } NO = \frac{\odot}{ON^2} \\ \text{felon } MN = \frac{\mathcal{Z}}{MN^2} \end{array} \right.$

Or puisqu'il faut déterminer le mouvement des deux Planètes, comme il paroîtroit à un spectateur placé au centre du Soleil, on doit transporter les forces, qui agissent sur le Soleil, en sens contraire sur les Planètes mêmes. Donc pour pouvoir regarder le Soleil comme demeurant en repos, si nous menons les droits MP , NQ , parallèles à NO , MO , il est clair, que

Jupiter en M fera follicité par les forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{felon } MO = \frac{\odot + \mathcal{Z}}{OM^2} \\ \text{felon } MN = \frac{\mathcal{B}}{MN^2} \\ \text{felon } MP = \frac{\mathcal{B}}{ON^2} \end{array} \right.$

Saturne en N fera follicité par les forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{felon } NO = \frac{\odot + \mathcal{B}}{ON^2} \\ \text{felon } NM = \frac{\mathcal{Z}}{MN^2} \\ \text{felon } NQ = \frac{\mathcal{Z}}{OM^2} \end{array} \right.$

Maintenant il faut décomposer ces forces suivant deux directions, dont les unes soient dirigées vers le Soleil,

& les autres y soient perpendiculaires. Pour cet effet ayant tiré les droites, RM_r & SN_s , perpendiculaires à MO & NO , & prolongé OM en o .

Pour Jupiter.

$$\text{La force } \frac{\bar{h}}{MN^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la direction } Mo = \frac{\bar{h}}{MN^2} \text{ cof. } NMo. \\ \text{pour la direction } MR = \frac{\bar{h}}{MN^2} \text{ fin. } NMo. \end{array} \right.$$

selon MN donnera

$$\text{La force } \frac{\bar{h}}{ON^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la direction } MO = \frac{\bar{h}}{ON^2} \text{ cof. } MON. \\ \text{pour la direction } Mr = \frac{\bar{h}}{ON^2} \text{ fin. } MON. \end{array} \right.$$

selon MP donnera

Pour Saturne.

$$\text{La force } \frac{\mathcal{T}}{MN^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la direction } NO = \frac{\mathcal{T}}{MN^2} \text{ cof. } MNO. \\ \text{pour la direction } Ns = \frac{\mathcal{T}}{MN^2} \text{ fin. } MNO. \end{array} \right.$$

selon NM donnera

$$\text{La force } \frac{\mathcal{T}}{OM^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour la direction } NO = \frac{\mathcal{T}}{OM^2} \text{ cof. } MON. \\ \text{pour la direction } NS = \frac{\mathcal{T}}{OM^2} \text{ fin. } MON. \end{array} \right.$$

selon NQ donnera

De-là nous obtiendrons les forces suivantes, dont l'une & l'autre Planète fera sollicitée,

Premièrement Jupiter fera sollicité.

$$\text{Suivant } MO \text{ par la force} = \frac{\odot + \mathcal{T}}{OM^2} + \frac{\bar{h}}{ON^2} \text{ cof. } MON - \frac{\bar{h}}{MN^2} \text{ cof. } NMo;$$

$$\text{Suivant } MR \text{ par la force} = -\frac{\bar{h}}{ON^2} \text{ fin. } MON + \frac{\bar{h}}{MN^2} \text{ fin. } NMo.$$

Ensuite Saturne fera sollicité

$$\text{Suivant } NO \text{ par la force} = \frac{\odot + \bar{h}}{ON^2} + \frac{\mathcal{T}}{OM^2} \text{ cof. } MON + \frac{\mathcal{T}}{MN^2} \text{ cof. } MNO,$$

$$\text{Suivant } NS \text{ par la force} = +\frac{\mathcal{T}}{OM^2} \text{ fin. } MON - \frac{\mathcal{T}}{MN^2} \text{ fin. } MNO.$$

Cela

Cela posé, nommons les distances $OM = x$, $ON = y$, & l'angle $MON = \omega$, & on aura $MN = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. \omega)} = z$. De plus pour les autres angles on aura :

$$\sin. NMo = \frac{y \sin. \omega}{z} \quad \cos. MNo = \frac{y \cos. \omega - x}{z}$$

$$\sin MNO = \frac{x \sin. \omega}{z} \quad \cos. MNO = \frac{y - x \cos. \omega}{z}$$

Donc en introduisant ces valeurs, les forces qui agissent sur Jupiter seront :

$$\text{celle qui agit selon } MO = \frac{\odot + \mathcal{T}}{xx} + \frac{\mathcal{H} \cos. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{H} (y \cos. \omega - x)}{z^2}$$

$$\text{celle qui agit selon } MR = -\frac{\mathcal{H} \sin. \omega}{yy} + \frac{\mathcal{H} y \sin. \omega}{z^2}$$

Or les forces qui agissent sur Saturne seront

$$\text{celle qui agit selon } NO = \frac{\odot + \mathcal{H}}{yy} + \frac{\mathcal{T} \cos. \omega}{xx} + \frac{\mathcal{T} (y - x \cos. \omega)}{z^2}$$

$$\text{celle qui agit selon } NS = +\frac{\mathcal{T} \sin. \omega}{xx} - \frac{\mathcal{T} x \sin. \omega}{z^2}$$

Qu'on choisisse à présent à volonté une direction fixe OA , pour en conter la longitude des Planètes & qu'on nomme,

La longitude de Jupiter $AOM = \eta$, celle de Saturne $AON = \theta$, de sorte qu'on ait $\eta - \theta = \omega$: & posant dt , pour marquer l'élément du tems qui soit pris constant, les principes de Mécanique nous fourniront les équations suivantes.

Pour Jupiter.

$$2 dx d\eta + x dd\eta = -\frac{1}{2} dt^2 \left(\frac{-\mathcal{H} \sin. \omega}{yy} + \frac{\mathcal{H} y \sin. \omega}{z^2} \right)$$

$$d dx - x d\eta^2 = -\frac{1}{2} dt^2 \left(\frac{\odot + \mathcal{T}}{xx} + \frac{\mathcal{H} \cos. \omega}{yy} - \frac{\mathcal{H} (y \cos. \omega - x)}{z^2} \right)$$

Prix de 1752.

C

Pour Saturne.

$$2 dy d\theta + y d d\theta = -\frac{1}{2} dt^2 \left(+ \frac{\mathcal{W} \sin. \omega}{xx} - \frac{\mathcal{W} x \sin. \omega}{z^3} \right)$$

$$d dy - y d\theta^2 = -\frac{1}{2} dt^2 \left(\frac{\odot + \mathfrak{h}}{yy} + \frac{\mathcal{W} \cos. \omega}{xx} + \frac{\mathcal{W} (y - x \cos. \omega)}{z^3} \right)$$

Pour chasser du calcul l'élément du tems dt , on n'a qu'à introduire à sa place le mouvement moyen des Planètes qu'elles suivroient si elles décrioient des cercles autour du Soleil en même tems périodique. Soit donc la distance moyenne de Jupiter au Soleil = a & sa longitude moyenne = p , la distance moyenne de Saturne au Soleil = b & sa longitude moyenne = q . Supposons que ce mouvement moyen soit produit par la seule force du Soleil, ou bien concevons deux corps qui décrivent autour du Soleil des cercles dont les tems périodiques soient égaux à ceux de Jupiter & de Saturne, de sorte que les longitudes de ces corps marquent à chaque tems les longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne: & il est clair que nos formules donneront le mouvement de ces deux corps, en supposant $\mathcal{W} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$, $x = 0$, $y = b$, $\eta = p$ & $\theta = q$, d'où nous obtiendrons $a dp^2 = \frac{1}{2} dt^2 \cdot \frac{\odot}{aa}$ & $b dq^2 = \frac{1}{2} dt^2 \cdot \frac{\odot}{bb}$ ou bien $\frac{1}{2} \odot dt^2 = a^2 dp^2 = b^2 dq^2$. Introduisons donc au lieu de dt , les élémens dp & dq , qui seront également constans; & posons, pour abrégier $\frac{\mathcal{W}}{\odot} = \mu$ & $\frac{\mathfrak{h}}{\odot} = \nu$, dont les valeurs sont connues par les révolutions des Satellites, d'où l'on conclut $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$; & nous aurons

Pour Jupiter ces deux équations,

$$2 dx d\eta + x d d\eta = -v a^3 dp^2 \sin. \omega \left(\frac{1}{yy} + \frac{y}{r^3} \right)$$

$$d dx - x dy^2 = -a^3 dp^2 \left(\frac{1+\mu}{xx} + \frac{v \cos. \omega}{yy} + \frac{v(x-y \cos. \omega)}{r^3} \right)$$

& pour Saturne celle-ci:

$$2 dy d\theta + y d d\theta = -\mu b^3 dq^2 \sin. \omega \left(\frac{1}{xx} - \frac{x}{r^3} \right)$$

$$d dy - y d\theta^2 = -b^3 dq^2 \left(\frac{1+v}{yy} + \frac{\mu \cos. \omega}{xx} + \frac{\mu(y-x \cos. \omega)}{r^3} \right)$$

Or, puisque le mouvement moyen des deux Planètes est connu, le rapport entre dp & dq le sera également; car puisque à l'égard des étoiles fixes selon le mouvement moyen:

Jupiter avance en 5 ans de 5^s, 10, 43', 40".

& Saturne — — — de 2, 1, 4, 51.

nous en aurons $\frac{dp}{dq} = \frac{546220}{215891} = 2, 48405$ ou $\frac{dq}{dp} = 0, 4025686$

& puisque $a^3 dp^3 = b^3 dq^2$, il s'ensuit $\frac{b}{a} = 1, 834172$ ou $\frac{a}{b} = 0, 545205$

En voici donc les valeurs absolues, sur lesquelles on doit fonder le calcul suivant. Or pour déterminer aussi les constantes, que ces quatre équations différentielles renferment, lesquelles font au nombre de huit, il faut avoir égard aux conditions suivantes.

Premièrement, puisque p & q marquent les longitudes moyennes, si nous posons $\eta = p + P$ & $\theta = q + Q$, il faut que les quantités P & Q ne renferment ni des quantités constantes, ni des termes de la forme αp & bq , parceque alors p & q ne seroient plus

les longitudes moyennes. Donc P & Q ne contiendront que des sinus ou cosinus de certains angles, qui contribueront autant à augmenter qu'à diminuer les longitudes moyennes. Cette condition déterminera déjà quatre constantes.

Ensuite la quantité de l'une & de l'autre excentricité, qui doit être conclue par les observations, servira aussi à déterminer deux constantes renfermées dans nos équations.

Enfin comme l'excentricité entraîne avec elle l'anomalie qui se pourroit compter depuis un point quelconque de l'orbite excentrique, l'usage & la commodité du calcul exigent qu'on la compte depuis l'aphélie; desorte que l'anomalie s'évanouisse lorsque la Planète se trouve dans son aphélie. Cette considération déterminera les deux dernières constantes.

Tout le travail se réduit donc à résoudre les quatre équations différentielles que les principes mécaniques ont fournies.

§. III.

Méthode de résoudre les équations trouvées.

JE dois d'abord remarquer qu'on ne gagneroit rien quelque peine qu'on voulût se donner, pour intégrer ces équations. Car d'un côté je doute fort qu'on trouve jamais de moyen d'y parvenir; & d'un autre côté, quand même on seroit si heureux d'en tirer des équations intégrales, comme-elles seroient extrêmement compliquées, elles ne pourroient apporter presque aucun avantage pour l'usage de l'astronomie; & on seroit néanmoins

néanmoins obligé d'en déduire des approximations propres à ce dessein. Or quand il s'agit des approximations, il sera aussi aisé de les tirer immédiatement des équations *differentio-différentielles*.

Il est toujours convenable de commencer par les premières équations

$$2 \, dx \, dn + x \, ddn = -\nu a^3 \, dp^2 \, \sin. \omega \left(\frac{-1}{yy} + \frac{y}{z^3} \right)$$

$$2 \, dy \, d\theta + y \, dd\theta = -\mu b^3 \, dq^2 \, \sin. \omega \left(\frac{-1}{xx} - \frac{x}{z^3} \right)$$

dont les premiers membres deviennent intégrables étant multipliés par x & y , d'où l'on tire à cause de $b^3 \, dq^2 = a^3 \, dp^2$;

$$x \, x \, dn = C \, dp + \nu a^3 \, dp \int \frac{x \, dp \, \sin. \omega}{yy} - \nu a^3 \, dp \int \frac{xy \, dp \, \sin. \omega}{z^3}$$

$$y \, y \, d\theta = D \, dp - \mu a^3 \, dp \int \frac{y \, dp \, \sin. \omega}{xx} + \mu a^3 \, dp \int \frac{xy \, dp \, \sin. \omega}{z^3}$$

Donc, si nous posons pour abrégé

$$X = \int \frac{x \, dp \, \sin. \omega}{yy}; \quad Y = \int \frac{y \, dp \, \sin. \omega}{xx}; \quad Z = \int \frac{xy \, dp \, \sin. \omega}{z^3}$$

nous aurons :

$$dn = \frac{dp}{xx} (C + \nu a^3 (X - Z)) \quad \& \quad d\theta = \frac{dp}{yy} (D - \mu a^3 (Y - Z))$$

Or, rien n'empêche que nous ne mettions, pour abrégé, l'unité à la place de a , de sorte que l'unité exprime le rayon du cercle, ou le demi-grand axe de l'orbite d'une Planète, qui étant uniquement attirée par le Soleil, acheveroit ses révolutions en même tems que Jupiter; ensuite pour les constantes C & D , mettons les lettres f & g , pour avoir

Prix de 1752.

D

$$d\eta = \frac{dp}{xx} (f + v(X - Z)) \text{ \& } d\theta = \frac{dF}{yy} (g - \mu(Y - X))$$

\& partant à cause de $\eta - \theta = \omega$ on aura

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{v}{xx} (X - Z) + \frac{\mu}{yy} (Y - Z)$$

Or, les deux autres équations, en substituant pour $d\eta$ \& $d\theta$ les valeurs trouvées, \& en les délivrant de la considération que l'élément dp est supposé constant, prendront les formes suivantes :

$$\frac{1}{dp} \frac{dx}{dp} = \frac{1}{x} (f + v(X - Z))^2 - \frac{(1 + \mu)}{xx} - \frac{v \cos \omega}{yy} - \frac{v(x - y \cos \omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{dp} \frac{dy}{dp} = \frac{1}{y} (g - \mu(Y - Z))^2 - \frac{(1 + v)}{yy} - \frac{\mu \cos \omega}{xx} - \frac{\mu(y - x \cos \omega)}{z^3}$$

Maintenant tout le succès qu'on peut se promettre des opérations suivantes, dépend presque uniquement de la nature des variables qu'on introduit à la place de x \& y . Car puisqu'on doit tâcher de ramener toutes les expressions à des angles qui en expriment le plus commodément la variabilité, on voit d'abord que la variabilité des distances x \& y dépendra non-seulement de l'angle ω , mais aussi des anomalies de l'une \& de l'autre Planète, lorsque leurs orbites sont excentriques. Or l'anomalie d'une Planète étant un angle, qui dépend de sa distance à son aphélie, on a trois sortes d'anomalies qu'on pourroit introduire dans le calcul ; l'anomalie moyenne, l'excentrique \& la vraie. En introduisant l'anomalie moyenne, on auroit la commodité que sa différentielle eût une raison constante à dp , mais le rapport de sa différentielle à $d\omega$ qu'on aura par tout dans la poursuite du calcul, deviendrait trop compliqué, ce qui rendroit le calcul

presque impraticable. Et si l'on vouloit introduire ou l'anomalie excentrique ou la vraie, quoique les expressions pour les distances devinssent plus simples dans le cas de Kepler, cependant le défaut d'aucun rapport réglé entre leurs différentielles & $d\omega$ rendroit encore le calcul presque impraticable, & chaque différentiation ou intégration exigeroit des opérations extrêmement embarrassantes.

Ayant bien pesé ces difficultés, il m'est venu dans l'esprit, si l'on ne pourroit pas imaginer une nouvelle espèce d'anomalie, dont la différentielle eût un rapport constant à la différentielle $d\omega$; puisqu'il est évident qu'alors toutes les différentiations & intégrations se pourroient exécuter sans aucune difficulté. Cette idée me parut d'abord de la dernière importance, & je ne trouve rien qui puisse s'opposer à l'introduction d'une telle anomalie; car bien qu'une telle anomalie ne soit plus si facile à trouver, puisqu'elle dépend de l'angle ω , qui n'est pas encore connu, lorsqu'on veut déterminer, pour quelque tems proposé, les lieux de Jupiter & de Saturne, cette difficulté n'est pourtant d'aucune conséquence dans le calcul analytique dont il s'agit ici; & pour le calcul astronomique, on ne manquera point de trouver moyen de le dresser sur cette nouvelle espèce d'anomalie. J'introduirai donc dans la suite les lettres r & s pour marquer cette anomalie de Jupiter & de Saturne, que je déterminerai, en sorte que posant leurs différentielles $dr = \kappa d\omega$ & $ds = \lambda d\omega$, les quantités κ & λ deviennent constantes. Pour cet effet il faut éliminer du calcul l'élément dp , qui n'a point un rapport constant à $d\omega$.

Je pose donc $dp = \iota d\omega$, & $dq = n \iota d\omega$, où ι sera une quantité variable, & n un nombre constant, dont

la valeur fera $\frac{d a}{a p} = n = 0, 4025686$, de forte que $n = \frac{a \mathcal{V} a}{b \mathcal{V} b} = \frac{1}{b \mathcal{V} t}$ à cause de $a = 1$, d'où l'on tire $b = 1, 83417$. Cela posé on aura :

$$X = \int \frac{t x d \omega \sin. \omega}{y y}; \quad Y = \int \frac{t y d \omega \sin. \omega}{x x}; \quad Z = \int \frac{t x y d \omega \sin. \omega}{z^3}$$

$$d \eta = \frac{t d \omega}{x x} (f + \nu (X - Z)), \quad d \theta = \frac{t d \omega}{y y} (g - \mu (Y - Z))$$

$$\frac{1}{t} = \frac{f}{x x} - \frac{g}{y y} + \frac{\nu}{x x} (X - Z) + \frac{\mu}{y y} (Y - Z) \quad \&$$

$$\frac{1}{t d \omega} d \frac{d x}{t d \omega} = \frac{1}{x} (f + \nu (X - Z))^2 - \frac{(1 + \mu)}{x \nu} - \frac{\nu \cos. \omega}{y y} - \frac{\nu (x - y \cos. \omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{t d \omega} d \frac{d y}{t d \omega} = \frac{1}{y} (g + \mu (Y - Z))^2 - \frac{(1 + \nu)}{y \mu} - \frac{\mu \cos. \omega}{x x} - \frac{\mu (y - x \cos. \omega)}{z^3}$$

où l'on peut maintenant supposer à volonté l'élément $d \omega$ constant.

Il faudra donc commencer à substituer pour x & y des formules indéterminées qui renferment les angles ω , r & s ; & de-là on fera en état d'assigner les valeurs des lettres X , Y , Z & t , pour les introduire ensuite dans les deux équations *differentio-différentielles*.

Mais puisque l'invention de t suppose qu'on sache déjà les valeurs de X , Y & Z , & que ces lettres renferment réciproquement la valeur de t , on remédiera à cet inconvénient en posant

$x = t u$, $\eta = t v$, & $z = t w$, ou bien $w = \sqrt{u u + \nu \nu - 2 u \nu \cos. \omega}$; de-là ayant pris pour u & v des expressions indéterminées convenables, on aura, sans qu'on ait besoin de savoir la valeur de t ,

$$X = \int \frac{u d \omega \sin. \omega}{v v}; \quad Y = \int \frac{v d \omega \sin. \omega}{u u}; \quad Z = \int \frac{u v d \omega \sin. \omega}{w^3}$$

&

& ayant trouvé ces expressions, on aura tout de suite

$$t = \frac{f}{uu} - \frac{g}{vv} + \frac{v(X-Z)}{uu} + \frac{\mu(Y-Z)}{vv}$$

Pour le mouvement moyen de l'une & de l'autre Planète on aura

$$dp = t d\omega \quad \& \quad dq = n t d\omega$$

& pour le mouvement vrai,

$$d\eta = \frac{d\omega}{tuu} (f + v(X-Z)); \quad d\theta = \frac{d\omega}{tvv} (g - \mu(Y-Z))$$

Enfin, ayant formé les expressions $x = tu$ & $y = tv$, les équations *differentio*-différentielles à résoudre seront,

$$\frac{x}{d\omega} d \frac{dz}{td\omega} + \frac{1+\mu}{v} - \frac{1}{tuu} (f + v(X-Z))^2 + \frac{vu \cos.\omega}{vv} + \frac{v(uu - uv \cos.\omega)}{w^3} = 0$$

$$\frac{y}{d\omega} d \frac{dy}{td\omega} + \frac{1+v}{v} - \frac{1}{tvv} (g - \mu(Y-Z))^2 + \frac{\mu v \cos.\omega}{uu} + \frac{\mu(vv - uv \cos.\omega)}{w^3} = 0$$

d'où l'on déterminera tous les coefficients indéterminés, qui se trouveront dans les formules supposées pour u & v .

Voilà donc le plan de l'analyse, que je me propose d'exécuter, & qui me procurera, à ce que j'espère, tous les avantages que l'Académie Royale des Sciences peut avoir en vue en proposant cette question pour la seconde fois. On voit d'abord que cette méthode est préférable à quantité d'autres qui se pourroient présenter, parce qu'elle fournit à la fois & conjointement

Prix de 1752.

E

les inégalités tant de Jupiter que de Saturne ; car on verra que ces inégalités sont tellement liées ensemble, qu'il est impossible de les bien déterminer séparément. Cette méthode nous découvrira aussi d'abord toute les inégalités qui peuvent être de quelque conséquence ; car quoique le nombre de toutes les inégalités soit effectivement infini, il est pourtant certain, que le nombre de celles, dont l'effet est encore sensible, ne sauroit être trop grand. Il y a une grande ressemblance entre cette question & la recherche des inégalités de la Lune ; & quelque difficile que soit celle-ci, il est certain qu'à quelques égards la question présente est assujettie encore à de plus grandes difficultés, qui proviennent du terme irrationnel $\sqrt{7}$ ou $\sqrt{11}$. Donc si la méthode que je viens d'indiquer, est capable de vaincre tous ces obstacles, on la pourra aussi employer avec tout le succès possible dans la recherche des inégalités de la Lune. De plus, si Jupiter & Saturne agissent l'un sur l'autre, il est incontestable que la terre doit aussi sentir leur action ; & cette recherche seroit sans doute de la dernière importance.

§. IV.

Recherche des inégalités de Jupiter & Saturne, qui dépendent uniquement de leur distance.

TOUTES les inégalités de ces deux Planètes, de quelque nature qu'elles soient, dépendent nécessairement de ces trois éléments :

- I. De leur distance apparente vue du Soleil ou de l'angle ω .
- II. De l'excentricité de l'orbite de Jupiter.
- III. De l'excentricité de l'orbite de Saturne.

Donc, pour ne pas trop embrouiller le calcul, je ne chercherai d'abord que les inégalités qui dépendent uniquement du premier élément ou de l'angle ω . Cette recherche seroit donc suffisante pour résoudre parfaitement la question proposée, si les deux orbites étoient destituées de toute excentricité; puisqu'il est certain que dans ce cas le mouvement de ces deux Planètes ne sauroit être troublé par d'autres inégalités, supposé que leurs orbites soient situées dans le même plan.

Or, quand je conçois que les deux orbites n'aient point d'excentricité, il ne faut pas s'imaginer qu'elles seroient circulaires, si l'action mutuelle des Planètes s'évanouissoit; cette idée seroit contraire à l'hypothèse que j'ai en vue. Car si les deux Planètes n'agissoient pas l'une sur l'autre, & qu'elles eussent reçu d'abord un tel mouvement, qu'elles décriroient des cercles autour du Soleil, il est certain que si elles commençoient subitement à s'attirer mutuellement, l'une & l'autre orbite en deviendroit excentrique, outre les autres inégalités dont leur mouvement seroit dérangé. Ainsi, quand je dis que les deux orbites ne sont pas excentriques, il le faut entendre de l'état actuel où les Planètes se trouvent effectivement en s'attirant l'une l'autre; & non pas de l'état où elles se trouveroient, si cette action mutuelle s'évanouissoit.

Or quoique les orbites ne fussent pas excentriques, dans le sens que je viens d'établir, les distances x & y ne seroient pas pourtant constantes, elles renfer-

meroient des parties qui dépendent de l'angle ω ; & puisque ces parties variables s'évanouiroient tout-à-fait, si l'on avoit $\mu = 0$ & $\nu = 0$, il est clair que ces parties seront fort petites à cause de la petitesse de ces lettres μ & ν dont elles seront affectées. Donc, puisque ces termes seront si petits, il sera permis de négliger leurs produits par quelqu'une de ces lettres. Posant donc $u = c + U$ & $v = e + V$, les lettres U & V contiendront les petites parties variables dont je viens de parler, & je négligerai dans le calcul les termes où se trouveroient ces lettres multipliées par μ ou ν .

Donc, puisque les valeurs des quantités X , Y & Z , ne se rencontrent dans le calcul qu'avec des coefficients μ ou ν , je pourrai me dispenser de faire entrer les lettres U & V dans la détermination des quantités X , Y & Z . Posant donc $u = c$ & $v = e$, j'aurai

$$w = \sqrt{(cc + ee - 2ce \cos \omega)}; X = \int \frac{c d \omega \sin \omega}{ee}; Y = \int \frac{e d \omega \sin \omega}{cc}$$

$$\& Z = \int \frac{ce d \omega \sin \omega}{(cc + ee - 2ce \cos \omega)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{ce d \omega \sin \omega}{(cc + ee)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2ce}{cc + ee} \cos \omega\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{De-là on aura d'abord: } X = -\frac{c}{ee} \cos \omega \& Y = -\frac{e}{cc} \cos \omega.$$

La valeur de Z demande plus d'adresse; car quoiqu'elle soit absolument intégrable, puisqu'on auroit $Z = \frac{-1}{\sqrt{cc + ee - 2ce \cos \omega}}$ cette quantité irrationnelle troubleroit tellement le calcul, qu'à peine pourroit-on en tirer quelque conclusion propre à l'usage de l'Astronomie. Il vaudra donc mieux qu'on convertisse d'abord la quantité irrationnelle $\frac{1}{w}$ dans une série infinie, qui procède par les cosinus des angles multiplies de ω , &

DU MOUVEMENT DE JUPITER ET DE SATURNE. 21

& dans cette vue la résolution, qui se trouve dans la pièce qui a déjà remporté un prix sur cette question, paroît la plus propre, Posant donc :

$$\left(1 - \frac{2cc}{cc+ee} \cos. \omega\right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha + \beta \cos. \omega + \gamma \cos. 2\omega + \delta \cos. 3\omega + \epsilon \cos. 4\omega + \zeta \cos. 5\omega + \&c.$$

Puisque la valeur de $\frac{2cc}{cc+ee}$ est précisément la même $= 0,8405$, comme elle y est supposée, les valeurs de ces coefficients seront :

$$\alpha = 3,21789; \beta = 4,70357; \gamma = 3,07731; \\ \delta = 1,92413; \epsilon = 1,18601 \text{ \& } \zeta = 0,75144.$$

Et si nous posons, pour abrégér, $\sqrt{cc+ee} = h$, nous aurons :

$$Z = \frac{ce}{h^3} \int d\omega \sin. \omega (\alpha + \beta \cos. \omega + \gamma \cos. 2\omega + \delta \cos. 3\omega \\ + \epsilon \cos. 4\omega + \zeta \cos. 5\omega + \&c.) \text{ ou bien en multi-} \\ \text{pliant par } \sin. \omega, \text{ à cause de } \sin. \omega \times \cos. n\omega \\ = \frac{1}{2} \sin. (n+1)\omega - \frac{1}{2} \sin. (n-1)\omega \text{ on aura :}$$

$$Z = \frac{ce}{h^3} \int d\omega \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ -\frac{1}{2}\gamma \end{array} \right\} \cos. \omega \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\delta \end{array} \right\} \cos. 2\omega \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\gamma \\ -\frac{1}{2}\epsilon \end{array} \right\} \cos. 3\omega \\ + \frac{1}{2}\delta \\ -\frac{1}{2}\zeta \left\{ \begin{array}{l} \cos. 4\omega \\ \&c. \end{array} \right\}$$

& partant l'intégration donnera :

$$Z = \frac{ce}{h^3} \left((\alpha - \frac{1}{2}\gamma) \sin. \omega + \frac{1}{4} (\beta - \delta) \sin. 2\omega \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (\gamma - \epsilon) \sin. 3\omega + \frac{1}{8} (\delta - \zeta) \sin. 4\omega \&c. \right)$$

Quoique cette série ne soit pas fort convergente, on
Prix de 1752. F

verra avec bien de la satisfaction que les séries, qui en résultent pour les valeurs x, y, n & θ , deviennent extrêmement convergentes, de sorte que cette résolution ne sera sujette à aucun scrupule.

Ayant maintenant trouvé les valeurs de X, Y & Z , puisqu'on peut négliger les quarrés & les plus hautes puissances de U & V , de même que leurs produits par μ ou ν , on aura :

$$z = \frac{f}{cc} - \frac{g}{ee} - \frac{2fU}{c^3} + \frac{2gV}{e^3} + \frac{\nu}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{cc}(Y-Z)$$

$$t u u = f - \frac{ccg}{cc} - \frac{2cgU}{ee} + \frac{2ccgV}{e^3} + \nu(X-Z) + \frac{\mu cc}{cc}(Y-Z)$$

$$t v v = \frac{fcc}{cc} - g - \frac{2fccU}{c^3} + \frac{2efV}{cc} + \frac{\nu ee}{cc}(X-Z) + \mu(Y-Z)$$

$$\frac{1}{t u u} = \frac{ec}{eef - ccg} + \frac{2ceegU - 2ccgV - \nu e^4(X-Z) - \mu cee(Y-Z)}{(eef - ccg)^2}$$

$$\frac{1}{t v v} = \frac{cc}{eef - ccg} + \frac{2ceefU - 2cccfV - \nu c^2 e^2 g(X-Z) - \mu c^4(Y-Z)}{(eef - ccg)^2}$$

& de-là on tirera

$$\frac{d^2}{d u^2} = \frac{ecf}{eef - ccg} + \frac{2cccf g U - 2cccf g V - \nu c^2 e^2 g(X-Z) - \mu c c c e f(Y-Z)}{(eef - ccg)^2}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{ccg}{eef - ccg} + \frac{2ccf g U - 2ccf g V - vcc eeg(X-Z)}{(eef - ccg)} - \frac{\mu cceef(Y-Z)}{(eef - ccg)^2}$$

Or ayant pour les mouvemens moyens $\frac{dp}{d\omega} = t$ & $\frac{dq}{d\omega} = n t$, il faut qu'en négligeant les termes variables, U, V, X, Y & Z ; on ait $\frac{dp}{d\omega} = \frac{d^n}{d\omega}$ & $\frac{dq}{d\omega} = \frac{d^{\theta}}{d\omega}$; d'où nous tirons les déterminations suivantes;

$$\frac{eef - ccg}{ccce} = \frac{eef}{eef - ccg} \quad \& \quad \frac{n(eef - ccg)}{ccce} = \frac{ccg}{eef - ccg}$$

Dont celle-ci divisée par celle-là donne $n = \frac{ccg}{eef}$ ou $ccg = neef$, & partant $f = \frac{cc}{(1-n)^2}$ & $g = \frac{nee}{(1-n)^2}$.

Pofons pour abrégér $1 - n = m$ pour avoir $f = \frac{cc}{mm}$ & $g = \frac{nee}{mm}$ & nous obtiendrons:

$$z = \frac{1}{m} - \frac{2U}{mmc} + \frac{2nV}{mme} + \frac{v}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

& de plus:

$$\frac{1}{1uu} = \frac{m}{cc} + \frac{2nU}{c^3} - \frac{2nV}{cce} - \frac{vm m(X-Z)}{c^4} - \frac{\mu m m(Y-Z)}{ccce}$$

$$\frac{1}{1vv} = \frac{m}{ee} + \frac{2U}{cee} - \frac{2V}{e^3} - \frac{vm m(X-Z)}{ccee} - \frac{\mu m m(Y-Z)}{e^4}$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{1}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{vn(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n^2}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{vn(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

Enfuite on aura

$$x = \frac{c}{m} - \frac{(2-m)U}{mm} + \frac{2ncV}{mmc} + \frac{v}{c} (X-Z) \\ + \frac{\mu c}{cc} (Y-Z)$$

$$y = \frac{e}{m} - \frac{2eU}{mme} + \frac{(2-m)V}{mm} + \frac{ve}{cc} (X-Z) \\ + \frac{\mu}{c} (Y-Z)$$

& substituant ces valeurs dans les équations *différentielles* il proviendra.

$$0 = \frac{-(2-m)cddU}{mmd\omega^2} + \frac{2ncddV}{mmed\omega^2} + \frac{vdd(X-Z)}{d\omega^2} \\ + \frac{\mu cdd(Y-Z)}{eed\omega^2} + \frac{1+\mu}{c} - \frac{cc}{m^2} - \frac{(2-m)cU}{m^2} \\ + \frac{2ncV}{m^2e} + \frac{vc\cos.\omega}{ec} + \frac{vc(c-e\cos.\omega)}{h^3} (\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\ + \frac{v(n-m)}{mm} (X-Z) + \frac{\mu cc}{mme} (Y-Z)$$

$$0 = \frac{-2eeddU}{mncd\omega^2} + \frac{(2-m)eddV}{mnd\omega^2} + \frac{veedd(X-Z)}{ccd\omega^2} \\ + \frac{\mu dd(Y-Z)}{d\omega^2} + \frac{1+v}{e} - \frac{nne}{m^2} + \frac{(2-m)nneV}{m^2} \\ - \frac{2nneU}{m^2c} + \frac{\mu c\cos.\omega}{cc} + \frac{\mu(c-e\cos.\omega)}{h^3} (\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\ + \frac{vnnec}{mmc} (X-Z) + \frac{\mu n(n+2m)}{mm} (Y-Z)$$

Et réintroduisant les distances x & y on aura:

$$0 = cddx + \frac{1+\mu}{c} - \frac{2cc}{m^2} + \frac{cx}{mm} - \frac{2v}{m} (X-Z) + \frac{vc\cos.\omega}{ec} \\ + \frac{vc(c-e\cos.\omega)}{h^3} (\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.)$$

==

$$\begin{aligned} \delta &= eddy + \frac{1+v}{e} \frac{2nnee}{m^2} + \frac{nney}{mm} + \frac{2\mu n}{m}(Y-Z) + \frac{\mu e \cos \omega}{cc} \\ &+ \frac{\mu e(e - \cos \omega)}{n^2} (\alpha + \beta \cos \omega + \gamma \cos 2\omega + \&c.). \end{aligned}$$

Ensuite on aura :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x - dp}{d\omega} &= \frac{2(2-m)U}{mmc} - \frac{4nV}{mme} - \frac{v(2-m)}{cc} (X-Z) \\ &- \frac{2\mu}{ee} (Y-Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta - dq}{d\omega} &= \frac{4nU}{mmc} - \frac{2n(2-m)V}{mme} - \frac{2vn}{cc} (X-Z) \\ &- \frac{\mu(2-m)}{ee} (Y-Z) \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{d^2x - dp}{d\omega} = \frac{2}{m} - \frac{2x}{c} + \frac{vm}{cc} (X-Z) \&c$$

$$\frac{d^2\theta - dq}{d\omega} = \frac{2n}{m} - \frac{2ny}{e} - \frac{\mu m}{ee} (Y-Z)$$

Maintenant il n'est plus difficile de parvenir à la solution. Car ayant les valeurs $n = 0, 4025686$ & $m = 0, 5974314$, on trouvera d'abord $c^2 = n^2$ & $e^2 = \frac{m^2}{nn}$, $h = 2, 089088m$, ou $\frac{c}{m} = 1$ & $\frac{e}{m} = 1, 834170$.

Maintenant qu'on suppose

$$x = \frac{c}{m} + A \cos \omega + B \cos 2\omega + C \cos 3\omega + D \cos 4\omega \&c.$$

$$y = \frac{e}{m} + A' \cos \omega + B' \cos 2\omega + C' \cos 3\omega + D' \cos 4\omega \&c.$$

Prix de 1752.

26 RECHERCHES SUR LES IRRÉGULARITÉS

& substituant ces valeurs dans les équations différentio-différentielles, on trouvera les déterminations suivantes:

$$\begin{array}{ll} A = +0,4347\nu & A' = +1,7814\mu \\ B = -1,8637\nu & B' = +0,2831\mu \\ C = -0,1944\nu & C' = +0,0655\mu \\ D = -0,0505\nu & D' = +0,0205\mu \end{array}$$

Ensuite on trouvera plus exactement:

$$\frac{e}{m} = 1,000000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu$$

$$\frac{e}{m} = 1,834170 + 0,61140\nu + 0,16513\mu$$

Par conséquent les vraies distances des Planètes au Soleil seront :

$$\begin{aligned} x &= 1,000000 + 0,3333\mu + 0,4347\nu \cos.\omega \\ &\quad - 0,1944\nu \cos.3\omega - 0,0401\nu \\ &\quad - 1,8637\nu \cos.2\omega - 0,0505\nu \cos.4\omega \\ y &= 1,834170 + 0,6114\nu + 1,7814\mu \cos.\omega \\ &\quad + 0,0655\mu \cos.3\omega + 0,1651\mu \\ &\quad + 0,2831\mu \cos.2\omega + 0,0205\mu \cos.4\omega \end{aligned}$$

& les longitudes vraies des Planètes se trouveront :

$$\begin{aligned} \eta &= p - 1,3416\nu \sin.\omega + 3,3154\nu \sin.2\omega \\ &\quad + 0,2761\nu \sin.3\omega + 0,0494\nu \sin.4\omega \\ \theta &= q - 0,0627\mu \sin.\omega - 0,1623\mu \sin.2\omega \\ &\quad - 0,0336\mu \sin.3\omega - 0,0099\mu \sin.4\omega \end{aligned}$$

où p & q marquent les longitudes moyennes.

Donc si nous donnons aux lettres μ & ν les valeurs, qu'on conçoit des revolutions des satellites; sçavoir

$\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{2021}$ & que la distance d'un corps au Soleil, qui fait ses revolutions au tour du Soleil en même tems que Jupiter, soit posée = 1000000 dans l'hypothèse de Kepler, les distances des deux Planètes au Soleil seront, lorsqu'elles se trouvent éloignées l'une de l'autre de l'angle $\omega = \eta - \theta$.

$$x = 1000317 + 145 \cos. \omega - 621 \cos. 2\omega - 64 \cos. 3\omega - 17 \cos. 4\omega$$

$$y = 1834027 + 1781 \cos. \omega + 283 \cos. 2\omega + 65 \cos. 3\omega + 20 \cos. 4\omega$$

Or, pour leurs longitudes, si nous convertissons les coefficients trouvés en secondes, supposant le sinus total = 1, elles proviendront :

$$\eta = p - 92'' \sin. \omega + 226'' \sin. 2\omega + 19'' \sin. 3\omega + 3'' \sin. 4\omega$$

$$\theta = q - 12'' \sin. \omega - 32'' \sin. 2\omega - 6'' \sin. 3\omega - 2'' \sin. 4\omega$$

Ainsi il ne seroit pas difficile de marquer en tout tems les lieux vrais de ces deux Planètes, si leurs orbites n'étoient pas excentriques, dans le sens que j'ai établi ci-dessus : & si ce cas avoit lieu dans le ciel, la question proposée seroit déjà parfaitement résolue.

De ces formules je tire les réflexions suivantes, qui serviront non seulement à nous éclaircir assez considérablement sur cette matiere, mais aussi à conduire plus sûrement les opérations que je dois encore entreprendre pour les autres inégalités.

I. Je remarque donc premièrement, que la résolution de la formule irrationnelle $(1 - \frac{2ce}{cc+ee} \cos. \omega)^{-\frac{2}{3}}$ dans une série est tout-à-fait propre à notre dessein ;

car quoique cette série soit peu convergente en elle-même, on voit pourtant que les changemens qu'elle subit dans le calcul, la rendent tellement convergente, qu'il suffit d'en prendre les cinq premiers termes; les suivans devenant si petits tant pour les distances x & y que pour les longitudes η & θ , qu'on s'en peut passer sans aucune erreur sensible. Il est donc certain que dans le calcul que j'aurai encore à faire, il suffira de considérer les mêmes premiers termes de cette série sans qu'on puisse avoir lieu de craindre que les suivans soient de quelque conséquence.

II. On voit aussi que les inégalités, qui dependent des angles ω , 2ω , 3ω & 4ω , sont déjà si petites d'elles-mêmes, qu'elle deviendroient tout-à-fait insensibles si on les multiplioit encore par les fractions μ & ν : ce qui justifie mes opérations, quand j'ai négligé dans le calcul tous les termes qui renferment les coefficients A, B, C, D , &c. A', B', C', D' , &c. multipliés par μ ou ν . Et partant dans la poursuite du calcul je serai également autorisé à négliger quantité de termes qui ne seront pas plus considérables que ceux dont je viens de parler.

III. Il est aussi fort remarquable que si les deux orbites de Jupiter & Saturne n'étoient point excentriques, les inégalités qui se trouveroient dans la longitude de Saturne seroient si petites qu'à peine sauroit on s'en apercevoir par les observations; puisqu'on voit qu'elles ne surpasseroient que fort rarement la moitié d'une minute. Or en recompense la distance de Saturne au Soleil en sera plus altérée; car dans ses conjonctions avec Jupiter, lorsque $\omega = 0$ sa distance sera $= 1834027 + 2049$, & dans les oppositions $= 1834027 - 1543$; donc la distance moyenne au Soleil sera augmentée dans

le premier cas de sa $\frac{1}{900}$ partie, & diminuée dans l'autre de sa $\frac{1}{1200}$ partie.

IV. Mais il est encore plus surprenant que les inégalités dans le mouvement de Jupiter, qui dépendent de l'angle ω , soient beaucoup plus grandes que celles de Saturne, quoique la force attractive de Jupiter soit supposée trois fois plus grande que celle de Saturne. Car nous voyons que ces inégalités de Jupiter peuvent monter au de-là de 4 minutes lorsque l'angle ω est de $4^{\circ} 11'$ ou de $7^{\circ} 19'$. Dans le premier cas la longitude vraie de Jupiter sera moins avancée que la moyenne de $4' 45''$, & dans l'autre elle sera plus avancée environ de la même quantité.

Ces mêmes inégalités se trouveront donc aussi actuellement dans le mouvement de ces deux Planètes, quand même leurs orbites seroient excentriques; mais l'excentricité y causera encore de nouvelles inégalités sans changer celles-ci, que je m'en vais chercher dans les articles suivans.

§. V.

Recherches des inégalités de Jupiter & de Saturne qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

L'Analyse de l'article précédent nous fait voir qu'il est plus convenable de garder dans le calcul les distances x & y mêmes, que d'y introduire les substitutions

Prix de 1752.

H

$x = tu$ & $y = tv$; puisque nous avons vu que les équations finales à résoudre deviennent plus simples en y remettant les lettres x & y .

Pour cet effet il sera nécessaire d'arranger nos formules d'une autre façon, pour les rendre plus propres aux recherches suivantes. Dans cette vûe je poserais d'abord :

$$x = c(1 + u) \text{ \& } y = c(1 + v)$$

de sorte que c & e marqueront à l'avenir, ce qui a été exprimé par $\frac{c}{m}$ & $\frac{e}{m}$; & partant les valeurs de c & e , entant qu'elles ne sont pas changées par les excentricités seront :

$$c = 1,000317, e = 1,834027 \text{ \& } h = \sqrt{cc + ee} \\ = 2,089088.$$

De plus, il est clair que les lettres u & v , exprimant les inégalités causées tant par les excentricités que par l'action mutuelle, seront si petites qu'on pourra négliger sans scrupule les termes qui en contiendront trois ou plusieurs dimensions; & lorsque les termes sont déjà multipliés par μ ou ν , on pourra même négliger les termes qui contiendront deux dimensions de u & v . Or puisque les termes qui dépendent uniquement de l'une ou l'autre excentricité peuvent exiger qu'on monte jusqu'aux trois dimensions, la recherche se pourra faire à part; car ici je me contenterai de conduire le calcul de même que si les excentricités étoient pour ainsi dire infiniment petites.

Donc puisque la quantité z n'entre dans le calcul qu'avec un multiplicateur μ ou ν , on aura assez exactement :

$$r = h \sqrt{\left(1 - \frac{2ce}{hh} \cos. \omega + \frac{2ccu + 2eev}{hh} - \frac{2ce}{hh} (u+v) \cos. \omega\right)}$$

& partant :

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{h^3} \left[\left(1 - \frac{2ce}{hh} \cos. \omega\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{hh} (ccu + ee v - ce(u+v) \cos. \omega) \left(1 - \frac{2ce}{hh} \cos. \omega\right)^{-\frac{5}{2}} \right]$$

Or posant :

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh} \cos. \omega\right)^{-\frac{3}{2}} = \alpha + \beta \cos. \omega + \gamma \cos. 2\omega + \delta \cos. 3\omega + \epsilon \cos. 4\omega + \zeta \cos. 5\omega + \&c.$$

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh} \cos. \omega\right)^{-\frac{5}{2}} = \alpha' + \beta' \cos. \omega + \gamma' \cos. 2\omega + \delta' \cos. 3\omega + \epsilon' \cos. 4\omega + \&c.$$

Les valeurs de ces coefficients seront : (*)

$\alpha = 3, 21789$	$\alpha' = 13, 21601$
$\beta = 4, 70357$	$\beta' = 23, 79051$
$\gamma = 3, 07731$	$\gamma' = 18, 94939$
$\delta = 1, 92413$	$\delta' = 13, 82941$
$\epsilon = 1, 18601$	$\epsilon' = 9, 96700$
$\zeta = 0, 75144$	

Pour trouver ensuite les valeurs des formules X , Y & Z , comme elles sont par tout multipliées par μ ou ν , & qu'il est permis de négliger les termes, qui seroient multipliés par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$, il suffira d'y mettre $\frac{1}{z} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy}$ & puisque nous avons trouvé $f = cc$ & $g = nee$, nous avons pour ces termes :

(*) Voyez la piece de 1748, sur ce sujet. pag. 52.

$$\epsilon = \frac{1}{m} + \frac{2u}{mm} - \frac{2nv}{mm} \text{ à cause de } m = 1 - n.$$

& partant :

$$X = \frac{c}{ee} \int d\omega \sin. \omega \left(\frac{1}{m} + \frac{(m+2)u}{mm} - \frac{2(1+n)v}{mm} \right)$$

$$Y = \frac{c}{cc} \int d\omega \sin. \omega \left(\frac{1}{m} + \frac{2nu}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm} \right)$$

$$Z = \frac{ce}{h^3} \int d\omega \sin. \omega \left(\frac{1}{m} + \frac{(2+m)u}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm} \right)$$

$$(\alpha + \beta \cos. \omega + \gamma \cos. 2\omega + \delta \cos. 3\omega + \&c.)$$

$$- \frac{3ce}{mh^3} \int d\omega \sin. \omega (ccu + eev - ce(u+v) \cos. \omega)$$

$$(\alpha' + \beta' \cos. \omega + \gamma' \cos. 2\omega + \delta' \cos. 3\omega + \&c.)$$

ou bien

$$Z = \frac{ce}{mh^3} \int d\omega \sin. \omega (\alpha + \beta \cos. \omega + \gamma \cos. 2\omega + \&c.)$$

$$+ \frac{(2+m)ce}{mmh^3} \int u d\omega \sin. \omega (\alpha + \beta \cos. \omega + \&c.)$$

$$- \frac{(2n-m)ce}{mmh^3} \int v d\omega \sin. \omega (\alpha + \beta \cos. \omega + \&c.)$$

$$- \frac{3c^3e}{mh^3} \int u d\omega \sin. \omega (\alpha' + \beta' \cos. \omega + \&c.)$$

$$- \frac{3ce^3}{mh^3} \int v d\omega \sin. \omega (\alpha' + \beta' \cos. \omega + \&c.)$$

$$+ \frac{3ccc}{2mh^3} \int u d\omega \sin. 2\omega (\alpha' + \beta' \cos. \omega + \&c.)$$

$$+ \frac{3ccc}{2mh^3} \int v d\omega \sin. 2\omega (\alpha' + \beta' \cos. \omega + \&c.)$$

où il faut remarquer qu'on ne doit pas prendre pour u & v leurs valeurs entières, mais seulement leurs parties,

ties, qui ne sont pas affectées par μ ou ν .

Ensuite on aura pour les autres expressions:

$$\frac{xx}{t} = cc(m - 2nu + 2nv) + v(X - Z) + \mu(Y - Z) \frac{cc}{ee}$$

$$\frac{yy}{t} = ee(m - 2u + 2v) + \frac{vee}{cc}(X - Z) + \mu(Y - Z)$$

donc en renverfant,

$$\frac{t}{xx} = \frac{1}{mcc} + \frac{2nu}{mmcc} - \frac{2nv}{mmcc} - \frac{v(X - Z)}{mmc^2} - \frac{\mu(Y - Z)}{mmccce}$$

$$\frac{t}{yy} = \frac{1}{mee} + \frac{2u}{mme} - \frac{2v}{mme} - \frac{v(X - Z)}{mmccce} - \frac{\mu(Y - Z)}{mme^2}$$

& partant on aura pour les longitudes:

$$\frac{d\alpha - dp}{d\omega} = -\frac{2u}{m} - \frac{(m + 4n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{v(X - Z)}{mcc}$$

$$+ \frac{2v(1 + n)u(X - Z)}{mmcc} - \frac{2vnv(X - Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y - Z)}{mme}$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{2nv}{m} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{(4 - m)nvv}{mm} - \frac{\mu(Y - Z)}{mee}$$

$$+ \frac{2\mu(1 + n)v(Y - Z)}{mme} - \frac{2\mu u(Y - Z)}{mme} + \frac{2vnv(X - Z)}{mmcc}$$

& enfin pour les équations *differentio-différentielles* en posant 1 pour $d\omega$, on aura:

$$\frac{xx}{td\omega} d \frac{dx}{td\omega} = mmc^3 ddu - 2m(1 + n)c^3 u ddu$$

$$- 2mc^3 du^2 + 4mnc^3 v ddu + 2mnc^3 dudv$$

$$+ 2vmc ddu(X - Z) + vmc du(dX - dZ)$$

$$+ \frac{2\mu me^3 ddu(Y - Z)}{ee} + \frac{\mu mc^3 du(dY - dZ)}{ee}$$

$$\frac{yy}{td\omega} d \frac{dy}{td\omega} = mme^3 ddv - 4me^3 u ddv - 2me^3 dudv$$

$$+ 2m(1 + n)e^3 v ddv + 2mne^3 d\alpha^2$$

$$+ \frac{2vme^3 ddv(X - Z)}{cc} + \frac{vme^3 dv(dX - dZ)}{cc}$$

$$+ 2\mu meddv(Y - Z) + \mu medv(Yd - dZ)$$

Prix de 1752.

Or, il conviendra de donner à nos équations *différentio-différentielles* les formes suivantes, pour en rendre le calcul plus aisé.

$$\frac{x^3}{e^+ t d\omega} d \frac{dx}{t d\omega} = 1 + \frac{2\nu}{cc} (X - Z) - \frac{(1+\mu)x}{c^+} - \frac{\nu x^3 \text{ cof. } \omega}{c^+ y y} \\ - \frac{\nu x^4 - x^3 y \text{ cof. } \omega}{e^+ \zeta^3}$$

$$\frac{y^3}{e^+ t d\omega} d \frac{dy}{t d\omega} = n n - \frac{2\mu n}{ee} (Y - Z) - \frac{(1+\nu)y}{e^+} - \frac{\mu y^3 \text{ cof. } \omega}{e^+ x x} \\ - \frac{\mu (y^4 - x y^3 \text{ cof. } \omega)}{e^+ \zeta^3}$$

& pour ces formes on aura :

$$\frac{x^3}{e^+ t d\omega} d \frac{dx}{t d\omega} = m m d d u - m (4 - 3m) u d d u - 2 m d u^2 \\ + 4 m n \nu d d u + 2 m n d u d \nu \\ + \frac{2 \nu m d d u}{cc} (X - Z) + \frac{\nu m d u}{cc} (d X - d Z) \\ + \frac{2 \mu m d d u}{cc} (Y - Z) + \frac{\mu m d u}{ee} (d Y - d Z)$$

$$\frac{y^3}{e^+ t d\omega} d \frac{dy}{t d\omega} = m m d d \nu + m (4 - m) \nu d d \nu + 2 m n d \nu^2 \\ - 4 m u d d \nu - 2 m d u d \nu \\ + \frac{2 \nu m d d \nu}{cc} (X - Z) + \frac{\nu m d \nu}{cc} (d X - d Z) \\ + \frac{2 \mu m d d \nu}{ee} (Y - Z) + \frac{\mu m d \nu}{ee} (d Y - d Z)$$

Donc nos deux équations *differentio-différentielle* feront :

$$\begin{aligned}
 & - m m d d u + m (4 - 3 m) u d d u + 2 m d u^2 \\
 & - 4 m n v d d u - 2 m n d u d v \\
 & - \frac{2 v m d d u}{c c} (X - Z) - \frac{v m d u}{c c} (d X - d Z) \\
 & - \frac{2 \mu m d d u}{e e} (Y - Z) - \frac{\mu m d u}{e e} (d Y - d Z) \\
 & + 1 + \frac{2 v}{c c} (X - Z) - \frac{(1 + \mu)}{c^3} - \frac{(1 + \mu) u}{c^3} \\
 & \quad - \frac{v}{c e e} \text{ cof. } \omega - \frac{3 v u \text{ cof. } \omega}{c e e} + \frac{2 v v \text{ cof. } \omega}{c e e} \\
 \text{I. } 0 = & \left\{ \begin{aligned}
 & - \frac{v}{h^3} \left(1 - \frac{e}{c} \text{ cof. } \omega \right) (\alpha + \beta \text{ cof. } \omega + \gamma \text{ cof. } 2 \omega + \& c.) \\
 & - \frac{v u}{h^3} \left(4 - \frac{3 e}{c} \text{ cof. } \omega \right) (\alpha + \beta \text{ cof. } \omega + \gamma \text{ cof. } 2 \omega + \& c.) \\
 & + \frac{v e v}{c h^3} \text{ cof. } \omega (\alpha + \beta \text{ cof. } \omega + \gamma \text{ cof. } 2 \omega + \& c.) \\
 & + \frac{v u}{h^5} (3 c c - 6 c e \text{ cof. } \omega + 3 e e \text{ cof. } \omega^2) \\
 & (\alpha' + \beta' \text{ cof. } \omega + \gamma' \text{ cof. } 2 \omega + \& c.) \\
 & + \frac{v v}{h^5} (3 e e - 3 c e \text{ cof. } \omega - \frac{3 e^3}{c} \text{ cof. } \omega + 3 e e \text{ cof. } \omega^2) \\
 & (\alpha' + \beta' \text{ cof. } \omega + \gamma' \text{ cof. } 2 \omega + \& c.)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -mmddv - m(4-m)vddv - 2mndv^2 \\
 & + 4muddv + 2mdu dv \\
 & - \frac{2vmddv}{cc} (X-Z) - \frac{vm dv}{cc} (dX-dZ) \\
 & - \frac{2\mu m d d v}{ee} (Y-Z) - \frac{\mu m dv}{ee} (dY-dZ) \\
 & + nn - \frac{2\mu n}{ee} (Y-Z) - \frac{(1+v)}{e^2} - \frac{(1+v)v}{e^2} \\
 & \quad - \frac{\mu \operatorname{cose} \omega}{cce} + \frac{2\mu u \operatorname{cose} \omega}{cce} - \frac{3\mu v \operatorname{cose} \omega}{cce} \\
 \text{II. } 0 = & \left\{ \begin{aligned}
 & - \frac{\mu}{h^2} \left(1 - \frac{c}{e} \operatorname{cose} \omega \right) (\alpha + \beta \operatorname{cose} \omega + \gamma \operatorname{cose} 2\omega + \& c.) \\
 & - \frac{\mu v}{h^2} \left(4 - \frac{3c}{e} \operatorname{cose} \omega \right) (\alpha + \beta \operatorname{cose} \omega + \gamma \operatorname{cose} 2\omega + \& c.) \\
 & + \frac{\mu c u}{e h^2} \operatorname{cose} \omega (\alpha + \beta \operatorname{cose} \omega + \gamma \operatorname{cose} 2\omega + \& c.) \\
 & + \frac{\mu v}{h^2} (3ee - 6ce \operatorname{cose} \omega + 3cc \operatorname{cose}^2 \omega) \\
 & (\alpha' + \beta' \operatorname{cose} \omega + \gamma' \operatorname{cose} 2\omega + \& c.) \\
 & + \frac{\mu u}{h^2} \left(3cc - 3ce \operatorname{cose} \omega - \frac{3c^2}{e} \operatorname{cose} \omega + 3cc \operatorname{cose}^2 \omega \right) \\
 & (\alpha' + \beta' \operatorname{cose} \omega + \gamma' \operatorname{cose} 2\omega + \& c.)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Maintenant puisque les quantités constantes, qui entrent dans ces formules, sont connues, si nous remettons à leur place leurs valeurs, nos formules se changeront dans les formes suivantes, qui seront les plus commodes pour achever le calcul. Or on trouvera :

$$X = -0,49755 \operatorname{cose} \omega + 2,16316 \int u d\omega \sin \omega$$

$$- 2,33614 \int v d\omega \sin \omega$$

$$Y =$$

$$Y = -3,07010 \cos. \omega + 4,13746 \int u d \omega \sin. \omega \\ - 1,06737 \int v d \omega \sin. \omega$$

$$Z = -0,56546 \cos. \omega - 0,23399 \cos. 2 \omega \\ - 0,10614 \cos. 3 \omega - 0,04936 \cos. 4 \omega \\ + \int u d \omega (2,69960 \sin. \omega + 2,71178 \sin. 2 \omega) \\ + 2,15293 \sin. 3 \omega \\ - \int v d \omega (2,14022 \sin. \omega + 2,39381 \sin. 2 \omega \\ + 1,96490 \sin. 3 \omega)$$

Donc

$$X - Z = +0,06791 \cos. \omega + 0,23399 \cos. 2 \omega \\ + 0,10614 \cos. 3 \omega + 0,04936 \cos. 4 \omega \\ - \int u d \omega (0,53644 \sin. \omega + 2,71178 \sin. 2 \omega \\ + 2,15293 \sin. 3 \omega) \\ - \int v d \omega (0,19592 \sin. \omega - 2,39381 \sin. 2 \omega \\ - 1,96490 \sin. 3 \omega)$$

$$Y - Z = -2,50464 \cos. \omega + 0,23399 \cos. 2 \omega \\ + 0,10614 \cos. 3 \omega + 0,04936 \cos. 4 \omega \\ + \int u d \omega (1,43786 \sin. \omega - 2,71178 \sin. 2 \omega \\ - 2,15293 \sin. 3 \omega) \\ + \int v d \omega (1,07285 \sin. \omega + 2,39381 \sin. 2 \omega \\ + 1,96490 \sin. 3 \omega)$$

Avant que de passer outre il faut remarquer que les valeurs *cc* & *nee*, trouvées ci-dessus pour les lettres *f* & *g*, ne sont vraies qu'à-peu-près, lorsque les orbites sont excentriques. Dans ce cas elles demandent une petite

Prix de 1752.

K

correction, que nous trouverons en posant $f = cc$ ($1 + f$) & $g = nee(1 + g)$, où f & g feront des quantités extrêmement petites. Donc on aura:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 - dp}{d\omega} &= \frac{f}{m} - \frac{2u}{m} - \frac{(m+n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{v(X-Z)}{mcc} \\ &+ \frac{2v(1+n)u(X-Z)}{mmcc} - \frac{2vnv(X-Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y-Z)}{mnee} \\ \frac{d^2 - dq}{d\omega} &= \frac{ng}{m} - \frac{2nv}{m} + \frac{(4-m)nv}{mm} - \frac{4nuv}{mm} - \frac{\mu(Y-Z)}{mcc} \\ &+ \frac{2\mu(1+n)v(Y-Z)}{mnee} - \frac{2\mu u(Y-Z)}{mnee} + \frac{2vnv(X-Z)}{mnee} \end{aligned}$$

& les équations *differentio-différentielles* obtiendront les formes suivantes, en les divisant par m .

$$\begin{aligned} & - ddu + \frac{(4-3m)uddu}{m} + \frac{2du^2}{m} - \frac{4nvddu}{m} \\ & - \frac{2ndudv}{m} + \frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm} + \frac{2v}{mcc}(X-Z) \\ & - \frac{(1+\mu)}{mcc^2} - \frac{2vddu}{mcc}(X-Z) - \frac{vdu}{mcc}(dX-dZ) \\ & - \frac{2\mu ddu}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu du}{mee}(dY-dZ) - \frac{(1+\mu)\mu}{mcc^2} \\ 0 = & \left\{ \begin{aligned} & + 0, 33672 v + 0, 40276 v \text{ cof. } \omega \\ & + 0, 94218 v \text{ cof. } 2\omega + 0, 61021 v \text{ cof. } 3\omega \\ & + 0, 38959 v \text{ cof. } 4\omega. \\ & + v u (1, 65822 + 2, 34202 \text{ cof. } \omega \\ & \quad + 4, 44811 \text{ cof. } 2\omega + 3, 43398 \text{ cof. } 3\omega) \\ & - v v (1, 33820 + 1, 97818 \text{ cof. } \omega \\ & \quad + 3, 27124 \text{ cof. } 2\omega + 2, 94118 \text{ cof. } 3\omega) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & - d d v - \frac{(4-m)v d d v}{m} - \frac{2 n d v^2}{m} + \frac{4 u d d v}{m} \\
 & + \frac{2 d u d v}{m} + \frac{n n}{m m} + \frac{2 n n g}{m m} - \frac{2 \mu n}{m m e e} (Y-Z) \\
 & - \frac{(1+v)}{m m e^3} - \frac{2 v d d v}{m c c} (X-Z) - \frac{v d v}{m c c} (d X - d Z) \\
 & - \frac{2 \mu d d v}{m e e} (Y-Z) - \frac{\mu d v}{m e e} (d Y - d Z) - \frac{(1+v)v}{m m e^3} \\
 & - 0,59483 \mu - 2,17601 \mu \cos. \omega \\
 & - 0,39044 \mu \cos. 2 \omega - 0,23413 \mu \cos. 3 \omega \\
 & - 0,14032 \mu \cos. 4 \omega. \\
 & - \mu u (0,39631 - 1,97192 \cos. \omega \\
 & \quad + 0,97240 \cos. 2 \omega + 0,87427 \cos. 3 \omega) \\
 & - \mu v (0,20219 + 4,15067 \cos. \omega \\
 & \quad - 0,69750 \cos. 2 \omega - 0,44479 \cos. 3 \omega)
 \end{aligned} \right. \\
 0 = &
 \end{aligned}$$

Après avoir ainsi préparé nos formules, il sera d'autant plus aisé de déterminer les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'une ou de l'autre planète, puisque ni les différentiations ni les intégrations ne causent aucun embarras.

Soit donc k l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & r son anomalie de l'espece dont j'ai parlé ci-dessus, de sorte que sa différentielle $d r$ garde une raison constante avec l'élément $d \omega$: & partant je poserai $d r = \kappa d \omega$, où il est clair que la valeur de κ nous découvrira le vrai mouvement de l'aphélie de Jupiter. La valeur de u contiendra donc ce terme $k \cos. r$, qui sera le plus considérable par rapport aux autres, puisque l'excentricité k est assez considérable ; ensuite il est évident que des termes de cette forme $k^2 \cos. 2 r$ $k^3 \cos. 3 r$, &c. entreront aussi dans la valeur de u , mais nos formules ne

sont propres qu'à trouver le terme $k^2 \cos. 2 r$; or les suivans se trouveront aisément par le moyen d'une méthode particuliere, que j'exposerai ensuite; car ces termes seront si petits, que je les pourrai négliger dans la recherche présente.

Pour la valeur de v , elle subira aussi des changemens considérables à cause de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & contiendra les mêmes termes que celle de u , quoique leurs coefficients soient tous multipliés par μ ou ν . Or nonobstant cela j'ai remarqué que le coefficient du terme $\cos. (\omega - r)$, qui se trouvera dans v , devient si grand, qu'il n'est pas permis de le confondre avec les autres termes de la même quantité v , qui seront pour la plupart fort petits.

Or l'angle $\omega - r$ exprime à-peu-près la distance de Saturne à l'aphélie de Jupiter, de sorte que Saturne soit souffrir des dérangemens très-considérables, qui dépendent de sa distance à l'aphélie de Jupiter. Donc quand même Saturne n'auroit point d'excentricité propre, son mouvement seroit tellement déréglé par rapport à l'aphélie de Jupiter, qu'on croiroit que son orbite est très-sensiblement excentrique, & que son aphélie tombe dans celui de Jupiter; comme on verra quand le calcul sera achevé. Et c'est ici que se trouve la plus grande difficulté de la question proposée, difficulté telle, que si l'on n'y fait pas toute la réflexion possible, il est absolument impossible de réussir dans cette recherche.

Posons donc, puisqu'il est aisé de prévoir la forme des quantités u & v :

$$\begin{aligned}
 u = & +k \operatorname{cosf}. r + A \operatorname{cosf}. \omega + B \operatorname{cosf}. 2 \omega + F k \operatorname{cosf}. (\omega - r) \\
 & + A k k \operatorname{cosf}. 2 r + a k^2 \operatorname{cosf}. \omega + C \operatorname{cosf}. 3 \omega + G k \operatorname{cosf}. (\omega + r) \\
 & + D \operatorname{cosf}. 4 \omega + H k \operatorname{cosf}. (2 \omega - r) \\
 & + I k \operatorname{cosf}. (2 \omega + r) \\
 & + K k k \operatorname{cosf}. (\omega - 2 r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & a k \operatorname{cosf}. (\omega - r) + A' \operatorname{cosf}. \omega + B' \operatorname{cosf}. 2 \omega + G' k \operatorname{cosf}. (\omega + r) \\
 & + f' k k \operatorname{cosf}. (2 \omega - 2 r) + a' k^2 \operatorname{cosf}. \omega + C' \operatorname{cosf}. 3 \omega + H' k \operatorname{cosf}. (2 \omega - r) \\
 & + E' k \operatorname{cosf}. r + D' \operatorname{cosf}. 4 \omega + I' k \operatorname{cosf}. (2 \omega + r) \\
 & + K' k k \operatorname{cosf}. (\omega - 2 r)
 \end{aligned}$$

& faisant les substitutions dans nos équations, on aura d'abord :

$$f = \frac{(m+4n)}{2m} k k \quad \& \quad g = -\frac{(4-m)}{2m} a a k k.$$

& ensuite les valeurs des lettres $A, B, C, D,$ & A', B', C', D' deviendront :

$$\begin{aligned}
 A = & 0,43472 \nu; \quad B = -1,88047 \nu; \quad C = -0,19440 \nu; \\
 D = & -0,05047 \nu.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A' = & 0,90959 \mu; \quad B' = +0,15435 \mu; \quad C' = +0,03572 \mu; \\
 D' = & +0,01116 \mu.
 \end{aligned}$$

Pour les autres valeurs, ayant rangé tous les termes dont les deux équations *differentio-différentielles* seront composées, selon les cosinus des angles, qui forment les quantités u & v ; les premiers rangs, qui ne renferment que des quantités constantes, donneront

$$\begin{aligned}
 \frac{1+\mu}{m m c^2} = & \frac{1}{m m} + \frac{(m+4n)}{m^3} k k - \frac{3n}{m} x x k k + 0,33672 \nu \\
 \frac{1+v}{m m e^2} = & \frac{n n}{m m} - \frac{n n (4-m)}{m^3} a a k k + \frac{3}{m} (1-x)^2 a a k k - 0,59483 \mu
 \end{aligned}$$

d'où l'on pourra déterminer les vraies distances moyennes c & e après qu'on aura trouvé les quantités x, a &

42 RECHERCHES SUR LES IRRÉGULARITÉS

l'excentricité k , dont celle-ci se doit conclure par les observations. Or le terme $k \text{ cof. } r$ de la première équation donnera.

$$\kappa \kappa + \frac{n}{m} (1 + \kappa) A \alpha + \frac{0,19592}{m m c c \kappa} \nu \alpha$$

$$- \frac{(1 + \mu)}{m m c^3} + 1,65822 \nu - 0,98909 \nu \alpha = 0$$

qui se réduit à celle-ci, puisque $\kappa = \frac{1}{m}$ à - peu - près

$$\kappa \kappa m m = 1 - 0,47168 \nu - 0,0432 \nu \alpha$$

d'où nous tirons

$$\kappa = \frac{1}{m} - 0,39475 \nu - 0,0362 \nu \alpha$$

& partant

$$1 - \kappa = -\frac{n}{m} + 0,39475 \nu + 0,0362 \nu \alpha$$

Ensuite le terme $k \text{ cof. } (\omega - r)$ de l'autre équation fournit cette égalité :

$$(1 - \kappa)^2 \alpha - \frac{1}{m} (2 - \kappa) A' + \frac{\mu n, 1, 43786}{m m e e (1 - \kappa)}$$

$$- \frac{\alpha (1 + \nu)}{m m e^3} + 0,98596 \mu - 0,20219 \mu \alpha = 0$$

si l'on y substitue la valeur trouvée de κ , les termes finis, ou ceux qui ne contiennent point μ ou ν se détruiront d'eux-mêmes, & l'on aura :

$$\alpha (0,39264 \mu - 0,53199 \nu) - 0,0487 \alpha \alpha \nu$$

$$= 0,22604 \mu$$

d'où l'on voit, que si l'on ne connoît pas très-exactement les valeurs de μ & ν , il est impossible de bien déterminer celle de α ; de sorte que cette détermination est extrêmement délicate. Cependant si nous supposons

$$\mu = \frac{1}{1067} \text{ \& } \nu = \frac{1}{3021}$$

nous aurons :

$$192 \alpha - 16 \alpha \alpha = 212$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = 1, 2303.$$

Donc puisque α est > 1 . Saturne ressent une plus grande inégalité de Jupiter, que Jupiter même. Or cela n'est vrai que dans la supposition faite pour les lettres μ & ν ; & puisqu'elle n'est pas trop sûre, il peut arriver que la véritable valeur de α diffère très-considérablement de celle que nous venons de trouver.

Pour cette raison, il vaudra mieux considérer la valeur de α comme inconnue, & de tâcher ensuite de la déterminer exactement par les observations. Cependant voyant qu'elle est très considérable, & qu'elle surpasse peut-être l'unité, on reconnoîtra la nécessité de traiter dans le calcul ce terme $\alpha k \cos. (\omega - r)$ sur le même pied que le terme $k \cos. \nu$, qui est le plus considérable dans la valeur de u , & on verra que cette lettre α influe si-considérablement sur toutes les autres inégalités, quelles peuvent même changer de signe.

Mais quoique je ne puisse considérer la valeur de α comme entièrement connue, la valeur de κ n'en dépend point sensiblement, & partant nous sommes en état de déterminer le mouvement de l'aphélie de Jupiter très-exactement. Car posant $\alpha = 1\frac{1}{4}$, nous aurons :

$$\kappa \kappa m m = 1 - 0, 52568 \nu \quad \& \quad \kappa m = 1 - 0, 26284 \nu.$$

Or ayant posé $d r = \kappa d \omega$, nous aurons $r = \text{const.} + \kappa \omega = \text{const.} + \kappa (\eta - \theta)$, & selon le mouvement moyen, $r = C + \kappa (p - q) = C + m \kappa p$. Donc s'il l'on avoit exactement $\kappa m = 1$, le mouvement de l'anomalie moyenne seroit égal au mouvement moyen, & l'aphé-

lie feroit en repos. Or puisque $xm = 1 - 0,26284v$; il s'enfuit que le mouvement moyen est ou mouvement de l'anomalie comme 1 à $1 - 0,26284v$; & partant l'aphélie aura un mouvement en avant; de sorte que le mouvement de l'aphélie sera au mouvement moyen comme $0,26284v$ à 1 , ou posant $v = \frac{1}{3021}$, comme $0,000087$ à 1 . Donc puisque le mouvement moyen de Jupiter est pendant un an de $1^s, 0^o, 20', 38'' = 109238''$, l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de $9\frac{1}{2}''$, par rapport aux étoiles fixes; donc par rapport aux équinoxes le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter sera assez exactement de $60''$.

M. Cassini ayant très-soigneusement examiné toutes les observations anciennes, & les ayant comparées avec les modernes, ne trouve que $57''$ pour le mouvement annuel de cet aphélie, au lieu que d'autres tables astronomiques le marquent au delà de $70''$, d'où je conclus que ce bel accord de mon calcul avec les observations anciennes en confirme assez la justesse.

Pour les autres valeurs on les trouve pour la valeur de u :

$$\begin{aligned}
 A &= 1,78973 & F &= -0,61925v - 0,01701\mu \\
 & & & - 0,57001\alpha v. \\
 a &= 1,67383\alpha & G &= +0,76236v + 0,01689\mu \\
 & & & + 3,64624\alpha v. \\
 K &= -1,67385\alpha & H &= +10,58430v + 0,13210\mu \\
 & & & + 0,40168\alpha v. \\
 & & I &= -4,74525v - 0,13576\mu \\
 & & & + 0,52283\alpha v.
 \end{aligned}$$

& pour les valeurs de l'expression v ,

$$f =$$

$$\begin{aligned}
 f' &= -2,12306 \alpha \alpha & E' &= +0,16881 \mu + 0,45202 \alpha \nu \\
 & & & - 0,74378 \alpha \mu \\
 a' &= -0,67224 \alpha & G' &= +0,65758 \mu - 0,85288 \alpha \nu \\
 & & & - 0,44740 \alpha \mu \\
 K' &= +0,67366 \alpha & H' &= -12,87303 \mu - 0,45204 \alpha \nu \\
 & & & + 5,23988 \alpha \mu \\
 & & I' &= +0,26728 \mu - 0,09304 \alpha \nu \\
 & & & - 0,11413 \alpha \mu
 \end{aligned}$$

D'où l'on voit qu'on seroit bien trompé dans la valeur de ces coefficients, si l'on avoit négligé celle de la lettre α , qui est, à ce que nous avons vu, très-considérable.

De-là les véritables distances moyennes c & e seront :

$$\begin{aligned}
 c &= 1,00000 + 0,33333 \mu - 0,04006 \nu - 0,55794 k k \\
 e &= 1,83417 + 0,61139 \nu + 0,16513 \mu + 0,41197 a a k k
 \end{aligned}$$

où l'unité marque le rayon d'un cercle, dans lequel un corps uniquement attiré vers le Soleil, acheveroit ses révolutions en même tems que Jupiter.

Donc ayant trouvé les valeurs des coefficients supposés ci-dessus, on aura à chaque tems les valeurs des distances x & y , par le moyen des formules $x = c(1 + \mu)$ & $y = e(1 + \nu)$

Il ne reste donc qu'à trouver les longitudes η & θ de nos Planètes, ce qui se fera aisément par les formules données pour $\frac{d\eta - dp}{d\omega}$ & $\frac{d\theta - dq}{d\omega}$. Je n'en rapporterai que les termes principaux, qui auroient lieu quand même l'excentricité seroit infiniment petite, d'où l'on aura :

$$\begin{aligned} n = p & - 1,34665 \nu \sin. \omega + 3,34343 \nu \sin. 2 \omega \\ & + 0,27615 \nu \sin. 3 \omega + 0,06193 \nu \sin. 4 \omega \\ & - 2 k \sin. r - 2,71356 k k \sin. 2 r \\ & - 3,34766 a k k \sin. \omega - 3,34835 a k k \sin. (\omega - 2r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = q & + 0,02035 \mu \sin. \omega - 0,16222 \mu \sin. 2 \omega \\ & - 0,03365 \mu \sin. 3 \omega - 0,00990 \mu \sin. 4 \omega \\ & + 2 a k \sin. (\omega - r) - 3,54689 a a k k \sin. 2 (\omega - r) \\ & - 1,34979 a k k \sin. \omega + 1,34816 a k^2 \sin. (\omega - 2r) \end{aligned}$$

Pour les autres inégalités, je crois qu'il suffit d'avoir donné la méthode d'où elles peuvent être déduites; car avant qu'on ait déterminé exactement les valeurs de μ , ν & κ , leur évolution en nombre deviendroit trop embarrassante, & ne seroit outre cela d'aucun usage.

Pendant ces expressions seroient suffisantes, si l'excentricité de l'orbite de Jupiter étoit si petite, que les termes affectés par k & μ ou ν ensemble ne fussent d'aucune conséquence.

Or les autres termes; dont les expressions de n & θ sont composées, sont compris dans les formules suivantes:

$$\begin{aligned} n = \text{Prec.} & + \frac{k \sin. r}{\kappa} \left(\frac{2n}{mm} A a + \frac{0,09796 a \nu}{m c c \kappa} - \frac{0,06791 a \nu}{m m c c} \right) \\ & + \frac{k \sin. (\omega - r)}{1 - \kappa} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2}{m} F - \frac{(4 - 3m) A}{mm} + \frac{2n A'}{mm} + \frac{0,26822 \nu}{m c c (1 - \kappa)} \\ & + \frac{0,06791 (1 + n) \nu}{m m c c} - \frac{2,50464 \mu}{m m e c} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{k \sin(\omega+r)}{1+x} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2}{m} G - \frac{(4-3m)A}{mm} + \frac{2nA'}{mm} + \frac{2nB\alpha}{mm} \\ & + \frac{0,26822v}{mcc(1+x)} - \frac{1,19690\alpha v}{mcc(1+x)} + \frac{0,06791(1+n)v}{mmcc} \\ & - \frac{2,50464\mu}{mme} - \frac{0,23399n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{k \sin.(2\omega-r)}{2-x} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2}{m} H - \frac{(4-3m)B}{mm} + \frac{2nB'}{mm} + \frac{2nA\alpha}{mm} \\ & + \frac{1,33589v}{mcc(2-x)} + \frac{0,09795\alpha v}{mcc(2-x)} + \frac{0,23399(1+n)v}{mmcc} \\ & + \frac{0,23399\mu}{mme} - \frac{0,06791n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{k \sin.(2\omega+r)}{2+x} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2}{m} I - \frac{(4-3m)B}{mm} + \frac{2nB'}{mm} + \frac{2nC\alpha}{mm} \\ & + \frac{1,35589v}{mcc(2+x)} - \frac{0,98245\alpha v}{mcc(2+x)} + \frac{0,23399(1+n)v}{mmcc} \\ & + \frac{0,23399\mu}{mme} - \frac{0,10614n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\}$$

= Prec. + $\frac{k \sin r}{x}$ $\left\{ \begin{aligned} & - \frac{2n}{m} E' + \frac{n(4-m)A'\alpha}{mm} - \frac{2nA\alpha}{mm} \\ & + \frac{1,07285\alpha\mu}{2meex} - \frac{2,50464(1+n)\alpha\mu}{mme} + \frac{0,06791n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\}$

$$+ \frac{k \sin.(\omega-r)}{1-x} \left(- \frac{2nA'}{mm} + \frac{1,43786\mu}{2mee(1-x)} + \frac{2,50464\mu}{mme} \right)$$

$$+ \frac{k \sin.(\omega+r)}{1+x} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2n}{m} G' + \frac{n(4-m)B'\alpha}{mm} - \frac{2nA'}{mm} - \frac{2nB\alpha}{mm} \\ & + \frac{1,43786\mu}{2mee(1+x)} + \frac{2,39381\alpha\mu}{2mee(1+x)} + \frac{0,23399(1+n)\alpha\mu}{mme} \\ & + \frac{2,50464\mu}{mme} + \frac{0,23399n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{k \sin(2\omega - r)}{2 - \kappa} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2n}{m} H' + \frac{n(4-m)A'a}{mm} - \frac{2nB'}{mm} - \frac{2nA\alpha}{mm} \\ & - \frac{2,71178\mu}{2mee(2-\kappa)} + \frac{1,07285\alpha\mu}{2mee(2-\kappa)} + \frac{2,50464(1+n'\alpha\mu)}{mmee} \\ & - \frac{0,23399\mu}{mmee} + \frac{0,06791n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{k \sin(2\omega + r)}{2 + \kappa} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2n}{m} I' + \frac{n(4-m)C'\alpha}{mm} - \frac{2nB'}{mm} + \frac{2nC\alpha}{mm} \\ & - \frac{2,71178\mu}{2mee(2+\kappa)} + \frac{1,96490\alpha\mu}{2mee(2+\kappa)} + \frac{0,10614(1+n'\alpha\mu)}{mmee} \\ & - \frac{0,23399\mu}{mmee} + \frac{0,10614n\alpha v}{mmcc} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

§ VI.

Recherches des Inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne.

DE la même manière que je viens de déterminer les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, on déterminera celles, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne; soit donc l , l'excentricité de l'orbite de Saturne, & s son anomalie de l'espece que j'ai exposé ci-dessus, de sorte que ds , garde avec $d\omega$, un rapport constant qui soit $ds = \lambda d\omega$; or le mouvement de Jupiter se ressentira tellement de cette excentricité, que la distance au Soleil dependra très-sensiblement de son éloignement depuis l'aphélie de Saturne

Saturne. Cette élongation étant donc $= \omega + s$, la quantité u contiendra un terme de la forme $\text{cos.}(\omega + s)$, qui sera très-considérable par rapport aux autres. Comme je ne regarderai pas ici l'excentricité de l'orbite de Jupiter, les inégalités qui en dépendent étant déjà trouvées dans l'article précédent; je poserai

$$\begin{aligned}
 u = & b \text{ lcos.}(\omega + s) + A \text{ cos.} \omega + C \text{ cos.} 3 \omega + E \text{ lcos.} s \\
 & + B \text{ cos.} 2 \omega + D \text{ cos.} 4 \omega + L \text{ lcos.}(\omega - s) \\
 & + N \text{ lcos.} (2 \omega - s) \\
 & + O \text{ lcos.} (2 \omega + s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & \text{lcos.} s + A' \text{ cos.} \omega + C' \text{ cos.} 3 \omega + L' \text{ lcos.}(\omega - s) \\
 & + B' \text{ cos.} 2 \omega + D' \text{ cos.} 4 \omega + M' \text{ lcos.}(\omega + s) \\
 & + N' \text{ lcos.} (2 \omega - s) \\
 & + O' \text{ lcos.} (2 \omega + s)
 \end{aligned}$$

où je néglige les termes $l \text{ lcos.} \omega$, $l \text{ lcos.} 2(\omega + s)$ & $l \text{ lcos.}(\omega + 2s)$, puisque je ferai voir dans l'article suivant, comment on peut fort aisément assigner les inégalités, qui seroient comprises dans ces termes.

Maintenant on n'a qu'à substituer ces expressions dans nos deux équations *differentio*-différentielles rapportées pag. 34. & cette substitution n'aura aucune difficulté, puisque nous négligerons tous les termes, qui seroient multipliés, ou par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$.

Or la première équation sera changée par cette substitution dans la forme suivante :

Constante.	<i>l</i> <i>cof.</i> <i>s</i>	<i>l</i> <i>cof.</i> ($\omega - s$)
$\frac{1}{m m} + \frac{2 f}{m m}$	+ <i>E</i>	+ ($1 - \lambda$) ² <i>L</i>
$-\frac{(1 + \mu)}{m m c^3}$	$-\frac{(4 - 3 m)}{2 m} b A$	$-\frac{(4 - 3 m)}{2 m} 4 b B$
+ 0, 33672 <i>v</i>	$-\frac{(4 - 3 m)}{2 m} (1 + \lambda)^2 b A$	$-\frac{(4 - 3 m)}{2 m} (1 + \lambda)^2 b B$
$-\frac{(4 - 3 m)}{2 m} b^2 (1 + \lambda)^2 l l$	+ $\frac{2}{m} (1 + \lambda) b A$	+ $\frac{2}{m} (1 + \lambda) 2 b B$
+ $\frac{1}{m} b^2 (1 + \lambda)^2 l l$	+ $\frac{2 n}{m} (1 + \lambda)^2 b A'$	+ $\frac{2 n}{m} (1 + \lambda)^2 b B'$
	$-\frac{n}{m} (1 + \lambda) b A'$	+ $\frac{2 n}{m} A$
	$-\frac{\nu b}{m m c c} 0,53644$	$-\frac{n}{m} (1 + \lambda) 2 b B'$
	+ $\frac{\nu b (1 + \lambda)^2}{m c c} 0,06791$	$-\frac{n}{m} \lambda A$
	$-\frac{\nu b (1 + \lambda)}{2 m c c} 0,06791$	+ $\frac{\nu b}{m m c c} \frac{2,71178}{1 - \lambda}$
	$-\frac{\mu b (1 + \lambda)^2}{m e e} 2,50464$	+ $\frac{\nu}{m m c c} \frac{0,19592}{1 - \lambda}$
	+ $\frac{\mu b (1 + \lambda)}{\nu n e e} e, 50464$	+ $\frac{\nu b (1 + \lambda)^2}{m c c} 0,23399$
	$-\frac{(1 + \mu) E}{m m c^3}$	$-\frac{\nu b (1 + \lambda)}{m c c} 0,23399$
+ $\nu b 1, 17101$		+ $\frac{(\mu b 1 + \lambda)^2}{m e e} 0,23399$
- $\nu 1, 33820$		$-\frac{\mu b (1 + \lambda)}{m e e} 0,23399$
		$-\frac{(1 + \mu) L}{m m e^3}$
		+ $\nu b 2, 22405$
		- $\nu 0, 98909$

DU MOUVEMENT DE JUPITER ET DE SATURNE. 51

$l \cos. (\omega + s) \quad l \cos. (2\omega - s) \quad l \cos. (2\omega + s)$

$+ b (1 + \lambda)^2 \quad + (2 - \lambda)^2 N \quad + (2 + \lambda)^2 O$

$+ \frac{2n}{m} A \quad - \frac{(4-3m)}{2m} 9 b C \quad - \frac{(4-3m)}{2m} b A$

$+ \frac{n}{m} \lambda A \quad - \frac{(4-3m)}{2m} (1 + \lambda)^2 b C \quad - \frac{(4-3m)}{2m} (1 + \lambda)^2 b A$

$+ \frac{v}{m m c c} \frac{0,19592}{1 + \lambda} \quad + \frac{2}{m} (1 + \lambda) 3 b C \quad - \frac{2}{m} (1 + \lambda) b A$

$- \frac{(1 + \mu) b}{m m c^3} \quad + \frac{2n}{m} (1 + \lambda)^2 b C' \quad + \frac{2n}{m} (1 + \lambda)^2 b A'$

$+ v b 1,65822 \quad + \frac{2n}{m} 4 B \quad + \frac{2n}{m} 4 B$

$- v 0,98909 \quad - \frac{n}{m} (1 + \lambda) 3 b C' \quad + \frac{n}{m} (1 + \lambda) b A'$

$- \frac{n}{m} 2 \lambda B \quad + \frac{n}{m} 2 \lambda B$

$+ \frac{v b}{m m c c} \frac{2,15293}{2 - \lambda} \quad + \frac{v b}{m m c c} \frac{0,53644}{2 + \lambda}$

$- \frac{v}{m m c c} \frac{2,39381}{2 - \lambda} \quad - \frac{v}{m m c c} \frac{2,39381}{2 + \lambda}$

$+ \frac{v b (1 + \lambda)^2}{m c c} 0,10614 \quad + \frac{v b (1 + \lambda)^2}{m c c} 0,06791$

$- \frac{3v b (1 + \lambda)}{2 m c c} 0,10614 \quad + \frac{v b (1 + \lambda)}{2 m c c} 0,06791$

$+ \frac{\mu b (1 + \lambda)^2}{m e e} 0,10614 \quad - \frac{\mu b (1 + \lambda)^2}{m e e} 2,50464$

$- \frac{3\mu b (1 + \lambda)}{2 m e e} 0,10614 \quad - \frac{\mu b (1 + \lambda)}{2 m e e} 2,50464$

$- \frac{(1 + \mu) N}{m m c^3} \quad - \frac{(1 + \mu) O}{m m c^3}$

$+ v b 1,71699 \quad + v b 1,17101$

$- v 1,63562 \quad - v 1,63562$

L'autre équation prendra cette forme :

Constante	<i>l cof. s</i>	<i>l cof. (ω — s)</i>
$+\frac{(4-m)}{2m} \lambda \lambda l l$	$+\lambda \lambda$	$+(1-\lambda)^2 L'$
$-\frac{n}{m} \lambda \lambda l l$	$-\frac{2}{m} b A'$	$+\frac{(4-m)}{2m} (1+\lambda \lambda) A'$
$+\frac{nn}{mm} + \frac{2nn g}{mm}$	$+\frac{1}{m} (1+\lambda) b A'$	$-\frac{2n}{m} \lambda A'$
$-\frac{(1+v)}{m m e^3}$	$-\frac{\mu n b}{m m e e} \frac{1,43786}{\lambda}$	$-\frac{2}{m} 4 b B'$
$-\mu_2 59483 \mu$	$-\frac{(1+v)}{m m e^3}$	$-\frac{2}{m} \lambda \lambda A$
	$+\mu b 0,98596$	$+\frac{1}{m} \lambda A$
	$-\mu_2 20219$	$+\frac{1}{m} (1+\lambda) 2 b B'$
		$-\frac{\mu n b}{m m e e} \frac{2,71178}{1-\lambda}$
		$+\frac{\mu n}{m m e e} \frac{1,07285}{1-\lambda}$
		$+\frac{v \lambda \lambda}{m c c} 0,06791$
		$-\frac{v \lambda}{2 m c c} 0,06791$
		$-\frac{\mu \lambda \lambda}{m e e} 2,50464$
		$+\frac{\mu \lambda}{2 m e e} 2,50464$
		$-\frac{(1+v) L'}{m m e^3}$
		$-\mu 2,07533$
		$-\mu b 0,48620$

l cof.

DU MOUVEMENT DE JUPITER ET DE SATURNE. 53

$l \text{ cosf. } (\omega + s)$	$l \text{ cosf. } (2\omega - s)$	$l \text{ cosf. } (2\omega + s)$
$+ (1 + \lambda)^2 M'$	$+ (2 - \lambda)^2 N'$	$+ (2 + \lambda)^2 O'$
$+ \frac{(4-m)}{2m} (1+\lambda\lambda) A'$	$+ \frac{(4-m)}{2m} (4+\lambda\lambda) B'$	$+ \frac{(4-m)}{2m} (4+\lambda\lambda) B'$
$+ \frac{2\pi}{m} \lambda A'$	$- \frac{2\pi}{m} 4 \lambda B'$	$+ \frac{2\pi}{m} 4 \lambda B'$
$- \frac{2}{m} \lambda \lambda A$	$- \frac{2}{m} 9 b C'$	$- \frac{2}{m} b A'$
$- \frac{1}{m} \lambda A$	$- \frac{2}{m} \lambda \lambda B$	$- \frac{2}{m} \lambda \lambda B$
$+ \frac{\mu n}{m m e e} \frac{1, 07285}{1 + \lambda}$	$+ \frac{1}{m} 2 \lambda B$	$- \frac{1}{m} 2 \lambda B$
$+ \frac{\nu \lambda \lambda}{m c c} 0, 06791$	$+ \frac{1}{m} (1 + \lambda) 3 b C'$	$- \frac{1}{m} (1 + \lambda) b A'$
$+ \frac{\nu \lambda}{2 m c c} 0, 06791$	$- \frac{\mu n b}{m m e e} \frac{2, 15293}{2 - \lambda}$	$+ \frac{\mu n b}{m m e e} \frac{1, 43786}{2 + \lambda}$
$- \frac{\mu \lambda \lambda}{m e e} 2, 50464$	$+ \frac{\mu n}{m m e e} \frac{2, 39381}{2 - \lambda}$	$+ \frac{\mu n}{m m e e} \frac{2, 39381}{2 + \lambda}$
$- \frac{\mu \lambda}{2 m e e} 2, 50464$	$+ \frac{\nu \lambda \lambda}{m c c} 0, 23399$	$+ \frac{\nu \lambda \lambda}{m c c} 0, 23399$
$- \frac{(1 + \nu) M'}{m m e^3}$	$- \frac{\nu \lambda}{m c c} 0, 23399$	$+ \frac{\nu \lambda}{m c c} 0, 23399$
$- \mu b 0, 39631$	$+ \frac{\mu \lambda \lambda}{m e e} 0, 23399$	$+ \frac{\mu \lambda \lambda}{m e e} 0, 23399$
$- \mu 2, 07533$	$- \frac{\mu \lambda}{m e e} 0, 23399$	$+ \frac{\mu \lambda}{m e e} 0, 23399$
	$- \frac{(1 + \nu) N'}{m m e^3}$	$- \frac{(1 + \nu) O'}{m m e^3}$
	$- \mu b 0, 43714$	$+ \mu b 0, 98596$
	$+ \mu 0, 34875$	$+ \mu 0, 34875$

Prix de 1752;

○

Les formules pour les longitudes nous donnent d'abord à connoître, qu'il y a $f = \frac{m+4n}{2m} bbll$, & $g = -\frac{(4-m)}{2m} ll$. Ensuite les termes constans donnent :

$$\frac{1+\mu}{mm\epsilon^2} = \frac{1}{mm} + 0,33672 \nu - \frac{(2-3m)}{2m} bb(1+\lambda)^2 ll \\ + \frac{(m+4n)}{m^3} bbll$$

$$\frac{1+\nu}{mm\epsilon^2} = \frac{nn}{mm} - 0,59483 \mu + \frac{(2-3m)}{2m} \lambda \lambda ll \\ - \frac{(4-m)nn}{m^3} ll$$

Le terme *l cos. s* de la seconde équation fournit

$$\lambda \lambda - \frac{1}{m} (1-\lambda) b A' - \frac{\mu n b}{mm\epsilon\epsilon} \frac{1,43786}{\lambda} + \mu b 0,98596 \\ - \mu 0,20219 = \frac{nn}{mm} - 0,59483 \mu$$

car nous savons que la valeur de λ , ne depend point de l'excentricité λ ; ce qu'on verroit évidemment, si l'on n'avoit pas omis dans le coefficient du terme *l cos. s* les parties affectées, par ll .

Or le terme *l cos. (ω + s)* de la premiere équation donne :

$$b(1+\lambda)^2 + \frac{n}{m} (2+\lambda) A + \frac{\nu}{mm\epsilon\epsilon} \frac{0,19592}{1+\lambda} + \nu b 1,65822 \\ - \nu 0,98909 = \frac{b}{mm} + 0,33672 b \nu$$

D'où il est évident, qu'il y a fort à-peu-près $\lambda = \frac{n}{m}$ & partant nous aurons en posant $\lambda = \frac{n}{m} + \frac{\xi}{m}$

$$\frac{2n\xi}{mm} - \frac{(m-n)}{mm} bA' - \frac{\mu b}{mcc} 1,43786 + \mu b 0,98596 + \mu 0,39264 = 0$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + \frac{n(2m+n)}{mm} A + \frac{\nu}{mcc} 0,19593 + \nu b 1,32150 - \nu 0,98909 = 0$$

& substituant les valeurs déjà trouvées

$$\frac{2n\xi}{mm} - 0,22603 b\mu + 0,39264 \mu = 0$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + 1,32150 b\nu + 0,55683 \nu = 0$$

d'où l'on tire en éliminant ξ ,

$$0,22603 b b\mu = 0,39264 b\mu - 0,53199 b\nu - 0,22416 \nu$$

& de-là la valeur de b résulteroit imaginaire en posant $\mu = \frac{1}{1067}$, & $\nu = \frac{1}{3021}$.

Mais si l'on change un peu les valeurs de μ & ν , pour rendre les deux racines égales, on trouvera à-peu-près $b = \frac{1}{2}$; d'où il semble qu'on ne se trompera pas beaucoup en posant $b = \frac{1}{2}$.

Cependant il est très-remarquable, qu'il pourroit arriver, que la valeur de b , devint imaginaire, & dans ce cas on seroit bien embarrassé de déterminer le mouvement, car ce seroit une marque qu'au lieu des cosinus des angles, il faudroit introduire dans le calcul des quantités exponentielles, auxquelles se réduisent comme on fait les cosinus imaginaires.

