Fuchs

REPERTORIUM

DER LITERARISCHEN ARBEITEN

AUS DEM GEBIETE DER

REINEN UND ANGEWANDTEN
MATHEMATIK

„ORIGINALBERICHTE DER VERFASSER“

GESAMMELT UND HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. LEO KOENIGSBERGER, und Dr. GUSTAV ZEUNER,
Prof. d. Mathematik a. d. Univ. z. Wien — Prof. d. Mechanik a. d. Polytechnikum z. Dresden

ERSTER BAND.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

Vorwort zum ersten Bande.

Indem die Unterzeichneten beim Erscheinen des ersten Bandes des Repertoriums nochmals auf den vor einem Jahre veröffentlichten Prospect und auf das dem ersten Hefte dieses Bandes beigegebene Vorwort verweisen, erlauben sich dieselben nur noch hinzuzufügen, dass Plan und Anlage des Unternehmens auch fernerhin beibehalten werden soll, so lange eine rege Theilnahme der Mathematiker, wie sie bis jetzt in erfreulichster Weise sich bekundet, eine Billigung des vorgesteckten Zieles und der bei der Gründung maassgebend gewesenen Motive erkennen lässt.

Wien-Dresden, am 15. Mai 1877.

Die Herausgeber.

L. Fuchs: Ueber die linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie.

(Borchardt's Journal Band 81 S. 97 sqq.)

1.

Es sei

$$(A) \qquad \frac{d^2u}{dz^2} + p_1 \frac{du}{dz} + p_0 u = 0$$

eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welcher eine Wurzel u der irreductiblen algebraischen Gleichung:

$$(1) \qquad A_m u^m + A_{m-1} u^{m-1} + \cdot \cdot + A_1 u + A_0 = 0\,,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, genügt, so genügen ihr die sämmtlichen Wurzeln derselben Gleichung (S. S. 100).

Besitzt die Gleichung (1) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient nicht für jedes z constant ist, so bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von Integralen, d. h. jedes Integral der Differenzialgleichung hat die Form $c_1 u_1 + c_2 u_2$, wo c_1, c_2 constant sind (s. die Abhandlung des Verfassers im 66. Bande des Borchardt'schen Journals No. 2*). Hieraus ergiebt sich, dass in diesem Falle die sämmtlichen Integrale der Differenzialgleichung algebraisch sind (S. S. 100).

Ist der Quotient je zweier Wurzeln der Gleichung (1) für jedes z constant, so hat sie die Form:

$$(1a) \qquad A_m u^m + A_0 = 0\,,$$

und die Differenzialgleichung wird durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt. — Dieser Satz wird (S. 100—101) aus einem allgemeineren auf S. 99 bewiesenen hergeleitet, welcher folgendermassen lautet: Besitzt die irreductible Gleichung (1) zwei Wurzeln u_1, u_2, deren Quotient eine rationale Function j von z, so ist j eine ganzzahlige Wurzel der Einheit.

---

*) Es sollen im Folgenden die Arbeiten des Verfassers im Borchardt'schen Journal einfacher durch blosse Angabe des Bandes, in welchem sie enthalten sind, bezeichnet werden.

Hiernach sind also, wenn die Differenzialgleichung (A) algebraische Integrale besitzt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Sie wird durch die Wurzel φ einer rationalen Funktion befriedigt. In diesem Falle ist es *möglich aber nicht nothwendig*, dass die Differenzialgleichung (A) noch ausserdem ein algebraisches Integral ψ besitzt, ohne dass $\frac{\psi}{\varphi}$ constant ist, dass also der Differenzialgleichung nur algebraische Integrale genügen. Tritt dieses ein, so hat die Differenzialgleichung ein Fundamentalsystem von Integralen, welches aus zwei verschiedenen Wurzeln rationaler Functionen besteht*).

2) Die Differenzialgleichung wird durch die Wurzeln einer irreductiblen algebraischen Gleichung befriedigt, von denen mindestens der Quotient zweier nicht für jedes z constant. In diesem Falle sind die sämmtlichen Integrale algebraisch.

Der mit 1) bezeichnete Fall ist leicht zu erledigen nach einem für lineare Differenzialgleichungen einer *beliebigen Ordnung* gültigen Verfahren. Sind nämlich $a_1, a_2, \cdot\cdot a_\varrho$ die sämmtlichen singulären Punkte einer solchen Differenzialgleichung, so hat eine ihr genügende Wurzel einer rationalen Funktion die Form:

$$u = (z - a_1)^{\alpha_1} (z - a_2)^{\alpha_2} \cdots (z - a_\varrho)^{\alpha_\varrho} g(z) \, ,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot \alpha_\varrho$ rationale Zahlen, $g(z)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet (S. 101). Es werden zunächst (S. 102) gewisse algebraische

---

*) Man erkennt dieses am einfachsten folgendermassen:

Nach (B. 66 No. 4) hat ψ in der Umgebung eines singulären Punktes a der Differenzialgleichung die Form

$$(1) \qquad \psi = c_1 \varphi + c_2 (z-a)^\lambda \chi(z) \, ,$$

wo c_1 und c_2 Constanten und $\chi(z)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darstellt, welche für $z=a$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass $\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte a mit einer Potenz von $z-a$ multiplicirt eindeutig wird. Da diese Function algebraisch und für alle übrigen endlichen Werthe von z eindeutig ist, so ist sie Wurzel einer rationalen Funktion. Bezeichnen wir dieselbe mit t, so ergiebt sich aus einem Satze von Abel (vergl. Liouville journal de l'école polytech. cah. 22 p. 131), dass

$$\frac{\psi}{\varphi} = \int t\,dz = \beta t + C \, ,$$

wo β eine rationale Funktion und C eine Constante bedeutet. Demnach ist

$$(2) \qquad \psi = \beta \varphi t + C\varphi \, .$$

Gleichungen rationale Wurzeln besitzen müssen, welche die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\varrho$ liefern. Alsdann hat ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zuzulassen, welche die Werthe der Coefficienten von $g(z)$ gewähren.

2.

Bei der Behandlung des Falles 2) voriger Num. ist es zweckmässig die Differenzialgleichung (A) durch die Substitution

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dz} \cdot y$$

in eine Differenzialgleichung

$$(B) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = Py$$

zu verwandeln. Der Untersuchung werden gewisse aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differenzialgleichung (B) y_1, y_2 gebildete Formen zu Grunde gelegt. Es sei nämlich η ein algebraisches Integral dieser Differen ialgleichung, welches einer irreductiblen Gleichung

$$(1) \qquad A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_0 = 0$$

mit rationalen Coefficienten genügt. Unter den Wurzeln derselben seien $\eta, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}$ so beschaffen, dass nicht der Quotient zweier derselben für jedes z constant ist, so wird ihre Gesammtheit (S. 111) als das *reducirte Wurzelsystem der Gleichung* (1) bezeichnet.

Das Product

$$\Pi = \eta \eta_1 \eta_2 \cdots, \eta_{n-1}$$

ist eine algebraische Funktion, welche für jeden Umlauf von z in sich selbst multiplicirt mit einer Einheitswurzel übergeht, d. h. Wurzel einer rationalen Funktion (S. 114). Andererseits ist η_i als Integral der Differenzialgleichung (B) der Form $c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2$, wenn c_{i1}, c_{i2} Constanten bezeichnen. Demnach ist $\Pi = f(y_1, y_2)$ eine aus y_1, y_2 gebildete Form n^{ten} Grades. — Während also in dem Falle, dass die Differenzialgleichung (B) durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird, eine lineare Form $c_1 y_1 + c_2 y_2$ gleich der Wurzel einer rationalen Function ist, so sind in dem allgemeineren Falle, so fern die Differenzialgleichung nur algebraische Integrale hat, Formen höheren Grades gleich Wurzeln rationaler Functionen. — Der niedrigste Grad einer Form dieser Art werde mit N bezeichnet (S. 116). Es wird nachgewiesen (S. S. 123 Satz II), dass *die Zahl*

N niemals grösser als zwölf, und weiter (S. S. 126), dass sie eine gerade Zahl sei.

Bezeichnen wir den Complex aller Formen, welche Wurzeln rationaler Functionen aequivalent sind, mit Φ, so zeichnen sich unter diesen diejenigen aus, welche nur die Glieder des reducirten Wurzelsystems einer irreductiblen Gleichung als Factoren enthalten, welcher ein bestimmtes Integral genügt, und zwar diese Glieder alle und jeden zur ersten Potenz. Dieselben werden *Primformen* genannt (S. 114). Jede Form des Complexes Φ lässt sich in ein Product von Primformen zerlegen (S. 115). Die Zahl N ist auch der niedrigste Grad einer Primform (S. 116).

3.

Nach Ermittelung der eben angegebenen oberen Grenze für die Zahl N werden im Wesentlichen zwei Methoden angewendet, um über die Frage zu entscheiden, ob die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale habe oder nicht.

I. Methode.

Eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Differenzialgleichung (B) y_1, y_2 gebildete Form μten Grades genügt einer linearen Differenzialgleichung $\mu + 1$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche in der Arbeit S. 129 als Differenzialgleichung (C) bezeichnet ist. Dieselbe ist übereinstimmend mit der linearen Differentialgleichung, welcher y^μ genügt, wo y ein beliebiges Integral der Differenzialgleichung (B) ist (S. 129—131).

Wird also die Differentialgleichung (B) nur durch algebraische Integrale befriedigt, so muss die Differenzialgleichung (C) für $\mu = N$, demnach, wenn nicht $N = 1$, d. h. schon der Differenzialgleichung (B) eine Wurzel einer rationalen Function genügt, *für einen der geradzahligen Werthe von μ die nicht die Zahl 12 übersteigen*, durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt werden (S. 131).

Erfolgt dieses für $\mu = 1$ oder für einen der angegebenen Zahlenwerthe von μ die grösser sind als 2, so hat auch *umgekehrt* die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale (S. 131). Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden: Ist eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form höheren als zweiten Grades und nicht Potenz einer Form zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differenzialgleichung (B) ein algebraisches Integral, ein Satz, welcher S. 127—128 bewiesen ist.

Hat aber die Differenzialgleichung (C) zuerst für $\mu = 2$ eine Wurzel φ einer rationalen Function zum Integral, so ist $\varphi(z)^2$ eine *rationale Funktion* und

$$\varphi(z)^2 \left[\left(\frac{d \log \varphi(z)}{dz} \right)^2 + 2 \frac{d^2 \log \varphi(z)}{dz^2} - 4P \right]$$

eine constante Zahl λ. Ist nun

$$\lambda \int \frac{dz}{\varphi(z)}$$

gleich dem Logarithmus einer algebraischen Funktion, so sind die Integrale der Differenzialgleichung (B) algebraisch (S. 131). Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf die S. 117—118 gemachten Entwickelungen.

Hiermit ist die Untersuchung der Frage, wie die Differenzialgleichung (B) beschaffen sein müsse, um algebraische Integrale zu besitzen, bis auf die Betrachtung von $\int \frac{dz}{\varphi(z)}$, die im letztangegebenen Falle nöthig wird, auf die in No. 1 dieser Notiz angeführte Aufgabe zurückgeführt, nämlich zu bestimmen, unter welchen Umständen eine lineare Differenzialgleichung durch die Wurzel einer rationalen Funktion befriedigt wird, d. h. nach S. 102 zu untersuchen, ob ein bestimmtes System linearer Gleichungen endliche Lösungen zulässt.

Es wird (S. 132—134) nachgewiesen, dass bei der Anwendung dieser Methode die Differenzialgleichung (C) nicht aufgestellt zu werden braucht, dass man vielmehr ein derselben gleichbedeutendes sich unmittelbar darbietendes System von Differenzialgleichungen der Rechnung zu Grunde legen kann.

II. Methode.

Diese stützt sich auf Entwickelungen, welche der Verfasser im Bande 75 des Borchardt'schen Journals S. 208 sqq. in Bezug auf die Coefficienten der linearen homogenen Relationen gegeben hat, durch welche die zu den verschiedenen singulären Punkten einer linearen Differenzialgleichung gehörigen Fundamentalsysteme derselben mit einander verbunden werden; Einwirkungen, durch welche diese Coefficienten aus den in den Coefficienten der Differenzialgleichung enthaltenen Constanten bestimmt werden.

Indem nun (S. 138—140) direct die Einwirkungen der verschiedenen Umläufe von z, als eben so vieler mit einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 ausgeführter linearer Substitutionen, auf eine aus y_1, y_2 gebildete Form untersucht werden, erhalten wir ein gewisses System von Gleichungen zwischen den Coefficienten jener linearen Relationen, den Coefficienten der Primform niedrigsten Grades, und den in P enthaltenen Constanten. Es lässt sich demnach bestimmen, wie diese Constanten beschaffen sein müssen, damit die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale besitze.

Der Verfasser bemerkt jedoch (S. 141), dass die erste Methode vor dieser den Vorzug besitze, die endgültige Entscheidung auf ein System *algebraischer linearer* Gleichungen zurückzuführen, während die zweite Methode die Untersuchung *transscendenter* Gleichungen erforderte. Indessen wo die Gesetze dieser transscendenten Funktionen sich einer ähnlichen Einfachheit erfreuen wie die Gauss'schen Π-Funktionen, könne diese Methode nicht ohne Vortheil angewendet werden.

Ist umgekehrt die Differenzialgleichung (B) *gegeben*, und soll entschieden werden, ob diese algebraische Integrale besitzt, so lässt die zweite Methode Vereinfachungen zu (S. S. 141—142), indem gelehrt wird eine Tabelle von ähnlicher Beschaffenheit aufzustellen, wie die auf S. 126, und die Relationen zwischen den zu den versehiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen auf dieselbe anzuwenden.

4.

Es ist in No. 2 dieser Notiz das Resultat erwähnt worden, dass die Zahl N nicht grösser als 12 sei. Dasselbe ist eine unmittelbare Folge von Entwickelungen, welche sich auf die Eigenschaften derjenigen algebraischen Funktionen, welche der Differenzialgleichung (B) genügen, und die Natur der binären Formen, welche aus einem Fundamentalsysteme y_1, y_2 derselben überhaupt beziehen (S. 102—126). Die hauptsächlichen Elemente dieser Entwickelungen sind die folgenden:

Sind die sämmtlichen Integrale der Differenzialgleichung (B) algebraisch, so ist jedes Integral derselben eine rationale Funktion von z und einem beliebigen anderen Integrale (S. 107).

Wenn ein algebraisches Integral y auf einem gewissen Wege in yj übergeht, wo j constant, so ist j eine primitive ganzzahlige $l$te Wurzel der Einheit, es ist l Divisor des Grades m der irreductiblen algebraischen Gleichung, welcher y genügt, und jedes Integral hat die Form

$$(\alpha' + \beta' c_1) y + \beta' y^{l-1} \psi(y^l),$$

worin α', β' Constanten, $\psi(y^l)$ eine ganze rationale Funktion von y^l vom Grade $\frac{m}{l} - 1$ mit in z rationalen Coefficienten bedeutet. Die Grösse c_1 ist ebenfalls constant, wenn $l > 2$ (S. 108).

Die Function

$$y^{l-1}\psi(y^l)$$

ist ebenfalls ein Integral der Differenzialgleichung (B) (S. 108—109).

Ist $F(y)$ ein Integral, welches nicht gleich y multiplicirt mit einer Constanten und

1) $$(\alpha) \quad F(y) = \beta' y^{l-1}\psi(y^l) \quad (\beta' \text{ constant}),$$

so sind die Glieder der Reihe

$$(\beta) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F(yj^{l-1}).$$

nur um constante Factoren verschieden.

2) Ist $F(y)$ nicht der Form (α) und l eine ungerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe (β) gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten.

3) Ist $F(y)$ nicht der Form (α) und l eine gerade Zahl, so ist kein Glied der Reihe

$$(\gamma) \quad F(y),\ F(yj),\ F(yj^2),\ \ldots,\ F\left(yj^{\frac{l}{2}-1}\right)$$

gleich einem anderen multiplicirt mit einer Constanten. Dagegen ist

$$F\left(yj^{\frac{l}{2}+i}\right) = - F(yj^i) \qquad (\text{S. } 110—111).$$

Der Grad m der irreductiblen algebraischen Gleicheng, welcher ein algebraisches Integral der Differenzialgleichung (B) genügt, ist für alle Integrale unverändert derselbe. Man kann daher mit Recht m den zur Differenzialgleichung (B) gehörigen Grad nennen (S. 111).

Ist $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen algebraischen Gleichung $m$ten Grades, welcher das Integral y genügt, und $j, j_1, j_2 \ldots,$ die Zahlen, mit welchen irgend welche der Glieder dieses Systems multiplicirt die anderen Wurzeln derselben Gleichung reproduciren, so sind diese Zahlen Einheitswurzeln. Sie seien resp. $l$te, $l_1$te, $l_2$te, $\ldots$, primitive Wurzeln der der Einheit, und unter den Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots, l$ die grösste, so ist l ein Multiplum von $l_1, l_2, \ldots,$ und es liefert das System:

$$y_i,\ y_ij,\ y_ij^2,\ \ldots,\ y_ij^{l-1}. (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (S. 111—113).

Die Zahl l wird der *Index* des reducirten Wurzelsystems genannt, es ist also das Product aus der Gliederzahl des reducirten Wurzelsystems in den Index desselben gleich dem Grade der Gleichung (S. 113).

Von jeder Form des in No. 2 dieser Notiz mit Φ bezeichneten Complexes gilt der Satz, dass sie alle solche Linearfactoren, welche zusammen das reducirte Wurzelsystem einer irreductiblen Gleichung bilden, gleich oft enthält (S. 115).

Gehört eine Form dem Complexe Φ an, so gehört auch jede Covariante derselben dem Complexe Φ an (S. 106).

Die Hesse'sche Covariante einer Primform niedrigsten Grades ist ebenfalls eine Primform (S. 116).

Die Linearfactoren einer Primform niedrigsten Grades bilden ein reducirtes Wurzelsystem mit kleinster Gliederanzahl N. Es wird der Index desselben mit L (S. 115) bezeichnet.

Es sei η ein Linearfactor einer Primform niedrigsten Grades $\Phi(y_1, y_2)$, ξ irgend ein Factor der Hesse'schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ derselben. Ist

$$(\delta) \quad \xi = \beta' \eta^{L-1} \psi(\eta^L),$$

wo β' constant und

$$\psi(\eta^L) = c_0 + c_1 \eta^L + \cdots + c_{(N-1)L} \cdot \eta^{(N-1)L},$$

so ist $N = 4$ (S. 119).

Ist kein ξ Factor der Form (δ), und $N > 2$, und setzt man $\lambda = \frac{L}{2}$ oder L, je nachdem L gerade oder ungerade, so ist λ Divisor von $2N - 4$ (S. 121) und $\Psi(y_1, y_2)$ der Form

$$(\varepsilon) \quad \Psi(y_1, y_2) = C[\beta_1^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} L_1^\lambda \cdot y_1^\lambda][\beta_2^\lambda y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \alpha_2^\lambda y_1^\lambda] \cdots [\beta^\lambda_{\lambda'} y_2^\lambda + (-1)^{\lambda-1} \cdot \alpha^\lambda_{\lambda'} y_1^\lambda]$$

$\lambda' = \frac{2N-4}{\lambda}$ (S. 122).

Die Hesse'sche Covariante $\Psi_1(y_1, y_2)$ der Hesse'schen Covariante $\Psi(y_1, y_2)$ hat die Form

$$\Psi_1(y_1, y_2) = (y_1 y_2)^{\lambda-2} \Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda),$$

wo $\Psi_1'(y_1^\lambda, y_2^\lambda)$ nur solche Potenzen von y_1, y_2 enthält, deren Exponenten Vielfache von λ sind (S. 122).

Die Zahl λ ist kleiner als 6 (S. 122).

Die Zahl N ist nicht grösser als 12 (S. 123).

Die Covarianten niedrigern als Nten Grades einer Primform niedrigsten Grades müssen identisch verschwinden (S. S. 98).

Mit Hülfe der Eigenschaften der Primformen niedrigsten Grades wird eine Tabelle für die möglichen Gestalten derselben hergeleitet (S. 123—126), aus welcher sich namentlich ergiebt, dass N von den die Zahl 12 nicht übersteigenden Werthen nur die geradzahligen annehmen kann.

5.

Zum Schluss noch einige besondere Resultate, welche zeigen, wie man in concreten Fällen aus den in der Arbeit entwickelten Principien einfache Mittel der Entscheidung gewinnen kann, ob die Differenzialgleichung (B) algebraische Integrale hat.

Sind die Integrale der Differenzialgleichung (B) sämmtlich algebraisch, so gehört sie zu der Klasse der Differenzialgleichungen (12) No. 4 der Arbeit in B. 66, und es müssen die Wurzeln der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nach (B. 66 No. 6 II) rationale Zahlen sein (s. S. 104 der vorl. Arbeit). Ist dieses erfüllt, und irgend einer der Nenner dieser auf ihre kleinste Benennung gebrachten Zahlen grösser als 10, so besitzt die Differenzialgleichung (B) kein algebraisches Integral, wenn nicht diese selber oder die Differenzialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt wird (S. S. 134—135).

Sind die Nenner derselben Zahlen sämmtlich von den Zahlen 1, 2, 4 verschieden, und wird die Differenzialgleichung (C) für $\mu = 2$ durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt, so genügt der Differenzialgleichung (B) entweder überhaupt kein algebraisches Integral oder die Wurzel einer rationalen Function (S. 135—136).

Sind sämmtliche Nenner gleich 2, ferner $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ die in algebraischem Sinne grössere der beiden Wurzeln $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$, $1 - \frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ der zum singulären Punkt a_i gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, endlich y_{i1} das zu $\frac{\mathfrak{z}_i}{\mathfrak{n}_i}$ als Exponent gehörige Integral (s. B. 66 No. 5), und setzt man voraus, dass für alle singulären Punkte der Coefficient von $(z - a_i)^{-\mathfrak{z}_i - 1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{y_{i1}^2}$ nach steigenden Potenzen von $z - a_i$ verschwindet, so wird die Differenzialgleichung (B) durch die Quadratwurzel einer rationalen Function befriedigt (S. S. 137—138).

Heidelberg. L. Fuchs.

F. Klein: Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. (Mathematische Annalen IX. p. 183—209.)

Die von Riemann in die Functionentheorie eingeführte Vorstellung, die Werthe einer complexen Variabeln nicht durch die Punkte der Ebene sondern durch die Punkte der Kugel zu repräsentiren, wird im gegenwärtigen Aufsatze dazu verwerthet, gewisse algebraische Formen zu studiren, zu denen namentlich diejenigen gehören, die, im Sinne dieser Repräsentation, durch die Ecken der regulären Körper vorgestellt werden. Der Verf. ist zu diesen Untersuchungen indirect, durch Probleme der projectiven Geometrie geführt worden. Er hatte sich mit der allgemeinen projectiven Massbestimmung beschäftigt (Ueber die sog. Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. IV, VI) und insbesondere die bez. Bewegungen betrachtet, vermöge deren die zugehörige fundamentale Fläche zweiten Grades in sich übergeführt wird. Wenn man diese Fläche insbesondere als eine Kugel voraussetzt, so zeigte sich, dass die genannten Transformationen der Fläche in sich mit denjenigen übereinstimmen, welche sie erfährt, wenn man die im Riemann'schen Sinne über die Kugel ausgebreitete complexe Variable beliebigen linearen Transformationen unterwirft.

So im Besitze eines neuen Mittels zur Untersuchung der linearen Transformationen einer einzelnen Variablen, stellte sich der Verf. die Aufgabe:

Alle endlichen Gruppen zu construiren, welche aus derartigen Transformationen zusammengesetzt sind,

und dann ferner:

Diejenigen algebraischen Formen, welche durch die Transformationen einer solchen Gruppe in sich übergeführt werden, soweit es durch blosse Anwendung der geometrischen Anschauung gelingen wollte, nach verschiedenen Richtungen zu untersuchen.

Es sei hier nur angegeben, dass die gesuchten Gruppen wesentlich durch diejenigen Bewegungen vorgestellt werden können, welche die regulären Körper in sich überführen. Die Ecken der letzteren geben daher ausgezeichnete Beispiele der in der zweiten Fragestellung verlangten Formen. — Von ihnen untersucht der Verf. insbesondere eine der zwölften Ordnung, welche durch die Ecken des regulären *Ikosaeder's* repräsentirt wird. Es gelingt ihm, das Formensystem, welches im Sinne der Invariantentheorie der betr. Form zugehört, durch wesentlich geometrische Mittel erschöpfend anzugeben. Er discutirt sodann den Affect der Auflösbarkeit der betr. Gleichung und giebt insbesondere Resolventen sechsten und fünften Grades an (die eine sehr einfache geometrische Bedeutung haben). Die dabei auftretenden Formeln stimmen merkwürdigerweise, wenn man von der Bedeutung der vorkommenden Grössen und der aus ihr hervorgehenden Ableitung der Formeln absieht, genau überein mit Formeln, welche von Kronecker, Hermite und bes. Brioschi bei Untersuchungen über die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades gegeben worden sind, so dass die letzteren in der hier gegebenen Theorie eine durchaus anschauliche und selbst elementare Interpretation finden.

Noch sei der an verschiedenen Stellen der vorliegenden Arbeit hervorgehobene und präcisirte Umstand genannt, dass die regulären Körper als Bilder algebraischer Formen, freilich bei anderen Fragestellungen aber unter zum Theil ähnlichen Gesichtspunkten, durch Schwarz betrachtet worden sind (Borch. Journ. Bd. 75).

Endlich mag einer einfachen Darstellung des Formensystems der binären cubischen und biquadratischen Form gedacht werden, welche in § 4 der vorliegenden Arbeit abgeleitet wird, nachdem sie der Verf. bereits früher (Programmschrift, Erlangen 1872) mitgetheilt hatte. Die Verschwindungspunkte einer binären cubischen Form werden durch drei aequidistante Punkte des Kugeläquators vorgestellt; die cubische Covariante ist dann durch die drei diametral gegenüberliegenden Punkte, die Hesse'sche Form durch Nord- und Südpol gegeben. Um die biquadratische Form zu repräsentiren, gehe man von der zugehörigen Covariante sechsten Grades aus. Sie kann vorgestellt werden durch die sechs Durchstosspunkte der Kugel mit einem concentrischen, rechtwinkligen Axenkreuze. Die vier Punkte der Grundform, sowie die vier Punkte der Hesse'schen Form erhalten mit Bezug auf dasselbe eine symmetrische Anordnung.

München. F. Klein.

L. Schläfli: Correzione alla Memoria intitolata; quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante? (Annali di matematica t. 6.)

Ein Briefwechsel mit Herrn Felix Klein in München über die unpaarige Natur der Ebene in Bezug auf den für geometrische Zwecke etwas veränderten Riemann'schen Begriff des Zusammenhanges machte mir klar, dass die unbegrenzte Ebene sich ähnlich verhält wie das mit einer einzigen Randcurve versehene endliche Stück einer Ebene, wenn man sich nicht entschliessen will, jeden Punkt der Ebene doppelt zu zählen, jenachdem er ihrer Oberseite oder ihrer Unterseite angehört. Ich sah nun ein, dass ich in einer in den Annali di Matematica veröffentlichten und im September 1872 geschriebenen Abhandlung über die Anzahl der Zusammenhangsarten, welche jeder der fünf Arten der allgemeinen Fläche dritten Grades besonders zukömmt, alle fünf Zusammenhangszahlen um 1 zu gering angesetzt hatte, und dass sie in 7, 5, 3, 1, — 1 zu verbessern sind. Wohl spät nach der gewonnenen Einsicht und nachdem Herr Klein schon längst seine Ansichten von der Sache veröffentlicht hatte, schrieb ich wegen dieser Verbesserung im September 1875 den oben angezeigten kleinen Artikel.

Bern. L. Schläfli.

P. Gordan: Das Formensystem binärer Formen. (Teubner 1875.)

Im 69. Bde. des Borchardt'schen Journals habe ich den Beweis gegeben, dass es für jede binäre Form eine endliche Anzahl von Covarianten und Invarianten giebt, durch welche sich alle übrigen als *ganze* Functionen ausdrücken lassen; oder, wie ich mich ausdrückte, dass das Formensystem einer binären Form endlich ist. Seit jener Zeit bemühte ich mich, die hierbei eingeschlagenen Methoden möglichst zu vereinfachen und den Zusammenhang zwischen allen Formenbildungen zu ergründen. Besonders war es mir darum zu thun, in dem gewonnenen System alle überflüssigen Formen auszuscheiden und das *kleinste* Formensystem zu erhalten. Dieser Plan ist mir nicht gelungen, ich erreichte vielmehr nur eine engere Umgrenzung meines Systems, indem ich eine Reihe von Formen durch andre ausdrückte, welche früher für irreducibel galten.

Den Satz über die Endlichkeit der Formensysteme kann ich für Formen mit mehr als 2 Variabeln *allgemein* nicht beweisen, doch gilt er für alle quadratischen Formen und ausserdem für die cubischen und biquadratischen ternären. — Alle meine Untersuchungen gehen im Wesentlichen von der Darstellung der Invarianten durch symbolische Producte aus. Clebsch hat nämlich (vergl. seine „Invarianten binärer Formen“ Teubner) den Beweis geliefert, dass alle Invarianten und Covarianten sich als Aggregate symbolischer Determinantenproducte darstellen lassen. Nach diesem

Satze bedurfte es nur einer Ausbildung der Rechnung mit Symbolen, um Beziehungen zwischen Invarianten und Covarianten aufzustellen. Von wesentlichem Einfluss hierauf waren die Untersuchungen von Formen mit mehreren Reihen Veränderlicher. Jede binäre Form mit 2 Reihen Veränderlicher lässt sich (vergl. Clebsch's Buch) in eine endliche Reihe entwickeln, deren Glieder Polaren von Formen mit einer Reihe Variabeln sind. Die Invarianten und Covarianten von Formen mit mehreren Reihen Veränderlicher sind daher simultane Invarianten und Covarianten von Formen mit einer Reihe Veränderlicher.

Eine binäre Form mit 3 Reihen Variabler lässt sich auf mehrere Weisen als Summe von Polaren darstellen; vergleicht man dieselben unter einander, so gelangt man zu Relationen zwischen symbolischen Producten, welche in andrer Weise nur schwer zu erhalten sind. Diess ist das Verfahren, welches ich fast immer angewandt habe, um zu prüfen, ob sich eine Form durch andre ausdrücken lasse. Eine volle Sicherheit gewährt es allerdings nicht, eine solche ist aber auch in nächster Zeit von keiner andern Methode zu erwarten.

Wie in früheren Arbeiten die Formen 5. und 6. Grades, so hatte ich hier besonders die vom 7. Grade im Auge; ich habe alle diejenigen Covarianten und Invarianten des Systems der Form:

$$f = a_x^7$$

angegeben, welche sich nicht durch Symbole der quadratischen Covariante:

$$(f, f)^6 = a_x b_x (ab)^6$$

ausdrücken lassen. Die übrigen entstehen dadurch, dass man die gefundenen Formen mit dieser Covariante in bekannter Weise combinirt. Ihre Anzahl ist sehr gross und es ist mir nicht gelungen, die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen aufzustellen.

Erlangen. P. Gordan.

M. Brioschi: Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences — 9 Novembre 1874 No. 19, 25 Janvier 1875. No. 4.)

In una delle lettere dirette da Jacobi a Legendre, pubblicate alcuni anni ora sono dal Sigr. Bertrand*), nelle quali quell'

*) Annales de l'École Normale Supérieure. T. VI. Année 1869. Borchardt, Journal für Mathematik. Band 80.

illustre geometra, con una semplicità e con una modestia ammirabili, confidava al fondatore della teoria delle funzioni elittiche le sue scoperte sulla trasformazione delle funzioni stesse, si leggono le seguenti parole:

„Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaine des idées qui „m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie „n'est pas susceptible de rigueur géomètrique. La chose étant „trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait „pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Mon„sieur, que j'ajoute le suivant."

„La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827) „c'était l'équation $T = V\frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}$: de là je réconnus que pour un „nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse „algébrique *déterminé*, le nombre des constantes arbitraires égalant „toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéter„minés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. „L'équation du quatrième dégré à laquelle me mena la première ayant „presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soup„çonnais quelque rapport. Par un tatonnement heureux, je rémar„quais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour „la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à Mr. Schu„macher, la méthode étant générale et verifiée par des exemples*)".

Nel primitivo concetto e nei risultati dapprima ottenuti la trasformazione delle funzioni elittiche per quindi considerata come un problema di analisi algebrica. Anche Abel nella sua memoria — *Solution d'un problème générale concernant la transformation des fonctions elliptiques* — essendosi posto il problema „Trouver tous „les cas possibles dans lesquels on pourra satisfaire à l'équation „differentielle:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)\,(1-e_1{}^2y^2)}} = \pm\, a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)\,(1-e^2x^2)}}$$

„en mettant pour y une fonction algébrique de x rationnelle ou „irrationelle" aggiunge: „La méthode qui s'offre d'abord pour ré„soudre le problème dans le cas où y est rationelle est celle des „coefficients indéterminés; or on serait bientôt fatigué à cause de „l'extrème complication des équations à satisfaire**)".

---

*) Lettera 3. porta la data di Koenigsberg — 12 Aprile 1828.

**) Abel: Oeuvres complètes. T. 1. pag. 253.

Sebbene però egli non ricorra al metodo dei coefficienti indeterminati, la via da lui addottata nel S. 3. del suo — *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques**) — allo scopo di stabilire la „Propriété générale de la fonction rationnelle $y = \psi(x)$ qui satisfait à une équation de la forme:

$$\frac{dy}{\Delta'(y)} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x)} \text{“}$$

essendo basata sulla considerazione di una proprietà delle radici della equazione $y = \psi(x)$, può dirsi appartenga ancora all' analisi algebrica.

Eisenstein ritornava due volte sull' argomento nelle sue — *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen* — cioè al capitolo III. — *Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln* — ed al capitolo V. — *Ueber die Differenzialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen***) — applicando in conclusione tanto nell'uno che nell'altro caso il metodo dei coefficienti indeterminati; limitandosi però in questi lavori come in altri ad esporre il concetto piattosto che a svilupparlo ed a renderlo fecondo.

Lo scopo delle due Note la una presentata all' Accademia delle scienze col titolo — *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques* — era appunto quello di mostrare come con piccola difficoltà si possano determinare le formole generali di trasformazione pel caso di n numero primo per mezzo di sole considerazioni di analisi algebrica. — Jo aveva già seguando la stessa via pubblicate nell' anno 1864***) alcune formole per la moltiplicazione le quali conducono a quelle trovate in altro modo dal Sigr. Kiepert nella sua memoria — *Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Funktionen*†), — ed aveva anche dimostrato l'uso delle medesime in alcuni problemi geometrici.

Nelle ricerche più recenti ho addottato come forma canonica dell' integrale elittico la:

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

*) Abel: Oeuvres complètes. T. 1. pag. 372.

**) Eisenstein: Mathematische Abhandlungen, Seite 159, 207. — Enneper: Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte S. 382.

***) Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 7. Novembre 1864. No. 19.

†) Borchardt, Journal für Mathematik. Band 76. 1873. Seite 21.

nella quale g_2, g_3 sono gli invarianti di una forma binaria biquadratica $f(x_1, x_2)$. È noto che il Sigr. Hermite*) giunse a quella forma trasformando l'integrale:

$$\frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\sqrt{f(x_1, x_2)}}$$

per mezzo della:

$$xf(x_1, x_2) + h(x_1, x_2) = 0$$

essendo h l'hessiano della forma f.

Dalla (1) ponendo $x = -\frac{1}{2}z$, $g_2 = 3s$, $g_3 = -t$ si ottiene, facendo astrazione da un coefficiente costante, l'altra forma canonica dell' integrale elittico:

$$\frac{dz}{\sqrt{2t + 3sz - z^3}}$$

che incontrasi nelle ricerche geometriche sulle curve piane del terzo ordine.

Supponendo:

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - G_2y - G_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

le proprietà della funzione razionale $y = \psi(x)$ che soddisfa alla equazione superiore sono le seguente:

1. Essendo n numero primo, si ha:

$$y = \frac{U}{T^2}$$

nella quale U è un polinomio del grado n, e T un polinomio del grado $\frac{n-1}{2} = \nu$.

2. Ponendo $\varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$, e:

$$T = x^\nu + a_1x^{\nu-1} + a_2x^{\nu-2} + \ldots + a_\nu$$

si ottiene per U il valore seguente:

$$(2)\quad U = \varphi(x)(T'^2 - TT'') - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)TT' + [(2\nu+1)x + 2a_1]T^2$$

essendo

$$T' = \frac{dT}{dx}, \quad T'' = \frac{d^2T}{dx^2}.$$

3. Posto:

$$U = x^n + \alpha_1x^{n-1} + \alpha_2x^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

e:

$$(3)\quad V = \varphi(x)(U'^2 - UU'') - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)UU' + [(2n+1)x + 2\alpha_1]U^2$$

---

*) Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Journal de Crelle. T. 52.

si ha la equazione identica:

$$V - xU^2 + \tfrac{1}{2}G_2 UT^2 + G_3 T^4 = 0 \tag{4}$$

dalla quale si deducono i valori delle indeterminate $a_1, a_2, \ldots a_\nu$, G_2, G_3. Le calcolazioni occorenti sono della più grande facilità vista la relazione di forma esistente fra i polinomj U, V. Per $n = 3$ si hanno le relazioni modulari:

$$a_1^4 - \frac{1}{2} g_2 a_1^2 + g_3 a_1 - \frac{1}{48} g_2^2 = 0,$$

$$G_2 = 120 a_1^2 - 9 g_2; \qquad G_3 = -280 a_1^3 + 42 g_2 a_1 - 27 g_3,$$

per $n = 5$:

$$a_1^6 - 5 g_2 a_1^4 + 40 g_3 a_1^3 - 5 g_2^2 a_1^2 + 8 g_2 g_3 a_1 - 5 g_3^2 = 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{6a_1}(a_1^3 + \tfrac{1}{2} g_2 a_1 - g_3),$$

$$G_2 = \frac{1}{a_1}(80 a_1^3 - 39 g_2 a_1 + 40 g_3); \quad G_3 = -140 a_1^3 + 112 g_2 a_1 - 195 g_3.$$

Queste formole speciali furono già calcolate dal Sgr. Müller nella sua dissertazione inaugurale — *De transformatione functionum ellipticarum* — (1867) giovandosi delle proprietà delle funzioni periodiche.

Dimostrasi facilmente come le relazioni (2), (3), (4) risolvano il problema qui considerato. Posto infatti

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \Phi(y) = 4y^3 - G_2 y - G_3$$

si ha:

$$\log y' = \tfrac{1}{2}\log \Phi(y) - \tfrac{1}{2}\log \varphi(x)$$

per la quale:

$$y''\varphi(x) + \tfrac{1}{2} y'\varphi'(x) = \tfrac{1}{2}\Phi'(y)$$

e da questa;

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\frac{y'}{y}\varphi'(x) = 2y + \frac{1}{2y}G_2 + \frac{1}{y^2}G_3.$$

Ma se $y = \dfrac{U}{T^2}$ sostituendo si ha:

$$\varphi(x)\left[\left(\frac{U'}{U}\right)' - 2\left(\frac{T'}{T}\right)'\right] + \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\left[\frac{U'}{U} - 2\frac{T'}{T}\right]$$
$$= 2\frac{U}{T^2} + \tfrac{1}{2}G_2\frac{T^2}{U} + G_3\frac{T^4}{U^2}$$

la quale, osservando essere $\alpha_1 = 2a_1$, riducesi, per le relazioni (2) (3), alla equazione identica (4).

Milano. M. Brioschi.

a negative colour (sable to gules or argent to azure), this is $-Q$. The sequence will contain the P and Q intermingled in any manner, but the signs will always be $+-$ alternately; for $+(P \text{ or } Q)$, denoting the passage into a positive colour, must always be immediately succeded by $-(P \text{ or } Q)$, denoting the passage into a negative colour. Whence, knowing the sequence independently of the signs, we have only to prefix to the first letter the sign $+$ or $-$ as the case may be, and the sequence is then completely determined.

Passing to a $\pm$ intercalation, observe that in omitting any even number of P's or Q's, the omitted signs are always $+-+-\cdots$ or else $-+-+\cdots$, viz. the omitted signs begin with one sign and end with the opposite sign. Hence the signs being in the first instance alternate, they will after any omission remain alternate; and the letters being also alternate, the intercalation can contain only $+P$ and $-Q$ or else $-P$ and $+Q$. Hence in the case of a circuit the intercalation is either $(+P-Q)$, say this is a *positive* circuit, or else $(-P+Q)$, say this is a *negative* circuit. There is of course the *neutral* circuit $(PQ)_0$, for which the intercalation vanishes.

Consider a circuit not containing within it any root; as a simple exemple let the circuit lie wholly in one colour, or wholly in two adjacent colours, say sable and gules: in the former case the sequence, and therefore also the intercalation, vanishes: in the latter case the sequence is $+Q-Q$, and therefore the intercalation vanishes: viz. in either case the intercalation is $(PQ)_0$.

Consider next a circuit containing within it one right-handed root; for instance let the circuit lie wholly in the four regions adjacent to this root, cutting the two curves each twice; the sequence and therefore also the intercalation is $+P-Q+P-Q$; viz. this is a positive circuit $(+P-Q)_1$, where the subscript number is the half index, or half of the number of P's or of Q's. Similarly if a circuit contains within it one left-handed root, for instance if the circuit lies wholly in the four regions adjacent to this root, cutting the two curves each twice, the sequence and therefore also the intercalation is $-P+Q-P+Q$, viz. this is a negative circuit $(-P+Q)_1$: and the consideration of a few more particular cases leads easily to the general and fundamental theorem:

A circuit is positive $(+P-Q)_\delta$ *or negative* $(-P+Q)_\delta$ *according as it contains within it more right-handed or more left-handed* (availing myself of a notion due to Prof. Sylvester) I give a geometrical form to the theoretic rule, making it depend on the „intercalation“ of the intersections the two curves with the circuit: I also complete the Sturmian process in regard to the sides of the rectangle; the memoir contains further researches in regard to the curves in the case of the particular theorem; or say as to the rhizic curves $P=0$, $Q=0$.

The general theory may be explained as follows:

Consider in a plane two curves $P=0$, $Q=0$ (P and Q each a rational and integral function of x, y), which to fix the ideas I call the *red* curve and the *blue* curve respectively (it is assumed throughoud that the two curves have no points, or at least no real points, of multiple intersection; i. e. they nowhere touch each other, and neither curve passes trough a multiple point of the other curve), the curve $P=0$ divides the plane into two sets of regions, say a positive set for each of which P is positive, and a negative set for each of which P is negative: it is of course immaterial whiche set is positive and which negative, since writing $-P$ for P the two sets would be interchanged: but taking P to be given, the two sets are distinguished as above. And we may imagine the negative regions to be coloured red, the positive ones being left uncoloured, or say they are white. Similarly the curve $Q=0$ divides the plane into two sets of regions, the negative regions being coloured blue, and the positive ones being left uncoloured, or say they are white. Taking account of the twofold division, and considering the coincidence of red and blue as producing black, there will be four sets of regions, which for convenience may be spoken of as *sable, gules, argent, azure*: viz. in the figures we have

$\overbrace{P \quad Q}$

$-\ -$ sable, shown by cross lines
$-\ +$ gules, „ „ vertical lines
$+\ +$ argent, left white
$+\ -$ azure, shown by horizontal lines,

sable and argent ($-\ -$ and $+\ +$) being thus positive colours, and gules and azure ($-\ +$ and $+\ -$) negative colours.

Consider any point of intersection of the two curves. There will be about this point four regions, sable and argent being opposite to each other, as also gules and azure; whence selecting an order

sable, gules, argent, azure;

$Q = 0$: or, what is the same thing, the number of the (real or imaginary) roots of the equation $F(z) = 0$, viz. we thus determine the number of roots within a given circuit.

Cambridge. A. Cayley.

A. Mayer: Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. (Math. Annalen VIII. p. 304—312.)

Nach der Definition von Lie bilden die $2n + 1$ Gleichungen:

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation, so oft $Z, X_1, \ldots X_n, P_1, \ldots P_n$ solche Functionen der $2n + 1$ unabhängigen Variabeln $z, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$ sind, dass identisch

$$(1) \qquad dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \varrho \left(dz - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx_i \right)$$

wird. Aus dieser Forderung ergibt sich eine Reihe charakteristischer Relationen für die Functionen Z, X, P, die von Lie gefunden wurden, indem er die in der Bedingung (1) enthaltene Aufgabe als einen speciellen Fall des Pfaff'schen Problems auffasste und auf dieselbe die Resultate anwandte, die Clebsch für das letztere Problem gewonnen hat. Die vorliegende Note lehrt, wie man auch ganz direkt aus der Formel (1) die in Rede stehenden Relationen ableiten kann.

Bezeichnet man durch das Zeichen

$$\frac{d}{dx_k}$$

die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial}{\partial z}$$

und setzt:

$$[\Phi\, \Psi] = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \frac{d \Psi}{d x_h} - \frac{d \Phi}{d x_h} \frac{\partial \Psi}{\partial p_h} \right),$$

so sind diese, zur Erfüllung der Forderung (1) nothwendigen und hinreichenden Relationen die folgenden:

$$[Z X_k] = [X_i X_k] = [X_k P_i] = [P_i P_k] = 0,$$
$$[P_k X_k] = \varrho, \quad [Z P_k] = -\varrho P_k$$

und es zeigt sich, dass das Problem (1) nur noch von der Auflösung endlicher linearer Gleichungen abhängt, so oft man $n + 1$

omission there again occur an even numbre of the same letter these are omitted: and so on. The intercalation contains therefore only the letters P and Q alternately: viz. in the case of an unclosed trajectory the intercalation may contain an even number of letters beginning with the one and ending with the other letter, and so containing the same number of each letter — or it may contain an odd number of letters, beginning and ending with the same letter, and so containing one more of this than of the other letter; say the intercalation is PQ or QP, or else PQP or QPQ. The intercalation may vanish altogether, thus is the sequence were $QPPQ$ this would be the case.

In the case of a circuit the intercalation cannot begin and end with the same letter, for these, as contiguous letters, would be omitted; and since any letter thereof may be regarded as the commencement it is PQ or QP indifferently. A little consideration will show that the whole number of letters must be evenly even, or, what is the same thing, the number of each letter must be even. Thus imagine the circuit beginning in sable, and let the intercalation begin with PQ; viz. P we pass from sable to azure, and Q we pass from azure to argent; in order to get back into sable we must either return the same way (Q argent to azure, P azure to sable), but then the sequence is $PQQP$, and the intercalation vanishes; here the number of letters is 0, an evenly even number; or else we must complete the cycle of colours P argent to gules, Q gules to sable; and the sequence and therefore also the intercalation then is $PQPQ$, where the number of letters is 4, an evenly even number.

In the case of any trajectory whatever, the half number of letters in the intercalation is termed the „index“, viz. this is either an integer or an integer $+\frac{1}{2}$. But in the case of a circuit the index is an even integer, and the half-index is therefore an integer. The index may of course be $= 0$.

But we require a further distinction; instead of a P- and Q-sequence we have to consider a $\pm P$- and Q-sequence. To explain this observe that a passage over the red curve may be from a negative to a positive colour (azure to sable or gules to argent), this is $+P$, or from a positive to a negative colour (sable to azure or argent to gules), this is $-P$. And so the passage over the blue curve may be from a negative to a positive colour (gules to sable or azure to argent), this is $+Q$, or else from a positive to

A. Cayley: On the geometrical representation of Cauchy's theorems of Root-limitation. (From the Cambridge Philosophical Transactions, Vol. XII, Part. II.)

There is contained in Cauchy's Memoir „calcul des indices des fonctions", journ. de l'école polytech. t. XV (1837) a general theorem, which, though including a well-known theorem in regard to the imaginary roots of a numerical equation, seems itself to have been almost lost sight of. In the general theorem (say Cauchy's two-curve theorem) we have in a plane two curves $P = 0$, $Q = 0$, and the real intersections of these two curves, or say the „roots", are divided into two sets according as the Jacobian

$$d_x P \,.\, d_y Q - d_x Q \,.\, d_y P$$

is positive or negative, say these are the Jacobian-positive and the Jacobian-negative roots: and the question is to determine for the roots within a given contour or circuit, the difference of the numbers of the roots belonging to the two sets respectively.

In the particular theorem (say Cauchy's rhizic theorem) P and Q are the real part and the coefficient of i in the imaginary part of a function of $x + iy$ with, in general, imaginary coefficients (or, what is the same thing, we have

$$P + iQ = f(x + iy) + i\varphi(x + iy),$$

where f, φ are real functions of $x + iy$): the roots of necessity are of the same set: and the question is to determine the number of roots within a given circuit.

In each case the required number is theoretically given by the same rule, viz., considering the fraction $\frac{P}{Q}$, it is the excess of the number of times that the fraction changes from $+$ to $-$ over the number of times that it changes from $-$ to $+$, as the point (x, y) travels round the circuit, attending only to the changes which take place on a passage trough a point for which P is $= 0$.

In the case where the circuit is a polygon, and most easily when it is a rectangle the sides of which are parallel to the two axes respectively, the excess in question can be actually determined by means of an application of Sturm's theorem successively to each side of the polygon, or rectangle.

In the present memoir I reproduce the whole theory, presenting it under a completely geometrical form, viz. I establish between the two sets of roots the distinction of *right-* and *left-*handed: and *roots; and in either case the half-index δ is equal to the excess of the number of one over that of the other set of roots. If the circuit is neutral $(PQ)_0$, then there are within it as many left-handed as right-handed roots.*

Consider now $F(z) = (z, 1)^n$ a rational and integral function of z, of the order n with in general imaginary (complex) coefficients, or, what is the same thing, let $F(z) = f(z) + i\varphi(z)$, where the functions f, φ are real*). Writing herein $z = x + iy$ let P, Q be the real part and the coefficient of the imaginary part in the function $F(x + iy)$: or, what is the same thing, assume

$$P + iQ = f(x + iy) + i\varphi(x + iy),$$

then it is clear that to any root $\alpha + i\beta$ (real or imaginary) of the equation $F(z) = 0$, there corresponds a real intersection, or root, $x = \alpha$, $y = \beta$, of the curves $P = 0$, $Q = 0$. The functions P, Q as thus serving for the determination of the roots of the equation $F(z) = 0$ are termed „rhizic functions" and similarly the curves $P = 0$, $Q = 0$ are „rhizic curves". The assumed equation shows at once that we have

$$d_y(P + iQ) = i d_x(P + iQ),$$

or, what is the same thing,

$$d_y P = - d_x Q, \quad d_x P = d_y Q.$$

And we hence see that

$$\frac{d(P, Q)}{d(x, y)} = (d_x P)^2 + (d_y P)^2, \text{ or } (d_x Q)^2 + (d_y Q)^2$$

is positiv: viz. that the roots $P = 0$, $Q = 0$ are all of them right-handed (the essential thing is that they are same-handed; for by reversing the signs of P and Q they might be made left-handed: but it is convenient to take them as right-handed): hence the theorem — which in the general case, P and Q arbitrary functions, serves to determine the difference of the number of the right and left-handed roots — in the particular case, where P and Q are rhizic functions serves to determine the number of intersections of the curves $P = 0$,

*) It is assummed that the equation $F(z) = 0$ has no equal roots: this being so, the curves $P = 0$, $Q = 0$ will have no point of multiple intersection; which accords with the assumption made in the general case of two arbitrary curves.

if to have the colours in this order we have to go about the point, or root, right-handedly, the root is right-handed: but if left-handedly, then the root is left-handed: or, what is more convenient, going always right-handedly, then, if the order of the colours is

sable, gules, argent, azure,

the root is right-handed; but if the order is

sable, azure, argent, gules,

the root is left-handed.

The distinction of rigth- and left-handed corresponds to the sign of the Jacobian

$$\frac{d\,(P,\,Q)}{d\,(x,\,y)} = (d_x P \,.\, d_y Q - d_x Q \,.\, d_y P),$$

and we may (reversing if necessary the original sign of one of the functions) assume that for a right-handed root the Jacobian is positive, for a left-handed one, negative.

I consider a trajectory which may be either an unclosed curve not cutting itself or else a circuit, viz. this is a closed curve not cutting itself. A circuit is considered as described right-handedly: an unclosed trajectory is considered as described according to a currency always determinate *pro hâc vice*: viz. one extremity is selected as the beginning and the other as the end of the trajectory: but the currency may if necessary or convenient be reversed: thus if an unclosed trajectory forms part of a circuit the currency is thereby determined: but the same unclosed trajectory may form part of two opposite circuits and as such may have to be taken with opposite currencies. It is assumed that a trajectory does not pass through any intersection of the P and Q curves.

A trajectory has its P- and Q-sequence, viz. considering in order its intersections with the two curves, we write down a P for each intersection with the red curve and a Q for each intersection with the blue curve, thus obtaining an intermingled series of P's and Q's, which is the sequence in question. In the case of a circuit, the sequence is considered as a circuit, viz. the first and last terms are considered as contiguous, and it is immaterial at what point the sequence commences. The sequence will of course vanish if the trajectory does not meet either of the curves.

A P- and Q-sequence gives rise to an „intercalation", viz. if in the sequence there occur together any even number of the same letter these are omitted (whence also any odd number of the same letter is reduced to the letter taken once): and if by reason of an von einander unabhängige Functionen $Z, X_1, \dots X_n$ gefunden hat, die paarweise den Gleichungen

$$[ZX_k] = 0, \quad [X_i X_k] = 0$$

genügen.

Verbindet man diese Resultate mit der Cauchy'schen Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung, welche, wenn man jetzt $p_1, \dots p_n$ als die Differenzialquotienten der unbekannten Function z nach $x_1, \dots x_n$ ansieht, die vollständige Integration der gegebenen Gleichung

$$X_1 = \text{const.}$$

zurückführt auf die Ermittelung aller Lösungen F der linearen Differenzialgleichung

$$[X_1 F] = 0,$$

so erhält man sofort den wichtigen Satz von Lie, dass es zur vollständigen Integration einer gegebenen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$H_0(z, x_1, \dots x_n, p_1, \dots p_n) = \text{const.}$$

nur nöthig ist, irgend n von einander wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \dots H_n$ zu finden, welche die $\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungen

$$(2) \qquad [H_i H_k] = 0$$

identisch erfüllen, ein Satz, der die Jacobi'sche Methode zur Integration der Gleichung $H_0 =$ const. von der sehr störenden Beschränkung befreit, dass die Functionen $H_0, H_1, \dots H_n$ gerade in Bezug auf $z, p_1, \dots p_n$ von einander unabhängig sein mussten.

Bedenkt man andrerseits, dass umgekehrt aus einer vollständigen Lösung der partiellen Differenzialgleichung $H_0 =$ const. sich immer n von einander wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \dots H_n$ ableiten lassen, die allen Bedingungen (2) genügen, so gelangt man zu einer allgemeineren Form des Fundamentaltheorems der Jacobi-Hamilton'schen Theorie, wonach die Auffindung aller Lösungen F der Gleichung

$$[H_0 F] = 0$$

zurückgeführt werden kann auf die vollständige Integration der partiellen Differenzialgleichung

$$H_0 = \text{const.}$$

Genügen auch diese Sätze schon, um die Wichtigkeit der Theorie der Berührungstransformationen ausser Zweifel zu stellen, so tritt doch die wahre Bedeutung, die diese Theorie für die partiellen

$$(5) \qquad \begin{aligned} &x_k = \varphi_k(x_{q+1}\dots x_n) \qquad (k = 1\dots q) \\ &p_i - h_i(x_{q+1}\dots x_n p_1 \dots p_q p_{q'} \dots p_n) \qquad (i = q\dots q') \end{aligned}$$

wo

$$(x_k - \varphi_k,\ p_i - h_i) = 0, \qquad (p_i - h_i,\ p_r - h_r) = 0.$$

Es wird bewiesen, dass der Ausdruck

$$p_1 \partial\varphi_1 + \cdots + p_q d\varphi_q + h_{q+1} dx_{q+1} + \cdots + h_{q'} dx_{q'} + p_{q'+1} dx_{q'+1} + \cdots + p_n dx_n$$

sich auf eine $(n - q')$ gliedrige Form

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q'} dF_{n-q'}$$

bringen lässt; die Integration des Gleichungssystems (5) wird auf diejenige eines Systems der Form (4) zurückgeführt.

Sind nun r ganz beliebige Gleichungen

$$F_1 = 0, \dots \quad F_r = 0$$

vorgelegt, so beweist man, dass jedes Gleichungssystem

$$F_1 = 0 \dots F_r = 0 \quad \Phi_{r+1} = 0 \dots \Phi_n = 0,$$

das den Ausdruck $\Sigma p dx$ identisch verschwinden lässt, sämmtliche Gleichungen der Form

$$(F_i F_k) = 0$$

enthält. Durch Anwendung dieses Satzes gelingt es, das allgemeine Problem 2 durch ausführbare Operationen auf den speciellen Fall zu reduciren, dass die vorgelegten Gleichungen die Form (5) oder noch einfacher, die Form (4) besitzen, und da dieses specielle Problem schon erledigt ist, so ist hiermit eine allgemeine Behandlungsweise des allgemeinen Problems 2 gefunden.

Die entwickelte Integrationsmethode verlangt eine grosse Anzahl Integrations-Operationen. Einfacher sind die folgenden Methoden.

Handelt es sich darum $p_n - h_n = 0$ zu integriren, das heisst

$$V = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + h_n dx_n$$

auf eine $(n - 1)$ gliedrige Form

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-1} dF_{n-1}$$

zu bringen, so weiss man, dass die Grössen F_i und $\frac{\Phi_i}{\Phi_{n-1}}$ Lösungen von

$$(p_n - h_n,\ U) = 0, \quad \sum_k p_k \frac{dU}{dp_k} = 0$$

sind. Bezeichnet man daher mit

$$\omega_1 \dots \omega_{2n-3}$$

ein beliebiges System Lösungen dieser Gleichungen, so kann V immer die Form

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{k=2n-3} \Omega_k(\omega_1 \ldots \omega_{2n-3})\, d\omega_k$$

erhalten. Wählt man insbesondere die Grössen

$$\omega_1 \ldots \omega_{n-1} \quad \omega_n \ldots \omega_{2n-3}$$

derart, dass sie durch die Substitution $x_n = \alpha =$ const. die Werthe

$$x_1 \cdots x_{n-1} \frac{p_1}{p_{n-1}} \cdots \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$$

annehmen, so ist

$$V = \sigma\,(\omega_n d\omega_1 + \omega_{n+1} d\omega_2 + \omega_{n+2} d\omega_3 + \cdots + \omega_{2n-3} d\omega_{n-2} + d\omega_{n-1}),$$

und also bestimmen die Gleichungen

$$\omega_1 = a_1 \ldots \omega_{n-1} = a_{n-1}$$

eine vollständige Lösung von $p_n - h_n = 0$. Dies ist die *Cauchy'sche Methode* in ihrer wahren Allgemeinheit.

Soll man andererseits das System

$$p_1 - h_1 = 0 \ldots p_q - h_q = 0, \quad \text{wo} \quad (p_i - h_i,\ p_k - h_k) = 0,$$

integriren, oder anders ausgesprochen, soll man den Ausdruck

$$V = h_1 dx_1 + \cdots + h_q dx_q + p_{q+1}\, dx_{q+1} + \cdots + p_n dx_n$$

auf eine $(n-q)$ gliedrige Form

$$\Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

bringen, so sind F_i und $\frac{\Phi_i}{\Phi_{n-q}}$ ein System Lösungen von

$$(p_n - h_n, U) = 0 \ldots (p_{n-q+1} - h_{n-q+1}, U) = 0, \sum_k p_k \frac{dU}{dp_k} = 0:$$

Bezeichnet man daher überhaupt mit $\omega_1 \ldots \omega_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen dieser Gleichungen, so besteht immer eine Relation der Form

$$V = \varrho \sum_{k=1}^{k=2n-2q-1} \Omega_k(\omega_1 \ldots \omega_{2n-2q-1})\, d\omega_k.$$

Wählt man insbesondere die Grössen

$$\omega_1 \ldots \omega_{n-q}\, \omega_{n-q+1} \ldots \omega_{2n-2q-1}$$

derart, dass sie durch die Substitution $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_q = \alpha_q$ die Werthe

$$x_1 \cdots x_{n-q} \frac{p_1}{p_{n-q}} \cdots \frac{p_{n-q-1}}{p_{n-q}}$$

Problem kommt darauf hinaus, alle Schaaren von Flächenelementen zu finden, in denen jedes Element mit allen benachbarten Elementen derselben Schaar vereinigt liegt. Und der gefundene Satz lehrt, dass die Elemente, die eine Fläche bedecken, oder eine Curve umhüllen oder endlich durch einen Punkt gehen, die allgemeinste Schaar der verlangten Eigenschaft bilden. — Ist n eine beliebige Zahl, so liesse sich eine entsprechende Interpretation entwickeln, indem man nämlich die Betrachtungen der modernen Mannigfaltigkeitslehre benutzte. In diesem Referate wird es doch zweckmässig sein, eine rein analytische Darstellung zu geben.

Problem 2. Vorgelegt seien q Gleichungen

$$F_k(x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n) = 0 ;$$

die hinsichtlich der p homogen von nullter Ordnung sind. Man soll in allgemeinster Weise $n-q$ weitere Gleichungen finden, welche zusammen mit den gegebenen, die Relation $\Sigma p\, dx = 0$ identisch befriedigen.

Seien

$$F_1 = a_1, \dots F_q = a_q$$

die vorgelegten Gleichungen; gelingt es solche weitere Funktionen $F_{q+1}, \dots F_n$ zu finden, dass eine Relation der Form

(1) $$\Sigma p\, dx = \Phi_1 dF_1 + \cdots + \Phi_n dF_n$$

stattfindet, so bilden die Gleichungen

(2) $$F_{q+1} = a_{q+1}, \dots F_n = a_n$$

zusammen mit $F_1 = a_1, \dots F_q = a_q$ ein Gleichungssystem der verlangten Art. Wir sagen in diesem Falle, dass die Gleichungen (2) eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen bilden. Ist zuerst eine vollständige Lösung gefunden, so bestimmt man durch ausführbare Operationen — Variation der Constanten — das allgemeinste Gleichungssystem der verlangten Art.

Man beweist, dass Functionen F und Φ, die (1) erfüllen, durch die folgenden Relationen verknüpft sind

(3) $$\begin{gathered}(F_i F_k) = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0\,, \qquad (F_i \Phi_i) = 1 \\ \sum_k p_k \frac{dF_i}{dp_k} = 0\,, \quad \sum_k p_k \frac{d\Phi_i}{dp_k} = \Phi_i\,,\end{gathered}$$

dass ferner jedes Grössensystem $F\Phi$, welches diese Bedingungen erfüllt, wirklich die Gleichung (1) befriedigt. Nun aber kann man, wenn überhaupt $q+m$ Grössen $F_1 \dots F_q \Phi_1 \dots \Phi_m$ vorgelegt sind, welche (3) befriedigen, immer, indem man successiv eine Anzahl vollständiger Systeme aufstellt und jedesmal eine Lösung bestimmt, weitere Functionen $F_{q+1} \dots F_n \Phi_{m+1} \dots \Phi_n$ finden, welche dieselben Relationen erfüllen.

Hieraus schliessen wir zunächst, dass jede Gleichung $F_1 = a_1$ vollständige Lösungen besitzt, und dass die Bestimmung einer solchen nur die Integration gewöhnlicher Differenzialgleichungen verlangt.

Wir schliessen ferner, dass jedes Gleichungssystem

$$F_1 = a_1, \dots F_q = a_q \qquad (F_i F_k) = 0$$

vollständige Lösungen besitzt, deren Bestimmung nur die Integration gewöhnlicher Differenzialgleichungen verlangt.

Sei jetzt vorgelegt ein Gleichungssystem der Form

$$(4) \qquad p_k - h_k\,(p_{q+1} \dots p_n\, x_1 \dots x_n) \qquad (k = 1 \dots q)$$

wo

$$(p_i - h_i,\, p_k - h_k) = 0$$

ist. Es lässt sich beweisen, dass der Ausdruck

$$\Omega = h_1 dx_1 + \dots + h_q \partial x_q + p_{q+1} dx_{q+1} + \dots p_n dx_n$$

auf eine $(n-q)$ gliedrige Form

$$\Omega = \Phi_i dF_1 + \dots + \Phi_{n-q} dF_{n-q}$$

gebracht werden kann. Die Grössen F und Φ sind definirt durch die Gleichungen

$$(p_k - h_k, F) = 0, \qquad (p_k - h_k, \Phi) = 0,$$
$$(F_i F_k) = = (F_i \Phi_k) = (\Phi_i \Phi_k) = 0, \qquad (F_i \Phi_i) = 1,$$
$$\sum_k p_k \frac{dF}{dp_k} = 0 \qquad \sum p_k \frac{d\Phi}{dp_k} = \Phi.$$

Ist ein Grössensystem $F\Phi$ gefunden, welches diese Relationen erfüllt, so befriedigen die Gleichungen

$$F_1 = a_1 \dots F_{n-q} = a_{n-q}$$

zusammen mit (4) die Relation $\Sigma p dx = 0$; sie bilden, sage ich, eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichungen. Von einer gegebenen vollständigen Lösung geht man über zu der allgemeinsten vollständigen Lösung, indem man die Gleichung

$$\Phi_1 dF_1 + \dots + \Phi_{n-q} dF_{n-q} = \Phi_1' dF_1' + \dots + \Phi_{n-q}' dF_{n-q}'$$

in allgemeinster Weise befriedigt. Wie dies geschieht, ist aus der Theorie des Pfaff'schen Problems bekannt.

Sei endlich vorgelegt ein Gleichungssystem der Form

Differenzialgleichungen 1. Ordnung besitzt, vollkommen klar erst in der grossen Lie'schen Arbeit über Berührungstransformationen zu Tage, zu der die hiermit angezeigte Note nur einen erläuternden Zusatz bringen sollte, dessen einziger Zweck es war, die schönen Untersuchungen von Lie von der weitaus complicirteren Theorie des allgemeinen Pfaff'schen Problems unabhängig zu machen.

Leipzig. A. Mayer.

A. Mayer: Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode. (Math. Annalen VIII. p. 313—318.)

Das Fundamentaltheorem, welches der Lie'schen Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung, wie sie in den Math. Annalen VI. p. 162 auseinandergesetzt worden ist, zu Grunde liegt, kann bei Einführung des Jacobi'schen Zeichens

$$(\varphi\psi) = \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_h}\frac{\partial\psi}{\partial p_h} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_h}\frac{\partial\psi}{\partial q_h}\right)$$

also ausgesprochen werden:

Die vollständige Integration der gegebenen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit n unabhängigen Variabeln $q_1, \dots q_n$

$$H_1(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) = \text{const.},$$

in der $p_1, \dots p_n$ die Differenzialquotienten der gesuchten Function nach $q_1, \dots q_n$ bedeuten, lässt sich auf die vollständige Integration einer partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit nur noch $n-r$ unabhängigen Variabeln zurückführen, sobald man zu der gegebenen Function H_1 r andere Functionen $H_2, \dots H_{r+1}$ der Variabeln q und p hinzugefunden hat, welche die Bedingungen

$$(H_i H_k) = 0$$

erfüllen und von einander wie von H_1 unabhängig sind hinsichtlich der Variabeln p.

Nun gibt es zwar eine ganze Reihe von Methoden, welche lehren, wie man unabhängige Functionen finden kann, welche paarweise mit H_1 und mit einander verbunden, den Bedingungen $(H_i H_k) = 0$ Genüge leisten. Aber bei keiner von diesen Methoden ist man a priori sicher, dass die Functionen, zu denen man gelangt, auch wirklich gerade in Bezug auf die Differenzialquotienten p von einander unabhängig sein werden. Es war daher von grosser Wichtigkeit zu zeigen, dass diese Forderung der Unabhängigkeit hinsichtlich der p überflüssig ist und dass der Satz auch dann noch richtig bleibt, wenn die Functionen $H_1, H_2, \ldots H_{r+1}$ nur überhaupt von einander unabhängig sind. Diesen Nachweis liefert die vorliegende Note und verschafft hierdurch der Lie'schen Methode dieselbe Allgemeinheit, die durch Lie der Jacobi'schen Methode zu Theil geworden ist.

Leipzig. A. Mayer.

Sophus Lie: Allgemeine Theorie der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung. (Math. Annalen Bd. IX, p. 245—296.)

Nach einer gedrängten Darstellung der von Jacobi und Clebsch herrührenden Theorie vollständiger Systeme von linearen partiellen Differenzialgleichungen wird das folgende Problem gestellt:

Problem 1. Bestimme alle Gleichungssysteme der Form

$$f_k(x_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (k = 1 \ldots m)$$

vermöge deren die Differenzialrelation

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

identisch stattfindet.

Es ergibt sich, dass jedes solches Gleichungssystem n Gleichungen der Form

$$x_k = \frac{dH}{dp_k} \qquad (k = ab \ldots l)$$

$$p_i = \frac{dH}{dx_i} \quad . \quad (i = m \ldots t)$$

enthält, wobei $ab \ldots lm \ldots t$ eine Permutation der Zahlen $1\ 2 \ldots n$ sind, und H irgend eine Function von $p_a \ldots p_l$ $x_m \ldots x_t$ bezeichnet, die hinsichtlich der p homogen von erster Ordnung ist.

Beschränkt man sich für einen Augenblick auf $n = 3$ und fasst dabei $x_1 x_2 x_3$ als Cartesische Punktcoordinaten im Raume auf, $p_1 p_2 p_3$ als Bestimmungsstücke einer durch den Punkt $x_1 x_2 x_3$ gehenden Ebene

$$p_1(x_1' - x_1) + p_2(x_2' - x_2) + p_3(x_3' - x_3) = 0\,,$$

so kann diese Theorie folgendermassen interpretirt werden. Die Grössen $x_1 x_2 x_3\ p_1 p_2 p_3$ sind Bestimmungsstücke eines Flächenelements; die Gleichung $\Sigma p\,dx = 0$ sagt, dass die beiden benachbarten Elemente xp und $x + dx\ p + dp$ vereinigt liegen. Das gestellte annehmen, so verschwinden die $n-q-1$ letzten Glieder in der letzten Gleichung, und es kommt

$$V =$$
$$\sigma(\omega_{n-q+1}d\omega_1 + \omega_{n-q+2}d\omega_2 + \cdots + \omega_{2n-2q-1}d\omega_{n-q-1} + d\omega_{n-q}),$$

und also bestimmen die Gleichungen

$$\omega_1 = a_1 \ \ldots \ \omega_{n-q} = a_{n-q}$$

eine vollständige Lösung von $p_1 - h_1 = 0 \ \ldots . \ p_q - h_q = 0$. Dies ist die vom Verfasser *erweiterte Cauchy'sche Methode.*

Noch einfacher ist die folgende vom Verfasser herrührende Integrationsmethode des Systems

$$p_1 - h_1 = 0 \ \ldots \ p_q - h_q = 0,$$

wo

$$(p_i - h_i, \ p_k - h_k) = 0.$$

Man bezeichne diejenige Function, in welche $\Phi(x_1 \ldots x_n \ p_1 \ldots p_n)$ durch die Substitution

$$x_1 = a_1 + \tau_1 x \ \ldots \ x_q = a_q + \tau_q x$$

übergeht, mit Φ^τ, und bilde sodann die Gleichung

$$p - \sum_k \tau_k h_k^{(\tau)} = 0 = p - h.$$

Ist nun

$$W\left(x_1 \ \ldots . \ x_n \ \frac{p_{q+1}}{p_n} \ldots . \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$$

eine Lösung von

$$(6) \qquad (p_1 - h_1, \ W) = 0 \ \ldots \ (p_q - h_q, \ W) = 0 \qquad \sum_k p_k \frac{dW}{dp_k} = 0,$$

so ist auch

$$(7) \qquad (p - h, \ W^{(\tau)}) = 0.$$

Sind $W_1 \ldots . \ W_{2n-2q-1}$ ein System Lösungen von (6), so sind $W_1^{(\tau)} \ldots . \ W_{2n-2q-1}^{(\tau)}$ ein System Lösungen von (7). Nimmt man dagegen eine beliebige Lösung Ψ von (7) und führt auf sie die inverse Substitution

$$\tau_k = \frac{x_k - a_k}{x}$$

aus, so ist die hervorgehende Function $\Psi^{(x)}$ im Allgemeinen keine Lösung von (6). Wählt man indess ein System Lösungen

$$\omega_1 \ \ldots \ \omega_{n-q} \ \omega_{n-q+1} \ \ldots \ \omega_{2n-2q-1},$$

welche die Eigenschaft besitzen, durch die Substitution $x_1 = a_1 \ldots . \ x_q = a_q$ die Werthe

$$x_{q+1} \; \ldots . \; x_n \quad \frac{p_{q+1}}{p_n} \; \ldots . \; \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

anzunehmen, so sind die Grössen

$$\omega_1^{(x)} \; \ldots . \; \omega_{2n-2q-1}^{(x)}$$

ein System Lösungen von (6). Hiermit ist die Integration des Systems $p_1 - h_1 = 0 \ldots . p_q - h_q = 0$ auf diejenige von $p - h = 0$ zurückgeführt.

Vermöge dieses Satzes kann die Integration der Gleichung

$$p_n - h_n(p_1 \; \ldots \; p_{n-1} \;\; x_1 \; \ldots \; x_n) = 0\,,$$

nachdem eine Function N gefunden ist, welche die Gleichungen

$$(p_n - h_n,\; N) = 0\,, \quad \sum_k p_k \frac{\partial N}{\partial p_k} = 0$$

erfüllt, auf diejenige einer Gleichung zwischen $(n - 1)$ Variabeln

$$p_{n-1} - h_{n-1}(p_1 \ldots p_{n-2} \;\; x_1 \ldots x_{n-1}) = 0$$

zurückgeführt werden. Um diese reducirte Gleichung zu integriren, kann man zunächst eine Lösung der Gleichungen

$$(p_{n-1} - h_{n-1},\; M) = 0\,, \quad \sum_k p_k \frac{\partial M}{\partial p_k} = 0$$

suchen, und sodann eine aequivalente Gleichung zwischen $n - 2$ Variabeln aufstellen

$$p_{n-2} - h_{n-2}(p_1 \ldots p_{n-3} \;\; x_1 \ldots x_{n-2}) = 0\,.$$

Diese Gleichung wird in entsprechender Weise auf eine zwischen $n - 3$ Variabeln reducirt u. s. w. Zuletzt kommt man zu einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zwischen 2 Variabeln. Ist sie integrirt, so findet man successiv durch ausführbare Operationen vollständige Lösungen aller aufgestellten Gleichungen, insbesondere auch eine vollständige Lösung von $p_n - h_n = 0$.

Es ist unmöglich gewesen, in diesem kurzen Referate die Beziehungen zwischen den hier dargestellten und den von Jacobi, Mayer u. s. w. herrührenden Theorien auseinanderzusetzen.

Christiania. Sophus Lie.

P. Mansion: Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (Paris 1875. Prix 6 frcs.)

Ce mémoire contient le résumé des recherches de Lagrange, Pfaff, Jacobi, Bour, Weiler, Clebsch, Korkine, Boole, Mayer, Cauchy, Serret et Lie, jusqu'en 1872 sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous avons groupé les travaux des ces géomètres dans les subdivisions suivantes:

Introduction. Génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre (§§ 1—4).

Livre I. Méthode de Lagrange et de Pfaff (§§ 5—15).

Livre II. Méthode de Jacobi (§§ 16—27).

Livre III. Méthode de Cauchy et de Lie (§§ 28—32).

Appendice. Méthode de Lie comme synthèse des idées antérieures (§ 33).

Cet arrangement est rigoureusement didactique, c'est-à-dire, que du commencement à la fin nous pénétrons de plus en plus profondément dans notre sujet. Il est en même temps historique dans ses grandes lignes, à une exception près: la méthode de Cauchy est antérieure de beaucoup à tous les travaux résumés dans notre livre deuxième. Nous avons été amenés à placer la méthode de Cauchy à la fin de notre mémoire, avec celle de Lie, parce que cette dernière est la suite naturelle de la première, et que, réunies, elles constituent une étude plus approfondie de la question de l'intégration des équations aux dérivées partielles que les méthodes de Lagrange, de Pfaff, de Jacobi et de Bour.

Dans notre Introduction, nous donnons d'abord, d'après Lagrange (1772 et 1774) et Lie (1872), la définition du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous indiquons ensuite, d'après Jacobi, deux moyens généraux et très-simples de faire disparaître la variable indépendante des équations en question. Nous montrons, contrairement à l'avis de Bertrand et d'autres géomètres, que le second procédé de transformation de Jacobi n'est pas illusoire (§ 1)*). Les deux paragraphes suivants contiennent la théorie des équations aux dérivées

*) M. M. Lie et Mayer partagent cette manière de voir (Mathematische Annalen, t. IX, p. 366).

partielles, à 3 ou à $(n+1)$ variables, telle que l'a découverte Lagrange en 1774, au moyen de sa féconde méthode de la variation des constantes arbitraires. Nous avons ajouté toutefois à l'exposition de Lagrange diverses remarques empruntées à Jacobi et une méthode très-simple de génération des équations simultanées. Le dernier paragraphe est consacré aux vues de Lie sur le sujet traité dans les numéros précédents et à l'explication du paradoxe relatif aux constantes supplémentaires.

Le livre premier contient l'analyse des travaux de Lagrange et de Pfaff. Nous avons exposé, avec prédilection, ces recherches déjà anciennes, d'abord parce qu'elles contiennent le germe de maintes découvertes ultérieures, ensuite parce qu'elles sont susceptibles d'une foule d'applications que l'on traite plus simplement, par ces méthodes, que par les méthodes plus savantes de Jacobi ou de Cauchy.

Le premier chapitre traite des équations linéaires, dont Lagrange a trouvé la théorie en 1779 et en 1785. Notre exposition ne diffère de celle de nos devanciers qu'en ce que nous employons davantage la théorie des déterminants fonctionnels. Dans le dernier paragraphe, nous donnons l'extension de la théorie de Lagrange faite par Jacobi, en 1827. Il est assez étonnant que ces recherches du géomètre de Berlin soient passées sous silence dans tous les traités, et même dans les mémoires récents de Graindorge et Imschenetsky, car seules, elles font comprendre l'étroite connexion qui existe entre les équations aux dérivées partielles et les systèmes d'équations différentielles du premier ordre (voir le n^0 32). En passant, nous avons fait connaître sous quel point de vue Lie considère les équations linéaires (n^0 23)*).

Le second chapitre contient l'analyse des travaux de Lagrange sur les équations non linéaires. C'est en 1772 que le géomètre de Turin trouva le moyen de ramener l'intégration des équations non linéaires à trois variables à celle des équations linéaires à quatre variables. Il revint sur le même sujet en 1774, pour faire connaître les diverses intégrales des équations aux dérivées partielles, et en 1806, pour expliquer un singulier paradoxe que présente la théorie de l'intégrale générale. Nous faisons connaître la méthode de La-

*) D'après M. Mayer, qui nous a écrit à ce sujet, nous aurions du profiter davantage, dans ce chapitre, du Mémoire de Jacobi, intitulé *Dilucidationes*, etc. (Journal de Crelle, t. XXIII, p. 1—104).

grange sous ses diverses formes. En premier lieu, le grand géomètre observe qu'intégrer l'équation

$$q = \varkappa(x, y, z, p),$$

c'est trouver une valeur de p, telle que

$$dz = pdx + \varkappa dy$$

soit intégrable. Ensuite, il indique le moyen général pour trouver une valeur de p avec une constante arbitraire, ce qui est le germe de la *méthode de Jacobi.* Enfin, il montre comment on peut déduire la valeur la plus générale de z, de la valeur la plus générale de p, ce qui est le germe de la *méthode de Pfaff.*

Jacobi, en effet, en appliquant la méthode de Lagrange, sous sa dernière forme, aux équations à n variables indépendantes, a été amené, en 1827, à refaire en sens inverse tous les calculs de Pfaff. Nous exposons ce curieux travail de Jacobi dans notre chapitre III. Le géomètre de Berlin ramène l'intégration d'une équation non linéaire à celle d'un système d'équations simultanées dont la solution est plus générale que celle de l'équation donnée. Pour particulariser cette solution et en déduire l'intégrale cherchée, il est forcé de faire un changement de variables: $(2n - 1)$ variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont remplacées par les constantes de l'intégration des équations simultanées auxiliaires, et la question se ramène dès lors à l'intégration d'une équation différentielle totale à $(2n - 1)$ variables.

Pfaff, dès 1814, avait suivi précisément une route inverse, comme nous le montrons dans le chapitre suivant. Pour intégrer l'équation.

$$p_n = \varkappa(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

il considère l'équation différentielle totale

$$dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \varkappa dx_n$$

à $2n$ variables, $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, et la transforme en une autre de même forme à $(2n - 1)$ variables. C'est précisément celle que Jacobi a trouvée en généralisant les dernières recherches de Lagrange, et Pfaff y arrive en intégrant le même système d'équations que Jacobi. Les deux méthodes sont donc identiques, sauf que l'une est, plus clairement que l'autre, la généralisation de la méthode de Lagrange, et que Pfaff traite, en outre, le problème général de l'integration des équations différentielles totales, qui porte son nom. Dans notre exposition des travaux de Pfaff, nous nous aidons de divers écrits de Gauss, de Jacobi et de

Cayley. Le dernier paragraphe du chapitre IV contient, outre le problème inverse de Pfaff, la simplification introduite dans toute cette théorie, par l'emploi des valeurs initiales des variables comme constantes arbitraires. Le problème général de Pfaff conduit à intégrer n systèmes d'équations simultanées dont chacun ne peut être formé qu'après l'intégration complète de tous les précédents. Jacobi, en 1836, profitant d'une idée de Hamilton, montra que l'on peut former immédiatement ces n systèmes, si l'on prend, comme nous venons de le dire, les valeurs initiales des variables pour constantes arbitraires; de plus, s'il s'agit de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, il n'y a plus qu'un système à intégrer. Cauchy, longtemps auparavant, en 1818, était arrivé à ce dernier résultat, en employant aussi les valeurs initiales des variables comme constantes. C'est à lui, d'ailleurs, qu'est due l'introduction de cette idée dans la science, mais Jacobi semble avoir ignoré les travaux de Cauchy.

Tel est le cycle des recherches exposées dans notre livre premier. Nous avons joint à chaque théorie les applications que l'on rencontre ordinairement dans les traités, outre celles qui se trouvent dans les mémoires de Lagrange. De plus, nous avons donné dans un paragraphe spécial l'intégration d'une équation très-remarquable, due à Schläfli, et publiée par lui en 1868.

Le livre second est consacré à la méthode de Jacobi et de Bour, aux perfectionnements de cette méthode dus à Weiler et à Clebsch, enfin aux méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer qui s'y rattachent de très-près.

La *Nova methodus* de Jacobi a été trouvée par lui en 1838 et publiée par Clebsch en 1862. Nous la faisons connaître dans nos deux premiers chapitres. Notre exposition ne diffère de celle de Graindorge et Imschenetsky qu'en ce que nous avons réuni dans un chapitre spécial, le premier, tout ce qui se rapporte aux conditions d'intégrabilité. En nous éloignant un peu de nos prédécesseurs et de Jacobi sur ce point, on trouvera peut-être que nous avons abusé des notations symboliques. Toutefois, le lecteur qui se sera familiarisé avec ces notations reconnaîtra que, seules, elles peuvent conduire naturellement à la démonstration des principes de la méthode de Jacobi. Dans le chapitre III, nous donnons l'extension de cette méthode aux équations simultanées, due à Bour, en corrigeant la petite erreur qui s'est glissée dans l'exposition de ce dernier et dans celle des auteurs qui l'ont suivi. Cette erreur a été signalée par Mayer, en 1871. Au point de vue historique, il importe de remarquer que les travaux de Bour ne procèdent pas de ceux de Jacobi, qui n'ont été publiés qu'en 1862. Liouville, Bour et Donkin avaient trouvé, vers 1853 et 1854, les théorèmes fondamentaux de la *Nova methodus*, sans avoir connaissance de celle-ci. Dans le chapitre IV, nous reproduisons des calculs d'une admirable élégance, dus à Clebsch, et publiés en 1866, où l'éminent algébriste fait connaître une notable simplification de la méthode de Jacobi, trouvée par Weiler en 1863*).