Or de-là on obtient $\xi = -0,17406\mu + 0,10002b\mu$, & la valeur de $\lambda = \frac{n+\xi}{m}$, donnant pour l'anomalie de Saturne $s = C + \frac{n+\xi}{m} \omega = \text{Const.} + \frac{n+\xi}{m} (\eta - \theta)$, &

selon le mouvement moyen $s = C + \frac{n-\xi}{m}(p-q)$
 $= C + \left(1 + \frac{\xi}{n}\right)q$. Donc le mouvement moyen de Sa-
 turne q est au mouvement de son anomalie s , comme
 1 à $1 + \frac{\xi}{n}$, & au mouvement de son aphélie, supposé
 progressif, comme 1 à $-\frac{\xi}{n}$, c'est-à-dire comme,
 1 à $0,43237\mu - 0,24891b\mu$, ou comme 3466 à 1 .
 Donc le mouvement moyen de Saturne étant pendant
 un an $0^s, 12^o, 13', 30'' = 44010''$, l'aphélie de Sa-
 turne avancera chaque année de $13''$ par rapport aux
 étoiles fixes, & de $1'4''$ par rapport aux équinoxes.
 M. Casini suppose ce mouvement annuel de $1', 18''$;
 mais il est bien clair, qu'il est impossible de bien dé-
 terminer le mouvement de l'aphélie par les observa-
 tions, tandis que les inégalités du mouvement ne sont
 pas connues.

Ayant trouvé les valeurs des lettres b & λ , on dé-
 terminera ensuite les autres coefficients $L, M, N, O,$
 L', M', N', O' , d'où l'on connoîtra les inégalités
 des distances x & y , en tant qu'elles dependent de
 l'excentricité de l'orbite de Saturne. Ensuite on trou-
 vera aisément les inégalités dans la longitude des Pla-
 nètes, qui dependent de ce même élément,

$$n = \text{Prec.} + \frac{l \sin s}{\lambda} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{m} E - \frac{(m+4n)}{mm} bA + \frac{2n}{mm} bA' \\ -\frac{\nu b}{2mcc} 0,93644\mu + \frac{\nu(1+n)b}{mmcc} 0,06791 \\ -\frac{\mu b}{mmcc} 2,50464 \end{array} \right\}$$

+ $l \sin$

$$+ \frac{l \sin. (\omega - s)}{1 - \lambda} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{z}{m} L - \frac{(m+4n)}{mm} b B + \frac{2n}{mm} b B' + \frac{2n}{mm} A \\ & + \frac{v b}{2 m c c} \frac{2,71178}{1-\lambda} + \frac{v}{2 m c c} \frac{0,19592}{1-\lambda} \\ & + \frac{r(1+n)b}{m m c c} 0,23399 - \frac{v n}{m m c c} 0,06791 \\ & + \frac{\mu b}{m m e e} 0,23399 \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{l \sin. (\omega + s)}{1 + \lambda} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{z}{m} b + \frac{2n}{mm} A + \frac{v}{2 m c c} \frac{0,19592}{1+\lambda} \\ & - \frac{v n}{m m c c} 0,06791 \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{l \sin. (2\omega - s)}{2 - \lambda} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{z}{m} N - \frac{(m+4n)}{mm} b C + \frac{2n}{mm} b C' \\ & + \frac{2n}{mm} B + \frac{v b}{2 m c c} \frac{2,15293}{2-\lambda} - \frac{v}{2 m c c} \frac{2,39381}{2-\lambda} \\ & + \frac{v(1+n)b}{m m c c} 0,10614 - \frac{v n}{m m c c} 0,23399 \\ & + \frac{\mu b}{m m e e} 0,10614 \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{l \sin. (2\omega + s)}{2 + \lambda} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{z}{m} O - \frac{(m+4n)}{mm} b A + \frac{2n}{mm} b A' \\ & + \frac{2n}{mm} B + \frac{v b}{2 m c c} \frac{0,53644}{2+\lambda} - \frac{v}{2 m c c} \frac{2,39381}{2+\lambda} \\ & + \frac{v(1+n)b}{m m c c} 0,06791 - \frac{v n}{m m c c} 0,23399 \\ & - \frac{\mu b}{m m e e} 2,50464 \end{aligned} \right\}$$

$$0 = \text{Prec.} + \frac{l \sin. s}{\lambda} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2n}{m} - \frac{2n}{mm} b A' - \frac{\mu b}{2 m e e} \frac{1,43786}{\lambda} \\ & + \frac{\mu b}{m m e e} 2,50464 \end{aligned} \right\}$$

Prix de 1752.

P

$$+ \frac{l \sin(\omega + s)}{1 - \lambda} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2n}{m} L' + \frac{(4-m)n}{mm} A' - \frac{2n}{mm} b B' \\ -\frac{2n}{mm} A - \frac{\mu b}{2mee} \frac{2,71178}{1-\lambda} + \frac{\mu}{2mee} \frac{1,07285}{1-\lambda} \\ -\frac{\mu(1+n)}{m m e e} 2,50464 - \frac{\mu b}{m m e e} 0,23399 \\ + \frac{\nu n}{m m c c} 0,06791 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{l \sin(\omega + s)}{1 + \lambda} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2n}{m} M' + \frac{(4-m)n}{mm} A' - \frac{2n}{mm} A \\ + \frac{\mu}{2mee} \frac{1,07285}{1+\lambda} - \frac{\mu(1+n)}{m m e e} 2,50464 \\ + \frac{\nu n}{m m c c} 0,06791 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{l \sin(2\omega - s)}{2 - \lambda} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2n}{m} N' + \frac{(4-m)n}{mm} B' - \frac{2n}{mm} b C' \\ -\frac{2n}{mm} B - \frac{\mu b}{2mee} \frac{2,15293}{2-\lambda} + \frac{\mu}{2mee} \frac{2,39381}{2-\lambda} \\ + \frac{\mu(1+n)}{m m e e} 0,23399 - \frac{\mu b}{m m e e} 0,10614 \\ + \frac{\nu n}{m m c c} 0,23399 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{l \sin(2\omega + s)}{2 + \lambda} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2n}{m} O' + \frac{(4-m)n}{mm} B' - \frac{2n}{mm} b A' \\ -\frac{2n}{mm} B + \frac{\mu b}{2mee} \frac{1,43786}{2+\lambda} + \frac{\mu}{2mee} \frac{2,39381}{2+\lambda} \\ + \frac{\mu(1+n)}{m m e e} 0,23399 + \frac{\mu b}{m m e e} 2,50464 \\ + \frac{\nu n}{m m c c} 0,23399 \end{array} \right\}$$

§. VII.

Recherche des inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dépendent de l'une & de l'autre excentricité à la fois.

QUOIQUE le nombre des inégalités qui dépendent des quantités k & l à la fois soit infini, il est pourtant aisé de voir, qu'il n'y a que l'angle $\omega - r + s$, qui fournisse des inégalités de quelque conséquence, toutes les autres devenant pour ainsi dire infiniment petites; à l'égard de cet angle puisque le rapport de sa différentielle, ou $1 - \kappa + \lambda$, devient presque égal à zero, les coefficients des termes qui en résultent pour les longitudes η & θ , seront extrêmement grands. Car ayant

$$\kappa = \frac{1}{m} - 0,39475 \nu - 0,0362 \nu \alpha, \text{ \& } \lambda = \frac{n}{m} - 0,29135 \mu + 0,16742 \mu b,$$

$$\kappa - \lambda = 1 - 0,39475 \nu - 0,03620 \nu \alpha + 0,29135 \mu - 0,16742 \mu b$$

& partant

$$1 - \kappa + \lambda = 0,39475 \nu - 0,29135 \mu + 0,03620 \nu \alpha + 0,16742 \mu b$$

ou bien l'angle $\omega - r + s = \eta - r - \theta + s$, se trouve en soustrayant la longitude de l'aphélie de Saturne de celle de l'aphélie de Jupiter.

On voit aussi que les inégalités de cet angle ne feront d'aucune considération pour les distances mêmes,

& qu'il sera permis par conséquent de négliger dans leur recherche les termes qui sont affectés par μ ou ν . Je pose donc pour trouver ces inégalités

$$u = \text{prec.} + k \cos. r + b l \cos. (\omega + s) + P k l \cos. (\omega - r + s)$$

$$v = \text{prec.} + l \cos. s + a k \cos. (\omega - r) + P' k l \cos. (\omega - r + s)$$

& les équations *differentio* - différentielles donneront

$$P = -\frac{m(4-3m)}{2} b (\kappa\kappa + (1+\lambda)^2) + 2mb\kappa(1+\lambda)$$

$$= -\frac{2+3m}{m} b$$

$$P' = \frac{m(4-m)}{2nn} a (\lambda\lambda + (1-\kappa)^2) + \frac{2m}{n} a \lambda (1-\kappa)$$

$$= \frac{2+m}{m} a$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules pour les longitudes produiront :

$$\eta = \text{Prec.} - \frac{3bk l \sin. (\omega - r + s)}{m(1-\kappa+\lambda)}$$

$$\theta = \text{Prec.} - \frac{3nak l \sin. (\omega - r + s)}{m(1-\kappa+\lambda)}$$

Donc si nous posons $\mu = \frac{1}{1067}$, $\nu = \frac{1}{3021}$, $\omega = \frac{1}{4}$ & $b = \frac{1}{2}$ à cause de $1 - \kappa + \lambda = -0,0000488$, ces deux inégalités deviendront à-peu-près égales, favoir ;

$$\eta = \text{Prec.} + 51450 k l \sin. (\omega - r + s)$$

$$\theta = \text{Prec.} + 51780 k l \sin. (\omega - r + s)$$

Quoique ces expressions soient très-considérables, leur effet n'est presque point sensible dans le mouvement des Planètes ; car puisque l'angle $\omega - r + s$, & partant aussi son sinus, est à peu-près constant, quel-
que

que grandes que soient ces valeurs, elles se confondront avec la longitude moyenne, & ne troubleront le mouvement, qu'en tant que l'angle $\omega - r + s$ deviendra sensiblement variable. Or je parlerai plus amplement de ces changemens dans la suite.

§. VIII.

Réflexions sur les Anomalies de Jupiter & de Saturne.

LES inégalités, que j'ai trouvées en premier lieu, & qu'on pourroit nommer la variation de ces Planètes, puisqu'elles dependent uniquement de leur distance, ou de l'angle ω , ne sont assujetties à aucun doute, & il est bien sûr qu'elles se trouvent actuellement tant dans Saturne que dans Jupiter. Mais pour les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'une ou de l'autre orbite, on sera bien surpris, que je vienne de trouver des inégalités aussi considérables, que l'équation du centre-même de ces deux Planètes; & on sera peut-être porté à rejeter entièrement mes recherches, puisqu'elles conduisent à des inégalités qui pourroient monter à plusieurs degrés.

Mais j'espère, que les réflexions suivantes ne leveront pas non-seulement ce doute, mais qu'elles nous découvriront la vraie nature des inégalités qui troublent le mouvement de ces deux planètes du côté de leur excentricité; de sorte que nous serons parfaitement éclaircis sur cet article, qui doit paroître fort bizarre à tous ceux qui travaillent sur cette matière

Je dis donc d'abord que les grandes inégalités qui paroissent troubler le mouvement d'une Planète à cause de l'excentricité de l'autre, ne produisent même aucune altération dans le mouvement régulier, selon les regles de Kepler, & que s'il n'y avoit point d'autres inégalités hormis celles ci, le mouvement des deux Planètes seroit parfaitement conforme aux regles de Kepler.

Car en effet ayant vu, que mettant l'excentricité de l'orbite de Jupiter $= k$, & partant sa distance $x = c(1 + k \cos r)$ en tant qu'elle dépend uniquement de k , la distance de Saturne au Soleil devient $y = e(1 + \alpha k \cos(\omega - r))$, il est évident que l'orbite de Saturne devient déjà fort excentrique quoique je n'aie pas encore introduit dans le calcul sa propre excentricité. De plus, il est remarquable que cette excentricité demeureroit la même, quand même l'action mutuelle des deux Planètes évanouiroit tout à fait, pourvu que les lettres μ & ν conservent entr'elles en évanouissant le même rapport. Or, dans ce cas, il est clair que Saturne suivroit exactement les regles de Kepler, il décriroit donc une ellipse, dont l'excentricité seroit $= \alpha k$, & l'anomalie $= \omega - r$, ou bien son aphélie conviendrait avec celui de l'orbite de Jupiter. Ainsi, aussi-tôt que nous supposons excentrique l'orbite de Jupiter, le calcul nous marque celle de Saturne aussi excentrique, dont l'excentricité tient un rapport constant à celle de Jupiter, savoir comme α à 1; & qui se rapporte au même aphélie, & l'une & l'autre Planète suivroit les regles de Kepler, à moins que leur mouvement ne soit dérangé par les autres inégalités.

Or nonobstant cela Saturne peut avoir une excentricité propre, & un aphélie particulier; & alors ces deux excentricités se réunissent dans une seule, selon laquelle il décrira une ellipse conformement aux re-

gles de Kepler, comme je ferai voir bien-tôt. Et partant l'aphélie & l'excentricité que les tables marquent pour l'orbite de Saturne ne sont pas son propre aphélie & son excentricité, mais plutôt le resultat des deux excentricités de celle qui lui est propre, & de celle qui lui convient à cause de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

Le mouvement de Saturne se regle donc sur deux aphélies à la fois savoir sur celui de Jupiter, & sur le sien; en conséquence il y aura aussi deux anomalies, l'une qui regarde l'aphélie de Jupiter, & l'autre qui regarde l'aphélie de Saturne. Donc si nous nommons la longitude de l'aphélie de Jupiter = ρ , & la longitude de l'aphélie de Saturne = σ , le mouvement de Saturne en tant qu'il depend de cette double anomalie sa longitude étant = θ , sera déterminé par cette distance :

$$y = e (1 + l \cos. (\theta - \sigma) + ak \cos. (\theta - \rho))$$

Pareillement le mouvement de Jupiter dependra d'une double anomalie, lequel sera déterminé par cette expression de sa distance au Soleil.

$$x = c (1 + k \cos. (x - \rho) + b l \cos. (x - \sigma))$$

Or je dis que cette double anomalie produira le même effet, que si chaque Planète, selon les regles de Kepler, n'étoit assujettie qu'à une seule anomalie, qui sera celle qu'on découvre par les observations, & que je nommerai son anomalie apparente.

Soit donc R la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter, & K son excentricité apparente, soit de plus S la longitude de l'aphélie apparent de Saturne, & L son excentricité, ce sont les élémens, que les observations nous donnent immédiatement à connoître : &

je dis qu'on peut toujours déterminer ces élémens appa-
rens R , K , S & L , de maniere qu'on ait :

$$k \cos. (\eta - \rho) + b l \cos. (\eta - \sigma) = K \cos. (\eta - R)$$

$$l \cos. (\theta - \sigma) + a k \cos. (\theta - \rho) = L \cos. (\theta - S)$$

& qu'on ait autre cela :

$$k \sin. (\eta - \rho) + b l \sin. (\eta - \sigma) = K \sin. (\eta - R)$$

$$l \sin. (\theta - \sigma) + a k \sin. (\theta - \rho) = L \sin. (\theta - S)$$

Car quand j'aurai prouvé cela, il sera évident qu'on peut substituer cette anomalie apparente au lieu des deux anomalies auxquelles j'ai été conduit par la théorie, & partant on conviendra que les inégalités de cette espece, que la théorie a fournies, ne troublent rien dans le mouvement régulier des Planètes, selon les regles de Kepler.

Or pour satisfaire aux égalités proposées, en éliminant les longitudes η & θ , on obtiendra,

$$k \cos. \rho + b l \cos. \sigma = K \cos. R$$

$$l \cos. \sigma + a k \cos. \rho = L \cos. S$$

$$k \sin. \rho + b l \sin. \sigma = K \sin. R$$

$$l \sin. \sigma + a k \sin. \rho = L \sin. S$$

d'où l'on tire ;

$$K K = k k + b b l l + 2 b k l \cos. (\rho - \sigma)$$

$$L L = l l + a a k k + 2 a k l \cos. (\rho - \sigma)$$

$$\& \text{tang. } R = \frac{k \sin. \rho + b l \sin. \sigma}{k \cos. \rho + b l \cos. \sigma}; \text{ tang. } S = \frac{l \sin. \sigma + a k \sin. \rho}{l \cos. \sigma + a k \cos. \rho}$$

Donc si les deux anomalies réelles de chaque Planète étoient connues, on trouveroit par le moyen de ces formules l'anomalie apparente de chacune, de même que le lieu apparent de l'une & de l'autre aphélie.

Mais

DU MOUVEMENT DE JUPITER ET DE SATURNE. 65

Mais puisque nous connoissons par les observations les élémens apparens K, L, R & S , nous devons plutôt chercher les élémens vrais k, l, ρ & σ , pour nous mettre en état d'en déterminer ensuite les inégalités, dont le mouvement de deux Planètes se trouve dérangé. Pour cet effet je tire de nos formules les égalités suivantes.

$$(ab - 1) k \cos. \rho = b L \cos. S - K \cos. R$$

$$(ab - 1) l \cos. \sigma = a K \cos. R - L \cos. S$$

$$(ab - 1) k \sin. \rho = b L \sin. S - K \sin. R$$

$$(ab - 1) l \sin. \sigma = a K \sin. R - L \sin. S.$$

d'où l'on déduit aisément.

$$(ab - 1)^2 k k = b b L L + K K - 2 b K L \cos. (R - S)$$

$$(ab - 1)^2 l l = a a K K + L L - 2 a K L \cos. (R - S)$$

$$\text{tang. } \rho = \frac{b L \sin. S - K \sin. R}{b L \cos. S - K \cos. R} \quad \text{tang. } \sigma = \frac{a K \sin. R - L \sin. S}{a K \cos. R - L \cos. S}$$

Or les Tables Astronomiques de M. Cassini marquent pour l'époque de 1700, le lieu de l'aphélie.

$$\left. \begin{array}{l} \text{de Jupiter } R = 6^s \ 9^o \ 26' \ 42'' \\ \text{de Saturne } S = 3 \ 28 \ 8 \ 39. \end{array} \right\}$$

& de-là on tire:

$$\text{tang. } K = 8, 6832165, \quad \text{tang. } L = 8, 7559031.$$

Posant donc comme j'ai trouvé $a = \frac{1}{4}$, & $b = \frac{1}{2}$; on obtiendra:

$$\rho = 5^s \ 6^o \ 12' \quad \& \quad \sigma = 10^s \ 20^o \ 45'$$

& pour les excentricités vraies on aura:

$$k = 0, 13595 \quad \& \quad l = 0, 19840.$$

Prix de 1752.

R

qui sont par conséquent beaucoup plus grandes que les excentricités apparentes.

Je ne doute pas, qu'on ne regarde cette double anomalie, comme un grand défaut de ma méthode, & puisque ces deux anomalies se peuvent réduire à une seule, on pensera qu'une méthode, qui n'eût donné que cette seule anomalie auroit été préférable; mais outre qu'il est absolument nécessaire, qu'on parvienne à une double anomalie, si l'on veut suivre exactement les principes de la mécanique, on verra d'abord que cette double anomalie nous fournit des éclaircissimens, qui ne seroient pas compatibles avec une seule anomalie. Car premierement, puisque les deux aphélies n'avancent pas également, l'angle $\rho - \sigma$ fera variable, & partant les excentricités apparentes K & L changeront continuellement, d'où il résulte une variation perpétuelle dans l'équation elliptique des deux Planètes.

Le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter ayant été trouvé de $60''$, & celui de Saturne de $64''$ par rapport aux équinoxes, l'angle $\rho - \sigma$ décroît tout les ans de $4''$. Or en 1700 il étoit $\rho - \sigma = 6^{\circ}, 15', 27'$ donc puisque cet angle décroît chaque année de $4''$, son cosinus, qui est négatif croîtra, ou le terme $\cos. (\rho - \sigma)$ à soustraire dans les formules trouvées pour K & L deviendra plus grand. Par conséquent les excentricités apparentes tant de Jupiter que de Saturne vont en décroissant, & partant aussi leurs équations du centre.

Cette diminution de l'excentricité ayant été mise hors de doute dans la pièce, qui a remporté le prix sur cette question, à l'égard de Saturne, je crois, que je me puis dispenser de démontrer plus amplement

On remarquera de plus, que cette diminution n'est pas constante, puisqu'elle est proportionnelle au sinus de l'angle $\rho - \sigma$, & parce que cet angle devient insensiblement plus petit, la diminution mentionnée va en décroissant. Mais puisque le changement de l'angle $\rho - \sigma$ ne monte à un degré, que dans l'espace de 900 ans, on peut, sans aucune erreur sensible, regarder cette diminution comme uniforme.

Par la même méthode on pourra aussi déterminer le mouvement annuel de l'aphélie apparent tant de Jupiter que de Saturne; car marquant ce mouvement annuel par les différentielles dR & dS , on aura par la différentiation.

$$dR = \frac{kkdp + bllld\sigma + bkl(dp + d\sigma)\cos.(\rho - \sigma)}{KK}$$

$$dS = \frac{lld\sigma + \alpha akkdp + \alpha kl(dp + d\sigma)\cos.(\rho - \sigma)}{LL}$$

& ces formules se changent dans celles-ci:

$$\begin{aligned} dR &= \frac{1}{2}(d\rho + d\sigma) - \frac{1}{2}(d\sigma - d\rho) \frac{kk - bll}{KK} \\ &= 62'' - 7, 4736'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2}(d\rho + d\sigma) + \frac{1}{2}(d\sigma - d\rho) \frac{ll - \alpha akk}{LL} \\ &= 62 + 6, 4522'' \end{aligned}$$

Donc l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de $55''$ & celui de Saturne avancera chaque année de $68''$ ce qui approche déjà d'avantage du mouvement marqué dans les Tables Astronomiques de M. Cassini.

§. IX.

*Du tems périodique des Planètes de Jupiter
& de Saturne, & de leurs distances moyennes au Soleil.*

LES grands termes, que j'ai trouvés dans l'article VII, qui dépendent de l'angle $\omega - r + s$, se réduisent à l'angle $\rho - \sigma$, posant ρ pour la longitude de l'aphélie de Jupiter, & σ pour celle de l'aphélie de Saturne, où il faut entendre les aphélies vrais, & non pas les apparens. Donc les longitudes vraies de Jupiter & de Saturne η & θ renfermeront ces termes dépendans de l'angle $\rho - \sigma$.

$$\eta = \text{Prec.} + 51450 \text{ kl sin.}(\rho - \sigma)$$

$$\theta = \text{Prec.} + 51780 \text{ kl sin.}(\rho - \sigma)$$

où l'on voit d'abord que la valeur de ces termes, réduite en degré, deviendroit horriblement grande.

Mais quelque grande que soit cette valeur, il est certain que si l'angle $\rho - \sigma$ demeureroit constant, il n'en résulteroit aucun dérangement dans le mouvement des Planètes, puisque la valeur de ces termes seroit détruite par l'addition des quantités constantes, que l'intégration des formules $d\eta - dp$, & $d\theta - dq$ exige.

Ces termes n'entrent donc en considération, qu'en tant que l'angle $\rho - \sigma$ est variable. Or nous venons de voir que cet angle décroît chaque année de $4''$; donc si la valeur de ces termes à été détruite en 1700

Prix de 1752.

§

par l'addition des constantes, on aura pour l'année suivante 1701, à cause de $\rho - \sigma = 6', 15'', 27'$

$$\begin{aligned} \eta &= \text{Prec.} - 4''.51450 k l \cos.(\rho - \sigma) \\ \theta &= \text{Prec.} - 4''.51780 k l \cos.(\rho - \sigma) \end{aligned} \} = \text{Prec.} + 5355''$$

Et partant si la même quantité accroissoit après chaque année, après un espace de n années depuis l'époque 1700, la longitude des Planètes devroit être avancée de $5355 n$ secondes. Or cette quantité ne troubleroit pas non plus le mouvement régulier des Planètes, puisqu'elle ne fait que diminuer d'une quantité constante leurs tems périodiques, qui étant une fois bien établis par les observations, ce terme n'y apporteroit plus de changement.

Mais puisque cet accroissement annuel de $5355''$ ne demeure pas toujours le même, vu qu'il dépend de l'angle $\rho - \sigma$, on voit qu'après un grand nombre d'années, il doit souffrir un changement considérable. En effet on trouvera qu'après neuf siècles où l'angle $\rho - \sigma$ sera diminué d'un degré, cet accroissement annuel devient $= 5355'' + 25''$; ou l'accroissement depuis l'année 2600 jusqu'à l'année 2601 sera de $5380''$. Donc après un intervalle de n ans depuis l'époque 1700 l'accroissement de la longitude ne sera plus $= 5355 n''$, mais on le trouvera $= 5355 n'' + \frac{1}{70} n n''$, & encore plus exactement $= 5355 n'' + \frac{1000 n n''}{96803}$

$\frac{n^2}{2989900.}$

Or comme le premier terme ne fait que diminuer les tems périodiques d'une quantité constante, si nous supposons que le mouvement moyen des deux Planètes ait été bien réglé pour l'année 1700, les longitudes moyennes qu'on en tire pour tout autre tems ne

DU MOUVEMENT DE JUPITER ET DE SATURNE. 71

seront plus justes , mais à l'année $1700 + n$, il faudra ajouter à la longitude moyenne $\frac{1000 n n}{69853} - \frac{n^3}{2989900}$ secondes, & cette correction sera la même pour Jupiter & Saturne.

Correction des longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne, calculée sur le mouvement moyen de l'année 1700.

L'an ajoutez.		L'an ajoutez.		Avant l'Ere Chr.	
L'an	ajoutez.	L'an	ajoutez.	L'an	ajoutez.
1700	0' 0	1700	00 0' 0"	0	110 57' 16"
1710	0 1	1600	0 2 24	100	13 25 56
1720	0 6	1500	0 9 36	200	14 59 58
1730	0 13	1400	0 21 38	300	16 39 25
1740	0 23	1300	0 38 33	400	18 24 19
1750	0 36	1200	1 0 23	500	20 14 41
1760	0 52	1100	1 27 9	600	22 10 33
1770	1 10	1000	1 58 53	700	24 11 58
1780	1 32	900	2 35 38	800	26 18 58
1790	1 56	800	3 17 26	900	28 31 34
1800	2 23	700	4 6 18	1000	30 49 48
1810	2 53	600	4 56 36	1100	33 13 43
1820	3 26	500	5 53 23	1200	35 43 21
1830	4 2	400	6 55 41	1300	38 18 43
1840	4 41	300	8 3 11	1400	40 59 51
1850	5 23	200	9 15 55	1500	43 46 48
1860	6 8	100	10 33 56	1600	46 39 35
1870	6 56	0	11 57 16	1700	49 38 15

Nous voyons donc que le mouvement moyen de deux Planètes devient continuellement plus rapide, ou que leurs tems périodiques diminuent; & que cela est l'effet de l'action mutuelle de ces deux Planètes.

Mais puisque cet effet dépend de l'angle $\rho - \sigma$, on comprend qu'il pourroit être tout contraire, & qu'il le sera effectivement après environ 150 siècles. Par conséquent il faut bien distinguer cette diminution des tems périodiques, de celle qui pourroit être causée par la résistance de l'éther, s'il y en a une.

On remarquera aussi, que pour bien connoître le mouvement moyen de ces deux planètes par les observations, la méthode ordinaire, où l'on compare les observations de notre tems avec les plus anciennes, n'est pas sûre, puisqu'elle ne nous decouvre ni le mouvement moyen, qui subsiste à présent, ni celui qui a subsisté au tems des anciennes observations, mais plutôt un certain milieu.

Mais par le moyen de la table que je viens de donner, on peut profiter de toutes les observations pour en conclure le vrai mouvement moyen pour un tems proposé. Car si l'on veut comparer une observation faite l'an 100 avec une de l'an 1700, il faut retrancher $10^{\circ} 33' 56''$ de la longitude observée en 100, & alors la comparaison de ce lieu corrigé avec le lieu observé en 1700, nous donnera le mouvement moyen pour l'année 1700.

C'est sans doute la raison pourquoi les Astronomes sont si peu d'accord sur le mouvement moyen de ces deux Planètes. Car si l'on compare le mouvement moyen séculaire des Tables de M. Cassini avec celui des Tables angloises publiées par Leadbetter, on aura

	de Jupiter	de Saturne
Cassini	5', 6°, 21', 30''	4', 23°, 29', 28''
Leadbetter	5, 6, 28, 11.	4, 23, 6, 0.

Il en est de même de l'excentricité apparente de ces deux Planètes; car puisqu'elle est variable, comme j'ai fait voir, il n'est pas surprenant, que les tables astronomiques ne soient pas d'accord sur cet article.

Or puisque le tems périodique de nos deux Planètes est variable, leurs distances moyennes au Soleil le seront aussi, ce qui vaudra la peine examiné plus soigneusement. Or considérant l'angle $\omega - r + s$, ou $\rho - \sigma$ comme constant, nous aurons

$$f = \frac{4-3m}{2m} (kk + bb ll) + 3 bkl \cos. (\rho - \sigma)$$

$$g = - \frac{(4-m)}{2m} (ll + \alpha \alpha kk) + 3 \alpha kl \cos. (\rho - \sigma)$$

& ces valeurs étant substituées dans les termes constans que fournissent les équations *differentio-différentielles*, donneront

$$\frac{1+\mu}{c^3} = 1 + 0,12018 \nu + \frac{3(2-m)}{2m} kk + bb ll + 6 bkl \cos. (\rho - \sigma)$$

$$\frac{1+\nu}{nne^3} = 1 - 1,31005 \mu - \frac{3(2-m)}{2m} (ll + \alpha \alpha kk) + 6 \alpha kl \cos. (\rho - \sigma)$$

Le terme *cos. (ρ - σ)* étant négatif & devenant après chaque révolution plus grand, il semble que les valeurs de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nne^3}$ vont en diminuant, & partant les distances moyennes mêmes *c* & *e* en augmentant, pendant que les tems périodiques décroissent, ce qui seroit une absurdité manifeste. Or il faut se souvenir, que j'ai pris l'unité pour marquer la distance moyenne d'une orbite planétaire, dont le tems périodique dans la simple hypothèse de Kepler seroit égal

au vrai tems périodique de Jupiter. Donc puisque ce tems est variable, il est évident que la variabilité du terme *cos.* ($\rho - \sigma$) marque plutôt la variabilité de notre unité, que celle des distances c & e . Car posant a au lieu de cette unité, pour marquer la distance moyenne dans l'hypothèse simple de Kepler, qui convient au tems périodique de Jupiter, il faudra écrire au lieu de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nee^3}$ ces formes $\frac{(1+\mu)a^3}{c^3}$ & $\frac{(1+\nu)a^3}{nee^3}$ de sorte que la diminution successive causée par le terme *cos.* ($\rho - \sigma$), nous marquera la diminution de la quantité a ; ce qui est très-conforme à la théorie.

Mais il est à remarquer qu'il n'est pas permis d'introduire dans la valeur des quantités constantes f & g le terme *cos.* ($\rho - \sigma$), en tant qu'il est variable, puisque sa variabilité doit être plutôt rangée aux termes variables de nos formules. Et la valeur de *cos.* ($\rho - \sigma$), pouvant changer de $+1$ à -1 , sa valeur moyenne sera $= 0$, d'où l'on voit que la lettre a , ou l'unité que j'ai mise à sa place, doit marquer la distance moyenne qui convient dans l'hypothèse de Kepler, au tems périodique de Jupiter lorsque l'angle $\rho - \sigma$ est aux 90° , ou de 270° . Mais les lettres c & e marqueront des quantités constantes, comme la nature du calcul l'exige, or les vraies distances x & y , en tant qu'elles dépendent de la variabilité de $\rho - \sigma$, feront

$$x = c \left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k l \cos.(\rho - \sigma) \right)$$

$$y = e \left(1 + \frac{(2+m)}{m} a k l \cos.(\rho - \sigma) \right)$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer le changement, que les distances des Planètes au Soleil subissent, en tant qu'elles dépendent uniquement de

l'angle $\rho - \sigma$ ou du tems périodique, ou plutôt du mouvement moyen, qui convient, aux Planètes à chaque tems proposé. Or quifque $2 > 3m$, nous voyons que la distance de Jupiter au Soleil va en augmentant, & celle de Saturne en diminuant, quoique le mouvement moyen de l'un & de l'autre s'accélere, ou que leurs tems périodiques deviennent plus petits.

Or, pour ce qui regarde la valeur de notre unité, qui répond au mouvement moyen que Jupiter aura lorsque l'angle $\rho - \sigma$ deviendra $= 90^\circ$, ou $= 270^\circ$, il fera aisé de la trouver par ce que j'ai rapporté au commencement de cet article. Car soit Q le mouvement moyen annuel de Jupiter lorsque $\cos. (\rho - \sigma) = 0$, & son mouvement annuel moyen sera pour l'année $1700 = Q + 5355''$, qui est, suivant les observations $= 109238''$; d'où il s'ensuit $Q + 103883'' = 28^\circ 51' 23''$. Donc dans le tems où $\cos. (\rho - \sigma) = 0$, le mouvement moyen annuel de Jupiter est $28^\circ 51' 23''$, & c'est conformément au tems périodique qui répond à ce mouvement moyen, qu'il faut déterminer la valeur de notre unité a . Posant donc la distance moyenne de la terre au soleil $= 100000$, puisque la distance moyenne de Jupiter au Soleil est conclue conformément au mouvement moyen qu'il tient à présent $= 520098$, la valeur de notre unité sera $= 520098 \left(\frac{09238}{10883} \right)^{\frac{2}{3}} = 537821$. Ensuite l'excentricité ne changeant rien dans la distance moyenne, ou la moitié du grand axe de l'orbite, si nous prenons c & e pour marquer les demi-grands axes des orbites de Jupiter & de Saturne en tant qu'ils sont altérés par l'action mutuelle des Planètes, nous aurons :

$$c = 537821 \sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0,120181}}$$

$$e = \frac{517821}{\sqrt[3]{nn}} \sqrt{\frac{1+v}{1-1,3005\mu}}$$

Puisque l'angle $\rho - \sigma$ est à présent $6^{\circ} 15' 27''$, & qu'il diminue tous les ans de $4''$, il aura été de 9° , avant 67100 ans, & alors le mouvement moyen annuel de Jupiter à été $28^{\circ} 51' 23''$, & celui de Saturne $10^{\circ} 43' 15''$. A présent le mouvement moyen annuel de Jupiter est $30^{\circ} 20' 38''$, & celui de Saturne $12^{\circ} 13' 30''$. Or après 13900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter fera $30^{\circ} 23' 58''$, & de Saturne $12^{\circ} 16' 0''$, mais après 94900 ans celui de Jupiter redevient $28^{\circ} 51' 23''$, & de Saturne $10^{\circ} 43' 15''$; or après 175900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter fera $27^{\circ} 18' 48''$, & de Saturne $9^{\circ} 10' 50''$; & alors leur mouvement sera le plus lent; après il fera derechef accéléré, & après l'espace de 324000 années il redeviendra le même qu'il est aujourd'hui.

Comme la révolution de ces variations ne s'acheve que dans l'espace de 324000 ans, on comprendra aisément qu'il seroit possible, que ce tems devint infini, ou que les variations allassent toujours ou en croissant, ou en décroissant: & que cette circonstance dépend de la valeur des quantités μ & ν . Dans ce cas il est évident, que les inégalités ne sauroient plus être exprimées par des sinus, ou cosinus des angles, & c'est précisément le cas qu'on rencontre lorsque la valeur de b devient imaginaire, comme j'ai remarqué ci-dessus.

Puisque la valeur de b est devenue effectivement imaginaire, ayant posé $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$, & que pour éviter les angles imaginaires, qui se reduiroient à des quantités exponentielles réelles, j'ai changé tant soit

soit peu les valeurs de μ & ν , il s'ensuit que si ces valeurs de μ & ν étoient justes, les variations, que je viens de développer, ne retourneroient jamais au même état, mais qu'elles iroient à l'infini. Et si ce cas avoit actuellement lieu dans la nature, je dois avouer, que je serois bien éloigné de la résolution de la question proposée, & que je ne vois pas même encore de quelle méthode on devroit se servir pour déterminer toutes les variations, que ces deux Planètes souffriroient dans tous les siècles à venir.

Mais comme il ne s'agit que de leur mouvement qu'elles suivent pendant le cours d'un petit nombre de siècles, je me flatte que ma méthode est parfaitement bonne; car puisque je n'ai changé que fort peu la valeur des lettres μ & ν dans la détermination de b , cette différence ne sauroit produire une erreur sensible dans un espace de quelques siècles, quoique l'erreur, qui en resulteroit pour un tems infini, pût devenir infinie.

Par cette raison je n'ai pas hésité de présenter ma méthode à l'examen de l'illustre Académie Royale, d'autant plus qu'elle m'a conduit à la découverte de cette importante circonstance, par laquelle nous voyons, que ce probleme est beaucoup plus difficile, qu'il n'auroit pû paroître au commencement, & qu'il pourroit même devenir impossible à résoudre par aucun esprit humain, si les orbites de ces deux Planètes étoient plus proches entr'elles, ou que leurs masses fussent plus grandes. Mais dans l'état où ces deux Planètes se trouvent, il me semble que la recherche de leur mouvement est encore en quelque sorte proportionnée aux bornes de nos lumières, pourvu qu'on ne veuille pas se hasarder d'étendre ces recherches sur un trop grand nombre de siècles.

Il est à-peu-près de même de cette question, que de celle sur les inégalités de la Lune, car quoiqu'on soit assez heureusement venu à bout de cette recherche, tous ceux qui ont travaillé sur cette matière seront obligés d'avouer, qu'il seroit possible que nous ne fussions en état de découvrir presque rien à l'égard de son mouvement. Car si la Lune étoit quelque fois plus éloignée de la terre, qu'elle n'est actuellement, ou si l'excentricité de son orbite étoit plus grande qu'elle n'est, ou enfin si l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique étoit plus grande, je doute fort, qu'aucun homme eût assez de pénétration pour découvrir les inégalités de son mouvement. Or on conviendra qu'une telle disposition de la Lune auroit été aussi bien possible, que celle où elle se trouve actuellement. Il semble donc que le Créateur a voulu tellement arranger ces objets de nos recherches, qu'ils ne surpassent pas entièrement nos forces, de sorte que nous en puissions approcher de plus en plus, à mesure que nous avançons dans les sciences, sans pourtant que nous fussions jamais en état de les atteindre parfaitement. C'est, à mon avis, par cette raison, que les Planètes ne se meuvent pas selon les regles de Kepler, car alors nous serions depuis long tems au bout de nos recherches à l'égard du mouvement des corps célestes.

§ X.

Des autres inégalités, qui se trouvent dans le mouvement des Planètes de Jupiter & de Saturne.

DE ce que je viens d'exposer on est en état de déterminer le mouvement moyen de ces deux Planètes

pour chaque année, pourvu que ce tems ne soit pas trop éloigné de notre siècle, ou que l'intervalle du tems ne monte pas à plusieurs milliers d'années, puisque alors mes formules se pourroient trop écarter de la vérité. En second lieu nous sommes en état de marquer pour chaque année proposée le lieu de l'aphélie apparent de l'une & de l'autre Planète, sachant de combien l'un & l'autre aphélie avance par an, savoir celui de Jupiter de $55''$, & celui de Saturne de $68''$. En troisième lieu nous pouvons déterminer pour chaque année proposée l'excentricité apparente des deux orbites, ayant trouvé que la plus grande équation elliptique de Jupiter décroît par an de $35'''$, & celle de Saturne de $1''$, $15'''$. Donc quand on aura déterminé par les observations pour une époque fixe tant les longitudes moyennes de ces deux Planètes, que leur mouvement moyen pour ce tems, le lieu de leurs aphélies apparens & leur excentricité, on connoîtra ces mêmes élémens pour tout autre tems, & partant on fera en état de dresser des tables, qui marqueront l'équation elliptique de ces deux Planètes, en se servant de la solution du problème de Kepler dans ce calcul. Or ces tables calculées tant pour les distances des Planètes au Soleil, que pour leurs longitudes; renfermeront déjà tous les termes de nos formules trouvées ci-dessus, qui ne contiennent pas ouvertement les lettres μ & ν , & outre cela encore les termes, qui dépendent des multiples de leurs anomalies, que je n'ai pas même développé dans le calcul pour l'excentricité de Saturne, ayant déjà prévu dans le calcul de l'excentricité de Jupiter, que les termes $A k k \cos. 2r$, $akk \cos. \omega$, $K'kk(\omega - r)$, $f'kk(2\omega - 2r)$, $a'kk \cos. \omega$, $K'kk \cos.(\omega - 2r)$, & ceux qui renfermeroient de plus hautes puissances de k se réduisent tous à l'équation elliptique calculée sur l'excentricité apparente,

& sur le lieu apparent de l'aphélie, de sorte qu'il seroit superflu de chercher soigneusement ces termes.

Donc après l'équation elliptique, nous n'aurons à considérer que les termes qui dépendent ouvertement de l'une au l'autre des petites quantités μ & ν , qui sont de deux especes, l'une qui est indépendante des excentricités, & qui donne la variation des deux Planètes, & l'autre qui depend outre cela de l'une de ces excentricités. J'ai d'abord au commencement développé les inégalités de la premiere espece, mais je le répéterai ici, puisque le calcul suivant y a apporté quelque petite correction. Donc nous aurons pour les distances, ayant bien fixé, suivant l'article précédent, les distances moyennes c & e

$$\frac{x}{c} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0,43472\nu \cos.\omega - 0,19440\nu \cos.3\omega \\ - 1,88047\nu \cos.2\omega - 0,05047\nu \cos.4\omega$$

$$\frac{y}{c} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0,90959\mu \cos.\omega + 0,03572\mu \cos.3\omega \\ + 0,15435\mu \cos.2\omega + 0,01116\mu \cos.3\omega$$

où il y aura:

$$c = 537821 \left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k l \cos.(p-\sigma) \right) \sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0,12018\nu}}$$

$$e = \frac{537821}{\sqrt[3]{n}} \left(1 + \frac{(2+m)}{m} \alpha k l \cos.(p-\sigma) \right) \sqrt[3]{\frac{1+\nu}{1-1,31005\mu}}$$

Or les longitudes seront:

$$\eta = p + \text{l'éq. ellipt.} - 1,34665\nu \sin.\omega + 0,27615\nu \sin.3\omega \\ + 3,34343\nu \sin.2\omega + 0,06193\nu \sin.4\omega$$

$$\theta = q + \text{l'éq. ellipt.} + 0,02035\mu \sin.\omega - 0,03365\mu \sin.3\omega \\ - 0,16222\mu \sin.2\omega - 0,00990\mu \sin.4\omega$$

Par-là

Par-là on aura déjà les lieux des Planètes corrigés tant par leur vraie équation elliptique, que par la variation. Mais pour les autres inégalités qui restent encore, on aura pour les distances:

$$\begin{aligned} \frac{x}{e} = \text{Prec.} &+ F k \text{ cof. } (\omega - r) + G k \text{ cof. } (\omega + r) \\ &+ E l \text{ cof. } s && + H k \text{ cof. } (2\omega - r) \\ &&& + I k \text{ cof. } (2\omega + r) \\ &&& + L l \text{ cof. } (\omega - s) \\ &&& + N l \text{ cof. } (2\omega - s) \\ &&& + O l \text{ cof. } (2\omega + s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{e} = \text{Prec.} &+ E' k \text{ cof. } r && + G' k \text{ cof. } (\omega + r) \\ &+ L' l \text{ cof. } (\omega - s) && + H' k \text{ cof. } (2\omega - r) \\ &&& + I' k \text{ cof. } (2\omega + r) \\ &&& + M' l \text{ cof. } (\omega + s) \\ &&& + N' l \text{ cof. } (2\omega - s) \\ &&& + O' l \text{ cof. } (2\omega + s) \end{aligned}$$

& les valeurs de ces coefficients se tirent des égalités, que les équations différentielles nous ont fournies précédemment, de sorte que de ce côté il n'y a aucune difficulté.

Or pour les longitudes η & θ , il faut ajouter aux valeurs déjà données, premièrement les termes trouvés dans l'article V, & ensuite les termes rapportés dans l'article VI, à l'exception des deux membres marqués d'une étoile * pour ces derniers, puisque ceux-ci sont déjà compris dans l'équation elliptique, de sorte qu'on aura alors toutes les inégalités qui paroissent de quelque conséquence; car il est clair que le nombre de toutes les inégalités monte actuellement à l'infini.

Mais pour le calcul de ces coefficients, outre que
Prix de 1752. X

les valeurs des lettres $m, n, c, e, \kappa, \lambda, a$ & b sont connues, il faut principalement remarquer que les lettres k & l ne marquent pas les excentricités apparentes, ou celles qu'on conclut immédiatement des observations, mais plutôt les excentricités vraies, que j'ai conclues des apparentes, en sorte qu'il soit :

$$k = 0, 13595, \quad \& l = 0, 19840.$$

Ensuite pour les anomalies r & s il ne faut pas prendre non plus celles qui se rapportent aux aphélie's apparens, mais celles auxquelles conduissent les lieux des aphélie's vrais, que j'ai fixés pour l'époque 1700, celui de Jupiter à $5^{\circ} 6' 12''$, & de Saturne à $10^{\circ} 20' 45''$. Donc puisque la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter pour la même époque est $6^{\circ} 9' 27''$, & de Saturne $8^{\circ} 28' 9''$, il sera aisé de déduire les anomalies véritables r & s , dont il faut se servir dans ces dernières inégalités, des anomalies apparentes, qu'on tire des lieux des aphélie's apparens, en soustrayant la longitude de l'aphélie de celle de la Planète. Car pour Jupiter on aura :

son anomalie véritable $r =$ à l'anomalie apparente
 $+ 43^{\circ} 15'$

& pour Saturne on aura :

son anomalie véritable $s =$ à l'anomalie apparente
 $- 52^{\circ} 36'$

D'où l'on voit que les valeurs de ces dernières inégalités deviendront tout autres, que si l'on y employoit les anomalies apparentes. Il n'y a donc aucun doute, que de cette manière on approchera beaucoup plus de la vérité ; puisqu'on voit par la Piece de M. Euler sur cette matière, qu'en se servant des anomalies apparentes, de quelque manière qu'on détermine les

coëfficiens des termes pour le calcul de Saturne $\sin. r$, $\sin. (\omega - s)$, $\sin. (\omega + s)$, $\sin. (2\omega - s)$, $\sin. (2\omega - r)$, $\sin. (2\omega + s)$, on ne fauroit jamais tellement satisfaire aux observations, que le calcul ne s'en écarte quelquefois de plusieurs minutes.

Enfin quoique les lettres r & s ne marquent ni les anomalies moyennes, ni les excentriques, ni les vraies, mais une nouvelle espece d'anomalies telles, que leurs différentielles $d r$ & $d s$ soient à la différentielle $d \omega$ dans un rapport constant, on peut pourtant sans aucune erreur, prendre à volonté pour r & s les anomalies moyennes, ou excentriques, ou vraies, qui résultent des aphélies vrais. Car quoique ces anomalies puissent différer entr'elles de quelques degrés, il n'en resultera pas dans les inégalités, qui en découlent, une différence sensible. Car, quelque soit l'anomalie, qu'on voudroit introduire dans le calcul on trouveroit toujours pour ces termes les mêmes coëfficiens; & la différence ne paroîtroit que dans les termes suivans, qui contiendroient les doubles ou triples des anomalies r & s . Or puisque nous avons négligé ces termes à cause de leur petitesse, il est clair, qu'il est indifférent, de quelle espece d'anomalie on voudra se servir.

Je crois que j'ennuyerois mes Juges, si je voulois calculer en nombres tous ces coëfficiens, vû que le calcul en deviendroit exrrêmement long & pénible. Car puisqu'on est à présent tout à fait convaincu que toutes les inégalités qui se peuvent trouver dans le mouvement des corps celestes, sont parfaitement d'accord avec le principe de l'attraction universelle établi par le grand Newton, en vertu duquel tous les corps celestes s'attirent mutuellement en raison directe de leurs masses, reciproque du quarré de leurs distances; il ne s'agit pas tant à mon avis, de produire des formules, qui

satisfassent aux observations, que de découvrir plutôt les inégalités, qui sont conformes à la théorie; & dès qu'on est assuré, que ces inégalités suivent nécessairement de la théorie, on ne sauroit plus douter de leur accord avec l'expérience. Pour preuve de cela la Lune nous sert d'exemple; l'on fait maintenant, que plus le calcul, qu'on fait sur cette Planète, est conforme à la théorie, plus aussi il satisfait aux phénomènes. Or je me flatte, que la méthode dont je me suis servi dans cette recherche, est tellement naturelle & conforme à la théorie, qu'on ne sauroit douter de la vérité des conséquences, qu'elle m'a fournies, d'autant plus que le mouvement de l'aphélie, & la diminution de l'excentricité apparente, qu'aucune autre méthode ne sauroit même à peine découvrir, est parfaitement d'accord avec les observations. Cependant je souhaiterois bien comparer mon calcul avec des observations, si j'en pouvois trouver d'assez exactes, & même faites dans un assez long intervalle de tems; mais comme c'est une chose qui m'est impossible, je me vois obligé de borner mes recherches à ce que mes lumières m'ont permis de conclure de la théorie sur la Question proposée.

Fin du N^o. 2. 1752.



Manière de suppléer à l'action du Vent, par M. Bernoulli

Figure 1^{re}

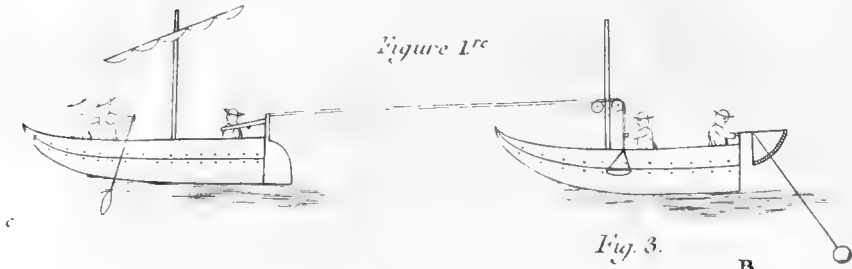


Fig. 3.

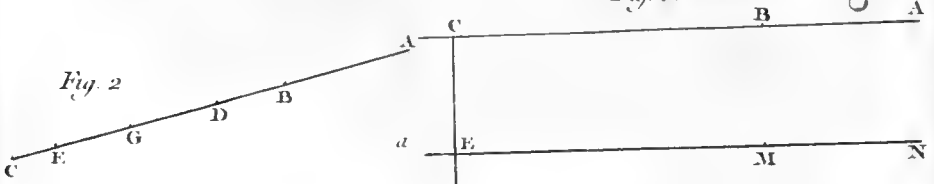


Fig. 2

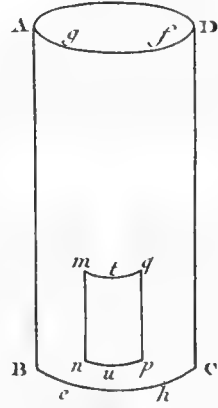
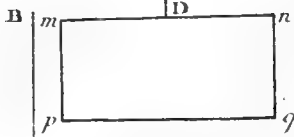


Fig. 5.

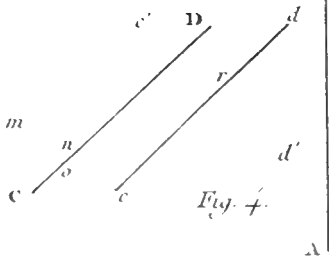
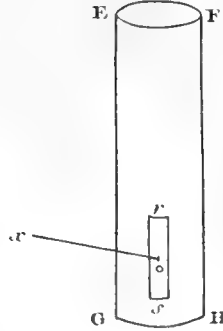


Fig. 6.



RECHERCHES

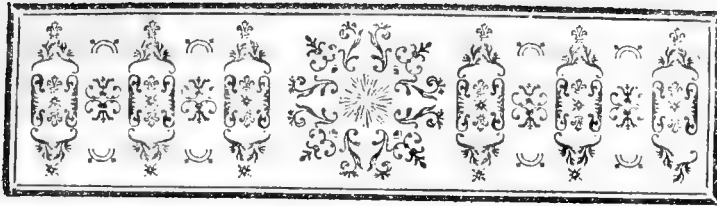
Sur la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du Vent sur les grands Vaisseaux, soit en y appliquant les Rames , soit en y employant quelqu'autre moyen que ce puisse être.

FONDÉES

Sur une nouvelle Théorie de l'économie des forces & des effets.

Pièce qui a remporté le Prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1753.

Par M. DANIEL BERNOULLI, Professeur de Physique à Bâle, & Associé Etranger de l'Académie Royale des Sciences.



RECHERCHES

Sur la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du Vent sur les grands Vaisseaux, soit en y appliquant les Rames, soit en y employant quelque'autre moyen que ce puisse être.

FONDÉES

Sur une nouvelle Théorie de l'économie des forces & de leurs effets.

Quærendi initium ratio attulit; cum effect ipsa ratio confirmata quærendo.

Cic. Acad. Quæst. IV. 26.

PREMIERE PARTIE.

I.

LA mécanique des rames est d'une nature si singuliere que personne n'a encore démontré la proportion qu'il y a entre les forces mouvantes qu'on y emploie & l'effet qui en résulte; c'est cependant un article qui

A ij

4 RECHERCHES SUR LES MOYENS

est assez facile dans presque toutes les machines, & c'est en même tems l'article le plus essentiel pour notre sujet. Il s'agit sans doute de connoître, avant toute autre chose, si dans l'usage des rames, les forces mouvantes sont toutes utilement employées pour mettre un navire en mouvement, ou si une partie considérable de ces forces se perd en produisant des effets inutiles & différens de celui qu'on se propose. Dans le premier cas, l'usage des rames est le plus avantageux, & on ne doit pas espérer d'imaginer jamais rien de préférable; mais dans le second cas, il ne faut pas renoncer à l'espérance de pouvoir ou perfectionner l'usage des rames, ou leur substituer d'autres moyens plus avantageux. Mais un tel examen demande premièrement une théorie sur les forces de l'homme, & en second lieu une connoissance exacte des forces absolument & indispensablement requises pour faire singler un navire avec une certaine vitesse uniforme.

II.

Quand je parle des forces de l'homme je n'entens point ici, comme dans le langage ordinaire, ces forces par lesquelles on tient en équilibre de certaines résistances telles que seroit de tenir suspendu un certain poids, ou d'exercer une certaine pression; ce sont-là des forces mortes; il est question ici des forces vives, que l'homme produit pendant son travail; on doit toujours estimer le travail absolu d'un homme par la pression qu'il exerce, par la vitesse de son point d'appui & par le tems. La seule considération du levier, auquel se réduisent toutes les machines, suffit pour voir cette vérité; il faut cependant avouer que la fatigue de l'homme, qui est la seule chose qu'il faille considérer, n'est pas toujours exactement pro-

portionnelle à son travail pris dans le sens que nous venons de lui donner. Un homme pourra, par exemple, enlever une résistance de vingt livres avec une vitesse de trois pieds par seconde, & continuer ce travail pendant plusieurs heures de suite; mais il ne s'ensuit pas qu'il puisse enlever quatre livres avec une vitesse de quinze pieds par seconde, cela seroit tout-à-fait impossible à l'homme; peut-être pourroit-il bien enlever une résistance de dix livres avec une vitesse de six pieds; mais il est sûr qu'il s'en trouveroit beaucoup plus fatigué au bout d'une heure, que s'il n'avoit employé que la moitié de cette vitesse avec un effet double. Cette remarque doit apprendre aux Mécaniciens qui s'appliquent à imaginer des machines qui doivent être mises en mouvement par le travail des hommes, à mettre une telle proportion entre leurs parties, que les travaux de ces hommes se fassent avec des vitesses & des efforts qui leur soient le plus naturels.

III.

La remarque que je viens de faire ne doit pas nous empêcher de supposer les fatigues proportionnelles aux travaux tels que nous les avons déterminés, puisque moyennant une juste proportion entre les parties de la machine, on peut faire que la vitesse & la pression de chaque homme soient constamment les mêmes, & que toute la différence consiste à employer plus ou moins de tems au même travail, & qu'on ne sçauroit douter que dans ces circonstances les fatigues doivent être censées proportionnelles aux tems. Mais je dis bien plus, un grand nombre d'expériences m'ont appris que non-obstant une grande inégalité entre les vitesses, les fatigues ne laissent pas de suivre la raison composée de la pression, de la vitesse & du tems, pourvu qu'on ne

donne pas à ce principe une trop grande étendue, & qu'on ne sorte pas hors de certaines limites. Si un homme peut enlever une résistance de vingt livres avec trois pieds de vitesse, il pourra aussi y enlever une résistance de soixante livres avec un pied de vitesse, ou trente livres avec une vitesse de deux pieds; ou quinze livres avec une vitesse de quatre pieds, & même douze livres avec une vitesse de cinq pieds, & tout cela sans se fatiguer ni plus ni moins. Il semble que la nature ait prescrit aux animaux une certaine conservation de forces naturelles pareille à celle qu'on connoit aux forces vives produites par la pesanteur naturelle, tant que les animaux ne passent pas les limites de leur économie naturelle. C'est ici une vérité de fait admirable. En voici une autre, que nous devons admirer bien davantage.

IV.

Nous n'avons encore considéré que l'effet d'une même espèce de travail exercé avec plus ou moins de vitesse; mais les hommes peuvent subir une infinité d'espèces de travail. Dans chaque différente espèce il y aura une combinaison différente des muscles que les hommes feront agir: les efforts qu'ils feront seront toujours d'une nature différente; cependant j'ai remarqué qu'avec des fatigues égales, les hommes font constamment des effets à-peu-près égaux; je m'en rapporte aux Mécaniciens qui sauront faire un juste calcul des effets produits moyennant le travail des hommes employé d'une façon quelconque. Je suis si persuadé de cette vérité, que je n'ai pas hésité d'en rechercher l'explication tirée de l'économie animale, & il m'a paru la trouver, en supposant que la fatigue est causée par la perte qu'on fait d'esprits animaux qui pro-

duisent le mouvement des muscles ; & que de quelque façon que les esprits animaux agissent sur les muscles , ils doivent être considérés comme de petits ressorts bandés , qui se débandent au moment de leur activité ; or , c'est la nature des ressorts de produire constamment la même force vive de quelle manière qu'on leur permette d'employer leur efficace ; & comme on mesure l'effet d'un certain travail par la quantité des forces vives qu'on a produites , soit réelles , soit potentielles , il s'ensuit qu'une fatigue égale , comme causée par la même dépense d'esprits animaux , produit un effet égal dans toutes les espèces de travail. L'économie animale ne fournit qu'une certaine quantité d'esprits animaux pendant chaque jour , & c'est cette quantité d'esprits animaux qui fera la mesure de tout son travail journalier possible , tant en fonctions animales qu'en fonctions vitales. J'estime tout le travail journalier possible d'un homme d'une force & d'une taille moyennes à pouvoir élever 1728000 livres à la hauteur d'un pied chaque jour , sans apporter du préjudice à sa santé ; & je fonde cette estime sur un grand nombre d'observations. Quant aux fonctions vitales , il seroit bien difficile de l'évaluer avec autant de justesse ; il n'y a que le travail du cœur , qu'on peut déterminer assez exactement , puis qu'on sçait qu'il fait environ 115200 battemens dans un jour , qu'il pousse environ deux onces de sang dans chaque systole , & que les observations & expériences de Mr. Hales semblent prouver que le sang soit jetté hors du cœur avec une vitesse à pouvoir s'élever à la hauteur d'environ huit pieds ; ce n'est-là que l'effet du ventricule gauche , celui du ventricule droit en fera environ le quart , & on pourra estimer le travail journalier du cœur égal à celui d'élever 144000 livres à la hauteur d'un pied , ce qui fait la douzième partie de ce que l'on peut ap-

pellier le travail journalier d'un homme. J'estime le travail des muscles qui servent à la respiration plus grand ; & quand on considère qu'il ne se fait, selon toutes les apparences, aucune fonction animale sans le concours & la coopération des nerfs & des esprits animaux, il est à présumer que la nature a destiné les esprits animaux dans une proportion à-peu-près égale aux mouvemens vitaux nécessaires & aux mouvemens volontaires.

V.

Nous pourrions donc supposer, que tous les hommes d'une constitution égale seroient également fatigués après avoir fait des effets égaux, de quelle manière que ces différens hommes ayant été employés ; mais il semble encore que la constitution des hommes puisse être extrêmement différente, sans que leurs travaux journaliers, dont ils sont capables pendant un grand nombre de jours de suite, soient considérablement différens. Tel homme charnu & vigoureux pourra peut-être faire trois ou quatre fois plus de travail pendant quelques heures de tems, qu'un autre décharné & d'une constitution beaucoup plus foible ne pourra faire dans un tems égal ; mais si chacun de ces deux hommes si différens en vigueur, étoit appliqué pendant un grand nombre de jours de suite à une même sorte de travail jusqu'à se fatiguer également, je doute si leurs effets seroient fort inégaux. Cette vérité se manifeste assez clairement dans les bêtes. C'est sans doute parce que l'économie animale ne sauroit permettre de faire une plus grande dépense journalière en esprits animaux, que ce qu'elle lui fournit de nouveau chaque jour, & qui vraisemblablement n'est pas fort différente dans les hommes ou dans les animaux d'une même espèce.

VI.

Ces remarques paroîtront peut-être bien étrangères pour notre sujet , mais la suite fera voir qu'elles sont très-essentielles, & telles qu'elles nous feront voir quel est le plus grand effet possible qu'on puisse tirer du travail des hommes pour la navigation, & jusqu'où l'usage des rames s'en approche. Mais il faudra auparavant nous engager dans une autre discussion ; c'est sur les effets que les hommes peuvent produire par leurs travaux.

VII.

L'effet de travail peut & doit toujours être réduit à une certaine quantité de forces vives , quoique ces forces vives puissent avoir des apparences tout-à-fait différentes : elles peuvent pourtant toutes être réduites à une certaine masse élevée à une certaine hauteur verticale. Ces deux articles multipliés ensemble feront constamment la mesure de la force vive provenue d'un certain travail ; si ce travail étoit employé à donner continuellement à de nouveaux corps un certain degré de mouvement horizontal, il n'y auroit qu'à voir quelle est la hauteur verticale à la quelle ces corps pourroient s'élever avec leur vitesse imprimée, & on aura aussi-tôt leur force vive sous la forme désirée : si le travail consistoit à bander des ressorts, il faudroit examiner à quelle hauteur ces ressorts pourroient jeter une certaine masse en se debandant. Quand on ne fait que tirer horizontalement un corps qui souffre un certain frottement, ce frottement fait le même effet que s'il s'agissoit de bander continuellement de nouveaux petits ressorts ; enfin l'effet du travail sera toujours équivalent

Prix de 1753.

B

à celui de lever une certaine masse à une certaine hauteur, & cet effet se montrera presque toujours sous les quatre formes que je viens d'indiquer.

VIII.

Examinons à présent quelle est la plus grande quantité de force vive que l'homme puisse produire dans un certain tems sans s'épuiser. Il n'y a que l'expérience qui puisse décider cet article ; mais il faut bien distinguer plusieurs différens cas. Un homme appliqué tous les jours à un certain travail, & chaque jour pendant huit heures de tems, pourra, à mon avis, élever vingt livres à la hauteur de trois pieds à chaque seconde, ou bien soixante livres à la hauteur d'un pied ; cela fera 1728000 livres à la hauteur d'un pied pendant huit heures de tems. J'ai adopté ce résultat sur un grand nombre d'observations, & avec toute la circonspection requise ; j'ai vu des cas, où l'homme faisoit trois fois plus d'effet pendant chaque seconde, mais il n'auroit pû soutenir ce travail que pendant quelques minutes de suite. Si on ne vouloit imposer aux hommes que quatre heures de travail par jour, je crois qu'on pourroit leur donner la tâche d'élever chacun 120 livres à un pied de hauteur à chaque seconde de travail. Cependant le partage le plus conforme à la constitution de l'homme est, à mon avis, celui de huit heures de travail par jour, & je supposerai que les rameurs soient destinés à cette fatigue,

IX.

On remarquera donc que tout homme appliqué à un tel travail qu'il puisse soutenir pendant huit heures chaque jour, fera un effet équivalent à celui d'éle-

ver soixant livres à la hauteur d'un pied par seconde ; du moins ce sera là l'effet moyen quand ce travail sera fait par plusieurs hommes. Mais le plus souvent le travail est employé en grande partie à des effets inutiles, & c'est-là le seul article essentiel à éviter ; on n'a qu'à satisfaire à cette seule condition pour être assuré d'avoir employé le meilleur moyen qu'il étoit possible pour exécuter l'ouvrage qu'on se proposoit ; & dès-lors il ne faut plus entreprendre d'y ajouter le moindre degré de perfection. Cette réflexion nous conduit d'abord à cette grande & principale maxime : *Que dans tout ouvrage qu'on se propose il faut commencer par examiner quel est l'effet essentiellement & nécessairement attaché à cet ouvrage, effet qui soit inévitable par la nature même de l'ouvrage, & éviter ensuite autant qu'il est possible tout autre effet.*

X.

Pour nous conformer à cette règle, nous rechercherons quel est l'effet essentiellement & nécessairement requis, quand on se propose d'entretenir un navire dans un cinglage uniforme ; or un navire ne sauroit faire chemin sans donner aux eaux un mouvement qu'elles n'avoient point ; nous considérerons ce seul effet comme essentiel & inévitable, en faisant abstraction de la résistance de l'air, & en supposant les eaux comme n'ayant aucune ténacité sensible, ce que les expériences physiques confirment assez bien ; encore cet effet n'est-il essentiel que dans un certain sens, puisqu'il n'est pas sûr qu'il soit impossible de mettre à profit le mouvement qu'on avoit imprimé aux eaux : ainsi, par exemple, si on avoit un tuyau d'une largeur uniforme réplié en cercle & rentrant en soi-même, tout rempli d'eau, on voit qu'un globe du même

diametre, que celui du tuyau, pourroit se mouvoir dans le tuyau, sans imprimer jamais le moindre mouvement nouveau aux eaux ; je nomme donc ledit effet essentiel, que parce que je n'entreprendrai pas de l'éviter ni en tout ni en partie ; & je ne crois pas que personne s'avise de l'entreprendre. C'est donc le mouvement qu'on est obligé d'imprimer continuellement aux eaux, qui cause ce qu'on appelle la résistance des fluides & c'est uniquement dans la production de ce mouvement, que doit être employé le travail des hommes, tout autre effet étant en pure perte.

XI.

Pour bien traiter notre sujet, il nous faudroit ici une théorie parfaite sur la résistance des fluides, théorie que je n'espère pas qu'on parvienne jamais à découvrir, parce qu'il sera toujours impossible de déterminer exactement le nouveau mouvement qu'on produit à chaque instant dans chaque goutte d'eau, & d'en tirer la nouvelle petite force vive ; c'est cette nouvelle force vive dans les eaux produites à chaque moment par le mouvement du vaisseau, qui donne la pression du vaisseau contre les eaux, ou la résistance des eaux contre le vaisseau, & elle est en même tems l'effet essentiel du travail des rameurs. Ne pouvant donc partir de cette source, nous nous contenterons de la théorie connue sur la résistance des fluides, d'autant plus qu'elle est assez conforme à une infinité d'expériences qu'on a faites sur ce sujet. Nous supposerons en particulier que la résistance directe des eaux contre une surface plane est égale au poids d'un prisme d'eau, dont la base seroit ladite surface plane, & la hauteur celle qui répond à la vitesse du plan ; c'est à-dire, de laquelle un corps tombant librement acquiere ladite vitesse.

XII.

Sur ces hypothèses, qui me sont communes avec tous les Physiciens & Géometres, j'examinerai ce qui arrive à un certain navire cinglant avec une certaine vîtesse. Après avoir substitué à la surface de la proue une surface plane d'une égale résistance, je supposerai que cette surface plane contienne autant de pieds quarrés qu'il y a d'unités en n , & je nommerai a la hauteur verticale génératrice de la vîtesse du navire; je supposerai qu'un pied cube d'eau pese 70 livres, & j'exprimerai ladite hauteur a en pieds. Ces dénominations & suppositions donnent le poids du prisme d'eau qui marque la résistance contre le navire $= 70 n a$ livres; Il suit de-là qu'on peut substituer au travail requis pour ce cinglage un autre qui sera tout-à-fait le même, & dont on connoît immédiatement l'effet; c'est celui qu'on auroit si un poids de $70 n a$ livres étoit attaché à un cordeau qui passât sur une poulie beaucoup plus haute que le poids, & qu'on tirât horizontalement l'autre bout du cordeau avec la même vîtesse que celle du navire; or l'effet d'une telle action est d'élever un poids de $70 n a$ livres avec une vîtesse qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur a . Il n'est donc plus question que de sçavoir combien de pieds un mobile peut parcourir dans une seconde de tems avec ladite vîtesse; on sçait par les élémens de la mécanique que ce nombre de pieds est $= 2 \sqrt{15 a}$, en supposant qu'un corps tombant librement fait 15 pieds dans la première seconde, quoique cette hauteur soit plus grande d'environ un pouce. Ainsi tout l'effet du cinglage en question est $= 140 n a \sqrt{15 a}$; c'est-là aussi le travail essentiellement requis. Si on veut exprimer cet effet immédiatement par la vîtesse du vaisseau, on pourra suppo-

fer que le vaisseau fait dans une seconde de tems autant de pieds qu'il y a d'unités en c & puis faire $2\sqrt{15}\bar{a} = c$ ou bien $a = \frac{c}{\sqrt{15}}$, après quoi le travail essentiel requis pour le cinglage en question, sera $= \frac{7}{6} n c^3$, ce qui veut dire qu'il y faut autant de travail qu'il y en auroit à élever à chaque seconde à la hauteur d'un pied autant de livres qu'il y a d'unités en $\frac{7}{6} n c^3$.

XIII.

Cette dernière formulue nous apprend que les travaux essentiels pour faire aller un navire plus ou moins vite, sont en raison cubique des vitesses. Ainsi donc quand on seroit parvenu à employer utilement toutes les forces, il faudroit un travail 8 ou 27 fois plus grand pour donner au navire une vitesse double ou triple, & réciproquement les vitesses observent la raison des racines cubiques des travaux utilement employés. Cela fait qu'on gagne beaucoup sur le travail en perdant peu sur la vitesse. Il n'étoit pas difficile de prévoir ce théorème, puis qu'une vitesse double donne une résistance quadruple qu'il faut enlever avec une vitesse double; ce qui donne l'idée d'un travail 8 fois plus grand.

XIV.

La formule $\frac{7}{6} n c^3$, qui marque le travail essentiel & indispensablement requis, nous donne d'abord à connoître une chose qu'il eût été bien difficile de déterminer en partant d'autres principes; c'est de sçavoir, en conséquence des loix que la nature a prescrites aux forces de l'homme & de leurs limites, quel est le plus petit nombre d'hommes possible pour fournir audit travail pendant 8 heures par jour; ou bien quel seroit le

nombre d'hommes réquis pour un tel travail, en supposant qu'ils ne fissent aucune perte dans la manière d'employer leurs forces; c'est-à-dire, que tout leur travail fût utilement employé sans faire aucun autre effet que celui qu'il n'est pas possible d'éviter, & qui consiste à donner continuellement une nouvelle force vive aux eaux que le navire parcourt. Pour répondre à cette question, on n'a qu'à diviser la formule $\frac{7}{6} n c^3$, par 60 (§. 8.). Si nous dénotons donc ledit nombre d'hommes par N nous aurons cette équation.

$$N = \frac{7}{360} n c^3.$$

En convertissant cette équation, on obtient

$$c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7n}}$$

Laquelle dernière équation marque quelle est la plus grande vitesse possible qu'un certain nombre d'hommes puissent donner à un certain navire, & qu'ils lui donneroient réellement, s'ils étoient employés d'une manière à ne faire aucune perte de leurs forces, ou à excercer leurs forces toutes utilement; c'est-à-dire, s'ils ne faisoient aucun autre effet que celui qui est inséparable d'avec le cinglage.

XV.

Nous voici donc en état de décider si dans l'usage des rames on employe utilement toutes les forces que les rameurs exercent, ou bien si une partie considérable en est détournée par des effets, que le cinglage ne renferme pas essentiellement, & qui par conséquent doivent être censés inutilement produits. Dans le premier cas l'usage ordinaire des rames n'admet aucune

correction, tout changement seroit dangereux, il ne pourroit qu'être nuisible, sans pouvoir jamais être profitable; mais dans le second cas il reste quelque espérance soit de perfectionner l'usage des rames, soit d'imaginer quelqu'autre moyen plus profitable ou moins détectueux. Pour décider cette question, il faut connoître trois choses; 1^o le nombre des rameurs, que nous avons nommé N ; 2^o le nombre des pieds que le bâtiment fait dans une seconde de tems indiqué par c , & facile à déterminer par expérience; & 3^o le nombre des pieds quarrés composant la surface plane d'une résistance égale à celle de la proue du bâtiment, nombre que nous avons désigné par n ; c'est ce dernier nombre qui me fait encore quelque peine, faute d'observations ou d'expériences suffisamment détaillées; je crois cependant pouvoir le déterminer en quelque façon pour les galeres, auxquelles je me propose d'appliquer cette théorie.

XVI.

M. Chazelles, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1702, nous en fournit une description & des remarques qui nous mettent assez en état de nous satisfaire là-dessus: voici les circonstances qui nous intéressent. La Chiourme étoit de 260 hommes, qui ramoient tous à la fois; M. Chazelles a remarqué que la galere voguant de la plus grande force à pouvoir durer long-tems en calme (ce qui fait précisément le cas que nous considérons), a fait 72 toises par minute, ou $7\frac{2}{3}$ pieds par seconde; ces circonstances rendent $N = 260$ & $c = 7\frac{1}{3}$. Voici à présent les circonstances rapportées par M. Chazelles, que je considère pour en tirer en quelque façon la valeur n . La surface réunie de toutes les pales étoit de 130 pieds quarrés. La
Chiourme

Chiourme faisoit 24 palades dans une minute de tems, & ainsi chaque palade duroit $2\frac{1}{2}$ seconde; mais une palade étant composée de trois mouvemens, desquels il n'y a qu'un seul qui pousse les pales contre les eaux, il n'y a que ce seul mouvement à considérer; & j'ai remarqué que si on connoissoit exactement le petit tems de ce mouvement, on en pourroit conclure assez au juste la résistance de la galere, & par conséquent la valeur n ; mais j'ai remarqué aussi qu'une très-petite faute dans l'estime de ce petit tems devient très-considérable pour le résultat que nous cherchons. Nous embrasserons d'abord notre question dans toute son étendue, c'est pourquoi je nommerai T , le tems entier de chaque palade, que nous avons vu être de $2\frac{1}{2}$ secondes, & t tout le tems qu'on employe pendant l'action de pousser les pales contre les eaux; en ce cas il est évident qu'on peut substituer à l'action interrompue des rameurs qui poussent une surface de 130 pieds quarrés, celle de pousser continuellement & sans aucune interruption un plan de $\frac{t}{T} \times 130$ pieds quarrés, mais avec la même vitesse. Je crois cependant que la surface de 130 pieds quarrés demande quelque diminution; car outre que les rameurs ne ployent peut-être pas entièrement les pales, ils poussent les pales dans une direction qui n'est ni parfaitement parallèle à la quille, puisqu'ils font un arc de cercle, ni parfaitement horizontale; ce qui paroît assez par leur manœuvre, ni parfaitement perpendiculaire au plan des pales. Toutes ces raisons, & quelques autres, m'engagent à substituer 100 pieds quarrés aux 130. M. Chazelles dit ensuite que la partie intérieure de la rame avoit douze pieds, la partie extérieure 24 pieds, la pale 5 pieds de longueur, & que le vogue-avant faisoit un mouvement de 6 pieds dans le tems t qu'on

doit exprimer en seconde ; ainsi la vîteffe de ce mouvement répondoit à $\frac{6}{7}$ pieds par seconde.

Il s'agit a présent de sçavoir dans quel endroit il faut placer le centre deffort des pales contre les eaux ; on pourroit se contenter de le placer au milieu des pales , c'est-à-dire à $21\frac{1}{2}$ pieds de distance depuis l'apostis : mais comme c'est-ici une question purement géométrique & facile à résoudre, en prenant la somme des efforts de chaque élément de la pale , il vaudra sans doute mieux de déterminer géométriquement ce centre d'effort pour des pales d'une largeur uniforme telles qu'on à coutume de les faire ; voici le résultat de cette solution.

Soit la vîteffe de l'extrêmité intérieure de la rame $= c$ la vîteffe de la galere $= v$, la longueur de la partie intérieure de la rame $= a$; la distance entre l'apostis , & le commencement de la pale $= b$; la longueur de la pale $= d$, la distance cherchée du centre des efforts depuis l'apostis $= \lambda$, je dis qu'on aura
$$\lambda = \frac{v}{c} a + a \sqrt{\frac{a}{a-d} \times \left[\left(\frac{b+d}{a} - \frac{v}{c} \right)^2 - \left(\frac{b}{a} - \frac{v}{c} \right)^2 \right]}.$$

Dans cette équation il faudra faire $v = 7\frac{1}{5}$, $a = 12$, $b = 19$, $d = 5$.

$$\lambda = \frac{432}{5c} + 12 \sqrt{\frac{4}{5} \left[\left(2 - \frac{36}{5c} \right)^2 - \left(\frac{19}{12} - \frac{36}{5c} \right)^2 \right]}$$

Sur cette équation je me propose d'examiner deux cas ; le premier sera celui de supposer chaque palade composée de trois tems égaux , ce qui fera $t = \frac{1}{3} T = \frac{5}{6}$ secondes, pendant lequel petit tems le vogue-avant appliqué, l'extrêmité intérieure de la rame fait six pieds ; de maniere qu'il faudra faire $c = 7\frac{1}{5}$, d'où l'on tire pour ce cas

$$\lambda = 12 + 12 \sqrt{\frac{1108}{1728}} = 21, 608.$$

Le second cas consistera à supposer $t = \frac{2}{3} T$ car comme le mouvement de pousser les pales contre les eaux est le seul qui souffre une grande résistance, il est à présumer qu'il se fait un peu plus lentement que les deux autres employés simplement à soulever & puis à porter les pales en avant, dans cet exemple nous aurons $t = 1$ sec. & par conséquent $c = 6$ pieds, ce qui fait

$$\lambda = 21, 537.$$

Ce n'est donc pas la valeur de λ , quoique la formule en soit fort compliquée, qui puisse jeter quelque doute considérable sur notre question. Reprenons à présent notre question dans toute sa généralité, nous aurons la vitesse du centre des efforts relative à la galere pendant que les rameurs poussent les pales contre les eaux $= \frac{\lambda}{a} c$ & cette vitesse relative aux eaux devient $= \frac{\lambda}{a} c - v$; Or le carré de cette vitesse multiplié par la surface de toutes les pales diminué autant que l'interruption du plongement des pales, & quelques autres raisons exposées le demandent, est égal au carré de la vitesse de la galere, multipliée par le plan que nous cherchons, & que nous nommerons s ; cette

considération nous donne $s = \left(\frac{\lambda c - v}{v} \right)^2 \times \frac{t}{T} \times 100$,

dans laquelle équation la quantité $\frac{t}{T} \times 100$ marque la surface de toutes les pales reduites au cas d'agir sans interruption & diminuées en raison 130, à 100, à cause de plusieurs petites obliquités dans le mouvement des pales & de quelques autres raisons. Cette équation un peu mieux rangée donne

$$s = \left(\frac{\lambda c}{av} - s \right)^2 \times \frac{t}{T} \times 100.$$

Sur cette équation nous chercherons la valeur de s pour les deux cas mentionnés ci-dessus. Dans le *premier* cas nous avons supposé $\frac{t}{T} = \frac{1}{3}$, ce qui fait $c = 7\frac{1}{3}$ & $\lambda = 21,608$; dans le *second* cas nous avons supposé $\frac{t}{T} = \frac{2}{5}$, ce qui fait $c = 6$ & $\lambda = 21,537$; pendant que dans l'un & l'autre cas il faut faire $a = 12$ & $v = 7\frac{1}{5}$: toutes ces substitutions nous donnent pour le cas $s = 21,37$ & pour le second $s = 9,82$. Cette grande diversité entre les valeurs de s est uniquement prouvée de ce que dans le *premier* cas nous avons supposé $\frac{t}{T} = \frac{1}{3}$ & dans le *second* $\frac{t}{T} = \frac{2}{5}$.

M. Bernoulli, dans son *Hydrodynamica* a pareillement examiné cette même question, & il trouve à la fin pag. 301 que la résistance de la galere étoit égale au poids de $13\frac{1}{3}$ pieds cubiques d'eau, ce qui donneroit $s = 15,74$. Mais quoique ce nombre ait assez de vraisemblance, & que j'approuve sa méthode, il me paroît qu'il n'a pas assez pesé toutes les circonstances, on voit même que sa mémoire l'a trompé à l'égard de la longueur des rames, qu'il ne fait que de 18 pieds. Erreur cependant qui influe très-peu sur sa méthode. M. Euler, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'année 1747 pag. 204, a encore considéré le même exemple, mais il n'a fait dans cet endroit que suivre le sentiment de son compatriote, prenant sans doute la question pour trop-peu déterminée, & ne voulant pas l'examiner par lui-même.

Enfin, M. Bouguer, dans son *Traité du Navire*, pag. 116, suppose pour les galeres pareilles à celles de M. Chazelle $s = 10$ pieds quarrés; mais il faut avouer que ce n'étoit que sur une simple estime qu'il s'est déterminé sur ce nombre, ne faisant attention

qu'au peu de profondeur, & à la grande saillie de la carene; & nous voyons assez par ce que cet illustre auteur nous dit lui-même, pag. 419, combien ces fortes d'estimes peuvent être trompeuses, puisqu'il dit qu'il pensoit que pour un grand vaisseau de guerre du premier rang, ce plan pouvoit être réduit à 77 pieds carrés, & que l'ayant examiné par sa méthode de résoudre la surface de la partie antérieure de la carène en plusieurs triangles, il avoit trouvé ce plan le double de ce qu'il avoit pensé. Si M. Bouguer, s'étoit servi de la même méthode pour les galeres, je nécouterois plus absolument que le suffrage d'un aussi grand poids.

Après tout je supposeroi $s = 16$ pieds carrés en attendant qu'on détermine ce plan avec plus de précision par des expériences.

XVII.

Si nous supposons donc $c = 7\frac{1}{2}$ (je reprends ici les dénominations que j'ai faites avant le 16^me §) & $n = 16$ (on remarquera que dans la digression du § 16, j'ai substitué aux lettres c & n , les lettres v & s , qui ont dans cette digression la même signification que c & n dans les articles précédens) nous aurons $N = \frac{7}{360} n c^3 = 116$, d'où il suit que 116 hommes suffiroient pour entretenir une telle galere dans un singlage à faire $7\frac{1}{2}$ pieds par seconde, si ces hommes pouvoient être employés pour cet effet d'une manière à ne faire aucune perte de leur forces; or il y a eu 260 rameurs, nous devons donc conclure, que ces rameurs n'ont employé que $\frac{1}{2}\frac{1}{60}$ parties de leur travail utilement, & que les $\frac{1}{2}\frac{1}{60}$ parties du travail ont été employées inutilement en produisant des effets qui ne sont pas essentiellement renfermés dans le cinglage, c'est environ $\frac{1}{2}$ de

perte, & ce résultat nous laisse espérer de pouvoir tirer un plus grand parti du travail des hommes pour le cinglage des navires.

XVIII.

Examinons aussi quelle est la plus grande vitesse possible que 260 hommes puissent donner à la galere en question, en supposant qu'ils ne fassent aucune perte de leurs forces; c'est la seconde équation du § 14

favoir $c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7n}}$ qui nous apprend cette plus grande

vitesse possible, & qui nous la donne de 9, 42. Il n'est donc pas possible que 260 hommes donnent à la galere une plus grande vitesse que celle de faire $9\frac{2}{3}$ pieds par seconde, de quelle maniere qu'ils emploient leur travail, il est cependant possible d'y atteindre; ainsi la derniere vitesse possible ne surpasse la vitesse actuelle observée par M. Chazelles, que d'environ $2\frac{1}{3}$ pieds par seconde, & la vitesse actuelle faisoit plus que les trois quarts de toute la vitesse possible, d'où nous voyons qu'une grande perte de forces n'entraîne qu'une perte très médiocre du côté de la vitesse; c'est que les forces augmentent en raison cubique des vitesses.

XIX.

Si au lieu de $n = 16$ pieds carrés, on vouloit suivre l'hypothese de M. Bouguer, en supposant $n = 10$, la quantité du travail utilement employée en deviendroit plus petite en raison de 16 à 10; on trouvera $N = 72\frac{1}{2}$ & on en conclurra une perte de $\frac{187\frac{1}{2}}{269}$ du travail de la chiourme; une telle perte me paroît moins vraisem-

blable, & c'est une raison qui m'a fait préférer la supposition de $n = 16$. Je suis surpris qu'on ne se soit pas appliqué avec plus de soin à connoître ces plans pour toutes sortes de bâtimens, qui influent si fort sur un grand nombre de questions-très utiles pour la navigation. Voici la maniere que je crois la plus commode, & la plus sûre de connoître ce plan pour tel bâtiment que l'on veut. On amarrera ce bâtiment à un autre, qui allant à voiles, tirera le premier après soi avec la même vitesse; la corde par laquelle on attache les deux bâtimens sera longue, afin que le bâtiment entraîné ne souffre rien du sillage de l'autre, ou du mouvement des eaux causé par le bâtiment antérieur: un bout de la corde passera sur une poulie verticale & parallele à la quille, & on attachera à ce bout de la corde un bassin pour y mettre des poids, pendant que l'autre bout est attaché fixement à l'autre bâtiment; on mettra d'abord assez de poids sur le bassin pour l'empêcher de s'élever, jusqu'à ce que le tout soit réduit à un état de permanence; après quoi on diminuera peu-à-peu le poids, jusqu'à ce que le bassin commence à s'élever un peu, pendant qu'un autre observe exactement la vitesse des bâtimens. Si le frottement de la poulie étoit assez grand pour mériter quelque attention, il sera facile de corriger le poids qu'on aura observé. De cette maniere on connoitra exactement la force qui tire le bâtiment avec une certaine vitesse. Si ledit poids augmenté de celui du bassin, est exprimé en livres, dont le nombre soit P , on aura $n = \frac{6P}{7cc}$ ainsi supposant la vitesse c de 4 pieds par seconde, & P de 250 livres, le plan cherché sera de $13\frac{1}{8}$ pieds quarrés. De cette façon on apprendra en même tems, s'il est vrai que les résistances soient parfaitement en raison quarrée des vitesses, ou si cette regle a besoin de

quelque correction , principalement pour les corps d'une aussi grande surface , tels que sont les grands vaisseaux.

XX.

Il me paroît tellement nécessaire de partir de nos principes , pour bien traiter la question proposée par l'Académie , que n'étant pas entièrement sûr des résultats que nous à fourni l'exemple des galères , j'ai voulu m'en éclaircir par l'examen de quelques nouvelles expériences & observations faites sur des petits bateaux auxquels deux rameurs donnent ordinairement une vitesse à faire $4\frac{1}{2}$ pieds par seconde.

Nous avons choisi deux de ces bateaux assez égaux , & nous les avons attachés ensemble de la façon décrite dans le précédent article ; nous avons placé à la poupe du second bateau entraîné par le premier , un quart de cercle , pour observer continuellement l'inclinaison d'un fil , auquel il y avoit attaché une boule plongée dans l'eau , & nous nous étions bien assurés que cette inclinaison nous donnoit assez au juste les différentes vitesses. La figure première fera assez voir tout le procédé de nos expériences ; on remarquera d'abord ici que les rameurs placés dans le premier bateau étoient obligés de surmonter la résistance des deux bateaux que nous supposons égaux , & que le poids mis dans le bassin du second bateau , joint à celui du bassin , marque la résistance du seul second bateau ; en sorte que le double de ce poids total exprime la résistance des deux bateaux considérés comme un seul. Quand on pouffoit les pales contre les eaux , le bassin chargé montoit un peu & redescendoit dans les intervalles , il n'étoit pas difficile d'augmenter ou de diminuer les poids , de manière que les élévations du bassin devinssent égales aux des-

centes

centes, & dans cette disposition nous avons pris le poids du bassin chargé, que nous nommerons poids total, pour la mesure de la résistance d'un seul bateau. Il est vrai que pendant toutes ces expériences & observations, nous remarquâmes presque continuellement plusieurs petites inégalités, qui provenoient de l'inégalité dans l'action des rameurs, & il étoit facile de commettre quelque petite faute dans le poids total du bassin, mais surtout dans l'observation de l'inclinaison du fil qui devoit marquer les vîtesses des bateaux. C'est ce qui m'a engagé à considérer attentivement toutes les circonstances, & à corriger un peu, suivant les circonstances, les résultats des vîtesses, quand j'ai vu clairement qu'il falloit le faire; mais ces changemens n'ont jamais été que très-légers. Je dois me louer ici des offices d'un ami pour l'exécution de ces expériences, mais j'espère qu'on me dispensera de le nommer dans une occasion comme celle-ci.

XXI.

Voici à présent de toutes les expériences celles qui pourront nous servir pour notre sujet.

I. Deux rameurs mis dans le premier bateau ont donné aux deux bateaux, en employant leur forces ordinaires, une vîtesse de 3, 50 pieds par seconde, & le poids total du bassin chargé étoit alors de 90 onces ou de $5\frac{10}{16}$ livres.

Je prendrai, pour plusieurs raisons, cette première expérience, pour celle qui ait été faite avec le plus d'attention & de justesse, & je corrigerai dans les suivantes les vîtesses observées, suivant la règle que les résistances font en raison quarrée des vîtesses.

Prix de 1753.

D

II. Les deux mêmes rameurs avertis d'employer un peu plus de force, ont donné au bateau la vitesse de 3, 80, & le poids total étoit de 100 onces; la vitesse corrigée suivant ladite règle devient = 3, 69.

III. Les deux rameurs exhortés à ramer plus vigoureusement jusqu'à donner au bateau la vitesse 4, 00, ont soutenu un poids de 122 onces, la vitesse corrigée devient = 4, 07.

IV. Les deux rameurs faisant force de rames jusqu'à convenir qu'ils ne pourroient pas continuer une telle fatigue pendant une demie-heure, ont donné au bateau la vitesse 4, 30, soutenant un poids total de 138 onces, la vitesse corrigée devient 4, 33.

La correction étant ici insensible, & y ayant ainsi un parfait accord entre les deux expériences extrêmes, cela justifie les 2 petites corrections que nous avons employées pour les deux expériences moyennes.

V. Mettant enfin quatre rameurs dans le premier bateaux, & ceux ci avertis encore d'employer leur forces ordinaires, ont donné aux bateaux la vitesse 4, 50, c'est précisément la vitesse que deux rameurs donnent ordinairement à un seul bateau en ramant plusieurs heures de suite.

XXII.

Avant que de tirer de ces expériences, la conclusion principale sur la quantité des forces utiles dans l'action de ramer, je ferai quelques autres remarques essentielles sur ce sujet.

(a) Pour trouver le plan d'une résistance égale à celle de la proue du second bateau, on se servira de

l'équation $n = \frac{6P}{7cc}$ (§. 19.) & cette équation donnera la même valeur dans chacune des 4 premières expériences, sçavoir $n = 0,393$, ou à-peu-près $\frac{2}{5}$ d'un pied carré; mais on se souviendra d'exprimer le poids P par livres, ou bien de diviser le nombre d'onces par 16, & de mettre pour c les vîteses corrigées: sans ces corrections les valeurs de n deviendroient un peu inégales; cependant la valeur moyenne, pour les quatre premières expériences non corrigées, se trouve encore telle que nous venons de le dire; ce qui confirme nos petits corrections.

(b) L'effet des rameurs devant être censé proportionnel à la quantité P, c , ou à c^3 , il s'enfuit que ces effets, pour la première & la quatrième expérience ont été entr'eux comme 92 à 175, & les travaux ont eu la même proportion; mais il est vraisemblable, qu'un homme ne pourroit soutenir que pendant quatre heures par jour un travail tel que celui de la quatrième expérience, pendant qu'il pourroit soutenir durant huit heures par jour celui de la première expérience; & si cela est, les travaux journaliers reviendroient au même, conformément à notre idée, sur le travail & la fatigue des hommes.

(c) Comme dans la première & la cinquième expérience, les rameurs faisoient des efforts égaux, & tels que les hommes peuvent faire pendant huit heures par jour, ces deux expériences confirment admirablement bien le Théorème du §. 13, sçavoir, que les travaux essentiels requis pour faire aller un certain bâtiment plus ou moins vite, sont en raison cubique des vîteses. Dans ces deux expériences les travaux étoient, sans doute, comme 2 à 4, puisqu'il y avoit d'un côté deux rameurs, & de l'autre quatre rameurs, qui s'efforçoient également, & les vîteses étoient comme 3, 50 à 4, 50; $1 : \sqrt[3]{2} = 3, 50 :$

441. Ainsi la vitesse que les quatre rameurs donnoient aux bateaux étoit à fort peu-près celle que notre Théorème donne ; elle étoit plus grande d'environ un pouce par seconde, & je donnerai même ci-dessous la raison de ce petit excès.

(d) En supposant les deux bateaux parfaitement égaux, on a, pour le premier bateau, pareillement $n=0$, 393 ; de sorte que les deux bateaux ensemble souffriroient une résistance égale à celle de 0, 786 pieds quarrés : mais nous reconnûmes bientôt que le premier bateau étoit un peu-plus pesant que le second ; cela nous engagea à changer l'ordre des bateaux pour déterminer pareillement la résistance de l'autre bateau. Je ne rapporterai que la seule expérience qui suit.

VI. *Expérience.* Après avoir changé l'ordre des bateaux & leur vitesse, comme étant 4, 22 pieds par seconde, le poids total fut remarqué de 160 onces.

XXIII.

Il suit de cette sixième expérience que si la vitesse avoit été de 3, 50, comme dans la première expérience, le poids total eût été de 110 onces, les résistances des deux bateaux étoient donc comme 90 à 100, & la résistance entière des deux bateaux ensemble étoit de 200 onces ou de $12\frac{1}{2}$ livres, cette résistance étoit surmontée par deux hommes avec une vitesse de $3\frac{1}{2}$ pieds ; l'effet utile de leur travail étoit donc égal à celui d'élever $12\frac{1}{2}$ livres à la hauteur de $3\frac{1}{2}$ pieds par seconde, multipliant ces 2 nombres & divisant le produit par 120 qui marque l'effet entier du travail ordinaire de deux hommes, nous obtenons $\frac{42\frac{1}{2}}{120}$ ou $\frac{179}{480}$ ou $\frac{35}{96}$ ou 0, 365. De là nous concluons, qu'exprimant le travail en-

tier par 1000, les rameurs en ont employé 356 utilement, & qu'ils ont fait une perte de 635, en produisant des effets inutiles, qui n'étoient pas renfermés essentiellement dans le cinglage des deux bateaux.

XXIV.

Comparons ces résultats avec ceux que nous avons trouvés au §. 17 pour les galeres; en leur supposant $n=16$ pieds quarrés, nous y avons vu que le travail utile de la chiourme faisoit $\frac{1}{2}\%$ du travail entier, c'est en fractions décimales 0,446. Ces résultats sont donc à-peu-près comme 9 à 11, & par consequent presque les mêmes pour les bateaux & pour les galeres: & si on n'avoit donné aux galeres qu'une résistance égale à celle d'un plan de 13 pieds quarrés, ces pertes des forces seroient devenues entièrement égales de part & d'autre. En tous cas je m'assure que cette conformité, soit entière, soit approchante, paroîtra merveilleuse à ceux qui considéreront la diversité infinie qu'il y avoit des deux côtés. Les rames étoient très-petites sur le bateau, & très-grandes sur la galere; la vitesse de la galere étoit plus que double de celle du bateau, ce qui rendoit la maniere de voguer tout-à-fait différente: sur la galere on donnoit 24 palades par minute, & sur le bateau, on en faisoit ordinairement plus que 30. Les palades si faisoient à-peu-près en trois tems égaux sur la galere, & en deux sur le bateau; il y avoit 260 rameurs sur la galere, & deux rameurs pour les deux bateaux; enfin il n'y avoit sur le bateau qu'un rameur à chaque rame, & il y en avoit cinq sur la galere, & ces cinq rameurs travailloient d'une maniere extrêmement différente, celui qui est le plus près de l'apostis ne faisant presque point de mouvement & le vogu'ayant faisant un mouvement énorme

qui en peu de tems le met tout en fueur &c. Cependant, il se trouve à la fin que les rameurs ont fait à-peu-près chacun le même effet sur les bateaux & sur la galere. Cela marque une conservation merveilleuse des forces humaines pareille à la conservation des forces vives, qui a fait tant de bruit; & nous en devons conclure que les hommes, avec des fatigues égales, font toujours des effets à-peu-près égaux; de sorte que dans toutes les questions mécaniques, dans lesquelles il s'agit d'obtenir un certain effet par le travail des hommes, il n'y a qu'à éviter autant qu'il est possible tout autre effet pour être assuré qu'on aura embrassé le meilleur moyen qui étoit possible.