Les chapitres V et VI sont consacrés à des méthodes où l'on procède par changement de variables. Dans la méthode de Korkine (1868), qui s'applique aux équations simultanées non linéaires, on dispose de la fonction arbitraire, qui entre dans l'intégrale générale de l'une des équations données, de manière à satisfaire aux autres équations; on transforme ainsi le système en un autre qui contient une équation et une variable de moins. Les calculs auxquels nous avons été conduit pour démontrer les principes de cette méthode, auraient été extrêmement longs, si nous n'avions largement employé la théorie des déterminants. La méthode de Boole (1863), qui s'applique seulement aux équations linéaires, procède à peu près comme celle de Korkine. Elle est exposée dans le dernier paragraphe du chapitre V. La méthode de Mayer (1872), qui vient ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires, dont elle ramène l'intégration à celle de certains systèmes d'équations différentielles totales. Chaque fois que l'on parvient à intégrer une équation de l'un de ces systèmes, on le transforme en un autre système contenant une équation et une variable de moins. Les nouvelles variables sont les valeurs initiales des variables primitives. En outre, au moyen d'une transformation de variables d'un genre tout différent, on peut faire en sorte de n'avoir à considérer qu'un seul système. Quand il s'agit des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi, un théorème de Mayer, analogue à celui de Poisson et Jacobi, dont il est un corollaire, introduit de nouvelles simplifications**).

---

*) M. M. Weiler (Journal de Schlömilch, 1875, t. XX, pp. 83 sqq. 271 sqq.) et Mayer (Mathem. Ann. t. IX, p. 346 sqq.) ont exposé de nouveau cette simplification, qui n'est pas identique à celle de Clebsch.

**) M. Mayer m'apprend que malheureusement j'ai laissé une erreur se glisser dans mon exposition de sa méthode.

Les méthodes de Jacobi, de Clebsch et de Mayer, conduisent à chercher *une* intégrale de systèmes de $2(n-1)$, $2(n-2)$, ..., 2 équations différentielles ordinaires, ces systèmes étant respectivement pour les trois méthodes, au nombre de:

$$\begin{array}{lll} 1, 2, 3, \ldots, & (n-2), & (n-1), \\ 1, 2, 2, \ldots, & 2, & 2, \\ 1, 1, 1, \ldots, & 1, & 1. \end{array}$$

Les équations sont supposées ne pas contenir explicitement la variable dépendante. La méthode de Lie, dont nous parlerons plus bas, exige précisément le même nombre d'intégrations que celle de Mayer.

Le livre troisième contient d'abord l'exposé de la méthode de Cauchy. L'illustre géomètre l'a trouvée dès 1818, en partant de deux idées principales; l'une est le changement de variables, qu'il semble emprunter à Ampère, plutôt qu'à Lagrange ou à Pfaff, car il paraît avoir ignoré les recherches de celui-ci; l'autre est l'introduction immédiate dans le calcul des valeurs initiales des variables, comme on le fait dans la théorie des intégrales définies. Si les recherches de Cauchy n'étaient antérieures à celles de Jacobi sur la méthode de Pfaff, on les prendrait pour une exposition simplifiée de tous les travaux analysés dans notre livre premier, y compris la théorie des équations linéaires de Lagrange. Quand il s'agit de trouver les intégrales de ces équations, supposées à trois variables, Lagrange et Monge cherchent d'abord les courbes qui peuvent engendrer les surfaces représentées par les intégrales. Une idée analogue donne à Cauchy les courbes ou variétés à une dimension, appelées caractéristiques par Lie, qui engendrent, pour ainsi dire, l'intégrale des équations non linéaires. Pfaff et Jacobi étaient forcés, dans la suite de leurs calculs, d'égaler à des constantes n de leurs $(2n-1)$ variables auxiliaires. Cauchy, dès le début, ne prend que $(n-1)$ variables auxiliaires, et il suppose immédiatement que ce sont les valeurs initiales des anciennes variables, ce qui le dispense du circuit par lequel Jacobi est arrivé, plus tard, au même résultat. Cauchy a donné une forme plus générale à sa méthode, en 1841; les valeurs initiales des variables peuvent être à volonté de nouvelles variables ou des constantes d'intégration. C'est ce travail de 1841, auquel on n'a pas accordé suffisamment d'attention, qui est la base de notre exposition. Nous avons pu, grâce à lui, donner, avec une entière rigueur, la théorie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, dans les cas les plus singuliers, par exemple, dans le cas des équations semi-linéaires de Lie (1872), rencontré incidemment par Serret en 1861; l'intégrale de ces équations est donnée par m relations entre $(n + 1)$ variables et n constantes arbitraires. Mayer a montré, en 1871, que la méthode de Pfaff, modifiée par Jacobi, ne donne jamais l'intégrale complète des équations homogènes par rapport aux quantités p; il en est de même de la méthode primitive de Cauchy. Mais quand on laisse à cette méthode toute son élasticité, si j'ose ainsi dire, elle conduit, sans calcul, aux modifications de la méthode de Pfaff et Jacobi, proposées par Mayer, et Darboux.

La méthode générale de Cauchy se prête très-bien aussi à une exposition rigoureuse des recherches de Serret (1861), relatives au cas où la méthode de Cauchy *semble* en défaut. Nous donnons ces recherches dans le chapitre II.

Le chapitre suivant contient, d'après Mayer, un exposé de la méthode de Lie (1872) considérée comme une extension de la méthode de Cauchy. Dans cette méthode, on ramène l'intégration de $(m + 1)$ équations à $(n + m)$ variables indépendantes à celles d'une équation unique contenant n variables indépendantes, soit en cherchant une intégrale de m équations, soit après une simple transformation de variables. Dans ce dernier cas, on voit clairement que la méthode de Lie est la suite naturelle de celle de Cauchy. Combinée avec celle de Jacobi, elle s'applique à une seule équation à $(n + 1)$ variables, surtout dans les cas les plus défavorables.

Enfin, dans un court appendice, nous donnons, au moyen des idées de Lie lui-même, un aperçu synthétique des méthodes principales, qui permet au lecteur d'entrevoir leur fusion prochaine, entre les mains du géomètre norwégien.*)

Gand. P. Mansion.

---

*) Aux écrits de M. Lie, cités, page 272, il faut encore ajouter maintenant le suivant: *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Math. Ann. t. IX, p. 245—296).

P. Mansion: Sur la méthode de Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Note présentée par M. Hermite. (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 1875, 2d semestre, t. LXXXI, p. 790—793.)

Résumé de la partie la plus originale de notre *Mémoire sur les équations aux dérivées partielles* (nos 4, 5, 107, 108, 111, 129). Voici l'idée fondamentale qui est exposée dans ce petit article: une équation aux dérivées partielles à $(n+1)$ variables du premier ordre et les équations canoniques correspondantes représentent les mêmes éléments, en nombre ∞^{2n}, dans un espace à ∞^{n+1} dimensions. Pour déduire une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du système intégral des équations canoniques, il suffit d'associer d'une manière convenable les ∞^{2n} éléments, ce que permet la méthode de Cauchy dans tous les cas; par exemple, dans ceux qui ont été examinés récemment par Mayer et Darboux, et qui semblent exceptionnels.

Gand. P. Mansion.

P. Mansion: Introduction à la théorie des déterminants, à l'usage des établissements d'instruction moyenne. (Gand, Hoste, 1876. Mons, Manceaux, 1876. 28 p. in 8⁰. Prix: fr. 0.50.)

P. Mansion: Eléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon. (Ibid. 1875, 44 p. in 8⁰. Prix: fr. 1. 25.)

Le premier de ces écrits est extrait de la *Revue de l'Instruction publique en Belgique* (t. XVIII, 1875; t. XIX, 1876), le second, de la Nouvelle Correspondance mathématique (t. I, 1874—1875); toutefois le tirage à part de celui-ci contient de plus que le texte publié dans le journal deux belles démonstrations, dues à Janni, l'une du théorème de Bezout sur l'élimination, l'autre des propriétés des déterminants nuls. L'ordre des matiéres est le même dans les deux opuscules: I. Définitions et propriétés immédiates. II. Calcul des déterminants. III. Applications à la résolution des équations linéaires et à l'élimination. Dans l'*Introduction*, nous n'employons pas la théorie des permutations et nous ne parlons que de déterminants à 4 ou à 9 éléments, les seuls qui soient vraiment utiles dans l'enseignement moyen. Dans les Éléments, au contraire, nous avons recours à la théorie générale des permutations.

Nous pensons avoir simplifié deux points dans les *Eléments* 1º Nous disons qu'une permutation $a_{\alpha\alpha'}$, $b_{\beta\beta'}$, $c_{\gamma\gamma'}\ldots$, d'éléments à deux indices, est paire ou impaire suivant que le nombre des dérangements des premiers indices $\alpha\beta\gamma\ldots$, *et* des seconds $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ est pair ou impair. Cette manière de définir les permutations paires et impaires rend plus facile la démonstration des propriétés des déterminants qui découlent immédiatement de la définition et peut s'étendre aux permutations d'éléments à 3, 4, ... indices. 2º La règle de la multiplication des déterminants, supposée connue par induction, se démontre très simplement, a posteriori en faisant usage, d'une manière systématique, d'une notation déjà ancienne, savoir $[abc]$ pour $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$.

La comparaison de nos Eléments avec ceux de divers professeurs (Hattendorf, Studnicka, Günther, Dieckmann, Mellberg) nous y a fait découvrir quelques lacunes. Nous en signalerons deux. Nous aurions du consacrer quelques pages à l'application de la théorie des déterminants aux fractions continues et à la discussion des équations du premier degré.

Gand. P. Mansion.

P. Mansion: New Demonstration of the Fundamental Property of Linear Differential Equations. (Messenger of Mathematics. New Series, t. IV, nº 48, p. 177—178. 1875.)

P. Mansion: Demonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. (Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von Grunert, fortgesetzt von Hoppe, Th. LVI, p. 99—100.)

On sait, depuis Brisson et Cauchy, qu'une équation différentielle linéaire à coefficients *constants:*

$$y^{IV} + A_1 y''' + A_2 y'' + A_3 y' + A_4 y = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$(D - a_1)(D - a_2)(D - a_3)(D - a_4)y = 0$$

D étant un signe de dérivation. Nous avons démontré qu'il en est de même si les coefficients sont *variables* (Mém. en 8º de l'Acad. de Brux. t. XXII), et que a_4 est *nécessairement* tel que $z' - a_4 z = 0$,

z étant une solution de particulière de l'équation donnée. Dans une note subséquente (Bulletins de Bruxelles, 2e Serie, t. XXXVIII), nous avons vérifié *a posteriori* que si a_4 satisfait à une pareille relation, $(D - a_4)y$ est un des facteurs symboliques de l'équation donnée. La démonstration donnée dans le Messenger est une simplification de celle des Bulletins. Ces trois premières preuves du théorème fondamental ont un défaut commun: elles supposent qu'une équation d'ordre n a n solutions distinctes, pour prouver l'existence d'un seul facteur symbolique $(D - a)y$. La quatrième démonstration donnée dans le journal de M. Hoppe n'offre pas cet inconvénient et complète les trois autres.

Gand. P. Mansion.

P. Mansion: Sur une question de maximum appelée Problème d'Huygens. (Nouvelle Correspondance mathématique t. I. p. 193—194.)

Les sommes $x + y + z + u$, $xy + xz + xu + yz + yu + zu$, $xyz + xyu + xzu + yzu$ prennent leur valeur minima, quand $x = y = z = u$, si $xyzu$ est constant. Par suite il en est de même de $(1 + x)(1 + y)(1 + z)(1 + u)$. L'expression

$$H = \frac{axyz}{(a + x)(x + y)(y + z)(z + b)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{b}{z}\right)}$$

à laquelle conduit le problème d'Huygens est donc maxima quand $x:a = y:x = z:y = b:z$. On trouve ainsi, par l'algèbre élémentaire la solution d'une question qu'il est très pénible de traiter complètement par le calcul différentiel (voir *Picart*, Nouv. Ann. de Mathém., 1874, p. 212—219).

Gand. P. Mansion.

M. Noether: Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. (Math. Annal. IX, p. 166—182.)

Dieser Aufsatz beabsichtigt, in der *Theorie der algebraischen Curven* die Beschränkungen aufzuheben, welche sich die bisherigen geometrischen Arbeiten (mit Ausnahme weniger neuerer Arbeiten über rationale Transformation) durch Ausschliessen der singulären Punkte aus Mangel einer geometrisch-algebraischen Theorie derselben auflegen mussten.

Auch in der Functionentheorie hat sich die Nothwendigkeit gezeigt, an Stelle des von Fall zu Fall variirenden Puiseux'schen Verfahrens zur Aufstellung der Reihenentwicklungen, die in einem singulären Werthsystem einer algebraischen Function stattfinden, eine allgemein gültige *analytische* Methode für diese Entwicklungen zu setzen. Durch den Gedanken *successiver eindeutiger Transformationen* ist diese Methode geschaffen worden. Statt wie früher (wenn x, y die Variabeln ($x = 0$, $y = 0$) das singuläre Werthsystem und dabei $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ ist) direct eine Transformation.

$$y = y' x^\varrho$$

vorzunehmen, führt man nun successive Transformationen der Form

$$y' = \frac{y}{x}$$

aus, wobei die transformirte Function y' eine niedrigere Singularität in dem Werthsystem ($x = 0$, $y' = 0$), nämlich die von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, erhält. Man führt die Transformationen so weit, bis in den entsprechenden Werthsystemen der resultirenden Function jede Singularität zum Verschwinden gebracht ist; und da sich die nach ganzen Potenzen der Variabeln gehenden Entwicklungen in jenen Werthsystemen dann direct anschreiben lassen, so ergeben sich durch Rückwärtsverfolgen der einfachen Transformationen oder gelegentliche Umkehrung der Entwicklungen auch die ursprünglich geforderten Reihenentwicklungen der Function y.

Die Ausführungen dieser Methode finden sich bei H. Hamburger (Ztschr. f. Math. u. Phys. XVI, 1871), bei H. Königsberger in dessen Buch „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen", und nochmals neuerdings bei H. Stolz (Math. Ann. VIII). Ausserdem ist zugleich der dem Verfahren zu Grunde liegende Gedanke, der der Untersuchung der singulären Werthsysteme durch successive Transformationen, auch in einer 1871 von mir veröffentlichten Note (Gött. Nachr. 1871, p. 267, „Ueber die algebr. Functionen", Note 2) angegeben.

Aber dieser Gedanke reicht noch weiter: die successiven Transformationen allein liefern schon, ohne dass man bis zu den Reihenentwicklungen vorzuschreiten braucht, die *Definition der singulären Punkte.* Denn wenn einem gewöhnlichen vielfachen Punkte P durch die Transformation nur mehrere einfache Punkte entsprechen, so verbinden sich diese, wenn P zu einem singulären Punkte P' wird, selbst wieder zu einem singulären Punkte Q der transformirten Curve; und man kann die Singularität P' auffassen als die Verbindung des gewöhnlichen vielfachen Punktes P mit der Singularität des Punktes Q. Ein singulärer Punkt besteht dann aus einer endlichen Zahl gewöhnlicher vielfacher Punkte, die nur in bestimmten Richtungen unendlich nahe an einander gerückt sind, ohne dass hierdurch ein Punkt von einer höheren Ordnung der Vielfachheit wird.

Um indess diese Definition geometrisch auch im Einzelnen und vollständig durchzuführen, wird es nöthig, zunächst die Plücker'sche Auffassung der Entstehung einer algebraischen Curve aus ihren Elementen weiter durchzubilden. Man denkt sich hiernach das Fortschreiten auf der Curve so: in einem Punkt P nimmt man eine bestimmte *Richtung* t an; ein darauffolgender, P benachbarter, Punkt P' wird in dieser Richtung t angenommen und dann durch P' eine Richtung t', die t benachbart ist, etc. Die Curve kann dabei als durch die Punkte $P, P' \ldots$, oder auch als durch die Geraden $t, t' \ldots$ erzeugt gedacht werden; oder endlich auch als durch die Combination der Punkte P und Erzeugenden t erzeugt. Indem wir die letztere Auffassung annehmen, nennen wir ein *Curvenelement* der Curve *die Combination eines Punktes P mit einer durch P gehenden Richtung t* (also nicht etwa die Verbindungslinie zweier Punkte oder den Schnitt zweier Erzeugenden). Aus solchen *aufeinanderfolgenden Curvenelementen* lassen wir die Curve entstehen. Es *geht* dann also *im Allgemeinen* eine Erzeugende t durch zwei aufeinanderfolgende Punkte, *gehört* aber nur zu *einem* Element oder *einem* Punkt P, d. h. *berührt* in *einem* Punkte P; und umgekehrt ist ein Punkt im Allgemeinen der Schnitt *zweier* aufeinanderfolgenden Erzeugenden, aber der Berührungspunkt *einer* Erzeugenden.

Im Besonderen können nun zwei Curvenelemente einer Curve (ob aufeinanderfolgende Elemente oder nicht) ihren Punkt gemein haben, oder sie können ihre Richtung gemein haben, oder sie können endlich Punkt und Richtung gemein haben (also dann zusammenfallen, obwohl sie hierdurch *nicht* zu aufeinanderfolgenden Elementen werden). Wir nennen einen Punkt P der Curve einen *k-elementigen,* wenn k der Curvenelemente (ob verschiedene oder aufeinanderfolgende) den Punkt P gemein haben. Es gibt dann k Richtungen durch P, welche zusammen mit P je ein Element der

Curve bilden, d. h. k Erzeugende der Curve, welche dieselbe *in* diesem Punkte P *berühren*; und jede Gerade der Ebene, welche durch P geht (einzelne ausgenommen), trifft die Curve in k mit P *zusammenfallenden* Punkten, da sie hier k Elemente der Curve trifft.

Ein gewöhnlicher k-elementiger Punkt, d. h. ein solcher, dessen k Elemente alle endlich verschiedene Richtungen besitzen, wird ein *k-facher* Punkt genannt.

Gehören aber zu *einem* Punkte P k' *aufeinanderfolgende* Curvenelemente, so sagen wir, dass die Curve in P noch einen $(k'-1)$-*fachen Verzweigungspunkt* besitzt, eine Bezeichnung, der wir auch die durch $k'-1$ *einfache Verzweigungspunkte* äquivalent setzen.*) Man hat dann, von diesen k' Elementen herrührend, $k'+1$ aufeinanderfolgende Erzeugende der Curve, welche durch P gehen.

Ebenso kann auch *eine* Richtung t zu l Curvenelementen gehören. Sind darunter l' aufeinanderfolgende, so trifft die l-elementige Gerade t, hiervon herrührend, die Curve in $l'+1$ aufeinanderfolgenden Punkten, berührt aber nur in l' derselben, etc. Und diese Verhältnisse können sich nun noch combiniren. Insbesondere kann die Tangente eines Curvenelementes eines k-elementigen Punktes P selbst wieder eine mehrelementige sein, also auch zu Curvenelementen gehören, die ihren Punkt dem Punkte P *benachbart* haben, etc.

Diese Verhältnisse werden aber alle durch die eindeutigen Transformationen, da dieselben aufeinanderfolgende oder getrennte Elemente der Curve bezüglich wieder in solche überführen, völlig klar gestellt. Insbesondere wird unter Zugrundelegung der angedeuteten Auffassung in der Arbeit der allgemeine Satz bewiesen:

> Ein beliebig singulärer *k-elementiger* Punkt ist als Grenzfall eines *k-fachen* Punktes zu definiren, zu welchem zunächst eine Anzahl von einfachen Verzweigungspunkten tritt, und an welchen weiter eine Reihe von l-, m-, ... elementigen Punkten $(l+m+\cdots \overline{\gtrless} k)$ unendlich nahe heranrückt.

Durch diesen Satz, dessen algebraische und geometrische Begründungen sich völlig decken, wird die Behandlung der Probleme in verschiedenen Theorien der algebraischen Curven von dem Auftreten singulärer Punkte unabhängig gemacht, vielmehr auf die bei gewöhnlichen vielfachen Punkten zurückgeführt. So erwähnen wir

*) Man wird beachten, dass diese „Verzweigungspunkte der Curven" nur einen Theil der in der Functionentheorie ebenso benannten „Verzweigungspunkte" der zugehörigen algebr. Function ausmachen.

die Untersuchung der Resultante der Elimination aus zwei speciellen Gleichungen, besonders solchen, die sich im Unendlichen speciell verhalten; wir erwähnen ferner das projectivische Verhalten der Curven, wie es in den Plücker'schen Gleichungen auftritt, also die Bestimmung der *Klasse* der Curve etc., und endlich das Verhalten einer Curve bei rationalen Transformationen überhaupt, worauf schon oben hingedeutet worden ist.

Erlangen. M. Noether.

H. Durège: Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. (Sitzungsber. der Wiener Acad. Bd. 72. Abth. II. October 1875.)

In Vorstehendem wurden die Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten mit Hülfe Steiner'scher Verwandtschaft behandelt. Zuvörderst sei aber bemerkt, dass bei Abfassung dieses Aufsatzes übersehen worden war, dass einige der mitgetheilten Resultate bereits in Fiedlers Bearbeitung von Salmons „Higher plane Curves", pag. 321 enthalten sind. Man findet dort schon angegeben die Gleichungen der vier Doppeltangenten und die des Kegelschnittes, der die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten enthält. Es ist daher nur über die weiteren Resultate zu berichten.

Es wurde ein System von Curven 4. Ordnung, alle mit den nämlichen Doppelpunkten p, q, r betrachtet, welches geometrisch so definirt werden kann. Man geht von einer bestimmten Curve W aus, die die specielle Eigenschaft besitzt, dass ihre Tangenten in den Doppelpunkten zugleich Wendetangenten sind. Schneidet man diese Curve mit irgend einer Geraden G, so bilden alle Curven 4. Ordnung mit Doppelpunkten in p, q, r, welche durch die Schnittpunkte von W und G gehen, einen Büschel. Gibt man der Geraden G alle möglichen Lagen, und bestimmt für jede den zugehörigen Büschel, so bilden alle diese Büschel das betrachtete System. Ein solches System enthält nur eine Curve W und ist durch diese individualisirt. Bei zwei demselben Systeme angehörigen und die Curve W auf den Geraden G und G' schneidenden Curven liegen ihre eigenen Schnittpunkte ebenfalls in einer Geraden Γ, und G, G', Γ treffen sich in einem Punkte. Lässt man eine Curve das betrachtete System durchlaufen, so beschreiben bei jeder Doppeltangente die beiden Berührungspunkte einen Kegelschnitt S, und diese vier Kegelschnitte

S gehen auch durch die Doppelpunkte. Durchläuft die Curve einen der vorhin erwähnten Büschel, so dreht sich jede Doppeltangente ausserdem um einen festen Punkt, und diese vier Punkte liegen auf der dem Büschel zugehörigen Geraden G. Bestimmt man für eine Curve C und für die ihr zugehörige Curve W resp. die Kegelschnitte Σ und Σ_w, welche die Berührungspunkte der bezüglichen vier Doppeltangenten enthalten, so haben diese beiden Kegelschnitte eine doppelte Berührung, und die Berührungssehne ist die der Curve C angehörige Gerade G.

Sucht man bei einem gegebenen Kegelschnitte K die vier Kegelschnitte auf, welche den K doppelt berühren und zugleich einem gegebenen Dreiecke pqr umschrieben sind, und bestimmt dann durch p, q, r als Doppelpunkte und durch fünf jener Berührungspunkte eine Curve 4. Ordnung, so geht diese auch durch die drei übrigen Berührungspunkte. Nimmt man aber an Stelle von K den Kegelschnitt Σ_w, welcher die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Curve W enthält und für p, q, r die Doppelpunkte der letztern, so ist die erwähnte Curve 4. Ordnung die Curve W selbst. Die vier den Σ_w doppelt berührenden Kegelschnitte sind identisch mit den Kegelschnitten S, von denen jeder durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente und durch die Doppelpunkte geht; und die Berührungssehnen sind die Doppeltangenten der Curve W.

Die Curven W haben ferner die Eigenschaft, dass der durch die Berührungspunkte ihrer Doppeltangenten gehende Kegelschnitt Σ_w zugleich derjenige ist, der von den sechs Tangenten in den Doppelpunkten eingehüllt wird.

Indem nun noch auf den Fall eingegangen wurde, dass die Curve 4. Ordnung drei Rückkehrpunkte hat, ergab sich die folgende Kegelschnittbeziehung. Zu jedem einem Dreiecke pqr eingeschriebenen Kegelschnitte gehört ein bestimmter dem Dreiecke umschriebener Kegelschnitt, welcher den erstern doppelt berührt, und umgekehrt. Die Berührungspunkte sind jedesmal imaginär, wenn das Dreieck reell ist; die Berührungssehne aber trifft die Seiten des Dreiecks in den Punkten, die bezüglich der Ecken desselben harmonisch zugeordnet sind zu den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes, und durch dieselben Punkte gehen auch die in den Ecken des Dreicks an den umschriebenen Kegelschnitt gelegten Tangenten. Es mag gestattet sein hieran noch folgendes anzuschliessen. Bei einer Curve 4. Ordnung mit drei Spitzen p, q, r

haben die beiden Kegelschnitte, von denen der eine durch die Spitzen und durch die Berührungspunkte der Doppeltangente geht, der andere die Seiten des Dreiecks pqr in den Punkten berührt, in denen diese Seiten von den Rückkehrtangenten getroffen werden, mit einander eine doppelte Berührung, und die Berührungssehne ist die Doppeltangente der Curve 4. Ordnung. Hieraus ergibt sich, wenn die Spitzen und die Rückkehrtangenten reell gegeben sind, eine einfache Construction für die Doppeltangente, die alsdann imaginäre Berührungspunkte hat.

Für die den Curven 4. Ordnung mit drei Spitzen dualistisch gegenüberstehenden Curven 3. Ordnung mit einem Doppelpunkte hat man die folgenden Eigenschaften: Wenn man bei einer Curve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkte die beiden Kegelschnitte aufsucht, von denen der eine die drei Wendetangenten und die Tangenten des Doppelpunktes berührt, der andere aber dem Dreiecke der Wendetangenten umschrieben ist und in den Ecken desselben diejenigen Geraden zu Tangenten hat, welche diese Ecken mit den gegenüberliegenden Wendepunkten verbinden, so hat der letztere Kegelschnitt mit dem ersteren eine doppelte Berührung, und ihre gemeinschaftlichen Tangenten sind die Tangenten des Doppelpunktes. Bei dem zuerst genannten Kegelschnitte gehen die Geraden, welche die Durchschnitte je zweier Wendetangenten mit den Berührungspunkten auf der dritten Wendetangente verbinden, alle drei durch den Doppelpunkt. Je zwei Wendetangenten werden durch die von ihrem Durchschnittspunkte nach dem Doppelpunkte und nach dem dritten Wendepunkte gehenden Strahlen harmonisch getrennt.

Prag. H. Durège.

M. Krause: Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. (Math. Annalen. Bd. VIII.)

Bei Einführung der bekannten Hermite'schen φ-Function haben die Wurzeln der Modulargleichungen der elliptischen Functionen, welche zu einer Transformation $n$ten Grades gehören, vorausgesetzt, dass n eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist, die Form:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi}{\delta_1}\right)$$

wo δ ein beliebiger Theiler von n, $\delta\delta_1 = n$ ist und ξ eine jede ganze Zahl kleiner δ_1 bedeuten kann.

Der Verfasser der obigen Abhandlung stellt sich die Aufgabe, alle τ zu finden, für welche zwei solcher Wurzeln einander gleich werden. Die Lösung dieser Aufgabe gibt zu gleicher Zeit die Wurzeln der Discriminante der Modulargleichung, da diese ja nichts anderes sind, als die zugehörigen Functionen $\varphi(\tau)$.

Es wird nun zuerst gezeigt, dass diese Grössen τ einer quadratischen Gleichung genügen:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

und dann die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen aufgestellt, denen die Coefficienten dieser Gleichung Genüge leisten müssen. Hierbei bleibt der Fall ausgeschlossen, dass P, Q, R mit n denselben gemeinsamen Theiler haben.

Breslau. M. Krause.

A. Radicke: Ueber die mathematische Darstellung der Riemann'schen P-Function. (Programm der Realschule I. O. zu Bromberg, Ostern 1875.)

Eine der wichtigsten Aufgaben der neueren Functionentheorie ist bekanntlich die, Functionen, die durch gewisse charakteristische Eigenschaften entweder eindeutig oder n-deutig oder bis auf eine oder mehrere willkürliche Constante definirt sind, mathematisch darzustellen. Im Grunde genommen geht man bei den verschiedenen Methoden, die zur Erreichung dieses Zieles angewendet werden, von demselben Satze aus, der zugleich an sich die mathematische Darstellung der einfachsten Gattung von Functionen liefert, dem Satze nämlich, „dass eine in der ganzen unendlichen Ebene überall eindeutige und stetige Function eine Constante ist“. Sobald man dann von der darzustellenden Function w weiss, dass sie, mit einem gewissen durch seine analytische Form gegebenen Factor M multiplicirt, ein in der ganzen Ebene eindeutiges und stetiges Product liefert, so ist die Function w durch den Ausdruck M^{-1} bis auf einen willkürlichen constanten Factor mathematisch dargestellt. In den meisten Fällen reicht man freilich mit dieser einfachen Betrachtung nicht aus, sondern man ist genöthigt, eine Gleichung, meist eine Differenzialgleichung herzuleiten, der die Function Genüge leistet, und diese dann aufzulösen. Aber die Coefficienten dieser Gleichung werden auch dann nur vermittelst des obigen allgemeinen Princips zu bestimmen sein. Ein vortreffliches Beispiel für diese Methode findet sich in der bekannten Riemann'schen Abhandlung über die Gauss'sche Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aus dem Jahre 1857 (Ber. der Soc. der Wiss. zu Göttingen), in der die Zweige einer durch ihre charakteristischen Eigenschaften gegebenen Function P als Particularlösungen einer gewissen linearen homogenen Differenzialgleichung 2. Ordnung erkannt werden; da letztere durch Reihen oder bestimmte Integrale integrirt werden kann, so ist hierdurch die Darstellung der Zweige gewonnen.

Eine andere Methode zur Darstellung eben dieser Zweige der Riemann'schen Function P ist in der in der Ueberschrift genannten Arbeit zur Anwendung gekommen. Sie dürfte deshalb auf einiges Interesse Anspruch machen, weil sie eine ganz unmittelbare Folge des vorangeschickten allgemeinen Princips ist. Der Verfasser zeigt nämlich, dass aus den Zweigen P^{α}, $P^{\alpha'}$, P^{β}, $P^{\beta'}$, P^{γ}, $P^{\gamma'}$ durch wiederholte Differenziation resp. Integration in gewissen besondern Fällen, und im allgemeinen Falle durch diejenige Rechnungsoperation, welche von Liouville die Differenziation mit beliebigem Index genannt ist, neue Functionen sich ergeben, die ebenso, wie die vorhin besprochene Function w, durch einfache Multiplication mit einem Factor M constant werden. Wendet man dann auf diese neuen Functionen die inversen Rechnungsoperationen an, so hat man die Darstellung der Zweige P^{α} etc. selbst. Wenn beispielsweise von dem Ausdruck $D_z^{\mu} \cdot P^{\alpha}$ gefunden ist, dass er, mit M multiplicirt, ein in der ganzen Ebene eindeutiges und stetiges Product liefert, so wird P^{α} gleich $D_z^{-\mu} \cdot \{M^{-1}\}$ vermehrt um seine complementäre Function sein. Wir können auf die Details dieser Methode natürlich nicht näher eingehen, verweisen vielmehr in Betreff derselben auf die Arbeit selbst und begnügen uns damit, hier noch folgendes Resultat hervorzuheben: Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$x(1-x)y'' + \big(\gamma - (\alpha+\beta+1)x\big)y' - \alpha\beta y = 0$$

kann, wie bekannt, in drei verschiedenen analytischen Formen dargestellt werden:

$$\text{(I)}\quad CF(\alpha, \beta, \gamma, x) + C'x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

$$\text{(II)}\quad C_1\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt + C_1'\int_{\infty}^{\frac{1}{x}} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$$

$$\text{(III)} \qquad C_2 x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} D_x^{-\alpha} \cdot \left\{x^{\gamma-\alpha-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\right\} + C_2' D_x^{\alpha-1} \cdot \left\{x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\right\},$$

worin $CC'C_1C_1'C_2C_2'$ willkürliche Constante bedeuten.

Während aber die beiden Ausdrücke I und II nur eine beschränkte Gültigkeit haben, so dass für die Umgebung von $x=1$ und für sehr grosse Werthe der Variablen andere Darstellungsformen nothwendig werden, gilt der Ausdruck III unbeschränkt für die ganze unendliche Ebene, und es ergeben sich aus ihm die für die einzelnen Gebiete convergenten Reihen, je nachdem man unter dem Zeichen D nach steigenden Potenzen von x, $1-x$ oder $\frac{1}{x}$ entwickelt. Durch den Ausdruck III ist also die in Rede stehende Function ebenso allgemein definirt, wie durch die Differenzialgleichung oder durch Riemann's P, während die Definition durch die hypergeometrische Reihe oder durch das ihr proportionale bestimmte Integral gewissen Beschränkungen unterworfen ist.

Bromberg. A. Radicke.

V. Schlegel: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und mit Berücksichtigung verwandter Methoden dargestellt. A. u. d. T. System der Raumlehre. 2. Theil. (Leipzig. Teubner. 1875.)

Der Zweck dieses Werkes ist, die in Grassmann's Ausdehnungslehre niedergelegten Ideen in ähnlicher Weise für die Lehren der modernen Geometrie und Algebra zu verwerthen, wie es im 1. Theil für die Elemente der Geometrie geschehen war. Im Allgemeinen lässt sich die Stellung, welche Grassmann's Arbeiten gegenwärtig zu den Leistungen der Zeitgenossen einnehmen, am besten durch die Worte charakterisiren, mit welchen ein Aufsatz der Math. Annalen über die mathematischen Arbeiten von Clebsch (Bd. 7, S. 12) der Grassmann'schen Leistungen gedenkt: „Man beginnt erst in der letzten Zeit, auf die Grassmann'schen Arbeiten zurückzugehen und bemerkt, dass Grassmann bereits in den vierziger Jahren eine Reihe sehr umfassender Ideen concipirte, welche der Process allgemeiner geometrischer Entwickelung erst in der Zwischenzeit ausgebildet, zum Theil aber noch gar nicht berührt hat“. Da das

Studium der Grassmann'schen Originalwerke einerseits durch die grosse Allgemeinheit und den abstracten Charakter der Untersuchung, andererseits durch den Mangel einer befriedigenden Gliederung grosse Schwierigkeiten bietet, so war es von vornherein das Streben des Verfassers, einerseits durch stufenweises Aufsteigen vom Speciellen zum Allgemeinen, andererseits durch Einfügung des ganzen Stoffes in ein logisch gegliedertes System eine leicht fassliche und übersichtliche Darstellung zu erreichen. Form und Inhalt des zweiten Bandes ist hiernach mehrfach durch die Rücksicht auf den ersten bestimmt worden.

Ueber den Inhalt dieses zweiten Bandes ist Folgendes zu bemerken. Die der Ausdehnungslehre eigenthümlichen Operationen (die sich als Erweiterungen des gewöhnlichen Multiplicationsbegriffs darstellen und die Besonderheit bieten, dass sie im Allgemeinen nicht an Zahlen, sondern an Raumgrössen ausgeführt werden) waren zwar bereits im 1. Bande vollständig aufgestellt und mannigfach angewendet worden. Es fehlten jedoch einige für den Inhalt des 2. Bandes wesentliche Anwendungen, welche nunmehr in der *Einleitung* vorangeschickt sind. Es wird hier zuerst der Begriff des unendlich fernen Punktes erörtert, und seine Identität mit dem der Strecke nachgewiesen. Dann folgt die Zurückführung der Massbeziehungen auf projectivische, zunächst für das Gebiet der Geraden. Ferner wird die Curve n. Grades (α) als Function eines variablen Punktes x dargestellt, und für die Gleichung derselben die allgemeine Form $\alpha x^n = 0$ gefunden, eine Form, durch welche (mit veränderten Exponenten von α und x) nicht nur alle aus der Function ableitbaren Formen (Invarianten, Covarianten etc.) sich darstellen lassen, sondern welche sich auch unmittelbar in jede beliebige Coordinaten-Gleichung verwandeln lässt. Endlich werden aus einem allgemein aufgestellten Multiplicationsbegriff die verschiedenen in der Ausdehnungslehre verwendeten Multiplicationen (einschliesslich der algebraischen) durch Specialisirung abgeleitet, wobei sich die völlige Gleichberechtigung aller dieser Multiplicationen herausstellt.

Die 1. Abtheilung, welche eine Lücke des 1. Bandes auszufüllen bestimmt ist, behandelt die elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte, indem dieselben als Resultate der Bewegung eines Punktes mit Rücksicht auf einen festen Kreis betrachtet werden. Es ergeben sich aus dieser Form der Darstellung mancherlei die Anschaulichkeit und Kürze betreffende Vortheile.

Die 2. Abtheilung (Projectivität von Punkten und Linien) behandelt nach einander Halbirungspunkte und -Linien, harmonische, involutorische und projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel; wobei die Begriffe der Involution und Projectivität auf Vereine von Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, und von Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, ausgedehnt werden. Den Schluss bilden die Eigenschaften des Pascal'schen und des Brianchon'schen Sechsecks. — Die in dieser Abtheilung erscheinenden Methoden und Bezeichnungen haben äusserlich eine nicht geringe Aehnlichkeit mit denen der neueren analytischen Geometrie, wie sie namentlich von Hesse ausgebildet worden. Doch besteht ein wesentlicher begrifflicher Unterschied. Die symbolischen Gleichungen von der Form $a = 0$, durch welche sonst Punkte und Linien dargestellt werden, sind nur abgekürzte Bezeichnungen für mehr oder weniger verwickelte Coordinatenausdrücke. Es muss nun, nachdem der wesentliche Charakter dieser Ausdrücke durch die Abkürzung verschwunden ist, als ein weiterer Fortschritt in der Bezeichnung angesehen werden, wenn es gelingt, diese einfachen Symbole ohne den Umweg durch die Coordinatenausdrücke zu erlangen. Zu diesem Fortschritte führen aber die Methoden der Ausdehnungslehre ganz von selbst, da sie eben lehren, dieselben Rechnungen mit Punkten und Linien auszuführen, welche sonst an den symbolischen Gleichungen dieser Gebilde vollzogen werden. Diese gedankliche Vereinfachung bewirkt gleichzeitig einen engeren Anschluss der geometrischen Deutung an die Rechnung, als er bisher möglich war, und an vielen Stellen eine bedeutende Vereinfachung der Betrachtrachtungen wie der Rechnungen.

Die 3. Abtheilung enthält die Lehre von den zusammengesetzten Grössen, an deren Spitze sich vermöge seiner besonderen einfachen Eigenschaften *der Kreis* stellt. Hier werden vorzugsweise die Sätze über Systeme von Kreisen, die sich in 2 oder 1 Punkte schneiden, abgeleitet. — Es folgt die Lehre von den *Determinanten.* Der Begriff der ursprünglichen Einheiten, wie ihn die Ausdehnungslehre aufstellt, erweist sich hier als ein besonders fruchtbarer, indem er nicht nur eine sehr einfache Definition (die Determinante ist der Zahlfactor eines äusseren Productes aus n linearen Factoren, deren jeder aus denselben n Einheiten abgeleitet ist) und eine angemessene und bequeme Bezeichnung herbeiführt, sondern auch alle Determinantensätze in kürzester und klarster Weise liefert. Der Grund dieser Erscheinung liegt darin, dass alle Regeln und Sätze über

Determinanten in den Eigenschaften der äusseren Multiplication ihren Ursprung haben, und dass die ursprünglichen Einheiten die natürlichen Objecte dieser Operation sind. Der Verfasser gelangt zu dem Schluss, dass die äussere Multiplication dieser Einheiten für die Determinantenlehre von ähnlicher Bedeutung sei, wie das Rechnen mit Polynomen für die Theorie der dekadischen Zahlen. Der Begriff der Functionsdeterminante, speciell der Hesse'schen Determinante (für welche sich, wenn αx^n die gegebene Function und p die Zahl der Variablen ist, der ähnliche Ausdruck $\alpha^p x^{p(n-2)}$ ergibt), führt schliesslich auf die Lehre von den *räumlichen Functionen.* Nachdem die allgemeinen Bildungsgesetze der abgeleiteten Formen (Invarianten, Covarianten etc.) erörtert worden sind, werden die binären Formen 2. 3. und 4. Grades, die Systeme ihrer Formen, sowie die wichtigsten simultanen Systeme, und ihre geometrische Bedeutung betrachtet, von den ternären Formen die quadratischen, und die simultanen Systeme von 2 und 3 solchen Formen. Den Schluss bildet die Erweiterung der in der Einleitung gegebenen projectivischen Darstellung der Massbeziehungen für das Gebiet der Ebene. — Das Eigenartige der Darstellung in diesem Abschnitt besteht in der aus den Gesetzen der Ausdehnungslehre mit Nothwendigkeit sich ergebenden Bezeichnungsweise, welche an die Stelle der sonst üblichen Symbolik tritt. Indem ferner die symbolischen Rechnungen durch die oben erwähnten Multiplicationen ersetzt werden, ergibt sich die geometrische Bedeutung der Formen, sowie ihr Zusammenhang untereinander mit einer überraschenden Einfachheit, ohne dass man nöthig hat, die complicirten Coordinatenausdrücke zu bilden. So sagt z. B., wenn α ein Punktepaar, und x und y Punkte auf derselben Geraden sind, die Gleichung $\alpha xy = 0$, dass x und y mit α harmonisch sind, $(\alpha\beta) = 0$, dass α und β harmonische Punktepaare sind, $(\alpha\beta)x^2 = 0$, dass das Paar $(\alpha\beta)$ mit den Paaren α und β gleichzeitig harmonisch ist, $(\alpha\beta\gamma) = 0$, dass die drei Paare α, β, γ involutorisch sind, etc. Hierbei ist $(\alpha\beta)$ simultane Invariante zweier, $(\alpha\beta\gamma)$ dreier, $(\alpha\beta)x^2$ simultane Covariante von zwei binären quadratischen Formen. — Weniger wichtig für geometrische Zwecke erscheint die Formenbildung durch Multiplication von Determinanten; dieselbe ist jedoch in paralleler Darstellung beigefügt, da sie vorläufig für manche algebraischen Untersuchungen noch nicht zu entbehren ist. Auch auf die canonischen Formen wird wenig Werth gelegt; dieselben werden (mit geometrischer Interpretation) zwar gebildet, jedoch für die Folge nicht weiter benutzt. Im Ganzen tritt durch den Wegfall der Coordinaten eine schärfere Scheidung ein zwischen den wesentlichen Eigenschaften einer Form und denjenigen, welche eben nur in besonderen Beziehungen der Coordinaten bestehen. Es würde die Uebersichtlichkeit und Fasslichkeit der Lehren der modernen Algebra ungemein erhöhen, wenn diese Scheidung des geometrisch Wichtigen von dem rein Algebraischen zur allgemeinen Durchführung gelangte, und wenn die so verschiedenartige, willkürliche und complicirte Symbolik der verschiedenen Autoren einer einheitlichen, sachgemässen und einfachen Bezeichnungsweise Platz machte, wie sie herzustellen im letzten Theile dieses Buches versucht worden ist. Die Hauptbedingung für das Gelingen einer wirklich nützlichen Reform auf diesem Gebiete scheint die Emancipation von den Coordinaten zu sein. Denn bei allem Nutzen, den die Coordinaten auf anderen Gebieten gewähren, ist doch nicht zu übersehen, dass diese dem Gegenstande der Untersuchung fremden Gebilde hier nur zu oft den Blick vom Wesentlichen ablenken, ganz abgesehen von der Weitläufigkeit der Bezeichnungen und Rechnungen, die sich von ihrem Gebrauche nicht trennen lässt.

Waren. V. Schlegel.

R. Hoppe: Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems. (Grunert's Archiv LV. 362—391. LVI. 153—162. 250—266. LVII. 89—106. 255—276. 366—384. LVIII. 37—48.

Das genannte Problem wird vermittelt durch die Darstellung eines der Variation fähigen Systems von Krümmungslinien auf einer mitvariirenden Fläche. Ein solches System wird gewonnen unter Zugrundelegung der ihm entsprechenden Indicatrix der Normale, d. i. eines beliebig gegebenen orthogonalen Curvensystems auf der Kugel für den Radius = 1. Zuerst nämlich bestimmt eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u \partial v} + \frac{\partial m}{\partial u}\frac{\partial \log M}{\partial v} = \frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial M}{M N \partial v} \tag{8}$$

den einen Hauptkrümmungsradius m, woraus dann der andere n gemäss der Relation

$$n\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial (Mm)}{\partial v}$$

ohne neue Integration folgt, und nachher ergeben sich sofort durch blosse Quadratur die Gleichungen der Fläche

$$x = \int \left(m \frac{\partial p}{\partial u} \partial u + n \frac{\partial p}{\partial v} \partial v \right); \; y = \text{etc.}$$

in Parametern der Krümmungslinien u, v. Hier sind die Richtungscosinus der Normale p, q, r, und demnächst die Grössen

$$M^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2; \quad N^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$$

als gegeben in u, v zu betrachten. Da die Integration der Gl. (8) 2 willkürliche Functionen einführt, so löst sie die Aufgabe, die Flächenfamilie von gemeinsamer Indicatrix des Normalensystems zu bestimmen. Man kann nun von da zu der weitern Untersuchung schreiten, welche dreifach orthogonalen Flächensysteme eine Flächenschaar aus jener Familie besitzen, indem man alle hinzugetretenen Constanten mit einem dritten Parameter w variiren lässt, und für u und v Functionen von (u, w) und (v, w) substituirt. Die Bedingungsgleichungen der Orthogonalität nach w sind dann wieder linear, die Integrationen haben meist keine Schwierigkeit, und es handelt sich mehr um Scheidung der Fälle der Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit. In dieser Weise sind in den 5 ersten Artikeln 2 Flächenfamilien behandelt, beide von der Eigenschaft, dass die rechte Seite der Gl. (8) null ist. Bei der ersten besteht die stereographische Projection des Systems der Indicatricen aus 2 Kreisschaaren, bei der zweiten aus einer Schaar Gerader und ihren parallelen Trajectorien. Der 6. Artikel sucht die Familie, welcher die Flächen 2. Grades angehören; der 7. die orthogonalen Flächensysteme, deren eine Schaar selbst 2. Grades ist.

Berlin. R. Hoppe.

R. Hoppe: Beispiel einer einseitigen Fläche. (Grunert's Arch. LVII. 328—334.)

Betrachtung der geschlossenen Fläche

$x = \cos u \cos 2v$; $y = \cos u \sin 2v$; $z = \sin u (\cos v - \cos u \sin v)$

deren eine Seite stetig in die andere verläuft.

Berlin. R. Hoppe.

R. Hoppe: Ueber die Symmetriepunkte des Dreiecks. (Grunert's Arch. 422.)

Die Symmetriepunkte werden nach barycentrischer Bestimmung definirt. Die Betrachtung knüpft sich hauptsächlich an die Beziehung zwischen Punkten und von denselben erzeugte Linien für reciproke Belastung der Ecken. Insbesondere werden die Kegelschnitte untersucht, welche Geraden als reciproke Linien entsprechen.

Berlin. R. Hoppe.

P. Bachmann: Arithmetische Kleinigkeiten. (Zeitschrift für Math. und Physik, 20. Jahrg.)

Unter diesem Titel habe ich zwei kleine Bemerkungen veröffentlicht, deren erste die Aufgabe löst: alle diejenigen pythagorischen Zahlen explicite zu bestimmen, bei welchen die kleineren beiden zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind.

In der zweiten beweise ich den Satz, dass der Quotient

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2a \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2b}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots a \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (a+b) \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots b}$$

eine ganze Zahl sei. Dieser Satz, von Catalan scheinbar aus der Theorie der elliptischen Functionen erhalten, findet sich in den Nouv. annal. de math. par M. Gérono t. 13 als question 1135 aufgestellt; ein Beweis desselben ist bisher daselbst nicht gegeben worden, denn der Satz, welchen Bourguet ebend. t. 14 pag. 89 bewiesen hat, enthält jenen, wie Catalan pag. 179 richtig bemerkt, keineswegs als einen speciellen Fall.

Münster. P. Bachmann.

L. Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme (dritte Mittheilung). (Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. 20, S. 381—422, nebst 2 Tafeln.)

In der Geometrie der Bewegung wurde bis jetzt vorzugsweise die Bewegung der starren ebenen und räumlichen Systeme erforscht und vom kinematischen Standpunkte aus besonders auf die praktische

Verwerthung Rücksicht genommen. Die Emporsteigung zur höheren Allgemeinheit erfordert die Aufhebung der Schranken, welche die bisherigen Grundlagen umschliessen; daher bildet dem Wesen dieser Disciplin gemäss die Voraussetzung bewegter gesetzmässig-veränderlicher Systeme das unbegrenzte fruchtbare Fundament, auf dem sich die höheren Stufen kinematisch-geometrischer Forschung entwickeln. Die Ergebnisse sind in jeder Hinsicht von hoher Allgemeinheit, weil sie auf der breiten Basis der Annahme bewegter veränderlicher Systeme stehen; und die Gesetze, welche sich ergeben, liefern einen unermesslichen Reichthum kinematisch-geometrischer Beziehungen, die specialisirt auch für die Bewegung starrer Systeme gelten. Für die ersten Behandlungen der Bewegung veränderlicher Systeme schien mir die synthetische Methode am zweckmässigsten, weil sie durch die Anschauung zur geometrischen Klarheit und besseren Uebersichtlichkeit führt; daher sind die fundamentalen Beziehungen und die wichtigsten Folgerungen durch rein-synthetische Betrachtungen abgeleitet, in denen zugleich die Directive für eine höhere analytische Behandlung liegen. Die Einwirkung der kinematischen Methode auf die analytische Mechanik wird in der Folge grossen Nutzen bringen und die bekannten Sätze der Phoronomie werden sich als Glieder eines umfassenden grossen Organismus manifestiren.

In den beiden ersten Abhandlungen (Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 19.), welche der oben genannten dritten Mittheilung vorangehen, wurden die Grundzüge der Bewegung ebener Systeme untersucht, welche in ihren verschiedenen Phasen ähnlich, affin, oder collinear bleiben. In der dritten Abhandlung wird die Untersuchung der collinear-veränderlichen ebenen Systeme besonders in Hinsicht auf das wichtige Princip der Umkehrung der Bewegung fortgesetzt, und hierauf werden unsere synthetischen Betrachtungen auf die Bewegung der collinear-veränderlichen räumlichen Systeme, so wie der kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systeme ausgedehnt. Bei einem collinear-veränderlichen System bleibt eine Gerade während der Bewegung in allen Systemphasen eine Gerade; bei dem kreisverwandt-veränderlichen System bleibt jeder Kreis in allen Phasen des Systems ein Kreis, der, wenn sein Durchmesser unendlich gross wird, in eine Gerade übergeht. Eine Gerade, welche wir als einen unendlich grossen Kreis ansehen, verwandelt sich durch den Uebergang von einer Phase zur anderen in einen Kreis. Durch die Untersuchung der Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems werden die ersten Stadien des Weges eröffnet, der zu den höheren Stufen kinematisch geometrischer Beziehung führt. Die Kreisverwandtschaft ist ein besonderer Fall der Verwandtschaft zweiten Grades. Es bleibt dann noch für die nächste Folge die Behandlung der Bewegung solcher veränderlicher Systeme, deren Phasen in Verwandtschaft zweiten Grades stehen, um durch Uebertragung von hieraus zu der Cremona'schen Verwandtschaft zu gelangen. Damit ist dann der Weg zu der höchsten Stufe kinematisch-geometrischer Beziehungen, der Bewegung rational-veränderlicher Systeme gebahnt, deren Phasen in Cremona'scher Verwandtschaft bleiben.

Im ersten Theile der dritten Abhandlung wird die Bewegung der collinearen ebenen Systeme behandelt und der nachstehende fundamentale Satz, zu dem sich der duale von selbst gesellt, abgeleitet.

Sind drei Punkte eines collinear-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen ebenen Systemen, welche die drei festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

Auf diesen wichtigen Satz kann jede conplane Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems zurückgeführt werden; denn während jeder unendlich kleinen Bewegung bleiben drei Systempunkte (die Collineationspole) fest. Ferner ergibt sich aus diesem fundamentalen Satz die Umkehrung der Bewegung. In einem collinear-veränderlichen ebenen System mit drei festen Punkten beschreiben die Punkte $A, B, C \ldots$ einer Systemcurve K, deren Phasen $K_1, K_2, K_3 \ldots$ sind Bahncurven $a, b, c \ldots$; denken wir uns diese Phasen erstarrt, so kann man dieselben als Bahncurven der Punkte einer Curve L ansehen, deren Phasen die Curven $a, b, c \ldots$ sind, und einem anderen collinear-veränderlichen System angehört, welches dieselben drei festen Punkte besitzt. Da die Curven $K_1, K_2, K_3 \ldots$ und die Curven abc.. dieselbe Curve k umhüllen, so kann die Hüllbahncurve k auf zweierlei Weise erzeugt werden, d. h. wir erhalten dieselbe Curve k, wenn die Bewegung umgekehrt wird. Eine Systemcurve K, deren Punkte A, B, C.. sich auf Bahncurven a, b, c.. bewegen, welche mit K zusammenfallen, erzeugt eine Hüllbahncurve k, die mit K identisch ist, und alle Phasen K_1, K_2, K_3.. liegen in K; hüllen diese selbst ein. Solche Curven eines veränderlichen Systems, welche sich in sich selbst bewegen, werden *Selbsthüllcurven* genannt und zeichnen sich durch viele interessante Eigenschaften aus. Als besonderer Fall solcher Curven treten die Kegelschnitte auf, welche in zwei festen Punkten die von diesen nach dem dritten festen Punkt gehenden beiden Geraden berühren, und diese Kegelschnitte haben bei der Bewegung eines rotirenden starren ebenen Systems die in sich selbst bewegten Kreise als Analogon. Bei der allgemeinen conplanen Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems beschreiben die drei Collineationspole eine dreitheilige Curve in der festen Ebene und in dem veränderlichen System. Die erste wird die Collineationspolbahn, die zweite die Collineationspolcurve genannt, und weitere Darlegungen liefern die wichtigen Sätze:

Bei der Bewegung eines collinear-veränderlichen ebenen Systems rollt die Collineationspolcurve auf der Collineationspolbahn.

Eine Phase K_1 einer in einem collinear-veränderlichen ebenen System S liegenden Curve K, welche eine Hüllbahncurve k erzeugt, kann als die Hüllbahncurve von der einem collinear-veränderlichen ebenen System Σ zugewiesenen Curve k angesehen werden; dabei bewegen sich die Punkte des Systems Σ auf solchen Curven, die, wenn sie dem System S angehörten, Punkte umhüllen, und die Phase o_1, der bei der ersten Bewegung auf der Collineationspolbahn ω rollenden Collineationspolcurve o des Systems S ist bei der zweiten Bewegung die Collineationspolbahn, auf der die Curve ω des Systems Σ rollt.

Diese beiden wichtigen Sätze, von denen der zweite das Princip der Umkehrung der Bewegung in sich trägt, gelten ganz allgemein für jede eindeutige Verwandtschaft, also auch für die Bewegung eines ebenen Systems, dessen Phasen in Cremona'scher Verwandtschaft stehen.

In dem zweiten Theil werden die Grundgesetze der bewegten collinear-veränderlichen räumlichen Systeme in analoger Weise wie im ersten Theil synthetisch abgeleitet und die wichtigsten Folgerungen aus dem nachstehenden fundamentalen Satz gezogen:

Sind vier Punkte eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in collinearen räumlichen Systemen, welche die vier festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

Durch eine briefliche Mittheilung des Herrn Reye bin ich nach dem Erscheinen meiner Abhandlung belehrt worden, dass dieser wichtige Satz schon in v. Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage (Heft III, S. 332) enthalten ist; und es ist zu bedauern, dass die unübersehbare Fruchtbarkeit desselben, welche sich durch die kinematisch-geometrische Interpretation ergibt, nicht früher entdeckt wurde. Durch die synthetischen Darlegungen ist dieser Satz zwar nur für vier reelle, so wie für zwei reelle und zwei imaginäre feste Punkte bewiesen; analytisch lässt sich auch leicht seine Gültigkeit nachweisen, wenn alle vier Punkte imaginär sind. Jede unendlich kleine Bewegung eines collinear-veränderlichen räumlichen Systems kann als eine solche mit vier festen angesehen werden. Die Umkehr der Bewegung ergibt sich in gleicher Weise wie für das ebene System, zu den Selbsthüllcurven treten hier als Analogon die *Selbsthüllflächen*; ferner folgt aus jenem fundamentalen Satz die Eigenschaft eines tetraedralen Strahlencomplexes, dass derselbe wandelnd in sich selbst übergeht.

Der dritte Theil enthält die Grundbeziehungen der Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems, welche durch Inversion aus der Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems abgeleitet werden. Das Fundament der Folgerungen bildet der Satz:

Sind zwei Punkte eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems fest, so sind alle Bahncurven der beweglichen Systempunkte entsprechende Curven in kreisverwandten Systemen, welche diese festen Punkte als selbstentsprechende Punkte besitzen.

Da im ähnlich-veränderlichen ebenen System die logarithmischen Spiralen Selbsthüllcurven sind, so ergibt sich durch Inversion, dass im kreisverwandt-veränderlichen ebenen System logarithmische Doppelspiralen als Selbsthüllcurven auftreten.

Durch stereographische Projection wird zu der Bewegung kreisverwandt-veränderlicher ebener Systeme auf der Kugelfläche das Analogon erhalten. Bei der Bewegung des kreisverwandt-veränderlichen Systems tritt zum ersten Male die hohe Allgemeinheit hervor; denn hier ändern sich alle Kreise und alle Gerade gehen in Kreise über, wenn sich das System aus einer Phase in die andere bewegt. Im collinear-veränderlichen System verändert sich die Punktreihe, aber nicht der gerade Träger derselben, eine Gerade bleibt in allen Systemphasen eine Gerade. Durch diese höhere Auffassung werden wir zu wichtigen interessanten Ergebnissen geführt, welche uns eine inhaltsreiche Perspective für die Weiterforschung in dem fruchtreichen Gebiete der kinematischen Geometrie eröffnen; und wir werden zu der Erkenntniss geführt, dass auch in dieser Richtung viele Schätze verborgen liegen, die erst durch tiefere Forschung gehoben werden.

Dresden. L. Burmester.

D. J. Korteweg: Ueber einige Anwendungen eines besonderen Falles der homographischen Verwandtschaft (der Affinität).

(Zeitschrift für Math. und Phys. Jahrg. 21. Heft 1.)

Den bereits von Möbius und Chasles ausgesprochenen einfachen Theoremen über die Lehre der Affinität ein neues anzureihen, war Zweck der Abhandlung. Dazu wurde der Begriff von affinen Figuren eingeführt, welche sich nämlich durch Affinität von einander ableiten lassen, wie z. B. alle Tetraëder, alle Parallelepipede, alle Ellipsoide, etc. Bezeichnet man jetzt allgemein mit A_n eine Figur affin mit einer gegebenen Figur A, so kann folgendes Theorem in allgemeinster Form ausgesprochen werden:

Steht irgend eine Figur A_p zu einer andern Figur B_p in einer Beziehung, welche durch affine Projection nicht geändert wird, und ist A_p die grösste von allen Figuren A_n die in dieser Beziehung denkbar sind, so ist B_p die kleinste aller Figuren B_n, die mit A_p in gleichartige Beziehung gebracht werden können.

Es folgt z. B. aus diesem Theoreme unmittelbar, dass: das grösste Ellipsoid in einem Tetraëder so gelegen sein muss, dass das Tetraëder zu den kleinsten gehört, die um das Ellipsoid beschrieben werden können. Oder gilt es das grösste Ellipsoid, welches die sechs Kanten eines Tetraëders (und nicht ihre Verlängerungen) berührt, so wird dieses Tetraëder das kleinste sein müssen, dessen Kanten (und nicht ihre Verlängerungen) Tangenten des Ellipsoids sind.

Es wird weiter die Affinität auf die Mechanik angewendet und einige Sätze angeführt, die aber grösstentheils schon mehr oder weniger deutlich ausgesprochen in Culmann's statischer Graphik vorkommen. Es ergibt sich daraus z. B.:

In jedem Tetraëder sind die Axen des Centralellipsoids mit den Axen des grössten eingeschriebenen Ellipsoids gleichgerichtet; beide Ellipsoide werden gleichzeitig zu Rotationskörpern.

Breda. J. Korteweg.

S. Günther: Ein stereometrisches Problem. (Archiv der Mathem. und Physik, Band 57.)

Im 56. Bande der gleichen Zeitschrift hatte Bender die Frage discutirt, wie viel congruente Kugeln mit einer Kugel des nämlichen Radius zur Berührung gebracht werden können. Sein Resultat, welches die Maximalzahl 12 ergab, war richtig, allein die Begründung erschien nicht streng genug. In der vorliegenden Arbeit ward demzufolge erstlich durch directe Berechnung gezeigt, dass es in der That nicht mehr als 12 solche Kugeln geben könne, dann aber auch ein Weg angegeben, welcher die betreffende Anzahl direct finden lehrt.

München. S. Günther.

S. Günther: Auflösung eines besonderen Systemes linearer Gleichungen. (Archiv der Mathem. und Physik, Bd. 57.)

In seiner bekannten Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles war Lagrange auf ein gewisses System trigonometrischer Gleichungen geführt worden, mit dessen Auflösung sich später Crelle und Unferdinger eingehend beschäftigt haben. Das betreffende System stellt sich dar als specieller Fall des nachstehenden allgemeineren:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n + a_{1,n}x_{n+1} + \cdots + a_{1,2}x_{2n-1} \\
&\qquad\qquad + a_{1,1}x_{2n} = A_1\,, \\
&a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n - a_{2,n}x_{n+1} - \cdots - a_{2,2}x_{2n-1} \\
&\qquad\qquad - a_{2,1}x_{2n} = A_2\,, \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{2n-1,1}x_1 + a_{2n-1,2}x_2 + \cdots + a_{2n-1,n}x_n + a_{2n-1,n}x_{n+1} + \cdots \\
&\qquad\qquad + a_{2n-1,2}x_{2n-1} + a_{2n-1,1}x_{2n} = A_{2n-1}\,, \\
&a_{2n,1}x_1 + a_{2n,2}x_2 + \cdots + a_{2n,n}x_n - a_{2n,n}x_{n+1} - \cdots \\
&\qquad\qquad - a_{2n,2}x_{2n-1} - a_{2n,1}x_{2n} = A_{2n}\,.
\end{aligned}
$$

Lässt sich auch keine explicite Auflösung dieses Systemes erbringen, so gelingt es doch, die resultirenden Determinanten erheblich zu vereinfachen, und indentificirt man die erhaltenen Relationen mit den von Lagrange erhaltenen Werthen, so ergeben sich gewisse interessante Relationen für Determinanten, deren Elemente gewisse goniometrische Ausdrücke darstellen.

München. S. Günther.

S. Günther: Das independente Bildungsgesetz der Kettenbrüche. (Denkschriften der math.-phys. Klasse der k. k. Academie der Wissenschaften zu Wien. Oct. 1875.)

In der geschichtlichen Einleitung zu diesem Aufsatze werden die Bemühungen aufgezählt, das independente Bildungsgesetz der Näherungs-Zähler und Näherungs-Nenner eines Kettenbruches auszumitteln. Dieselben zerfallen in drei Kategorieen, je nachdem man nämlich direct auf combinatorischem Wege oder aber, wie dies Binet und Zehfuss thaten, durch Auflösung einer trinomischen linearen Differenzengleichung zum Ziele zu gelangen suchte; an dritter Stelle endlich erscheint die eigentliche Determinanten-Darstellung. Da jedoch auch diese keinen Einblick in die Bildungsweise der betreffenden Ausdrücke verstattet, so wird sie hier lediglich zur Basis für eine weitere Entwicklung genommen. Sobald man, was sehr einfach geschehen kann, den Kettenbruch auf die reducirte Form (vom durchgehenden Partialzähler 1) gebracht hat, handelt es sich offenbar noch darum, die allgemeinere symmetrale (gauche) Determinante von voller Diagonale

$$\begin{vmatrix} z & -\alpha_1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & z & -\alpha_2 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & z \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots z & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \alpha_{n-1} & z & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \alpha_n & z \end{vmatrix}$$

in eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe zu entwickeln, so zwar, dass der Coefficient jeder einzelnen Potenz in geschlossener Summenform sich darstelle. Mit Hülfe eines neuen Lehrsatzes wird diese independente Darstellung erbracht und auf dieselbe dann ein Schema zur praktischen Berechnung gegründet. Dass dasselbe mit den anderen bekannten Verfahrungsweisen in Ansehung der praktischen Verwendbarkeit zum mindesten concurriren könne, wird an einem complicirteren Beispiele direct nachgewiesen.

München. S. Günther.

S. Günther: Lehrbuch der Determinantentheorie für Studirende.
(Erlangen 1875. Verlag von Eduard Besold.)

Dieses Buch ist bestimmt, zwischen den zahlreichen guten Elementardarstellungen, welche unsere Literatur besitzt, und dem grossen Handbuch von Baltzer ein Mittelglied zu bilden, auf welches hauptsächlich der akademische Unterricht des ersten Jahres sich stützen kann. Dasselbe zerfällt in 9 Kapitel. Das erste sucht von der historischen Entwickelung des Determinantencalculs in dem durch die Namen Leibnitz und Cauchy fixirten Zeitraume Rechenschaft zu geben, und zwar werden hiebei einige bisher unbekannte Leistungen der Hindenburg'schen Schule ihrem wahren Werthe nach gewürdigt. Das zweite Kapitel enthält eine ausführliche Darstellung der eigentlichen Elemente; das dritte unter dem Titel „Determinanten von besondrer Form" die Lehre vom Differenzenproduct, den adjungirten, symmetrischen und symmetralen Determinanten, wobei auf die Behandlung der sogenannten orthosymmetrischen Determinanten ein besonderes Gewicht gelegt wird. Das vierte Kapitel bietet einen kurzen Abriss der Theorie der Determinanten vom dritten und höheren „Rang" in einer gegen die bahnbrechenden Arbeiten italienischer Mathematiker der Bezeichnung nach verbesserten Form. An fünfter Stelle wird die Lehre von der Elimination im weitesten Sinne mit Anwendungen auf die Fürstenau'sche Methode, die independente Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, recurrirende Reihen, Discriminanten etc., vorgetragen. Das sechste Kapitel enthält eine umfassende Theorie der Kettenbruchdeterminanten, das siebente eine Anzahl geometrischer Beispiele: Dreiecksinhalt, Tetraëdervolumen, Hauptaxenproblem. Dann folgt die Theorie der Functionaldeterminanten, welche nach Begründung der Hauptsätze die Transformation der bestimmten Integrale, das Krümmungsmass und die Lehre von der Hesse'schen Determinante erledigt. Das neunte Kapitel endlich behandelt „lineare Substitutionen" und schliesst mit der Darstellung der Untersuchungen von Weierstrass über bilineare Functionen.

München. S. Günther.

A. Pringsheim: Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Math. Annalen Bd. IX.)

Wie Herr Professor Koenigsberger im 67. Bande des Crelle'schen Journals gezeigt hat, geht eine hyperelliptische Thetafunction mit zwei Variablen durch eine Transformation zweiten Grades in ein Aggregat von vier Theta-Quadraten oder von zwei Theta-Producten über, je nachdem gewisse mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezeichnete, für die Transformation charakteristische ganze Zahlen, die aus den Charakteristiken m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ des zu transformirenden $\vartheta_\lambda(v_1', v_2')$ und den Transformations-Zahlen des Schemas

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' & \varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' & \varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix}$$

zusammengesetzt sind, *sämmtlich* gerade sind oder nicht. Ich befasse mich hier speciell mit der ersten Klasse von Transformationen, also mit Transformations-Gleichungen von der Form

$$\text{(I)}\quad E\,.\,\vartheta_\lambda(v_1', v_2') = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2)$$

und leite zunächst aus deren Betrachtung einen Beweis des für *alle* Transformationen zweiten Grades gültigen Satzes her, dass —

> bei jeder Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung aus dem Ausdrucke für *eine* transformirte ϑ-Function sich *drei und immer nur drei* weitere transformirte ϑ-Functionen durch Substitution von halben Perioden ableiten lassen.

Die Untersuchung der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für alle 15 Hermite'schen Repräsentanten der nicht aequivalenten Transformations-Klassen lehrt nämlich, dass es für jede Transformation zweiten Grades gerade 4 Indices λ von der Beschaffenheit gibt, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade Zahlen werden, dass mithin 4 transformirte ϑ-Functionen in der Form (I) erscheinen. Daraus folgt zunächst, dass aus einem Transformations-Ausdrucke von der Form (I) sich *höchstens* noch drei weitere durch Substitutionen halber Perioden herleiten lassen; und da diese Eigenschaft offenbar unabhängig vom Index λ und dieser besonderen Gestalt der Transformations-Gleichung ist, vielmehr lediglich auf der Beziehung der Argumente

v_1, v_2 und v_1', v_2' beruht, so gilt dieselbe für jede beliebige Transformation 2. Grades. Andererseits lässt sich zeigen, dass die Anwendung aller 15 möglichen Substitutionen halber Perioden auch *nicht weniger* als drei Veränderungen auf den Index λ hervorbringen kann, woraus dann unmittelbar der obige Satz in seiner ganzen Allgemeinheit folgt. Derselbe lässt schliesslich noch eine Erweiterung auf Transformationen von beliebigem paaren Grade zu, sofern man nur diejenigen Transformationen ausschliesst, bei denen alle Transformations-Zahlen durch 2 oder eine Potenz von 2 theilbar sind (was bei Transformationen zweiten Grades vermöge der Bedingungsgleichung $\Sigma_\alpha(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 2$ nicht stattfinden kann).

Eine weitere Betrachtung, die sich unmittelbar an die Transformations-Gleichungen von der Form (I) anknüpfen lässt, bezieht sich auf die linearen homogenen Relationen, wie sie zwischen gewissen Combinationen von 4 Theta-Quadraten stattfinden. — Da die Wahl der Indices α, β, γ, δ in (I) einzig und allein durch die Bedingung beschränkt ist, dass zwischen den betreffenden 4 Theta-Quadraten keine lineare Relation stattfindet, so folgt aus der Unmöglichkeit, für α, β, γ, δ vier Indices ungerader ϑ-Functionen zu wählen, dass zwischen den Quadraten von je vier ungeraden ϑ-Functionen eine solche Relation stattfinden muss. Combinirt man nun die 6 ungeraden ϑ-Functionen sechsmal zu je 4, in der Weise, dass man die Indices cyclisch vorrücken lässt, bestimmt alsdann die Coefficienten der Gleichungen von der Form:

$$(\alpha)\,\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\,\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\,\vartheta_\delta^2(v_1, v_2) = 0$$

durch Substitution halber Perioden und Nullsetzen der Argumente, wendet alsdann auf jede der resultirenden 6 Gleichungen alle 15 möglichen Substitutionen halber Perioden an, so erhält man im Ganzen 96 homogene lineare Relationen von je 4 ϑ-Quadraten in einer sehr übersichtlichen Zusammenstellung. Dieselben sind den von Rosenhain in seinem „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre periodes etc.“ S. 425 erwähnten aequivalent; behufs der Vergleichung hat man nur festzuhalten, dass den von Rosenhain für seine φ-Functionen gewählten Indices

0,0 0,1 0,2 0,3 1,0 1,1 1,2 1,3 2,0 2,1 2,2 2,3 3,0 3,1 3,2 3,3

der Reihe nach die ϑ-Indices

0 01 03 12 $i.1$ -14 $i.13$ $i.02$ 2 $i.24$ 23 01 34 $i.3$ 4 5

entsprechen (wobei der Factor i oder das Zeichen — sich selbstverständlich auf die betreffende ϑ-Function, nicht auf den Index bezieht).

Ich betrachte schliesslich noch den speciellen Fall von Transformationen zweiten Grades, welcher die transformirte hyperelliptische ϑ-Function als ein Product zweier elliptischen ϑ-Functionen und somit die von Jacobi (in Crelle's Journal Bd. 8) auf rein algebraischem Wege hergestellte Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische liefert. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für dieses Zerfallen der transformirten hyperelliptischen Functionen in Producte von elliptischen Functionen ist die, dass der transformirte Modul $\tau_{12}' = 0$ ist und dass mithin $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ vermöge der Gleichung

$$\vartheta_{14}(v_1', v_2', \tau_{11}', 0, \tau_{22}') = \vartheta_1(v_1', \tau_{11}') \cdot \vartheta_1(v_2', \tau_{22}')$$

für die Nullwerthe der Argumente verschwindet. Da aber, wie Herr Koenigsberger gezeigt hat, ein gerades transformirtes ϑ für die Nullwerthe der Argumente nur dann verschwinden kann, wenn es sich in der Form (I) darstellt, und ausserdem für keine der 15 Repräsentanten-Transformationen $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ in der Form (I) erscheint, so folgt, dass man, um Transformationen von der gewünschten Beschaffenheit zu erhalten, jene Repräsentanten-Transformationen noch mit solchen Linear-Transformationen combiniren muss, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für den Index 14 sämmtlich gerade Zahlen werden. Ich zeige nun, dass man hierbei leicht auf die folgenden 4 Linear-Systeme geführt wird:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

welche der Reihe nach mit den vier Grundformen der 15 Repräsentanten combinirt, 15 neue Transformations-Systeme zweiten Grades liefern, die der obigen Bedingung genügen. Die Festsetzung

$$\vartheta_{14}(v_1', v_2')_{v_1' = v_2' = 0} = (\alpha)\,\vartheta_\alpha^{\,2} + (\beta)\,\vartheta_\beta^{\,2} + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^{\,2} + (\delta)\,\vartheta_\delta^{\,2} = 0$$

liefert dann für diese 15 Transformationen 15 verschiedene Bedingungsgleichungen von der Form

$\varphi(\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, \varkappa^2\lambda^2, \varkappa^2\mu^2, \lambda^2\mu^2) = 0$ (wo φ eine Linearfunction bedeutet), unter denen sich auch die von Jacobi behandelte Bedingung

$$\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$$

befindet. Diesen einen Fall führe ich nun vollständig durch, bediene mich jedoch hierbei nicht der betreffenden unter den eben erwähnten Transformationen, sondern — um schliesslich genau das Jacobi'sche Resultat zu erhalten — einer daraus durch ein neues Linear-System abgeleiteten, nämlich der Transformation

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

welche ebenfalls $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ in der Form (I) liefert und für $\vartheta_{14}(0, 0) = 0$ die Bedingung $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$ gibt. Ich berechne nun die Ausdrücke der transformirten Theta's mit den Indices 23, 5, 0, führe darauf die Integrale ein, und drücke die ϑ-Functionen mit den Argumenten v_1, v_2 und v_1', v_2' durch die oberen Integralgrenzen, die mit Null-Argumenten durch die Integralmoduln aus. Die auf diese Weise resultirenden, ziemlich complicirten algebraischen Beziehungen geben die Reduction einer Summe von zwei hyperelliptischen Integralen von der Form:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$(\text{wo } R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)),$$

und ebenso

$$\int_0^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

auf je eine Summe von zwei elliptischen Integralen von der Form:

$$A\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + B\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}\,;$$

Jacobi gibt die Reduction *eines* solchen hyperelliptischen Integrals. Um diese zu erhalten, hat man nur $x_2 = 1$ zu setzen, wodurch $y_2 = -y_1$ wird: alsdann gehen die erwähnten algebraischen Beziehungen genau in die von Jacobi gegebenen über, sobald man die Jacobi'schen Bezeichnungen in der richtigen Weise einführt. — Endlich wird noch erwähnt, dass die auf zwiefache Weise zu ermöglichende Bestimmung der Constanten A, B — einmal durch Einsetzen der algebraischen Transformations-Ausdrücke, dann auch vermöge der Beziehung zwischen v_1, v_2 und v_1', v_2' — eine Beziehung für die Periodicitäts-Moduln der hyperelliptischen Integrale von der Eigenschaft $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$ liefert. Dieselbe lautet

$$\frac{K_{11}}{K_{21}} = -\frac{K_{11}+2K_{12}}{K_{21}+2K_{22}} = -\varkappa\lambda$$

wo K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} die bekannten, sog. reellen Periodicitäts-Moduln des betreffenden hyperelliptischen Integrales bedeuten.

Berlin. A. Pringsheim.

Hamburger: Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. (Borch. J. Bd. 81. S. 243—280.)

Hinsichtlich der Systeme simultaner partieller Differenzialgleichungen, in welchen die Zahl der Gleichungen mit der Anzahl der abhängigen Variablen übereinstimmt, sind dem Verf. ausser der von Jacobi (Crelles J. Bd. II. S. 321) ausgeführten Integration einer besonderen Klasse derselben, nämlich der s simultanen Gleichungen:

$$A_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial z_1}{\partial x_n}=B_1,\ \cdots\ A_1\frac{\partial z_s}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial z_s}{\partial x_n}=B_s$$

$$(A_1\,..\,A_n,\ B_1\,..\,B_s \text{ Functionen von } x_1\,..\,x_n,\ z_1\,..\,z_s)$$

keine allgemeineren Untersuchungen bekannt geworden. Man kann indess die Methoden von Monge und Ampère zur Integration partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit 2 Veränderlichen und namentlich die Erweiterung derselben durch Herrn Natani (Die höhere Analysis in 4 Abtheilungen. Berlin 1866, p. 365—390) auf Gleichungen höherer Ordnung und mit mehr unabhängigen Variablen als Beiträge zur Theorie der simultanen partiellen Differenzialgleichungen bezeichnen.

In der vorliegenden Abhandlung, welche durch die erwähnten Natani'schen Untersuchungen veranlasst ist, wird zunächst folgendes System von n linearen partiellen Differenzialgleichungen mit x und y als unabhängigen und $z_1\,..\,z_n$ als abhängigen Variablen betrachtet:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1^1 p_1+\cdots+a_n^1 p_n+\alpha_1^1 q_1+\cdots+\alpha_n^1 q_n=e_1\\ \vdots\\ a_1^n p_1+\cdots+a_n^n p_n+\alpha_1^n q_1+\cdots+\alpha_n^n q_n=e_n, \end{cases}$$

wo $p_\varkappa=\dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial x}$, $q_\varkappa=\dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial y}$, und die Coefficienten a, α, e Functionen von $xyz_1 \dots z_n$ bedeuten. Die Aufgabe ist, die Integration des Systems (1), wenn möglich, auf die Integration von Systemen totaler Differenzialgleichungen zurückzuführen. Zu dem Ende addirt man die mit $l_1 \dots l_n$ multiplicirten Gleichungen (1) zu einander und setzt die Coefficienten der p und q in der resultirenden Gleichung den entsprechenden Coefficienten in der identischen Gleichung

$$\lambda_1 dz_1 + \lambda_2 dz_2 + \cdots + \lambda_n dz_n = p_1 \lambda_1 dx + \cdots + p_n \lambda_n dx \\ + q_1 \lambda_1 dy + \cdots + q_n \lambda_n dy$$

proportional. Hierdurch ergeben sich zur Bestimmung der Verhältnisse der Grössen l die n Gleichungen

$$l_1(\alpha_s^1 - a_s^1 \mu) + \cdots + l_n(\alpha_s^n - a_s^n \mu) = 0 \qquad (s = 1, 2 \dots n),$$

wo μ bestimmt ist durch die Gleichung $n$ten Grades

$$f(\mu) = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 - a_1^1 \mu \cdots \alpha_1^n - a_1^n \mu \\ \vdots \\ \alpha_n^1 - a_n^1 \mu \cdots \alpha_n^n - a_n^n \mu \end{vmatrix} = 0,$$

und für die Verhältnisse der Grössen λ wird erhalten:

$$\lambda_1 : \cdots : \lambda_n = l_1 a_1^1 + \cdots + l_n a_1^n : \cdots : l_1 a_n^1 + \cdots + l_n a_n^n \\ = l_1 \alpha_1^1 + \cdots + l_n \alpha_1^n : \cdots : l_1 \alpha_n^1 + \cdots + l_n \alpha_n^n$$

Führt man noch ein $\nu = \dfrac{l_1 e_1 + \cdots + l_n e_n}{l_1 a_1^1 + \cdots + l_n a_1^n}$, so lauten die zu integrirenden Systeme totaler Differenzialgleichungen

(2) $$dy = \mu dx, \qquad \lambda_1 dz_1 + \cdots + \lambda_n dz_n = \lambda_1 \nu dx.$$

Die Anzahl derselben ist gleich der Zahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(\mu) = 0$, also im Allgemeinen gleich n, der Fall gleicher Wurzeln macht besondere Erörterungen erforderlich, die wir hier übergehen; nur sei im Allgemeinen bemerkt, dass die Anzahl der Systeme (2) verringert wird und zwar für jede k-fache Wurzel μ um $k - 1$, dass aber in den Fällen, wo das System der zugehörigen Verhältnisse der Grössen l unbestimmt wird, indem die l sich als lineare homogene Functionen von s derselben $(1 < s \leq k)$ sich ausdrücken, die Anzahl der Gleichungen des entsprechenden Systems (2) sich um $s - 1$ vermehrt. In dem besonderen Falle, dass das Verhältniss $a_k^i : \alpha_k^i$ für alle i und k constant ist, werden alle Grössen l und also auch λ willkürlich und man erhält statt der n Systeme (2) ein einziges System von $n + 1$ totalen Differenzialgleichungen zwischen den $n + 2$ Variablen $xyz_1 \dots z_n$, also ein

System gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Dieser Fall tritt nur ein bei dem oben erwähnten Jacobi'schen System simultaner partieller Differenzialgleichungen mit 2 unabhängigen Veränderlichen.

Betreffs des Zusammenhangs der Integrale der Systeme (2), ihre Integrabilität vorausgesetzt, mit den Integralen des Systems (1) wird ein alle in Betracht kommenden Fälle umfassender Satz bewiesen, welcher für den Fall lauter ungleicher Wurzeln der Gleichung $f(\mu) = 0$ folgendermassen lautet:

Sind die beiden Integrale des der Wurzel μ_k entsprechenden Systems (2)

$$u_1^k = \text{const.}, \qquad u_2^k = \text{const.},$$

dann stellen

$$\varphi_1(u_1^1, u_2^1) = 0, \qquad \varphi_2(u_1^2, u_2^2) = 0 \cdots \varphi_n(u_1^n, u_2^n) = 0$$

wo $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ willkürliche Functionen bezeichnen, die allgemeinen Lösungen des Systems (1) dar. Es folgt alsdann die Angabe der Bedingungen, welche die Coefficienten des Systems (1) erfüllen müssen, wenn die Systeme (2) unbeschränkt integrabel sein sollen, wobei nur der Fall lauter ungleicher Wurzeln der Gleichung $f(\mu) = 0$ in Betracht gezogen ist. Die Zahl der Bedingungen reducirt sich bedeutend, wenn die Coefficienten des Systems (1) die Functionen $z_1 \ldots z_n$ selbst nicht enthalten und in dem besonderen Falle, wo die Coefficienten a und α sämmtlich constant und die e blosse Functionen von x und y sind, lässt sich die Integration durch blosse Quadraturen bewerkstelligen.

Eine directe Bestätigung und zugleich Erweiterung der im Vorhergehenden erlangten Ergebnisse wird dadurch gewonnen, dass nunmehr die Form

$$\varphi\Big(F(xyz_1 \ldots z_n),\, f(xyz_1 \ldots z_n)\Big) = 0, \tag{3}$$

in welcher die allgemeinen Lösungen des Systems (1) erscheinen, selbst zum Ausgangspunkt der Untersuchung genommen wird. Durch partielle Differenziation der Gleichung (3) nach x und y und Elimination der willkürlichen Function φ gelangt man zu einer partiellen Differenzialgleichung, in welcher die partiellen Derivirten p, q theils linear, theils in den Verbindungen $p_r q_s - q_r p_s$ auftreten, während die aus der Form (3) resultirende partielle Differenzialgleichung in dem Falle einer einzigen abhängigen Variablen $z (n = 1)$ bekanntlich stets linear ist. Andererseits bestehen zwischen den Coefficienten gewisse Relationen, deren Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$ ist. Stellt man nun die Bedingung, dass die in Rede stehende partielle Differenzialgleichung linear sein soll, so erhält man zwischen den Coefficienten der p und q in derselben eine Anzahl Relationen, identisch mit denen, welche von den entsprechenden Coefficienten der aus (1) durch Multiplication mit den Grössen l und Addition entstandenen Gleichung vermöge der Wahl der l erfüllt werden. Von diesem Gesichtspunkte erhellt die eigentliche Bedeutung der oben angewandten Multiplicatoren l. Die Gleichungen $F =$ const., $f =$ const. erweisen sich als die Integrale eines Systems zweier totaler Differenzialgleichungen, welches dem System (2) aequivalent ist. Auch die Nothwendigkeit des Auftretens von Integrabilitätsbedingungen in dem Falle $n > 1$ ergibt sich als eine unmittelbare Folge der Integralform (3). In dem allgemeinen Falle, in welchem die Coefficienten der Verbindungen $p_r q_s - q_r p_s$ in der aus (3) resultirenden partiellen Differenzialgleichung nicht verschwinden, lässt sich ebenfalls leicht ein System zweier totaler Differenzialgleichungen aufstellen, dessen Integrale $F =$ const., $f =$ const. sind. Hierdurch ist ein Weg für die Integration eines Systems von n partiellen Differenzialgleichungen gegeben, von denen die $k$te die Form hat:

$$(4) \quad a_1^k p_1 + \cdots + a_n^k p_n + \alpha_1^k q_1 + \cdots + \alpha_n^k q_n + \sum_{r,\,s} \beta_{r,\,s}^k (p_r q_s - q_r p_s) = 0$$
$$(r, s = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

Die allgemeinen Lösungen haben wieder die Form (3). Da von den oben erwähnten $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen zwischen den Coefficienten der aus (3) abgeleiteten partiellen Differenzialgleichung durch die Wahl der auch hier angewandten Multiplicatoren l nur n befriedigt werden können, so bleiben von den Coefficienten in (4) selbst noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Relationen zu erfüllen, abgesehen von den Integrabilitätsbedingungen, welche von den Systemen totaler Differenzialgleichungen, auf deren Integration die Integration von (4) zurückgeführt wird, befriedigt werden müssen.

Es folgt eine Anwendung dieses Integrationsverfahrens auf die Integration einer partiellen Differenzialgleichung $n$ter Ordnung, deren Form, als eine Verallgemeinerung der Ampère'schen Gleichung, von Herrn Natani herrührt, und für deren Integration er zugleich einen Weg angegeben hat. Für die lineare partielle Differenzialgleichung $n$ter Ordnung (verallgemeinerte Monge'sche), die in der ersteren als specieller Fall enthalten ist, hat Herr Natani die Rechnung ausgeführt und die in der vorliegenden Abhandlung auf anderem Wege erhaltenen Resultate stimmen mit den Natani'schen überein.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die in den allgemeinen Entwicklungen angewandten Principien in ihrer Geltung keineswegs auf die Zahl von 2 unabhängigen Variablen beschränkt sind, dass jedoch die Zahl der von den Coefficienten zu erfüllenden Bedingungen mit der Zahl der unabhängigen Variablen in progressiver Weise wächst und so der Bereich der Anwendbarkeit dieses Integrationsverfahrens immer mehr verengt wird. Indem ferner nach der Lagrange'schen Methode ein System nicht linearer partieller Differenzialgleichungen leicht auf ein System linearer zurückgeführt wird, liegt auch die Integration des ersteren Systems unter gewissen Integrabilitätsbedingungen in unserer Hand — ein Gegenstand, dessen Erörterung für eine andere Gelegenheit vorbehalten bleibt.

Berlin. Hamburger.

A. Mayer: Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung. (Mathem. Ann. Bd. IX. S. 347—370.)

Im 20. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik hat Herr Weiler eine neue, veränderte Darstellung seiner bereits 1863 in demselben Journale veröffentlichten Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung gegeben. Diese Methode, die es zum ersten Male aussprach, dass man zur vollständigen Lösung einer gegebenen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit weit weniger Integrationen auskommen könne, als nach der Methode von Jacobi nöthig sind, war früher ganz unverständlich geblieben und würde daher kaum dauernde Beachtung gefunden haben, wenn nicht Clebsch (Borchardt's Journal 65) gezeigt hätte, dass sich entsprechende Integrationsvereinfachungen auch durch geschickte Modification der Jacobi'schen Methode erzielen lassen. Neuere Arbeiten haben gelehrt, dass sich die Anzahl der zur vollständigen Lösung einer partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung erforderlichen Integrationen noch weiter erniedrigen lässt. Da es aber nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Ordnung dieser Integrationen ankommt und letztere bei der Methode von

Weiler, wie bei der von Clebsch zwischen bestimmten Grenzen variiren kann, so besitzen diese Methoden auch jetzt noch nicht bloss historischen Werth. Die Weiler'sche Methode zeichnet sich überdies vor allen anderen Methoden noch besonders dadurch aus, dass sie zum grössten Theile auf ganz anderer Grundlage beruht. Aus diesen Gründen schien es wünschenswerth, die Weiler'sche Methode von den Unklarheiten und zum Theil auch Unrichtigkeiten zu befreien, die auch in der neuen Weiler'schen Bearbeitung das Verständniss noch ausserordentlich erschweren, und den Versuch zu machen, den eigenthümlichen Weg, den diese Methode einschlägt, in möglichst klarer und präciser Weise auseinanderzusetzen.

Leipzig. A. Mayer.

H. Durège: Ueber die nichtpolaren Discontinuitäten. (Sitz.-Ber. der Wiener Acad. Bd. 73. Februar 1876.)

Es wird bei der speciellen Function

$$\frac{c^2}{c - e^{\frac{1}{z}}},$$

in welcher c eine beliebige Constante bedeutet, untersucht, welcher Art die Annäherung der Variablen z an den Nullpunkt sein muss, damit diese Function unendlich gross werde, $e^{\frac{1}{z}}$ also den willkürlich vorgeschriebenen Werth c annehme. Dies tritt ein, wenn z eine die Ordinatenaxe im Nullpunkte berührende archimedische Spirale durchläuft und sich auf dieser sprungweise dem Nullpunkte nähert. Die Gestalt der Spirale und die auf ihr zu machenden Sprünge sind in bestimmter Weise von dem vorgeschriebenen Werthe c abhängig.

Prag. H. Durège.

M. Krause: Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen (Fortsetzung). (Math. Annalen. Bd. IX.)

Diese Arbeit schliesst sich aufs engste an eine frühere des Verfassers an (Math. Ann. Bd. VIII).

Zunächst wird der in der letzteren unbeachtet gebliebene Fall, dass P, Q, R mit n einen gemeinsamen Theiler haben, betrachtet. Es folgt dann eine Angabe der Methode, wie sämmtliche Gleichungen $P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$ aufgestellt werden können, zu deren Wurzeln Functionen $\varphi(\tau)$ gehören, die von einander verschiedene Lösungen der Discriminante sind. Drittens wird festgestellt, wie vielfach eine jede Wurzel der Discriminante ist und auf Grund dieser Resultate letztere in Factoren zerlegt, die lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzen. Endlich folgen numerische Beispiele für die Transformationszahlen $n = 15, 21, 31, 33, 35$.

Es sei schliesslich bemerkt, dass die beiden zusammengehörigen Arbeiten eine Verallgemeinerung derjenigen Sätze enthalten, die Hermite (Comptes rendus 1859, tome 49) für Primzahltransformationen ohne Beweis aufgestellt hat.

Breslau. M. Krause.

F. Klein: Ueber den Zusammenhang der Flächen. (Mathematische Annalen. Bd. IX. S. 476—482.)

Die Lehre vom Zusammenhange der Flächen wurde ursprünglich von Riemann zum Zwecke functionentheoretischer Untersuchungen entwickelt und unterliegt daher, sowie sie gewöhnlich vorgetragen wird, implicite mannigfachen, durch das besondere Ziel bedingten Beschränkungen, von denen sie befreit werden muss, wenn sie auf alle die Gebilde angewandt werden soll, mit denen sich die Geometrie beschäftigt. Der Verf. wurde zu der hiermit ausgesprochenen Auffassung geführt, als er es unternahm (Math. Ann. Bd. VI), für die von ihm ebenda bestimmten, gestaltlich unterschiedenen Typen der Flächen dritter Ordnung den Zusammenhang abzuzählen. Indem er glaubte, einem analogen Versuche Schläfli's (Annali di Matematica. T. V) entgegentreten zu müssen, entwickelte er (Math. Ann. Bd. VII) eine Methode, um den Zusammenhang solcher

Flächen zu bestimmen, die sich durchs Unendliche erstrecken, und hob andererseits hervor, dass bei diesen Untersuchungen nicht sowohl von der Fläche schlechthin als von der Flächen*seite* gesprochen werden muss, so dass also solche Flächen, bei denen man von einer Seite ohne Ueberschreitung etwaiger Randcurven auf die andere Seite gelangen kann, als *Doppelflächen* zu betrachten sind. [Schläfli hat neuerdings (Annali. T. VI) die Richtigkeit der gegen seine erste Abzählung gemachten Einwände anerkannt; seine nun gegebenen Resultate sind von den bez. des Verf. nur dadurch unterschieden, dass Schläfli gewisse nach Zweckmässigkeitsrücksichten zu treffende Festsetzungen anders auswählt als der Verf.] — In der gegenwärtigen Notiz hat der Verf. zunächst selbst eine Uebereilung zu berichtigen, die ihm in dem genannten Aufsatze (Math. Ann. Bd. VII) begegnet war (eine genauere Auseinandersetzung würde hier zu weit führen); sodann erläutert er den Begriff der Doppelfläche ausführlicher, indem er für denselben eine Definition aufstellt, die ihn als unabhängig erscheinen lässt von der Art oder selbst der Existenz des die Fläche umgebenden Raumes. Er wird dadurch überhaupt verwendbar für zweifach ausgedehnte beliebige Mannigfaltigkeiten, und so verwerthet ihn der Verf. beispielsweise dazu, um die *Liniencongruenzen* erster Ordnung und Klasse, die getrennte (reelle oder imaginäre) Directricen besitzen, auf ihren Zusammenhang zu untersuchen.

München. F. Klein.

L. Schläfli: Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen

$$\overset{\alpha}{I}(\beta_1 x),\quad \overset{\alpha}{I}(\beta_2 x),\quad \overset{\alpha}{I}(\beta_3 x),\ \ldots,$$

wo β_1, β_2, β_3, ... die positiven Wurzeln der Gleichung $\overset{\alpha}{I}(\beta) = 0$ vorstellen. (Mathem. Annalen. Band X. Heft 1.)

Die Arbeit hat in Bezug auf den gebrauchten Integrationsweg Gemeinschaft mit der Abhandlung von Hermann Hankel im 8. Bande der Annalen (S. 471. Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen), unterscheidet sich aber, wie mir scheint, durch einen naturgemässeren Gang und näheren Anschluss an das sichere analytische Gebiet.

Bern. L. Schläfli.

L. Koenigsberger: Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen. (Journal für reine und angew. Mathematik. Band 81. Heft 3.)

Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde einer ausführlicheren Darstellung einer allgemeinen Theorie der hyperelliptischen Integrale entnommen und musste daher mit der Angabe wenigstens derjenigen Bezeichnungen und Theoreme beginnen, welche zur Lösung des Reductionsproblems der Transformation sowie zur Aufstellung der allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen nöthig waren.

Die Integrale der drei Gattungen stellten sich der Definition gemäss, für *keinen* Punkt der zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1})}$$

gehörigen Riemann'schen Fläche unendlich zu werden, oder für *einen* Punkt z_1 derselben algebraisch unendlich von der ersten Ordnung zu sein, oder endlich für *zwei* beliebig gewählte Punkte derselben z_1, $\varepsilon_1\sqrt{R(z_1)}$; z_2, $\varepsilon_2\sqrt{R(z_2)}$ so logarithmisch unendlich zu werden, dass die Coefficienten A und B der logarithmischen Glieder

$$A\log(z-z_1) \quad \text{und} \quad B\log(z-z_2)$$

sich zu Null ergänzen, in der folgenden Form dar:

$$I(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\, dz$$

$$E(z) = M\int_{z_0}^{z}\left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z-z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z-z_1)^2\sqrt{R(z)}}\right] dz + I(z)$$

$$\Pi(z) = M\int_{z_0}^{z}\left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z-z_1} - \frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z-z_2}\right]\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + I(z);$$

das Hauptintegral dritter Gattung sollte als Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive und negative Einheit haben; dieses und seine successiven Differenzialquotienten nach einem der Unstetigkeitspunkte z_1 lieferten in linearer Verbindung mit bestimmten Coefficienten versehen ein bestimmtes hyperelliptisches Integral, welches in einem Punkte z_1, der weder ein Verzweigungspunkt noch der unendliche entfernte Punkt sein sollte, wie eine vorgelegte Function algebraisch und logarithmisch unendlich, im

Punkte z_2 logarithmisch unendlich ist, abgesehen von einem Integrale erster Gattung, dessen Coefficienten unbestimmt bleiben. Diese Darstellung liefert aber ein Mittel, jedes hyperelliptische Integral, welches in den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ unendlich wird wie resp.

$$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha(z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha(z - z_\alpha)^{-2} + \cdots + K_\alpha(z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$$

in der Form einer Summe von einzelnen hyperelliptischen Integralen darzustellen, von denen jedes in *einem* z_α-Punkte in der vorgeschriebenen Weise und in einem willkürlich angenommenen, aber für alle diese Integrale demselben Punkte logarithmisch unendlich wird; der Nachweis dass es nur *ein* solches hyperelliptisches Integral gibt und dass keine andere Function noch diesen Bedingungen genügt, liefert das Dirichlet'sche Princip für diese Klasse doppelblättriger Riemann'scher Flächen, genau wie ich es für elliptische Integrale in meinen „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" durchgeführt habe. Das allgemeine hyperelliptische Integral muss nun auf feste Normalformen gebracht werden, und es wird die Bestimmung der Coefficienten in der Zerlegungsformel

$$\begin{aligned}\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}} = {} & \frac{C_1\sqrt{R(z_1)}\,dz}{(z - z_1)\sqrt{R(z)}} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{C_n\sqrt{R(z_n)}\,dz}{(z - z_n)\sqrt{R(z)}} \\ & + \frac{l^{(0)}z^{2p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{l^{(1)}z^{2p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{l^{(p-1)}z^{p}\,dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + \frac{k^{(p)}z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{k^{(p+1)}z^{p-2}\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \frac{k^{(2p-1)}\,dz}{\sqrt{R(z)}} \\ & + \frac{d}{dz}\left\{f(z)\sqrt{R(z)}\right\}dz,\end{aligned}$$

wenn

$$l^{(\nu)} = \sum_1^\nu{}^{\varrho}\, l_\varrho^{(\nu)} - l_0^{(\nu)}, \quad k^{(\nu)} = \sum_1^\nu{}^{\varrho}\, k_\varrho^{(\nu)} - k_0^{(\nu)}, \quad f(z) = \sum_1^\nu{}^{\varrho}\, f_\varrho(z) - f_0(z),$$

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1}z + B_{2p},$$

$$\begin{aligned}F_r(t) = {} & \frac{2p - 2r - 1}{2}At^r + \frac{2p - 2r}{2}B_0 t^{r-1} + \frac{2p - 2r + 1}{2}B_1 t^{r-2} \\ & + \cdots + \frac{2p - r - 2}{2}B_{r-2}t + \frac{2p - r - 1}{2}B_{r-1}\end{aligned}$$

gesetzt wird, durch die Beziehungen gegeben

$$C_\varrho = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t - z_\varrho)^{-1}}, \qquad l_\varrho^{(\nu)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\varrho}\frac{F_\nu(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t - z_\varrho)^{-1}},$$

$$l_0^{(\nu)} = \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty\frac{F_\nu(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}},$$

und ähnliche Ausdrücke für die Grössen k und $f(z)$, somit auf die Herstellung der Coefficienten der um die Unstetigkeitspunkte von $F(z)$ und den unendlich entfernten Punkt genommenen Entwicklungen gewisser Functionen zurückgeführt, wie es Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen für die elliptischen Integrale und Herr Fuchs in seiner Arbeit über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale in ähnlicher Form für hyperelliptische Integrale gethan haben. Nach Herstellung des allgemeinen hyperelliptischen Integrales aus gegebenen Discontinuitäten und Zerlegung desselben in feste Normalformen, mussten die Relationen ermittelt werden, welche sich mit Anwendung des bekannten Princips der Integration von

$$\int I dI_1$$

ergeben, worin I und I_1 zwei aus beliebig gegebenen Discontinuitäten construirte, zu derselben Fläche gehörige hyperelliptische Integrale bedeuten, und die geschlossene Integration über die gesammte Begrenzung der nach Ausschliessung der Unstetigkeiten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelten Riemann'schen Fläche auszudehnen ist; das gewonnene allgemeine, in den Nachrichten der Göttinger Societät vom April v. J. veröffentlichte Resultat, über das weiter unten referirt wird, wird für die in der vorliegenden Arbeit angestellte Untersuchung nur in dem speciellen Falle gebraucht, welcher für solche Hauptintegrale, deren Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem verschwinden, den bekannten in der Form

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dH(z, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dH(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$$

enthaltenen Satz von der Umkehrung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte lieferte. Sodann wird noch das Abel'sche Theorem, das gleich nachher für die betrachteten Hauptintegrale gebraucht wird, für das allgemeine hyperelliptische Integral in der Art entwickelt, dass man dasselbe aus einer Summe von solchen Integralen zusammensetzt, die nur in zwei Punkten logarithmisch unendlich werden.

An die Erwähnung des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale, welches zeigt, dass einer transcendenten Beziehung, nämlich einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung zwischen den oberen und unteren Grenzen jener Integrale entsprechen kann, knüpft sich die Frage, allgemein die Bedingungen dafür zu untersuchen, dass für eine additive Verbindung gleichartiger und ungleichartiger hyperelliptischer Integrale verschiedener Ordnung, elliptischer Integrale, algebraischer Functionen der Integralgrenzen und Logarithmen von algebraischen Functionen dieser Grössen algebraische Beziehungen zwischen den Grenzen dieser Integrale bestehen, und es wird gezeigt, mit Hülfe von Betrachtungen, wie sie Abel für elliptische Integrale angestellt, dass das allgemeine Transformationsproblem auf die Untersuchung eines Systems von Differenzialgleichungen

$$\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{dz_p}{\sqrt{R(z_p)}} = \frac{f_0(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_0(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_0(Y_p)\,dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}$$

$$\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}} = \frac{f_1(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_1(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_1(Y_p)\,dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{z_1^{p-1}\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2^{p-1}\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z_p)}} = \frac{f_{p-1}(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_{p-1}(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_{p-1}(Y_p)\,dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}}$$

führt, worin $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ die Lösungen einer Gleichung $p$ten Grades sein sollen, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_p,\quad \sqrt{R(z_1)},\quad \sqrt{R(z_2)},\ \ldots\ \sqrt{R(z_p)}$$

zusammengesetzt sind, während die zugehörige Irrationalität mit Hülfe eben dieser Grössen rational von den resp. Y abhängen sollen.

An diese Reduction des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale, wie es wegen der Natur der Grössen $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ genannt werden kann, knüpft sich nun naturgemäss die Frage nach der allgemeinsten Relation zwischen hyperelliptischen Integralen. Abel hat sich in seiner berühmten Arbeit „précis d'une théorie des fonctions elliptiques" mit der Frage beschäftigt, welches die allgemeinste Beziehung zwischen einer beliebigen Anzahl von elliptischen Integralen mit derselben Variabeln und demselben Modul sei und zeigte, dass, mit Zugrundelegung der von ihm gewählten Bezeichnungen für das elliptische Integral erster und dritter Gattung, dieselbe durch die Gleichung

$$\beta\pi(x) - \frac{2m_1 \varDelta\alpha_1}{\alpha_1} \Pi'(\alpha_1) - \frac{2m_2 \varDelta\alpha_2}{\alpha_2} \Pi'(\alpha_2) - \cdots - \frac{2m_n \varDelta\alpha_n}{\alpha_n} \Pi'(\alpha_n)$$
$$= \log \left\{ \frac{f(x) + \varphi(x) \varDelta x}{f(x) - \varphi(x) \varDelta x} \right\} + C$$

dargestellt werde, in welcher die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ der Gleichung

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2} \ldots (x^2-\alpha_n^2)^{m_n}$$

genügen müssen, worin die eine der Functionen $f(x)$, $\varphi(x)$ grade, die andere ungrade ist.

Mit Hülfe des oben bewiesenen Transformationssatzes führt man die analoge Frage für hyperelliptische Integrale auf die einfachere zurück, wann ein hyperelliptisches Integral mit der oberen Integrationsgrenze z_1 und der Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ einer algebraisch-logarithmischen Function gleich sein kann, welche selbst oder für welche das Argument der Logarithmen rational aus z_1 und $\sqrt{R(z_1)}$ zusammengesetzt ist, und man findet leicht durch Einführung solcher hyperelliptischen Hauptintegrale dritter Gattung, deren Periodicitätsmoduln an allen Querschnitten eines Systems verschwinden, vermöge des Satzes von der Vertauschung der Grenzen und Unstetigkeitspunkte als allgemeinste zwischen gleichartigen hyperelliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen stattfindende Relation

$$m_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\pm\sqrt{R(a_1)}\,dz}{(z-a_1)\sqrt{R(z)}} + m_2 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\pm\sqrt{R(a_2)}\,dz}{(z-a_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + m_r \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{\pm\sqrt{R(a_r)}\,dz}{(z-a_r)\sqrt{R(z)}}$$
$$+ \beta_0 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \beta_1 \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \beta_{p-1} \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$= \log \left\{ \frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}} \cdot \frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}} \right\},$$

worin $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung mit der aufgestellten Bedingung des Verschwindens der Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem zusammenhängt, und $a_1, a_2, \ldots a_r$ der Gleichung genügen

$$f_\varrho(z)^2 - g_r(z)^2 R(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2} \ldots (z-a_r)^{m_r}.$$

Dresden. L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen.
(Mathematische Annalen. Band IX. Heft 4.)

Herr Hermite hat in einem in den Annali di Matematica (Ser. II. a. t. II. F. II.) veröffentlichten Briefe an Herrn Brioschi zwischen den Coefficienten der im Bereiche des Nullpunktes gültigen Maclaurin'schen Entwicklung der Functionen

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}=\sum\alpha_nx^{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}\int\limits_0^x\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}=\sum\beta_nx^{2n+1}$$

und den Coefficienten der Reductionsformel des Integrals

$$\int\limits_0^x\frac{(\varkappa^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

$$=P_n\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}-A_n\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}+B_n\int\limits_0^x\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

auf ein Integral erster und zweiter Gattung und einen algebraischen Theil die Beziehungen gefunden

$$A_n=\beta_n\,,\quad B_n=\alpha_n\,;$$

Herr Thomae hat gleichzeitig diesen Gegenstand im Journal für reine und angewandte Mathematik (Bd. 80) behandelt und ist zu demselben Resultate gelangt. Es schien mir nun nicht uninteressant, die eigentliche Quelle jener Relationen, aus der diese ohne weitere Rechnung sich unmittelbar ergeben, in den Formen der Reductionscoefficienten zu bezeichnen, wie sie Herr Weierstrass aufgestellt hat (s. Vorl. 14 meiner „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen"); da nämlich — ich habe dies in der vorliegenden Arbeit nicht weiter ausgeführt —

$$\int\frac{\varkappa^{2n+2}x^{2n+2}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}=\frac{\varkappa^{2n+4}l^{(n)}}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

$$-\frac{\varkappa^{2n+4}k^{(n)}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}+\frac{\varkappa^{2n+2}}{2}xf^{(n)}(x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}$$

ist, worin nach den obigen Bezeichnungen von Hermite

$$A_n = \frac{\varkappa^{2n+4} k^{(n)}}{2}, \quad B_n = \frac{\varkappa^{2n+4} l^{(n)}}{2}, \quad P_n = \varkappa^{2n+2} x f^{(n)}(x^2),$$

wenn

$$k^{(n)} = -k_0^{(n)} = -\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}} \int\limits_\infty \frac{t\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}}\right]_{t^{-1}},$$

$$l^{(n)} = -l_0^{(n)} = -\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}} \int\limits_\infty \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}}\right]_{t^{-1}},$$

$$f^n(x^2) = -f_0^{(n)}(x^2)$$

$$= -\left[\frac{t^{n+1}}{\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}} \int\limits_\infty \frac{dt}{(t-x^2)\sqrt{t(1-t)(1-\varkappa^2 t)}}\right]_{t^{-1}}$$

gesetzt wird, so wird vermöge der Substitution $t = u^2$, $u = \varkappa^{-1} v^{-1}$

$$k^{(n)} = -\left[\frac{2}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}} \int\limits_\infty \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}}\right]_{u^{-2n-3}}$$

$$= \left[\frac{2v^2}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} \int\limits_0 \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}\right]_{\varkappa^{2n+4} v^{2n+3}}$$

also

$$A_n = \left[\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} \int\limits_0 \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}\right]_{v^{2n+1}}$$

Man sieht hieraus leicht, dass

$$\int\limits_0 \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}{v} + \sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)} \sum A_n v^{2n+1}$$

ist und mit Hülfe der Beziehung

$$\int \frac{dv}{v^2\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}$$

$$= \varkappa^2 \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} - \frac{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}}{v}$$

folgt somit unmittelbar

$$\int\limits_0 \frac{\varkappa^2 v^2 dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)}} = \sqrt{(1-v^2)(1-\varkappa^2 v^2)} \sum A_n v^{2n+1};$$

genau in derselben Weise ergibt sich die zweite Relation.

Um nun festzustellen, dass in diesen Formen der Reductionscoefficienten der eigentliche Grund jener Beziehungen liegt, entwickelte ich für hyperelliptische Integrale die in dem obenstehenden

Referate bezeichnete Reductionsformel auf die Normalform erster, zweiter, dritter Gattung und auf einen algebraischen Theil, zu der ich wegen häufig vorkommender Anwendungen der entwickelten Ausdrücke eine Discussion über das Verschwinden der einzelnen Integrale der verschiedenen Gattungen hinzufügte, und leitete nun mit Hülfe dieser Reductionsformel vermöge der Uebertragung der Reihenentwicklung aus dem Bereiche des unendlich entfernten Punktes auf den des Nullpunktes für hyperelliptische Integrale die beiden folgenden Relationen her:

Wenn

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z$$

und die reciproke Irrationalität

$$R_1(\zeta) = B_{2p-1}\zeta^{2p+1} + B_{2p-2}\zeta^{2p} + \cdots + B_1\zeta^3 + B_0\zeta^2 + A\zeta,$$

so ist für $r = 0, 1, 2, \ldots p-1$

$$\int_0 \frac{\frac{2p-r-1}{2}B_{r-1}u^{p-1} + \frac{2p-r-2}{2}B_{r-2}u^{p-2} + \cdots + \frac{2p-2r}{2}B_0 u^{p-r} + \frac{2p-2r-1}{2}Au^{p-r-1}}{\sqrt{R_1(u)}}\,du$$

$$= (u^{p-r-1} + M_0 u^{p-r} + \cdots + M_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)}\sum_0^\infty{}_\nu\, l_{2p+\nu}^{(r)} u^{p+\nu},$$

und für $r = p, p+1, \ldots 2p-1$

$$\int_0 \frac{(r-2p+\frac{1}{2})B_{2p-1}u^{3p-r-1} + (r-2p+1)B_{2p-2}u^{3p-r-2} + \cdots + \frac{2p-r}{2}B_r u^p}{\sqrt{R_1(u)}}\,du$$

$$= (N_0 u^{p-r} + N_1 u^{p-r+1} + \cdots + N_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)}\sum_0^\infty{}_\nu\, k_{2p+\nu}^{(r)} u^{p+\nu},$$

wenn $l_n^{(r)}$ und $k_n^{(r)}$ die Coefficienten der Integrale zweiter und erster Gattung in dem hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}}$$

sind.

Dresden. L. Koenigsberger.

L. Koenigsberger: Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln zweier hyperelliptischer Integrale. (Nachrichten der Göttinger Societät. April 1875.)

Die Anwendung des bekannten Princips der Integration von

$$\int J\,dJ_1,$$

worin J und J_1 beliebige zu derselben Irrationalität gehörige hyperelliptische Integrale bedeuten, ausgedehnt über die gesammte Begrenzung der nach Ausschliessung der Unstetigkeitspunkte einfach zusammenhängend gemachten Riemann'schen Fläche, liefert die allgemeinsten Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln dieser beiden hyperelliptischen Integrale. Man findet, dass, wenn das zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots\ldots(z-\alpha_{2p+1})}$$

gehörige Integral $J(z, z_\alpha)$ auf festbestimmten Blättern in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots\ldots \mathfrak{z}_\mu,\ z_1, z_2, \ldots\ldots z_m,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2p+1},\ \infty$$

unendlich werden soll wie die Functionen

$$\mathfrak{B}_\varrho (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}_\varrho (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + \mathfrak{K}_\varrho (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}_\varrho}$$

$$A_\varrho \log(z-z_\varrho) + B_\varrho (z-z_\varrho)^{-1} + C_\varrho (z-z_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + K_\varrho (z-z_\varrho)^{-k_\varrho}$$

$$a_\varrho \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b_\varrho (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c_\varrho (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + h_\varrho (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}}$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}}$$

und das zu derselben Irrationalität gehörige Integral $J(z, \zeta_\alpha)$ in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots\ldots \mathfrak{z}_\mu,\ \zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots \zeta_n,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{2p+1},\ \infty$$

wie die Functionen

$$\mathfrak{A}_\varrho' \log(z-\mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}_\varrho' (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}_\varrho' (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + \mathfrak{K}_\varrho' (z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}_\varrho'}$$

$$A_\varrho' \log(z-\zeta_\varrho) + B_\varrho' (z-\zeta_\varrho)^{-1} + C_\varrho' (z-\zeta_\varrho)^{-2} + \cdots\cdot + K_\varrho' (z-\zeta_\varrho)^{-k_\varrho'}$$

$$a_\varrho' \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b_\varrho' (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c_\varrho' (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + h_\varrho' (z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho'}{2}}$$

$$M_0' \log z^{\frac{1}{2}} + M_1' z^{\frac{1}{2}} + M_2' z^{\frac{2}{2}} + \cdots\cdot + M_{\delta'}' z^{\frac{\delta'}{2}},$$

wenn ferner die Stetigkeitssprünge von

$J(z, z_\alpha)$ an dem Querschnitte a_k mit J_{a_k}, an b_k mit J_{b_k},

die von

$I(z, \zeta_\alpha)$ an dem Querschnitte a_k mit I_{a_k}, an b_k mit I_{b_k}

bezeichnet werden, der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{p}{}_{\nu}\left(J_{a_\nu} I_{b_\nu} - J_{b_\nu} I_{a_\nu}\right)$$

von einer Summe von Integralen abgesehen, welche von einem Punkte des Querschnittssystems aus auf der einfach zusammenhängenden Fläche genommen bis zu den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$ führen, durch einfache algebraische Zusammensetzungen der Entwicklungscoefficienten der Integrale um die einzelnen singulären Punkte bis zu bestimmt angebbaren Grenzen hin genommen ausdrückbar ist. Die bekanntlich von Herrn Weierstrass für hyperelliptische Integrale entwickeltever allgemeinerte Legendre'sche Relation bildet einen speciellen Fall der in dieser Notiz angegebenen, welche ebenso die bekannte Beziehung für hyperelliptische Hauptintegrale in sich schliesst.

Dresden. L. Koenigsberger.

Gustav Zeuner: Ueber die Wirkung des Drosselns und den Einfluss des schädlichen Raumes auf die bei Dampfmaschinen verbrauchte Dampfmenge.

(Civilingenieur. Bd. XXI. 1875.)

Bei der Anwendung der mechanischen Wärmetheorie zur Beurtheilung der Vorgänge im Cylinder der Dampfmaschinen ist die Schwierigkeit noch nicht überwunden worden, mit Sicherheit die Dampfmenge zu ermitteln, welche während des Dampfeinströmens in den Cylinder, während der *Admission*, vom Kessel nach dem Cylinder strömt. Das Gewicht des Dampfes, oder sofern der Dampf nass ist, das Gewicht von Dampf und Wasser, welches pro Kolbenschub oder wenn man will, pro Sekunde dem Cylinder zugeführt wird, erscheint aber gerade in den Hauptgleichungen der auf die mechanische Wärmetheorie begründeten Dampfmaschinenlehre und daher haben diese Gleichungen zunächst nur rein theoretischen Werth und sind für den praktischen Gebrauch noch nicht genügend geeignet.

Der Dampfverbrauch einer Dampfmaschine wird wesentlich abhängen: von der Grösse des schädlichen Raumes und der Beschaffenheit des Dampfes, der dort vom vorigen Schube zurückgeblieben ist und fernerhin von der Differenz zwischen dem Druck im Kessel und dem Druck im Cylinder während der Admission; der letztere Druck ist immer der kleinere und wird umsomehr herabgezogen, je mehr man die Widerstände im Dampfzuflussrohr, durch Verstellen einer Klappe oder eines Ventiles (das Drosseln), erhöht.

Der Einfluss des schädlichen Raumes und der bemerkten Druckdifferenz ist zuerst von Clausius (Anwendung der mech. Wärmetheorie auf die Dampfmaschine) und später von mir (Grundzüge der mech. Wärmetheorie. 2. Aufl.) auf anderm Wege dargelegt worden. Diese ältern Untersuchungen gelten aber ausdrücklich nur unter der Voraussetzung, dass der einströmende Dampf trocken gesättigt oder nass ist und dann auch nur unter der Annahme, dass sich dieser Dampf im Cylinder während der Admission nicht etwa überhitzt.

In meiner Abhandlung, über deren Resultate hier referirt werden soll, habe ich nun die Untersuchungen auch auf den zuletzt genannten Fall ausgedehnt und weiterhin noch die Aufgabe unter der Voraussetzung behandelt, dass der Kesseldampf schon im überhitzten Zustande in den Cylinder eingeführt wird. Die Grundlagen für diese Untersuchungen bildeten meine früher erschienenen Abhandlungen: „Theorie der überhitzten Wasserdämpfe“ (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. Bd. XI. 1866) und „Ueber das Verhalten der überhitzten und gemischten Wasserdämpfe“ (Civilingenieur. Bd. XIII. 1867).

Beim Einströmen des Dampfes in den Dampfmaschinen-Cylinder hat man es mit einem *nicht umkehrbaren* Prozess zu thun; man kann zwar die Wärmemenge darstellen, die während der Admission dem Kessel mitgetheilt wird und ebenso die Arbeit, welche gewonnen wird; beides, Wärme und Arbeit stehen aber nicht in der einfachen Beziehung zu einander, wie beim umkehrbaren Prozess, denn der Admissionsdruck ist nicht mit dem Drucke identisch, unter welchem im Kessel die Dampfbildung erfolgt, derselbe ist sogar veränderlich. Denkt man sich aber, am Ende der Admission die Dampfmasse im Cylinder in den Gleichgewichtszustand übergegangen, den Gleichgewichtsdruck als identisch mit dem mittlern Admissionsdruck und nun die ganze Masse auf umkehrbaren Wegen in den Anfangszustand zurückgeführt, so lässt sich die angedeutete Beziehung doch bestimmen und zwar nach dem Satze, dass bei jedem Kreisprozesse, bei welchem der vermittelnde Körper in den Anfangszustand zurückkehrt, die gewonnene (resp. aufgewandte) Arbeit in Wärme ausgedrückt gleich der gesammten mitgetheilten (resp. abgeleiteten) Wärmemenge ist, selbst auch dann, wenn in einem solchen

Kreisprozesse einzelne *nicht umkehrbare* Theile vorkommen. Mit Hülfe dieses Satzes ist nun das Problem in der in Rede stehenden Abhandlung gelöst worden.

Als gegeben ist angesehen worden: der Kesseldruck p_2 und die spez. Dampfmenge x_2 (Dampfgewicht in der Gewichtseinheit Mischung von Dampf und Wasser) oder sofern der Dampf durch einen Ueberhitzer geführt wurde, die Ueberhitzungstemperatur t_x; ferner ist bekannt der Druck p_0 und die spez. Dampfmenge x_0 der Mischung im schädlichen Raume beim Beginn des Kolbenhubes und endlich der mittlere Admissionsdruck p, sowie das Volumen V_0 des schädlichen Raumes und das Volumen V, welches der Kolben während der Admission zurücklegt. Als zu bestimmen ist anzusehen, das Gewicht G_0 des anfänglich im schädlichen Raume vorhandenen Dampfgemisches, das Gewicht G des vom Kessel gelieferten Dampfes und der Zustand des Dampfes im Cylinder am Ende der Admission und zwar die spez. Dampfmenge x oder sofern dieser Dampf überhitzt ist, seine Temperatur t_y.

Bezeichnet nun σ das spez. Volumen des Wassers, v das des Dampfes und setzt man $v - \sigma = u$; ist ferner q die Flüssigkeitswärme, ϱ die innere latente Wärme des Dampfes, r die Verdampfungswärme, A das Wärmeaequivalent der Arbeitseinheit und benutzt man die angegebene Bezeichnung für den Admissionsdampf, dieselben Buchstaben aber unter gleicher Bedeutung mit dem Index 2 versehen für den Kesseldampf und mit dem Index 0 für die Masse im schädlichen Raume, so ergibt die Rechnung, wie in der Abhandlung gezeigt wird:

$$(1) \qquad V_0 = G_0(x_0 u_0 + \sigma)$$

$$(2) \qquad V + V_0 = G(xu + \sigma)$$

$$(3^a) \qquad G[x_2 r_2 + q_2 - q] = V\frac{r}{u} + G_0\left[\left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_0}{u_0}\right)x_0 u_0 + q - q_0\right].$$

Die erste Gleichung gibt G_0, die dritte G und die zweite gibt schliesslich x; die Gleichungen gelten aber n u r, wenn sowohl der Kesseldampf, wie der Dampf im Cylinder am Ende der Admission nass oder trocken gesättigt ist.

Ist dagegen der Kesseldampf vor dem Eintritt in den Cylinder auf die Temperatur t_x überhitzt, der Admissionsdampf aber schliesslich nass, was eintreten wird, wenn im schädlichen Raume viel Wasser zurückgeblieben ist, so gelten die Gleichungen (1) und (2) auch hier, Gleichung (3^a) ist dagegen durch die folgende zu ersetzen:

$$(3^b) \qquad G[c_p(t_x - t_2) + r_2 + q_2 - q] = V\frac{r}{u} + G_0\left[\left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_0}{u_0}\right)x_0 u_0 + q - q_0\right],$$

wobei c_p die spez. Wärme des Dampfes bei constantem Drucke darstellt.

Ist endlich nicht nur der Kesseldampf, sondern auch der Dampf im Cylinder am Ende der Admission überhitzt, was immer dadurch angedeutet wird, dass die vorstehenden Gleichungen bei numerischen Rechnungen auf den unmöglichen Werth $x > 1$ führen, so gelten die Gleichungen:

$$(1^c) \qquad V_0 = G_0(x_0 u_0 + \sigma)$$

$$(2^c) \qquad V + V_0 = (G + G_0) v_y$$

$$(3^c) \qquad (G + G_0)(\lambda_x - \lambda_y) = G_0 [\lambda_x - q_0 - x_0 \varrho_0 - A x_0 u_0 p],$$

wo v_y das spez. Volumen des überhitzten Admissionsdampfes darstellt, und λ_y die Gesammtwärme desselben sowie λ_x die des Kesseldampfes ist. Da für überhitzte Wasserdämpfe allgemein die Gleichungen:

$$pv = B(T - \beta \sqrt[4]{p}) \quad \text{und} \quad \lambda = J_0 + 4Apv$$

gelten, in welchen B, β und J_0 bekannte constante Grössen sind, so lassen sich die Gleichungen (2^c) und (3^c) in solcher Art umformen, dass aus denselben das spez. Volumen v_y und die Temperatur t_y des überhitzten Admissionsdampfes sich schliesslich ergibt.

Ein weitererer noch möglicher vierter Fall, dass der Dampf im schädlichen Raume schon überhitzt ist, ist in der Abhandlung unberücksichtigt gelassen, weil dieser Fall bei Dampfmaschinen kaum vorkommen dürfte.

In der Abhandlung sind dann zahlreiche numerische Beispiele berechnet und tabellarisch zusammengestellt. Statt auf die Ergebnisse dieser Rechnungen hinzuweisen, mögen hier, weil nur auf diesem Wege der überaus complicirte Vorgang sich klar legen lässt, einige wenige Fälle herausgehoben werden.

Der Kesseldruck sei in allen folgenden Fällen 4 Atmosphären (10334 Kil), der Druck im schädlichen Raume 0,2 Atmosph. (Condensations-Dampfmaschine) und der Admissionsdruck 3,5 Atmosph.; es sei ferner $V_0 = 0{,}2 \,.\, V$, welche Beziehung man erhält, wenn man 4fache Expansion und wie gewöhnlich den schädlichen Raum 0,05 vom Cylinderinhalte annimmt.

1. Fall. Der Kesseldampf sei nass, die spez. Dampfmenge betrage $x_2 = 0{,}90$; der Dampf im schädlichen Raume sei trocken gesättigt, also $x_0 = 1$; hier erhält man unter Benutzung meiner Dampftabellen aus Gleichung (1), (2) und (3^a):

$$G_0 = 0{,}0265\ V \text{ Kil}; \quad G = 2{,}5550\ V \quad \text{und} \quad x = 0{,}914.$$

Demnach findet während der Admission ein theilweises Verdampfen statt.

2. Fall. Der Kesseldampf sei nass und zwar sei wieder $x_2 = 0{,}90$, der im schädlichen Raume zurückgebliebene Dampf enthalte aber *sehr viel* Wasser, es sei $x_0 = 0{,}01$; hier ergeben dieselben Gleichungen:

$$G_0 = 2{,}6178\ V; \quad G = 3{,}0007\ V \quad \text{und} \quad x = 0{,}419.$$

Der Dampfverbrauch dieser Maschine wird also durch das im schädlichen Raume zurückgebliebene Wasser sehr bedeutend (gegen den vorigen Fall um 17,5 %) erhöht und es findet während der Admission eine sehr beträchtliche Condensation statt; beim Beginn der Expansion befindet sich sogar mehr Wasser als Dampf im Cylinder! —

Die Annahme, dass anfänglich im schädlichen Raume die spez. Dampfmenge nur $x_0 = 0{,}01$ betragen könne, scheint mir keineswegs ausserhalb der Möglichkeit zu liegen, denn das Volumen dieses Dampfes vom Drucke von 0,2 Atmosph. berechnet sich zu 0,987 V_0 Cub.-Meter und das des vorhandenen Wassers zu 0,013 V_0 und der letztere Werth ist recht wohl denkbar. Uebrigens beleuchtet vorstehendes Beispiel die interessanten Untersuchungen Illeck's über den Einfluss der Cylinderwandungen auf den Dampf im Cylinder der Dampfmaschinen (Civilingenieur. Bd. XXII. 1876).

3. Fall. Der Kesseldampf sei auf $t_x = 250^0$ überhitzt, die spez. Dampfmenge im schädlichen Raume sei $x_0 = 1$; hier ergibt die Gleichung (3^b) im Verein mit (1) und (2) $x = 1{,}114$; ein Zeichen, dass die Gleichungen (1^c), (2^c), (3^c) in Anwendung kommen müssen. Man erhält durch diese:

$$G_0 = 0{,}0265\ V; \quad G = 1{,}7364\ V \quad \text{und} \quad t_y = 264^0{,}8.$$

Während der Admission findet also eine weitere Ueberhitzung um $14^0{,}8$ statt.

4. Fall. Der Kesseldampf sei wieder auf $t_x = 250^0$ überhitzt, die spez. Dampfmenge betrage aber, wie im zweiten Falle, nur $x_0 = 0{,}01$; hier ergibt Gleichung (3^b) mit (1) und (2):

$$G_0 = 2{,}6178\ V; \quad G = 2{,}4581\ V \quad \text{und} \quad x = 0{,}464.$$

Es findet also hier wieder eine sehr beträchtliche Condensation während der Admission statt, trotz der starken Ueberhitzung des Kesseldampfes; die per Schub erforderliche Dampfmenge wäre aber sogar geringer, als die Dampf- und Wassermenge, welche der frische Dampf im schädlichen Raume schon vorfindet; die Dampfmenge ist selbst geringer, wie im Falle 1, woraus eben zum Theil schon der Vortheil der überhitzten Dämpfe sich erklärt.

Die Untersuchungen der besprochenen Abhandlung gewinnen vielleicht noch einigen Werth, wenn die Lösung der Frage über den Einfluss der Cylinderwandungen auf den im Dampfcylinder arbeitenden Dampf weiter vorgeschritten ist, eine Frage, die ganz vorzugsweise Hirn seit Langem mit schönen Erfolgen auf experimentellem Wege verfolgt hat und die in neuester Zeit von Illeck (a. a. O.) eine neue Auffassung erfahren hat.

Dresden. Gustav Zeuner.

R. Ferrini: Sulla correzione della temperatura di un liquido nel quale non si possa affondare a sufficienza il termometro.
(Nota letta all' Istituto Lombardo di Scienze e lettere il 18 Febbrajo 1875.)

In questa nota considerando le condizioni di equilibrio termico della colonetta termometrica sporgente del liquido, mostro che l'andamento della temperatura lungo la medesima può esprimessi con sufficiente esattezza, con una funzione della forma $\delta_x = \delta_0 + ax + bx^2$, essendo δ_0 la temperatura al piede del filetto termometrico esterno, δ_x quella corrispondente all' altezza x sub livello del liquido esplorato, a e b due costanti da determinarsi. — Adottata questa funzione e calcolata in relazione ad essa la correzione da applicarsi all' osservazione termometrica sono condotto al seguente metodo sperimentale.

Si cominci ad immergere il termometro nel liquido fino alla divisione più bassa della sua scala e, fatta la lettura, sia l la lunghezza (espressa in gradi) del filetto termometrico sporgente. Poi si affondi il termometro quanto lo concede la profondità del vaso e si osservino l'alzamento s della sommità della colonetta die mercurio, e la lunghezza l' della parte che verrà ad emergere dal liquido. La correzione da applicarsi alla prima lettura per avere la temperatura del liquido è detta della:

$$C = s \frac{l^2}{l^2 - l'^2}.$$

Molti raffronti sperimentali mi hanno comprovato l'accordo di questa formola coi risultati di fatta.

Milano. R. Ferrini.

R. Ferrini: Tecnologia del Calore. (Milano. — Ulrico Hoepli 1876.)

In questo libro ho avuto di mira di presentare i principii che reggono la Tecnologia del Calore appoggiati alle moderne teorie. Perciò partendo della teoria di Zeuner sull' efflusso dei fluidi e semplificando il metodo tenuto da Grashof ne ho fatto l'applicazione al calcolo d'un camino, d'un ventilatore meccanico, dei condotti di distribuzione d'aria calda d'un calorifero, d'un termotifone, d'un camino di richiamo e dei condotti di ventilazione. La formola che ho ottenuta per il calcolo d'un camino mi ha permesso di dimostrare il vantaggio dei camini *divergenti* su quelli a sezione costante e più ancora sui convergenti, ed inoltre di discutere di nuovo la quistione se vi sia una temperatura di massima efficacia per il camino. Facendo sentire che del resto non interessa punto di raggiungerla, trovo che tale temperatura esiste ma non è costante, come una volta si credeva, ma diversa secondo le condizioni particolari del camino; però sempre elevatissima e tale che per ottenerla bisognerebbe sagrificarvi quasi tutto l'effetto utile del combustibile.

Considerando più innanzi il problema della potenza da darsi agli apparecchi di scaldamento per gli ambienti ho cominciato a porre la quistione se possa sempre ammettersi raggiunta la fase di regime nel disperdimento del calore traverso le pareti. Ho segnato nei due casi che durante gli intervalli di inazione l'ambicule non riceva più calore o che ne continui a ricevere per alcun tempo in quantità decrescente, il metodo per calcolare l'abbassamento di temperatura che ne conseguirà, quindi per decidere se dopo alcune riprese di attività le pareti saranno o no condotte allo stato di trasmissione permanente e nel caso affermativo per calcolare la perdita di regime che si avrà in uno dei periodi di riposo. Quindi ho dato la maniera di assegnare la potenza degli apparecchi pel caso in cui non vi sia una tal perdita di regime, pel caso in cui vi sia e pel caso infine che non si possa mai ritenere raggiunto lo stadio di regime nella trasmissione.

Da ultimo ho applicato i principii della termodinamica al calcolo degli essiccatoi tanto ad aria fredda che ad aria calda.

Milano. R. Ferrini.

R. Ferrini: Sulla temperatura delle fiamme. (Nota critica letta all' Istituto Lombardo di Scienze e lettere il 10 Febbrajo 1876.)

In questa nota presi ad esaminare il metodo proposto del Sig. Professore H. Valerius nel Moniteur Industriel Belge del 1 Settembre 1875 per il calcolo delle temperature di combustione, mostrando ch' esso non è attendibile e che i fatti della dissociazione sono ancora troppo poco conosciuti per potervisi basare con sicurezza il calcolo di quelle temperature.

Milano. R. Ferrini.

V. Liguine: Sur les systèmes de tiges articulées. (Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XIV. P. 529—560.)

L'étude récente des divers systèmes de tiges articulées, à liaison complète, a commencé par celle des systèmes à six tiges, et même parmi toutes les dispositions connues actuellement, la plupart ne sont encore que des systèmes de ce genre particulier ou des combinaisons simples de ces systèmes.

Ces divers systèmes à six tiges ont été inventés, pour la plupart, indépendamment l'un de l'autre et figurent ainsi dans la question comme des dispositions isolées et distinctes, dont rien ne paraît indiquer une liaison mutuelle. Je me suis proposé, dans ma Note, de les étudier sous un point de vue complètement général, ce qui m'a permis: 1° d'indiquer les conditions caractéristiques qui distinguent le genre de systèmes à six tiges, étudié jusqu'à présent, de toutes les autres dispositions possibles du même nombre de tiges, et qui assignent certaines limites aux recherches de nouvelles combinaisons utiles du même genre; 2° de décrire un système dont les dispositions connues à six tiges*) ne sont que de simples cas particuliers; 3° de passer brièvement en revue, en discutant ce système général, tous les systèmes connus à six tiges, et d'exposer à cette occasion quelques observations nouvelles relatives à ces derniers.

*) Le système proposé récemment par M. Kempe, que j'ai décrit dans le n° 7 de ma Note, ne doit pas compter dans ce nombre, car il présente un type tout à fait exceptionnel, qui ne se rattache pas du tout à tous les autres systèmes connus à six tiges, puisqu'il ne jouit pas de la propriété fondamentale, commune à ces derniers, d'avoir constamment trois articulations en ligne droite pendant le mouvement.

Pour abréger le langage, je nomme tout système articulé à six tiges et à liaison complète *élément articulé.*

Chaque élément articulé se compose nécessairement de six tiges et de sept articulations, en comptant les points où sont réunies trois tiges pour deux articulations. Comme l'a déjà fait observer M. Sylvester, tous les éléments et systèmes articulés auxquels on a été conduit par la découverte de M. Peaucellier peuvent, en dernière analyse, être considérés comme des assemblages de *couples* de tiges ou de *dyades*, c'est à dire de systèmes de deux tiges réunies par une articulation, systèmes dont le compas ordinaire fournit un exemple très-connu; et c'est en vertu de cette propriété que M. Sylvester avait même proposé de donner à ces dispositions le nom de *dyadismes.* En se plaçant à ce point de vue, on obtient pour les éléments en question le mode de génération général suivant.

Prenons une dyade ou un couple de tiges, et imaginons que l'on rend fixe son articulation; nommons cette articulation fixe le *point d'appui* et les deux tiges qui y sont réunies les *connecteurs*. Prenons ensuite un second couple et joignons, au moyen de deux articulations, ses deux tiges aux deux tiges du premier couple, en articulant les extrémités libres des tiges de l'un des deux couples à deux points quelconques des deux tiges de l'autre couple ou aux extrémités libres de ces dernières tiges; nommons les deux tiges de ce nouveau couple les *premiers guides*, et l'articulation qui les réunit le *premier pôle;* nous aurons formé ainsi un quadrilatère articulé qui a pour côtés les deux connecteurs et les deux guides, ou certaines parties de ces tiges. Prenons enfin un troisième couple et adaptons ses extrémités libres, au moyen d'articulations, à deux points de deux côtés adjacents*) du quadrilatère mentionné, ou aux extrémités des prolongements de deux côtés adjacents, si ces prolongements existent; donnons aux tiges de ce troisième couple et à l'articulation qui les joint les noms de *deuxièmes guides* et de *deuxième pôle*; nous aurons formé par là un second quadrilatère

*) Cette dernière restriction est inutile pour les éléments que je nomme plus loin de la première espèce et qui, comme on verra, sont de beaucoup les plus importants, puisqu'elle y est remplie d'elle-même; mais, pour ceux de la deuxième espèce, il y a lieu de la faire, car dans ces derniers, parmi les quatre modes possibles de jonction du troisième couple, il y a deux dispositions où les extrémités libres des deuxièmes guides s'articulent à deux côtés opposés du premier quadrilatère, et dans ces deux cas on obtiendrait, au lieu du second quadrilatère, un pentagone articulé, ce qui compliquerait beaucoup les raisonnements.

articulé, ayant un sommet et un angle communs avec lé premier; mais les droites qui forment ce nouveau quadricatère peuvent être différentes. Il est clair, en effet, que la jonction du troisième couple à l'assemblage des deux premiers peut s'effectuer de trois manières distinctes: les extrémités libres de ce troisième couple peuvent être jointes ou aux deux premiers guides, ou aux deux connecteurs, ou à l'un des premiers guides et à un connecteur adjacent; dans le premier cas le nouveau quadrilatère sera formé par les quatre guides, dans le second par les deux connecteurs et les deux deuxièmes guides, dans le troisième par trois des quatre guides et l'un des connecteurs. Dans tous les cas, la réunion consideré de trois couples formera un élément à six tiges et à sept articulations, et l'on remarquera que cet élément est toujours composé de deux quadrilatères articulés. Nous dirons que l'élément est de la *première espèce*, quand le mode de jonction du troisième couple rentre dans les deux premiers des trois cas cités, et qu'il est de la *deuxième espèce*, lorsque ce mode de jonction rentre dans le dernier de ces cas. Une autre distinction qu'il est encore utile de faire dans le cas où le troisième couple est adapté aux deux premiers guides est relative à la position du point d'appui par rapport au second quadilatère articulé; le point d'appui peut être situé à l'extérieur ou à l'intérieur de ce quadrilatère: dans le premier cas, l'élément sera dit *positif*, dans le second, *négatif*.

D'après ce qui vient d'être dit, parmi les six tiges de chaque élément, il y a à distinguer les deux connecteurs, les deux premiers et les deux deuxièmes guides, et parmi ses sept articulations on distingue le point d'appui et les deux pôles. Les distances du point d'appui aux deux pôles seront dites les *bras* de l'élément; en considérant ces bras comme des rayons vecteurs partant d'une même origine fixe, le but de chaque élément consiste à établir une relation constante entre ces rayons vecteurs, qui permette d'apérer une certaine transformation sur les coordonnées polaires, de manière que, l'un des pôles décrivant une ligne donnée, l'autre décrive une seconde ligne, liée à la première par la loi de transformation qui convient à l'élément considéré.

Si maintenant on compare l'élément général que nous venons d'obtenir par la voie de composition de trois couples de tiges avec les éléments qui ont été proposés depuis la découverte de M. Peaucellier, on voit immédiatement que ces derniers ne sont tous que des variétés du premier, caractérisées par les deux propriétés particulières que voici: 1° ils sont tous de la première espèce; 2° quel que soit le mouvement de l'élément, trois des sept articulations, le point d'appui et les deux pôles, restent constamment en ligne droite pendant ce mouvement.

D'autre part, si l'on examine attentivement et d'une manière générale les conditions suffisantes pour que le point d'appui et les deux pôles d'un élément de la première espèce restent constamment en ligne droite, on reconnaît qu'il suffit pour cela: 1^0 ou que dans une seule position de l'appareil les deux quadrilatères articulés, dont l'élément est toujours composé, soient semblables et semblablement placés; 2^0 ou que dans une seule position de l'appareil les tois sommets des deux quadrilatères, qui représentent le point d'appui et les deux pôles, soient en ligne droite, et les deux diagonales de chaque quadrilatère se coupent à angle droit. On parvient à ces conditions par des considérations très simples de la géométrie élémentaire et en s'appuyant sur la propriété suivante: de quelque manière que l'on déforme un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit et dont les côtés ont des longueurs invariables, ses diagonales resteront toujours perpendiculaires eutre elles.

Cela posé, on voit que l'on peut former un élément de la première espèce, dont le point d'appui et les deux pôles restent constamment en ligne droite, de deux manières distinctes: ou en construisant un quadrilatère quelconque et en menant par un point de l'une de ses diagonales deux droites parallèles à deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale jusqu'à la rencontre avec les deux autres côtés, ou en construisant un quadrilatère à diagonales rectangulaires et en joignant un point de l'une de ces diagonales à deux points situés à la fois sur deux côtés aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale et sur une même perpendiculaire à cette dernière droite. C'est dans le dernier de ces deux modes de génération que rentrent les éléments qui ont été étudiés depuis la découverte de M. Peaucellier; par conséquent, le type le plus général de ce genre sera l'élément représenté sur les fig. 1 ou 2 et que je nomme par cette raison élément généralisé; dans ces figures, A désigne le point d'appui, P le premier, P_1 le deuxième pôle, AN, AN' représentent les connecteurs, PN, PN' les premiers, P_1M, P_1M' les deuxièmes guides. La loi de la transformation effectuée par cet élément sur les bras ou rayons vecteurs $AP = \varrho$, $AP_1 = \varrho_1$ consiste en ce que, pendant toute la durée d'un mouvement quelconque de l'appareil, il existe entre ces bras la relation

$$\frac{\varrho[(\varrho \mp \varrho_1)^2 + m_1^2 - m^2]}{(\varrho \mp \varrho_1)(\varrho^2 + n^2 - c^2)} = \frac{m_1}{n},$$

où $m = P_1M$, $m_1 = PM$, $n = PN$, $c = AN$ et où il faut prendre les signes supérieurs quand l'élément est positif (fig. 1), et les

Fig. 1.

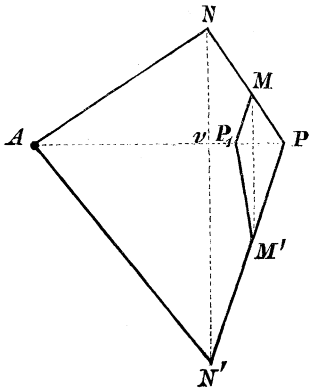
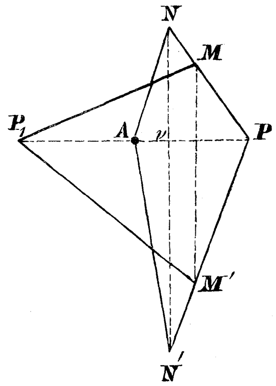


Fig. 2.



signes inférieurs quand il est négatif (fig. 2). Il est digne de remarque que la relation (1) est tout à fait indépendante des grandeurs des tiges P_1M', PM', PN', AN' situées de l'autre côté de la diagonale AP, et que, par conséquent, cette relation reste identiquement la même pour tous les éléments de différents paramètres que l'on obtient en changeant arbitrairement le lieu du point N' sur la droite Nv indéfininiment prolongée.

Je fais voir ensuite comment les différents éléments connus (élément de M. Peaucellier généralisé, indiqué par M. Sylvester; élément proposé par M. Mannheim pour décrire une anallagmatique du quatrième ordre; inverseur de M. Peaucellier; élément de M. Sylvester servant à réaliser un système circulo-circulaire c'est à dire une disposition propre à transformer un mouvement circulaire en un autre mouvement circulaire; extracteur binôme quadratique de M. Sylvester; élément pantographique) se déduisent de *l'élément généralisé*, et j'ajoute à cette occasion quelques observations sur plusieurs propriétés de ces variétés.

Mais, comme il a été déjà dit plus haut, tous ces éléments connus sont de la première espèce, c'est à dire que, dans tous ces appareils, les deuxièmes guides sont toujours adaptés par leurs extrémités libres, ou aux deux connecteurs ou aux deux premiers guides. Après avoir examiné les appareils de ce genre, il est naturel de se demander si l'on ne pourrait pas obtenir d'autres dispositions nouvelles et utiles parmi les éléments de la deuxième espèce, où les extrémités libres des deuxièmes guides s'appuient sur un connecteur et un premier guide adjacent. L'analyse de cette question nous apprend qu'en se bornant au même degré de simplicité que pour le cas des éléments de la première espèce, c'est à dire en ne considérant que les éléments de la deuxième espèce, jouissant de la propriété que leur point d'appui et leurs deux pôles restent constamment en ligne droite peudant le mouvement de l'appareil, les seuls éléments auxquels on se trouve conduit sont l'extracteur binôme quadratique de M. Sylvester et l'élément pontographique sous une forme particulière servant à doubler les rayons vecteurs, ce qui nous indique une propriété curieuse de ces deux éléments, de pouvoir servir en même temps d'éléments de la première et de la deuxième espèce. On ne retrouve ainsi, parmi les éléments de la deuxième espèce, que des variétés déjà connues, ce qui montre que cette seconde solution possible du problème est stérile, et que, autant que l'on se borne à cette classe simple d'éléments, dont le point d'appui et les deux pôles sont assujettis à rester constamment en ligne droite, de nouvelles dispositions ne peuvent être cherchées que parmi les éléments de la première espèce.

Les systèmes à six tiges formant, comme je l'ai déjà observé, la grande majorité de tous les types proposés des systèmes articulés en général, il ne me restait à decrire qu'un très-petit nombre de dispositions à huit tiges (protracteur de M. Peaucellier; système de M. Sylvester) et à quatre tiges (systèmes de M. M. Roberts et Hart), pour donner en même temps, par mon travail, une énumération complète des types des systèmes articulés actuellement connus, énumération qui peut être utile aux personnes s'occupant de la question; c'est ce que j'ai fait dans un appendice placé à la fin de ma Note. En discutant à cette occasion le système à quatre tiges de M. Hart je fais observer que, parmi tous les systèmes imaginables de tiges articulées propres à résoudre rigoureusement la question de la transformation d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne, celui de M. Hart est formé du plus petit nombre possible de tiges.

Les divers systèmes à quatre, six et huit tiges, décrits dans ce travail, épuisent, je crois le nombre total des *types* connus de systèmes articulés, c'est à dire des systèmes *simples* et essentiellement distincts qui ont été proposés; tous les autres systèmes connus n'en présentent que des combinaisons plus ou moins compliquées. C'est à cette seconde classe de systèmes combinés ou *multiples* qu'appartiennent, par exemple, les divers *conicographes* de M. M. Peaucellier, Sylvester, Hart, etc. à 15, 13, 11, 9, 7 tiges; le *paradoxe cinématique* de M. Sylvester à 73 tiges obligeant deux points non liés entre eux à rester à une distance invariable et servant à réaliser le mouvement d'un ou de plusieurs points suivant la ligne des centres; les systèmes de M. Sylvester à 25 tiges, pour produire un mouvement suivant une parallèle à la ligne des centres, et à 43 tiges pour produire un mouvement suivant une droite formant un angle donné avec la ligne des centres; les divers systèmes servant à l'extraction des racines, etc. Il est évident que la théorie de ces systèmes multiples ne présente aucune difficulté dès que l'on connaît les propriétés des systèmes simples qui les constituent.

Odessa. V. Liguine.

A. Fliegner: Der Einfluss von Erweiterungen in Rohrleitungen.
(Civilingenieur 1875. Bd. XXI. S. 97.)

Die Arbeit enthält die Ergebnisse einer längeren, zunächst nur mit Wasser angestellten Versuchsreihe, welche den Einfluss plötzlicher und allmähliger Erweiterungen in Rohrleitungen genauer feststellen sollte.

Vorausgeschickt ist eine Beschreibung und Abbildung des neuen hydraulischen Apparates in der mechanischen Sammlung des Zürcher Polytechnikums, nebst Erläuterung über die Art seiner Benutzung. Mit demselben geht ein Ueberdruck von rund 40^{m} Wassersäulen zu erreichen.

Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung war an diesem Apparate zunächst ein Messingrohr von $10{,}_{11}{}^{mm}$ Durchmesser befestigt. An dasselbe münden allmählige Verengungen auf $2{,}_{22}$, $5{,}_{15}$, $7{,}_{72}{}^{mm}$ geschraubt, und davon allmählige Erweiterungen auf den Durchmesser eines darüber gesteckten weiteren Rohres von $15{,}_{08}{}^{mm}$. Liess man die allmähligen Erweiterungen fort, so hatte man Ausfluss durch eine plötzliche Erweiterung.

Um bei Bestimmung des zugehörigen Widerstandscoefficienten von allen Widerständen innerhalb der engsten Stelle unabhängig zu sein, wurde der an jener Stelle disponible Gesammtdruck direct durch Beobachtung von Druck und Geschwindigkeit ermittelt. Der

Rohrreibungswiderstand im vorderen Rohre wurde auch in Abzug gebracht.

Für die *plötzliche* Erweiterung nimmt mit zunehmendem disponiblem Drucke der Widerstandscoefficient ζ zunächst aus dem Unendlichen kommend ab, bis angenähert auf den gewöhnlich dafür angegebenen Werth $\zeta_0 = (m - 1)^2$, worin m den Quotienten des weiteren Querschnittes durch den engeren bedeutet. Nachher steigt ζ wieder, eine Folge der im Wasser stets absorbirten *Luft*. Bei dem mit zunehmendem disponiblem Drucke auch zunehmenden Vacuum in der Erweiterung wird nämlich schliesslich so viel Luft frei, dass sie nicht mehr vollständig absorbirt werden kann, und dass im äussersten Querschnitte dem Wasser viel kleine, fein vertheilte Luftbläschen beigemischt sind. Dadurch vergrössert sich sein Volumen, und die unter Annahme constanten Volumens angestellte Rechnung ergibt ζ zu gross.

Die Ungleichheit von ζ und ζ_0, und zwar stets in dem Sinne $\zeta > \zeta_0$ (einige beobachtete geringe Abweichungen lassen sich leicht anderweitig erklären) ist dann nachgewiesen als Folge davon, dass jedenfalls stets, *wenn eine Flüssigkeit in einen mit gleichartiger Flüssigkeit gefüllten Raum ausströmt, der Druck im bewegten Strahle in der Mündungsebene grösser ist als in der umgebenden ruhenden Flüssigkeit.* Die Richtigkeit dieser Behauptung ist zunächst durch einige wenige directe Druckmessungen gezeigt*); dann durch einige Beobachtungen über das Aussehen des Strahles in der Erweiterung, welches durch einige Figuren veranschaulicht ist. Bei einigen Versuchen zeigte sich um den austretenden Strahl ein *wasserfreier* Raum, der aber mit Wasserdämpfen und freigewordener Luft angefüllt ist, so dass in ihm der absolute Nulldruck noch nicht erreicht war.

Bei *allmähligen* Erweiterungen legt sich die Curve ζ als Function der disponiblen Druckhöhe auch asymptotisch an die verticale Axe, sinkt jedoch schneller und unter den Werth von ζ_0, und zwar um so tiefer, je allmähliger die Erweiterung ist. Nachher steigt sie aber wieder und ist bald identisch mit der für die gleiche plötzliche Erweiterung gefundenen Curve. Das Letstere rührt daher, dass sich bei grösseren Druckhöhen der Strahl nicht mehr an die

*) Eine inzwischen mit Wasser angestellte, vielleicht später einmal zu veröffentlichende Versuchsreihe, hat obigen Satz für alle erreichten inneren und äusseren Pressungen bestätigt.

Wandungen der allmähligen Erweiterung anlegt, sondern frei durchströmt, wie bei einer plötzlichen.

Eine Verringerung der Länge des äusseren Rohres vergrösserte bei allen Erweiterungen den Widerstandscoefficienten, weil die freigewordene Luft in einem kürzeren Rohre nicht mehr so vollständig wieder absorbirt werden kann.

Bei praktischen Rechnungen darf man doch unbedenklich den alten Werth des Widerstandscoefficienten für plötzliche Erweiterungen benutzen, da er nur bei ganz kleinen, kaum je vorkommenden Pressungen erheblich grösser ist. Dieselben Coefficienten empfehle ich auch zur Sicherheit bis auf Weiteres für die allmählige Erweiterung. Im Uebrigen ist es aber rathsam, in einer Rohrleitung jede Erweiterung zu vermeiden.

Zürich. A. Fliegner.

W. Fränkel: Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken. — Theorie des Bogenfachwerks mit zwei Gelenken. (Civilingenieur 1875. Bd. XXI. S. 515 mit 1 Tafel.)

Kennt man die äusseren Kräfte, welche auf ein aus aneinander gereihten Dreiecken bestehendes, also statisch bestimmtes Fachwerk wirken, so lassen sich die inneren Kräfte, d. h. die Züge oder Drücke in den einzelnen Fachwerkstäben finden. Sind auch die Querschnitte der Constructionstheile bekannt, so berechnen sich leicht die Längenänderungen der letzteren.

Durch die Längenänderung der einzelnen Stäbe entstehen Deformationen des Fachwerkes, wobei jeder Knotenpunkt desselben einen gewissen Weg beschreibt. Es ist einleuchtend, dass man diese Wege bestimmen kann, indem man zunächst nur einen der das Fachwerk bildenden Stäbe als elastisch, die übrigen dagegen als absolut starr ansieht, und die durch die Längenänderung dieses einen Stabes hervorgerufenen partiellen Deformationen bestimmt. Die wirklichen Deformationen des Fachwerkes, d. h. die wirklichen Wege seiner Knotenpunkte, ergeben sich durch geometrische Summirung der so gefundenen Partialresultate.

Bei nur kleinen Formenänderungen des Fachwerkes, wie sie in der Praxis vorkommen, kann man den Weg, welchen irgend ein

Knotenpunkt bei der Längenänderung nur eines Stabes beschreibt, als kleinen Kreisbogen ansehen, dessen Mittelpunkt nach dem Satze von dem augenblicklichen Drehpunkte leicht zu finden ist. Zu diesem Zwecke denke man sich durch den elastischen Stab einen geraden Schnitt geführt, welcher ausser diesem nur noch zwei andere Stäbe trifft, und fixire ferner das Fachwerk in seiner Ebene durch Festhalten der beiden Enden irgend eines seiner starren Stäbe. Dann *ist der der Längenänderung irgend eines Stabes entsprechende augenblickliche Drehpunkt für die sich bewegenden Knotenpunkte des Fachwerkes identisch mit dem Durchschnitte der beiden übrigen vom Schnitt getroffenen Stäbe* (also auch identisch mit dem bei der bekannten Ritter'schen Momentenmethode zu wählenden Drehpunkte.

Die Grösse des Drehungswinkels ergibt sich aus dem Quotienten der Stablängenänderung durch die Länge der Senkrechten von dem augenblicklichen Drehpunkt auf die Richtung des Stabes. Die Grösse des Weges ist hiernach ebenfalls bestimmt.

Der genannte Satz lässt sich mit Nutzen in allen den Fällen anwenden, wo es sich um Bestimmung von Formänderungen von Fachwerken handelt, sei es um z. B. bei bekannten äusseren Kräften die Durchbiegungen von Trägern zu finden, oder auch um, bei gegebenen Bedingungen für die möglichen Deformationen, einzelne etwa noch unbekannte äussere Kräfte zu bestimmen. Letzteres kommt z. B. bei der Untersuchung von Bogenfachwerken vor, für deren Kämpfer die Bedingung gilt, dass die Länge der sie verbindenden Bogensehne unverändert bleibe.

Für derartige Bogenfachwerkuntersuchungen, wie solche am Dresdner Polytechnikum bereits im Wintersemester 1874 mehrfach durchgeführt worden sind, wird ein ausführliches Beispiel gegeben und zum Schlusse noch ein graphisches Verfahren auseinandergesetzt, welches in bequemer Weise gebraucht werden kann, wenn es sich darum handelt, die Resultante der äussern Kräfte nach den Richtungen dreier durchschnittenen Stäbe zu zerlegen, und hierbei entweder zwischen der Resultante und den betreffenden Stäben oder zwischen den Stäben unter sich spitze Schnitte entstehen.

Dresden. W. Fränkel.

W. Fränkel: Ueber die ungünstigste Belastung von Bogenträgern mit zwei Gelenken. (Civilingenieur 1875. Bd. XXI. S. 585 mit 2 Tafeln.)

Bei der Berechnung von Bogenträgern mit zwei Gelenken hat man sich gewöhnlich mit der Annahme einer gleichförmigen Betriebsbelastung begnügt. Die Resultate, zu welchen man auf diese Weise gelangt, können jedoch bedeutend von denjenigen abweichen, welche man erhalten würde, wenn man als zufällige Last den wirklichen Eisenbahnzug zu Grunde gelegt hätte. Und selbst wenn man sich mit der Voraussetzung einer gleichförmigen Belastung zufrieden stellen wollte, bliebe immer noch die Frage offen, wie gross dieselbe anzunehmen sei, damit sie für die Berechnung aller Constructionstheile genüge.

Der vorliegende Aufsatz verschafft hierüber einige Aufklärung. Die Untersuchung beschränkt sich jedoch nur auf flache Bogenträger, wie solche meist Anwendung gefunden haben. Ferner wird der Querschnitt constant vorausgesetzt und die vertheilende Wirkung etwaiger Zwischenträger (z. B. Schwellenträger bei Eisenbahnbrücken) nicht in Betracht gezogen.

Unter Zugrundelegung eines vereinfachten, angenäherten Ausdruckes für den Horizontalschub des Bogens werden zunächst Regeln und einfache geometrische Constructionen entwickelt zur Einstellung eines Systems von Einzellasten, wenn dieselben die stärksten Pressungen beziehentlich Spannungen in den einzelnen Gurtfeldern oder den Füllungsgliedern des Bogenträgers hervorrufen sollen. Diese Maximal-Inanspruchnahmen werden dann mit denjenigen grössten Pressungen bez. Spannungen verglichen, welche in denselben Constructionstheilen bei einer am ungünstigsten vertheilten *gleichförmigen* Belastung entstehen. Durch Gleichsetzung der beiden Resultate ist es dann möglich, diejenige gleichförmige Belastung zu berechnen, welche bezüglich der ungünstigsten Wirkung auf den Bogenträger aequivalent mit dem gegebenen System von Einzellasten ist.

In zwei mitgetheilten Beispielen ist als Betriebslast ein aus schweren Lokomotiven und Tendern bestehender Eisenbahnzug zu Grunde gelegt, und die Rechnung für die Querschnitte im Scheitel, im Kämpfer und in einem Abstande $x = 0{,}5a$ beziehentlich $0{,}6a$ (worin a die Helbsehne des Bogens bedeutet) vom Scheitel durchgeführt. In diesen beiden letztern Querschnitten entstehen nämlich die Maxima maximorum der Gurtpressungen.

Die Zahlenresultate sind folgende:

Beispiel I. Spannweite $2a = 20^m$, Pfeil $b = 2^m$, Trägerhöhe $h = \frac{2^m}{3}$;

Querschnittslage $m = \frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Pressung wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.
	Im Obergurte	Im Untergurte	
$m = 0$	6,070	6,220	5,436
$m = 0,5$	6,275	6,348	5,760
$m = 0,6$	—	6,341	—
$m = 1$	5,370	5,370	6,500

Querschnittslage $m = \frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro lfdn. Mt. Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Transversalkraft Q wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.	
	für max $(+Q)$	für max $(-Q)$	für max $(+Q)$	für max $(-Q)$
$m = 0$	8,112	8,112	8,112	8,112
$m = 0,5$	9,000	11,503	7,160	10,930
$m = 1$	9,800	7,239	6,500	∞

Beispiel II. Spannweite $2a = 50^m$, Pfeil $b = 5^m$, Trägerhöhe $h = \frac{5^m}{3}$;

Querschnittslage $m = \frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Pressung wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.
	Im Obergurte	Im Untergurte	
$m = 0$	5,098	5,460	4,970
$m = 0,5$	5,278	—	—
$m = 0,6$	—	5,660	—
$m = 1$	4,882	4,882	5,320

Querschnittslage $m = \frac{x}{a}$	Aequivalente gleichförmige Betriebslast k in Tonnen pro lfdn. Mt. Gleis, welche im Bogenträger dieselbe grösste Transversalkraft Q wie der Lokomotivzug erzeugt.		Entsprechendes k in Tonnen pro laufenden Meter Gleis für einen *geraden* Balken.	
	für max $(+Q)$	für max $(-Q)$		
$m = 0$	6,180	6,180	6,14	6,140
$m = 0,5$	6,928	8,545	5,67	7,690
$m = 1$	7,124	6,227	5,32	∞

Dresden. W. Fränkel.

O. Mohr: Beitrag zur Theorie des Fachwerks. (Zeitschr. des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover. Jahrgang 1874 und 1875.)

Für die Behandlung desjenigen Theils der Theorie des Fachwerks, welcher die von der Elasticität und von der Temperatur abhängigen Formveränderungen der Construction in Betrachtung zieht, also insbesondere für die Bestimmung der Spannungen in statisch unbestimmten Fachwerken fehlte es bis jetzt an einer allgemeinen Methode. Man nahm an, dass die Figur der Construction und namentlich die Art ihrer Unterstützung einen wesentlichen Einfluss auf die Form der Resultate ausüben müsse und beschränkte sich daher auf die Untersuchung besonderer Fälle. Trotzdem ist es so wenig gelungen, diesen Rechnungen eine einfache Form zu geben, dass man in der Regel von ihrer Anwendung ganz absah und mit mehr oder weniger ungenauen Annahmen sie zu umgehen suchte. In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, die bezeichnete Lücke auszufüllen und ein Verfahren zu entwickeln, welches bei allgemeiner Anwendbarkeit die für den praktischen Gebrauch erforderliche Einfachheit und Bequemlichkeit gewährt.

Jedes Fachwerk enthält eine bestimmte von der Zahl der Knotenpunkte und der Stützen abhängige Anzahl von Constructionstheilen, deren Längen zur geometrischen Bestimmung der Constructionsfigur nothwendig sind. Die *statische* Ermittelung der Spannungen des Fachwerks aus den gegebenen Belastungen ist eine bestimmte oder eine unbestimmte Aufgabe, je nachdem das Fachwerk nur die eben genannten nothwendigen Constructionstheile oder ausser diesen noch überzählige Theile enthält. Im letzteren Falle können die Spannungen der *nothwendigen* Constructionstheile ausgedrückt werden als Functionen der gegebenen Belastungen und der unbekannten Spannungen der überzähligen Theile. Die in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten lassen sich mit den einfachsten Mitteln der angewandten Statik und in der Regel am bequemsten auf graphischem Wege bestimmen.

Die Beziehungen zwischen den Längenänderungen der überzähligen und denjenigen der nothwendigen Constructionstheile ergeben sich aus einer statischen Betrachtung, bei welcher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zur Anwendung kommt. Indem man in die genannten Beziehungen die Ursachen der Längenänderungen einführt, gewinnt man Gleichungen, in welchen die Spannungen der überzähligen Constructionstheile die einzigen Unbekannten sind und zwar enthalten diese Gleichungen ausser den auf jene Ursachen sich beziehenden gegebenen Grössen nur die bereits oben erwähnten Constanten. Es bleibt also nur noch übrig, eine Gruppe von linearen Gleichungen aufzulösen, deren in der Regel kleine Anzahl mit derjenigen der überzähligen Constructionstheile übereinstimmt.

Die gleichförmige Anwendung dieses Verfahrens auf alle Arten von Fachwerken, also auf das Balkenfachwerk, das Bogenfachwerk und auf das continuirliche Balkenfachwerk, bietet, wie an Beispielen gezeigt wird, keine Schwierigkeit.

Im Anschluss an diese Untersuchung wird eine *graphische* Behandlung der Theorie der elastischen Linie des Balkenfachwerks entwickelt, welche nach Form und Inhalt an die im Jahrgange 1868 derselben Zeitschrift veröffentlichte Theorie der elastischen Linie des homogenen Balkens sich anschliesst.

Dresden. O. Mohr.

O. Mohr: Ueber die Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

(Civilingenieur Band XXII. Heft 2. 1876.)

Das in dieser Arbeit dargelegte neue Verfahren zur Bestimmung der mit der Centralaxe eines gegebenen Kräftesystems zusammenfallenden resultirenden Kraft R und des zugehörigen Kräftepaares M besteht in Folgendem:

Sind A, B und C die Mittelkräfte der *Projectionen* des Kräftesystems auf die drei Ebenen XY, XZ und YZ eines rechtwinkligen Coordinatensystems; ferner D, E, F die durch die Projectionen A und B, A und C, B und C bestimmten drei Kräfte; endlich C', B', A', die *dritten* Projectionen der Kräfte D, E und F; so ist jedes der drei Kräftesysteme:

$$\begin{array}{l} D,\ C,\ -C', \\ E,\ B,\ -B', \\ F,\ A,\ -A', \end{array}$$

gleichwirkend mit dem gegebenen System, wenn man mit $-A'$, $-B'$, $-C'$ Kräfte bezeichnet, welche nur durch den entgegengesetzten Sinn von A', B', C' sich unterscheiden. Die Kräfte D, E und F stimmen nach Sinn, Grösse und Richtung mit der Kraft R überein, und die Centralaxe ist der Schnitt der drei Ebenen, welche man durch die Kanten des Prismas DEF normal zu den gegenüberliegenden Seitenflächen legen kann. Endlich ergibt sich das Kräftepaar M als Projection eines jeden der drei Paare:

$$A, \; -A',$$
$$B, \; -B',$$
$$C, \; -C',$$

auf eine zu R normal gestellte Ebene.

Dieses Verfahren führt unmittelbar auf das in dem Lehrbuch der Statik von Möbius entwickelte *Nullsystem*. Denn die drei Schnittpunkte der Kräfte F, E und D beziehungsweise mit den Ebenen XY, XZ, YZ sind offenbar die *Nullpunkte* der Coordinatenebenen. Es lassen sich also die Beziehungen des Nullsystems auf die weiteren Umformungen des Kräftesystems sofort anwenden.

Dresden. O. Mohr.

Leonhard Sohncke: Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. (83 Seiten. 2 Tafeln. Karlsruhe 1876. Braun. Separatabdruck aus dem 7. Heft der Verhandlungen des naturwissenschaftl. Vereins zu Karlsruhe. — Ein Auszug davon in Poggendorff's Annalen der Physik. Ergänzungsband 7. Seite 337.)

Die neuere Physik hat sich mit Vorliebe damit beschäftigt, die theoretischen Vorstellungen über die moleculare Beschaffenheit der Gase, und in geringerem Grade auch der Flüssigkeiten, auszubilden, während sie die der festen Körper weniger beachtet. Und doch verspricht gerade die Entwicklung einer Molekulartheorie der festen Körper, und zwar vornehmlich der Krystalle, die tiefste Einsicht in das Wesen der Molekularkräfte. — Es liegt zwar eine, in ihren Ursprüngen auf Haüy zurückgehende, aber klar zuerst von Delafosse ausgesprochene und wesentlich von Frankenheim und Bravais ausgebildete Theorie der Krystallstruktur vor, die bei den Mineralogen eine ziemliche Verbreitung gefunden hat; doch hat die Physik im Ganzen wenig Notiz von ihr genommen; und in der That lassen sich erhebliche Einwendungen gegen sie machen. Ihr zufolge liegen die Schwerpunkte der Krystallmoleküle in den Schnittpunkten dreier Züge von je äquidistanten und parallelen Ebenen,

d. h. sie bilden ein räumliches Punktnetz mit parallelepipedischen Maschen oder ein sogenanntes *Raumgitter*; die Moleküle selbst aber sind sämmtlich parallel gelagert.

Diese Grundhypothese erscheint willkürlich; ihre Berechtigung erhält sie erst nachträglich dadurch, dass die Eintheilung der Raumgitter nach dem verschiedenen Grade ihrer Symmetrie genau auf die 7, in der Mineralogie als Krystallsysteme bekannten, Abtheilungen führt. Jedoch gibt es kein Raumgitter mit solcher Symmetrie, wie sie den halbflächigen Krystallen zukommt, so dass sich Bravais bei letzteren genöthigt sieht, den halbflächigen Charakter in die einzelnen Moleküle zu verlegen, diese selbst aber nach einer vollflächigen Strukturform, d. h. nach einem Raumgitter, angeordnet zu denken.