X X V.

Je me crois donc suffisamment fondé à dire, que dans l'action de voguer sur les bâtimens de bas-bord, les rameurs employent 0, 446 de leur travail utilement, c'est-à-dire, uniquement à surmonter la résistance des eaux, qui seule fait tout l'effet qu'on se propose, & que 0, 554 de leur travail se perdent, étant employés à des effets, qui ne sont pas essentiellement renfermés dans le cinglage. Mais comme tout travail à son effet, qu'on peut toujours réduire à une certaine quantité de forces vives, il est nécessaire de rechercher, en quoi peuvent consister les effets des 0, 554 parties du travail inutilement employées; ce n'est qu'après ces recherches, qu'on sera en état d'examiner, si ces effets sont d'une nature à pouvoir être évités en conservant l'usage des rames, ou non. Dans le premier cas il sera possible de perfectionner la mécanique des rames, & dans le second cas il faudra tâcher de substituer aux rames quelque autre moyen qui entraîne une moindre perte dans les forces que l'on veut employer.

XXVI.

Voici d'abord une source de pertes, qui est bien certaine & qu'on peut déterminer assez au juste; remarquons que la surface réunie de toutes les pales, aura toujours une certaine grandeur déterminée qu'on doit pousser avec une certaine vitesse contre les eaux, que par cette action on donne à une certaine quantité d'eau un certain mouvement, & que par-là on produit continuellement une certaine quantité de forces vives, qu'on doit censurer n'être pas essentiellement renfermées dans l'effet qu'on se propose, puisque si on étoit à même de se servir de perches, qu'on pût chaque fois appuyer directement contre un point fixe, ou qu'on pût présenter à chaque palade un point fixe pour y appuyer l'extrémité de la pale, on éviteroit entièrement de produire une semblable force vive inutile. Tâchons donc d'évaluer cette perte des forces pour la galere que nous avons considérée.

XXVII.

Pour cet effet il faut commencer par réduire la surface réunie de toutes les pales, qui étoit de 130 pieds carrés, mais qui n'est poussée contre les eaux que par intervalles à un autre plan beaucoup plus petit, qui étant poussé constamment & uniformément contre les eaux, donne à la galere la vitesse de $7\frac{1}{2}$ pieds par seconde; soit donc ce plan = s , la vitesse uniforme avec laquelle ce plan est constamment poussé contre les eaux = v , la surface plane qu'on peut substituer à la proue = n , & la vitesse de la galere = c ; là dessus nous aurons d'abord $svv = ncc$, parce que la force motrice doit être égale à la résistance, & par conséquent

$v = c\sqrt{\frac{n}{5}}$. Mais dans cette manœuvre l'effet n'est plus simple. Celui qui résulte du mouvement qu'on donne aux eaux par la surface n , & que nous avons démontré au §. 12 devoir être exprimé par $\frac{7}{6}nc^3$, il survient un autre effet qui consiste dans le mouvement qu'on donne aux eaux par la surface s , & qui est pareillement $= \frac{7}{6}s v^3$. Ce second effet n'est pas essentiellement compris dans le cinglage ; mais il devient essentiel aussitôt qu'on se propose de produire ce cinglage moyennant une surface plane s , qu'on pousse directement & sans interruption uniformément contre les eaux avec une vitesse relative v : si on nomme donc le premier effet E , le second effet accessoire sera $= \frac{sv^3}{nc^3} E$, ou $= \frac{v}{c} E$, ou bien $= E\sqrt{\frac{n}{5}}$. Si donc par exemple, on supposoit $s = n$, cet effet accessoire seroit égal à l'autre effet essentiel ; on voit en effet que ce seroit comme faire aller deux galeres égales avec des vitesses égales, l'une vers l'orient, l'autre vers l'occident.

XXVIII.

Ce que nous venons de démontrer sur le rapport entre les deux dits effets, nous pouvons aussi le déduire du rapport qu'il y a manifestement entre les travaux ; imaginons-nous encore qu'on trouve en tous lieux des points fixes d'appui, contre lesquels on puisse appuyer directement des perches, & donner par-là à la galere la vitesse c ; un tel travail seroit entièrement utile, puisque ce seroit enlever immédiatement & directement une certaine résistance sans qu'on perde la moindre partie de son travail. J'appellerai ce travail T , qui est essentiellement requis ; qu'on conçoive après cela d'autres points d'appui mobiles, (au lieu de points fixes) dont la vitesse soit v en sens contraire, ou des points d'appui
qui

qui cedent avec la vitesse v , on voit manifestement que c'est la vraie maniere d'envisager notre question. Or il faudroit tant pour les points d'appui fixes que pour les mobiles, pousser les perches avec la même force pour donner à la galere la même vitesse, mais dans le premier cas, on les pousseroit avec la vitesse c , & dans le second cas avec la vitesse $c + v$; & les travaux étant en ce cas proportionels aux vitesses (§. 2.), il s'ensuit que le travail dans le second cas, sera $= \frac{c+v}{c} T$; ainsi le travail accessoire est $= \frac{v}{c} T$, ou bien $= \frac{v}{c} E$, puisque T , exprime un travail, qui produit son effet E tout entier. C'est précisément la même valeur que nous avons trouvée dans le précédent article; nos principes sont trop fondés dans la nature pour se dementir.

X X I X.

Pour appliquer notre Théorème à la question dont il s'agit d'évaluer l'effet accessoire que la chiourme produit sur la galere, il faut tâcher de substituer aux lettres E , n & s leur juste valeur; considérons pour cet effet que la surface reunie de toutes les pales est 130 pieds quarrés sur 52 rames; mais comme les rames ne sont plongées dans les eaux que pendant environ le $\frac{1}{3}$ du tems, il faudra envisager la chose comme s'il n'y avoit que 17 à 18 rames poussées sans interruption contre les eaux; donc la surface des pales ne fera plus que d'environ 43 pieds quarrés; on voit ensuite qu'il y a naturellement encore plusieurs petites diminutions à supposer pour ces 43 pieds, toutes m'engagent à supposer finalement $s = 36$ pieds quarrés. Je suis persuadé que c'est la plus grande valeur qu'on doit admettre, mais une si petite correction n'est pas assez importante pour nous engager là-dessus dans de grandes

Prix de 1753.

E

discussions; nous ferons donc $s = 36$ pieds quarrés, $n = 16$ pieds quarrés, & $E = 0,446$ (§. 25.) & nous aurons $E\sqrt{n} = \frac{1}{2}E = 0,297$, c'est-là l'effet accessoire produit par le travail des rameurs, qu'on exprime par l'unité, lequel effet accessoire prend sa source dans le mouvement qu'on donne aux eaux par le corps de pale; & pour être persuadé, que ce n'est-là qu'un effet accessoire, on n'a qu'à supposer la surface de toutes les pales, comme infinie, ou extrêmement grande, ce qui n'implique aucune contradiction, & cet effet s'évanouira entièrement ou se réduira à très-peu de chose.

XXX.

Si nous ajoutons ensemble les deux effets provenans du travail de la chiourme, & déjà indiqués, la somme sera $= 0,743$ de l'effet entier que 260 hommes peuvent produire lorsqu'ils employent toutes leurs forces utilement, & ces 0,743 parties consistent uniquement dans le mouvement qu'on imprime, & communique continuellement aux eaux, tant par la proue de la galere que par la surface des pales.

XXXI.

Il nous reste à découvrir en quoi peut consister le reste de l'effet entier qui se réduit à 0,257; car je le repete, tout travail doit avoir son effet, & nous n'avons encore indiqué que les trois quarts de l'effet entier. Je trouve que le quart restant doit être attribué pour la plus grande partie à l'agitation irrégulière des corps des rames; je dis: qu'il faut un travail considérable pour remuer les rames de la maniere que les rameurs le font sur une galere, & cela independamment de la résistance des eaux, considérant ici la simple inertie

des rames ; ce travail réquis pour remuer les corps des rames est sans doute encore accessoire puisqu'il s'évanouiroit , si on pouvoit faire des rames suffisamment roides & fortes avec très-peu de matiere. C'est-ici une nouvelle matiere , que je tâcherai déclaircir assez pour pouvoir évaluer en quelque façon cette perte , que les rameurs sur une galere font de leur force , & de leur travail.

XXXII.

Les rames sur les galeres ayant 36 pieds de longueur , & étant en même tems assez fortes pour soutenir des efforts de plus de soixante livres , à la distance de $21\frac{1}{2}$ pieds (§. 16.) depuis l'apostis , ne fauroient manquer d'être des corps fort lourds & pesants , ce sont cependant ces corps qu'il s'agit de remuer fortement par des mouvemens réciproques & répétés vingt-quatre fois dans une minute de tems ; si ces agitations des rames se faisoient d'une maniere que les forces vives une fois imprimées aux rames se conservassent d'elles-mêmes , comme cela arrive à tous les corps qu'on abandonne à eux mêmes , nous trouverions très-peu de perte dans l'agitation des rames , & il n'y auroit guere à considérer , que le petit frottement de chaque rame contre l'apostis. Mais qu'on fasse bien attention aux mouvemens que les rameurs donnent aux rames , & on verra aussitôt qu'il s'agit alternativement de leur imprimer une certaine vitesse , & ensuite de les arrêter ; chacun de ces changemens réciproques demande un certain travail , que nous devons considérer comme accessoire , & qui est en pure perte. Il est difficile d'évaluer au juste cette perte , parce que nous ne connoissons pas exactement les changemens en direction & en vitesse des rames , en tant que ces changemens sont produits

par les efforts des rameurs. C'est pourquoi je me contenterai d'envisager le mouvement des rames sous la forme la plus simple & la plus susceptible de calcul, mais qui ne laisse pas d'imiter assez bien le vrai mouvement tel qu'il est.

XXXIII.

Je considérerai dans les palades deux mouvemens, celui qui se fait hors de l'eau, & celui qui se fait sous l'eau ; dans le premier mouvement il faudra faire attention à la force vive imprimée à la rame, lorsque cette force vive est la plus grande, & je ferai consister dans cette seule force vive tout l'effet inutilement produit par les rameurs ; ensuite le mouvement de la rame sera retardé, & enfin entièrement arrêté ; je n'attribue aucun travail à cela, parce que les rameurs n'ont qu'à laisser entraîner leur corps pour retarder, & pour arrêter les rames vers la fin de ce premier mouvement ; quant au second mouvement, il est vrai que les rameurs impriment d'abord un nouveau mouvement aux rames ; mais ce mouvement est ensuite employé utilement à pousser les eaux vers la poupe ; & pourvu qu'on suppose que les rames n'ayent plus aucun mouvement sensible dans le moment qu'on retire les pales hors de l'eau, on n'aura fait aucune perte de ce côté-là : on voit bien qu'en envisageant de cette manière notre sujet, je suis bien éloigné de surcharger la perte des forces causée par l'inertie des rames. Voici à présent un Théorème, qui nous servira à évaluer cette perte.

Fig. II.

Soit AC , ou ac la longueur de la rame agitée réciproquement de AC en ac , & ac en AC , autour du point B , qui est la place de l'apostis ; qu'on marque par M , le poids, ou la masse de toute la rame, qu'on pourra supposer inégalement chargée de matière d'une

façon quelconque ; soit ensuite le centre de gravité de la rame entière en D ; il faut aussi s'imaginer la rame être suspendue par le point B , en forme d'un pendule simple, & en chercher le centre d'oscillation, que nous supposerons en E ; qu'on fasse enfin $B G$ égale à la moyenne proportionnelle entre $B D$ & $B E$: après cette construction, je dis qu'on pourra considérer toute la matière de la rame, comme concentrée au point G , qu'on peut appeler le centre des forces vives ; connoissant le point G , il faudra examiner quelle est la vitesse de ce point G , pendant que la rame est poussée de AC en ac , soit la hauteur verticale génératrice de cette vitesse $= h$, & on a démontré que la force vive de la rame est égale à $M h$.

XXXIV.

On voit donc que pour chaque rame les rameurs produisent sur chaque palade inutilement une force vive exprimée par $M h$, & par conséquent $24 M h$ pendant chaque minute, ou $\frac{2}{7} M h$ pendant chaque seconde ; & comme on applique cinq rameurs à chaque rame, on aura $\frac{2}{7} M h$ pour chaque homme par seconde. Si on veut exprimer le poids de la rame M , par livres, & la hauteur verticale h , par pieds, il faudra comparer la quantité trouvée $\frac{2}{7} M h$ avec 60 , qui est la mesure du travail entier d'un homme pour chaque seconde de tems. Ainsi si le travail absolu de la chiourme est exprimé par l'unité, nous dirons que le travail inutilement employé causé par l'inertie des rames est $\frac{1}{750} M h$.

XXXV.

Je suis bien sûr, que ladite perte est pour le moins $\frac{1}{750} M h$; mais je ne suis pas sûr, qu'elle ne soit pas plus

grande. Or après avoir fait attention a toutes les circonstances décrites par M. Chazelles, de même qu'à celles qui déterminent le point *G*, conformément au Théorème du §. 33, j'estime *h* de $\frac{1}{4}$ de pieds, & sur cette estime la perte en question sera $= \frac{1}{600} M$; mais j'avoue que je n'ai aucune idée sur le poids d'une rame de galere; si ce poids est supposé de 100 livres, la perte en question sera 0, 167; en tous cas nous voyons qu'elle est considérable. Supposons-là en attendant d'en être instruit $= 0, 167$, & ajoutons cette valeur à celle de 0, 743, que nous avons adoptée à la fin du §. 30, & nous aurons 0, 910. De cette maniere nous aurons déjà trouvé les 0, 910 parties de l'effort total du travail de la chiourme.

XXXVI.

Nous ne nous mettrons pas beaucoup en peine pour découvrir à quoi peuvent avoir été employés les 0, 090 dernieres parties, il est facile de voir qu'il y aura encore plusieurs autres petites pertes; la principale, à mon avis, de toutes ces petites pertes consiste en ce que sans doute la partie extérieure de la rame fera un peu plus pesante que la partie intérieure, ce qui fera qu'à chaque palade, on est obligé d'élever un certain poids, & ce travail doit encore être considéré comme entièrement inutile. Nous connoissons donc à présent à-peu-près tout l'emploi que les rameurs font de leur force. Le principal & essentiel consiste à déplacer les eaux qui s'opposent à la proue, c'est ici le seul utile, & il doit être égal à 0, 446. Le second consiste à déplacer les eaux, que rencontrent les surfaces des pales; je traite celui-ci d'accessoire, & inutile, & je le fais $= 0, 297$. Le troisieme sert à remuer le corps des rames, & à surmonter leur inertie; il est de même ac-

cessoire & inutile, & je l'estime = 0, 167. Enfin le dernier emploi des efforts des rameurs pareillement inutile consistera à lever quelques autres obstacles accidentels & sur tout celui qui provient du défaut d'équilibre dans les deux bras de la rame. Je suis aussi bien persuadé, que si on pouvoit éviter tous ces effets inutiles sans tomber dans d'autres pertes, on atteindroit par-la à la meilleure maniere qu'il soit possible de naviger par les efforts des hommes, car nul travail ne reste sans effets, & si tout l'effet est utile, on tire le meilleur parti qui soit possible du travail des hommes. Mettons ces principes à profit dans notre seconde Partie.

XXXVII.

Avant que de finir cette Première partie, nous ferons encore quelques réflexions sur le moyen fondamental, qui est le seul dont les hommes puissent profiter pour faire cingler un navire par leur travail en pleine mer. Ce moyen unique est l'inertie des eaux, quand on se trouve en pleine mer, mais on peut mettre à profit cette inertie de plusieurs manieres, qui sont fort différentes entre elles. Dans l'usage ordinaire des rames on pousse les pales contre les eaux, & ce mouvement se fait avec une vitesse finie & comme uniforme, dans cette action, on donne pendant chaque instant une vitesse finie à une nouvelle masse d'eau *infiniment petite*, mais on peut changer la chose de maniere que pendant chaque instant on donne un incrément de vitesse infiniment petit à une masse finie; cette considération pourroit bien nous induire à faire quelque changement à la structure des rames, ou même à leur substituer quelqu'autre moyen, en tout cas ce nouveau sujet appartient de trop près à notre question principale pour le passer sous silence.

XXXVIII.

Imaginons-nous d'abord toute la surface de la mer parsemée de corps flottans, mais qui n'empêchent pas le sillage, de manière qu'au lieu d'enfoncer les pales dans l'eau, on puisse simplement appuyer l'extrémité de la rame contre un de ces corps, & le pousser vers la poupe, & supposons que ces corps flottans ne résistent à la rame que par leur inertie; sur ces suppositions, nous nous trouverons dans le cas, duquel j'ai fait mention dans le précédent article, qui est de donner à chaque instant une accélération vers la poupe infiniment petite au corps flottant qui fait une masse finie. Si chacun de ces corps flottans avoit une masse comme infinie, il ne céderoit pas sensiblement à l'effort de la rame, & le rameur ne perdrait rien à cet égard de sa force; mais si ces corps sont considérés, comme ayant une certaine masse, ils céderont par un mouvement accéléré, & la perte du travail des rameurs est la force vive qu'auront acquis ces corps dans le moment qu'on les quitte pour appuyer la rame contre un nouveau corps flottant. Nous substituerons ensuite à ces corps flottans des masses d'eau assujetties à ne pouvoir être déplacées que toutes entières à la fois.

XXXIX.

Maintenant je me propose de chercher la proportion qu'il y auroit entre le travail, si le poids p de chaque corps flottant étoit infini, & qui seroit essentiel, à celui qu'on est obligé d'employer lorsque le poids p est d'une certaine valeur déterminée, ce calcul se fera à peu-près comme au §. 28. Il n'y a que cette différence, qu'ici la vitesse avec laquelle le corps flottant est

est poussé vers la poupe est uniformément accéléré, pendant que cette vitesse étoit considérée, comme uniforme dans le §. 28. Soit la vitesse du corps flottant relative aux eaux calmes, dans un instant quelconque $= v$, que ce corps soit pressé avec une force quelconque π pendant un tems infiniment petit dt , & il faudra toujours estimer le travail proportionel à $\int \pi v dt$. Cette considération nous conduit d'abord à cette propriété, que le travail essentiel est au travail accessoire provenant du mouvement qu'on donne aux corps flottans, comme Pct à $\int P v dt$; mais pour avoir une idée plus nette de cette proportion, considérons les espaces parcourus; supposons que depuis le moment qu'on a commencé à toucher le corps flottant, ce corps ait parcouru l'espace s , pendant que le navire parcourt l'espace S , & alors on pourra mettre ds à la place de $v dt$, & S à la place de ct ; après quoi ladite proportion sera comme PS à $\int P ds$, ou P étant constante comme S à s . Nous voyons donc qu'à présent le travail essentiel & entièrement utile est au travail accessoire duquel il est ici question, comme le chemin que fait le navire pendant tout le tems qu'on employe à pousser en arriere chaque corps flottant, est au chemin parcouru par le corps flottant pendant le même tems. Ce Théorème seroit le même que celui du §. 28, si nous avions pu supposer ici la vitesse v constante, parce que en ce cas les espaces s & S , seroient comme les vitesses v & c .

XL.

Connoissant la perte qu'on souffriroit par une telle sorte de travail, je crois que cette connoissance pourroit bien nous fournir quelques nouveaux moyens d'épargner les forces des rameurs, & d'en tirer plus de

Prix le 1753.

F

fruit. C'est dans cette vue que j'ajouterai quelques réflexions sur notre Théorème.

I Soit la force , avec laquelle chaque corps flottant est poussé en arriere $= \pi$, le poids de ce corps $= p$, le petit tems , pendant lequel ces corps sont pressés à chaque fois $= t$ exprimé par secondes , & alors on aura $s = \frac{\pi}{p} \times t t \times 15$ pieds , pendant qu'on a $S = t c$ pieds , en entendant par c le nombre de pieds que le navire fait dans une seconde de tems ; donc le rapport de s à S devient égal au rapport de $15 \pi t$ à $p c$.

II. Comme il y a sur une galere 52 rames , qui agissent par intervalles en 3 tems , nous pourrons leur substituer $\frac{52}{3}$ rames qui agissent sans interruption , & la pression continuelle que chaque rame exerce contre les eaux , doit être censée d'environ cinquante-six livres , qui font $\frac{3}{52}$ de la résistance d'un plan de 16 pieds quarrés mus contre les eaux , avec une vitesse de $7\frac{1}{5}$ pieds par seconde. Outre cela le tems employé à pousser les pales contre les eaux sur les galeres est le tiers d'une palade ou $\frac{1}{6}$ de seconde ; supposons donc qu'on pousse pareillement chaque corps flottant avec une force de cinquante-six livres , en y employant chaque fois un tems de $\frac{1}{6}$ de secondes , & on trouvera $s = \frac{\pi}{p} \times t t \times 15 = 5, 83\frac{1}{3}$ pieds , pendant qu'on auroit S ou $t c = 6$ pieds : si on veut donc faire enforte que le travail inutile ne fasse que les deux tiers du travail utile , qui est la proportion que nous avons trouvée au §. 29 pour la maniere ordinaire de ramer sur la galere , il faudra faire $\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$, & par conséquent $p = 145\frac{1}{6}$ livres , ce qui fait environ le poids de chaque corps flottant de deux pieds cubes d'eau. Cette supposition rendroit le travail entièrement égal pour la maniere ordinaire

de ramer, & pour celle d'appuyer l'extrémité des rames contre des corps flottans.

Qu'on fasse à présent attention à la maniere dont nous avons trouvé tous les résultats de cet article, & des deux précédentes remarques, si différentes en apparence de nos méthodes antérieures, & on sera surpris de l'admirable accord qu'il y a de part & d'autre pour les résultats absolus. J'ai dit que le travail inutile est toujours la force vive inutile qu'on en tire; dans notre cas c'est la force vive que l'on donne à chaque corps flottant, cette force vive est pour chaque corps flottant $= \pi s = \pi \left(\frac{\pi}{p} \times t t \times 15 \right)$, faisons $\pi = 56$, $p = 145 \frac{5}{6}$, $t = \frac{5}{6}$, lesquelles positions sont le travail de pousser en arriere les corps flottans, le même que celui de ramer sur la galere, & nous trouverons $\pi s = \pi \left(\frac{\pi}{p} \times t t \times 15 \right) = 224$. Ainsi la force vive de chaque corps flottant devient $= 224$, mais comme il y a cinq hommes à chaque rame, nous aurons pour chaque homme $\frac{224}{5} = 44 \frac{4}{5}$, qui font la force vive que chaque homme produit inutilement à chaque palade qui dure $2 \frac{1}{2}$ seconde, ce qui fait par seconde pour chaque homme $17 \frac{21}{25}$ de perte; cette perte étant comparée avec le travail entier que nous estimons toujours 60 par seconde, on trouvera la perte $= \frac{4+8}{500}$ parties du travail entier, ou en fraction décimale 0, 298, & nous avons trouvé à la fin du §. 29. Cette perte en tant quelle est produite par l'action ordinaire des rameurs $= 0, 297$. Un aussi parfait accord prouve incontestablement la vérité de tous les principes, dont nous nous sommes servis.

IV. Remarquons enfin que l'effet inutile consistant dans la force vive imprimée aux corps flottans, étant

à l'effet essentiel & inevitable comme s à S , ou comme $\frac{\pi}{p} \times t t \times 15$ à $t c$, ou enfin comme $15 \pi t$ à $p c$, on peut diminuer ce rapport de deux manieres sans rien changer à la valeur π nécessaire pour entretenir la vîtesse uniforme du navire ni à cette vîtesse même exprimée par c , la *premiere* maniere consiste à augmenter le poids des corps flottans exprimé par p , & la *seconde* maniere est de diminuer le tems t ; cette seconde maniere a besoin de quelque explication.

Supposons, comme dans la seconde remarque $\pi = 56$, $p = 145 \frac{5}{61}$, $t = \frac{5}{6}$, & on aura $s = 4$ pieds, pendant que S sera = 6 pieds; mais si on faisoit $t = \frac{5}{12}$, on trouveroit $s = 1$ & $S = 3$, & l'effet inutile ne feroit plus que le tiers de l'effet utile & essentiel. Mais on dira que de cette façon, les palades s succédroient avec trop de rapidité, & qu'au lieu de 24 il en faudroit 48 dans une minute; à cette objection je répons, que cela n'est point nécessaire; car, comme nous entendons par t le petit tems, pendant lequel l'extrémité de la rame reste appuyée contre chaque corps flottant, il n'y a qu'à supposer les corps flottans plus ferrés, de maniere à pouvoir appuyer à chaque palade successivement contre deux corps flottans. Ainsi notre seconde maniere de diminuer l'effet inutile consiste proprement à changer dans un même coup de rame le plus souvent qu'il est possible de corps flottans. Si par un seul coup de rame on pouvoit successivement dix corps flottans, l'effet inutile deviendroit par-là dix fois plus petit, que si on employe tout le coup de rame à pousser un seul corps, parce que chacun des dix corps ne recevra que la centieme partie de force vive.

XLI.

M. Bernoulli expose à la fin de son Hydrodynamique une idée singulière de voguer sans rames ; elle consiste à pomper des eaux pour les laisser écouler ensuite vers la poupe, si M. Bernouilli avoit examiné la chose suivant nos principes, il auroit jugé comme moi , qu'il faut attendre moins d'effet du travail des hommes qui pompent , que de ceux qui rament ; car en adoptant toutes les proportions qu'il trouve les plus avantageuses , je remarque que tous les effets inutiles sont au moins trois fois aussi grands que l'effet utile , de sorte que l'effet utile n'est que le $\frac{1}{4}$ de l'effet entier , il y auroit donc $\frac{3}{4}$ de perte , pendant que nous n'avons trouvé que $\frac{1}{260}$ de perte sur la galere (§. 17.) , en supposant $n = 16$, & $\frac{18\frac{1}{2}}{260}$ (19) , en supposant avec M. Bouguer $n = 10$. Il faut cependant avouer , qu'on donneroit à la galere presque autant de vitesse en pompant , qu'en ramant ; & je suis surpris que M. Bernouilli , après plusieurs positions , qu'il ne pouvoit faire qu'avec une certaine estime , ait pu si bien former la même conclusion finale. Je ne ferai donc aucun usage dans ma seconde partie de cette nouvelle idée.

XLII.

On fera peut-être surpris de voir , que dans tout le corps de cette premiere partie , je n'aie rien dit sur la longueur & les proportions les plus avantageuses des rames ; c'est que suivant nos principes , la longueur absolue , & la proportion de la partie extérieure à l'intérieure sont par elles-mêmes indifférentes , puisque faisant abstraction de l'inertie des rames , & de la trop

grande obliquité dans le mouvement des rames trop courtes , il y a toujours la même proportion entre l'effet utile & inutile, quelles que foyent les longueurs des parties extérieures & intérieures des rames. Il n'y a dans ce choix aucune économie essentielle à observer, & toutes les considérations qu'on doit faire sur cette question ne sauroit tendre qu'à éviter quelques inconveniens accidentels qui surviennent, les uns aux rames trop courtes, & les autres aux rames trop longues; je ne m'étonne donc pas, que ceux qui ont traité cette question l'ayent décidée tout différemment les uns des autres. J'aurai occasion, dans la seconde Partie, de faire sur ce sujet quelques réflexions passageres.

SECONDE PARTIE.

I.

L'ACADÉMIE propose de trouver la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux, soit en y appliquant des rames, soit en y employant quelqueautre moyen que ce puisse être. J'espère bien qu'un bon usage de nos principes nous apprendra ce que cette illustre Compagnie demande; mais je crois devoir prévenir le lecteur, que le plus grand effet possible qu'on puisse se promettre du travail des hommes étant fort borné, la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux par le travail des hommes pourroit facilement paroître assez defectueuse à en juger autrement que par nos principes. Je me propose donc avant toutes cho-

les d'examiner, quelle est la plus grande vitesse possible qu'un certain nombre d'hommes puissent donner à un grand vaisseau donné.

II.

Pour me conformer davantage à l'intention de l'Académie, je m'attacherai aux vaisseaux du premier rang, & je supposerai, qu'un tel vaisseau a une résistance égale à celle d'un plan de 150 pieds carrés. C'est ainsi que M. Bouguer détermine ce plan dans son *Traité du Navire*, pag. 419; non sur une simple estime, comme il a fait par rapport aux galeres, mais par une méthode qui ne pouvoit guere tromper ce grand homme aussi parfaitement instruit de tout ce qui pouvoit contribuer à rendre cette détermination plus exacte. Il n'y a donc qu'à supposer $n = 150$ dans l'équation générale que nous avons donnée au §. 14. de la premiere partie sçavoir :

$$c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7^n}}$$

& nous aurons $c = \sqrt[3]{\frac{1}{3^3} N}$, qui nous märke quel est le nombre de pieds c , que le vaisseau peut faire dans une seconde de tems par le travail ordinaire d'autant d'hommes qu'il y a d'unités en N , en supposant tout leur travail utilement employé. Cette vitesse n'est donc possible que dans la théorie pure, & plus on s'en approchera, plus la maniere de voguer sera parfaite.

III.

Si les hommes, au lieu d'un travail ordinaire, soutenable pendant huit heures par jour, vouloient faire un travail forcé, tel qu'ils puissent soutenir tout au

plus une demi-heure de fuite, ils pourroient alors faire un effet double à-peu-près, & ils augmenteroient la vîteffe du vaisseau presque en raison de 1 à $\sqrt[3]{2}$, ou plus exactement en raison de 1 à $\sqrt[3]{\frac{17}{9}}$; voyez la premiere & la quatrieme expérience du §. 21. de la premiere partie, & la note (b) du §. 22; on aura donc en ce cas $c = \sqrt[3]{\frac{10}{16}} N$. Sur ce deux équations, qui expriment les plus grandes vîteffes possibles, tant pour le travail ordinaire, que pour le travail forcé, j'ai construit la Table suivante,

Table

Table fondamentale des vitesses possibles d'un vaisseau du premier rang.

Nombre d'hommes employés à la navigation.	Vitesse possible entières pour un travail ordinaire & durable.	Vitesse possible entières pour un travail extrêmement forcé.
10	1, 50 pieds par seconde	1, 86 pieds par seconde
20	1, 90	2, 35
30	2, 17	2, 69
40	2, 39	2, 96
50	2, 58	3, 19
60	2, 74	3, 39
70	2, 88	3, 57
80	3, 01	3, 72
90	3, 13	3, 87
100	3, 25	4, 03
120	3, 45	4, 27
140	3, 63	4, 49
160	3, 80	4, 70
180	3, 95	4, 89
200	4, 09	5, 06
220	4, 22	5, 22
240	4, 34	5, 37
260	4, 46	5, 51
280	4, 57	5, 65
300	4, 68	5, 79
350	4, 93	6, 10
400	5, 16	6, 38
450	5, 36	6, 63
500	5, 55	6, 86
550	5, 73	7, 09
600	5, 90	7, 31
650	6, 06	7, 50
700	6, 21	7, 69
800	6, 50	8, 04
900	6, 76	8, 37
1000	7, 00	8, 68

Prix de 1753.

£

Cette Table nous apprend quelle vitesse un certain nombre d'hommes pourroient donner à un vaisseau du premier rang, soit par un travail ordinaire & durable, soit par un travail forcé, en supposant qu'il fût possible de mettre à profit tous leurs travaux sans la moindre perte. Je m'assure qu'on trouvera sans difficulté, dans ces vitesses de l'une & de l'autre espece, tout cet air de vérité qu'on peut attendre sur ces sortes de matieres, quand on ne considere la Table, que depuis environ 200 hommes jusqu'à 1000; mais cette apparence de vérité se perd peu-à-peu, à mesure qu'on diminue le nombre d'hommes, elle s'évanouit enfin entièrement, & prend tout l'air d'une fausseté manifeste. En effet, il sera bien difficile à ceux qui n'auront pas compris toute la force de nos principes, de se persuader qu'il soit possible, suivant notre Théorie, à dix hommes de donner à un vaisseau du premier rang une vitesse à faire un pied & demi par seconde par un travail ordinaire, & une vitesse à faire $1\frac{6}{7}$ pieds par un travail forcé; ils se récrieront contre ces énormes vitesses pour un si petit nombre d'hommes, & laisseront-là toute cette théorie; j'aurois peut-être été tenté de donner une autre tournure à mes pensées, si j'avois pû quitter pour un moment cette haute opinion que j'ai de mes Juges. Rassuré par leurs lumieres, je ne crains point d'avouer, que ce sont précisément ces réflexions qui me paroissent les plus favorables à nos idées. J'espère qu'on en portera la même opinion après qu'on aura vu les changemens que l'action de ramer demande par la Table des vitesses que nous venons de donner.

V.

L'objet de cette Table n'est qu'un être de raison, auquel on n'atteindra jamais, mais qui doit nous gui-

der dans nos recherches, & duquel on approchera d'autant plus, qu'on employera plus utilement le travail des hommes. La table suppose un travail entièrement utile, mais elle prendra une toute autre face aussitôt que nous considérerons la chose autrement qu'*in abstracto*, & que nous appliquerons notre théorie à un travail déterminé, duquel nous connoissons déjà les effets pour de certains cas. Choisissons ici l'action de ramer ordinaire, envisageons donc notre grand vaisseau de premier rang comme une grande galere, sur laquelle les hommes puissent ramer aussi commodement qu'ils le font sur les galeres ordinaires, on conviendra que c'est ici une supposition bien libérale & avantageuse, & on seroit sans doute assez content, si quelqu'un indiquoit une maniere de faire aller les grands vaisseau sur mer si peu défectueuse. Voyons donc quelles vitesses réelles on donneroit par ce travail au grand vaisseau en question.

VI.

J'imiterai sur ce grand vaisseau toutes les circonstances que nous avons remarquées sur la galere. La surface réunie de toutes les pales sur la galere étoit de 130 pieds quarrés, ce qui fait la moitié d'un pied quarré pour chaque homme; c'est pourquoi nous donnerons pareillement la moitié d'un pied quarré pour pale à chaque homme sur le vaisseau. Nous avons ensuite réduit sur la galere les 130 pieds quarrés à 36 pieds quarrés (Part. 1. §. 29.), qui seroient poussés contre les eaux, sans aucune interruption, & tout à fait directement. Ce n'est donc plus que $\frac{36}{130}$ pieds quarrés de pale pour chaque homme, mais considérée comme agissant sans interruption, & nous supposons la même chose pour les vaisseaux du premier rang. Si le nom-

bre des rameurs est $= N$, on aura $\frac{16}{27} N$, pieds quarrés, qui poussent continuellement les eaux en arriere pour avancer le vaisseau. C'est ce plan que nous avons nommé S , au §. 27 de la premier Partie : il est d'autant plus petit qu'il y a moins de rameurs, & nous avons démontré aux §§. 26 & 27, que plus ledit plan est petit, plus la perte du travail des rameurs est grande. Voilà pourquoi les vîtesses de la table du §. 3, excèdent de beaucoup les vîtesses réelles qu'un petit nombre de rameurs peuvent donner au grand vaisseau ; cependant on comprendra assez, qu'il n'est pas absurde de dire que dix hommes puissent donner à un vaisseau du premier rang une vîtesse à faire un pied & demi par seconde ; on n'a qu'à s'imaginer ce vaisseau attaché à un poteau par une longue corde, que dix hommes tireroient à soi ; le vaisseau mu avec ladite vîtesse souffriroit une résistance d'environ 400 livres suivant la théorie commune sur la résistance des fluides, ainsi le travail de chaque homme ne consisteroit qu'à surmonter une résistance de quarante livres, avec la vîtesse d'un pied & demi par seconde, ce qui fait précisément le travail naturel d'un homme. Si par une telle manœuvre les dix hommes ne pouvoient donner au vaisseau ladite vîtesse, ce seroit une marque infailible, que la théorie sur la résistance des fluides, s'écarte sensiblement de la vérité pour les grands corps mus avec peu de vîtesse, cela changeroit bien les calculs à faire, mais non pas nos principes, ni les maximes que nous en tirerons pour employer le travail des hommes à la navigation avec plus de profit. Il est donc visible, que si les vîtesses que la Table marque pour un petit nombre d'hommes paroissent d'abord excessives & même absurdes, ce n'est que parce qu'on considère ces hommes sur le pied d'autant de rameurs, & nous allons voir qu'il s'en faut de beaucoup qu'un pareil

nombre de rameurs puisse donner au vaisseau toute la vitesse possible.

VII.

Pour connoître à présent la vitesse réelle de notre grand vaisseau produite par un nombre de rameurs quelconque N , nous nommerons E , l'effet utile de ces rameurs, & nous aurons, en vertu des § §. 27 & 28, Partie première, $E \sqrt[n]{n}$ pour cet effet inutile, qui consiste dans le mouvement qu'on donne aux eaux par les coups de rame; dans cette expression $E \sqrt[n]{n}$ il faut pour un vaisseau du premier rang faire $n = 150$ pieds quarrés, & $S = \frac{3}{260} N$ (§. 6. Part. 2.), & de cette maniere ledit effet inutile devient $= \sqrt[150]{\frac{150 \cdot 260}{36 N}}$, ou à-peu-près $= \frac{33}{\sqrt{N}} E$; ainsi la somme des deux effets est $= E + \frac{33}{\sqrt{N}} E$. Outre cette perte exprimée par $\frac{33}{\sqrt{N}} E$, nous avons remarque au §. 31. Part. prem. que l'action de remuer les corps des rames, & de vaincre leur inertie fait encore une perte, laquelle jointe à quelques autres petits défauts peut faire environ le quart de l'effet total, ce qui fait un tiers des deuxdits effets, ou un tiers de $E + \frac{33}{\sqrt{N}} E$; donc la somme entiere de tous les effets est $= \frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E$. Ainsi l'effet utile est à la somme de tous les effets comme E est à $\frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E$, ou comme f est à $\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}}$. Il faut donc diminuer chaque vitesse de la Table en raison de $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}}\right)}$ à f , parce que les vitesses sont en raison des racines cubiques de travaux utilement employés (§. 13. Part. prem.) ou essentiellement requis, & que la Table suppose le travail entier utilement employé, ce qui donne cette

analogie ; comme la racine cubique de l'effet total, ou $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{7} E + \frac{6}{\sqrt{N}} E\right)}$ est à la racine cubique de l'effet utile, ou $\sqrt[3]{E}$, ainsi chaque vitesse de la Table fondamentale a la vitesse réelle, que les rameurs donneront au vaisseau ; ainsi on déterminera les vitesses réelles, en divisant chaque vitesse de la Table fondamentale, par le nombre $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{7} + \frac{6}{\sqrt{N}}\right)}$. Comme je ne doute pas que ces nouvelles vitesses ne répondent assez bien aux expériences qu'on pourra faire, je ne me suis point fait de peine de construire sur cette règle la Table ci-jointe ; mais on se souviendra que cette Table n'est faite que pour les vaisseaux du premier rang, dont les résistances répondent à un plan de 150 pieds quarrés, qu'on suppose pour chaque rameur la moitié d'un pied quarré de pale, & que ces rameurs travaillent de la même manière, que sur les galeres, quoique cette dernière supposition ne soit pas fort essentielle ; voici cette nouvelle Table.

DE SUPPLÉER A L'ACTION DU VENT. 55

Table des vitesses réelles qu'on peut donner à un vaisseau du premier rang, par le moyen des rames.

Nombre de rameurs.	Vitesses pour un travail ordinaire & durable.	Vitesses pour un travail extrêmement forcé.
10	0,60 <small>pieds par seconde.</small>	0,75 <small>pieds par seconde.</small>
20	0,85	1,05
30	1,03	1,27
40	1,18	1,46
50	1,31	1,62
60	1,43	1,77
70	1,54	1,91
80	1,64	2,03
90	1,73	2,14
100	1,81	2,24
120	1,96	2,43
140	2,10	2,60
160	2,23	2,76
180	2,36	2,92
200	2,48	3,07
220	2,59	3,21
240	2,69	3,34
260	2,79	3,46
280	2,89	3,58
300	2,98	3,69
350	3,19	3,95
400	3,39	4,20
450	3,57	4,43
500	3,73	4,63
550	3,88	4,82
600	4,03	5,00
650	4,17	5,17
700	4,30	5,34
800	4,55	5,65
900	4,79	5,94
1000	5,01	6,21

VIII.

Cette Table corrigée sur la précédente , conformément à nos principes , & à nos calculs sur la perte , que les rameurs font de leur travail en ramant sur les galeres , ne me paroît plus rien renfermer qui puisse blesser l'estime naturelle qu'on peut se former là-dessus. On voit à présent par cette Table ; que dix rameurs ne pourront plus donner au vaisseau qu'une vitesse à faire $\frac{3}{7}$ de pieds par seconde , ou environ sept pouces par un travail naturel , & neuf pouces par un travail forcé. Ces deux vitesses font $\frac{2}{7}$ des vitesses totales correspondantes , mais les effets utiles ne font , que la quinzieme partie des effets totaux , d'où l'on voit la grande perte que les dix rameurs font de leurs travaux. Mais lorsqu'il y a mille rameurs sur le vaisseau , ils lui donnent les $\frac{2}{7}$ de la vitesse totale , & ils emploient plus que le $\frac{1}{7}$ de leurs travaux utilement ; ces grandes différences proviennent uniquement de ce qu'en augmentant le nombre des rameurs , on augmente en même tems la surface réunie de toutes les pales , c'est aussi-là la raison pourquoi les quatre rameurs dans la cinquieme expérience du §. 21. Part. prem. ont donné aux bateaux relativement aux deux rameurs dans la premiere expérience du même § , une vitesse un peu plus grande , que ne demande le Théorème du §. 13. Part. prem. Voyez la note (c) du §. 22. Part. prem.

On voit enfin par chacune des deux Tables , combien peu de profit on fait en augmentant de beaucoup le nombre des rameurs , puisqu'une différence de neuf-cent à mille rameurs ne fait qu'environ trois pouces de différence dans les vitesses.

IX.

Je m'en rapporte à présent à ceux qui pourront juger de nos résultats par leur propre expérience : ils n'auront pas manqué surtout de remarquer à-peu-près les vitesses des grands vaisseaux qu'on remarque sur une chaloupe, ou sur une galere, si nous faisons abstraction de la petite résistance, qui survient en attachant la chaloupe au vaisseau, & même de celle qui survient en y attachant la galere ; notre Table nous enseigne que dix hommes sur une chaloupe pourroient remorquer le vaisseau par un travail naturel, avec une vitesse de sept pouces par seconde, & vingt hommes avec une vitesse de dix pouces. J'aurois souhaité surtout, de trouver là-dessus quelques expériences ou observation dans quelque auteur ; je présume, que ces vitesses sont encore un peu trop grandes à cause d'une autre résistance, à la quelle nous n'avons par fait attention, & qui ne sauroit presque se manifester que dans les très-petites vitesses ; c'est l'adhésion des eaux contre la carene du vaisseau, qui vraisemblablement ne croît qu'en raison simple des vitesses, pendant que la résistance essentielle des fluides croît en raison du carré des vitesses ; mais comme je ne fais ces remarques, que pour faire voir tout l'usage de nos principes, & que dans l'application il ne s'agit pas des petites vitesses qu'un petit nombre de rameurs peuvent donner aux grands vaisseaux, nos conclusions ne seront pas beaucoup changées par l'adhérence des fluides, quand même l'expérience démontreroit, qu'elle est assez considérable dans les mouvemens très-lents. La dernière Table nous apprend encore que 260 hommes, sur une galere pourroient remorquer un vaisseau du premier

Prix de 1753.

H

rang avec une vitesse d'environ deux pieds neuf pouces par seconde, ou même avec une vitesse de presque trois pieds $\frac{1}{2}$ avec un travail extrêmement forcé, ces deux vitesses doivent être diminuées en raison de $\sqrt[3]{11}$ à $\sqrt[3]{10}$, parce que la galere attachée au vaisseau augmente la résistance à-peu-près en raison de 11 à 10, après lesquelles diminutions le vaisseau ne seroit plus remorqué, qu'avec une vitesse d'environ deux pieds huit pouces, ou en faisant force de rames, avec une vitesse d'environ trois pieds quatre pouces. Je ne doute pas que ces vitesses ne se confirment assez bien par l'expérience, ce qu'on trouvera peut-être de moins doit encore être attribué à l'adhérence des eaux, laquelle cependant, je présume ne pouvoir plus être guerre considérable en ce cas.

X.

Je fais avec plaisir toute les remarques, qui pourront servir de pierre de touche à notre théorie, & comme il est faite d'essayer les vitesses d'une galere semblable à celle dont parle M. Chazelles poussée successivement par 10, 20, 30, jusqu'à 260 rameurs, en observant simplement les tems employés à parcourir un même espace, je mettrai ici encore la formule, qui marque généralement combien de pieds la galere parcourra dans une seconde de tems. Pour trouver cette formule, on n'a qu'à faire tout ce que nous avons fait dans cette seconde partie avec cette seule différence qu'au lieu d'avoir supposé $n = 150$ pieds quarrés, il faut ici faire $n = 16$ pieds quarrés, là-dessus on trouvera pour le travail ordinaire,

$$\sqrt[3]{\frac{405 N}{168 + 112 \sqrt{\frac{260}{N}}}}$$

& pour le travail forcé il faudra multiplier cette formule par 1, 24. Si l'Académie, aux heureux auspices de laquelle la République des Lettres est redevable de toutes les grandes découvertes de notre siècle, trouvoit mes réflexions assez dignes de son attention pour engager quelque Capitaine de galere entendu à faire ces expériences, j'oserois me flatter, qu'elles s'accorderoient assez, avec ladite formule, pour constater entièrement toute notre théorie ; je trouve, par exemple, que dix rameurs en travaillant avec la même fatigue, qu'ils le font lorsque toute la chœurme fait parcourir à la galere $7\frac{1}{5}$ pieds par seconde, pourront lui donner la vitesse 1, 76 ; il n'y a que la force de l'adhérence des eaux qui pourra un peu diminuer cette vitesse. Mais il est tems que nous nous approchions de notre sujet principal.

XI.

Supposons un certain équipage destiné au travail, comme par exemple 500 hommes. La Table fondamentale nous fait voir, que toute la vitesse possible du vaisseau du premier rang sera alors de 5, 55 pieds, pour un travail ordinaire & durable, ou de 6, 86, pour un travail extrêmement forcé. C'est donc-là une vitesse de laquelle on peut bien tâcher d'approcher, mais qu'il ne faut pas espérer d'atteindre entièrement. On conviendra même que ce sera bien assez, que d'obtenir le même effet sur les grands vaisseaux, qu'on obtient par l'usage des rames sur les vaisseaux de basbord. Cependant les 500 hommes ne pourront donner alors même au vaisseau qu'une vitesse de 3, 73, 4, 63 ; & nous avons vu, que les deux sources principales de ce défaut consistent dans l'insuffisante grandeur des pales, & dans l'inertie des rames : ainsi toute

la perfection qu'on peut donner à l'usage commun des rames consiste uniquement à augmenter la surface des pales autant qu'il est possible sans tomber dans de nouveaux inconveniens, & à diminuer l'inertie des rames; on donne aux pales des grandes rames cinq pieds de longueur, ce seroit peut-être outrer la chose que de les faire plus longues, mais j'avoue que je ne vois pas assez, pourquoi on ne leur donne qu'un demi-pied de largeur, il me semble plutôt, qu'il n'y auroit aucun inconvenient considerable à leur donner un pied de largeur; cela supposé, car j'avoue que c'est avec peu d'assurance que je touche aux choses qu'un si long & universel usage à établies; voici les avantages qu'on en retireroit. Sans rien changer aux pressions que les rameurs exercent contre les rames, ni aux tems qu'ils employent, tant aux palades entieres qu'aux coups des pales contre les eaux, ou aux faccades, les agitations des rames en deviendroient plus petites, & en même tems l'inertie des rames en auroit moins d'effet, on ménageroit doublement le travail, & la perte en deviendroit plus petite: quand à l'inertie des rames, on en diminuera les effets en choisissant le bois le plus fort, & le plus léger, & en ne la chargeant dans aucun endroit inutilement de matiere, il ne faut pas lui donner près de l'apostis plus d'épaisseur qu'il en faut pour pouvoir soutenir sans se casser un poids d'environ 100 livres appliqué au milieu de la pale; depuis l'apostis il faut diminuer les épaisseurs, de maniere que les cubes des diametres soient proportionels aux distances depuis le milieu de la pale, car les forces des cylindres d'une même matiere sont à-peu-près en raison triplée des diametres. C'est aussi suivant cette regle, qu'il faudroit diminuer les épaisseurs depuis l'apostis vers l'autre bout de la rame; mais comme de cette façon le défaut de l'équilibre

seroit trop grand je voudrois qu'on remédiât à ce défaut en chargeant de plomb la partie intérieure de la rame, ou son manche tout près de l'apostis.

XII.

C'est peut-être la seule raison de ne point surcharger les rames de matiere, sur tout aux pales, le mouvement desquels est le plus rapide qui a empêché les mariniers de donner plus de largeur aux pales; si c'étoit-là la raison, je voudrois qu'on tentât tout avant que de renoncer à un avantage si essentiel, peut-être vaudroit-il mieux de substituer aux pales de bois des quardres, ou bordures de fer avec de la grosse toile étendue dessus, on diminueroit par-là en même tems un autre inconvenient, qui est que l'équilibre dans les deux parties de la rame est trop dérangé par les immersions & émerisions alternatives des pales, ce qui emporte certainement une force vive, qu'on perd entièrement, je voudrois même que la toile fût assez ample pour former un espece de sac, pendant la saccade, qui pût contenir trois ou quatre pieds cubes d'eau. Ces trois ou quatre pieds cubes d'eau tiendroient lieu de ces corps flottans, dont j'ai parlé dans notre première Partie aux §§ 38, 39 & 40. L'inertie de cette masse d'eau qu'il faut mettre en mouvement augmente considérablement la résistance contre les pales, ce qui doit toujours faire l'objet principal de ces recherches. En ce cas il faudroit faire enforte que ces sacs se voidassent parfaitement sur la fin de la saccade, & il seroit bon d'imaginer quelque obstacle pour chaque rame, qui l'arretât brusquement à la fin de la saccade, & jettât en même tems la pale hors de l'eau; un tel choc jetteroit encore les eaux vers la poupe,

& ces eaux par leur réaction donneroient, en ce moment un coup vigoureux au navire.

XIII.

J'ai n'ai fait ces remarques passageres, que pour suivre le fil de nos principes. Je n'ignore pas qu'on ne doit pas esperer de pouvoir appliquer avec succès les rames ordinaires sur les grands vaisseaux. Voici comme en parle M. Bouguer dans son excellent Traité du Navire, pag. 118. » Jusques à présent (dit-il) on n'a » appliqué les rames avec succès qu'aux seuls navires » de bas-bord, quoiqu'on ait senti combien, il seroit » important de pouvoir les appliquer aussi dans certains ; » cas aux vaisseaux proprement dits, la hauteur de ces » derniers a rendu inutiles les différentes tentatives » qu'on a faites de tems en tems pour tâcher de leur » procurer ce secours. On a principalement insisté sur » ce que les rames fussent tournantes, comme les rames » des moulins à eau, mais comme on n'a pas pu leur » donner assez de vitesse, elle n'ont point eu d'effet, » ou n'en ont eu que très-peu.

L'idée des rames tournantes, comme les ailes des moulins à eau, est trop naturelle, pour ne pas se présenter d'elle-même. M. Chazelles en parle aussi dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1702. Cela m'engage à examiner tout le succès qu'on peut s'en promettre ; ce fera ensuite aux mariniens de voir s'ils voudront se contenter d'un tel succès.

XIV.

Il faut d'abord examiner qu'elle est la surface entière de toutes les ailes qui poussent sans interruption

les eaux directement en arrière, si les parties de chaque aile ont une obliquité, & une inégalité de vitesse sensible, on pourra toujours par un juste calcul substituer aux ailes une surface plane équivalente poussée perpendiculairement contre les eaux. Je nommerai cette surface s , comme nous avons fait ci-dessus, & la lettre n , exprimera de même le plan, dont la résistance soit égale à celle de la proue du vaisseau. Là-dessus, je dis que sans faire attention à la manière de mettre en mouvement les rames tournantes, qu'on pourra varier à l'infini, on aura toujours par cette manœuvre deux effets, l'un utile & essentiellement requis, l'autre inutile & simplement accessoire par la nature de la manœuvre, & cela entièrement dans le même sens que nous l'avons démontré au sujet des rames ordinaires. Ainsi l'effet utile étant encore E , l'autre sera nécessairement $E, \sqrt{\frac{2}{3}}$ (§§ 27 & 28. Part. prem.). C'est-là un principe constant & infaillible; Il faudroit donc donner aux ailes une surface infinie, si on vouloit éviter entièrement cette perte.

La plupart de ceux qui ont écrit sur cette matière, n'ont pas assez approfondi ce quelle renferme en quelque façon de Méthaphysique. Ils ont bien vu que la pression totale des ailes contre les eaux, doit être égale à la résistance du vaisseau, & qu'on peut produire telle pression que l'on se propose, moyennant une surface quelconque; que plus cette surface est petite, plus il faut lui donner de vitesse; ils ont donc voulu réparer par la vitesse, ce qu'ils ne pouvoient obtenir commodément par la grandeur de la surface; mais il semble qu'ils n'ont pas fait assez attention, qu'il coûte plus de travail pour obtenir une même pression moyennant une petite surface que moyennant une grande. Il est même à remarquer que ce surplus de travail de-

vient essentiel & inévitable aussitôt qu'on s'est déterminé à une certaine surface indiquée par s , & que ce seroit tenter l'impossible d'y vouloir remédier autrement qu'en augmentant cette surface.

XV.

Nous avons vu au § 29. Part. prem., que cette perte faisoit les $\frac{2}{3}$ du travail utile pour la galere en y supposant $\frac{r}{7} = \frac{1}{3}$. Outre cette perte on en fait quelques autres sur la galere par l'usage ordinaire des rames, leur somme peut aller à un quart du travail total; Il est vrai qu'à examiner les sources que nous en avons indiquées, nous ne voyons rien de semblable dans les rames tournantes. Leur inertie n'est plus d'aucun empêchement aussitôt que ces rames, ont acquis leur plein mouvement il n'y a ici non plus aucun défaut d'équilibre qui puisse causer quelque travail inutile, mais il y aura en échange des frottemens qui ne se trouvent pas dans une machine aussi simple que celle d'une rame ordinaire, outre cela les impulsions des ailes contre les eaux se feront naturellement avec plus d'obliquité vers le commencement & la fin de leurs immersions, que celles des pales. Nous supposerons donc ces dernières petites pertes de part & d'autre égales, ou plutôt nous en ferons abstraction en ne considérant que la perte essentiellement attachée à une surface déterminée s .

XVI.

Après ces remarques nous verrons aussitôt quel effet on peut se promettre tout au plus sur les suppositions que fait M. Chazelles pag. 100, des Mémoires de l'Academie 1702. " On ne doit pas douter (dit-il)
" que

que la force de cent hommes par exemple, pouffant continuellement un volume d'eau de 18 pieds quarrés de chaque côté, ne mette bientôt en mouvement le plus gros vaisseau, puisqu'une simple chaudière se fait sentir &c. Si nous faisons donc, conformément aux suppositions de M. Chazelles $S = 36$ & $n = 150$, comme il convient pour les plus gros vaisseaux, dont il parle, il est impossible que le travail inutile soit moindre que $E \sqrt{\frac{150}{36}}$, ou que $2,04 E$. Ainsi sur 304 hommes il n'y auroit que 100, d'utilité employés, & le travail de 204 hommes seroit entièrement perdu, pendant que sur une galere pouffée par 260 hommes l'effet inutile n'étant que $E \sqrt{\frac{16}{36}}$, ou $\frac{2}{3} E$, on peut dire dans le même sens, que du travail de cinq hommes, on ne perd que celui de deux. Cette grande disproportion fait voir combien cette navigation proposée par M. Chazelles seroit défavantageuse & défectueuse. Je trouve effectivement, que moyennant les deux roues, qui portent les rames tournantes, cent hommes ne pourroient donner au grand vaisseaux dont il est question que la vitesse marquée dans la Table fondamentale du § 3, qui repond au nombre de cent hommes multipliée par $\sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, c'est-à-dire, pour le travail ordinaire $3,25 \times \sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, ou $2,24$ pieds par seconde, & pour le travail extrêmement forcé $4,03 \times \sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, ou $2,77$. Voilà pour les deux cas toute la vitesse qu'il est possible de donner au vaisseau sur les hypothèses de M. Chazelles. Il est vrai que ces vitesses sont sensibles, qu'elles vont même jusqu'aux $\frac{2}{3}$ des vitesses totales, ou des vitesses que cent hommes pourroient donner au vaisseau, s'ils ne faisoient aucune perte de leur travail, mais il est vrai aussi que dans cette hypothèse, 100 hommes pourroient fournir le même effet, que 304 hommes fournissent dans le cas proposé par M. Chazelles. C'est que les pertes des travaux sont beau-

Prix le 1753.

I

coup plus grandes, que les pertes des vitesses, puisque les travaux utiles sont en raison triplée des vitesses réelles. Encore doit-on remarquer, que dans les évaluations que nous venons de faire, nous avons fait abstraction de plusieurs autres petites pertes qu'on fera nécessairement, outre celle que nous avons indiquée qui est la principale, & qui est si essentiellement attachée aux hypothèses, qu'une plus petite perte impliquerait une contradiction contre les loix de la nature. Je repete souvent ces sortes d'expressions de peur qu'on ne confonde les défauts essentiellement attachés aux différentes manœuvres, avec ceux qui ne sont qu'accessoires, on ne doit pas espérer de diminuer les premiers défauts sans changer les hypothèses, mais on peut bien l'espérer par rapport aux défauts accessoires ou accidentels. Je ne crois pas, après ces réflexions & ces évaluations, qu'on s'avise d'employer les rames tournantes avec les proportions que M. Chazelles leur donne.

XVII.

Après l'examen que nous venons de faire des suppositions de M. Chazelles, je vais examiner ce qui seroit essentiellement requis pour tirer des rames tournantes sur un vaisseau du premier rang autant de profit qu'on obtient par le secours ordinaire des rames sur une galere. Or dans une galere, allant de toutes rames nous avons eu $\frac{S}{n} = \frac{36}{10}$. Il faut donc, pour faire travailler l'équipage du grand vaisseau avec un avantage égal, rendre la valeur de $\frac{S}{n}$ aussi $= \frac{36}{10}$, comme nous supposons pour un vaisseau du premier rang $n = 100$, nous aurons $S = 337\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Il faudroit donc de nécessité absolue faire enforte, que les

rames tournantes présentassent continuellement aux eaux une surface de $337\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Une telle surface seroit requise sans aucune interruption, quand même elle seroit poussée contre les eaux dans une direction parfaitement parallèle à la quille, ce qui cependant n'est pas, & la nature du mouvement circulaire dans un plan vertical demanderoit cette surface encore plus grande. De là nous voyons qu'il faudroit sur notre grand vaisseau dix-neuf ou vingt moulins, que M. Chazelles demande. Si on faisoit ces moulins deux fois plus grands, il en faudroit encore dix, & quel seroit enfin le succès de ces énormes tentatives; ce seroit de se procurer autant d'avantage, qu'en ont les rameurs sur une galere, qui va à toutes rames; supposons encore qu'on se soit procuré tout cet avantage, & voyons qu'elle seroit alors la vitesse que 500 hommes pourroient donner au vaisseau. Je dis que pour trouver cette vitesse, il faut dans la Table fondamentale du § 3. multiplier les deux vitesses qui répondent au travail de 500 hommes par $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, parce que sur cinq parties de travail il y en auroit trois d'utilité & deux d'inutilement employées § 29. Part. prem., & cette regle donne la vitesse du vaisseau par le travail ordinaire des 500 hommes = 4, 68 pieds par seconde, & pour le travail forcé = 5, 78 pieds. Nous avons cependant supposé dans ces résultats, qu'il ne se fait aucune autre perte, que celle qui provient de l'insuffisante étendue de la surface totale *S*; ainsi ces vitesses seront encore trop grandes, & on ne pourra jamais y atteindre entièrement, si les frottemens & quelques autres empêchemens emportoient encore le quart de travail entier; il faudroit multiplier lesdites vitesses par $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, après quoi on auroit pour le travail ordinaire la vitesse 4, 25, & pour le travail forcé 5, 25; voilà les vitesses finales qu'on est fondé à attendre de

tout cet appareil ; il est vrai que ces vitesses sont considérables , & qu'elles sont plus que les $\frac{3}{4}$ des vitesses possibles totales , je laisse juger les gens de marine , si on doit se donner sur un grand vaisseau tout l'embaras que ces moulins causeroient , & ces embaras pourroient bien être beaucoup plus grands , qu'il ne paroissent d'abord. Si cependant on ne vouloit pas renoncer à ces rames tournantes , je serois d'avis qu'on se relâchât un peu sur la grandeur de la surface S , quand même la perte du travail en deviendroit plus grande , & qu'on se procureroit l'avantage que nous fournit l'idée exposée au § 38. Part. prem. , en faisant que les moulins , au lieu de pousser simplement les eaux par les ailes , puissent en même tems de grandes masses d'eau qu'ils emportent à la fois. Il y auroit ensuite un grand nombre de regles à observer pour occuper les hommes par un espece de travail qui leur soit naturel , tel qu'est celui d'exercer une force d'environ vingt livres avec une vitesse d'environ trois pieds par seconde , mais j'avoue que je ne fais pas assez grand cas des rames tournantes pour entrer dans toutes ces discussions.

XVIII.

Tâchons plutôt de trouver quelques nouveaux expédiens moins embarrassans & plus profitables , mais sans perdre jamais de vue les principes que nous avons si bien établis. S'il ne faut pas espérer de pouvoir se servir des rames ordinaires sur les vaisseaux de haut-bord , il ne faut pas pour cela renoncer entièrement à ce principe de mouvement ; il n'est pas difficile d'imaginer plusieurs manieres de se servir commodement de rames sur les grands vaisseaux , en leur donnant une autre façon. En voici une qui me paroît assez commode & utile , je n'en ferai qu'une ébauche fort

légère, ABC est une piece de bois perpendiculaire à la quille, & d'abord horizontale, qui repose au point B sur l'apostis: CD représente une barre de fer mobile autour du point C , moyennant une charnière dans un plan vertical; à cette barre on affermiroit la pale $mnpq$; au point E on attacherait un ou plusieurs bouts de corde, par lesquels plusieurs hommes tireroient la barre de fer vers la poupe, & poufferoient la pale $mnpq$ contre les eaux. Voici à présent comme il faudroit manier cette espece de rames; au moment qu'on auroit fini de tirer la pale avec force contre les eaux, & même un peu plutôt, un homme peseroit au point AC , & retireroit la pale entièrement hors de l'eau, sur quoi la barre & la pale par leur propre poids se remettroient dans la position verticale, & la passeroient même: au moment que ce balancement se finiroit, l'homme en A , cesseroit de peser sur A , & laisseroit par-là replonger la pale dans les eaux, & au même instant les hommes recommenceroient à tirer fortement la pale contre les eaux.

XIX.

Il s'en faut sans doute de beaucoup que cette description soit suffisante pour voir en détail tout ce qu'il faudroit faire pour l'exécution de ces nouvelles rames, aussi n'ai-je prétendu, qu'exposer simplement leur façon d'agir; il y auroit bien de la matiere, si l'on vouloit entrer dans tout le détail que cette idée demande; mais je suis fermement persuadé, que si on observe tout ce que je vois qu'il faut, & que l'on peut faire pour tirer le meilleur parti de l'usage de ces nouvelles rames, le travail des hommes pourra être plus utilement employé, que n'est celui de la chiourme sur une galere. On pourra placer facilement sur un grand vais-

seau cinquante de ces rames, appliquer dix hommes à chacune, & donner vingt pieds quarrés à chaque pale, ce qui feroit en tout 1000 pieds quarrés; & si toute la manœuvre se faisoit en deux tems égaux, nous aurions 500 pieds quarrés qui agiroient sans interruption, pendant qu'il n'en faudroit que $337\frac{1}{2}$ pour se procurer autant d'avantage qu'on a en se servant de toutes les rames sur une galere. Il est vrai qu'ici le travail qu'il faut employer au point *A*, pour retirer chaque fois la pale hors de l'eau est en pure perte; mais quand il faudroit employer deux hommes pour cet effet, cette perte ne feroit que la cinquieme partie du travail entier; & nous avons vu par raport aux galeres qu'on y perd jusqu'au $\frac{1}{4}$ du travail entier. La plus grande difficulté fera de placer les hommes, & de les mettre à même de tirer le point *E*, dans une direction horizontale, & perpendiculaire au plan du systême; il me semble qu'on pourra remédier à cet inconvenient, s'il est nécessaire, moyenant des poulies, qu'on trouvera toujours où placer, & qui serviront à conduire les cordes là où l'on voudra placer les hommes destinés au travail. Cet expédient me paroîtroit assez convenable, s'il ne falloit pas craindre les frottemens; ceux qui penseront là-dessus comme moi, préféreront peut-être cet autre moyen: au lieu d'attacher au point *E* une corde, par le moyen de laquelle on tire fortement la pale contre les eaux, on pourroit se servir d'un autre levier *E, M, N*, dont le point d'appui seroit en *M*, & qui entreroit dans l'entre-deux des ponts. Les hommes agiroient sur le manche *M N*, à-peu-près de la même maniere que les rameurs le font sur les rames, & seroient mis par-là en état de pousser fortement les pales contre les eaux par le moyen d'un plat *M E*. Dans cette maniere de ramer, le mouvement du levier *A C* se feroit constamment dans un

plan vertical, & celui du levier *EN*, dans un plan horizontal, & ces mouvemens seroient beaucoup plus commodes, que ne sont ceux d'une rame simple sur une galere. Il y auroit sur tout cela un grand nombre d'explications à donner, si d'abord les lumieres de mes juges, & puis celle des articles, au cas que mes idées eussent merité quelqu'attention favorable, ne m'en dispensoient.

X X.

Voilà ce qui peut suffire sur la perfection de l'usage des rames, & sur la meilleure maniere de les appliquer aux grands vaisseaux; mais remarquons que nous n'avons encore considéré que l'action des rames en tant que les pales sont poussées directement contre les eaux, c'est-à-dire, dans une direction perpendiculaire à leur plan. Il y a cependant une infinité d'autres mouvemens, qu'on peut donner aux pales pour pousser les navires, & je suis surpris que personne ne se soit encore avisé d'en examiner le mécanisme; le mécanisme infiniment diversifié des différentes sortes de poissons dans leur action de nager, & même l'exemple des oiseaux, dans leur façon de battre des ailes pour voler, étoient bien propres pour exciter cette Idée. J'ai donc cru, pour satisfaire entièrement à la question de l'Académie, devoir entrer dans cette nouvelle discussion. Elle nous fournira une maniere toute nouvelle de voguer, préférable, à mon avis, à tout autre, les rames pourront être appliquées très-commodement aux plus grands vaisseaux en aussi grand nombre qu'on voudra, sans que les rames s'embarassent les unes les autres, comme cela arrive même sur les galeres, à moins que la mer ne soit calme.

Mais comme c'est ici un sujet tout nouveau, il nous faut nécessairement remonter à nos principes, sans lesquels il me paroît absolument impossible de traiter ces matieres avec aucune précision. Rien n'est communement plus vague que l'examen des machines qu'on propose pour de certains effets, on les réduit à rien quand on a formé l'intention de les réjeter, & on en grossit les effets à l'infini quand on veut faire valoir ses nouvelles idées. Mais suivant nos méthodes, on n'est plus maître de rien, on consulte la nature, & on est obligé de s'en tenir simplement & purement à sa décision. Je ne me propose point de forcer la nature à nous donner ce qui n'est pas en son pouvoir; voyons donc ce que nous pouvons nous promettre de l'action oblique des rames

X XI.

Fig. IV. Soit AB la quille d'un vaisseau, mu avec une vitesse C de A vers B dans des eaux calmes; qu'on suppose en suite une pale verticalement plongée dans les eaux, mais obliquement à la quille, cette pale est représentée par la ligne CD ; soit enfin cette pale poussée avec une vitesse v , de C D en c d , sous une direction Cc , ou Dd , perpendiculaire au plan vertical de la quille, de maniere que la pale conserve constamment le parallélisme, il est clair que de cette façon la pale aura un double mouvement, l'un parallèle à AB avec une vitesse C , qui resulte du mouvement du vaisseau, & l'autre perpendiculaire au premier avec une vitesse v ; & il faut, avant toutes choses, examiner quels efforts la pale souffrira par la résistance des eaux en considérant ce double mouvement. De ces efforts connus, il faudra tirer l'effort utilement employé, pour entretenir le vaisseau

vaisseau dans son mouvement, & enfin le travail requis pour cette nouvelle maniere de voguer. Dans l'application de cette nouvelle théorie il faudra des deux côtés du navire un nombre égal de ces pales obliques, & je ferai voir que toutes ces pales obliques pourront agir sans aucune interruption; je représenterai la somme des pales tout d'un coup par la surface dont cD fait une section horizontale, & j'appellerai cette surface S , pendant que le plan qui mesure la résistance du vaisseau est exprimé par n .

X XII.

Soit à présent la vitesse v , avec laquelle on pousse la pale oblique perpendiculairement vers le plan vertical de la quille exprimée par Cc , & la vitesse c , avec laquelle tout le système avance dans la direction parallèle à AB , exprimée par Cm , soit le sinus total $= r$, le sinus de l'angle $nCc = s$, son cosinus $= \sqrt{rr - ss} = s$, là-dessus il faut résoudre le mouvement Cc en Cn , qui est inutile, & $nc = \frac{s}{r} v$, de même le mouvement Cm doit être résolu en Co , qui est inutile, & $om = \frac{s}{r} c$, par là on voit que la pale est poussée perpendiculairement contre les eaux en deux sens directement opposés, scavoir de n vers c , & de o vers m ; ici il faut voir lequel des deux mouvemens perpendiculaires au plan de la pale prenant sur l'autre, si nc est plus grand que om , la configuration de la surface de la pale du côté du point m seroit tout à fait indifférente, quand même cette surface ne seroit pas plane, & si le mouvement nc étoit plus petit que le mouvement om , alors la surface qui regarde le point c seroit indifférente; pour notre maniere

Prix de 1753.

K

de naviguer le mouvement nc doit toujours être plus grand que son mouvement contraire, & enfin $nc - om$ exprimera le mouvement perpendiculaire absolu de la pale contre les eaux; ce mouvement perpendiculaire absolu est donc $= \frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c$: ensuite le carré de cette vitesse, multiplié par la surface S , marquera l'effort perpendiculaire des eaux contre la pale, lequel par conséquent sera $= \left(\frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c \right)^2 S$. Enfin cet effort perpendiculaire doit pour notre dessein être encore résolu en deux pressions latérales, l'une perpendiculaire au plan vertical de la quille, qui sera $= \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c \right)^2 S$, & l'autre parallèle à la quille qui sera $= \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c \right)^2 S$. La première marque la force avec laquelle il faut pousser la pale de C D en cd , & si nous la nommons π , nous aurons $\pi = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c \right)^2 S$. La seconde marque la force avec laquelle tout le système est poussé de A vers B , & celle-ci doit être égale à la résistance des eaux contre la proue du vaisseau; si donc cette résistance est nommée P , on aura $P = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c \right)^2 S$. Comme la résistance du vaisseau P , est égale au carré de la vitesse c multipliée par la surface n , nous aurons $nc c = P = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r} v - \frac{s}{r} c \right)^2 S$. De cette équation nous pourrions tirer la relation entre v & c puisqu'elle nous donne $v = \left(\frac{s}{s} \times \frac{r}{s} \sqrt{\frac{n}{S} \times \frac{r}{s}} \right) c$. Enfin remarquons aussi que $\pi : P = s : s$, ou $\pi = \frac{s}{s} P$, on pourra employer chacune de ces équations suivant les différentes questions qu'on se formera.

XXIII.

Voici à présent les résultats, qui nous sont nécessaires.

I. Le travail essentiellement requis doit être exprimé par $P \times c$, puisqu'il s'agit d'enlever une résistance P avec la vitesse c .

II. Le travail actuel par la même raison est $= \pi \times v$, puisqu'on exerce continuellement une pression π contre la pale, & que la pale est poussée avec la vitesse v .

III. Ainsi le travail actuel est au travail essentiellement requis comme $\pi \times v$ est à $P c$, ou comme $\frac{s}{s} P v$ à $P c$, ou comme $s v$ à $s c$, ou enfin, (si on substitue pour v la valeur déterminée au précédent §) comme $f + \frac{r}{s} \sqrt{\frac{n}{s} \times \frac{r}{s}}$ est à f .

C'est cette dernière Analogie, qui faisoit l'objet principal de ces recherches.

XXIV.

J'admire ici la conservation perpétuelle des travaux & de leurs effets, puisque le travail actuel devient parfaitement égal au travail essentiellement requis aussitôt qu'il n'y a point d'effet inutile. L'effet inutile est ici la force vive qui résulte du mouvement qu'on donne aux eaux par le coups de pale; mais si l'on suppose la surface S infinie, on retranche entièrement cet effet inutile parce qu'alors on ne fait que presser la pale contre les eaux, sans donner à ces eaux aucun mouvement,

& la vitesse v devient simplement $= \frac{s}{s} \times c$. Ceci est

K ij

confirmé par notre dernière analogie, puisque faisant $\frac{n}{s} = 0$, elle nous donne le travail actuel au travail essentiellement requis comme 1 à 1; ce qui marque une parfaite égalité entre ces deux travaux. Cette égalité entre le travail actuel, & le travail essentiellement requis subsistera en ce cas toujours, quelque valeur qu'on donne à $\frac{r}{s}$, c'est-à-dire, quelque inclinaison qu'on donne aux pales avec la quille du vaisseau. Mais aussitôt qu'on donne à la surface S une grandeur déterminée par celle de n , le travail actuel sera composé de deux parties, l'une utile & égale au travail essentiellement requis, l'autre inutile, & qui est en pure perte.

Ces deux parties seront en raison de 1 à $\frac{r}{s} \sqrt{\frac{n}{s} \times \frac{r}{s}}$; & comme tout travail a son effet, avec cette simple différence, qu'il y a des effets inutiles par rapport à celui qu'on se propose, on n'a qu'à diminuer autant qu'il est possible le travail inutile pour obtenir le plus grand effet possible.

Cette considération nous conduit à cette règle pour la surface S non infinie, qu'il faut rendre le cosinus de l'angle $n C c$, presque égal au sinus total r , c'est-à-dire, que la pale $C D$ doit être dirigée presque perpendiculairement à la quille & n'être inclinée que très-peu; alors le travail utile sera au travail inutile presque comme 1 à $\sqrt{\frac{n}{s}}$. Ce qui fait entièrement le même rapport que celui que nous avons trouvé au § 7. Part. prem. pour l'usage ordinaire des rames.

XXV.

Nous voyons donc qu'en se servant de cette espèce de rames, le travail inutile est par rapport au travail

total sensiblement le même que dans l'usage des rames ordinaires, si on fait la surface S de part & d'autre la même, pourvu que le plan de la pale soit presque perpendiculaire à la quille du vaisseau; mais d'un autre côté nous verrons de plus en plus, que les rames obliques ont un avantage infini sur les rames ordinaires & directes, lorsque les rames doivent être appliquées à un grand vaisseau. Cependant comme il arrive souvent que les préceptes de la théorie, pour se mettre dans le plus grand avantage, sont sujets dans l'exécution à de certains inconveniens accidentels, j'examinerai les différentes circonstances que la diversité de l'angle formé par le plan de la pale avec la quille entraîne, je commencerai cet examen en supposant d'abord la surface S infinie.

(a) Plus cet angle est grand, plus il faudra donner de vitesse à la pale, puisque $v = \frac{c}{\sin \alpha}$; cette vitesse devroit être infinie si ledit angle étoit droit; pour un angle de 80° , on auroit $v = 5,67 c$; pour un angle de 70° , on aura $v = 2,74 c$, ou $= 1,73 c$. Si on suppose la vitesse du vaisseau par exemple de quatre pieds par seconde, on aura pour les angles de 80 , 70 & 60 degrés les vitesses v de $22,68$; de $10,96$; & $6,92$. pieds par seconde.

(b) Si on destine une seconde de tems à chaque excursion, les pales doivent parcourir un espace de $22,68$. de $10,96$. ou de $6,92$. pieds, suivant que l'angle mCo est de 80 , de 70 , ou de 60 degrés; & si au lieu d'une seconde, on en prenoit une & demie, lesdites espaces deviendroient encore plus grandes en raison de 2 à 3 .

(c) En supposant la vitesse du vaisseau du premier rang de quatre pieds par seconde, on obtient $P =$

2800 livres, & comme (§ 22.) $\pi = \frac{r}{s}P$; nous aurons pour les angles de 80, 70 & 60 degrés, pour π les valeurs de 494, de 1022, & de 1618 livres. Ces poids marquent pour chacun des différens cas la pression totale, ou la somme de toutes les pressions que l'équipage doit exercer contre les pales; ainsi pour avoir la pression contre chaque pale, il faut diviser cesdits poids par le nombre des pales, en supposant que celles-ci agissent sans interruption, ce que nous verrons pouvoir se faire.

(d) Si la surface S n'est pas assez grande pour pouvoir être censée infinie, la vitesse v , devient plus grande que $\frac{r}{s}c$, le surcroit de vitesse sera exprimé par $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{s}} \times \frac{r}{s} \times c$. C'est ce surcroit de vitesse, qui n'augmente aucunement la vitesse du vaisseau, tant que les hommes agissent avec la même force sur les pales, & qui rend une partie du travail inutile; & comme les travaux, quand les pressions sont égales, sont en raison des vitesses, il s'ensuit que le travail utile est au travail inutile comme $-\frac{r}{s}c$ est à $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{s}} \times \frac{r}{s} \times c$, c'est-à-dire, en raison composée réciproque de la raison sesquipliquée des cosinus de l'angle $n C c$, & de la raison souldoublée de la surface S , comme nous avons déjà dit dans le précédent article: supposons, par exemple, $S = 600$ pieds quarrés, ou $\frac{n}{s} = \frac{1}{4}$, en retenant $c = 4$ pieds par seconde, nous aurons en faisant successivement l'angle $m C n$ de 80, 70 & 60 degrés, la vitesse nécessaire v égale à 22, 68 + 11, 60. ou 10, 96 + 6, 01. ou 6, 92 + 4, 29. ou bien $v = 34, 28.$ ou 16, 97. ou 11, 21 pieds par seconde; si on employe une seconde de tems pour chaque faccade, chaque excur-

sion des pales aura le même nombre de pieds; & comme il ne convient pas de faire ces excursions excessivement grandes, il faudra encore se relâcher un peu sur l'avantage qu'on obtient de la grandeur de l'angle de l'inclination des pales.

(e) Nous verrons, dans l'application de cette théorie, qu'il n'est pas difficile de donner à S la valeur de 600 pieds quarrés, & si mon dessein étoit de ne faire voir que le beau côté de ma nouvelle maniere de naviger, j'aurois pu la supposer plus grande sans tomber dans des inconveniens considérables, mais j'aime mieux prendre les choses au pis; la même maxime m'engage à ne donner à l'angle $m C n$, que la valeur de 60° , quoique j'eusse peut-être pu le supposer de 10° , car l'étendue des excursions n'est pas un inconvenient fort essentiel, d'autant moins qu'on peut y employer aussi peu de tems qu'on le trouve à propos: le travail que je proposerai fera fort semblable à celui de scier du bois, dans lequel on fait facilement deux mouvemens dans une seconde de tems, & chaque mouvement de deux pieds. Or en supposant $S = 600$ pieds quarrés, & l'angle $m C n$ de 60° , nous avons vu dans la note (d), que le travail utile est au travail inutile comme 10,96 est à 6,01. & par conséquent le travail utile au travail total comme 10,96 à 16,97. Donc dans ces suppositions le travail utile fait $\frac{10,96}{16,97}$, ou 0,645. du travail total, & il y a à remarquer, que c'est-là dans notre maniere de voguer presque l'unique perte qu'on fait, comme je le ferai voir dans la suite.

Après avoir bien pesé toutes les circonstances, je suis bien persuadé que le travail utile fera au moins 0,550 du travail entier, pendant que nous n'avons trouvé dans notre premiere Partie § 25 que 0,446 pour les galeres voguant à toutes rames.

Il suit donc de là que notre nouvelle navigation est plus profitable, quoique appliquée aux grands vaisseaux, que n'est l'usage ordinaire des rames sur les galeres, & on a certainement tout lieu d'être content d'un tel résultat. Encore est il certain que le travail utile sur les galeres exprimé par 0, 446, est pris tout au plus haut, car il est fondé sur la grandeur du plan de résistance de 16 pieds, pendant que M. Bouguer ne donne à ce plan que 10 pieds, & si nous avions suivi l'estime de M. Bouguer, nous n'aurions trouvé pour le travail utile sur les galeres, que 0, 279, ce qui ne feroit qu'environ la moitié du travail utile qui provient de l'emploi de nos rames obliques,

(f) Si le travail utile est 0, 550 du travail entier, le vaisseau prendra par le travail ordinaire de 500 hommes la vitesse $5, 55 \times \sqrt[3]{0, 550}$. ou 4, 54. & par un travail forcé 5, 63. Ces vitesses sont sans doute considérables puisqu'elles sont plus, que les $\frac{4}{7}$ des vitesses possibles entières; & comment pourroit-on ne pas s'en contenter, quand on fait réflexion que 500 hommes sur notre grand vaisseau ne sont pas plus, que 53 hommes sur les galeres, qui tout au plus souffrent pour des vitesses égales $\frac{1}{170}$ de la résistance du grand vaisseau, ce feroit donc n'être pas content, que 53 hommes donnassent par un travail ordinaire aux galeres une vitesse à faire plus de quatre pieds & demi par seconde.

XXVI.

J'ai prevenu dans la note (e), du précédent article, que j'ai imaginé une maniere de rendre l'action des pales contre les eaux continuelles, cela demande une explication préalable. Nous avons vu, que pendant que la pale

CD

CD est poussée en cd , le vaisseau sera poussé suivant la direction AB ; pour obtenir le même effet en repoussant la pale, & en l'éloignant des bords du vaisseau, il n'y a qu'à imaginer un mecanisme, qui fasse tout d'un coup un peu tourner la pale, & lui faire prendre la position cd , à la place de sa position précédente $c d$; je proposerai un moyen assez facile pour obtenir ce renversement précisément aux momens qu'on commence à pousser ou à repousser la pale. Dans ce mecanisme l'angle erc doit être double de l'angle nCc , & par conséquent de 60^d , pour l'hypothèse de la note (*e*).

XXVII.

Les rames, qui soutiennent les pales seront suspendues verticalement, la pale enfoncée dans l'eau, & le reste dans l'air, chaque rame aura au bout deux tourillons qui entreront dans des viroles, ces tourillons serviront à soutenir la rame, ils seront parfaitement horizontaux, & paralleles à la quille, & ne permettront à la rame d'autre mouvement que celui de balancer dans un plan vertical perpendiculaire à la quille; les viroles destinées à recevoir les tourillons seront menagées dans des solives ou pieces de bois, qui sortent hors du vaisseau assez pour permettre aux rames leur jeu; le maniement consistera à approcher & éloigner alternativement les rames des bords du vaisseau moyennant une longue manivelle. Les hommes destinés à ce travail pourront être également placés sur le tillac, ou dans les entreponts, il y en aura plusieurs appliqués à la même manivelle, qu'ils tiendront horizontalement, & avec laquelle ils tireront & pousseront alternativement la rame; la distance depuis les tourillons jusqu'à la manivelle ne sera que le tiers, ou le quart de toute

Prix de 1753.

L

la longueur de la rame; de cette façon chaque allée & venue sera d'environ trois pieds, qui se feront dans une seconde de tems avec un effort d'environ vingt livres pour chaque homme, ce qui fait, à mon avis, le travail le plus naturel des hommes.

XXVIII.

Il ne nous reste plus qu'à donner quelque idée de la façon de renverser à propos les pales, de façon que la surface qui pousse les eaux soit toujours tournée du côté de la poupe. On pourra pour cet effet composer la rame de deux pieces, une partie de la piece inférieure entrera dans la supérieure, de manière que celle d'enbas tourne librement sur son axe. Soit AB Fig. V. CD le bout de la piece supérieure creusée pour recevoir le bout de la piece inférieure $EFGH$, qu'on fasse dans la piece supérieure une rainure mn pq , & que l'amplitude de l'arc mq ou np soit d'un peu plus de 60° , qu'on ajoute à la piece inférieure $EFGH$ une espece d'arrêt formé en bossie représenté par rs , dont la hauteur rs , soit tant soit peu plus petite, que la hauteur de la rainure. Cet arrêt est destiné à toucher & heurter alternativement contre les bords mn & pq de la rainure, & il avancera un peu hors de la rainure, la manivelle qui doit servir à pousser & repousser la rame pourra être appliquée en o au milieu de l'arrêt rs , de manière que la direction de la manivelle ne passe pas par l'axe de la rame, mais qu'elle la rase; soit la manivelle ox , & que les hommes la tirent vers eux, alors l'arrête rs viendra aussitôt à heurter le bord mn , & y restera comme collée pendant tout le tems qu'on tire la rame; mais aussitôt qu'on commence à la repousser, l'arrête rs se mettra contre l'autre bord qp , & y restera pen-

dant tout le tems qu'on employe à repousser la rame, & ce mouvement de l'arrêt rs , servira à renverser alternativement la pale. On voit que ce mecanisme demande que la verticale tu , qui partage également l'amplitude de m , ou np prolongée reponde précisément à l'axe des tourillons, par lesquels la rame est suspendue. Je n'ay exposé ce mecanisme que pour faire voir que je ne suppose rien, qui ne soit facile dans l'exécution; les artistes sçauront peut-être substituer à cet artifice un autre beaucoup plus convenable & je demande à ceux-ci de l'indulgence sur la maniere de m'être énoncé sur cet article. J'ai ajouté la planche Pl. 2.
seconde pour expliquer mieux mes pensées. Fig. 6. 7. 8.

XXIX.

J'ai dit préalablement dans la note (*f*) du § 25, que 500 hommes pourront donner au vaisseau par cette manœuvre une vitesse à faire $4\frac{1}{4}$ pieds par seconde; c'est-là sans doute un résultat, dont ont a tout lieu d'être content, mais que nous n'avons trouvé que par la méthode analytique; procédons à présent synthétiquement; quand notre grand vaisseau fait $4\frac{1}{2}$ pieds par seconde, il souffre une résistance continuelle de 3500 livres; s'il y a 50 rames, 25 de chaque côté, chaque pale doit surmonter une résistance de 70 livres; si la pale est inclinée de 60° , il faut pour avoir la force avec laquelle on attire ou repousse la pale, multiplier 70 livres par le rapport du sinus de 30° à son cosinus, c'est-à-dire par $\frac{50000}{86601}$, ce qui fait à-peu-près 44 livres, si on fait $\frac{2}{5} = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire si on fait la somme de toutes les pales = 600 pieds quarrés ou chaque pale de 12 pieds quarrés, l'équation $v = (\frac{r}{s} + \frac{r}{s} \sqrt{s \times \frac{1}{r}})c$ du § 22, fait $v = 12, 33$; ainsi en employant une
Lij

seconde pour chaque agitation, la pale fera chaque fois une excursion de 12, 33 pieds. Si on fait la distance depuis l'axe des tourillons jusqu'à l'endroit, où la manivelle est appliquée à la rame égale à $\frac{400}{417}$ parties de la distance du même axe des tourillons jusqu'au milieu des pales, la manivelle parcourra à chaque seconde une espace de trois pieds, & l'effort requis sera $= \frac{411}{100} \times 44$ livres = 180 livres; & comme il y aura dix hommes à chaque manivelle, le travail de chaque homme consistera à élever à chaque seconde un poids de 18 livres à la hauteur de trois pieds, & un tel travail ne fait encore que les $\frac{2}{10}$ du travail ordinaire d'un homme, j'ai réservé cette dixième partie pour réparer quelques pertes de très-peu d'importance qu'on pourroit encore faire de ses forces, car pour les pertes essentielles, nous y avons déjà eu égard en donnant à chaque pale des excursions de 12, 33 pieds, pendant qu'elles seraient plus petites, si on donnoit plus d'étendue aux pales, ce qui diminueroit le travail requis.

XXX.

Finissons cette matière par un petit parallèle entre la manière ordinaire d'employer les rames sur les galères, & ma nouvelle manière de voguer, & par quelques autres réflexions. Le principal avantage de nos rames, & de la façon de les mettre en œuvre est sans contredit celui de pouvoir être appliquées fort commodément à toutes sortes de navires, depuis les plus petits jusqu'au plus grands. Il me semble que c'est-là tout ce que l'Académie demandoit; le second avantage est de pouvoir facilement employer à cette manœuvre autant d'hommes qu'on voudra, sans qu'ils s'embarassent le moins du monde, puisqu'on pourra

multiplier le nombre des maniveiles tant qu'on voudra. Le troisieme avantage est que chaque homme peut-êre mis dans une sorte de travail qui lui est le plus naturel, & qui demande que les hommes fassent des mouvemens d'environ trois pieds à chaque seconde ; le vogue-avant sur les galeres fait un mouvement beaucoup trop grand, & le rameur le plus proche de l'apostis fait un mouvement beaucoup trop petit. Le quatrieme avantage est, qu'il n'y a ici aucune interruption dans le travail, pendant que sur une galere de trois mouvemens il n'y a qu'un seul d'utile ; les hommes menagent donc l'inertie de leur propres corps. Le cinquieme avantage est que l'inertie des rames ne cause ici aucune perte ou très-peu, car les balancemens sont d'une nature à se conserver d'eux-mêmes. Cet article demanderoit cependant une grande discussion, si on vouloit le traiter avec autant d'exacritude qu'il peut l'être. Le sixieme avantage, qui est encore très grand, est qu'on peut-ici remédier beaucoup mieux que par l'usage des rames ordinaires à cet inconvient, si essentiel & si opiniâtre, qui consiste dans l'insuffisante étendue des pales ; par la seule continuité de l'action, on triple tout d'un coup la surface des pales, & rien n'empêche, dans notre nouvelle navigation, d'aggrandir considérablement chaque pale. Tout ces avantages manifestes m'encouragent à proposer avec beaucoup de confiance l'usage des nouvelles rames dont je viens de donner la description, & ne me laissent absolument point douter de leur succès. Il ne sera pas difficile d'en faire des expériences préalables sur des bateaux, & pour peu que celles-ci soient favorables, le succès sera certain sur les grands vaisseaux. Mais tant d'avantages ne peuvent guere s'obtenir sans tomber en même tems dans quelques petits désavantages, que je suis bien éloigné de vouloir pallier. J'avoue

donc qu'on fait une petite perte du travail par l'obliquité des pales qu'on est obligé de leur donner pour éviter les trop grandes vîteses avec lesquelles il faudroit remuer les pales en les faisant trop perpendiculaires à la quille. J'avoue encore qu'on employe inutilement le petit travail qu'il faudra employer pour renverser les pales, en les faisant incliner tantôt d'un côté, tantôt de l'autre. On pourroit remédier à ce petit défaut, en donnant assez de mouvement aux pales pour sortir des eaux, & pour pouvoir les renverser dans l'air, mais une telle manœuvre rendroit déjà le travail un peu interrompu, & feroit en même tems, que les pales ne seroient pas toujours entièrement plongées dans les eaux, ce qui diminueroit la vraie surface *S*. On se contentera de la précaution d'augmenter la surface des pales plutôt en hauteur qu'en largeur. Voilà tout ce que j'ai pu trouver de désavantage, & je suis bien persuadé, que ces deux petites pertes ne valent pas à beaucoup près celles qu'on fait par l'usage ordinaire des rames, lors-même qu'on est à portée de les employer avec toute la commodité qu'on peut désirer. Je vois même qu'on peut sans grand inconvénient rendre les pales plus perpendiculaires à la quille que nous ne les avons supposées dans notre évaluation, si on ne sçauroit donner assez de mouvement aux pales en les tirant vers les bords, rien n'empêche de les en éloigner tant qu'on voudra; j'aurois pu donc supposer les pales inclinées de 70^{d} , ou lieu de 60^{d} , & par-là j'aurois diminué d'environ la moitié, la petite perte qu'on fait à cet égard; mais j'ai mieux aimé m'en tenir au plus sûr que de pousser trop loin les hypothèses du plus avantageux. Je dirai encore deux mots sur la nature de la manœuvre; le jeu de nos rames n'est pas si arbitraire que celui des rames ordinaires, mais on n'en pourra pas moins gouverner le

vaisseau selon que les circonstances l'exigent par les différentes combinaisons que les rameurs peuvent faire de plusieurs façons, les uns en arrêtant les rames, les autres en tenant les pales hors de l'eau, & d'autres encore en redoublant de force. Au reste on voit bien que lorsqu'il s'agit simplement de faire du chemin, on doit être fort attentif, que les rames ne soient pas un seul moment en repos, tant que les pales sont sous l'eau; Le vaisseau en seroit aussitôt retardé; c'est à quoi il faut sur tout faire attention dans ces instans, ou il s'agit de faire rebrouffer les rames, ce sont des momens, ou les hommes appliqués à la même manivelle doivent agir avec un grand concert. Je dirai à cet égard au hazard d'être traité de vetilleux, qu'il ne fera peut-être pas inutile de menager des obstacles des deux côtés, qui non seulement arrêtent tout d'un coup les rames, mais qui les rejettent même vers l'endroit d'où elles étoient venues; par un tel ou semblable artifice; on obtient en même tems un autre avantage, c'est celui de ne rien perdre absolument du travail qu'on fait par l'inertie des rames, pourvu que lesdits obstacles soient propres à faire rebondir les rames; c'est-là une réflexion qu'on ne doit pas négliger.

XXXI.

Voilà sans doute la meilleure maniere de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux par le travail des hommes, & je me flatte que tous ceux qui seront entrés dans nos principes en conviendront avec moi. Nous avons indiqué une maniere d'obtenir les $\frac{4}{5}$ parties de toute la vitesse possible, & cela d'une maniere qui n'a aucun inconvenient par rapport aux autres avantages qu'on doit tâcher de conserver. Les cinquante nouvelles rames avec tout leur appareil n'oc-

cuperont, pas plus d'espace que les rames sur une simple galere, elles seront ôtées & remises avec beaucoup de facilité & de promptitude.

L'application & la manœuvre de ces nouvelles rames ne demandent pas le moindre changement à la construction ordinaire des grands vaisseaux, pendant que la commodité des rameurs fait un des principaux points de vue pour la construction des galeres; si quelqu'un s'étoit attendu à une plus grande vitesse, il auroit eu certainement grand tort, & il quittera bientôt ce préjugé en considérant seulement que le grand vaisseau que nous avons pris pour exemple souffre une résistance presque dix fois plus grande, que n'en a une galere, & même quinze fois plus grande, suivant l'estime de M. Bouguer: si l'on vouloit donc prétendre, qu'un équipage de 500 hommes donnât à notre grand vaisseau une plus grande vitesse que celle que nous avons démontrée lui pouvoir être donnée, ce seroit prétendre que cinquante-trois rameurs, suivant notre estime, ou trente-trois, suivant l'estime de M. Bouguer, fissent parcourir à une grande galere plus de $4\frac{1}{2}$ pieds par seconde, en n'employant qu'un travail ordinaire & soutenable pendant huit heures par jour, ou plus de $5\frac{1}{2}$ pieds avec un travail extrêmement forcé, car cette vitesse peut aussi être imprimée au grand vaisseau avec un tel travail.

On ne peut donc plus s'empêcher de reconnoître notre nouvelle navigation pour la meilleure qu'on puisse raisonnablement esperer, à moins qu'on ne trouve à rédire à ce quinziesme de vitesse qu'on y perdra encore sur la vitesse totale possible; mais voici une réflexion, qui nous fera bientôt perdre toute espérance d'obtenir jamais un plus grand succès de quelque maniere qu'on s'y prenne; c'est qu'on aura toujours

Jours indispensablement besoin de quelque chose, qui tienne lieu de pale, puisqu'on n'a pas hors du vaisseau un point fixe qui puisse servir d'appui, & on ne pourra jamais donner une étendue infinie à ce qui est substitué aux pales; d'où il résultera constamment une perte de forces inévitable par sa nature. Outre cette perte on en fera nécessairement quelques autres, il y aura toujours quelque frottement, & quelques mouvemens inutiles, qu'il faille continuellement reproduire dans la matiere, qui sera substituée aux rames, sans parler des pertes qu'on fait lorsqu'on applique les hommes à un genre de travail peu conforme à leur constitution, par lequel ils sont souvent bien éloignés de produire tout cet effet, que nous leur avons supposé, & duquel ils sont très-capables, s'ils sont dûment employés. Je ne crains donc plus de proposer notre dernière maniere de naviger par le travail des hommes, comme fort approchante de la meilleure qu'il soit possible d'imaginer, ce que j'ajouterai pourra faire voir avec combien d'attention j'ai examiné tout ce qui appartient à notre question, & peut-être en même tems utile pour plusieurs circonstances particulières dans lesquelles on peut se trouver.