Hiernach wird man zugeben, dass eine andere Theorie, die ebenfalls mit Nothwendigkeit auf die bekannten Krystallsysteme führen würde, als gleichberechtigt mit der Bravais'schen Theorie erachtet werden müsste; dass sie aber sogar für die wahrscheinlichere erklärt werden müsste, wenn sie ausserdem noch den Vorzug einer evidenteren Grundhypothese hätte, und wenn sie die halbflächigen Krystallgestalten ohne Hülfshypothese mit umfasste.

Diese Eigenschaften besitzt die von mir entwickelte Theorie der Krystallstruktur; sie ist viel allgemeiner als die Bravais'sche, *denn unter den aus ihr folgenden zahlreichen Strukturformen sind alle Raumgitter mit enthalten.* Der Grundgedanke der neuen Theorie ist folgender:

Dass die congruenten Grundgebilde, aus denen ein Krystall aufgebaut ist (mag man nun die chemischen Moleküle selbst, oder Complexe von solchen als diese Krystallelemente ansehn), *regelmässig angeordnet sein müssen*, darf wohl als selbstverständlich gelten. Es handelt sich nur darum, den Begriff der regelmässigen Anordnung schärfer zu fassen. Dabei sind besonders zwei Umstände zu beachten. 1) In einem Krystall existirt kein physikalisch ausgezeichneter Ort, namentlich kein Mittelpunkt von physikalischer Bedeutung. 2) Ein beliebig kleines Bruchstück eines Krystalls hat immer noch alle den Krystall charakterisirenden physikalischen Eigenschaften, auch wenn die natürlichen Krystallflächen beseitigt sind; und zwar ist es gleichgültig, an welcher Stelle das Stück aus dem Krystall herausgenommen ist. — Somit erscheint die äussere Krystallform nur als eine mit den physikalischen Eigenschaften gleichwerthige Eigenschaft, nämlich als eine Folge der *Struktur*.

Wenn man es also, wie hier, nur mit der Struktur zu thun hat, so kann man sich von der Betrachtung der Krystallbegrenzung dadurch unabhängig machen, dass man den Krystall als von unbegrenzter Ausdehnung voraussetzt; und dies ist um so gerechtfertigter, als, den Molekularabständen gegenüber, die endlichen Dimensionen des Krystalls jedenfalls für ungemein gross gelten müssen. Wenn man nun, zur Vereinfachung, jedes Krystallelement durch seinen Schwerpunkt ersetzt, so lautet — auf Grund der vorhergehenden Ueberlegungen — die *Hypothese* folgendermassen:

Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmässige, unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Punkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt. Hierdurch ist die Ermittelung aller für die krystallisirten Körper möglichen Strukturformen auf die Lösung der Aufgabe zurückgeführt: *Alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden.*

Eine hiermit nahe verwandte, wenn auch sehr fremdartig klingende, Aufgabe hat nun Herr Camille Jordan schon vor mehreren Jahren in seiner Abhandlung Sur les groupes de mouvements gelöst. Ohne auf diese Aufgabe näher einzugehn, will ich nur hervorheben, dass ihre Lösung die krystallographische Aufgabe zugleich mit löst; jedoch ist sie viel allgemeiner, so dass die für meinen Zweck brauchbaren Resultate erst aus der Gesammtheit der Jordan'schen herausgeschält werden mussten. Auch bedurften sie einer Umdeutung aus dem Bewegungsproblem in das geometrische Problem der Punktsysteme, sowie mehrfacher Zusätze und Verbesserungen. Die letzteren habe ich in einem Anhange meiner Abhandlung zusammengestellt.

Auf eine vollständige Mittheilung der Resultate muss ich an dieser Stelle verzichten, denn es ergeben sich nicht weniger als 54 unbegrenzte, regelmässige Punktsysteme, welche in 8 Abtheilungen zerfallen. Um das Eintheilungsprincip zu verstehn, denke man sich ein solches Punktsystem starr gemacht und aus seiner bisherigen Lage herausgerückt; dann bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raumes ein ihm congruentes System; dieses heisse das *feste* System, gegenüber dem herausgenommenen beweglichen. In welchen Systempunkt des festen Systems man nun einen beliebigen Systempunkt des beweglichen auch legen mag: immer kann man, wegen der Regelmässigkeit, bewirken, dass beide Systeme zur Deckung kommen. Die zur Herbeiführung der Deckung erforderlichen Bewegungen (Deckbewegungen) sind nun theils Schiebungen, theils Drehungen oder Schraubungen um gewisse, im festen System gegebene, gerade Linien als Axen. Ich bezeichne nun eine solche Gerade, um welche entweder eine Drehung allein oder eine Drehung mit gleichzeitiger Verschiebung längs dieser Geraden (d. h. eine Schraubung) um $\frac{1}{n} \cdot 360^0$ ausgeführt werden muss, damit das System mit sich selbst wieder zur Deckung gelange, als eine *n-zählige Axe* des Systems. Ein und dasselbe Punktsystem kann Axen von mehrerlei Zähligkeit zugleich enthalten; jedoch gibt es nur 2, 3, 4 und 6 zählige Axen. Kommen nun die meistzähligen Axen eines Systems nur nach *einer* Richtung verlaufend vor, so nenne ich diese Richtung die der *Hauptaxe*. Als Eintheilungsgrund dient nun das Vorhandensein oder Fehlen einer Hauptaxe, und nächstdem die Zähligkeit der Axen. Die 8 Abtheilungen sind folgende:

A) Systeme mit Hauptaxe.	1. Die Hauptaxe ist 2-zählig. 2. „ „ „ 3 „ 3. „ „ „ 4 „ 4. „ „ „ 6 „
B) Systeme ohne Hauptaxe.	5. Es finden sich gar keine Axen. 6. Es finden sich nur 2-zählige Axen nach 3 senkrechten Richtungen. 7. Es finden sich 2- und 3-zählige Axen, resp. parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels. 8. Es finden sich 4- und 3-zählige Axen, resp. parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels.

Jedes dieser Punktsysteme ist entweder ein Raumgitter, oder es besteht aus mehreren (bis 24) ineinander gestellten congruenten Raumgittern. Von obigen Abtheilungen entsprechen durch den Charakter ihrer Symmetrie die 7. und 8. dem regulären Krystallsystem, und zwar erstere ausschliesslich den halbflächigen Gestalten; die ersten 6 Abtheilungen entsprechen, der Reihe nach, dem monoklinen, rhomboedrischen, quadratischen, hexagonalen, triklinen, rhombischen Krystallsystem. Die zahlreichen Punktsysteme innerhalb der einzelnen Abtheilungen, sowie die möglichen Winkel- und Dimensionenverschiedenheiten eines und desselben Punktsystems, geben Rechenschaft von den zahlreichen verschiedenen Typen, die innerhalb desselben Krystallsystems möglich sind. *Den hemiedrischen Krystallgestalten entsprechen zahlreiche Systeme.* Besonders wichtig ist ferner der Umstand, dass, bei nicht wenigen Punktsystemen, die Punkte eine *schraubenförmige* Anordnung besitzen. Es ist mir nämlich bereits gelungen, die an gewissen Krystallen beobachtete Drehung der Polarisationsebene mit grosser Wahrscheinlichkeit als Folge dieser schraubenförmigen Struktur nachzuweisen. (Zur Theorie des opt. Drehvermögens von Krystallen. Mathem. Annalen Bd. IX. S. 504.) — Mit besonderer Leichtigkeit erklären sich ferner die nicht selten vorkommenden Zwischenformen zwischen zwei Krystallsystemen, welche von beiden Systemen gewisse Eigenthümlichkeiten an sich tragen. *Einer solchen Zwischenform entspricht nämlich ein Punktsystem, welches weniger Axen besitzt als die congruenten Raumgitter, aus denen es aufgebaut ist.*

Die auf Krystallflächen hervorrufbaren *Aetzfiguren* müssen nothwendiger Weise in nahem Zusammenhange mit der Struktur stehn. Daher ist es nicht wunderbar, dass als Aetzfiguren gerade solche Vielecke auftreten, wie sie die regelmässigen ebenen Punktsysteme zusammensetzen, die ich früher ermittelt habe. (Die regelm. ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Borchardt's Journal f. Math. Bd. 77. S. 47.)

Schliesslich sei noch erwähnt, dass diese Theorie eine geometrisch scharfe Formulirung des Begriffs der *Isomorphie* an die Hand gibt: *zwei Substanzen sind isomorph, wenn sie in gleichen oder doch nahe gleichen Strukturformen krystallisiren.*

Die von mir vertretene Theorie ist vorläufig eine rein geometrische; es wäre ein grosser Schritt, wenn es gelänge, sie zu einer mechanischen zu erheben dadurch, dass man nachwiese: die regelmässigen Punktsysteme seien stabile Gleichgewichtslagen für congruente, mit gewissen (vorläufig noch unbekannten) Kräften auf einander wirkende Körperchen.

Carlsruhe. L. Sohncke.

Leonhard Sohncke: Universalmodell der Raumgitter. (Carls Repertorium für Experimentalphysik. Bd. XII. 1876. 6 Seiten.)

Wenn eine Schaar unendlich vieler Parallelebenen gleichen Abstandes geschnitten wird von zwei analogen Schaaren irgend welchen anderen je gleichen Abstandes, so bildet die Gesammtheit der Schnittpunkte ein Punktnetz mit parallelepipedischen Maschen oder ein *Raumgitter*. Bravais hat bewiesen, dass es vierzehn wesentlich verschiedene Arten von Raumgittern giebt, die sich jedoch in sieben engere Abtheilungen, genau entsprechend den sieben Krystallsystemen, zusammenfassen lassen. Die Raumgitter spielen nun aber nicht bloss in der Bravais'schen, sondern auch in der kürzlich von mir aufgestellten viel allgemeineren Theorie der Krystallstruktur eine hervorragende Rolle, indem es sich zeigt, dass alle allseitig unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme aus ineinander gestellten congruenten Raumgittern bestehn oder sich, in speciellen Fällen, auf ein einzelnes Raumgitter reduciren. — Bei der Schwierigkeit, welche es hat, sich Schaaren von räumlich vertheilten discreten Punkten anschaulich vorzustellen, habe ich es nicht für überflüssig gehalten, ein Modell zu construiren, welches gestattet, alle vierzehn möglichen Arten von Raumgittern zur Anschauung zu bringen. Die Einrichtung dieses beweglichen Modells ist in der Abhandlung genauer beschrieben, und seine specielle Einstellung für die verschiedenen Gitterarten angegeben. Die Abhandlung ist von einer Abbildung des Modells begleitet.

Carlsruhe. L. Sohncke.

Leonhard Sohncke: Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. (Mathem. Annalen von C. Neumann. Bd. IX. S. 504—529. 1876.)

Diejenigen Krystalle, welche die Polarisationsebene des Lichts drehn, verrathen bekanntlich durch die Lage gewisser Krystallflächen auch äusserlich einen schraubenförmigen Bau, so dass man schon aus ihrer äusseren Betrachtung entnehmen kann, ob sie rechts oder links drehend wirken. Hiermit ist also der innigste Zusammenhang des Drehvermögens mit der Struktur bewiesen. Trotzdem ist es unter den bisherigen Versuchen einer Theorie jener Drehung nur der Briot'sche, welcher auf jenen Zusammenhang überhaupt Rücksicht nimmt. Herr Briot findet, dass die schraubenförmige Anordnung des Aethers keinerlei Wirkung übt auf Strahlen, die der Schraubenaxe parallel sind, dass sich aber ein zur Schraubenaxe senkrechter Strahl in zwei entgegengesetzt rotirende elliptische Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit theilt, wodurch eine Drehung der Polarisationsebene eintreten muss. In Folge dessen nimmt Briot an, im Quarz sei der Aether nach Schraubenlinien von durchweg gleichem Drehungssinn, aber verschiedener Richtung, geordnet, nämlich so, dass die Schraubenaxen mit den Radien der sechsseitigen Basis des Quarzprismas der Reihe nach zusammenfallen. Obgleich nun der hieraus sich ergebende Drehungsbetrag der Polarisationsebene mit dem beim Quarz beobachteten hinreichend übereinstimmt, so ist diese Theorie doch wenig wahrscheinlich, denn sie bleibt den Nachweis gänzlich schuldig, wie die — durch die Trapezflächen des Quarz sich verrathende — Anordnung der Massentheilchen nach Schrauben, deren Axen der Hauptaxe *parallel* sind, im Aether schraubenförmige Anordnungen *senkrecht* zur Hauptaxe erzeugen könne.

Mir ist es nun auf einem völlig anderen Wege gelungen, die Drehung der Polarisationsebene in den allernächsten Zusammenhang mit der schraubenförmigen Anordnung der Krystallelemente zu bringen, und zwar mit Hülfe einer interessanten Entdeckung, welche Herr Reusch 1869 gemacht hat. Schichtet man nämlich eine grössere Anzahl Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke in der Weise aufeinander, dass jedes folgende gegen das vorhergehende um 60^0 (oder 45^0) immer in demselben Sinn gedreht ist, so zeigt dies Präparat fast dieselben optischen Erscheinungen wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte, und zwar wie ein rechts- oder linksdrehender Quarz, je nach dem Sinne der wendeltreppenförmigen Aufschichtung. Nur in sofern weicht das Verhalten dieser Glimmercombination von dem des Quarz ab, als sich im Polarisationsapparat, bei Drehung der Combination in ihrer Ebene, kleine Aenderungen der Farbenerscheinung einstellen. Jedoch vermuthet Reusch, dass sich das Verhalten der Glimmercombination dem des Quarz um so mehr nähern wird, je dünner die Lamellen und je grösser die Zahl der Umgänge. — Von diesen Thatsachen gehe ich aus. Den Hauptheil meiner Abhandlung bildet die ausführliche Entwicklung der Theorie der Glimmercombination für senkrechten Durchgang der Strahlen; und zwar genügt es schon, eine nur aus 3 Blättchen aufgeschichtete Combination (1 Triade) zu betrachten; es ist dann leicht, von ihr zu den Combinationen mit mehr Blättchen überzugehn. Die für die Drehung durch eine Glimmercombination entwickelte Formel wende ich dann auf den Fall an, dass die Blättchendicke, multiplicirt mit einer von der optischen Beschaffenheit der Blättchen abhängenden Zahl, klein gegen die Wellenlänge ist. *In diesem Fall ergibt sich für die Drehung der Polarisationsebene dasselbe Gesetz, welches beim Quarz als das, von Herrn Boltzmann vervollständigte, Biot'sche Gesetz bekannt ist.*

Ist es nun hiernach schon nicht unwahrscheinlich, dass dem Quarz eine solche Struktur, wie sie durch die Glimmercombination von Reusch im Groben verkörpert ist, zuzuschreiben sei, so erwächst dieser Hypothese über die Quarzstruktur ihre wahre Berechtigung doch erst aus der von mir entwickelten *allgemeinen Theorie der Krystallstruktur.* Diese sieht einen Krystall als endlichen Theil eines unbegrenzten regelmässigen Punktsystems an, d. h. eines solchen, in dem die Punktvertheilung um jeden Punkt herum dieselbe ist wie um jeden anderen. Unter den aus diesem Grundsatz sich ergebenden 54 verschiedenen Punktsystemen, deren Eintheilung in Gruppen auf die bekannten Krystallsysteme führt, finden sich nun nicht wenige mit einer *schraubenförmigen* Anordnung der Punkte. Legt man durch einen Punkt eines solchen Schraubensystems senkrecht zur Schraubenaxe eine Ebene, so ist sie in ihrer unendlichen Ausdehnung mit unendlich vielen Punkten besetzt; sie heisse eine *Molekularebene.* In den einfachsten Fällen besteht dann das ganze schraubenförmige Punktsystem aus lauter äquidistanten, zur Schraubenaxe senkrechten, congruent besetzten Molekularebenen, deren jede folgende gegen die vorhergehende immer um denselben Winkel (von 60^0 oder 90^0 oder 120^0) in demselben Sinn gedreht ist. Solche Systeme bieten also die überraschendste Analogie zu der Glimmercombination mit unendlich dünnen Blättchen dar. Die Uebereinstimmung geht aber noch weiter. Nämlich in complicirteren Fällen treten an die Stelle jeder solchen Molekularebene *zwei* derselben, congruent und parallel besetzt, jedoch so, dass im Allgemeinen die Punkte der einen nicht vertikal über denen der anderen liegen, wenn die Schraubenaxe vertikal steht. Jetzt ist jedes Ebenen*paar* gegen das vorhergehende um stets denselben Winkel gedreht. Weil jedes einzelne Ebenenpaar den geometrischen Charakter des monoklinen Krystallsystems besitzt, so ist es nun *vollständig geeignet,* die Stelle des einzelnen doppelbrechenden Blättchens der Glimmercombination von Reusch zu vertreten. Der Abhandlung ist die Abbildung eines Punktsystems beigefügt, welches möglicher Weise der Quarzstruktur zu Grunde liegen könnte.

Es ist wichtig hervorzuheben, dass — abgesehen von den 2 Abtheilungen der Punktsysteme, welche dem triklinen und monoklinen Krystallsystem entsprechen — in keiner der übrigen Abtheilungen schraubenförmige Punktsysteme fehlen, selbst nicht in jener Abtheilung, die dem regulären Krystallsystem entspricht. Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, auch bei regulär krystallisirenden Körpern, wie z. B. beim chlorsauren Natron, das Drehvermögen auf eine schraubenförmige Struktur zurückzuführen.

Carlsruhe. L. Sohncke.

M. Cantor: Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. (Eine historisch-mathematische Untersuchung. Leipzig 1875. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 185 S. Text; 46 S. Anmerkungen; 6 S. Sachverzeichniss für den Text; 6 lithographirte Tafeln.)

„Die Römer haben für die Feldmesskunst der Griechen und für unmittelbar oder mittelbar damit Zusammenhängendes, welches ihnen seit dem Beginne der christlichen Aera zufloss, eine aufbewahrende Mittelstelle abgegeben. Sie ähneln darin den Arabern, nur dass sie weniger in sich aufnahmen, entsprechend ihrer geringen mathematischen Begabung. Hinzuerfunden haben sie so gut wie Nichts, höchstens einige Operationen wirklicher Feldmesskunst. Weggelassen haben sie von dem, was sie sich angeeignet hatten, auch nicht viel; die falschen, meistens altegyptischen Näherungsformeln vor Allen haben sie niemals ausser Uebung treten lassen. Was für die Römer gilt, bleibt wahr für ihre Schüler im Mittelalter. Einzelne hervorragende Geister ausgenommen, nimmt das Verständniss des Aufbewahrten immer mehr ab, aber die Menge des Aufbewahrten bleibt. Sie ist nicht gross, doch immerhin erheblicher, als man sonst wohl annahm. Dass überhaupt irgend etwas von Geometrie in die wissenschaftliche Barbarei des frühsten Mittelalters hinüber sich retten konnte, das ist das unschuldige Verdienst der römischen Agrimensoren.“

So lautet der letzte Absatz des oben genannten Buches, und da ich auch heute kaum wüsste, den wesentlichen Inhalt der ganzen Untersuchung deutlicher in wenigen Sätzen darzustellen, so wird man mir verzeihen müssen, wenn ich den Bericht über meine Arbeit mit diesem wörtlichen Selbstcitate beginne. Ich knüpfe daran sofort eine Bemerkung über den Gang der Untersuchung. Es galt mir, den Nachweis zu führen, wie gewisse geometrische Dinge sich von Schriftsteller zu Schriftsteller, von Volk zu Volk vererbten, und so war es in der Natur des Stoffes von selbst begründet, wenn in einem ersten Capitel die egyptischen Anfänge der geometrischen Wissenschaft und des Rechnens, soweit es hier in Betracht kam, erörtert würden; wenn ein zweites Capitel die Feldmesskunst der Griechen behandelte; wenn ein drittes, ein viertes Capitel den Römern und deren Schülern sich zuwendeten; wenn in jedem folgenden Capitel auf die früheren zurückgegriffen wurde, um die Uebereinstimmung des aller Orten Gelehrten mitunter bis auf den Wortlaut genau hervortreten zu lassen. Aeussere Gründe boten die Veranlassung, dass von diesem Gange so weit abgewichen wurde, dass jenes erste egyptische Capitel in Wegfall kam. Die auch heute noch nicht vollendete Herausgabe des mathematischen Papyrus Rhind legte mir eine zu grosse Beschränkung in der Auswahl des in jenem ersten Capitel zu verwerthenden Materials auf, als dass nicht ein unziemliches Missverhältniss der Ausdehnung sich hätte ergeben müssen, welches ich zu vermeiden wünschte, sei es auch nur, um bei flüchtigen Lesern den Argwohn nicht aufkommen zu lassen, von den Egyptern sei in der That nicht mehr zu sagen, als hier auf wenigen Seiten geboten wird. Darum zog ich es vor, das, was aus bisherigen Veröffentlichungen, insbesondere von Lepsius und Aug. Eisenlohr, zur freien Verfügung stand, in das Capitel, welches mit dem Griechenthume, sowie theilweise in das, welches mit den Römern sich beschäftigt, hineinzuverarbeiten, und somit besitzt mein Buch neben einer kurzen Einleitung, in welcher die Aufgabe gestellt, den Verdiensten eines namhaften Vorgängers, Fr. Hultsch die gerechte Würdigung ertheilt und den Vorstehern mehrerer Bibliotheken pflichtschuldiger Dank erstattet wird, nur drei Capitel:

1) Heron von Alexandrien S. 6—63.
2) Römische Feldmessung S. 63—139.
3) Die Schüler der Römer S. 139—185.

In diesem Referate, wo es auf stylistische Abrundung weniger ankommt, als auf möglich scharf hervortretenden Inhalt, will ich von der angedeuteten Viertheilung im Gegensatze zu dem Buche selbst Gebrauch machen.

Die *Egypter* legten sich schon vor dem Jahre 1700 v. Chr. Fragen vor, welche auf Ausmessung grad- und krummlinig begrenzter Figuren und Körper sich bezogen. Unter den Figuren scheinen sie das Dreieck in erster Linie beachtet zu haben, und zwar das gleichschenklige Dreieck, dessen Seiten a, a, b heissen mögen und dessen Fläche als $\frac{a \cdot b}{2}$ berechnet wurde. Aus dem gleichschenkligen Dreieck entstand durch Abstumpfung das gleichschenklige Paralleltrapez, dessen Seiten a, a, b_1, b_2 die Fläche $\frac{a\,(b_1 + b_2)}{2}$ errechnen liessen. Dieselben falschen Näherungsformeln erhielten sich bis nach 100 v. Chr., wenn auch eine gewisse Aenderung sich dadurch kund zu geben scheint, dass allmälig nicht das Dreieck, sondern das Trapez als die primäre Figur aufgefasst wurde, von welcher das Dreieck nur den speciellen Fall der einen verschwindenden Parallele darstellt, dem Begriffe nach ein gewisser Fortschritt, während zugleich ein Rückschritt darin sich offenbart, dass bei dem Trapeze die Bedingung des Parallelismus zweier Seiten, der Gleichheit der anderen beiden in Wegfall kommt und allgemein aus den einander gegenüberliegenden Seiten a_1, a_2 und b_1, b_2 die Fläche des Vierecks mit $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}$ gewonnen wird. Zusammengesetztere Figuren werden zum Zwecke der Berechnung durch Hülfslinien in Dreiecke und Vierecke zerlegt. Von Wichtigkeit ist noch, dass in der ältesten Zeit bereits ein Name, *merit*, für die oberste Linie jeder solchen gradlinigen Figur auftritt. Der Kreis wird quadrirt als $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, wo d den Durchmesser bedeuten soll, eine Formel, welche dem Werthe $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604 \ldots$ entspricht. Das Rechnen der Egypter war zu derselben frühen Zeit ein bereits sehr entwickeltes. Bruchrechnungen gehörten namentlich zu dem täglichen Bedürfnisse und wurden so bewältigt, dass die vorkommenden Brüche stets in Gestalt von Summen einfacherer Brüche, welche nur die Einheit zum Zähler haben, behandelt wurden. Zu einer solchen Rechnungsweise war aber unbedingt Eines nothwendig: die Möglichkeit, jeden beliebigen Bruch in eine Summe von Partialbrüchen, oder wie ich lieber sage, von Stammbrüchen zu verwandeln. Das ist eine Aufgabe, welche Jahrtausende lang wiederkehrt, wenn auch unter den im Drucke bekannten Schriftstellern erst Leonardo von Pisa 1202 eine Methode dazu lehrt, auf deren möglicherweise uralten Ursprung ich hingewiesen habe. Als charakteristisch für dieselbe möchte ich die Benutzung von ein für alle Mal ausgerechneten Hülfstabellen hervorheben. Setze ich noch hinzu, dass jede Aufgabe des ältesten bekannten egyptischen Uebungsbuches die Auflösung durch die Worte „Mache es so“ einleitet, so dürfte in diesem Referate genug gegeben sein. Egyptisch freilich ist noch mancherlei, worauf hier nicht ausführlicher eingegangen werden kann, so auch die Einrichtung des Schaltjahres von 366 Tagen, welches alle 4 Jahre wiederkehrend die Ordnung der Jahreszeiten und des kirchlichen Jahres unverrückt feststellt, eine Einrichtung, welche am 7. März 238 v. Chr. vielleicht unter dem Einflusse des geistvollen Chronologen Eratosthenes durch das Edict von Canopus ins Leben gerufen wurde, wenn auch nur, um bald wieder ausser Uebung zu kommen.

Die *Griechen* verkörpern sich für den bei der gegenwärtigen Untersuchung vorliegenden Zweck in die eine Persönlichkeit des Heron von Alexandrien, eines Schriftstellers, der etwa um 100 v. Chr. muthmasslich ein officielles Werk über Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft verfasste, die einzige derartige Schrift aus alexandrinischer Zeit, welche in umfangreichen Ueberresten zu uns gelangt ist. Feldmesskunst und Feldmesswissenschaft unterscheide ich dabei so, dass ich unter Ersterer die auf dem Felde selbst zu vollziehenden Operationen, als Abstecken von Geraden nach bestimmter Richtung, von rechten Winkeln, u. s. f. verstehe, unter Letzterer dagegen die Kenntniss von Formeln zur Berechnung insbesondere von Flächenräumen verschiedener, durch gradlinige Bestimmungsstücke gegebener Figuren. Heron von Alexandrien, ein vielseitiger Gelehrter, dessen sämmtliche uns erhaltenen Werke verdienter Besprechung unterzogen wurden, hat sowohl in der Feldmesskunst als in der Feldmesswissenschaft Bedeutendes geleistet. Ersterer ist seine Dioptrik gewidmet, d. h. die Lehre von der Anwendung der Dioptra, eines feldmesserischen Werkzeuges, in welchem der Uranfang unserer Theodolithen nicht zu verkennen ist. Letztere bildet den Gegenstand einer Anzahl anderer Abhandlungen, theilweise auch der Dioptrik. Die Hauptaufgabe, welche ich mir nun in dem Capitel über Heron von Alexandrien stellte, bestand darin: nachzuweisen, was er den Egyptern entnahm, vorbereitend zu ordnen, was spätere Zeiten ihm entnehmen sollten, ausser dem Zusammenhange auf Einzelheiten aufmerksam zu machen, deren Ursprung man noch nie so weit zurück verfolgt hatte. Als egyptisch zeigte sich sofort die stylistische Form von dem einleitenden „Mache es so!" bis zu der als *κορυφή* benannten Scheitellinie; egyptisch ist die fast durchgängige Benutzung von Summen von Stammbrüchen; egyptisch ist die Zerlegung von Figuren durch Hülfslinien in Elementarfiguren; egyptisch sind die falschen Näherungsformeln für die Fläche von Dreiecken und Vierecken. Eine Anzahl von mit dem Kreise sich beschäftigenden Aufgaben benutzen Formeln, welche auf den Werth $\pi = 3$ herauskommen. Dieser Werth ist allerdings, so viel wir wissen, nicht egyptisch, dagegen habe ich an anderer Stelle, in einer ausführlichen Recension von Oppert: L'étalon des mesures Assyriennes (Zeitschr. Math. Phys. XX., histor.-literar. Abth. S. 149—165) den Nachweis zu führen gesucht, dass hier ein babylonischer Baustein mitten unter anderartigem Gemäuer zu erkennen sei. Darf ich heute eine bisher nicht veröffentlichte Bemerkung hinzufügen, so ist es die, dass ein auffallender Unterschied zwischen egyptischer und babylonischer Kreisrechnung bestand, wofern wirklich $\pi = 3$ babylonischer Herkunft ist. Die Egypter, das habe ich in meinem Buche hervorgehoben, „dachten die Zahl π als Quadratzahl, wodurch eine förmliche Umwandlung des Kreises in ein Quadrat leichter möglich war, als unter jeder anderen Voraussetzung", oder anders gesagt: die Egypter hatten keine andere Absicht als die der thatsächlichen Herstellung eines dem Kreise gleichflächigen Vierecks. Die Babylonier dagegen suchten die Länge des Kreisumfanges zum Durchmesser in Beziehung zu setzen. Die griechische Geometrie wechselte in ihren Auffassungen. Den Egyptern folgend, suchten um 430 v. Chr. ein Bryson, ein Antiphon, ein Hippokrates von Chios den Kreis in ein ihm gleichflächiges Quadrat zu verwandeln und nannten diese Aufgabe „Tetragonismus" mit einem ihre Methoden überlebenden Namen; nachher gelangte die babylonische Auffassungsweise zur Geltung, und von ihr aus fand Archimed $\pi = \frac{22}{7}$ in einer Abhandlung, welcher er aber auch statt des üblichen Namens einen neuen: den der Kreismessung beilegte. Von den geometrischen Eigenthümlichkeiten des Heron, welche auf spätere Nachfolger sich vererbt haben, mögen an dieser Stelle nur einige wenige hervorgehoben werden: die Formel für die Dreiecksfläche aus den 3 Seiten des Dreiecks; eine näherungsweise ziemlich zutreffende Berechnung des gleichseitigen Dreiecks als $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ des Quadrates der Seite; eine Gleichung, welche den Zusammenhang der

Seite a_8 des regelmässigen Achteckes und des Durchmessers d_8 des umschriebenen Kreises durch $\left(\frac{d_8}{2}\right)^2 = \left[\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right]^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$ darstellt; eine Regel zur Construction des regelmässigen Achteckes vom Quadrate aus, indem aus jedem Eckpunkte des Quadrates mit dessen halber Diagonale im Halbmesser Kreisbögen beschrieben werden, welche auf den Quadratseiten die 8 Eckpunkte des verlangten Achteckes als Durchschnittspunkte hervorbringen. Die beiden letzten Dinge stehen zwar an verschiedenen Orten, erweisen aber ihren sachlichen Zusammenhang durch die Möglichkeit, den Beweis für Beides an einer und derselben Figur, an zwei einander symmetrisch durchsetzenden Quadraten zu führen. Endlich berichte ich allerdings wiederum in sehr zusammengeschrumpftem Auszuge über Dinge, welche man früher noch nicht bis in die vorchristliche Aera verfolgen zu können glaubte. Dazu gehören gewisse trigonometrische Kenntnisse, da man Formeln für die Fläche jedes regulären Vielecks vom Dreieck bis zum Zwölfeck aus der Seite berechnet, ferner Formeln für die Fläche von Kreisabschnitten, für die Länge von Kreisbögen, für den Rauminhalt von Kugelcalotten, mögen sie noch so sehr den Charakter ungenügender Näherung an sich tragen, nicht wohl unter einer andern Rubrik wird unterbringen können. Dazu gehört das erstmalige Vorkommen der Quadratwurzel aus der negativen Einheit, herbeigeführt durch den Mangel an richtiger Determination für die Länge gewisser Stücke, welche bei einer die Pyramide betreffenden Aufgabe in Rechnung kommen, und umgangen durch die wenn auch nicht ausdrücklich benutzte Annahme $\sqrt{-1} = 1$. Dazu gehört die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung, welche durchaus unentbehrlich war, um unter Voraussetzung der gegebenen Summe von Kreisfläche, Peripherie und Durchmesser den letzteren allein zu berechnen. Auch hier seien zwei ergänzende Bemerkungen erlaubt; die eine, dass die gegebene Summenzahl so recht Zeugniss davon gibt, wie hier eine vorzugsweise algebraische Aufgabe vorlag, da Flächen und Längen geometrisch nicht homogen, auch nicht addirt werden können, die andere, dass gezeigt werden kann, dass die Auflösungsmethode durchaus mit derjenigen übereinstimmt, welche Nesselmann (Algebra der Griechen S. 319) bei Diophant zu enthüllen wusste. Wichtig wäre auch die Methode der Quadratwurzelausziehung des Heron, wenn es gelänge, sie zu ermitteln. Leider war dieses bisher nicht der Fall und nur das negative Ergebniss konnte festgestellt werden, dass Heron's Methode eine andere gewesen sein muss als die Theon's von Alexandrien, d. h. als die moderne Methode.

Den *Römern* ist der räumliche Haupttheil des Buches gewidmet. Es galt dabei zuerst ins Klare zu kommen über den verschiedenzeitigen und nach meinem Dafürhalten auch verschiedenseitigen Ursprung der Feldmesskunst und der Feldmesswissenschaft der Römer. Für jene nehme ich eine etruskische, für diese eine alexandrinische Herkunft an; jene in das graue Alterthum urdenklicher Väterzeiten sich verlierend, diese an ein ganz bestimmtes Ereigniss, an den durch Cäsar geführten alexandrinischen Krieg anknüpfend, nach welchem, um nicht zu sagen in dessen Folge, alexandrinische Chronologie und Geodäsie nach Rom übersiedelten. Mit dem altetruskischen Ursprung der Feldmesskunst bei den Römern hängt der Name des hauptsächlichen dabei benutzten Apparates „Groma" zusammen, welches keineswegs, wie immer angenommen worden ist, mit „Gnomon" gleichbedeutend ist, sondern sachlich und lautlich durchaus von dem Sonnenzeiger zu unterscheiden, vielmehr eine Art von Winkelkreuz gewesen ist. Der alexandrinische Ursprung der Feldmesswissenschaft lässt sich noch genauer als heronischer Ursprung bezeichnen, indem es gelingt, zwischen den Schriften römischer Feldmesser und den heronischen Werken vollständige Textesgleichungen herzustellen, d. h. zu einer überwiegend grossen Anzahl römischer Stellen die griechischen Paragraphe anzugeben, aus denen sie oft in wörtlicher Uebersetzung entnommen sind, ein noch weit überraschenderes Zusammentreffen, nachdem es aus einzelnen bestimmten Angaben gelungen ist, den Beweis zu führen, dass wir nicht einmal diejenige Ausgabe heronischer Schriften besitzen, welche damals nach Rom gekommen ist. Die römischen Schriftsteller, welche zu diesem vergleichenden Endzwecke einer gründlichen Durchsicht unterzogen wurden, sind theils solche, welche zu den eigentlichen sogenannten Agrimensoren gehören und insbesondere in einer im VI. oder VII. Jahrhundert entstandenen Handschrift, dem Codex Arcerianus der Wolfenbüttler Bibliothek enthalten sind, theils andere, welche wie der Bauschriftsteller Vitruvius, der die Landwirthschaft behandelnde Columella, der Wasserbaumeister Frontinus, der vielseitig gewandte Boetius, vielleicht auch der Militärschriftsteller Hyginus sich nur nebensächlich mit geometrischen Dingen beschäftigten. Der Letztgenannte wird in meinem Buche noch für die gleiche Persönlichkeit wie ein zu Trajans Zeiten lebender Feldmesser gleichen Namens gehalten. Erst nach vollendetem Drucke meiner

Untersuchungen erschien in dem Rheinischen Museum für Philologie (Jahrgang 1875, Bd. XXX, S. 469) ein Aufsatz von H. Droysen der den Militärschriftsteller in die Zeit zwischen 240 und 267, also um anderthalb Jahrhunderte später zu verweisen sucht. Unter den bei jener Durchsicht bemerkenswerth erschienenen, vielfach noch nie beachteten Dingen zum Zwecke dieses Berichtes eine Auswahl zu treffen, fällt mir schwer. Ich muss der Hauptsache nach hier auf mein Buch selbst verweisen und möchte nicht einmal für Einiges, welches ich in mein Referat aufnehme, den Anspruch auf besondere Wichtigkeit erheben. Bei Vitruvius z. B. fand sich allein eine Kreisberechnung vor, welche von der Voraussetzung $\pi = 3\frac{1}{8}$ ausgeht. Denselben Werth $\pi = 3\frac{1}{8}$ hat, wie ich zeigte, noch Albrecht Dürer benutzt, und mir schien dieses ein Beweis von der conservativen Kraft solcher Volksschichten, welche nur übungsmässig nicht auf wissenschaftliche Gründe hin Rechnungsverfahren sich aneignen. Mochte mir auch kein Zwischenglied zwischen Vitruvius und Albrecht Dürer bekannt sein, ich zweifelte nicht an der Möglichkeit, ein solches aufzufinden. Max Curtze hat, wie er in einer Besprechung meines Buches in der Jenaer Literaturzeitung ankündigt, das Material in Händen, jene Lücke genügend auszufüllen, und ich sehe der Veröffentlichung dieses Materials in Grunert's Archiv mit Spannung entgegen. Bei Boetius konnte auf die merkwürdige Figur zweier einander durchsetzender Quadrate hingewiesen werden, deren Bedeutung aus unseren obigen Bemerkungen über Heron's Achteckconstruction einleuchtend für Boetius selbst verloren gegangen war, da er die Figur überhaupt nicht mit Geometrischen sondern mit der Darstellung eines arithmetischen Gegenstandes: der achteckigen Zahlen in Verbindung bringt. Eben bei Boetius fand sich auch der Wortlaut einer Aufgabe, welche es möglich machte, einen Schreibfehler im Codex Arcerianus zu verbessern, der an sich höchst nebensächlich dadurch zu nie geahnter Bedeutung sich erhob, dass auf die abschreibende Wiederholung desselben eine ganze Beweisführung einer historisch wichtigen Thatsache sich aufbauen liess. Der Schreibfehler findet sich in einer der Ueberschrift zufolge von Nipsus herrührenden Aufgabe und wurde dann später im Kloster Bobbio, wo der Codex am Ende des X. Jahrhunderts sich befand, von Gerbert abgeschrieben, dabei aber so wenig daran gedacht, dass hier ein Wort weggefallen sein könne, dass vielmehr aus dem an sich widersinnigen Zusammenhange eine neue selbstverständlich falsche Definition ihren Ursprung nahm. Zu den Schriftstellern des

Codex Arcerianus gehört auch Frontinus, oben als Wasserbaumeister bezeichnet. Es ist gelungen, aus einer handschriftlichen Randbemerkung zu Gerbert's Geometrie den Nachweis zu führen, dass ein von mancher Seite angezweifeltes geometrisches Werk des Frontinus thatsächlich im XII. Jahrhunderte noch vorhanden war; es ist vielleicht sogar gelungen, ein Stück desselben mitten in der praktischen Geometrie des Leonardo von Pisa wieder zu entdecken. Ein grösseres Bruchstück derselben alten Sammelhandschrift der Wolfenbüttler Bibliothek führt entstellte Autorennamen, welche von philologischer Seite als richtig Epaphroditus und Vitruvius Rufus lautend gelesen worden sind. Dieses Bruchstück habe ich zum ersten Male vollständig veröffentlicht, zum ersten Male mit Rückblick auf seine Quellen zu erläutern gesucht. Aus demselben geht mit unzweifelhafter Gewissheit hervor, dass die Verfasser 1) eine Formel kannten zur Darstellung einer Polygonalzahl aus ihrer Seite; 2) eine Formel zur Darstellung der Seite aus der Polygonalzahl; 3) eine Formel zur Auffindung der Pyramidalzahlen aus den zugehörigen Polygonalzahlen und ihren Seiten; 4) eine Summenformel für die Reihe der Kubikzahlen. Nicht minder unzweifelhaft ist es, dass alle diese Dinge ursprünglich in griechischem Texte vorgelegen haben müssen, wenn auch nicht die geringste Spur auf den Namen des eigentlichen Erfinders zurückweist. Nur dass die Griechen sich mit den figurirten Zahlen vielfach beschäftigten, steht fest, und eine dem griechischen Geiste verwandte Methode, die Kubikzahlensummen zu finden, nachträglich wiederherzustellen, ist mir, wie ich mir schmeichle, gleichfalls gelungen. In allen diesen römisch-geometrischen Schriftstücken lassen sich, wie zum Schlusse bemerkt werden mag, in Nachachmung der heronischen Schriften bestimmte Wortformen, aber auch bestimmte Hauptabschnitte erkennen. Die Scheitellinie heisst *vertex* oder *coraustus*, letzteres eine offenbare Verketzerung aus κορυστὸς (sc. γραμμή), wie Gottfried Hermann bereits 1840 bemerkt hat. Das „Mache es so" kehrt als S. Q. d. h. sic quaeres wieder. Die gemeinten Abschnitte, von denen allerdings bei dem einen Schriftsteller der Eine, bei dem anderen der Andere bevorzugt wird, sind Maassbestimmungen, geometrischen Definitionen, der Feldmesskunst, der Feldmesswissenschaft und der Lehre von den figurirten Zahlen gewidmet. Leider sind uns Stücke über Feldmesskunst nur in sehr geringfügigen Ueberresten erhalten, so fest es steht, dass dergleichen z. B. aus der Feder eines Frontinus, eines Balbus, eines Celsus vorhanden gewesen sein müssen.

Die Schüler der Römer, welche dem letzten Abschnitte meines Buches Ueberschrift und Inhalt gaben, sind der Zeit wie dem Raume nach über viele Jahrhunderte, über weite Ländergebiete zerstreut. Auch war es nicht meine Absicht jeden einzelnen Autor zu nennen, geschweige denn eingehend zu behandeln, der in diesem oder jenem Sinne Abhängigkeit von Römischer Geometrie erkennen lassen mag. Nur einzelne Vertreter wurden ausgewählt, manche wegen ihrer eigenen geistigen Bedeutung, manche ich könnte fast sagen zufällig und beispielsweise. Die sogenannten Aufgaben zur Verstandsschärfung stehen an der Spitze dieses Abschnittes. Ich durfte mich der alten ehemals Reichenauer Handschrift dieser Aufgaben bedienen, welche gegenwärtig der Staats- und Hofbibliothek in Karlsruhe angehört, und welche, wenn sie es auch unentschieden lässt, wer der Sammler jener Aufgaben war, doch dafür die Gewissheit liefert, dass jene Sammlung um das Jahr 1000 vorhanden war, denn in jener Zeit ist die Handschrift selbst entstanden. Mag es nun in vielen anderen Beziehungen von keineswegs geringer Tragweite sein, ob die Sammlung noch weiter zurück bis auf Alcuin geht, was dem inneren Gehalte wie der Form nach gar wohl möglich ist, für die Geschichte der Mathematik und für die besondere Aufgabe, welche ich mir in meinem Buche gestellt hatte, ist es ziemlich müssig auf diese Frage sehr grosses Gewicht zu legen. Dagegen ist die Entstehung der Aufgaben unter Benutzung römischer Quellen laut zu betonen. Der Nachweis einer dieser Aufgaben in einem rechtswissenschaftlichen Werke aus Trajans Zeiten war für mich selbst eine der freudigsten Ueberraschungen. Diese Aufgabe heute noch in allen Uebungsbüchern mit geringen Ausnahmen als Lehrmittel verwerthet gehört freilich nicht der Geometrie sondern der Theilungsrechnung an; sie bietet eine um so willkommenere Controle des Ursprungs auch der geometrischen Aufgaben, welche daneben stehen. Ungleich bedeutender ist die Geometrie Gerberts. Ich hatte auch hier die Annehmlichkeit einer handschriftlichen Quelle mich bedienen zu können. Das einzige vollständige Exemplar von Gerberts Geometrie entstanden in der ersten Hälfte des XII. Jahrhunderts, war mir aus der Bibliothek des Benediktinerstiftes zu St. Peter in Salzburg zur Verfügung gestellt, und so konnte ich nicht nur die Frage entscheiden, ob überhaupt eine einheitliche Geometrie Gerberts existire, sondern auch die Frage nach der Entstehungszeit jener Geometrie. Dass ich die erstere Frage bejahte bedarf keiner Rechtfertigung. Es müsste doch komisch sein, wenn moderne Zweifelsucht über das, was ein geometrischer Schriftsteller aus dem Jahre 1000 etwa verfasst haben kann oder nicht kann, besser unterrichtet zu sein wähnte, als die in mathematischen Dingen gar nicht ungeübte, an Gerbert noch voll Pietät sich erinnernde Mitte des XII. Jahrhunderts, und dass damals die Geometrie der salzburger Handschrift als die Gerberts gedacht wurde, bezeugt ohne Möglichkeit des Widerspruchs der Anfang dieser Handschrift, deren vortrefflich facsimilirte Wiedergabe auf der letzten Figurentafel meines Buches jeden Leser in den Stand setzt sich durch eigene Anschauung von der Folgerichtigkeit meiner Schlüsse zu überzeugen. Daneben habe ich nicht versäumt auch die Bemängelungen, welche gegen die Zusammengehörigkeit so verschiedenartiger Abschnitte, als in der sogen. Geometrie des Gerbert vereinigt wären, gerichtet zu werden pflegen, zu erörtern. Die Verschiedenartigkeit ist vorhanden, aber sie ist nicht grösser als in den heronischen Schriften, als in deren römischen Nachbildungen, welche selbst wieder Gerbert als Quelle dienten. Alle jene früher genannten Theile, Maasse und Definitionen, praktische und rechnende Geometrie und Arithmetik finden sich seit langer Zeit zuerst wieder vereinigt, in meinen Augen eine zuverlässigere Unterstützung der Annahme eines einheitlichen Verfassers als der entgegengesetzten Annahme. Ist aber Gerbert der Verfasser der ihm zugeschriebenen Geometrie, so ist deren Abfassungszeit leicht und genau zu bestimmen. Textvergleichungen waren zwischen Römern und Heron auch schon von Hultsch angestellt worden, wenn auch nicht so vollständig wie von mir, Textvergleichungen Gerberts mit den Römern sind nirgend veröffentlicht gewesen. Sie beweisen aber, dass Gerbert den Codex Arcerianus mit seinem Schreibfehler innerhalb einer Aufgabe des Nipsus sich aneignete, dass er dagegen die Geometrie des Boetius, aus welcher jener Schreibfehler ihm verständlich werden musste, nicht kannte, als er seine Geometrie verfasste. In Bobbio lebte Gerbert 981 und 982, die Geometrie des Boetius fand er 985 (nach Anderen 982) in Mantua. Zwischen 981 und der Reise nach Mantua fällt demnach die Arbeitszeit, welche Gerbert auf seine Geometrie verwandte. Die Textvergleichungen bieten aber auch noch mehr. Für fast den ganzen eigentlich feldmesserischen Theil von Gerberts Geometrie fehlen uns die römischen Quellen. Werden sie auch Gerbert gefehlt haben? Ich habe zu zeigen gesucht, dass diese Annahme nicht wohl gewagt werden kann. Gerbert wird gerade in der Feldmesskunst am wenigsten als Orginalschriftsteller zu vermuthen sein. Was von diesem Gegenstande bei ihm erhalten ist, kann uns folglich wahrscheinlich ersetzen, was in römischer Form verloren gegangen ist, und eine nicht geringe Bestätigung dieser Meinung gewährt das wiederholte Auftreten von durch Gerbert beschriebenen feldmesserischen Arbeiten bei Leonardo von Pisa. Nenne ich hier nur noch die Namen Herrmannus Contractus, Johannes Widmann von Eger, Gregorius Reysch, in deren Werken mehr oder weniger von den Römern aus übermitteltes heronisches Material nachgewiesen wird, so habe ich damit ein Gerippe auch des letzten Abschnittes meines Buches hergestellt. Einem wahren Körper kann es nicht zu gleichen den Anspruch erheben, auch wenn ich hinzufüge, dass hier zur vollen Wahrheit gelangt, was ich in den an die Spitze dieses Referates gestellten Schlussworten gesagt habe; dass es sich zeigt, dass das Alte nachgrade verständnisslos und immer verständnissloser aufbewahrt wird, dass selbst Gerbert, sonst ein Riese unter Zwergen, nicht ganz von Irrthümern frei zu sprechen ist, wie sein ängstliches Kleben an jenem Fehler des Nipsus veranschaulicht.

Heidelberg. M. Cantor.

R. Engelmann: Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel.
(In drei Bänden. — Erster Band: I. Bewegungen der Körper im Sonnensystem. II. Sphärische Astronomie. — Mit dem Bildniss Bessel's und 2 lithogr. Tafeln. Leipzig, W. Engelmann. 1875.)

Die Entwickelung und der heutige Zustand der modernen Astronomie als Bewegungslehre der Gestirne beruhen wesentlich auf den Forschungen und Arbeiten von Gauss und Bessel. Wenn ersterer, der mehr abstracten und speculativen Richtung seines Geistes folgend, die allgemeinen Wahrheiten der Mathematik vorzugsweise auf die Untersuchung der Bewegungserscheinungen im Sonnensystem anwandte, die astronomischen Probleme, die sich hier bieten, gewissermassen als die lehrreichsten und fruchtbringendsten Beispiele betrachtete, an denen die Kraft der Analyse zu üben und zu erproben war, so fasste Bessel, als reiner Astronom, dem die Mathematik nur Mittel zum Zweck war, die astronomische Wissenschaft in so fern in weiterem Sinne, als er die Grundlagen prüfte und in Vielem neu baute, die zur Erkenntniss der scheinbaren und wahren Bewegungen der Himmelskörper überhaupt führen. Zwar blieb auch er dem Gebiet nicht fremd, welches Gauss, vor allem in der *Theoria motus* schöpferisch umgestaltete; indessen beziehen sich doch seine grössten und erfolgreichsten Leistungen nicht hierauf; der mehr praktischen Natur Bessels war Bedürfniss und seine innere Entwickelung wie äusserer Lebensgang brachten es mit sich, dass er, von der Beobachtung und ihrer Kritik ausgehend, in stetiger Folge fest begründete Thatsachen an einander reihend, bemüht war die Fundamente zu legen wie die besonderen Normen aufzustellen, nach denen die cölestischen Erscheinungen im Einzelnen und bis ins Einzelne zu verfolgen und zu begreifen sind. So finden wir seine bedeutungsvollsten Thaten im Bereiche der Theorie der Instrumente, der sphärischen und Stellar-Astronomie. Auch in der reinen Mathematik, der ja manche Untersuchungen Bessel's angehören, lässt sich das Bestreben, welches die Anwendung auf eine besondere, rein astronomische Aufgabe im Sinne hat, meist nicht verkennen. Für beide Männer kehren sich gewissermassen Mathematik und Astronomie in ihrer Bedeutung und Verwerthung um: für den Einen ist häufig das Zweck, was für den Anderen Mittel; und ähnlich spricht sich die verschiedene Geistesrichtung auch in den von Beiden mit Vorliebe gepflegten nicht mathematisch-astronomischen Disciplinen aus; bei Gauss im Magnetismus, bei Bessel in der Geodäsie und Präcisions-Physik.

Das Studium der Originalarbeiten Bessel's war bisher, bei ihrer Zerstreuung in den verschiedenen zum Theil nicht leicht zugänglichen Zeitschriften und Werken, mehr erschwert, als es ihre Bedeutung und die Nöthigung des häufigen Gebrauchs wünschenswerth machte und eine ausgewählte, systematisch geordnete Sammlung erschien schon seit längerer Zeit fast als ein Desideratum der Astronomie. In der Ausgabe, deren erster Band jetzt vorliegt, hat sich der Herausgeber bemüht, den wesentlichsten Anforderungen, die an eine solche Sammlung zu stellen wären, zu genügen, und bei aller Rücksicht auf praktische Verwendbarkeit doch ein möglichst vollständiges Bild der Thätigkeit des grossen Königsberger Astronomen zu geben. Sämmtliche Werke, Abhandlungen, Beobachtungen, Bemerkungen etc. wieder abzudrucken, wie es mit der Ausgabe von Gauss' Werken die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften gethan, konnte nicht die Absicht sein; sowohl der besondere praktische Zweck und die Natur der Bessel'schen Arbeiten, wie die relativ beschränkten Mittel des Einzelnen verhinderten dies. Es sollte vielmehr nur das gebracht werden, was auch heute noch, 30 Jahre nach Bessel's Tode, unbestrittenen Werth besitzt; ausgeschlossen wurden sämmtliche populäre Schriften und Aufsätze, ferner alle die Resultate von Beobachtungen in der Form von Katalogen, Tafeln oder umfangreichen numerischen Rechnungen enthaltende Zahlensammlungen. Aus den selbständigen Werken wurden nur die allgemeiner gehaltenen Kapitel und theoretischen Untersuchungen genommen, das Detail der Beobachtungen, numerischen Rechnungen und Tafeln weggelassen oder thunlichst gekürzt; letzteres gilt auch von einzelnen Abhandlungen, welche auf Grund und im Anschluss an theoretische Betrachtungen einen speziellen Fall ausführlich behandeln. Der Wunsch auch die Recensionen und Anzeigen der Schriften Anderer zu bringen, konnte aus vorzugsweise räumlichen Gründen zunächst nicht zur Ausführung gelangen. Auf diese Weise würde es möglich in 3 Quartbänden mässigen Umfanges von den nahezu 400 betragenden Drucksachen Bessel's etwa 170 Abhandlungen, Auszüge aus grösseren Werken, Briefe und kleinere Bemerkungen von Bedeutung aufzunehmen. Sie sind in die 8 Abtheilungen: I. Bewegung der Körper des Sonnensystems, II. Sphärische Astronomie (1.Band); III. Theorie der Instrumente, IV. Stellar-Astronomie, V. Mathematik (2. Band); VI. Geodäsie, VII. Physik, VIII. Verschiedenes (3. Band) vertheilt und in jeder Abtheilung die dem Gegenstande nach zusammengehörigen, in möglichst chronologischer Folge geordnet. Den einzelnen Stücken oder Gruppen sind Literaturnachweise, namentlich aus den astron. Nachr. Bd. 1—85 und dem Briefwechsel mit Olbers beigefügt.

Die grosse Zahl der verschiedenartigen und wichtigen Abhandlungen, welche der vorliegende erste Band enthält, verbietet genaueres Eingehen auf den Inhalt der einzelnen Stücke; es können im Folgenden wesentlich nur die Titel der umfangreicheren Abhandlungen angeführt werden. I. Bewegung der Körper im Sonnensystem. 1. Abh. „Berechnung der Harriot'schen und Torporley'schen Beobachtungen des Cometen von 1607; erste Arbeit Bessels vom Jahr 1804 (aus dem 10. Bd. der monatl. Corresp.) und aus diesem Grunde vollständig abgedruckt; spätere Bahnbestimmungen (z. B. der Cometen von 1769, 1807, des Olbers'schen) finden sich in vorliegender Sammlung nicht. Abhh. 2—8 enthalten Beiträge zur Berechnung parabolischer und elliptischer Cometenbahnen und die Auflösung der Kepler'schen Aufgabe. Abh. 9 „Entwickelung einer allgemeinen Methode, die Störungen der Cometen zu berechnen" (Abschnitt 3 aus der bekannten Schrift über den grossen Cometen von 1807), nebst kurzen Nachträgen dazu (Abhh. 10 und 11); Abh. 12 „Beitrag zu den Methoden, die Störungen der Cometen zu berechnen" (Astr. Nachr. 14. Bd.). Abhh. 13 und 14 reproduciren die bekannten Abhandlungen aus dem 13. Bd. der Astr. Nachr.: „Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlasste Bemerkungen" (mit 2 Tafeln), und: „Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen", Abh. 16 „Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht" (Abhandlungen der Berliner Academie 1824), nebst der Tafel der mit I_k^0 und I_k^1 bezeichneten Functionen. — Abhh. 17—22 behandeln den Saturn und seinen hellsten (6.) Trabanten. Die erste Abh. (17) „Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seinen (vierten) älteren Trabanten" findet sich im Königsberger Archiv f. Math. und Naturwiss.; die drei folgenden: „Bestimmung der Bahn des Hugeni'schen Saturnsatelliten" nebst 2 Fortsetzungen (Astr. Nachr. Bde. 9 und 11) leiten in fortschreitender Näherung die Bahnelemente des hellsten Trabanten und die Saturn-Masse ab; welchen Abh. 21 „Bestimmung der Lage und Grösse des Saturnsringes und der Figur und Grösse des Saturn" (Astr. Nachr. Bd. 12) die Constanten der Lage und Dimensionen von Ring und Hauptkörper (wie die drei vorangehenden aus Beobachtungen am Königsberger Heliometer) hinzufügt. Abh. 22 endlich, die umfangreichste des Bandes, entwickelt die vollständige Theorie der Bewegungen des Saturnsystems (Astr. Nachr. Bd. 28). — Die Abh. (23) „Ueber den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniss der Sonnenbewegung und die Mittel zu ihrer Verbesserung" (Astr. Nachr. Bd. 6) beschliesst die I. Abtheilung. — Die Sphärische Astronomie (Abth. II) behandelt nach einigen kürzeren auf die Mondbewegung bezüglichen Aufsätzen, von denen Abh. 26 „Vorausberechnung der Sternbedeckungen" (Astr. Nachr. Bd. 7) hervorgehoben sei, zunächst in 8 Stücken die astronomische Refraction. „In Abh. 28 „Einige Resultate aus Bradley's Beobachtungen" (Königsberger Archiv) wird, neben andern Constanten, auf Grund der Laplace'schen Theorie die Refractionsconstante abgeleitet, während in Abh. 32, Disquisitiones de refractione institutae (Fundam. astr. Sect. IV) Bessel seine eigene Theorie entwickelt und die Constanten bestimmt, welche in

Abh. 33. Refractio astronomica (Tabb. Regiom.) durch geringe Aenderungen noch vollständiger mit den (Königsberger) Beobachtungen in Uebereinstimmung gebracht werden, die dann zur Construction der (hier weggelassenen) noch heute fast allgemein angewandten Refractionstafeln führen. Als besondere Aufgabe ist in den Abhh. 27 und 31 der Einfluss der Strahlenbrechung auf Micrometer-Beobachtungen (Mon. Corresp. XVII. und Astr. Nachr. 3. Bd.) dargestellt. — Es folgen dann (Abhh. 35—46) die Arbeiten, welche sich auf die Constanten der Aberration, Nutation und Praecession, deren theoretische Ableitung, numerische Bestimmung und Einfluss auf die Oerter der Himmelskörper beziehen und die sich hauptsächlich in den Fundamentis astr. und den Tabb. Regiomont. finden. Als wichtigste Arbeit auf diesem Gebiet mag hier nur die bekannte Preisschrift (Abh. 37): „Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Vorrückens der Nachtgleichen“ erwähnt werden. — Die letzten Stücke (47—51) der II. Abtheilung handeln über verschiedene besondre Aufgaben der sphärischen Astronomie, so Abh. 48 „Ueber die Bestimmung der Polhöhe durch das Passageninstrument“ (Astr. Nachr. Bd. 3), Abh. 51 „über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe“ (Astr. Untersuchungen).

Den Abhandlungen selbst geht die unvollendete Autobiographie Bessels „kurze Erinnerungen an Momente meines Lebens (Jugendzeit — erste 25 Jahre)“, der sich ergänzende Worte des Herausgebers anschliessen, voran. Als mehr künstlerische Beigabe hat dieser 1. Band das Portrait Bessels in Lichtdruck, nach dem bekannten Wolf-Maudel'schen Bild, erhalten.

Leipzig. Rud. Engelmann.

H. Schröter: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. (II. Theil: Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1876.)

Während noch vor wenigen Jahrzehnten die Studirenden der Mathematik an den deutschen Universitäten und polytechnischen Hochschulen zumeist auf ausländische, insbesondere französische Lehrbücher angewiesen waren, um das in den Vorlesungen Vorgetragene zu vervollständigen oder durch Selbststudium grössere wissenschaftliche Gebiete sich zu erschliessen, besitzt gegenwärtig die deutsche mathematische Literatur eine Reihe von ausgezeichneten Werken, welche die bisherige Lücke ausfüllen und wesentlich zur Anregung und Verbreitung mathematischer Studien beitragen. Wir brauchen unter den zahlreichen und täglich sich vermehrenden literarischen Erscheinungen dieser Art nur zu erinnern an Hesse's analytische Geometrie des Raumes, Baltzer's Determinanten, Dirichlet's Zahlentheorie (hrgg. v. Dedekind) und partielle Differenzialgleichungen (hrgg. v. Hattendorff), an Durège's elementare und Königsberger's auf die neueren Principien der Integralrechnung gestützte Theorie der elliptischen Functionen, an Kirchhoff's Mechanik, Clebsch's Theorie der algebraischen Formen und analytische Geometrie (hrgg. v. Lindemann), Clebsch's und Gordan's Theorie der Abel'schen Funktionen, die inhaltreichen Lehrbücher von Salmon-Fiedler und viele andere, um die reichen Hülfsquellen anzudeuten, welche gegenwärtig den Studirenden für ihre mathematische Ausbildung zu Gebote stehen.

Verhältnissmässig am spärlichsten ist die synthetische Geometrie in dieser Hinsicht bedacht worden, wie sie auch als selbstständiger Vorlesungsgegenstand erst in jüngster Zeit auf den deutschen Hochschulen sich eingebürgert hat; und doch übt die neuere synthetische Geometrie auf die Jünger der Wissenschaft eine ganz besondere Anziehungskraft aus, indem sie fast voraussetzungslos, wie die Zahlentheorie und an die ersten Elemente anknüpfend nicht als ein fertig abgeschlossenes aber todtes Kunstwerk ihnen entgegen tritt, wie das alte Euclidische System der Geometrie, sondern als ein reiches und fruchtbares Feld lebendiger Forschung, welches lohnenden Gewinn verspricht von einer die Phantasie und den Verstand in gleicher Weise anregenden Arbeit.

Das oben angezeigte in zweiter Auflage erscheinende Werk ist bestimmt, einer der fruchtbarsten und wichtigsten Quellen für die synthetische Forschung einen leichteren Zugang und weitere Verbreitung zu verschaffen und aus derselben die zunächst sich darbietende Theorie der Kegelschnitte in unabhängiger und vollständiger Weise abzuleiten. Es erfüllt damit ein Versprechen, welches Steiner selbst in seiner „systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ zwar gegeben, aber in früheren Jahren unter dem Drange neuer Entdeckungen verschoben, in späterer Zeit wohl öfters auszuführen gewünscht, aber schliesslich nicht mehr vermocht hat. Das der ersten Auflage des Buches vorausgeschickte Vorwort gibt über die Entstehung desselben und den Inhalt so ausführlichen Aufschluss, dass wir auf dasselbe verweisen können und an dieser Stelle nur die Hauptabschnitte kurz charakterisiren wollen. Entsprechend dem Sinne Steiner's und abweichend von seiner früheren Darstellung wird das Operationsfeld auf die Ebene allein beschränkt; die beiden einfachsten Grundgebilde — die gerade Punktreihe und das ebene Strahlbüschel, projectivisch auf einander bezogen — bilden das einzige Handwerkszeug, mit welchem der umfangreiche und vielgestaltige Bau einer Theorie der Kegelschnitte ausgeführt wird. Der erste Abschnitt ist daher der Betrachtung dieser beiden Grundgebilde gewidmet, denen sich die Doppelgebilde des Punkt- und Strahlsystems (der Involution) anschliessen. Die neuerdings veröffentlichten Versuche die projectivische Geometrie ohne jede Benutzung von metrischen Begriffen aufzubauen schienen dem Herausgeber weder so gelungen, noch in pädagogischer Hinsicht so empfehlenswerth, dass er ihnen vor der älteren Steiner'schen Darstellung den Vorzug zu geben geneigt gewesen wäre. In dem zweiten Abschnitt werden die Kegelschnitte selbst gewissermassen organisch erzeugt und ihre zahllosen Eigenschaften sowohl descriptiver als metrischer Art, welche früher zerstreut und isolirt dastanden, treten jetzt in einen naturgemässen und nothwendigen Zusammenhang und erscheinen oft als besondere Fälle allgemeinerer Beziehungen, welche ihr wahres Wesen aufschliessen. Die Polaritätsbeziehungen bilden den eigentlichen Kern, um welchen sich die meisten jener Eigenschaften gruppiren. Sie erklären auch die Identität der beiden Erzeugnisse, welche aus den ursprünglichen Elementen einander gegenüberstehend hervorgehen.

Der dritte Abschnitt untersucht die zu Gruppen zusammentretenden Kegelschnitte (Büschel und Schaaren), ein reiches Feld der Untersuchung, auf welchem eine geschickte Handhabung der synthetischen Methode sich als besonders erspriesslich erweist. Wiederholt bietet sich hier eine besondere gegenseitig eindeutige Abhängigkeit von Punkten der Ebene dar, welche unter dem Namen der „Steiner'schen Verwandtschaft" bei geometrischen Untersuchungen in neuerer Zeit mit Erfolg angewendet ist.

Von den Gebilden einfacher Mannigfaltigkeit wendet sich nun die Betrachtung im vierten und letzten Abschnitte zu den Gebilden doppelter Mannigfaltigkeit (Netzen) und zwar zuerst zu dem einfachsten Gebilde dieser Art, dem Polarsystem oder Involutionsnetz. Die aus den Eigenschaften von Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt sich ergebende Abhängigkeit der Punkte und Strahlen in der Ebene von einander lässt sich unabhängig vom Kegelschnitt auffassen und definirt das Polarsystem, dessen Kern auch ein imaginärer Kegelschnitt sein kann. Die wesentlichsten Eigenschaften des reellen Kegelschnitts bleiben im Polarsystem erhalten. Den Schluss bildet die Untersuchung eines Kegelschnittnetzes, welches von drei beliebig gegebenen Kegelschnitten ausgehend eine doppelt-unendliche Mannigfaltigkeit derselben hervorruft. Den Kern des Netzes bildet die Tripelcurve, eine allgemeine Curve dritten Grades, deren wesentlichste Eigenschaften aus dieser Quelle fliessen.

Die zweite Auflage des Buches unterscheidet sich von der ersten nicht hinsichtlich der Anordnung und Behandlung des Stoffes, sondern nur durch Vermehrung desselben an einzelnen Stellen und eine sorgfältige Durcharbeitung. Als nützliche Zugabe erscheinen die „Aufgaben und Sätze", welche den drei ersten Abschnitten zur Uebung und Anwendung der dargelegten Methoden und Betrachtungen hinzugefügt sind und hoffentlich manche neue Anregung zu synthetischen Untersuchungen bieten werden.

Druck und Ausstattung des Buches entsprechen den anerkannten Leistungen der berühmten Verlagshandlung.

Breslau. H. Schröter.

Ax. Harnack: Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades.

(Math. Annal. Bd. IX. S. 1—54.)

Zur Theorie der ternären cubischen Formen.

(Math. Annal. Bd. IX. S. 218—240.)

In diesen Aufsätzen behandelt der Verfasser die Geometrie der Curven dritten Grades auf Grund ihrer Darstellbarkeit durch elliptische Functionen. Die imaginären Elemente einer Klassencurve werden, wie das zuerst von Hrn. Klein (Math. Annal. Bd. VII) angegeben worden ist, durch ihre reellen Träger repräsentirt, so dass das binäre Gebiet der Curve durch ein reelles ternäres Gebiet ersetzt ist. Dem zufolge erhalten auch die complexen Werthe des Integrales ihr anschauliches Bild in einem reellen Punkte der Ebene. *Die geometrische Interpretation der allgemeinen linearen Beziehung zwischen diesen Parameterwerthen bildet den Gegenstand der Untersuchung.* Dieselbe umfasst die Theorie der ein- und mehrdeutigen algebraischen Transformationen der Curve in sich selbst und löst ein Integrationsproblem, welches mit der Theorie der ternären cubischen Form aufs engste verbunden ist. Die allgemeine algebraische Behandlung dieses letzteren Problemes ist in der zweiten Abhandlung gegeben; sie führt zugleich auf neue Relationen zwischen den Formen des cubischen Systemes.

Die einfachste Beziehung zwischen den Parametern zweier Curvenpunkte, wobei zwei einander zugeordnete Werthe um die Grösse der halben Perioden des Integrales differiren, deckt sich mit der geometrischen Eigenschaft *„correspondirender Punkte"*. Sie führt zu einer Unterscheidung der verschiedenen Gattungen involutorischer Strahlsysteme, aus denen die Curve dritter Ordnung erzeugt werden kann, und identificirt die drei Arten der quadratischen Transformation eines elliptischen Integrales mit dem Uebergange zu den drei Klassencurven (Cayley'schen Curven), welche mit einer gegebenen Ordnungscurve (Hesse'schen Curve) *„conjugirt"* sind.

Die Zuordnung zweier Curvenelemente nach dem Gesetze, dass das Element mit dem Argument u in das Element $\pm u + C$ übergeführt wird (wobei C eine beliebige Grösse innerhalb des Periodenparallelogrammes bedeutet) erschöpft die Gruppen der *eindeutigen* algebraischen Transformation der Curve in sich selbst, welche entsprechend dem positiven oder negativen Vorzeichen des Ausdruckes

$\pm u + C$ in zwei verschiedene Reihen zerfallen. Durch diese eindeutigen Transformationen können im allgemeinen die reellen Elemente in imaginäre transformirt werden, deren reelle Träger dann jedesmal auf einer algebraischen Curve *sechster Klasse* (12. Ordnung) gelegen sind, während umgekehrt die eine Gruppe derjenigen imaginären Elemente, deren Träger die Tangenten dieser Curve bilden, in das reelle Elementensystem übergeführt wird.

Die covarianten Beziehungen dieses Büschels von Curven sechster Classe zur Fundamentalcurve sind in den beiden Sätzen enthalten: 1) Unter den sechs Tangenten, welche sich von einem beliebigen Punkte der Curve dritter Ordnung an irgend eine Curve ziehen lassen, kann immer ein Quadrupel von Linien gebildet werden, für welches in allen Punkten der C_3 ein gleiches Doppelverhältniss besteht. 2) Auf jeder Geraden in der Ebene bestimmen drei tangirende Curven des Büschels drei Punkte, von denen jeder harmonisch gelegen ist zu je einem der drei auf dieser Geraden befindlichen Punkte der Fundamentalcurve in Bezug auf die beiden anderen. Zufolge der ersten Eigenschaft wird auch die algebraische Gleichung des Curvenbüschels durch ein Eliminationsverfahren gewonnen, während die zweite seine Differenzialgleichung in der Form eines zur Fundamentalcurve covarianten Connexes liefert, dessen Hauptcoincidenz demnach mit Hülfe des algebraischen Eliminationsverfahrens integrirt ist.

Die Verbindung zweier Curvenpunkte, deren Parameter u und v in der Beziehung zu einander stehen, dass $v = \varrho u + C$, führt nur in dem Falle, dass ϱ eine rationale Zahl bedeutet, zu algebraischen Curven; in allen übrigen Fällen werden die Curven *transscendent*. Für jeden Werth von ϱ ergibt sich aber eine Schaar von Curven, von denen immer je sechs eine beliebige Gerade der Ebene tangiren. Diese Gruppen von je sechs Punkten auf einer Geraden sind covariante Formen zu den drei Fundamentalpunkten. Die Differenzialgleichungen aller dieser Curvenschaaren sind folglich als Connexe im ternären cubischen Formensysteme enthalten. Man gewinnt die Gleichung dieser Connexe, deren Hauptcoincidenzen durch diese Betrachtungen integrirt sind, indem man die *cubische Gleichung* bildet, durch welche die Werthe des überall endlichen elliptischen Differenziales in den Schnittpunkten einer Geraden mit der Fundamentalcurve dargestellt werden; dabei wird die schneidende Gerade in einem beliebigen ihrer Punkte unendlich wenig gedreht. Diese Gleichung schliesst alle im Vorstehenden angeführten Sätze in sich und darf somit als die Grundlage der Parameterdarstellung der Curven dritten Grades betrachtet werden.

Leipzig. Ax. Harnack.

Ax. Harnack: Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differenziale in homogenen Coordinaten. (Math. Annalen. Bd. IX. S. 371—424.)

Die Darstellung der zu einer Curve $n$ter Ordnung gehörigen Integrale vermittelst homogener Coordinaten ist zuerst von Aronhold (Crelle's Journal f. M. B. 61) gegeben worden. Die Methoden, welche in diesem Aufsatze zur Auswerthung der Integrale vom Geschlecht $p = 0$ verwandt worden sind, habe ich in erweiterter Fassung auch der Behandlung irrationaler Integrale von beliebigem Geschlechte zu Grunde zu legen versucht. *Dieselben liefern bei der Untersuchung des Additionstheoremes einen neuen Beweis des Abel'schen Satzes.*

Die Zurückführung einer Summe von irrationalen Integralen auf eine Summe von rationalen lässt sich nämlich vermöge der homogenen Darstellung mit einer Eigenschaft algebraischer Functionen allgemeinerer Art identificiren, welche für einen speciellen Fall bereits von Jacobi (Crelle's Journ. Bd. 13 und 14) erkannt worden ist. Indem dieser Jacobi'sche Satz auf eine *reducible* algebraische Curve angewandt wird, d. h. auf eine solche, welche in das Product zweier zerfällt, gewinnt derselbe eine neue Gestalt, die sich in Bezug auf die algebraischen Differenziale in der Form aussprechen lässt:

„Jede auf die Schnittpunktsysteme der Fundamentalcurve mit „einem beliebigen Curvenpaare bezügliche Integralsumme kann direct „durch die Summe neuer Integrale dargestellt werden, welche längs „derjenigen Curve, die auf der ersten die Unendlichkeitspunkte des In„tegrales bestimmt, innerhalb der nämlichen Grenzen und auf den ent„sprechenden Integrationswegen hinerstreckt sind.“

Dieser Satz umfasst das Abel'sche Theorem, da man die Unendlichkeitspunkte eines Integrales stets durch *rationale* Curven ausschneiden kann. Die Erweiterung des Jacobi'schen Satzes gewährt ferner ein Mittel, um diese Summe von rationalen Integralen nach logarithmischen und algebraischen Functionen zu entwickeln, wofür in der vorliegenden Arbeit die allgemeinen Formeln aufgestellt werden.

Ausser der Summe der Differenzialwerthe für ein gegebenes Schnittpunktsystem werden sodann die *symmetrischen Functionen* überhaupt gebildet, die sich aus den Differenzialwerthen zusammensetzen lassen, welche durch eine beliebige Gerade und eine zu dieser benachbarte auf der Fundamentalcurve bestimmt sind. Diese symmetrischen Functionen, enthalten in den Coefficienten der Gleichung $n$ten Grades, deren Wurzeln die n Differenzialwerthe darstellen, führen zur Integration von Differenzialgleichungen, welche als Hauptcoincidenzen von Connexen auftreten. Zur Bildung dieser Gleichung dient die für alle Resultantenbildungen sehr zweckmässige, zuerst von Battaglini (Giornale di matematiche Vol. IX) benutzte Symbolik, vermöge deren die allgemeine Curve $n$ten Grades symbolisch wie ein Product von n verschiedenen geraden Linien behandelt wird. Es folgt aus dieser Betrachtungsweise der Satz, dass die n Werthe des Differenziales, welche dadurch entstehen, dass man die Curve durch eine gerade Linie schneidet und diese Linie um einen ihrer Punkte unendlich wenig dreht, durch n Differenziale ausgedrückt werden können, welche längs geraden Linien erstreckt sind, von denen jede bezüglich durch einen der n Schnittpunkte hindurchgeht. Der Zuwachs jedes algebraischen Differenziales bei der Bewegung einer schneidenden Geraden ist also durch den Zuwachs eines rationalen Differenziales darstellbar.

Das gestellte Problem, die symmetrischen Functionen zu entwickeln, ist für den Kegelschnitt, und für die allgemeinen Curven dritter und vierter Ordnung durchgeführt. Insbesondere wird bei diesen Untersuchungen das überall endliche elliptische Integral in nahe Beziehung zu dem einfachen Integrale vom Geschlecht $p = 0$ gesetzt, wodurch auch für die algebraischen Rechnungen ein Zusammenhang zwischen den Differenzialen von verschiedenem Geschlechte hergestellt wird. Dieser Zusammenhang, welcher auch bei der Battaglini'schen Symbolik hervortritt, gründet sich, entsprechend dem Gedanken, welcher dem Beweise des Abel'schen Theorems zu Grunde gelegt wurde, auf die Ableitung von Curven höheren Grades aus dem Producte von Curven niederer Ordnung.

Leipzig. Ax. Harnack.

Jakob J. Weyrauch: Neue Theorie der überhitzten Dämpfe, nebst weiteren Beiträgen zur Theorie der Dämpfe. (Separatabdr. a. d. Ztschr. d. Vereins deutscher Ingenieure. Berlin, Commissionsverlag von Gaertner, 1876.)

In dieser Brochüre wird zunächst bewiesen, dass das Hirn'sche Gesetz, wonach die isodynamische Curve wie bei permanenten auch bei überhitzten Dämpfen eine gleichseitige Hyperbel sein soll, theoretisch unhaltbar ist. Der Beweis stützt sich darauf, 1) dass bei Annahme des Hirn'schen Gesetzes eine gewisse Grösse constant sein müsste, welche bei Pressungen zwischen 0,1 und 14 Atmosphären von 217 bis 103 variirt, 2) dass im gleichen Falle die Clausius'sche Temperaturfunction h mit der Pressung p wachsen müsste, während bekanntlich das Gegentheil richtig ist. — Beim Beweise werden auch die in der Theorie der gesättigten Dämpfe gebräuchlichen empirischen Formeln verwendet, die letzteren sind aber genau genug, und der Einfluss etwaiger Abweichungen lässt sich genügend controliren, um den Schluss unbeeinträchtigt zu lassen, dass das Hirn'sche Gesetz in der theoretischen Wärmelehre aufzugeben ist.

Die ersten Untersuchungen, überhitzte Dämpfe betreffend, nahmen das Hirn'sche Gesetz zum Ausgangspunkt, und die von Zeuner, Hirn und Schmidt entwickelten Zustandsgleichungen erkannten es an. Aus diesen und andern Gründen, welche in der Brochüre ersichtlich sind, wird es wünschenswerth, die bisherigen Ausgangspunkte für die theoretische Untersuchung der überhitzten Dämpfe durch neue zu ersetzen, umsomehr als mittelst jener die Zustandsgleichung auf ziemlich complicirte Weise erlangt werden muss, auch schliesslich gewisse Widersprüche entstehen und interessante Eigenschaften im Dunkel bleiben. Dagegen bestätigen die von mir angestellten Rechnungen, dass die Zeuner'schen Formeln für alle praktischen Zwecke unbedingt zuverlässig und empfehlenswerth sind.

Eine neue Zustandsgleichung lässt sich auf Grund folgender Erwägung einführen. Ist eine Flüssigkeit im Verdampfen begriffen, so besteht eine Zeit lang überhaupt keine Beziehung zwischen specifischem Volumen v und Temperatur T (oder zwischen v und p), es kann also solange auch kein Gesetz von der Art des Mariotte-Gay-Lussac'schen bestehen. Erst im Augenblicke, wo nur noch reiner gesättigter Dampf vorhanden ist, beginnt eine Beziehung zwischen p, v, T. In diesem Augenblicke ist aber keineswegs $pv = RT$. Wenn nun gleich zu Anfang, in dem Punkte, von welchem an das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz denkbar wäre, dasselbe nicht zutrifft, so kann natürlich, selbst wenn die Aenderungen von nun ab in analoger Weise wie nach diesem Gesetze vor sich gehen, der Ausdruck des Letzteren nicht mehr gültig sein, und es müssen, wenn diese Ursache allein entgegen wirkt, die Abweichungen in der Nähe des Sättigungspunktes am grössten sein, was sich auch bei allen gasförmigen Körpern bestätigt hat. Nehmen wir nun an, es wirke wirklich die genannte Ursache allein entgegen, so folgt:

Das Product aus Pressung und Volumendifferenz des überhitzten und gesättigten Dampfes ist direct proportional der Ueberhitzung

$$p(v - s) = R\tau; \tag{1}$$

hierin ist R eine Constante, s das dem Drucke p entsprechende Sättigungsvolumen, τ die Ueberhitzung, das heisst die Erhebung der augenblicklichen Temperatur T über die zu p gehörige Sättigungstemperatur T'.

Wird in (1) gesetzt $\tau = T - T'$ so folgt

$$pv = R(T - T' + \tfrac{ps}{R}).$$

Setzt man ferner die nur von p abhängige für Wasserdampf jederzeit leicht berechenbare Abweichung gegen das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz im Sättigungspunkt

$$T' - \tfrac{ps}{R} = P,$$

so folgt als zweite Form der Zustandsgleichung

$$pv = R(T - P). \tag{2}$$

Die Zeuner'sche Zustandsgleichung ist ebenfalls von dieser Form, sie ergibt sich als specieller Fall von (1) und (2), wenn die Bedingung „c_p constant für alle Pressungen und Temperaturen" eingeführt wird, was Zeuner mit Recht als praktisch zulässig annimmt.

Setzt man in (1) $\frac{R}{p} = z$, so folgt als dritte Form der Zustandsgleichung

$$v = \tau z + s \tag{3}$$

ganz entsprechend der für nasse Dämpfe geltenden Formel

$$v = xn + \sigma$$

indem sowohl z, s als n, σ Functionen von p allein sind (σ constant). Auf diese Aehnlichkeit der Formeln überhitzter und nasser Dämpfe, welche fortwährend zu Tage tritt, soll unten noch kurz zurückgekommen werden.

Mittelst Formel (3) und nach den Zeuner'schen Tabellen für gesättigte Dämpfe sind die Volumina des überhitzten Wasserdampfes für solche Werthe von τ bestimmt worden, für welche Hirn v durch directe Wägungsversuche ermittelt hat. Leider sind diese Versuche nicht genügend, um aus der *sehr* befriedigenden Uebereinstimmung mit der Rechnung einen weitgehenden Schluss zu empfehlen. Ich bin der Ansicht, dass der oben ausgesprochene Satz und die darauf basirten Formeln für die überhitzten Dämpfe mit ähnlicher Annäherung gelten wie das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz für die sogenannten permanenten Gase. — Die Zusammenstellung zeigt, wie vorzüglich auch die Zeuner'sche Gleichung mit den Versuchen stimmt, in theoretischer Beziehung bleibt aber doch vorzuziehen, dass dieser Anschluss mit *einer* (R) anstatt mit *drei* verfügbaren Constanten erzielt wird.

Von der aufgestellten Zustandsgleichung wird u. A. Gebrauch gemacht, um aus den Hirn'schen Wägungsversuchen die specifischen Wärmen bei constantem Druck und bei constantem Volumen für reinen gesättigten Wasserdampf abzuleiten. Sind letztere zur Unterscheidung von den allgemeineren Grössen c_p, c_v durch c'_p, c'_v bezeichnet, so lassen sich die Resultate von 0,1 bis 14 Atmosphären auf drei bis vier Dezimalen genau durch folgende Gleichungen wiedergeben

$$c'_p = 0{,}4304 + 0{,}0003779\, t'$$
$$c'_v = 0{,}3045 + 0{,}0003308\, t'\,.$$

Speciell beim Druck einer Atmosphäre findet sich mit $t' = 100$ $c'_p = 0{,}4682$, während Regnault bei gleichem Druck für *überhitzten* Wasserdampf (t von 122 bis 232) in vier Versuchsreihen 0,4688, 0,4811, 0,4808, 0,4796 fand. Der früher von Kirchhoff angenommene Werth für niedrige Temperaturen $c_p = 0{,}305$ dürfte wohl zu klein sein. Da Regnault die erste der angeführten Zahlen für weniger zuverlässig hält als die übrigen, so kann man schliessen, dass auch für Wasserdampf ähnlich wie bei der Kohlensäure c_p mit der Ueberhitzung zunächst wächst. — Es zeigt sich dann, dass der Quotient $\frac{c_p}{c_v}$ von $\tau = 0$ an, wo sein Werth für p zwischen

0,1 und 14 Atmosphären von 1,3995 bis 1,3659 variirt, mit der Ueberhitzung abnimmt, was ganz gut mit der Naumann'schen Formel stimmt, nach welcher $\frac{c_p}{c_v}$ für alle dreiatomigen Dämpfe mit unendlicher Ueberhitzung den Werth $K = 1,3333..$ erreichen soll.