XXXII.

Imaginons-nous d'abord un grand plan vertical flottant dans les eaux à une certaine distance depuis la proue perpendiculaire à la quille, & qu'on tire ce plan moyennant une corde d'une longueur suffisante vers la proue du vaisseau, il arrivera que le vaisseau, & ce plan s'approcheront l'un de l'autre; & faisant abstraction de l'inertie du vaisseau, la vitesse de celui-ci sera à la vitesse du plan, comme la racine du plan supposé est à la racine du plan, qui mesure la résistance

du vaisseau. Ainsi la vitesse du plan supposé sera encore, $= c\sqrt{\frac{v}{n}}$, si nous entendons, par c la vitesse du vaisseau par S le plan supposé, & par n le plan qui mesure la résistance du vaisseau. Si on considérait le plan S comme infini, sa vitesse seroit comme o , & les hommes ne perdroient absolument rien de leur travail, que j'exprimerai par l'unité, mais si le plan S n'est pas considéré comme infini, on aura pour le travail utile $\frac{c}{c+v}$, & pour le travail inutile $\frac{v}{c+v}$, ou bien $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$ pour le premier, & $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$ pour le second. Comme rien n'empêche ici de donner une très-grande étendue au plan S , & même de multiplier le nombre de ces plans à son plaisir, il sera facile d'anéantir presque entièrement la qualité $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$, qui marque la perte du travail, ce n'est pas-là la plus grande difficulté; mais ce travail presque entièrement utile ne durera que jusqu'au moment que le vaisseau aura atteint ce plan contre lequel on l'aura tiré. Il faudra donc de nouveau éloigner le plan du vaisseau; cela pourroit se faire moyennant une chaloupe, & il sera très-facile de faire que pendant ce transport le plan présente son tranchant aux eaux de manière que la chaloupe puisse entraîner le plan presque avec autant de vitesse que les rameurs peuvent donner à la chaloupe, en la supposant entièrement libre. On pourroit aussi composer ces plans de doubles battans, qui se replient l'un contre l'autre par la force des eaux pendant tout le tems qu'on employe à ce transport; dans cet intervalle il faudroit lâcher la corde qui va du vaisseau au plan jusqu'à ce que celui-ci soit suffisamment éloigné du vaisseau; après quoi on lâcheroit la corde qui va de la chaloupe au même plan, l'équipage du vaisseau tireroit l'autre corde, les deux battans se rouvreroient

pour ne faire qu'un seul, & même plan, & le vaisseau s'avanceroit vers le plan. Par une telle ou autre semblable manœuvre, on feroit assez peu de perte du travail; il y auroit pourtant toujours celle qui résulte du défaut de la surface du plan, perte qu'on ne peut jamais éviter entièrement; outre cette perte on feroit encore celle du travail des hommes qui rameroient sur la chaloupe, comme ne faisant qu'un travail accessoire. Quant à la première perte, on a ici au moins autant de commodité pour la diminuer que par toute autre méthode, & la seconde perte peut être facilement négligée, à cause du peu de proportion qu'il y a entre les rameurs sur la chaloupe, & les hommes qui travaillent sur le vaisseau; mais le plus grand inconvénient consisteroit dans la perte du tems que chaque allée de la chaloupe demanderoit; cependant comme cet intervalle feroit en même tems un repos parfait pour l'équipage du vaisseau, cet équipage pourra redoubler ses efforts par un travail forcé pendant tout le tems de leur travail actuel; cette alternative de repos, & de travail forcé remettrait l'équipage dans le cas d'un travail ordinaire, & soutenable pendant plusieurs heures de suite, & l'effet d'un tel travail alternativement interrompu feroit le même aussi à-peu près que celui d'un travail ordinaire non interrompu, mais on pourra aussi prévenir cette interruption en employant deux chaloupes; dont chacune fasse alternativement avec l'autre la fonction que nous avons exposée.

XXXIII.

Je me contenterai d'avoir indiqué cette nouvelle manière de naviguer; je serois trop long, si je voulois examiner en détail tout ce qu'une telle idée demande pour l'exécution, & pour la perfection, &

après tout je ne pourrois dire que des choses qu'il fera très-facile de voir, surtout à ceux qui auroit bien voulu lire avec quelque attention tout ce que nous avons déjà dit dans ce Mémoire; pour moi, après avoir pesé toutes les circonstances, je suis entièrement persuadé, qu'on pourra de cette manière donner au vaisseau au moins les $\frac{3}{4}$ de la vitesse possible totale, & on pourroit même espérer un plus grande succès, si au lieu des plans que nous avons supposés, on vouloit employer des corps creux conoïdiques de la moindre résistance, & fort longs dont la base seroit tournée du côté du vaisseau, & la pointe vers la chaloupe, on pourroit de cette manière faire les intervalles du travail fort petits, les rameurs sur la chaloupe ne donneroient que quatre ou cinq coups des rames pour avancer ces corps, & puis l'équipage les retireroit avec beaucoup de vigueur vers le vaisseau; il seroit même facile de faire en sorte que ces corps coniques creux se fermaient toutes les fois qu'ils seroient tirés par la chaloupe, & s'ouvrissent lorsqu'ils seroient tirés par le vaisseau; rien n'empêcheroit d'attacher par une même corde une file de ces sortes de corps, lesquels offriroient une résistance extrêmement grande quand ils seroient tirés vers le vaisseau, & cette résistance seroit fort augmentée par l'inertie des eaux renfermées dans le creux de ces corps coniques pendant que la résistance seroit extrêmement petite durant le retour de ces corps. Enfin une longue expérience ne manqueroit pas de mettre cette manière de naviguer dans une grande perfection, quand on auroit une fois commencé à s'en servir; j'y vois quelques inconveniens, mais je n'en vois point d'essentiels qu'on ne puisse espérer d'éviter après quelques essais qu'on auroit faits. Il est sûr du moins que dans les occasions, où l'on ne prétend que de simplement remorquer un vaisseau, on le fera avec beaucoup de

facilité, & avec un succès incomparablement plus grand que par la maniere ordinaire de le faire. Je vois aussi qu'une semblable manœuvre fournira à l'équipage un moyen d'exercer une plus grande force quand il s'agiroit, par exemple, de remettre un navire à flot qui seroit échoué sur un banc de sable; il y a des cas où l'on ne se propose pas de donner au vaisseau une grande vitesse, mais simplement de le remettre en mouvement, & dans ces cas on doit s'appliquer à pouvoir exercer une grande pression; quand on a des points fixes, on peut obtenir une pression aussi grande qu'on se propose avec une pression aussi petite qu'on veuille employer, mais en manquant de points fixes, comme sur les vaisseaux, c'est une question toute différente de notre sujet principal, quelle est la maniere de pousser le plus vigoureusement qu'il est possible un navire; l'action de pousser un corps en repos n'est qu'une force morte; mais sur un vaisseau on ne sauroit venir à bout d'exercer une telle action qu'avec une force vive, ou avec un certain travail qui demande une pression, & une vitesse à la fois; parce qu'à la place de points fixes, on n'a que des points, qui cedent avec de certaines résistances: je trouve, par exemple, pour la galere, dont M. Chazelles à fait l'expérience, que la chiourme, par un travail ordinaire, ne peut enlever au de-là d'un poids de 1800, ou 2000 livres, c'est-à-dire, que si la galere étoit attachée par une corde, qui passât sur une poulie, & qu'à l'autre bout il y eût un poids de 1800 à 2000 livres suspendu, un tel poids arrêteroit la galere, & seroit équilibre avec les forces de la chiourme; l'effet de ce travail ne consisteroit donc qu'à tenir suspendu un poids de 1800 à 2000 livres, qui seroit produit par 260 hommes, de maniere que chaque homme n'exerceroit qu'une pression continue d'environ sept livres contre le vaisseau quoi-

qu'en repos , pendant que le même homme pourroit faire une pression continuelle infinie , si la pale & la longueur du manche pouvoient être censées infinies.

XXXIV.

S'il est sûr que nous avons indiqué toutes les mesures qu'on peut prendre pour tirer le plus grand succès qui soit possible du travail des hommes destinés à suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux, & s'il est vrai que le plus grand succès possible ne surpasse pas sensiblement le succès réel qu'on obtient par les manières de voguer les grands vaisseaux, que nous avons exposées, j'ose me flatter d'avoir satisfait entièrement à la question proposée par l'Académie. On ne doit pas être moins persuadé dans la mécanique du plus grand avantage possible, que nous avons démontré, qu'on l'est dans la géométrie de renfermer le plus grand espace possible dans une périmétrie circulaire; mais la généralité de nos principes est telle que nos réflexions sont encore vraies, quand on se serviroit, sur les vaisseaux de tout autre principe de mouvement; car de même que les hommes sont une source de forces vives, toutes les choses dont on pourroit se servir pour suppléer à l'action du vent renferment sous des apparences différentes une certaine quantité de forces vives; telle est l'action du feu, d'un air condensé, d'un air échauffé, celle des vapeurs, de la poudre à canon &c. Le vent lui-même est compris dans cette classe; pour tirer le parti le plus avantageux de tous ces principes, il n'y a qu'à éviter tous les effets inutiles autant qu'il est possible; alors toute la quantité de forces vives renfermées dans les choses naturelles dont on veut se servir pour suppléer à l'action du vent sera transmise dans les eaux poussées, & dé-

placées par la proue du vaisseau, ce qui fait seul tout l'effet utile, comme étant inséparable d'avec la navigation. Je finirai ce Mémoire par quelques remarques sur ce sujet.

XXXV.

Supposons qu'on ait sur le vaisseau en sa puissance une certaine quantité de forces vives, qu'on veuille employer à faire aller un vaisseau sur mer, & examinons, quel sera le plus grand effet qu'on en pourra tirer. Soit cette quantité de forces vives exprimée par MA , c'est-à-dire, telle qu'une masse M acquiert en tombant librement de la hauteur verticale A : soit encore le plan d'une résistance directe égale à celle de la proue $= n$; la vitesse du vaisseau $= c$, la hauteur verticale génératrice de cette vitesse sera $= \frac{cc}{60}$; là-dessus on aura la résistance du vaisseau égale au poids d'un prisme d'eau, dont la base est n , & la hauteur $\frac{cc}{60}$, & le poids contiendra autant de livres, qu'il y a d'unités en $\frac{70ncc}{60}$; je le fais donc $= \frac{7}{6} ncc$; supposons enfin que la force vive MA ; se consume uniformément dans un tems t exprimé en secondes, cela fera l'espace parcouru uniformément par le vaisseau pendant ce tems ou $s = ct$, & la force vive, que le vaisseau aura communiquée aux eaux $= \frac{7}{6} ncc \times s$, ou $= \frac{7}{6} n c^3 t$. Cette formule exprime l'effet que j'appelle utile, qui résulte de la somme des forces motrices contenues dans la force vive MA ; & si toute cette force vive est utilement employée, je dis qu'on aura $\frac{7}{6} n c^3 t = MA$; ce sera là le cas du plus grand avantage possible, & on ne pourra jamais obtenir un plus grand effet.

Voici à présent quelques propriétés que cette équation nous enseigne.

α Les vitesses c sont en raison réciproque des racines cubiques des tems, pendant lesquels la force vive MA se consume: on obtiendra, par exemple, une vitesse double en consumant ladite force vive dans la huitième partie du tems.

β Puisque $S = ct$, on aura aussi $\frac{c}{6} n c c S = MA$; ce qui marque que les vitesses du vaisseau c sont en raison réciproque des racines des espaces que le vaisseau parcourt pendant que la force vive se consume. On pourra donc, par exemple, moyennant une certaine quantité de forces vives, conserver au vaisseau une vitesse double, si on ne veut lui faire parcourir que le $\frac{1}{4}$ de l'espace.

γ Comme on peut aussi faire $\frac{7}{6} n \times \frac{S^2}{t^2} = MA$, on voit que les espaces parcourus par le vaisseau, pendant que la force vive se consume, sont comme les racines cubiques des carrés des tems. Il est donc possible de faire parcourir à un vaisseau d'une grandeur quelconque un aussi grand espace qu'on voudra, moyennant une force vive aussi petite qu'on voudra employer; mais ce sera en ne consumant la force vive que dans un tems suffisant pour cela: cela suppose que les eaux n'ayent absolument aucune autre résistance que celle qui est proportionnelle aux carrés des vitesses, & on remarquera aussi qu'il ne s'agit pas ici de donner au vaisseau un certain mouvement, mais de l'entretenir dans un mouvement déjà acquis.

δ Enfin, comme la force motrice du vaisseau que je nomme P , est égale à la résistance exprimée par $\frac{7}{6} n c c$, on aura encore $P s = MA$, & par conséquent P réciproquement

proquement proportionel à s ; on pourra donc, moyennant une même force vive, obtenir une force motrice aussi grande qu'on voudra; mais le vaisseau ne parcourra qu'un petit espace pendant tout le tems que cette force motrice dure.

XXXVI.

Pour voir la vérité de tout ce que je viens de dire, on n'a qu'à s'imaginer que le force vive MA consiste dans un long ressort bandé dont un bout soit appuyé contre la poupe du vaisseau, pendant que l'autre bout s'appuie contre un poteau, ou un autre point fixe. Il est évident que par une telle maniere d'employer la force vive renfermée dans le ressort bandé, on en tire tout l'usage possible. Eclaircissions les regles par un exemple: supposons un pied cubique rempli de poudre à canon: il y a plusieurs expériences qui prouvent que la force vive renfermée dans une telle quantité de poudre est pour le moins $= 200000000$ livres élevées à la hauteur d'un pied. Cet exemple fait donc $MA = 200000000$. Si on pouvoit employer cette force vive potentielle toute utilement pour faire aller un vaisseau du premier rang qui donne $n = 150$, qu'on voulut employer une telle quantité de poudre à chaque heure ou à chaque 3600 secondes, il faudroit substituer dans notre équation $\frac{7}{6} n c^3 t = MA$, pour t , 3600 secondes pour n , 150 pieds quarrés, & pour MA , le nombre 200000000, après quoi on trouveroit $c = \sqrt[7]{\frac{6 \cdot 200000000}{7 \cdot 150 \cdot 3600}} = \sqrt[7]{317} = 6, 8$, c'est-à-dire, qu'on pourroit, par une telle dépense en poudre à canon, entretenir un vaisseau du premier rang dans un mouvement à faire 6, 8 pieds dans une seconde, & cet effet repond dans la table fondamentale à celui de 900 hommes supposés pareillement d'employer utilement toutes leurs forces avec un travail

Prix de 1753.

N

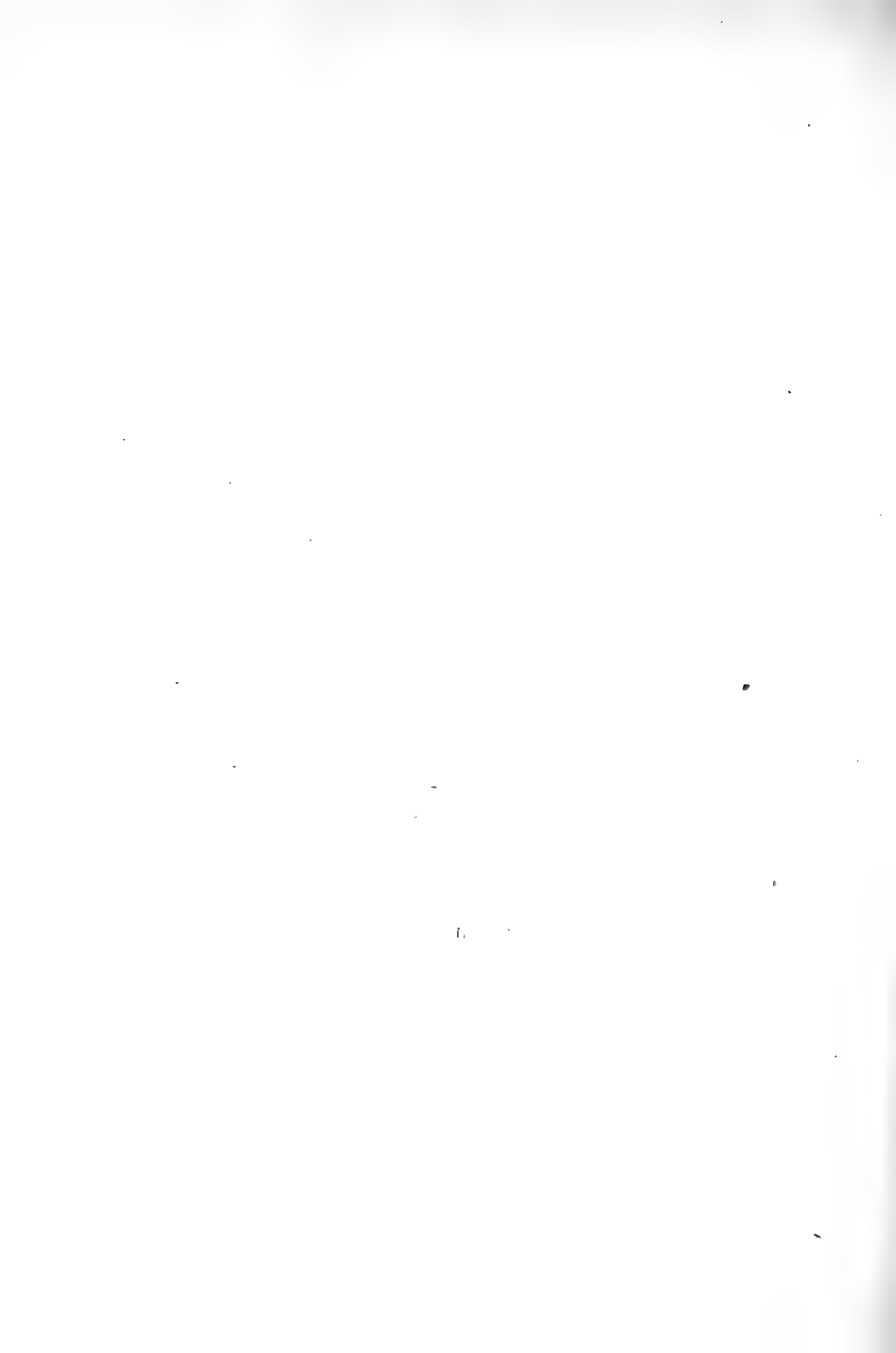
naturel. Voici un autre exemple qui servira à montrer ce que l'on pourroit attendre des vapeurs & du feu. J'ai lu dans une description de la grande machine hydraulique de Londres, qu'elle élevoit à chaque minute 80 pieds cubes d'eau à la hauteur de 124 pieds, comme c'est ici mesure d'Angleterre, je donnerai 58 livres à un pied cube d'eau, & je réduirai la hauteur de 124 pieds à celle de 116 pieds de Paris, ainsi nous aurons $MA = 80 \times 58 \times 116 = 538240$, $t = 60$, & par conséquent $c^3 = 51261$, ou $c = 3,71$; c'est une vitesse à faire environ 3 pieds $8\frac{1}{2}$ pouces par seconde. Je crois à la vérité qu'il seroit facile d'imaginer une machine pour obtenir réellement cet effet, car je trouve que dans la machine de Londres, on perd encore une très-grande partie de l'effet qu'on pourroit, tirer de l'action des vapeurs, mais je n'en suis pas moins persuadé que ces deux exemples calculés sur des principes infailibles suffiroient pour nous faire perdre toute espérance de pouvoir substituer sur les grands vaisseaux avec quelque succès considérable les forces motrices renfermées dans les choses naturelles aux travaux des hommes, à moins que ce ne soit dans des cas particuliers, qui ne demandent de semblables forces que pour peu de tems. Il y a après cela une autre réflexion à faire, c'est qu'il est difficile de faire un tel usage de ces forces motrices, qu'une très grande partie de leurs effets ne se perde inutilement. Le principe de l'effet utile consistera toujours dans la réaction d'une matiere poussée, & jettée en direction contraire à celle du vaisseau; cette matiere ne sçauroit être que de l'eau, & la force vive qu'on imprimera à ces eaux sera toujours un effet perdu; cette force vive perdue sera cependant d'autant plus petite, qu'on poussera, ou qu'on jettera une plus grande masse d'eau en tems égaux, & si cette masse étoit infinie, on ne perdrait rien à cet égard. Le recul d'un canon toujours chargé de la même quantité de

Poudre deviendroit deux fois plus grand, si on le chargeoit de quatre boulets au lieu d'un, & si on pouvoit faire un boulet d'un poids infini, toute la force de la poudre seroit à cet égard, employée utilement pour faire reculer le canon; je dis à cet égard, parce qu'on ne laisseroit pas de faire encore une autre perte très-considérable, c'est qu'aussitôt que le boulet seroit sorti du canon, il n'y auroit plus de réaction, & le reste de la force de la poudre enflammée se perdrait encore inutilement, & ce reste seroit toujours très-grand.

XXXVII.

Les réflexions que je viens de faire suffisent pour voir en quoi consistent les pertes qu'on fait des forces motrices en question, elles sont toutes comprises (car je ne parlerai pas de quelques pertes entièrement accidentelles, telles que celles qui proviennent du frottement) dans le mouvement qu'on donne aux corps mobiles, qui servent en quelque façon d'appui, & dans la grande quantité des forces motrices qu'on laisse inutilement échapper, & cette dernière perte fait le plus grand défaut de toutes les machines à feu qu'on a encore imaginées. La nature de ces deux pertes nous enseigne d'abord tout ce qu'on peut faire pour nous approcher du plus grande effet qu'on peut tirer de semblables forces motrices; mais je vois assez que cet effet ne sauroit jamais être assez grand pour mériter beaucoup d'attention. Je conclus donc que si nous avons donné la meilleure maniere d'employer le travail des hommes pour suppléer à l'action du vent, nous aurons en même tems montré de toutes les manieres praticables, qui soient possibles, celle dont on tirera le plus de profit.

Fin du N^o 3. 1753.



M É M O I R E

COMPOSÉ A L'OCCASION

D U P R I X P R O P O S É

PAR L'ACADEMIE ROYALE

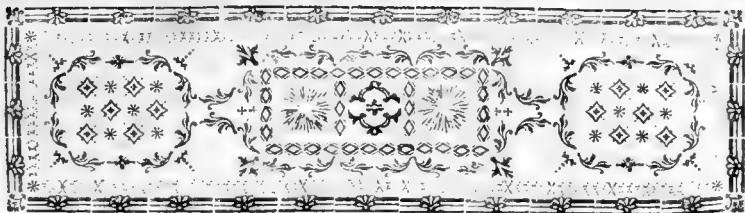
D E S S C I E N C E S .

Dont le sujet est : *L'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties du Vaisseau dans le roulis & dans le tangage , & la meilleure manière de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts , sans préjudicier aux autres bonnes qualités du Vaisseau.*

Par M. GROIGNARD, Constructeur des Vaisseaux
du Roi, à l'Orient.

Prix. 1759.

51



M É M O I R E

Composé à l'occasion du prix proposé par l'Académie Royale des Sciences, dont le sujet est : *L'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties du Vaisseau dans le roulis & dans le tangage, & la meilleure manière de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts, sans préjudicier aux autres bonnes qualités du Vaisseau.*

Vis unita major.

L'ON entend par *tangage*, les balancemens que le vaisseau fait dans le sens de sa longueur, ou de l'avant à l'arrière; & par *roulis*, ceux qu'il fait dans le sens de sa largeur, ou d'un côté à l'autre.

Ces mouvemens peuvent être plus ou moins vifs, suivant la variation des impulsions du vent sur les voiles, & des lames sur les extrémités, ou sur les côtés du vaisseau.

Plusieurs géomètres, & sur-tout M. *Bouguer*, ont traité fort au long des causes du tangage & du roulis, & de la figure la plus avantageuse qu'il faudroit donner aux vaisseaux pour diminuer leurs effets. Il seroit à

souhaiter que leurs écrits, aussi utiles que sçavans, fussent plus à la portée des personnes qui pourroient les appliquer à la pratique, & qui n'ont guères le temps d'étudier les calculs qui en démontrent les vérités.

Mon but, dans cet ouvrage, est d'examiner en détail les efforts que chaque partie du vaisseau doit ressentir des mouvemens du tangage & du roulis, & de procurer à chacune de ses parties le plus de force & de résistance possible contre les efforts qu'elle doit soutenir.

Pour me conformer à l'intention de l'Académie, qui me paroît avoir en vue de perfectionner la pratique de la construction, je ferai tous mes efforts pour ne rien établir qui ne soit démontré par l'expérience, applicable à la pratique, & à la portée de toutes les personnes qui devront le pratiquer.

Le sujet que j'ai à traiter ayant pour objet deux mouvemens différens, j'ai cru qu'il étoit à propos de le diviser en deux chapitres.

Le premier traitera des efforts du tangage, le second des efforts du roulis. Après avoir détaillé les moyens de fortifier chaque partie du vaisseau contre ces efforts, je terminerai chaque chapitre par quelques réflexions applicables à la pratique, sur la figure du vaisseau, & la distribution de la charge la plus avantageuse pour diminuer les effets du tangage & du roulis.



CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Des mouvemens du tangage.

LES mouvemens de tangage que reçoit le vaisseau dans le sens de sa longueur, peuvent être produits de deux façons : 1°. lorsqu'une lame, en frappant une de ses extrémités, l'oblige de s'élever, tandis que l'autre s'enfonce : 2°. lorsque, la mer s'abaissant tout-à-coup sous la proue ou sous la poupe, cette partie ; est plus soutenue, retombe & entraîne avec elle qui n'est pas soutenue, le vaisseau, avec une vitesse & des secouffes le reste du vaisseau, que ses extrémités sont plus taillées d'autant plus tôt, & ont plus grand poids.

lées & chargées d'eau, qui se font toujours sentir sur Ces efforts répétés, tandis que la partie du milieu des extrémités du vaisseau, par la poussée verticale en ce lieu se trouve plus soutenue par l'eau que recevoir de l'eau, peuvent être comparés à un vaisseau qui se recourber en une tasse en gondole que l'on voudroit empêcher de se courber en dessous, en pesant sur ses extrémités. Elle peut se courber 1°. s'allonger par en haut, 2°. se recourber & se raccourcir par en bas, 3°. enfin se retroicir. Ainsi, pour procurer aux vaisseaux le plus de solidité contre les mouvemens du tangage, on doit s'attacher à empêcher ces trois effets autant qu'il est possible.

ARTICLE PREMIER.

Dés moyens d'empêcher que le vaisseau s'allonge par en haut.

LE vaisseau ne peut s'allonger par en haut, sans que toutes ses parties cèdent en raison des efforts qu'elles ont à soutenir : d'où on peut conclure que moins il

Prix. 1759.

B

aura de parties susceptibles d'allongement, plus il aura de difficulté à s'allonger. Examinons en détail quelles sont les parties du vaisseau qui peuvent s'allonger dans le sens de sa longueur; & voyons s'il ne seroit pas possible de leur donner une nouvelle forme plus avantageuse, & de les lier plus étroitement, en diminuant le nombre de leurs écarts ou de leurs joints dans le sens de la longueur du navire, sans qu'il soit nécessaire d'augmenter la pesanteur ni la force des pièces qui sont déjà proportionnées à chaque rang de vaisseau, & que l'on ne sçauroit admettre aux petits navires, sans les rendre plus lourds & sans faire tort à la construction des gros vaisseaux.

De la partie de l'avant du vaisseau, qu'on nomme la proue.

En jettant les yeux sur la *figure 1^{ere}*, qui représente le plan d'élévation de la proue du vaisseau, on voit que cette partie de l'avant est composée d'une infinité de pièces A, qu'on nomme *allonges d'écubier*. Ces pièces ne sont liées les unes aux autres que par des chevilles à pointes perdues, & peuvent se désunir toutes dès que ces chevilles ont le moindre jeu, qu'elles acquièrent très-facilement par le poids & le frottement des allonges d'écubier qui se trouvent, pour ainsi dire, en l'air, & portent à faux, à cause de l'élançement de l'*étrave P*.

Pour procurer à ces pièces plus de liaison entr'elles, on met en dedans des *guirlandes* ou fortes pièces horizontales & obliques B, qui les recroisent vis-à-vis des ponts dans la calle, &c. Mais ces pièces ne sont de liaison avec les allonges d'écubier, que par les chevilles qui les traversent, qui ont de la peine à soutenir leur pesanteur; & ces guirlandes ne sont jamais assez longues pour dépasser les allonges d'écubier,

& les lier avec les membres : de sorte que cette partie de l'avant n'a de liaison avec le reste du vaisseau , que par les bordages extérieurs & intérieurs , & se délie d'autant plus aisément dans les mouvemens du tangage , qu'elle est extrêmement lourde & massive , sans que ses parties soient liées entr'elles ni avec le reste du vaisseau.

Au lieu de terminer la partie de l'avant du vaisseau , comme on l'a pratiqué jusqu'aujourd'hui , j'ai imaginé une nouvelle façon de former cette partie , où l'on trouvera non seulement plus de légèreté & une meilleure liaison pour diminuer & résister aux efforts du tangage , mais encore les autres avantages que j'ai cru devoir détailler à la fin de cet ouvrage , en démontrant les inconvénients de la méthode ordinaire.

De la partie de l'arrière qu'on nomme l'arcaste.

La partie de l'arrière du vaisseau , telle que l'exécutent les plus habiles constructeurs , ne laisse rien à désirer : aussi voit-on que cette partie qu'on nomme l'arcaste ne se ressent presque plus des efforts du tangage , quand elle est telle que la représentent les figures 7 & 8 , formée par des pièces *A* en forme de varangues accolées & fourcats parallèles à la quille , entaillées & chevillées à l'étambot *B* & prolongées jusqu'à l'estain *C* , qui est dévoyé & porté le plus en avant qu'il est possible , pour être recroisé en dehors par une plus grande quantité de bordages , & en dedans par les verges , marsoins & courbes d'écuffon obliques , qui sont prolongées fort en avant pour lier cette partie de l'arrière avec le reste du vaisseau.

C'est la solidité de l'arcaste ainsi formée , & d'autant plus grande qu'on diminue la saillie de la voûte & de l'étambot , qui autorise la nouvelle forme que je propose de donner à l'avant ou à la proue du vaisseau.

Des membres , ou couples.

Après avoir rendu les parties de l'avant & de l'arrière , qui sont celles qui fatiguent le plus , aussi solides qu'elles peuvent l'être contre les efforts du tangage , examinons si la partie du vaisseau comprise entre ces deux extrêmes ne seroit pas aussi susceptible d'une meilleure forme , pour résister aux mêmes efforts.

Cette partie intermédiaire est composée , comme on le voit dans les figures 9 , 10 , 11 , d'une quantité d'éléments *A* , qu'on appelle couples ou membres ; & ces membres non seulement n'ont aucune liaison les uns avec les autres , avant que le vaisseau soit bordé & végré , mais même ils sont faits de façon , que les parties qui les composent , peuvent se désunir sans peine & faciliter l'allongement du vaisseau , bien loin de s'y opposer.

Effectivement , chaque membre composé de deux rangs de pièces *BC* , mises bout à bout & à côté les unes des autres pour recroiser les écarts , & qui se joignent , dans le sens de la longueur du vaisseau , par des chevilles qui ne peuvent être rivées ni goupillées , doit se désunir au moindre effort que le vaisseau fait pour s'allonger. De la désunion des membres vient celle des bordages , préceintes , végres , beauquières , sur lesquels ces pièces sont clouées & chevillées : de sorte que les membres doivent être regardés comme la partie essentielle à la liaison du navire , & que de leur solidité & de leur union dépend , en partie , celle de tout le vaisseau dans les mouvemens du tangage. On ne sçauroit donc trop s'attacher à les former de la façon la plus solide & la moins susceptible de désunion ou d'allongement ; & j'ai imaginé , en conséquence , une nouvelle méthode de former les couples ou les membres des vaisseaux , (*fig. 12^e , 13^e* .

14^e.) qui ne sçauroient s'allonger dans le sens de sa longueur, en même temps qu'ils soutiendront les écarts des bordages, préceintes, beauquières, qui ne pourront se défunir sans que les chevilles cassent ou les fibres du bois s'allongent & se compriment.

Comme ces nouveaux membres *A*. *fig. 12^e. 13^e. 14^e*. seroient également avantageux contre les efforts du tangage & du roulis, j'ai cru devoir détailler à part, & un peu au long, à la fin de ce mémoire, la façon de les former, qui réunit beaucoup d'autres avantages également utiles à la pratique de la construction.

La proue, l'arcasse & les membres des vaisseaux faits comme je le propose, de façon que chacune de ces parties bien & solidement liée ne puisse céder aux mouvemens du tangage, je pourrois, sans le secours du bordage & du végrage, joindre toutes ces parties les unes avec les autres, pour former un tout depuis l'étrave jusqu'à l'étambot qui peut déjà résister aux efforts que le vaisseau voudroit faire pour s'allonger, & même le mettre en état d'être mis à flot & de pouvoir naviguer.

Il suffiroit, pour cela, de placer, *fig. 15^e*. entre chaque intervalle ou maille des membres, à toutes les empatures ou écarts des pièces, des remplissages ou clefs *C*. de quatre à six pieds de longueur entaillées à queue dans les deux membres *A*. qu'elles joindroient: & aux endroits où sont percés les sabords *I*. on placeroit des feuilletts *S*. entaillés aussi à queue, pour joindre les membres de cette partie.

Toutes ces pièces & feuilletts ainsi entaillés, seroient les membres les uns contre les autres, avec les parties de l'avant & de l'arrière, & l'on conçoit que la coque d'un vaisseau ainsi formée seroit très-difficile à défunir, & même que si ces calles, ou remplissages *C* se joignoient bout à bout, depuis la quille jusqu'au plat-bord, & si on calfatoit les joints, un pa-

reil vaisseau pourroit être mis à flot & naviguer peut-être avec sûreté ; au lieu que ceux faits suivant l'usage ordinaire sont toujours prêts à se défunir, & ne scauroient soutenir aucun effort dans le sens de leur longueur avant d'avoir été bordés & végrés.

Des ponts.

Les ponts ou planchers des vaisseaux (*fig. 16^e*), peuvent être regardé comme les cordes d'un arc, qui est d'autant plus difficile à détendre, que ces cordes sont plus fortes & moins suceptibles d'allongement.

La première attention que l'on doit avoir, c'est de diminuer, le plus qu'il est possible, la courbure des ponts dans le sens de la longueur du vaisseau, parce que cette courbure leur permet de se redresser & de s'allonger sans difficulté, & alors ils ne font pas plus d'effet sur les extrémités du vaisseau, qu'une corde lâche sur l'arc qui voudroit se détendre.

Les ponts sont composés de plusieurs pièces qui doivent toutes contribuer à leur plus grande solidité, & dont je vais parler en détail, en essayant de les faire & de les ajuster d'une façon plus propre à résister aux efforts qu'ils ont à soutenir.

Des baux.

Les *baux* ou poutres *A* (*fig. 16^e*), sont les pièces principales dont les ponts sont formés. Ces beaux sont ordinairement faits de deux pièces *B*, *C*, (*fig. 17^e*), jointes de côté & chevillées de même.

On conçoit que les écarts de ces beaux peuvent se défunir dans le sens de la longueur du vaisseau ; ce qui facilite la défunion des écarts des pièces qui recouvrent les ponts, & l'allongement dudit pont. Il est vrai que les illoires renversées que l'on met sous

ET SUR LE TANGAGE D'UN VAISSEAU. 11

les beaux des premiers ponts , empêchent que leurs écarts s'ouvrent avec facilité ; mais il n'y a point d'illoires renversées sous les beaux des seconds ponts , qui sont les plus élevés , & , par conséquent , les plus avantageusement placés contre l'allongement du vaisseau ; & les illoires , qui sont sous les beaux des premiers ponts , ne sont jamais entaillées avec assez de justesse , elles sèchent dans les calles ; & l'expérience nous apprend que tous les écarts des beaux des vieux vaisseaux , quand on vient à radouber & déborder leurs ponts , sont ouverts & défunis , souvent à passer les doigts dans les joints , ce qu'on ne sçauroit empêcher en faisant les beaux suivant l'usage ordinaire.

Je ne vois rien de si simple que d'assembler les deux pièces , qui forment le beau de dessus en dessous , dans le sens de leur épaisseur , au lieu de le faire dans le sens de leur largeur (*fig. 17^e.*). Le seul inconvénient qu'on pourroit y trouver , c'est de diminuer la hauteur des calles & entre-ponts des navires , de l'épaisseur du renfort qu'on a coutume de laisser aux bouts des pièces qui forment les écarts : mais je ne vois pas que cette objection convienne aux vaisseaux de guerre , dont les calles ne sont jamais remplies & les entre-ponts fort élevés : & je pense qu'on pourroit se dispenser de laisser des renforts aux bouts des écarts *B . C.* de ceux-ci (*fig. 18^e.*) , parce que les pièces qui les forment résistent de toute leur épaisseur ; au lieu qu'aux autres (*fig. 17^e.*) ce n'est que les chevilles & les étances qui s'opposent aux efforts qu'ils ont à soutenir de haut en bas , & au poids de l'artillerie.

Des arcabouts.

Les arcabouts *B* (*fig. 16^e.*) sont de pièces de bois de trois à quatre pouces d'épaisseur au quarré , qui sont placées d'un beau à l'autre de l'avant à l'arrière. On

met ordinairement à chaque pont trois rangs d'arcboutans, un rang au milieu de la largeur du pont, & un autre de chaque côté entre le bord & le milieu.

Ces arcboutans ne font d'autre effet que d'empêcher les baux de se rapprocher & de soutenir les barrotins *C*. On les entaille seulement d'un pouce dans chaque bau ; de sorte qu'au moindre jeu tous ces arcboutans deviennent inutiles, & ne font aucun effet pour s'opposer à l'allongement des ponts.

Je voudrois, à la place du rang d'arcboutans du milieu (*fig. 16^e.*), qui est interrompu par chaque écouteille, & étambraie & carlingue des mâts, placés, depuis l'avant jusqu'à l'arrière, entre les coutilles une illoire *B*, qui entailleroit dans chaque beau de l'épaisseur des barrotins, & déborderoit, au-dessus du beau, de l'épaisseur du bordage du pont, dont elle feroit partie. Cette illoire *B* (*fig. 19^e.*) auroit de chaque côté une rablure ou feilleure de trois pouces, pour recevoir les bouts des barrotins qui seroient entaillés à queue dans ladite feilleure, & lieroit ensemble tous les baux qui se trouvent entre les mâts & écouteilles. On pourroit même mettre entre chaque bau du premier pont une fourrure bien ajustée, pour remplir le vuide qui se trouveroit entre l'illoire renversée & celle-ci, & passer des chevilles de dessus en dessous ; ce qui feroit une liaison bien solide.

A la place des deux rangs d'arcboutans, que l'on place entre ceux du milieu & du bord (*fig. 16^e.*), je voudrois mettre (*fig. 19^e.*) des entremises *D* de six à huit pouces de largeur, & quatre pouces d'épaisseur entaillées, à queue sur chaque bau, & clouées de deux cloux à chaque bout, pour empêcher le jeu & l'écartement des baux.

Des barrotins.

Les barrotins *C* (*fig. 16^e.*) sont de pièces de bois de

de chêne ou de sapin , de huit à onze pouces de largeur , & six à huit pieds de longueur , que l'on place entre chaque bau , à la hauteur du dessus desdits baux , sur une feilleure de deux à trois pouces , pratiquée dans l'entaille des illoires & gouttières qui supportent lesdits barrotins.

Ces barrotins ne servent qu'à remplir une partie du vuide qui se trouve entre les baux , pour soutenir les bordages du pont , l'étoupe des coutures , & faire un meilleur calfatage.

Au lieu de placer ces barrotins d'une illoire à l'autre (*fig. 16.*) , je voudrois les faire venir (*fig. 19.*) depuis le bord où ils seroient entaillés à queue & cloués sur les entremises que l'on met à l'extrémité des bouts des baux , jusqu'à l'illoire du milieu *B* , où ils seroient aussi entaillés à queue & cloués , en même temps qu'ils seroient entaillés & cloués sur l'entremise *D* , que j'ai placée , au lieu d'arcboutans , entre l'illoire du milieu & le bord.

Ces barrotins ainsi placés , formeroient presque un second rang de baux , & seroient assez solides pour y entailler les illoires & clouer les bordages ; mais ils seroient encore plus avantageux pour s'opposer aux efforts du roulis , & j'en démontrerai l'utilité.

Des guirlandes . barres de ponts & courbes d'écuffon.

On place , sur l'extrémité des ponts horizontalement , en arrière , entaillée sur l'étambot , une forte pièce de bois *P* (*fig. 16.* & *19.*) , qu'on nomme barre de pont , & en avant , sur l'étrave & allonges d'écubier , de fortes pièces à peu près semblables , qu'on nomme guirlandes . Ces deux pièces peuvent être regardées comme les deux derniers baux . C'est sur elles que sont clouées tous les bouts des bordages & illoires ; & , comme elles sont en même temps chevillées contre les extrémités

du vaisseau, elles soutiennent les efforts que font les extrémités du navire pour tomber, & les efforts que font les ponts pour s'allonger.

Ainsi, les guirlandes font, dans la partie de l'avant du vaisseau, une forte liaison ; on en met une à chaque pont, sous le beaupré, sous les écubiers, & plusieurs dans la calle. Mais, comme elles font fort difficiles à trouver, & qu'elles font ordinairement fort courtes, je voudrois augmenter leur longueur, dont dépend la meilleure liaison, par des allonges bien ajustées, & les entailler dans le végrage que l'on pourroit laisser plus épais dans cette partie, pour lui pratiquer des addents qui supporteroient en partie les poids des guirlandes, & résisteroient avec les chevilles aux efforts qu'elles ont à soutenir.

Je voudrois aussi entailler & bien cheviller, sur ces guirlandes & sur la barre de pont, tous les bouts des illoires & bordages des ponts pour les empêcher de larguer. Mais rien ne me paroît plus solide, pour lier les ponts avec les extrémités du vaisseau, que de placer, en avant & en arrière (*fig. 19^e.*) deux fortes courbes verticales *K*, dont une branche seroit chevillée, en avant, contre l'étrave & contre-trave ; & en arrière, contre l'étambot ; & l'autre branche seroit prolongée sur le pont, portant sur l'illoire du milieu, à laquelle on laisseroit, sur ces extrémités, plus d'épaisseur & des addents, & seroit chevillée avec ladite illoire, guirlandes, barres de ponts. Ces deux courbes joindroient les extrémités des ponts avec celles du vaisseau ; ce qui, répété à chaque pont, s'opposeroit fortement aux effets du tangage.

Pour pouvoir prolonger l'illoire du milieu (*fig. 19^e.*) jusqu'à l'étambot *L*, & placer sur cette illoire la courbe verticale *K*, il faudroit percer l'écoutille de rechange *G* (*fig. 18^e.*) du maître canonier à côté de ladite illoire ; sur babord ou sur tribord (*fig. 19^e.*), ce qui

ne souffriroit aucune difficulté : on pourroit même prolonger ladite illoire , & lui faire former la carlingue du mât d'artimon , en perçant aussi de côté l'écoutille aux poudres *H* (*fig. 16^e. & 19^e.*).

Les courbes d'écuffon font de fortes pièces de bois qu'on place en écharpe , dans la partie de l'arrière , sur les barres d'arcaste & d'écuffon , au-dessous du premier pont , pour recroiser l'arcaste & la lier avec les couples de l'arrière. La liaison de ces pièces sera d'autant plus forte qu'on augmentera leur longueur , & qu'elles feront bien ajustées & entaillées sur le végrage , & bien chevillées & entaillées contre les barres d'écuffon & les couples de l'arrière.

Des courbes de pont.

Les courbes de pont font des pièces de bois ou de fer en équerre , dont l'angle est plus ou moins ouvert suivant la figure du vaisseau. Une branche de ces courbes est chevillée & entaillée contre le bau ; & l'autre contre le côté du vaisseau. Leur effet est de diminuer la portée des baux , de les empêcher de s'écarter du côté du vaisseau , & de fortifier en même temps le membre sur lequel elles portent ; ces courbes sont ordinairement placées perpendiculairement , & chevillées sur un seul membre.

Je voudrois donner aux courbes de pont une direction oblique , de façon que la branche d'une même courbe embrassât plusieurs membres , & que la tête de l'une répondît à la queue de l'autre ; ce qui formeroit , de l'avant à l'arrière , une espèce de chaîne & forte ceinture , qui lieroit le vaisseau dans le sens de sa longueur , & s'opposeroit aux efforts du tangage en même temps quelle empêcheroit les baux de s'écarter du bord , & diminueroit leur portée.

Des fourrures de gouttières , gouttières , illoires , & bordages des ponts.

Les fourrures de gouttières *L* (*fig. 16^e & 19^e*) sont des pièces qui s'ajustent sur les bouts des baux & contre le côté du vaisseau. Elles sont taillées en grain d'orge, ont ordinairement dix à douze pouces en quarré, le plus de longueur qu'il est possible; & entaillent à queue dans tous les bouts des baux, depuis l'avant jusqu'à l'arrière, ainsi que les gouttières *M*, avec lesquels elles sont chevillées par de longues chevilles que l'on frappe par dehors & qui sont goupillées en dedans sur les gouttières, précisément au-dessous des bordages du pont. On place ordinairement deux chevilles entre chaque bau; ce qui fait un tout depuis l'avant jusqu'à l'arrière des gouttières, fourrures de gouttières & du côté du vaisseau. Les illoires *N*. (*fig. 16^e & 19^e*.) entaillent aussi à queue & à tenon dans tous les baux & barrotins, & font partie des bordages des ponts.

On met ordinairement, sur chaque pont, deux rangs de fourrures de gouttière, quatre rangs de gouttières, & huit rangs d'illoires, disposés comme il est marqué sur les *fig. 16^e & 19^e*.

Si on joint à la liaison que forment toutes ces pièces entaillées, celle qui doit résulter de la nouvelle façon d'ajuster les baux, arcbutants, barrotins, courbes verticales, &c. que je viens de détailler; on conçoit que ce nouveau pont doit être bien plus solide & avoir plus de difficulté à s'allonger, surtout si on a attention de rendre toutes les pièces & bordages, qui recouvrent les ponts, les plus longues & les plus droites en tout sens, en ne donnant aux ponts que l'arc ou la courbure absolument nécessaire pour faciliter l'écoulement des eaux vers le milieu,

& empêcher qu'elles ne séjournent sur les extrémités du navire ; ce qui seroit très-incommode & occasionneroit bientôt la pourriture.

Des bordages intérieurs & extérieurs.

Rien ne s'oppose plus aux efforts que fait le vaisseau dans les mouvemens du tangage , que les bordages extérieurs & intérieurs qu'on nomme végrage.

On végroit autrefois obliquement la partie du vaisseau comprise entre les végres d'empature & la ferre beauquière , & l'on prétendoit que ces végres , ou ferres obliques , étoient autant d'arcboutants qui soutenoient le vaisseau contre les efforts qu'il fait pour arquer. Mais on ne faisoit pas attention que , pour placer ces végres ou arcboutants , il faut leur donner une courbure qui facilite l'allongement qu'ils doivent prendre , lorsque les végres d'empature & les beauquières , qui leur servent de point d'appui , cèdent aux efforts du tangage. D'ailleurs ces arcboutants ou végres obliques , qui ne peuvent avoir , tout au plus , que quatre pouces d'épaisseur dans les gros vaisseaux , & qui n'embrassent ordinairement que trois ou quatre membres , ne peuvent pas faire un grand effet ni une liaison continue ; parce qu'on est obligé de laisser , dans la calle , des jours ou intervalles entre les végres , pour pouvoir découvrir les voyes d'eau ; ce qui forme comme une espèce de treillis dans la calle , & toute interruption dans les ouvrages de charpente diminue la solidité.

J'approuverois beaucoup cette méthode , si on pouvoit la pratiquer de façon que toutes les végres , parfaitement droites , eussent la même obliquité , sans aucune interruption , depuis l'avant jusqu'à l'arrière ; mais comme la chose n'est pas praticable , on a eu raison d'abandonner cette façon de végrer oblique-

ment, quoiqu'elle soit plus économe en employant des bordages plus courts. L'on donne à présent, aux bordages intérieurs, à peu près la même direction qu'aux bordages extérieurs, afin que les deux forces de ces bordages réunies s'opposent en même temps aux mêmes efforts.

On entaille ordinairement d'un pouce & demi ou de deux pouces, dans les membres, les deux rangs de végres qui répondent aux empatures des varanques & des genoux, & que l'on nomme pour cela végres d'empature, pour empêcher le jeu & fortifier le vaisseau dans cette partie où il porte quand il vient à échouer.

Il y a des constructeurs qui entaillent aussi dans les membres, les beauquières, les préceintes, lisses & ferres de platbord, &c. Toutes ces entailles ne peuvent que contribuer à une meilleure liaison, mais il en résulte plusieurs inconvéniens.

1°. Il faut des bordages d'autant plus épais que l'entaille est plus forte. Ces bordages sont plus rares coûtent plus cher, consomment plus de bois de plus fort échantillon, qui, étant presque sur le retour, sont moins vigoureux & plutôt pourris.

2°. Il faut employer plus de temps & plus de journées d'ouvriers pour les travailler & les mettre en place.

3°. Ces entailles qui recouvrent les membres & empêchent l'air de les rafraichir, occasionnent plutôt leur pourriture.

4°. Enfin la rondeur & la figure irrégulière du vaisseau ne permettent pas, quelque attention que l'on aie, que l'on puisse faire ces entailles avec assez de justesse pour qu'il n'y ait pas du jour d'un côté ou de l'autre, quand les pièces sont mises en place.

Toutes ces raisons, confirmées par l'expérience, ont fait prendre le parti de ne plus entailler dans les membres le bordage & le végrage. On pourroit ce-

pendant entailler avec succès les lisses & ferres de platbord , parce que , le vaisseau n'ayant presque point de courbure dans cet endroit , les entailles seroient plus justes , & formeroient une forte liaison dans cette extrémité qui tend le plus à s'allonger.

L'attention singulière que l'on doit avoir dans le bordage & végrage , c'est de donner à toutes les pièces le plus de longueur & la direction la plus horizontale , afin qu'elles puissent moins s'allonger. Il faut aussi s'attacher à bien recroiser les écarts , & à les arrêter par deux forts clous & une cheville frappée par dehors & rivée par dedans , à chaque bout de bordage. On peut aussi pratiquer , aux écarts des beauquières & autres pièces de liaison , des addents d'un pouce sur le quant , en forme de cramaillères , pour que les pièces qui les recroisent en dessus & en dessous les empêchent de larguer.

ARTICLE SECOND.

Des moyens d'empêcher le vaisseau de se raccourcir & se recourber par en bas.

LE vaisseau ne scauroit se raccourcir & se recourber par en bas , sans que sa quille , contrequille , carlingue , &c. de droites deviennent courbes ; ce qui ne peut se faire sans que leurs écarts larguent ou se compriment. On a donné , en conséquence , à toutes ces pièces , le plus de longueur & de force possible , surtout en hauteur , proportionnellement à la grandeur des vaisseaux : mais je voudrois qu'au lieu de faire les écarts de la quille , contrequille & carlingue , dans le sens de la hauteur (*fig. 5^e. & 6^e.*) ou de dessus en dessous , comme on le pratique ordinairement , on les fit dans le sens de la largeur (*fig. 1^{5^e}*), pour les

cheviller de côté au lieu de bas en haut ; parce qu'alors ses écarts s'opposeroient directement, & avec plus de force aux efforts qu'ils ont à soutenir.

Il faut aussi, pour que le vaisseau se racourcisse par en bas, que toutes ses parties voisines de la quille, carlingue, &c. se rapprochent & se compriment. C'est pourquoi on a imaginé de placer entre les membres, au-dessus de la quille, & aux bouts des varangues, des clefs ou remplissages (*fig. 15^e.*), en forme de coins de dix-huit à vingt pouces de longueur, que l'on frappe à force, par dedans, pour remplir le vuide qui se trouve entre les membres, seulement au-dessus de la quille & aux empatures des varangues & des genoux.

Je voudrois remplir en entier tout le fond du vaisseau, depuis la quille jusqu'au bout des genoux, en laissant d'abord porter aux varangues & genoux toute la largeur que fournissent ces pièces avant de les travailler, & en plaçant ensuite, dans le plus petit intervalle qui resteroit entre les membres, des bordages de la longueur & épaisseur qu'elles exigeroient ; ou bien, pour plus d'économie, de bouts de bois de trois ou quatre pieds, bout à bout, pour remplir exactement tout le vuide qui se trouveroit depuis l'avant jusqu'à l'arrière, entre la quille & les empatures des varangues. Mais, au lieu de frapper ces pièces ou clefs par dedans, comme on le pratique ordinairement, je voudrois les frapper par dehors, en leur donnant de l'entrée en forme de coin, afin qu'elles fussent forcées principalement sur le quant extérieur des membres, où doit se faire le plus grand effort.

Le vaisseau se trouvant ainsi plein dans cette partie ; depuis l'étrave jusqu'à l'étambot, pourroit être regardé comme d'une seule pièce, & ne sçauroit se raccourcir qu'autant que toutes ses parties pourroient se comprimer ; ce qui seroit d'autant plus difficile qu'elles auroient déjà été placées avec plus de force, & qu'on auroit

auroit eu attention de choisir les bois les plus secs & les plus compacts.

Il ne pourroit résulter, de cette façon de remplir le fond du navire, aucun inconvénient pour la pratique de la construction, ni pour les qualités du vaisseau. La pesanteur en bois que l'on ajouteroit à celle de la coque, seroit déduite de celle du lest, qui ne sçauroit être placé plus avantageusement.

En pratiquant en dehors & en dedans, le long des clefs ou remplissages, un petit canal de deux à trois pouces de largeur & autant de profondeur, en forme de gouttière, les eaux viendroient se rendre aux lumières & à la pompe; & comme elles ne pourroient ni séjourner ni croupir entre les mailles des membres, qui se trouveroient remplies, les calles des navires & les entreponts n'en seroient point infectés, & ne communiqueroient point leur mauvais air aux équipages, &c. On n'auroit point à craindre des voyes d'eau dans les échouages qu'un vaisseau ainsi construit seroit bien plus en état de soutenir.

Des illoires renversées, & étances de la calle.

Les illoires renversées sont de longues & fortes pièces de bois, de onze à douze pouces en quarré, que l'on met au-dessous des baux du premier pont, au milieu de la largeur du vaisseau, depuis l'avant jusqu'à l'arrière, entre les écoutilles & les mâts. Ces pièces sont entaillées & chevillées à chaque bau; & c'est sous elles qu'arcboutent toutes les étances ou épontilles de la calle, que l'on place perpendiculairement sur la carlingue aux baux qui forment les écoutilles, & de distance en distance entre les écoutilles, pour soutenir les premiers ponts.

Rien ne peut s'opposer plus directement à l'arc du vaisseau, ou à la courbure qu'il voudroit prendre par

en bas , que ces étances & illoires renversées. Au moyen de l'illoire renversée, l'effet des étances se communique également à tous les baux du pont qu'elle embrasse ; & comme les étances portent sur la carlingue qui est chevillée avec la quille , contrequille , varangues , &c. il faut que le premier pont se ressent des efforts que fait la quille pour arquer , & qu'il prenne le même arc ou la même courbure que la quille , ou que les étances se raccourcissent en se recourbant , ou en prenant une direction oblique.

Il est donc bien nécessaire de donner aux étances toute la force & la solidité pour se roidir contre ces efforts ; de les multiplier , autant qu'il est possible , sans gêner l'arrimage des vaisseaux ; enfin , de les ajuster & entailler , de façon qu'elle ne puissent prendre aucune obliquité. On pratique ordinairement à ces étances un tenon à la tête , qui entre dans l'illoire renversée , & des taquets , sur la carlingue , qui retiennent le pied.

Je voudrois y joindre des équerres , ou étrieux de fer , & des arcboutans en forme de potence aux endroits où elles sont trop éloignées ; enfin , porter toute l'attention possible , pour qu'au moyen de ces étances & illoires renversées , la quille , contrequille , varangues , carlingue & les ponts , ne forment , pour ainsi dire , qu'un tout , & résistent ensemble & avec plus de force aux efforts que fait le vaisseau pour se recourber en dessous.

ARTICLE TROISIÈME.

Des moyens d'empêcher le vaisseau de se rétrécir.

ON ne sçauroit concevoir qu'un corps homogène , fait d'une seule pièce , puisse s'allonger par en haut , & se raccourcir en se recourbant par en bas , sans se rétrécir

en même temps ; & l'on seroit porté à croire qu'un vieux vaisseau arqué devoit être plus étroit que dans le principe de sa construction. Mais, si on fait attention que le vaisseau est composé d'une infinité de parties qui peuvent céder, comme je viens de le démontrer, aux efforts qu'il fait pour s'allonger, & d'une infinité d'autres qui s'opposent à ceux qu'il fait pour se rétrécir, comme je le prouverai en parlant du roulis, il est clair que, si les premières résistent moins que les dernières, il pourra s'allonger sans se rétrécir. L'expérience le confirme, & nous fait voir que tous les vieux vaisseaux, ont ordinairement quatre à six pouces plus de largeur que lorsqu'ils ont été construits.

Ainsi, bien loin d'imaginer des moyens pour empêcher les vaisseaux de se rétrécir, je m'appliquerai à en chercher des contraires en traitant des mouvemens du roulis, & je terminerai mes recherches, sur les mouvemens du tangage, par quelques réflexions sur la figure de la carène & la distribution de la charge la plus avantageuse pour diminuer leurs efforts.

Quelqu'attention que l'on apporte à lier les vaisseaux, si la figure de leur carène, & la distribution de leur charge n'est pas telle, que le poids de chacune de ses parties soit égal à son déplacement d'eau, ce qui est presque impossible, le vaisseau, dans le port ou à l'ancre dans la rade, sans aucun mouvement, tendra à se délier.

Il arrive presque toujours que le déplacement, & par conséquent, la poussée verticale de l'eau, comparée aux poids des différentes parties du vaisseau, est plus forte au milieu, à l'endroit de sa plus grande largeur, qu'aux extrémités qui sont plus taillées, & plus chargées du poids des œuvres mortes quand le vaisseau est vuide, & du poids des ancres, cables, &c., quand il est chargé.

Il suit de-là, que de deux vaisseaux qui auroient

même capacité ou même déplacement avec les mêmes proportions & le même tirant d'eau, celui qui auroit un maître gabari fort ouvert & les extrémités fort taillées, arquerait avec plus de facilité que celui qui auroit le maître gabari plus taillé & les extrémités plus soutenues.

On pourroit corriger en partie le défaut du premier dans son chargement, en ayant attention de rassembler dans le milieu où seroit sa plus grande capacité, la plus grande quantité de lest de fer & de parties lourdes, & de ne laisser, dans ses extrémités, que les choses les plus légères, & qui doivent nécessairement y rester.

Enfin, le principe dont on doit toujours faire usage, dans la construction & dans le chargement ou arimage des vaisseaux, pour diminuer les efforts & les effets du tangage, c'est de rendre le poids de chaque partie le plus proportionnel au volume d'eau qui lui répond, ce qui dépend, comme on vient de le voir, & de la figure de la carène & de la distribution de la charge.

L'œuvre morte du vaisseau, ou la partie qui est hors de l'eau, peut aussi contribuer à le faire arquer. Nous venons de voir qu'il n'est guères possible que les extrémités du vaisseau ne soient pas plus pesantes que le volume d'eau qu'elles déplacent. Si on joint à la pesanteur, de ce qu'elles doivent porter nécessairement, celle qu'une trop grande hauteur d'œuvres mortes occasionneroit, on conviendra que c'est avec raison que les habiles constructeurs s'attachent à les rendre moins hautes & plus légères, sur-tout vers les extrémités.

Ce poids d'œuvres mortes est plus nuisible aux vaisseaux vuides, dans le port, qu'à ceux qui sont chargés, parce qu'alors ils tirent très-peu d'eau, & leurs extrémités, qui se trouvent presque en l'air à cause des façons de l'avant & de l'arrière, tendent plus à se

ET SUR LE TANGAGE D'UN VAISSEAU. 25
délié. Il est donc alors plus nécessaire de charger de lest la partie du milieu, & de submerger, par ce moyen, le vaisseau autant que la profondeur du port peut le permettre.

Il seroit aussi à souhaiter que l'on put avoir assez de pontons pour y amarrer tous les vaisseaux qui se trouvent dans les ports, afin de pouvoir soulager leurs extrémités des chaînes & cables qui les retiennent ordinairement, & dont le poids & les efforts, dans les hautes marées, tendent beaucoup à les délier.

Au défaut de pontons, on pourroit se servir, avec succès, de coffres ou corps vuides ajustés aux extrémités des vaisseaux, dont le déplacement fut à peu près égal aux poids des chaînes, cables & œuvres mortes. Par ces moyens, on conserveroit les vaisseaux dans le port où ils acquièrent souvent plus d'arc que dans de longues campagnes.

CHAPITRE SECOND.

Des mouvemens du roulis.

LES mouvemens du roulis sont ceux qui s'exercent dans le sens de la largeur du vaisseau. Ces mouvemens peuvent être plus ou moins vifs, suivant la variation des impulsions du vent sur les voiles & des lames sur le côté du navire. La figure du vaisseau, la position de son centre de gravité & la distribution de sa charge, peuvent aussi beaucoup contribuer à augmenter ou à diminuer la vivacité des mouvemens du roulis. Ils produisent, dans le sens de la largeur du vaisseau, à peu près les mêmes effets que les mouvemens du tangage dans le sens de sa longueur, c'est-à-dire, que les roulis tendent à délier & à recourber les côtés du vaisseau, & à augmenter sa largeur.

On ne peut guères concevoir un navire incliné sur un côté qui porte tout son poids, & qui est repouffé avec la même force sans que ce côté s'applatisse, en même temps que le côté opposé, qui est hors de l'eau, tend à s'allonger par les efforts que font les aubans, & chaînes d'aubans qu'il soutient, & qui portent seuls du côté opposé à l'inclinaison, tout le poids des mâts, vergues, voiles, &c.

Nous avons de ceci une preuve bien sensible : quand on met un vaisseau en carène, ou les efforts que l'on fait pour l'incliner tout vuide, sont bien moins grands que ceux qu'il reçoit tout chargé. Quelque attention qu'on ait eu à le bien calfater sur les chantiers, & quoique le bois & l'étope s'enflent lorsqu'il est mis à l'eau, on fait néanmoins entrer sans peine de nouvelles étoupes quand il est viré en carène, du côté opposé à l'inclinaison, tandis qu'on auroit de la peine à introduire la pointe d'un couteau dans les joints du côté incliné : ce qui ne peut se faire, sans qu'un côté s'allonge, & l'autre se comprime en prenant une courbure contraire.

Il n'en est pas de même d'un vaisseau que l'on carène dans un bassin ; les deux côtés sont également difficiles à calfater étant également resserrés par la pesanteur égale du navire : d'où on peut conclure que la carène d'un vaisseau, dans un bassin, tend moins à le délier ; mais elle n'est pas aussi sûre ni aussi solide, que celle qu'il reçoit à flot, sur-tout s'il a fait plusieurs campagnes.

Des différentes courbures que prennent les côtés du vaisseau, dans les mouvemens du roulis, suit nécessairement la désunion des pièces qui forment lesdits côtés, dont les bordages & vaigres s'ouvrent quelquefois à passer les doigts dans les joints, dans les endroits voisins des porte-aubans ; & des efforts que font les aubans & chaînes d'aubans pour attirer successivement les côtés du vaisseau, ce qui produit la désunion des

ET SUR LE TANGAGE D'UN VAISSEAU. 27
côtés avec les ponts & la plus grande ouverture, ou
largeur du navire. Je vais essayer de fournir les moyens
pour obvier, autant qu'il est possible, à ces deux in-
convéniens.

ARTICLE PREMIER.

Des moyens d'empêcher la désunion des côtés du vaisseau.

LES principales pièces qui forment les côtés du vaisseau, sont les membres, les bordages, le vaigrage, & les porques *P.* (*fig. 9^e. 10^e. & 11^e.*).

Les bordages & le vaigrage ne peuvent résister aux mouvemens du roulis, qu'autant que les membres qui les portent, & sur lesquels ils sont cloués & chevillés, sont solides & n'ont point de jeu. Ainsi la principale force du côté du vaisseau contre les roulis, vient de celle des membres; & c'est sur la meilleure façon de lier les membres que nous devons sur-tout insister.

En examinant la façon dont les membres sont faits, on ne peut s'empêcher de convenir que leur assemblage est encore moins avantageux pour résister aux roulis qu'au tangage (*fig. 9^e. 10^e. & 11^e.*): c'est ce que je démontre dans la nouvelle façon de former les membres des vaisseaux, qui réunit les deux avantages d'être infiniment plus solides contre les mouvemens du tangage & du roulis.

Les porques, que l'on met sur le vaigrage, forment d'abord une bonne liaison (*fig. 10.*); mais, comme ce ne sont que des membres faits comme à l'ordinaire, & qu'ils sont chevillés sur les autres, ils sont sujets aux mêmes inconvéniens d'être bientôt déliés. Ils sont d'ailleurs fort éloignés les uns des autres, & causent tant de difficulté dans les arrimages & dans les radoub, que l'on desire depuis longtemps leur suppression.

La meilleure façon de fortifier le côté du vaisseau ; en faisant les membres comme à l'ordinaire, seroit d'entailler d'un pouce dans leur épaisseur au-dessus des écarts des pièces qui les forment, un ou deux rangs de vaigrès ou bordages, & de faire aussi entailler d'un pouce ou deux les porques dans les jours que l'on laisse entrer les vaigrès de la calle. Toutes ces entailles formeroient des arrêts qui résisteroient d'autant aux efforts, que font les membres pour se défunir ; mais elles seroient sujettes aux inconvéniens que j'ai détaillés en parlant du tangage.

Je ne vois donc rien de plus avantageux, pour rendre le côté du vaisseau aussi solide qu'il est possible contre les mouvemens du roulis, que de former les membres, qui en font la principale force, suivant la nouvelle méthode que je détaille à la fin de cet ouvrage, (*fig. 12^e. 13^e. & 14^e.*) & dont l'application, aussi simple qu'économique dans la pratique, convient également pour résister aux mouvemens du roulis & du tangage.

ARTICLE SECOND.

Des moyens d'empêcher le vaisseau de s'ouvrir & s'élargir.

RIEN ne peut s'opposer avec plus de force à la plus grande ouverture du vaisseau que les ponts & gaillards placés à différentes hauteurs.

Les baux ou poutres de ces ponts servent de cordes aux membres qui les portent, & à tout le côté du vaisseau, par le moyen des ferre-bauquières, fourrures de goutières, &c. Ces membres ne s'ouvreroient s'ouvrir sans s'écarter des extrémités des baux qui leur sont fortement attachés, si on pouvoit rendre les baux parfaitement droits, & ajuster leurs écarts de façon qu'ils ne pussent pas larguer, quand ils sont faits de deux pièces,

pièces, ce qui est ordinaire aux vaisseaux de guerre.

On est nécessairement obligé de donner aux baux une certaine courbure dans le sens de leur longueur, afin que les eaux, qui tombent sur les ponts, prennent leurs cours vers les côtés du vaisseau où on pratique des ouvertures ou dalots pour leurs écoulemens.

Cette rondeur des baux est encore nécessaire pour s'opposer au recul du canon, & diminuer l'effort qu'il feroit sur le côté du vaisseau, si le pont horizontal lui permettoit de reculer avec plus de facilité.

Enfin, on ne peut se dispenser de donner de la rondeur aux baux, & alors ils facilitent plus qu'ils ne s'opposent à la plus grande ouverture du vaisseau.

Effectivement, une pièce courbe tend à se redresser quand on charge sa partie convexe : elle ne peut se redresser sans s'allonger ; & elle ne peut s'allonger sans écarter les points d'appui qu'elle auroit à ses bouts.

La même chose arrive aux baux des vaisseaux. Les ponts sont chargés du poids immense de l'artillerie ; des cabestans, mâts d'hune de rechange, chaloupe & canon, parc à moutons, boulets, cables, coffres & équipages ; ces poids tendent à redresser les baux qui, en s'allongeant, font ouvrir les côtés du vaisseau, sans qu'ils soient obligés des s'en écarter.

Cet effet est moins sensible au premier pont qu'au second pont, parce que les fortes étances ou épontilles de la calle, les iloires renversées, & même les efforts que fait le vaisseau pour arquer, soutiennent les baux dans le milieu de leur longueur, & les empêchent de se redresser ; les côtés du vaisseau, qui sont aussi plus épais dans cet endroit, cèdent avec plus de difficultés, & l'effort des porte-aubans en est plus éloigné.

On a également soin de mettre, sous les baux des seconds ponts, des épontilles à double rang ; mais ces épontilles, qui portent sur le premier pont, suivent

son affaissement & le communiquent au second pont qu'elles soutiennent. On ne peut pas les mettre bien fortes, pour ne pas trop embarrasser l'entrepont & gêner le service de l'artillerie & de la manœuvre. On est souvent obligé de les déplacer pour faire jouer le cabestan, dont les barres sont fort longues; &, en les plaçant & déplaçant, elles se recourbent & se raccourcissent; les charnières, qui les soutiennent, s'usent: ce qui permet aux baux des seconds ponts de se redresser avec plus de facilité que ceux des premiers ponts.

L'expérience nous apprend que tous les baux des vieux vaisseaux, & surtout ceux des seconds ponts & gaillards, se redressent au point qu'on est souvent obligé de les changer avant que les vaisseaux soient usés, & c'est ce qui est cause que l'on donne plus de courbure aux baux des seconds ponts & gaillards; ce qui facilite la plus grande ouverture & désunion des côtés du vaisseau, dans cet endroit où ils ont moins de force & sont plus voisins des porte-aubans.

La première idée qui se présente d'abord pour empêcher l'allongement des baux, en admettant que leur courbure soit nécessaire, est de faire les baux parfaitement droits en dessous, & de ne leur donner de rondeur qu'en dessus aux dépens du bois; & si on ne trouve pas des pièces assez fortes, rapporter en dessus une fourrure en chêne ou en sapin, pour rendre le bau moins pesant. Par ce moyen, le bau ne sçauroit s'allonger ni forcer le reste du navire.

Cet expédient seroit fort bon pour les vaisseaux qui n'auroient qu'un pont, & dont la hauteur de la calle seroit indifférente; mais il n'est pas applicable aux vaisseaux qui ont plusieurs ponts & gaillards, parce que la hauteur des entreponts se trouveroit diminuée au milieu, où elle est le plus nécessaire, de l'épaisseur de la fourrure ou de la rondeur qu'on donneroit aux baux. Ainsi, en leur donnant un pied de rondeur, il faut

droit augmenter de cette quantité la hauteur ordinaire de chaque pont ; ce qui augmenteroit considérablement la hauteur des œuvres-mortes , celles des batteries , & de tous les poids qui sont sur les ponts , & empêcheroit le vaisseau de porter la voile.

Puisqu'il ne paroît pas possible de supprimer entièrement la rondeur des *baux* dont on voit les inconvéniens , le constructeur ne sçauroit avoir trop d'attention à la diminuer le plus qu'il est possible , & à multiplier & augmenter la force des épontilles qui les soutiennent. Il faut aussi que les capitaines , ou officiers qui commandent les vaisseaux , ne fassent ôter ces épontilles que lorsqu'il est indispensablement nécessaire , & les fassent remettre tout de suite en place.

On ne sçauroit rien ajouter à la liaison que forment les entremises que l'on entaille à queue sur les bouts des *baux* , les fourrures des gouttières , gouttières , courbes des ponts , & courbes verticales , que l'on place sur le premier pont , entre chaque sabord , à la place des équillettes de porque. Toutes ces pièces entaillées à queue , à tenon & à crocs , & chevillées sur les ponts & sur les côtés du vaisseau , les unissent si étroitement ensemble qu'il est bien difficile de les séparer. Mais toutes ces liaisons ne sçauroient empêcher les *baux* de se redresser , ni le vaisseau de s'élargir. Il suffit pour cela que chaque joint ou couture des bordages du pont s'ouvrent un peu , & que les écarts des *baux* larguent ; sans qu'il soit nécessaire que les *baux* , entremises , fourrures de gouttières , courbes , &c. s'écartent du côté du vaisseau : ce qui n'arrive que très-rarement & vers la fin de leur durée , qui est plutôt terminée par la pourriture de ces pièces que par leur défunion.

Je ne vois donc rien de plus avantageux pour empêcher les *baux* de s'allonger & retenir les côtés du vaisseau , que les barrottins tels que je les ai disposés en parlant du tangage.

Ces barrottins , qui font placés entre chaque bau , (fig. 19^e.) & dont l'épaisseur est moins forte que celle desdits baux , pourroient être droits par dessous & avoir en dessus la courbure des baux , sans rien diminuer de la hauteur des entreponts ; & ces pièces , bien retenues contre le côté du vaisseau , entaillées dans l'entremise placée entre le bord & l'iloire du milieu , & entaillées aussi à queue & clouées sur ladite iloire du milieu , que j'ai mises à la place des arcabouts , enfin ces mêmes barrottins , entaillés & cloués dans les fourrures de goutières , goutières & iloires , formeroient autant de tirants qui ne sçauroient s'allonger , & s'opposeroient directement aux efforts que font les baux pour se redresser & le vaisseau pour s'ouvrir ; & feroient d'autant plus d'effet qu'on leur donneroit plus d'épaisseur & qu'on s'attacheroit à les bien retenir contre l'iloire du milieu & contre le bord , avec des équerres de fer ou pattes d'oie.

Tous ces barrottins seroient faits avec des pièces de bois droites , sans conséquence , dont on ne fait presque aucun usage dans les ports , & qui ne font qu'embarasser les chantiers & parcs aux bois : ceux des plus grands vaisseaux n'auroient , aux endroits les plus larges des ponts , que 18 à 20 pieds de longueur sur 8 à 9 pouces d'équarrissage.

Cette nouvelle disposition des barrottins , répétée à chaque pont & gaillard , & jointe à la nouvelle méthode de former la partie de l'avant , les membres des vaisseaux , & aux autres liaisons que je viens de détailler , & que l'on pratique ordinairement pour unir les ponts le plus étroitement qu'il est possible avec le côté du vaisseau , le mettroit en état de résister bien plus longtemps aux efforts du roulis , surtout si on diminue la rondeur qu'on est obligé de donner aux baux , en augmentant le nombre & la force des éponilles des calles & entreponts.

On peut aussi placer sur le second pont, à l'endroit des porte-aubans & entre les gaillards, quelques courbes de fer verticales, dont une branche chevillée sur le second pont, & l'autre contre le bord, résisteroit aux efforts que font les aubans pour attirer le côté du vaisseau que l'on pourroit fortifier encore, en bordant ces parties de l'œuvre morte, en dehors & en dedans, avec des bordages de chêne au lieu de sapin.

ARTICLE TROISIÈME

Des moyens d'augmenter ou diminuer la vivacité des mouvemens du roulis.

APRÈS avoir donné les moyens qui m'ont paru les plus applicables à la pratique de la construction, pour fortifier les vaisseaux contre les efforts du roulis, il me reste à examiner quels effets peuvent produire sur ces mouvemens la figure du vaisseau & la pesanteur & la distribution de la charge.

Sans entrer, à ce sujet, dans des détails qui ont été traités fort au long par M. Bouguer, je me contenterai d'établir pour principe ce qu'il a évidemment démontré ; que les mouvemens du roulis se font autour du centre de gravité du vaisseau, & que ces mouvemens doivent être plus ou moins vifs, suivant que ce centre de gravité fera plus ou moins bas. Or, comme la position du centre de gravité du vaisseau dépend & de la figure & de la pesanteur & distribution de sa charge ; examinons d'abord quelle est la figure du vaisseau dont le centre de gravité doit être le plus bas, & de quelle façon il faudroit le charger pour augmenter ou diminuer la vivacité des mouvemens du roulis.

De tous les vaisseaux que l'on pourroit comparer, celui qui, avec mêmes proportions & mêmes capacités,

auroit à même hauteur sa première ligne d'eau & sa ligne de flottaison plus ouvertes , seroit celui qui devroit avoir son centre de gravité plus bas par rapport à son métacentre , où se réunit la poussée verticale de l'eau , quand le navire s'incline ; & , par conséquent , celui qui auroit les mouvemens de roulis plus vifs. Si on lui donnoit la même quantité de lest , & si on distribuoit son chargement de la même façon qu'au vaisseau qui auroit sa première ligne d'eau & sa ligne de flottaison moins ouvertes , le premier fatigueroit davantage sa mâture & ses côtés ; ce qu'il faut soigneusement éviter.

Pour rendre les mouvemens du roulis de ce vaisseau moins vifs , il faudroit élever son centre de gravité en diminuant la quantité de son lest , ou en élevant & plaçant sur les ponts des parties lourdes qui se trouveroient dans la calle ; ce qui produiroit un effet tout contraire à ce qu'on éprouve fort souvent , lorsque , dans un gros temps ou autres occasions , on est obligé de faire descendre dans la calle l'artillerie ou autres poids qui se trouvent sur les ponts. On s'apperçoit sur le champ que les roulis deviennent plus vifs , & l'on est obligé de remettre bientôt les choses dans leur premier état.

Si cependant il n'étoit pas possible , le navire chargé , de diminuer la quantité de lest ni de déplacer les autres poids de la calle , ou si ce dérangement , en élevant le centre de gravité , empêchoit le vaisseau de porter la voile , on pourroit se servir d'un autre expédient qui n'auroit pas moins de succès , sans élever le centre de gravité.

Il suffiroit d'éloigner de ce centre , ou du milieu du vaisseau , toutes les choses lourdes qui se trouvent sur les faux ponts , sur les ponts & gaillards , & d'en rapprocher les plus légères ; parce que ces parties plus pesantes , ayant plus d'inertie , auroient d'autant plus

de force pour résister à la vivacité des mouvemens du roulis, qu'elles seroient appliquées à un bras de levier plus long.

On produiroit un effet tout contraire, si on rapprochoit du centre les parties lourdes en éloignant les plus légères. Ainsi, pour diminuer ou augmenter la vivacité des mouvemens du roulis, on peut élever ou baisser le centre de gravité du vaisseau, en élevant ou en baissant les poids de la calle & des entreponts; ou bien, sans baisser ni élever le centre de gravité, il suffit d'éloigner ou de rapprocher de ce centre, ou du milieu du vaisseau, les parties lourdes ou légères qui se trouvent dans la calle ou sur les ponts.

D'où on peut conclure, 1°. qu'un vaisseau qui a les mouvemens de roulis trop vifs, après avoir écarté les poids lourds & rapproché les plus légers du centre, doit avoir trop de poids dans la calle & que l'on peut, sans inconvénient, diminuer la quantité de son lest, ou bien lui donner du lest de pierre au lieu de lest de fer; parce que le lest de pierre, étant d'une pesanteur spécifique moins forte, tient plus de volume dans la calle: ce qui élève son poids, &, par conséquent, le centre de gravité du vaisseau.

2°. Si un vaisseau, après avoir rapproché de son centre les poids lourds & écarté les plus légers, avoit des mouvemens de roulis trop lents & restoit trop longtemps incliné, ou, ce qui revient au même, s'il ne portoit pas assez bien la voile; ce vaisseau n'auroit pas assez de parties lourdes dans sa calle, & il faudroit augmenter la quantité de son lest, ou bien lui donner du lest de fer à la place du lest de pierre; ce qui baisseroit son centre de gravité.

3°. Un vaisseau qui, toutes choses placées également, a les mouvemens de roulis plus vifs, doit mieux porter la voile; & comme la rentrée des vaisseaux, en rapprochant toutes les parties du centre, doit ac-

caſionner des mouvemens de roulis plus vifs , on peut conclure qu'un vaiſſeau qui a plus de rentrée qu'un autre , toutes choſes égales d'ailleurs , doit mieux porter la voile ; & que , du plus ou moins de vivacité des roulis d'un vaiſſeau , on pourroit déduire la moindre quantité de leſt & la plus grande hauteur de mâture qu'on pourroit lui donner ſans riſques : mais il faudroit que cette opération fût dirigée par une perſonne qui joignît une longue pratique à une ſaine théorie.

C O N C L U S I O N .

ON peut conclure de tout ce que je viens de dire au ſujet du tangage & du roulis.

1°. Pour mettre le vaiſſeau en état de réſiſter plus longtems aux efforts du tangage , il faut diminuer , autant qu'il eſt poſſible , le nombre des parties qui peuvent s'allonger dans le ſens de ſa longueur , en ſuivant les nouvelles méthodes de former la partie de l'avant , les membres & les ponts ; rendre les ponts ; ferre - beauquières , goutières , illoires , vaigres , préceintes , &c. les plus droites , en tout ſens , pour augmenter leur réſiſtance & leur difficulté à céder à l'allongement du navire ; ajuſter , comme je l'ai dit , les écarts des quilles , contrequilles , carlingues , clefs ou rempliffages , entre les membres , illoires renverſées & étances de la calle , de façon que toutes ces pièces s'oppoſent avec plus de force aux efforts que le vaiſſeau fait pour ſe recourber & ſe raccourcir par en bas , en s'allongeant par en haut ; avoir une attention ſingulière , dans la conſtruction & dans l'arrimage , de rendre le poids de chaque partie du vaiſſeau le plus proportionnel au volume d'eau qu'elle déplace.

2°. Pour mettre le vaiſſeau en état de réſiſter plus longtems

longtemps aux efforts du roulis , il faut augmenter la force de ses côtés , en faisant la partie de l'avant , les membres & les ponts comme pour le tangage ; rendre les baux les plus droits dans le sens de la largeur du vaisseau , ainsi que toutes les autres pièces qui peuvent s'allonger dans ce sens ; fortifier les côtés de l'œuvre morte au-dessus du second pont , vis-à-vis des porte-aubans , par des courbes verticales & bordages de chêne ; enfin , avoir attention , dans l'arrimage , d'éloigner du centre de gravité , ou du milieu du vaisseau , le lest de fer ou autres parties lourdes qui se trouvent dans les calles ou sur les ponts.

En résumant les moyens que je viens de détailler , on voit 1°. que les nouvelles méthodes pour former les différentes parties du vaisseau , qui s'opposent le plus directement aux efforts du tangage , conviennent également pour résister aux efforts du roulis.

2°. Que la différente forme que je donne à ces parties , ne sçauroit préjudicier aux autres qualités du vaisseau , puisqu'elle ne change point la figure de sa carène , & qu'elle n'augmente pas la pesanteur de sa coque.

3°. Au contraire , cette nouvelle forme doit contribuer à conserver au vaisseau ses bonnes qualités , en lui faisant garder plus longtemps sa première figure. L'expérience nous apprend que les vaisseaux se comportent toujours mieux dans leurs premières campagnes que dans les dernières , où l'arc & la plus grande largeur qu'ils ont acquis ont changé la figure de leur ligne d'eau & augmenté la résistance de la proue.

4°. Enfin cette nouvelle méthode de former l'avant , les membres & les ponts des vaisseaux , est beaucoup plus économique dans la pratique de la construction , & réunit les autres avantages que j'ai détaillés.

Ainsi les moyens que je propose pour procurer aux différentes parties du vaisseau la solidité nécessaire

pour résister aux efforts du roulis & du tangage, conviennent à la pratique de la construction, & ne sçauroient préjudicier aux autres bonnes qualités du vaisseau.

*NOUVELLE FAÇON DE TERMINER L'AVANT
des vaisseaux, plus solide contre les mouvemens de tangage, moins sujette à pourrir, plus susceptible de radoub,
& plus géométrique que celle dont on se sert.*

LA partie du vaisseau comprise entre le mât de misaine & l'étrave est, sans contredit, celle qui fatigue le plus dans les mouvemens du tangage, tant par les efforts qu'elle reçoit de la part du fluide, que par les poids qu'elle porte.

Cette partie a toujours été terminée depuis le couple du coltis *C* jusqu'à l'étrave, par des allonges d'écubier *A* (*fig. 1^{ere}, 3^e & 5^e*), ou des pièces de bois de bout, presque parallèles à l'étrave, mises à côté l'une de l'autre. Elles n'ont ni varangues ni genoux, & ne sont liées les unes aux autres que par des chevilles de fer rondes ou quarrées.

Tout le massif qui porte à faux sur l'étrave ne peut faire corps & être lié avec le reste du vaisseau, que par les bordages extérieurs & intérieurs, qui, à cause de la rondeur de l'avant & des écarts qu'il faut croiser, sont fort difficiles à trouver un peu longs.

Les guirlandes *B* (*fig. 3^e*), que l'on met en dedans; n'ont pas les branches assez longues pour dépasser le couple du coltis & croiser les autres couples: aussi voit-on que cette partie se détache sans peine du reste du vaisseau, qui a toujours plus d'arc depuis le mât de misaine jusqu'à l'étrave, que dans tout le reste de sa longueur.

On est toujours obligé, pour donner aux allonges d'écubier la longueur, la tournure, l'équerrage & l'é-

chantillon nécessaire, d'employer des pièces de fortes dimensions, qui sont ordinairement sur le retour, & de découvrir le cœur du bois, causes prochaines de pourriture.

Ces pièces sont posées de façon que l'eau, qui submerge presque toujours l'avant, les pénètre de haut en bas. Enfin le peu d'air qui est entr'elles, & le frottement continuel causé par le tangage & leur peu de liaison, font qu'elles se trouvent ordinairement pourries, tandis que le reste du vaisseau est encore en bon état.

L'on ne sçauroit changer, à flot & sans beaucoup de difficulté, une allonge d'écubier qui se trouve pourrie, puisque ces pièces vont du haut en bas. On ne peut les ôter & les remplacer, sans dévaigrer ou déborder entièrement l'avant, ôter les ferres - bauquières & les guirlandes, dont les chevilles vont du dehors au dedans: ce qui ne peut se faire sans beaucoup de frais & sans délier le vaisseau.

La figure du vaisseau, terminée par des allonges d'écubier, ne peut être exactement la même que le constructeur se le propose. On est obligé de finir cette partie sur les lisses en place, qui ont, dans cet endroit, beaucoup de rondeur. Elles sont sujettes à se déjetter; elles cèdent au poids des pièces qu'elles portent. Un acore plus forcé d'un côté que de l'autre donne une différence. L'intervalle entre les lisses est indéterminé & dépend du charpentier: de sorte qu'on ne peut pas même assurer que les deux côtés soient parfaitement égaux.

On faisoit autrefois l'arrière du vaisseau comme l'avant; c'est-à-dire que l'on mettoit à l'arrière des pièces de bois de bout, presque parallèles à l'étambot, qui descendoient depuis la lisse d'ourdy jusqu'à la lisse des façons, & venoient jusqu'à l'estain qui étoit parallèle aux autres couples.

L'arrière, ainsi terminé, étoit presque aussitôt pourri & sujet aux mêmes inconvéniens que l'avant. Il y a même eu des arrières, faits de cette façon, qui ont été enfoncés par un coup de mer.

On est parvenu peu à peu à rectifier cette partie. On a substitué, aux pièces parallèles à l'étambot, des pièces parallèles à la quille (*fig. 7^e & 8^e*), en forme de varangues accolées & fourcats, dont les extrémités sont entaillées & chevillées avec l'estain & le milieu avec l'étambot.

On a dévoyé l'estain, pour lui donner plus de force & diminuer son équerrage. On a porté son pied en avant, pour faire en sorte que les bordages extérieurs & intérieurs prissent plus de parties de l'arcasse qui se trouve ainsi prolongée, & dont toutes les pièces font un tout que l'on lie aisément & solidement avec le reste du vaisseau par la courbe d'étambot, le marsouin de l'arrière, les courbes d'arcasse & d'écuffon qui croisent les barres, l'estain & une partie des couples qui font en avant.

Tout le monde convient que cette nouvelle façon de faire l'arrière des vaisseaux est beaucoup plus solide, moins sujette à pourrir, & plus susceptible de radoub que l'ancienne.

Je propose donc de faire l'avant comme on fait actuellement l'arrière. L'étrave représenteroit l'étambot; le couple du coltis dévoyé seroit l'estain; la partie comprise entre ce couple & l'étrave seroit garnie de barres *B* (*fig. 2^e, 4^e & 6^e*), depuis le dessous du beau-pré jusqu'à la lisse des façons.

Comme les bordages de l'avant ne relèvent pas autant que ceux de l'arrière, les barres ne seroient pas parallèles à la quille; mais elles seroient un angle presque droit avec les lisses *L* (*fig. 6^e*) qui ont la même pente que les bordages, pour que ces mêmes bordages prissent plus de parties & plus de barres à la fois.

Afin qu'aucun bout des bordages qui viennent sur la rablure ne portât en maille , on mettroit seulement, *à bâbord & tribord*, une allonge d'écubier *A*, qui entailleroit dans toutes les barres & seroit chevillée contre l'étrave, (*fig. 2^e*).

Tous les bouts des barres entailleroient & seroient chevillés au couple du coltis , & le milieu à la contr'étrave , que l'on feroit un peu plus forte pour qu'elle ne fût pas affoiblie par ces entailles.

Les écubiers seroient entre deux barres , où l'on mettroit une fourrure dans laquelle on les perceroit. On auroit , si on vouloit , la facilité d'y ajuster un virolet ou rouet pour diminuer le frottement des cables.

Les barres seroient en partie faites de deux ou de trois pièces (*fig. 2^e, 4^e & 6^e*), suivant que le bois le permettroit, ayant attention de croiser les écarts. Quand même on voudroit les faire toutes d'une seule pièce , elles ne seroient pas plus difficiles à trouver , & leur nombre n'excéderoit pas celui des guirlandes qu'on est obligé de mettre sous le beaupré , sous les écubiers , aux premiers & seconds ponts , entre le premier & le faux pont , au faux pont , & depuis le faux pont jusqu'à la carlingue du mât de mizaine.

On épargneroit , à chaque vaisseau , dix-huit ou vingt pièces propres pour étraves ou demi-baux , que l'on employe en allonges d'écubier , & l'avant seroit d'autant plus léger.

Cette nouvelle façon de faire l'avant ne seroit sujette à aucun des inconvéniens de l'ancienne. L'étrave , la contr'étrave , les barres , le couple du coltis , chevillés & entailles ensemble , formeroient un tout qu'il seroit plus aisé de lier avec le reste du vaisseau que l'arrière , par le marfouin de l'avant , & les ferre-bauquières , auxquelles on donneroit , dans cette partie , un peu plus d'épaisseur.

On mettroit au-dessous du premier pont & du faux-

pont des pièces *E* (*fig. 4^e*) en écharpe , qui , partant de la contr'étrave , croiseroient les barres , le couple du coltis & partie des couples qui sont en arrière. Ces pièces seroient presque droites & de peu de conséquence.

Les barres seroient faites d'un bois d'échantillon ordinaire , qui seroit encore dans sa vigueur : l'équerrage étant moins fort n'en découvreroit pas le cœur.

L'eau qui tombe sur le coltis ne les pénétreroit pas dans toute leur longueur , & ne seroit que glisser sur leur surface supérieure que l'on pourroit enduire de quelque mastic.

En pratiquant de haut en bas , bâbord & tribord ; le long de l'étrave , un canal ou anguillière entre les barres & le bordage , on seroit rendre l'eau à la pompe.

Les mailles , ou vuide que l'on laisseroit entre les barres , leur donneroient de l'air & empêcheroient le frottement.

On pourroit toujours aisément changer à flot , sans beaucoup de frais & sans délier le vaisseau , une barre qui se trouveroit pourrie ; puisqu'elle ne seroit recouverte que par trois ou quatre virures de vaigres , que l'on ôteroit & remplaceroit très-facilement.

La figure du vaisseau dans cette partie , qui est la plus essentielle , seroit exactement la même que le constructeur se le proposeroit , puisque la figure des barres & leur coupe seroit déterminée sur son plan , & exécutée sur ses gabaris ; & la pratique de la construction seroit poussée à un point de perfection qui ne laisseroit plus rien à desirer.



NOUVELLE FAÇON DE FORMER LES MEMBRES ou couples des vaisseaux pour les mettre en état de résister plus longtemps aux efforts du tangage & du roulis, diminuer les progrès de la pourriture, & la dépense de leur construction par l'économie dans l'emploi des bois, supprimer les porques, & mettre les vaisseaux à l'abri du canon sans augmenter leur pesanteur.

LA nouvelle façon de former la partie de l'avant & l'arrière du vaisseau ne laissant plus rien à désirer, j'ai travaillé sur les parties intermédiaires ou le corps du vaisseau.

Ce corps ou squelette est composé de membres ou côtes (*fig. 9^e, 10^e & 11^e*) qui s'élèvent en forme de croissants sur la quille, que l'on peut comparer à l'épine du dos.

Ces membres sont formés de deux rangs de pièces de bois, au nombre de onze à quinze, mises bout à bout & accouplées de façon que le milieu des unes répond aux extrémités des autres, pour faire un tout & croiser les écarts. On les appelle *couples*, parce qu'ils sont doubles de l'avant à l'arrière; ou *coupes*, parce que chacun d'eux représente la figure qu'auroit le vaisseau coupé dans son endroit. Tout cet assemblage n'est lié que par des chevilles de fer quarré, qui ne sont rivées d'aucun côté.

Le couple ainsi formé ne l'est pas de la façon la plus avantageuse contre les efforts qu'il doit soutenir. Les plus violens sont de l'avant à l'arrière, ou dans le sens de sa largeur, quand le vaisseau tangue ou échoue; & de bâbord à tribord, ou dans le sens de son épaisseur, quand le vaisseau roule, que les canons sont à la ferre, ou dans le temps du combat.

A tous ces efforts, les pièces qui croisent les écarts

ne résistent que très-foiblement, & ne font aucun effet, dès que les chevilles qui les lient ont le moindre jeu ; ce qui arrive même avant que l'on arme le vaisseau, en montant ses couples, lorsque le bois vient à sécher, ou en le lançant à l'eau.

Les chevilles ou goujons, d'où dépend la seule liaison des couples, & par conséquent, de tout le vaisseau, une fois larguées, les pièces & les écarts se désunissent, le vaisseau arque, & l'on voit souvent, dans les mouvemens du roulis, le vaigrage ou bordage inférieur s'ouvrir à passer les doigts dans les joints.

Les vaisseaux dans cet état, on imagina, dans l'ancienne marine, de les relier par des *porques* ou des couples plus forts, mis au-dessus du vaigrage de façon qu'ils croisent les écarts des couples sur lesquels ils sont appliqués & chevillés.

Les porques font sur le côté du vaisseau le même effet que les contreforts sur les murs ; mais leur force seroit bien plus considérable, si elle étoit appliquée sur tous les couples. On a si fort senti la nécessité des porques, qu'on en met, depuis quelque temps, à tous les vaisseaux neufs dès leur construction : mais on ne peut en mettre qu'une certaine quantité, & tout au plus, une entre chaque sabord. Il reste ordinairement dix pieds d'intervalle d'une porque à l'autre, & c'est dans cet endroit, qui se trouve le plus foible, que se fait tout l'effort du canon.

On ne sçauroit multiplier les porques, sans rencontrer les sabords de la première batterie qui les couperoient, sans rendre les vaisseaux extrêmement lourds, & sans couper les membres par une infinité de chevilles qui traversent le vaisseau de part en part, & causent des voyes d'eau que l'on ne peut étancher & qui deviennent considérables dans les vieux vaisseaux. Les porques consomment des pièces de bois d'un fort échantillon, très-difficiles à trouver, & causent tant
de

de difficulté dans les radoubs & dans l'arrimage , qu'on a plusieurs fois , mais inutilement , essayé de les supprimer.

La difficulté de changer le vaigrage , sur lequel les porques sont appliquées , fait qu'on ne peut employer , pour vaigrer les vaisseaux , que les bois les plus vigoureux , les plus sains & les moins sujets à pourrir. Cette précaution deviendroit inutile en supprimant les porques. On pourroit se servir avec succès des bois de chêne du nord , que l'on changeroit aisément lorsqu'ils viendroient à pourrir , & dont la longueur & la largeur seroient bien avantageuses contre les efforts du tangage & l'arc du vaisseau.

La corruption des bois est un autre inconvénient qui naît de l'assemblage des couples faits comme à l'ordinaire (*fig. 9^e , 10^e & 11^e*).

On travaille avec soin les deux surfaces des pièces qui doivent , pour ainsi dire , se coller ensemble. L'air n'y passe jamais , surtout lorsque le joint est recouvert par les bordages extérieurs & intérieurs. La sève du bois , que l'on employe presque toujours verd , ne trouvant aucune issue , y fermente , & le frottement continuel , causé par la désunion des pièces , accélère la pourriture que l'on est toujours sûr de trouver en cet endroit , quoique la partie du couple , qui est rafraîchie par le peu d'air qui est dans les mailles , paroisse encore en bon état.

Les différens radoubs , que l'on fait aux vaisseaux , m'ont toujours convaincu que toutes les parties qui sont entaillées , ou collées de façon que l'air ne peut pas les rafraîchir , sont toujours les premières pourries. Cette vérité est si fort connue de tous les constructeurs , qu'on a fait des vaisseaux , en Angleterre & en France , dont les deux rangs de pièces qui forment les couples étoient séparées par des fourrures ou taquets de quatre à six pouces d'épaisseur , que l'on

plaçoit à l'endroit des chevilles ; mais , ces taquets ou fourrures venant à sécher ou à fendre , les chevilles se trouvent dégarnies , les liaisons interrompues , & le vaisseau en peu de temps hors d'état de servir.

Mon projet est plus simple & plus facile à exécuter. Ce n'est pas la largeur qui fait la force du couple , mais l'épaisseur & la façon dont il est lié. Le mien , (*fig. 12^e. 13^e & 14^e*) au lieu d'être double de l'avant à l'arrière , le feroit du dehors au dedans ou de bâbord à tribord , & auroit la moitié plus d'épaisseur que l'autre. En diminuant l'épaisseur du bout des pièces qui forment les écarts , on pourroit augmenter d'autant la courbure de ces pièces. Celles qui les croiseroient fourniroient au défaut d'épaisseur , & auroient , au moins aux endroits les plus foibles , autant d'épaisseur que les anciens couples. Les différens angles , que les pièces feroient entr'elles , formeroient des arrêtes qui augmenteroient la liaison & diminueroient le frottement ; & on pourroit se servir de pièces presque droites & d'un échantillon ordinaire , pour former celles qui ont le plus de courbure.

Ce couple ainsi formé s'opposeroit directement aux efforts qu'il doit soutenir. Il ne sçauroit se désunir ni s'allonger dans les mouvemens du tangage , & ses écarts ne sçauroient larguer dans les mouvemens du roulis , sans que les pièces qui les croiseroient ne cassassent. Le couple intérieur , ou le rang de pièces du dedans , feroit le même effet qu'une porque , & chaque couple auroit la sienne ; ainsi il seroit inutile d'en mettre sur le vaigrage : ce qui rendroit les radoubs moins difficiles & moins coûteux , l'arrimage beaucoup plus aisé , la calle plus spacieuse & plus commode.

Le nombre des couples augmenteroit d'un tiers ; ainsi que celui des mailles ; & le vaisseau seroit néanmoins plus léger , par la diminution de l'échantillon & la suppression des porques. Il coûteroit beaucoup moins

cher ; son côté seroit bien plus fort , & il n'y auroit pas de vaisseau de cinquante canons qui ne se trouvât à l'abri du boulet , puisque ses membres auroient à la flottaison treize à quatorze pouces d'épaisseur , tandis que ceux du *Tonnant* , qui n'ont qu'un pied , n'ont pas pu être percés.

Tous les couples ainsi liés , & chacun isolé , seroient rafraîchis , de chaque côté , par l'air qui seroit entre les mailles. La plus grande distance qu'il y auroit entre le bordage & le vaigrage , en augmenteroit la quantité. L'assemblage du couple se trouveroit au milieu de la maille , & ne seroit recouvert d'aucun côté ; ce qui permettroit un libre cours à la dessudation de la sève , qui , n'étant plus renfermée , n'occasionneroit pas la pourriture.

On pourroit pratiquer à chaque couple , de distance en distance , aux endroits où il n'y auroit point de chevilles , des entailles à jour , pour laisser passer & renouveler l'air de maille en maille , de l'avant à l'arrière ; ce qui seroit très-avantageux pour empêcher le progrès des champignons.

Les bordages s'ajusteroient mieux contre les membres , qui , étant moins larges , prendroient mieux la rondeur du vaisseau , & n'auroient pas besoin de si forts équerrages , surtout en avant & en arrière. On est obligé d'employer , dans ces endroits , des pièces de fortes dimensions , que l'on coupe en sifflet en ne laissant que le cœur du bois , qui est la partie la plus susceptible de pourriture.

L'ouvrage du perceur seroit plus solide & plus aisé. Tous les clous & chevilles qui se trouvent dans le joint des couples ordinaires , tendent à les défunir & ne font aucun effet. Celles qui les lient ne font point rivées , & ne sçauroient l'être dans les couples de remplissage , par le peu de distance qu'il y a entre les mailles. On est même obligé , pour pouvoir placer ces chevilles ,

de percer le couple diagonalement ; ce qui fait une très-mauvaise liaison , en coupant le fil du bois. Les chevilles que l'on met à tous les bouts des bordages , préceintes , courbes de pont , &c. percent & affoiblissent les couples sans les lier. La même pièce est percée en dehors par les clous du bordage , & en dedans par ceux du vaigrage ; de sorte qu'il ne lui reste plus de force , & qu'elle casse au moindre effort.

Aucun de ces inconvéniens ne se rencontreroit dans les nouveaux couples. Les clous & chevilles ne sçauroient se trouver dans les joints. Celles qui les lient , étant percées du dehors au dedans , seroient rivées sans difficulté sur les membres & sur les remplissages , & pourroient se repousser de même. Leur direction ne couperoit pas le fil du bois , & s'opposeroit aux efforts qu'il doit soutenir. Les chevilles que l'on met à chaque bout de bordages , courbes , &c. lieroient les membres qu'elles perceroient. Une même cheville , par exemple , pourroit lier , en même temps , le bordage , les deux pièces du membre , le vaigrage & une des branches d'une courbe de pont. Le membre intérieur ne seroit percé que par les clous du vaigrage , & celui du dehors par ceux du bordage ; ce qui donneroit la facilité de multiplier ces clous , & d'augmenter la liaison.

On auroit attention que les écarts des bordages & des préceintes vinssent , comme à l'ordinaire , précisément au milieu des membres , pour y être cloués & chevillés avec la même facilité qu'on l'a pratiqué aux vaisseaux dont les couples sont séparés par des taquets ou fourrures.

Les avantages que les nouvelles méthodes de former l'avant & les membres des vaisseaux , joignent à ceux de la plus grande solidité pour résister aux mouvemens du tangage & du roulis , m'ont engagé à détacher ces deux méthodes du corps de l'ouvrage , pour pouvoir

les détailler plus au long, & faire mieux sentir la nécessité & l'utilité de leur application à la pratique de la construction des vaisseaux.

EXPLICATION DES FIGURES.

La figure première représente le plan d'élévation de la partie de l'avant d'un vaisseau, vue de face par dehors & faite suivant l'usage ordinaire.

La figure seconde représente le même plan, fait suivant la nouvelle méthode.

La figure troisième représente le même plan d'élévation coupé dans le sens de la longueur du vaisseau, & vu de côté pour découvrir l'intérieur de la partie de l'avant, faite suivant l'usage ordinaire.

La figure quatrième représente le même plan, fait suivant la nouvelle méthode.

La figure cinquième représente le plan d'élévation de l'avant du vaisseau, vu de côté par dehors, & fait suivant l'usage ordinaire avec les lisses *L*.

La figure sixième représente le même plan, suivant la nouvelle méthode.

La figure septième représente le plan d'élévation de la partie de l'arrière ou de l'arcaste du vaisseau, vue de côté ou de profil.

La figure huitième représente le même plan, vu de face ou par derrière.

La figure neuvième représente le plan d'élévation d'une partie du vaisseau, garnie de membres *A*, vu de côté ou de profil pour montrer la façon dont les deux rangs de pièces *B . C*, sont ajustées dans le sens de la longueur du vaisseau, avec les jours ou mailles qui restent ordinairement entre les membres.

La figure dixième représente le plan d'élévation d'un membre *A*, vu de face avec sa porque *P*, bordages &

& vaigrages, pour faire voir les épaisseurs de toutes les pièces, & de quelle façon elles sont ajustées dans le sens de la largeur du vaisseau. La pièce *B* a été détachée pour découvrir l'écart *C* du rang de pièces qui sont en dessous.

La figure onzième représente le même couple, vu de profil avec la même pièce *B* détachée.

Ces trois figures, neuvième, dixième & onzième, représentent les différens plans des membres ou couples, fait suivant l'usage ordinaire.

Les figures douzième, treizième & quatorzième, représentent les mêmes plans des membres ou couples, faits suivant la nouvelle méthode.

La figure quinzième représente le plan d'élévation d'une partie du côté du vaisseau vue par dehors, garnie de membres *A*, faits suivant la nouvelle méthode avec des pièces ou fourrures *C*, en remplissages dans les mailles, entaillées à queue dans les membres, pour les raffermir & les empêcher de s'écarter les uns des autres. Les feuillots *S*, des sabords *L* sont aussi entaillés à queue. On voit aussi, dans la même figure, la quille *Q*, la contre-quille *R*, la carlingue *K* avec leurs écarts *E*, faits suivant la nouvelle méthode.

La figure seizième représente le plan d'une partie du premier pont d'un vaisseau, depuis l'étambot jusqu'au mât d'artimon, où l'on voit la disposition des baux *A*, archoutans *B*, barrottins *C*, fourrures de goutières *L*, goutières *M*, illoires *N*, barre de pont *P*, membres *Q*, mailles ou jours entre les membres *O*. Ce pont est fait suivant l'usage ordinaire.

La figure dix-septième représente le plan horizontal du dessus d'un bau *A*, tels qu'on les voit sur le plan du pont, *figure seizième*. Ce bau est fait de deux pièces *B*, *C*, ajustées suivant l'usage ordinaire.

ET SUR LE TANGAGE D'UN VAISSEAU. 31

Les figures dix-huitième & dix-neuvième, représentent les mêmes plans d'un pont & d'un bau, fait de deux pièces, suivant la nouvelle méthode.





figure 1^{re}

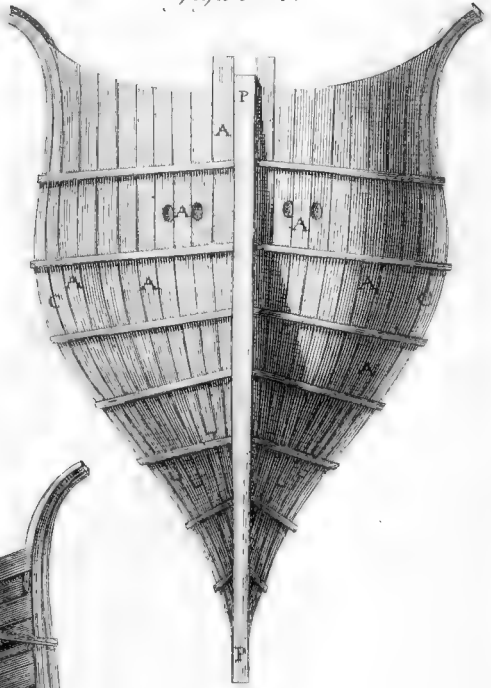


fig 2

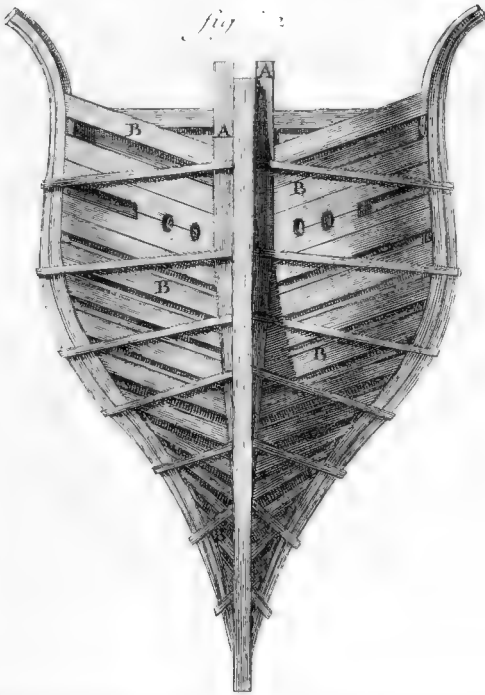




fig 3

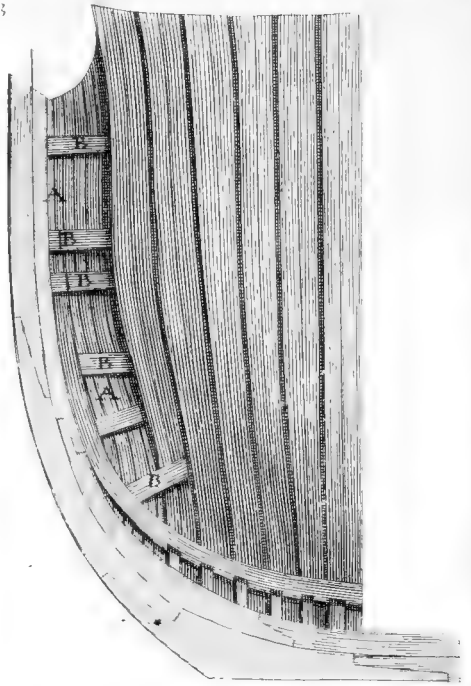
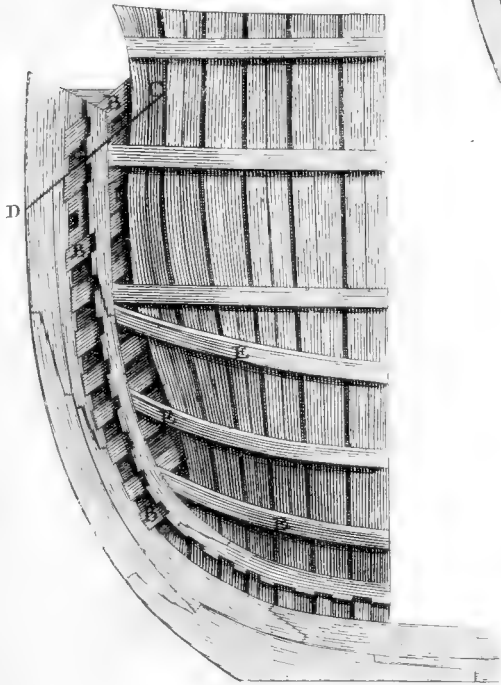
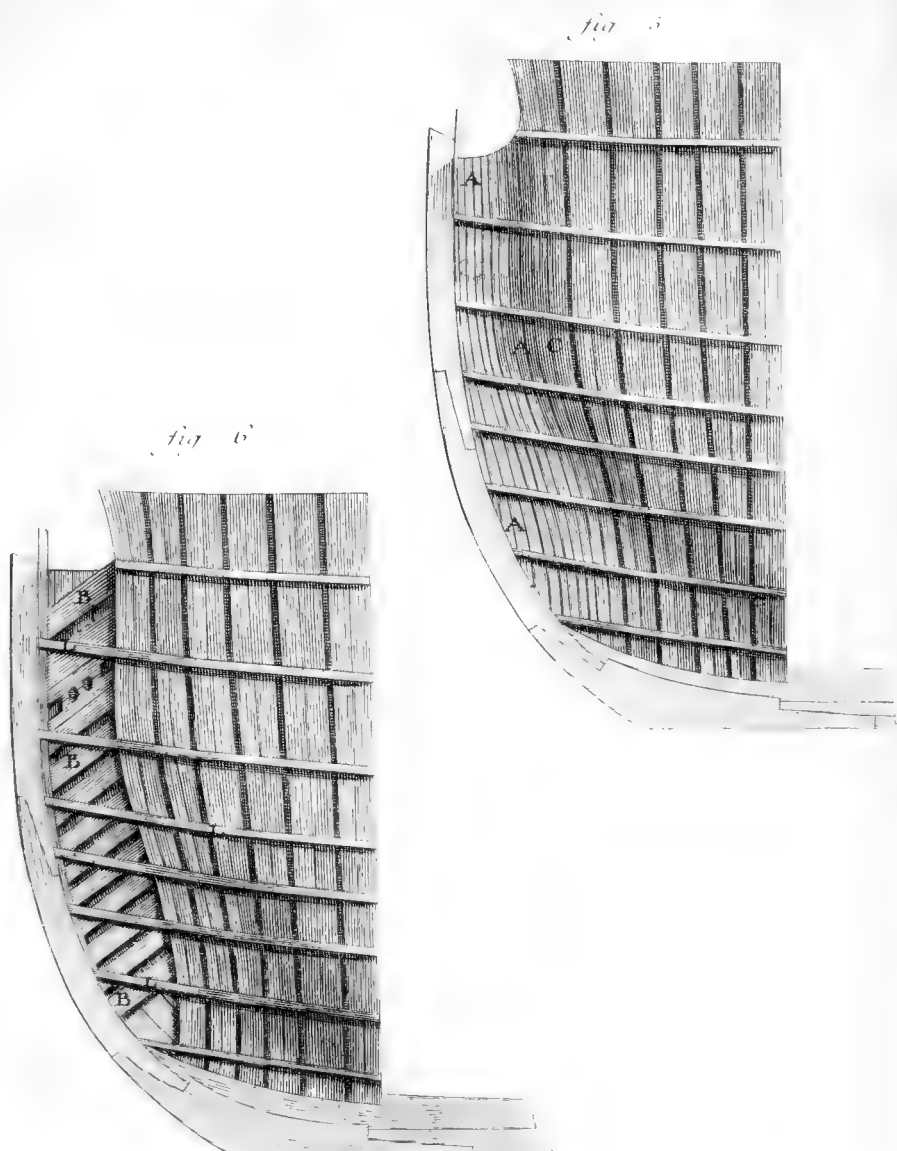


fig 4

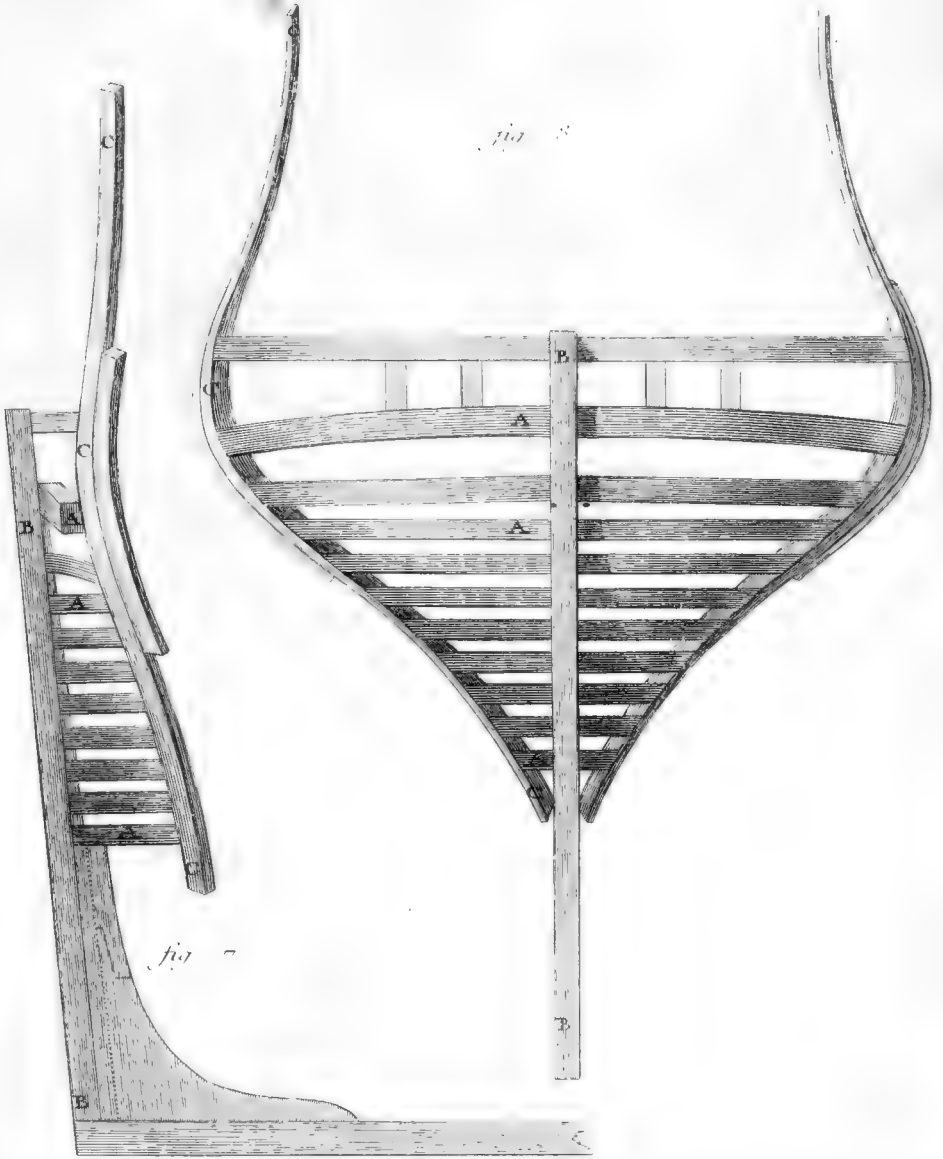


Coupe suivant la ligne CP











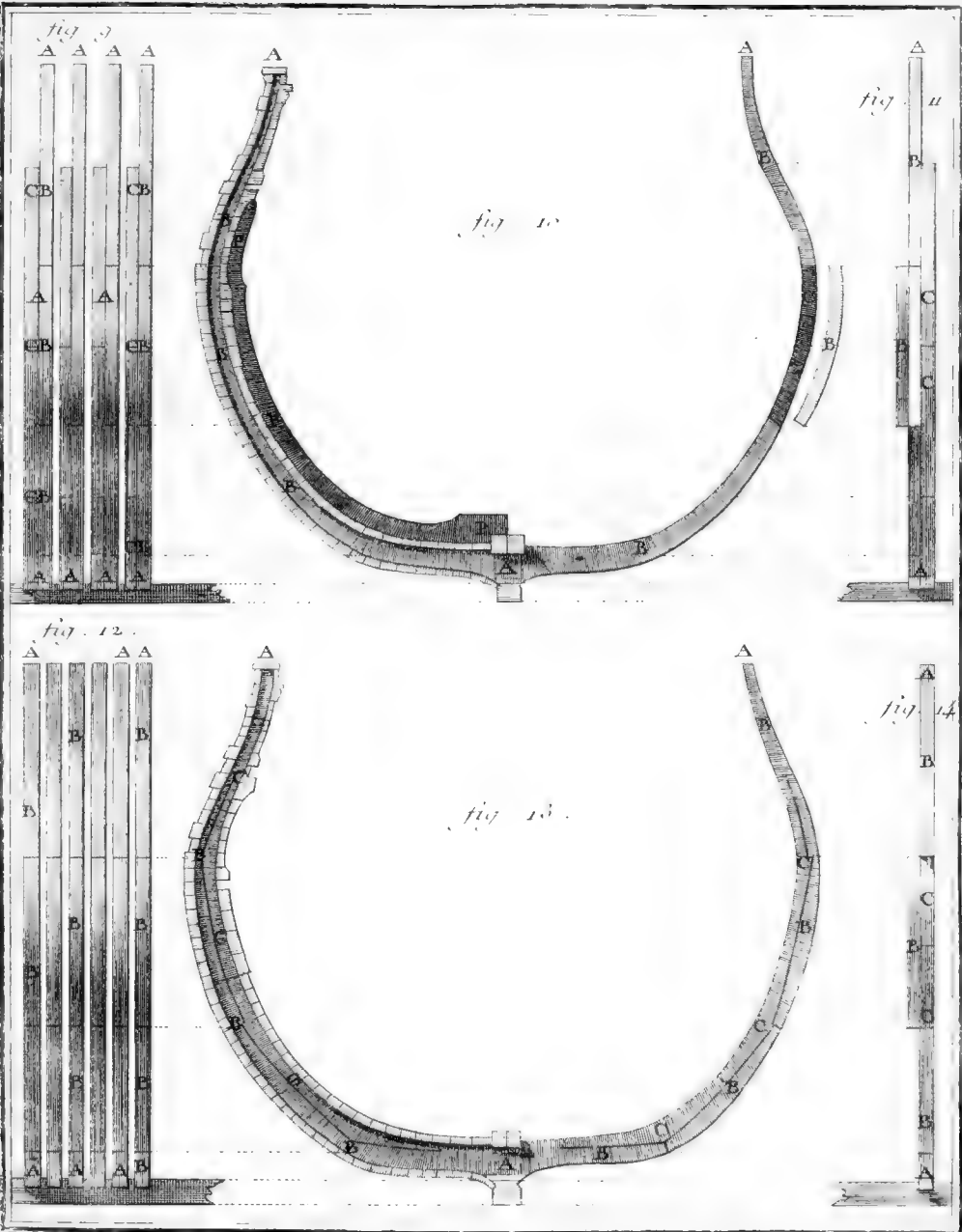




fig. 16.

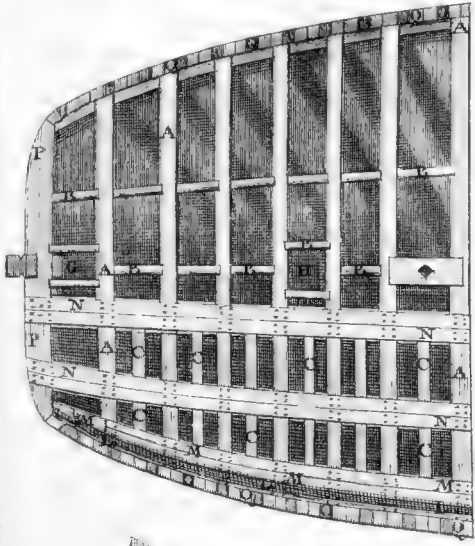


fig. 17.

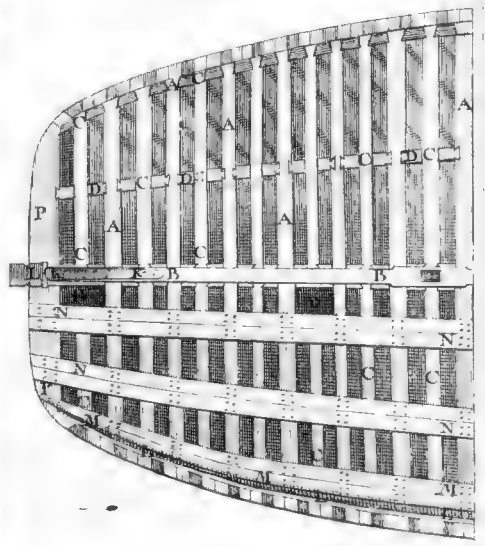


fig. 18.



fig. 19.

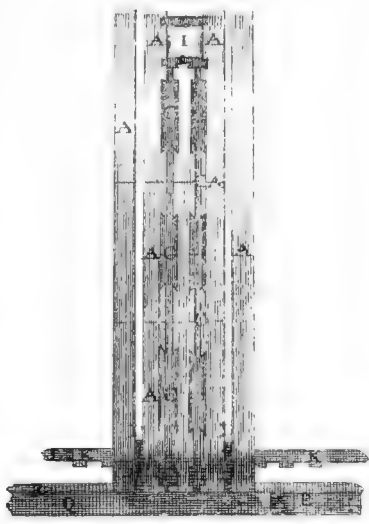


fig.





M É M O I R E

QUI A REMPORTÉ LE PRIX
EXTRAORDINAIREMENT PROPOSÉ
PAR

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

POUR L'ANNÉE 1760.

*Quels sont les moyens les plus propres à porter la perfection
& l'économie dans les Verreries de France?*

Par M. BOSCH D'ANTIC, docteur en Médecine &
correspondant de l'Académie Royale des Sciences.



A P A R I S,

Chez DURAND, Libraire, rue du Foin, la première porte cochère à droite,
en entrant par la rue S. Jacques.

M. D C C. L X I.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

E R R A T A.

PAGE 8, ligne 11, forcés baïffer, lisez forcés de baïffer.

14,	31, un feu,	un froid.
19,	36, patelle,	palette.
20,	29, l'attempage,	l'atrempage.
<i>ibid.</i>	31, grosse,	grasse.
40,	35, de smalte,	du smalte.
48.	34, & leur	<i>ôtez</i> &.



M É M O I R E

SUR LE PRIX PROPOSÉ

PAR L'ACADEMIE ROYALE

D E S S C I E N C E S .

*Quels sont les moyens les plus propres à porter l'économie
& la perfection dans les Verreries de France ?*

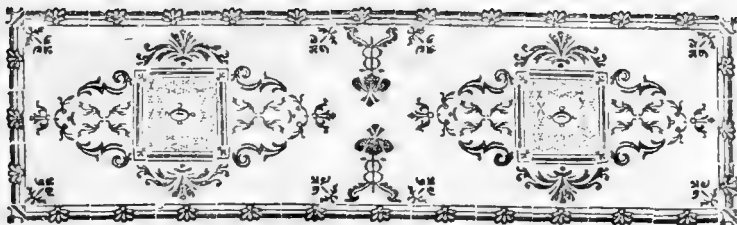
MEMORANDUM

FOR THE RECORD

DATE: [illegible]

BY: [illegible]

[illegible]



M É M O I R E

SUR le prix proposé par l'Académie Royale
des Sciences : *Quels sont les moyens les plus
propres à porter l'économie & la perfection dans
les Verreries de France?*

*Non fingendum, aut excogitandum, sed inveniendum, quid
natura faciat aut ferat. BACON.*

L'ART de la verrerie est un des plus importans dont la chymie ait enrichi les hommes. Il nous fournit les vases les plus commodes & les plus agréables. Sans nous priver des charmes de la lumière, il nous donne les moyens de nous mettre à couvert des injures de l'air. La conservation d'une infinité de liqueurs précieuses lui est uniquement due. C'est par son secours que nous remédions aux défauts de notre vue, ou que nous réparons les ravages que les années manquent rarement d'y produire. D'où nos appartemens tirent-ils leurs plus belles, leurs plus nobles décorations ? c'est de l'art de la verrerie. Peu de sciences, peu d'arts peuvent se passer de son concours. Que ne lui doivent pas l'histoire naturelle, l'astronomie, la physique expérimentale, & sur-tout la chymie !

Un art, dont l'utilité est si étendue & les phénomènes

si propres à piquer la curiosité , devoit avoir déjà fait les plus grands progrès. Cette conséquence paroît naturelle ; mais il est certain que l'art de la verrerie est très-imparfait. Dès son berceau , les chymistes l'ont abandonné , pour ainsi dire , à des gens incapables d'en pénétrer la nature , d'en développer les principes, d'en connoître toutes les ressources. Il a dégénéré en routine aveugle. Un petit nombre de sçavans ont fait quelques efforts pour l'en tirer. Persuadés que la nature se montre imparfaitement dans les laboratoires ordinaires , ils se sont donné la peine d'aller en étudier les moyens dans les verreries.

Agricola (1) est, je pense, le premier qui ait écrit avec quelque détail sur cet art : mais ce qu'il dit sur la matière dont se fait le verre, sur les fourneaux où il se fait, & sur la manière dont on le fait, n'est qu'une simple description de ce qu'il avoit vu pratiquer dans les verreries de son temps. On ne trouve, dans le douzième livre de son traité de *métallique*, presque aucun principe certain, aucune observation judicieuse, aucune vue utile. Il y a même des erreurs grossières que nous aurons occasion de relever ; entre autres que le *sel gemme*, combiné avec le sable, produit du verre.

Néri est regardé comme l'oracle de l'art de la verrerie. Il ne dit cependant pas un mot des fourneaux, ni des creusets, qui en sont la véritable base. La composition que *Kunckel* rapporte en quatre lignes, vaut assurément mieux que tout ce que *Néri* a dit sur les différentes manières de préparer les matières & de faire le crystal (2). Ses commentateurs ne nous offrent pas de plus grandes ressources. *Merret* n'a ajouté à ce qu'avoit écrit *Agricola* sur les fourneaux, & sur la manière de travailler le verre, que quelques pratiques Angloises de peu de conséquence. Ses notes sur *Néri* prouvent

(1) Georg. Ag. de Re metal. lib. 12. & de Nat. fossil. lib. 5, p. 274, 275.

(2) V. la p. 101 de l'Art de la Verr. trad. fr. in-4°.

qu'il avoit plus lu qu'opéré. *Kunckel*, avec moins de travail, auroit été infiniment plus loin, s'il avoit eu des principes. Tout se réduit dans ses remarques à quelques méthodes particulières, la plupart pratiquées dans les verreries de son temps, & à quelques observations utiles. *Néri* & *Merret* n'avoient eu en vue que le beau verre, sans s'embarraffer de la dépense. *Kunckel* a senti que la perfection de l'art consistoit à produire la plus belle qualité avec le moins de frais possible, ce qui est un mérite. Je ne crois pas qu'on puisse tirer de plus grandes lumières du précis que le célèbre *Henckel* a donné de *Néri*, *Merret* & *Kunckel*, ni de ce qu'il a ajouté sur ses trois espèces de verre, minéral, végétal & mixte (1). L'art auroit été sans doute enrichi d'utiles découvertes, si ce sçavant minéralogiste avoit été à portée, comme il le dit lui-même, d'opérer dans des fourneaux de verrerie.

L'art de la verrerie d'*Haudiquer de Blancourt* est, à quelques changemens & additions près, une traduction de ce qu'*Agricola* avoit écrit sur cette matière, des sept livres de *Néri*, & des notes de *Merret*. Cet ouvrage se feroit lire avec plaisir, si l'auteur ne donnoit trop fréquemment dans les idées extraordinaires de l'alchimie. *Haudiquer* s'attribue tout, & ne cite pas même *Néri*. Sa traduction ne me paroît pas plus propre à perfectionner l'art de la verrerie que les originaux (2).

Ce que le célèbre *Boerhawe* a écrit sur cette matière dans ses *Elémens de chymie*, ne répond pas, j'ose le dire, à sa réputation; il n'y a peut-être pas dans tous ses ouvrages de morceau plus foible que l'article de la vitrification. Voyez ses *Elém. de chymie*, tom. VI, pag. 157 & suiv. tom. V, p. 276, 277, 316 & suiv. trad. françoise.

Ne nous flattons point de trouver de plus grands

(1) V. Henckel, Flor. saturn. cap. 11.

(2) 2 vol. in-12°. imprim. en 1696 chez J. Jombert; réimprimés & augm. d'un traité des pierr. préc. & des glaces à miroir, en 1718, chez C. Jombert.

secours dans les ouvrages que *Merret* cite vers la fin de sa préface (1). On ne voit, dans les auteurs dont nous venons de parler, presque aucun principe solidement établi, aucun phénomène clairement expliqué : tout se réduit, à peu de chose près, à des méthodes particulières, à des préceptes relatifs aux matières qu'ils ont eues sous leur main, ou aux fourneaux dont ils se sont servis ; tout cela est donc peu utile à ceux qui ont à opérer dans des circonstances différentes. Ils n'ont rien dit de satisfaisant sur la matière, la préparation, & la construction des fourneaux ; sur la composition & la forme des creusets ; sur la proportion qu'il doit y avoir entre les creusets & le fourneau ; sur le degré de feu le plus avantageux ; sur la nature des matières à convertir en verre ; sur les causes de la dépuration, de la plus ou moins grande transparence des couleurs, du plus ou moins de solidité, des *bulles*, des *nuages*, des *graiſſes*, de la *rouille* ou *plombé*, des *filandres*, des *veines* du verre ; sur la nature & les effets de la bonne *recuiſſon*, &c. Est-il un art dont la théorie soit si imparfaite ? Il est à présumer que les lumières qu'on acquiert tous les jours en chymie nous mettront dans peu de temps en état de l'approfondir & de l'étendre. Personne ne me paroît nous avoir fourni autant & d'aussi bons matériaux, que le sçavant *M. Pott* (2) ; mais il faut être plus que simple artiste pour les mettre en œuvre.

Jettons un coup-d'œil rapide sur la pratique de l'art de la verrerie. Arrêtons-nous un instant sur les productions de la routine. Voyons quelle est la qualité & le prix des ouvrages de verre. Nous aurons occasion, dans la suite de ce mémoire, d'examiner les fourneaux,

(1) *V. liber com. alch. part. 1, cap. 20. Ferrant. imper. lib. 14 & 15 : & Pott. lib 6, cap. 3, &c.*

(2) *V. dans les Mém. de l'Ac. de Berlin, les Mém. de ce grand chym. sur la magnésie des verriers, sur les creusets, sur le sel de verre ; & sur-tout sa lithog. & pyrothec. & continuation.*

les creufets , les compositions & les méthodes actuellement en ufage.

Il n'y a point d'endroit où la verrerie ait été fur un pied plus brillant qu'à *Murano*. Les Vénitiens faisoient un commerce confidérable en miroirs , en cryftal , & en toute efpèce de verre. Ils ont , pour ainfi dire , entièrement perdu cette branche importante. Il ne reſte à Veniſe qu'un homme qui faſſe du cryftal eſtimé , & il le vend à un prix exceſſif. Les glaces de *Murano* font les plus mauvaiſes de l'Europe ; & , quoique moins chères que les nôtres , pour les bas volumes , elles ne font pas recherchées.

Les verreries Angloiſes ont une grande réputation. Elles ne font pas fort anciennes. Leurs progrès rapides font dûs à l'attention ſingulière du gouvernement à ne pas leur donner des entraves , à ne pas confondre l'intérêt du public avec celui du particulier. Les glaces , le cryftal , le verre blanc & commun , forment aujourd'hui une branche confidérable du commerce de la Grande-Bretagne. L'étranger conſomme les quatre cinquièmes des glaces Angloiſes. Il n'eſt point de pays où les Anglois ne trouvent moyen d'introduire leurs ouvrages de cryftal & de verre. Autrefois ils tiroient de France preſque tout le verre dont ils avoient beſoin : aujourd'hui ils nous fourniffent des luſtres , des lanternes , des verres à boire , des verres d'optique de toute grandeur , &c. La manufacture de Londres ne cède qu'à celle de *Neuſtadt* pour la beauté des glaces. On peut en voir des morceaux chez le ſieur *Sayde* , opticien de la Reine , à Paris , quai des Morfondus. Les grands volumes font très-chers. Des glaces de cent quarante-quatre pouces de hauteur ſur quarante pouces de largeur , ſe font vendues juſqu'à mille guinées (1). Quelques floriffantes que ſoient leurs verreries , les An-

(1) V. le prem. vol. chap. 9 de l'eſſai ſur l'état du comm. de la Grande-Bretagne.

glois ne doivent point se flatter , avec *John Cary* , qu'elles soient portées à la plus haute perfection. Leur cryſtal n'est pas d'une belle couleur : il tire ſur le jaune ou ſur le brun , pour peu que la couleur rouge de la *magneſe* domine. Il eſt ſi mal cuit , qu'il reſſue le ſel , ſe craſſit , ſe rouille promptement , eſt rempli de *points* & nébuleux. Un coup-d'œil jetté ſur les gâteaux de cryſtal que les Anglois font pour l'optique , en convaincra. Il a encore un autre défaut capital , c'eſt d'être extrêmement tendre. Ils vendent cher leurs ouvrages : peut-être ſeroient-ils forcés baiffer les prix , s'ils avoient des concurrens pour les lanternes & pour les verres d'optique.

Il ſe fait un grand commerce d'ouvrages de cryſtal & de verre blanc dans pluſieurs parties de l'Allemagne , en Saxe , en Bohême , dans la Franconie , le Palatinat , &c. Il nous vient , de ces différens endroits , pour des ſommes conſidérables , de luſtres , de bras de cheminée , de flacons , caraffons , verres & gobelets , de cryſtaux de table , de verres à vitres , à cadran , à eſtampes , ſoufflés ſans *boudine* , & coulés en table ſans *boudine* , &c. (1). Le plus beau cryſtal d'Allemagne a deux avantages ſur celui d'Angleterre , d'être plus blanc & moins cher , quoiqu'il ſe vende à Paris depuis trois livres dix ſols juſqu'à cent ſols la livre tout taillé. Il joint aux autres défauts de celui d'Angleterre ceux d'être *ſilandreux* , & rarement exempt de petites pierres ou grains de ciment. Les verres plats de Bohême & du Palatinat ſont bien éloignés de la perfection dont je les crois ſuſceptibles. Ils ont un grand nombre de défauts ; mais le plus défagréable , c'eſt d'être d'une épaiſſeur inégale , *ondulés*. Les verres coulés en table de Nuremberg , ſont d'un verre commun bien *affiné* , très-bien polis , & ſe vendent au moins vingt-cinq pour

(1) V. les arrêts de conſeil en fait de verrerie.

cent meilleur marché que nos glaces. On en trouve chez plusieurs Miroitiers de Paris, & chez le plus grand nombre de ceux de province.

Le verre de nos verreries peut être divisé en quatre espèces : verre à bouteilles ; verre commun verd, dit *chambouin* ; verre fin, blanc ; crystallin & crystal. Je ne connois que trois verreries en France où l'on fasse de bonnes bouteilles, *Folembrey* dans la forêt de Coucy, *Anor* dans le Hainault François, & *Séves* près de Paris. Celles qu'on fait dans le pays de *Bareush* & à *Dellu* dans le Brandebourg, leur sont supérieures pour la qualité & se vendent moins cher. A peine notre verre fin passeroit-il pour le verre commun d'Allemagne, & notre crystal pour le verre blanc étranger. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à comparer le verre plat, fin, ou de *deux feux* de Normandie, avec le verre commun à vitres du Palatinat ; & le crystal de la verrerie de *la Pierre* avec le verre blanc de Bohême, ou avec les morceaux de verre blanc d'Angleterre qu'on trouve chez le sieur *Sayde*. Il n'y a pas, je crois, de verre à vitres plus imparfait que celui de nos grosses verreries : il est rempli de défauts, de *bouillasses*, de *filandres*, de *larmes*, de *pierre*, mal recuit, se *plombe* très-promptement, & il est coloré au point d'être peu transparent, quoique fort mince. Dans quelques verreries, on a cherché à imiter les lanternes d'Angleterre ; mais on est très-éloigné d'y avoir réussi parfaitement.

Sur la fin du dernier siècle, Abraham *Thevart* fit une très-belle découverte en fait de verrerie : il trouva le moyen de couler le verre pour les glaces à miroir. Qu'en est-il résulté ? des glaces d'un plus grand volume, & rien de plus. Les ouvrages de nos verreries sont d'une mauvaise qualité & fort chers (1). S'écarte-

(1) Nos grandes glaces se vendent quinze ou seize francs la livre pesant : le calcul en est aisé. Ces glaces ont trois à quatre lignes d'épaisseur, & le pied cube de verre pèse environ 175 liv.

roit-on de la vérité, si l'on avançoit que nos verreries sont plus utiles à l'Espagne qu'à la France ? Elles emploient annuellement pour près de deux millions de soudes d'Alicante & de Carthagène : Mais c'est trop s'arrêter sur une chose qui fait notre honte. Personne n'ignore que nos verreries sont dans un état déplorable. Le prix extraordinaire que l'Académie Royale des sciences a proposé, pour seconder les vues d'un zélé citoyen, ne nous permet pas d'en douter. Cette compagnie respectable ne promet la palme qu'à celui qui aura donné les moyens les plus propres à porter la perfection & l'économie dans les verreries du royaume. Elle n'exige pas uniquement qu'on fasse du beau verre ; elle veut aussi qu'on puisse le faire à peu de frais : & , ces deux conditions remplies, nos verreries seront certainement en état de soutenir la concurrence avec les verreries étrangères.

Je ne doute pas qu'un grand nombre de personnes ; en rendant justice aux vues & au zèle de l'Académie, ne mettent ce prix au rang de ceux de la quadrature du cercle, de la pierre philosophale, &c. On est assez généralement persuadé qu'il est impossible de faire en France d'aussi beau verre & au même prix qu'en Allemagne. En Saxe, en Bohême, dans la Franconie, dans le Palatinat, dit-on, les beaux cailloux sont très-communs, & nous en manquons : le *salin*, ou le sel alkali fixe, extrait des cendres des bois, y est abondant & à bas prix ; & nous n'avons que des matières inférieures & fort chères : le bois y est pour rien ; & nous l'achetons à un prix excessif. N'y a-t-il point là d'exagération ? notre vanité ne chercheroit-elle pas à excuser notre négligence ? Supposé que cela fût aussi exact qu'il me le paroît peu. a-t-on examiné la chose d'assez près, a-t-on fait assez de recherches & d'expériences, pour décider que nos verreries ne scauroient trouver, dans le royaume, au moins l'équivalent des avantages

des verreries d'Allemagne ? Je me félicite , pour le bien de ma patrie , de pouvoir en douter. Les circonstances favorables où je me trouve depuis long-temps , m'ont permis d'envisager la matière sous un assez grand nombre de faces , pour me croire même en état de prouver que la France peut faire cesser les importations , fabriquer elle-même du verre aussi beau & à plus bas prix que celui de l'étranger. Ce ne seront point des spéculations creuses , ni des raisonnemens vagues qui me fourniront les preuves : je ne les tirerai que des expériences souvent répétées & dans le très-grand. Si j'avance quelque chose que je n'aie pas soumis à cette pierre de touche , j'aurai soin d'en avertir.

DES FOURNEAUX ET DES CREUSETS.

L'INTELLIGENCE du fondeur , l'adresse des ouvriers , le choix & la pureté des matières , sont de foibles ressources pour le maître de verrerie , s'il n'a un bon fourneau de fusion, & des creusets convenables. Quelque peu disposées à la vitrification que soient les matières dont il a construit l'un & fabriqué les autres, ses ouvrages seront infectés de *lames* & de *filandres* : La négligence ou l'impéritie , dans la préparation de ces matières , produira des dégradations ruineuses , ou des couleurs étrangères dans le verre. Le défaut de proportion dans la forme nuira nécessairement à la bonté des *affinages* , & augmentera la consommation du bois ou du charbon. Les fourneaux & les creusets sont la partie la plus importante de l'art de la verrerie , & , j'ose le dire , la moins connue. Je n'ai lu aucun ouvrage où l'on puisse trouver des secours suffisans sur la matière à employer , sur la manière dont on doit la préparer , ni sur les proportions les plus avantageuses de la forme des fourneaux & des creusets.

Dans la plupart des verreries Angloises & dans plusieurs verreries d'Allemagne, on fait les fourneaux d'une pierre *fabuleuse* dure (1). C'est une espèce de grais, appellé, dans quelques provinces de France, *mouillasse*. & dans d'autres, *Pierre à ouvrage*. Les fourneaux faits avec cette matière laissent perdre, par les joints, beaucoup de feu, consomment une grande quantité de bois, & sont de peu de durée. Le maçon le plus habile ne sçauroit éviter les joints, faire l'intérieur aussi uni qu'il devroit l'être, ni lui donner la forme la plus convenable, sans renoncer à la solidité. Ces grais chargés, pour le plus grand nombre, d'une base ferrugineuse, se vitrifient, se fendent ou s'égrainent : à peine supportent-ils le travail de trois ou quatre mois.

L'argille est la vraie matière des fourneaux & des creusets. Il y a en un grand nombre d'espèces : mais on ne peut employer avec sûreté que celles qui sont désignées, dans la minéralogie de *Wallerius*, sous les noms d'*argille blanche*, d'*argille grise*, d'*argille réfractaire pâle*, d'*argille réfractaire brune*, d'*argille réfractaire noirâtre*, de *terre à porcelaine*, de *terre à pipes*. Toutes ces espèces d'argille, exposées à un feu violent, blanchissent. Je ne puis regarder, avec *Wallerius*, les deux dernières espèces comme une marne. Ce sçavant minéralogiste me paroît avoir confondu deux terres très-différentes, puisque l'une se durcit au feu, & l'autre s'y change en chaux (2). Un étranger, comme *Wallerius*, peut dire qu'on ne trouve en France qu'une espèce d'argille à pyre : mais un François, *Haudiquet de Blancourt*, est-il excusable de soutenir que *la terre grasse de la Bélière près de Forges en Normandie, est la seule, dans ce royaume, qui ait la propriété de ne se pas fondre à un feu de verrerie* (3) ? Dans la même

(1) V. la pag. 43 de la préf. de *Merret*, Art de la verr. in-4°.

(2) V. la lithog. de *M. Pott*; & le second chap. du prem. vol. de la chym. métall. de *M. Geller*.

(3) V. pag. 35 du prem. vol. de l'Art de la verr. de *Blancourt*.

province, on en trouve de plusieurs espèces très-bonnes, de la blanche, de la grise, de la noirâtre. A Montdeber, non loin de Nantes en Bretagne, il y en a de la blanche; à Villentrode, en Champagne, de la grise; près de Bar-sur-Aube, de la grise; à Epinac, en Bourgonne, de la brune; à Suzi, dans le Laonnois, de la grise; dans le Forêts, de la brune; à Méreviels, près de Montpellier, de la blanche. L'argille pure est assurément très-commune en France: Il n'y a point de maître de verrerie qui ne puisse s'en procurer à peu de frais. Quelques recherches avec la sonde, & un peu d'intelligence, suffiront pour lui en faire découvrir à sa portée. Les étrangers, sur-tout dans certaines parties de l'Allemagne, ont peut-être à nous en-vier cet avantage.

On ne trouve point d'argille qui ne soit mêlée avec quelque corps étranger plus ou moins dangereux. Dans les unes, il y a des petits cailloux; dans d'autres, des pyrites, des charbons fossiles & un peu d'acide vitriolique (1); dans toutes, du sable, quelques racines & une terre martiale, dont la présence est ordinairement annoncée par des taches rouges ou jaunes. Les pailles, les brins d'herbe, les parties de bois & les terres communes, doivent être attribuées à la négligence de ceux qui tirent l'argille. Ces matières hétérogènes sont toujours préjudiciables, quelquefois funestes, parce qu'elles laissent un vuide lorsqu'elles ont été consumées ou dissipées par le feu; ou parce qu'elles disposent l'argille à la fusion, telles que la terre ferrugineuse, les pyrites, l'acide vitriolique, les cailloux & le sable touchés par le verre ou le sel alkali fixe. Mais l'ennemi le plus redoutable pour le maître de verrerie, c'est la substance martiale renfermée dans l'argille: elle est la principale cause de sa fusibilité; dès lors, des *larmes*, des *flandres*, des couleurs gros-

(1) V. p. 90-14, tom. 2, urb. hieme, Tentam. chem.

fières dans le verre , & la courte durée des fourneaux & des creufets (1).

Il n'y a point de verrerie où l'on ne craigne les mauvais effets de ces corps étrangers. C'est dans la vue de les prévenir qu'on épluche l'argille avec la plus grande attention. On la casse en petits morceaux , & on en fépare tout ce qu'on y voit de coloré & d'hétérogène. Mais il est aisé de sentir que , quelque soin qu'on y apporte , l'opération est insuffisante. La triste expérience que j'en ai faite assez longtemps m'a donné l'idée d'un autre moyen beaucoup plus sûr & moins coûteux. On casse grossièrement l'argille bien *refsuée* : on rejette les morceaux les plus tachés de rouge ou de jaune : on met les autres morceaux dans une grande caisse de bois , qui ait au moins dix pouces de profondeur , & on l'en remplit jusqu'aux deux tiers ; ensuite on met dans cette caisse de l'eau chaude en hiver , & , si l'on veut , de l'eau froide en été , jusqu'à ce que l'argille en soit couverte d'environ deux pouces. Il importe de ne pas remuer la terre , si l'on désire d'extraire la substance martiale. Le lendemain , on la verra sur l'eau , comme une matière huileuse rouge ou jaune. On tirera l'eau par un robinet jusqu'à ce qu'elle commence à se troubler. Après y en avoir mis de la nouvelle , on tirera le *coulis* par le robinet , & on le versera à travers un tamis de crin dans d'autres caisses moins profondes , & ainsi de suite , jusqu'à ce que la bonne argille de la première caisse soit épuisée. Lorsque la terre du *coulis* est précipitée , on tire l'eau claire , & on dessèche l'argille , soit en l'exposant à une chaleur modérée ou à un feu violent , soit en y mêlant de l'argille sèche déjà purifiée , ou du *ciment* , dans les proportions que nous indiquerons plus bas. Cette opération , quelque simple qu'elle soit , attaque également toutes les matières hétérogènes qu'il peut y

(1) V. la pag. 123 de la lithog. de M. Pott.

avoir dans l'argille : les corps légers restent sur le tamis : les cailloux , les pyrites & le sable , en grande partie , restent dans le fond de la première caisse : la substance martiale , & l'acide vitriolique , s'il y en a , sont emportés avec l'eau.

COMPOSITION DES TERRES.

IL ne suffit pas d'avoir ainsi purifié l'argille pour l'employer avec sûreté. Elle devient trop compacte , & diminue trop de volume par le dessèchement. L'eau raréfiée par l'action du feu , ne trouvant pas des pores assez grands pour s'échapper , détruiroit la liaison des parties , ruineroit les fourneaux & les creusets. La trop grande retraite leur porteroit un coup presque aussi funeste.

Il est nécessaire de donner à l'argille fraîche un intermède d'une nature & dans une proportion à prévenir l'un & l'autre inconvéniens. Où le trouverons-nous ? La terre calcaire , combinée avec la terre argilleuse , se change en verre à l'action d'un feu violent. Il en est à peu près de même de la terre gypseuse. Le sable ne peut servir que pour les parties qui ne sont pas exposées au contact de la composition du verre ; & encore doit-il être très-pur , ni trop gros , ni trop fin. Le verre pilé & le mâche-fer , quoique conseillés par des sçavans du premier ordre , seroient plus nuisibles qu'utiles. Nous ne pouvons trouver cet intermède , j'ose l'assurer , que dans l'argille même purifiée & brûlée au point de n'être plus susceptible de retraite : l'argille ainsi brûlée s'appelle *ciment*. Les creusets qui ont déjà servi , & l'intérieur des vieux fourneaux , fournissent le meilleur.

S'il s'agit d'un nouvel établissement , on mettra en galettes , d'un pied en carré sur huit ou dix lignes d'épaisseur , l'argille purifiée ; & , lorsque ces galettes se-

ront sèches, on leur fera subir, pendant sept ou huit jours, un feu violent de reverbère : ensuite on les réduira en poudre avec beaucoup de propreté sous la meule, ou encore mieux sous les pilons d'un boccard.

Les auteurs & les maîtres de verrerie varient beaucoup sur le degré de finesse qu'il convient de donner au ciment. M. Pott a observé que les creufets, dans la composition desquels on avoit fait entrer du ciment fin, étoient très-sujets aux gersures ; & en conséquence il conseilla de n'employer que du gros ciment, dont on a extrait avec soin le plus fin (1). D'autres, ayant remarqué que le gros ciment étoit la source des trous, des dégradations & des *gravois* dans le verre, n'ont employé que le plus fin. D'autres (& c'est le plus grand nombre), dans la vue d'obvier à ces inconvéniens, se servent d'un ciment mêlé de gros & de fin, d'un ciment simplement passé par un tamis de crin très-clair ; & ils manquent leur double but. On y parviendra sûrement pour les creufets, si l'on ne fait entrer dans leur composition qu'un ciment moyen, c'est-à-dire, passé d'abord par un tamis de crin, ni trop clair, ni trop ferré, & ensuite par un tamis de soie ; ce qui restera sur ce dernier sera la partie de ciment dont on doit se servir.

Chaque partie du fourneau de fusion demande un ciment particulier. Cette observation est de la plus grande importance. L'*embassure*, les parois au-dessous des *ouvreaux*, est la partie la moins délicate. Les *larmes*, les dégradations & les gersures n'y font point de conséquence. Il suffit d'y employer l'argille grossièrement épluchée, & le ciment passé par un tamis de crin très-clair.

La *couronne*, ou tout ce qui est au-dessus de l'*embassure*, mérite la plus grande attention. Les gersures y font peu dangereuses ; mais les dégradations y sont funestes ; soit parce que les cavités favorisent les *lar-*

(1) V. ce qu'il dit sur les creufets, dans les mém. de l'Acad. de Berlin.
mes ;

mes ; la matière vitrifiée s'y rassemble , & de-là se précipite dans les creusets ; soit parce que les parties argilleuses , les grains de ciment qui se détachent , tombent dans le verre , y produisent des *gravois* , des *pierres* non moins funestes que les *larmes*. Il est très-avantageux de n'employer que du ciment fin , à la *couronne* des fourneaux.

Les dégradations sont peu nuisibles aux *sièges* ou supports des creusets : mais les moindres gersures en précipitent la ruine ; soit parce que la partie qui porte sur l'âtre est toujours dans un bain de verre ; soit parce que la composition du verre qui coule des creusets sur les sièges pendant les fontes , & le verre pendant le travail , s'influent dans les gersures , & les aggrandissent avec une rapidité difficile à concevoir. Il est d'autant plus mal-aisé d'éviter les gersures , que les sièges forment des masses très-considérables. On ne doit se flatter de les prévenir , qu'en rendant la composition très-poreuse , qu'en n'y faisant entrer que du ciment très-gros , & dont on aura exactement séparé le fin.

Personne , que je sçache , n'a encore déterminé convenablement la quantité de ciment qu'on doit mêler avec une quantité déterminée d'argille fraîche. Les doses que prescrit M. Pott , dans son mémoire déjà cité , ne me paroissent applicables qu'aux très-petits creusets , qui faisoient l'objet de ses recherches. Les verreries flottent , à cet égard , dans une incertitude funeste. Elles n'ont d'autre règle , pour fixer ces proportions , que le coup-d'œil incertain ou la routine aveugle des principaux ouvriers. Rien cependant de plus important. Si l'on épargne le ciment , on s'expose aux inconvéniens d'une trop grande retraite & aux gersures : si , au contraire , on le prodigue , on s'expose aux inconvéniens qui résultent du défaut de liaison & de solidité.

On pense communément que chaque espèce d'ar-

gille pure demande une dose différente de ciment. Cela ne peut être vrai, qu'à raison des matières hétérogènes dont les argilles son chargées. Purifiez-les, dépouillez-les sur-tout du sablon qui peut y être mêlé, & j'ose croire que vous trouverez que quatre parties de ciment sur cinq parties d'argille fraîche, font la meilleure proportion qu'on puisse employer.

Souhaitez-vous une pierre de touche, un signe, auquel vous puissiez reconnoître la quantité de ciment que demande chaque espèce d'argille pure, sans être obligé d'en séparer le sablon ? Faites plusieurs petits gâteaux de quatre pouces en quarré & d'un pouce d'épaisseur, où vous aurez fait entrer le ciment à différentes proportions, dont la pâte ne fera ni trop molle, ni trop ferme, que vous dessécherez convenablement, & que vous aurez *battues* une fois : Celui de ces gâteaux qui n'aura perdu, dans un feu violent, que la dix-huitième partie de son volume, vous indiquera la meilleure composition pour les fourneaux & les creusets.

L'usage où sont la plupart des verreries de brûler légèrement l'argille, avant de la mêler avec le ciment, est pernicieux : Il en résulte constamment une inégalité de liaison ou de solidité dans les ouvrages, & la plus grande incertitude sur les proportions. L'argille peut être plus ou moins brûlée, & toutes ses parties ne le sont jamais au même degré.

Lorsque l'argille fraîche, chargée d'une dose convenable de ciment, a été suffisamment *marchée, patrie*, la plupart des maîtres de verrerie la moulent en briques pour en construire leurs fourneaux. Les uns recueillent ces briques, avant de les employer ; les autres les font simplement bien sécher. Ces deux méthodes me paroissent également mauvaises. Il n'est pas possible de faire, avec des briques cuites ou séchées, l'intérieur du fourneau parfaitement uni, ni de lui donner la forme la plus avantageuse : les inégalités sont

une source abondante de *larmes* & de *gravois*, & rendent la réflexion très-irrégulière. A un feu violent & continué, les briques se rappetissent inégalement; le mortier, qui en faisoit la liaison, coule; le verre en est infecté; les joints s'aggrandissent; le feu s'échappe par mille endroits; la consommation du bois ou du charbon de terre est immense; la qualité du verre moins parfaite, & le fourneau d'une courte durée. Combien de maîtres de verrerie font la triste expérience des mauvais effets de ces méthodes?

Il y a un moyen, connu dans les *grosses verreries* de Normandie & dans quelques-unes du Palatinat, pour obvier à tous ces inconvéniens; & il est très-aisé de le mettre en usage, quoique de *Blancourt* assure que c'est un secret renfermé dans la famille d'un maître maçon.

On moule l'argille préparée & composée en quatre espèces de thuiiles: En thuiiles d'un pied en carré & de deux pouces d'épaisseur, pour l'*embassure* & pour une partie de la *couronne*: en thuiiles de vingt pouces de longueur sur six de largeur & deux d'épaisseur, pour les *tonelles*: en thuiiles d'un pied de longueur sur dix pouces de largeur par un bout, & sept par l'autre, & deux pouces d'épaisseur, pour la *couronne*: & en thuiiles des *sièges* de deux pouces d'épaisseur & d'une grandeur suffisante, pour que, mises de *champ*, les sièges ne soient dans le bas qu'à six pouces de distance l'un de l'autre, & dans le haut à la distance des deux cinquièmes de la largeur du fourneau, & n'ayant que vingt à vingt-quatre pouces de hauteur, suivant la grandeur du fourneau. Si l'on donne à ces thuiiles une moindre épaisseur, comme on le fait communément, on multiplie les joints sans nécessité: si on leur en donne une plus grande, elles s'appliquent imparfaitement l'une sur l'autre.

Lorsque ces thuiiles sont un peu fermes, on les brosse légèrement, & on les bat avec une *patelle* de bois. C'est

dans cet état qu'on les emploie à la construction du fourneau.

Il importe que le massif du fourneau, ou la voûte ouverte entre les sièges, & où répondent à angles droits quatre galeries ouvertes par l'autre extrémité (si l'on veut faire usage du charbon de terre), soit très-solide ; que l'âtre soit propre à résister à la plus grande violence du feu (le grès dur en fournit d'excellens) ; & que les quatre arches soient faites avec la plus grande attention. Voyez la 1^{ere}. & la 2^e. fig.

Le carré du fourneau étant tracé & fait en briques blanches ou d'argille de rebut & de sable, & les arches étant formées en bonnes briques ordinaires, il convient de commencer la construction par les sièges. On a plus de facilité à appliquer les thuyles l'une contre l'autre à grands coups de *batte*, que lorsque l'*embassure* & la *couvonne* sont faites, & on ne court pas le risque de causer des ébranlemens dangereux : tout en est plus solide. Ensuite on fait une assise de thuyles d'*embassure* : on humecte cette assise avec un balai fin chargé d'un coulis très-clair, fait avec la composition des thuyles. On la recouvre d'une seconde qu'on a soin de bien battre, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le fourneau soit entièrement monté. On forme les *tonelles*, les *ouvieaux*, & les *lunettes*, avec des pièces de bois, qui ont la figure qu'on veut donner à ces ouvertures. Le dehors & le dedans étant *recoupés* & unis, on a soin de dessécher lentement le fourneau, & de le rebattre plusieurs fois par jour. Si pendant l'*attempage* ou desséchement complet du fourneau, il s'y fait des gersures, soit qu'on ait tenu la composition des thuyles un peu trop *grosse*, soit qu'on ait poussé le feu avec trop de rapidité, soit enfin qu'on n'ait pas rempli exactement l'entre-deux des fourneaux & des arches, il ne faut pas s'alarmer ; le remède est bien aussi sûr que simple : On supprime avec prudence le feu ; lorsque le fourneau est assez refroidi pour

pouvoir y entrer, on remplit les fentes avec du chanvre bien chargé de *la composition* des thuiles ; & l'on passe ce chanvre le mieux qu'il est possible avec une lame de fer, d'un pouce ou environ de largeur, sur quinze ou dix-huit pouces de longueur : on met par degré le feu au fourneau. Il est aisé de sentir que, suivant cette méthode, il n'y a point, 1°. d'inégalité à craindre, ni de réflexion irrégulière ; 2°. qu'on peut donner à l'intérieur du fourneau la figure la plus avantageuse, sans nuire à la solidité ; 3°. qu'un fourneau ainsi construit, n'ayant point de joints, du moins sensibles, ne laisse point perdre de feu, & peut durer dix ou douze ans, si l'on a soin de réparer, lorsqu'il est nécessaire, lâtre, les sièges & les ouvreaux, & de lui faire faire plusieurs excellentes *réveillées*. Ces réparations ne souffrent aucune difficulté. La seule attention qu'on doit avoir, c'est de ne pas laisser refroidir trop promptement le fourneau. Il ne manqueroit pas de s'écailler.

Il y a pour le moins autant de façons de construire le fourneau, que l'art de la verrerie a de branches. Dans les verreries à bouteilles, à verre plat à *boudine* & sans *boudine*, le fourneau a six arches, une à chaque coin, & une sur chaque *glaise* : dans la plupart de celles où l'on fait des gobelets, des verres à boire, des caraffes, du crystal, &c., il n'y a qu'une arche au-dessus du fourneau : dans d'autres, & particulièrement dans celles à verre plat façon de Bohême, il y en a quatre, une à chaque coin du fourneau. On n'a rien de déterminé sur la forme ni sur la capacité des arches, sur la place, la forme & le diamètre de l'ouverture par laquelle elles reçoivent le feu du fourneau. Nous ne sommes pas plus avancés sur la figure de l'intérieur du fourneau. Le cordeau seul du maître maçon, ou du fondeur, règle ce qu'il n'appartient qu'à la plus profonde pyrothecnie de fixer. Chacun a ses mesures. Les uns préfèrent la figure

ronde & la voûte à plein ceintre, & placent dans leur fourneau trois, cinq, sept ou huit & jusqu'à neuf creufets : d'autres veulent que leur fourneau soit carré, jusqu'à la hauteur du milieu des *ouvreaux*, & que la *couronne*, ou la voûte, soit plus ou moins surbaissée : il y en a qui font une espèce de pyramide quadrangulaire tronquée : j'en connois qui, dans la vue d'éviter les *larmes*, surbaissent extrêmement la voûte du côté des *tonelles*, & le moins qu'il est possible du côté des *mormues*, des *ouvreaux*. Presque tous sont obligés de détruire une partie du fourneau, pour y mettre les creufets ; & de le reconstruire, lorsque les creufets sont placés. Tous ces fourneaux chauffent foiblement & consomment une très-grande quantité de matière combustible. Il seroit de beaucoup trop long, & peut-être très-peu utile à l'art de la verrerie, de relever les défauts particuliers à chaque espèce.

Il est aussi difficile qu'important de trouver un fourneau commode pour toutes les opérations de l'art de la verrerie, lequel ayant six ou dix *ouvreaux*, quatre *lunettes*, deux *tonelles*, produise le plus grand feu possible, avec le moins de matière combustible. C'est à l'Académie à juger si j'ai approché de la solution de ce problème. Je puis assurer avec confiance, que le fourneau dont je donne le plan & la coupe, *fig. 1^{re}*, *2^e*. & *3^e*, affine mieux & plus promptement le verre, avec un tiers moins de bois, que ceux qui étoient les moins imparfaits. Depuis cinq jusqu'à huit pieds, ce sont les dimensions les plus avantageuses. Au-dessus & au-dessous, le verre s'affine moins bien, & proportionnellement il faut plus de matière combustible. Six ouvriers peuvent travailler en même temps à ce fourneau, & recuire très-bien leurs ouvrages dans les arches, au moyen de pots de terre ou de tole, garnis de terre, d'un pied de diamètre, deux de profondeur, & fermés par un bout, à la manière de la Bohême. Si l'on veut

souffler des lanternes à la façon d'Angleterre, ou des verres plats à vitre, &c., il convient de diminuer, des deux tiers en dedans du fourneau, l'épaisseur des *ou-vreaux*. Ceux qui desirent faire leur *fritte* avec le feu du fourneau de fusion, peuvent le faire très-commodément. Ils n'ont qu'à pratiquer une arche sous chacune de celles à recuire, & la *lunette* sera à la hauteur des *sièges*.

On pourroit y couler les grands *plateaux* pour les miroirs, en faisant quatre *ou-vreaux* de dix-neuf pouces de hauteur sur dix-sept de largeur, un à chaque bout des deux *sièges*.

DES CREUSETS.

IL y a deux façons de faire des creusets, sçavoir à *la main*, & dans des *formes*. Celle-ci est consacrée aux petits creusets, celle-là aux grands. Je puis assurer, d'après une assez longue expérience, qu'il est aisé de faire dans des formes les plus grands creusets, & avec avantage. 1°. Il faut un temps assez long pour former un bon potier à la main : à peine est-il nécessaire de guider deux fois un manouvrier pour lui faire faire un bon creuset dans des formes. 2°. Il est très-rare qu'un creuset, fait à la main, soit monté droit : il l'est toujours dans des formes. 3°. On ne peut *rebattre* que foiblement un creuset fait à la main : on *rebat* tant qu'on veut ceux qui sont faits dans des formes. 4°. Les plus habiles potiers à la main ne font, par semaine, que quatre creusets d'environ trente pouces chacun : un ouvrier en fait aisément trois par jour dans des formes.

Il n'y a point de forme qu'on n'ait donnée aux creusets. On en voit de carrés, de triangulaires, à plusieurs pans, d'aussi grands dans le bas que dans le haut, de *ventreux*, ou dont le diamètre du milieu est plus grand

que l'inférieur & le supérieur, & de plus ou moins évasés. Les trois premières espèces souffrant des dilatations inégales, à cause de leur épaisseur inégale, périssent promptement par les angles; & ils sont aussi peu propres à la *dépuracion* du verre, que les deux espèces suivantes. Le verre se fond & s'affine d'autant mieux & d'autant plus promptement, toutes choses égales d'ailleurs, qu'il offre plus de surface au feu réfléchi. D'après ce principe très-vrai, il me semble que les creusets devroient être des cônes renversés. Mais, ne portant que sur un point, ils n'auroient pas assez de solidité, & on perdrait trop sur la quantité de matière. Il y a un juste milieu à prendre : c'est de donner au diamètre inférieur un septième de moins qu'au diamètre supérieur. Cet évasement, loin de nuire à la solidité, y contribue; il est très-propre à la *dépuracion* du verre, & laisse aux creusets une capacité proportionnée à la capacité du fourneau, ou ne lui donne à faire ni trop ni trop peu.

Les meilleurs creusets sont ceux qui sont faits avec l'argille pure, préparée & composée comme il a été dit ci-dessus. Ils doivent être traités avec la plus grande propreté; d'une épaisseur moyenne, d'un pouce & demi dans la *fleiche*, & de deux pouces dans le *jable* & le *cul*; montés droit, d'une égale épaisseur dans toutes les parties de la *fleiche*; d'une forme convenable; *rebatus* avec soin, desséchés très-lentement, & recuits à un feu violent & longtemps continué.

DES MATIERES A CONVERTIR EN VERRE.

DES quatre espèces de terre ou pierres, *calcaire*; *gypseuse*, *argilleuse*, & du genre des cailloux, que nous connoissons, il n'y en a aucune de vitrifiable par elle-même au feu le plus violent. Les expériences de M.

Pott

Pott ne nous permettent pas d'en douter (1). Chacune demande, pour être changée en verre, une addition des autres, ou de bases métalliques, ou de sels alkalis fixes. Il n'y en a point qui forme, avec une dose déterminée des dernières, un verre aussi clair, aussi transparent, que celle du genre des cailloux. C'est aussi la combinaison la plus connue dans les verreries, & la seule peut-être qu'on croie nécessaire de connoître.

L'espèce de terre ou de pierre connue sous le nom de crystal, de quartz, de cailloux, de sable, de grais, &c. fait la principale base du verre. Ces pierres, excepté le crystal & le quartz, sont très-communes en France. On trouve de très-beaux cailloux blancs & demi-transparens sur les bords de la mer, dans plusieurs rivières, &c. Les cailloux noirs, bruns, blanchâtres, opaques & grossiers, ne sont assurément pas rares, & il suffit de les faire rougir & de les éteindre dans l'eau, pour les rendre parfaitement blancs. Nous avons un très-grand nombre de mines de beau sable, & ce qui est peut-être plus précieux, du grais en abondance. Il y a très-peu de verreries qui employent ce dernier dans la composition du verre (2). *Merret* assure même qu'il ne peut servir à cet usage, sans doute par la crainte qu'il n'en coûtât trop pour l'écraser; mais on n'a qu'à le faire rougir dans les arches pendant les fontes, l'éteindre dans l'eau & le battre légèrement. L'opération ne sera assurément pas couteuse, à moins que ce ne fût une espèce de grais aussi dur que rare. Le verre fait avec le grais à paver, ou autre de couleur blanchâtre ou jaunâtre, n'est point différent en dureté, quoique *Wallérius* l'assure (3), de celui qu'on a fait avec le sable.

Le sable le plus coloré & le plus argilleux est le meilleur pour le verre à bouteilles, parce qu'il de-

(1) V. le chap. IV. de son examen chymique des pierres.

(2) V. les notes sur le 1^{er}. liv. de Neri.

(3) V. la p. 141 du 1^{er}. vol. de la miner.

mande peu de fel alkali fixe, & qu'il fait un verre très-solide. Il suffit d'employer du sable blanc ou du grais pour le verre vert, & même pour le verre blanc. Les veines rouges ou jaunes, qu'on y voit, disparaissent ordinairement au feu. Mais, si l'on n'a pas de beaux cailloux, des pierres à fusil, comment purifier le sable blanc ou le grais au point d'en faire le crystal le plus beau & le plus fin ? souvent les calcinations & les extinctions répétées sont insuffisantes. La base martiale dont ils sont rarement exempts, & qui toujours colore plus ou moins le verre, leur résiste. Le célèbre *Sthal* (1) conseille de les laver avec soin dans une eau de rivière chargée d'un peu d'eau forte ; mais ce moyen ne seroit-il pas coûteux, & peut-on se flatter qu'il rempliroit le but proposé, à moins que le sable & le grais n'eussent été réduits en poussière très-fine ? L'eau régale & la proserpine de Glauber (le beurre d'antimoine), par le secours de laquelle on opéreroit sûrement l'extraction désirée, sont trop difficiles à préparer, & trop chères pour qu'un maître de verrerie doive se déterminer à les employer. Je vais indiquer un moyen aussi efficace, beaucoup plus simple & moins dispendieux. On n'a qu'à mêler, par la dissolution, pour cent livres pesant de sable ou de grais écrasé, quatre livres de fel de verre, mettre ce mélange dans un vieux creuset, ou dans tous à la fin d'un fourneau, & lui faire subir, pendant sept ou huit heures, le feu de verrerie le plus violent : le fel de verre disparaîtra, dissipera jusqu'au plus léger atôme de matière colorante, & le sable restera blanc comme la neige, très-pur, propre à faire le plus beau crystal, & même à imiter les pierres précieuses. Plusieurs auteurs ont avancé, qu'il y avoit des espèces de sable & de caillou plus disposées à la fusion que d'autres. Cela n'est vrai qu'à raison des matières

(1) *STHAL*. fundam. chym. pact. 2 sect. III. cap. III. de modo conficiendi varias gen.mas artif.

hétérogènes (la substance martiale sur-tout) dont elles sont chargées. C'est une erreur de croire avec *Merret*, que le *crystal exige un sable tendre*, & le verre commun un *sable dur* (1).

La seconde matière principale qui entre dans la composition du verre, ce sont les fondans, les sels alkalis fixes, minéral & artificiel, ou un mélange de sels alkalis fixes & de leur partie *endreuse*, d'une terre *alkaline*, de *nature saline* (2). Il n'y a peut-être point de partie dans l'art de la verrerie, sur laquelle les auteurs & les maîtres de verrerie soient moins d'accord. Chacun a son fondant favori (3). *Agricola* dit que, de son temps, on donnoit la *préférence au nitre*. *Merret* assure que le *temps & l'expérience ont fait abandonner l'usage du nitre*, comme *sel trop tendre & trop foible qui se résout en sel alkali* (sel de verre), & que la *roquette*, ou *poudre de Syrie*, a obtenu le *premier rang* (4). *Kunckel & Henckel* assurent, d'après *Merret*, que le verre fait avec la soude n'est pas estimé; qu'il casse très-facilement en se refroidissant; qu'il conserve toujours une couleur bleuâtre; qu'en un mot, la soude, quand même on y mêleroit de la *magnésie*, ne produit point un beau verre; & on voit assez que ces auteurs penchent en faveur de la *potasse*. Le premier dit même, que le crystal qu'il en a fait, est supérieur à ceux que *Néri* avoit faits avec tant de peine, & où il avoit fait entrer le sel alkali fixe de la soude, de la roquette, le borax, le sel alkali du tartre, le nitre (5), &c. *M. Gellert* pense que la soude est plus propre que tout autre sel tiré des cendres, à faire du beau verre durable; que celui qui est fait avec de la potasse est plus sujet à être attaqué par les acides que les autres, & même qu'il se

(1) V. la p. 17 de l'Art de la Verr. trad. franc. in-4°.

(2) V. les p. 175 de la lithog. & 94 de la cont. de M. Pott.

(3) V. lib. 12 de re metall.

(4) V. p. 29 de l'Art de la Verr. trad. in-4°.

(5) V. les p. 11, 103 & 561 de l'ouvrage ci-dessus.

décomposé à l'air (1). Dans les verreries actuelles d'Allemagne, on ne sçait employer que la *potasse*. Dans celles d'Italie, & dans celles de France, on ne connoît presque que l'usage de la soude & du salpêtre. Auquel de ces fondans rejettés par les uns, adoptés par les autres, devons-nous donner la préférence ? A celui qui sera le plus à notre portée, que nous pourrions nous procurer à moins de frais. Je puis assurer, d'après des expériences très-variées & très-souvent répétées, que tous sont également bons, pourvu que la préparation en soit convenable, les proportions de la composition justes, & la fusion & dépuración suffisantes.

Les fondans peuvent se trouver en France, pour le moins en aussi grande abondance, que dans les pays étrangers. Quelque hasardée que paroisse cette assertion, elle n'en est pas moins bien fondée. Nous pouvons faire annuellement une quantité très-considérable de *potasse* rouge & blanche (2). Il y a plusieurs pro-

(1) V. les p. 25 & 26 de la trad. franc. du 1^{er}. vol. de son excellente chym. métall.

(2) La potasse rouge, est le sel alkali fixe extrait par lixivation & évaporation des cendres de tous les végétaux ; excepté la plupart des plantes maritimes. La potasse blanche n'est autre chose que la rouge calcinée à un feu de Réverbère.

Il se fait une grande quantité de potasse en Alsace, en Lorraine, & dans les Ardaines. Dans les chefs-lieux, il y a ordinairement quelqu'un qui l'achette livre à livre des payfans & des Bucherons. La cupidité a introduit un grand nombre de fraudes dans cette branche de commerce. Il est important de faire connoître les principales. Une des plus dangereuses pour les verreries enfin, est de mêler du sel marin avec le sel alkali fixe, ou de vendre pour potasse le sel extrait des cendres faites sous les chaudières, des salines de sources. Il y a trois moyens également sûrs pour découvrir cette fraude. Cette potasse fond aisément au feu de calcination ; ne prend qu'une couleur bleue très-pâle, & ne fait du verre qu'à proportion du sel alkali fixe, dont elle est chargée. J'en ai reçu où il y avoit plus de moitié de sel marin tiré, je pense, de la saline de Dieuze. Cet objet me paroît mériter l'attention du ministère. En corrigeant cet abus, il rendroit un service important à l'art. On s'est apperçu que les cendres vieilles fournissent une plus grande quantité de sel, que les nouvelles. En conséquence, on les laisse longtems exposées au grand air, ou on les garde dans des endroits où l'air extérieur a un libre accès. Ces cendres donnent plus de sel, par la raison, qu'une partie souvent considérable du sel alkali fixe se con-

vinces où il se perd immensément de petit bois, ne fussent que les *regalis*, & où les coupeurs de bois négligent les cendres qu'ils font pendant l'exploitation d'une vente. La *fougère* est très-commune dans le royaume : les cendres de cette plante, coupée vers la fin de juillet, & brûlée comme on brûle la fougère, donnent environ un neuvième de sel alkali fixe. On ne fait aucun cas du marc des raisins : ses cendres bien faites produisent au moins autant que celles de la *fougère*. Des cendres de ce qui reste dans l'alembic des distillateurs d'eau de vie de marc, m'ont donné jusqu'à un cinquième de très-beau sel alkali fixe : il est rare que ces distillateurs ne mêlent au marc, de la lie liquide. Pour peu qu'on connoisse notre produit en vin, on concevra que nous pourrions tirer annuellement du marc plusieurs millions pesant de très-bonne *potasse*. Il est surprenant qu'on ait négligé jusqu'aujourd'hui un objet aussi utile que facile à faire. Les cendres des côtes de tabac nous offrent une nouvelle ressource. Elles produisent, lorsqu'elles sont faites avec soin, plus du tiers de leur poids de sel alkali fixe. Il est certain que nous pouvons nous procurer très-aisément, & sans le secours de l'étranger, la potasse que nos verreries, nos blancheries & nos savonneries de savon noir font dans le cas de consommer. Cette branche d'industrie mérite sans doute d'être encouragée. Les maîtres de verreries sont les premiers intéressés à l'animer, & cela leur est facile : ils n'ont qu'à exciter à des essais les paysans, à leur donner la certitude de la vente, & à les diriger. Nous leur en fournirons ci-après les moyens.

vertit en tartre vitriolé, sel funeste aux verreries, lorsqu'il se trouve en grande proportion dans la potasse.

Les uns mêlent de la suie dans la potasse rouge, ce qui donne au verre une couleur jaune très-opiniâtre. D'autres (& c'est le plus grand nombre), ne laissent point clarifier leur lessive. Il en résulte, que la potasse est plus foible & très-difficile à purifier par la calcination, du principe colorant grossier, sur-tout lorsque la lessive est faite, en tout ou en partie, avec les cendres de bois de sapin.

Sans parler des cendres de l'*algue marine*, connue sous les noms de *varec* & de *goëmon*, très-communes sur nos côtes, nous avons encore une ressource bien plus précieuse ; c'est la *soude*. On en fait en Provence & en Languedoc, qui, simplement frittée avec le sable, est propre à faire de bon verre. Les essais qu'on a faits en Poitou, donnent les meilleures espérances. Un grand nombre de bonnes espèces de kali, particulièrement le *kali majus cochleato semine*, croissent naturellement sur les côtes de Provence, du Languedoc & du Roussillon (1). J'ai de très-bonnes raisons de croire, qu'on pourroit y cultiver avec succès le *kali de Sicile*, & les plus estimés d'Espagne, le *kali à feuille capillaire velue*, le *kali à feuille de geneste*, & le *kali à feuille de tamarisque*. Il est plus que probable, que, par une culture & par une incinération convenables de ces plantes, nous nous procurerions très-abondamment, & dans des terres incapables de produire autre chose d'utile, des soudes équivalentes aux meilleures d'Espagne. Celles qu'on fait du côté de Narbonne, & dans les isles, appelées les *Saintes*, uniquement avec le *kali majus cochleato semine*, ne leur cèdent pas de beaucoup en qualité. Elles rendent autant de sel alkali fixe, environ moitié de leur poids, & il n'y a d'autre différence, qu'une très-petite quantité de plus de sel marin & de sel admirable de Glauber. La soude ou *salicor*, qu'on fait à *Pérols*, Ville-neuve près de Montpellier, est de beaucoup inférieure à celle des *isles les Saintes*. Elle ne donne guère plus du tiers de sel alkali fixe, & chargé d'une plus grande quantité de sels neutres, par la raison, sans doute, qu'on brûle avec le *kali majus cochleato semine*, le *kali majus geniculatum*, l'*absynthe* & le *fénouil* maritimes, & bien d'autres plantes maritimes. Ne cultivât-on, dans nos provinces méridionales, que

(1) V. la p. 536 de l'hist. des plantes de l'Europe.

le *kali majus cochleato semine* ; la cendre donnât-elle moins de sel alkali fixe , nous pourrions rendre nos soudes équivalentes aux meilleures d'Alicante , même supérieures. Le moyen est simple. Nous n'aurions qu'à arroser les cendres du *kali majus cochleato semine* , encore rouges dans la fosse , avec une forte lessive des mêmes cendres.

Quoique les états du Languedoc , toujours attentifs au bien de la province , aient déterminé d'encourager la culture des soudes ; quoique cette culture & le moyen d'amélioration que je viens de proposer soient aussi aisés que lucratifs , peut-être aurons-nous longtemps à attendre des soudes d'une meilleure qualité. Il seroit très-avantageux de pouvoir , en attendant , substituer nos soudes , telles qu'elles sont , aux soudes étrangères : une seule opération nous mettra en état de le faire. Il ne s'agit que d'en extraire le sel alkali fixe , & d'employer ce sel au lieu de la soude en nature. Ce sel , suivant le degré de purification qu'il a reçu , est propre (je puis l'assurer avec confiance) à faire depuis le verre commun blanc , jusqu'au plus beau crystal. La partie terreuse de toutes les soudes , comme des cendres de tous les végétaux , est exactement de la même nature *alkaline* ; la matière colorante qui s'y trouve mêlée est précisément la même dans toutes , *le phlogistique*. Le sel alkali fixe , extrait des cendres de tous les végétaux , sans en excepter aucun , est le même relativement à la verrerie , ou il est également propre à faire du verre d'une bonne & belle qualité. Il est facile de s'assurer de la vérité de ces trois propositions : elles me paroissent incontestables. D'où provient donc la différence qu'il y a entre nos soudes & celles d'Alicante ? Ce ne peut être que , ou de ce que leur partie terreuse est en plus grande quantité , ou de ce que leur sel alkali fixe est chargé d'une plus grande quantité de sels neutres : or , il n'y

a pas un douzième de ces sels neutres dans le sel des plus mauvaises soudes du Languedoc. On en trouve autant dans la plupart des potasses. Cette quantité, lorsque la composition est bien faite, ne nuit assurément point à la qualité du verre. Il est possible d'en faire du très-bon & du très-beau avec le sel alkali fixe du *varec*, qui est chargé de plus de la moitié de son poids, de sel marin & de sel admirable de Glauber. C'est donc uniquement dans la plus grande proportion de terre, qu'il faut chercher la cause de la différence essentielle de nos soudes à celle d'Alicante. La composition de parties égales de beau sable, & des meilleures soudes d'Espagne, où le sel alkali fixe est à peu près en même quantité que la terre, se *fritte* bien, blanchit facilement à un feu de réverbère, se fond sans peine, & produit un verre passablement transparent. Parties égales de beau sable & des soudes ordinaires du Languedoc, se *fittent* très-mal, restent toujours d'un jaune brun, ne peuvent fondre au feu le plus violent, & si l'on diminue la dose du sable, elle font un verre peu transparent, & d'une couleur vert-jaune très-désagréable. La magnésie ne sert, dans ce cas, qu'à rendre le verre moins transparent, & la couleur plus insupportable.

D'où vient que les dernières donnent un produit si différent des premières? Ce ne peut être certainement que parce qu'elles ont environ deux parties de terre contre une de sel alkali fixe. Dans l'emploi du sel alkali fixe, dégagé de la terre, des cendres, les différences disparaissent, toutes les difficultés sont levées.

Mais, comment extraire le sel des soudes, diront peut-être quelques maîtres de verreries, sans augmenter nos dépenses? Cela seroit difficile, si je leur proposois la méthode de *Néri*, même celle de *Kunckel* (1).

(1) V. les p. 2, 11, & 307 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

Je vais leur en communiquer une beaucoup plus simple, & moins dispendieuse (Voyez la 4^e. fig.). On met la soude pulvérisée, une partie sur huit parties d'eau, dans la chaudière B 1, aux trois quarts pleine d'eau. L'eau est assez chaude pour dissoudre le sel avec facilité, & s'en charger : mais ne pouvant bouillir, elle ne sauroit empêcher une prompte précipitation de la terre. Lorsqu'elle est bien clarifiée, on la fait couler, par un robinet, dans la chaudière du milieu B 2, sous laquelle est le grand feu, & de-là, pour ne pas ralentir l'évaporation par un trop grand épaisissement de la lessive, dans la troisième chaudière, où le sel se précipite à une douce chaleur, & d'où on le prend avec une espèce d'écumoire de fer, pour le mettre à égoutter dans un canal de tole incliné sur la même chaudière. Les deux murs de séparation des fourneaux ne doivent avoir que huit pouces d'épaisseur, & chacun deux trous de deux pouces en carré sur la longueur. On ne fait le feu que dans le fourneau du milieu : les deux autres ne sont chauffés que par la chaleur qu'il leur communique, & par les braises qu'il fournit. On porte la terre de la soude dans les cases F, F : on l'arrose plusieurs fois avec de l'eau, afin d'extraire tout le sel alkali fixe qui pourroit y être resté, & on fait rentrer l'eau des petits bassins dans la chaudière B 1. L'extraction du sel ne coûtera pas trois deniers par livre. Quatre hommes, avec l'équivalent d'une corde de charbonete, peuvent en extraire mille livres dans vingt-quatre heures.

Il n'y a rien de plus expéditif, pour pulvériser la soude, qu'un *boccard*, soit à eau, soit à vent. Cette machine est trop connue, pour ne pas me croire dispensé d'en faire la description (1).

Le crystal est d'autant plus beau, que le sel alkali

(1) Les sodes ordinaires du Languedoc se vendent cette année de cinquante sols à trois livres le cent pèsant.

fixe a été mieux purifié. Mais en quoi doit consister cette purification ? Suivant les auteurs de l'art de la verrerie , & un grand nombre de chymistes , elle consiste à dissoudre & à dessécher plusieurs fois , par l'évaporation , le sel alkali fixe. Il y en a qui prescrivent de le dissoudre , de filtrer la dissolution , & d'en faire l'évaporation jusqu'à cinq fois (1). Cette méthode est ennuyeuse , très-dispendieuse , & insuffisante. Elle est coûteuse , non seulement par le temps , les instrumens , & le bois qu'elle exige ; mais principalement par la déperdition du sel alkali fixe qu'elle occasionne : il n'en reste pas les deux tiers , & encore font-ils chargés d'une plus grande quantité de sels neutres. Une seule dissolution suffit pour séparer assez parfaitement la partie saline de la partie terreuse. La terre qu'on obtient dans les différentes dissolutions , est moins la preuve de l'insuffisance de la première dissolution , que de la décomposition du sel alkali fixe. Quand même le sel alkali fixe retiendrait une petite quantité de la partie terreuse , cela n'est d'aucune conséquence , comme nous le verrons plus bas.

Il importe d'extirper radicalement le principe colorant grossier , la matière grasse ; & les dissolutions , filtrations & évaporation répétées , ne sçauroient le faire. On y réussit infiniment mieux , en moins de temps & sans perte , par la calcination , en exposant toutes les parties du sel alkali fixe à une flamme vive & claire , jusqu'à ce qu'il ait , étant refroidi , une couleur bleuâtre. Le fourneau à calciner le sel alkali fixe , dont *Kunckel* a donné le plan dans ses remarques sur les notes de *Merret* , peut être employé (2) ; mais il est très-difficile , pour ne pas dire impossible , d'éviter que les cendres & charbons du bois , ne se mêlent , par le *tislar* , avec le sel alkali fixe , & qu'il ne s'en perde une cer-

(1) V. la p. 101 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

(2) V. *Id.* p. 319.

taine quantité. Celui dont je joins ici le plan (*fig. 5c.*) n'a point cet inconvénient ; & je puis assurer qu'il produit le même effet avec moitié moins de bois. Une fois échauffé , on pourra y calciner , par vingt-quatre heures , environ cinq milliers de sel alkali fixe ; quatre ou cinq cent livres dans deux heures , avec une corde de charbonette , ou des fagots. La seule attention qu'on doit avoir au commencement de la calcination , c'est de bien remuer le sel avec un *rable* de fer , pour prévenir la fusion aqueuse , qui retarderoit l'opération. Le sel alkali fixe de la soude a un avantage sur la potasse ; il attire avec moins de rapidité , l'humidité de l'air : les maîtres de verrerie peuvent le conserver longtemps dans des vaisseaux de bois propres , sans craindre aucune altération , & sans être dans la nécessité de le calciner de nouveau ; pour que la potasse se conserve sèche dans des vaisseaux , il seroit indispensable de les goudronner en dehors.

Peu de personnes soupçonnent qu'il soit nécessaire d'ajouter au sable & au sel alkali fixe , une terre alkalinne , pour avoir du bon & beau verre. C'est elle cependant qui procure le parfait mélange , donne du *corps* au verre , le rend solide , & en facilite la dépurat. Le sable & le sel alkali fixe , à moins qu'on ne mette trop de ce dernier , donnent dans la fonte une composition trop pâteuse , pour que les matières puissent se mêler intimément , & que le sel de verre puisse se dissiper & emporter avec lui le principe colorant grossier. Une des meilleures terres alcalines qu'on puisse employer , est la chaux éteinte à l'eau & bien blanche. Au rapport de *Kunckel* , la craie est depuis longtemps en usage dans les verreries de l'Allemagne (1). La chaux produit dans le verre le même effet que la terre alcaline des cendres des végétaux , qu'on a rendu parfaitement

(1) V. la p. 101. de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

blanche. L'une & l'autre donnent au verre plus de fluidité dans la fusion, plus de solidité & la couleur jaune, si elles sont en grande quantité. La chaux & la terre des végétaux portent, dans le verre, d'autant moins de couleur, qu'elles ont été calcinées plus longtemps à une flamme bien-claire.

Je ne connois point d'auteur qui ait parlé du *grosfil* ou *caffon*; & les maîtres de verrerie les ont condamnés à n'entrer que dans la composition du verre commun. Les pièces cassées du plus beau crystal, ou du verre blanc crystallin, ne servent qu'à la composition de la *pivette*, ou du verre blanc commun. Ce préjugé est très-nuisible à l'art de la verrerie: il augmente nécessairement d'un quart le prix du crystal, & du verre blanc crystallin. Les *caffons*, loin d'altérer les compositions de la même espèce, les bonifient, en facilitent la dépuracion, & rendent le crystal, ou le verre crystallin qui en résulte, plus net, plus solide & plus brillant. Il est surprenant qu'on n'ait pas plutôt entrevu cette vérité: elle me paroît une suite nécessaire du principe assez généralement reçu, que le crystal est d'autant meilleur & d'autant plus beau, qu'il a éprouvé plus longtemps l'action du feu, ou qu'il a été un plus grand nombre de fois éteint dans l'eau. Les seules attentions que demande l'emploi du *caffon*, sont 1°. de les purger de toute matière hétérogène, *mors de canne*, terre, larmes, pierres, &c.: 2°. de l'écraser bien menu: 3°. que les *caffons* soient le produit d'une composition de la même nature que celle où on les fait entrer: 4°. qu'ils ne fassent jamais plus du tiers de la composition: 5°. de les mêler exactement avec les autres matières.

Dans les compositions des trois premières matières ci-dessus, la couleur bleue, que donne constamment le sel alkali fixe, se marie avec la couleur jaune que donne la chaux ou la terre alkaline des végétaux, & il en résulte un verd plus ou moins foncé, à raison de

la proportion des matières, & du degré de ténuité du principe colorant. On est assez généralement persuadé que la *manganèse* purifie le verre, en est le *savon*. & anéantit la couleur verte ; mais je doute que ce soit d'après un examen bien réfléchi. La couleur verte reparoît aussitôt que la couleur rouge de la *manganèse* a été dissipée, & je n'ai jamais vu que le verre eût rien gagné. Il me paroîtroit plus naturel de penser que la combinaison des trois couleurs simples, bleue, rouge & jaune, produit le blanc dans le verre. Si la chaux domine, ou que les matières de la composition n'aient pas été bien purifiées, le verre est jaune ou verd-jaune : si les matières ont été purifiées avec soin, & si le sel alkali fixe domine par rapport à la chaux, le verre sera bleu. Il en est de même de la *manganèse* : la plus foible nuance de son rouge, toutes choses égales d'ailleurs, donne au verre la blancheur la plus agréable. Je me suis assuré, par des expériences répétées, que l'extinction tant vantée de la *manganèse* dans le vinaigre, n'ajoute rien à sa bonté (1). La *manganèse solide* de Piémont est la meilleure qu'on connoisse. Si *Césalpin*, *Henckel*, *Linnaeus* & *Wallérius*, &c., avoient eu occasion de l'examiner convenablement, ils n'auroient pas mis ce minéral au nombre des mines de fer (2). On trouve, dans les *Miscellanea Berolinensia* 1740, un excellent mémoire de M. Pott sur cette matière.

Les matières qu'on ajoute ordinairement, dans les compositions, à celles dont nous venons de parler, n'y sont d'aucune nécessité. Il n'y a que le beau *saffre* qui soit utile pour prévenir la couleur jaune dans le verre, où on auroit fait entrer des matières mal purifiées, ou une trop grande quantité de chaux.