Im Weiteren folgt die Ableitung der Hauptgleichungen für den Wärmeverbrauch und die Energie oder innere Arbeit. Es ergeben sich hierfür mehrere Formen und werden alle Gleichungen für beide Grenzzustände (permanente Gase und gesättigte Dämpfe), in welchen sie auf die bekannten Formeln führen müssen, geprüft. Wie zu erwarten, zeigt sich, dass die isodynamische Curve nur für unendliche Ueberhitzung das Gesetz der gleichseitigen Hyperbel befolgt, während das Hirn'sche Gesetz dies allgemein verlangt. Am Schlusse des ersten Theils werden noch einige Formeln für die Gesammtwärme, Dampfwärme (Mehrbetrag an Energie in 1 Kil. Dampf vom Zustand p, v, t gegenüber 1 Kil. Wasser von $p = 1$ Atm., $t = 0^0$) sowie ein praktisches Beispiel gegeben, und das Verhältniss der aufgestellten Gleichungen zu den im Jahre 1866 von Hirn und Cuzin veröffentlichten Versuchsresultaten dargelegt.

Im zweiten Theil erweisen sich die Gleichungen für überhitzte Dämpfe als ein Bindeglied zwischen den sonst so sehr abweichenden Formen der Gleichungen für permanente Gase und nasse Dämpfe. Sie nehmen je nach der Umformung bald den einen bald den andern analoge Formen an. Die Aehnlichkeit der ganzen Verhältnisse mit denjenigen nasser Dämpfe scheint für den ersten Augenblick besonders überraschend; aber auch die Vorbedingungen sind in beiden Fällen durchaus nicht so verschieden als man gewöhnlich annimmt. Wird einer Flüssigkeit bei bestimmtem Drucke p genügend Wärme zugeführt, so tritt zuerst Verdampfung ein, es ist $\frac{T}{T'}$ (Verhältniss der augenblicklichen Temperatur T zur Temperatur in rein gesättigtem Zustand T') constant gleich 1, und das Mischungsverhältniss $\frac{x}{1}$ (Verhältniss des augenblicklichen Dampfgewichts x zum Dampfgewicht im rein gesättigten Zustand 1) variabel. Wenn alle Flüssigkeit verdampft ist, dann tritt Ueberhitzung ein, man hat $\frac{x}{1}$ constant gleich 1 und $\frac{T}{T'}$ variabel. Für reinen gesättigten Dampf ist $\frac{x}{1} = \frac{T}{T'} = 1$. Das Temperaturverhältniss $\frac{T}{T'}$ spielt bei überhitzten

Dämpfen eine ganz ähnliche Rolle wie das Mischungsverhältniss $\frac{x}{1}$ bei nassen Dämpfen.

Es werden nun die gegenseitige Lage der verschiedenen Druckcurven, sowie die Verhältnisse der Wärmeökonomie, der Verdampfung und Condensation oder Ueberhitzung, der Aenderung der innern Arbeit und Temperatur für die besonders interessirenden umkehrbaren Zustandsänderungen untersucht. Ueberall zeigt sich, dass die Ableitungen für überhitzte Dämpfe fast mit denselben Worten geführt werden können wie diejenigen für nasse Dämpfe. Von besonderem Interesse ist das Verhalten beider Dampfarten der sogenannten „Nullcurve" gegenüber. Letztere hat die Eigenschaft, dass bei ihrem Durchschreiten

auf jeder adiabatischen Curve nasser Dämpfe . . $dx = 0$
„ „ Curve constanter specifischer Dampfmenge $dQ = 0$
„ „ adiabatischen Curve überhitzter Dämpfe . $d\tau = 0$
„ „ Curve constanter Ueberhitzung . . . . $dQ = 0$
und für das p des Durchschnitts von Nullcurve und
Grenzcurve . . . . $h = 0$.

Alle diese Differenziale, sowie h, wechseln auf der Nullcurve ihr Vorzeichen.

Clausius hat bekanntlich zuerst nachgewiesen, dass bei gegebenem p das Vorzeichen von h dahin massgebend ist, ob reinem gesättigtem Dampf bei der Expansion Wärme zuzuführen oder zu entziehen ist, damit er in rein gesättigtem Zustand bleibe, und dafür, ob solcher Dampf bei der Expansion ohne Wärme-Zu- oder Abfuhr sich condensirt oder überhitzt. Man erhält nun u. A. folgenden allgemeinen Satz: Expandirt nasser oder überhitzter Dampf, so findet Verdampfung bezw. Zunahme der Ueberhitzung statt, solange der Zustandspunkt p, v den Raum links der Nullcurve durchläuft, es findet Condensation bezw. Abnahme der Ueberhitzung statt, wenn sich der Zustandspunkt rechts der Nullcurve bewegt. — Soll während der Expansion eines beliebigen Dampfes die specifische Dampfmenge bezw. die Ueberhitzung constant bleiben, so muss Wärme entzogen werden, so lange der Zustandspunkt p, v in den Raum links der Nullcurve fällt, es muss Wärme zugeführt werden, wenn der Zustandspunkt rechts der Nullcurve liegt.

Viele der im zweiten Theil abgeleiteten Sätze finden sich ohne Rücksicht auf die gegebene Theorie der überhitzten Dämpfe; so auch der folgende: Jeder überhitzte Dampf, d. h. jeder bestehende gas-förmige Körper, kann, wenn von aussen Wärme weder zugeführt noch entzogen wird, sowohl durch genügende Compression als durch genügende Expansion in den gesättigten Zustand und zur Condensation gebracht werden.

Stuttgart. J. Weyrauch.

H. Weber: Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. (Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig 1876, Teubner.)

Die jetzt zum ersten Mal erscheinende Gesammtausgabe von Riemann's Werken enthält in drei Abtheilungen zunächst die von Riemann selbst publicirten Abhandlungen, ferner die nach seinem Tode in verschiedenen Zeitschriften bereits abgedruckten nachgelassenen Arbeiten und endlich in der dritten Abtheilung alles was aus dem handschriftlichen Nachlass irgend zur Veröffentlichung geeignet schien.

Ueber den Inhalt der beiden ersten Abtheilungen, der seit längerer oder kürzerer Zeit Gemeingut der Mathematiker ist, ausführlicher zu reden ist wohl hier nicht erforderlich. Diese Abhandlungen sind in unveränderter Form zum Abdruck gekommen; nur einzelne kleine Ungenauigkeiten sind, sofern dieselben zur Kenntniss der Herausgeber kamen und für unzweifelhaft gehalten werden konnten, verbessert worden. Einzelne Zusätze, die sich auf handschriftliche Bemerkungen Riemann's gründen, und nothwendige Erläuterungen sind in Schlussnoten beigefügt. Von diesen Zusätzen und Erläuterungen hebe ich die zu der Dissertation (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse) und zu der Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" hervor. Die einzige Abhandlung, welche etwas umfassendere Aenderungen erfahren hat, ist die „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung", für welche ein ausgeführtes Manuscript von Riemann nicht vorliegt, und welche der Herausgeber K. Hattendorff einer neuen Bearbeitung unterworfen hat.

Von erheblicherem Interesse für die Leser dieses Blattes dürfte ein kurzer Bericht über den Inhalt der hier zum ersten Male veröffentlichten Abhandlungen aus dem Nachlass sein, welche die dritte Abtheilung des Werkes bilden. Es ist bekannt, dass die zusammenhängende schriftliche Darstellung seiner Untersuchungen Riemann stets grosse Mühe machte, und dass seine Forschungen der Darstellung immer weit voraus waren; ferner dass er in den letzten Jahren seines Lebens durch seinen Gesundheitszustand sehr häufig an zusammenhängendem Arbeiten gehindert war. Hieraus erklärt sich die Beschaffenheit des grössten Theils des Nachlasses, der ausser den Formeln für die Herstellung des Zusammenhangs ausserordentlich wenige Anhaltspunkte bietet. So musste Vieles, was in sehr fragmentarischer Gestalt vorlag, in die Sammlung mit aufgenommen und der Gedankengang so gut als möglich hergestellt werden, und Manches mag in den Papieren noch verborgen sein, dessen Entzifferung noch nicht gelungen ist.

Hiernach gehen wir zur Besprechung der einzelnen Abhandlungen der dritten Abtheilung über.

Die erste derselben „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation“ ist eine Erstlingsarbeit aus Riemann's Studienzeit und geht von Anschauungen aus, die schwerlich auf Zustimmung rechnen dürfen, die auch der Verfasser selbst ohne Zweifel sehr bald fallen gelassen hat. Es schien daher anfangs zweifelhaft, ob es billig sei, diese Arbeit, die zu einer Veröffentlichung jedenfalls nicht bestimmt war, mit zum Abdruck zu bringen. Beim genaueren Studium derselben überzeugte ich mich aber doch, dass sowohl die Methoden als die Resultate ein hinlängliches Interesse bieten, um einen Abdruck mit einem Vorbehalt zu rechtfertigen, und dass die Untersuchung jedenfalls für Riemann's Entwicklungsgang charakteristisch ist. Er bedient sich, um zu einer allgemeinen Definition der derivirten Functionen zu gelangen, der Entwicklung einer Function in eine nach vorwärts und rückwärts nach gebrochenen Potenzen der Variabeln fortlaufenden Reihe, eine Entwicklung, welche nach der einen Seite hin stets divergirt, und welchen gleichwohl eine selbständige Bedeutung zugesprochen wird. Werden diese Entwicklungen aber nur in formeller Hinsicht zur Anwendung gebracht, so wird gegen dieselbe und gegen die daraus gezogenen Resultate wohl kaum Etwas einzuwenden sein, wenn auch eine grosse Fruchtbarkeit derselben nicht mehr zu erwarten ist. Die Definition der νten Ableitung einer Function z nach der Variabeln x, auf welche diese Betrachtungen führen, ist folgende:

$$\partial_x^\nu z = \int_k^x (x - t)^{-\nu-1} z_{(t)}\, dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} k_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)}$$

worin k und k_n willkürliche Constanten sind. Diese Definition gilt zunächst für negative ν. Für die Ableitungen mit positiver oder verschwindender Ordnungszahl erhält man den Ausdruck aus dem Satze

$$\frac{d^m \partial_x^\nu z}{d x^m} = \partial_x^{\nu+m} z,$$

welche für jedes positive ganzzahlige m gilt.

Diese Definition hat die Eigenschaft, dass sie für ein ganzzahliges positives, verschwindendes oder negatives ν den νten Differenzialquotienten, die Function z selbst oder deren $-\nu$faches Integral liefert. Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist unendlich, ausser wenn ν ganzzahlig ist. Für ein negatives ganzzahliges ν ist diese Anzahl endlich ($= -\nu$); für ein positives ganzzahliges oder verschwindendes ν fallen diese Constanten sämmtlich weg. Ueberdies gelten die fundamentalen Sätze über die Ableitungen mit ganzzahligem Index auch für diese allgemeinen derivirten Functionen.

Die folgende Abhandlung „Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten“ enthält eine weitere Ausführung und Anwendung der Gedanken, welche Riemann schon in seinem Vortrag bei der Göttinger Naturforscherversammlung skizzirt hatte (Nr. II. der ersten Abtheilung). Diese Abhandlung war bereits im Jahre 1854 zu einer Publication in Poggendorff's Annalen bestimmt, die aber nicht zur Ausführung kam, vermuthlich weil Riemann nicht auf eine ihm vorgeschlagene Veränderung eingehen wollte. Der Grundgedanke, von dem Riemann in der Theorie der in Rede stehenden Erscheinungen ausgeht, steht in genauem Zusammenhang mit seinen naturphilosophischen Ideen, welche für ihn, wie aus einem Briefe hervorgeht, geradezu den Ausgangspunkt seiner Betrachtungen bildeten. Es wird dabei ausser den gewöhnlichen electrischen Anziehungs- und Abstossungskräften, die dem Coulomb'schen Gesetz gemäss wirken, noch eine andere (antelectrische) Kraft angenommen, mit welcher sich die ponderable Materie dem electrisch Sein widersetzt, eine Kraft, welche bei den guten Leitern sehr klein, bei den sogenannten Nichtleitern sehr gross ist, und welche sich als ein Widerstreben des Körpers gegen das Eindringen von Spannungselectricität äussert. Die Componenten dieses Theils der electromotorischen Kraft sind proportional den partiellen

Ableitungen der electrischen Dichtigkeiten, genommen nach den Coordinaten. Es ergibt sich aus diesen Annahmen ein System von zwei linearen partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der electrischen Spannung und Dichtigkeit, mit dessen Integration in einigen der einfachsten Fälle sich der Rest der Abhandlung beschäftigt. Die Ergebnisse der Theorie stehen, soweit eine Vergleichung möglich ist, mit den Thatsachen in gutem Einklang.

Von der dritten Abhandlung dieses Abschnittes „Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differenzialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" liegt ein im ersten Theil vollständig ausgeführtes Manuscript vor, welches aus dem Jahre 1857 stammt, also aus demselben Jahre, in dem die Abhandlung über Abel'sche Functionen veröffentlicht wurde. Es scheint auch ein innerer Zusammenhang zwischen beiden Untersuchungen zu bestehen, worüber jedoch leider nur ungenügende Andeutungen vorliegen. Die Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche der Verfasser früher (IV. Abhandlung der ersten Abtheilung) auf die Gauss'sche F-Function angewandt hat. Es wird hier ein System von n Functionen einer unabhängigen Veränderlichen definirt durch eine beliebige Anzahl gegebener Verzweigungspunkte und durch sein Verhalten in der Umgebung derselben, ferner durch die Bedingung dass durch einen Umlauf um einen Verzweigungspunkt die Functionen des Systems in lineare Combinationen ihrer selbst übergehen. Ferner wird gezeigt, dass, wenn die Verzweigungspunkte, die Unstetigkeitsexponenten und die Substitutionen, vermittelst deren die einzelnen Zweige des Functionensystems um die Verzweigungspunkte herum mit einander zusammenhängen, mit gewissen, durch die Natur der Aufgabe geforderten Beschränkungen beliebig gegeben sind, die n Functionen des Systems als particulare Lösungen einer linearen Differenzialgleichung $n$ter Ordnung mit rationalen Coefficienten angesehen werden können, falls die Summe der Unstetigkeitsexponenten, welche eine ganze Zahl sein muss, nicht grösser als $n-1$ ist. Ist diese Summe kleiner als $n-1$, so bleibt eine entsprechende Anzahl von Constanten in der Differenzialgleichung unbestimmt, und es lässt sich dieser Fall ohne Integration auf den zurückführen, wo die erwähnte Summe ihren Grenzwerth $n-1$ erreicht, wovon ein Beispiel sich in der Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" findet. Obwohl die linearen Differenzialgleichungen mit rationalen Coefficienten in neuerer Zeit mehrfach Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen sind, ist diese schöne Verallgemeinerung der Theorie der hypergeometrischen Reihe meines Wissens bis jetzt nirgends aufgestellt worden.

Die nächste, in lateinischer Sprache geschriebene Abhandlung enthält die Beantwortung einer von der Pariser Akademie gestellten Preisfrage, welche von Riemann im Jahre 1861 eingereicht wurde. Durch die Güte des beständigen Sekretärs der Akademie konnte bei der Herausgabe das Originalmanuscript zu Grunde gelegt werden. Es handelt sich um die Aufgabe, alle Fälle zu ermitteln, in denen in einem unbegrenzten homogenen Medium die Temperatur als Function der Zeit und nur zweier Variabeln dargestellt werden kann, so dass ein System isothermer Curven während der ganzen Dauer der Wärmebewegung die Eigenschaft der Isothermen behält. Riemann behandelt die Aufgabe in der Weise, dass er zunächst ganz allgemein die Eigenschaften eines auch nicht homogenen Mediums und des Anfangszustandes aufsucht, welche der gestellten Forderung genügen und dann diejenigen Fälle aussondert, in denen das Medium homogen wird.

Durch die erste Untersuchung ergeben sich gewisse Formen einer linearen partiellen Differenzialgleichung mit veränderlichen Coefficienten und es handelt sich dann weiter darum, die Fälle zu ermitteln, in welchen diese Differenzialgleichung sich durch Einführung neuer Variabeln so transformiren lässt, dass sie constante Coefficienten erhält, resp. in die Form übergeht

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Diese Aufgabe lässt sich reduciren auf die Frage, in welchen Fällen ein homogener Differenzialausdruck zweiter Ordnung mit variabeln Coefficienten $\sum_{\iota,\iota'} h_{\iota,\iota'}\, ds_\iota ds_{\iota'}$ sich in die Form $\sum_\iota dx_\iota^2$ bringen lässt, und damit ist die Untersuchung auf eine Bahn gebracht, welche sich Riemann durch seine Untersuchungen über die Hypothesen der Geometrie (Abhandlung XIII. der zweiten Abtheilung) schon geebnet hatte. Sie ist angeknüpft an die Theorie des Krümmungsmasses von allgemeinen Mannigfaltigkeiten, für welche die Grundlagen in der erwähnten Abhandlung enthalten sind. Leider sind diese Wege nur angedeutet und aus den wenigen noch vorhandenen Manuscriptblättern ist es bis jetzt nur theilweise gelungen, die noch erforderlichen sehr verwickelten Rechnungen herzustellen, welche zu dem Endresultat führen. Die Anmerkungen zu dieser Abhandlung enthalten theils Erläuterungen zu den angewandten allgemeinen Sätzen über das Krümmungsmass, theils, soweit sie gelungen ist, die Ausführung der erwähnten Rechnungen.

Das Fragment „Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua“ ist von H. A. Schwarz in Göttingen bearbeitet. Nur für den Anfang liegt ein in italienischer Sprache geschriebenes ausgeführtes Manuscript vor. Der Rest musste aus einigen Formeln und Zeichnungen ergänzt werden. Riemann untersucht darin mit seinen Methoden die Convergenz der von Gauss aufgestellten Entwicklung des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen in einen unendlichen Kettenbruch, und gelangt zu dem Resultat, dass diese Convergenz immer stattfindet mit Ausschluss derjenigen Argumentwerthe welche reell und grösser als 1 sind; ein Resultat, welches auf anderem Wege von L. W. Thomé gefunden ist (Borchardt's Journal Bd. 67).

Der kleine Aufsatz „Ueber das Potential eines Ringes“ beschäftigt sich mit der Aufgabe der Integration der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

unter der Voraussetzung, dass die Function V an der Oberfläche eines durch Rotation eines Kreises um eine die Peripherie nicht schneidende Axe entstandenen Ringes gegeben ist. Nachdem einige allgemeine Gesichtspunkte über die bei der Integration dieser Differenzialgleichung auftretenden Reihen gegeben sind, werden zunächst für den vorliegenden Fall die geeigneten Variablen eingeführt, welche eine Separation ermöglichen, und hierauf wird die Integration durch eine besondere Klasse von hypergeometrischen Reihen, welche sich durch ganze elliptische Integrale darstellen lassen, ausgeführt. Dieselbe Aufgabe ist bekanntlich Gegenstand einer von Riemann unabhängigen eingehenden Untersuchung von C. Neumann.

Dem folgenden Aufsatz „Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen“ liegen einige Notizen zu Grunde, welche, wie es scheint, als Vorbereitung zu einer Vorlesung dienten. Derselbe ist namentlich desshalb von Interesse, weil darin die sinnreiche Methode zu erkennen ist, deren Riemann sich bei der Lösung von Abbildungsaufgaben bediente, die immer anwendbar ist, wenn das abzubildende Gebiet von geradlinigen Strecken und von Kreisbogen begrenzt ist, mag dasselbe nun einfach oder mehrfach zusammenhängend sein. Es wird namentlich auch das Verständniss der Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung“ durch dieses kleine Fragment wesentlich gefördert.

Zu der zuletzt erwähnten Abhandlung über die Fläche vom kleinsten Inhalt liessen sich aus einigen im Nachlass gefundenen Andeutungen noch zwei schöne Beispiele herstellen, von denen das erste die Minimalfläche betrifft, welche von drei geraden Linien begrenzt ist, von denen eine die beiden anderen schneidet, das zweite die (zweifach zusammenhängende) Minimalfläche, welche begrenzt ist von zwei in parallelen Ebenen gelegenen geradlinigen Polygonen. In dem letzteren Fall lässt sich die Aufgabe allgemein auf Quadraturen zurückführen und erfordert nicht die Integration von linearen Differenzialgleichungen.

In der folgenden Nummer sind zwei Fragmente zusammengestellt, welche sich mit der Frage beschäftigen, was aus den von Jacobi aufgestellten Reihen aus der Theorie der elliptischen Functionen wird, wenn der Modul der von Jacobi mit q bezeichneten Grösse gegen 1 convergirt. Im ersten dieser Fragmente werden die in § 40 der Fundamenta aufgestellten Reihen von diesem Gesichtspunkt aus untersucht, und da diese Reihen im Grenzfall zum grössten Theil nicht mehr convergiren, so werden sie zunächst einer Integration unterworfen. Geht man in den so gebildeten Reihen zur Grenze über, so entstehen Functionen, welche in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Unterbrechungen der Stetigkeit haben. Es scheint, dass der hauptsächlichste Zweck dieser Untersuchung der war, Beispiele solcher Functionen für die Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“ (Abhandlung XII. des zweiten Abschnitts) zu finden. Im zweiten Fragment werden die Reihen für $\log k$, $\log k'$ $\log \frac{2K}{\pi}$ selbst, ohne vorhergegangene Integration vom gleichen Gesichtspunkt aus untersucht. Es zeigt sich dabei, dass, wenn das Periodenverhältniss der elliptischen Functionen sich einem reellen rationalen Werth annähert, die imaginären Theile dieser Reihen sich bestimmten endlichen Grenzwerthen nähern, während die reellen Theile zum Theil verschwinden, zum Theil in bestimmter Weise unendlich werden. Diese Untersuchung findet sich im Nachlass auf einem kaum leserlichen Blatte, dessen Bedeutung erst kurz vor dem Abdruck erkannt wurde. Es blieb daher keine Zeit übrig, die Correctheit der Formeln in den reellen Theilen genau zu prüfen.

Ein Commentar zu diesem Fragment von R. Dedekind behandelt die Frage nach einer andern strengen Methode und liefert die Endformeln in einer von der Riemann'schen verschiedenen Form. Es scheint, dass die Formeln von Riemann in den reellen (unendlich werdenden) Bestandtheilen nicht alle ganz richtig sind, während es die imaginären Theile unzweifelhaft sind. Der erwähnte Commentar enthält ausserdem noch eine interessante Anwendung der von Riemann benutzten Methode auf die Theorie der unendlich vielen Formen der Theta-Function.

Das folgende kurze Fragment aus der Analysis Situs enthält leider nur einige Begriffsbestimmungen und wenige Andeutungen über diese tiefsinnigen und wichtigen Untersuchungen, welche auf eine Verallgemeinerung der Theorie des Zusammenhangs hinzielen, die Riemann zum Ausgangspunkt seiner functionentheoretischen Betrachtungen gemacht hat. Nur ein Theil der hier aufgestellten Begriffe und Sätze gestattet noch eine Anschauung im Raume von drei Dimensionen, während die übrigen ganz abstrackt gefasst werden müssen. Bezüglich der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten wird eine Definition aufgestellt, welche bei begrenzten Räumen noch anschaulich ist:

„*Wenn im Innern einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit Hülfe von m festen für sich nicht begrenzenden n-Streckstücken jedes unbegrenzte n-Streck begrenzend ist, so hat diese Mannigfaltigkeit einen $m+1$-fachen Zusammenhang nter Dimension. Eine stetig ausgedehnte Mannigfaltigkeit heisst einfach zusammenhängend, wenn der Zusammenhang jeder Dimension einfach ist*".

Weiterhin wird diese Definition noch etwas anders gefasst und einige Folgerungen bezüglich der Zerlegung von Mannigfaltigkeiten durch Querschnitte daran geknüpft. So ist z. B. der Raum einer Kugel einfach zusammenhängend, der Raum einer Hohlkugel einfach zusammenhängend in der ersten, zweifach zusammenhängend in der zweiten Dimension, weil jede im Innern der Hohlkugel geschlossene Linie die Begrenzung einer im Innern verlaufenden Fläche bildet, während erst mit Zuziehung einer bestimmten im Innern geschlossenen Fläche jede andere solche Fläche die vollständige Begrenzung eines inneren Raumtheiles bildet. Umgekehrt ist der von einer Ringfläche begrenzte Raum einfach zusammenhängend in der zweiten, zweifach zusammenhängend in der ersten Dimension. Die Hohlkugel wird durch einen Querschnitt von einer Dimension, der ringförmige Raum durch einen von zwei Dimensionen in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandelt. Ein Querschnitt von einer Dimension verwandelt den ringförmigen Raum in einen in der ersten Dimension dreifach zusammenhängenden Raum. Dies zur Erläuterung des allgemeinen Satzes.

„Der Zusammenhang eines n-Strecks wird durch jeden einfach zusammenhängenden n-m-streckigen Querschnitt entweder in der mten Dimension um 1 erniedrigt oder in der m — 1ten Dimension um 1 erhöht.“

Die beiden folgenden Aufsätze sind einer Vorlesung über Abel'sche Functionen entnommen, welche Riemann in den Jahren 1861 und 1862 gehalten hat; der Bearbeitung liegt ein Heft von G. Roch zu Grunde. Der erste derselben enthält einen sehr eleganten Beweis der Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihen auf Grund eines allgemeinen Satzes, durch den die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern zurückgeführt wird auf die Untersuchung der Convergenz eines bestimmten Integrals.

Der zweite dieser Aufsätze behandelt diejenigen Functionen, welche Riemann unter dem Namen *„Abel'sche Functionen“* ausgezeichnet hat, für den Fall $p = 3$. Es sind das die Quadratwurzeln aus solchen Functionen φ (vergl. Theorie der Abel'schen Functionen, VI. Abhandlung der ersten Abtheilung), welche in $p - 1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, welche im Allgemeinen in endlicher Zahl existiren. Im Falle $p = 3$ beträgt diese Zahl 28, entsprechend den 28 ungeraden Theta-Functionen (und, geometrisch, entsprechend den 28 Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung). Die Bestimmung dieser Functionen hängt von einer Gleichung des 28. Grades ab. Nimmt man aber 6 derselben als bekannt an, so lassen sich die übrigen mittelst einer Gleichung vierten Grades bestimmen. Für die Theorie der Umkehrung der algebraischen Integrale ist die Zuordnung dieser Functionen zu den ungeraden Theta-Functionen von besonderer Wichtigkeit und diese Aufgabe ist der Hauptgegenstand des vorliegenden Aufsatzes.

In einem Anhang sind endlich die Fragmente zusammengestellt, die sich auf Riemanns philosophische Spekulationen beziehen. Diese Forschungen haben Riemann während eines grossen Theils seines Lebens begleitet und haben einen erheblichen Theil seiner Gedankenarbeit in Anspruch genommen. Auf das Nähere dieser eigenthümlichen und tiefsinnigen Weltanschauung einzugehen, dürfte hier um so weniger am Platze sein, als die ohnehin schon äusserst knappe und lückenhafte Darstellung kaum einen verkürzenden Auszug gestattet, der nicht der Gefahr eines entstellenden Missverständnisses ausgesetzt wäre. Nur das Eine mag angeführt sein, dass in den naturphilosophischen Untersuchungen Riemanns Hauptziel das ist, die Vorstellung von einer Fernewirkung zu beseitigen, und zu ersetzen durch eine andere, nach welcher die Materie nur auf ihre unmittelbare Umgebung einwirkt. Dieser Zweck wird erreicht durch die Annahme eines den Raum stetig erfüllenden Stoffes, welcher Träger der Gravitationskraft, der Licht- und Wärmebewegung und der electrischen Wirkungen ist, der aber wesentlich verschieden ist von der ponderablen Materie. Die Körperatome sind nach Riemanns Auffassung Punkte, in welche dieser hypothetische Stoff fortwährend einströmt und aus der Erscheinungswelt verschwindet. Die Ursache der Einwirkung der Körperatome auf einander wird in dem Widerstand gesucht, mit dem sich dieser Stoff einer Formänderung entgegensetzt.

Den Schluss des ganzen Werkes bildet eine von Dedekind verfasste Schilderung von Riemanns Lebenslauf. Diese biographische Skizze, welche sich hauptsächlich auf Briefe und andere Mittheilungen der Familie gründet, hat nicht den Zweck, die wissenschaftliche Stellung und Bedeutung Riemanns zu beleuchten; sie soll seinen Verehrern und Freunden ein Bild geben von dem Lebensgang und der Persönlichkeit des in jeder Hinsicht ausgezeichneten, leider so früh dahingegangenen Mannes. Es ist das Bild eines stillen, einfachen Gelehrtenlebens, mannigfach bedrückt und beengt durch die Ungunst der Verhältnisse, aber wunderbar ausgerüstet von der Natur zum Eindringen in die Tiefen der Wissenschaft und erfüllt vom reinsten und ernstesten Streben nach der Erkenntniss der Wahrheit.

Königsberg. H. Weber.

J. Frischauf: Elemente der absoluten Geometrie. (Leipzig 1876, B. G. Teubner. VI u. 142. S. 8.)

Die Elemente der Geometrie des Euclides sind (trotz aller Strenge in der Deduction) in den Grundbegriffen und ersten Voraussetzungen dunkel und unklar. Besonders die Begriffe der Geraden und Ebene, der Parallelensatz und das Unendliche bilden die Hauptschwächen der euclidischen Behandlung. Durch die Bemühungen von Gauss, W. und J. Bolyai und Lobatschewsky wurde in die Parallelenfrage eine Klärung der Ansichten gebracht; in der vorliegenden Schrift werden die innig verknüpften Voraussetzungen der Geraden und des Unendlichen in ihrem Zusammenhange erörtert und dadurch die oben erwähnten Arbeiten ergänzt. Von der Kugelfläche ausgehend, werden im ersten Buche nach einer, von Leibniz zuerst angedeuteten, von W. Bolyai und Lobatschewsky durchgeführten, Methode die Gerade und Ebene mit ihren Fundamentaleigenschaften abgeleitet und dann im zweiten Buche die sogenannte absolute Geometrie des J. Bolyai oder Pangeometrie des Lobatschewsky entwickelt. Die Thatsache, dass das Parallelenaxiom aus der Voraussetzung der Congruenz und dem Axiom der Geraden *nicht* deductiv gefolgert werden kann, sondern mit Hülfe der Erfahrung (Beobachtung) bewiesen werden müsse, kann als das wichtigste Resultat des zweiten Buches angesehen werden. Die Grundzüge einer analytischen Geometrie bilden den Schluss dieses Buches.

Das dritte Buch „Endlicher Raum und absolute Geometrie" beendet zunächst die Fragen nach den Principien. Die Geometrie des endlichen und unbegrenzten Raumes, welche von F. Klein als (theoretisch) gleichberechtigt mit der euclidischen und nichteuclidischen Geometrie hingestellt wurde, erscheint hier als ein Theil der Untersuchungen der Geometrie des unendlichen Raumes. Die Fragen nach dem Axiom der Geraden und der Anzahl ihrer unendlich fernen Punkte werden vollständig erledigt. Nun folgen die analytische Behandlung der Flächen constanter Krümmung, die Theorien von Riemann und Helmholtz. Von ersterer werden der Standpunkt und die darauf bezüglichen Arbeiten angeführt, letztere wird vollständig jedoch in bedeutend vereinfachter Weise entwickelt. Aus dieser Untersuchung wird das wichtige Resultat gefolgert, dass die Voraussetzungen der Anwendbarkeit der Rechnung und der

Existenz von Differenzialquotienten mit den Voraussetzungen der Congruenz und der Existenz unendlich kleiner ähnlicher Figuren (d. i. Figuren, auf welche die euclidische Geometrie angewendet werden kann) identisch sind. Einige Sätze von Beltrami's Theorie der Räume constanter Krümmung bilden den Schluss der vorliegenden Schrift*).

Graz. J. Frischauf.

Oscar Roethig: Die Probleme der Brechung und Reflexion.
(Leipzig 1876, Teubner.)

Das Werk ist aus dem Wunsche entstanden, alle Probleme der Brechung und Reflexion nach einer einheitlichen Methode zunächst streng zu lösen, Vernachlässigungen aber in bestimmt definirter Weise erst dann an die allgemeinen Lösungen anzubringen, wenn besondere Umstände dazu Veranlassung geben.

Die in Betracht zu ziehenden Probleme zerfallen hier in zwei Gruppen. Die erste ist zusammengefasst in das Problem *des Durchgangs der Strahlen.* Die andere ist *Problem der Bildpunkte und* Bilder genannt.

Das Problem des Durchgangs der Strahlen lässt sich so aussprechen:

Aus einem Mittel fallen Strahlen auf die Trennungsfläche dieses Mittels von einem folgenden, verlaufen nach beliebig vielen Brechungen und Reflexionen an beliebigen Flächen durch die verschiedenen Mittel und fahren aus in ein letztes Mittel. Welches sind die Gleichungen der die einzelnen Mittel durchlaufenden, besonders der im letzten Mittel ausfahrenden Strahlen?

Die Lösung dieses Problems ist in eindeutiger Weise gegeben, so weit dies im Allgemeinen möglich ist, also so weit, dass nur noch die Besonderheiten eines speciellen Problems in vorgeschriebener Weise in die allgemeinen Lösungen einzuführen sind. Das zweite Problem, das *der Bildpunkte und Bilder*, enthält schon eine an die Lösung des ersten angebrachte Vernachlässigung. Es lehrt nämlich die Abhandlung des Herrn Kummer, „allgemeine Theorie

---

*) Berichtigungen: S. 73, Z. 11 ist der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen. S. 75 Z. 9 lies $\partial J =$ statt $\partial J -$. S. 133, Z. 10 ist zwischen die Worte: „Raum" und „von" einzuschalten: „als (geometrischen) Ort im Raume".

der gradlinigen Strahlensysteme", (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band 57), deren Kenntniss hier vorausgesetzt wird, dass in jedem Strahle eines gradlinigen Strahlensystems zwei in Bezug auf ihre Realität noch zu untersuchende Punkte bestehen, in welchen die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels unendlich kleine gerade Linien von der Ordnung der grössten Ausdehnung eines beliebigen anderen Querschnitts sind. Hier werden nun die nach Vollendung des Durchgangs in das eine Auge eines im letzten Mittel befindlichen Beobachters gelangenden Strahlen als ein unendlich dünnes Strahlenbündel angesehen, oder, was dasselbe ist, der Radius der Pupille wird als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet. Von den Querschnitten in den beiden oben erwähnten von Herrn Kummer mit dem Namen *Brennpunkte* bezeichneten Punkten wird angenommen, dass das Auge sie als Punkte empfindet, und den Ort des leuchtenden Punktes des ersten Mittels in einen dieser Punkte versetzt, die desshalb hier *Bildpunkte* genannt werden. In dieser Auffassung ist das Problem gestellt und im Allgemeinen gelöst. Vielleicht wird man eine genauere Darstellung des Zusammenhangs der hier gegebenen Resultate mit den von Herrn Kummer gefundenen vermissen, besonders auch vielleicht eine nähere Angabe der Länge der geraden Linien, welche das Auge hier als Punkte empfinden soll. Ich habe dies unterlassen, in der Meinung, dass ein mit den Resultaten der Arbeit des Herrn Kummer vertrauter Leser diese Fragen selbst erledigen wird, um so mehr, als dies erst für specielle Probleme einen Werth hat.

Es erschien nun zunächst als das Wichtigste, die bisher bekannten Resultate specieller Probleme der Brechung und Reflexion aus den allgemeinen Lösungen herzuleiten, vor allen also das von Gauss in seinen dioptrischen Untersuchungen gestellte und näherungsweise gelöste Problem erst streng zu behandeln und dann mit einer fest definirten Näherung die Gauss'schen Formeln abzuleiten. Der grösste Theil des Werkes beschäftigt sich mit dieser Aufgabe und zwar, der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechend, in der Weise, dass die strengen Lösungen dieses Problems für sich selbst, also unabhängig von den allgemeinen Lösungen aller Probleme des Durchgangs der Strahlen, hergeleitet werden. Die Herleitung ist in einer Form gegeben, welche das Verständniss dieser Theile des Werkes auch denen zugänglich macht, welche von der Differenzialrechnung noch keine Kenntniss haben.

Auch die geometrischen von Gauss und Anderen gefundenen Relationen, die Hauptpunkte etc., sind gegeben. Sie entstehen hier dadurch, dass besondere Werthe des Linearverhältnisses von Bild und Gegenstand in Betracht gezogen werden. Als solche sind hier nur die Werthe $1, \infty, 0$ betrachtet, welche zu den bekannten Punkten der Axen führen. Man ersieht aber hieraus sofort, dass jeder andere bestimmte Werth zu einem neuen Punkte und demnach zu neuen geometrischen Relationen und neuen Constructionen des zu einem gegebenen Punkte gehörigen Bildpunktes führen muss.

Berlin. Oscar Röthig.

Kostka: Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch deren Coefficienten. (Journal f. d. reine und angewandte Mathematik Bd. 81, S. 281 bis 289.)

Die bekannte Aufgabe: „eine symmetrische rationale Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch die Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken“ wird gewöhnlich durch successive Division oder Ermittelung eines Entwicklungscoefficienten gelöst. In der vorliegenden Abhandlung wird dadurch, dass die symmetrische Function durch den Quotienten zweier alternirenden ersetzt wird, eine einfache Regel hergeleitet, nach welcher das Resultat ohne Divisionen in Form eines Aggregats von Determinanten leicht angegeben werden kann.

Sei

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots a_0 = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n);$$

seien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ ganze positive Zahlen (oder auch $\alpha_0 = 0$) und zwar $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots \alpha_{n-1}$; seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ diejenigen nach der Grösse aufsteigend geordneten ganzen Zahlen, welche mit den α zusammen die Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots \alpha_{n-1}$ einfach ausfüllen; und werde endlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{\beta_1} & a_{\beta_1-1} & a_{\beta_1-2} & \cdot\cdot \\ a_{\beta_2} & a_{\beta_2-1} & a_{\beta_2-2} & \cdot\cdot \\ a_{\beta_3} & a_{\beta_3-1} & a_{\beta_3-2} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$$

gesetzt, wobei $a_n = 1$, $a_{n+h} = 0 = a_{-h}$: dann ist das Determinantenverhältniss

$$\frac{\Sigma \pm x_1^{\alpha_0} x_2^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_{n-1}}}{\Sigma \pm x_1^{\,0} x_2^{\,1} \ldots x_n^{n-1}}$$
$$= (-1)^{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}} \cdot (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\alpha_{n-1} - n + 1}).$$

Wenn ferner

$$F = \Sigma x_1^{\,0} x_2^{\gamma_1} x_3^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_{n-1}}$$

eine rationale symmetrische Function der x, deren Glieder nur durch die verschiedenen Permutationen der Exponenten sich unterscheiden, und wenn $\bar{\gamma}$ der grösste dieser Exponenten: so multiplicire man F mit $x_1^{\,0} x_2^{\,1} x_3^{\,2} \ldots x_n^{n-1}$; jedes Glied, in dem dann gleiche Exponenten vorkommen, lasse man unberücksichtigt; in jedem der übrigen zähle man die Anzahl r der Inversionen der Exponenten und bilde die Reihe derjenigen nach der Grösse aufsteigend geordneten Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\bar{\gamma}}$, welche mit den Exponenten zusammen die Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots \bar{\gamma} + n - 1$ ausfüllen; dann ist:

$$F = (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots \gamma_{n-1}} \, \Sigma (-1)^r \cdot (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\bar{\gamma}}).$$

Dies sind die beiden Hauptresultate der Untersuchung. Der Rest des Aufsatzes beschäftigt sich mit der Frage, wie aus der Form einer der im Ausdruck von F vorkommenden Determinanten deren Vorzeichen bestimmt werden kann, und gibt endlich einige Anwendungen jener Resultate.

Insterburg. Kostka.

Helmert: Ueber die Formeln für den Durchschnittsfehler.
(Astr. Nachr. Nr. 2039. S. 353—368.)

Eine wichtige Aufgabe der Methode der kleinsten Quadrate ist bekanntlich die Ermittlung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers ϱ aus den Verbesserungen λ der Beobachtungsgrössen l. Am schärfsten erfolgt diese Rechnung mittelst der Quadratsumme $[\lambda\lambda]$, allein sie ist etwas mühsam und man hat daher Formeln aufgestellt, um ϱ aus [val. abs. λ] zu erhalten: Peters für directe Beobachtungen einer Unbekannten, Lüroth für vermittelnde Beobachtungen mehrerer Unbekannten. Diese Formeln erschienen dem Verf. nicht als ganz zweifellos begründet. Der Aufsatz gibt nun eine strenge Ableitung der betreffenden Formeln für verschiedene Fälle, wobei sich herausstellt, dass nur die Peters'sche Formel beibehalten werden darf, während sich für complicirtere Fälle der Ausgleichung neue Formeln ergeben, die so zusammengesetzt sind, dass ihre Anwendung schwerlich rathsam erscheinen dürfte. Unter Voraussetzung des Gauss'schen Fehlergesetzes ist namentlich

$$\varrho = 0{,}84535 \text{ [val. abs. } \lambda] : \sum_1^n {}^{(k)} \sqrt{1 - (a_k^2 [\alpha\alpha] + 2 a_k b_k [\alpha\beta] + b_k^2 [\beta\beta] + \cdots)}$$

bei n vermittelnden Beobachtungen gleicher Genauigkeit; a_k, b_k, .. sind die Coefficienten der Unbekannten in der $k$ten Fehlergleichung und $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. die in dieser Bezeichnung wohlbekannten Determinantenquotienten der allgemeinen Auflösung der Normalgleichungen. Für directe Beobachtungen folgt aus dem Vorstehenden die Formel von Peters:

$$\varrho = 0{,}84535 \text{ [val. abs. } \lambda] : \sqrt{n(n-1)}.$$

Der Aufsatz gibt auch eine directe Entwicklung der Formel für ϱ bei bedingten Beobachtungen, vergleicht ferner die ältere Formel mit dem neuen Ergebniss und macht den Versuch einer Aufstellung brauchbarer Näherungsausdrücke. Ueber die Art der Entwicklung der strengen Formeln mag nur soviel bemerkt werden, dass dabei die Benutzung von Discontinuitätsfactoren zur Nothwendigkeit wurde und zum Glück die Ausführung der Integrationen auf keinerlei Schwierigkeit stiess.

Aachen. Helmert.

Helmert: Der Einfluss der schiefen Stellung der Latte bei Distanzmessungen, und eine empirische Formel für den mittlern Fehler der Distanzmessung an dem Tachymeter von G. Starke. (Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1875. S. 154—157.)

In dem Aufsatz wird angenommen, dass bei dem Ablesen der beiden Distanzfäden eines Fadendistanzmessers die vom Gehülfen vertical zu haltende Latte im Allgemeinen eine kleine und *für beide Fädenablesungen verschiedene Schiefe* δ habe. Setzt man dieselbe gleich $\pm \frac{1}{100}$ der Länge (vielleicht etwas zu hoch gegriffen?), so ist das

Quadrat des *mittlern* Fehlers der Distanz in Metern gleich

$$\left(2m^2 + \frac{a^2}{2}\right) \sin 2\alpha^2 + \frac{4}{15} a^4 \cos \alpha^4,$$

worin a die Ablesungsdifferenz, m die mittlere Zielhöhe und α die Neigung der mittlern Visur sind und ferner die Distanzmesserconstante k gleich 200 (entsprechend dem Tachymeter) angenommen ist. Der Coefficient $\frac{4}{15}$ des zweiten Gliedes ergab sich aus Beobachtungen, über die in der Zeitschr. f. Vermessungswesen 1874 S. 334 berichtet worden ist. In seiner allgemeingültigen Gestalt heisst das erste, die Lattenschiefe berücksichtigende Glied:

$$\frac{1}{4} k^2 \sin^2\delta \left(2m^2 + \frac{a^2}{2}\right) \sin 2\alpha^2.$$

Aachen. Helmert.

Helmert: Ueber die günstigste Wahl der Kardinalpunkte bei dem Abstecken einer Trace. (Zeitschr. des Hannover. Arch.- u. Ing.-Ver. 1875. S. 337—349.)

Die definitive Absteckung einer Trace beginnt bekanntlich mit der Fixirung einiger wenigen Punkte, welche zur Construction nach geometrischen Regeln gerade ausreichen. Dass man diese Kardinalpunkte bei Absteckung einer Geraden möglichst an deren Enden zu legen habe, ist nicht zweifelhaft, weil andernfalls eine Vergrösserung der in der Fixirung der Kardinalpunkte auf dem Terrain begangnen Fehler für die äusseren Theile der Geraden eintreten wird. Weniger einfach und in die Augen springend ist die Regel bei Absteckung von Kreisbögen. Sie abzuleiten ist Zweck des Aufsatzes und es stellt sich heraus, dass es nicht rathsam ist, einen Kreisbogen aus zwei Tangenten oder Punkten zu entwickeln, die einen Centriwinkelabstand von mehr als 90^0 haben. Die günstigste Lage der Elemente wird im Aufsatze für verschiedene Fälle abgeleitet und die Uebersicht durch Tabellen gefördert, welche die maximalen Curvenverschiebungen, denen man unter Umständen ausgesetzt ist, angeben. Gegenüber andrer Anschauung betont Verf. noch besonders, dass nicht die Kürze der Tangenten und die damit verbundene Unsicherheit der Richtung derselben einen vorherrschend schädlichen Einfluss auf die Lage der Kreisbögen äussert, sondern dass vielmehr die radialen Verschiebungen der Tangenten in Verbindung mit grossen Centriwinkeln die Ursache beachtenswerther Aenderungen in der Lage der Kreisbögen bilden, dass man daher auch bei langen Tangenten Veranlassung haben kann, die mitgetheilten Regeln zu beachten.

Am Schluss des Aufsatzes gibt Verf. ein Verfahren an, einen Kreisbogen von bestimmtem Radius mehr als 2 Terrainpunkten möglichst genau anzupassen.

Aachen. Helmert.

Helmert: Einfache Ableitung Gauss'scher Formeln für die Auflösung einer Hauptaufgabe der sphärischen Geodäsie. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1875. S. 153—156.)

Gauss gibt am Ende des ersten Theils seiner geodätischen Untersuchungen mehrere Auflösungen der Aufgabe der geodätischen Uebertragung der geographischen Coordinaten auf der Kugel ohne Beweis. Die vierte dieser Auflösungen, zu scharfer Rechnung bei der jetzigen Einrichtung der Logarithmentafeln bequem geeignet, wird hier vom Verf. abgeleitet. Demselben kam es dabei mehr darauf an, recht einfach und mit geringem Formelapparat zu arbeiten, als durch Kürze zum Ziele zu gelangen.

Aachen. Helmert.

Helmert: Nachrichten über einen Mikroskoptheodolit. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1875. S. 327—341.)

Der Theodolit ist aus dem Institut von Starke und Kammerer in Wien und überrascht bei geringen Dimensionen durch die ausgezeichnete Theilung seines Theilkreises von 16 Ctm. Durchmesser. Verf. theilt mit, in welcher Weise über die Güte der Theilung und Genauigkeit der Winkelbeobachtung Aufschluss erhalten worden ist; die angewandten und durchaus bekannten Methoden sind solche, welche in der Praxis immer ohne Weiteres benutzt werden können. Für den periodischen Fehler des Theilkreises fand sich (am Mittel der Angaben beider Mikroskope)

$$-0'',84 \cos 2A + 2'',11 \sin 2A - 0'',75 \cos 4A + 1'',97 \sin 4A;$$

der zufällige Theilungsfehler ist wesentlich kleiner als $1''$ und der mittlere Einstellungsfehler eines Theilstriches $\pm 1'',6$. Abgesehen vom periodischen Theilungsfehler, welcher mittelst vier Kreisstellungen eliminirt werden kann, ist unter günstigen Luftverhältnissen der mittlere Fehler einer einmaligen Richtungsbeobachtung $\pm 2''$.

Aachen. Helmert.

Ludwig Boltzmann: Zur Integration der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung. (Wien. Sitz.-Ber. LXXII (2) 471.)

Die Integration der allgemeinen partiellen Differenzialgleichung 1. Ordnung mit 2 independenten Variabeln x, y und einer dependenten z

$$(1) \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

wobei $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ist, lässt sich bekanntlich auf die des Systems simultaner linearer partieller Differenzialgleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} Q_0 &= P_1 \frac{\partial z}{\partial x} + P_2 \frac{\partial z}{\partial y} \\ Q_1 &= P_1 \frac{\partial p}{\partial x} + P_2 \frac{\partial p}{\partial y} \\ Q_2 &= P_1 \frac{\partial q}{\partial x} + P_2 \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned}$$

wobei $Q_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - p\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\quad Q_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - q\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\quad P_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial p}$, $P_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$ ist, zurückführen.

Wenn bloss die Gleichungen (2) gegeben sind, so sind die Grössen z, p und q natürlich noch nicht vollständig, als Functionen von x und y bestimmt. Dazu ist vielmehr noch nothwendig, die zu einem bestimmten Werthe des y (z. B. y^0) gehörigen Werthe von z, p, q als Functionen von x zu kennen. Sei für $y = y^0$ etwa $z = \varphi(x)$, $p = \chi(x)$, $q = \psi(x)$, so werden diese Anfangsbedingungen dann und nur dann auch eine Lösung der Gleichung (1) liefern, wenn $\chi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$ und $\psi(x)$ durch die Gleichung:

$$\Phi\left(x, y^0, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}, \psi(x)\right) = 0$$

bestimmt ist. Das Problem die Gleichung (1) zu integriren, ist also identisch mit dem Probleme, Auflösungen der Gleichungen (2) von der geschilderten Beschaffenheit zu finden. In der vorliegenden Abhandlung wird nun eine einfache Methode gelehrt, nach welcher dies bewerkstelligt werden kann und welche in der Einführung von z und p als independenten Variabeln beruht und gezeigt, dass diese Methode sehr naturgemäss zu dem bekannten Jacobi'schen vollständigen Integrale der Gleichung (1) führt. Dieselbe Methode wird dann auch auf partielle, nichtlineare Differenzialgleichungen mit beliebig viel Independenten übertragen.

Wien. L. Boltzmann.

Ludwig Boltzmann: Bemerkungen über die Wärmeleitungen von Gasen. (Wien. Sitz.-Ber. LXXII (2) 458.)

Es wird gezeigt, dass man nach der Annahme, die innere Bewegung der Gasmoleküle trage gar nicht zur Wärmeleitung der Gase bei, für deren Wärmeleitungsconstante Werthe erhält, die kleiner als die experimentell gefundenen sind. Macht man jedoch, wie es Maxwell (phil. mag. 4. ser. vol. XXXV) thut, die Annahme, dass beim Vorgange der Wärmeleitung in einem Gase sich die leb. Kraft progressiver Bewegung, welche durch einen Querschnitt hindurchgeleitet wird, zur gesammten leb. Kraft, welche hindurchgeleitet wird, verhält, wie die im Gase enthaltene leb. Kraft progressiver Bewegung zur gesammten darin enthaltenen leb. Kraft, so bekommt man zu grosse Wärmeleitungsconstanten. Nimmt man hingegen an, die innere Bewegung der Moleküle trage nur $\frac{3}{13}$ von dem Betrage zur Wärmeleitung bei, den sie nach Maxwell's Annahme dazu beitragen würde, so bekommt man für die Wärmeleitungsconstante nicht bloss der Luft, sondern auch aller übrigen Gase Werthe, welche gut mit den von Stefan, Kundt, Warburg und Winkelmann experimentell gefundenen übereinstimmen.

Wien. L. Boltzmann.

Ludwig Boltzmann: Ueber das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken. (Wien. Ber. LXXII (2) 427.)

Die Formel, welche ich in der Abhandlung „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen" Wien. Sitz.-Ber. LXVI. für die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Positionen, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen der Atome eines Gases (letzterer Begriff im Sinne der neuern Gastheorie) aufgestellt habe, wandte ich schon dort auch auf ein Gas an, welches dem Einflusse der Schwere unterworfen ist. Ich habe jedoch ihren Beweis dort nur für den Fall durchgeführt, dass ausser den zwischen den Atomen ein und desselben Moleküls und den zwischen den Atomen zweier gerade zusammenstossender Moleküle wirksamen Kräften keine anderen Kräfte auf die Gasatome wirksam sind. Wir wollen solche andere Kräfte immer als „äussere Kräfte" bezeichnen. Den ersten Beweis, dass dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz den Bedingungen des Wärmegleichgewichts genügt, hat Burbury (Nature Nr. 293, Bd. XII, 107) gegeben. In der Abhandlung, welche den Gegenstand dieses Referates bildet, wird nur der Beweis geliefert, dass es den Bedingungen des Wärmegleichgewichtes auch im Falle des Vorhandenseins äusserer Kräfte nicht nur genügt, sondern dass es auch das einzige Wahrscheinlichkeitsgesetz ist, welches diesen Bedingungen genügt. Dieser Beweis wird ganz analog geführt, wie er in der Eingangs citirten Abhandlung (Wien. Sitz.-Ber. LXVI) im Falle des Mangels äusserer Kräfte geführt wurde. Im Falle einatomiger Gasmoleküle bezeichnet $f(t, x, y, z, u, v, w)\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw$ die Anzahl der Gasmoleküle, deren Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten parallel den Coordinatenaxen zur Zeit t zwischen den Grenzen

$$\begin{array}{cc} x \text{ und } x + dx & u \text{ und } u + du \\ y \text{ und } y + dy & v \text{ und } v + dv \\ z \text{ und } z + dz & w \text{ und } w + dw \end{array}$$

liegen. Diese Anzahl verändert sich während einer sehr kurzen Zeit dt, theils vermöge der Wirksamkeit der innern und äussern Kräfte, theils vermöge der Zusammenstösse der Moleküle, theils auch vermöge des geradlinigen Fortfliegens derselben. Alle diese Veränderungen werden nach den bekannten Methoden der mathematischen Physik berechnet und daraus eine partielle Differenzialgleichung für die Function $f(t, x, y, z, u, v, w)$ gewonnen, in welcher jedoch auch bestimmte diese Function enthaltende Integrale auftreten. Die allgemeine Integration dieser partiellen Differenzialgleichung unter beliebigen Anfangsbedingungen (d. h. also für eine beliebige anfängliche Vertheilung der Gasmoleküle in dem Gefässe, welches das Gas enthält), gelingt zwar nicht, doch lässt sich aus derselben der Beweis liefern, dass der Werth einer gewissen Grösse (der Entropie) in Folge der Molekularbewegung nur abnehmen kann. Der analytische Ausdruck für diese Grösse ist derselbe, wie im Falle keiner äusseren Kräfte. Nachdem dies festgestellt ist, kann für die Function $f(\infty, x, y, z, u, v, w)$ d. h. für die nach langer Zeit sich einstellende Zustandsvertheilung leicht eine Functionalgleichung gewonnen werden, deren Auflösung dann die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Positionen Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen der Atome im Zustande des Wärmegleichgewichtes liefert. Was das Resultat anlangt, mag hier bemerkt werden, dass als Geschwindigkeitsrichtung für jedes Atom jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich erscheint, die mittlere lebendige Kraft für jedes Atom gleich ist und auch das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen leb. Kräfte zu der der mittleren durch das Vorhandensein der äusseren Kräfte nicht verändert wird. Nur die Dichte des Gases wird an verschiedenen Stellen verschieden sein.

Eine Unrichtigkeit bei Auflösung der Functionalgleichung (dass h a priori unabhängig von xyz angenommen wird) kann leicht verbessert werden. Dies, sowie die Auflösung der Functionalgleichung im Falle strömender Bewegung des Gases werde ich in einer demnächst zu erscheinenden Abhandlung behandeln. Daselbst werde ich auch die Einwände Loschmidt's (Wien. Sitz.-Ber. LXXIII (2)) besprechen.

Meine Abhandlung enthält noch die Behandlung des analogen Problems für Gase mit mehratomigen Molekülen und einen Anhang, worin die Unmöglichkeit negativer innerer Arbeit nachgewiesen wird.

Wien. L. Boltzmann.

S. Günther: Ueber aufsteigende Kettenbrüche. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21. Band. S. 178—191.)

Nach einer kurzen historischen Einleitung wird zunächst für den Zähler des aufsteigenden Kettenbruches

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1 + \frac{b_2 + \cdots + \frac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

das bestimmende System binomischer recurrirender Gleichungen aufgestellt; so findet sich

$$p_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \ldots 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ b_{n-1} & 0 & 0 \ldots a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 \ldots 0 & a_n \end{vmatrix}, \quad q_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \,.$$

Mit Hülfe dieser Formeln wird alsdann die Umwandlung eines aufsteigenden Kettenbruches in einen absteigenden gelehrt, und von der resultirenden Formel ein mehrfacher Gebrauch gemacht, indem erstens eine alternirende Reihe in einen Kettenbruch und ein solcher von bestimmter Form in ein Aggregat umgesetzt wird. Hierauf wird ein von F. Lucas ohne Beweis aufgestellter Satz verificirt und mit Hülfe desselben eine ganze Zahl durch einen Kettenbruch von beliebiger Gliederzahl dargestellt. Weiterhin wird der aufsteigende und im Anschluss an ihn auch der absteigende Kettenbruch von eingliedriger Periode summirt und ein Theorem von Siacci bewiesen. Der letzte Paragraph verallgemeinert den von Seidel eingeführten Begriff der Aequivalenz unendlicher Gebilde; dieser Begriff gestattet die Umformung einer convergirenden Potenzreihe in einen aufsteigenden und dann sofort wieder in einen absteigenden ebenfalls convergirenden Kettenbruch; als Beispiele sind die hypergeometrische und die Sinusreihe gewählt, für welch' letztere nahezu ohne alle Zwischenrechnung die elegante Beziehung

$$\sin x = x \,|\, 1! - (1!)^2 x^2 \,|\, (3! + 1! x^2) - (3!)^2 x^2 \,|\, (5! + 3! x^2) - \cdots$$

sich ergibt. Endlich wird noch eine Erweiterung des Aequivalenzbegriffes angedeutet und durch das Beispiel zweier unendlich fortlaufender Entwicklungen von der Beschaffenheit belegt, dass der $n$te Näherungswerth der einen dem 2^{n-1}ten der anderen jeweilig gleich ist.

München. S. Günther.

S. Günther: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. (Leipzig 1876. Verlag v. B. G. Teubner.)

Da die sieben Kapitel, in welche dieses Werk zerfällt, sachlich nicht zusammenhängen, so geben wir ihre Analyse gesondert:

Kap. I. *Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyëdern in der Neuzeit.* Es wird zunächst des Zusammenhanges wegen ein kurzes Resumé über diejenigen Resultate geliefert, welche sich dem Verf. bei einer (im 6. Jahrg. des Bulletino Boncompagni abgedruckten) Untersuchung über die Entwickelung des nämlichen Gegenstandes im Alterthum und Mittelalter ergeben hatten; diese Resultate lassen sich (S. 4) in folgende beide Sätze zusammendrängen: 1. „Man kannte um 1500 von Sternfiguren das sternförmige Fünfeck, die beiden Siebenecke, das Achteck und Neuneck, während zugleich unrichtigerweise auch ein Sternsechseck aufgezählt wurde, dem jedoch, aus zwei getrennten gleichseitigen Dreiecken bestehend, gerade die charakteristische Eigenschaft der Sternpolygone, sich in einem Zuge beschreiben zu lassen, abging“. 2. „Man hatte angefangen, allgemeine Untersuchungen über die Winkelsumme der Sternpolygone anzustellen, und besass eine inductive Kenntniss der wichtigen Thatsache, dass in jedem Sternpolygon der höchsten Art diese Summe den constanten Werth 180° behauptet, ungerade Eckenzahl vorausgesetzt.“ Im Anschluss hieran werden die noch ziemlich unvollkommenen Darstellungen des Gegenstandes bei Lucas de Burgo, Bouvelles, Reysch, Barbaro, Peletier und Clavius besprochen, bis dann bei Petrus Ramus erstmalig die Auffassung des Pentagramms als eines Sternvielecks hervortritt. Nachdem in einem Schaltparagraph die mystischen Spielereien eines Paracelsus, Alsted und Kircher kurz berührt sind, lernen wir in Albert Girard einen genialen Geometer kennen, der zuerst zur Concipirung des allgemeinen Vielecksbegriffes durchgedrungen ist, während auf der anderen Seite Broscius noch in den antiken Anschauungen sich befangen zeigt, dabei aber doch die metrischen Relationen der Theorie beträchtlich erweitert. Die nächsten 5 Paragraphen beschäftigen sich ausschliesslich mit Kepler. Nachdem auf eine bislang in dieser Hinsicht unbeachtet gebliebene Stelle im „Mysterium cosmographicum“ aufmerksam gemacht worden, beschäftigt sich die Darstellung ausführlich mit Kepler's schönen Arbeiten über Winkeltheilung, welche ihn zu einer eingehenden analytischen und geometrischen

Discussion aller Sternvielecke der ersten 15 Ordnungen veranlassten. Auch die eigenthümliche astrologische Deutung, welche der grosse Mann diesen Gebilden unterlegte, findet hier ihre Stelle; alsdann wird gezeigt, dass zwei Sternpolyëder — nach der Wiener'schen Terminologie das zwölfeckige und zwanzigeckige Sternzwölfflach — von Kepler aufgefunden und in ihrer wahren Natur erkannt worden sind; ein anderes, das sterneckige Zwölfflach, hatte schon ein Jahrhundert früher der Künstler Jamnitzer bemerkt. — Von Kepler springt die Erzählung mit Uebergehung eines Zeitraumes von 100 Jahren zu der schönen Abhandlung Meister's über, in welcher sich zuerst eine geschlossene auf kinematischer Basis aufgebaute Theorie der irregulären Vielecke im allgemeinsten Sinne des Wortes vorgetragen findet; an seine Neuerung knüpfen gewisse Bemerkungen von L'huilier, Gauss und Möbius an. Um alsdann den durch Poinsot eingeleiteten gewaltigen Fortschritt richtig zu würdigen, wird eine kurze Uebersicht über die Entwickelung der Stereometrie eingeschaltet, die natürlich durch zwei Marksteine, das durch Maurolycus zuerst erkannte und von Meister fortgebildete duale Princip und den Descartes-Euler'schen Satz, charakterisirt ist. Es folgt Poinsot, dessen zahlentheoretischer Erfindungsgang genau gekennzeichnet wird, während bei der Bildung der vier regelmässigen Polyëder von Sternform auch geometrische Betrachtungen nicht entbehrt werden konnten. Die Frage, ob ausser den vier von ihm entdeckten noch andere reguläre Sternvielflache existirten, ward von Poinsot unbeantwortet gelassen, von Cauchy aber aufs Einfachste im verneinenden Sinne erledigt. Eine isolirte Stellung nehmen die im Folgenden charakterisirten Leistungen dreier deutscher Mathematiker ein: Krause entwickelt eine kurze phoronomische Theorie der Sternpolygone als Theil seines geometrischen Hauptwerkes, E. Schröder sucht, gestützt auf das später sogenannte „Gesetz der Permanenz", die Lehre von den Sternvielecken in wesentlich neuer Art zu formuliren, und Jacobi gibt seine elegante Vorschrift zur Inhaltsbestimmung solcher Gebilde, die später von Hermes vervollkommnet wird. Während dann Bertrand den erwähnten Cauchy'schen Beweis durch einen übersichtlicheren ersetzt und Cayley die von Poinsot angedeutete Ausdehnung des Euler'schen Theoremes rectificirt, erscheint 1864 das zusammenfassende Werk Wiener's „Ueber Vielecke und Vielflache". Im Hinblick auf den durch diese Schrift markirten vorläufigen Abschluss fasst sich die fernere Darstellung kurz. Die Regeln von

Möbius zur Inhaltsbestimmung wie immer gestalteter Polygone und Polyëder werden ausführlich die planimetrischen Untersuchungen von Heinen, Druckenmüller, Unferdinger, Steinhauser, Muir und Pagni nur kurz erörtert; der letzte Paragraph beschäftigt sich mit den vielversprechenden Aussichten, welche durch die neuesten Arbeiten von Hessel und Hess über gleicheckige und gleichkantige Polygone, gleicheckige und gleichflächige Polyëder der allgemeinen Theorie der sternförmigen Gebilde eröffnet zu werden scheinen.

Dem Kapitel sind 6 Noten angehängt. Die erste gibt eine kurze Biographie des wackeren und viel zu wenig bekannten polnischen Geometers Brocki (Broscius), die zweite registrirt einige Fälle, in denen Sternvielflache „unbewusst“ schon früher auftraten, die dritte handelt von einigen unvollkommenen älteren Methoden zur Inhaltsbestimmung der Sternvielecke. Während dann in der vierten und fünften bezüglich eine Anwendung dieser Gebilde in der „natürlichen Magie“ und in der theoretischen Mechanik geschildert wird, finden in der letzten Gauss' pentagramma mysticum und die schöne Auflösungsmethode einer cubischen Gleichung ihren Platz, welche Clebsch im 4. Bande der „Mathem. Annalen“ auf das gewöhnliche Pentalpha gegründet hat.

Kap. II. *Die Lehre von den aufsteigenden Kettenbrüchen in ihrer geschichtlichen Entwickelung.* Ein historischer Abriss des Auftretens der Reihe

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{b_i}{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i} \quad (n = 1, 2 \ldots \infty).$$

Das erste Auftreten dieser analytischen Form wird bei den Hebräern und Griechen, in gewissem Sinne auch schon bei den Aegyptern, signalisirt, indem nämlich all diesen Völkerschaften das Bestreben gemeinsam ist, complicirtere Brüche durch Zerlegung in Einheitsbrüche zu vermeiden. Nicht minder lässt sich die Minutienrechnung der Römer als Rechnung mit aufsteigenden Kettenbrüchen betrachten; aus Julius Frontinus und Victorius, welch letzterer

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{}}{}$$

setzt, werden einige charakteristische Beispiele angeführt. Hierauf tritt die Darstellung in die Discussion des speciellen Falles eines constanten a ein, indem die beiden geschichtlichen Werthe $a = 60$ und $a = 10$ gesondert gefolgt werden. Es wird gezeigt, wie die aller Wahrscheinlichkeit nach von den Chaldäern stammenden sechzigtheiligen Brüche die Grundlage des astronomischen Calculs der Griechen bildeten, wobei der hierauf bezüglichen Arbeiten von Theon, Barlaam und Maximus Planudes ausführlich gedacht wird. Der allgemeinste Fall der aufsteigenden Kettenbrüche tritt uns in der „Denominationsmethode“ des Arabers Al Kalsadî und bereits in einem hohen Grade der Ausbildung bei Leonardo Fibonacci entgegen, um dann freilich für 5 Jahrhunderte fast ganz zu verschwinden. Es wendet sich desshalb die Darstellung nunmehr zur Entstehungsgeschichte der Decimalbrüche, welche zuerst bei Johannes Hispalensis auftreten und durch den Einfluss des Dioskurenpaares Peurbach-Regiomontan wenigstens auf trigonometrischem Gebiete die Alleinherrschaft erringen. Auf algebraischem gelangen sie zuerst bei Cardan zum Durchbruch, an dem sich dann Buckley, Stevin und Recorde anschliessen. Mit der durch Kepler zum wissenschaftlichen Gemeingute erhobenen abgekürzten Multiplication und Division verlässt die Schilderung dieses Specialkapitel, um sich nach einer kurzen Erwähnung der sogenannten „wälschen Praktik“ den bahnbrechenden Arbeiten von Lagrange und Lambert zuzuwenden. Dieselben scheinen bislang dem mathematischen Publikum gänzlich unbekannt geblieben zu sein, obschon sie das höchste Intereses zu erregen geeignet scheinen. Lagrange entwickelt nämlich eine vollständige Theorie der aufsteigenden Kettenbrüche, in der sich u. a. bereits die Umwandlung solcher Formen in gewöhnliche Kettenbrüche, wenn schon noch nicht in expliciter Gestalt, vorfindet, Lambert dagegen fasst den Gegenstand mehr von der praktischen Seite auf, bemerkt aber dabei doch den theoretisch wichtigen Umstand, dass ein Bruch nur auf *eine* Weise in einen absteigenden Kettenbruch von reducirter Form, wohl aber auf unendlich viele Arten in solche aufsteigende Kettenbrüche transformirt werden kann. Besprochen werden weiter die Leistungen von Druckenmüller, Heiss, Matthiessen; als geschlossenen Wissenszweig behandeln unser Thema Kunze und Lemkes; den von Lagrange angedeuteten Fundamentalsatz stellt Schlömilch in entwickelter Gestalt hin. Das Kapitel schliesst mit der independenten Determinanten-Darstellung der Näherungswerthe eines aufsteigenden Kettenbruches.

Note 1 handelt von Leonardo's Verfahren, Brüche in Aggregate von Stammbrüchen umzusetzen, Note 2 von einer sonderbaren Bezeichnungsweise Michael Stifel's, Note 3 von dem Abriss der römischen Bruchrechnung, welchen der Augsburger Arzt und Mathematiker Henisch noch im Jahre 1606 zu liefern für nöthig fand. In Note 4 wird die im Texte vorgetragene Thatsache, der zufolge Praetorius der eigentliche Erfinder der abgekürzten Decimalbruchrechnung gewesen sein soll, dahin corrigirt, dass mit Hinweis auf neuere erst während des Druckes bekannt gewordene Forschungen Rudolph Wolf's die Priorität für Bürgi in Anspruch genommen wird. Note 5 endlich gibt einige genauere Nachweisungen betreffs der wälschen Praktik und Note 6 eine gedrängte Analyse des für die Zahlentheorie hochwichtigen Werkes von Druckenmüller über „Kettenreihen".

Kap. III. *Das Newton'sche Parallelogramm und die Cramer-Puiseux'sche Regel. Ein Beitrag zur Geschichte der Functionstheorie.* Das kräftige mechanische Hülfsmittel, welches Newton in seinem „Methodus fluxionum et serierum infinitarum' zur Reihenentwickelung impliciter Functionen angegeben hatte, war erst durch eine gelegentliche Bemerkung von Clebsch aus langer Vergessenheit hervorgezogen worden. Hier wird nun zuerst an einer Reihe von Beispielen gezeigt, wie Newton aus einer gegebenen algebraischen Gleichung zwischen x und y die eine unbekannte nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen der andern entwickeln lehrte. Sein Verfahren ward von Colson, S'Gravesande und Stirling aufgenommen, jedoch nicht eben wesentlich gefördert; in Deutschland fand es zuerst geringen Anklang. Erst Kästner brachte dasselbe durch seine sehr ausführliche Behandlung in Aufnahme; ihm zufolge schreibt man die verschiedenen in der Gleichung $f(x, y) = 0$ auftretenden Potenzen der Unbekannten in der hier angedeuteten Weise

$$\begin{array}{lllll} x^3 & x^3y^1 & x^3y^2 & x^3y^3 & \ldots \\ x^2 & x^2y^1 & x^2y^2 & x^2y^3 & \ldots \\ x^1 & x^1y^1 & x^1y^2 & x^1y^3 & \ldots \\ x^0 = y^0 & y^1 & y^2 & y^3 & \ldots \end{array}$$

und verfährt dann weiter nach einem Satze, welchem wir (S. 147) nachstehende Fassung ertheilt haben: „Man wähle den auf der Ordinatenaxe dem Anfangspunkte zunächst liegenden Punkt zum Drehpunkte eines Lineales. Dann bewege man das Lineal so lange der Richtung des Uhrzeigers entgegen, bis er einen (oder mehrere) markirte Punkte trifft. Den entferntesten derselben mache man zum neuen Drehpunkt und fahre mit dieser Operation so lange fort, bis man den am weitesten von der Ordinatenaxe entfernten Punkt trifft. Alle so erreichten Zahlenwerthe setze man einander gleich; jede der Gleichungen liefert einen brauchbaren Werth von $m-y$ provisorisch gleich ax^m gesetzt —, wofern die Reihe aufsteigen soll. Für absteigende Reihen verfahre man ebenso, indem nur der Drehsinn der entgegengesetzte wird; der Schlusspunkt der Drehung muss mit dem vorigen zusammenfallen, und es erscheinen so sämmtliche markirte Punkte durch ein geschlossenes Polygon von den übrigen abgeschieden.“ Bei der weiteren Erörterung werden auch die Commentare von Pfeiffer und Holland sowie auch im Anschluss an das Compendium von Hausen die Lehre von der allgemeinen Reihen-Reversion beigezogen. Zu derselben Zeit resp. etwas früher beschäftigten sich auch de Gua und Cramer* mit diesen Fragen; aus dem grossen Werke des letzteren wird ein ausführlicher Auszug gegeben. Cramer wendet anstatt des Rechteckes ein dreieckiges Schema, das „triangle arithmétique“ an und schreibt also:

$$\begin{array}{ccccccc} y^3 & & xy^2 & & x^2y & & x^3 \\ & y^2 & & xy & & x^2 & \\ & & y & & x & & \\ & & & 1. & & & \end{array}$$

Dabei erreicht er ersichtlich den Vortheil, dass sämmtliche Glieder ein und derselben Horizontalen die gleiche Dimension besitzen. Im steten Anschluss an das Original wird nun gezeigt, wie Cramer mit Hülfe seines instrumentalen Verfahrens zwei der wichtigsten Probleme der Curvenlehre auflöst: Die Entscheidung des Charakters (ob parabolisch oder hyperbolisch etc.) der verschiedenen Curvenzweige einer- und die Feststellung von Kriterien für die merkwürdigen Curvenpunkte andererseits. Diese Methode Cramer's nahm genau ein Jahrhundert später Puiseux aus einem anscheinend ganz verschiedenen Gesichtspunkte wieder auf, indem er eine wichtige Frage der Functionenlehre behandelte. Die Gleichung $f(u, z) = 0$ führt er durch eine Substitution auf die Form

$$f(b+\beta,\, u+\alpha) \equiv A\beta^p + \Sigma B\beta^q\alpha^r = 0$$

über und sucht nun in dieser Gleichung die Glieder niedrigster Dimension zu separiren, was denn auch mit Hülfe des Newton-Cramer'schen Verfahrens leicht gelingt. Nachdem noch kurz von der ablehnenden Haltung Lagrange's gegen jene Methode die Rede gewesen, wird mit weniger Worten des in neuester Zeit sich anbahnenden Verschmelzungsprocesses zwischen Curventheorie und

Functionenlehre im Riemann'schen Sinne Erwähnung gethan. Ein Schlussparagraph gibt von den nur in sehr geringer Anzahl vorhandenen literarischen Hülfsmitteln Rechenschaft, welche bei Ausarbeitung des Kapitels zur Disposition standen.

In zwei sich anschliessenden Noten wird zuerst der höchst originellen Anwendung gedacht, welche in Taylor's „Methodus incrementorum" von der Newton'schen Regel auf die Behandlung totaler Differenzialgleichungen gemacht wird; an zweiter Stelle findet man eine Ehrenrettung Kästner's gegen die nicht immer gerechtfertigten Angriffe neuerer Mathematiker, — voran Hermann Hankel's.

Kap. IV. *Historische Studien über die magischen Quadrate.* Diese Studien beginnen mit der durch La Loubère's Vermittelung, dem Occidente zugekommenen indischen Methode zur Bildung der magischen Quadrate von ungerader Zellenzahl, deren angebliches hohes Alter allerdings durch keine triftigen Gründe bekräftigt wird. Die Methode wird beschrieben und ein Beweis dazu gegeben. Alsdann folgen die Araber, über deren desfallsige Bemühungen uns Ibn Khaldoun und die Schriften der „lauteren Brüder" einige freilich dem Mathematiker wenig genügende Nachweisungen aufbewahrt haben. In ein eigentlich wissenschaftliches Geleise tritt diese Disciplin erst mit der Specialabhandlung des — vermuthlich dem Beginne des 15. Säculums angehörigen — Byzantiners Manuel Moschopulos; diese Abhandlung wird wörtlich abgedruckt. In derselben finden sich zwei Vorschriften für die Quadrate von $(2n+1)^2$ und zwei andere für diejenigen von $(4n)^2$ Zellen; diese 4 Regeln werden discutirt und mit Beweisen versehen, welche auch zur Constatirung einiger nicht uninteressanter algebraischer Relationen führen. Im Abendland lässt sich ein — noch dazu ganz unvollständiges — Zauberquadrat erst 1515 in einem venetianischen Rechenbuche nachweisen, wenn man nicht das wahrscheinlich noch um ein Jahr früher enstandene Quadrat von 16 Zellen auf Dürer's bekanntem Stiche „die Melancholie" ausnimmt. Als astrologische Spielerei fassen diese Zahlenschemate Paracelsus und Agrippa v. Nettesheim, als arithmetisches Problem dagegen Adam Riese auf. Eine durchweg neue Bearbeitung fand hingegen unser Problem bei dem auch sonst hochberühmten Arithmetiker Michael Stifel, der den allmälichen Aufbau der magischen Quadrate von aussen her (durch sogenannte Umläufe) lehrte; da derselbe nach der Weise seiner Zeit die gegebenen Vorschriften weder allgemein fasst, noch auch beweist, so musste ein eingehender Excurs über die Richtigkeit derselben wie auch über ihren eventuellen Ursprung, eingeschoben werden. Ebenso findet sich bei Stifel zuerst eine Ausdehnung, insofern nämlich Quadrate gebildet werden, bei welchen alle derselben Reihe angehörigen Zahlen ein constantes Product ergeben. Die an Stifel sich anschliessenden Namen, Spinola, Henisch, Lochner, Faulhaber, Remmelin sind mit Ausnahme des letztgenannten, dessen Träger die magischen Quadrate mit den Polygonalzahlen in Verbindung gesetzt zu haben scheint, ziemlich bedeutungslos. Dagegen tritt uns jetzt eine Reihe französischer Mathematiker entgegen, von denen jeder einzelne die in Rede stehende Lehre, sei es nach Form oder Inhalt, beträchtlich gefördert hat. Bachet de Méziriac verwandelt eine Regel des Moschopulos in die (in einem der vorstehenden Referate geschilderte) Terrassenmethode, Frénicle zieht den jener Methode zu Grunde liegenden weit allgemeineren Grundsatz ans Licht — dass man es nämlich nicht sowohl mit einem magischen Quadrate als vielmehr eigentlich mit einer magischen Kugel zu thun habe — und entwickelt neue elegante Regeln für geradzellige Quadrate, De la Hire und Sauveur lehren jedes Zauberquadrat allgemein bilden. Um nämlich ein Quadrat von n^2 Zellen zu erhalten, construiren sie zwei Quadrate der Art, dass in keiner Reihe jedes einzelnen die nämliche Zahl mehr als einmal vorkommt, in das erstere dagegen nur die Zahlen 0 bis n; in das zweite blos die Zahlen $1 . n$, $2 . n, \ldots n . n$ eingehen; haben dann homologe Zellen resp. die Zahlen p und q, so hat die entsprechende Zelle des Hauptquadrates durch die Zahl $(p + q)$ ausgefüllt zu werden. Auch berichtigt De la Hire einen Irrthum Poignard's. Es folgt weiter d'Ons-en-Bray, der aus einem vorliegenden magischen Quadrate durch „Ränderung" ein neues herstellen lehrt, und Rallier des Ourmes, der in ausführlicher und höchst eleganter Weise ein Resumé über alle bis zu seiner Zeit bekannt gewordenen Leistungen gibt. — Diesen Koryphäen Frankreichs stehen in Deutschland nur Kochanski's „Erfindung" sogenannter Subtractionsquadrate und die gelegentlichen Bemerkungen v. Claussberg's gleichzeitig gegenüber; in den sechziger Jahren erscheint dann freilich Leonhard Euler's grosse — leider geradezu unbekannt gebliebene — Abhandlung, welche allerdings über ihren eigentlichen Vorwurf sehr bald hinausgeht und desshalb hier verhältnissmässig kurz bedacht werden musste. Nachdem weiter von Franclin's Construction $(4n)^2$-zelliger Quadrate und seinen magischen Kreisen wie von den flüchtigen Andeutungen Vieth's und Lorenz's die Rede gewesen, findet die Erzählung in Mollweide's compendiöser „Dissertatio de quadratis magicis" ihren Uebergangspunkt zur neuesten Zeit. Der praktischen Bücher von Hohndell und Zuckermandel wird nur kurz, der grösseren Schrift von Hugel und der Aufsätze von Drach, Horner und Thomschon ausführlicher gedacht, obgleich diese letzteren eigentlich nur Fortführungen des Sauveur'schen Grundgedankens darbieten. Eine Analyse des interessanten Programms von v. Pessl, in welchem zur Vermeidung naheliegender Inconsequenzen dem magischen Quadrate der magische Cylinder substituirt wird, beschliesst das Kapitel, welchem sich 6 Noten anreihen.

Note 1 bespricht eine vermuthlich auf magische Quadrate hindeutende Schachaufgabe aus einem arabischen Autor, Note 2 sucht die Lebenszeit des Moschopulos zu fixiren, Note 3 gibt die kritischen Nachweisungen zu dem in der Arbeit abgedruckten Texte jenes Schriftstellers, Note 4 erwähnt einiger magischer und numismatischer Anwendungen der Zauberquadrate, Note 5 weist die von Einzelnen hervorgehobene Aehnlichkeit zwischen dem den magischen Quadraten zu Grunde liegenden algebraischen Probleme und den Euler'schen Sätzen über die 9 Richtungscosinus als nicht bestehend zurück. Note 6 endlich bespricht die mit Erfolg gekrönten Bemühungen von Wenzelides, magische und zugleich symmetrische Rösselsprünge anzufertigen, und erörtert die Frage, ob und wie man eventuell rein theoretisch diese Aufgabe in Angriff nehmen könne.

Kap. V. *Skizzen aus der Logarithmotechnie des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts.* Es wird hier zunächst Klage darüber erhoben, dass die unrichtige Behauptung von einer Identität der Napier'schen und der sogenannten natürlichen Logarithmen selbst bei Leuten, wo man dergleichen nicht erwarten sollte, wie Montucla, Morgan, Hoefer sich vorfindet und überhaupt immer wieder auftaucht. So hat z. B. ganz kürzlich Dubois einer die Sache ganz correct behandelnden Untersuchung Wackerbarth's den ungerechtfertigsten Widerspruch gegenüber gestellt. Hier wird nun gezeigt, wie schon lange Zeit vor Wackerbarth jene Frage zum Austrag kam; Kästner und Karsten disputirten über dieselbe, Gehler schrieb eine eigene Schrift darüber, Biot, an den sich Bernhard anschloss, stellte den Streitpunkt ausser allen Zweifel. — Weiterhin wird die schöne Methode besprochen, welche der Berliner Astronom Jean Bernoulli zur Bestimmung der sogenannten Proportionaltheile in Vorschlag brachte, und welche auf einer für jene Epoche höchst bemerkenswerthen Ausnützung der Kettenbrüche beruhte. — Drittens: Eine kurze Geschichte derjenigen Versuche, welche schon vor Gauss den schwachen Punkt der logarithmischen Rechnung — Unanwendbarkeit bei Additionen und Subtraktionen — zu beseitigen bestimmt waren. Nachdem von den desfallsigen Bemühungen Leonelli's und A. v. Humboldt's gesprochen ist, verweilt die Darstellung ausführlicher bei den anscheinend ganz in Vergessenheit gerathenen goniometrischen Methoden von Muschelius v. Moschau, Christian Wolf und Delambre, deren Werth sowohl gegenseitig als auch in ihrem Verhältniss zu der Neuerung der Gauss'schen Logarithmen abgewogen wird.

Note 1 behandelt die Manier Biots, durch Reihenentwicklung zu Napier's Endformel zu gelangen, Note 2 bespricht Ludlam's Verwendung der Euler'schen Kettenbruch-Algorithmen zu optischen Zwecken, Note 3 einige geometrische Versuche des obengenannten schlesischen Mathematikers Muschel, Note 4 erwähnt eines Versuches des Erlanger Professors Poezinger, aus den Logarithmen von $(x + 1)$ denjenigen von x selbst zu finden.

Kap. VI. *Zur Geschichte der jüdischen Astronomie im Mittelalter.* Vorliegendes Kapitel ist im wesentlichen eine Widerlegung eines Ausspruches von C. v. Littrow. Derselbe hatte nämlich in seinem Schriftchen „Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften“ von einer „Formel“ gesprochen, welche der jüdische Polyhistor Maimonides für das den Monatsanfang rituell bedingende Erscheinen der Mondessichel vorgetragen haben soll — ein Factum, das, wenn richtig, für die Geschichte der mittelalterlichen Mathematik selbstverständlich von der höchsten Bedeutung sein würde. Um einen Einblick in die Verhältnisse zu erhalten, bedarf es natürlich genauer Kenntniss der hebräischen Chronologie, welche denn auch in der That durch eine unlängst erschienene Monographie von Schwarz in bequemer Weise vermittelt wird. Ehe jedoch die fernere Darstellung auf diese sich stützen darf, müssen einige von bedeutenden Fachmännern — Slonimski und Steinschneider — gegen dieselbe geltend gemachte Bedenken gewürdigt werden. Obgleich an eine sachgemässe Kritik solch' penibler Detailfragen nicht gedacht werden kann, ergibt sich doch die Gewissheit, dass zu dem hier angestrebten Zwecke unbedenklich auf das Schwarz'sche Werk zurückgegriffen werden dürfe. An der Hand desselben wie auch anderer Quellen wird dann jene Meinung Littrow's als eine völlig haltlose erkannt; es liegt derselben eine Verwechselung zweier den jüdischen Astronomen eigenthümlicher unter sich aber total verschiedener Verfahrungsweisen zu Grunde.