Il n'y a rien de moins uniforme, dans les auteurs

(1) V. la p. 53 de l'art de la verr. trad. franç. in-4^o.

(2) V. la p. 48 du prem. vol. de la minér. de *Wallérius*.

& dans les verreries , que la composition du verre (1). Chaque maître fondeur a ses doses & sa *recette*. Dans les verreries de *Bayel* en Champagne & du *Novion* en *Thiérache* , on met parties égales de sable & de *potasse* ; dans celles de *l'Etembac* , dans les *Vosges* , parties égales de sable , de chaux & de *potasse*. D'où peut venir une si grande différence ? Vraisemblablement de ce que *M. Drulanvaux* , auquel nous devons en France l'établissement des verres blancs façon de Bohême , a un fourneau de fusion qui chauffe assez bien , & que *M. *** & les ***** en ont qui chauffent très-foiblement. N'ayant rien de déterminé sur la construction & sur la forme des fourneaux , sur la nature & la préparation des matières , sur la vraie dépuracion du verre , il étoit impossible d'avoir quelque chose de fixe & de satisfaisant sur les proportions de la composition. L'expérience même ne seroit qu'à nous jeter dans de nouvelles obscurités , ou qu'à nous affermir dans nos erreurs. *M. *** soutenoit que sa composition étoit bonne , parce que , pour peu qu'il diminuât la proportion de la *potasse* ou *salin* , elle fondoit mal , ou le verre ne pouvoit se travailler. La composition de *M. *** étoit bonne relativement à son fourneau , mais elle étoit très-mauvaise en elle-même ; puisque le verre qui en résultoit étoit peu clair , peu brillant , peu solide , très-susceptible d'humidité , ressuoit le sel , se décomposoit à la longue , & le pied creux des verres à boire se remplissoit dans le magasin , & sans communication sensible avec l'air extérieur , d'une liqueur saline ou dissolution de sel , partie alkali fixe , partie neutre. On n'observe rien de semblable dans le verre de *M. Drulanvaux* , par la raison sans doute que son fourneau donne une chaleur suffisante , propre à pro-

(1) V. l'art de la verr. de *Néri* , *Merret* & *Kunckel* , celui de *Blancourt* , la p. 177 de la lithog. de *M. Pott* , & la p. 136 du tom. V. des élém. de chym. de *Boerhaave*.

duire, avec une moindre dose de fondant, une pénétration réciproque, un mélange intime des matières essentielles, & une assez grande fluidité, pour que le sel de verre puisse s'élever, se dissiper, & emporter avec lui la majeure partie du principe colorant grossier. Les défauts des compositions trop *tendres*, trop chargées de sel alkali fixe, ne seroient pas, à beaucoup près, si sensibles, dans les verreries où l'on auroit un bon fourneau. L'action, longtemps continuée, d'un feu très-violent en feroit même disparaître le plus grand nombre. Il ne manqueroit au crystal & au verre crystillin, que la dureté & un peu de solidité. Les meilleurs fourneaux ne sçauroient corriger les défauts d'une composition trop maigre. On a beau continuer le feu le plus violent, le mélange des matières est toujours imparfait, le verre inégalement solide, plein de bulles, très-susceptible de *rouille*, & se laisse difficilement travailler. Il n'y a jamais assez de fluidité pour que les matières essentielles se dissolvent intimement, & que le sel de verre puisse se dissiper.

Parties égales de la meilleure soude, de sable blanc ou de gris, de cassons de la même espèce, & cinq onces pour cent de manganèse; parties égales de beau sable, de chaux bien calcinée, de *potasse* blanche, de cassons de la même espèce, & quatre onces pour cent de manganèse; trois parties de sable très-blanc & très-pur, deux parties de sel alkali fixe, de la *soude* ou de *potasse* très-purifiée, une partie de cassons de la même espèce, une demi partie de chaux calcinée avec la dernière exactitude, & quatre onces pour cent de manganèse, forment ordinairement, au moyen d'un bon fourneau, les meilleures compositions pour le verre blanc commun, pour le verre blanc fin, crystillin, & pour le crystal. Je dis *ordinairement*, parce que la *soude* & les sels alkalis fixes peuvent être plus ou moins chargés de sels neutres, qui ne font jamais un tout

homogène avec le sable & la chaux , au moins ceux dans la composition desquels entre l'acide vitriolique ou celui de sel marin.

Il seroit sans doute à souhaiter que nous eussions une règle sûre pour nous diriger sur un point aussi délicat & aussi important. Je vais communiquer un moyen de trouver les proportions les plus avantageuses des fondants , qui m'a toujours parfaitement réussi. Je fais deux ou trois livres de composition dans les proportions ci-dessus , pour le sable , la terre végétale ou la chaux , les cassons , la manganèse , & je diminue la dose du fondant. Lorsque j'ai trouvé le point où cette composition , mise dans un petit creuset sur l'ouvreau , fond simplement pendant le temps d'un *affinage* , j'ajoute un dixième de fondant , & le verre qui en résulte a les qualités que je desire. Il est solide , très-net , très-brillant , & conserve très-bien le poli.

La *fritte* n'est autre chose que la calcination de la composition , & cette calcination ne sert uniquement qu'à mêler les matières & à leur enlever le principe colorant grossier. Il est indispensable de *fritter* les compositions où l'on a fait entrer la *soude* en nature ; mais les autres compositions n'en ont aucun besoin , si les matières ont été bien calcinées séparément. Le mélange peut s'en faire aussi exactement hors du fourneau que dans le fourneau. L'usage de mettre la *manganèse* dans le verre , après la fonte , ne me paroît pas mériter d'être suivi. Il est rare qu'il ne produise pas des veines rouges , & que les *pilons* , la *bale* , les *fers* , dont on se sert pour faire le mélange , n'altèrent pas la couleur du verre. Si l'on trouve que la manganèse , simplement mêlée avec les autres matières , ne soit pas assez fixe , on n'a qu'à l'incorporer , par la fusion , avec le sable & le sel alkali fixe , à la manière de *smalte* ou du *bleu d'émail*. Au lieu de *manganèse* , on mettra , dans la composition , du verre
pilé

pilé très-rouge. La fritte, ou la composition, ne gagne à être gardée, qu'autant qu'on la fait passer par une seconde calcination.

Avant de mettre la *fritte* ou la composition dans les creusets, il importe que le fourneau soit très-chaud. Le feu la pénétrant inégalement, elle fondroit avec moins de facilité. La méthode d'enlever le *fiel de verre* à la première fonte, me paroît mauvaise. Ce sel facilite la fusion & la dépuracion de la seconde fonte. J'ai toujours trouvé utile de ne faire la seconde & la troisième fonte, que lorsqu'il ne paroît plus de bulles dans les *larmes d'essai*. Le verre se dépure beaucoup mieux & plus promptement. Si le sel de verre se trouve abondamment sur la dernière fonte, il est avantageux de l'enlever avec une *poche de fer*, parce qu'il corrode les creusets. Le *fiel de verre* est le plus cruel ennemi que le maître de verrerie ait à redouter. Il est la cause des *bulles*, du *point*, de l'*empetit*, du *vésignage*, de l'*engélé*, du *vergetage*, des *nuages*, des *graisses*, du *laitieux*, du *feuilletage*, de l'*humide*, du *ressuage*, du défaut de solidité, de la *rouille* ou *plombé* du verre, de la dégradation inégale, quelquefois de la *fiacture des creusets*. Ce seroit un très-grand bien qu'il n'en restât point dans le verre; mais il seroit, je pense, très-fâcheux qu'il n'y en eût pas une petite quantité dans le sel alkali fixe. Il dispose les matières à la fusion, en facilite le parfait mélange, contribue infiniment à la dépuracion du verre, entraîne avec lui les matières hétérogènes, surtout le principe colorant grossier. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à faire fondre avec du *suin* le verre qui, par son séjour dans le fond des fourneaux de fusion, est devenu noir & opaque. Par ce moyen, on lui rendra sa transparence & sa couleur naturelle, & on lui enlèvera même la vertu électrique qu'il avoit au plus haut degré. On voit par là que l'usage où sont quelques verreries d'a-

jouter du sel marin aux compositions de verre grossier, n'est point à mépriser. Le sel admirable de *Glauber* & le tartre vitriolé produiroient les mêmes effets; & même le dernier mérite la préférence, à raison de sa plus grande fluidité. Voyez p. 175 & 176 de l'Examen des pierres de *M. Pott*.

Les sçavans & les maîtres de verrerie, regardant le *suin* ou *fiel de verre*, avant l'excellent mémoire de *M. Pott* déjà cité, comme un *sel alkali superflu*, & ne soupçonnant même pas le plus grand nombre de ses mauvais effets, ne pouvoient conseiller & employer que deux moyens pour le détruire, *l'extinction du verre dans l'eau* & *les longs affinages*. Ces moyens sont bons, mais l'expérience prouve qu'ils sont insuffisants. L'eau ne peut se charger de tout le sel, qu'autant que le verre seroit réduit, par l'extinction, en poussière très-fine. L'action du feu, si longtemps continuée qu'elle soit, ne forcera jamais tout le *suin* à se dissiper, si le verre n'a pas une fluidité convenable. Dans ce cas, le verre retient le *fiel de verre*, comme les *scories trop pâteuses* retiennent le métal. La seule différence qu'il y a, c'est que l'un empêche l'évaporation, & les autres la précipitation. Diverses pratiques de verreries, inventées dans d'autres vues, contribuent à la dissipation du *fiel de verre*. On met de l'*arsenic*, de l'*antimoine*, des *écorces vertes d'arbres* dans le verre en fusion. On le remue avec des bâtons verts de *frêne*, de *coudrier*, de *tilleul*, &c. dans l'idée de le *blanchir*, de détruire ses couleurs trop fortes. Ces différentes manœuvres n'ont d'effet qu'autant qu'il y a du *suin* dans le verre. Elles en facilitent le dégagement par le passage que s'ouvrent, à travers le verre, l'*arsenic*, le papier dont il est enveloppé, l'*antimoine*, les *écorces*, les parties aqueuses & l'écorce des bâtons. Le sel de verre fuit ces matières, & emporte avec lui le principe colorant grossier. Le *pilonage* qu'on fait pour mêler la man-

ganèse avec le verre , produit le même effet. Après ces opérations , le verre du haut des creufets est très-bouillonneux , & se trouve chargé de moitié plus de *juin* que celui du milieu ou du fonds des creufets. On peut s'en assurer par l'expérience. Ces moyens ne fçauroient jamais remplir parfaitement leur objet. On ne doit se flatter de détruire entièrement le fel de verre , qu'autant que la composition aura été faite dans des proportions convenables , & qu'on emploira un feu très-violent & assez longtems continué ; qu'il y aura , dans la composition , le fel alkali fixe nécessaire pour *faturer* complètement , s'il est permis de se servir de ce terme , à un feu très-violent , le sable & la chaux. La parfaite dépuracion se fera alors , sans qu'on soit obligé d'avoir recours à aucun autre moyen. Je crois avoir indiqué ci-dessus ces proportions , ou la vraie méthode pour les trouver dans tous les cas.

D'après ce que nous venons de dire , on voit ce qu'on doit penser de ce qu'ont écrit les auteurs de l'Art de la verrerie sur les *couleurs* du verre ; que *le feu les consume* ; qu'il faut les prendre , pour ainsi dire , à la volée ; que les minéraux seuls peuvent les fournir , &c (1). Les couleurs ne dispaissent que parce que la matière colorante , ayant plus d'affinité avec le *juin* qu'avec le verre , se combine & se dissipe avec lui. Lorsque le verre est exactement purgé des sels neutres , *tartre vitriolé* , *sel marin* & *sel admirable de Glauber* , les couleurs sont fixes au feu le plus violent & le plus longtems continué. La couleur jaune que donnent la fuye , les charbons des végétaux & des animaux est aussi fixe que le bleu du *saffre* & le rouge de la *manganèse*. Le sel de verre me paroît le plus sûr moyen qu'on puisse employer pour amener les couleurs au ton & à la nuance désirée.

(1) V. les p. 254 , 255 , 262 , &c. de l'art de la verr. trad. in-4°. , & la p. 275 du tom. V. des élém. de chym. de Boerhaave.

Toute espèce de bois est bonne pour fondre & cuire le verre , pourvu qu'il soit bien sec & d'une grosseur moyenne , de trois à quatre pouces de tour. Les bois sans écorce de *hêtre* , de *charme* , de *bouleau* , de *cérisier* , de *frêne* , donnent la flamme la plus claire : ils sont à préférer surtout pendant le travail du verre. Les cendres du *peuplier* , du *tremble* , du *saule* , du *tilleul* , sont si légères qu'elles voltigent dans le fourneau , & s'attachent à la surface des pièces qu'on chauffe ; ce qui en altère l'uni & le brillant. Le bois de chêne , à moins qu'il ne soit extraordinairement sec , pétille ; & ces petites explosions jettent des charbons dans les creusets. Il n'est point de matière combustible d'un effet aussi sûr ni aussi prompt que le bon charbon de pierre ou de terre. Les crytalleries Angloises , & les manufactures de glaces de Londres & de *Tourlaville* en Normandie , l'employent avec le plus grand succès. J'ai toujours trouvé que quatorze livres pesant de bon charbon de terre produisoient autant d'effet que vingt-cinq livres pesant de bois sec. Il n'y a certainement pas à craindre que , dans un fourneau bien proportionné , les fumées & les cendres du charbon puissent altérer la couleur du verre. Nous avons en abondance d'excellent charbon de terre. Le bois devient de jour en jour plus rare & plus précieux. Je pense qu'on ne sçauroit trop encourager les établissemens de verrerie où l'on ne brûleroit que du charbon de terre.

Quelque matière combustible qu'on employe , il est essentiel de *servir* le fourneau avec beaucoup d'égalité. La moindre négligence de la part du *tiseur* retarde considérablement les affinages. Quand , depuis environ une heure , il ne paroît plus de bulles dans les *lumes* d'essai , & que le verre blanc ou le crystal est au point de couleur qu'on souhaite , on peut arrêter le feu. Il est de conséquence de *marger* (bou-

cher les ouvertures) exactement le fourneau , & de le tenir *marginé* pendant trois ou quatre heures. On néglige mal à propos cette attention. Elle contribue beaucoup à la perfection de *l'affinage* ; non en donnant au verre la facilité de chasser l'air de ses interstices par son affaissement , & par-là , d'être exempt de bulles , comme on le croit communément ; mais pour donner matières étrangères , & principalement au *jet de verre* : dont le verre pourroit encore être chargé , le temps de monter au haut des creufets.

Il seroit assez inutile de s'étendre ici en observations sur la manière de travailler le verre , & cela nous meneroit beaucoup trop loin. Je me contenterai de recommander aux ouvriers beaucoup de propreté.

De quelque importance que soit la *recuifon* du verre ; je ne connois point d'auteur qui en ait parlé. Dans les verreries , on en a des idées fort obscures : il y en a même où l'on croit qu'elle s'opère par une espèce de vertu occulte. Il est aisé de s'assurer qu'elle n'est autre chose qu'un refroidissement amené par degrés insensibles ; mais il est très-difficile de procurer au verre cette espèce de refroidissement , surtout aux pièces d'épaisseur inégale & aux *plateaux*. C'est sans doute cette difficulté qui fait que les plats des verres à vitres des cinq grosses verreries de Normandie sont mal recuits. Quelques minces qu'ils soient , on n'en trouve presque pas un qui soutienne convenablement l'impression du diamant , qui ne soit plus fragile qu'il n'est de la nature du verre de l'être. La manière dont on recuit ordinairement les grosses pièces , lanternes , grands verres d'optique , plateaux , &c. doit produire une mauvaise *recuifon*.

Lorsqu'on a mis dans un fourneau très-chaud toutes les pièces qu'on veut y mettre , on le *marque* avec soin. Il est certain que les verres reçoivent , & presque subitement , un plus haut degré de chaleur ,

après qu'on a *margé*. Il suffit de regarder dans le fourneau, pour s'en convaincre. Outre la *casse* & le *plati*, qui résulte ordinairement de cette augmentation de chaleur, on a très-longtemps à attendre le parfait refroidissement du fourneau; à moins, comme c'est l'usage généralement reçu, qu'on ne commence à *démarger*, à donner de l'air, au bout de deux ou trois jours. L'air extérieur se précipite avec d'autant plus de rapidité, dans le fourneau, qu'il est plus chaud. Il est aisé de sentir que ce *démargement* fait éprouver aux verres un changement trop subite, pour qu'ils n'en souffrent pas. Aussi trouve-t-on toujours un grand nombre de pièces cassées, & toutes mal recuites. Il y a un moyen très-simple d'obvier à tous ces inconvénients ruineux pour le maître de verrerie, & très-préjudiciables à l'intérêt du public, de bien recuire, & en moins de jours, dans le même fourneau. Tout le changement consiste à faire percer, au milieu de la voûte, une ou plusieurs ouvertures de cinq pouces de diamètre, suivant la grandeur du fourneau. Par exemple, une ouverture suffit, pour le fourneau, à étendre & à recuire les verres plats soufflés sans *boudine* ou en façon de Bohême. Elle doit être percée au milieu de la voûte A, (*fig. 6^e*). Aussitôt qu'on a *margé* les ouvertures F, G & l'entonnoir C, on *démarge* l'ouverture de la voûte, & ensuite on *marge* les deux extrémités du *rifar*. Par ce moyen, ni le *plati* ni la *casse* ne sont à craindre; les verres sont recuits aussi parfaitement qu'il est possible, & dans l'espace de quatre ou cinq jours, au lieu de huit au moins qu'il en falloit pour les recuire mal. On sent aisément que le degré de chaleur ne peut augmenter, & qu'il diminue insensiblement; que la chaleur se dissipe par l'ouverture de la voûte, sans que l'air extérieur puisse s'introduire dans le fourneau, d'une manière marquée.

Dans les verreries en plats, en tables coulées ou

soufflées avec ou sans *boudine*, en lanternes, en crystal, &c. les ouvriers ont de trop longs intervalles de repos. Le plus grand nombre est au moins trente heures de suite, & trois fois par semaine, sans travailler. Cette oisiveté est funeste au bon travail. Il est rare qu'elle ne produise le relâchement, qu'elle ne conduise à la dissipation & même à la débauche. Le public est aussi intéressé que les maîtres de verrerie à voir ce vice déraciné. Nous en fournirons des moyens également utiles & honnêtes.

Il se perd beaucoup de feu dans les mêmes verreries. Les ouvreaux sont presque toujours libres; les *arches* ni les fourneaux à recuire ne sont jamais pleins; les premières sont assez souvent vuides. Il seroit à souhaiter de pouvoir profiter de ce feu perdu. L'art y gagneroit. Nous avons des hommes d'un talent exquis pour mettre l'émail en œuvre; mais il faut que ces grands artistes préparent & fassent eux-mêmes, à grands frais, leurs couleurs & leurs émaux, ou qu'ils les achètent de l'étranger. Que de facilités ne trouveroit-on pas, à cet égard, dans nos verreries! Les hommes, les fourneaux & le feu nécessaires pour calciner l'étain & le plomb, ou pour faire le *crocus des métaux*, si on le préfère à la chaux d'étain & de plomb dans la confection de l'émail blanc, n'y coûtent rien. On y trouve des moyens admirables de préparer toutes les couleurs, & de bien dépurer & cuire l'émail. Nous aurions sûrement des émaux à bas prix, &, à très-peu de chose près, d'un même degré de fusibilité, puisqu'on employeroit toujours le même feu & la même composition. Les peintres gagneroient encore, vraisemblablement, des couleurs plus belles & un plus grand nombre de nuances.

L'art de peindre à la mosaïque est le seul qui puisse transmettre, sans altération, à la postérité la plus reculée la mémoire des grands événemens & des hom-

mes illustres. Ses productions se jouent également des injures de l'air, de l'action de l'humidité & des refluxes de la malice ou de la jalousie. Il n'est point de voyageur qui ne soit enchanté des chefs-d'œuvre, en ce genre, qu'on voit à Rome. Cet art n'est presque connu en France que de nom. Pourquoi ne l'a-t-on pas forcé à sortir de l'Italie ? Nous avons certainement un grand nombre d'artistes en état de s'y distinguer : ce ne sont point les talens qui manquent, c'est la matière qui manque aux talens. Donnez-leur les différens verres colorés nécessaires, vous verrez des prodiges. Il est certain que ces verres colorés pourroient être fabriqués très-commodément, & à très-bas prix, dans nos verreries.

Nous ne pouvons nous flatter de voir nos porcelaines au degré de perfection dont elles sont susceptibles, que lorsqu'un grand nombre de personnes s'occuperont de cette branche de l'art de la verrerie. Je ne pense pas que nos verreries doivent entreprendre ces grandes pièces dont le mérite consiste dans l'élégance de la forme, dans la correction du dessein, la richesse de la composition, la hardiesse du pinceau, l'harmonie des couleurs. Ces prodiges de l'art & du goût sont réservés à la manufacture de *Sèvres* ; mais je crois que les verreries pourroient fabriquer une porcelaine moyenne, assez belle & d'un prix assez modique, pour faire cesser les importations ruineuses de la porcelaine commune de la Chine. L'argille pure, bien préparée & combinée convenablement avec la poussière très-blanche de caillou ou de sable, pourroit leur fournir une assez bonne composition de porcelaine & un *verre de craye* très-bien épuré, & leur donner une *belle couverte* (1). Cette porcelaine ne différeroit pas, autant qu'on pourroit peut-être se l'ima-

(1) V. les p. 103, 605, &c. de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

giner, de celle de la Chine. Du moins conviendrait-on qu'elle lui ressembleroit en ce qu'il n'entreroit point de sels dans la pâte, ni de métaux dans la couverte. Les maîtres de verrerie n'auroient besoin que d'un peintre & d'un petit nombre de modèles. Ils trouveroient, sans qu'il leur en coûtât rien, ou presque rien, tout le reste chez eux; ouvriers, bâtimens, fourneaux, & tous les degrés de feu nécessaires.

La conversion du fer en acier, par la *cémentation*: pourroit encore fournir aux verreries un moyen très-utile de profiter de leur feu perdu, & d'occuper leurs ouvriers sans les fatiguer. On sçait que tout l'art consiste à rendre le fer plus dur, & à le charger d'une plus grande quantité de *phlogistique* atténué par le moyen des sels (1). Cette industrie auroit un double avantage pour le royaume: le verre feroit à plus bas prix, & nous ne serions pas obligés de tirer annuellement, pour des sommes très-considérables, d'acier des pays étrangers.

Ces moyens de mettre à profit le trop long repos des ouvriers & le feu perdu des verreries, mériteroient d'être traités avec plus d'étendue; mais je ne pourrois m'y arrêter plus longtemps, sans passer les bornes prescrites à ce mémoire. Je dois avertir que je n'ai pas prétendu confondre avec les ouvriers les gentilshommes qui travaillent le verre. Il ne paroîtroit pas juste qu'ils ne fussent pas mieux payés & qu'ils travaillassent autant que de simples roturiers. Le desir naturel qu'ils ont de se distinguer assure à l'art & aux maîtres de verrerie un ample dédommagement.

Ce ne sont pas les seuls avantages que puisse nous procurer l'art de la verrerie perfectionné. Nous devons en attendre une connoissance plus intime & plus étendue des sels, du phlogistique, des couleurs, des ter-

(1) V. l'art de convertir le fer en acier, par le célèbre M. de Réaumur.
Prix. 1760.

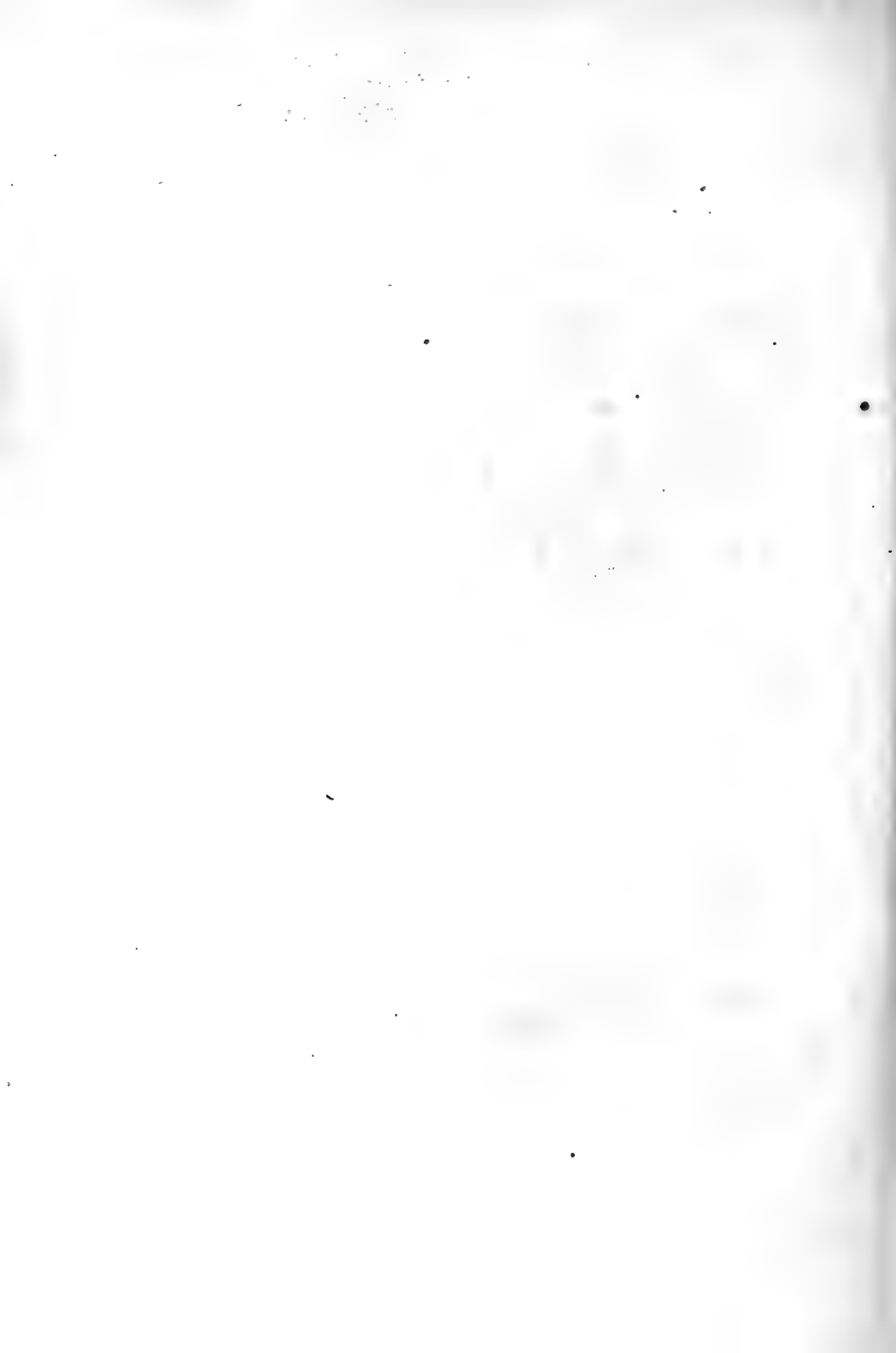
res , des minéraux , de la métallurgie , de la pyrotechnie , &c. Il ne seroit pas difficile de prouver que cette assurance n'est pas destituée de fondement.

De nouvelles lumières peuvent sans doute beaucoup contribuer à la perfection de l'art de la verrerie ; mais elles ne le conduiront jamais , sans le secours du gouvernement , au plus haut degré dont il est susceptible. Cet art est trop précieux , & le ministère trop éclairé , pour que nous ne soyons pas persuadés qu'il lui accordera toutes les facilités dont il a besoin ; qu'en sa faveur il honorera de sa protection les nouvelles recherches ; qu'il encouragera l'industrie ; qu'il animera le talent. Il ne me conviendrait assurément point de me permettre à cet égard aucun détail. Je dois me renfermer dans les vœux *du bon citoyen* quia donné lieu à ce mémoire (1). Je me flatte qu'on me pardonnera d'avoir passé rapidement sur plusieurs points de la matière que j'ai osé entreprendre de traiter. Elle est d'une trop grande étendue pour être épuisée dans un mémoire. Je puis me rendre le témoignage de n'avoir rien négligé de ce que j'ai sçu ou cru de plus important à dire. Si je ne craignois d'ennuyer , il me seroit aisé d'établir , par des états de dépense & de produit , qu'au moyen de ce que j'ai dit sur les fourneaux & les creufets , sur les matières à convertir en verre & sur la manière de le faire , on peut faire du beau verre durable , à moitié meilleur marché , que le verre de nos verreries les plus estimées. J'aurois peut-être pu éviter l'ennui par l'application circonstanciée de mes principes à quelque branche particulière de l'art de la verrerie , par exemple , à la *glacerie* ; mais cela m'auroit mené beaucoup trop loin. Si je pouvois soupçonner que ce fût une perte

(1) Un bon citoyen , qui n'a point voulu qu'on le nommât , remit ; en 1759 , une somme de cinq cent livres à l'Académie Royale des Sciences , pour récompenser celui qui , au jugement de cette compagnie , auroit le mieux répondu à la question qui fait le titre de ce mémoire.

SUR LA PERFECTION DE LA VERRERIE. 51
pour le public , je ne tarderois pas à le dédommager.
Rien ne sçauroit plus me flatter que d'y être encour-
ragé par l'Académie , & de mériter son suffrage sur ce
que j'ai l'honneur de lui présenter.





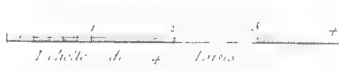


fig. 1.

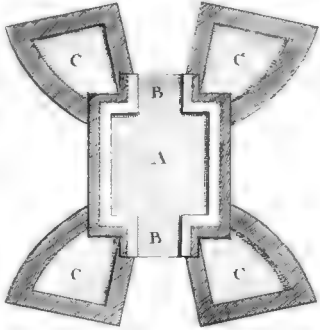


fig. 2.

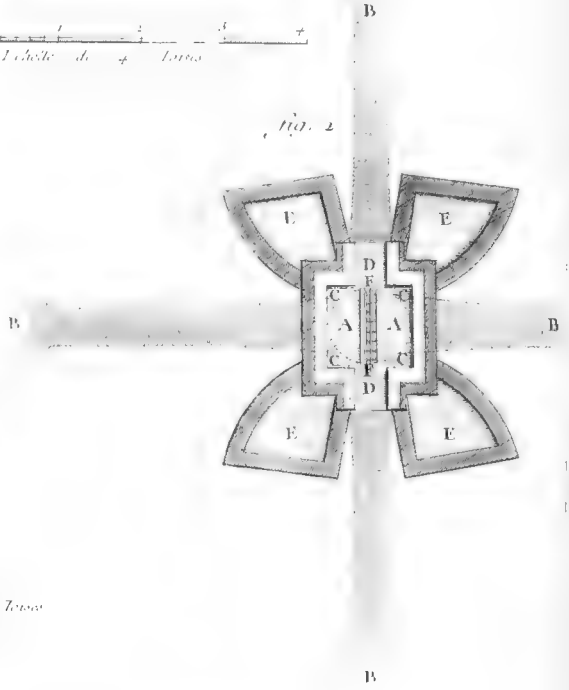
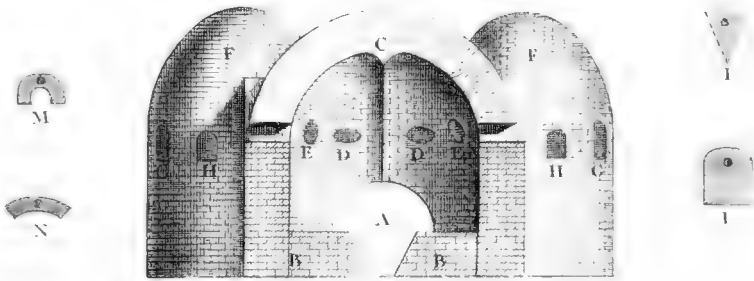
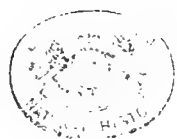
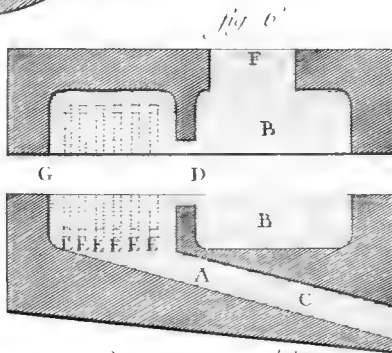
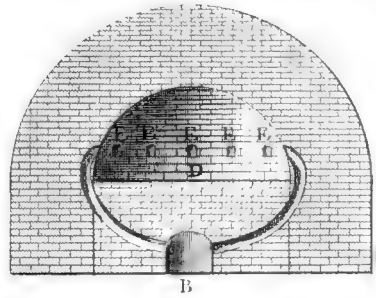
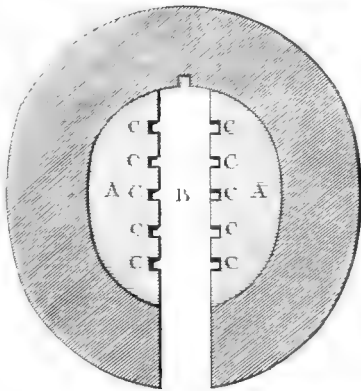
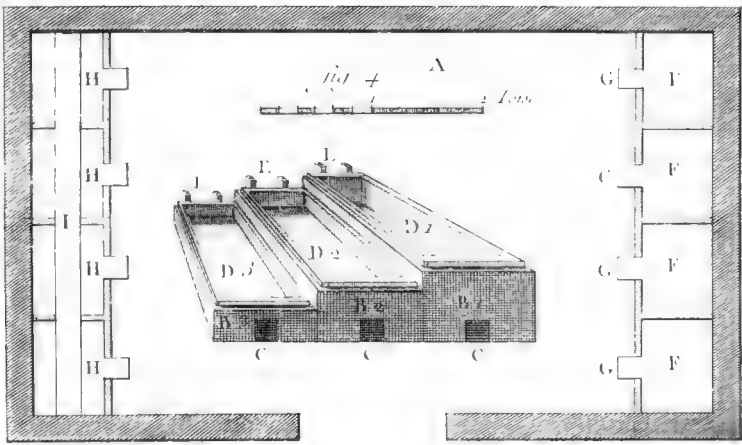


fig. 3.



Echelle de 4 Toises







RECHERCHES

SUR

L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX;

*ET quelles bonnes qualités on en peut procurer,
à un Vaisseau*

POUR CONCOURIR au Prix proposé par l'ACADÉMIE
ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1761.

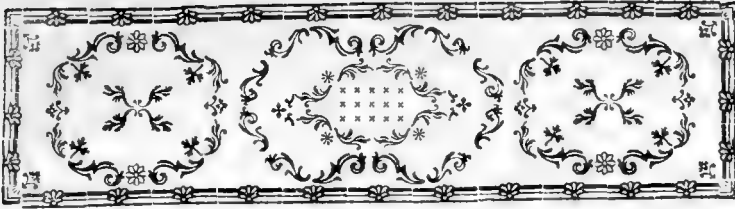
Par M. JEAN - ALBERT EULER.

Cette pièce est l'une des deux entre lesquelles le Prix a été
partagé.

Prix de 1761.

A





RECHERCHES

SUR

L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX.

ET quelles bonnes qualités on en peut procurer à un Vaisseau.

. . . *Ipsi numerumque locumque carinis
Præcipiunt onerum.*

VIRG.

1. LA construction d'un vaisseau renferme d'abord la détermination de la partie qui est destinée à entrer dans l'eau lorsque le vaisseau est en équilibre. Dès que le plan ou devis d'un vaisseau est formé, on y distingue la partie qui doit être enfoncée dans l'eau de celle qui doit se trouver au-dessus de l'eau. Donc il faut que le plan, qui sépare ces deux parties de chaque vaisseau, devienne horizontal étant à fleur d'eau; delà est déterminé le centre de gravité de la partie submergée, en n'en considérant que le volume, dont la connoissance est de la dernière importance. On sçait que le poids du vaisseau entier doit être égal au poids d'un volume d'eau égal à la partie submergée, & que le centre de gravité du vaisseau entier doit tomber dans la ligne verticale, qui passe par le centre de la partie submergée: ces deux

conditions déterminent tant la quantité de la cargaison, qu'une certaine manière de l'arranger, afin que les deux centres, dont je viens de parler, se trouvent dans la même ligne verticale.

2. Soit $ABCD$ la section verticale d'un vaisseau; tirée par le milieu de la proue à la poupe, & qui partage le vaisseau dans ses deux moitiés égales & semblables, & tirant la droite MN à fleur d'eau pour avoir la partie submergée $MNDC$, son centre O tombera sans doute dans cette section verticale; & la droite verticale QP , tirée par ce point O , sera celle où le centre de gravité du vaisseau tout entier doit tomber, qui soit en G . La position donc de ces deux lignes droites MN & PQ avec le point O , étant donnée par la construction même du vaisseau, on en connoit d'abord la quantité de la cargaison; & ensuite il la faut distribuer dans le vaisseau en sorte que le centre de gravité du vaisseau entier tombe précisément dans la ligne verticale PQ , ce qui est la première règle indispensablement nécessaire pour l'arrimage.

3. Or, il est évident que cette règle peut être observée d'une infinité de manières différentes; d'abord le point G n'étant point prescrit, puisqu'il suffit qu'il se trouve dans la verticale PQ , est susceptible d'une infinité de variations; & ensuite, en quelque lieu qu'on l'ait fixé, il est encore possible de varier à l'infini l'arrangement des fardeaux. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considérer deux fardeaux quelconques a & b , dont le commun centre de gravité soit en γ ; & il est clair qu'en changeant la position de ces deux fardeaux, en sorte que leur centre de gravité demeure en γ , ce qui peut se faire d'une infinité de manières, le centre de gravité du vaisseau entier n'en souffrira aucune altération. Cette variabilité ayant lieu à l'égard de deux fardeaux quelconques, à plus forte raison tous les fardeaux ensemble admettront une variation infinie,

nonobstant que le centre de gravité du vaisseau entier soit fixé dans un point donné G .

4. Cependant cette variation dans l'arrangement des fardeaux est limitée par plusieurs circonstances : d'abord on ne sçauroit placer un fardeau dans un lieu qui est déjà rempli par d'autres ; & si toute la cavité du vaisseau étoit remplie de fardeaux , aucun changement n'y auroit plus lieu , à moins qu'on ne veuille échanger la position de deux fardeaux d'un même volume , en transportant l'un dans la place de l'autre , ce qui ne causeroit en effet aucun changement , qu'entant que ces deux fardeaux différeroient en poids. Ensuite , il y a des fardeaux dont la destination leur assigne la place , comme les canons , qui ne souffrent aucun changement dans leurs lieux. Mais quelque limitée que soit cette variabilité , il reste ordinairement assez de quoi faire des changemens dans l'arrimage des vaisseaux , & d'en tirer quelque profit pour la navigation.

5. En tant que le lieu du centre de gravité du vaisseau entier est susceptible de quelque variation , toutes les bonnes qualités d'un vaisseau exigent unanimement qu'on fasse descendre ce point aussi bas qu'il est possible. Ensuite ce point G étant fixé ainsi , il est certain que les changemens dont l'arrimage fera encore susceptible , peuvent contribuer à augmenter ou à diminuer les bonnes qualités d'un vaisseau. Pour juger bien de cet important article , il faut avoir égard aux trois momens d'inertie du vaisseau entier rapportés à trois axes perpendiculaires entr'eux , tirés par le centre de gravité G , dont l'un est vertical QP . & les deux autres horizontaux , tirés selon la longueur & la largeur du vaisseau. Tout changement fait dans l'arrimage n'influe sur les qualités d'un vaisseau qu'en tant que les momens d'inertie , par rapport à ces trois axes du vaisseau , en sont altérés.

6. Je nomme ici le moment d'inertie d'un vaisseau

par rapport à un axe, tiré par son centre de gravité; l'expression analytique qui résulte lorsqu'on multiplie toutes les masses élémentaires dont le vaisseau est composé, chacune par le carré de sa distance audit axe, & qu'on rassemble tous ces produits dans une même somme. Cette somme pourra donc toujours être exprimée par le produit d'une masse ou d'un poids multiplié par le carré d'une ligne. Ainsi, posant la masse ou le poids d'un vaisseau = M , je nommerai dans la suite le moment d'inertie par rapport à l'axe tiré, selon la longueur du vaisseau = $Ma a$, celui par rapport à l'axe tiré selon la largeur = Mbb , & celui par rapport à l'axe vertical $QP = Mcc$. Il s'agit donc de déterminer quel effet doit produire dans les qualités du vaisseau un changement causé dans quelqu'un de ces trois momens d'inertie. Or, je suppose encore que tous les fardeaux soient tellement fixés, chacun dans le lieu qui lui a été assigné, qu'ils y demeurent constamment malgré les agitations & les secouffes du vaisseau.

7. Voilà donc le plan que je me propose de suivre dans mes recherches sur la question proposée. Premièrement, j'examinerai en détail quels avantages on retire en baissant davantage le centre de gravité G , ou en diminuant sa hauteur au-dessus du centre O du volume submergé. Ensuite, je chercherai quelle influence doit avoir sur les qualités du vaisseau un changement causé dans quelqu'un des trois momens d'inertie $Ma a$, Mbb , Mcc , afin qu'on puisse juger en quel cas leur augmentation ou diminution est plus avantageuse. Tout cela est fondé sur les principes de mécanique, par lesquels on sçait que la détermination de tous les mouvemens & de toutes les agitations dont un vaisseau est susceptible, dépend de ces trois momens d'inertie.

I.

Des changemens causés dans la hauteur du centre de gravité du vaisseau.

8. La hauteur du centre de gravité du vaisseau entre principalement dans la détermination de la stabilité du vaisseau, qui est la force dont le vaisseau s'oppose à toute inclination. Pour établir une mesure juste de cette stabilité, on considère le vaisseau tant soit peu incliné de sa situation naturelle ; & alors le vaisseau, en vertu de sa stabilité, fera des efforts pour se rétablir ; & tant que l'inclinaison est extrêmement petite, on comprend aisément que cet effort est proportionnel à l'angle de l'inclinaison. Soit ω l'angle de l'inclinaison ; & l'effort du vaisseau pour se rétablir, sera exprimé par un moment de force, ou le produit d'une force par une ligne. Soit donc P ce moment de force dont le vaisseau tâche de se rétablir, ou, ce qui revient au même, lequel étant justement appliqué au vaisseau en sens contraire, est capable de maintenir le vaisseau dans son état incliné ; & , puisque P est proportionnel à l'angle ω , prenons la quantité $\frac{P}{\omega}$ pour la mesure de la stabilité.

9. Pour rendre cette expression tout-à-fait déterminée, on exprime l'angle de l'inclinaison ω par l'arc de cercle qui est sa mesure, en supposant le rayon du cercle = q . Ainsi, la valeur de la lettre ω devenant un nombre absolu, la fraction $\frac{P}{\omega}$, qui représente la stabilité, sera encore homogène avec le produit d'une force par une ligne, dont les momens de force sont exprimés dans la mécanique. Donc réciproquement quand on dit que la stabilité d'un vaisseau = Q , on entend que ce vaisseau étant incliné à un petit angle ω ,

le moment de force dont il tend à se rétablir est $= Q\omega$; ou bien pour incliner le vaisseau à cet angle ω , il faut employer un moment de force $= Q\omega$. D'où l'on voit que plus la stabilité Q est grande, plus aussi le vaisseau résistera à l'inclinaison; & il semble que cette manière est la plus propre à exprimer l'idée qu'on peut se former de la stabilité.

10. Mais le vaisseau pouvant être incliné d'une infinité de manières différentes, selon tous les sens auxquels l'inclinaison peut arriver, chaque manière a sa propre stabilité. Toute inclinaison se fait au tour d'un axe horizontal qui passe par le centre de gravité du vaisseau. Lorsque le vaisseau s'incline en avant ou en arrière, l'inclinaison se fait autour de l'axe horizontal tiré selon la largeur du vaisseau; & lorsque l'inclinaison se fait vers l'un ou l'autre côté, c'est l'axe horizontal tiré selon la longueur du vaisseau autour duquel le vaisseau s'incline. Et comme on peut concevoir une infinité d'axes moyens, le vaisseau est susceptible d'une inclinaison autour de chacun d'eux, selon la direction & l'application des forces qui produisent l'inclinaison. Or, l'on sçait que les vaisseaux résistent moins à l'inclinaison vers les côtés qu'à celle en avant ou en arrière, d'où l'on voit que chaque axe autour duquel l'inclinaison arrive, est doué d'une stabilité particulière.

11. Pour déterminer la stabilité par rapport à tous les axes autour desquels l'inclinaison se peut faire, je me rapporte aux règles & démonstrations que feu M. Bouguer & M. Euler ont données dans leurs traités
 Fig. 2. sur cette matière. On considère la section horizontale du vaisseau faite à fleur d'eau, qui soit la figure géométrique $MKNL$, dont on cherche le centre de gravité J , par lequel on tire une droite RS parallèle à l'axe autour duquel on veut que l'inclinaison se fasse. On conçoit ensuite cette surface divisée en des éléments infiniment petits, comme Z . dont on multi-
 plie

plie chacun Z par le carré de sa distance ZV à l'axe RS ; ce qui donne une formule différentielle, dont il faut chercher l'intégrale, qui sera exprimée par une grandeur géométrique de quatre dimensions qui soit $=U$. Suivant l'analogie avec les idées mécaniques, on peut nommer cette quantité le moment de la surface $MKNL$ par rapport à l'axe RS ; puisque si on la regardoit comme une lame infiniment mince, ce seroit, en effet, son moment d'inertie.

12. Maintenant, ayant trouvé ce moment U de la section faite à fleur d'eau par rapport à l'axe RS , autour duquel le vaisseau s'incline, il faut sçavoir 1°. le poids du vaisseau tout entier, qui soit $=M$. 2°. le volume de la partie submergée, qui soit $=V$; & 3°. l'élévation du centre de gravité du vaisseau G au-dessus du centre du volume enfoncé O , laquelle distance GO (*fig. 1.*) soit $=h$. Cela posé, on a trouvé que la stabilité du vaisseau par rapport à l'axe RS est $=M \left(\frac{U}{V} - h \right)$, d'où il est clair que le vaisseau n'a de la stabilité qu'en tant que la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, qui est une ligne, puisque U est une grandeur de quatre dimensions & V de trois, surpasse la ligne h ou l'intervalle GO . Et s'il arrivoit que par rapport à quelque axe RS , l'expression $\frac{U}{V}$ fût moindre que h , ou $U < Vh$, le vaisseau n'auroit aucune stabilité; & la plus petite force seroit capable de le renverser autour de cet axe. Il est donc de la dernière importance d'empêcher que la quantité $\frac{U}{V} - h$ ne devienne trop petite, ou même négative.

13. On tâche de remédier à cet inconvénient, en élargissant la section faite à fleur d'eau, autant que les

circonstances le permettent ; mais ici, il faut considérer le vaisseau comme déjà construit ; & la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, comme donnée, il ne s'agit donc que de diminuer l'intervalle $GO = h$ autant qu'il est possible. En supposant que le vaisseau ait déjà de la stabilité, de quelque manière que la cargaison soit arrangée, on voit que c'est toujours un très-grand avantage lorsqu'on peut changer l'arrimage, en sorte que le centre de gravité G en soit porté plus bas. Si, par un changement fait dans l'arrimage, on peut réussir de déprimer le centre de gravité en g par l'intervalle $Gg = \nu$, la stabilité en sera augmentée de la quantité $M\nu$; & cela, pour toutes les inclinaisons possibles, puisque ce n'est que la grandeur U qui dépend de l'axe, autour duquel le vaisseau s'incline : les autres quantités M , & h demeurant toujours les mêmes.

14. Or, le profit qu'on retire de l'abaissement du centre de gravité G est d'autant plus considérable, que l'excès de la quantité $\frac{U}{V}$ sur l'intervalle $GO = h$ est plus petit. Si cet excès s'évanouissoit, ou que le vaisseau n'eût point du tout de stabilité, le moindre abaissement apporteroit presque un gain infini, la stabilité devenant infiniment plus grande qu'elle n'a été auparavant. C'est donc à l'égard de cet axe par rapport auquel la stabilité est la plus petite, que le profit tiré de l'abaissement de ce centre est le plus considérable ; cela arrive toujours à l'égard de l'axe tiré selon la longueur du vaisseau, par rapport auquel la stabilité est ordinairement trop petite ; de sorte qu'on est souvent obligé de souffler le vaisseau pour procurer une plus grande valeur au moment U . Dans ce cas donc, quelque peu qu'on puisse abaisser le centre de gravité G , l'avantage est toujours très-considérable, quoiqu'il ne soit presque d'aucune conséquence à l'égard de la stabi-

bilité par rapport à l'axe tiré selon la largeur du vaisseau, laquelle est la plus grande en elle-même. Mais il faut aussi observer que le vaisseau éprouve dans ce sens les plus grands efforts auxquels il doit résister.

15. Il est bon de remarquer ici, que si la section faite à fleur d'eau étoit un parallélogramme rectangle, dont la longueur = MN , & la largeur = KL ; & qu'on posât son aire = $2D$, le moment par rapport à l'axe de la longueur MN seroit = $\frac{1}{6} D. KL^2$. Or si la figure de cette section étoit un rhombe de la longueur MN & de la largeur KL , le moment par rapport à l'axe MN seroit = $\frac{1}{12} D. KL^2$, en posant l'aire de la section = $2D$. Donc puisque la section tient ordinairement un milieu entre ces deux figures, son moment par rapport à l'axe de la longueur MN , ou la grandeur U sera contenu entre les limites $\frac{1}{6} D. KL^2$ & $\frac{1}{12} D. KL^2$. En effet, si la figure de la section est une ellipse décrite par les points M, N, K, L , son moment par rapport à l'axe MN sera = $\frac{1}{3} D. KL^2$.

16. Posons la hauteur de la partie submergée, ou le tirant d'eau = k ; & si la figure de cette partie étoit cylindrique, ou que toutes les sections horizontales fussent égales entr'elles, le volume V de cette partie seroit = $2Dk$; or, si la figure étoit pyramidale, terminée en bas par une pointe, on auroit $V = \frac{2}{3} Dk$; mais supposant le volume enfoncé, terminé en bas par une ligne droite horizontale qui représente la quille; en sorte que les sections verticales & perpendiculaires à la quille soient des triangles, le volume V deviendroit = Dk . Quoique ce volume soit ordinairement vers le milieu plus enflé que dans cette dernière figure, on en rabat par le devant & le der-

nière ; de sorte qu'on ne se trompera pas beaucoup en supposant la solidité de ce volume $V = Dk$. Par conséquent, supposant $U = \frac{1}{9}D.KL^2$, la stabilité par rapport à l'axe de la longueur MN sera $= M \left(\frac{KL^2}{9K} - h \right)$.

17. Il est donc toujours de la dernière importance de déprimer le centre de gravité G aussi bas qu'il est possible, aussi bas que les autres circonstances liées avec la destination du vaisseau le permettent ; puisque nous venons de voir, que si, par quelque changement fait dans l'arrimage, on peut déprimer le centre de gravité G de la quantité $Gg = \nu$, la stabilité du vaisseau, par rapport à tous les axes, prend un accroissement $= M\nu$, qui est d'autant plus considérable, que la stabilité, par rapport à quelque axe, sera plus petite par elle-même. Si, par ce moyen, la stabilité, par rapport à l'axe tiré selon la longueur du vaisseau, laquelle est la plus petite, pouvoit être rendue deux fois plus grande, les inclinaisons autour de cet axe seroient réduites à la moitié, les forces inclinantes demeurant les mêmes. Or, on sçait qu'un tel avantage est d'une très-grande importance, puisqu'il met le vaisseau en état d'y employer des manœuvres plus efficaces pour la navigation. Et, comme il n'y a nulle considération qui s'oppose à la dépression du centre de gravité, on tire cette règle générale pour l'arrimage, qu'il faut toujours déprimer le centre de gravité autant qu'il est possible.

18. Or, cela s'exécute, premièrement, en plaçant chaque fardeau aussi bas qu'il est possible. Pour connoître tout l'avantage qu'on en retire, envisageons un fardeau dont le poids soit $= A$, qui, étant en a , puisse être porté plus bas par l'espace $= \alpha$; l'on sçait que le centre de gravité du vaisseau descendra par l'espace $= \frac{A\alpha}{M}$, la lettre M marquant le poids du vaisseau.

tout entier, dont l'augmentation de la stabilité du vaisseau qui en résulte sera $= Aa$. Or, puisque le centre de gravité G ne doit pas être écarté de la ligne verticale QP , le poids A ne sauroit être transporté plus bas que dans la ligne verticale, qui passe par son lieu a . Mais si le même fardeau ne peut pas être déprimé verticalement, on n'a qu'à prendre deux ou plusieurs fardeaux, & les mettre plus bas, en sorte que leur commun centre de gravité descende par une ligne verticale; & alors, la somme de ces fardeaux multipliée par la descente de leur commun centre de gravité, donnera l'accroissement de la stabilité.

19. Mais, si toutes les places inférieures sont déjà occupées par d'autres corps, il y a encore un autre moyen de porter plus bas le centre de gravité G , qui a lieu lorsqu'on trouve dans des places supérieures des fardeaux spécifiquement plus pesans que dans les inférieures: alors, on n'a qu'à changer la situation de deux tels fardeaux du même volume, & de transporter le fardeau plus pesant à la place du plus léger, & réciproquement. L'accroissement de la stabilité sera donc égal au produit de la différence des poids de ces deux fardeaux multipliés par la différence des hauteurs. D'où l'on tire cette règle pour l'arrimage, qu'il faut non seulement disposer tous les fardeaux aussi bas qu'il est possible; mais qu'il faut assigner les places les plus profondes aux fardeaux les plus pesans spécifiquement, en observant cependant toujours la règle principale, que le centre de gravité G demeure dans la ligne prescrite QP .

I I.

Des avantages qu'on peut retirer en changeant le moment d'inertie du vaisseau par rapport à l'axe vertical.

20. Le moment d'inertie du vaisseau par rapport à

l'axe vertical n'entre en considération, que lorsqu'il s'agit du mouvement avec lequel le vaisseau tourne autour de cet axe. Car, en général, tant qu'on ne considère que le mouvement progressif d'un corps quelconque, produit par des forces quelconques, il n'y a que la masse du corps, & son centre de gravité qui entre dans le calcul. Mais quand le corps a, outre cela, un mouvement de rotation, qu'on peut toujours envisager comme se faisant autour d'un certain axe, qui passe par son centre de gravité, ce mouvement de rotation tire sa détermination du moment d'inertie qui convient au corps par rapport à cet axe. Or, en tant que le corps nage sur l'eau, tant sa situation, que les inclinaisons qu'il éprouve, dépendent uniquement de la position du centre de gravité, du centre de volume de la partie enfoncée, & de la figure de la section faite à fleur d'eau; les momens d'inertie, par rapport à quelque axe que ce soit, n'y font d'aucune conséquence.

21. Donc, dès que par l'arrimage le centre de gravité du vaisseau est fixé dans le point *G*, le mouvement progressif & les inclinaisons causées par les forces, auxquelles il est exposé, en peuvent être déterminés; & il est indifférent à cet égard de quelle manière tous les fardeaux soient disposés dans la cavité du vaisseau. Or, il est clair qu'un si grand nombre de fardeaux, dont on charge ordinairement les vaisseaux, peut être arrangé d'une infinité de manières différentes, sans que le centre de gravité du vaisseau en souffre le moindre changement; & toutes ces manières sont absolument indifférentes à l'égard du mouvement progressif du vaisseau, & de toutes les inclinaisons dont il est susceptible. Mais ces divers arrangemens des fardeaux peuvent changer très-considérablement les momens d'inertie qui résultent, lorsqu'on multiplie tous les poids élémentaires dont le vaisseau est composé, chacun par le carré de sa distance à l'axe par rapport auquel on demande le moment d'inertie. Donc, en tant qu'un ou

plusieurs fardeaux changent de distance à l'égard de cet axe, le moment d'inertie deviendra ou plus grand ou plus petit.

22. Ce n'est donc que le mouvement de rotation autour de l'axe vertical, sur lequel influe le moment d'inertie par rapport à cet axe; & partant, nous examinerons combien l'action du gouvernail dépend de ce moment; le mouvement de rotation étant toujours ou l'effet du gouvernail, ou devant être détruit par son moyen. La force, ou plutôt le moment de force, dont le gouvernail agit sur le vaisseau pour le faire tourner, dépend uniquement de la force, & de son application par rapport à l'axe vertical tiré par le centre de gravité du vaisseau; & le moment d'inertie n'y a aucune influence. Mais, pour déterminer le mouvement même qui est produit par un tel moment de force, il faut tenir compte du moment d'inertie qui convient au vaisseau par rapport à l'axe vertical. On sçait, par les principes de mécanique, que l'accélération de ce mouvement de rotation est proportionnel au moment de force qui produit ce mouvement, divisé par le moment d'inertie du vaisseau par rapport à l'axe vertical; où il faut remarquer que, sous le moment de force, on comprend aussi la résistance que le vaisseau éprouve dans ce mouvement, dont il faut soustraire le moment du moment des forces actuelles.

23. Plus donc le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical sera grand, plus deviendra petite l'accélération du mouvement de rotation, & plus on pourra diminuer ce moment d'inertie, plus l'accélération du mouvement de rotation sera augmentée dans la même raison. Donc, pour rendre l'effet du gouvernail plus prompt, il faut diminuer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du vaisseau; & partant, si nous concevons deux vaisseaux, d'ailleurs

parfaitement égaux , & semblables , tant par rapport à la construction qu'à la situation du centre de gravité , mais tellement différens par rapport à l'arrimage que dans l'un , le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical soit plus grand que dans l'autre , celui où ce moment d'inertie est plus petit , tournera plus promptement , étant sollicité par les mêmes forces , & obéira plus vite à l'action du gouvernail.

24. On compte parmi les bonnes qualités d'un vaisseau , lorsqu'il obéit promptement à l'action du gouvernail , & l'on tâche de lui procurer cette bonne qualité par une avantageuse construction & une figure propre à ce dessein. Mais , le vaisseau étant déjà construit , l'arrimage nous fournit encore un excellent moyen de porter cette bonne qualité à un plus haut degré. Il s'agit d'arranger les fardeaux , en sorte que le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical en soit diminué autant qu'il est possible , sans pourtant que le centre de gravité du vaisseau entier en soit altéré. Il est clair qu'on remplit cette condition , lorsqu'on approche , autant que les autres circonstances le permettent , tous les fardeaux vers l'axe vertical , qui passe par le centre de gravité du vaisseau. Et , puisque le moment d'inertie dépend du carré des distances , l'avantage en pourra devenir assez considérable.

25. Concevons un fardeau , dont le poids = A , qui soit éloigné de l'axe vertical de la distance = a , & qu'on l'y approche de l'intervalle = b , de sorte que sa distance à présent = $a - b$. Puisque , auparavant , le produit Aaa entroit dans l'expression du moment d'inertie , & qu'à présent , ce produit est = $A(a - b)^2$. on voit que , par ce changement , le moment d'inertie sera diminué de la quantité = $A(2ab - bb) = Ab.(2a - b)$. Or , par le transport de ce fardeau , le centre de gravité du vaisseau G souffrira quelque déplacement ; mais on n'aura qu'à transporter aussi de l'autre côté

côté, un fardeau d'une manière semblable, pour rétablir le centre de gravité dans son juste lieu; & par ce moyen, on obtiendra une double diminution du mouvement d'inertie.

26. Il faut donc changer à la fois la place de deux ou plusieurs fardeaux, en sorte que leur commun centre de gravité demeure au même lieu, afin que le centre de gravité du vaisseau tout entier n'en soit point altéré. Soient $A, B, C, D, \&c.$ les poids de ces fardeaux; qu'avant le changement, leurs distances à l'axe vertical soient $a, b, c, d, \&c.$; & après le changement $a', b', c', d', \&c.$ Cela posé, le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical sera diminué de la quantité $A(a^2 - a'^2) + B(b^2 - b'^2) + C(c^2 - c'^2) + D(d^2 - d'^2) + \&c.$ Or, en faisant le calcul selon les règles connues pour la détermination du centre de gravité, on trouve que cette diminution du moment d'inertie devient la plus grande, lorsqu'on approche ces corps autant entre eux qu'il est possible; & s'il étoit possible de les réduire dans un seul point, c'est-à-dire dans leur commun centre de gravité, on obtiendrait le plus petit moment d'inertie, qui s'évanouiroit même, si toute la masse du vaisseau étoit réunie dans son centre de gravité.

27. La raison de cela est fondée sur la règle assez connue que les auteurs cités ci-dessus ont donnée, pour trouver le moment d'inertie de plusieurs corps par rapport à un axe quelconque. Cette règle porte qu'ayant tiré par le commun centre de gravité de ces corps une ligne parallèle à l'axe proposé, on cherche leur moment d'inertie à l'égard de cette ligne, en multipliant chaque corps par le carré de sa distance à cette ligne; & qu'à ce produit, il faut encore ajouter le produit de la somme de tous les corps multipliée par le carré de la distance entre le commun centre de gravité des corps & l'axe proposé. Donc,

si ces corps changent de place, en sorte que leur commun centre de gravité demeure au même point, leur moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du vaisseau en souffrira précisément le même changement que leur moment d'inertie, pris à l'égard de la ligne verticale tirée par leur commun centre de gravité.

28. Donc, considérant deux fardeaux quelconques dans le vaisseau, dont il est permis de changer la situation, le moment d'inertie du vaisseau par rapport à son axe vertical en souffrira la même augmentation ou diminution que le moment d'inertie de ces deux corps, seulement par rapport à la ligne verticale tirée par leur commun centre de gravité. La diminution donc que nous avons ici en vue, dépend non seulement de ce qu'on approche ces deux corps de leur commun centre de gravité, mais aussi de leur position à l'égard de la ligne verticale. Si ces deux corps se trouvoient dans la même ligne verticale, leur moment d'inertie par rapport à cette ligne seroit nul, & partant, incapable de recevoir aucune diminution, quoiqu'on approchât ces deux corps tout-à-fait ensemble. Ainsi, deux fardeaux situés dans une ligne verticale, ne sçauroient servir à diminuer le moment d'inertie du vaisseau, par rapport à son axe vertical.

29. De-là, il s'ensuit que le moyen le plus propre pour diminuer le moment d'inertie d'un vaisseau, à l'égard de son axe vertical, c'est de choisir des fardeaux situés dans un même plan horizontal, & de les rapprocher entr'eux dans ce même plan, autant que les autres circonstances le permettent, en sorte pourtant que leur commun centre de gravité ne souffre aucune altération. Et il est clair que, plus ces fardeaux sont pesants & plus on les pourra rapprocher, plus aussi fera grande la diminution du moment d'inertie du vaisseau par rapport à son axe vertical. Par

ce moyen , lorsqu'on l'exécute dans tous les plans horisontaux , & qu'on y rapproche ensemble tous les fardeaux , autant qu'il est possible , on procurera aux vaisseaux la qualité d'obéir à l'action du gouvernail , dans le plus haut degré dont ils sont susceptibles par rapport à l'arrimage. Cependant , il faut bien que la construction même du vaisseau concoure principalement à ce but ; car si le vaisseau a déjà par sa construction le défaut qu'il ne se laisse pas diriger par le gouvernail , on ne sçaitroit prétendre de le corriger par l'arrimage , quoiqu'on puisse diminuer ce défaut par ce moyen.

III.

Des avantages qu'on peut retirer , en changeant le moment d'inertie du vaisseau par rapport aux axes horisontaux.

30 La question aboutit au même , à l'égard de tous les axes horisontaux ; & partant , pour fixer mes recherches , j'aurai en vue l'axe horisontal tiré selon la longueur du vaisseau. Or le moment d'inertie , par rapport à cet axe , n'entre en considération qu'entant que le vaisseau se meut , en tournant autour de cet axe : ce mouvement est connu sous le nom de *roulis* ; de sorte que le mouvement du roulis dépend du moment d'inertie du vaisseau par rapport à l'axe tiré selon la longueur. Je ne parle pas ici ni des forces , qui inclinent le vaisseau autour de cet axe , ni de la force qui tend à le rétablir dans sa situation naturelle , & qui se trouve dans la stabilité du vaisseau qu'il est bon d'augmenter autant qu'il est possible , comme j'ai remarqué ci-dessus. Mais ici , quelles que soient ces forces , il ne s'agit que du mouvement & de sa modification , en tant qu'il dépend du moment d'inertie à l'égard de l'axe horisontal tiré selon la longueur du vaisseau.

31. L'accélération du mouvement de roulis étant en raison composée de l'inclinaison du vaisseau, de la stabilité, & réciproquement du moment d'inertie, qui entre ici en considération, on voit que le roulis doit être d'autant plus rapide, que ce moment d'inertie sera plus petit, la stabilité du vaisseau demeurant la même. Donc, si l'on veut calmer la rapidité de ce mouvement, il faut tâcher de grossir ledit moment d'inertie, autant qu'il est possible. Or, on compte parmi les bonnes qualités d'un vaisseau, que son mouvement de roulis, de même que celui de tangage, ne soit pas impétueux ou trop violent; & partant, il sera toujours fort avantageux d'augmenter autant qu'il est possible les momens d'inertie du vaisseau par rapport à tous les axes horisontaux. Donc, puisqu'on sçait que tous ces momens sont déterminés par les deux, qui se rapportent à l'axe de longueur & à celui de largeur, cette augmentation se réduit aux deux momens d'inertie par rapport aux axes tirés selon la longueur & la largeur du vaisseau.

32. Voyons donc quels changemens faits dans l'arrimage du vaisseau sont les plus efficaces pour ce dessein. Or, par ce que je viens de démontrer par rapport au mouvement autour de l'axe vertical, il est clair que, pour augmenter le plus efficacement le moment d'inertie par rapport à un axe horisontal quelconque, il faut choisir des fardeaux situés dans un plan vertical perpendiculaire à cet axe, & les éloigner dans le même plan chacun des autres, ou bien chacun de leur commun centre de gravité, autant qu'il est possible, sans pourtant changer le lieu de leur commun centre de gravité. De cette manière, le moment d'inertie en question sera augmenté d'une quantité qu'on trouvera de cette sorte. Soient *A, B, C*, les poids des fardeaux qu'on aura éloignés de leur commun centre de gravité; & *a, b, c*, leurs distances de ce centre au

commencement. Or, après les changemens, leurs distances soient $a + a$, $b + \epsilon$, $c + \gamma$; & l'augmentation du moment d'inertie fera $A a (2 a + a) + B \epsilon (2 b + \epsilon) + C \gamma (2 c + \gamma)$. D'où l'on voit que cette agmentation pourroit bien devenir assez considérable.

33. Un tel changement peut être exécuté à l'égard de tous les axes horifontaux du vaisseau; mais ordinairement; il n'y en a qu'un seul, autour duquel on voudroit que les agitations devinssent moins impétueuses. C'est communément le tangage, qui, par sa violence, est le plus funeste à la navigation, & qu'il est bon d'adoucir autant qu'il est possible; car, puisque la stabilité du vaisseau est la plus grande par rapport à son axe de largeur, les forces qui rétablissent le vaisseau lorsqu'il est incliné autour de cet axe, sont les plus grandes, & produisent par conséquent une grande rapidité dans le mouvement, à moins que le moment d'inertie par rapport à cet axe ne soit très-grand. Par cette raison, puisqu'il n'est pas à propos de diminuer la stabilité du vaisseau à l'égard de cet axe, il ne reste que l'arrimage, qui puisse servir à adoucir le tangage. Pour cet effet, il faut tâcher d'éloigner tous les fardeaux autant qu'il est possible, de l'axe horifontal tiré selon la largeur du vaisseau, ou bien d'appliquer en particulier à cet axe la règle que je viens de prescrire pour tous les axes horifontaux en général.

34. Donc, en tant que l'arrimage d'un vaisseau; après avoir réduit le centre de gravité dans la ligne droite prescrite, & l'avoir abaissé autant qu'il est possible, est enorce susceptible de quelque changement, on aura à observer les deux règles suivantes.

La première exige qu'on rapproche, autant qu'il est possible, tous les fardeaux vers l'axe vertical du vaisseau tiré par son centre de gravité.

La seconde, exige qu'on éloigne, autant qu'il est possible, tous les fardeaux de l'axe horizontal tiré par le centre de gravité, selon la largeur du vaisseau.

La première règle sert à procurer au vaisseau la qualité d'obéir plus aisément à l'action du gouvernail, & l'autre à tranquilliser les agitations causées par le tangage; & ce sont les seuls objets, sur lesquels l'arrimage a quelque influence.

35. Or, ces deux règles peuvent quelquefois devenir contraires; de sorte qu'en satisfaisant à l'une, on s'écarte de l'autre. Donc, pour faire voir comment on peut satisfaire à toutes les deux à la fois, autant qu'il est possible, soit G le centre de gravité du vaisseau, AB son axe horizontal tiré selon la longueur, CD l'autre axe horizontal tiré selon la largeur, & EF l'axe vertical. Que Z soit un fardeau quelconque, dont le lieu soit déterminé par les trois coordonnées $G X = x$; $X Y = y$ & $Y Z = z$ parallèles aux axes indiqués. Maintenant, pour le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical EF , le fardeau Z fournit la partie $Z (x x + y y)$; & pour le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal de largeur CD , ce même fardeau fournit la partie $Z (x x + z z)$. Il s'agit donc de disposer les fardeaux, en sorte que la somme de toutes les formules $Z (x x + y y)$ devienne la plus petite, & la somme des formules $Z (x x + z z)$ la plus grande.

36. De-là, il est évident qu'il est possible de remplir ces deux conditions à la fois, en diminuant pour chaque fardeau Z la distance $X Y = y$, autant qu'on peut, & en augmentant en même temps la distance $Y Z = z$ autant qu'on peut, sans changer la distance $G X = x$. Or y marque la distance du fardeau au plan vertical, qui passe selon la longueur du vaisseau par son centre de gravité; & puisqu'il partage le vaisseau en deux parties égales & semblables, on le peut

nommer la section diamétrale. Pour la quantité z , elle exprime la distance du fardeau au plan horifontal du vaisseau tiré par son centre de gravité, d'où nous tirons pour l'arrimage les deux règles suivantes.

1°. *Il faut approcher autant qu'il est possible tous les fardeaux vers la section verticale & diamétrale du vaisseau.*

2°. *Il faut éloigner, autant qu'il est possible, tous les fardeaux de la section horifontale du vaisseau tirée par son centre de gravité.*

Or, ces changemens doivent toujours être faits en deux ou plusieurs fardeaux à la fois, en observant la règle générale que leur commun centre de gravité n'en souffre aucune altération. Aussi, faut-il prendre garde de ne pas transporter les fardeaux, ni plus en avant, ni plus en arrière du vaisseau, afin que la quantité x demeure la même.

C O N C L U S I O N .

37. Voilà donc à quoi se réduisent les avantages qu'on peut retirer de l'arrimage des vaisseaux, dont la détermination, après les découvertes qu'on a faites dans cette science, ne demandoit plus des recherches fort profondes. Mais, si l'on vouloit pousser la question plus loin, & déterminer exactement toutes les agitations dont les vaisseaux sont susceptibles, cette recherche seroit non seulement très-profonde, mais les principes connus de mécanique y suffiroient à peine, quoiqu'il soit permis de regarder les vaisseaux comme des corps solides qui, pendant le mouvement, ne souffrent aucun changement, ni dans leur figure, ni dans l'arrangement de leurs parties. Or, de ces corps, la théorie même de leur mouvement n'est pas encore assez développée, à l'égard de tous les mouvemens de rotation dont ils sont susceptibles. Comme cette matière est étroitement liée avec la question

proposée, je me crois obligé d'ajouter sur ce sujet quelques réflexions, qui pourroient devenir, avec le temps, assez intéressantes.

38. Pour qu'un corps solide puisse tourner librement autour d'un axe, sans qu'il ait besoin d'être soutenu, il ne suffit pas que cet axe passe par le centre de gravité du corps, il faut, outre cela, que toutes les forces centrifuges, qui résultent du mouvement de tous les élémens du corps se détruisent parfaitement. Je nommerai un tel axe, autour duquel un corps peut librement tourner, sans qu'il ait besoin d'être soutenu, je le nommerai, à cause de sa grande préférence mécanique, à l'égard de tous les autres, *l'axe principal* du corps. Je ferai voir d'abord que tous les corps sont non seulement doués d'un tel axe, mais qu'ils en ont toujours au moins trois, qui sont perpendiculaires entre eux, dont je détermine la position de la manière suivante.

FIG. 3.

39. Soit G le centre de gravité du corps proposé, sa masse = M . Qu'on considère en Z un élément infiniment petit du corps dont la masse soit = dM , & qu'on détermine son lieu, à l'égard de trois axes GA , GC , GE , pris à volonté, mais perpendiculaires entr'eux, & tirés par le centre de gravité G du corps. Qu'on pose ensuite les trois coordonnées parallèles aux trois axes $ZY = z$; $YX = y$ & $XG = x$ & soit enfin la distance de l'élément au centre de gravité $GZ = V(x^2 + y^2 + z^2) = v$; or G étant le centre de gravité, les trois quantités intégrales $\int x dM$, $\int y dM$, $\int z dM$ étant étendues par tout le corps, doivent s'évanouir. Soit maintenant GJ un axe quelconque, autour duquel le corps tourne actuellement, & qui passe aussi par le centre de gravité G : qu'on détermine sa position par les angles de son inclinaison aux trois axes fixes GA , GC , GE , qui soient $JGA = \alpha$, $JGC = \beta$, $JGE = \gamma$ & qu'enfin
la

la vitesse angulaire du corps autour de cet axe GJ soit \ast ; ou bien que cette lettre \ast exprime l'angle parcouru par le mouvement de rotation dans un temps donné, par exemple dans une seconde.

40. Maintenant, pour que la droite GJ soit un axe principal du corps, il faut que les forces centrifuges à l'égard d'elle, se détruisent, la vitesse angulaire \ast avec la situation de l'axe GJ ou les angles α, β, γ demeurant invariables : c'est-à-dire, il faut que le mouvement de rotation se conserve soi-même, sans que son axe ait besoin d'être soutenu. Pour cet effet, on n'a qu'à chercher en général les forces requises pour la conservation du mouvement, lesquelles étant ensuite égalées à zéro, donneront la position de l'axe principal.

41. Qu'on considère donc le mouvement de la particule élémentaire dM en Z , & qu'on le décompose selon les trois directions Za, Zc, Ze parallèles aux trois axes fixes GA, GC, GE , les principes de mécanique donneront d'abord pour chacun d'eux, en tant qu'il n'est pas uniforme, les forces requises pour leur accélération. Pour faciliter cette décomposition, & pour la mettre dans son plus grand jour, qu'on réduise toute la recherche à la trigonométrie sphérique. Qu'on se représente donc une sphère décrite autour du centre de gravité G , avec le rayon $GZ = r$, & soient A, C, E , les vestiges des trois axes fixes sur la surface de la sphère, les arcs AC, CE, EA , seront donc des quarts de grands cercles ; ensuite que l'axe de rotation GJ passe par le point J , & que la masse élémentaire dM se trouve en Z . Cela posé, qu'on tire les arcs de grands cercles JA, JC, JE & ZA, ZC, ZE ; on auroit, si le rayon de la sphère étoit = 1 ; $JA = \alpha$; $JC = \beta$; $JE = \gamma$; ensuite $\cos.ZA = \frac{x}{r}$; $\cos.ZC = \frac{y}{r}$; $\cos.ZE = \frac{z}{r}$

FIG 4.

& partant, $\text{cof. } ZA^2 + \text{cof. } ZC^2 + \text{cof. } ZE^2 = 1$ à cause de $xx + yy + zz = vv$; on aura aussi par la même raison $\text{cof. } JA^2 + \text{cof. } JC^2 + \text{cof. } JE^2 = 1$; & puisque le rayon de la sphère est $= r$, on n'aura qu'à multiplier ensuite tous les arcs par r .

42. Or, l'élément Z se mouvant autour de l'axe GJ avec une vitesse angulaire $= v$, en tirant l'arc JZ à cause de la distance du point Z à l'axe de rotation $= r \sin. JZ$ la même vitesse sera $= v \sin. JZ$, & sa direction Zz perpendiculaire à JZ sera dans la surface de la sphère. Maintenant, pour décomposer cette vitesse selon des directions parallèles aux trois axes fixes, on n'a qu'à rechercher sous quel angle cette direction Zz est inclinée à chacun de ces trois axes; qu'on prolonge pour cet effet Zz en arc de grand cercle, jusqu'à ce que l'arc Z devienne un quart de cercle, & la droite tirée alors du centre de la sphère G au terme V , étant parallèle à la direction Zz , son inclination aux trois axes sera mesurée par les arcs de grands cercles VA, VC, VE ; & partant, cette décomposition nous fournira les vitesses selon $Za = v \sin. JZ \text{ cof. } VA$, selon $Zc = v \sin. JZ \text{ cof. } VC$, selon $Ze = v \sin. JZ \text{ cof. } VE$.

Fig. 3, & 4.

43. L'arc VZ étant un quart de cercle perpendiculaire à ZJ , l'arc VJ sera de même un quart de cercle & perpendiculaire à JZ , d'où le triangle sphérique AJV donnera $\text{cof. } AV = \text{cof. } AJV \sin. JA = \sin. AJZ \sin. JA$, & comme de la même manière les triangles CJV, EVJ fournissent $\text{cof. } CV = -\sin. CJZ \sin. JC$; $\text{cof. } EV = \sin. EJZ \sin. JE$, la considération du point V s'en allant du calcul, on trouvera les vitesses (fig. 3).
 selon $Za = + v \sin. JZ \sin. JA \sin. AJZ$;
 selon $Zc = - v \sin. JZ \sin. JC \sin. CJZ$;
 selon $Ze = + v \sin. JZ \sin. JE \sin. EJZ$;

mais la considération du triangle sphérique *AJZ* donne *sin. JZ sin. AJZ = sin. AZ sin. ZAJ*; & comme il en est de même des autres *CJZ, EJZ*, nous aurons les vitesses

selon *Za = + v sin. JA sin. ZA sin. ZAJ*;
 selon *Zc = - v sin. JC sin. ZC sin. ZCJ*;
 selon *Ze = + v sin. JE sin. ZE sin. ZEJ*.

44. Les arcs *AC, AE, CE* étant des quarts de cercle, & les angles *A, C, E* droits, on aura *cos. EAJ = sin. CAJ = $\frac{\text{cos. EJ}}{\text{sin. AJ}}$* ; *cos. CAJ = sin. EAJ*

$$= \frac{\text{cos. CJ}}{\text{sin. AJ}}; \text{cos. EAZ} = \text{sin. CAZ} = \frac{\text{cos. EZ}}{\text{sin. AZ}};$$

$$\text{cos. CAZ} = \text{sin. EAZ} = \frac{\text{cos. CZ}}{\text{sin. AZ}} : \text{de-là } \text{sin. ZAJ} = \text{sin. (EAJ - EAZ)} = \frac{\text{cos. CJ cos. EZ} - \text{cos. EJ cos. CZ}}{\text{sin. AJ sin. AZ}}$$

$$\& \text{ par la même raison } \text{sin. ZCJ} = \text{sin. (ECJ - ECZ)} = \frac{\text{cos. AJ cos. EZ} - \text{cos. EJ cos. AZ}}{\text{sin. CJ sin. CZ}}; \text{sin. ZEJ} =$$

$$\text{sin. (CEJ - CEZ)} = \frac{\text{cos. AJ cos. CZ} - \text{cos. CJ cos. AZ}}{\text{sin. EJ sin. EZ}}.$$

45 Lorsqu'on substitue ces valeurs dans les formules trouvées pour les vitesses (43), il arrive très à propos que les dénominateurs s'en vont, & les *cosinus* qui restent encore, pouvant être exprimés par les lettres *x, y, z, a, e, v*, on obtiendra la vitesse *Za = v (z cos. b - y cos. v)*; la vitesse *Zc = v (x cos. v - z cos. a)* & la vitesse *Ze = v (y cos. a - x cos. e)*, De-là, on pourroit aussi assigner la valeur de l'arc *JZ*, dont j'aurai besoin dans la suite : car le triangle *JAZ* donnant *cos. JZ = cos. JAZ sin. AJ sin. AZ + cos. AJ cos. AZ*, à cause de *cos. JAZ = cos. (EAJ - EAZ) = $\frac{\text{cos. EJ cos. EZ} + \text{cos. CJ cos. CZ}}{\text{sin. AJ sin. AZ}}$* (44), on obtiendra *cos. JZ = cos. AJ cos. AZ + cos. CJ cos. CZ + cos. EJ cos. EZ*; & partant *cos. JZ = $\frac{x \text{cos. a} + y \text{cos. e} + z \text{cos. v}}{v}$* .

46. Ayant trouvé les vitesses selon les directions fixes GA , GC , GE (fig. 3), on en peut assigner les espaces dx , dy , dz , par lesquels l'élément dM qui, à présent, est en Z , fera emporté dans le temps infiniment petit dt , sçavoir $dx = u dt (\zeta \cos. \epsilon - y \cos. \gamma)$; $dy = u dt (x \cos. \gamma - \zeta \cos. \alpha)$; $dz = u dt (y \cos. \alpha - x \cos. \beta)$ (45), lesquelles formules nous mettent en état de trouver les accroissemens de chacune de ces trois vitesses; car en prenant les quantités u , α , ϵ , γ , pour constantes, & écrivant pour dx , dy , dz , les valeurs que nous venons de marquer, nous obtiendrons :

$$d. \text{vir. } Za = u (d\zeta \cos. \epsilon - dy \cos. \gamma) = u u dt (\gamma \cos. \alpha \cos. \epsilon + \zeta \cos. \alpha \cos. \gamma - x \cos. \epsilon^2 - x \cos. \gamma^2)$$

$$d. \text{vir. } Zc = u (dx \cos. \gamma - d\zeta \cos. \alpha) = u u dt (\zeta \cos. \epsilon \cos. \gamma + x \cos. \alpha \cos. \epsilon - y \cos. \gamma^2 - y \cos. \alpha^2)$$

$$d. \text{vir. } Ze = u (dy \cos. \alpha - dx \cos. \beta) = u u dt (x \cos. \alpha \cos. \gamma + y \cos. \epsilon \cos. \gamma - \zeta \cos. \alpha^2 - \zeta \cos. \epsilon^2)$$

47. Les accélérations demandent de certaines forces pour leur production qu'il n'est pas difficile de déterminer par les premiers principes de mécanique, en vertu desquels, on trouve que l'élément dM en Z doit être sollicité par les trois forces suivantes :

$$1^{\circ}. \text{ , selon } Z a = \frac{u u dM}{2g} (\gamma \cos. \alpha \cos. \epsilon + \zeta \cos. \alpha \cos. \gamma - x \cos. \epsilon^2$$

$$- x \cos. \gamma^2); 2^{\circ}. \text{ , selon } Z c = \frac{u u dM}{2g} (\zeta \cos. \epsilon \cos. \gamma + x \cos. \alpha \cos. \epsilon$$

$$- y \cos. \gamma^2 - y \cos. \alpha^2); 3^{\circ}. \text{ , selon } Z e = \frac{u u dM}{2g} (x \cos. \alpha \cos. \gamma +$$

$y \cos. \epsilon \cos. \gamma - \zeta \cos. \alpha^2 - \zeta \cos. \epsilon^2)$, où j'ai introduit la lettre g , pour marquer la hauteur de la chute d'un corps grave dans une seconde : or, je suppose qu'on exprime les masses & les forces par des poids, & les vitesses par des espaces parcourus dans une seconde, pour ramener d'autant plus facilement toutes les déterminations à des mesures absolues.

48. Ici, il ne s'agit pas tant de ces forces absolues que de leurs momens à l'égard de nos trois axes fixes GA , GC , GE : or, le moment de ces trois forces élémentaires à l'égard de l'axe GA , est force Zc . YZ

— force $Z e. ZY = \frac{xy dM}{g} ((xz - yy) \cos \epsilon \cos \gamma + xz \cos \alpha \cos \epsilon - yz (\cos \gamma^2 - \cos \epsilon^2) - xy \cos \alpha \cos \gamma)$: de la même manière, le moment de ces forces à l'égard de l'axe GC est
 force $Z e. GX - \text{force } Z a. YZ = \frac{xy dM}{2g} ((xx - zz) \cos \alpha \cos \gamma + xy \cos \epsilon \cos \gamma - xz (\cos \alpha^2 - \cos \gamma^2) - yz \cos \alpha \cos \epsilon)$; & enfin, le moment des forces par rapport à l'axe GE est
 force $Z a. XY - \text{force } Z c. GX = \frac{xy dM}{2g} ((yy - xx) \cos \alpha \cos \epsilon + yz \cos \alpha \cos \gamma - xy (\cos \epsilon^2 - \cos \alpha^2) - xz \cos \epsilon \cos \gamma)$.

49. Tout revient donc à trouver les intégrales de ces expressions ; & puisque x, a, ϵ, γ sont constantes, les intégrales de ces trois expressions impliquent les six formules intégrales suivantes $\int xx dM, \int yy dM, \int zz dM, \int xy dM, \int xz dM, \int yz dM$, qui s'étendent sur toute la masse du corps proposé ; & comme elles ne dépendent que de la seule qualité du corps, on les pourra regarder comme connues. Nommons donc $\int xx dM = A; \int yy dM = B; \int zz dM = C; \int xy dM = D; \int xz dM = E; \int yz dM = F$; & nous aurons les momens suivans, qui sont requis pour le maintien du mouvement de rotation autour de l'axe GJ .

$$1^{\circ}. \text{A l'égard de l'axe } GA = \frac{xy}{g} ((C - B) \cos \epsilon \cos \gamma + E \cos \alpha \cos \epsilon - F \cos \alpha \cos \gamma - D \cos \gamma^2 + D \cos \epsilon^2)$$

$$2^{\circ}. \text{A l'égard de l'axe } GC = \frac{xy}{2g} ((A - C) \cos \alpha \cos \gamma + F \cos \epsilon \cos \gamma - D \cos \alpha \cos \epsilon - E \cos \alpha^2 + E \cos \gamma^2)$$

$$3^{\circ}. \text{A l'égard de l'axe } GE = \frac{xy}{2g} ((B - A) \cos \alpha \cos \epsilon + D \cos \alpha \cos \gamma - E \cos \epsilon \cos \gamma - F \cos \epsilon^2 + F \cos \alpha^2)$$

50. Maintenant, nous n'avons qu'à faire évanouir ces trois expressions pour avoir les conditions d'un axe principal, dont la position fera par conséquent

déterminée par les trois équations suivantes

$$(C-B)\cos.\delta\cos.\gamma + E\cos.\alpha\cos.\delta - F\cos.\alpha\cos.\gamma - D\cos.\gamma^2 + D\cos.\delta^2 = 0$$

$$(A-C)\cos.\alpha\cos.\gamma + F\cos.\delta\cos.\gamma - D\cos.\alpha\cos.\delta - E\cos.\alpha^2 + E\cos.\gamma^2 = 0$$

$$(B-A)\cos.\alpha\cos.\delta + D\cos.\alpha\cos.\gamma - E\cos.\delta\cos.\gamma - F\cos.\delta^2 + F\cos.\alpha^2 = 0$$

où il faut remarquer que deux de ces équations contiennent déjà la troisième, puisque la somme de la première multipliée par $\cos.\alpha$, celle de la seconde par $\cos.\delta$ & celle de la troisième par $\cos.\gamma$, s'évanouissent; il suffira donc de n'en prendre que deux, & d'y ajouter celle-ci $\cos.\alpha^2 + \cos.\delta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$.

51. Il ne nous reste donc pour la détermination des axes principaux qu'à déterminer les valeurs des trois angles α , δ , γ , par le moyen de ces trois équations trouvées. Pour en faciliter le calcul, soient les angles $AGF = \zeta$, $EGJ = \eta$; & posant $GJ = I$, nous aurons $JF = \sin.\eta$; $GF = \cos.\eta$; $AF = \sin.\zeta\cos.\eta$; $GA = \cos.\zeta\cos.\eta$; & partant, $\cos.\alpha = \cos.\zeta\cos.\eta$; $\cos.\delta = \sin.\zeta\cos.\eta$; $\cos.\gamma = \sin.\eta$. Ces valeurs, qui renferment déjà l'égalité $\cos.\alpha^2 + \cos.\delta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$, réduiront les équations trouvées dans les formes suivantes.

$$(C-B)\sin.\eta^2\cos.\eta + E\sin.\zeta^2\cos.\eta^2 - F\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - D\sin.\eta^2 + D\sin.\zeta^2\cos.\eta^2 = 0$$

$$(A-C)\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta + E\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - D\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2 - E\cos.\zeta^2\cos.\eta^2 + E\sin.\eta^2 = 0$$

$$(B-A)\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2 + D\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - E\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - F\sin.\zeta^2\cos.\eta^2 + F\cos.\zeta^2\cos.\eta^2 = 0$$

dont la troisième, divisée par $\cos.\eta^2$ donne $\frac{\sin.\eta}{\cos.\eta} =$

$$\text{tang. } \eta = \frac{(B-A)\sin.\zeta\cos.\zeta - F(\sin.\zeta^2 + F\cos.\zeta^2)}{E\sin.\zeta - D\cos.\zeta}. \text{ Or, la}$$

première multipliée par $\sin.\zeta$, moins la seconde multipliée par $\cos.\zeta$, à cause de $\sin.\eta\cos.\eta = \frac{1}{2}\sin.2\eta\cos.\eta^2 - \sin.\eta^2 = \cos.2\eta$ donne, après avoir divisé par $\cos.\zeta^2$, cette égalité :

$$\frac{\sin.2\eta}{\cos.2\eta} = \text{tang. } 2\eta = \frac{2(E\cos.\zeta + D\sin.\zeta)}{2F\sin.\zeta\cos.\zeta + A\cos.\zeta^2 + B\sin.\zeta^2 - C}$$

desorte que, si l'angle ζ étoit connu, l'angle η en pourroit être tiré d'une double manière.

52. Or, puisque $\text{tang. } 2\eta = \frac{2 \text{ tang. } \eta}{1 - \text{tang.}^2 \eta}$, ou bien

$2 \cos. 2\eta = \frac{1}{\text{tang.}^2 \eta} - 2 \text{ tang. } \eta$. On aura en substituant

$$\frac{2F \sin. \zeta \cos. \zeta + A \cos. \zeta^2 + B \sin. \zeta^2 - C}{E \cos. \zeta + D \sin. \zeta} = \frac{E \sin. \zeta - D \cos. \zeta}{(B-A) \sin. \zeta \cos. \zeta + F(\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2)}$$

$$= \frac{(B-A) \sin. \zeta \cos. \zeta - F(\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2)}{E \sin. \zeta - D \cos. \zeta}, \text{ \& en combinant}$$

le dernier membre avec le premier :

$$\frac{E \sin. \zeta - D \cos. \zeta}{(B-A) \sin. \zeta \cos. \zeta + F(\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2)} = \frac{(EF+CD-AD) \cos. \zeta - (DE+CE-BE) \sin. \zeta}{(E E-DD) \sin. \zeta \cos. \zeta - DE (\cos. \zeta^2 - \sin. \zeta^2)}$$

enfin, en posant $\text{tang. } \zeta = \theta$, nous aurons l'équation suivante :

$$\left. \begin{array}{l} +D(FF-EE) \\ +EF(C-B) \end{array} \right\} \theta^3 + \left. \begin{array}{l} +E(2DD-EE-FF) \\ +DF(2A-B-C) \\ +E(A-B)(C-B) \end{array} \right\} \theta^2 + \left. \begin{array}{l} +D(2EE-DD-FF) \\ +EF(2B-A-C) \\ +D(B-A)(C-A) \end{array} \right\} \theta + \left. \begin{array}{l} +E(FF-DD) \\ +DF(C-A) \end{array} \right\} = 0$$

53. Cette équation étant cubique, aura infailliblement une racine réelle, & partant, de quelque figure & de quelque qualité que soit le corps proposé, on y pourra toujours assigner un axe GJ , qui passe par le centre de gravité, & autour duquel le corps puisse tourner librement, ou bien on pourra toujours assigner au moins un axe principal, autour duquel toutes les forces centrifuges se détruisent, & qui, pendant que le centre G reste en repos, conserve toujours la même situation, sans qu'on ait besoin de le soutenir : or aussi, quand le corps a un mouvement progressif, l'axe GJ recevra le même mouvement, en demeurant toujours parallèle à soi-même, & le corps poursuivra le même mouvement de rotation, à moins que des forces étrangères ne l'en détournent. On voit encore par la même équation cubique que nous venons de trouver, qu'en général un corps quelconque ne sçauroit avoir plus de trois axes principaux.

54. Or ; pour nous assurer tant du nombre que de la position des axes principaux dans chaque corps ; parce que nous sçavons qu'il y en a sûrement un, supposons que l'axe GA même soit déjà un axe principal, & cherchons les autres, en cas qu'il y en ait des réels. L'axe GJ étant donc supposé tomber en GA , on aura $\zeta = 0$, $\eta = 0$, & les formules du §. 51 donneront $E = 0$, $F = 0$, de sorte que l'axe GA , en tant qu'il est principal, demande les propriétés suivantes : $E = \int xz dM = 0$; $F = \int xy dM = 0$; & partant, supposant que GJ soit un autre axe principal déterminé par les angles ζ & η comme auparavant, nous aurons pour sa position 1°. $(C - B) \sin. \zeta \sin. \eta \cos. \eta - D \sin. \eta^2 + D \sin. \zeta^2 \cos. \eta^2 = 0$. 2°. $(A - C) \cos. \zeta \sin. \eta \cos. \eta - D \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \eta^2 = 0$. 3°. $(B - A) \sin. \zeta \cos. \zeta \cos. \eta^2 + D \cos. \zeta \sin. \eta \cos. \eta = 0$.

55. Les deux dernières équations exigent ou $\cos. \zeta = 0$, ou $\cos. \eta = 0$: or la valeur $\cos. \eta = 0$ ne satisfaisant pas à la première équation, à moins que D ne s'évanouisse, il faut s'en tenir à la première $\cos. \zeta = 0$, ou $\zeta = 90^\circ$. & la première équation donnera $(C - B) \sin. \eta \cos. \eta + D (\cos. \eta^2 - \sin. \eta^2) = 0$, ou bien $(C - B) \sin. 2\eta + 2D \cos. 2\eta = 0$; delà $\text{tang. } 2\eta = \frac{2D}{B - C}$ & partant on trouvera pour cet angle η une double valeur : car ; en posant $\text{tang. } \eta = \tau$ on obtiendra $D\tau\tau = (C - B)\tau + D$ & enfin, $\tau = \frac{C - B \pm \sqrt{(C - B)^2 + 4DD}}{2D}$; ces deux valeurs sont toujours réelles, & leur produit est $= -1$: donc, si on appelle ces deux angles η & η' , à cause de $\text{tang. } \eta' = -\cos. \eta = \text{tang. } (\eta + 90^\circ)$, on aura $\eta' = \eta + 90^\circ$, c'est-à-dire que les deux autres axes principaux sont tant entre eux qu'avec le premier GA un angle droit.

56. C'est ainsi que nous venons de découvrir cette remarquable propriété, dont tous les corps, de quelque

que figure & de quelque nature qu'ils soient, sont doués. Chaque corps, sans exception, a toujours trois axes principaux, c'est-à-dire trois axes qui passent par le centre de gravité du corps, autour desquels le corps peut librement tourner, sans qu'on ait besoin de les soutenir; & ces trois axes, comme nous venons de le trouver, sont toujours perpendiculaires entre eux. Nous venons en même temps de donner la méthode comment ces axes principaux peuvent être trouvés, la figure & la nature du corps proposé étant connue. En supposant donc que les trois axes fixes GA , GC , GE , pris à volonté, soient eux-mêmes les axes principaux du corps proposé, à cause de $\nu = 0$ ou à zéro, ou à 90° , & $D = 0$, la propriété analytique de ces trois axes principaux demandera que les trois formules intégrales suivantes étendues par tout le corps s'évanouissent, sçavoir que

$$\int yz dM = D = 0; \int xz dM = E = 0; \int xy dM = F = 0;$$

& réciproquement, toutes les fois que ces formules s'évanouissent, les axes orthogonaux GA , GC , GE , sont en même temps principaux.

57. Cependant, quoique nous n'ayons trouvé en général que trois axes principaux en chaque corps, il y a des cas où leur nombre devient même infini: il en est à peu près comme de l'ellipse en général qui, n'ayant que deux axes, en acquiert pourtant une infinité, dans le cas où elle devient un cercle, chaque diamètre pouvant être regardé comme son axe. De même, dans le cas présent, la droite GA étant un axe principal, lorsqu'il arrive dans un corps que $D = 0$ & $B = C$, l'angle ν reste indéterminé, d'où l'on conclut que tous les axes perpendiculaires à GA sont principaux; & lorsqu'il arrive, outre cela, que $A = B = C$, les deux angles ζ & ν restant indéterminés, chaque droite pas-

fant par le centre de gravité G , fera un axe principal. Ce dernier cas a lieu dans les corps sphériques, composés d'une matière homogène, où tous les diamètres sont, sans contredit, des axes principaux; & dans les corps sphéroïdiques, sans compter l'axe de la figure, tous les diamètres feront encore des axes principaux: d'où il est clair que tous les corps ont toujours, pour le moins, trois axes principaux, mais qu'il y a pourtant des cas, où le nombre des axes devient infini.

58. Lors donc qu'un corps quelconque aura, au commencement, reçu un mouvement de rotation autour d'un axe principal, ce mouvement se conservera toujours avec la même rapidité, & l'axe de rotation même, ou demeurera en repos, ou en se mouvant restera toujours parallèle à soi-même, à moins que des forces étrangères ne l'en détournent. Or, si le mouvement de rotation ne se faisoit pas autour d'un axe principal, il ne sçauroit subsister par lui-même, & il en résulteroit des forces qui, en agissant sur le corps, en troubleroient le mouvement, & changeroient l'axe autour duquel la rotation avoit commencé; & s'il survenoit encore des forces externes, le mouvement entier du corps pourroit devenir très-irrégulier: cependant, tous les changemens dont il est susceptible, peuvent être exprimés par des formules analytiques. D'abord, on peut toujours supposer le centre de gravité en repos, & alors tous les changemens se réduisent à deux choses, l'une regarde la vitesse angulaire avec laquelle le corps tourne à chaque instant, & l'autre est la variation de l'axe même de rotation.

Fig. 3. 59. Pour résoudre ce problème, établissons les trois directions fixes GA , GC , GE , desorte qu'elles conviennent avec les axes principaux du corps. On pourroit objecter que, puisque les axes principaux ne sont pas fixes, & qu'ils s'écartent de leurs pre-

mières directions dès le premier instant, la variation de l'axe de rotation n'y sçauroit être rapportée, & qu'on la devoit plutôt rapporter à des directions fixes : mais, à la méthode dont je me servirai dans cette recherche, on s'apercevra aisément que cette hypothèse n'empêche point que les axes principaux ne soient mobiles en eux-mêmes. Au reste, l'analyse qui suit, dissipera tous les doutes auxquels cette hypothèse paroît assujettie.

60. Qu'on considère, comme ci-dessus, un élément du corps dM au point Z ; & en gardant les mêmes dénominations (39), $GX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, $GZ = v$, la nature du centre de gravité G nous fournira ces intégrales $\int x dM = 0$; $\int y dM = 0$; $\int z dM = 0$; ensuite la propriété des axes principaux donnera (52), $\int yz dM = D = 0$; $\int xz dM = E = 0$; $\int xy dM = F = 0$. Outre cela, si nous introduisons les momens d'inertie principaux, c'est-à-dire par rapport aux axes principaux du corps, & que nous supposons le moment d'inertie par rapport à l'axe $GA = Maa$, par rapport à l'axe $GC = Mbb$, & par rapport à l'axe $GE = Mcc$, à cause de $Maa = \int (yy + zz) dM$, $Mbb = \int (xx + zz) dM$, $Mcc = \int (xx + yy) dM$, nous aurons encore les intégrales indiquées ci-dessus (49), par les lettres A, B, C ; $\int xx dM = A = \frac{1}{2} M (bb + cc - aa)$; $\int yy dM = B = \frac{1}{2} M (aa + cc - bb)$; $\int zz dM = C = \frac{1}{2} M (aa + bb - cc)$.

61. Que le corps tourne à présent autour de l'axe GJ dans le sens ACE avec la vitesse angulaire $= \omega$, & que la position de cet axe soit déterminée comme ci-dessus par les angles que l'axe de rotation fait avec les axes principaux $AGJ = \alpha$; $CGJ = \beta$; $EGJ = \gamma$.

E ij

de sorte que $\text{cos. } \alpha^2 + \text{cos. } \beta^2 + \text{cos. } \gamma^2 = 1$. Or, le mouvement de l'élément du corps dM en Z étant décomposé selon des directions parallèles aux axes principaux, les trois vitesses selon ces directions Za , Zc , Ze , seront exprimées ainsi (45) : la vitesse suivant $Za = s (\zeta \text{cos. } \beta - \gamma \text{cos. } \gamma) = u$; suivant $Zc = s (x \text{cos. } \gamma - \zeta \text{cos. } \alpha) = v$; suivant $Ze = s (\gamma \text{cos. } \alpha - x \text{cos. } \beta) = w$, vitesses que j'indiquerai pour abrégé par les lettres u, v, w : or, je supposerai maintenant cet axe de rotation GJ variable d'une manière quelconque, de même que la vitesse angulaire s .

62. Pour trouver les accroissemens qu'elles prendront dans l'élément du temps dt , il faut remarquer que non seulement nous devons avoir égard à la variabilité des coordonnées x, y, z , dont on trouve les différentielles au §. 46 exprimées ainsi, $dx = s dt (\zeta \text{cos. } \beta - \gamma \text{cos. } \gamma) = u dt$; $dy = s dt (x \text{cos. } \gamma - \zeta \text{cos. } \alpha) = v dt$; $dz = (y \text{cos. } \alpha - x \text{cos. } \beta) = w dt$; mais que les quantités s, α, β, γ croissent aussi de leurs différentielles, de sorte que nous obtiendrons les différentielles suivantes de nos trois vitesses u, v, w , après avoir substitué pour u, v, w leurs valeurs indiquées au §. précédent.

$$du = \zeta d. s \text{cos. } \beta - \gamma d. s \text{cos. } \gamma + s dt (\gamma \text{cos. } \alpha \text{cos. } \beta + \zeta \text{cos. } \alpha \text{cos. } \gamma - x \text{sin. } \alpha^2)$$

à cause de $\text{cos. } \beta^2 + \text{cos. } \gamma^2 = \text{sin. } \alpha^2$

$$dv = x d. s \text{cos. } \gamma - \zeta d. s \text{cos. } \alpha + s dt (\zeta \text{cos. } \beta \text{cos. } \gamma + x \text{cos. } \beta \text{cos. } \alpha - \gamma \text{sin. } \beta^2)$$

à cause de $\text{cos. } \alpha^2 + \text{cos. } \gamma^2 = \text{sin. } \beta^2$

$$dw = \gamma d. s \text{cos. } \alpha - x d. s \text{cos. } \beta + s dt (x \text{cos. } \gamma \text{cos. } \alpha + \gamma \text{cos. } \gamma \text{cos. } \beta - \zeta \text{sin. } \gamma^2)$$

à cause de $\text{cos. } \alpha + \text{cos. } \beta^2 = \text{sin. } \gamma^2$

63. Cherchons à présent les forces requises pour ce mouvement supposé. Pour imprimer à l'élément du corps dM en Z les trois accélérations trouvées selon les directions Za , Zc , Ze , il faut, de même que nous venons de le voir au §. 47, que cet élément dM soit sollicité selon les mêmes directions par ces forces élé-

mentaires, sçavoir, suivant Za , par la force $= \frac{dM}{r^2} \cdot du$; suivant Zc , par la force $= \frac{dM}{z^2} \cdot dv$; suivant Ze , par la force $= \frac{dM}{T^2} \cdot dw$. Il s'agit à présent d'assembler toutes ces forces élémentaires par toute l'étendue du corps, où il est clair qu'il faut uniquement avoir égard à la variabilité du point Z avec l'élément de matière dM qui s'y trouve, parce que nous ne nous embarquons que des forces qui doivent agir dans l'instant présent, sans avoir égard à leur variabilité dans la suite. Nous n'aurons donc d'autres variables que les trois coordonnées x, y, z , & les lettres u, v, w , avec leurs différentielles, seront traitées comme constantes.

64. Or, puisque les formules trouvées pour les différentielles du, dv, dw , ne contiennent que les premières dimensions de x, y, z , qui sont les seules variables que nous ayons à considérer, à cause de $\int x dM = 0; \int y dM = 0; \int z dM = 0$; il est évident que les intégrales des forces élémentaires s'évanouissent, de sorte que $\int \frac{du dM}{z^2} = 0; \int \frac{dv dM}{z^2} = 0; \int \frac{dw dM}{T^2} = 0$; tout comme la condition que le centre de gravité est en repos, l'exige; car s'il y avoit des forces finies qui agissent sur le corps, elles lui imprimeroient un mouvement progressif, dont je fais ici abstraction. Mais, puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, il faut moins avoir égard aux forces sollicitantes elles-mêmes, qui s'évanouissent, comme nous venons de voir, qu'à leurs momens. Il faut donc d'abord chercher les momens des forces élémentaires que nous venons de trouver par rapport aux trois axes principaux, pour en conclure ensuite leurs intégrales; qui nous fourniront les momens nécessaires de force pour engendrer le mouvement supposé, tant par rapport à l'accélération du mouvement de rotation qu'à la variation même de l'axe de rotation.

65. Or, les forces élémentaires trouvées (63); donnent, à l'égard des axes principaux, les momens suivans :

1. Le moment de forces par rapport à l'axe GA dans le sens $CE = \frac{dM}{2gdt} (ydw - zdv)$.
2. Le moment de forces par rapport à l'axe GC dans le sens $EA = \frac{dM}{2gdt} (zdu - xd w)$.
3. Le moment de forces par rapport à l'axe GE dans le sens $AC = \frac{dM}{2gdt} (xdv - ydu)$.

Il faut à présent substituer au lieu des différentielles du, dv, dw , leurs valeurs trouvées (62), & ensuite chercher les intégrales de ces formules, pour avoir les momens entiers de forces par rapport aux trois axes principaux du corps.

66. Faisons ces opérations pour le premier moment élémentaire par rapport à l'axe principal GA , puisqu'il sera aisé d'en conclure les deux autres par la seule analogie. Or, l'expression $ydw - zdv$ se changera par la substitution en celle-ci $(yy + zz) d. \cos. \alpha - yz d. \cos. \epsilon - xz d. \cos. \gamma + yz d. (xy \cos. \alpha \cos. \gamma - xz \cos. \alpha \cos. \epsilon + (yy - zz) \cos. \epsilon \cos. \gamma + yz (\sin. \epsilon^2 - \sin. \gamma^2))$, laquelle étant multipliée par $\frac{dM}{2gdt}$ & intégrée par la seule variabilité des trois coordonnées x, y, z , donnera, à cause de $\int xy dM = 0, \int xz dM = 0, \int yz dM = 0,$
 $\int (yy + zz) dM = Maa, \int (yy - zz) dM =$
 $M(cc - bb)$ (60), l'expression suivante pour le moment de forces à l'égard de GA :

$$\frac{Maa d. \cos. \alpha}{2g dt} + \frac{M(cc - bb) \cos. \epsilon \cos. \gamma}{2g}$$

67. Donc, pour produire dans le mouvement du corps les changemens élémentaires supposés, tant à l'égard de la vitesse angulaire que de la position de l'a-

xe de rotation, si nous supposons les momens de forces,

Par rapport à l'axe principal $GA = P$, dans le sens CE , nous aurons $P = Ma^2 \frac{d.\varepsilon \cos.\alpha}{2gdt} + M(cc - bb) \frac{\varepsilon\varepsilon \cos.\varepsilon \cos.\gamma}{2g}$;

Par rapport à l'axe principal $GC = Q$, dans le sens EA , nous aurons $Q = Mb^2 \frac{d.\varepsilon \cos.\varepsilon}{2gdt} + M(aa - cc) \frac{\varepsilon\varepsilon \cos.\gamma \cos.\alpha}{2g}$;

Par rapport à l'axe principal $GE = R$, dans le sens AC , nous aurons $R = Mc^2 \frac{d.\varepsilon \cos.\gamma}{2gdt} + M(bb - aa) \frac{\varepsilon\varepsilon \cos.\alpha \cos.\varepsilon}{2g}$;

& partant réciproquement, ces trois momens de forces produiront précisément les changemens supposés.

68. Il faut donc des forces pour produire ces changemens, à moins que les trois valeurs trouvées pour P , Q & R , ne s'évanouissent; ce qui pourroit bien arriver, quoique, ni la vitesse angulaire ε , ni les angles α , ε , γ , ne demeuraissent les mêmes. Mais, supposons que tant la vitesse angulaire ε que la position de l'axe de rotation doivent demeurer les mêmes; pour cet effet, il faudroit que le corps fût sollicité par les trois momens de forces suivans:

$$P = M(cc - bb) \frac{\varepsilon\varepsilon \cos.\varepsilon \cos.\gamma}{2g}; \quad Q = M(aa - cc) \frac{\varepsilon\varepsilon \cos.\gamma \cos.\alpha}{2g}; \quad R = M(bb - aa) \frac{\varepsilon\varepsilon \cos.\alpha \cos.\varepsilon}{2g}$$

ne s'évanouissent pas tous à la fois, à moins que des trois cosinus, $\cos.\alpha$, $\cos.\varepsilon$, $\cos.\gamma$, deux ne deviennent = 0: or cela n'arrive pas, à moins qu'un des trois angles α , ε , γ , ne s'évanouisse, c'est-à-dire à moins que l'axe de rotation ne soit un des principaux: ce qui est parfaitement d'accord avec ce que j'ai d'abord remarqué, qu'un corps solide ne scauroit tourner librement autour d'un axe, à moins que ce ne fût un axe principal du corps; & cette même propriété m'a conduit à la connoissance des axes principaux.

69. Maintenant, nous sommes en état de résoudre le problème général, auquel cette recherche aboutit, & qu'on peut concevoir en ces termes :

Un corps solide étant sollicité par des forces quelconques, pendant qu'il tourne autour d'un axe de rotation donné avec une vitesse angulaire donnée, déterminer les changemens élémentaires qui seront produits tant dans la vitesse angulaire que dans la position de l'axe de rotation.

Il ne s'agit ici que d'un instant de temps, auquel je regarde la position des axes principaux comme connue, soient ces axes GA, GC, GE , par rapport auxquels les momens d'inertie du corps soient $Ma a; Mb b, Mc c$, M marquant la masse du corps. Que le corps tourne à présent autour de l'axe GJ dans le sens ACE , avec une vitesse angulaire $= v$, & que la position de cet axe soit déterminée par les angles qu'il fait avec les axes principaux $AGJ = \alpha; CGJ = \epsilon; EGJ = \gamma$.

70. Pour les forces sollicitantes données, qu'on cherche leurs momens par rapport aux axes principaux du corps, qui soient pour l'axe $GA = P$ dans le sens CE ; pour l'axe $GC = Q$ dans le sens EA ; pour l'axe $GE = R$ dans le sens AC ; alors pendant l'élément du temps dt , la vitesse angulaire v prendra un accroissement $= dv$, & l'axe de rotation changera de situation par rapport aux axes principaux du corps, en sorte que les angles α, ϵ, γ , seront augmentés de leurs différentielles $d\alpha, d\epsilon, d\gamma$; & ces changemens élémentaires seront déterminés par les trois équations suivantes :

$$d. v \cos. \alpha + \frac{cc - bb}{aa} v dt \cos. \epsilon \cos. \gamma = \frac{2gPdt}{Ma a}; d. v \cos. \epsilon + \frac{aa - cc}{bb} v dt \cos. \alpha \cos. \gamma = \frac{2gQdt}{Mb b}; d. v \cos. \gamma + \frac{bb - aa}{cc} v dt \cos. \alpha \cos. \epsilon = \frac{2gRdt}{Mc c};$$

& c'est là la solution du problème proposé.

71. Mais si l'on veut déterminer le mouvement de rotation tout entier d'un corps sollicité par des forces quelconques, il faut avoir égard aux changemens continuels des axes principaux du corps, & y rapporter à chaque instant l'axe de rotation & les momens des forces sollicitantes. Donc la position des axes principaux étant variable, il les faut rapporter à des directions fixes; & , puisque nous avons suivi jusqu'ici en partie la méthode reçue parmi les astronomes pour représenter la position mutuelle des axes, gardons encore cette méthode astronomique, pour chercher les changemens des axes principaux par rapport à des directions fixes. Considérons pour cet effet une sphère fixe décrite autour du centre de gravité du corps *G* : soit *PQSR* un grand cercle fixe tel que le méridien & *P* un point fixe comme le pôle; qu'après le temps = *t* secondes, les axes principaux du corps répondent aux points *A*, *C*, *E*, d'où ayant tiré au point *P* les arcs de grands cercles *AP*, *CP*, *EP*, soient ces arcs $AP = l$; $CP = m$; $EP = n$; & les angles $QPA = \lambda$; $QPC = \mu$; $QPE = \nu$; de-là, on a d'abord $\text{cos. } l^2 + \text{cos. } m^2 + \text{cos. } n^2 = 1$: ensuite

FIG. 5.

$$\text{cos. } (\mu - \lambda) = -\frac{\text{cos. } l \text{ cos. } m}{\text{sin. } l \text{ sin. } m}; \text{cos. } (\nu - \lambda) = -\frac{\text{cos. } l \text{ cos. } n}{\text{sin. } l \text{ sin. } n};$$

$$\text{cos. } (\mu - \nu) = -\frac{\text{cos. } m \text{ cos. } n}{\text{sin. } m \text{ sin. } n}.$$

72. Que le corps tourne à présent autour de l'axe *GJ* avec une vitesse angulaire = *s* dans le sens *ACE*; & pour la position du point *J*, soient les arcs de grands cercles $AJ = \alpha$; $CJ = \epsilon$; $EJ = \gamma$, & supposons, pour abrégér nos formules, $s \text{ cos. } \alpha = x$; $s \text{ cos. } \epsilon = y$; $s \text{ cos. } \gamma = z$; & nous aurons $ss = xx + yy + zz$. Cherchons ensuite les momens des forces sollicitantes par rapport aux axes principaux *GA*, *GC*, *GE* du corps, qui soient *P*, *Q*, *R*, dans le sens *CE*, *EA*, *AC*.

Prix de 1761.

F

Cela posé, nos équations, pour déterminer les variables x, y, z , seront :

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} yz dt = \frac{2gPdt}{Ma a}; \quad dy + \frac{aa - cc}{bb} xz dt = \frac{2gQdt}{Mb b}; \quad dz + \frac{bb - aa}{cc} xy dt = \frac{2gRdt}{Mc c}$$

& ayant trouvé ces quantités x, y, z , on aura les angles α, ϵ, γ , par les formules $\text{cosf. } \alpha = \frac{x}{y}$; $\text{cosf. } \epsilon = \frac{y}{z}$; $\text{cosf. } \gamma = \frac{z}{y}$.

73. Mais il faut aussi considérer qu'à cause du mouvement de rotation, les points A, C, E , & partant les arcs l, m, n & les angles λ, μ, ν sont variables. Le point A tournera autour du point J avec la vitesse $\nu \text{ sin. } JA = \nu \text{ sin. } \alpha$ dans les arcs CE , & partant, dans le temps dt , le point A décrira le petit arc $Aa = \nu dt \text{ sin. } \alpha$ perpendiculaire à l'arc JA . Donc, tirant $a\alpha$ perpendiculaire à l'arc PA , nous aurons $dl = -Aa$ & $d\lambda = \frac{-a\alpha}{\text{sin. } l}$; mais à cause de l'angle JAA droit, on trouve $EAa = \nu dt \text{ sin. } \alpha \text{ sin. } JAP$ & $a\alpha = \nu dt \text{ sin. } \alpha \text{ cosf. } JAP$; or le triangle CAP fournit $\text{cosf. } CAP = \frac{\text{cosf. } m}{\text{sin. } l}$, & le triangle EAP donne $\text{cosf. } EAP = -\text{sin. } CAP = \frac{\text{cosf. } n}{\text{sin. } l}$ ou $\text{sin. } CAP = \frac{-\text{cosf. } n}{\text{sin. } l}$. De la même manière, les triangles CAJ & EAJ donnent $\text{cosf. } CAJ = \frac{\text{cosf. } \epsilon}{\text{sin. } \alpha}$; $\text{cosf. } EAJ = \text{sin. } CAJ = \frac{\text{cosf. } \gamma}{\text{sin. } \alpha}$: d'où, puisque l'angle $JAP = CAP + CAJ$, il s'en suit que

$$\text{sin. } JAP = \frac{\text{cosf. } \gamma \text{ cosf. } m - \text{cosf. } \epsilon \text{ cosf. } n}{\text{sin. } \alpha \text{ sin. } l} \quad \& \quad \text{cosf. } JAP = \frac{\text{cosf. } \epsilon \text{ cosf. } m + \text{cosf. } \gamma \text{ cosf. } n}{\text{sin. } \alpha \text{ sin. } l}$$

74. Substituons ces valeurs, & nous aurons $dl = \frac{-\nu dt (\text{cosf. } \gamma \text{ cosf. } m - \text{cosf. } \epsilon \text{ cosf. } n)}{\text{sin. } l}$ & $d\lambda = \frac{-\nu dt (\text{cosf. } \epsilon \text{ cosf. } m + \text{cosf. } \gamma \text{ cosf. } n)}{\text{sin. } l^2}$

ou si nous mettons, au lieu de $\nu \text{ cosf. } \epsilon$, $\nu \text{ cosf. } \gamma$ leurs va-

leurs y, z , nous trouverons les six équations qu'il faut ajouter aux trois précédentes que nous avons données ci-dessus (72), de sorte que nous aurons en tout les neuf équations suivantes :

$1^{\circ}. dx + \frac{cc - bb}{aa} yz dt = \frac{2gP dt}{Ma a}$	$5^{\circ}. dm \sin. m = dt (z \cos. l - x \cos. n)$
$2^{\circ}. dy + \frac{aa - cc}{bb} xz dt = \frac{2gQ dt}{M b b}$	$6^{\circ}. dn \sin. n = dt (x \cos. m - y \cos. l)$
$3^{\circ}. dz + \frac{bb - aa}{cc} xy dt = \frac{2gR dt}{M c c}$	$7^{\circ}. d\lambda \sin. l^2 = -dt (y \cos. m + z \cos. n)$
$4^{\circ}. dl \sin. l = dt (y \cos. n - z \cos. m)$	$8^{\circ}. d\mu \sin. m^2 = -dt (z \cos. n + x \cos. l)$
	$9^{\circ}. dv \sin. n^2 = -dt (x \cos. l + y \cos. m)$

Voilà donc les équations, dans lesquelles est renfermée la solution de tous les problèmes, où il s'agit du mouvement de rotation de quelque corps solide. Or, il faut remarquer qu'à cause de la relation indiquée entre les quantités l, m, n , & λ, μ, ν , il suffira de prendre trois des six dernières.

75. Il peut bien arriver que l'application de ces formules à un cas proposé, devienne extrêmement difficile, & qu'elle surpasse même les forces de l'analyse : mais c'est alors du côté analytique où est la difficulté, le mécanisme étant heureusement développé. Cependant, pour donner une idée de l'usage de ces formules, je m'en vais résoudre le cas où les trois momens de force P, Q, R , s'évanouissent : ce cas est fort remarquable en soi-même, puisqu'il s'agit du problème suivant, dont personne n'a encore donné une solution suffisante.

Un corps solide n'étant sollicité par aucune force, s'il a reçu un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe différent de ses axes principaux, déterminer la continuation de son mouvement.

76. Ayant donc $P = 0; Q = 0; R = 0$, nous au-

F ij

ions à résoudre les neuf équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1^{\circ}. dx + \frac{cc - bb}{aa} yz dt = 0; \\
 2^{\circ}. dy + \frac{aa - cc}{bb} xz dt = 0; \\
 3^{\circ}. dz + \frac{bb - aa}{cc} xy dt = 0; \\
 4^{\circ}. d\sin.l = dt(y\cos.n - z\cos.m); \\
 5^{\circ}. d\sin.m = dt(z\cos.l - x\cos.n); \\
 6^{\circ}. d\sin.n = dt(x\cos.m - y\cos.l); \\
 7^{\circ}. d\lambda\sin.l^2 = -dt(y\cos.m + z\cos.n); \\
 8^{\circ}. d\mu\sin.m^2 = -dt(z\cos.n + x\cos.l); \\
 9^{\circ}. d\nu\sin.n^2 = -dt(x\cos.l + y\cos.m).
 \end{array}$$

Des trois premières, nous tirons d'abord $\frac{aax dx}{bb - cc} = \frac{bby dy}{cc - aa} = \frac{ccz dz}{aa - bb} = xyz dt$; donc supposant $xyz dt = du$, & pour abrégier, $\frac{bb - cc}{aa} = A$; $\frac{cc - aa}{bb} = B$; $\frac{aa - bb}{cc} = C$; nous trouverons, en intégrant $xx = 2Au + \Gamma$; $yy = 2Bu + \Delta$; $zz = 2Cu + \Theta$; & de - là $dt =$

$$\sqrt{(2Au + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}.$$

77. Par rapport aux lettres A, B, C , il faut remarquer que $Aaa + Bbb + Ccc = 0$ & $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$: de - là, il est évident que $aaxx + bbyy + cczz$ fera égal à une quantité constante $\Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc$. Or, cette expression se réduit à celle-ci $aa \cos. \epsilon^2 + bb \cos. \gamma^2$, où la formule $aa \cos. \epsilon^2 + bb \cos. \gamma^2$ étant multipliée par la masse du corps M , exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation GJ autour duquel le corps tourne à présent: donc, supposant ce moment d'inertie Mrr , la quantité Mrr , qui exprime ce qu'on nomme la force vive du corps, demeurera invariable, ou bien le corps conservera toujours la même force vive. Puisque dans le mouvement progressif, s'il n'y a point de force sollicitante, le corps conserve toujours la même vitesse, il s'en suit, quelque mouve-

ment qu'on imprime à un corps, qu'il conservera toujours la même force vive.

78. La dernière équation différentielle trouvée (76), sert à déterminer pour tout temps t la variable u ; & de-là, on définira les quantités $x = \sqrt{2Au + \Gamma}$; $y = \sqrt{2Bu + \Delta}$; $z = \sqrt{2Cu + \Theta}$: d'où la vitesse angulaire dont le corps tourne à présent, sera $v = \sqrt{2(A+B+C)u + \Gamma + \Delta + \Theta}$. Or, pour la position de l'axe de rotation GJ à l'égard des axes principaux du corps, laquelle est déterminée par les angles α, β, γ , on aura $\text{cos. } \alpha = \frac{x}{v}$; $\text{cos. } \beta = \frac{y}{v}$; $\text{cos. } \gamma = \frac{z}{v}$: mais nous ne savons pas encore

la position des axes principaux du corps, pour l'instant présent qu'il faut chercher par la résolution des six autres équations, les trois premières étant déjà parfaitement résolues.

79. Pour faciliter cette recherche, il est bon d'observer que les trois premières équations y peuvent beaucoup contribuer; car si nous multiplions la première par $aa \text{ cos. } l$; la seconde par $bb \text{ cos. } m$ & la troisième par $cc \text{ cos. } n$, nous obtiendrons cette somme: $aa dx \text{ cos. } l + bb dy \text{ cos. } m + cc dz \text{ cos. } n + ccyz dt \text{ cos. } l - ccxz dt \text{ cos. } m - bbyz dt \text{ cos. } l + bbxy dt \text{ cos. } n + aaxz dt \text{ cos. } m - aaxy dt \text{ cos. } n = 0$, laquelle, par les équations 4, 5 & 6, se change en cette forme: $0 = aadx \text{ cos. } l + bbdy \text{ cos. } m + ccdz \text{ cos. } n - aax dl \text{ sin. } l - bby dm \text{ sin. } m - ccz dn \text{ sin. } n$, qui étant intégrable, donne $aax \text{ cos. } l + bby \text{ cos. } m + ccz \text{ cos. } n = \text{const} = \Lambda$; & nous avons déjà $\text{cos. } l^2 + \text{cos. } m^2 + \text{cos. } n^2 = 1$: donc, si nous avons encore une seule équation intégrale entre les arcs l, m & n , nous les pourrions déterminer chacun à part. Les équations 4, 5, 6, fournissent cette équation différentielle assez simple:

$$x dl \text{ sin. } l + y dm \text{ sin. } m + z dn \text{ sin. } n = 0.$$

So. Au lieu des arcs l, m, n , introduisons une

nouvelle variable v , en supposant $x \text{ cof. } l + y \text{ cof. } m + z \text{ cof. } n = v$; & à cause de la propriété remarquée; nous aurons $dv = dx \text{ cof. } l + dy \text{ cof. } m + dz \text{ cof. } n$ ou $\frac{dv}{du} = \frac{A \text{ cof. } l}{x} + \frac{B \text{ cof. } m}{y} + \frac{C \text{ cof. } n}{z}$; & maintenant tout revient à déterminer v par u . Pour cet effet, il faut chercher les valeurs de $\text{cof. } l$, $\text{cof. } m$, $\text{cof. } n$ de ces trois équations: $\text{cof. } l^2 + \text{cof. } m^2 + \text{cof. } n^2 = 1$; $aax \text{ cof. } l + bby \text{ cof. } m + ccz \text{ cof. } n = \Lambda$; $x \text{ cof. } l + y \text{ cof. } m + z \text{ cof. } n = v$, dont la résolution mène enfin à cette formule irrationnelle:

$$\sqrt{(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy - \Lambda \Lambda (xx + yy + zz) + 2\Lambda v (aaxx + bbyy + cczz) - vv (a^4xx + b^4yy + c^4zz))}.$$

81. Mettons, pour abrégé, le signe $\sqrt{(\dots)}$ pour cette formule, & l'on trouvera les valeurs suivantes:

$$\text{cof. } l = \frac{\Lambda x (Cccyy - Bbbzz) + bbccxy (Bzz - Cyy) + Aaayz \sqrt{(\dots)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy};$$

$$\text{cof. } m = \frac{\Lambda y (Aazzz - Cccxx) + aaccyv (Cxx - Azz) + Bbbxz \sqrt{(\dots)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\text{cof. } n = \frac{\Lambda z (Bbbxx + Aaayy) + aabbzv (Ayy - Bxx) + Cccxy \sqrt{(\dots)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

& si nous substituons ces valeurs dans l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = \frac{A \text{ cof. } l}{x} + \frac{B \text{ cof. } m}{y} + \frac{C \text{ cof. } n}{z}$, nous parviendrons cette équation à intégrer $\frac{dv}{du} (AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy) = ABC\Lambda (aaxx + bbyy + cczz) - ABCv (a^4xx + b^4yy + c^4zz) + \frac{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}{xy z} \sqrt{(\dots)}$.

82. Maintenant, nous n'avons qu'à substituer au lieu de x , y , z , leurs valeurs assignées ci-dessus, qui donnent

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta - 2ABCu (\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4),$$

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Delta + CCc^4\Gamma\Theta - 2ABCu (\Gamma a a + \Delta b b + \Theta c c).$$

$$xx + yy + zz = 2(A+B+C)u + \Gamma + \Delta + \Theta;$$

$$aaxx + bbyy + cczz = \Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc;$$

$$a^4xx + b^4yy + c^4zz = \Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4.$$

Pofons enfuite pour abrégér $\Gamma + \Delta + \Theta = E$; $\Gamma aa + \Theta bb + \Theta cc = F$; $\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4 = G$; $AAaa\Delta\Theta + BBbb\Gamma\Theta + CCc\Gamma\Delta = H$; $AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta = K$; d'où il s'en fuit $K = EG - FF$.

83. En introduifant ces valeurs, à caufe de $A + B + C = -ABC$, notre formule irrationnelle fera $\sqrt{(\cdot)} = \sqrt{(K - 2ABCGu + 2\Lambda\Lambda ABCu - \Lambda\Lambda E + 2\Delta Fv - Gvv)}$; & notre équation différentielle deviendra $\frac{d}{dt} (K - 2ABCGu) = ABC\Delta F - ABCGv + \frac{H - 2ABCFu}{xy\zeta} \sqrt{(\cdot)}$ qui fe réduit à cette forme

$$\frac{Kdv - ABCF\Delta du - 2ABCGudv + ABCGvdu}{K - \Lambda\Lambda E + 2ABC(\Lambda\Lambda - G)u + 2\Delta Fv - Gvv} = \frac{Hdu - 2ABCFudu}{\sqrt{(2\Lambda u + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}}$$

dont il s'agit de trouver l'intégrale.

84. Comme le dernier membre de cette équation ne renferme que la feule variable u , il est évident que, fi l'on pouvoit trouver une fonction de u , par laquelle le premier membre étant multiplié devînt intégrable, on auroit la réfolution complète de cette équation. M. Euler a expofé une méthode pour trouver de tels facteurs; & fi l'on en fait l'application à cette équation propofée, on découvre ce facteur cherché = $\frac{1}{K - 2ABCGu}$; ou bien, fi nous divifons notre équation par $K - 2ABCGu$, l'un & l'autre membre deviendra intégrable ou constructible par des quadratures. Multiplions donc par $\frac{\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$ & mettons le dernier membre $\frac{(H - 2ABCFu) du \sqrt{G}}{(K - 2ABCGu) \sqrt{(2\Lambda u + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}}$ = dU , de forte que U puiſſe être regardé comme une fonction connue de la variable u , dont nous avons déjà le rapport au temps t .

85. Pour le premier membre, en le multipliant par $\frac{G}{(K - 2ABCGu)\sqrt{G}}$, la formule radicale pourra être re-

présentée ainsi $\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu) - (Gv - \Lambda F)^2}$ à cause de $K = EG - FF$; & partant, le premier mem-

bre fera $\frac{(K - 2ABCGu) G dv + ABCG (Gv - \Lambda F) du}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu) - (Gv - \Lambda F)^2}}$

qui supposant $K - 2ABCGu = pp$; $Gv - \Lambda F = q$ & $G - \Lambda\Lambda = ff$

prendra cette forme $\frac{pdq - qdp}{p\sqrt{(ffpp - qq)}}$; qui, supposant $q = ps$

se change en celle-ci $\frac{ds}{\sqrt{(ff - ss)}}$, dont l'intégrale est

$\text{Arc. sin. } \frac{s}{f} = \text{Arc. sin. } \frac{q}{ff}$; & partant, l'intégrale du pre-

mier membre fera $\text{Arc. sin. } \frac{Gv - \Lambda F}{f\sqrt{(K - 2ABCGu)}} =$

$\text{Arc. sin. } \frac{Gv - \Lambda F}{\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu)}}$

86. Cette quantité est donc égale à la formule in-

tégrale $U = \int \frac{(H - 2ABCFu) du \sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(2Au + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}}$

& considérant U comme un angle, notre équation in-

tégrale fera $\frac{Gv - \Lambda F}{\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu)}} = \text{sin. } U$: d'où nous

tirons $\frac{\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu) - (Gv - \Lambda F)^2}}{\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu)}} = \text{cos. } U$:

de sorte que notre formule irrationnelle fera

$$\sqrt{(\dots)} = \frac{\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} \text{cos. } U.$$

87. Substituons ces valeurs pour v , & la formule irrationnelle, dans les expressions assignées ci-dessus pour

pour les cofinus des arcs l, m & n (δI); & après avoir fait les réductions nécessaires, nous trouverons

$$\begin{aligned} \text{cof. } l = & \frac{\Delta a a x}{G} + \frac{b b c c x (B \ominus - C \Delta) \sqrt{(G - \Delta \Delta)}}{G \sqrt{(K - 2 A B C G u)}} \sin. U \\ & + \frac{A a a y z \sqrt{(G - \Delta \Delta)}}{\sqrt{G (K - 2 A B C G u)}} \text{cof. } U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cof. } m = & \frac{\Delta b b y}{G} + \frac{a a c c y (C \Gamma - A \ominus) \sqrt{(G - \Delta \Delta)}}{G \sqrt{(K - 2 A B C G u)}} \sin. U \\ & + \frac{B b b x z \sqrt{(G - \Delta \Delta)}}{\sqrt{G (K - 2 A B C G u)}} \text{cof. } U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cof. } n = & \frac{\Delta c c z}{G} + \frac{a a b b z (A \Delta - B \Gamma) \sqrt{(G - \Delta \Delta)}}{\sqrt{G (K - 2 A B C G u)}} \sin. U \\ & + \frac{C c c x y \sqrt{(G - \Delta \Delta)}}{\sqrt{G (K - 2 A B C G u)}} \text{cof. } U \end{aligned}$$

Donc, puisqu'on peut déterminer pour un temps écoulé quelconque t la quantité u , & tirer de celle-ci les variables x, y, z avec la formule intégrale U , on connoitra aussi pour le même temps les arcs l, m, n , de sorte que le problème est résolu jusqu'à la détermination des angles λ, μ, ν , dont il suffit de chercher un seul.

88. Mais, puisque nous avons trouvé tant les quantités x, y, z que les arcs l, m, n ; exprimés par la seule quantité u , & que nous avons $dt = \frac{du}{x y z}$, la détermination de l'angle $QPA = \lambda$ n'aura aucune difficulté par le moyen de l'équation différentielle $d\lambda = -$

$$\frac{dt (y \text{cof. } m + z \text{cof. } n)}{\sin. l^2}.$$

FIG. 5.

Cependant, puisqu'il n'y a point de raison de chercher plutôt cet angle λ que les deux autres μ & ν , il semble qu'on fera mieux de chercher l'angle QPJ que fait l'arc PJ avec le cercle fixe PQS . Supposons donc l'angle $QPJ = \phi$; & puisque nous

$$\text{avons déjà trouvé } \sin. JAP. = \frac{\text{cof. } \gamma \text{cof. } m - \text{cof. } \delta \text{cof. } n}{\sin. a \sin. l}$$

& $\text{cos. } JAP = \frac{\text{cos. } \epsilon \text{ cos. } m + \text{cos. } \gamma \text{ cos. } n}{\text{fin. } a \text{ fin. } l}$ (73), nous aurons

$$\text{cos. } JP = \text{cos. } a \text{ cos. } l + \text{cos. } \epsilon \text{ cos. } m + \text{cos. } \gamma \text{ cos. } n \\ = \frac{v}{y}, \text{ à cause de } v = x \text{ cos. } l + y \text{ cos. } m + z \text{ cos. } n. \text{ Mais nous}$$

venons de trouver $v = \frac{\Lambda F}{G} + \frac{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}{G} \text{ fin. } U$

& pour x nous avons $x = E - 2ABCu$.

89. Que dans le temps infiniment petit dt le pole de rotation J soit transporté en i , & tirant l'arc Ai avec la perpendiculaire Jp , nous aurons $ip = d\alpha$; & puisque le pole J change également par rapport aux axes principaux, soit que nous les regardions comme fixes, ou que nous tenions compte de leur mouvement, considérons l'angle CAJ pour lequel nous avons

$$\text{cos. } CAJ = \frac{\text{cos. } \epsilon}{\text{fin. } a} \text{ \& } \text{fin. } CAJ = \frac{\text{cos. } \gamma}{\text{fin. } a}; \text{ de-là nous tirerons } d. CAJ = JAi = \frac{-da \text{ cos. } a \text{ cos. } \gamma - d\gamma \text{ fin. } a \text{ fin. } \gamma}{\text{fin. } a \text{ cos. } \epsilon}$$

& partant $Jp = \frac{-da \text{ cos. } a \text{ cos. } \gamma - d\gamma \text{ fin. } a \text{ fin. } \gamma}{\text{cos. } \epsilon}$. Prolongeons l'arc iJ en V , & nous aurons $\text{tang. } AiJ =$

$$\text{tang. } AJV = \frac{-\text{cos. } a \text{ cos. } \gamma}{\text{cos. } \epsilon} - \frac{d\mu \text{ fin. } a \text{ fin. } \gamma}{da \text{ cos. } \epsilon} \text{ \& } Ji = \frac{d\alpha}{\text{cos. } AJV}$$

$= \sqrt{(da^2 \text{ fin. } a^2 + d\epsilon^2 \text{ fin. } \epsilon^2 + d\gamma^2 \text{ fin. } \gamma^2)}$, qui se réduit à cette forme $Ji = \frac{1}{y} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\alpha^2)}$. Maintenant, pour trouver l'angle PJV , nous avons pour

$$\text{l'angle } AJP, \text{fin. } AJP = \frac{\text{fin. } JAP \cdot \text{fin. } l}{\text{fin. } PJ} = \frac{\text{cos. } \gamma \text{ cos. } m - \text{cos. } \epsilon \text{ cos. } n}{\text{fin. } a \text{ fin. } PJ}$$

$$\text{\& } \text{cos. } AJP = \frac{\text{cos. } l - \text{cos. } a \text{ cos. } JP}{\text{fin. } a \text{ fin. } PJ} = \frac{\text{fin. } a^2 \text{ cos. } l - \text{cos. } a \text{ cos. } \epsilon \text{ cos. } m - \text{cos. } a \text{ cos. } \gamma \text{ cos. } n}{\text{fin. } a \text{ fin. } PJ}$$

& par conséquent, $\text{fin. } PJV =$

$$\frac{(\text{cos. } \gamma \text{ cos. } m - \text{cos. } \epsilon \text{ cos. } n) \text{ cos. } AJV - (\text{fin. } a^2 \text{ cos. } l - \text{cos. } a \text{ cos. } \epsilon \text{ cos. } m - \text{cos. } a \text{ cos. } \gamma \text{ cos. } n) \text{ fin. } AJV}{\text{fin. } a \text{ fin. } PJ}$$

90. Or Ji . $\sin. PJV$ donne le petit arc Jq perpendiculaire à l'arc Pi , lequel étant aussi = $d\phi \sin. PJ$,

nous aurons $d\phi \sin. PJ = Ji \sin. PJV = \frac{d\alpha \sin. PJV}{\cos. AJV}$

& partant, $d\phi = \frac{d\alpha}{\sin. \alpha \sin. PJ^2} (\cos. \gamma \cos. m - \cos. \epsilon \cos. n - (\sin. \alpha^2 \cos. l - \cos. \alpha \cos. \epsilon \cos. m - \cos. \alpha \cos. \gamma \cos. n) \text{ tang. } AJV)$.

Substituons ici la valeur de $\text{tang. } AJV = -\frac{d\alpha \cos. \alpha \cos. \gamma - d\gamma \sin. \alpha \sin. \gamma}{d\alpha \cos. \epsilon}$

& parce que $d\alpha \sin. \alpha \cos. \epsilon + d\epsilon \sin. \epsilon \cos. \alpha + d\gamma \sin. \gamma \cos. \gamma = 0$, nous trouverons $d\phi \sin. PJ^2 = (d\gamma \cos. \epsilon \sin. \gamma - d\epsilon \sin. \epsilon \cos. \gamma) \cos. l + (d\alpha \sin. \alpha \cos. \gamma - d\gamma \cos. \alpha \sin. \gamma) \cos. m + (d\epsilon \cos. \alpha \sin. \epsilon - d\alpha \sin. \alpha \cos. \epsilon) \cos. n$. Or, puisque $\cos. \alpha = \frac{x}{z}$; $\cos. \epsilon = \frac{y}{z}$;

$\cos. \gamma = \frac{z}{z}$ on aura $d\epsilon \sin. \epsilon = \frac{y dz}{zz} - \frac{dy}{z}$ & $d\gamma \sin. \gamma = \frac{z dy}{zz} - \frac{dz}{z}$; donc $d\gamma \cos. \epsilon \sin. \gamma - d\epsilon \sin. \epsilon \cos. \gamma = \frac{z dy - y dz}{zz} = \frac{du (Bz\zeta - Cy\gamma)}{zz\gamma\zeta} = \frac{x dt (Bz\zeta - Cy\gamma)}{zz}$; & partant, à cause

de $Bz\zeta - Cy\gamma = B\Theta - C\Delta$ (76), nous aurons $d\phi = \frac{dt (x(B\Theta - C\Delta) \cos. l + y(C\Gamma - A\Theta) \cos. m + z(A\Delta - B\Gamma) \cos. n)}{E - 2ABCu - vv}$.

91. Substituons enfin pour $\cos. l$, $\cos. m$ & $\cos. n$ leurs valeurs trouvées; & puisque

$aaax(B\Theta - C\Delta) + bbyy(C\Gamma - A\Theta) + ccz\zeta(A\Delta - B\Gamma) = -H + 2ABCfu$;
 $bbccxx(B\Theta - C\Delta)^2 + aaccyy(C\Gamma - A\Theta)^2 + aabz\zeta(A\Delta - B\Gamma)^2 = (aaax + bbyy + ccz\zeta)(A^2 a^2 y^2 \zeta^2 + B^2 b^2 x^2 \zeta^2 + C^2 c^2 x^2 y^2) - xx\gamma y \zeta \zeta (Aaa + Bbb + Ccc)^2 = F(H - 2ABCFu)$;
 $Aaa(B\Theta - C\Delta) + Bbb(C\Gamma - A\Theta) + Ccc(A\Delta - B\Gamma) = ABCF$;

de-là nous concluons $\frac{d\phi (E - 2ABCu - vv)}{dt} = \frac{\Lambda (H - 2ABCFu)}{G}$

+ $\frac{F(H - 2ABCFu)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \sin. U + \frac{ABCFxy\zeta\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G}(K - 2ABCGu)} \cos. U$;
 G ij

où il faut remarquer qu'il y a $GG(E - 2ABCu - \sqrt{v}) = (G - \Lambda\Lambda)FF + G(K - 2ABCGu) - (G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu) \sin. U^2 - 2\Lambda F \sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu)} \sin. U$.

$$92. \text{ Puisque } dU = \frac{dt (H - 2ABCFu) \sqrt{G}}{K - 2ABCGu} \quad (76, 84)$$

& $du = xyz dt$, notre différentielle $d\phi$ fera égale à une fraction, dont le numérateur est

$$-\Lambda dU (K - 2ABCGu) \sqrt{G} + FaU \sqrt{G} (G - \Lambda\Lambda) (K - 2ABCGu) \sin. U \\ + \frac{ABCFG du \sqrt{G} (G - \Lambda\Lambda)}{\sqrt{K - 2ABCGu}} \cdot \text{cof. } U$$

& le dénominateur

$$(G - \Lambda\Lambda)FF - G(K - 2ABCGu) - 2\Lambda F \sqrt{(G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu)} \sin. U \\ - (G - \Lambda\Lambda)(K - 2ABCGu) \sin. U^2$$

Pour abrégér cette formule, supposons $\sqrt{(K - 2ABCGu)} = s$ & $\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)} = h$, desorte que $ABCG du = -s ds$, & le numérateur sera.

$$-\Lambda s s dU \sqrt{G} + F h s dU \sqrt{G} \sin. U - F h ds \sqrt{G} \cdot \text{cof. } U$$

& le dénominateur

$$h h F F + G s s - 2\Lambda F h s \sin. U - h h s s \sin. U^2$$

93. Ayant introduit ces valeurs abrégées, nous aurons à intégrer cette formule

$$d\phi = \frac{-\Lambda s s dU + F h s dU \sin. U - F h ds \cdot \text{cof. } U}{F F h h + G s s - 2\Lambda F h s \sin. U - h h s s \sin. U^2} \sqrt{G}, \text{ laquelle, à}$$

cause de $h \cdot h = G - \Lambda\Lambda$, se réduit à

$$d\phi = \frac{-\Lambda s s dU + F h s dU \sin. U - F h ds \cdot \text{cof. } U}{(F h - \Lambda s \sin. U)^2 + G s s \cdot \text{cof. } U^2} \sqrt{G}, \text{ dont l'inté-}$$

grale est évidemment

$$\phi = \text{Arc. tang. } \frac{F h - \Lambda s \sin. U}{s \cdot \text{cof. } U \cdot \sqrt{G}} \text{ ou bien } \text{tang. } \phi = \frac{F h - \Lambda s \sin. U}{s \cdot \text{cof. } U \cdot \sqrt{G}}.$$

Cette formule, en restituant pour s & h les valeurs supposées, se réduit à celle-ci

$$\text{tang. } \phi = \frac{F \sqrt{(G - \Lambda\Lambda)} - \Lambda \sin. U \sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\text{cof. } U \sqrt{G} (K - 2ABCGu)}.$$

94. On peut donc trouver cet angle $QPJ = \phi$ indépendamment de la quantité ν , où je n'ai pas introduit une nouvelle constante, puisque le cercle fixe PQS peut être établi à volonté. Donc, supposant cet angle ϕ connu, puisque nous venons de trouver $\sin. PJ = \sqrt{(E - 2ABCu - \nu\nu)}$, cette quantité est égale à

$$\frac{\sqrt{(Eh - \Delta s \sin. U)^2 + Gss \cos. U^2}}{G}, \text{ \& partant à } \frac{s \cos. U}{\cos. \phi \sqrt{G}}$$

désorte que $\sin. PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\cos. U}{\cos. \phi}$; $\sin. PJ$

$$= \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(E - 2ABCu)}} \cdot \frac{\cos. U}{\cos. \phi} \text{ \& } \cos. PJ = \frac{\Delta F + \sqrt{(G - \Delta\Delta)(K - 2ABCGu)}}{G\sqrt{(E - 2ABCu)}} \cdot \frac{\sin. U}{\sin. \phi}$$

Or, ayant trouvé l'angle $QPJ = \phi$, il en faut retrancher l'angle APJ pour avoir $QPA = \lambda$; pour cet

effet, nous avons $\sin. APJ = \frac{z \cos. m - y \cos. n}{x \sin. PJ \sin. l}$ & $\cos. APJ$

$$= \frac{x \sin. l^2 - y \cos. l \cos. m - z \cos. l \cos. n}{x \sin. PJ \sin. l}$$

Voici donc la solution de ce problème :

Un corps solide, d'une figure quelconque, n'étant sollicité par aucune force, si on lui imprime un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement.

95. Si le corps a un mouvement progressif, qui demeure perpétuellement le même, qu'on l'en dépouille, en sorte que son centre de gravité demeure en repos; & la question revient à déterminer le mouvement de rotation, ou déterminer pour chaque temps écoulé, tant l'axe de rotation que la vitesse angulaire. Pour cet effet, il faut considérer les trois axes principaux du corps, qui soient (*fig. 3*) GA, GC, GE , & par rapport à eux les momens d'inertie $Ma a, Mbb, Mcc$. Rapportons le corps à une sphère fixe décrite autour du centre de gravité du corps G (*fig. 5*), & qu'après le

temps = t secondes, les axes principaux du corps répondent aux points A, C, E , dans la surface de la sphère & l'axe de rotation au point J , autour duquel le corps tourne dans le sens ACE , avec la vitesse angulaire = ω où ω marque l'angle décrit dans une seconde, le sinus total ou le rayon de la sphère étant = 1.

96. Posons pour ce temps de t secondes, écoulé depuis le commencement, $\omega \cos AJ = x$; $\omega \cos CJ = y$; $\omega \cos EJ = z$;

& soit pour abrégé, $\frac{bb - cc}{aa} = A$; $\frac{cc - bb}{bb} = B$; $\frac{aa - bb}{cc} = C$.

Cela posé, s'il fut au commencement $x = \sqrt{\Gamma}$, $y = \sqrt{\Delta}$, $z = \sqrt{\Theta}$, & partant, la vitesse angulaire $\sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta)}$, il

faut intégrer cette équation $dt = \frac{du}{\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$,

en sorte que faisant $t = 0$, il devienne $u = 0$: de-là on aura pour le temps indéfini t la valeur de u ; & ensuite

$x = \sqrt{(\Gamma + 2Au)}$; $y = \sqrt{(\Delta + 2Bu)}$; $z = \sqrt{(\Theta + 2Cu)}$; d'où l'on tirera la vitesse angulaire $\omega = \sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)}$,

puisque $A + B + C = -ABC$. Après cela, on connoîtra aisément les arcs JA, JC, JE des formules

$\cos JA = \frac{x}{\omega}$; $\cos JC = \frac{y}{\omega}$; $\cos JE = \frac{z}{\omega}$, qui

déterminent la situation de l'axe de rotation GJ par rapport aux axes principaux du corps.

97. Ensuite, pour trouver la position des axes principaux à l'égard de la sphère fixe, où je prends à plaisir un point fixe P avec un cercle fixe PQS , posons les arcs $PA = l$; $PC = m$; $PE = n$; & soit pour abrégé

$\Gamma + \Delta + \Theta = E$; $\Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc = F$; $\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4 = G$;

$AAaa\Delta\Theta + BBbb\Gamma\Theta + CCc\Gamma\Delta = H$; $AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta = K$;

Qu'on cherche maintenant un arc ou angle U , de-

sorte que U soit = $\int \frac{(H - 2ABC\Gamma u) du \sqrt{G}}{(K - 2ABC\Gamma u) \sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$.

qui renferme une constante arbitraire, outre laquelle on en introduira encore une autre Λ , & on aura

$$\begin{aligned} \text{cos. } l &= \frac{\Lambda aax}{G} + \frac{bbccx(E\Theta - C\Delta)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cdot \text{sin. } U + \frac{Aaayz\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} \cdot \text{cos. } U \\ \text{cos. } m &= \frac{\Lambda bby}{G} + \frac{aaccy(C\Gamma - A\Theta)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cdot \text{sin. } U + \frac{Ebbxz\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} \cdot \text{cos. } U \\ \text{cos. } n &= \frac{\Lambda ccz}{G} + \frac{aaabbz(A\Delta - B\Gamma)\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} \cdot \text{sin. } U + \frac{Cccxy\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} \cdot \text{cos. } U. \end{aligned}$$

98. Pour ces deux constantes, dont l'une est Λ & l'autre renfermée dans l'arc U , il les faut prendre en sorte que pour le commencement, où $t = 0$ & $u = 0$, les arcs l, m, n deviennent aussi grands qu'ils ont été précisément alors; car quoiqu'il y en ait trois, il suffit d'en avoir déterminé deux, à cause de leur relation $\text{cos. } l^2 + \text{cos. } m^2 + \text{cos. } n^2 = 1$. Enfin, pour la position à l'égard du cercle PQS , si nous posons l'angle $JPQ = \phi$, nous aurons, en introduisant une nouvelle constante pour l'ajuster à l'état initial

$$\text{rang. } (\phi + P) = \frac{F\sqrt{(G - \Lambda\Lambda)} - \Lambda \text{sin. } U \cdot \sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\text{cos. } U \cdot \sqrt{G(K - 2ABCGu)}}; \text{ or,}$$

$$\text{sin. } \overline{APJ} = \frac{z \text{cos. } m - y \text{cos. } n}{z \text{sin. } PJ \cdot \text{sin. } l} \quad \& \quad \text{sin. } PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} \cdot \int \frac{\text{cos. } U}{(\text{cos. } (\phi + P))}.$$

Par ces formules, le problème proposé est parfaitement résolu.

Autre solution du même problème.

99. La solution précédente n'est si compliquée que parce qu'elle se rapporte en général à un point fixe quelconque P & à un cercle fixe quelconque PQS , d'où il doit y entrer un grand nombre de constantes. Mais, puisque ces lieux fixes sont arbitraires, on les peut établir en sorte que nos formules deviennent beaucoup plus simples. La constante Λ dépendant principalement du point P , rien n'empêche qu'on ne le prenne au

commencement, enforte que l'on ait $G - \Lambda\Lambda = 0$ ou $\Lambda = \sqrt{G} = \sqrt{(\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4)}$. Alors, ayant trouvé l'angle U comme ci-dessus, on aura, par des formules fort simples, $\text{cos. } l = \frac{aax}{\sqrt{G}}$; $\text{cos. } m = \frac{bby}{\sqrt{G}}$; $\text{cos. } n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$; & partant, pour déterminer ces arcs l, m, n , on n'a pas même besoin de chercher l'angle U . Or, pour l'angle $JPQ = \phi$, on aura, en négligeant la constante P , cette équation $\text{tang. } \phi = -\frac{\text{fin. } u}{\text{cos. } U}$, ou bien $\phi = -U$, desorte que

$$\phi = -\int \frac{(H - 2ABCu) du \sqrt{G}}{(K - 2ABCGu) \sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$$

100. Mais ayant exprimé si commodément les arcs l, m & n , on peut immédiatement déterminer les angles $QPA = \lambda$; $QPC = \mu$; $QPE = \gamma$ par les premières formules n^o. VII, VIII & IX; car puisque $\text{fin. } l^2 =$

$$\text{cos. } m^2 + \text{cos. } n^2 = \frac{l^2yy + c^2zz}{G} = \frac{G - a^4xx}{G} \quad \& \quad y \text{ cos. } m + z \text{ cos. } n = \frac{lbyy + cczz}{\sqrt{G}} = \frac{F - a^4xx}{\sqrt{G}}, \text{ nous aurons } d\lambda = \frac{-dt(F - a^4xx)}{G - a^4xx} \sqrt{G}$$

$$\text{ou bien } d\lambda = \frac{-du(\Delta bb + \Theta cc - 2Aau) \sqrt{G}}{(\Delta b^4 + \Theta c^4 - 2Aau) \sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$$

Outre cela, puisque $K = G(\Gamma + \Delta + \Theta) - FF$ nous trouvons,

$$\text{cos. } PJ = \frac{aa + bbyy + cczz}{2\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{G}(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} \quad \&$$

$$\text{fin. } PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} \quad \& \text{ de - là}$$

$$\text{fin. } APJ = \frac{Aaay\sqrt{G}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)(G - a^4xx)}} \quad \& \quad \text{cos. } APJ = \frac{Gx\sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} - Faa}{\sqrt{(K - 2ABCGu)(G - a^4xx)}}$$

or, pour avoir le point P , on n'a qu'à prendre au commencement

$$\text{cos. } AP = aa \sqrt{\frac{\Gamma}{G}}; \text{ cos. } CP = bb \sqrt{\frac{\Delta}{G}}; \text{ cos. } EP = cc \sqrt{\frac{\Theta}{G}}$$

M É M O I R E

S U R

L'ARRIMAGE DES NAVIRES.

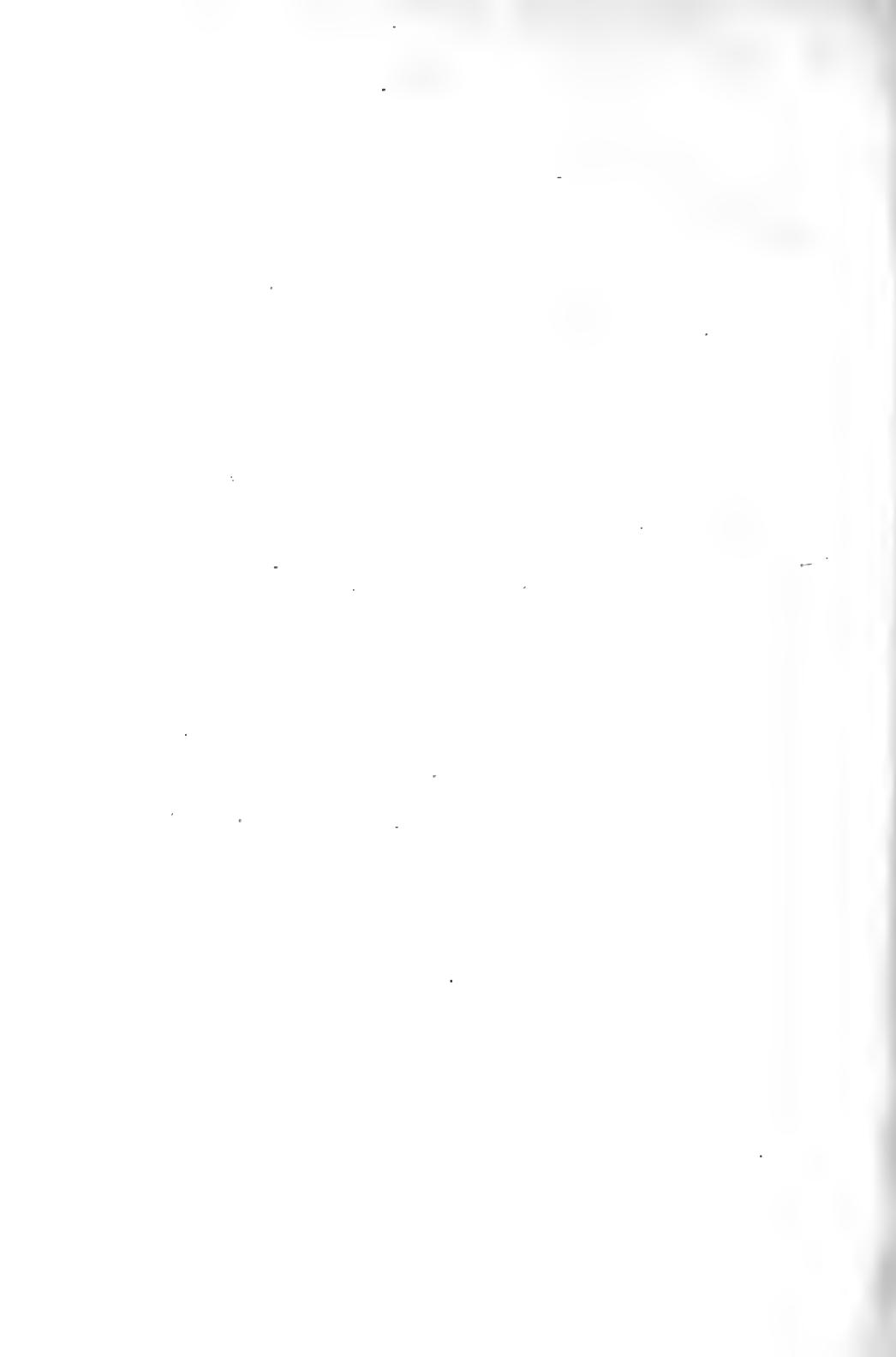
POUR CONCOURIR au Prix proposé par l'ACADÉMIE
ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1761.

*Par M. l'Abbé Bossut, Professeur Royal de
Mathématiques aux Ecoles du Génie de Metziers;
Correspondant de l'ACADÉMIE ROYALE DES
SCIENCES de Paris.*

Cette pièce est l'une des deux entre lesquelles le Prix a été
partagé.

Prix de 1761.

A





M É M O I R E

S U R

L'ARRIMAGE DES NAVIRES.

*Sur son centre fixé, le navire orgueilleux
Ose braver des mers l'effort impétueux.*

EXPOSITION DU SUJET.

LE sujet du Prix proposé par l'Académie - Royale des Sciences pour l'année 1761, consiste à déterminer *la meilleure manière de lester & d'arrimer un vaisseau ; & les changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, soit pour faire mieux porter la voile au navire, soit pour lui procurer plus de vitesse, soit pour le rendre plus ou moins sensible au gouvernail.* Cette question est assurément une des plus importantes & des plus curieuses qu'on pût offrir aux recherches des géomètres. Je ne doute pas qu'elle ne fasse naître plusieurs vues utiles au progrès de la navigation. Je me suis efforcé de la traiter par une méthode nouvelle & toujours subordonnée aux besoins de la pratique. Mon travail aura le succès le plus flatteur que je desire, s'il peut fixer quelques momens l'attention du tribunal éclairé à qui j'en fais hommage.

Je diviserai ce mémoire en cinq chapitres. Dans

A ij

le premier, je remettrai sous les yeux du lecteur les principales propositions d'hydrostatique, d'hydraulique & de dynamique, qui me seront nécessaires pour la solution du problème. Dans le second, je déterminerai la meilleure manière de lester & d'arrimer un vaisseau. Les trois autres seront respectivement destinés à l'examen des changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, ou pour faire mieux porter la voile au navire, ou pour lui procurer plus de vitesse, ou pour le rendre plus ou moins sensible au gouvernail. Cet ordre m'est indiqué par l'énoncé même du programme.

C H A P I T R E P R E M I E R.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

LORSQU'UN navire, ou en général un corps quelconque, flotte sur un fluide, à chaque instant il est soulevé par le fluide de bas en haut, suivant la verticale, avec une force égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.

Cela est également vrai, soit que le corps soit en repos, soit qu'il soit agité par des forces quelconques, pourvu néanmoins que dans ce dernier cas, la surface du fluide reste toujours à même hauteur. J'ajoute cette restriction, parce que si le corps, en s'enfonçant plus ou moins, forçoit le fluide à monter ou à descendre, il y auroit une partie de l'effort du fluide déplacé, qui seroit employée à produire le mouvement d'ascension ou de descension dont il s'agit. L'exactitude demandoit que nous fissions cette remarque; mais il est évident que ces

mouvemens doivent être ici regardés comme nuls; car le navire n'est qu'un point sur la vaste étendue des mers.

I I.

Supposons le corps dans une immobilité absolue sur le fluide : il est clair que le poids du corps & la poussée verticale de l'eau se font équilibre, & que par conséquent ces deux forces sont égales & directement opposées. Or le poids du corps se réunit à son centre de gravité, & la poussée verticale de l'eau se réunit au centre de gravité de la partie submergée, considérée comme homogène : par conséquent ces deux centres de gravité seront nécessairement placés sur une même ligne verticale; en sorte que si, par quelque cause que ce puisse être, l'un d'eux vient à s'écarter de cette ligne, le corps fera des oscillations, à la manière des pendules.

I I I.

Mais si le corps étoit mu sur le fluide par quelque force étrangère, comme, par exemple, un navire l'est par le vent, alors il résulteroit, & de cette force, & de la résistance de l'eau, une force verticale, qui soutiendrait une partie de son poids. Ainsi, en général, ce poids est égal à la résultante de la poussée verticale de l'eau, & de toutes les autres puissances qui tendent à le soulever suivant la verticale.

I V.

Lorsqu'un fluide frappe perpendiculairement un plan en repos, la force du choc est en raison composée du plan, de la densité du fluide, & du carré de sa vitesse. Le choc seroit le même, si le plan alloit frapper le fluide en repos. Mais si le fluide &

le plan viennent à la rencontre l'un de l'autre, ou si l'un fuit devant l'autre, le choc sera en raison composée du plan, de la densité du fluide, & du quarré de la somme ou de la différence des vitesses du fluide & du plan (*a*).

V.

Si un fluide frappe obliquement un plan, ou le plan le fluide, la force du choc qui en résulte perpendiculairement contre le plan, est, en général, en raison composée du plan, de la densité du fluide, du quarré de la somme ou de la différence des vitesses du fluide & du plan, & du quarré du sinus de l'angle d'incidence du fluide sur le plan.

V I.

Il résulte des deux articles précédens que, lorsqu'on connoîtra par l'expérience l'impulsion directe d'un fluide, sous une certaine vitesse, contre un plan donné, on connoîtra aussi l'impulsion d'un fluide quelconque, sous une vitesse différente, contre un plan différent, soit que le choc se fasse directement ou obliquement.

Dans la pratique, on peut, suivant M. Bouguer (*Man. des vaiss. pag. 185*), supposer que l'impulsion de l'eau de mer, sous une vitesse d'un pied par seconde, contre un plan d'un pied quarré en surface, est équivalente à un poids d'une livre trois onces; & que celle du vent, sous les mêmes conditions, équivaut à un poids d'un quarantième d'once.

V I I.

Si un corps est poussé par une force qui passe par

(*a*) Cette règle, & la suivante qui en dépend, ne sont pas vraies en rigueur; mais elles suffisent pour la pratique, & je m'en servirai avec tous les géomètres qui ont écrit sur ces matières.

son centre de gravité, toutes ses parties marcheront d'un mouvement parallèle à la direction de la force imprimée, avec une vitesse égale à cette force divisée par la masse du corps.

V I I I.

Mais si la force imprimée ne passe pas le centre de gravité du corps, ce centre sera mu de la même manière que s'il se trouvoit sur la direction de la force; & de plus le corps *pirouettera* sur ce même point.

I X.

Sur ce principe, lorsqu'il s'agira de déterminer le mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques & de directions quelconques,

1°. On trouvera le chemin du centre de gravité; en imaginant que toutes les puissances passent par ce centre avec des directions parallèles à celles qu'elles ont, & déterminant leur résultante par les principes ordinaires de la mécanique. Cette résultante sera la force avec laquelle le centre de gravité sera mu.

2°. Pour déterminer le pirouettement du corps autour de son centre de gravité, on pourra imaginer par ce centre un axe à volonté, sur lequel tourne le corps, tandis que cet axe a lui-même un mouvement de nutation. Ensuite les règles de la mécanique fourniront le moyen de décomposer & d'aligner les forces qui doivent produire chacun de ces mouvemens. C'est ainsi que M. d'Alembert a envisagé la question dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes*: ouvrage où ce grand problème a été résolu pour la première fois.

X.

Si plusieurs corpuscules *A. B. D.* &c., liés en-

FIGURE I. semble d'une manière quelconque, tendent à tourner autour d'un point ou d'un axe C , la résistance qu'ils opposeront au mouvement angulaire, sera la même que si, en un seul & même point G , on substituoit, à la place du corps A , un corps exprimé par $\frac{A \times CA^2}{CG^2}$; à la place du corps B , un corps exprimé par $\frac{B \times CB^2}{CG^2}$; à la place du corps D , un corps exprimé par $\frac{D \times CD^2}{CG^2}$ &c.

D'où l'on voit que si on appelle dn une particule quelconque d'un corps sensible, z la distance de cette particule à un axe sur lequel tourne le corps, a la distance d'un point donné à l'axe, on pourra, à la place du corps proposé, substituer à la distance donnée a , un autre corps représenté par $\int \frac{z z dn}{a^2}$. Ainsi nommant de plus, F la force qui tend à faire tourner le corps; b son bras de levier, u la vitesse de rotation pour le rayon a , on aura, par le principe ordinaire du levier; $F \times b = u \times a \times \int \frac{z z dn}{a^2} = u \int \frac{z z dn}{a}$.

X I.

La somme des produits des particules d'un corps par les quarrés de leurs distances à un axe qui ne passe pas par son centre de gravité, est toujours égale à la somme des produits des mêmes particules, par les quarrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité & parallèle au premier, plus au produit de la masse du corps multipliée par le quarré de la distance des deux axes.



CHAPITRE SECOND.

De la meilleure manière de lester & d'arrimer un navire.

X I I.

LES marins comprennent quelquefois sous la dénomination générale de *lest* tout ce qui compose la charge du navire; mais ils affectent plus particulièrement ce nom à ces corps étrangers & pesants qu'on place au fond du navire, soit pour le mettre en équilibre, soit pour faciliter ses mouvements.

L'art de distribuer la charge de la manière convenable, est ce qu'ils appellent l'*arrimage*.

X I I I.

Il n'est pas ici question de discuter la figure du navire & de ses parties, relativement aux bonnes qualités qui en dépendent. Cet examen préliminaire doit être fait par le constructeur instruit, qui trouvera tout ce qu'on peut desirer sur ce sujet dans la *Science navale* de M. Euler, dans le *Traité du navire* de M. Bouguer, & dans l'*Architecture navale* de M. Duhamel. Il s'agit uniquement de lester & d'arrimer un navire *donné*, de la manière la plus avantageuse.

X I V.

Supposant donc que le navire ait la figure requise, & qu'on ait tracé en conséquence sur son plan des belles *lignes d'eau*, c'est-à-dire, des lignes propres à diviser facilement le fluide, & à favoriser son impulsion sur le gouvernail; le problème consistera à distribuer tellement la charge, que le navire prenne en effet dans l'eau les lignes projetées. J'attribue ici à ces lignes toute la perfection desirable; mais si

Prix de 1761.

B

elles étoient défectueuses, on verra dans la fuite les changemens qu'il faut faire à l'arrimage pour leur en substituer d'autres.

X V.

Lorsqu'on aura fixé, d'après les considérations que je viens d'exposer, la *carène* du navire, & qu'on aura déterminé de plus le centre de gravité de cette même carène, regardée comme homogène, il faudra faire en sorte, en chargeant le navire (*art 1 & 11*),

1°. Que le poids absolu du navire, tout armé, soit égal au poids du volume d'eau déplacé par la carène. Le premier poids se connoîtra par le second, qui est très-aisé à calculer.

2°. Que le centre de gravité du poids total du navire, & celui de la carène, se trouvent dans une même ligne verticale.

Je ne considère ici que la simple flottaison primitive du navire, & je fais abstraction de toutes les autres forces qui pourroient contribuer à soutenir une petite partie de son poids, dans le sens de l'*art. III*.

X V I.

Il est visible que le poids du navire est constant; mais qu'on peut distribuer diversément ce poids, de manière cependant que son centre de gravité, & celui de la carène, toujours supposée homogène, soient dans une même ligne verticale. Or de toutes ces différentes distributions, il est clair qu'il faut choisir celle qui maintiendra fixément le navire dans sa première assiette, ou qui, du moins, le ramènera par les voies les plus douces, à cette première assiette, supposé qu'il vienne à la perdre. Par cet arrangement, le navire portera parfaitement la voile: avantage capital auquel sont attachées tout-à-la-fois la sûreté & la facilité de la navigation.

XVII.

Or on ne peut pas parvenir à déterminer l'arrimage qui procure au navire la stabilité la plus avantageuse, sans connoître d'abord les mouvements qu'il prend, lorsque, venant à s'incliner, son centre de gravité & celui de la carène ne se trouvent plus dans la même verticale. Ainsi le premier objet que nous devons nous proposer est la détermination des mouvements dont il s'agit.

XVIII.

Les *bouffées* de vent & les chocs des lames sont les causes qui font incliner le navire, & qui par-là occasionnent les oscillations que nous avons ici en vue. Toutes ces oscillations se réduisent à deux classes principales : les unes se font d'un bord à l'autre, & se nomment mouvements de *roulis* ; les autres se font suivant la longueur du navire, & s'appellent mouvements de *tangage*. De ces deux espèces d'oscillations simples il résulte très-souvent des oscillations composées de roulis & de tangage, & même de rotation horizontale. Je donnerai ci-dessous la méthode générale pour déterminer tous ces mouvements. Lorsqu'ils ne se font sentir que d'un bord à l'autre, ou que suivant la longueur, le problème se simplifie considérablement.

XIX.

Les géomètres qui ont écrit sur ces matières n'ont pas manqué d'examiner les mouvements de roulis & de tangage. L'Académie elle-même a proposé pour sujets des prix des dernières années, de diminuer le plus qu'il est possible les mauvais effets qui en résultent. Aujourd'hui il s'agit encore, du moins en partie, de remplir le même objet, mais en se bornant uniquement aux ressources que peut fournir l'ar-

rimage; au lieu qu'on pouvoit auparavant tirer parti de quelques changements faits à la figure même du navire. Je vais tâcher de résoudre la question de manière que la pratique en retire tout l'avantage possible.

X X.

Pour aller du plus simple au plus composé, je ne considérerai d'abord qu'un simple profil du navire, fait ou suivant sa longueur, ou perpendiculairement à sa longueur; & je supposerai que cette figure se balance autour d'un axe qui la traverse perpendiculairement par son centre de gravité. Ce premier problème aura son application immédiate aux mouvements de roulis & de tangage de certains bâtiments usités dans les pays du Nord & à la Chine, lesquels ont à-peu-près la figure de parallépipèdes rectangles, ou de demi cylindres; & avec de légères additions, le même problème s'appliquera aux mouvements de roulis & de tangage de toutes sortes de navires, comme on le verra bientôt.

Je prie le lecteur de ne pas perdre de vue que les oscillations seront toujours censées fort petites, pour ne pas donner à ces problèmes une généralité superficielle & embarrassante.

X X I.

P R O B L E M E I.

FIG. 2. *Supposons que ADHTEB soit la coupe longitudinale ou latitudinale d'un navire, laquelle ait son centre de gravité G sur la verticale GC; que cette figure s'étant inclinée d'une quantité connue, elle enfoncée dans l'eau la partie DHT E dont le centre de gravité F soit à une distance donnée de la verticale GC; qu'en ce moment elle soit abandonnée uniquement à l'action de sa pesanteur & de la poussée verticale de l'eau; on demande les oscillations qu'elle fera.*

SOLUTION.

Suivant l'article VIII, le centre de gravité de la figure montera verticalement, & en même temps la figure tournera sur ce centre. Tels sont les deux mouvements qu'il s'agit de déterminer.

Supposons que la figure partant de l'état fixé par l'énoncé du problème s'incline de manière qu'au bout d'un certain temps sa droite zx soit sa section commune avec la surface de la mer. Comme les oscillations sont fort petites par hypothèse, il est clair que les droites DE , zx peuvent être censées se couper au point C . Soit S le centre de gravité de DE . Du point F soient menées parallèlement à DE & à zx , les droites Ff , Fo ; & du centre de gravité G de la figure soient abaissées sur DE & sur zx les perpendiculaires GC , GL . Soient Gg l'espace parcouru verticalement par le centre de gravité, Qq l'espace parcouru circulairement par un point donné à une distance donnée du point G . Cela posé,

Soient	{	CE	$= a$
		CD	$= b$
		DE	$= a + b = c$
		CS	$= k$
		Ff	$= f$
		Gf	$= h$
		GQ	$= m$
		Gg ou Cc	$= x$
		Qq	$= y$
		L'élément du temps.	$= dt$
		L'aire de la figure $ADHTEB$	$= N$
		L'élément de cette aire.	$= dN$
		La distance indéterminée d'un élément dN au point G	$= z$
		L'aire de la partie $DHTE$	$= M$
La gravité.	$= g$		
La densité de la figure $ADHTEB$	$= p$		
La densité de l'eau.	$= \pi$		

La masse de la figure proposée sera $= pN$; son

poids = gpN . La masse d'eau déplacée par la partie $DHTE$ fera = πM ; son poids = $g\pi M$.

Maintenant, il est visible que la nouvelle partie plongée ζhtx est égale à la première $DHTE$, moins l'espace $DEed$, plus le triangle ECx , moins le triangle DCz . Or

1°. L'aire $DEed$, qu'on peut prendre pour un rectangle, = cx ;

2°. Les deux triangles rectangles GQq , CEx , qui sont évidemment semblables, puisque les côtés qui forment les angles aigus G & C sont perpendiculaires chacun à chacun, donneront $\frac{aa y}{2m}$ pour l'aire du triangle ECx ;

3°. De même l'aire du triangle DCz = $\frac{bb y}{2m}$.

Par conséquent le volume de la nouvelle partie enfoncée = $M - cx + \frac{aa y}{2m} - \frac{bb y}{2m}$ & le poids du pareil volume d'eau = $g\pi \left(M - cx + \frac{aa y}{2m} - \frac{bb y}{2m} \right)$. Retranchant de ce poids, le poids gpN de la figure, on aura $g\pi \left(M - cx + \frac{(aa - bb)y}{2m} \right) - gpN$ pour la force absolue qui soulève la figure suivant la verticale : c'est pourquoi le principe ordinaire des forces accélératrices donnera cette première équation $\left(g\pi \left(M - cx + \frac{(aa - bb)y}{2m} \right) - gpN \right) dt^2 = pNddx$.

Pour en trouver une seconde, on observera que comme $\zeta htx = DHTE - DEed + ECx - DCz$, le moment de ζhtx par rapport à l'axe de rotation, est égal à la somme des moments de toutes les parties qui composent le second membre, en prenant ces moments avec des signes convenables. Or faisant d'abord abstraction de la densité de l'eau & de la pesanteur.

1°. Le moment de $D\dot{H}TE = DHTE \times F_0 = DHTE \times (Ff - fk) = M \left(f - \frac{hy}{m} \right)$;

2°. Le moment de $D\dot{E}ed = ckx$, & ce moment doit être pris négativement;

3°. Le moment du triangle $ECx = \frac{a^3 y}{3m}$, & ce moment doit être pris négativement;

4°. Le moment du triangle $DCz = \frac{b^3 y}{3m}$, & ce moment doit être pris positivement.

Par conséquent, tous les signes bien combinés; le moment de $zhtx = M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + ckx - \frac{a^3 y}{3m} - \frac{b^3 y}{3m}$; & faisant entrer dans cette expression la densité de l'eau & la pesanteur, on aura $g\pi \left(M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + ckx - \frac{(a^3 + b^3)y}{3m} \right)$ pour le moment de la force absolue qui tend à faire tourner la figure sur son centre de gravité. Or à la place de la masse de cette figure, on peut (*art. x*) substituer en Q une masse représentée par $p \int \frac{zz dN}{m^2}$: multipliant cette masse par son bras de levier m , on aura $p \int \frac{zz dN}{m}$ pour le moment de la résistance qu'elle fait à parcourir l'espace Qq : donc par le principe des forces accélératrices, on aura cette nouvelle équation, $g\pi \left(M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + ckx - \frac{(a^3 + b^3)y}{3m} \right) dt^2 = p ddy \int \frac{zz dN}{m}$. Je n'intègre pas les deux équations que j'ai trouvées, parce que j'en intégrerai de toutes pareilles que fournira le problème suivant.



P R O B L E M E I I.

Déterminer les mouvements de roulis ou de tangage de toutes sortes de navires.

Je suppose, conséquemment à cet énoncé, que le centre de gravité de la carène demeure toujours, du moins sensiblement, ou dans le plan longitudinal mené de la proue à la poupe, lorsqu'il s'agit des mouvements de tangage; ou dans le plan latitudinal passant par le centre de gravité du navire, lorsqu'il s'agit des mouvements de roulis; en sorte que le navire puisse être censé se balancer suivant l'un ou l'autre plan. Ce cas est celui des oscillations simples.

S O L U T I O N.

Pour fixer l'imagination, supposons qu'il s'agisse des mouvements de tangage; on verra bien les changements qu'il faudra faire au discours, pour l'adapter aux mouvements de roulis.

FIG. 2, 3, 4. Soient $ADHTEB$ (*fig. 2*) la coupe longitudinale du navire, coupe dans laquelle se trouvent les centres de gravité du navire & de la carène: $DOEo$ (*fig. 3*) la coupe horisontale faite à fleur d'eau: C le point où la verticale GC élevée par le centre de gravité du navire rencontre l'axe DE . Par le point C soit mené perpendiculairement à DE l'axe εd , & soit faite suivant cet axe la coupe latitudinale εVd (*fig. 4*) dans laquelle la droite $\mu G \ell$ représente un axe perpendiculaire à $ADHTEB$, & passant par le centre de gravité G . Supposons, comme dans l'article précédent, que le navire s'incline du côté de E . Soient (*fig. 2*) Gg l'espace parcouru verticalement par le centre de gravité, Qq l'espace parcouru circulairement à une distance donnée du centre G .
Cela

Cela posé, il est visible que tout sera le même que ci-dessus, à cela près qu'au lieu du rectangle $DEed$ (fig. 2), il faudra considérer un prisme ayant pour base la figure $DOEo$ (fig. 3), & pour hauteur Gg ; qu'au lieu des triangles ECx , DCz (fig. 2), il faudra considérer les onglets formés par la rotation des espaces $E\epsilon d$, $D\epsilon d$ (fig. 3) autour de l'axe ϵd ; qu'enfin, au lieu de la somme des produits des particules de la simple surface $ADHTEB$ par les quarrés de leurs distances au point G , il faudra prendre la somme des produits des particules du solide même du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe $\mu G\epsilon$. Ainsi

Supposant	L'aire $E\epsilon d$	$= aa$
	L'aire $D\epsilon d$	$= bb$
	L'aire entière $D\epsilon E d$	$= aa + bb = cc$
	La distance SC du centre de gravité S de la coupe de flottaison à la verticale GC	$= k$
	La distance initiale Ff du centre de gravité F de la carène à la verticale GC	$= f$
	Gf	$= h$
	GQ	$= m$
	Gg	$= x$
	Qq	$= y$
	L'élément du temps	$= dt$
	Le volume du navire	$= N$
	La somme des produits des particules de ce volume par les quarrés de leurs distances à l'axe $\mu G\epsilon$	$= R$
	L'onglet formé par la rotation de l'aire $E\epsilon d$ autour de l'axe ϵd	$= \epsilon a^2 y^*$
	Le moment du même onglet par rapport à l'axe de rotation $\mu G\epsilon$	$= \theta a^3 y$
	L'onglet formé par la rotation de l'aire $D\epsilon d$ autour de l'axe ϵd	$= \epsilon' b^2 y$
	Le moment du même onglet par rapport à l'axe $\mu G\epsilon$	$= \theta' b^3 y$
Le volume de la carène au premier instant	$= M$	
La gravité	$= g$	
La densité de la charge	$= p$	
La densité de l'eau	$= x$	

* Les lettres ϵ , ϵ' , θ , θ' sont des coefficients constants, qui se déterminent par les principes ordinaires de la géométrie.

on aura évidemment les deux équations suivantes

$$(A) \left(g\pi \left(M - ccx + (\zeta a^2 - \zeta' b^2) y \right) - gpN \right) dt^2 = pN dx;$$

$$(B) \left(g\pi \left(M \left(f - \frac{h y}{m} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right) \right) dt^2 = \frac{pRdy}{m}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ces deux équations : c'est ce que nous ferons dans la suite.

X X I I I.

- *REMARQUE PREMIERE.* Si, tout étant d'ailleurs le même, le centre de gravité F de la carène au premier instant du mouvement, au lieu d'être placé en avant de la verticale GC , comme on l'a supposé, étoit placé en arrière de la même ligne, à la place de l'équation (A), on auroit l'équation

$$(C) \left(g\pi \left(M - ccx - (\zeta a^2 - \zeta' b^2) y \right) - gpN \right) dt^2 = pN dx;$$

& à la place de l'équation (B), on auroit l'équation

$$(D) \left(g\pi \left(M \left(f - \frac{h y}{m} \right) - cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right) \right) dt^2 = \frac{pRdy}{m}.$$

D'où l'on voit que supposant toujours la verticale GC placée en avant du centre de gravité S de la coupe de flottaison, les équations (A) & (B) & les équations (C) & (D) auront deux à deux le même signe au troisième terme de leur premier membre, pourvu que l'on ait $\zeta a^2 > \zeta' b^2$. Il n'est pas moins visible que si la verticale GC passoit en arrière du point S , les équations auroient encore deux à deux le même signe au troisième terme de leur premier membre, pourvu que l'on eût $\zeta' b^2 > \zeta a^2$. Or dans le premier cas on a en effet $\zeta a^2 > \zeta' b^2$, & dans le second on a $\zeta' b^2 > \zeta a^2$. Ainsi on peut établir que les équations des deux balancements auront toujours le même signe au troisième terme de leur premier membre. C'est ce qu'il faut bien observer pour la suite.

X X I V.

REMARQUE DEUXIEME. Je ferai encore ici

une remarque qui n'auroit pas sans doute échappé au lecteur, mais qui entre dans le plan que je me suis proposé de rendre ce mémoire clair & facile.

La partie du navire enfoncée dans l'eau au premier instant du mouvement, n'est pas la carène primitive qui, avant l'inclinaison, occupoit la place d'un volume d'eau de même poids que le navire. Si on appelle μ cette carène primitive, on verra aisément par ce qui précède que $M = \mu + \left(\epsilon a^2 - \epsilon' b^2 \right) \frac{mf}{h} + cc \downarrow$, \downarrow étant la hauteur verticale parcourue par le centre de gravité du navire, hauteur qui dépend de l'inégalité des poussées des deux onglets $\frac{\epsilon a^2 mf}{h}$, $\frac{\epsilon' b^2 mf}{h}$ & du coup qui a produit l'inclinaison primitive. Cette quantité \downarrow sera toujours facile à déterminer ou par le calcul ou par estime. On peut encore observer que le point F ne sera jamais fort éloigné du point qu'occupe actuellement le centre de gravité de la carène primitive.

EXAMEN PARTICULIER du cas où la verticale élevée par le centre de gravité du navire, passe par le centre de gravité du plan de flottaison.

X X V.

Quoique le cas dont il s'agit puisse se tirer sans peine du problème général, j'ai cru devoir le traiter ici à part, parce qu'il a effectivement lieu dans plusieurs navires, & que d'ailleurs il fournit des résultats très-simples & très-propres à jeter du jour sur toute cette matière. La nature observe dans la production des effets du même genre une gradation qui met à portée de juger de l'un par l'autre avec une exactitude suffisante, lorsque les circonstances essentielles ne diffèrent pas trop sensiblement. Ainsi pourvu que la verticale élevée par le centre de

gravité du navire ne passe qu'à peu de distance du centre de gravité du plan de flottaison, on pourra se servir sans crainte des règles que nous allons établir, en attendant que nous donnions la méthode générale pour tous les cas.

X X V I.

Il est évident que dans l'hypothèse proposée, les deux onglets Ca^2 , $C'b^2$ sont égaux : ainsi, supposant qu'on n'ait fait qu'écarter horizontalement le centre de la carène de sa première position, le centre de gravité du navire ne doit ni monter ni descendre. Par conséquent l'équation (A) est nulle, & l'équation (B) devient

$$(E) \quad ddy = \frac{g\pi}{pR} (Mfm - (Mh + 2m\theta a^3) y) dt^2 :$$

multipliant tout par dy , on aura

$$dyddy = \frac{g\pi}{pR} (Mfmdy - (Mh + 2m\theta a^3) ydy) dt^2.$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dy^2}{2} = \frac{g\pi}{pR} (Mfmy - (Mh + 2m\theta a^3) \frac{yy}{2}) dt^2.$$

Je n'ajoute point de constante, parce que $dt = 0$ rend $dy = 0$, comme cela doit être. Cette équation donne

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{g\pi}{pR} (Mh + 2m\theta a^3) y}$$

$$\sqrt{\frac{2Mfm \cdot y}{Mh + 2m\theta a^3} - yy}$$

soit $\frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} - y = u$; on aura la transformée

$$-du = dt \sqrt{\frac{g\pi}{pR} (Mh + 2m\theta a^3)}$$

$$\sqrt{\frac{M^2 f^2 m^2}{(Mh + 2m\theta a^3)^2} - uu}$$

$$\text{d'où l'on tire } u = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \cos t \sqrt{\frac{g\pi}{pR} (Mh + 2m\theta a^3)}.$$

Par conséquent

$$y = \frac{M f m}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - \cos t \sqrt{\frac{g \pi}{\rho R} (Mh + 2m\theta a^3)} \right).$$

Il ne faut encore point de constante, parce que $t = 0$ rend le cosinus qui entre dans le second membre = 1, & par conséquent $y = 0$. Cette formule sera pour nous la source de plusieurs réflexions.

X X V I I.

Si la quantité radicale qui multiplie t est réelle; & qu'on se rappelle que le cosinus d'un angle qui augmente à l'infini, de positif devient négatif, & réciproquement, on verra que la valeur de y sera toujours infiniment petite. Or la quantité dont il s'agit sera toujours réelle, lorsque h sera positive; & h sera toujours positive, lorsque le centre de gravité du navire tombera au dessous de celui de la carène. Ainsi le navire ne fera que des oscillations infiniment petites, & sera par conséquent stable dans sa position, lorsque l'arrimage sera tel que le centre de gravité de la carène soit placé au dessus de celui du navire.

X X V I I I.

Si h étoit négative, ou que le centre de gravité du navire fût au dessus de celui de la carène, & qu'on eût cependant $2m\theta a^3 > Mh$, le navire tendroit encore à se rétablir dans son premier état, mais non pas avec la même force que dans le premier cas.

X X I X.

Mais si h étant négative, on avoit $Mh > 2m\theta a^3$, alors en reprenant l'équation fondamentale (E), on trouveroit qu'il entreroit des logarithmes dans la valeur de y : d'où il suit que t augmentant, y augmenteroit aussi: par conséquent le navire ne feroit plus des oscillations infiniment petites, comme on

l'a supposé, & il n'auroit par conséquent pas de stabilité.

X X X.

Enfin si h étoit négative & qu'on eût $Mh = 2m\theta a^3$, l'équation fondamentale (E) donneroit $y = \frac{g\pi Mfm \cdot t^2}{2pR}$; d'où l'on voit que le navire manqueroit encore de stabilité. Veut-on un exemple bien simple de ce dernier cas? Supposons que tout le corps flottant se réduise à un cercle $ADHk B$ posé verticalement sur un fluide: soient le segment DHE la partie enfoncée dans l'eau, GH la verticale passant par le centre G de gravité & de figure du cercle, F le centre de gravité du segment DHE : on aura, par la propriété du cercle, $DHE \times GF = \frac{2}{3} \overline{CE}^3$ ou; pour me servir de nos expressions, $Mh = m\theta a^3$. Par conséquent le cercle mis une fois en mouvement continueroit à tourner: ce qui est conforme à l'expérience.

FIGURE 5.

De-là résulte une règle pour l'arrimage des navires de figure cylindrique; c'est de placer le centre de gravité de ces fortes de navires au dessous de l'axe du cylindre, sans quoi ils verferoient infailliblement à la première occasion.

X X X I.

La même équation

$y = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)} \right)$
fournit le moyen de régler l'amplitude des balancements du navire.

Car quelle que puisse être la valeur (toujours réelle) de la quantité $\sqrt{\frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}$, il est

évident que le facteur $1 - \cos. t \sqrt{\frac{g \pi}{pR} (Mh + 2mba^3)}$ augmentera depuis 0 jusqu'à ce qu'il soit égal au diamètre, après quoi il diminuera par les mêmes degrés : d'où il suit qu'il ne peut contribuer en rien à augmenter ou à diminuer un balancement dont la grandeur absolue pour le rayon m est toujours exprimée par $\frac{2Mf m}{Mh + 2\pi\theta a^3}$. Mais plus on diminuera le premier facteur $\frac{Mf m}{Mh + 2\pi\theta a^3}$, qui est déjà fort petit à cause de f qu'on suppose fort petit, plus on diminuera la grandeur absolue d'un balancement. Or pour diminuer ce facteur, nous n'avons qu'à augmenter h , c'est-à-dire qu'à faire descendre de plus en plus le centre de gravité du navire.

On voit donc que pour diminuer l'amplitude des balancements, l'opération se réduit à enfoncer de plus en plus le centre de gravité du navire. Toutes les distributions imaginables de la charge qui peuvent conduire à ce but, sont d'ailleurs absolument indifférentes : proposition assez singulière, qui n'avoit été qu'entrevue à l'aide d'une physique vague & incertaine.

X X X I I.

Mais pour ne pas tomber dans l'inconvénient d'augmenter trop la vivacité des balancements en diminuant leur amplitude, il faut encore trouver le moyen de modérer cette vivacité : c'est à quoi on parviendra par la détermination du pendule *synchrone*.

Supposons un pendule de la longueur m : soient b la distance initiale du poids de ce pendule à la verticale, t le temps qu'il emploie à parcourir l'espace y : on aura $d^2y = g \cdot \left(\frac{n-y}{m}\right) dt^2$ pour l'équation de ce pendule. Soit l la longueur du pendule synchrone cherché, on aura, par les propriétés des

pendules, $l : m :: dt^2 : dt'^2 = \frac{m dt^2}{l}$ & l'équation précédente deviendra $ddy = \frac{g}{l} (n - y) dt^2$: comparons cette équation avec l'équation (E) qu'on mettra d'abord sous cette forme

$$ddy = \frac{g \pi}{p R} \cdot (Mh + 2m\theta a^3) \left(\frac{M f m}{Mh + 2m\theta a^3} - y \right) dt^2,$$

nous aurons $\frac{g}{l} = \frac{g \pi}{p R} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)$; d'où

$$\text{On tire } l = \frac{p R}{\pi \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}.$$

La distance initiale du poids de ce pendule à la verticale est $\frac{M f m}{Mh + 2m\theta a^3}$.

Nous pouvons, à l'aide de cette formule, indiquer divers moyens d'arrimage, qui tendront à ralentir la vitesse des balancements du navire.

X X X I I I.

On voit d'abord que si on diminue h dans le cas où le centre de gravité du navire est au dessous de celui de la carène, ou qu'on augmente h dans le cas où le centre de gravité du navire est au dessus de celui de la carène; on voit, dis-je, qu'on augmentera la longueur du pendule, ou qu'on diminuera la vitesse des balancements, parce que le numérateur de la valeur de l est moins augmenté par le changement de h , que le dénominateur n'est diminué. Cet expédient est souvent utile, & les marins s'en servent lorsque le vaisseau doit porter des effets très-pesants, tels que du fer, des canons, du plomb, &c. Si on mettoit ces gros poids sur la *carlingue*, le vaisseau viendroit à sa flottaison avant que d'avoir sa cale toute remplie, & il auroit des mouvements fort rudes, qui tourmenteroient considérablement l'équipage & la mâture. Pour prévenir ces

ces inconvénients, on élève le centre de gravité par le moyen d'un *lardage* sur lequel on pose les poids dont il s'agit. Il faut prendre garde cependant de ne pas trop élever le centre de gravité, parce qu'on perd en même temps sur la stabilité du navire (*art. XXVII & XXVIII*), & qu'on augmente l'amplitude de ses oscillations (*art. XXXI*).

X X X I V.