Eine Note beschäftigt sich mit einem neuen Angriffe gegen Schwarz, der jedoch viel zu wenig sachlich erscheint, um ernsthaftere Erwägung nothwendig zu machen.

Kap. VII. *Quellenmässige Darstellung der Erfindungsgeschichte der Pendeluhr bis auf Huyghens.* So oft auch schon die Frage nach dem eigentlichen Erfinder dieses hochwichtigen Instrumentes ventilirt worden, so hat man es doch durchweg versäumt, eine unendlich fleissige Quellenarbeit des bekannten holländischen Mathematikers van Swinden gebührend zu berücksichtigen. Dies wird hier, natürlich unter steter Beiziehung neuerer Untersuchungen, nachgeholt. Es zeigt sich, dass von den Prioritätsansprüchen der Engländer Harris und Hooke wie auch des Italieners Sanctorius nicht wohl im Ernste gesprochen werden kann, dass vielmehr ausser Huyghens nur folgende drei Candidaten in Frage kommen können: Galilei, Jobst Bürgi, Johann Hevelius. Mit Bezugnahme auf den Briefwechsel des Ersteren wird nun gezeigt, dass er allerdings ein — noch heutzutage in Florenz befindliches — Modell angefertigt habe oder, was wahrscheinlicher ist, durch seinen Sohn Vincenz habe anfertigen lassen, bei dem jedoch nur die Uebertragung der Bewegung auf ein Zeigerwerk von der Maschine selbst besorgt wurde, während das Pendel durch menschliche Beihülfe in Bewegung erhalten werden musste. Dass Galilei trotz allen Nachsinnens mit einer Beseitigung dieses letztgenannten Uebelstandes nicht mehr zu Stande gekommen sei, erscheint sicher. — Von Bürgi hatte es in letzter Zeit R. Wolf sehr wahrscheinlich gemacht, dass ihm die Verfertigung einer wirklichen Pendeluhr gelungen sei, wobei er sich auf ein der Wiener Schatzkammer angehöriges und muthmasslich von dem Hofmechaniker Rudolph's II. herrührendes Exemplar eines solchen Zeitmessers berufen konnte. Allein die von van Swinden diplomatisch erhärtete Thatsache, dass man am Ende des siebzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe aus älteren Uhren die Unruhe entfernt und ohne sonst etwas zu verändern statt ihrer ein Pendel eingehängt habe, macht Wolf's an sich höchst plausibel erscheinende Deduction illusorisch. — Was schliesslich Hevel anlangt, so unterliegt es kaum einem Zweifel, dass er die von allen praktischen Astronomen seiner Zeit geübte primitive Methode der Zeitbestimmung durch eine automatisch arbeitende Pendeluhr zu verbessern sich bestrebte und zu der Zeit, als Huyghens ihm den glücklichen Erfolg seiner Mühe brieflich mittheilte, bereits zu einer partiellen Realisirung seiner Idee durchgedrungen war. Eine eigentliche Pendeluhr hat aber auch er nicht erfunden, und es bleibt so Huyghens der hohe Ruhm seiner genialen Neuerung ohne jede Einschränkung erhalten.

Note 1 bespricht die Beziehung der Pendeluhren zu dem sogenannten „Uhrengleichniss", Note 2 gibt eine Bemerkung Nelli's über Sanctorius. In der dritten Note wird nach den Aufklärungen von Reusch gezeigt, wie nicht sowohl Gründe wissenschaftlicher Natur als vielmehr die verdächtige Haltung des Vatikans dem Briefwechsel Galilei's mit Holland so rasch eine Grenze setzten. Note 4 handelt von den oben namhaft gemachten Pendelbeobachtungen der Astronomen, Note 5 gibt einen Auszug aus einer jüngst publicirten und für die Geschichte der Pendeluhr bedeutsamen Studie von Studnička über den böhmischen Mechaniker Marek. In Note 6 endlich wird nachgewiesen, dass die Hypothese Veladini's, wie Galilei doch noch an seinem Modell eine Hemmungsvorrichtung angebracht habe, an sich zwar sehr geistreich sei, dem geschichtlichen Sachverhalte aber keineswegs entspreche.

München. S. Günther.

Rudolf Wolf: Astronomische Mittheilungen Nr. 1—40. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856—1876.)

Beim Abschlusse der vierten Decade meiner „Astronomischen Mittheilungen" dürfte es eine gewisse Berechtigung haben, einen kurzen Rückblick auf Entstehung und Inhalt derselben zu werfen. — Die erste Veranlassung zu dieser, nunmehr bald volle 100 Octavbogen füllenden Publication war folgende: Als ich 1852 in den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Bern die Abhandlung „Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung" veröffentlicht, und darin den Nachweis geleistet hatte, dass die von Schwabe aus seinen Beobachtungen wahrscheinlich gemachte Periodicität in der Häufigkeit der Sonnenflecken wirklich bestehe, ja sich rückwärts bis auf die Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken verfolgen lasse, — dass die Sonnenfleckencurve jederzeit mit der Curve der magnetischen Declinations-Variationen parallel gelaufen sei, — dass die gemeinschaftliche mittlere Länge der beiden Perioden aber nicht nur, wie Schwabe, Sabine und Lamont gemeint hatten, etwas mehr als 10 Jahre, sondern volle $11\frac{1}{9}$ Jahre betrage, — dass die Sonne zu den veränderlichen Sternen zu gehören scheine, — dass die Fleckenmaxima auf Jahre häufiger Nordlichter und Erdbeben fallen dürften, — und dergleichen, so wurden die Resultate meiner Untersuchungen vielerorts noch mit einem gewissen Misstrauen aufgenommen. Dies war der nächste Grund, dass ich mich 1856 bei Uebernahme der Redaction der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich alsbald entschloss in einer Reihe von Artikeln theils die seitherigen Beobachtungen und Untersuchungen zu publiciren, theils namentlich auch die von mir bereits benutzten oder noch weiter erhältlichen Materialien aus älterer Zeit als eine Art Sonnenflecken-Literatur öffentlich vorzutragen. Als sodann später die eidgenössische Sternwarte gebaut und wenigstens soweit ausgerüstet wurde, dass auch andere Beobachtungen und Untersuchungen von wissenschaftlichem Werthe gemacht werden konnten, — als es mir gelang eine kleine historische Sammlung auf derselben anzulegen, — als mir einige Collegen und frühere Schüler in freundlicher Weise verwandte Arbeiten zur Publication übergaben, — als ich zu verschiedenen Vorträgen und historischen Arbeiten Veranlassung erhielt, die sich ebenfalls zur Aufnahme zu eignen schienen, — etc., erweiterte sich nach und nach das Gebiet meiner Mittheilungen, wenn auch der ursprüngliche Gegenstand immer noch dominirte. — Um nun auf den Inhalt dieser Mittheilungen einzutreten, so ist zunächst zu erwähnen, dass sie meine täglichen Zählungen der Sonnenflecken für die Jahre 1849—1875 geben, jeweilen für trübe Tage aus den Beobachtungsregistern der Herren Schwabe in Dessau, Weber in Peckeloh, Schmidt in Athen, etc., möglichst ergänzt, — früher je zwei Zahlen g und f, von denen die erste je die Anzahl der an dem betreffenden Tage sichtbaren Gruppen, die zweite aber die Anzahl der in diesen Gruppen auftretenden Flecken und Punkte gab, — später ausserdem noch die aus ihnen nach der Formel

$$r = k(g + 10 . f)$$

berechneten sog. Relativzahlen, wo k ein correspondirenden Beobachtungen entnommener, von Beobachter und Instrument abhängiger, für mich bei einem Vierfüsser mit 64facher Vergrösserung der Einheit gleicher Erfahrungsfactor ist, — sowie die Monats- und Jahresmittel dieser Relativzahlen. — Im Fernern geben die Mittheilungen in Verbindung mit der bis jetzt 343 Nummern zählenden Sonnenfleckenliteratur nicht nur die Belege für die oben erwähnten Aufzählungen, sondern auch eine Uebersicht aller mir zugänglichen älteren Beobachtungen der Sonnenflecken, — darunter viele Reihen früher nicht publicirter Aufzeichnungen, von welch letztern hier namentlich die Serien

Harriot	1611—1613	Heinrich	1781—1818
Kirch	1700—1748	Flaugergues	1788—1830
Plantade	1705—1726	Tevel	1816—1836
Hagen	1739—1751	Pastorff	1819—1833
Staudacher	1749—1799	Adams	1819—1823
Horrebow	1767—1776	Both	1825—1826
Mallet	1773—1777	Schwabe	1826—1848
Bode	1774—1822	etc.	

erwähnt werden mögen, welche ich theils durch meine Freunde und Mitarbeiter im Auszuge erhielt, theils durch Uebersendung der betreffenden Manuscripte selbst auszuziehen im Falle war. — Um die theils bereits früher gedruckten, theils von mir neu publicirten Reihen, welche doch immerhin (abgesehen von vielen brauchbaren Bemerkungen) für die Jahre 1749—1848 im Ganzen für volle 13424 Tage wirkliche Fleckenzählungen ergaben, zu einem homogenen Ganzen zu verarbeiten, leisteten die von mir schon 1850 eingeführten, bereits oben erwähnten Relativzahlen ausgezeichnete Hülfe, und es wurde mir möglich nicht nur für mehr als $2^1/_2$ Jahrhunderte alle Epochen der Maxima und Minima festzulegen, sondern auch für die zweite Hälfte dieser Zeit homogene mittlere Relativzahlen abzuleiten, und so z. B. die folgende Tafel zu erstellen:

Aeltere Reihe				Neuere Reihe				
Minima		Maxima		Minima		Maxima		Wellen-höhe
1610,8		1615,5		1745,0		1750,3		—
1619,0	8,2	1626,0	10,5	1755,2	10,2	1761,5	11,2	78,1
1634,0	15,0	1639,5	13,5	1766,5	11,3	1769,7	8,2	104,7
1645,0	11,0	1649,0	9,5	1775,5	9,0	1788,4	8,7	151,3
1655,0	10,0	1660,0	11,0	1784,7	9,2	1798,1	9,7	132,7
1666,0	11,0	1675,0	15,0	1798,3	13,6	1804,2	16,1	72,5
1679,5	13,5	1685,0	10,0	1810,6	12,3	1816,4	12,2	49,2
1689,5	10,0	1693,0	8,0	1823,3	12,7	1829,9	13,5	71,4
1698,0	8,5	1705,5	12,5	1833,9	10,6	1837,2	7,3	139,6
1712,0	14,0	1718,2	12,7	1843,5	9,6	1848,1	10,9	121,1
1723,5	11,5	1727,5	9,3	1856,0	12,5	1860,1	12,0	94,7
1734,0	10,5	1738,7	11,2	1867,2	11,2	1870,6	10,5	135,3
Mittel	11,20		11,20		11,11		10,94	104,60
	± 2,11		± 2,06		± 1,54		± 2,52	± 33,45

wo die unter Wellenhöhe eingeschriebene Zahl die Differenz der Relativzahlen des Minimums und Maximums ist, und die den Mittelwerthen in $\pm$ beigefügten Zahlen ihre, entsprechend den mittleren Fehlern berechneten *Schwankungen* geben. Das Gesammtmittel aller 44 Bestimmungen für die Länge der Periode beträgt

$$11{,}111 \pm 2{,}030$$

so dass für die mittlere Länge der Periode immer noch der 1852 erhaltene Werth zu Recht besteht, dagegen als neueres Ergebniss hinzutritt, dass derselbe in der einzelnen Erscheinung etwa zwischen

9,08 und 13,14

schwankt, wofür in der That auch noch die zuverlässigsten Bestimmungen der neuesten Zeit Belege bieten, da gerade jetzt ein Minimum entweder schon eingetreten ist oder in nächster Zeit eintreten wird, obschon seit dem letzten Minimum erst 9,3 Jahre verflossen sind, während dem Minimum von 1843 erst in 12,5 Jahren das Minimum von 1856 folgte. Für die mittlern Epochen für Minimum und Maximum erhält man aus dem zweiten Theile der Epochentafel

1810,53 und 1815,10

woraus hinwieder hervorgeht, dass durchschnittlich einem Minimum in $4^1/_2$ Jahren ein Maximum, diesem dagegen erst in $6^1/_2$ Jahren ein neues Minimum folgt, — also die Sonnenfleckencurve wesentlich rascher ansteigt als abfällt. — Die sich anlehnenden Untersuchungen über die in gewissen Zacken der Sonnenfleckencurve angedeuteten Gesetze, — über kleinere und grössere, z. B. gewissen Planetenjahren entsprechende, der Hauptperiode untergeordnete und muthmasslich ihre Schwankungen bedingende Perioden, — über die Möglichkeit die Sonnenfleckencurve durch eine Formel darzustellen, oder die sämmtlichen Epochen aus den Normalepochen abzuleiten, — etc. dürfte es genügen nur beiläufig zu erwähnen, da sie bis jetzt noch nicht zu abschliessenden Resultaten geführt haben; dagegen ist hervorzuheben, wie es mir 1859 nicht nur gelang nachzuweisen, dass der von Carrington bei dem Minimum von 1856 bemerkte, scheinbar sprungweise Wechsel in der heliocentrischen Breite der Flecken auch bei dem durch Böhm beobachteten Minimum von 1834 in ähnlicher Weise stattfand, sondern dass ich durch Zusammenstellung aller bekannt gewordenen Bestimmungen über die Rotationsdauer der Sonne dieses Gesetz mit dem durch Carrington und Spörer aufgefundenen Zusammenhang zwischen Breite der Flecken und Ergebniss für Rotationszeit in Verbindung brachte. — Von noch grösserer Bedeutung sind die fortgesetzten Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Häufigkeit der Sonnenflecken und der Grösse der täglichen Bewegungen der Magnetnadel. Namentlich gelang es mir von 1859 hinweg an vielfachen Beispielen zu zeigen, dass sich die mittlere magnetische Declinationsvariation v durch die einer einfachen Scalenreduction entsprechende Formel

$$v = a + b \,.\, r$$

aus der entsprechenden Sonnenfleckenrelativzahl r berechnen lasse, — dass in dieser Formel der Werth von b, wenigstens für das ganze mittlere Europa, nahe an 0,045 falle, a dagegen für verschiedene Orte wesentlich verschiedene Werthe besitze, so z. B. gegenwärtig für

Barnaoul	$a = 2',74$	München	$a = 6',56$
Berlin	6,64	Paris	9,28
Christiania	4,62	Peking	2,69
Göttingen	7,89	Petersburg	5,89
Kremsmünster	5,83	Prag	5,89
London	6,96	Toronto	7,72
Mailand	5,62	Wien	4,79
Mannheim	5,68	etc.	

betrage, — nahe wie wenn a von der Lage des betreffenden Ortes gegen den magnetischen Hauptpol abhängig wäre. — Ein von mir 1857 angelegter und seither durch meinen Collegen Fritz mit unsäglicher Mühe vervollständigter Nordlicht-Catalog ergab eine merkwürdige Bestätigung für das von mir schon 1852 vermuthete Zusammentreffen von Flecken- und Nordlicht-Häufigkeit, — während dagegen allerdings die Versuche, welche theils ich selbst, theils die Herschel, Gautier, Fritzsch, Köppen, Meldrum, Klein, etc. machten den Sonnenfleckenwechsel auch in den Erdtemperaturen, Regenmengen, Cyclonen, Cirruswolken, etc. nachzuweisen, bis jetzt nur theilweisen Erfolg hatten, aber doch immerhin zur genauern Kenntniss mehrerer Anomalien führten, die in der Folge eine nicht unbedeutende Rolle spielen dürften. — Noch könnte mehrerer in meinen Mittheilungen enthaltener Specialuntersuchungen über die zuweilen in der Richtung nach der Sonne hin sichtbaren sog. Lichtflocken, über die Durchgänge anderer fremder Körper durch die Sonne, etc. gedacht werden; es ist jedoch, wenn dieser Rückblick nicht eine unerlaubte Länge erhalten soll, an der Zeit das Hauptgebiet zu verlassen, und noch einiges Andere kurz zu erwähnen, das ebenfalls Gegenstand meiner Mittheilungen bildete: Bei Anlass des 1863/4 erfolgten Bezuges der neuen eidgen. Sternwarte gab ich eine kurze Geschichte der ältern Sternwarten Zürichs, und beschrieb den Neubau, sowie seine Ausrüstung; seither fügte ich von Zeit zu Zeit Bruchstücke eines räsonnirenden Verzeichnisses der durch Ankauf und Schenkung bereits nicht unbedeutend gewordenen Sammlung von Instrumenten,. Apparaten und Abbildungen bei, das für Liebhaber der Geschichte nicht ohne Interesse sein dürfte. Letztere finden auch in den Mittheilungen ziemlich ausgedehnte historische Studien über die Herschel, Zach, Schwabe, Schweizer, — über den immerwährenden Kalender Regiomontans, die sog. Prostaphäresis, den Bürgi'schen Canon Sinuum, die Erfindung der Mikrometer, Transversalen, Vernier's und Pendeluhren, etc. — während sich die praktischen Astronomen an die vorläufigen Mittheilungen über die geographische Lage der Sternwarte halten können, ferner an die im Detail gegebenen Untersuchungen über den Einfluss der Ocularstellung und Fadenbeleuchtung auf die Personalgleichung, an die Beschreibung des Hipp'schen Pendels und seinen Gebrauch zur Bestimmung der Personalcorrection, etc., — und die zahlreichen Freunde der Hypsometrie mehrere Vergleichungsreihen gewöhnlicher Barometer und Aneroide finden, welche ihnen Aufschluss über die Constanz der Letzteren und ihr Verhalten auf Bergreisen geben. — Zum Schlusse habe ich noch beizufügen, dass die Mittheilungen ausser meinen eigenen und den bereits erwähnten Arbeiten von Fritz auch noch einige andere Einsendungen enthalten, so namentlich mehrere einlässliche Studien von Weilemann über die Refraction und über die Beziehungen zwischen Barometerstand, Temperatur und Höhe in der Atmosphäre, — und eine längere Arbeit von W. Meyer über die Geschichte der Messung und Berechnung der Doppelsterne, die zugleich eine Reihe von ihm am Zürcher Refractor ausgeführter Bestimmungen enthält. Ueber verschiedene grössere, und ziemlich wichtige Resultate versprechende Untersuchungen, die ich schon seit einiger Zeit theils zur weiteren Verwerthung meines Sonnenflecken- und Variations-Materiales, theils zur Ausnutzung längerer Beobachtungsreihen am Zürcher Meridiankreise, in Arbeit genommen und für eine neue Decade der Mittheilungen bestimmt habe, werde ich, so Gott will, später Bericht erstatten.

Zürich. Rudolf Wolf.

Carlo Malagola: Dei documenti trovati ultimamente intorno la dimora di Nicolò Copernico in Bologna.

. . . .

. . . Una parte dei documenti, che io scopersi nell' Archivio di famiglia del Sigr. Conte Comm. Giovanni Malvezzi de' Medici, Senatore del Regno, riguarda il sommo Copernico, l'altra le persone che con lui ebbero relazione in Bologna, e massime il fratel suo Andrea, lo zio materno Luca Watzelrode, vescovo di Warmia e singolar protettore dell' astronomo immortale, Alberto Bischoff e Fabiano de Lusianis, canonici varmiensi e colleghi di Nicolò, Erasmo de Beke, egli pure canonico di Warmia, Scipione dal Ferro, maestro di aritmetica e geometria nel nostro famosissimo Studio, e l'astronomo Domenico Maria Novara, il nome del quale è strettissimamente congiunto a quello dello scopritore del vero sistema dell' Universo.

Il periodo di tempo che il celebre polacco passò in Italia, e massimamente in Bologna, rimase sino ad ora pieno di forti incertezze e di oscurità, perchè non conoscendosi di quello che tre notizie autentiche, gli scrittori furon costretti a vagare sopra supposizioni. Ora l'essere stati i documenti scoperti da me i primi che siensi trovati intorno all' immortale astronomo in Italia, è ciò che da loro una qualche importanza, la quale è forse accresciuta dalle molte notizie su quel tempo della vita del Copernico, in cui fu allo Studio di Bologna, che possono ricavarsi da questi documenti, interpretandoli cogli statuti del 1491 della *Nazione* Allemanna presso il nostro Studio, alla quale Nicolò appartenne. Appunto per questo il Prof. Massimiliano Curtze, illustre scrittore, ed editore delle opere del grande torunese, annunziando all' Imp. Società Copernicana di Scienze ed Arti di Thorn, in Prussia, la scoperta di questi documenti, giudicava che apportassero tal copia di notizie sul periodo sopradetto, quale non avemmo sinora di nessun altro della vita di questo grand'uomo. Tra le molte notizie di lui, non prima conosciute, mi sembrano da notare queste principalmente:

1º) che Nicolò già si trovava nella nostra città nell 1496, mentre prima non s'aveva memoria di lui in Bologna che del 1497;

2º) che in questa nostra città nel 1496 si ascrisse alla Nazione Allemanna e che perciò diede opera nel nostro Studio alle leggi, dovendo quelli che vi si aggregavano essere in forza degli statuti, „*in hac alma urbe studentes in iure canonico vel civili*“;

3º) che il Copernico in Bologna non fu laureato dottore di Diritto Canonico, siccome da molti si è creduto. Tralascio di annoverare le molte altre cose principali giacchè anche di esse parlerò diffusamente ove pubblicherò i citati documenti intorno a Nicolò Copernico. Gli altri che più sopra ricordai, porgono molte e sicure notizie delle persone che in Bologna ebbero relazione col Copernico, di alcune delle quali si aveva appena memoria, di altre neppure era conosciuto il nome.

Ho pur cercato di dare, nel libro dove stamperò questi documenti, un idea di Bologna alla fine del secolo XV., ed anche volli aggiungere nuove notizie sull' ellenismo in Bologna sino a tutto il secolo XVI, e la storia della *Nazione* Allemanna dal 1200 in poi alla quale appartenne il fiore degli illustri Tedeschi di quel tempo. Fra essi, a cagione d' esempio, voglio ricordare il Cardinale Nicolò da Cusa (di cui produrrò in luce le autentiche memorie, che potei rinvenire) stimato il predecessore del Copernico nell' idea del moto della terra. Il libro dove usciranno in luce tutti questi documenti insieme a molti altri che riguardano Bartolomeo Barbazza, Nicolò Leoniceno, il Beroaldo seniore, Gian Battista Guarino, Francesco Filelfo e Antonio Urceo Codro (del quale anche trovai volgarizzamenti inediti dal greco e molte edizioni di opere rarissime e sconosciute) sarà fra breve pubblicato dagli editori bolognesi Fava e Garagnani in un volume di più che 500 pagine in 8º al prezzo di L 12, col titolo *„Della Vita e delle Opere di Antonio Urceo Codro, maestro di greco in Bologna a Nicolò Copernico"*.

Bologna. Carlo Malagola.

Conte Nerio Malvezzi: Lettere d' illustri astronomi (Kepler, Tycho Brahé etc.) trovate in Bologna.

Nell' Archivio di mio padre Conte Giovanni Malvezzi de' Medici, Senatore del Regno, trovai un fascicolo contenente moltissime lettere dirette da celebri astronomi nel finire del sedicesimo, e sul principiare del diciassettesimo secolo a Giovanni Antonio Magini padovano e professore per molti anni nella Università di Bologna. Non occorreranno molte parole a dimostrare l'importanza per la storia dell' astronomia delle lettere rinvenute, poichè a ciò bastano i nomi dei loro autori, Tycho Brahé, Kepler, Scheiner, Malcot, Van Roomen, più conosciuto sotto il nome di Adriano Romano, Cristoforo Clavio, Giovanni Lheureux noto col nome di Macario, Muzio Oddi, Francesco Stelluti, Altobelli, Finck, e molti altri illustri scienziati e matematici italiani, tedeschi inglesi di quei tempi.

Alcune lettere contengono figure geometriche, e tra le altre quelle di Muzio Oddi, e dello Stelluti, ed in parecchie si leggono lunghi calcoli astrologici ed astronomici.

Le lettere di Tycho Brahé sono assai lunghe e contengono interessanti particolari della sua vita privata e scientifica. Una di esse dev' essere tra le ultime dettate dall' astronomo, poichè porta la data del 1601, anno in cui avvenne la morte di lui in Praga.

Le lettere di Kepler meritano molta attenzione in quanto chiariscono alcuni punti della sua vita famigliare. Esse furono scritte nel 1610, allorquando il sommo astronomo aveva terminati gli studi sovra il pianeta Marte, e stava lavorando col valido sussidio delle carte e degl' istrumenti del celebre Tycho alla compilazione delle tavole rodolfine.

Noterò che se le lettere Kepleriane non varranno ad accrescere la fama del loro autore, che già pervenne alla massima altezza, gioveranno al maggiore onore dell' astronomo padovano, e quindi della Università bolognese in cui questi per ben ventinove anni lesse astronomia. Imperocchè Kepler chiese a lui molti consigli nella compilazione della sua opera sopra Marte, e sembra ancora la inviasse a Bologna. „Obsecro propter nostra studia" scrive Kepler al Magini, „ut eadem lima totum (opus) percurras" e finisce la lettera dicendo: „vale, vir celeberrime, et perge censendo mihi prodesse". Queste parole, pure considerando lo stile ampolloso del seicento, bastano a provare in quanta stima fosse dal sommo scienziato tenuto il nostro Magini. Si può parimente confermare nel modo più sicuro ciò che scrisse il Weidler, nella sua Historia Astronomica, intorno all' invito fatto da Kepler al Magini di andare in Germania ad aiutarlo nella compilazione delle tavole rodolfine. Si può argomentare che Kepler avesse avuto in animo di far stampare qualche sua opera a Bologna, e certamente che viveva in grandissima penuria. Spesso egli insiste sulle difficoltà della vita, che a lui tolgono, come esprimesi, la tranquilla serenità della mente. E ben si comprende come di essa non potesse godere, se, come egli scrive, fortemente pativa di fame! Aggiungerò che presso le lettere Kepleriane stanno le bozze delle risposte del

Magini; fortunata combinazione che aiuterà a meglio chiarire le relazioni corse tra i due scienziati, tanto più che nell' opera di Hansch „Epistolae ad Kepplerum etc. Lipsiae 1718" non trovasi alcuna lettera del Magini.

Una lettera del dotto Scheiner da Ingolstadt 1613 tratta della famosa questione di priorità agitata tra lui e Galileo sopra la scoperta delle macchie solari, e si rileva che il Magini prese le parti di Scheiner.

Le lettere di Cristoforo Clavio accennano alle fiere dispute che questi ebbi collo Scaligero, che viene chiamato „arrogantissimo nelle sua falsità".

Interessantissima è una lettera di Muzio Oddi, del valentissimo ed infelice geometra, ed elegante scrittore, che passò tanti anni in carcere nel castello di Pesaro, e mai cessò tra le angoscie della prigionia gli studii. La lettera è del 1609 anno in cui il carcere fu mutato in esiglio ed andò ad insegnare matematiche a Milano. Scrive gli: „Giunsi finalmente a Milano, luogo del mio confino, „dove con la grazia d'Iddio pare che l'aria mi conferisca, e tut„tavia mi pare di ripigliare forze e migliorar la complessione. „Vedrò se posso ordinare un poco le cose mie e buscar un poco „di quiete d'attendere colle matematiche di passare questo esiglio „con manco travaglio di quello che forse alcuni hanno creduto".

La lettera dell' eruditissimo Francesco Stelluti di Fabriano, tra i primi ammesso nella Academia de' Lincei, quelle del Malcot, l'amico di Kepler, quelle del celebre Adriano Romano e di tutti gli altri matematici saranno certo di valido soccorso alla storia dell' astronomia.

Io già ebbi l'onore di annunziare alla Regia Deputazione di Storia Patria la scoperta di tanti preziosi documenti. Ora attendo alla loro pubblicazione, sperando di fare cosa grata agli studiosi di scienze matematiche, ed ho fede che non sarà per mancarmi l'appoggio dei dotti tedeschi, ed anzi invoco per il mio lavoro il sussidio validissimo della loro dottrina.

Bologna. Conte Nerio Malvezzi.

S. Günther: Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla geometria assoluta di Bolyai. Traduzione dal Tedesco di Alfonso Sparagna. (Giornale di Matematiche diretto dal Prof. G. Battaglini, Vol. XI. p. 1—11.)

Man weiss, dass in der Pangeometrie von Lobatschewsky und Bolyai an die Stelle der Ebene die „Grenzfläche", an diejenige der Geraden die „Grenzlinie" tritt, und dass ein aus drei Grenzlinien gebildetes Dreieck die Winkelsumme 180^0 besitzt. Der Unterschied zwischen Ebene und Grenzfläche liegt, wie nicht minder bekannt, in dem Umstande, dass erstere „umkehrbar ist", letztere dagegen nicht. Es wird nun hier direkt der Nachweis zu führen gesucht, dass mit Zugrundelegung der Definition „die Grenzfläche ist eine Kugelfläche von unendlich grossem Radius" unmittelbar jene Eigenschaft eines Grenzliniendreiecks, aber zugleich im nämlichen Augenblicke die Umkehrbarkeit der Grenzfläche, d. h. ihre Identität mit der Ebene, erhalten werde.

Nach Voraussendung einer historischen Einleitung, welche besonders an einen in ganz ähnlichem Sinne gehaltenen Beweis von Baltzer (Grunert's Archiv, Bd. XVI. S. 129) erinnert, wird auf einer Kugelfläche ein gleichseitiges Dreieck abgesteckt, was ohne alle Voraussetzungen möglich ist. Durch diese drei Punkte lassen sich unendlich viele Kugeln hindurchlegen, und die Mittelpunkte all dieser Kugeln liegen auf einer Curve; dass dies eine Gerade, kommt nicht einmal in Betracht, sondern lediglich der Umstand, dass, wenn von einem beliebigen Punkte der Curve nach entgegengesetzten Richtungen fortgegangen wird, die Vereinigung in dem Einen unendlich entfernten Punkt der Linie erfolgen muss. Indem dann noch der Begriff des Winkels und seines Drehsinnes in einer den speciellen Verhältnissen der Aufgabe angepassten Weise definirt ist, lässt sich zeigen: Der ursprünglich positive Winkel des gleichseitigen Kugeldreiecks wird immer kleiner, je weiter das Kugelcentrum auf der vorhin erwähnten Curve hinausrückt, erscheint aber das Centrum auf der der Anfangsrichtung entgegengesetzten Seite, so ist nunmehr der Winkel negativ. Da nun im sphärischen Dreieck die Winkelsumme $= 180^0 + \varepsilon$, so ist im Dreieck von drei gleichen Seiten und Winkeln ein Winkel $= 60^0 + \frac{\varepsilon}{3}$; dieser Excess ε ist auf der einen Seite abnehmend positiv, auf der anderen zunehmend negativ, muss also durch Null hindurchgehen. In dem Momente aber, wo dies geschieht, liegt das variable Centrum im Unendlichen, die Kugelfläche verwandelt sich in die Grenzfläche, deren zwei Seiten aber bei der Congruenz des positiv und negativ unendlich entfernten Punktes ebenfalls congruiren müssen, die drei Seitenkreise gehen über in Grenzlinien, und es ist somit der Beweis geführt, dass der Grenzfläche der nichteuclidischen und der Ebene der euclidischen Geometrie die nämliche Fundamentaleigenschaft zukommt. Was für ein einziges Individuum gilt, ist aber nach den Ergebnissen Legendre's für jedes willkürliche Dreieck richtig.

Benützt wurde bei der oben angedeuteten Entwicklung einzig und allein eine Formel der sphärischen Trigonometrie; man weiss, dass sämmtliche Relationen dieser Disciplin von dem Parallelen-Axiom vollkommen unabhängig sind.

Amberg. S. Günther.

S. Günther: Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten. (Arch. d. Math. u. Phys. Th. 59. S. 130—146.)

Die bekannten Zerlegungssätze von Laplace und Jacobi werden hier in elementarerer und umfassenderer Weise abgeleitet, als dies gewöhnlich geschieht. Handelt es sich zunächst darum, die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ in ein Aggregat von zweigliedrigen Produkten zu zerfällen, so dass der eine Faktor eine Unterdeterminante vom $p$ten, der andere eine solche vom $(n-p)$ten Grade ist, so müssen zwei arbiträre Bedingungen aufgestellt werden. Hält man daran fest, dass die erste Colonne $a_{1,1} a_{2,1} \ldots a_{n,1}$ diesen ihren Platz auch in der ersten Faktor-Determinante jedes Einzelproduktes behaupten und dass als erstes Glied der Zerlegung, wie es üblich ist, $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{p,p} \times \Sigma \pm a_{p+1,\,p+1} a_{p+2,\,p+2} \ldots a_{n,n}$ angesehen werden soll, so gelangt man zu einem anscheinenden neuen Satze, welcher sich in Form nachstehender Identität aussprechen lässt:

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$$
$$= \underset{(s_l = l+1,\; l+2 \ldots n-p+1)}{\Sigma} (-1)^{\left[\frac{2+3p-p^2}{2} + \sum_{i=1}^{i=p-1} s_i\right]} \times$$
$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,s_1} \ldots a_{p,s_{p-1}} \times \Sigma \pm a_{p+1,2}\, a_{p+2,3} \ldots a_{n,n}$$

$$+\Sigma(-1)^{\left[\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{k=n-p-1} s_k\right]} \times$$
$$\Sigma \pm a_{p+1,1}\, a_{p+2,t_1} \ldots a_{n,t_{n-p-1}} \times \Sigma \pm a_{1,2}\, a_{2,3} \ldots a_{p,n}.$$

Die hier noch gebliebene Beschränkung betreffs der constanten ersten Vertikalreihe lässt sich leicht fortheben, indem man nur die Determinante, deren Vorzeichen bestimmt werden soll, mit einer in der Normalform $\Sigma \pm a_{I,I}\, a_{II,II} \ldots a_{N,N}$ vorgelegten Hülfsdeterminante vergleicht. Zum Schluss wird noch gezeigt, wie man sich bei der allgemeinen Zerlegung einer Determinante in eine Summe aus Produkten von beliebig vielen Unterdeterminanten zu verhalten habe, und dass die hiebei zur Anwendung kommende combinatorische Methode die richtige sei, erhellt u. a. auch daraus, dass die daraus resultirenden Formeln für die Anzahl der bei der Zerlegung auftretenden Aggregatglieder mit den von Jacobi zum gleichen Zwecke gegebenen übereinstimmen.

Amberg. S. Günther.

L. Koenigsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot.

Die mir von Frau Geheimräthin Richelot übertragene Durchsicht der Papiere des verstorbenen ausgezeichneten Mathematikers F. Richelot hat mich erkennen lassen, dass es den vielen Schülern und Verehrern jenes um die Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Deutschland so hochverdienten Mannes gewiss nicht unerwünscht und für den Fortschritt der Mathematik durch Anregung zu weiteren Untersuchungen sicher zweckmässig sein würde, von der grossen Anzahl einzelner von Richelot angestellter Untersuchungen, die meistens bei der Lectüre der Arbeiten anderer Mathematiker entstanden oder zum Zwecke der Vorlesungen ausgearbeitet worden, fortlaufende Referate mit genauer Angabe der benutzten Methoden und gefundenen Resultate in dieser Zeitschrift zu veröffentlichen, während ich möglicher Weise, wenn es meine Zeit gestatten wird, später durch Unterstützung von Seiten jüngerer Kräfte in der Lage sein werde, grössere Veröffentlichungen von Vorlesungen, die in vielfachen und verschiedenartigen Ausarbeitungen vorliegen, als Lehrbücher der analytischen Mechanik, Variationsrechnung etc. zu bewerkstelligen.

I. *Geometrische Interpretation der Transformation des elliptischen Integrales erster Gattung auf die Normalform.*

Werden die Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ mit

$$a + a_1 i, \quad b + b_1 i, \quad c + c_1 i, \quad d + d_1 i$$

bezeichnet und durch die entsprechenden Punkte A, B, C, D im z-Gebiete dargestellt, so führt bekanntlich die Substitution

$$\zeta = \frac{A - C}{B - C} \frac{B - z}{A - z}$$

auf die Gleichung

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{R(z)^{\frac{1}{2}}} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{[(D - B)(C - A)]^{\frac{1}{2}} [\zeta(1 - \zeta)(1 - k^2\zeta)]^{\frac{1}{2}}},$$

worin

$$k^2 = \frac{B - C}{A - C} \cdot \frac{A - D}{B - D}$$

ist. Es kommt darauf an, den analytischen Modul von ζ zu bestimmen, woraus sich dann unmittelbar, wenn $z = D$ gesetzt wird, der analytische Modul von $\frac{1}{k^2}$ ergibt; nun sieht man aber, dass, wenn der die Grösse z repräsentirende Punkt mit Z bezeichnet wird,

$$\text{mod.}\ \zeta = \frac{AC}{BC} \frac{BZ}{AZ} = \frac{\frac{BZ}{AZ}}{\frac{BC}{AC}}$$

wird, und aus dieser Form von mod. ζ lässt sich leicht ein geometrisches Criterium dafür ableiten, ob diese Grösse kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist. Denn denkt man sich A und B durch eine Grade verbunden, so ist bekanntlich ein Kreis, dessen Durchmesser in dieser Linie liegt, der geometrische Ort der Punkte Z, für welche das Verhältniss $\frac{BZ}{AZ}$ der Entfernungen desselben von A und B constant ist und es wird dieses constante Verhältniss von Null durch die Einheit bis Unendlich zunehmen, wenn der Kreis sich von dem Punkte B an zu dem unendlichen Kreise, welcher die in der Mitte von AB errichtete Grade ist, erweitert und von da an bis zum Punkte A hin zusammenzieht, und daher mod. ζ von Null durch $\frac{AC}{BC}$ bis Unendlich stetig wachsen. Dasselbe leitet Richelot auch unmittelbar aus dem analytischen Ausdrucke für ζ ab, indem er bemerkt, dass, wenn $z = x + yi$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\{(a-x)^2+(a_1-y)^2\}\{(b-c)^2+(b_1-c_1)^2\}(\mathrm{mod.}\,\zeta)^2$$
$$-\{(b-x)^2+(b_1-y)^2\}\{(a-c)^2+(a_1-c_1)^2\}=0$$

für ein constantes ζ die Gleichung eines Kreises ist, welcher mit den beiden Punkten, dessen Coordinaten $x=a$, $y=a_1$; $x=b$, $y=b_1$ die ideale Secante

$$0=(a-b)\left\{x-\frac{a+b}{2}\right\}+(a_1-b_1)\left\{y-\frac{a_1+b_1}{2}\right\}$$

gemeinschaftlich hat.

Die Entscheidung der Frage, ob mod. ζ kleiner, gleich, grösser als die Einheit ist, wird sich nun leicht treffen lassen. Zieht man nämlich die zu den Punkten A und B gehörige ideale Secante, so kann der Kreis, der durch C geht und den Richelot den Einheitskreis nennt, entweder rechts oder links von derselben liegen oder diese selbst ist als ein solcher anzusehen; liegt nun der Punkt Z im ersten Falle innerhalb, auf oder ausserhalb des Einheitskreises, so ist mod. ζ resp. kleiner, gleich, grösser als die Einheit; dasselbe findet im zweiten Falle statt, wenn Z ausserhalb, auf oder innerhalb des Einheitskreises liegt und im dritten Falle, wenn Z rechts von MN, auf MN, links von MN sich befindet. Nun ist ferner mod. $\frac{1}{k^2}$ derjenige Werth von mod. ζ, welcher zu dem Punkte D gehört, und es ist daher leicht zu entscheiden, wann mod. $\frac{1}{k^2}\lesseqgtr 1$ ist, wenn man nur dasselbe Criterium, das für Z benutzt wurde, auf D anwendet; zugleich ersieht man hieraus, wie man es durch geeignete Wahl des Punktes C oder D, als zum Einheitskreise gehörig, einrichten kann, dass mod. $\frac{1}{k^2}$ respective zu D oder C gehörig, nicht ein ächter Bruch also mod. $k^2\leqq 1$ wird.

Wenn die Anzahl der Punkte $A, B, C, D \ldots H$ ganz beliebig ist, so sieht man für den Fall, dass man von der Transformation

$$\zeta=\frac{A-P}{B-P}\cdot\frac{B-Z}{A-Z}$$

ausgeht, in welcher P einer der Punkte $C, D, \ldots H$ ist, dass man für P nur denjenigen Punkt zu wählen hat, der die Eigenschaft hat, dass der durch ihn laufende, zur Schaar der Kreise, welche die Linie MN zur gemeinschaftlichen idealen Secante haben, gehörige Kreis, dem Punkte B am nächsten liegt, in der Art dass zwischen ihm und B keiner der zu den andern Punkten zugehörigen Kreise liegt. Dies Resultat hält Richelot aus dem Grunde für „ein nicht unwichtiges", weil die Berechnung des Integrales

$$\int_B^P \frac{F(z)\,dz}{\{(z-A)(z-B)(z-C)\ldots(z-H)\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $F(z)$ eine ganze rationale Function von z ist, durch *eine* convergente Reihe und die Reduction dieses Integrales auf die Form

$$\int_0^\zeta \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\{\zeta(1-\zeta)(1-k_1^2\zeta)(1-k_2^2\zeta)\ldots\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo mod. $k_1^2 \leqq 1$, mod. $k_2^2 \leqq 1$, ... und $\varphi(\zeta)$ eine rationale Function von ζ ist, davon abhängen.

Die Anwendungen dieser Resultate auf den Fall von nur reellen Lösungen des Polynoms vierten Grades $R(z)$ sind zu einfach und zu bekannt, als dass eine Hervorhebung derselben nöthig erscheinen sollte.

II. *Conforme Abbildung des Integrales*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$$

für beliebige $\varkappa^2$.

„Im 45. Bande des Crelle'schen Journals habe ich gezeigt, wie „eine jede reelle oder imaginäre Grösse in der Form

$$\sin\operatorname{am}(u+iv,\,\varkappa)$$

„unzweideutig dargestellt wird, falls $\varkappa$ ein positiver ächter Bruch „ist; dieselbe Aufgabe für ein beliebiges $\varkappa$ hat Heine in einer Ab„handlung im 53. Bande desselben Journals behandelt, welche den „Titel führt: Reduction der elliptischen Integrale auf ihre kanonische „Form. Wenn ich im Folgenden auf diesen Gegenstand zurück„komme, so wird die Einfachheit der Darstellung und seine An„wendung auf die zur Begründung der Theorie der elliptischen „Functionen erforderliche conforme Abbildung des elliptischen Inte„grales es entschuldigen."

Diese einleitenden Worte Richelots und die Ausarbeitung, von der ich im Folgenden ein gedrängtes Referat gebe, sind in den Osterferien des Jahres 1872 niedergeschrieben.

Sei

$$z = x + yi, \quad w = u + vi, \quad \varkappa^2 = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$1-\varkappa^2 = \varkappa_1^2 = \sigma(\cos\beta - i\sin\beta),$$

worin

$$-\pi \leqq \alpha < \pi, \qquad -\pi \leqq \beta < \pi$$

ist, ferner

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}\,, \qquad K_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa_1^2 z)}}\,,$$

bei denen der Integrationsweg durch positive ächte Bruchwerthe von $\sqrt{z}$ führen soll, so sieht man aus Betrachtungen, wie sie aus der Theorie der complexen Integrale geläufig sind, dass während w in dem Integrale

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}} = w$$

von 0 bis K geht, z das Stück der positiven Abscissenaxe von 0 bis 1 durchlaufen wird, und dass einem Fortschreiten der Variabeln w von 0 bis iK_1 die ganze negative x-Axe als Bildcurve zugehört. Verändert sich jedoch w so von K bis $K + iK_1$, dass $u = K$ bleibt, und v von 0 bis K_1 so stetig fortgeht, dass $\sin\operatorname{am}(v, \varkappa_1)$ durch positive ächte Bruchwerthe stetig von 0 bis 1 wächst, so wird die entsprechende z-Linie der durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - x + y\,\frac{(1 - \varrho\cos\alpha)}{\varrho\sin\alpha} = 0$$

definirte Kreis sein, welcher durch die Punkte

$$x = 0\,,\ \ y = 0\,;\ \ x = 1\,,\ \ y = 0\,;\ \ x = \frac{\cos\alpha}{\varrho}\,,\ \ y = -\frac{\sin\alpha}{\varrho}$$

hindurchgeht.

Verändert sich endlich w stetig so von $K + iK_1$ bis iK_1, dass $v = K_1$ bleibt, und u von K bis 0 so abnimmt, dass $\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$ durch positive ächte Bruchwerthe von 1 bis 0 stetig abnimmt, so wird der entsprechende Punkt im xy-Gebiete vom Punkte $x = \frac{\cos\alpha}{\varrho}$, $y = -\frac{\sin\alpha}{\varrho}$ bis unendlich in einer Graden fortschreiten, die rückwärts verlängert durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, und es ist aus der allgemeinen Abbildungstheorie bekannt, dass das ganze so begrenzte xy-Gebiet in jeder Stelle mit Ausnahme der vier Ecken conform durch das bezeichnete endliche Curvenviereck im uv-Gebiete abgebildet ist.

Es erübrigt noch die durch $w = u + vi$ bezeichneten Integrale für alle vier Seiten der gefundenen Figur in geeigneter Form zu entwickeln, wobei man sich leicht überzeugt, dass dies im Wesentlichen nur auf die *eine* Aufgabe zurückkommt, das Integral

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varrho\, e^{\pm i\alpha} z)}} = w$$

für einen durch positive ächte Bruchwerthe stetig fortlaufenden Integrationsweg und für $0 < \alpha < \pi$ zu bestimmen. Richelot setzt nämlich, um das vorgelegte Integral in die Form

$$U \pm i U'$$

zu bringen, worin U und U' reell bleiben, so lange z ein positiver ächter Bruch ist,

$$1 - \varkappa^2 z = -\varrho e^{i\alpha} z = r(\cos\psi - i\sin\psi)$$

oder, wenn man von dem speciellen unmittelbar zu behandelnden Falle $\alpha = 0$ absieht,

$$z = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\sin\psi}{\sin(\alpha+\psi)}\,,$$

woraus sich nach leichter Rechnung, wenn $\alpha > 0$ angenommen wird,

$$\frac{1}{2}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\left(\cos\frac{\psi}{2} + i\sin\frac{\psi}{2}\right)d\psi}{\sqrt{\sin\alpha\,.\,\sin\psi\,.\,\sin(\alpha+\psi)\,.\,\sin(\beta-\psi)}} = U + iU'$$

ergibt, während der Fall $\alpha < 0$ sich auf diesen zurückführen lässt, wenn man nur statt der drei Grössen α, β, ψ drei andere Grössen $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\psi'$ einführt.

Die Integrale

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\sin\alpha\,.\,\sin\psi\,.\,\sin(\alpha+\psi)\,.\,\sin(\beta-\psi)}}$$

$$U' = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^\psi \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\sin\alpha\,.\,\sin\psi\,.\,\sin(\alpha+\psi)\,.\,\sin(\beta-\psi)}}$$

sollen nun in eine zu ihrer Berechnung geeignete Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke setzt Richelot

$$\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\psi}{2}\right)}} = \sin\varphi$$

und erhält durch eine geschickte, mit Hülfe logarithmischer Differenziation angestellte Substitutionsrechnung, nachdem

$$\varkappa^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \varkappa_1{}^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\lambda^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad \lambda_1{}^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\mu^2 = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad \mu_1{}^2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

gesetzt worden, worin, weil $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ ist,

$$0 < \mu^2 < \lambda^2 < \varkappa^2 < 1,$$

das folgende Resultat

$$U = \sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^{\varphi}\frac{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}$$

$$U' = \sqrt{\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt[4]{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}$$

Ebenso erhält man, da eine Vertauschung der Grössen α und β die drei Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 in $\mu_1{}^2$, $\lambda_1{}^2$, $\varkappa_1{}^2$ überführt,

$$\frac{1}{2}\int_0^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\sigma e^{\pm i\beta}z)}} = U_1 \pm i\,U_1{}',$$

worin

$$U_1 = \sqrt{\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2\sigma\cos\beta+\sigma^2}}\int_0^{\varphi_1}\frac{(1-\lambda_1{}^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu_1{}^2\sin^2\varphi)(1-\lambda_1{}^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa_1{}^2\sin^2\varphi)}}$$

$$U_1' = \sqrt{\frac{\sin^3\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt[4]{1-2\sigma\cos\beta+\sigma^2}}\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-\mu_1{}^2\sin^2\varphi)(1-\lambda_1{}^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa_1{}^2\sin^2\varphi)}},$$

worin φ_1 und ψ_1 durch eine Gleichung zusammenhängen, die aus der obigen zwischen φ und ψ unmittelbar herzuleiten ist.

Setzt man endlich noch die ursprüngliche Variable

$$z = \sin^2\chi,$$

so folgt aus den obigen Substitutionsformeln

$$\sin\chi = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\sin\varphi\sqrt{\frac{1-\lambda^2\sin^2\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

wobei hervorzuheben dass

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}} = \frac{\mu}{\lambda},$$

somit die ganze Transformation in $\varkappa$, λ, μ ausgedrückt ist, und wir erhalten daher, wenn $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 positiv angenommen werden,

$$\int_0^\chi\frac{d\chi}{\sqrt{1-\varrho e^{\pm i\alpha}\sin^2\chi}}$$

$$= \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\int_0^\varphi\frac{\left(1-\lambda^2\sin^2\varphi \pm i\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)}}$$

Diese Formeln liefern nun Richelot unmittelbar die Gleichungen der transcendenten Curven, welche die Bilder der genannten Begrenzungsstücke sind. Dem Begrenzungsstück von $x = 0$, $y = 0$ bis $x = 0$, $y = 1$ nämlich entspricht das Bild, welches für positive φ-Werthe durch die Gleichungen

$$u = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}}\int_0^\varphi\frac{(1-\lambda^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{D\varphi}$$

$$v = \pm\frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}{\sqrt{\varrho}}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{D\varphi}$$

bestimmt ist, wenn

$$D\varphi = \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi)(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)(1 - \mu^2 \sin^2\varphi)}$$

gesetzt wird.

Dem Begrenzungsstück von $x = 0$ bis $x = -\infty$ entspricht das Bild, dessen Gleichungen sind,

$$u = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1{}^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\mu_1 \lambda_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1\varphi},$$

wenn man

$$D_1\varphi = \sqrt{(1 - \varkappa_1{}^2 \sin^2\varphi)(1 - \lambda_1{}^2 \sin^2\varphi)(1 - \mu_1{}^2 \sin^2\varphi)}$$

setzt.

Zu dem oben bezeichneten Kreisbogen gehört als Bild das Begrenzungsstück

$$u = \frac{\mu}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D\varphi} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \lambda_1{}^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1{}^2 - \lambda_1{}^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1\varphi}.$$

Endlich entspricht dem Stück der genannten unendlichen Graden das Bild, dessen Gleichungen

$$u = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varrho}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D\varphi} + \frac{\mu}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \lambda_1{}^2 \sin^2\varphi)\, d\varphi}{D_1\varphi}$$

$$v = \pm \frac{\varkappa\lambda\sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\varrho}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D\varphi} \pm \frac{\mu_1 \lambda_1 \sqrt{\mu_1{}^2 - \lambda_1{}^2}}{\sqrt{\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{D_1\varphi}.$$

Es würde noch erübrigen, nicht bloss, wie bisher geschehen, u und v für die Grenze des Flächenstückes sondern für jeden Punkt innerhalb derart zu bestimmen, dass

$$z = x + yi = \sin^2 \operatorname{am}(u + vi, \varkappa)$$

ist.

„Diese Aufgabe hat nun Heine in der angeführten Abhand-„lung gelöst und zugleich für ein anderes Gebiet, nicht für das „xy-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin^2 \operatorname{am}(u + vi, \varkappa)$$

„sondern für das xy-Gebiet, wenn

$$x + yi = \sin \operatorname{am}(u + vi, \varkappa)$$

„gegeben ist, jene vier Grenzlinien direct bestimmt. Es sind die „positive y-Halbaxe, die positive x-Halbaxe von $x = 0$ bis $x = 1$, „der Bogen einer bestimmten Lemniscate und eine von

$$x + iy = \frac{1}{\varkappa} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\varrho}$$

„in's Unendliche laufende Grade, die rückwärts verlängert durch „den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Wenn man in unsern „früheren Begrenzungsstücken $x + yi$ für $\sqrt{x + yi}$ also

$$x^2 - y^2 \text{ für } x$$
$$2xy \text{ für } y$$

„einführt, so gelangt man in der That zu den Heine'schen."

Dresden. L. Koenigsberger.

Anmerkung zu dem Referate S. 138.

Die Erweiterung des dort erwähnten Jacobi'schen Satzes ist, wie ich erst später gefunden habe, in anderer Fassung und mit andersartigem Beweise von Liouville gegeben worden in seinem: „Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie etc." Journal de Mathématiques Tome VI. 1841.

Leipzig. Ax. Harnack.

H. G. Zeuthen: Sur une classe de points singuliers de surfaces.
(Mathematische Annalen IX.)

— Note sur les singularités des courbes planes.
(Mathematische Annalen X.)

— Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. (Mathematische Annalen X.)

On sait que M. Salmon a trouvé*) — à une près — les relations qui ont lieu entre les nombres des singularités ordinaires d'une surface algébrique; M. Cayley a trouvé**) celle qui restait encore, et en même temps il a étendu cette théorie par l'introduction de plusieurs singularités extraordinaires; le nombre de celles-ci a été augmenté ensuite par moi.***) Immédiatement après j'ai exprimé toutefois †) quelques doutes sur plusieurs des coefficients des termes introduits par M. Cayley et moi. C'est pour cette raison que j'ai entrepris une nouvelle et uniforme déduction par le principe de correspondance des formules dont il s'agit, et une étude détaillée de toutes les singularités auxquelles j'avais égard, y compris plusieurs singularités nouvelles. Les résultats de ce travail, assez long et pénible, sont consignés au troisième des mémoires nommés ci-dessus: les deux autres en sont des précurseurs.

Les points singuliers dont je m'occupe dans le premier mémoire sont *les points doubles à un seul plan tangent (double), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents, et qui, de son côté, n'a qu'un seul point de contact.* Je prouve, au moyen de séries, que le plan tangent en un de ces points a les propriétés réciproques à celles de son point de contact: les nombres des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes qui sont réunis en un des points singuliers qui nous occupent, sont égaux, respectivement, aux nombres des plans tangents doubles et stationnaires de la développable

*) Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 23. — Voir aussi les deux premières éditions de „*Geometry of three Dimensions*“.

**) *A Memoir on the Theory of Reciprocal Surfaces.* Philosophical Transactions 1869 et 1871.

***) *Sur les droites multiples des surfaces.* Mathematische Annalen t. IV.

†) *Note sur la théorie des surfaces réciproques.* Mathematische Annalen t. IV, p. 636.

bitangente, des plans tangents doubles et stationnaires de l'enveloppe des plans tangents stationnaires de la surface, et des plans tangents communs à ces deux développables, qui coïncident avec le plan tangent au point singulier. — J'étudie ensuite les contacts de la courbe de contact des plans tangents doubles et de la courbe parabolique avec la courbe double et la courbe cuspidale.

L'étude des autres points singuliers d'une surface se fait, dans le troisième mémoire, par la discussion des dégénérations que subit un cône circonscrit pour des positions particulières du sommet: il s'agit notamment, si l'on remplace les cônes par leurs sections planes, de la détermination du nombre de points doubles et stationnaires qui se confondent en un point singulier supérieur, et celui des tangentes doubles et stationnaires qui se confondent en une tangente singulière supérieure. Cette détermination se fait par des théorèmes trouvés et démontrés par MM. Cayley, Nöther, Halphen et Stolz, auxquels il m'était commode toutefois pour mon but de donner une nouvelle forme, ce que j'ai fait dans la *„Note sur les singularités des courbes planes“*. Malheureusement, un moyen de faciliter ultérieurement la détermination de ces „équivalents plückériens“ m'a échappé alors: je pense à la relation entre les quatre équivalents d'une branche complète que M. Smith a exposée dans une belle et complète discussion des singularités supérieures des surfaces, publiée, dans le vol. 6 des „Proceedings of London Mathematical Society“, en même temps, a peu près, que ma Note. Ce manque n'a aucune influence sur mon troisième mémoire, où je me contente, pour ces déterminations, d'un renvoi à la Note.

Afin d'indiquer ici les nouvelles formes des équations des MM. Salmon et Cayley — où toutefois seulement des termes introduits par M. Cayley et moi sont altérés — auxquelles a conduit „la révision et l'extension“ entreprises dans le troisième mémoire, je renvoie, pour la plupart des notations, à la troisième édition de la *„Geometry of three Dimensions“* de M. Salmon.*) Les miennes n'en diffèrent que par les circonstances que je désigne par k et h les nombres plückériens des génératrices doubles des cônes projétant la courbe double et la courbe cuspidale (et non pas seulement les nombres des points doubles *apparents* de ces courbes), que je n'ai pas besoin du nombre ϑ des points „de singularité inexpli-

*) p. 539 et 549. Voir aussi l'édition allemande, due à M. Fiedler, du même livre, p. 605 et 616.

quée", regardant ces points comme faisant partie des singularités déjà introduites par les notations de χ', B', et que je fais l'usage analogue des notations k', h', χ et B. Je désigne encore par U le nombre des points uniplanaires, par O le nombre des plans dont les sections ont des points triples en des points simples de la surface, par U' et O' les nombres des singularités réciproques, et par f, d, g, e et i ceux des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes qui se trouvent aux points doubles à un seul plan tangent, dont nous avons parlé dans le compte rendu du premier des trois mémoires. Selon le résultat principal de celui-ci nous n'avons pas besoin de notations f', d', g', e' et i', dont les significations ne différeraient par de celles de f, d, g, e et i. Avec ces notations on aura les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
a &= a',\\
n(n-1) &= a + 2b + 3c,\\
a(a-1) &= n + 2\delta' + 3\varkappa',\\
c - \varkappa' &= 3(n-a),\\
b(b-1) &= q + 2k + 3\{\gamma + \Sigma'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta'] + d\},\\
c(c-1) &= r + 2h + 3(\beta + 2O' + e),\\
a(n-2) &= [\varkappa - B - \Sigma(\eta + 2\zeta)] + \varrho + 2\sigma + \Sigma[x(\mu-2)],\\
b(n-2) &= \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t + 9O' + \Sigma[y(\mu-2)],\\
c(n-2) &= 2\sigma + 4\beta + \gamma + 8\chi' + 16B' + 12O' + \Sigma z(\mu-2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a(n-2)(n-3) =\\
&2\left\{\delta - 3U - \Sigma\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2} + 2\nu\eta + 3\nu\zeta + 4\frac{\eta(\eta-1)}{2} + 6\eta\zeta + \frac{9\zeta(\zeta-1)}{2} + \zeta\right]\right\}\\
&\quad + 3[ac - 3\sigma - \chi - \Sigma(xz)] + 2[ab - 2\varrho - j - \Sigma(xy)]\\
&\quad + \Sigma[x(\mu-2)(\mu-3)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b(n-2)(n-3) = 4\left\{k - 3t - 3O' - \Sigma\left[\frac{y(y-1)}{2}\right]\right.\\
&\left. - \Sigma'\left[u' + 2\zeta'(\nu'-3) + 3\frac{\eta'(\eta'-1)}{2} + \eta'\zeta' + 6\frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2}\right] - f\right\}\\
&\quad + [ab - 2\varrho - j - \Sigma(xy)]\\
&\quad + 3[bc - 3\beta - 2\gamma - 12O' - \Sigma(yz) - \Sigma'(v' + 4\eta' + 4\zeta') - i]\\
&\quad + 9O' + \Sigma[y(\mu-2)(\mu-3)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&c(n-2)(n-3)\\
&= 6\left\{h - 6\chi' - 12B' - U' - 4O' - \Sigma\left[\frac{z(z-1)}{2}\right] - \Sigma'(\zeta') - g\right\}\\
&\quad + [ac - 3\sigma - \chi - \Sigma(xz)]\\
&\quad + 2[bc - 3\beta - 2\gamma - 12O' - \Sigma(yz) - \Sigma'(v' + 4\eta' + 4\zeta') - i]\\
&\quad + 18O' + \Sigma[z(\mu-2)(\mu-3)],
\end{aligned}$$

$$\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi' - 14U' + 2O' - \Sigma'(2\mu' + \nu' + 8\eta' + 11\zeta')$$
$$= \sigma' + 2r' - 3c' - 4j - 3\chi - 14U + 2O - \Sigma(2\mu + \nu + 8\eta + 11\zeta),$$

et celles qui en résultent par le principe de dualité.

Abstraction faite des différences dues aux altérations des notations et aux nouveaux termes que nous avons introduits, les formules indiquées ici diffèrent de celles qu'on trouve aux endroits cités par plusieurs termes contenant χ', B', η' et ζ'.

Dans les formules indiquées ici on a supposé que les singularités se présentent de la manière la plus générale que permet leur définition; mais en ayant égard à l'origine des termes respectifs on trouve sans difficulté les modifications que peuvent subir les formules en des cas particuliers. Le mémoire contient aussi des exemples de ces modifications.

Les formules ne sont pas toutefois la seule fruit qui j'ai cherchée par mon travail. Les propriétés des points et plans singuliers dont la connaissance était nécessaire pour la détermination directe des coefficients des formules, auront, je le suppose, quelque intérêt à elles. Réciproquement, ces propriétés sont assurées par leur application à la déduction des formules numériques, qui permettent plusieurs vérifications.

Une grande partie de ces propriétés ont égard aux plans tangents stationnaires et doubles de la surface qui ont les différents points singuliers pour points de contact, et aux branches de la courbe cuspidale et double qui sont tangentes aux plans singuliers.

On trouve, par exemple, que chacun des deux plans tangents en un point biplanaire est en général (si l'on regarde la surface comme lieu de points) plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires; les génératrices de contact, mais non pas les branches correspondantes de l'arête de rebroussement de la développable, passent par le point biplanaire. Les deux plans tangents comptant pour trois plans tangents menés à la surface par les droites qui s'y trouvent, le principe de dualité montre qu'un plan biponctuel contient deux points qui sont en général (si l'on regarde la surface comme enveloppe de plans) des points triples de la surface (à un seul plan tangent), et des points quadruples de la courbe cuspidale. Les plans et points singuliers dont j'ai rendu compte ici remplacent les plans et les points „of unexplained singularity“.

Copenhague, en août 1876. H. G. Zeuthen.

W. Fiedler: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Zweite Auflage. Mit 260 Holzschnitten und 12 lithogr. Tafeln. (LIV. 761.) Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1875.

Das Buch entspricht, nachdem es in der zweiten Auflage wesentlich erweitert worden ist, den Vorlesungen über darstellende Geometrie und Geometrie der Lage, welche ich seit 1864 an den technischen Hochschulen von Prag und Zürich gehalten habe. Es giebt die neue Grundidee, der ich in diesem Theile meiner Lehrthätigkeit Bahn zu brechen gesucht habe, in seinem Titel an. Die consequente Durchführung derselben hat eine neue Gliederung des Stoffes in beiden behandelten Gebieten bedingt und vielfach neue Gesichtspunkte und Methoden für die Untersuchung eröffnet; ich will versuchen, davon Rechenschaft abzulegen, kann aber dabei leider nicht so kurz sein als ich wünschte. Der Umfang des behandelten Ideenkreises wird das entschuldigen.

Einer *Einleitung* über Aufgabe, Methode und Entwickelungsgang der darstellenden Geometrie und über die perspectivische Raumansicht als allgemeine Voraussetzung derselben folgen die drei Theile des Buches: I. *Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen.* II. *Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen.* Und III. *Die Geometrie der Lage und die projectivischen Coordinaten.*

Von der Centralprojection als dem einfachsten Abstractum des Sehprozesses ausgehend behandelt der *erste Theil* nach einander: A. *Die Centralprojection als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen.* B. *Die constructive Theorie der Kegelschnitte.* C. *Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungsmethoden.* D. *Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformationen und die Axonometrie.* Alle die allgemeinen Darstellungsmethoden für ebene Abbildung und für Modellierung werden begründet und an den Raumelementen Punkt, gerade Linie und Ebene, an ihren einfachen Verbindungen, den Winkeln und Ecken, den Polygonen und Polyedern, sowie an der Kreislinie und ihren Abbildungen nach aller Mannichfaltigkeit ihrer Verwendung entwickelt. Dabei ergeben sich die Grundbegriffe und die fundamentalen Theorien der Geometrie der Lage als der naturgemässe Ausdruck der allgemeinen Gesetze der Centralprojection sofort im Abschnitt A., sodass die Theorie der Kegelschnitte in B. als ein umfassendes Beispiel ihrer Anwendung erscheint; sie führen auch von der centrischen Collineation in der Ebene als dem Ausdruck der durch die Centralprojection vermittelten Beziehung ebener Figuren im Abschnitt C. zu der centrischen Collineation der Räume, aus welcher alle für Kunst und Technik verwendeten Modellierungsmethoden entspringen. Die verschiedenen Formen der Anwendung der Parallelprojection ergeben sich dann in D. sehr kurz und vollständig und damit ist die Ausrüstung für die Lösung aller gewöhnlichen Aufgaben der darstellenden Geometrie im Gebiete der Theorien der krummen Linien und Flächen in dem erweiterten Sinne gewonnen, wo sie auch die selbständige Begründung und Entdeckung derjenigen Eigenschaften derselben einschliesst, deren Kenntniss zu jenen Zwecken nothwendig oder vorzugsweise nützlich ist, und die man gemeiniglich von anderswoher entlehnt, um nur ihren constructiven Gebrauch zu zeigen.

In solchem Sinne werden im *zweiten Theil* nach einander behandelt: A. *Die Curven und die developpabeln Flächen.* B. *Die krummen Flächen im Allgemeinen und die Flächen zweiten Grades insbesondere.* C. *Die windschiefen Regelflächen.* D. *Die Rotationsflächen;* überall nur vordringend bis zu den Elementen der Lehre von der Krümmung der Flächen, also in Einschränkung auf den gewöhnlichen Umfang des Materials der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen und in den entsprechenden Lehrbüchern. In der consequenten Durchführung der doppelten Auffassung einer Curve als Ort ihrer Punkte und als Enveloppe ihrer Schmiegungsebenen respective Tangenten und einer Fläche als Ort von aufgeschriebenen Curven und als Enveloppe von umgeschriebenen Developpabeln, in der dadurch bedingten eingehenden Behandlung der Curven und ihrer Tangentenflächen im ersten Abschnitt und auf Grundlage derselben weiterhin, sowie namentlich in dem Streben nach Entwicklung strenger Constructionen aus den nothwendigen Bestimmungsstücken liegen aber überall die Nöthigungen zu ganz selbständigem und vom Hergebrachten sehr abweichendem Vorgange.

Endlich wird in dem gerade hierdurch vorbereiteten *dritten Theil* die systematische Entwicklung geometrischer Theorien wieder aufgenommen, zu welcher die beiden ersten Abschnitte der Methodenlehre bereits geführt haben; nämlich in der Durchführung der Geometrie der Lage als der rein wissenschaftlichen Fortsetzung der darstellenden Geometrie in den drei Abschnitten: A. *Grundlagen und Coordinaten.* B. *Die Parameter der Gebilde und die Projectivität; Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe.* C. *Die projectivischen Gebilde zweiter und dritter Stufe und die Erzeugnisse ihrer Verbindung.*

Nach dieser Uebersicht ist es erforderlich, auf eine Reihe von Einzelheiten näher einzugehen, um die Ideenentwicklung zu verdeutlichen — zuerst aus der *Methodenlehre.* In den §§. 1—14 wird die Centralprojection als unabhängige Darstellungsmethode entwickelt; die Bestimmung der geraden Linie und der Ebene, sowie deren Verwendung, insbesondere die charakteristische Benutzung der Fluchtelemente zur Lösung von Aufgaben mit Winkelbestimmungen — man sehe die einfachen Constructionen für eine Ebene, welche eine gegebene Gerade enthalten und mit einer bestimmten Ebene einen vorgeschriebenen Winkel einschliessen soll, in §. 10, 8 und 9 —, sodann die Relation der Rechtwinkligkeit zwischen Linien und Ebenen, die Umlegung und Aufrichtung ebener Systeme und die Transformationen der Centralprojection werden gegeben, letztere speciell entwickelt bis zur Erledigung des Hauptproblems der praktischen Perspective, der Auftragung aus den Coordinaten nach drei zu einander rechtwinkligen Axen unter Benutzung der reducierten Distanz.

Nach der Zusammenfassung der Beziehungen zwischen Original und Bild eines Systems in dem Begriff der centrischen Collineation in §. 14 wird auf die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Bild und Original einer geraden Punktreihe näher eingegangen und als erste die Frage nach dem Gesetz der Abhängigkeit zwischen Bild und Original einer Strecke beantwortet; man erhält damit sogleich die einfachen Mittel zur Bestimmung der entsprechend gleichen Strecken von gegebenem Anfangspunkt mit Hilfe der Gegenpunkte oder des Flucht- und des Verschwindungspunktes, aber auch ebenso einfache zur Bestimmung der entsprechend gleichen Strecken von gegebenen Längen, speciell von der Länge Null; durch Beides den deutlichen Ueberblick des *doppelten Systems der entsprechend gleichen Strecken,* die anschauliche Grundlage für die spätere so wichtige Theorie der Involution von vereinigten Punktreihen. Man erhält ferner das Gesetz, nach welchem das Theilungsverhältniss einer Strecke sich beim Uebergang zum Bilde ändert — wenn die Strecke den Gegenpunkt ihrer Geraden zur Mitte hat, so ändert sich nur sein Zeichen — und den fundamentalen Satz (§. 16) von der Unveränderlichkeit des *Doppelverhältnisses* von vier Elementen eines

Elementargebildes erster Stufe beim Uebergang zur Projection, also die Definition der Projectivität von solchen Gebilden sowie ihre Construction aus drei entsprechenden Elementarpaaren (§§. 17, 18). In der Anwendung auf Büschel werden die entsprechenden Rechtwinkelpaare als die den Gegenpunkten der Reihen gleichbedeutenden Elemente erkannt. Der Projectivität der Reihen entspricht die Aufgabe: Man bestimme die Distanz, den Durchstoss- und den Flucht-Punkt einer Geraden, wenn für drei Punkte derselben die Bilder und die Tafelabstände gegeben sind — eine Bestimmung, welche die fundamentale durch das Projectionscentrum oder den Distanzkreis mit Durchstosspunkt und Fluchtpunkt als speciellen Fall in sich enthält.

Die Anwendung des gefundenen Projectivitätsgesetzes auf die centrische Collineation ebener Systeme (§. 19) führt sofort zur Aufstellung des Begriffs der *Charakteristik* einer Centralcollineation; sie ist das constante Doppelverhältniss, welches je zwei entsprechende Elemente in den vereinigten projectivischen Reihen auf Strahlen aus dem Centrum oder in den vereinigten projectivischen Büscheln aus Punkten der Axe der Collineation mit den sich selbst entsprechenden Elementen derselben bestimmen, oder das Theilverhältniss der Gegenpunkte respective der entsprechenden Rechtwinkelpaare in Bezug auf die Letzteren; und sie ist auch die Charakteristik der entsprechenden Centralprojectionen, weil sie das Theilverhältniss des Winkels zwischen Bild- und Original-Ebene, des Drehungswinkels bei der Umklappung, durch die nach ihrer Schnittlinie gehende projicirende Ebene ist (§. 19, 5); sie wechselt bei entgegengesetzter Umklappung nur ihr Zeichen. Dies führt zur Eintheilung der Collineationen und Projectionen nach den Zahlwerthen der Charakteristik und zur Untersuchung der den Grenzwerthen 0, ∞, $+1$ entsprechenden Fälle, der Collineationen mit singulären Elementen (§. 19, 8 und §. 21, f. g), sowie des Falles von der Charakteristik -1 oder der *Involution* (§. 20); endlich der Specialfälle der Affinität und Aehnlichkeit, der axialen und der centrischen Symmetrie sowie der Congruenz (§. 21) — die Symmetrien ebener Systeme sind besondere Fälle ihrer Involution, die Centralprojectionen symmetrischer Figuren sind Involutionen, Halbierung geht über in harmonische Theilung. So schliesst der Abschnitt A. mit der Lösung der Aufgabe von der Bestimmung entsprechender Elemente und der Herstellung der centrisch collinearen Lage für zwei ebene Systeme, von denen vier Punkte des einen und die entsprechenden des andern in allgemeiner Lage gegeben sind, d. h. den letzten Theil betreffend mit der allgemeinen Auflösung des sogenannten umgekehrten Problems der Perspective (§. 22, Fig. 43); endlich mit einer Uebersicht (§. 23), welche in den vorhergehenden Entwicklungen auch projectivisch reciproke Systeme in der Form der Orthogonalsysteme aufweist und die allgemeine Bestimmung reciproker Ebenen sowie den Nachweis von drei Formen specieller Reciprocität mit singulären Elementen gibt.

So hat die Entwicklung der Centralprojection als Methode der Darstellung in zwingender Weise zu den Grundlagen der neuern Geometrie hingeführt, auch — wie noch ausgeführt werden mag — zu der Construction der Doppelelemente in vereinigten projectivischen Gebilden erster Stufe; denn sie zeigt in der centrischen Collineation ebener Systeme diese Vereinigung mit stets reellen zu den Gegenpunkten respective den nicht entsprechenden Rechtwinkelstrahlen symmetrischen Doppelelementen, und führt durch den besondern Fall der Involution ebener Systeme zu der Bemerkung, dass bei der entgegengesetzten Zusammenlegung beispielsweise projectivischer Reihen mit ihren Gegenpunkten die entsprechenden Nullstrecken nicht zur Deckung kommen statt wie bei der involutorischen Collineation stets reelle Doppelpunkte zu liefern; sowie dazu, dass hierbei stets die vereinigten Gebilde der ersten Stufe von entgegengesetztem Sinne sind und dass bei der entgegengesetzten Umlegung mit der Uebereinstimmung des Sinnes im Falle der Involution die Vereinigung der Doppelpunkte in der Mitte der Gegenpunkte, bei jeder andern centrischen Collineation aber die Lage derselben zwischen den Gegenpunkten statt ausserhalb ihrer Strecke verbunden ist; d. h. man ist durch die constructiven Facta zu der Einsicht gedrängt, die eine Ueberlegung der correspondirenden Bewegung in projectivischen Gebilden sofort begründet, dass bei entgegengesetztem Sinn Doppelpunkte ausserhalb der Strecke der Gegenpunkte existiren *müssen*, während sie bei gleichem Sinn nur zwischen den Gegenpunkten existiren *können* und somit zur Steiner'schen Construction derselben aus Differenz und Product oder aus Summe und Product ihrer Abstände von den Gegenpunkten (§. 19, 13 f.).

Derselbe Weg vom Besonderen zum Allgemeinen wird auch in der Theorie der *Kegelschnitte* im Abschnitt B. verfolgt. Von den Kreisprojectionen (§. 24) als Curven, die ebensowohl aus projectivischen Büscheln wie aus projectivischen Reihen entstehen, von den Kegelschnittbüscheln und Schaaren (§. 25) mit vier reellen gemeinsamen Punkten respective Tangenten über die praktischen Constructionsformen aus fünf reellen Elementen (§§. 26, 27) zum Beweis der Identität von Curven zweiter Ordnung und zweiter Klasse (§. 28), zur Benutzung der Kegelschnitte für die Lösung aller Aufgaben zweiten Grades (§. 29); sodann zur Untersuchung des Kegelschnitts als Involutionsfigur oder als sich selbstentsprechend in der involutorischen Collineation mit einem beliebigen Pol als Centrum und der zugehörigen Polare als Axe derselben (§. 30), zur Lösung der Probleme über die involutorischen Gebilde erster Stufe (§. 31), zur Theorie der harmonischen Pole und Polaren (§. 32) und zu den Constructionen mit imaginären Bestimmungselementen in conjugirten Paaren, also auch den Büscheln und Schaaren von Kegelschnitten mit nur zwei reellen und mit vier nicht reellen gemeinsamen Elementen (§§. 32, 34). Weiter folgen im Ausbau von Einzelheiten das Princip der Reciprocität als besondere Form des in der Schlussübersicht des Abschnittes A. hervorgehobenen Gesetzes der Dualität (§. 33), die Lehre von der Durchmesserinvolution, von Axen und Asymptoten, nebst der Beziehung der Affinität zwischen Kreis und Ellipse (§. 34), die Theorie der Brennpunkte und Directrixen (§. 35) und endlich die der Osculation von Kegelschnitten, speciell die des Osculationskreises (§. 36). Die allgemeine Untersuchung der Beziehungen zweier Kegelschnitte, welche hier praktisch entbehrlich ist, bleibt unerledigt, bis es möglich ist, sie für reelle und nicht reelle Kegelschnitte gleichzeitig zu entwickeln, d. h. bis zur Theorie von zwei vereinigt liegenden Polarsystemen im dritten Theil (§. 162); nur ein Theil dieser Untersuchung, die Bestimmung des gemeinsamen Tripels, wird früher erfordert und daher in der benöthigten speciellen Form entwickelt, nämlich bei der Theorie der Flächen zweiten Grades respective der Kegelflächen zur Bestimmung der Axen im zweiten Theil (§. 97); diese specielle Form, zu welcher sehr einfache Ueberlegungen führen, wird dann später in der That als identisch mit der allgemeinen erkannt.

Der kurze Abschnitt von der *centrischen Collineation räumlicher Systeme,* der nun folgt, hat in diesem Zusammenhang hervorragende Bedeutung; er gibt die einfachsten Constructionsmethoden (§. 40), die Eintheilung der Reliefs nach den Werthen der Charakteristik — bildliche und nichtbildliche (§. 41), je nachdem dieselbe positiv oder negativ ist —, den Fall der involutorischen centrischen Collineation (§. 42) und die Erörterung der speciellen Fälle der Affinität, Aehnlichkeit, Symmetrie und Congruenz. Die Centralprojection erscheint als unendlich dünnes Relief — Anlass zur Unterscheidung sichtbarer und unsichtbarer Figurentheile. Durch *eine* Parallelprojection kann eine Raumform nicht bestimmt werden, dazu ist die Combination derselben mit einer zweiten auf dieselbe oder auf eine andere Ebene erforderlich; es wird gezeigt, dass nur für die orthogonale Parallelprojection die Charakteristik einfach dem Cosinus des Winkels zwischen Bild- und Original-Ebene gleich ist (§. 43), und damit der reelle Vorzug derselben vor andern Parallelprojectionen bezeichnet. Am Schlusse ein Blick auf die allgemeine Bestimmung räumlicher collinearer und reciproker Systeme aus fünf entsprechenden Elementenpaaren; dann zurück zum speciellern Ausbau der Lehre von der *Parallelprojection* (§. 46 f.), zuerst der orthogonalen. Im Ausgang von drei zu einander rechtwinkligen Projectionsebenen und ihren Durchschnittslinien zeigt sich, dass die sechs Halbirungsebenen ihrer Winkel, die vier Schnittlinien derselben zu dreien oder die Halbirungsaxen, und deren durch den Anfangspunkt gelegte Normalebenen für den ersten Zielpunkt der Untersuchung, die Darstellung des ebenen Systems, von entscheidender Bedeutung sind: Sie liefern die Spuren, die Affinitätsaxen zwischen den in derselben Tafel vereinigten Projectionen in Paaren, die Axen- und die Würfel-Punkte, so wie vier Gerade, welche den Letzteren in dem Orthogonalsystem entsprechen, das den Fusspunkt der Normale zur Ebene aus dem Coordinatenanfangspunkt zum Centrum und die Länge dieser Normale zur Distanz hat (§. 51). Im dritten Theil (§. 161, 3 f.) wird dann erkannt, dass die hier elementar entwickelten Relationen ihren Grund in dem Umstande haben, dass die drei Projectionsebenen mit der Normale der Originalebene und mit ihrer Parallelebene durch den Anfangspunkt ein Orthogonalsystem im Strahlenbündel bestimmen, und es ergeben sich bezügliche Vervollständigungen. Ich darf wohl erwähnen, dass die Erkenntniss dieses Zusammenhangs im Jahre 1857 mir die Ueberzeugung gab, das wissenschaftliche Studium der darstellenden Geometrie sei von dem der Geometrie der Lage nicht zu trennen, und dass ich von da ab die Idee dieses Zusammenhangs pädagogisch entwickelt habe, natürlich unter Voranstellung der Centralprojection als der fundamentalen Methode; meine Programmschrift von 1860 „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft" beschränkt sich zwar auf die Entwicklung der constructiven Elemente und die Anwendungen auf die geradlinigen Flächen, aber sie enthält auch die Idee der Transformationen in der Centralprojection als Quelle der Constructionsvortheile, und sie fügt zu einer schon früher veröffentlichten Anwendung der Affinitätsaxen die Anmerkung von der Analogie der Winkelhalbirungsebene zwischen zwei Projectionsebenen mit der zweiten Parallelebene der Centralprojection hinzu, die in dem Satze liegt, dass zwei Gerade, Ebenen, Kegel, Regelflächen in diesen Ebenen einen gemeinsamen Querschnitt haben, wenn in Parallelprojection ihre zwei betreffenden Spuren, in Centralprojection ihre Spuren und Fluchtlinien verkehrt zusammenfallen. Besondere Aufmerksamkeit ist noch im Schlussabschnitt des ersten Theils der geometrischen Durchbildung der *orthogonalen* (§. 60) und der *schiefen* (§. 61) *Axonometrie* (Letztere auf Grund des Pohlke'schen Satzes) gewidmet; für die Letztere gibt eine Erörterung Steiners in der „Systemat. Entwickelung“ die ausreichende Grundlage, wenn man die entsprechenden Rechtwinkelpaare projectivischer Strahlbüschel zu bestimmen versteht.