Le moyen que nous venons de proposer ne peut pas toujours être mis en usage : car, si on avoit à embarquer avec ces corps très-pesants des marchandises très-légères, telles que des balles de coton, il ne seroit pas possible d'occuper une partie de la cale par le lardage dont nous avons parlé ; mais on peut alors se servir de cet autre expédient qui est très-avantageux. Pour diminuer les mouvements de roulis, on distribuera les effets les plus pesants *bas-bord* & *stribord* dans les flancs du vaisseau ; & , pour diminuer les mouvements de tangage, on transportera vers la proue & vers la poupe quelques poids fort pesants, autant que la solidité de l'assemblage des pièces pourra le permettre. Par tous ces arrangements, le centre de gravité du navire ne changera pas sensiblement de place : ainsi la stabilité du navire demeurera sensiblement la même, & le navire fera les mêmes excursions en amplitude ; mais la longueur du pendule synchrone augmentera considérablement.

X X X V.

Il se présente un nouveau moyen qui participe des avantages des deux autres : ce moyen consisteroit à distribuer tellement la charge, que le centre de gravité & celui de la carène fussent au même point. Alors la carène seroit chargée proportionnellement à ses capacités ; la stabilité demeureroit suffisante ;

les excursions ne feroient pas trop amples , & la longueur du pendule fynchrone augmenteroit confidérablement : mais il ne faut pas fe flatter d'atteindre à ce but dans la pratique. Les emplacements fixes qu'on est obligé de donner à la plupart des effets qui compofent la charge , y mettent un obstacle peut-être infurmontable. Par exemple, dans les vaiffeaux de guerre, le canon eft toujours au-deffus de la ligne de flottaiſon. Plusieurs autres agrêts, tels que les poudres, les proviſions de bouche, les tonneaux de vin ou d'eau, &c. , ont auffi leurs places marquées. Tout ce que peut faire le navigateur eft de tirer le meilleur parti du leſt proprement dit, & de quelques effets qu'on peut tranſpoſer fans inconvéniement.

X X X V I.

SCHOLIE. Les maximes d'arrimage que je viens d'établir n'ont pas à tous égards le degré d'exactitude & de précision que je me propoſe de leur donner dans la ſuite : mais elles ne peuvent pas manquer de répandre déjà la plus grande lumière ſur les manœuvres des marins : je dis les manœuvres des marins, car ici la pratique a devancé la théorie. Cela ne doit pas ſurprendre. Dans tous les arts qui peuvent intéreſſer la fortune ou le ſalut des hommes, l'induftrie obſerve attentivement les réſultats des expériences, & en tire à la longue des moyens de perfection; mais on ne peut pas porter un jugement certain ſur l'avantage exclusif de ces moyens, avant qu'ils aient paſſé par le creuſet de la géométrie.



INTÉGRATION DES ÉQUATIONS
(A) & (B) de l'art. XXII.

XXXVII.

Revenons maintenant à l'intégration des deux équations générales (A) & (B) de l'article XXII.

Pour abrégér le calcul, nous supposerons $\frac{g\pi cc}{pN} = A$;
 $\frac{g\pi (6a^2 - 6'b^2)}{pN} = B$; $\frac{g\pi M - gpN}{pN} = C$;
 $\frac{g\pi'(hM - m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR} = D$; $\frac{g\pi mccK}{pR} = E$;
 $\frac{g\pi Mfm}{pR} = F$. En faisant ces substitutions, on aura les deux transformées

$$(F) \quad ddx + Axdt^2 - Bydt^2 - Cdt^2 = 0$$

$$(G) \quad ddy + Dyd^2t^2 - Exdt^2 - Fdt^2 = 0.$$

Cela posé, je multiplie * l'une de ces équations, * Voy. les Mém. de l'Acad. de Berlin, an. 1748, pag. 283.

(H) $ddx + Axdt^2 - Bydt^2 - Cdt^2 + Kddy + KDyd^2t^2 - KEExdt^2 - KFdt^2 = 0$;
 je fais en sorte que $Ax - By + KDy - KEEx$ soit un multiple de $x + Ky$, c'est-à-dire que je suppose $Ax - By + KDy - KEEx = H(x + Ky)$, H étant un coefficient indéterminé. Comparant les termes semblables de cette équation, j'aurai $H = A - KE$.

$H = \frac{KD - B}{K}$. Ces deux équations donneront deux valeurs de K que j'appelle K & K' , & deux valeurs de H que j'appelle H & H' . Soit $x + Ky = S$, $x + K'y = S'$: l'équation (H) donnera ces deux autres:

$$dds + HSdt^2 - (C + KF) dt^2 = 0,$$

$$dds' + H'S'dt^2 - (C + K'F) dt^2 = 0;$$

ou bien, en supposant $C + KF = G$, $C + K'F = G'$,

$$dds + HSdt^2 = Gdt^2,$$

$$dds' + H'S'dt^2 = G'dt^2;$$

Dij

d'où l'on tire aisément

$$S = \frac{G}{H} \times \left(1 - \cos. t\sqrt{H} \right),$$

$$S' = \frac{G'}{H'} \times \left(1 - \cos. t\sqrt{H'} \right) :$$

par conséquent

$$x = \frac{K}{K-K'} \times \frac{G'}{H'} \left(1 - \cos. t\sqrt{H'} \right) - \frac{K'}{K-K'} \times \frac{G}{H} \left(1 - \cos. t\sqrt{H} \right),$$

$$y = \frac{G}{H} \times \frac{K-K'}{K-K'} - \frac{G'}{H'} \times \frac{K-K'}{K-K'} :$$

Ces deux valeurs de x & de y sont complètes, parce qu'on doit avoir $x = 0$ & $y = 0$, lorsque $t = 0$; & que $t = 0$ donne $\cos. t\sqrt{H} = 1$ & $\cos. t\sqrt{H'} = 1$.

X X X V I I I.

Il est évident que si H & H' sont des quantités réelles & positives, les valeurs de x & de y seront infiniment petites, & que par conséquent le navire fera stable dans sa position

X X X I X.

Mais si H & H' étoient des quantités réelles négatives, on trouveroit que les valeurs de x & de y dépendroient des logarithmes, & quainsi x & y augmenteroient sans cesse : donc le navire n'auroit pas de stabilité.

X L.

Reste encore à examiner si K & K' , & par conséquent aussi H & H' ne peuvent pas devenir imaginaires; ou si K & K' étant réelles, ces deux valeurs ne peuvent pas être égales entr'elles.

Les équations $H = A - KE$, $H = \frac{KD - B}{K}$ donnent

$$K = \frac{A - D + \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2E}$$

$$K' = \frac{A - D - \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2E}$$

$$H = \frac{A + D - \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2}$$

$$H' = \frac{A + D + \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2}$$

or par l'article XXIII les deux termes B & E sont toujours de même signe : d'où il suit évidemment que les deux valeurs de K ne peuvent jamais être égales ni imaginaires.

X L I.

Par conséquent, toutes les loix de la stabilité se réduisent uniquement à faire en sorte que H & H' qui sont toujours réelles, soient toujours positives : or pour que H & H' soient positives, il faut

1°. Que $A + D$, c'est-à-dire $\frac{g\pi cc}{pN} + \frac{g\pi(Mh + n\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pK}$

soit une quantité positive : condition, qui sera toujours remplie, lorsque h sera une quantité positive, & qui ne cessera d'avoir lieu que lorsque h étant négative, on auroit de plus

$$\frac{g\pi Mh}{pR} > \frac{g\pi cc}{pN} + \frac{g\pi(m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR}$$

2°. Qu'on ait $A + D > \sqrt{4BE + (D - A)^2}$, ou simplement $A D > B E$, c'est-à-dire

$$\frac{g\pi cc}{pN} \times \frac{g\pi(Mh + n\theta a^3 + n\theta' b^3)}{pR} > \frac{g\pi m c c K}{pR} \times \frac{g\pi(c a^2 - c' b^2)}{pN}$$

condition qui sera évidemment remplie, lorsque h sera positive, & qui ne cessera d'avoir lieu que lorsque h étant négative, on auroit de plus le premier membre de cette inégalité plus petit que le second.

X L I I.

Sur toutes ces considérations, on voit qu'abstraction

faite des mesures précises qu'on peut lire dans les équations mêmes, la stabilité du navire, dans le cas général comme dans le cas de $\epsilon a^2 = \epsilon' b^2$, dépend de la profondeur du centre de gravité : on voit aussi qu'on diminuera l'amplitude des oscillations en augmentant cette profondeur. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la longueur du pendule sur lequel doivent se régler ces oscillations.

X L I I I.

En comparant à l'équation ordinaire des pendules les équations qui expriment, l'une le mouvement d'ascension du centre de gravité, l'autre le mouvement de rotation du navire autour du même centre, il est clair qu'en général ces deux mouvements ne sont ni synchrones ni isochrones dans chaque espèce ; mais ici je les supposerai tels, afin de me borner au cas le plus commun dans la nature : or pour remplir ces deux conditions tout-à-la-fois, il faut qu'on ait la proportion

$Ax - By - C : Dy - Ex - F :: x : y$;
c'est-à-dire que le rapport de x à y doit être un rapport constant. Soit donc $y = rx$, r étant un coefficient constant que nous déterminerons ci-dessous, & mettons cette valeur dans l'équation F , nous aurons

$$ddx = (A - Br) \left(\frac{C}{A - Br} - x \right) dt^2 :$$

d'où il est aisé de conclure, par la méthode de l'article XXXII, que nommant l la longueur du pendule cherché, on aura

$$l = \frac{g}{A - Br} = \frac{pN}{\pi cc - \pi r (\epsilon a^2 - \epsilon' b^2)}.$$

X L I V.

Quant à la valeur de r , elle se trouvera en cherchant une seconde valeur de l : mettons donc pour x

sa valeur $\frac{y}{r}$ dans l'équation (G), & nous aurons

$$ddy = \left(D - \frac{E}{r} \right) \left(\frac{F}{D - \frac{E}{r}} - y \right) dt^2 ;$$

d'où l'on tire encore $l = \frac{g}{D - \frac{E}{r}}$. Comparant en-

semble les deux valeurs de l , on aura $\frac{g}{A - Br} = \frac{g}{D - \frac{E}{r}}$,

ou bien $Br r - Ar + Dr - E = 0$,

équation qui donnera deux valeurs de r , dont cha-
cune résoudra également le problème.

Je ne m'étends pas davantage sur ces recherches
& sur les conséquences qui en résultent, parce que
ce détail n'a aucune difficulté.

X L V.

SCHOLIE GÉNÉRAL. Jusqu'ici nous avons con-
sidéré séparément les mouvements de tangage & de
roulis; mais il peut arriver, comme nous l'avons
déjà dit, que le navire tangue & roule tout-à-la-
fois, & qu'il soit même agité en toutes sortes de sens.
Ainsi il nous reste encore à examiner le système de ces
différents mouvements, pour résoudre le problème dans
toute sa généralité. Ce n'est qu'à l'aide d'une pareille
recherche qu'on peut donner aux règles de l'arri-
mage toute la perfection dont elles sont susceptibles,

X L V I.

P R O B L E M E I I I.

Determiner en général les oscillations d'un navire.

lorsque son centre de gravité & celui de sa carène
ne sont pas dans une même ligne verticale.

S O L U T I O N .

FIG. 2, 3, 4, 6. Soient $ADHTEB$ (fig. 2), la coupe longitudinale du navire, coupe dans laquelle se trouvent le centre de gravité du navire & la verticale GC élevée par ce centre : $DOEo$ (fig. 3), la coupe horizontal faite à fleur d'eau : $\varepsilon v \delta$ (fig. 4), la coupe latitudinale passant par le centre de gravité, coupe dans laquelle la droite $\mu G \ell$ représente l'axe horizontal passant par le centre de gravité; & $v \gamma$ (fig. 6), la coupe faite par la verticale GC & par le point F centre de gravité de la carène au premier instant : L (fig. 3), le point où la verticale élevée par le centre de gravité de la carène rencontre l'axe diagonal & γ . De ce point L soient abaissées sur DE & sur $\delta \varepsilon$ les perpendiculaires Lr , Lq .

Maintenant (art. VIII), le navire montera verticalement & pirouettera sur son centre de gravité. Or il est évident que, vu la place occupée par le centre de gravité F de la carène au premier instant, les mouvements seront tels qu'il sortira de l'eau

1°. Un prisme ayant pour base la figure $DOEo$ (fig. 3), & pour hauteur le chemin du centre de gravité du navire;

2°. Un onglet formé par la rotation de la partie DoE autour de DE ;

3°. Un onglet formé par la rotation de $D\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$;

Qu'au contraire il s'enfoncera dans l'eau

1°. Un onglet formé par la rotation de DOE autour de DE ;

2°. Un onglet formé par la rotation de $E\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$:

Ainsi

Ainsi

Sup-
posant

- L'aire $E\epsilon\delta$ = aa
- L'aire $D\epsilon\delta$ = bb
- L'aire entière $DOEo$ = $aa + bb = cc$
- La distance du centre de gravité S de cette aire au point C = k
- Lq = f
- Lr = f'
- La hauteur Gf (*fig. 2*) du centre de gravité de la carène au dessus de celui du navire. = h
- La distance d'un point donné au centre de gravité du navire. = m
- L'espace parcouru verticalement par le centre de gravité. = x
- L'espace parcouru circulairement dans le plan $ADHTEB$ (*fig. 2*), à la distance m du centre de gravité. = y
- L'espace parcouru circulairement dans le plan $\epsilon V\delta$ (*fig. 4*) à la même distance. = z
- L'onglet formé par la rotation de $E\epsilon\delta$ (*fig. 3*) autour de $\epsilon\delta$ = $\epsilon a^2 y$
- Le moment de cet onglet par rapport à l'axe $\mu G\epsilon$ (*fig. 4*). = $\theta a^3 y$
- L'onglet formé par la rotation de $D\epsilon\delta$ autour de $\epsilon\delta$ (*fig. 3*). = $\epsilon' b^2 y$
- Le moment de cet onglet par rapport à $\mu G\epsilon$ = $\theta' b^3 y$
- L'onglet formé par la rotation de $D\epsilon E$ ou de $D\delta E$ autour de DE = $\epsilon'' c^2 z$
- Le moment de cet onglet par rapport à l'axe longitudinal passant par le centre de gravité. = $\theta'' c^3 z$
- L'élément du temps. = dt
- Le volume du navire. = N
- Celui de la carène au premier instant. = M
- La gravité. = g
- La densité du lest ou de la charge. = p
- La densité de l'eau. = π

il est visible qu'après le temps t , la carène du navire fera = $M - ccx + \epsilon a^2 y - \epsilon' b^2 y + \epsilon'' c^2 z - \epsilon''' c^2 z$
 = $M - ccx + \epsilon a^2 y - \epsilon' b^2 y$, & que la force absolue qui soulève le centre de gravité, sera = $g\pi (M - ccx + (\epsilon a^2 - \epsilon' b^2) y) - gpN$; ainsi on aura

cette première équation

(A) $[g\pi(M - ccx + (\epsilon a^2 - \epsilon b^2)y) - gpN] dt^2 = pNddx.$

Il n'est pas moins clair par tout ce qui précède que le moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe longitudinal est $g\pi[M(f' - \frac{hz}{m}) - 2\theta''c^3z]$, & que le moment de la poussée par rapport à l'axe latitudinal est $g\pi[M(f - \frac{hy}{m}) + cckx - \theta a^3y - \theta' b^3y]$. Ces deux moments produisent le pirouettement du navire sur son centre de gravité, comme je vais l'expliquer.

Imaginons trois plans perpendiculaires entr'eux; qui conservent la même position dans l'espace absolu, de manière que leur système ne fasse que s'élever avec le centre de gravité du navire; le premier horizontal & passant par le centre de gravité du navire; le second vertical, passant par le centre de gravité du navire & par l'axe DE au premier instant; le troisième vertical passant par le centre de gravité & par l'axe $\epsilon\delta$ au premier instant. Ces trois plans sont respectivement représentés par XGV, OGV, OGX

FIGURE 7

(fig. 7), en sorte que GV est la section commune des deux premiers, GX la section commune du premier & du troisième, OG la section commune des deux derniers. Supposons qu'un élément dN du navire placé en R , durant l'instant dt , parcoure parallèlement à GV l'espace Rr , parallèlement à GX l'espace Rz , parallèlement à GO l'espace Rx . Du point R soit abaissée sur le plan VGX la perpendiculaire RZ , & soit tirée ZV perpendiculaire à GV . Soient, outre les dénominations précédentes,

- GV = q
- VZ = r
- ZR = s

L'élément dN aura parallèlement à GV une force

représentée par $p dN \times \frac{ddq}{dt^2}$; parallèlement à $G X$

une force représentée par $p dN \times \frac{ddr}{dt^2}$, parallèlement

à $G O$ une force représentée par $p dN \times \left(\frac{ddx + dds}{dt^2} \right)$.

En vertu de la première force, le navire aura autour de l'axe $G X$ un moment de résistance représenté

par $\int s p dN \cdot \frac{ddq}{dt^2}$, & autour de l'axe $G O$ un moment

représenté par $\int r p dN \cdot \frac{ddq}{dt^2}$; en vertu de la seconde

force, le navire aura autour de l'axe $G V$ un moment

représenté par $\int s p dN \cdot \frac{ddr}{dt^2}$, & autour de l'axe $G O$

un moment représenté par $\int q p dN \cdot \frac{ddr}{dt^2}$. Enfin en

vertu de la troisième force, le navire aura autour de

l'axe $G X$ un moment représenté par $\int q p dN \cdot \left(\frac{ddx + dds}{dt^2} \right)$,

& autour de l'axe $G V$ un moment représenté par

$\int r p dN \cdot \left(\frac{ddx + dds}{dt^2} \right)$. Or de tous ces moments

particuliers, il est visible qu'il résultera autour de

l'axe $G V$ un moment unique représenté par

$\int r p dN \cdot \left(\frac{ddx + dds}{dt^2} \right) - \int s p dN \cdot \frac{ddr}{dt^2}$; autour de

l'axe $G X$ un moment unique représenté par

$\int q p dN \cdot \left(\frac{ddx + dds}{dt^2} \right) - \int s p dN \cdot \frac{ddq}{dt^2}$; enfin au-

tour de l'axe $G O$ un moment unique représenté par

$\int q p dN \cdot \frac{ddr}{dt^2} - \int r p dN \cdot \frac{ddq}{dt^2}$.

Cela posé, le premier de ces moments doit faire équilibre par sa réaction au moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe longitudinal : ainsi on aura l'équation

$$B) \quad g\pi \left[M \left(f' - \frac{h\chi}{m} \right) - 2\theta'' c^3 \chi \right] = \int r p dN \cdot \left(\frac{ddx + dds}{dt^2} \right) - \int s p dN \cdot \frac{ddr}{dt^2}$$

le second moment fait équilibre au moment de la

E ij

pouffée de l'eau par rapport à l'axe latitudinal; ce qui donne l'équation

$$(C) \quad g^x \left[i \left(z - \frac{h_1}{n} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] = \int i p dN \left(\frac{ddx + dd_1}{dt^2} \right) - \int s p dN \frac{ddq}{dt^2};$$

Enfin le troisième moment sera égal à zéro; c'est-à-dire qu'on aura

$$(D) \quad \int q p dN \frac{ddr^2}{dt^2} - \int r p dN \frac{ddq}{dt^2} = 0.$$

Ces quatre équations donneront tous les mouvements du navire, si l'on peut parvenir à réduire les variables qui y entrent à quatre seulement, sans compter le temps t .

X L V I I

REMARQUE. Les deux équations (B) & (C) peuvent se simplifier, en observant que comme ddx est le même pour tous les points du navire, au lieu de $\int r p dN \frac{ddx}{dt^2}$ & de $\int q p dN \frac{ddx}{dt^2}$, on peut écrire $\frac{ddx}{dt^2} \int r p dN$ & $\frac{ddx}{dt^2} \int q p dN$: or par la propriété du centre de gravité $\int r p dN = 0$, $\int q p dN = 0$: par conséquent, les deux équations (B) & (C) deviendront

$$(E) \quad g^x \left[\eta \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta'' c^3 \zeta \right] = \int r p dN \frac{dds}{dt^2} - \int s p dN \frac{ddr}{dt^2}$$

$$(F) \quad g^s \left[i \left(f - \frac{h_1}{n} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] \int i p dN \frac{dds}{dt^2} - \int s p dN \frac{ddq}{dt^2}.$$

X L V I I I.

Entre les différents moyens qu'on peut employer pour parvenir à la réduction dont nous avons parlé,

voici celui qui m'a paru le plus simple; il est fondé sur l'article IX, & l'idée en est due à M. D'alembert*. La figure 8 étant d'ailleurs la même que la figure 7; en sorte que les mêmes lignes sont désignées par les mêmes lettres dans l'une & l'autre, imaginons de plus par le point G , un axe GP faisant avec le

* Voy. les recherches sur la précession des équinoxes. page 27 & suiv.

FIGURE 8

plan horifontal VGX un très-petit angle $I'Gp$, & avec le plan vertical OGV un angle auffi très-petit. Cet axe GP & fa projection Gp fur le plan horifontal VGX peuvent être confidérés comme existants dans le plan vertical OGp , qui fait avec le plan OGV l'angle pGp' . Par le point R , foit mené perpendiculairement à l'axe GP le plan RPQ , enforte que PQ foit la fection commune des deux plans RPQ , OGp ; que RQ foit perpendiculaire fur PQ & que RP foit la droite qui joint les points R & P . Du point Q foit abbaiffée fur le plan $I'GX$ la perpendiculaire QV' , qui rencontrera néceffairement la projection Gp . Soient joints les points Z, V' par la droite ZV' qui fera néceffairement égale à RQ , puisque les droites RZ, QV' font verticales & les droites RQ, ZV' horifontales. Enfin foit tiré Pq perpendiculaire fur QV' .

Maintenant, au lieu de rapporter le mouvement du point R aux trois coordonnées GV, VZ, ZR , concevons que, tandis que l'axe GP s'éloigne du plan VGX & que le plan OGp dans lequel se trouve cet axe tourne autour de la ligne immobile GO , le plan RPQ tourne auffi circulairement autour de l'axe GP , en demeurant toujours perpendiculaire à cet axe. Il est évident que ces différens mouvements donneront le vrai mouvement du point R dans l'espace abfolu. Ainfi il ne s'agit plus que d'en exprimer analytiquement les conditions & d'en comparer les réfultats avec ceux de l'article XLVI. Pour cela, confervant les dénominations fufdites & obfervant que l'espace α parcouru circulairement dans le plan OGX peut être cenfé égal à l'espace parcouru circulairement autour de l'axe GP ,

$$\text{Supposons } \begin{cases} GP. & \dots\dots\dots = \lambda^* \\ \text{de plus } PR. & \dots\dots\dots = \psi \end{cases}$$

* Les quantités λ, ψ, ω , font constantes, tant qu'on confidère un même point du navire; mais elles deviennent variables dans le paffage de ce point à celui qui lui eft immédiatement contigu; ce qu'il faut bien obferver pour la fuite.

Supposons de plus

L'angle RPQ au premier instant, lorsque le plan OGP se confondoit avec le plan OGV'	$= \varpi$
Le même angle après le temps t écoulé.	$= \varpi + \tau$
L'angle PGp	$= \xi$
L'angle pGp'	$= \alpha$

on aura évidemment

$$\begin{aligned}
 PQ & \dots\dots\dots = \psi \cdot \text{cos.} (\varpi + \tau) \\
 RQ \text{ ou } ZV' & \dots\dots\dots = \psi \text{ sin.} (\varpi + \tau) \\
 Pp & \dots\dots\dots = \lambda \text{ sin.} \xi \\
 Pq & \dots = PQ \times \text{sin.} \xi \dots\dots\dots = \psi \text{ cos.} (\varpi + \tau) \cdot \text{sin.} \xi \\
 Qq & \dots = PQ \cdot \text{cos.} \xi \dots\dots\dots = \psi \text{ cos.} (\varpi + \tau) \cdot \text{cos.} \xi \\
 uV' & \dots = ZV' \cdot \text{sin.} \alpha \dots\dots\dots = \psi \text{ sin.} (\varpi + \tau) \cdot \text{sin.} \alpha
 \end{aligned}$$

Donc 1°. ZR ou $V'Q = V'q + qQ = Pp + Qq = \lambda \text{ sin.} \xi + \psi \text{ cos.} (\varpi + \tau) \cdot \text{cos.} \xi = \lambda \xi + \psi \text{ cos.} (\varpi + \tau) = \lambda \xi + \psi \text{ cos.} \varpi - \psi \tau \text{ sin.} \varpi$, parce que les angles τ, ξ sont supposés fort petits; ainsi

$$s = \lambda \xi + \psi \text{ cos.} \varpi - \psi \tau \text{ sin.} \varpi$$

2°. GV ou $Gu = Gp - Pq - uV' = \lambda - \psi \text{ cos.} (\varpi + \tau) \text{ sin.} \xi - \psi \text{ sin.} (\varpi + \tau) \text{ sin.} \alpha = \lambda - \psi \xi \text{ cos.} \varpi - \psi \alpha \text{ sin.} \varpi$, en négligeant les infiniment petits du second ordre; ainsi

$$q = \lambda - \psi \xi \text{ cos.} \varpi - \psi \alpha \text{ sin.} \varpi$$

3°. $ZV = ZV' + uV = ZV' + GV \text{ sin.} \alpha = \psi \text{ sin.} (\varpi + \tau) + (\lambda - \psi \xi \text{ cos.} \varpi - \psi \alpha \text{ sin.} \varpi) \text{ sin.} \alpha = \psi \text{ sin.} \varpi + \psi \tau \text{ cos.} \varpi + \lambda \alpha$, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre; ainsi

$$r = \psi \text{ sin.} \varpi + \psi \tau \text{ cos.} \varpi + \lambda \alpha$$

Par conséquent, on aura

$$\begin{array}{l}
 ds = \lambda d\xi - \psi d\tau \text{ sin.} \varpi \\
 dq = -\psi \text{ cos.} \varpi \cdot d\xi - \psi \text{ sin.} \varpi \cdot d\alpha \\
 dr = \psi \text{ cos.} \varpi \cdot d\tau + \lambda d\alpha
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 dds = \lambda dd\xi - \psi \text{ sin.} \varpi \cdot dd\tau \\
 ddq = -\psi \text{ cos.} \varpi \cdot dd\xi - \psi \text{ sin.} \varpi \cdot d\alpha d\alpha \\
 ddr = \psi \text{ cos.} \varpi \cdot dd\tau + \lambda d\alpha d\alpha
 \end{array}
 \right.$$

Mettons ces valeurs de s, q, r, dds, ddq, ddr dans les équations (E), (F), (D) en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, & observant 1°. que $d\xi = dy, d'd\xi = dd\gamma$, parce que l'angle ξ

augmente à chaque instant de la même quantité que l'angle γ . 2° . Que comme ddz , ddy , ddu sont les mêmes pour tous les points du navire, on peut les écrire au-devant du signe d'intégration. Par ces substitutions & ces remarques, les trois équations susdites deviendront

$$(G) \quad g\pi \left[M \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta''c^3\zeta \right] = \frac{ddy}{dt^2} \int \lambda \psi \sin. \varpi. p dN \\ - \frac{ddz}{dt^2} \int \psi^2 \left(\sin. \varpi^2 + \cos. \varpi^2 \right). p dN - \frac{ddu}{dt^2} \int \lambda \psi \cos. \varpi. p dN.$$

$$(H) \quad g\pi \left[M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] = \frac{ddy}{dt^2} \int (\lambda \lambda + \psi^2 \cos. \varpi^2). p dN \\ - \frac{ddz}{dt^2} \int \lambda \psi \sin. \varpi. p dN + \frac{ddu}{dt^2} \int \psi^2. \sin. \varpi. \cos. \varpi. p dN.$$

$$(K) \quad \frac{ddy}{dt^2} \int \psi^2 \sin. \varpi. \cos. \varpi. p dN + \frac{ddu}{dt^2} \int (\lambda \lambda + \psi^2 \sin. \varpi^2). p dN \\ + \frac{ddz}{dt^2} \int \lambda \psi \cos. \varpi. p dN = 0.$$

X L I X.

Ces équations se simplifient considérablement, en observant que, comme le navire est divisé en deux parties égales & semblables par le plan longitudinal, on a

$\int \lambda \psi \sin. \varpi. p dN = 0$, $\int \psi^2. \sin. \varpi. \cos. \varpi. p dN = 0$;
d'où il suit que les trois équations précédentes deviendront

$$(L) \quad g\pi \left[\bar{M} \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta''c^3\zeta \right] = - \frac{ddz}{dt^2} \int \psi^2 \left(\sin. \varpi^2 + \cos. \varpi^2 \right). p dN \\ - \frac{ddu}{dt^2} \int \lambda \psi \cos. \varpi. p dN.$$

$$(M) \quad g\pi \left[M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] = \frac{ddy}{dt^2} \int (\lambda \lambda + \psi^2 \cos. \varpi^2). p dN.$$

$$(N) \quad \frac{ddu}{dt^2} \int (\lambda \lambda + \psi^2 \sin. \varpi^2) p dN + \frac{ddz}{dt^2} \int \lambda \psi \cos. \varpi. p dN = 0.$$

Supposons; pour abrégér le calcul, $\int \psi^2. (\sin. \varpi^2 + \cos. \varpi^2) p dN$

$$\text{ou } \int \psi^2. p dN = pP; \int \lambda \psi \cos. \varpi. p dN = pQ;$$

$$\int (\lambda \lambda + \psi^2. \cos. \varpi^2) p dN = pR; \int (\lambda \lambda + \psi^2 \sin. \varpi^2) p dN = pS;$$

ces quantités P, Q, R, S , sont données par la figure du navire : on aura les équations

$$(P) \quad g\pi \left[M \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta'' c^3 \zeta \right] = -pP dd\zeta - pQ ddu;$$

$$(Q) \quad g\pi \left[M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] = pR ddy;$$

$$(R) \quad Q d d \zeta + S d d u = 0;$$

lesquelles, avec l'équation

$$(A) \quad g\pi \left[M - cckx + (\varepsilon a^2 - \varepsilon' b^2) y \right] - gpN \Big] dt^2 = pN ddx$$

donneront d'une manière fort simple tous les mouvements du navire.

L.

En effet l'équation (R) donne $u = -\frac{Q\zeta}{S}$.

Mettons pour $Q d d u$ sa valeur $-\frac{Q Q d d \zeta}{S}$ dans l'équation (P), & nous aurons

$$g\pi \left(M \left(f' - \frac{h\zeta}{m} \right) - 2\theta'' c^3 \zeta \right) = p. \left(\frac{Q Q}{S} - P \right) d d \zeta;$$

d'où l'on tire

$$(S) \quad \zeta = \frac{M f' m}{Mh + 2\theta'' c^3 m} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g\pi}{mp} \cdot \left(\frac{MhS + 2\theta c^3 m S}{QQ - PS} \right)} \right);$$

& par conséquent

$$(T) \quad u = -\frac{Q}{S} \times \frac{M f' m}{Mh + 2\theta'' c^3 m} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g\pi}{mp} \cdot \left(\frac{MhS + 2\theta c^3 m S}{QQ - PS} \right)} \right).$$

les deux équations (A) & (Q) étant exactement de la même forme que les deux équations (A) & (B) de

de l'article XXII, elles s'intégreront de la même manière qu'ont été intégrées ces deux dernières dans l'article XXXVII; & on trouvera deux équations de cette forme,

$$(V) \quad x = \frac{K}{K-K'} \times \frac{G'}{H'} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{H'} \right) - \frac{K'}{K-K'} \times \frac{G}{H} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{H} \right);$$

$$(X) \quad y = \frac{G}{H} \times \frac{(1 - \cos. t \sqrt{H})}{K - K'} - \frac{G'}{H'} \times \frac{(1 - \cos. t \sqrt{H'})}{K - K'}.$$

Ces différentes équations expriment de la manière la plus générale tous les mouvements d'ascension, de roulis, de tangage & de rotation horisontale, dont le navire peut être agité tout-à-la-fois. Elles montreront à l'œil quel est celui de ces mouvements qui domine; & on en tirera des règles d'arrimage, soit pour augmenter la stabilité du navire, soit pour diminuer l'amplitude & la vitesse des oscillations dont on est le plus incommodé. Quoique cette discussion soit extrêmement facile, après tout ce que nous avons déjà dit, l'importance de la matière demande que nous ne la passions pas totalement sous silence.

L I.

Mais avant que d'entrer dans ce détail, il est à propos de prévenir une difficulté qui se présente au sujet des deux équations (S) & (T). Comme la quantité $QQ - PS$ peut être négative, les valeurs de z & de u semblent alors dépendantes des logarithmes, & par conséquent sujettes à augmenter sans cesse. Mais il faut considérer que, lorsque $PS > QQ$, au lieu de $QQ - PS$, on doit prendre $PS - QQ$: c'est ce qu'on verra aisément, en remontant à l'équation (B) & aux suppositions sur lesquelles le calcul est établi. La figure du navire est telle en effet que $PS - QQ$ est toujours une quantité positive. Nous

supposons donc que, dans les équations (T) & (V), au lieu de $QQ - PS$, il y ait $PS - QQ$; & nous ferons, pour abrégér, $PS - QQ = A$.

L I I.

Cela posé, revenons aux conséquences qui résultent de nos formules. Nous pourrions faire cet examen en général; mais pour simplifier la question, je crois devoir négliger le mouvement d'ascension du centre de gravité, lequel est effectivement presque insensible.

Sur cette hypothèse, on aura les trois équations

$$y = \frac{Mf m}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g \pi}{n p R} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)} \right);$$

$$z = \frac{Mf' m}{Mh + 2m\theta' c^3} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g \pi S}{m p A} \cdot (Mh + 2m\theta c^3)} \right);$$

$$u = -\frac{Q}{S} \times \frac{Mf' m}{Mh + 2m\theta' c^3} \times \left(1 + \cos. t \sqrt{\frac{g \pi S}{m p A} \cdot (Mh + 2m\theta c^3)} \right).$$

L I I I.

On voit par la méthode des articles XXVII, XXVIII, XXIX, XXX que le navire aura de la stabilité en toutes fortes de sens, lorsque son centre de gravité sera placé au-dessous de celui de la carène; mais qu'il cesseroit d'en avoir, si son centre de gravité étoit au-dessus de celui de la carène, & qu'on eût de plus, relativement aux mouvements de tangage, $Mh =$ ou $> 2m\theta a^3$, & relativement aux mouvements de roulis & de rotation horizontale, $Mh =$ ou $> 2m\theta' c^3$. La règle d'arrimage qui suit delà est pareille à celle des articles cités.

L I V.

Il n'est pas moins évident (*art. xxx*) qu'on diminuera l'amplitude absolue des mouvements de tangage & de roulis, en faisant descendre de plus en plus le centre de gravité du navire. Quant à celle des mouvements de rotation horifontale, elle diminuera par le même expédient, & de plus, elle diminuera encore par la diminution de la fraction $\frac{Q}{S}$. Or si l'on observe que, conséquemment aux suppositions de l'article XLIX, la quantité Q est égale à la somme des produits des particules du navire par leurs distances aux deux plans VGX , OGX , & que la quantité S est égale à la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances au plan OGX , plus à la somme des produits des mêmes particules par les quarrés de leurs distances au plan OGV , il est visible qu'on rendra presque nuls les mouvements de rotation horifontale.

1°. En distribuant la charge à peu près de la même manière, ou de part ou d'autre du plan horifontal qui passe par le centre de gravité du navire, ou de part & d'autre de la coupe latitudinale passant par le même centre.

2°. En transportant horifontalement vers la proue & vers la poupe quelques poids fort pesants, & les écartant le plus que l'on pourra de la coupe longitudinale.

Ces conditions étant toujours assez bien remplies, les mouvements de rotation horifontale sont presque entièrement insensibles.

L V.

Enfin soient l , l' , l'' les longueurs respectives des pendules synchrones aux mouvements de tan-

gage, de roulis & de rotation horizontale : on trouvera

$$l = \frac{m p R}{\pi (M h + 2 m \theta a^3)} ;$$

$$l' = \frac{m p \cdot \frac{A}{S}}{\pi (M h + 2 m \theta'' c^3)} ;$$

$$l'' = \frac{m p \cdot \frac{A}{S}}{\pi (M h + 2 m \theta'' c^3)} .$$

La première formule fait voir qu'on diminuera la vitesse des mouvements de tangage, ou en faisant monter le centre de gravité, ou bien en augmentant la quantité R , qui représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances au plan vertical OGX , plus la somme des produits des mêmes particules, par les quarrés de leurs distances au plan horizontal VGX . Or il est évident qu'on augmentera R , si l'on transporte quelques poids fort pesants vers la proue & vers la poupe, & qu'on écarte de plus, autant qu'il est possible, ces mêmes poids du plan horizontal passant par le centre de gravité du navire. Les vaisseaux armés en guerre ont, à cet égard, un grand avantage sur les vaisseaux démâtés & sans artillerie. Cet avantage consiste en ce que la mâture & l'artillerie ajoutent des poids, qui sont à une distance considérable de la coupe latitudinale & du plan horizontal passant par le centre de gravité.

Les deux autres formules par lesquelles on voit d'abord que les mouvements de roulis & de rotation horizontale se font dans le même temps, indiquent que, pour diminuer la vitesse de ces mouvements, il faut, ou faire monter le centre de gravité du na-

vire, ou bien augmenter $\frac{A}{S}$, c'est-à-dire $\frac{PS - QQ}{S}$.

C'est à quoi on parviendra en augmentant P & S & diminuant Q .

Or 1°. on augmentera P , qui exprime la somme des produits des particules du navire par les carrés de leurs distances à l'axe longitudinal GV , en écartant des poids fort pesants de cet axe.

2°. On augmentera S en écartant le plus que l'on pourra quelques poids fort pesants, tant de la coupe longitudinale que de la coupe latitudinale, passant par le centre de gravité. On voit que P & S augmentent par la même opération en partie.

3°. On diminuera Q , comme on a déjà vu, en distribuant la charge de la même manière, ou de part & d'autre du plan horifontal qui passe par le centre de gravité du navire, ou de part & d'autre de la coupe latitudinale passant par le même centre. Ici on remarquera, au sujet des mouvements de rotation horifontale, que leur vitesse & leur amplitude diminuent tout à la fois par la diminution de Q . On voit aussi que ces sortes d'oscillations ont une durée assez considérable, relativement à leur grandeur : nouvelle raison pour qu'elles soient presque insensibles.

L V I.

Je supprime plusieurs autres remarques qui dérivent de nos principes ; l'objet d'un Mémoire Académique n'étant pas de poursuivre toutes les vérités jusques dans leurs dernières branches, mais d'en produire des germes féconds & faciles à développer. Je me flatte d'avoir suffisamment approfondi une matière, qui à peine avoit été effleurée. Il ne me reste plus qu'à rendre raison pourquoi j'ai toujours négligé la résistance que le navire éprouve de la part de l'eau

en oscillant. J'en ai agi ainsi, parce que les oscillations ayant toujours été supposées fort petites, leur vitesse est aussi très-petite : par conséquent le carré de cette vitesse, qui entre dans l'expression de la résistance (*art. IV & V*) rend cette même résistance infiniment petite du second ordre, ou de nulle considération.

L V I I.

L'hypothèse des oscillations fort petites a facilité le moyen d'établir des règles d'arrimage, qui précautionneront le navire contre les plus grands efforts des vagues. Dans cette recherche, on a été fondé à faire abstraction de toutes les secousses violentes qu'a pu éprouver le navire, avant que ses balancements devinssent permanents & réguliers. Mais nous ne devons pas finir ce chapitre, sans observer qu'on ralentira considérablement ces agitations antérieures, en augmentant la résistance de l'eau que le navire souffre en oscillant & celle que souffre *l'acastillage* en frappant l'air. L'augmentation dont il s'agit dépend principalement de la figure du navire; mais on y peut aussi contribuer en quelque chose, par le moyen de l'arrimage : c'est pourquoi je vais encore déterminer en général la résistance qu'éprouve une courbe *donnée* en oscillant autour de son centre de gravité dans un fluide quelconque. Je me contenterai de considérer une courbe divisée en deux parties égales & symétriques par son axe; & je regarderai son centre de gravité comme immobile.

L V I I I.

P R O B L E M E I V.

FIG. 2. *Trouver la résistance qu'éprouve la courbe symétrique*

BAO posée verticalement dans un fluide , en oscillant autour de son centre de gravité G , regardé comme immobile.

SOLUTION.

Ayant pris l'élément *Mm* de la courbe , soient menés les rayons *GM*, *Gm* & soit décrit l'arc *Mr*;

$$\text{Supposons } \left\{ \begin{array}{l} GM. = z \\ Mm. = ds \\ \text{Le sinus total.} = 1 \\ \text{La vitesse initiale de rotation pour le rayon } r. . . = u \\ \text{Et par conséquent la vitesse du point } M. = zu. \end{array} \right.$$

Puisque la courbe tourne autour du point *G* , il est évident que l'élément *Mm* se présentera au choc du fluide sous un angle d'incidence égal à l'angle *mMr*: donc l'impulsion perpendiculaire que reçoit *Mm* sera exprimée (*art. IV.*) par $ds \times zuu \times (\sin. angl. mMr)^2 = ds \times zuu \times \frac{d\gamma^2}{ds^2} = \frac{zzuud\gamma^2}{ds}$, en faisant abstraction de la densité du fluide. Qu'on prenne *mn* perpendiculaire à *Mm* pour représenter cette force & qu'on la décompose en deux autres, *mq*, *qn*, dont la première soit dirigée suivant *Gm* & l'autre soit perpendiculaire à *Gm* : il est clair que la force *mq* doit être négligée, puisqu'elle est détruite par la résistance du point *G* que l'on suppose immobile & qu'il ne faut avoir égard qu'à la force *qn*. Or à cause des triangles *Mrm*, *mqn*, qui sont évidemment semblables, puisque les côtés qui forment les angles aigus *M* & *m* sont perpendiculaires chacun à chacun, la force *qn* aura pour valeur $\frac{zzuud\gamma^2}{ds} \times \frac{d\gamma}{ds} = \frac{zzuud\gamma^3}{ds^2}$. Multipliant cette force par son bras de levier *z* , intégrant de manière que l'abscisse

AP correspondante à l'arc AM devienne égale à l'axe entier AD ; & doublant l'intégrale, on aura $2uu \int \frac{\gamma^3 d\gamma^3}{\alpha s^2}$ pour le moment de la résistance que toute la courbe oppose au premier instant au mouvement d'oscillation.

L I X.

Ce problème, comme nous l'avons annoncé, fournit le moyen de diminuer la propagation des balancements du navire.

En effet il est bien évident que, toutes choses d'ailleurs égales, les balancements du navire se perpétueront d'autant moins que le moment de la résistance qu'éprouve le navire en oscillant sera plus grand. Or on voit par la formule précédente que le moment de la résistance augmentera, à mesure que le centre de gravité du navire s'éloignera du point où il auroit été placé, si le navire avoit été homogène. Ainsi, à toutes les raisons qui nous ont déterminé à abaisser le centre de gravité du navire, soit pour augmenter la stabilité, soit pour diminuer l'amplitude de ses oscillations, nous pourrons ajouter qu'on parviendra encore par ce moyen à diminuer la propagation de ces balancements dont on est tourmenté par une mer grosse.

C H A P I T R E T R O I S I È M E.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour faire mieux porter la voile au navire.

L X.

LORSQU'UN navire cingle en mer, il est poussé par le vent qui frappe ses voiles & il est retardé par la

la résistance de l'eau qu'il est obligé de fendre. Au commencement du mouvement, l'impulsion du vent est plus forte que la résistance de l'eau : d'où il résulte que la vitesse du navire s'accélère par degrés : mais cette accélération parvient bientôt à son terme ; la résistance de l'eau suspend entièrement l'action du vent, & le navire ne fait plus que conserver, en vertu de son inertie, le mouvement qu'il a acquis précédemment.

L X I.

L'objet qu'on doit se proposer en équipant un vaisseau est, comme nous l'avons dit, article XIV, de lui donner les lignes d'eau projetées par le constructeur, parce qu'il est toujours à croire qu'elles sont meilleures que toutes celles qu'on pourroit prendre au hasard. Or, pour arriver à ce but, la mâture & l'arrimage doivent être tellement combinés que l'impulsion du vent sur les voiles & la résistance de l'eau se fassent mutuellement équilibre, en sorte que le navire puisse conserver l'assiette convenable. Voyons donc qu'elles sont les loix de cet équilibre.

L X I I.

En premier lieu, soit *ADHTEB* un navire, ou plutôt le profil d'un navire cinglant suivant la route directe *Dd*. Soit *GP* une verticale menée par le centre de gravité *G* du navire & par celui de la carène. Supposons que *XV* représente la direction de la résultante de tous les efforts perpendiculaires de l'eau contre la proue, *ZK* la direction de la résultante de tous les efforts perpendiculaires du vent contre les voiles ; ces deux résultantes se détermineront par les articles IV & V, comme on peut le voir dans l'ouvrage de M. Euler, ou dans celui de M. Bouguer. Soient prises *SK* pour représenter l'effort actuel du

G

Prix de 1761.

FIG. 100

vent sur les voiles, effort que je suppose horifontal pour abréger; XN pour représenter la résistance de l'eau; & soit décomposée cette force XN en deux autres XM , XO , l'une verticale, l'autre horifontale. Soit prolongée XO jusqu'à ce qu'elle rencontre la verticale GP en quelque point Q . Cela posé,

1°. Pour que le mouvement de translation horifontale reste uniforme, il faut que l'on ait $SK = XO$.

2°. Pour que le navire ne prenne aucun mouvement d'oscillation sur son centre de gravité, il faut que les moments des forces susdites se fassent équilibre, c'est-à-dire qu'on ait $XO \times GQ + XM \times XQ = SK \times GS$. Je n'ai pas besoin d'avertir que, dans le cas où la droite XQ passeroit au-dessous du centre de gravité du navire, le moment de la force XO seroit négatif dans l'équation précédente.

Lorsque ces deux conditions seront remplies à-la-fois, le navire se mouvra uniformément, en vertu du mouvement déjà acquis; & il n'aura aucun mouvement rotatoire sur son centre de gravité: seulement il faut observer que ce centre sera soulevé suivant la verticale GP par la force XM & que l'effet de cette force ne peut être détruit que par un poids égal placé sur la verticale SG .

L X I I I.

On peut établir les loix de l'équilibre en question d'une autre manière plus simple, que je vais exposer, parce qu'elle est fort commode pour le sillage oblique.

Il est évident qu'il y aura équilibre, du moins autant qu'il est possible, entre l'impulsion du vent & la résistance de l'eau, lorsque ces deux forces seront égales & directement opposées autant qu'il est possible. Or il faut pour cela que ces deux forces se rencontrent en quelque point S sur la verticale GP & de plus que, prenant SZ pour représenter la résistance

de l'eau, & décomposant cette force en deux autres SR , SP , l'une horifontale, l'autre verticale, on ait $SR = SK$.

Quant à la force SP , elle ne peut jamais être détruite que par un poids égal & contraire.

Du reste, si la force du vent n'étoit pas horifontale; comme nous l'avons supposée, il faudroit la décomposer en deux autres forces, l'une horifontale, l'autre verticale, dont on voit bien les effets, sans que je m'arrête plus longtemps là - dessus.

L X I V.

En second lieu; supposons que le navire cingle suivant la route oblique LS (*fig. 11*), ensorte que $DL S$ soit l'angle de la *derive*. Soient $D E$ la coupe horifontale du navire à fleur d'eau; $Y L \&$ la direction horifontale de la résistance horifontale de l'eau, laquelle rencontre l'axe DE au point L ; $Y \mu \&$ (*fig. 12*), la coupe verticale du navire faite suivant l'axe diagonal $Y \&$; $X S V$ la direction de la résistance absolue de l'eau; $Z K$ la direction de l'effort du vent que je suppose toujours horifontale. Cela posé, les voiles, qui ne reçoivent le choc du vent que dans le sens perpendiculaire, doivent avoir une disposition *ef* (*fig. 11*) perpendiculaire à $Y L \&$. Deplus, le centre d'effort des voiles qui se trouve toujours dans la coupe longitudinale $ADHTEB$ (*fig. 10*), doit aussi se trouver dans la coupe transversale $Y \mu \&$ (*fig. 12*). Enfin l'effort horifontal du vent doit être détruit par la résistance horifontale de l'eau. De tout cela, il résulte

1°. Que les droites XV , ZK se rencontreront en S sur la verticale LS .

2°. Que, décomposant la résistance $S V$ de l'eau en deux autres forces SP , SR , l'une verticale, l'autre

horizontale ; & prenant SK pour représenter l'effort du vent , on aura $SK = SR$.

3°. Qu'il faudra mettre dans la direction LP un poids égal à la force SP , sans quoi cette force tendroit à soulever le navire & même à le faire osciller , dans le cas où elle ne passeroit pas par son centre de gravité.

L X V.

Les loix de l'équilibre entre l'impulsion du vent & la résistance de l'eau étant ainsi déterminées , lorsqu'on ne s'y fera pas exactement conformé en chargeant le navire dans le port , on pourra très-aisément & en très-peu de temps corriger l'arrimage en mer.

Supposons , par exemple , que le navire donne du nez dans l'eau , on n'aura qu'à transporter quelques poids de la proue vers la poupe. On feroit l'opération inverse , si le navire glissoit trop sur la lame. J'en dis autant pour tous les autres cas : *mutatis mutandis*. Ces expédients sont si simples & tombent tellement sous le sens commun , qu'il seroit sans doute ridicule de les proposer , si nous n'avions pas donné de plus les moyens de les mettre en œuvre par des principes certains. Le navigateur étant supposé connoître les dimensions du vaisseau , sa charge , l'angle de la derive , la figure & la capacité de la carène , la force & l'impulsion du vent , le centre d'effort des voiles , la résistance de l'eau , il pourra déterminer au juste , à l'aide des règles précédentes , les poids qu'il faut prendre pour remplir l'objet proposé & l'effet infail-
lible qui résultera de cette transposition.

L X V I.

Mais pour établir quelque chose de plus précis sur ce sujet , examinons en détail les circonstances des causes , qui enlèvent au navire la qualité de bien por-

ter la voile. Ces causes sont les mouvements de roulis & de tangage.

Tous ceux qui ont fait quelques courses en mer savent que le navire a des mouvements plus rudes dans les calmes que lorsqu'il est poussé par un vent *bien fait* ; qu'on roule le plus , lorsqu'on a *vent arrière* ; qu'on tangue le plus , lorsqu'on court *au plus près* ; qu'enfin on roule & on tangue le moins , lorsqu'on a *vent large*. La raison de tous ces phénomènes est fort simple ; car dans les calmes , il y a toujours une lame sourde , dont l'effet est très-sensible ; au lieu que les lames n'ont pas beaucoup de prise sur un navire qui tient bien le vent ; elles se prêtent , pour ainsi dire à ses mouvements. Lorsqu'on court , vent en poupe , le navire est soutenu par l'effort du vent & par la résistance de l'eau contre les vagues dirigées suivant la route ; mais il est exposé au choc des lames latérales , qui viennent frapper ses flancs bas-bord & tribord : d'où il suit qu'on doit sentir principalement le roulis. Au contraire , un navire , qui court au plus près , n'est que très-peu soutenu vers la proue & vers la poupe par le vent & par la résistance de l'eau : ainsi il doit tanguer. Enfin un navire , qui court vent large , doit avoir des mouvements doux ; car l'effort du vent & de l'eau s'exerce , en partie perpendiculairement à la route , en partie perpendiculairement à la quille.

L X V I I.

De ces expériences & de ces raisonnements , naissent les réflexions suivantes.

Lorsqu'après avoir saisi l'état d'équilibre entre l'impulsion du vent & la résistance de l'eau , on aura arimé le vaisseau , conformément aux principes établis dans le chapitre précédent , on sera assuré que ce même vaisseau se comportera parfaitement en mer par

un vent bien fait. Les troubles occasionnés par les lames dans l'équilibre dont nous avons parlé, ne produiront que de très-légers changements dans les oscillations du navire.

Lorsqu'on aura vent arrière & qu'on fera tourmenté par les roulis, on diminuera ces mouvements, en transportant bas-bord & stribord dans les flancs du vaisseau, quelques poids fort pesants (*art. xxxiv*).

Lorsqu'on courra au plus près, il faudra transférer des poids fort pesants vers la proue & vers la poupe, afin de diminuer les mouvements de tangage (*art. xxxiv*).

Enfin lorsqu'on aura vent large & que le navire sera fatigué par des balancements composés de roulis & de tangage, on mettra en œuvre les expédients proposés dans les articles LIII, LIV, LV.

L X V I I I.

Les remarques que je viens de proposer sur les changements qu'il faut faire à l'arrimage pour diminuer les oscillations du navire, peuvent être soumises à un calcul plus précis : nous n'avons, pour cela, qu'à déterminer en général les balancements qui résultent de l'impulsion du vent, de la résistance de l'eau, de la pesanteur & de la poussée verticale de l'eau, lorsque ces quatre forces ne sont pas dans un équilibre parfait.

Pour présenter la méthode d'une manière bien claire, je supposerai que le navire cingle suivant la route directe, en sorte que les quatre forces dont il s'agit seront dans la coupe longitudinale du navire. Outre que les résultats pour la route directe peuvent toujours s'appliquer à la route oblique, avec certaines modifications que le simple bon sens indique à peu près, si l'on combine cette solution avec les articles XLVI, XLVII, XLVIII, il sera très-facile de ré-

foudre le problème, dans le cas où les quatre forces ne sont pas dans un même plan. Je regarderai de plus l'avant de la proue comme un simple plan incliné. Cette supposition pourra toujours se faire, sans craindre aucune erreur sensible; car les oscillations du navire étant fort petites, les variations qui peuvent arriver dans la résistance de l'eau, suivront toujours à peu près la même loi, quelle que soit la figure de la proue.

L X I X.

P R O B L E M E.

Déterminer les oscillations du navire, qui résultent du défaut d'équilibre absolu entre la pesanteur du navire, la poussée verticale de l'eau, l'impulsion du vent sur les voiles & la résistance de l'eau.

S O L U T I O N.

Soit *ADHTEB* la figure du navire, ou plutôt sa coupe longitudinale. Supposons qu'au bout d'un certain temps, le plan de flottaison du navire soit représenté par *ed*, qui peut être censé couper *DE* au point *C* sur la verticale *GC* élevée par le centre de gravité *G*. Du point *H* soit élevée sur *DE* la perpendiculaire *HV*; & du point *C* soient décrits les arcs *Ex*. Du. Soient *ZS* la direction moyenne de l'impulsion du vent que je suppose horizontale pour abrégé: *XN* la direction de la résistance de l'eau contre *dH*, laquelle peut être censée perpendiculaire sur un point connu de *DH*. Qu'on prenne *XN* pour représenter cette résistance & qu'on la décompose en deux autres forces, *XM*, *XO*, l'une verticale, l'autre horizontale. Soit prolongée *XO* jusqu'à ce qu'elle rencontre la verticale *GC*. Par le centre de

FIG. 13.

gravité G du navire, soit menée GL perpendiculaire à de ; & du point F , centre de gravité de la carène au premier instant, soient menées Ff , Fo perpendiculaires sur GC & sur GL .

On voit par la nature des forces dont le navire est agité qu'il aura, indépendamment du mouvement uniforme primitif, deux mouvements accélérés ou retardés, l'un horizontal, l'autre vertical; & qu'en même temps, il oscillera sur son centre de gravité: mais il faut observer

1°. Que, comme on suppose l'impulsion du vent à peu près égale à la résistance horizontale XO , la vitesse d'accélération qui naîtra de la différence de ces deux forces, doit être regardée comme infiniment petite par rapport à la vitesse primitive & uniforme du navire.

2°. Que la résistance qui naît des différentes oscillations du navire est nulle, en comparaison de la résistance qui naît de la vitesse uniforme.

3°. Que le fonds HT , dans le cas où il ne seroit pas parallèle au plan de flottaison, recevra cependant toujours la même impulsion de l'eau; car, en vertu de l'oscillation, il se présenteroit au choc de l'eau sous un angle infiniment petit; &, comme le carré du sinus de cet angle entreroit (*art. v*) dans l'expression du choc provenant de l'oscillation, il s'ensuit que ce même choc doit être réputé nul. Pour abrégé, nous supposons HT parallèle à DE , auquel cas il ne reçoit aucune sorte de choc sensible.

Soient	}	La droite CE	=	a
		La droite CD	=	b
		Le plan de flottaison.	=	cc
		La distance du centre de gravité de ce plan au point C	=	k
		Ff	=	f
		Gf	=	h
				GQ

Soient	G Q.	=	r	
	X Q.	=	n	
	G S.	=	q	
	D H.	=	λ	
	H V.	=	μ	
	D V.	= $V \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	=	∞
	Le second côté du rectangle égal à la proue.	=	φ	
	La vitesse uniforme du navire.	=	u	
	L'impulsion du vent.	=	F	
	La distance d'un point donné au point G.	=	m	
	L'espace parcouru verticalement par le centre de gravité.	=	x	
	L'espace parcouru horizontalement par le même point, en vertu de la simple accélération.	=	z	
	L'espace parcouru circulairement autour de G à la distance m.	=	y	
	L'élément du temps.	=	dt	
	Le volume du navire.	=	N	
	La somme des produits des particules du navire, par les carrés de leurs distances à un axe passant par le point G & perpendiculaire au plan ADHTEB.	=	R	
	L'onglet formé par la rotation de la partie du plan de flottaison représentée par CE au profil, autour d'un axe passant par le point C & perpendiculaire à DE.	=	Ca ² y	
	Le moment du même onglet par rapport à l'axe de rotation passant par le point G.	=	Ca ³ y	
	L'onglet formé par la rotation de la partie du plan de flottaison représentée par CD au profil, autour de l'axe passant par le point C.	=	C'b ² y	
	Le moment du même onglet par rapport à l'axe passant par le point G.	=	C'b ³ y	
Le volume de la carène au premier instant.	=	M		
La gravité.	=	g		
La densité de la charge.	=	p		
La densité de l'eau.	=	π		

Tout cela posé, on aura évidemment $Du = \frac{by}{m}$,
 & les triangles *HVD*. *Dud* qu'on peut regarder

comme semblables, donneront $Dd = \frac{\lambda b y}{\mu m}$; donc $dH = \lambda - \frac{\lambda b y}{\mu m}$: par conséquent l'impulsion de l'eau contre la proue aura pour expression * $\varepsilon g \pi \cdot \phi \left(\lambda - \frac{\lambda b y}{\mu m} \right) \times u^2 \times \frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu}{m \lambda}$. D'où il suit que la force XO sera représentée par $\frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu}{m \lambda} \times \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$ & que la force XM sera représentée par $\frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu x}{m \lambda^2}$.

Si l'on retranche la force XO de l'impulsion F du vent, il nous viendra $F - \frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$ pour la force qui produit l'accélération horizontale du navire: par conséquent nous aurons cette première équation

$$(A) \left(F - \frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} \right) dt^2 = p N d d \zeta.$$

Le navire sera soulevé suivant la verticale par une force égale à la somme faite de la poussée verticale de l'eau & de la force XM sur son propre poids, c'est-à-dire par une force exprimée par

$$g \pi \left[M - c c x + \varepsilon a^2 y - \varepsilon b^2 y \right] + \frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu x}{m \lambda^2} - g p N;$$

ainsi on aura l'équation

$$(B) \left[g \pi \left(M - c c x + (\varepsilon a^2 - \varepsilon b^2) y \right) + \frac{\varepsilon g \pi \cdot \phi (\mu m - b y) u^2 \mu x}{m \lambda^2} - g p N \right] dt^2 = p N d d x.$$

Enfin il est évident que le navire sera sollicité à tourner sur son centre de gravité par un moment de force représenté par

$$g \pi \left[M \left(f - \frac{h y}{m} \right) + c c k x - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right] +$$

* La lettre ε , est un coefficient qu'on déterminera suivant l'esprit de l'article VI.

$$\frac{eg\pi. r\phi(\mu m - by) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} + \frac{eg\pi. n\phi(\mu m - by) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} - Fq;$$

par conséquent, on aura cette troisième équation,

$$(C) \left[g\pi \left(M \left(f - \frac{hy}{m} \right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y \right) + \frac{eg\pi. r\phi(\mu m - by) u^2 \mu^2 + eg\pi. n\phi(\mu m - by) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} - Fq \right] dt^2 = \frac{pRddy}{m}.$$

Ces équations donneront en général tous les mouvements du navire.

L X X.

Lorsque la quantité F sera donnée en fonctions du temps & de l'espace parcouru, on mettra cette valeur dans les équations précédentes : ensuite on les intégrera soit exactement, soit par approximation. Je crois qu'on ne doit guères se flatter de pouvoir établir, au sujet de la valeur de F , une hypothèse qui soit conforme à la nature. C'est pourquoi, satisfait d'avoir indiqué la route qu'il faudroit tenir alors, j'abandonnerai ici la méthode générale, & je me bornerai à l'examen d'un cas particulier, dont la pratique retirera beaucoup de lumières.

L X X I.

Supposons que le navire se meuve d'un mouvement parfaitement uniforme, & de plus que le centre de gravité ne monte ni ne descende ; les équations (A) & (B), qui représentent les accélérations horifontale & verticale, seront nulles ; & il ne restera que l'équation (C), qui représente les oscillations circulaires autour du centre de gravité.

Or puisque l'accélération horifontale est nulle, il est clair que l'impulsion du vent est égale à la résistance horifontale de l'eau ; c'est-à-dire que $F = \frac{eg\pi. \phi(\mu m - by) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$.

H ij

mettons cette valeur de F dans l'équation (C), & nous aurons, après avoir effacé le terme $cc k x$,

$$\left[g \pi \left(M \left(f - \frac{h y}{m} \right) - (a^2 + b^2) y \right) + \frac{\varepsilon g \pi \cdot r \phi (\mu m - l y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} + \frac{\varepsilon g \pi \cdot n \phi (\mu m - b y) u^2 \mu \pi}{m \lambda^2} - \frac{\varepsilon g \pi \cdot q \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2} \right] dt^2 = \frac{p R d d y}{m}.$$

Cette équation donne

$$y = \left[\frac{M f m \lambda^2 + \varepsilon r \phi m u^2 \mu^3 + \varepsilon n \phi \pi u^2 \mu^2 \pi - \varepsilon q \phi m u^2 \mu^3}{M h \lambda^2 + m \lambda^2 a^2 + m \lambda^2 b^2 + \varepsilon r \phi b u^2 \mu^2 + \varepsilon n \phi b u^2 \mu \pi - \varepsilon q \phi l u^2 \mu^2} \right] \times$$

$$\left(1 - \cos i \sqrt{\frac{g \pi}{\lambda^2 p R} \times (M h \lambda^2 + m \lambda^2 a^2 + m \lambda^2 b^2 + \varepsilon r \phi l u^2 \mu^2 + \varepsilon n \phi l u^2 \mu \pi - \varepsilon q \phi b u^2 \mu^2)} \right)$$

formule, par le moyen de laquelle on déterminera l'amplitude des balancements du navire. Elle fait voir que, les lignes d'eau & la hauteur de la mâture restant toujours les mêmes, tout le changement qu'il faudra faire à l'arrimage pour diminuer l'amplitude des oscillations, consistera à faire descendre de plus en plus le centre de gravité du navire. On voit encore que si, tout restant d'ailleurs absolument le même, l'on fait quelque renflement à la carène par des *bordages* du côté de la poupe, de manière qu'on puisse faire reculer le centre de gravité vers cette même poupe, on diminuera encore l'amplitude des oscillations, &c.

L X X I I.

Soit l la longueur du pendule synchrone : on trouvera

$$l = \frac{\frac{p}{\pi} \lambda^2 R}{M h \lambda^2 + m \lambda^2 a^2 + m \lambda^2 b^2 + \varepsilon r \phi l u^2 \mu^2 + \varepsilon n \phi b u^2 \mu \pi - \varepsilon q \phi b u^2 \mu^2}.$$

formule, par le moyen de laquelle on modèrera la vivacité des oscillations du navire. Elle fait voir que,

SUR L'ARRIMAGE DES NAVIRES. 71
tout restant d'ailleurs le même, la vitesse des oscillations ne pourra diminuer que par l'augmentation de R , ou que par la diminution de h & de b , &c.

Je passe rapidement sur ces détails, qui ne peuvent avoir aucune difficulté, après tout ce qui a été déjà dit.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour procurer plus de vitesse au navire.

L X X I I I.

Nous avons déjà remarqué que, lorsqu'on mettoit un navire à la voile, sa vitesse s'accéléroit très-rapidement durant les premiers instants, & qu'elle parvenoit bientôt à l'état d'uniformité. L'expérience & la théorie apprennent que cet effet s'opère en moins de temps qu'il n'en faut d'ordinaire pour defreler & orienter les voiles *. Ainsi, lorsqu'on propose d'augmenter la rapidité de la vitesse par le moyen de l'arrimage, il ne peut être question que de la vitesse permanente & uniforme.

* Voyez les Mém. de l'Acad., an. 1745, page 309.

L X X I V.

Or, pour déterminer comment l'arrimage peut contribuer à augmenter la vitesse uniforme, il faut d'abord connoître les éléments qui entrent dans l'expression de cette vitesse. Ainsi je commencerai par résoudre le problème suivant. Je ne considère que le simple mouvement progressif; & je fais abstraction de tout balancement autour du centre de gravité, parce qu'on est supposé avoir pris toutes les précautions pour faire porter parfaitement la voile au navire.

P R O B L E M E.

FIG. 11. Le navire DzE s'englant suivant la route donnée LS , trouver l'expression de sa vitesse.

S O L U T I O N.

Soit LYy la direction de la résistance horifontale de l'eau. Les voiles, qui ne reçoivent l'impulsion du vent que dans le sens perpendiculaire, doivent avoir une position ef perpendiculaire à LYy . Soit VL la direction du vent, laquelle fait avec ef un angle donné VLf & avec la direction de la route un angle aussi donné VLS ou VLt .

Soient	}	L'étendue des voiles.	=	aa
		La surface plane qui, exposée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit la même résistance que le navire.	=	bb
		Le sinus total.	=	1
		Le sinus de l'angle VLf	=	n
		Le cosinus de l'angle VLt	=	q
		La vitesse absolue du vent.	=	V
		Celle du navire.	=	u
		La densité du vent.	=	δ
		La densité de l'eau.	=	π

Il est clair que la vitesse du navire, suivant la direction du vent, sera exprimée par qu ; ainsi l'impulsion perpendiculaire du vent sur ef sera proportionnelle (*art. v.*) à $\delta a a n n (V - qu)^2$, tandis que la résistance de l'eau sera proportionnelle à $\pi b^2 u^2$. Or, puisque le navire marche uniformément, la résistance de l'eau doit être égale à l'impulsion du vent : par conséquent, on aura l'équation

$$\pi b^2 u^2 = \delta a^2 n^2 (V - qu)^2.$$

$$\text{d'où l'on tire } u = \frac{anV\sqrt{\delta}}{b\sqrt{\pi} + anq\sqrt{\delta}}$$

L X X V I.

On voit par cette formule qu'en supposant toujours le navire *donné*, on ne peut augmenter la rapidité du sillage, ou qu'en augmentant l'étendue des voiles pour recevoir plus de vent, ou qu'en diminuant la résistance du fluide, ou qu'enfin, en augmentant l'étendue des voiles & diminuant la résistance du fluide tout-à-la-fois, s'il est possible.

L X X V I I.

Le premier moyen pourra quelquefois être mis en usage, lorsque les lignes d'eau seront bonnes & qu'on voudra par conséquent les conserver. Il y a toujours dans le navire des voiles de réserve pour s'en servir dans le besoin. C'est au navigateur prudent & expérimenté à examiner avec soin la quantité qu'en peut porter le navire sans danger. Or si l'on augmente en effet l'étendue des voiles, il est certain que, comme leur nouveau centre d'impulsion ne pourra guère être le même qu'auparavant, il faudra nécessairement faire quelques changements à l'arrimage, relativement à cette nouvelle disposition de voiles. Les changements dont il s'agit doivent toujours être subordonnés aux loix de l'équilibre entre la pesanteur du navire, la poussée verticale de l'eau, l'impulsion du vent sur les voiles & la résistance de l'eau : ainsi ils se feront d'une manière certaine par les principes établis dans tout le cours de ce Mémoire.

L X X V I I I.

Mais, si les lignes d'eau étoient défectueuses, en sorte que le navire éprouvât une trop grande résis-

tance de la part de l'eau , sans compter les autres inconvénients dont il n'est pas ici question , il faudroit tâcher de trouver d'autres lignes , en transportant convenablement différents poids. De ce nouvel avantage , il pourroit encore résulter que le navire fût capable de porter plus de voiles. Souvent on est parvenu ainsi à rendre très-bons voiliers des vaisseaux qui manquoient de cette qualité.

L X X I X.

SCHOLIE. Du reste , si le vaisseau navigeoit absolument mal , il ne faut pas s'attendre qu'on pût corriger tous ses défauts par l'arrimage : cette ressource n'est efficace que jusqu'à un certain point. La rapidité du sillage dépend principalement de la figure de la carène & de l'angle de la derive. Mais ce n'est pas ici le lieu de discuter ces articles.

 C H A P I T R E C I N Q U I É M E .

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage , pour rendre le navire plus ou moins sensible au gouvernail.

L X X X.

TOUT le monde connoit la manœuvre du gouvernail. On sçait que cette pièce est attachée à la poupe du vaisseau par des gonds sur lesquels elle tourne par le moyen d'une barre ou *timon* , & que , présentée au choc de l'eau , elle oblige le navire à tourner ,

L X X X I.

Comme le plan horizontal , qui passe par le centre d'impression du gouvernail & dans lequel se trouve la direction du choc de l'eau , ne divise pas le navire
en

en parties égales & symétriques , il est certain (*art. VIII*) que le gouvernail imprimera au navire différens mouvemens autour de son centre de gravité. Mais, de tous ces mouvemens , il n'y en a que deux qui soient sensibles; le premier, par lequel la rapidité du sillage est retardée , le second , par lequel le navire tourne perpendiculairement à sa longueur. Quant aux autres , ils doivent être négligés. Ce n'est pas qu'on ne pût les faire entrer aussi dans le calcul; mais ils le compliqueroient à un point qu'il seroit peut-être impossible d'en tirer des résultats satisfaisans pour la pratique. Il n'arrive que trop souvent que de légères circonstances rendent une formule intraitable , soit que la nature emploie dans ses opérations les plus simples un mécanisme fort composé , soit que nous ne possédions pas assez l'art de lire dans les symboles de l'analyse.

L X X X I I.

Supposons donc que AB représente la quille du vaisseau , GC la verticale élevée par son centre de gravité , BD le gouvernail , H le centre d'impression de ce gouvernail. Soit prise HN perpendiculaire à BD pour représenter le choc de l'eau ; & soit décomposée cette force en deux autres HO , HP , l'une perpendiculaire , l'autre parallèle à la quille. Il est clair que la force HP retardera dans le sens de la quille la rapidité du sillage , & qu'en même temps , elle tendra à faire tourner le navire sur son centre de gravité : mais , comme elle agit à l'extrémité d'un très-petit bras de levier , ce dernier mouvement ne sera pas sensible. A l'égard de la force HO , elle imprimera au centre de gravité un mouvement de translation perpendiculaire à la quille ; & de plus elle fera tourner le navire sur ce même centre. Ainsi , en vertu de cette dernière force seulement , le centre de gra-

FIG. 14.

vité parcourra , par exemple , Gg perpendiculaire à AB ; & la quille prendra une nouvelle position $a'b'$, faisant avec la première AB ou ab l'angle $b'gb$. Je néglige dans tout ceci le mouvement de charnière du gouvernail , parce que les matelots appliqués à sa barre rendent ce mouvement comme nul par leur réaction contre l'effort de l'eau .

L X X X I I I .

Il ne s'agit pas ici d'examiner comment le choc de l'eau se transmet au navire , ni de trouver l'angle le plus avantageux , sous lequel le gouvernail doit être frappé , &c. Il ne s'agit pas même de l'action du gouvernail , en tant qu'elle retarde la rapidité du sillage . En se bornant exactement à l'objet prescrit par l'Académie , il est question de déterminer la disposition de la charge qui favorise le plus ou le moins le mouvement de rotation que le gouvernail tend à imprimer au navire .

Pour plus de simplicité , je regarderai la force qui tend à faire tourner le navire comme appliquée au point B perpendiculairement à la quille . Cette force est supposée connue : elle ne peut pas différer beaucoup de la force HO ; car le gouvernail étant fort court en comparaison du vaisseau , la partie BQ est fort petite .

L X X X I V .

P R O B L E M E I .

Déterminer l'arrimage qui rendra l'angle de rotation $b'gb$ le plus grand ou le plus petit qu'il est possible en un temps donné .

S O L U T I O N .

Soient $\left\{ \begin{array}{l} \text{La force qui tend à faire tourner le navire.} = F \\ \text{Son bras de levier } GB. = a \end{array} \right.$

Soient

}	La distance connue d'un point donné Z à l'axe de rotation GC	=	r
	L'angle de rotation ζu	=	u
	La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe de rotation	=	R

on aura (art. x) $F \times a = \frac{R \times u}{r}$; donc $u = \frac{F \times a}{R}$.

D'où l'on voit que si, outre la force F , qui est toujours constante, on suppose aussi a constante, c'est-à-dire que le centre de gravité du navire reste toujours au même point, ou du moins dans la même verticale; l'angle u ne peut augmenter ou diminuer que par la diminution, ou que par l'augmentation du dénominateur R . Or, l'on diminuera R , en rapprochant le plus qu'il est possible de l'axe GC les poids les plus pesants de la charge; & au contraire, on augmentera R , en éloignant les poids les plus pesants du même axe.

Tels sont, en général, les changements qu'on peut faire à l'arrimage, pour favoriser le plus ou le moins qu'il est possible le mouvement de rotation du navire, sans faire changer de place à la verticale qui passe par son centre de gravité.

L X X X V.

Il est clair que, dans deux navires semblables & semblablement chargés, les quantités R sont entre elles comme les cinquièmes puissances des dimensions homologues. Il n'est pas moins clair que les forces F sont comme les quarrés, & leurs moments comme les cubes des côtés homologues: d'où il suit que les angles de rotation sont réciproquement proportionnels aux quarrés des côtés homologues.

P R O B L E M E I I.

FIG. 15. Déterminer l'endroit K où l'on doit placer un nouveau poids qu'on veut ajouter à la charge, pour rendre l'angle de rotation le plus grand ou le plus petit qu'il est possible.

S O L U T I O N.

Soient GC l'axe vertical passant par le centre de gravité du navire avant l'addition du nouveau poids, kr l'axe vertical passant par le centre de gravité k du navire, après l'addition du nouveau poids, kx l'espace parcouru perpendiculairement à la quille par le centre k . Si, par le point x , on mène ab parallèle AB . & que le gouvernail soit supposé prendre la position $a'b'$, l'angle de rotation sera $bx b'$; & c'est cet angle qu'il s'agit de rendre un *maximum* ou un *minimum*.

Soient	}	La force qui tend à faire tourner le navire.	=	F
		GB	=	a
		L'angle de rotation pour le rayon r	=	u
		La somme des produits des particules du navire, avant l'addition du nouveau poids, par les quarrés de leurs distances à l'axe GC	=	R
		La somme des produits des particules du navire, après l'addition du nouveau poids, par les quarrés de leurs distances à l'axe kr	=	Z
		La charge du navire avant l'addition du nouveau poids.	=	N
		Le nouveau poids.	=	n
		GK	=	x

on aura, par la propriété du centre de gravité, $Gk = \frac{nx}{N+n}$, & par conséquent $Bk = a + \frac{nx}{N+n}$. De plus on aura (*art. XI*), $R + nx^2 = Z +$

$$(N+n) \times \frac{nnxx}{(N+n)^2}^*, \text{ ou bien } ZR + \frac{Nn}{N+n} \cdot xx.$$

Mais on a toujours (art. x) $F \times \left(a + \frac{nx}{N+n} \right) = Z \times u$
 $= \left(R + \frac{Nn}{N+n} \cdot xx \right) \times u$; donc

$$\alpha = \frac{F \cdot \left(a + \frac{nx}{N+n} \right)}{R + \frac{Nn}{N+n} \cdot xx} = \textit{maximum ou minimum}.$$

Par conséquent $\frac{ndx}{N+n} \left(R + \frac{Nn}{N+n} \cdot xx \right) -$

$$\left(a + \frac{nx}{N+n} \right) \times \frac{2Nn}{N+n} \cdot xdx = 0$$
; d'où l'on tire

$$x = - \frac{a \cdot (N+n)}{n} \pm (N+n) \sqrt{\frac{a^2 + \frac{R}{Nn \cdot (N+n)}}{n^2 + \frac{R}{Nn \cdot (N+n)}}}.$$

Cette valeur de α répond toujours à un *maximum* : ainsi, dans la supposition qu'on ajoute un poids, l'angle de rotation fera augmenté.

Mais si, au lieu d'ajouter, on retranchoit le poids n , ce qui est la même chose que rendre n négatif dans la valeur générale de u , alors cette valeur, qui seroit

$$\frac{F \left(a - \frac{nx}{N+n} \right)}{R - \frac{Nn}{N+n} \cdot xx} \text{ donneroit un } \textit{minimum}$$
; & pour

déterminer l'endroit d'où il faudroit ôter le poids n .

* Le poids n , est supposé assez petit pour qu'on puisse regarder toute sa masse comme réunie en un seul & même point. Mais, si cette supposition étoit trop libre, on commenceroit par chercher la somme des produits des particules de ce corps par les carrés de leurs distances à l'axe GC , en regardant la position de ce corps comme donnée : ensuite la solution du problème s'achèveroit, comme dans le premier cas.

on auroit l'équation

$$x = \frac{a(N-n)}{n} \pm (N-n) \sqrt{\frac{a^2}{n^2} - \frac{R}{\Delta n(N+n)}}$$

L X X X V I I.

Lorsque le poids n fera fort petit, on pourra prendre, sans erreur sensible, pour déterminer le *maximum*,

$$x = - \frac{a(N+n)}{n} \pm \frac{(N+n)}{n} a \pm \frac{R}{2Na}$$

& pour déterminer le *minimum*,

$$x = \frac{a(N-n)}{n} \pm \frac{(N-n)}{n} a \pm \frac{R}{2Na}$$

Ces formules sont fort simples & d'un usage très-commode. Il est vrai qu'elles renferment la quantité R , dont la détermination exige quelques calculs; mais ils peuvent s'abrégier très-considérablement par divers moyens, comme on peut le voir dans le *Traité de la manœuvre des vaisseaux* de M. Bouguer, pages 338. 339. & suiv.

L X X X V I I I.

Puisque nous connoissons l'endroit où il faudroit mettre, ou dont il faudroit ôter un certain poids, pour favoriser ou pour contredire le mouvement de rotation du vaisseau, il est clair que nous sommes en état de faire la transposition de poids qui convient, pour régler à volonté le mouvement de rotation dont il s'agit; car nous sçavons l'endroit où il faut prendre les poids & l'endroit où il faut les placer.

L X X X I X.

Dans les deux articles précédents, les poids que nous avons transportés ont été pris sur la quille, ou plutôt dans le plan verticale qui passe par la quille :

mais, comme on peut être forcé de prendre ces poids dans les flancs du navire, nous allons encore chercher la position de la droite $MK M'$ perpendiculaire à la quille, de manière que, plaçant aux points M , & M' à une même distance donnée de la quille deux poids égaux, l'angle de rotation du navire soit un *max.* ou un *minim.* Ce problème renferme le précédent comme un cas particulier.

Soient G le centre de gravité du navire avant l'addition des deux nouveaux poids, k le centre de gravité, après l'addition.

Suppo- sons.	{	La force qui tend à faire tourner le navire. . . =	F
		$G B$ =	a
		L'angle de rotation pour le rayon 1. =	u
		La charge du navire avant l'addition des deux nouveaux poids. =	N
		Chacun de ces deux nouveaux poids. =	n
		La somme des produits des particules de N par les quarrés de leurs distances à l'axe GC . . . =	R
		La somme des produits des particules de $N + 2n$, par les quarrés de leurs distances à l'axe kr . . =	Z
		KM ou KM' =	b
$G K$ =	x		

on aura $Gk = \frac{2nx}{N+2n}$; $Bk = a + \frac{2nx}{N+2n}$; $\overline{GM}^2 = bb + xx$ & suivant l'article XI, $R + 2n.(bb + xx) = Z + (N + 2n) \frac{4nxx}{(N+2n)^2}$ ou bien

$$Z = R + \frac{2Nn.(bb + xx) + 4bbnn}{N + 2n} ;$$

$$\text{donc } u = \frac{F. \left(a + \frac{2nx}{N+2n} \right)}{R + \frac{2Nn.(bb + xx) + 4bbnn}{N + 2n}} = \text{maxi.}$$

mun ; ce qui donne

$$x = -\frac{a(N+2n)}{2n} + (N+2n) \sqrt{\frac{a^2}{4n^2} + \frac{R}{2Nn.(N+2n)} + \frac{bb}{2N.(N+2n)}}$$

On aura l'équation du *minimum*, en faisant *n* négatif dans l'équation précédente.

X C.

Lorsqu'on ne voudra pas augmenter ou diminuer l'angle de rotation du navire, & que, cependant, on aura besoin de transposer quelques poids pour remplir quelque objet particulier, comme, par exemple, pour faire mieux porter la voile au navire, cette transposition pourra se faire à l'aide du problème suivant, sans que l'angle de rotation du navire souffre aucun changement.

X C I.

P R O B L E M E I I I.

FIG. 16. *Trouver une courbe* MM' *telle que, plaçant sur sa circonférence des poids égaux, l'angle de rotation du navire demeure toujours le même.*

S O L U T I O N.

Il est visible que la coupe dont il s'agit doit être divisée en deux parties égales & semblables par la quille AB ; & qu'en la formant, il faudra à chaque opération placer de part & d'autre de la quille deux poids égaux dans les deux points qui se correspondent.

Soit pris le point K pour l'origine de la courbe, & soient KP , PM les coordonnées pour le point M ou M' . Soient G le centre de gravité du navire avant l'addition des deux nouveaux poids aux points symétriques M & M' ; k le centre de gravité de tout le

le système, après l'addition de ces deux nouveaux poids; $bx b'$, l'angle de rotation.

Supposons	{	La force qui tend à faire tourner le navire.	=	F
		GB	=	a
		GK	=	c
		La charge du navire avant l'addition des deux nouveaux poids.	=	N
		Chacun de ces deux nouveaux poids.	=	n
		La somme des produits des particules de N par les quarrés de leurs distances à l'axe GC	=	R
		La somme des produits des particules de $N+2n$ par les quarrés de leurs distances à l'axe kr	=	Z
		L'angle de rotation pour le rayon r	=	u
		KP	=	x
		PM	=	y

on aura $Gk = \frac{2n \cdot (c-x)}{N+2n}$, $Bk_1 = a + \frac{2n \cdot (c-x)}{N+2n}$;
 $\overline{GM}^2 = yy + (c-x)^2$; $R + 2n \cdot (yy + (c-x)^2)$
 $= Z + (N+2n) \cdot \frac{4nn \cdot (c-x)^2}{(N+2n)^2}$ ou bien $Z = R$
 $+ \frac{2Nn \cdot (yy + (c-x)^2) + 4nn yy}{N+2n}$. Donc

$$F \left(a + \frac{2n \cdot (c-x)}{N+2n} \right) = \left(R + \frac{2Nn \cdot (yy + (c-x)^2) + 4nn yy}{N+2n} \right) \times u :$$

ou bien $u = \frac{F \left(a + \frac{2n \cdot (c-x)}{N+2n} \right)}{R + \frac{2Nn \cdot (yy + (c-x)^2) + 4nn yy}{N+2n}}$;

égalant cette valeur de u à une constante, & observant qu'à l'origine de la courbe cette constante

$$= \frac{F \times \left(a + \frac{2nc}{N+2n} \right)}{R + \frac{2Nnc}{N+2n}}$$

on aura

$$a + \frac{2nc}{N+2n} = \frac{a + \frac{2n(c-x)}{N+2n}}{R + \frac{2Nnc}{N+2n}} = \frac{a + \frac{2n(c-x)}{N+2n}}{R + \frac{2Nn \cdot (c-x)^2 + (2Nn+4nn)y^2}{N+2n}}$$

ou bien

$$\frac{N+2n}{N} \cdot \mathcal{Y}\mathcal{Y} = \left(\frac{2aN^2c + 4aNnc + 2Nnc^2 - RN - 2nR}{N \cdot (aN + 2an + 2nc)} \right) x - xx$$

équation à une ellipse, dont l'axe des x est

$$\frac{2 \cdot (2aN^2c + 4aNnc + 2Nnc^2 - RN - 2nR)}{N \cdot (aN + 2an + 2nc)} \quad \& \text{ celui des } y$$

$$\text{est } \frac{2 \cdot (2aN^2c + 4aNnc + 2Nnc^2 - RN - 2nR)}{N \cdot (aN + 2an + 2nc)} \times \sqrt{\frac{N}{N+2n}}$$

Cette ellipse ne diffère pas beaucoup d'un cercle, par ce que le poids n est fort petit par rapport à N .

X C I I.

Le problème que nous venons de résoudre ne se borne pas à l'usage indiqué dans l'article XC : il est facile d'en conclure aussi que tous les poids qu'on mettra au-dedans de l'ellipse, favoriseront le mouvement de rotation, & que ceux qu'on mettra au dehors lui nuiront. Si, au lieu d'ajouter de nouveaux poids, on en retranchoit, ceux qu'on prendroit au-dedans de l'ellipse, nuiront au mouvement de rotation ; & ceux qu'on prendroit au dehors, lui seroient favorables.

X C I I I.

SCHOLIE I. Les deux problèmes des articles LXXXVI & XCI, ont déjà été résolus par M. Bouguer. Voyez son *Traité de la manœuvre des vaisseaux*, pages 351 & 356. Mais mon sujet les amenoit si naturellement, que j'avois trouvé mes solutions longtemps avant que d'avoir lu l'ouvrage cité.

Si on refuse de m'en croire, on pourra du moins se convaincre que je n'ai absolument rien emprunté de M. Bouguer. J'ose ajouter que ma méthode est beaucoup plus simple, plus claire & plus directe que la sienne.

X C I V.

SCHOLIE. II. Je ne dissimulerai pas ici une remarque que fait M. Bouguer dans le même ouvrage. Il prétend que, pour mieux gouverner, il faut rapprocher les poids de la poupe, parce qu'à mesure qu'on charge la poupe, le gouvernail s'enfonce plus avant dans l'eau & reçoit par conséquent un plus grand choc, qui compense abondamment le défaut de cet arrimage, relativement au même objet. Mais, en admettant même toutes les hypothèses sur lesquelles l'auteur établit son calcul, je crois qu'il n'a proposé ce moyen que pour certains cas pressans, où tous les autres avantages de la navigation doivent être sacrifiés à la nécessité de bien gouverner; car il est certain en général que si le navire porte bien la voile, qu'il ait une belle batterie; &c, il faut conserver cette assiette autant qu'il est possible; &, par conséquent, altérer le moins qu'il est possible le premier arrimage. Or, l'altération la moins sensible qu'on puisse faire à l'arrimage, pour augmenter ou pour diminuer la facilité de gouverner, est évidemment celle qui résulte de la théorie que nous venons d'établir. Lorsqu'on surcharge l'arrière, la rapidité du sillage est ralentie par la surface que la quille présente au choc de l'eau, les mouvements de roulis & de tangage sont plus vifs: il peut même se faire que le centre d'impression du gouvernail ne se trouve plus alors assez sensiblement dans le même plan horizontal que le centre de gravité du navire; ce qui occasionnera de nouveaux mouvements qui, en se combinant

avec les premiers, ne manqueront pas de tourmenter l'équipage & la mâture. Ces inconvénients, qui résultent du trop grand enfoncement de la poupe, ont tellement frappé plusieurs constructeurs habiles *, qu'ils diminuent considérablement & réduisent presque à rien la différence du tirant d'eau de l'avant & de l'arrière ; différence qu'on portoit autrefois assez loin. Plusieurs vaisseaux, tels que le Northumberland, l'Auguste, l'Alose, la Badine, &c., ont très-bien navigé avec de légères différences de tirant d'eau. Je n'insisterai pas d'avantage sur ce sujet. C'est au navigateur sage & expérimenté à prendre le meilleur parti, suivant l'occasion.

* Voyez l'archiv. n. v. de M. Duhamel, 2^e. ed., p. 1043 & suiv.

F I N.

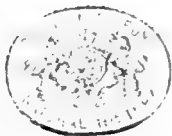


Fig. 2.

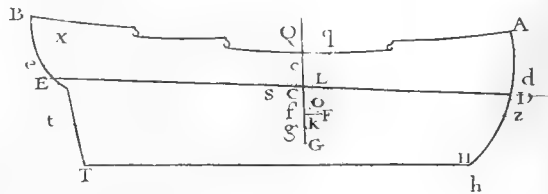


Fig. 1.

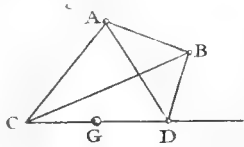


Fig. 3.

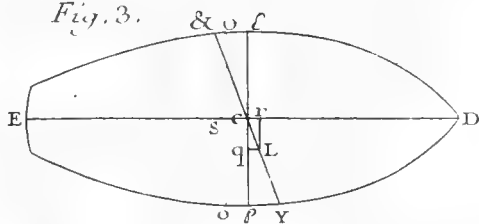


Fig. 4.

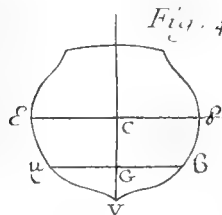


Fig. 5.

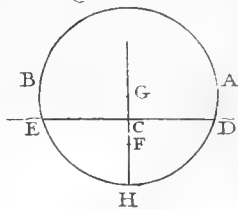


Fig. 6.

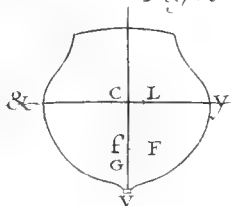


Fig. 7.

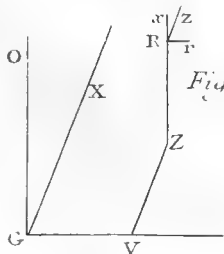
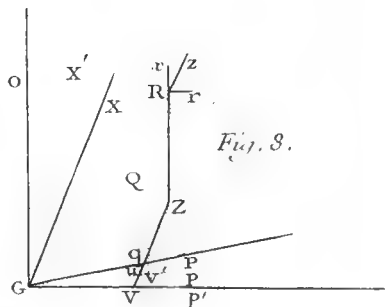


Fig. 8.



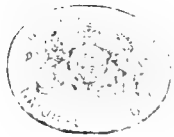


Fig. 9.

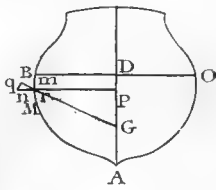


Fig. 10.

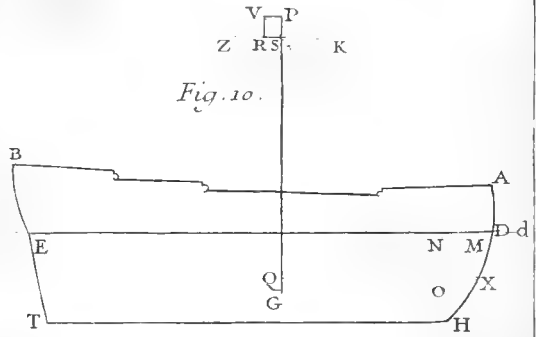


Fig. 11.

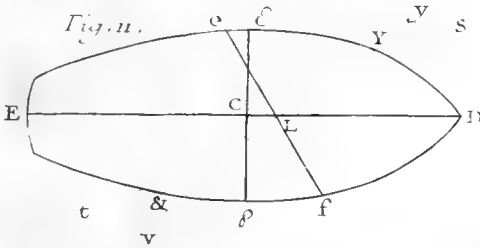


Fig. 12.

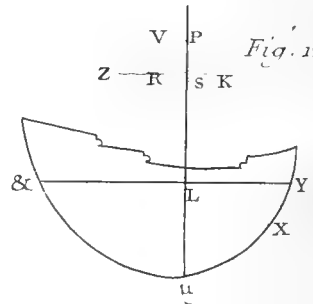


Fig. 13.

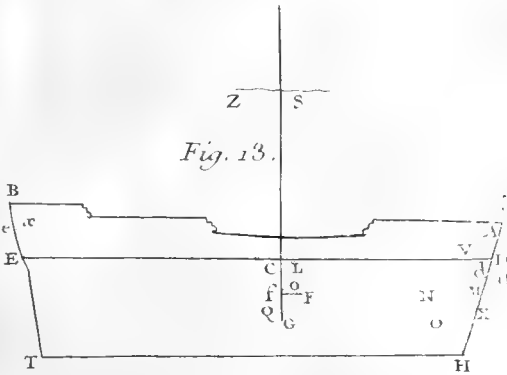


Fig. 14.



Fig. 15.

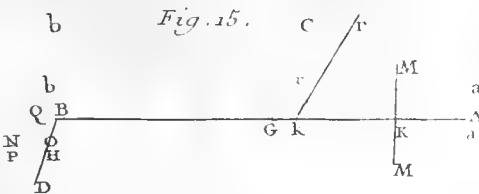
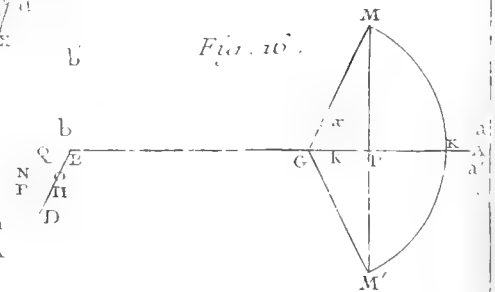


Fig. 16.





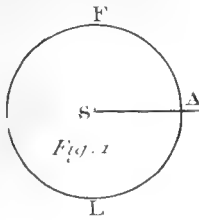


Fig. 1

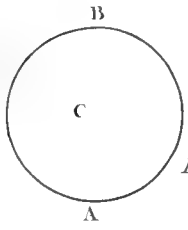


Fig. 3.

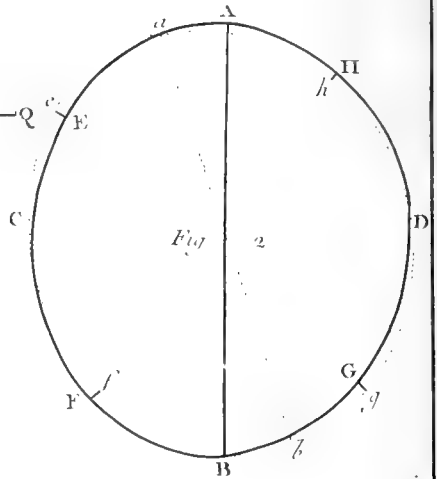


Fig. 2

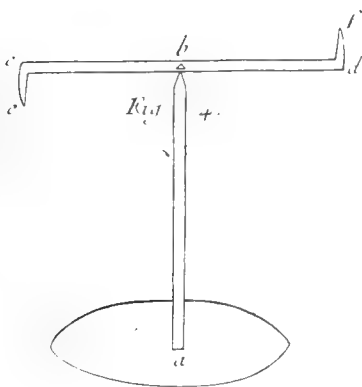


Fig. 4.

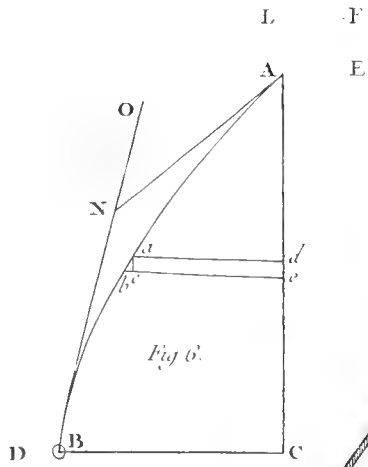


Fig. 6.

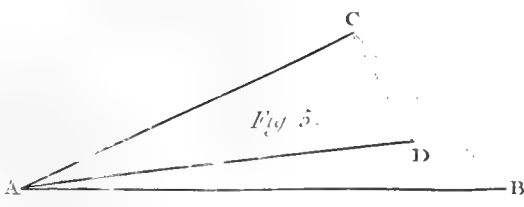


Fig. 5.

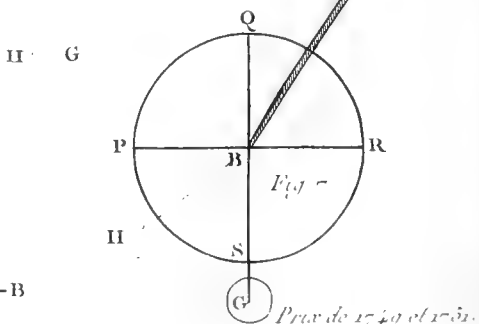


Fig. 7.

Paris de 1749 et 1751.