Ich kann nun über den *zweiten Theil* ziemlich kurz berichten; wenn er auch in der Anordnung ganz von den früheren Lehrbüchern abweicht, so hat er doch mit ihnen in der Hauptsache das Material gemein, nur mit Ausnahme des ersten Abschnittes. Derselbe stellt zur ebenen Curve sofort die nichtebene oder der Kürze zu Liebe *„Raumcurve“* (§. 63), zeigt als deren natürliche Singularitäten ihre stationären Elemente auf und merkt an, dass die beiden Operationen der *Abwickelung* der developpabeln Fläche in eine ihrer Tangentialebenen und der Bildung der *Richtungskegel* an einem Punkte der Curve als Spitze — Operationen, bei denen jene Singularitäten erhalten bleiben und welche die darstellende Geometrie wesentlich zur Untersuchung dieser Raumformen benutzt — einander genau nach dem Gesetz der Dualität entsprechen; er zeigt die Untersuchung der *Kegel* (§. 64) als übereinstimmend mit der ihrer ebenen Querschnitte bezüglich der projectivischen Eigenschaften und geht daher von der Behandlung der Kegelflächen durch das Problem der Abwickelung (§. 71) — unter genauer aber ganz elementargeometrischer Untersuchung des Gesetzes, nach welchem der Krümmungsradius einer Curve sich bei ihrer Abwickelung mit einer sie enthaltenden developpabeln Fläche verändert (§. 72) — zur gemeinen *Schraubenlinie* (§. 73) als der geodätischen Curve des geraden Kreiscylinders und ihrer Tangentenfläche über. Bei den Kegelflächen ist besonders dem allgemeinen Zusammenhang von zwei beliebigen Querschnitten in centralprojectivischer Darstellung, den Bildern der Asymptoten und den Asymptoten der Bilder und ihrer directen Ableitung mittelst der centrischen Collineation (§. 66), sorgfältige Erledigung gegeben;

bei der Schraubenlinie ist Anlass, von den Singularitäten des Bildes d. i. den Inflexionsstellen respective Doppelpunkten (und im Uebergange von den einen zu den andern stationären Punkten) und den Doppeltangenten, sowie von den Singularitäten der ebenen Querschnitte ihrer entwickelbaren Fläche den Grund der Entstehung und damit die constructive Bestimmung anzugeben. Diese entwickelbare Fläche besitzt ein System von Doppelcurven und die Schraubenlinie eine mehrfach berührende developpable Fläche und zeigt daher namentlich in der axonometrischen und centralen Projection die Relationen der Originalcurve mit der Doppelcurve und beliebigen ebenen Querschnitten der Developpabeln; dem entspringt z. B. die Anregung zur Lösung des allgemeinen Problems: Diejenige developpable Fläche zu bestimmen, welche zwei willkürlich gegebene Raumcurven enthält (§. 74, 4). Die Abwickelung der developpabeln Schraubenfläche zeigt §. 77. Nach einer kurzen Erörterung der hier einschlagenden metrischen Begriffe: Haupt- u. Bi-Normale, Polarlinie (Krümmungsaxe) und Polarfläche, Evolute und Evolvente, rectificirende, cyclificirende etc. Developpable (§. 78) folgt die Lehre von den *Durchdringungen der Cylinder und Kegel* (§. 79), speciell derjenigen vom zweiten Grade (§. 80); zuerst die allgemeine Construction ihrer Punkte und Tangenten, speciell der unendlichen Aeste und Asymptoten, sodann für Kegel zweiten Grades speciell die beiden Formen ihres Zerfallens durch Auftreten von zwei Doppelpunkten, nämlich in zwei Kegelschnitte, wenn die Verbindungsgerade der Doppelpunkte nicht selbst zur Durchdringung gehört, und in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung, wenn es der Fall ist. Diese *Curve dritter Ordnung* wird zunächst in ihren verschiedenen Formen untersucht; man erkennt von ihren allgemeinen Eigenschaften, dass sie keine stationären Elemente, keine Doppelcurve und keine doppelt berührende Developpable besitzen kann und ist dadurch veranlasst, die allgemeinen descriptiven Gesetze aufzusuchen (§. 82 f.), nach welchen aus den Eigenschaften des Bildes der Raumcurve d. h. seinen Charakteren und Singularitäten und aus denen des ebenen Querschnitts speciell der Spur ihrer Tangentenfläche auf die *Charaktere und Singularitäten der Raumcurve und ihrer Tangentenfläche* selbst geschlossen wird, unter Beschränkung jedoch auf die neun allgemeinen Charaktere, welche allein bei den hier zur Untersuchung stehenden einfachen Fällen der Curve dritter Ordnung und der Curve vierter Ordnung erster Art — auch die stationäre Tangente ist hier nicht möglich — hervortreten. Es werden auch die Modificationen angegeben, welche in diesen Beziehungen für besondere Lagen des Projectionscentrums oder der Schnittebene eintreten, z. B. also (§. 84) die Entstehung der Spitzen erster und zweiter Art im Bilde einer Curve, später (§. 86, 7) die Endstellen in den Kegelschnittbildern der Curve vierter Ordnung erster Art erklärt. Demnächst folgt die Anwendung, zuerst auf die Fälle der Durchdringung von Kegeln zweiten Grades mit einem Doppelpunkt, der entweder ein Knoten oder isolirt oder ein stationärer Punkt ist — im letzteren Falle wird der Doppelkegelschnitt der Tangentenfläche, die involutorische Collineation derselben und der Curve für die nicht singuläre Kegelspitze als Centrum und die Ebene der Doppelcurve als Ebene der Collineation, sowie die Collineation und Reciprocität aller solcher Curven und ihrer Developpabeln unter einander nachgewiesen (§. 85). Ein Theil dieser Eigenschaften wird endlich als allgemein den *Curven vierter Ordnung erster Art* ohne singuläre Punkte angehörig erwiesen durch nähere Untersuchung des bekannten Falles der Durchdringung zweier Kegel zweiten Grades, welche eine gemeinsame Hauptebene haben (§. 86); es ergibt sich, dass im Allgemeinen durch eine solche Curve vier Kegel zweiten Grades, doppelt projicirende Kegel derselben, hindurchgehen, und dass ihre developpable Fläche sich in vier ebenen Curven vierter Ordnung sechster Classe selbst durchdringt, die in den durch die Tripel jener Kegelspitzen bestimmten Ebenen liegen; man findet einfache Regeln, nach welchen diese Ebenen und die fehlenden beiden Kegelspitzen oder das Quadrupel in jedem Falle construirt werden, sowie Regeln zu ihrer Benutzung zur genauen und raschen Construction der Curve und ihrer Tangentenflächen selbst. Frézier in seinem „Traité de stéreotomie“ (Liv. I, Ch. VI bis VIII der Ausgabe von 1754) hat, wie ich glaube, zuerst und bis zu meinem Buche auch zuletzt die Symmetrieverhältnisse dieser Curven betrachtet, indem er, man kann sagen, um kurz zu sein, die Querschnittscurven von zwei Quadrupelebenen mit den Kegelflächen zu einer Namengebung der einzelnen Fälle benutzt. Die Tangentenfläche der Curve zieht er nicht in Betracht und die Zusammenfassung zu einer allgemeinen Theorie war auch seinem Zeitgenossen D. Bernoulli in Basel, an den er sich gewandt, nicht gelungen; zu ihrer Entdeckung erschien die allgemeinere Auffassung vom Standpunkte der Theorie der Flächen zweiten Grades nöthig, und sie blieb Poncelet's berühmtem „Supplément“ vorbehalten.

Der Abschnitt B. gibt nach Vorausschickung allgemeiner Begriffe und Erklärungen die constructive Theorie und Behandlung der *Flächen zweiten Grades*, und zwar zuerst die der geradlinigen (§. 89 f.) unter Benutzung der beiden Regelschaaren derselben; sodann die allgemeine Theorie auf Grund der involutorischen Collineation solcher Flächen zu sich selbst für jeden Punkt des Raumes (§. 94) als Centrum oder Pol und seine Polarebene als Collineationsebene. Ich hebe, um den Charakter der Behandlung näher zu bezeichnen, die strenge Construction der Schnittpunkte und Tangentialebenen eines einfachen Hyperboloids mit einer Geraden (Tafel VII); die Bestimmung der Hauptaxen der Flächen zweiten Grades aus zwei conjugirten Diametralschnitten (Tafel X) nebst Angabe der speciellen Form, welche sie bei Rotationsflächen annimmt; die Behandlung der Flächen zweiten Grades mit elliptischen Punkten als Reliefs der Kugel in §. 98, und die Erledigung des Problems der gemeinsamen Developpabeln von zwei Flächen zweiten Grades in §. 101 hervor, welche natürlich die Kenntniss respective Bestimmung des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole (§. 100) ebenso wie dasjenige der Durchdringungscurve erfordert. Am Schlusse des Abschnittes wird die doppelte Entstehung einer krummen Fläche als Ort von Punkten und als Enveloppe von Ebenen allgemein erwiesen (§. 102), wobei sich die Theorie von der Involution der conjugirten Tangenten in einem Punkte der Fläche, die Lehre von den Haupttangentencurven und die Grundeigenschaften der geodätischen Linien und der Krümmungslinien derselben ergeben (§. 103). So schliesst der Abschnitt mit dem unendlich dünnen Bündel der Normalen einer Fläche mit seinen beiden Doppelgeraden.

Es folgt der Abschnitt von den *windschiefen Regelflächen*, beginnend mit der doppelten Erzeugung solcher Flächen aus drei Leitcurven oder Leitdeveloppabeln; für diese wird die Regel von der Bestimmung des Grades (§. 106), die Construction der Berührungsebenen und Berührungspunkte durch die Projectivität (§. 107) (sie gestattet eine interessante Anwendung der Ebene $H_{x'}$, für Tangentialebene eines Punktes und Normalebene der Erzeugenden als xz und xy — siehe Zusatz zu p. 415, 6 —, welche auch M. Mannheim ausgedehnt und glücklich benutzt hat), sodann die der Hyperboloide und Paraboloide, welche längs Erzeugenden berühren, der Strictionslinie (§. 108), der singulären Erzeugenden etc. entwickelt, werden auch die Aufgaben über ihre Beziehungen zu den Elementarformen, zu developpabeln und krummen Flächen erörtert. Die Beispiele der beiden windschiefen Schraubenflächen, der Wölbflächen des schiefen Durchganges und des Eingangs in den runden Thurm, das schräge Kreisconoid, das Cylindroid und das Normalenbündel dienen zur Erläuterung. Zuletzt wird die Regelfläche dritten Grades in ihren beiden allgemeinen Hauptformen dargestellt und theoretisch untersucht; die Construction führt auf ihre projectivischen Erzeugungsweisen; für sie ist das längs einer Erzeugenden osculirende Hyperbolid streng construirt und sie gibt endlich Anlass zur Entstehung der Curve vierter Ordnung zweiter Art.

Bei den *Rotationsflächen* (§. 115 f.) bietet zunächst das Problem ihrer Darstellung in Centralprojection eine nützliche Anwendung der Construction der Kegelschnitte aus Pol und Polare mit der Involution harmonischer Pole in dieser und den Endpunkten der zu ihr parallelen Sehne durch jenen dar: Die Parallelkreise erscheinen als ein System von Kegelschnitten, welche in der Fluchtlinie der Normalebenen zur Axe der Fläche ein und dieselbe durch die Rechtwinkel-Involution am zugehörigen Collineationscentrum bestimmte Involution harmonischer Pole haben; ihre zu derselben parallelen Sehnen liefert das Bild desjenigen Meridians, für welchen die Axe die Falllinie zur Bildebene ist. Unter den üblichen Problemen bieten wieder für die Centralprojection der ebene Querschnitt und der Berührungskegel aus gegebenem Punkte durch ihre orthogonalen Symmetrieen Gelegenheit zu vortheilhafter Verwendung der Gesetze der Involution ebener und räumlicher Systeme. Zu den gewöhnlichen Problemen der *Schattenconstruction,* welche in der Bestimmung der Berührungskegel und der Normalen der Flächen vom Leuchtpunkte aus aufgehen, werden für paralleles Licht und in parallelprojectivischer Darstellung die der *Beleuchtungsconstructionen* (§. 124 f.) hinzugefügt, die Bestimmung der Linien gleicher vorgeschriebener Intensität der objectiven Beleuchtung, d. h. der Berührungscurven der Flächen mit umschriebenen Developpabeln, deren Richtungskegel Rotationskegel von gegebenem Winkel um den Lichtstrahl als Axe sind; ihre Construction wird für alle die behandelten Flächenarten hier auf Grund sehr einfacher Betrachtungen erledigt. Immer bieten die Rotationsflächen im Allgemeinen mehr als andere das Beispiel rein graphischer so zu sagen empirischer Behandlungsweise; nur das System der zu behandelnden Probleme und der Constructionsmittel sondert sich auch hier in zwei einander dual gegenüberstehende Gruppen.

Wenn nun im *dritten Theil* die rein wissenschaftliche Entwickelung der Untersuchung ausschliesslich wieder aufgenommen wird, so ist durch alles Vorhergehende dieser Darstellung der Geometrie der Lage von vornherein eine von dem Hergebrachten ganz abweichende Situation bereitet und eine in mancher Beziehung eigenthümliche Aufgabe gestellt. Ich entspreche derselben mit der gebotenen Kürze wesentlich durch die Anwendung der *gemischten* die synthetisch construirenden und die analytischen Untersuchungsmittel *combinirenden Methode.* Zu ihr führt sofort die Wiederaufnahme der Untersuchung hin, obwohl sie naturgemäss einer sorgfältigen *Prüfung der Fundamente* und somit der von den Voraussetzungen der Elementargeometrie unabhängigen Begründung der Projectivität gewidmet ist; sie eröffnet mit der wesentlich von v. Staudt gegebenen von den perspectivischen Dreiecken etc. zur harmonischen Theilung und zur Projectivität und Involution*) der Elementargebilde erster Stufe führenden Ableitung (§. 133 f.); sie schliesst an die Involution dieser Elementargebilde in Zusammenfassung und Weiterbildung von vorher schon vielfach benutzten Ergebnissen die *geometrische Theorie der imaginären Elemente* an (§. 135 f.), um dieselbe soweit zu führen, dass dem Satze Credit gegeben ist, wonach die Projectivität der Gebilde die projectivische Einordnung ihrer imaginären Elemente mit umfasst und durch solche Elemente in gleicher Weise bestimmbar ist. Um die imaginären Elemente vollends einzubürgern, wird später (§. 151, 7 f.) gezeigt, wie aus dieser geometrischen Theorie der analytisch geometrische Ausdruck derselben und umgekehrt aus diesem ihre constructive Bestimmung hervorgeht. Auf diese Untersuchung des Imaginären gründet sich zunächst die genaue *Zählung* der reellen und der imaginären Elemente in den Elementargebilden der vier Stufen, welche die Möglichkeit der projectivischen Correspondenz der Elemente zwischen zwei solchen Gebilden abstract beweist. Die Uebereinstimmung der Ergebnisse der neuen Entwickelung mit denen der ursprünglichen auf die Elementargeometrie und Trigonometrie gegründeten gibt zugleich die Gewähr dafür, dass diese und die projectivische Geometrie, insofern sie an der perspectivischen Raumansicht festhält, mit einander in Einklang stehen. Und dazu kommt nun noch der Nachweis, dass aus den fundamentalen geometrischen Bestimmungsmethoden der Raumelemente die analytischen sich ganz direct vollständig und allgemein ergeben. Dieselben Projectivitätsrelationen oder Doppelverhältnissgleichheiten, durch welche aus drei, vier und fünf unabhängigen Elementenpaaren

*) Hier ist auf p. 508 am Schlusse von 11. im Druck die Zeile weggeblieben, welche den Begriff der Charakteristik allgemein begründet:

Also $(F_1 F_2 A A') \barwedge (F_2 F_1 B' B) \barwedge (F_1 F_2 B B')$. (Charakteristik $\varDelta$ §. 19).

in zwei projectivischen Gebilden erster zweiter und dritter Stufe zu einem beliebigen Element des einen Gebildes das entsprechende des andern construirt wird, führen sofort (§. 138 f.) zur Bestimmung eines Elements in einem Elementargebilde erster, zweiter, dritter Stufe in Bezug auf drei, vier und respective fünf feste Elemente desselben durch Zahlen, die ich als die *projectivischen Coordinaten* dieses Elements bezeichne, weil sie dieser ihrer Entwickelung gemäss beim Uebergang zu einem projectivischen System nicht geändert werden. Ich leite aus ihnen durch rein projectivische Prozesse die *Gleichungen* der Elemente oder *die Bedingungen des Ineinanderliegens* von Punkt und Gerade, Strahl und Ebene, Punkt und Ebene als lineare homogene Gleichungen mit zwei, drei und vier Variabeln ab, deren Coefficienten zugleich die Coordinaten der dargestellten Elemente sind, wenn man noch die harmonische Trennung der beiderlei Einheits-Elemente durch die Fundamental-Elemente voraussetzt. Die Construction eines durch seine Coordinaten oder also durch seine Gleichung gegebenen Raumelements erfolgt im Gebilde erster Stufe als die Construction des vierten Elementes zu drei gegebenen aus seinem durch das Verhältniss seiner Coordinaten bestimmten Doppelverhältniss; und sie erfolgt durch eine zwei- respective dreimalige Wiederholung dieser Construction mit den Verhältnissen von zwei der drei Coordinaten zur dritten respective vierten in den Gebilden zweiter und im Gebilde dritter Stufe. Die Erwartung, dass im Gebilde vierter Stufe, d. h. für die gerade Linie als Raumelement, die vierfache Anwendung dieser Construction zur Bestimmung aus den Coordinaten genügen müsse, leitet zur Benutzung von zweien der projicirenden Ebenen der Geraden aus den Fundamentalpunkten oder von zweien ihrer Durchstosspunkte mit den Fundamentalebenen, als welche je durch zweifache Anwendung jener Construction bestimmbar sind; und es ergeben sich als die zweimal drei Coordinaten der ersteren die Strahlencoordinaten p_{ik} und als die zweimal drei Coordinaten der letzteren die Strahlencoordinaten π_{ik}; aus dem Umstande aber, dass diese Durchstosspunkte in jenen projicirenden Ebenen liegen, folgt zugleich die Gruppe der diese Coordinaten verbindenden Relationen, nämlich die Proportionalität der p_{ik} und π_{im} und der Nullwerth der Summe der Producte der drei complementären Paare der einen wie der andern (§. 145).

Besondere Festsetzungen über die Lage des Einheitspunktes oder der Einheitsgeraden respective Einheitsebene in Bezug auf die Fundamentalpunkte führen auf diejenigen Formen der allgemeinen

Coordinatenbestimmung, die man als Dreilinien- und Vierebenen- respective Dreipunkt- und Vierpunkt-Coordinaten und als Flächen- respective Volumen-Coordinaten bezeichnet hat; die Annahme, dass eines der Fundamentalelemente unendlich fern liege, gibt specielle Coordinatensysteme, unter denen die *Cartesischen* und die *Plücker'schen Coordinaten* des Punktes und der Geraden respective des Punktes und der Ebene der Annahme entsprechen, dass die eine Fundamentallinie respective Fundamentalebene unendlich fern sei. Diese Letzteren auf die Bestimmung der geraden Linie angewendet liefern die sechs Coordinaten der Geraden in derjenigen Form, in welcher sie von Plücker 1865 zuerst gegeben wurden, indess die allgemeine Entwickelung die geometrische Begründung und Deutung der algebraischen Abkürzungssymbolik z. B. gibt, als welche Cayley 1859 zuerst die sechs Coordinaten der geraden Linie im Raum eingeführt hatte.

Von den linearen homogenen Gleichungen zu den allgemeinen homogenen Gleichungen zwischen projectivischen Coordinaten überführend, schliesst der erste Abschnitt des dritten Theils mit der geometrischen Deutung solcher Gleichungen und ihrer Combinationen: Ebene Curven und Kegelflächen, krumme Flächen, Liniencomplexe, Congruenzen, Regelflächen, Raumcurven, entwickelbare Flächen etc.

Im unmittelbaren Anschluss hieran beginnt der *zweite Abschnitt* mit der Erörterung über die Anzahl der linearen Bestimmungselemente solcher Raumformen d. i. über die Gliederanzahl ihrer Gleichungen und mit der daraus entspringenden Feststellung der Begriffe von *Gebilden erster, zweiter* etc., *allgemein kter Stufe* aus solchen Formen wie ihrer Gleichungen (§. 147), welche diejenigen der Elementargebilde der gleichhohen Stufen als specielle Fälle umfassen. Daraus entspringt die Frage nach der *geometrischen Bedeutung der Parameter in der Gleichung des Gebildes.* Die Grundlage für die allgemeine Beantwortung derselben wird gefunden (§. 148) durch die geometrische *Deutung des Parameters im Elementargebilde erster Stufe* als *negatives Theilungsverhältniss* des beweglichen Elementes in Bezug auf die bestimmenden oder fundamentalen Elemente des Gebildes; eine ihrer ersten Anwendungen ist die Bestimmung des Doppelverhältnisses einer Geraden mit einem Tetraeder aus ihren sechs auf dasselbe bezogenen Coordinaten zum neuen Erweis des schon früher abgeleiteten Satzes, dass die Durchstosspunkte der Geraden mit den Flächen und ihre projicirenden Ebenen aus den Ecken Gruppen von gleichen entsprechenden Doppelverhältnissen sind. Diese Deutung

15*

liefert, angewendet auf die Beziehungen der Elementargebilde erster Stufe zu Curven und Flächen die *Theorie der Polaren* (§. 149) und mit dieser den Satz, dass die gleichnamigen Polaren eines Elementes in Bezug auf die Formen eines Gebildes $k$ter Stufe ein Gebilde $k$ter Stufe mit den nämlichen Parametern, dass also die linearen Polaren ein Elementargebilde dieser Stufe mit denselben Parametern bilden; sodass die verlangte geometrische Deutung der Parameter für die allgemeinen Gebilde mit der Deutung derselben für die Elementargebilde schon erledigt ist.

Damit ist es an der Zeit, die *Parametergleichungen der Projectivität* der Elementargebilde erster Stufe und im Falle des Ineinanderliegens derselben die Parametergleichung ihrer *Involution* aufzustellen und zu discutiren (§. 151), um ihre Coefficienten geometrisch zu deuten und dadurch die möglichen Vereinfachungen zu erkennen.

Der Uebergang von diesen Parametergleichungen zu den *Coordinatengleichungen der Projectivität* zeigt dann sofort, dass die *lineare Substitution* für die Variabeln der allgemeine algebraische Ausdruck für den Uebergang von einem System zu einem ihm projectivischen System ist; man erhält so (§. 152) die allgemeinen Gleichungen der Collineation und der Reciprocität für die Gebilde der drei ersten Stufen und sofort auch die geometrische Deutung ihrer sämmtlichen Coefficienten, d. h. den Zusammenhang mit dem Vorgange der Constructionen; und im speciellen Falle der Congruenz der Systeme in deckender Lage auch die Transformation der Coordinaten (§. 153), im allgemeinen Falle die Einsicht, dass die Algebra der linearen Substitutionen die analytische Geometrie der projectivischen Eigenschaften enthält, eine Einsicht, welche hier durch Anwendungen auf Curven und Flächen zweiten Grades erläutert wird (§. 154).

Die Untersuchung wendet sich (§. 155) zu den *Verbindungen projectivischer Gebilde* erster Stufe *und ihren Erzeugnissen*, den Curven, Kegeln und windschiefen Regelflächen zweiten Grades und aus den Elementargebilden, wie zu denen aus projectivischen Gebilden aus Curven oder Flächen, insbesondere auch den Curvenerzeugungen aus projectivischen Involutionen von Büscheln oder Reihen. Sie leitet sodann weiter aus der dabei stattfindenden perspectivischen Lage der Gebilde mit den Erzeugnissen die projectivische Beziehung von Element zu Element zwischen Gebilden und Erzeugnissen und zwischen je zwei Erzeugnissen ab und kommt von diesen Projectivitäten zu neuen Erzeugnissen: Curven, entwickelbare Flächen und windschiefe Regelflächen; ein näher untersuchtes Beispiel von allgemeiner Art ist die Erzeugung der Curve vierter Ordnung zweiter Art aus einer Kegelfläche zweiter Classe und einer ihren Tangentialebenen projectivisch zugeordneten Regelschaar (§. 157); das nützlichste specielle ist die projectivische Zuordnung der Regelschaaren eines einfachen Hyperboloids; eine genaue Figur verdeutlicht die zahlreichen Relationen, welche auf die Lehre von den projectivischen Reihen und Tangentenschaaren am Kegelschnitt und auf die Theorie der doppeltberührenden Kegelschnitte führen. Eine daran sich anschliessende Betrachtung der höhern Involutionen beendigt den Abschnitt. Das wichtige allgemeine *Princip der projectivischen Verbindung der Erzeugnisse zu neuen Erzeugnissen* wird bei den folgenden Stufen nicht weiter systematisch entwickelt; das hier Gegebene kann genügen, um dazu anzuleiten.

Der *Schlussabschnitt* untersucht zuerst die projectivischen Elementargebilde zweiter Stufe uud die Erzeugnisse ihrer Verbindung: Die *in einander liegenden collinearen Ebenen und Bündel*, ihre sich selbst entsprechenden Elemente, die bekannte Ueberführung in die perspectivische Lage unter neuem Gesichtspunkt (§. 159); die *in einander liegenden reciproken Gebilde zweiter Stufe* (§. 160), ihre einander involutorisch zugeordneten drei Elementenpaare, Pol- und Polar-Kegelschnitte und Kegel und ihre Beziehungen zu der involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades, in welcher die einander doppelt conjugirten Punkt- und Linien-Paare der Gebilde stehen; sodann die Ueberführung der reciproken Systeme aus der allgemeinen in die involutorische Lage oder *das Polarsystem* und die Eigenschaften desselben mit besonderer Hervorhebung des Orthogonalsystems, dessen Directrixkegel nach dem imaginären Kugelkreis im Unendlichen geht, und seiner Beziehungen zur Metrik (§. 161). Die offenbare Analogie der Eigenschaften des Polarsystems im Gebilde zweiter Stufe zur Involution der Gebilde erster Stufe führen weiter zur Untersuchung von *zwei in einander liegenden Polarsystemen* (§. 162), ihres gemeinsamen Tripels harmonischer Pole und Polaren, ihrer drei Paare von Strahlen mit einerlei Involutionen harmonischer Pole, nnd drei Paare von Punkten mit einerlei Involutionen harmonischer Polaren, also zur Erledigung einer Hauptgruppe unter den Beziehungen von zwei Kegelschnitten in der allgemeinsten Form; in Anwendung auf das Orthogonalsystem liefert dies die Hauptstücke der Theorie der Kegel zweiten Grades.

Zwei *nicht in einander liegende reciproke Gebilde* zweiter Stufe erzeugen eine Fläche zweiten Grades durch Verbindung ihrer entsprechenden Elementenpaare; es wird dadurch sofort auch die eindeutige ebene Abbildung dieser Flächen vermittelt, und Anlass gegeben zur analytischen Darstellung des Erzeugnisses reciproker Gebilde zweiter Stufe überhaupt (§. 163). Die Untersuchung wendet sich endlich zu den Erzeugnissen von zwei *nicht in einander liegenden collinearen Gebilden zweiter Stufe,* den Raumcurven dritter Ordnung und den developpabeln Flächen dritter Classe und den mit ihnen verbundenen Strahlencongruenzen dritter Classe erster Ordnung und dritter Ordnung erster Classe, insbesondere auch dem Nachweis der Identität der Curve dritter Ordnung mit der Rückkehrkante der developpabeln Fläche dritter Classe (§. 165). Im Anschluss daran werden die projectivischen Verbindungen zwischen den Flächen zweiten Grades und den Strahlencongruenzen mit Elementargebilden zweiter Stufe und unter sich, so wie zwischen Curven dritter Ordnung und Developpabeln dritter Classe mit Elementargebilden erster Stufe, mit den früheren Erzeugnissen von einfach unendlicher Elementenzahl und unter einander überblickt und ihre Parameterdarstellung begründet.

Für die *Elementargebilde dritter Stufe* wird zuerst (§. 166) die *Collineation* und der *tetraedrale Complex* nebst den beiden speciellen Fällen der *collinearen Involution,* der *centrischen* und der *geschaarten,* sodann die *Reciprocität* untersucht (§. 168) und auch die Letztere zu vollständiger Erledigung der fundamentalen Fragen geführt; man weist die vier Paare der sich involutorisch entsprechenden Elemente und ihre Gruppirung zum Tetraeder nach und erhält durch die Wahl desselben zum Fundamentaltetraeder die einfachsten Gleichungen der Reciprocität und natürlich auch der Pol- und der Polar-Fläche. Die Betrachtung der doppelt conjugirten Elemente ordnet den Punkten und den Ebenen des Raumes je einen tetraedralen Complex in Bezug auf das Tetraeder der involutorischen Elemente zu und die Verbindungsebenen und Schnittpunkte entsprechender Elemente in dieser Zuordnung erlauben die directe Construction jenes Tetraeders durch diejenigen beiden Gegenkanten, welche der Pol- und der Polarfläche nicht angehören, und damit auch die Construction dieser beiden Flächen selbst; endlich wird deren Verwendung zur Construction entsprechender Elemente der Reciprocität gezeigt.

Es folgt die Theorie *des räumlichen Polarsystems* (§. 169) und die Ueberführung reciproker Räume aus der allgemeinen Lage in die involutorische; die Untersuchung von *zwei Polarsystemen,* die kurze Behandlung der Büschel und Schaaren von Flächen zweiten Grades mit einer besonders eingehenden constructiven Erörterung der

Schaar der Confocalen mit den Doppelcurven ihrer gemeinsamen Developpabeln im endlichen Raum; endlich die involutorische Reciprocität des *Nullsystems* und der *lineare Complex* (§. 170).

Den so untersuchten projectivischen Verbindungen zu zweien schliesst sich zuletzt als Vertreter der projectivischen Verbindungen zu dreien die Untersuchung der *Fläche dritter Ordnung aus drei collinearen Bündeln* (§. 171) mit der eindeutigen ebenen Abbildung derselben an; ihre analytische Ausdrucksform erweitert die Erzeugung sofort auf projectivische Flächenbündel und das Buch schliesst mit einem Ueberblick und Ausblick auf die projectivischen Verbindungen der Elementargebilde zu vier, fünf und sechs und auf die Möglichkeit analoger Verbindungen von Gebilden $k$ter Stufe aus Flächen — als dem wohl natürlichen Abschluss dieser Ideenentwickelung.

Ich denke, es ist schon aus diesem Ueberblick ersichtlich, dass die Entwickelung der Geometrie der Lage aus der engen Verbindung mit der darstellenden Geometrie wesentliche Vortheile empfängt, die ihrerseits der Elemente der Geometrie der Lage selbst bedarf, um nicht bei verschiedenen wichtigen Gelegenheiten Sätze ohne Beweis oder auf Grund von ihrer Methode gänzlich fremdartigen Beweisen benutzen zu müssen. Dass die Verbindung beider Disciplinen eine natürlich-organische und nicht etwa nur durch locale Verhältnisse oder in individueller Anschauung begründete ist, dafür bot allerdings schon die Geschichte ihrer Entwickelung die deutlichsten Belege dar; aus dieser habe auch ich sie zuerst gewonnen. Die Durchführung war aber nicht möglich ohne vielfache Aenderungen und Neuschöpfungen in allen Theilen beider Wissenschaftsgebiete.

Einiger Unterlassungen will ich noch hier gedenken, die, obwohl zu Gunsten der Kürze gemacht, mir doch auch bei der jetzigen Durchprüfung meines Buches wiederum als solche erschienen sind. Ich rechne dahin, dass die Lehren von der Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz der Gebilde zweiter und dritter Stufe nicht trotz der vielfachen Beiträge der beiden ersten Theile noch in zusammenfassender Wiederholung im dritten Theil bei §. 159 und §. 167 als Specialfälle der Collineation eingehend behandelt worden sind — eine solche Behandlung hätte auch Anlass gegeben zur Erörterung der Specialitäten, welche den Erzeugnissen der projectivischen Verbindung solcher Gebilde eigen sind, also den bezüglichen Congruenzen und Complexen, Curven dritter Ordnung, Developpabeln dritter Classe etc., sie bietet für die Anwendung der gemischten Methode ein ausgezeichnet lehrreiches Beispiel in den Chasles'schen Sätzen über die Bewegung starrer Systeme. Auch hätten die Complexe, welche sich bei so wichtigen Gelegenheiten wiederholt darbieten, vielleicht noch etwas eingehender behandelt werden dürfen. Der Uebergang von den Parameter- zu den Coordinaten-Gleichungen konnte weiter verfolgt werden. Oder es hätte bei der Theorie von zwei vereinigten Polarsystemen in der Ebene (§. 162) auf die noch nirgends angegebenen interessanten Beziehungen der Tangenten der Directrixkegelschnitte in den gemeinschaftlichen Punkten zum gemeinsamen Tripel und damit auf die Verbindung dieser Lehre mit den Kegelschnitten F und Φ des §. 154 eingegangen werden können, etc. Aber ich habe auf die Vollständigkeit und Systematik der Ideenentwickelung innerhalb des behandelten Gebietes mehr Werth gelegt als auf die des Materials, an welchem sie darzustellen war.

So mag nur noch erwähnt werden, dass über 1500 methodisch geordnete, fast durchweg in eigener Lehrerfahrung erprobte Aufgaben und Beispiele für alle Stufen der Uebung die Entwickelung begleiten; die beiden letzten betreffen die Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten und ihre eindeutige ebene Abbildung durch Inversion, sowie die Congruenz der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte, ein räumliches Analogon der Curve dritter Classe mit Doppeltangente, der allgemeinen Form der Steiner'schen Hypocycloide (sie wollen überall bis zur eignen Untersuchung hinleiten); ferner, dass über die zu vergleichenden Quellen ein Literaturverzeichniss (p. 731—743) getreue Auskunft gibt, wo auch die ältere Geschichte der darstellenden Geometrie nähere Berücksichtigung gefunden hat; und endlich, dass ein alphabetisches Sachenregister (p. 744—754) zur Bequemlichkeit des Nachschlagens hinzugefügt ist.

Zürich-Unterstrass. Wilh. Fiedler.

W. Fiedler. Notiz über algebraische Raumcurven, deren System zu sich selbst dual oder reciprok ist. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 20. Jahrg. p. 173—79.)

Die einundzwanzig Charaktere des Systems einer Raumcurve — insofern wir dazu auch die bestimmenden Charaktere der sie doppelt berührenden entwickelbaren Fläche und die der Doppelcurve ihrer eigenen Tangentenfläche rechnen — wie es geschehen muss —, sind bekanntlich durch vierzehn Gleichungen mit einander verbunden, welche ihre darstellend geometrischen Beziehungen ausdrücken. Die Notiz entwickelt, dass es Raumcurven aller Ordnungen gibt, deren System zu sich selbst dual ist, d. h. bei welchen einander gleich sind: Ordnung der Curve und Classe ihrer Tangentenfläche, Ordnung der Doppelcurve und Classe der doppelt berührenden Developpabeln, Zahl der stationären Punkte und der stationären Schmiegungsebenen der Curve, Zahl der Doppelpunkte und Doppelschmiegungsebenen derselben, Zahl der stationären Punkte der Doppelcurve und der stationären Ebenen der doppelt berührenden Developpabeln, der dreifachen Punkte der erstern und der dreifachen Ebenen der letztern, der Classe von jener und der Ordnung von dieser; die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve und (nach einem uneigentlichen Ausdruck, den ich der Kürze wegen mir erlaube) der scheinbaren Doppelebenen der Developpabeln, die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Doppelcurve und der scheinbaren Doppelebenen der doppelt berührenden Developpabeln.

Solche Curven sind die Raumcurve dritter Ordnung und die Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit Spitze (Salmon 1849), und die Curve vierter Ordnung zweiter Art mit zwei stationären Tangenten (Cayley 1865). Hier werden die sämmtlichen Curven fünfter und sechster Ordnung aufgezählt, welche dieselben Eigenschaften besitzen und Beispiele von den entsprechenden Curven der Ordnungen sieben bis neun gegeben, speciell die vom Geschlecht Null unter ihnen. Ich zeige, dass unter den Curven fünfter Ordnung allein noch eine Species*) von so vollständiger Dualität des Systems auftritt, wie sie die Cayley'sche Species der Curven vierter Ordnung zweiter Art besitzt; eine Curve nämlich, bei der zu allem Vorigen auch die Ordnung und Classe die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte und der stationären Punkte bei der Originalcurve und der Doppelcurve ihrer Tangentenfläche übereinstimmen, während zugleich diese Doppelcurve keine dreifachen Punkte enthält. Das Problem wird in diesem Falle bestimmt, man erhält sieben Gleichungen für ebenso viele Unbekannte, welche nur diese Lösungen zulassen. Diese beiden sind also die einzigen algebraischen Raumcurven, welche den

*) Sie kommt wohl zuerst vor — jedoch nur mit den 13 Charakteren, die man damals kannte — in der Abhandlung von Schwarz „Crelle's Journal" Bd. 64, p. 14.

Doppelcurve ihrer Developpabeln und der Rückkehrkante ihrer doppelt berührenden Developpabeln gleichartig sind, so dass sie durch diese und die aus ihnen in gleicher Art entspringenden, etc. in steter Selbstwiederholung den Raum anfüllen. Man weiss, dass die Schraubenlinie dasselbe nur hinsichtlich der Doppelcurve ihrer Developpabeln thut.

Zürich-Unterstrass. Wilh. Fiedler.

E. Hess: Ueber zwei Erweiterungen des Begriffs der regelmässigen Körper. (Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. 1875. S. 1—20.)

I. Die *erste* Erweiterung des Begriffs der regelmässigen Körper besteht darin, die Beschränkung, dass die Oberfläche eines solchen Körpers *continuirlich* sein soll, aufzuheben.

Die Betrachtung der höheren Arten der *ebenen regulären Polygone* führt bereits darauf, ein System von p concentrischen nEcken der $a$ten Art, deren Umfang continuirlich ist und deren Kanten als innersten Flächentheil ein reguläres pnEck der 1ten Art einschliessen, während zugleich die Eckpunkte vermöge ihrer Verbindung durch die äussersten Diagonalen ein reguläres pnEck der 1ten Art bilden, als ein reguläres pnEck der paten Art mit *discontinuirlichem Umfange* aufzufassen.

Analog lassen sich auch im *Raume* die möglichen Systeme, welche durch entsprechende concentrische Anordnung der regulären Polyeder mit continuirlicher Oberfläche entstehen, als *reguläre* Körper mit *discontinuirlicher Oberfläche* ansehen.

Ein solches discontinuirliches, reguläres Polyeder kann nur aus einem der Platonischen Polyeder *entweder* durch passende Erweiterung der Grenzflächen *oder* durch Legen von Diagonalebenen erhalten werden. Denn *einmal* müssen die Grenzflächen solcher Polyeder als innersten Körpertheil (innerste Zelle) ein Platonisches Polyeder einschliessen, und *zweitens* müssen die Ecken so auf einer Kugel liegen, dass sie, durch Ebenen verbunden, gleichfalls ein Platonisches Polyeder bilden. Bemerkenswerth ist, dass die eine dieser beiden Eigenschaften hier nicht, wie in der Ebene, die andere bedingt.

Nach diesen Festsetzungen ergeben sich als mögliche discontinuirliche, reguläre Polyeder nur *drei*, nämlich die concentrisch-regelmässigen Anordnungen des regulären Tetraeders zu 2, zu 5 und zu 10.

Der erste dieser Körper (*Keplers* stella octangula) lässt sich aus dem regulären Octaeder oder dem Würfel, die beiden anderen aus dem Icosaeder oder dem Pentagondodecaeder leicht herleiten. Die beiden Systeme von je 5 concentrischen regulären Tetraedern, die aus dem Icosaeder oder dem Pentagondodecaeder entstehen und die sich, während bezüglich ihre Eckpunkte und die Ebenen ihrer Grenzflächen zusammenfallen, zu einander wie rechts und links verhalten, bilden, während jedes von ihnen ein discontinuirlicher, regulärer Körper ist, *zusammen* ein System von 10 concentrischen regulären Tetraedern, den dritten der erwähnten Körper. Bei demselben fällt in jedem der 20 Eckpunkte, die den Ecken eines Pentagondodecaeders entsprechen, je eine Ecke des ersten und zweiten Systems, und ebenso in jeder der 20 Grenzflächen (des innern Icosaeders) je eine Grenzfläche des ersten und zweiten Systems zusammen.

Dieser letztere Körper lässt sich auch durch 5 Systeme von je 2 sich regelmässig kreuzenden Tetraedern gebildet ansehen, oder endlich auch als ein durch 20 Flächen begrenztes 20Eck, wobei jede Grenzfläche als ein aus zwei sich kreuzenden regulären Dreiecken bestehendes (discontinuirliches) Sechseck der 2ten Art, jede Ecke als eine durch zwei sich kreuzende reguläre, dreiflächige Ecken gebildete (discontinuirliche) sechsflächige Ecke der 2ten Art zu betrachten ist. Nach dieser letzten Auffassung sind die Grenzflächen und Ecken dieses Körpers, der im Uebrigen alle Eigenschaften eines regulären Polyeders besitzt, nicht in dem üblichen Sinne regulär — ein Umstand, der für die zweite, unter II zu besprechende Erweiterung des Begriffs eines regelmässigen Körpers von Bedeutung ist.

Bei den bisher festgehaltenen Definitionen sind die erwähnten drei Systeme von regulären Tetraedern, welche sich selbst polarreciprok in Beziehung auf eine concentrische Kugel entsprechen, die einzig möglichen discontinuirlichen, regulären Polyeder. Denn die allein noch in Betracht kommenden Systeme von je 5 regulären Octaedern und je 5 Würfeln, die sich auf bekannte Weise aus dem Icosaeder oder Pentagondodecaeder herleiten lassen, besitzen immer nur je eine der beiden oben erwähnten Eigenschaften.

II. Die zweite Erweiterung des Begriffs eines regelmässigen Körpers besteht darin, einen regelmässigen Körper als einen solchen zu definiren, der *zugleich gleicheckig* und *gleichflächig* ist, der also lauter gleiche (congruente oder symmetrisch gleiche), aber nicht nothwendig (im üblichen Sinne) *reguläre* Ecken hat und von lauter gleichen (congruenten oder symmetrisch gleichen), aber ebenfalls nicht nothwendig *regulären* Flächen begrenzt ist.

Die *gleicheckigen* Polyeder, deren *erste* Arten zuerst *Hessel* betrachtet hat, und die ihnen in Beziehung auf eine concentrische Kugel polar entsprechenden *gleichflächigen* Polyeder enthalten die s. g. *halbregulären* oder *Archimedeischen* Körper als besondere Fälle in sich, indem bei den gleicheckigen Polyedern die von einander verschiedenen Grenzflächen, bei den gleichflächigen die von einander verschiedenen Ecken *regulär* sein müssen. Die Construction der gleicheckigen, wie der gleichflächigen Polyeder lässt sich auf bestimmte Eintheilungen der Oberfläche der Kugel, welche bezüglich dem gleicheckigen Körper *um-*, dem gleichflächigen *ein*geschrieben ist, in entsprechende sphärische Polygone zurückführen.

Die *zugleich gleicheckigen* und *gleichflächigen* Polyeder umfassen *einmal* die bekannten 5 Platonischen, sowie die 4 von Kepler und Poinsot entdeckten regulären Polyeder höherer Art, indem bei diesen die gleichen Ecken, wie die gleichen Flächen beide *regulär* sind.

Was die *übrigen* zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder anlangt, so wird in der Abhandlung gezeigt, dass unter denen *erster Art* nur noch die Gruppen der s. g. *rhombischen* und *quadratischen Sphenoide* den aufgestellten Bedingungen genügen, wobei die quadratischen Sphenoide einen besonderen Fall der rhombischen darstellen und als weitere Specialität das reguläre (Platonische) Tetraeder enthalten.

Von den ausserdem möglichen, zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyedern *höherer Art* und zwar zunächst den *continuirlichen* werden alsdann vorläufig *vier* solcher wie es scheint, bisher noch nicht berücksichtigter Polyeder abgeleitet und beschrieben, und in Betreff der sämmtlichen hierher gehörigen Körper, sowie der genauen und vollständigen Entwickelung auf eine demnächst erscheinende grössere Abhandlung verwiesen.

Schliesslich wird auch noch kurz auf die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder mit *discontinuirlicher Oberfläche* eingegangen, zu denen ausser den unter I aufgeführten zahlreiche andere Gruppirungen, u. A. die ebenfalls schon erwähnten Systeme von je 5 sich kreuzenden Octaedern und Würfeln, sowie bestimmte Gruppirungen von rhombischen und quadratischen Sphenoiden gehören.

Marburg. E. Hess.

E. Hess: Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Kassel 1876. Theodor Kay. 95 S. 11 Fig. auf 2 Tafeln.

Die genannte Schrift enthält die vollständige Ableitung und Beschreibung derjenigen *convexen* und *continuirlichen* Polyeder, welche *zugleich gleicheckig* und *gleichflächig* sind.

In Betreff der Definitionen der gleicheckigen und der gleichflächigen Körper erlaube ich mir hier, auf den zweiten Theil des vorstehenden Berichtes über meine Abhandlung: *„Ueber zwei Erweiterungen des Begriffs der regelmässigen Körper“* zu verweisen.

Die Schrift beschränkt sich auf die Betrachtung der hierher gehörigen *convexen* und *continuirlichen* Körper, d. h. solcher, deren Grenzflächen und Ecken einerseits nur ausspringende ebene und Flächen-Winkel darbieten, andererseits ununterbrochen zusammenhängen, während die Ableitung und Beschreibung der hierher gehörigen *nicht convexen* und *discontinuirlichen* Polyeder einer weiteren Abhandlung vorbehalten wird.

Im §. 1 werden die derartigen Polyeder *erster* Art hergeleitet, zu denen, wie bereits in der erwähnten Abhandlung gezeigt wurde, ausser den 5 Platonischen Körpern die Gruppen der *rhombischen* und *quadratischen Sphenoide* gehören.

Um die hierher gehörigen Polyeder *höherer Art* zu erhalten, werden im §. 2 zunächst die verschiedenen Arten der Herleitung vermittelst der synthetischen und analytischen Methode besprochen. Das für die folgenden Untersuchungen gewählte Verfahren besteht darin, die vollständigen Raumfiguren zu betrachten, die durch die Ebenen der Grenzflächen der *gleichflächigen Polyeder erster Art* gebildet werden, ein Verfahren, das sich zugleich constructiv sehr einfach und vortheilhaft handhaben lässt, indem man nur auf der Ebene einer der gleichen Grenzflächen die Spuren aller übrigen zu construiren braucht.

Im §. 3 wird von der Bestimmung der *Art* eines Polygons, einer Ecke, eines Polyeders gehandelt, und bietet sich hierbei häufig Gelegenheit, auf Beziehungen, die in einer früher erschienenen Schrift des Verfassers (*E. Hess: Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone.* Kassel 1874. Theodor Kay) entwickelt sind, zu verweisen. Die s. g. *erweiterte* Euler'sche Formel wird sodann in weit grösserer Allgemeinheit abgeleitet, als es bisher geschehen ist, und endlich werden die Fälle genauer erörtert, in denen das polar-reciproke Entsprechen der Polyeder ein vollständiges und ungestörtes ist.

Durch die Anwendung der angegebenen Methoden der Untersuchung auf die verschiedenen gleichflächigen Polyeder hat sich das Resultat ergeben, dass nur bestimmte Körper *einer* Gruppe desselben, nämlich der des $(12 + 20 + 30)$ *eckigen* (2×60) *Flachs* solche zugleich gleicheckige und gleichflächige Körper liefern. Es wird daher im §. 4 diese Gruppe der gleichflächigen und der ihnen polar entsprechenden gleicheckigen Körper genauer besprochen, indem die sämmtlichen hierher gehörigen Körper zusammengestellt und die wichtigsten auf die Lage und Beschaffenheit der Ecken, Flächen, Radien und Axen bezüglichen Relationen übersichtlich angegeben werden. Auch werden die Eckencoordinaten und Flächengleichungen der 3 einfachsten und im Folgenden vorzugsweise in Betracht kommenden Körper, des Pentagondodecaeders, Icosaeders und Triacontaeders in Beziehung auf ein rechtwinkliges, durch 3 s. g. 2gliedrige Axen gebildetes Coordinatensystem aufgestellt.

In den §§. 5, 6 und 8 folgt sodann die genaue und systematische Untersuchung der vollständigen Figuren, welche durch die Ebenen der Grenzflächen eines Pentagondodecaeders, Icosaeders und Triacontaeders entstehen. Aus denselben ergeben sich, abgesehen von den nicht convexen und discontinuirlichen Polyedern, die beiläufig erwähnt werden, im Ganzen 8 zugleich gleicheckige und gleichflächige Körper höherer Art. Vier (mit (I) bis (IV) numerirte) sind die Kepler-Poinsot'schen Körper, die sich zu je zweien polarreciprok entsprechen, zwei weitere, (V) und (VII), entstehen aus der vollständigen Figur des Icosaeders und ferner zwei, (IX) und (XI), aus der des Triacontaeders. Die den Körpern (V) und (VII) bezüglich polar entsprechenden (VI) und (VIII) werden im §. 7, und ebenso die den Körpern (IX) und (XI) bezüglich polar entsprechenden (X) und (XII) im §. 9 auf zweifache Weise hergeleitet und beschrieben. Die Gesammtzahl der hierher gehörigen Körper beträgt also 12, und sind dieselben auch die einzig möglichen derartigen Körper, wie am Schlusse der Schrift gezeigt wird.

Ich begnüge mich, diese 8 neuen Körper ((V) bis (XII)) im Folgenden in übersichtlicher Zusammenstellung aufzuführen:

(V). *Das 60eckige Stern-20Flach der 5ten Art;* dasselbe ist begrenzt von 20 Neunecken der 2ten Art, die als innersten Körpertheil ein Icosaeder einschliessen, und hat 60 gleichschenkelig-dreiflächige Ecken, die den 60 Ecken einer bestimmten Varietät eines $(12 + 20 + 30)$ flächigen 60 Ecks entsprechen.

(VI). *Das 60flächige Stern-20Eck der 5ten Art,* welches dem vorigen polar entspricht; seine 20 Ecken sind neunflächig von der 2ten Art und entsprechen den Pentagondodecaederecken, seine 60 Grenzflächen sind gleichschenkelige Dreiecke und schliessen als innersten Körpertheil ein bestimmtes $(12 + 20 + 30)$ eckiges 60 Flach ein.

(VII). *Das 60eckige Stern-20Flach der 25sten Art,* welches von 20 Neunecken der 4ten Art (Icosaederflächen) begrenzt ist und 60 gleichschenkelig-dreiflächige Ecken hat, die wie die Ecken einer bestimmten Varietät eines $(12 + 20)$ flächigen (12×5) Ecks liegen.

(VIII). *Das 60flächige Stern-20Eck der 25sten Art,* dem vorigen polar entsprechend, mit 20 neunflächigen Ecken der 4ten Art, welche wie die Ecken eines Pentagondodecaeders liegen und 60 gleichschenkelig-dreiseitigen Grenzflächen, die ein bestimmtes $(12+30)$ eckiges (12×5) Flach (ein Pyramidendodecaeder) einschliessen.

(IX). *Das (2×60) eckige Stern-30Flach der 15ten Art,* dessen 30 ein Triacontaeder einschliessende Grenzflächen Zwölfecke der 3ten Art, dessen 60 rechte und 60 linke Ecken ungleichseitig dreiflächig sind und wie die Ecken eines bestimmten $(12 + 20 + 30)$-flächigen (2×60) Ecks liegen.

(X). *Das (2×60) flächige Stern-30Eck der 15ten Art,* der polare Körper des vorigen, mit 30 zwölfflächigen Ecken der 3ten Art und (2×60) (d. h. 60 rechten und 60 linken) ungleichseitigen dreieckigen Grenzflächen. Die Ecken entsprechen den Ecken eines $(12 + 20)$ flächigen 30 Ecks, die Flächen schliessen eine bestimmte Varietät eines $(12 + 20 + 30)$ eckigen (2×60) Flachs ein.

(XI). *Das (2×60) eckige Stern-30Flach der 45sten Art,* welches von 30 Zwölfecken der 5ten Art (Triacontaederflächen) begrenzt ist und (2×60) ungleichseitig-dreiflächige Ecken hat, die wiederum den Ecken eines bestimmten $(12 + 20 + 30)$ flächigen (2×60) Ecks entsprechen.

(XII). *Das (2×60) flächige Stern-30Eck der 45sten Art,* dem vorigen polar entsprechend. Seine Ecken, welche wie die des Körpers (X) liegen, sind zwölfflächig von der 5ten Art, und seine (2×60) ungleichseitig-dreieckigen Grenzflächen schliessen als innersten Körpertheil wiederum eine bestimmte Varietät eines $(12 + 20 + 30)$eckigen (2×60)Flachs ein.

Mit Rücksicht auf die Entstehung dieser Körper kann man die (V) bis (VIII) und die (IX) bis (XII) je in eine Gruppe von zwei Paaren passend vereinigen.

Auf weitere Einzelheiten der Schrift einzugehen, gestattet der Umfang dieses Berichtes nicht. Es sei daher nur noch erwähnt, dass für die meisten dieser Körper die Anzahl der Doppelpunkte, Flächen- und Eckendoppelkanten, Doppelebenen (über die Definitionen s. S. 29—34) bestimmt und Beziehungen zwischen diesen Werthen und den die Art der Polyeder bestimmenden Zahlen entwickelt sind.

In den beigegebenen Figuren sind die Grenzflächen dieser Körper mit Benutzung der Entstehung derselben aus den die innersten Kerne bildenden gleichflächigen Polyedern erster Art gezeichnet; und endlich ist am Schlusse der Schrift auch die zwiefache Art der Darstellung dieser Körper durch Papp- oder Fadenmodelle kurz angegeben.

Marburg. E. Hess.

Dr. J. Weyrauch: **Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahlconstructionen mit Rücksicht auf die neueren Versuche.** Ein elementarer Anhang zu allen Lehrbüchern über Eisen- und Stahlconstructionen von Dr. phil. Jakob J. Weyrauch, Professor an der polytechnischen Schule in Stuttgart. (Mit 4 lithographirten Tafeln. Leipzig 1876. B. G. Teubner.)

In neuerer Zeit sind in Deutschland, England, Schweden, Amerika umfassende und zum Theil ausgezeichnete Versuche über die Festigkeitseigenschaften von Eisen und Stahl als Constructionsmaterial angestellt worden. Vorstehende Brochüre soll zunächst die greifbaren Resultate dieser Versuche übersichtlich, ohne viel Details, aber soweit vorführen, dass der ausführende Ingenieur damit auf den heutigen Standpunkt der Beurtheilung gestellt wird. Hieran schliesst sich eine systematische Darstellung der Dimensionenberechnung von Eisen- und Stahlconstructionen, wie sie den neuen Resultaten entsprechend vorzunehmen ist.

Wenn man von der Festigkeit eines Stabes bei irgend einer Beanspruchungsart (Zug, Druck u. s. w.) spricht,*) so versteht man darunter gewöhnlich diejenige Beanspruchung pro Quadrateinheit, welche gerade an der Zerstörungsgrenze liegt, setzt aber dabei stillschweigend eine ruhende oder doch ganz allmählich anschwellende Belastung voraus. In Wirklichkeit ist die Festigkeit t bei einmaliger Beanspruchung eine Function der Geschwindigkeit des Anschwellens der Belastung, so zwar, dass t von unendlich langsam anschwellender (ruhender) bis zu möglichst schnell anschwellender (stossender) Belastung stetig abnimmt.

Indessen die Veränderlichkeit von t ist doch nur gering, solange die Anschwellung nicht sehr schnell erfolgt, und es kann dann für praktische Bedürfnisse t als constant angenommen werden. Ganz falsch aber war die bis vor Kurzem allgemein gemachte Voraussetzung, dass ein Körper, der eine gewisse Beanspruchung *einmal* aushält, diese Beanspruchung auch *beliebig oft* aushalten müsste, gleichgültig in welchen Intervallen die einzelnen Beanspruchungen auf einander folgen.

Schon die alltägliche Erfahrung lehrt das Fehlerhafte dieser Anschauung. Will man einen eingespannten Stab mit der Hand abbrechen, und es genügt ein einfacher Zug nicht, so lässt man mehrmals nach und zieht von Neuem, und wenn auch das nicht hilft, so tritt vielleicht der Bruch durch Hin- und Herbiegen ein. Die Kraft unsers Armes ist im letzten Falle nicht grösser wie im ersten, aber man braucht eben nicht dieselbe Kraft, die Festigkeit hat *nicht* immer denselben Werth, sie nimmt mit der Anzahl der Beanspruchungen ab, und ist auch von anderen Umständen abhängig.

Wie wichtig dieser Umstand für unsre grossen Bauwerke z. B. für Brücken ist, braucht nicht erst auseinandergesetzt zu werden. Es ist nun das Verdienst von A. Wöhler, schon im Jahre 1858 darauf hingewiesen zu haben, dass es für eine zuverlässige Grundlage der Berechnung von Eisen- und Stahlconstructionen nöthig sei, Versuche über die Widerstandsfähigkeit des Materials gegen häufig wiederholte Anstrengungen zu machen. Diese Versuche wurden von Wöhler selbst in den Jahren 1859—70 auf Veranlassung des preussischen Handelsministeriums in umfassender Weise ausgeführt. Sie zeigten, dass allerdings eine gewisse Beanspruchung t das Ma-

---

*) Auf einige Verhältnisse, welche nicht nur für die Ingenieurmechanik von Bedeutung sind, mag hier kurz hingewiesen werden.

terial schon bei einmaliger Wirkung zu zerstören im Stande ist, dass aber auch geringere Beanspruchungen als t (unter Umständen bis weit unter $\frac{1}{2}t$, bei Wechsel von Zug und Druck sogar bis fast $\frac{1}{4}t$) die Zerstörung bewirken können, wenn sie genügend oft wiederholt werden.

Damit war definitiv der neue Gesichtspunkt gewonnen. Der Wechsel in der Gruppirung der Molecüle, welcher durch die wechselnde Beanspruchung bedingt ist, wirkte offenbar ungünstig auf die Widerstandsfähigkeit des Materials ein; dann muss die Zerstörung um so leichter möglich sein, je grösser die *Differenzen* in der Beanspruchung, weil dem entsprechend auch die Stellungsänderungen der Molecüle wachsen, Wöhler konnte folgendes allgemeine Gesetz aufstellen und experimentell nachweisen:

Der Bruch des Materials lässt sich nicht nur durch eine den Werth t überschreitende ruhende Belastung, sondern auch durch vielfach wiederholte Spannungen, von denen keine diesen Werth erreicht, herbeiführen. Die Differenzen der Spannungen sind dabei für die Zerstörung des Zusammenhangs insofern massgebend, als mit ihrem Wachsen die Minimalspannung, welche den Bruch noch herbeiführen kann (die Festigkeit), sich verringert.

Durch die Beanspruchung t wird das Material schon bei einmaliger Wirkung zerstört, kleinere Beanspruchungen als t können durch vielfache Wiederholungen zerstören, je kleiner die Beanspruchung, um so mehr Wiederholungen sind nöthig. Umgekehrt darf die Beanspruchung um so grösser sein, je weniger Wiederholugen wir beabsichtigen. Man sieht also, dass es bei Beurtheilung des Sicherheitsgrades einer Construction auch abgesehen von Stössen und andern Einflüssen sehr darauf ankommt, ob die Construction nur eine gewisse Zeit in Betrieb bleiben soll, wie Eisenbahnschienen, Axen, oder ob unbeschränkte Dauer von ihr verlangt wird, wie von Brücken, Gebäuden u. s. w.

Zur weiterer Präcisirung des Wöhler'schen Gesetzes, besonders in theoretischer Beziehung, bleibt noch Raum genug. Es fragt sich, welchen Einfluss Schnelligkeit der Aufeinanderfolge, Geschwindigkeit des Anschwellens und Dauer der einzelnen Beanspruchungen haben. Die beiden letzten Einflüsse sind übrigens auch in Bezug auf den Specialfall t der Festigkeit noch nicht festgestellt und gleichwohl ging man von dieser Grösse bisher bei fast allen Dimensionenberechnungen aus. Genügende Vorsicht vorausgesetzt, ist die Kenntniss der hier erwähnten Verhältnisse praktisch von geringer Bedeutung.

Soviel ging aus den Wöhler'schen Versuchen und aus später von Spangenberg (ebenfalls im Auftrage des preussischen Handelsministeriums) angestellten hervor, dass die bisherige Dimensionenberechnung trotz bedeutender Materialverschwendung unter Umständen geradezu gefährlich werden kann. Es wurden denn auch bald von verschiedenen Seiten neue Verfahren vorgeschlagen, wobei es sich zunächst darum handelte, die je nach den Umständen zu erwartende Festigkeit anzugeben. Alle Verfahren, von denen indess keines genügend ausgebildet ist, sind in einem Anhange zu meiner Brochüre vorgeführt und einer Kritik unterworfen worden.

Bei Aufstellung neuer Formeln für die Festigkeit hat man natürlich vom Wöhler'schen Gesetze auszugehen; die speciellen Versuchsresultate Wöhler's jedoch sind nur mit Vorsicht zu verwenden, und es darf ihnen nicht mehr Gewicht beigelegt werden, wie etwa den Resultaten Rondelets oder Brunels oder eines Andern für die frühere Dimensionenberechnung. Die allgemeinen Formeln ändern sich dann nicht durch neue Versuche, ebenso wenig wie *früher* eine neue Versuchsreihe den *damaligen* Gang der Dimensionenberechnung ändern konnte.

Die in der Brochüre angewandte, äusserst einfache Berechnungsweise gründet sich auf zwei Formeln für die Festigkeit, von welchen die erste von Launhardt, die zweite mit ähnlichem Gedankengang vom Verfasser aufgestellt ist.

Fassen wir eine bestimmte Construction ins Auge. Ein Constructionstheil kann entweder immer in gleicher Richtung oder abwechselnd in entgegengesetzten Richtungen (z. B. auf Zug und Druck oder auf Schub in zweierlei Sinn) beansprucht werden. Es bedeute für die zu erwartende Beanspruchungs*art*, sagen wir für *Schub*, t die gewöhnliche Festigkeit bei ruhender Belastung („Tragfestigkeit"), u die Festigkeit, wenn der Körper nach jeder Beanspruchung in einerlei Richtung wieder in den spannungslosen Zustand übergeht („Ursprungsfestigkeit"), s die Festigkeit, wenn abwechselnd gleich grosse Beanspruchungen in entgegengesetzten Richtungen stattfinden („Schwingungsfestigkeit"). Ist nun φ das Verhältniss der äussersten Grenzspannungen, welche der Constructionstheil zufolge der statischen Berechnung auszuhalten hat — der kleineren zur grösseren —, so ist die zu erwartende Festigkeit („Arbeitsfestigkeit") bei Beanspruchung in einerlei Richtung, φ positiv,

$$a = u\left(1 + \frac{t-u}{u}\varphi\right)$$

bei Beanspruchung in entgegengesetzten Richtungen, φ negativ,

$$a = u\left(1 + \frac{s-u}{u}\varphi\right)$$

t, u, s sind specielle Fälle der Arbeitsfestigkeit a, sie müssen durch Versuche ermittelt werden.

Um zu zeigen, wie gut die Launhardt'sche Formel mit den Versuchen, soweit solche vorliegen, stimmt, diene Folgendes. Hat der Stab einen Querschnitt von einer Quadrateinheit, und wechseln die Beanspruchungen auf Zug allein zwischen c und a, so hat man $\varphi = \frac{c}{a}$. Es ist nun z. B. für Krupp'schen Federgussstahl,

wenn $c =$	0	250	400	600	1100
a nach Versuchen	500	700	800	900	1100
a nach Formel	500	711	800	900	1100,

wobei, da es sich nur um einen Vergleich handelt, die Originalzahlen Wöhlers, Centner per Quadratzoll angebend, stehen geblieben sind.

Nachdem die Festigkeit, welche ein bestimmter Constructionstheil den zu erwartenden Beanspruchungen entgegensetzen wird, ermittelt werden kann, hat es keine Schwierigkeit mehr, unter Berücksichtigung sonstiger Einflüsse und nach Wahl geeigneter Sicherheitscoefficienten die zulässige Beanspruchung b pro Quadratcentimeter festzustellen. So kann man für *eiserne* Brücken- und Hochbauconstructionen, von welchen unbeschränkte Dauer verlangt wird, und wobei die neuen Resultate besonders wichtig sind, allgemein setzen.

$$b = 700\,(1 + 0{,}5\,\varphi)\ \text{Kil.}$$

wonach b zwischen 350 und 1050 Kil. variirt, während bisher constant $b =$ ca. 700 angenommen wurde. — Die Besprechung der Festigkeitseigenschaften und praktische Erfahrung liefern Anhaltspunkte genug, die Sicherheitscoefficienten für alle Fälle passend zu wählen.

Nach Ableitung der zulässigen Beanspruchung wird die Anwendung der vorgeführten Berechnungsweise bei den verschiedenen Constructionssystemen angedeutet und durch Beispiele erläutert. Eine ganz besondere Aufmerksamkeit ist den Nietverbindungen zugewandt, die derselben sehr bedürftig waren. Obschon auch hier der gegenwärtige Standpunkt der Theorie volle Berücksichtigung fand, glaube ich nicht, dass die Einfachheit der Anwendung gelitten hat.

Die gewohnten Methoden der statischen Berechnung bleiben durch die neue Dimensionenfeststellung ganz ungeändert. Für diejenigen, welche die statische Berechnung graphisch vorzunehmen pflegen, enthält die besprochene Brochüre Alles, was zur vollständigen Berechnung einer Brücken- oder Hochbauconstruction nach Vollendung des Kräfteplans zu thun übrig bleibt. Bei der bisherigen rohen *Dimensionen*berechnung waren die genauen *statischen* Berechnungen ziemlich zwecklos.

In den Werken über Eisen- und Stahlconstructionen findet sich gewöhnlich nur sehr wenig über die Festigkeitseigenschaften des Materials und eine neue Dimensionenberechnung konnte natürlich noch nicht berücksichtigt werden. Der Verfasser darf daher hoffen, mit dieser Brochüre, welche sich als Anhang zu jedem Lehrbuche benutzen lässt, einem wirklichen Bedürfnisse entsprochen zu haben.

Genf, August 1876. J. Weyrauch.

F. Klein: Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Math. Annalen. X. p. 199—209. (Erlanger Berichte. Dec. 1875.)

Anknüpfend an Zeuthen's Untersuchung der Curven vierter Ordnung (Math. Ann. VII) entwickelt der Verf. mit Hülfe elementarer Continuitätsbetrachtungen den folgenden Satz:

Wenn eine Curve von der Ordnung n und der Classe k nur einfache Singularitäten besitzt, und es bezeichnet r' die Zahl der reellen Spitzen, w' die Zahl der reellen Wendepunkte, d'' die Zahl der isolirten reellen Doppelpunkte und t'' diejenige der isolirten reellen Doppeltangenten, so ist:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Es scheint diese Relation, sobald es sich um gestaltliche Untersuchung algebraischer Curven handelt, eine fundamentale Bedeutung zu besitzen.

München. F. Klein.

F. Klein: Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. (Math. Annalen. X. p. 365—397.)

— **Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen.** (Zweite Mittheilung.) (Math. Annalen. X. p. 398—416.)

— **Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades.** (Zweiter Aufsatz, noch nicht erschienen.) (Math. Annalen. XI.)

Die Absicht, welche ich mit den vorgenannten Arbeiten verfolge, ist zunächst die, die mannigfachen Resultate, welche die Functionentheorie für die Lehre von den algebraischen Curven geliefert hat, an den Curven selbst möglichst zur unmittelbaren Anschauung zu bringen. Ich kann aber nicht zweifeln, dass dieser Weg, je länger man ihn verfolgt, um so mehr über sein nächstes Ziel hinausführt; indem neue Fragestellungen entstehen, kann ein Fortschritt der Theorie nicht ausbleiben. In dieser Hinsicht möchte ich hier vor Allem auf die von mir in den genannten Aufsätzen festgehaltene, dem geometrischen Vorstellungskreise entnommene Methode der *Continuität* aufmerksam machen; ich lasse die Curven vierten Grades, welche zu untersuchen sind, bald in ein Kegelschnittpaar, bald (in dem zweiten Aufsatze) in einen doppelt zählenden Kegelschnitt mit acht Scheiteln (sommets) übergehen [der dann als eine hyperelliptische Curve vom Geschlechte 3 zu betrachten ist] und studire die Fragen, welche zu erledigen sind, vorab an diesen speciellen Fällen, um von ihnen zum allgemeinen Falle aufzusteigen.

Bereits bei einer früheren Gelegenheit (Math. Annalen VII. p. 558) habe ich die Riemann'schen Flächen, welche ich in den hier vorliegenden Aufsätzen fortwährend gebrauche, definirt und an einigen speciellen Fällen erläutert; sie werden von denjenigen reellen Punkten gebildet, welche den imaginären Tangenten der algebraischen Curve angehören. In der speciell auf sie bezüglichen, diesmaligen Mittheilung erläutere ich gewisse allgemeine Fragen; ich bespreche die Anordnung ihrer Blätter und deren Verzweigung; ich bestätige durch directe Abzählung die Richtigkeit derjenigen Zusammenhangszahl, welche den betr. Flächen vermöge ihrer Beziehung zu den gewöhnlichen Riemann'schen Flächen beizulegen ist. Ich erläutere diese Verhältnisse insonderheit an den Curven dritter Ordnung, die, als Curven sechster Classe bereits sechs übereinander liegende Flächen-Blätter darbieten können, und erhalte dadurch namentlich auch eine Discussion der Lage ihrer imaginären Wendetangenten, die vielleicht an sich von Interesse ist.

In dem ersten Aufsatze: Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale etc. benutze ich sodann diese neue Riemann'sche Fläche, um bei den Curven vierter Classe den Verlauf der überall endlichen Integrale zur Anschauung zu bringen, indem ich nämlich diejenigen auf der Fläche verlaufenden Curven zeichne, längs deren der reelle oder der imaginäre Theil der, einer bestimmten Zerschneidung der Fläche entsprechenden, Normalintegrale constant ist. Es waren dazu einige gestaltliche Untersuchungen über Curven vierter Classe nothwendig, auf die ich hier nur verweisen kann, ohne auf sie näher einzugehen. Ich habe sodann meine Aufmerksamkeit namentlich darauf gewandt, die imaginären Bestandtheile zu bestimmen welche in den Perioden der Normalintegrale enthalten sind. In solcher Weise gelang es mir, Sätze über die Realität gewisser Berührungscurven zu gewinnen. Eine Curve vierter *Ordnung* (und von solchen mag jetzt die Rede sein) besteht, wenn sie keinen singulären Punkt hat, aus 4 oder 3, 2, 1, 0 Ovalen, und, wenn die Zügezahl 2 ist, muss man unterscheiden, ob sich die betr. 2 Ovale einschliessen oder ausschliessen. Im ersteren Falle nenne ich die Curve (nach Zeuthen) eine Gürtelcurve und bezeichne sie mit V, während die Zahlen I, II, III, IV den anderen Curven bez. mit 4, 3, 2, 1 Zügen beigelegt sein mögen (wobei dann die Curven ohne reelle Züge vorab noch ausgeschlossen sind). Dies vorausgesetzt, gelten folgende Sätze (p. 396):

Von den 63 Systemen viermal die Curve berührender Kegelschnitte sind in den Fällen I, II, III, IV, V bez. reell:

63, 31, 15, 7, 15.

Für die 64 Systeme sechsmal berührender Curven dritter Ordnung werden diese Zahlen:

64, 32, 16, 8, 16.

Unter den 728 Systemen viermal osculirender Curven dritter Ordnung sind immer und nur:

26

reell.

Endlich finden sich unter den 4096 dreimal hyperosculirenden Curven dritter Ordnung in den verschiedenen Fällen

512, 256, 128, 64, 128

reelle.

Bei diesen Untersuchungen war ich noch nicht auf diejenigen Fragen eingegangen, welche mit der Unterscheidung der sogenannten ϑ-Charakteristiken zusammenhängen. Sie nehme ich in dem zweiten Aufsatze „Ueber Abel'sche Integrale etc." in Angriff, beschränke mich aber dabei zunächst auf Curven mit vier reellen Zügen. Unter Voraussetzung derjenigen Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche, welche ich in dem ersten Aufsatze angab, schreibe ich die Charakteristiken wirklich an, welche den 28 (in diesem Falle reellen) Doppeltangenten zukommen, und bestimme den ausgezeichneten Kegelschnitt, dessen drei Berührungspunkte nach Clebsch-Gordan als untere Grenzen der Normalintegrale beim Jakobi'schen Umkehrprobleme zu wählen sind.

München. F. Klein.

K. Becker: Die Grundlagen der Geometrie. (Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, XX, 6, p. 445.)

Die Untersuchungen Riemann's „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" zerfallen in einen rein wissenschaftlichen und einen speculativ philosophischen Theil. Man kann nun in dem letzteren Theile, wie der Verfasser, ein entschiedener Gegner Riemann's und seiner Nachfolger, sowie aller „absoluten" Geometrie sein, ohne das grosse Verdienst zu verkennen, welches sich Riemann erworben hat durch Aufwerfung der Frage:

„Welches sind die nothwendigen und hinreichenden Voraussetzungen, die wir über den Raum selbst machen müssen, damit die Sätze der Geometrie ohne weitere Axiome begründet werden können?"

Es ist Helmholtz gewesen, welcher vor allem die Beantwortung dieser Frage zum Gegenstande seiner Untersuchungen „über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie" gemacht hat, Untersuchungen, die leider wegen ihrer rein analytischen Natur bisher ohne Einfluss auf die wissenschaftliche Bearbeitung der Geometrie selbst bleiben mussten. Verfasser sucht nun dasselbe Ziel auf rein geometrischem Wege zu erreichen, indem er sechs Postulate aufstellt, und zeigt, dass dieselben hinreichen, die übrigen Axiome Euklids zu beweisen. Dabei geht er von dem Gedanken aus: *„Sollen die Eigenschaften der geometrischen Figuren als nothwendige Folgen der Natur des Raumes erscheinen, was sie doch ohne Zweifel sind, so* *dürfen auch keine anderen Voraussetzungen gemacht werden, als solche, welche sich auf den Raum selbst beziehen.*“

Mannheim. Johann Karl Becker.

Die Laplace'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen. Von Dr. J. Dienger in Karlsruhe. (Denkschriften der math. naturwiss. Klasse der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. XXXIV.)

In dem 4. Kapitel der Théorie analytique des probabilités (1812, S. 304 ff.) hat Laplace von der „Wahrscheinlichkeit der Fehler der mittlern Resultate einer grossen Zahl von Beobachtungen, und von den vortheilhaftesten mittlern Resultaten“ gehandelt. Er ist jedoch thatsächlich nicht über den Fall zweier Unbekannten hinausgegangen, so dass es immerhin wünschenswerth schien, die Aufgabe in voller Allgemeinheit, natürlich ermöglicht durch die jetzigen Hilfsmittel der Algebra, zu lösen. Diese Auflösung hat sich die vorliegende Abhandlung gestellt.

Die Aufgabe selbst stellt sich in folgender Form dar. Die Werthe der n Grössen

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \tag{1}$$

sollen bestimmt werden unter der Voraussetzung, man habe für die s Grössen

$$p_1^{(r)}u_1 + p_2^{(r)}u_2 + \ldots + p_n^{(r)}u_n + A_r, \text{ wo } r = 1,\ 2,\ \ldots,\ s \tag{2}$$

durch unmittelbare Beobachtung die Werthe $B_1, \ldots, B_s$ erhalten. Die p und A sind bekannte Zahlen; $s > n$ und schliesslich s eine sehr grosse Zahl.

Da, wenn die B genau richtig gefunden wären, zwischen den p und A Bedingungsgleichungen bestehen müssten, was nicht angenommen wird, so müssen wir nothwendig die B als mit Fehlern behaftet ansehen. Ist ε_r der Fehler, den man bei der Beobachtung, welche B_r ergab, begeht, und kennt man die richtigen Werthe der u, so ist

$$\varepsilon_r = p_1^{(r)}u_1 + p_2^{(r)}u_2 + \ldots + p_n^{(r)}u_n + A_r - B_r, \tag{3}$$

wo diese richtigen Werthe von u eingesetzt sind. Da man letztere nicht kennt, so muss man sich mit Wahrscheinlichkeiten behelfen, und die Laplace'sche Methode besteht nun darin, dass man die u derart bestimmt, dass die n Grössen

$$E_a = \gamma_1^{(a)} \varepsilon_1 + \gamma_2^{\prime(a)} \varepsilon_2 + \ldots + \gamma_s^{(a)} \varepsilon_s, \; a = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

die unter den gegebenen Umständen wahrscheinlichsten Werthe annehmen, wobei die ns Grössen γ vorläufig noch beliebig (aber bestimmt gedacht) bleiben. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit, bei der r^{ten} Beobachtung einen Fehler x zu begehen, durch $f_r(x)dx$ bezeichnet werden.

Die Methode, die zur Auflösung der so ausgedrückten Aufgabe angewendet wird, weicht von der Laplace'schen ab, und ist in ihrem Wesen die von Poisson in seinem bekannten Werke befolgte, natürlich für diesen allgemeinen Fall erweiterte. So wird gefunden, dass

$$W = \frac{dq_1 \ldots dq_n}{(2\pi)^n} \overline{\int \cdots \int}_{-\infty}^{+\infty} \varrho \cos(\varphi - \alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n) \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeit angiebt, es sei zugleich

$$E_1 = q_1, \; E_2 = q_2, \; \ldots, \; E_n = q_n, \tag{6}$$

wo

$$\varrho_r^2 = \left[\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots + \alpha_n \gamma_r^{(n)}) x dx\right]^2 + \left[\int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots) x dx\right]^2,$$

$$\cos\varphi_r = \frac{1}{\varrho_r} \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \cos(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots) x dx, \; \sin\varphi_r = \frac{1}{\varrho_r} \int_{x_1}^{x_2} f_r(x) \sin(\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots) x dx;$$

$$\varrho = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_s, \; \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \varphi_s,$$

und wo x_1 und x_2 die äussersten Grenzen bedeuten, zwischen denen die Beobachtungsfehler schwanken können.

Wird vorausgesetzt, dass s sehr gross ist, so findet sich nun, dass die Grösse (5) ein Maximum ist, wenn

$$q_1 = \Sigma k_r \gamma_r^{(1)}, \; \cdots, \; q_n = \Sigma k_r \gamma_r^{(n)}, \tag{7}$$

wo $k_r = \int_{x_1}^{x_2} x f_r(x) dx$ und das Summenzeichen sich auf $r = 1, 2, \ldots, s$ bezieht. Führt man diese Werthe in (6) ein, so ergeben sich n Gleichungen zur Bestimmung der u, welche die lineare Form haben — ein Vorzug, der mit der hier beliebten Art der Auflösung unserer Aufgabe bezweckt war.

In Bezug auf die Wahrscheinlichkeit der u selbst ist damit Nichts entschieden, und es muss dies bei der ganzen Untersuchung wesentlich festgehalten werden.

Setzt man in (6)

$$q_m = \Sigma k_r \gamma_r^{(m)} + \xi_m\,, \tag{8}$$

so ist hiernach der wahrscheinlichste Werth von ξ_m Null. Werden überdies die vorhin bestimmten Werthe der u durch $U_1, \ldots, U_n$ bezeichnet, so ergiebt das Einsetzen von (8) in (6) ein System von Gleichungen, die für die u die Werthe

$$U_1 + \eta_1, \cdots, U_n + \eta_n$$

liefern, wo nun

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)} + \cdots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} &= \xi_1\,, \\ &\vdots \\ \eta_1 \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)} + \cdots + \eta_n \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} &= \xi_n\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den η und ξ geben. Erstere Grössen haben offenbar den Charakter von Verbesserungen (Fehlern), welche an die U anzubringen sind, wenn die E um die ξ von ihren wahrscheinlichsten Werthen abweichen.

Für die weitere Entwickelung war es nun von Wichtigkeit in dem Ausdrucke von W, der durch Einführung von (8) umgestaltet war, und hiess

$$W = \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_n}{(2\pi)^n} \overbrace{\int \cdots \int}^{+\infty}_{-\infty} e^{-\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2} \cos(\alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_n \xi_n)\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_n\,,$$

die ξ durch die η zu ersetzen. Darin war

$$2h_r^2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f_r(x)\,dx - \Big[\int_{x_1}^{x_2} x f_r(x)\,dx\Big]^2.$$

Diese Einführung verwandelt

$$\Sigma h_r^2 (\alpha_1 \gamma_r^{(1)} + \cdots + \alpha_n \gamma_r^{(n)})^2 \text{ in } SS\, A_{i,k}\, \alpha_i \alpha_k\,,$$

wo $A_{i,k} = \Sigma h_r^2 \gamma_r^{(i)} \gamma_r^{(k)}$, und die Summenzeichen S sich auf $i = 1, \cdots, n$; $k = 1, \cdots, n$ beziehen. Diese Summe lässt sich bekanntlich in der Form $S p_i z_i^2$ darstellen, und um nicht Fremdes citiren zu müssen, wurde die Umwandlung allgemein betrachtet (§. 3). Diese, der Natur der Sache nach, sehr weitläufige Untersuchung mag hier übergangen werden. So findet sich nun

$$W = \frac{M}{\sqrt{P}} \frac{d\eta_1 \cdots d\eta_n}{(2\sqrt{\pi})_n} e^{-\frac{1}{4P} \underset{\alpha}{S} \underset{\beta}{S} D_{\alpha,\beta} \eta_\alpha \eta_\beta}, \tag{10}$$

$$M = \begin{vmatrix} \Sigma \gamma_r^{(1)} p_1^{(r)}, & \cdots, & \Sigma \gamma_r^{(1)} p_n^{(r)} \\ \vdots & & \\ \Sigma \gamma_r^{(n)} p_1^{(r)}, & \cdots, & \Sigma \gamma_r^{(n)} p_n^{(r)} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & \cdots, & A_{1,n} \\ \vdots & & \\ A_{n,1}, & \cdots, & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$D_{\alpha,\beta} = \underset{i}{S} \underset{k}{S} P_{i,k} \Sigma_r \gamma_r^{(i)} p_\alpha^{(r)} \Sigma_r \gamma_r^{(k)} p_\beta^{(r)}, \quad P_{i,k} = \frac{\partial P}{\partial A_{i,k}}.$$

Die (10) drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass den U die Verbesserungen η beizulegen seien — immer natürlich in dem hier gemeinten Sinne.

Daraus wird dann in bekannter Weise abgeleitet, dass

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho_r} e^{-z^2} dz \tag{11}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, es liege die an U_i anzubringende Verbesserung zwischen

$$-2\varrho_r \sqrt{\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}} \text{ und } +2\varrho_r \sqrt{\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T}}, \tag{12}$$

wo

$$T = \begin{vmatrix} D_{1,1}, & \cdots, & D_{1,n} \\ \vdots & & \\ D_{n,1}, & \cdots, & D_{n,n} \end{vmatrix};$$

ϱ_r ist natürlich eine beliebige Grösse.

Die Grössen γ sind bis jetzt ganz beliebig. Es wird nun gezeigt, dass die Grösse

$$\frac{P \frac{\partial T}{\partial D_{i,i}}}{T} \tag{13}$$

zu einem Minimum wird, wenn

$$\gamma_r^{(i)} = \frac{\mu p_i^{(r)}}{h_r^2}. \tag{14}$$

Den Nachweis führt die Abhandlung in der Weise, dass sie zeigt, es sei dann jeder Differentialquotient von (13) nach jedem γ Null. Die Art der Nachweisung ist eine dem besonderen Falle angepasste, die sich nicht mit kurzen Worten anführen lässt.

So gelangt endlich die ganze Untersuchung zu dem folgenden Hauptergebnisse.

Bestehen s-Beobachtungsgleichungen

$$p_1^{(r)}u_1 + \cdots + p_n^{(r)}u_n + A_r = B_r;\ r = 1, 2, \cdots, s,$$

in denen die B durch unmittelbare Beobachtungen gefunden wurden, und wo die durch (3) bestimmten ε die Beobachtungsfehler darstellen, wenn die u genau bekannt sind, und man will nun die u so bestimmen, dass n lineare Funktionen (4) dieser Beobachtungsfehler ihre theoretisch wahrscheinlichsten Werthe [die (7)] annehmen, so wird dies am *zweckmässigsten* geschehen aus folgendem System:

$$\begin{aligned} u_1\eta_{1,1} + \cdots + u_n\eta_{1,n} &= \Sigma_r g_r p_1^{(r)}(k_r - \delta_r), \\ &\vdots \\ u_1\eta_{n,1} + \cdots + u_n\eta_{n,n} &= \Sigma_r g_r p_n^{(r)}(k_r - \delta_r), \end{aligned} \qquad (15)$$

wo $\eta_{i,k} = \Sigma_r g_r p_i^{(r)} p_k^{(r)}$, $g_r h_r^2 = h^2$, $\delta_r = A_r - B_r$.

Diese Bestimmung der u hat die Eigenschaft, dass, wenn die linearen Formen (4) etwas von ihren wahrscheinlichsten Werthen abweichen, die Aenderungen der u, die davon die Folge sind, in den möglichst engsten Grenzen eingeschlossen bleiben. Die Grösse h, die in (15) wegfällt, bleibt unbestimmt. In dem besonderen Falle: $f_r(-x) = f_r(+x)$, ist $k_r = 0$.

Es wird nun noch gezeigt, dass man auf einem durchaus verschiedenen Wege zu demselben Ergebnisse gelangen kann, indem man die unbestimmten Grössen α so bestimmt, dass der mittlere Werth von $\Sigma\alpha_r^2\varepsilon_r^2$ ein Minimum wird.

Nunmehr wird (§. 8) die Aufgabe derart behandelt, dass man die wahrscheinlichsten Werthe der u selbst ermitteln will. Für den Fall, dass

$$f_r(x) = \frac{\sqrt{g_r}}{2h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{g_r x_r^2}{4h^2}}, \qquad (16)$$

fallen die jetzt ermittelten Werthe mit obigen zusammen (wobei jedoch s nicht sehr gross sein muss). Die „zweckmässigsten" Werthe sind also jetzt auch die wahrscheinlichsten.

Zum Schluss wird nun noch die Bestimmung von h vorgenommen, wenn man (16) voraussetzt (Methode der kleinsten Quadrate). Doch muss hier s immerhin als sehr gross angenommen werden. Für die eigentliche Laplace'sche Methode bleibt h^2 unbestimmbar, kommt übrigens in dem Hauptergebniss (15) thatsächlich nicht vor. — Damit ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Karlsruhe. J. Dienger.

S. Günther: Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert. (Zeitschrift für Mathematik und Physik. 20. Jahrgang.)

Die an mathematischen Antiquitäten reiche Stadtbibliothek zu Nürnberg bewahrt auch eine interessante geometrische Incunabel, die „Geometria deutsch", ein Büchlein von nur 8 Blättern, ohne irgendwelche Angabe über Entstehungszeit, Verfasser, Druckort etc. Aus äusseren und inneren Gründen erschien es angezeigt, anzunehmen, dass das Schriftchen in den letzten Jahren des angegebenen Jahrhunderts in einer oberdeutschen Stadt gedruckt worden sei; der Inhalt bezieht sich auf einige geometrische Aufgaben einfachster Natur: Verzeichnung einer Senkrechten, Theilung eines Winkels in zwei gleiche Theile etc. Für π findet sich der Werth $3\frac{1}{7}$, das reguläre Achteck wird richtig mit Hülfe eines geometrischen Satzes verzeichnet, auf dessen Genesis durch die neuesten Untersuchungen M. Cantor's ein unerwartet helles Licht gefallen ist, für das Siebeneck gilt die bekannte Näherung, dass seine Seite der halben Dreiecksseite gleich sei, das Fünfeck wird in der später durch den Namen Albrecht Dürer's bekannter gewordenen Weise gebildet. Zum Schluss wird dem Zeitgeist durch Verfertigung des Risses für einen Wappenschild und einen Turnierhelm Rechnung getragen.

In der angeführten Arbeit wird der Originaltext vollständig wiedergegeben und mit Anmerkungen begleitet. Im Anschluss an die Thatsache, dass jene Verzeichnung des regelmässigen Fünfecks mit Hülfe nur einer einzigen Zirkelöffnung geleistet wird, schliesst sich eine kurze geschichtliche Entwickelung der früher in hohem Ansehen stehenden Geometrie Einer Zirkelöffnung an, welche der Namen Abul-Wasa, Cardanus, Tartaglia, Benedictus etc. Erwähnung zu thun hat und mit Steiner's berühmtem Werke ihren natürlichen Abschluss findet. Bei Gelegenheit der erwähnten Siebeneckscontruktion wird ferner gezeigt, wie sich dieselbe aus einem von Weihrauch für das reguläre Vierzehneck aufgestellten Theoreme naturgemäss herleiten lässt.

München. S. Günther.

M. Curtze: Bemerkungen zu dem Aufsatze Günther's: „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert." (Schlömilch, Zeitschrift, XX., 3, Hist. Lit. Abth. 57—60.)

Zum Theil Berichtigungen, zum Theil weitere Ausführungen der Arbeit Günther's. Nachweis, dass das Buch „*Geometria deutsch*" den Bibliographen wohl bekannt, dass es handschriftlich noch ältere in deutscher Sprache verfasste Geometrieen giebt, und Darlegung des Weges, durch welchen Egen zur Kenntniss der Thatsache kam, dass Cardan durch Tartaglia zu den Problemen, die Aufgaben der Geometrie mit nur einer Zirkelöffnung auszuführen, angereizt wurde. Nebenbei wird die Erfindungsgeschichte der Auflösung der Gleichungen 3. Grades dem Werke von Hankel gegenüber richtig gestellt.

Thorn. M. Curtze.

M. Curtze: Reliquiae Copernicanae. Nach den Originalen in der Universitäts-Bibliothek zu Upsala herausgegeben. Mit einem Holzschnitt und einer lithographirten Tafel. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1875. IV. 67 S. gr. 8. Preis 1,60 ℳ.

Bei Gelegenheit der von dem Herausgeber besorgten Säcularausgabe der Revolutiones von Copernicus waren demselben die dem grossen Astronomen einst gehörenden, jetzt in Upsala aufbewahrten Bücher auf hohe Verwendung des Fürsten Reichskanzlers zur Disposition gestellt. Obschon nun in denselben eine ziemliche Anzahl von Notizen sich finden, die für die oben erwähnte Ausgabe mit Nutzen hätten gebraucht werden können, so liessen die Umstände die Benutzung damals nicht zu. Deshalb hat der Verfasser in diesem Büchlein, das ein Separatabdruck aus Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik ist, nachträglich die betreffenden Notizen herausgegeben und mit ausführlichen historischen und sachlichen Bemerkungen versehen. Das Buch zerfällt in 5 Capitel nach den verschiedenen Büchern, denen die handschriftlichen Notizen des Copernicus entnommen sind. Das erste betrachtet die Randbemerkungen in dem *Λεξικὸν κατὰ στοιχείων* des Johannes Crastonus (Mutine 1499), soweit dieselben nicht rein philologischen Werth haben; d. h. vorzugsweise Bemerkungen über den altgriechischen Kalender. Das zweite nimmt von einer Note des Copernicus in der Editio Princeps des Euklides von 1482 ausgehend, worin derselbe von dem Werke des Nikomedes περὶ κογχοειδῶν γραμμῶν als einem ihm bekannten handelt, Veranlassung, die Geschichte der Trisection des Winkels bei den Griechen und Arabern näher zu erläutern. Dabei wird aus dem *Liber trium fratrum* zum ersten Male ein Abschnitt über die Trisection veröffentlicht, der im Wesentlichen mit dem von Copernicus commentirten identisch ist, und dem letztern Abschnitte wahrscheinlich als Quelle gedient hat. Das dritte Capitel handelt über die Einzeichnungen des Copernicus in die *Tabule Astronomice Alfonsi Regis* und der *Tabule directionum profectionumque* des Regiomontan. Hierin sind die Notizen sehr zahlreich und für das Verständniss der Revolutiones und deren Entstehungsgeschichte von höchster Wichtigkeit. Darunter finden sich auch Beobachtungen aufgezeichnet, die gleichfalls ihre Verwendung in dem grossen Werke gefunden haben, dazu eine Venusbeobachtung vom Jahre 1532, die späteste, welche bis jetzt von ihm bekannt geworden. Eine grosse Reihe von astronomischen Tafeln, Vorarbeiten für die Tafeln der Revolutionen, sowie eine ältere Form des letzten Capitels dieses Werkes kommen ebenfalls zum Abdruck. Auch wird der Nachweis geführt, dass weder Maurolykus noch Rheticus die Einführung der Secanten in die Trigonometrie gebührt, sondern Copernicus, dessen Secantentafel, an die bekannte Tangententafel, die Tabula foecunda des Regiomontan, angelehnt, ebenfalls abgedruckt ist. Eine Tafel benutzt schon zweite Differenzreihen zur Interpolation. Capitel 4 enthält dann astrologische Bemerkungen des Copernicus zu dem Albohazen Hali filius Abenragel von 1485; das erste Mal, dass solche Notizen entdeckt und veröffentlicht worden sind. Sie sind sämmtlich astrologisch-medicinischen Inhalts und aus dem Quadripartitum des Ptolemaios entnommen. Daran schliessen sich im fünften und letzten Capitel noch einige Bemerkungen über den Folianten V. I. 1. 17. der Universitätsbibliothek zu Upsala an, der Werke des Pontanus, des Bessarion und Arati phaenomena graece enthält. Mit wenigen Ausnahmen sind die von Copernicus hier abgedruckten Notizen zum ersten Male veröffentlicht; sie bilden eine nothwendige und wichtige Ergänzung zu der Säcularausgabe der Revolutionen. Ein Namen- und Sachregister schliesst den Band.

Thorn. M. Curtze.

M. Curtze: Hat Copernicus die Einleitung in sein Werk selbst gestrichen oder nicht?

In der Originalhandschrift der Revolutiones des Copernicus befindet sich eine von den frühern Ausgaben unterdrückte Einleitung, die erst 1854 von den Polen veröffentlicht wurde. Cantor hatte die Ansicht aufgestellt, diese Einleitung sei von Copernicus selbst gestrichen und an ihre Stelle die Widmung an Papst Paul III. getreten. Der Verfasser der kurzen Note versucht seine abweichende Meinung in Kürze darzulegen und kommt zu dem Schlusse, dass diese Einleitung ohne Erlaubniss des Copernicus, ja ohne dass er davon wusste, durch Rheticus auf Anrathen des Osiander gestrichen sei.

Thorn. M. Curtze.

G. Sidler: Zur Dreitheilung eines Kreisbogens. (Programm der Kantonschule in Bern, 1876.)

Die Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Kreisbogen den dritten Theil abzuschneiden, wird durch drei Punkte dargestellt, die Ecken eines dem Kreis eingeschriebenen regulären Dreiecks, oder algebraisch ist die Aufgabe vom dritten Grade. Es wird geometrisch gezeigt, dass die bekannten Hülfskurven, Conchoiden des Nikomedes, Kreisconchoiden, rechtwinklige Hyperbel, jedesmal alle drei Lösungen ergeben.

Von den Sätzen, die dabei abfallen, hebe ich hervor: Eine Hyperbel, deren Excentricitätsverhältniss $= 2$ sei, werde von einem Kreisbüschel geschnitten, dessen Grundpunkte der eine Brennpunkt E der Hyperbel und der Scheitel O des zu diesem Brennpunkt convexen Zweiges seien: so trifft jeder Büschelkreis die Hyperbel ausser in O noch in den Ecken eines regulären Dreiecks ABC; die Strahlen, die von E nach A, B, C gehen, treffen die Hyperbel je noch in einem zweiten Punkte A', B', C', dies Dreieck $A'B'C'$ ist ebenfalls ein reguläres, der demselben umschriebene Kreis gehört demselbenBüschel an und schneidet den Kreis ABC orthogonal.

Eine Hypocykloide mit vier Rückkehrpunkten (Astroiden) ist von der vierten Klasse. Wählt man den Punkt P auf dem der Curve eingeschriebenen concentrischen Kreise, so kann man von den vier durch P gehenden Tangenten die eine sofort angeben, es ist die Gerade, für welche P die von den beiden Rückkehrtangenten begrenzte Strecke halbirt. Die drei übrigen Tangenten treffen den Kreis ausser in P noch in den Ecken A, B, C eines regulären Dreiecks. Sei Q der Symmetriepunkt von P in Bezug auf die eine Rückkehrtangente und O ein Schnittpunkt der andern Rückkehrtangente mit dem Kreise, so ist Bogen $(OA, OB, OC) = \frac{1}{3}$ Bogen OQ.

Bern. G. Sidler.

Mischer: Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen.

(Zeitschr. f. Math. u. Physik, Juniheft 1876.)

Sind q die independenten Coordinaten eines auf eine bestimmte irgendwie bewegliche Fläche oder Curve angewiesenen materiellen Punktes, der dem Einfluss beliebiger Kräfte unterliegt, und hängen seine auf ein festes System bezogenen Coordinaten: x, y, z mit den q und der Zeit t ganz allgemein durch die Gleichungen:

$$x = A_1\,(t, q_1, q_2),$$
$$y = A_2\,(t, q_1, q_2),$$
$$z = A_3\,(t, q_1, q_2),$$

zusammen, so findet man, durch Anwendung der zweiten Lagrange'schen Form des d'Alembert'schen Princips, als erste Bewegungsgleichung, der die, für den Fall, dass der q zwei sind, hinzutretende zweite ganz analog ist:

$$q_1''\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + q_2''\,\frac{\partial A}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial q_2} + q_1'\,\frac{\partial A}{\partial q_1}\,\frac{d\,\frac{\partial A}{\partial q_1}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial q_1}\,\frac{d\,\frac{\partial A}{\partial t}}{dt} + q_2'\,\frac{\partial A}{\partial q_1}\,\frac{d\,\frac{\partial A}{\partial q_2}}{dt} - Q_1 \ddagger 0.$$

Hier deuten die Accente die Differentiation nach der Zeit, das Zeichen $\ddagger$ aber das nur durch ein A ohne Index angezeigte Vorkommen dreigliedriger Summen links an; Q ist gleich $\frac{\partial U}{\partial q}\cdot$

Es ergeben sich nun die folgenden Resultate:

1.

Die Bewegungsgleichungen sind linear, wenn die Bahn des Punktes eine Gerade oder eine Ebene, oder die Fläche eines Kreiscylinders oder eine auf einer solchen Fläche verzeichnete Curve ist.

Es hängt also nur von den geometrischen Eigenschaften der Bahn ab, ob die Gleichungen zu den linearen gehören oder nicht.

2.

Die Zeit kommt dann nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn der Punkt von constanten Kräften beeinflusst wird und die Bahn eine ausschliesslich translatorische Bewegung hat, die mit constanter Beschleunigung — welche auch gleich Null sein kann — erfolgt.

Von den nicht ausschliesslich translatorischen Bewegungen der Bahn ist (mit einer einzigen Ausnahme) die Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe, längs welcher allein Kräfte wirken dürfen, eine Rotation, mit welcher ein constant beschleunigtes Fortschreiten in der Richtung jener Axe verbunden sein kann, diejenige, unter deren Voraussetzung t nicht explicite in den Bewegungsgleichungen erscheint. Es kommt hierbei also auf die mechanischen Eigenschaften des Systems an.

Minden i. Westf. Mischer.

Heinr. Streintz: Ueber die Temperaturvertheilung im Leitungsdrahte eines galvanischen Stromes.

(Auszug aus dem am 12. Aug. 1876 der Redaction von Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie eingesandten Manuscripte.)

Wird durch einen Draht ein galvanischer Strom geleitet, so erhöht sich dessen Temperatur so lange, bis der stationäre Zustand eintritt, bis nämlich in jedem körperlichen Elemente des Drahtes durch den Strom gerade so viel Wärme erregt wird, als durch die umliegenden Theilchen gegen die Oberfläche, und durch diese in das umgebende Medium abgeführt wird.

Sieht man von den Enden des Drahtes ab, so ist die Rechnung ein Problem der Ebene. Bezeichnet man mit k das Wärmeleitungsvermögen, mit u die Temperatur in irgend einem Punkte des Querschnittes, so stellt der Ausdruck

$$k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right) dx\, dy\, dt$$

die Menge dar, um welche einem Flächenelemente von den umliegenden mehr Wärme zugeführt als abgeführt wird.

Durch den galvanischen Strom wird nach dem Joule'schen Gesetze während derselben Zeit erregt

$$wi^2\, dx\, dy\, dt.$$

Für den stationären Zustand muss die Summe beider Ausdrücke der Null gleich sein, daher

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+J=0;\ J=\frac{wi^2}{k}.$$

Als Integral der Gleichung ergibt sich

$$u=A-\frac{J}{4}r^2+B\log nr.$$

Da aus leicht erkennbaren physikalischen Gründen $B=0$ sein muss, so bleibt nur A zu bestimmen.

Ist die Oberflächentemperatur τ des Drahtes gegeben, und heisst der Halbmesser a, so wird

$$u=\tau+\frac{J}{4}(a^2-r^2).\qquad \text{I.}$$

Führt man aber statt τ den Coefficienten der *äusseren* Wärmeleitungsfähigkeit H ein, so tritt die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=a}+h(u-U)_{r=a}=0;\ h=\frac{H}{h}$$

hinzu, in welcher U die Temperatur des umgebenden Mediums bedeutet, und man erhält

$$u=U+\frac{J}{2h}a+\frac{J}{4}(a^2-r^2).\qquad \text{II.}$$

Zur numerischen Berechnung müssen h und J bekannt sein J, ursprünglich durch Widerstand, Stromstärke und Leitungsvermögen ausgedrückt, kann aber auch durch die erreichte Oberflächentemperatur und h ausgedrückt werden. Aus dem Vergleiche von I und II folgt nämlich

$$J=\frac{2h}{a}(\tau-U).$$

h bestimmte ich experimentell dadurch, dass ich durch eine dickwandige Messingröhre heisses Wasser von bekannter Temperatur strömen liess und an der äusseren Mantelfläche die Temperatur beobachtete. Die Theorie ergibt für diesen Fall

$$h=\frac{\tau_2-\tau_1}{c_1(\tau_1-U)(\operatorname{logn}c_1-\operatorname{logn}c_2)}$$

worin τ_1 und τ_2 die Temperaturen, c_1 und c_2 die Halbmesser des äusseren und inneren Umfanges bezeichnen; aus den Beobachtungen folgt dann

$$h=0\cdot00078$$

Man kann nun für einen Messingdraht berechnen, um wie viel die Temperatur im Centrum höher ist als an der Oberfläche, und erhält wenn $a = 0 \cdot 25$ Mm., $\tau = 55^0 \cdot 5$ C., $U = 18^0$ C.

$$u_c - \tau = 0^0 \cdot 0037 \text{ C.}$$

Ohne weitere Beobachtungen zu machen, kann man nun die angegebene Temperaturdifferenz auch für andere Drähte rechnen.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass auch Edlund im Maihefte von Pogg. Ann. eine Berechnung der Temperaturvertheilung im galvanisch erwärmten Drahte geliefert hat, doch ist seine Ableitung von der hier gegebenen gänzlich verschieden; auch sind die erhaltenen Gleichungen nicht so allgemein, und endlich basiren die numerischen Daten auf ganz anderen Experimenten, als den von mir angewendeten, so dass ich keinen Anstand nahm, meine schon vor dem Erscheinen von Edlunds Arbeit fertigen Untersuchungen dennoch der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Graz. Heinr. Streintz.

Merriman: On the Moments and Reactions of Continuous Girders. By Mansfield Merriman, C. E., Instructor in Civil Engineering in the Sheffield Scientific School at New Haven, U. S. A. — From Journal of the Franklin Institute **1875.** vol. LXIX, p. 206, p. 255.

This is an investigation of the relations of the moments and reactions of continuous girders of equal spans. The girder is considered as loaded uniformly troughout its whole length, uniformly in a single span, or with a single load applied at any point, and tables are given exhibiting the moments and reactions at all supports due to either of there loads. The tables or triangles are shown to be subject to simple laws resulting from the properties of the Clapeyronian numbers, by which they may be readily extendend to include any number of spans. Girders with the two end spans different in lenght from the central ones are also discursed and general formulae for the moments and reactions due to any kind of loading are presented.

New-Haven. Merriman.

Merriman: On the Flexure of Continuous Girders. By Mansfield Merriman C. E., Instructor in Civil Engineering in the Sheffield Scientific School at New Haven, U. S. A. — From Lond. Edin. and Dubl. Philosophical Magazine 1875. 4. vol. 50, p. 179.

This article discusses in a general manner the determination of exterior and interior forces due to any kind of loading in a continuous girder of any number and lengths of spans. Formulae for the moments at the supports are deduced in terms of two kinds of quantities, one defending upon the load and its position and the other only upon the numbers and lengths of the spans. The method is entirely general and is shown to be applicable even to the discussion of girders with horizontally fastened ends. A number of problems are given to show the readiness with which the formulae apply to particular cases.

New-Haven. Merriman.

Gordan: Ueber den Fundamentalsatz der Algebra.
(Mathematische Ann. 10. Bd.)

Der Verfasser hat den 2. Beweis (algebraischen) von Gauss des Satzes:

„Jede rationale und ganze Function einer Variabeln x ist in lineare Factoren zerlegbar"

in einigen wesentlichen Punkten vereinfacht.

Gauss untersucht solche Resolventen einer Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen Coefficienten, aus deren Wurzeln sich die Werthe von Summe und Produkt von zweien der Wurzeln von f berechnen lassen. Unter denselben befindet sich, wie Gauss zeigt, mindestens eine, deren Discriminante nicht verschwindet, von deren Wurzeln also Summe und Produkt zweier Wurzeln von f rational abhängen.

Der Verfasser dagegen untersucht die Resultante $R(u)$ von: $f(x)$ und $f(x+u)$. Es gibt stets einen Werth von u, für welchen $R(u) = 0$ ist und daher $f(x)$ und $f(x+u)$ einen gemeinsamen Factor haben; $f(x)$ ist also in Factoren zerlegbar. Wir setzen $f(x) = g(x)\,h(x)$ und unterscheiden die beiden Fälle, wo die Coefficienten in g (also auch in h) reell oder imaginär sind.

Jedesmal kann die Auflösung von f auf die einer Gleichung niedrigeren Grades zurückgeführt werden. Ist g reell, so ist dies sofort klar; andern Falls ist auch u imaginär und zwar, wie sich zeigt, rein imaginär, so dass $g\left(x+\frac{u}{2}\right)$ nur reelle Coefficienten besitzt.

Erlangen. P. Gordan.

P. Gordan und M. Noether: Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.

(Math. Ann. X. pag. 547.)

Die Frage nach der Bedeutung des identischen Verschwindens der Hesse'schen Determinante einer Form, welche wir in diesem Aufsatze erledigen, ist schon seit lange gestellt: Hesse hat sie zuerst im 42sten, dann im 56sten Bd. des Crelle-Borch. J. behandelt und sie dahin beantwortet, dass sich die homogene Form von r Variabeln durch lineare Substitution in eine solche von weniger als r Variabeln transformiren lasse, oder, was dasselbe ist, dass die Beziehungen zwischen den Polaren der Form lineare seien. Wie mir H. Christoffel vor längerer Zeit, zugleich unter Angabe des Satzes, dass sich jene Transformation jedenfalls durch eine rationale, eindeutig umkehrbare Substitution erreichen lasse, mitgetheilt hat, sind die Mängel des Hesse'schen zweiten Beweises, die in einer unzulässigen Auflösung eines Systems linearer Gleichungen liegen, gleich nach dem Erscheinen dieses Aufsatzes bemerkt worden, und wurde damals von H. Weierstrass ein Zweifel an der Richtigkeit des Hesse'schen Satzes geäussert. Indess sind die falschen Beweise in mehrere Lehrbücher übergegangen.

Zur Behandlung der Frage nach der Richtigkeit des Satzes boten sich sehr verschiedenartige Methoden dar, die das Gemeinsame hatten, zwar je eine Reihe von Eigenschaften der Formen zu liefern oder einzelne Formengebiete zu erledigen, ohne aber den letzten Schluss zuzulassen. Eine solche Erledigung der cubischen ternären und quaternären Formen im Sinne des Hesse'schen Satzes, mittelst einiger Determinantenrelationen, ist von H. Pasch (Borch. J. 80) veröffentlicht worden. Die ternären Formen überhaupt hat H. Gordan, ebenfalls unter Bestätigung des Satzes, erledigt (Sitz.-Ber. der phys.-med. Soc. Erlangen v. 13. Dec. 1875), hauptsächlich durch eine besondere Darstellung der Determinante eines Products von Formen und einzelne Schlüsse über die Gestalt der zwischen den Polaren bestehenden Relation.

Nachdem H. Gordan und ich durch eine Vergleichung unserer verschiedenen, einzeln nicht zum Ziele führenden, Methoden erkannt hatten, dass die Betrachtung der Relation zwischen den Polaren selbst, nicht der Determinante, den Ausgangspunkt der Untersuchung zu bilden hat, nahmen wir die Untersuchung nun gemeinsam von dieser Seite her auf, indem wir die Frage nach allen Formen stellten, zwischen deren Polaren Relationen bestehen. Das *Resultat* zunächst ist Folgendes:

„Der Hesse'sche Satz gilt für alle binären, ternären und quaternären Formen, dagegen *nicht* mehr für die Formen von mehr als vier Variabeln und zugleich von höherer als der zweiten Ordnung. Für diese Fälle lassen sich ganze Classen von Formen aufstellen, deren Determinante verschwindet, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden."

Ich deute auch den Weg an, auf welchem dieses Resultat erhalten wird:

Wir nehmen unter den Relationen zwischen den Polaren f_i der Form f eine solche von möglichst niedriger Dimension in den f_i, $\pi(f_i) = 0$ heraus. Wenn nun die $\frac{\partial \pi}{\partial f_i}$ den Functionen $h^{(i)}(x)$, welche keinen Factor gemeinsam haben sollen, proportional sind, so dass sich die Relation auch $\sum_i h^{(i)} f_i = 0$ schreibt, so betrachten wir die lineare partielle Differenzialgleichung

$$\sum_i h^{(i)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 .$$

Die wesentliche Eigenschaft der ganzen Lösungen Φ dieser Gleichung ist in der für alle λ gültigen Relation ausgesprochen:

$$\Phi\left(x_i + \lambda h^{(i)}\right) = \Phi(x_i).$$

Diesen Gleichungen genügen auch die Functionen $h^{(i)}$ selbst, was z. B. durch die Beziehung $h^{(i)}(h) = 0$ ohne Weiteres zur Erledigung aller ternären Formen führt. Im Allgemeinen dienen die Gleichungen

$$\sum_i h^{(i)} \frac{\partial h^{(k)}}{\partial x_i} = 0$$

zur Begrenzung der Functionen $h^{(i)}$. Zur weiteren Ausscheidung der *ganzen* Functionen $h^{(i)}$ wird eine *Transformation* verwandt:

$$\xi_i = h^{(i)}(x) \equiv h^{(i)}(x + \lambda\,\xi)\,,$$

in welcher die Substitutionsdeterminante und eine Reihe ihrer Unterdeterminanten verschwinden, bei der also jedem Werthe ξ unendlich viele Werthsysteme x entsprechen. Diese Beziehung muss unter den verschiedenen Annahmen verfolgt werden, dass das ξ-Gebiet eine, zwei, drei .... Dimensionen hat. Wir erhalten indess die allgemeine Erledigung dieses h-Problems nur für ein *einfach*-unendliches ξ-Gebiet, für mehr Dimensionen nur Eigenschaften der $h^{(i)}$-Functionen.

Zu einem Theil solcher Functionen $h^{(i)}$ gehören neue Functionen f zu, definirt durch die partiellen Differentialgleichungen für f:

$$\Sigma_i f_i \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_k} = 0\,.$$

Die Lösungen ergeben sich in demselben Umfange, wie das h-Problem gelöst ist. So erwähne ich, dass für die allgemeinste quinäre Form f, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, entweder der Hesse'sche Satz gilt, oder sie muss von der Form sein:

$$f = \varphi\,(Q, x_1, x_2)\,,$$

wo

$$Q = x_3\,P_1 + x_4\,P_2 + x_5\,P_3$$

die P_i beliebige ganze homogene Functionen gleicher Ordnung von $x_1\ x_2$ und die Function φ von Q, x_1, x_2 ebenfalls beliebig ist.

Erlangen. M. Noether.

Gundelfinger: Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, von Otto Hesse. Revidirt und mit Zusätzen versehen von S. Gundelfinger. Dritte Auflage.

(Leipzig, B. G. Teubner 1876.)

Unter den Aenderungen, welche der Herausgeber der dritten Auflage bei der Revision vorgenommen, sind ausser zahlreichen kleineren Zusätzen — vgl. beispielsweise SS. 85. 88. 129. 164—165. 179—180. 249 — besonders folgende hervorzuheben:

Der Verfasser hatte mehrere wichtige Sätze über die Focalcurven und die reellen Kreisschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung entweder nur historisch angeführt oder ungenügend bewiesen. Diese Lücken wurden durch theilweise Umarbeitung der Vorlesungen 24. und 28. ausgefüllt. (Cfr. SS. 349—353. 399. 402. 403. 406 bis 409.) Gleichzeitig ist als eine unmittelbare Anwendung von Formeln aus der letzterwähnten Vorlesung 28 eine Untersuchung über die partielle Differentialgleichung für den Parameter einer Dupin'schen Flächenschaar auf den Seiten 441—448 eingefügt worden.*)

Da die Theorie der quadratischen Formen als die Quelle fast sämmtlicher Ausführungen des Werkes zu betrachten ist, so hat der Herausgeber den weiteren Ausbau dieser Theorie auf Grund der Arbeiten von Kronecker und Weierstrass unternehmen zu müssen geglaubt, und zwar in besonderen Supplementen, um die Originalität der darauf bezüglichen Untersuchungen Hesse's nicht zu schädigen. Es würde dem Zwecke der vorliegenden Mittheilung widersprechen, im Einzelnen anzuführen, was diesen Supplementen im Vergleiche mit bereits bekannten Ergebnissen eigenthümlich ist. Nur so viel möge im Allgemeinen bemerkt werden, dass es dem Herausgeber bei sämmtlichen Zusätzen überhaupt weniger darauf ankam, neue geometrische Sätze zu gewinnen, als vielmehr die algebraischen Entwickelungen weiter zu führen oder wenigstens formal zu vereinfachen. Derselbe verweist in dieser Hinsicht namentlich auf das dritte Supplement, in welchem die Lehre vom Flächenbüschel zweiter Ordnung *ohne Zuhilfenahme von Theoremen aus der analytischen Geometrie der Ebene* behandelt ist.

Tübingen. S. Gundelfinger.

*) Bei dieser Gelegenheit sei auf ein sinnentstellendes Versehen aufmerksam gemacht, das leider in einigen Exemplaren nicht mehr berichtigt werden konnte. Auf Seite 448, Z. 13 v. u. ist nämlich anstatt „*dass*“ zu lesen: *dass unter anderen.*

H. Weissenborn: Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene für orthogonale und homogene Punkt- und Linien-Coordinaten. Von Dr. Hermann Weissenborn, Professor am Grossherzoglichen Realgymnasium zu Eisenach. (Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1876. 236 S. 8.)

Nachdem schon früher Möbius und Plücker sich trimetrischer Coordinaten bedient hatten, ward neuerdings, namentlich durch Salmon-Fiedler's „Analytische Geometrie der Kegelschnitte", die Aufmerksamkeit wieder auf diese Methode gelenkt und der Vortheil, den sie bei geometrischen Untersuchungen bietet, besonders wenn die Gleichungen in homogener Form dargestellt werden, immer mehr anerkannt. Da jedoch in dem Fiedler'schen Werke seiner ganzen Anlage nach die Lehre von den trimetrischen und homogenen Coordinaten nur verwebt und verflochten in diejenige der Cartesischen Coordinaten vorkommen konnte, so regte sich der Wunsch, erstere für sich als ein zusammenhängendes Ganzes dargestellt zu sehen. Dies bezwecken denn auch zwei in den letzten Jahren erschienene Werke: die „Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten, von R. Heger. 1872", und die „Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten, von L. Schendel. 1874". Aus gleicher Absicht auch ist meine Schrift hervorgegangen. Sie verfolgt daher dasselbe Ziel, wie die bisher genannten, unterscheidet sich aber gleichwohl von ihnen in mehrfacher Beziehung.

Hinsichtlich der Darstellung nämlich schien es mir nicht zweckmässig, die Lehre von den homogenen Coordinaten für sich allein zu geben, wie es Heger und Schendel thun, vielmehr knüpfe ich lieber, wie Fiedler, an die Theorie der orthogonalen Coordinaten als die bekanntere an, schicke aber alle diejenigen Sätze, auf welche später Bezug genommen wird, zu einem Ganzen zusammengefasst, im 1. Abschnitt voraus, und nehme in diesen auch die Lehre von den orthogonalen Linien-Coordinaten auf. Im 2. Abschnitt, der Theorie der homogenen Coordinaten, sehe ich nicht, wie Schendel, Flächen als Coordinaten an, sondern es schien mir natürlicher, den Weg einzuschlagen, welchen Heger betreten hat. Dieser nämlich bedient sich der von Plücker angewandten homogenen Linien-Coordinaten, jedoch mit der Modification, dass als solche nicht die Abstände einer Geraden von den drei Ecken eines Fundamentaldreiecks angesehen werden, sondern die Quotienten dieser Abstände und der Entfernung der Geraden vom Coordinaten-Anfangspunkt.

Unter dieser Voraussetzung wird die Lage einer Geraden durch ihre Coordinaten eindeutig bestimmt. Während ich mich daher in dieser Hinsicht an das Verfahren Heger's anschliesse, gehe ich noch einen Schritt weiter und nehme auch bei den trilinearen Punktcoordinaten nicht die linearen Entfernungen eines Punktes von den Seiten eines Fundamentaldreiseits, sondern die Quotienten aus diesen und den Abständen des Coordinaten-Anfangspunktes von den Seiten des Dreiseits als Coordinaten des Punktes an. Denn es war mir im Voraus gewiss, dass eine Uebereinstimmung der Gesetze über Punkt- und Linien-Coordinaten nicht erzielt werden könne, wenn unter ersteren lineare Strecken, unter letzteren aber Verhältnisse zweier Strecken verstanden werden, und die weitere Untersuchung, namentlich rücksichtlich der Beständigkeit der Coefficientensumme bei der Transformation einer Kegelschnittsgleichung auf ein neues Dreieck, bestätigte diese Ansicht.

Hinsichtlich des Inhalts unterscheidet sich meine Schrift von den oben genannten dadurch, dass ich den Gegenstand in einer andern Richtung behandele. Es lag nämlich nicht in meiner Absicht, auf das Einzelne einzugehen, sondern nur den Leser bekannt zu machen mit dem Gebrauche der verschiedenen hier angewandten Coordinaten, und ihn in den Stand zu setzen, die speciellen Lehren der ebenen analytischen Geometrie selbst abzuleiten. Meine Schrift soll daher nur die „Grundzüge“ dieser Disciplin, oder die wichtigsten allgemeinen Sätze enthalten. Zu diesen rechne ich einmal diejenigen, welche dazu dienen, die bei analytisch-geometrischen Untersuchungen auftretenden nächsten Fragen zu beantworten. Eine der ersten derselben schien mir die zu sein, ob und unter welchen Umständen eine Gleichung 2. Grades einen Kegelschnitt, und wann sie den einen oder anderen repräsentirt. Aus diesem Grunde habe ich, unter besonderer Berücksichtigung der Discriminante und ihrer Partial-Determinanten, die Classification der Kegelschnitte ausführlich behandelt, wobei ich in dem Falle, dass ihre Gleichung in orthogonalen Linien-Coordinaten gegeben ist, um die Analogie mit der bei orthogonalen Punkt-Coordinaten durchgeführten Untersuchung aufrecht zu erhalten, ein anderes Verfahren einschlagen musste, als Plücker im 2. Theile seiner „Analytisch-geometrischen Entwickelungen“. Als ebenfalls wichtige allgemeine Sätze erschienen mir ferner diejenigen, welche die harmonischen und anharmonischen Verhältnisse betreffen, da sie den Ausgangspunkt für die Lehre von den polaren und collinearen Eigenschaften bilden; von einer Erörterung der letzteren habe ich jedoch, wenigstens vorläufig, abgesehen, um so mehr, als man dieselbe bei Heger und in synthetischer Darstellung in meiner „Projection in der Ebene. 1862“ durchgeführt findet. Sodann glaubte ich auch, da von den hier in Betracht gezogenen vier Arten von Coordinaten-Systemen, orthogonale und homogene Punkt- und Linien-Coordinaten, die eine leichter zur Auffindung der einen, die andere leichter zur Auffindung der anderen Eigenschaft führt (wofür der letzte Artikel je vom 1. und 2. Abschnitt ein Beispiel bietet), den Weg angeben zu sollen, wie man von dem einen System zu einem anderen übergeht. Ich habe deshalb der Transformation der Gleichungen, namentlich derjenigen 2. Grades, auf eine andere Art von System besondere Aufmerksamkeit geschenkt und die auch hier sich zeigende Bedeutung der Discriminante und ihrer Partial-Determinanten hervorgehoben. Da endlich auch bei Beibehaltung derselben Art von Coordinaten-System die Wahl der Axen bei orthogonalen, des Fundamental-Dreiseits oder -Dreiecks bei homogenen Coordinaten nicht gleichgültig ist, so habe ich diese Fälle mit in das Bereich meiner Untersuchung gezogen; und zwar beschränke ich mich beim Uebergange von einem orthogonalen Punkt- oder Linien-System auf ein gleichartiges anderes auf den für meine Zwecke allein in Betracht kommenden Fall, dass die neuen Axen den ursprünglichen parallel laufen, ausführlich dagegen behandele ich die Verhältnisse, welche stattfinden, wenn eine homogene Gleichung in eine ebensolche, aber auf ein anderes Dreiseit oder Dreieck bezogene, transformirt wird. Sind nämlich die Seiten g_k des ursprünglichen, und die Seiten g'_k des neuen Dreiseits repräsentirt durch die Gleichungen bezüglich

$$g_k \equiv \mathfrak{y}_k y + \mathfrak{x}_k x - 1 = 0, \qquad g'_k \equiv \mathfrak{y}'_k y + \mathfrak{x}'_k x - 1 = 0,$$

setzt man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{y}_1 \\ 1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ 1 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}'_1 & \mathfrak{y}'_1 \\ 1 & \mathfrak{x}'_2 & \mathfrak{y}'_2 \\ 1 & \mathfrak{x}'_3 & \mathfrak{y}'_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}',$$

und bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{D}_{tp}$ den Werth von $\mathfrak{D}$, welcher entsteht, wenn $\mathfrak{y}'_p$, $\mathfrak{x}'_p$ statt $\mathfrak{y}_t$, $\mathfrak{x}_t$ eingesetzt wird, mit $\mathfrak{D}'_{tp}$ den Werth von $\mathfrak{D}'$, welcher entsteht, wenn $\mathfrak{y}_p$, $\mathfrak{x}_p$ statt $\mathfrak{y}'_t$, $\mathfrak{x}'_t$ eingesetzt wird (wo t und p je eine der Ziffern 1, 2, 3 sind), so dass also z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}'_2 & \mathfrak{y}'_2 \\ 1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ 1 & \mathfrak{x}_3 & \mathfrak{y}_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}_{12}; \quad \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{x}_2 & \mathfrak{y}_2 \\ 1 & \mathfrak{x}'_2 & \mathfrak{y}'_2 \\ 1 & \mathfrak{x}'_3 & \mathfrak{y}'_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}'_{12}$$

ist, so finden zwischen den beiden Arten von Determinanten $\mathfrak{D}_{tp}$, $\mathfrak{D}'_{tp}$ eine Reihe gegenseitiger Beziehungen statt, deren Bedeutung bei der Transformation besonders hervortritt, welche aber wohl auch für andere Untersuchungen von Interesse sein könnten. Indem ich so die Umformung der Gleichungen ausführlich behandelt habe, gedachte ich zugleich dem Leser gewissermassen einen praktischen Dienst zu erweisen dadurch, dass er in den Stand gesetzt wird, ohne Weiteres, falls es wünschenswerth erscheint, von einem System auf ein anderes überzugehen, indem er Alles, was in diesem Falle zu wissen nöthig ist, gegeben vorfindet, so dass er der Mühe des Transformirens überhoben ist und das Buch gleichsam zum Nachschlagen benutzen kann. Vielleicht auch darf ich hoffen, dass die Ergebnisse der Transformationen als Beispiele für die Gesetze der linearen Substitution nicht unwillkommen sein werden, obschon sie ohne Anwendung dieser Theorie gefunden worden sind.

Ich habe nämlich absichtlich keine anderen Vorkenntnisse vorausgesetzt als die ersten Begriffe der Cartesischen Geometrie und die Elemente der Lehre von den Determinanten. Denn ich war der Ansicht, je leichter verständlich die Schrift sei, um so mehr werde sie zur weiteren Ausbildung des hier befolgten Verfahrens anregen und zur Förderung analytisch-geometrischer Forschungen beitragen. In wie weit es mir gelungen ist, dieses Ziel durch meine Arbeit, bei welcher mir ausser den oben genannten Werken von Heger und Fiedler noch Stammer's „Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1863“, sowie die Werke über Determinanten von Baltzer und Günther von Nutzen gewesen sind, zu erreichen, möge der Leser entscheiden.

Eisenach. H. Weissenborn.

Moshammer, C.: Zur Geometrie der Schraubenbewegung und einer Regelfläche dritter Ordnung.

— Zur Geometrie ähnlicher Systeme und einer Fläche dritter Ordnung.

(Sitzungsberichte der k. k. Academie d. W. in Wien, März- und Juni-Heft 1876.)

Die Achsen, mittelst welcher durch Schrauben-Bewegung eine Strecke MN auf der Geraden G in eine vorgeschriebene Lage $M'N'$

auf G' gebracht wird, erfüllen *eine Regelfläche F_3 dritter Ordnung*, deren einfache Leitende durch die Stellung der den $\sphericalangle(MN,\ M'N')$ normal halbirenden Ebenen E und deren Doppelgerade ox normal zu E durch das Centrum der Strecke zwischen den Punkten der (kürzesten) Distanz, G von G', bestimmt ist.

Die Doppelebenen des involutorischen Büschels, welches aus ox die Erzeugenden projicirt, sind *Symmetralebenen zur F_3*; die orth. Projectionen der F_3-Curven zweiter Ordnung auf die Ebenen E sind *Kreise* etc.

Die Rotationsachsen, mittelst welcher eine (unbegrenzte) Gerade G in eine vorgeschriebene Lage G' gebracht wird, bilden die beiden Regelschaaren eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Asymptot-Ebenen den $\sphericalangle(G,\ G')$ und seinen Nebenwinkel normal halbiren.

Die Bestimmung der eingangs genannten Achsen zu zwei sich *schneidenden* Geraden G, G' führt auf ein, gegenüber dem bisher Bekannten, sehr einfaches Verfahren, zur *Ermittlung der sich selbst entsprechenden Geraden zweier einstimmig congruenter Raumsysteme (Centralachse der Bewegung).*

Bezüglich zweier allgemein liegender *entgegengesetzt congruenter* (symmetrischer) *Raumsysteme S, S'* gilt der Lehrsatz:

„*Entspricht dem ebenen Systeme e in S das System e' in S' und dreht man S' um die Linie $(e,\ e')$, so beschreibt der Doppelpunkt (Symmetralcentrum) zu S, S' eine Gerade normal zu e, welche den sich selbst entsprechenden Punkt m der beiden durch Umklappung von e' nach e einstimmig congruenten ebenen Systeme enthält. Die sich selbst entsprechende Gerade zu S, S' erzeugt in einer Ebene normal zu e einen Strahlbüschel zweiter Ordnung, welcher eine Parabel vom Scheitel m umhüllt, deren Brennpunkt auf jener Geraden liegt, die durch Umklappung von e' nach e im entgegengesetzten Sinne in den vereinten Systemen e, e' sich selbst entspricht*“; woraus eine einfache Bestimmung der Doppelelemente zu S, S' (Punkt, Gerade, Ebene) resultirt.

Sind MN, $M'N'$ homologe Strecken zweier im Quotienten v ähnlicher Reihen auf G, G' und benennt man die Stellung der Ebenen, welche $\sphericalangle(MN,\ M'N')$ und seinen Nebenwinkel normal halbiren beziehungsweise mit u, u', ferner die durch die Leitenden G, G', u und G, G', u' bestimmten Regelschaaren mit $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, so werden durch eine Gerade $\left\{\begin{matrix} o\,x \\ o'\,x' \end{matrix}\right\}$ die zwischen G, G' liegenden Strecken der Schaar $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}'\end{matrix}\right\}$ im Verhältniss $\left\{\begin{matrix}-v\\ +v\end{matrix}\right\}$ getheilt und *die Achsen, mittelst welcher durch Rotation von G um je eine derselben (A) durch* $\sphericalangle \left\{\begin{matrix} MAM' \\ MAM'+2R\end{matrix}\right\}$ *beide Reihen in* $\left\{\begin{matrix}\text{einstimmig}\\ \text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ *perspectivische Lage kommen, erfüllen eine Regelfläche* $\left\{\begin{matrix}F_3\\ F'_3\end{matrix}\right\}$, welche die $\left\{\begin{matrix}ox\\ o'x'\end{matrix}\right\}$ als Doppelgerade und die Stellung $\left\{\begin{matrix}u\\ u'\end{matrix}\right\}$ sowie einen Kreis K (Ort der Aehnlichkeitscentra zu G, G') als einfache Leitende hat.

Die orth. Projectionalen der F_3-Curven zweiter Ordnung auf die Ebene K sind *Kreise* etc.

Bezüglich zweier allgemein liegender $\left\{\begin{matrix}\text{einstimmig}\\ \text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ *ähnlicher Raumsysteme S, S'* resultirt der Lehrsatz:

„Entspricht dem ebenen Systeme e in S das System e' in S' und dreht man S' um die Linie (e, e'), so beschreibt der Doppelpunkt (Aehnlichkeitscentrum) $\left\{\begin{matrix}d\\ d'\end{matrix}\right\}$ *zu S, S' einen Kreis K normal zur Ebene e, dessen Durchmesser-Endpunkte die zwei sich selbst entsprechenden Punkte der beiden in der Ebene e, durch zweifache Umklappung von e' nach e, vereinten ebenen Systeme sind.*

Bei genannter Drehung des Systems S' erzeugt die sich selbst entsprechende Gerade $\left\{\begin{matrix}A\\ A'\end{matrix}\right\}$ *zu S, S' eine Regelfläche* $\left\{\begin{matrix}F_3\\ F'_3\end{matrix}\right\}$ *mit dem Kreisschnitte K und der Doppelgeraden in e normal zur Ebene K etc.* Auf Grund dieses Gesetzes ergiebt sich ebenfalls eine sehr einfache Bestimmung der Doppelelemente zu zwei allgemein liegenden $\left\{\begin{matrix}\text{einstimmig}\\ \text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ ähnlichen Raumsystemen.

Graz. C. Moshammer.

C. A. Bjerknes: Forelöbige Meddelelser om de Kräfter, der opstaa, naar kugleformige Legemer, idet de ùdföre Dilatations- og Kontraktions-Svingninger, beväge sig i et inkompressibelt Fluidum. (Videnskabsselskabets Forhandlinger i Christiania, Aar 1875. Pag. 386—401.)

Die unten besprochenen „vorläufigen Mittheilungen über die Kräfte (Druckkräfte), die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations- und Contractions-Schwingungen ausführen, in einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegen", wurden im September 1875 der Wissenschaftsgesellschaft in Christiania vorgelegt. Sie können als Fortsetzung einer anderswo — bei Gelegenheit der Versammlung der skandinavischen Naturforscher in Christiania im Sommer 1868 — gegebenen Mittheilung aufgefasst werden, welche die gleichzeitige Bewegung mehrerer Kugeln zum Gegenstand hatte; der betreffende Aufsatz wurde in den in dem folgenden Jahre herausgegebenen Verhandlungen unter dem Titel: „om den samtidige Bevägelse af kugleformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum" publicirt, Pag. 205—257.

Den erwähnten neuen Mittheilungen schliessen sich ferner zwei frühere, beide in den Verhandlungen der Wissenschaftsgesellschaft veröffentlichte, Abhandlungen an, von welchen die erste, aus dem Jahre 1863, eine Verallgemeinerung des Dirichlet'schen Kugelproblems giebt, indem jetzt die in der Flüssigkeit bewegte Kugel zugleich das Volumen ändern darf. Sie ist unter dem Titel: „om de indre Tilstande i et inkompressibelt Fluidum, hvori en Kugle bevåger sig, idet den forandrer Volum", Pag. 13—43, erschienen. Die zweite, die im Jahre 1871 der Gesellschaft vorgelegt wurde, setzt ein System von gleichzeitig bewegten und veränderlichen Kugeln voraus; und in dieser letzten Abhandlung, betitelt: „sur les mouvements simultanés de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible", premier mémoire, Pag. 327—406, wie in den zukünftigen folgenden Memoiren, werden dann die Beweise der in den beiden oben genannten Mittheilungen gegebenen Resultate sowohl als die Vervollständigung derselben zu suchen sein.

I.

Es gehört eine Kugel S_g einem System von m Kugeln, die sich gleichzeitig unter Aenderung ihrer Volumen in einer unendlichen, incompressiblen Flüssigkeit bewegen. Die 5ten Potenzen der Verhältnisse zwischen Radien und Centraldistanzen sollen ausser Betracht gelassen werden. Alsdann bestehen die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{da_g}{dt}\right) = \frac{d\Omega_g}{da_g},\quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{db_g}{dt}\right) = \frac{d\Omega_g}{db_g},\quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{dc_g}{dt}\right) = \frac{d\Omega_g}{dc_g},$$

wo

$$(2)\qquad \Omega_g = \frac{d}{dt}\left(2\pi q\, d_g^3 \cdot \overset{k}{\Sigma_g} \varphi_k \frac{1}{r_{kg}}\right) + 4\pi q \overset{k}{\Sigma_g} \varphi_k \varphi_g \frac{1}{r_{kg}}$$

und

$$\mathfrak{M}_g = M_g + \tfrac{1}{2} m_g .$$

M bedeutet die Masse der Kugel S_g, m_g diejenige der von ihnen verdrängten Flüssigkeit; $\mathfrak{M}_g$ ist somit eine ideelle Masse, indem man sich die wirkliche mit der halben von ihrer Stelle verdrängten Flüssigkeitsmasse vergrössert zu denken habe. q ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit, q_g übrigens die veränderliche Dichtigkeit der Kugel selbst. Von den Grössen a_g, b_g, c_g, d_g bezeichnen die drei ersten die Coordinaten in einem rechtwinkligen Coordinatensystem des Mittelpunkts g, die letzte den Radius der Kugel S_g. r_{kg} ist der Abstand zwischen den den Kugeln S_k und S_g zugehörigen Mittelpunkten k und g; t bedeutet, wie gewöhnlich, die Zeit. Der am Summenzeichen angebrachte untere Index g giebt ferner an, dass dem k der Werth g nicht zu ertheilen sei; sonst darf k unter der Summation sämmtliche übrige Werthe in der Reihe $1, 2, 3, \ldots m$ beigelegt werden.

Die Operation φ_k ist auf folgende Weise zu verstehen:

$$\varphi_k = \varphi_k^{(0)} + \varphi_k^{(1)},$$

wo

$$\varphi_k^{(0)} = - d_k^2 d_k',$$

$$\varphi_k^{(1)} = - \tfrac{1}{2} d_k^3 \left(a_k' \frac{d}{da_k} + b_k' \frac{d}{db_k} + c_k' \frac{d}{dc_k} \right),$$

die accentuirten Buchstaben Derivirten nach der Zeit bezeichnend: $\varphi_k^{(0)}$ hiernach nur ein Factor. Die zusammengesetzte Operation $\varphi_k \varphi_g$ wird endlich dem Obigen zufolge durch

$$\varphi_k \varphi_g = \varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(0)} + \varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(1)} + \varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(0)} + \varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(1)}$$

zu definiren sein.

Führt man die Rechnungen aus, wird man einerseits

$$\varphi_k^{(0)} \frac{1}{r_{kg}} = - d_k^2 d_k' \cdot \frac{1}{r_{kg}},$$

$$\varphi_k^{(1)} \frac{1}{r_{kg}} = - \tfrac{1}{2} d_k^3 s_k' \frac{1}{r_{kg}^2} \cos(s_k', r_{kg}),$$

andererseits

$$\varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(0)} \frac{1}{r_{kg}} = \quad d_k^2 d_k' \cdot d_g^2 d_g' \cdot \frac{1}{r_{kg}},$$

$$\varphi_k^{(0)} \varphi_g^{(1)} \frac{1}{r_{kg}} = \tfrac{1}{2} d_k^2 d_k' \cdot d_g^3 s_g' \cdot \frac{1}{r_{kg}^2} \cos(s_g', r_{gk}),$$

$$\varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(0)} \frac{1}{r_{kg}} = \tfrac{1}{2} d_g^2 d_g' \cdot d_k^3 s_k' \cdot \frac{1}{r_{kg}^2} \cos(s_k', r_{kg}),$$

$$\varphi_k^{(1)} \varphi_g^{(1)} \frac{1}{r_{kg}} = \tfrac{1}{4} d_k^3 s_k' \cdot d_g^3 s_g' \cdot \frac{1}{r_{kg}^3} \left(\cos(s_k', s_g') + 3 \cos(s_k', r_{kg}) \cos s'_g, r_{gk}) \right)$$

erhalten.

s'_g ist dann die absolute Geschwindigkeit des Mittelpunkts g; (s'_g, r_{gk}) bedeutet den Winkel, welchen die Geschwindigkeitsrichtung in g mit der Centrallinie r_{gk} bildet, von g nach k gerichtet; (s'_k, r_{kg}) ebenso den Winkel, welchen die Geschwindigkeitsrichtung in k mit r_{kg} bildet, die Centrallinie jetzt umgekehrt gerichtet, von k nach g. Man hat sodann auch $\cos(s'_g, r_{gk}) = -\cos(s'_g, r_{kg})$.

Mittelst dieser Formeln wird man nun $\varphi_k \frac{1}{r_{kg}}$ und $\varphi_k \varphi_g \frac{1}{r_{kg}}$ erhalten, und, indem man ferner in der Gleichung (2) einsetzt, den Werth von Ω_g. Diese Grösse lässt sich übrigens auch entwickelt auf folgende neue Weise schreiben:

$$
\begin{aligned}
\Omega_g = -\sum_g^k \Big(& 2\pi q d_g^2 \cdot \frac{d}{dt}(d_g d_k^2 d'_k) \cdot \frac{1}{r_{kg}} \\
&+ \pi q\,(5 d_g^3 \cdot d_k^2 d'_k + d_k^3 \cdot d_g^2 d'_g) \cdot \frac{1}{r_{kg}^2}\, s'_k \cos(s'_k, r_{kg}) \\
&+ \pi q d_g^3 \cdot d_k^3 \cdot \frac{1}{r_{gk}^2} \cdot j_k \cos(j_k, r_{kg}) \\
&+ \pi q d_g^3 d_k^3 \cdot \frac{1}{r_{kg}^3}\, s_k'^2 \left(3\cos^2(s'_k, r_{kg}) - 1\right)\Big).
\end{aligned} \tag{2'}
$$

j_k in der obigen Gleichung bedeutet die Totalacceleration im Mittelpunkte k.

Den Gleichungen (1) zufolge werden die partiellen Derivirten von Ω_g

$$\frac{d\Omega_g}{da_g}, \quad \frac{d\Omega_g}{db_g}, \quad \frac{d\Omega_g}{dc_g}$$

als die drei Componenten nach den Achsen X, Y, Z einer auf der ideellen und veränderlichen Masse $\mathfrak{M}_g$ wirkenden äusseren Kraft aufgefasst werden können. Als die auf derselben Masse $\mathfrak{M}_g$ oder $M_g + \frac{m_g}{2}$ wirkenden Componenten der beschleunigenden Kraft dürfen dann

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{da_g}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{db_g}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{M}_g \frac{dc_g}{dt}\right)$$

angesehen werden.

Das Potential Ω_g der eingeführten *ideellen, äusseren Kraft* ist in dem Vorstehenden unter zwei verschiedenen Formen dargestellt (2) und (2′). Die letzte Darstellung des Potentialausdrucks, (2′), eignet sich besonders für die Untersuchung der *Kraft selbst in dem gegebenen Zeitmomente*; die erste (2) ist bequemer um *die mittleren Werthe derselben Kraft* oder der Kräfte, aus welchen sie weiter besteht, im Laufe eines Intervalls zu bestimmen, in welchem gewisse

Wege durchlaufen werden und die Intensität der veränderlichen, besonders periodisch veränderlichen Kraftwirksamkeit gewisse Aenderungen erleidet.

Die Ausdrücke des Potentials Ω_g in den beiden Formen zeigen, dass man, *sofern nur*, wie eben vorausgesetzt, *die 5ten Potenzen der Verhältnisse zwischen den Radien und Centraldistanzen ausser Betracht gelassen werden*, den Fall, wo mehrere Kugeln vorhanden sind, unmittelbar auf den einfacheren zurückführen kann, wo es bloss zwei giebt, S_g und S_k; denn *die Kräfte* sind dann *von einander unabhängig*. In Allgemeinheit wird somit im Folgenden nur die Wirksamkeit zweier Kugeln auf einander in Betracht gezogen werden.

Der Potentialausdruck in der letzten Form (2′) zeigt ferner an, dass *die Kraft auch unabhängig von der Geschwindigkeit ist, womit die von jener angegriffene Kugel S_g sich fortbewegt.*

Sie ist aber nicht unabhängig von der Geschwindigkeit, womit das Volumen derselben Kugel sich ändert. Auch besteht, wie aus dem Potentialausdruck in der ersten Form erhellt, die Unabhängigkeit von der fortschreitenden Bewegung der Kugel S_g nicht mehr für die mittlere Kraft im Laufe eines Zeitintervalls. Das Princip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung ist endlich für die Wechselwirkung der zwei Kugeln nur in besonderen Fällen gültig.

Nach der Gleichung (2) besteht das Potential Ω_g aus zwei Theilen, von welchen der erste eine vollständige Derivirte in Beziehung auf die Zeit ist; der letzte

$$\Omega_g^* = 4\pi q \sum_g^k \varphi_k \varphi_g \frac{1}{r_{kg}}$$

bestimmt einen *andern, mehr symmetrisch-gebildeten Theil der ideellen, äusseren Kraft*, welche dadurch bemerkenswerth ist, dass sie *nach dem Principe der gleichen Wirkung und Gegenwirkung* für sich allein agirt.

Es seien nun nach dem Vorhergehenden nur die zwei Kugeln S_g und S_k gegeben. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten k und g darf so gross im Verhältniss zu deren Geschwindigkeiten, oder also zu den Wegen, die sie in der Zeiteinheit beschreiben, angenommen sein, dass diese letzten mit dem Cubus des Centralabstandes dividirt ausser Betracht gelassen werden können. Auf die veränderliche Masse $\mathfrak{M}_g$ wirkt dann eine *Kraft der ersten Art*

$$\frac{3}{8\pi q} \cdot \frac{d}{dt}(m_g m_k') \cdot \frac{1}{r_{kg}^2}$$

und ebenso *eine der zweiten Art*

$$-\frac{1}{4\pi q}\cdot m'_g m'_k \cdot \frac{1}{r^2_{kg}},$$

beide folglich *umgekehrt wie die Quadrate der Abstände.* Diese Kräfte sind abstossend oder anziehend, je nachdem die obigen Ausdrücke entweder positiv oder negativ sind.

Es soll *besonders* angenommen werden, dass die Kugeln gleichzeitig wachsen und abnehmen, oder auch, dass das Volumen der einen wächst, während dasjenige der andern abnimmt oder umgekehrt, anders ausgedrückt, dass sie *eins oder entgegengesetzt pulsiren.* Die Volumänderungen sollen ferner in kurzen Perioden vor sich gehen, und der Einfachheit wegen zugleich die Erweiterungen und Zusammenziehungen der beiden Kugeln dasselbe Gesetz befolgen, nur durch ihre Grösse modificirt, so dass

$$\frac{m'_g}{m_g} = \pm \frac{m'_k}{m_k}.$$

Man wird dann die erste der eben genannten Kräfte als eine *oscillatorische* — Oscillationen hervorbringende — *Kraft* auffassen können, während die zweite dagegen eine *stetig fortbewegende* ist.

Wegen der *oscillatorischen Theilkraft* wird S_k gegen S_g eine Abstossung ausüben, wenn das Volumen der ersten am kleinsten ist; in den Zeiten aber, da sein Volumen wieder am grössten wird, zieht sie die S_g-Kugel an. Es findet dieses auch statt, wenn S_g, welche der Kraftthätigkeit von S_k ausgesetzt ist, sein Volumen darunter nicht ändern möchte. Diese Kraft, für sich allein, bringt doch nur eine Oscillation hervor; denn der mittlere Werth im Laufe einer Schwingungsperiode ist Null.

Ganz anders verhält sich die zweite, *die stetig fortbewegende Kraft.* Dieser zufolge werden für *eins-Pulsationen* eine *Anziehung* für *entgegengesetzte* eine *Abstossung* zu Stande kommen. Die Einwirkung auf S_g ist Null, wenn unter den Pulsationen von S_k das Volumen von S_g ungeändert bleibt.

Am Anfang und am Ende der *halben* Schwingungsperioden ist die oscillatorische Kraft dominirend. Sind also S_k und S_g eins pulsirende Kugeln, so wird das Verhältniss das folgende sein. Unter der gleichzeitigen Erweiterung fangen sie trotz der stetig wirkenden Anziehung an sich von einander zu entfernen, aber schon ehe das Maximum von Volumen erreicht ist, kehren sie dann wieder um, und nehmen eine Bewegung gegen einander an. Am Ende der ersten halben Periode sollten sie hiernach, wenn jetzt die Pulsationen aufhörten, und damit auch die Kraft selbst, mit gleichmässiger Geschwindigkeit sich gegen einander bis zum Contact bewegen; an diesem Zeitmomente können sie doch möglicherweise sich noch im grösseren Abstande von einander befinden als am Anfang der Zeit. Unter der gleichzeitigen Zusammenziehung werden sowohl die oscillatorische als die stetig fortbewegende Kraft eine Näherung der zwei Kugeln veranlassen. *Die Kugeln werden* somit in der ganzen Zeit, *wenn sie eins pulsiren, von einander weg und gegen einander oscilliren,* indem sie doch darunter einander stets anziehen. Werden die Anziehungen gestört, treten die Oscillationen hervor.

Man sieht auf ähnliche Weise, dass andererseits *unter den entgegengesetzten Pulsationen, die Kugeln mit einander oscilliren müssen,* beide zu derselben Seite, so beide zu der entgegengesetzten, die Kugel, deren veränderliches Volumen sein Minimum erreicht hat, immer die andere, welche gleichzeitig am grössten ist, forttreibend, während diese ihrerseits die kleinste in ihrer Bewegung nach sich ziehen wird. Unter diesen Oscillationen aber werden die zwei Kugeln einander zugleich abstossen. Auch hier besteht sonst ein Unterschied zwischen den beiden Halbtheilen einer Schwingungsperiode. Wenn an ihrem Anfang z. B. das Volumen von S_k ein Minimum, dasjenige von S_g ein Maximum ist, so wird in der ersten halben Periode die Kugel S_g sowohl wegen der oscillatorischen als der stetig fortbewegenden Kraft sich von S_k entfernen. Die anfänglich grosse S_g-Kugel dagegen wird die kleine S_k in den ersten Momenten nach sich ziehen, bringt aber dann eine Umkehrung zu Stande, und so dass S_k am Ende derselben halben Periode, wenn die Pulsationen und folglich auch die Kraft aufhört, mit gleichmässiger Geschwindigkeit, ob auch möglicherweise von einer näher liegenden Stellung ab, sich schliesslich von der Kugel S_g entfernen wird. In der zweiten Halbperiode werden die Rollen vertauscht.

Auch *die Kräfte vierten Grades* sind von Interesse zu studiren, namentlich wegen der Aehnlichkeit, welche zwischen diesen und denjenigen, womit zwei Magnete in der Ferne auf einander einwirken, zum Vorschein kommt. Denkt man sich, dass *die beiden Kugeln S_g und S_k jede nach ihren Richtungslinien oscilliren,* so wird die mittlere Wirkung einer auch hier auftretenden oscillatorischen Kraft, sofern man von einer begleitenden fortschreitenden Bewegung absieht — anfänglich weil diese noch sehr klein ist, später weil ihre Wirkung besonders betrachtet werden kann — gleich Null, und es bleibt allein eine stetig fortbewegende Kraft zurück, die dem Potentiale

$$4\,\pi q\, \varphi_k^{(1)}\, \varphi_g^{(1)}\, \frac{1}{r_{kg}}$$

entspricht. Sind nun, unter den gleichzeitigen periodischen Schwingungen — die schon existirenden fortschreitenden Bewegungen wie früher nicht berücksichtigt — zur selben Zeit die Richtung der Bewegung der Kugel S_g gg', diejenige der Kugel S_k, kk', so kann man sich *die Kugeln als Magnete vorstellen, deren Orientation durch* gg' *und* kk' *bestimmt sei,* g' und k' zum Beispiel die beiden Nordpole angebend. Nur darf man sich alsdann die Erscheinung *umgekehrt* denken: *gleiche Polen ziehen einander an, ungleiche stossen einander ab.*

Hier wie bei der Anziehung einer Kraft zweiten Grades bei eins Pulsationen, der Abstossung bei entgegengesetzten kommt also ein sehr bemerkenswerthes *Gegensatzverhältniss zu den Kräften der Natur* hervor.

Wenn man *nicht den mittleren Werth* im Laufe einer Schwingungsperiode, wodurch ein Theil der ganzen Kraft, der für die fortschreitende Bewegung ohne Einfluss ist, abgesondert wird, *sondern den Werth selbst der Kraft vierten Grades* sucht, so hat man diese durch das Theilpotential

$$-\pi q\, d_g^3\, d_k^3 \cdot \frac{1}{r_{kg}^3}\, s_k'^2\, \left(3 \cos^2 (s_k', r_{kg}) - 1\right)$$

zu bestimmen. *Auch hier kann man die Kraft mit derjenigen vergleichen, welche ein Magnet* S_k *gegen einen anderen* S_g *ausübt;* nur darf man sich jetzt denken, dass der letzte, wie auch seine Bewegung sein mag, immer in Beziehung auf den ersten *parallel und entgegengesetzt orientirt* sein soll; die magnetische Achse in S_k darf ferner zu jeder Zeit mit der Geschwindigkeitsrichtung des Mittelpunkts k zusammenfallen.

Diese Kraft vierten Grades hat übrigens die beachtungswerthe und sehr wichtige Eigenschaft, auf welche sonst schon in 1868 aufmerksam gemacht worden ist, dass eine Summe von drei, jede von derselben Intensität, aber drei gegen einander senkrecht stehenden Richtungen entsprechend, den Werth Null hat. Die Summe der zugehörigen $\cos^2(s_k', r_{kg})$ wird nämlich alsdann 1, und das obige Theilpotential muss somit verschwinden.

II.

Um die *mittelst Pulsationen* zweier Kugeln *entstehenden oscillatorischen Kräfte experimentell nachzuzeigen*, wurde durch Einblasen oder Aussaugung von Luft durch vertical aufsteigende Kautschukröhre, die in zwei ursprünglich gleich grosse von Wasser ganz umgebene und in derselben Tiefe liegende Ballons einmündeten, *gleichzeitige Pulsationen hervorgebracht.* Der kleinste Diameter der Ballons war hierunter 1″ (Zoll), der grösste $2\frac{1}{8}$″. Der Abstand zwischen den Rohrachsen $2\frac{7}{8}$″. Zwei horizontal mit der Centrallinie parallel laufende Glasstangen auf jeder Seite der Kautschukrohre, wo eben diese in die Ballons einmündeten, dienten dazu, vier quer über den Stangen angebrachte sehr leichte Messinghaken zu führen. Diese wurden unter den Versuchen gegen die Seiten der Rohre angelegt, um deutlicher zu zeigen, indem sie der eine nach dem andern zur Seite geworfen würden, wie die Rohre und mithin auch die Ballons zum Anfang bewegt wurden.

Wurde nun im Laufe einer kurzen Zeit der eine Ballon A angeblasen, so dass sein Volumen plötzlich wuchs, während dasjenige der andern B ungeändert blieb, so wurde bei A selbst in horizontaler Richtung nur eine sehr schwache Bewegung bemerkt, während B dagegen in starke Bewegung kam; B wurde von A entfernt und nachher angezogen; der äussere Haken an dem B-Rohre wurde somit erst zur Seite geworfen, darauf der innere. Wurde nun wieder der Ballon A mit grosser Geschwindigkeit ausgeleert, während B wie früher am Volumen ungeändert war, so blieb die A Kugel, deren Volumen jetzt plötzlich abnahm, wie in dem vorigen Fall beinahe ganz ruhig; während B sich erst A näherte, und späterhin sich wieder davon entfernte: es wurde jetzt der innere an dem B-Rohre anliegende Haken zur Seite geworfen, alsdann der äussere. Uebrigens wurde die sodann eingeleitete Oscillation wegen der Elasticität der Röhre in einiger Zeit fortgesetzt.

Sehr deutlich und in Uebereinstimmung mit der vorigen Theorie zeigten sich auch die Oscillationen, wenn die beiden Ballons gleichzeitig ausgeblasen oder geleert wurden, indem man sie entweder eins oder entgegengesetzt pulsiren liess. Im ersten Fall oscillirten sie dann von einander weg und gegen einander, im zweiten dagegen mit einander, erst zur einen, demnächst zu der anderen Seite u. s. w. Anders ausgedrückt, *eins pulsirende Kugeln oscillirten entgegengesetzt, entgegengesetzt pulsirende oscillirten eins.* Eine in dem Zeitmomente kleine Kugel suchte die andere, gleichviel ob gross oder klein, hierunter wegzutreiben, und die grosse schien ihrerseits die andere Kugel stets in ihrer Bewegung nach sich ziehen zu wollen; ganz so wie in der obigen Theorie vorausgesetzt worden war.

Bei diesen Versuchen konnten dagegen die stetig wirkenden Attractionskräfte für eins-Pulsationen, die stetig wirkenden Repulsionskräfte für entgegengesetzte nicht mit Bestimmtheit beobachtet werden. Es müsste dann dieses unter dem einzelnen Pulsationsschlag der Fall sein, bei welchem die beiden Kugeln vom kleinsten zum grössten Volumen übergingen. Die Haken wurden dann zu jeder Seite $\frac{1}{8}''$ geworfen, zuerst auf der äusseren, dann auf der inneren Seite. Die Ballone aber schlugen unter der Bewegung gegen einander bestimmt an und bildeten später, in ihrer grössten Grösse schliesslich in Ruhe gekommen, einen bleibenden Kanal zwischen einander $\frac{1}{4}''$ breit. Nachdem die Ballons in dem ersten Augenblicke von einander abgestossen waren, wurden sie also später über die ursprüngliche Gleichgewichtstellung wieder zurückgeführt, als ob die Attraction in den letzten Zeitmomenten das Uebergewicht erhalten hatte, wenigstens so weit, dass eine nach innen (gegen einander) gerichtete Bewegung beim Aufhören der von den Pulsationen bedingten Kraft dadurch eingeleitet worden war. Genauer besichtigt, hatte man doch hier noch keinen Beweis; denn wegen der Elasticität der Rohre, wie klein sie auch war, und der Wirkung des Auftriebes, musste doch nach der ersten Abstossung ein Uebergang über die Gleichgewichtslage, ob auch möglicherweise weniger hervortretend, in der That eintreten; auch war kein Unterschied in den Längen, in welchen die Haken zu beiden Seiten geworfen wurden. Die Versuche dürfen übrigens mit tiefer eingesenkten Ballons wiederholt werden.

Die mit den *Pulsationen* verbundenen *stetig wirkenden Attractionen oder Repulsionen* experimentell nachzuweisen, scheint überhaupt nicht geringen Schwierigkeiten unterworfen zu sein. Eine *Illustration* der hierher gehörenden Sätze wird man dennoch mit Leichtigkeit erhalten, indem man die Bewegungen genauer studirt, die eintreten werden, *wenn man gleichzeitig oder nach bestimmten Zeitverläufen Kugeln in Wasser niederfallen lässt.* Hat man hier nicht eigentliche Volumveränderungen der Körper selbst, so werden doch die weggedrängten Wasservolumina geändert, und das namentlich so, dass die Geschwindigkeit, womit diese Aenderungen vor sich gehen, an zwei Zeitmomenten Null ist, wenn die Kugeln die Oberfläche des Wassers zuerst berühren, und wenn sie eben vollständig eingetaucht worden sind. Man wird sich auch die Vorstellung von zwei veränderlichen Kugelsegmenten machen können, deren Massen constant seien, gleich denjenigen der Kugeln selbst, wozu sie gehören. Sonst werden an der Seite der *Pulsationen* auch die vermittelst der Fallbewegungen und zum Theil der folgenden Aufsteigungen wegen des Auftriebs entstandenen parallelen Geschwindigkeiten oder *Oscillationen* das

Ihrige beitragen, um die neuen Bewegungen hervorzubringen; denn so wie die Versuche angestellt worden sind, werden infolge der hier benutzten Theorie die Wirkungen der beiden Ursachen leider wesentlich dieselben sein, und eine Absonderung namentlich der letzten von ihnen ist uns bis jetzt nicht gelungen.

Lässt man eine Kugel A ganz in der Nähe einer auf die Oberfläche des Wassers ruhenden B-Kugel niederfallen, oder wird sie langsam und mit gleichmässiger Geschwindigkeit herunter geführt, so findet für die B-Kugel keine andere Bewegung statt als eine sehr schwache Oscillation; sie entfernt sich anfänglich ganz wenig und kehrt so beinahe in die vorige Lage zurück; erst späterhin wird sie mit einer Strömung des Wassers etwas von der A-Kugel weggetrieben. Nach der oben dargestellten Theorie darf auch keine stetig wirkende Attraction oder Repulsion vorhanden sein, wenn von den zwei Kugeln nur die eine pulsirt, die andere aber zur selben Zeit das Volumen nicht verändert.

Lässt man dagegen zwei gleich grosse und schwere Kugeln (Esche) A und B, z. B. in einem Abstande von einander etwas geringer als der Diameter und übrigens von einer geringen Höhe über der Oberfläche, gleichzeitig ins Wasser niederfallen, so werden sie sich gegen einander bis zum Contact bewegen. Man hat hier die *Analogie mit den eins-pulsirenden Kugeln, die einander anziehen sollen.* Nach dem Vorigen dürften ja unter dem einzelnen Pulsationsschlag, wobei sowohl A als B — hier die weggedrängten Wassermassen — vergrössert wurden, die beiden erst ein kleines Stück entfernt werden, und dann wieder, etwas früher als das Ende der halben Periode, umkehren, so dass sie schliesslich, wenn jetzt die Kraft aufhörte, mit gleichmässiger Geschwindigkeit sich gegen einander bewegen mussten. Was man besonders sieht, ist sodann nur die nach vollendetem Durchbruch eingeleitete annähernde Bewegung der beiden Kugeln, nachdem die Kraft selbst schon aufgehört hat zu wirken. Nach dieser Zeit wirkt doch noch stets eine Kraft vierten Grades, um dieselbe annähernde Bewegung zu befördern.

Ist B etwas schwerer als A, und lässt man sie wieder gleichzeitig niederfallen, während sie in Berührung sind oder doch in grösserer Nähe von einander — B sonst ein wenig höher liegend als A —, so bewegt B sich halb und oft ganz rund um die Kugel A herum und kommt auf der andern Seite auf. Die zwei Kugeln vertauschen also hierunter ihre Plätze; selbstverständlich trägt die A-Kugel, die als die leichtere eigentlich am stärksten bewegt wird, durch ihre Bewegung auch zu diesem Rundgehen bei. Ist A wesentlich leichter als B, A z. B. eine Kugel von Guttapercha, während B von Holz ist, so wird man die A-Kugel sehen, sich mit grosser Geschwindigkeit über die schwerere B-Kugel hinbewegen. Diese Erscheinungen treten dagegen, wie früher bemerkt, gar nicht ein, ob die eine, selbst die ganz leichte Guttaperchakugel, sich auf der Oberfläche des Wassers in Ruhe befand, während man die schwerere Kugel, und zwar in grosser Nähe der ersten, darin niederfallen liess.

Ist die eine der Kugeln im Verhältniss zu der andern klein, so ist es ferner diese kleine Kugel, die überhaupt, wie in dem oben beschriebenen Falle, unter der gleichzeitigen Bewegung sich der andern mit der grössten Geschwindigkeit nähern wird.

Statt die Kugeln niederfallen zu lassen, kann man sich auch so einrichten, dass sie von unten gegen die Wasserfläche heraufsteigen müssen. Werden gegen die Wände des Gefässes zwei hohle und leichte Guttaperchakugeln sehr nahe an einander mit unbedeutendem Druck festgehalten, und werden sie dann beide auf einmal losgelassen, so sieht man sie kurz nachher, indem sie die Oberfläche des Wassers durchbrechen, gegen einander bis zum Contact zu bewegen. Die weggedrängten Wasservolumina nehmen hier, dem vorigen Falle entgegengesetzt, gleichzeitig ab, man hat aber wieder, was den eins-Pulsationen entspricht.

In dem Obigen hat man allein die Wirkungen der einzelnen Pulsationsschläge untersucht; die verdrängten Wasservolumina wurden zu gleicher Zeit entweder vergrössert oder verkleinert. Macht man aber die Fallhöhe hinlänglich klein, so tritt gleich eine Oscillation der Kugeln ein, das heisst, es kommt auch eine fortgesetzte Pulsation der verdrängten Wasservolumina zu Stande; und obwohl die Intensität der Kraft im Zeitmomente bedeutend abgeschwächt werden muss, wird man doch sehr deutlich die scheinbare Anziehung der beiden Kugeln beobachten können.

Auch *Abstossungen* wird man in ähnlicher Weise darstellen können, indem man die Kugeln, die eine nach der andern, von einer geringen Höhe fallen lässt, so dass die letzte die Wasserfläche in demselben Augenblicke auf dem Niedergehen berührt, wo die erste unter dem Aufsteigen dieselbe wieder durchbricht. Die eine Kugel kann auch ganz hinabgetaucht gehalten werden, während die andere beispielsweise mit einem Viertel ihres Volumens niedergesenkt ist; werden sie dann losgelassen, so kommt eine entgegengesetzte Oscillation der beiden zu Stande, die weggedrängten Wasservolumina pulsiren auch entgegengesetzt, und man wird die zwei Kugeln sich von einander entfernen sehen.

Wie im Falle der Anziehung bei eins-Pulsationen zugleich eine Kraft vierten Grades attractiv auftritt — indem die Kugeln dann auch eins-oscilliren würden, beide gegen die Centrallinie senkrecht —, so wird ebenso im Falle der Abstossung wegen entgegengesetzter Pulsationen — infolge der damit verbundenen entgegengesetzten Oscillationen senkrecht gegen dieselbe mittlere Centrallinie — eine Repulsion vierten Grades hinzukommen. Zwei verschiedene Kräfte werden einander mithin auch diesmal in ihrer Wirksamkeit unterstützen; denn wegen des geringen Abstandes darf man wohl die Kraft des höheren Grades nicht als verschwindend gegen die erste ansehen. Streng genommen hat man sodann in den letzten Versuchen, eben so wenig als in den früheren, welche die Anziehungen illustriren sollten — abgesehen selbst von andern Einwänden —, einen experimentellen *Beweis* einer *gesonderten* Wirkung gefunden der aus den Pulsationen allein entstandenen Kraft zweiten Grades einerseits und derjenigen vom vierten auf der andern Seite, die mehr unmittelbar mit den Oscillationen in Zusammenhang steht. Bis weiter werden wir sie darum, wie schon früher gesagt, eher als *Illustrationen* wie als eigentliche Verificationen der gewonnenen Sätze ansehen.

Es wird sich doch zeigen, indem wir sie späterhin, mit Hilfe des Herrn Prof. Schiötz, vervollständigen und genauer beschreiben wollen, wie genau sie in der That unsern hydrodynamischen Theoremen sich anschliessen. Auch die eigenthümlichen Anziehungen und Abstossungen bei gleich tönendem Glasrohre, die nach den Dvorak'schen Versuchen stattfinden (Poggendorfs Annalen 1876), können hier zur Bestätigung dienen; sie sollen zugleich in Verbindung mit unsern Sätzen gebracht werden. Doch muss bemerkt werden, was sonst nicht anders zu erwarten sei, dass die Erscheinungen in grosser Nähe auch die Kenntniss der Kräfte vom 5ten und noch höherem Grade erfordern werden. Die Dvorak'schen Versuche waren übrigens zu der Zeit, als die Mittheilungen der Wissenschaftsgesellschaft vorgelegt wurden, noch nicht veröffentlicht; sie können somit erst später in dieser Verbindung berücksichtigt werden.

Christiania. C. A. Bjerknes.

R. Lipschitz: Beitrag zu der Theorie der Krümmung.

(Borchardt's Journal f. Math. Bd. 81. p. 230.)

Sobald n veränderliche Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als unabhängige Functionen von n veränderlichen Grössen $y_1, y_2, \ldots y_n$ gegeben sind, so kann die Beziehung zwischen dem einen und dem andern System auf eine zweifache Art aufgefasst werden. Entweder man legt der Betrachtung nur eine Mannigfaltigkeit der $n$ten Ordnung zu Grunde und denkt sich, dass dasselbe Individuum der Mannigfaltigkeit sowohl durch das Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ wie auch durch das Werthsystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnet sei. Dann drückt die Beziehung zwischen den $x_1, x_2, \ldots x_n$ und den $y_1, y_2, \ldots y_n$ eine Beziehung zwischen zwei verschiedenen Darstellungen desselben Individuums der einen Mannigfaltigkeit aus. Oder man legt der Betrachtung zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten der $n$ten Ordnung zu Grunde, wobei ein Individuum der einen durch das Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$, ein Individuum der andern durch das Werthsystem $y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnet wird. Alsdann bedeutet die Beziehung zwischen den $x_1, x_2, \ldots x_n$ und den $y_1, y_2, \ldots y_n$ eine Beziehung eines Individuums der einen Mannigfaltigkeit auf ein Individuum der andern Mannigfaltigkeit.

Beide Arten der Auffassung haben sich an der Untersuchung von räumlichen Gebilden entwickelt. Ein Beispiel der ersten Art entsteht, indem ein Punkt im Raume durch drei Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Systems und durch drei Coordinaten y_1, y_2, y_3 eines andern Systems bestimmt wird; ein Beispiel der zweiten Art, indem zwei Oberflächen so auf einander bezogen werden, dass ein Punkt der einen einem Punkte der andern entspricht. Wenn man das Quadrat der Entfernung von zwei benachbarten Punkten im Raume, oder, was dasselbe ist, das Quadrat des Linearelements im Raume zuerst durch die Coordinaten x_1, x_2, x_3 und dann durch die Coordinaten y_1, y_2, y_3 von einem und demselben der benachbarten Punkte ausdrückt, so wird dasselbe bei dem ersten Coordinatensystem gleich einer positiven quadratischen Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3, bei dem zweiten Coordinatensystem gleich einer positiven quadratischen Form der drei Differentiale dy_1, dy_2, dy_3. Sind x_1, x_2, x_3 rechtwinklige Coordinaten, so hat die betreffende Form in Folge des Pythagoräischen Lehrsatzes die Gestalt $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. Immer geht die erste quadratische Form vermöge der Einführung des zweiten Systems in die zweite quadratische Form über, weil die beiden Formen die verschiedenen Ausdrücke desselben geometrischen

Begriffs sind. Wenn dagegen zwei Oberflächen Punkt für Punkt auf einander bezogen werden, und wenn zu den einander benachbarten Punkten $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ der ersten Oberfläche respective die Punkte $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$ der zweiten Oberfläche gehören, so wird die Beziehung derselben zu einander durch die Forderung, dass das Quadrat des Abstandes von je zwei benachbarten Punkten oder das Quadrat des Linearelements für die erste Oberfläche gleich dem Quadrate des Abstandes der zwei zugehörigen Punkte oder dem Quadrate des betreffenden Linearelements für die zweite Oberfläche gleich sein soll, einer wesentlichen Einschränkung unterworfen. Ist diese Forderung für zwei bestimmte Oberflächen erfüllt, so müssen die Quadrate der elementaren Strecken $A^{(1)}A^{(2)}$, $A^{(2)}A^{(3)}$, $A^{(3)}A^{(1)}$ respective den Quadraten der correspondirenden elementaren Strecken $B^{(1)}B^{(2)}$, $B^{(2)}B^{(3)}$, $B^{(3)}B^{(1)}$ gleich sein, und daher sind die elementaren Dreiecke $A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}$ und $B^{(1)}B^{(2)}B^{(3)}$ einander congruent. Man darf jetzt ein Stück der ersten Oberfläche durch ein System von willkürlich angenommenen Punkten in ein System von elementaren Dreiecken zerlegen. Demgemäss liefern die auf der zweiten Oberfläche befindlichen zugehörigen Punkte ein System von correspondirenden elementaren Dreiecken, diese Dreiecke bilden aber ein bestimmtes Stück der zweiten Oberfläche, und zwar ist bei der getroffenen Voraussetzung jedes Dreieck des ersten Systems dem zugeordneten Dreiecke des zweiten Systems congruent. Alsdann sieht man, wie das betreffende Stück der ersten Oberfläche durch Biegung und ohne Dehnung in die Gestalt des zugeordneten Stückes der zweiten Oberfläche gebracht werden kann.

Es sei nun eine beliebige Oberfläche im Raume gegeben. In irgend einem Punkte derselben werde eine Normale errichtet, durch die Normale eine beliebige Ebene gelegt, für die auf der Oberfläche entstehende Schnittcurve der Krümmungskreis bestimmt, und das System der beiden auf einander senkrecht stehenden Normalebenen aufgesucht, für welche die zugeordneten Krümmungsradien die Eigenschaften des Maximums oder Minimums haben, das heisst, die Hauptkrümmungsradien ausmachen. Hiermit sind die Grundbegriffe der Theorie der Krümmung definirt. Ihre analytischen Ausdrücke richten sich nach der Wahl des Coordinatensystems, und ergeben sich in Bezug auf ein bestimmtes Coordinatensystem x_1, x_2, x_3 unmittelbar, nachdem für dasselbe die quadratische Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 gebildet ist, welche das Quadrat des Linearelements im Raume bedeutet, und nachdem die in Rede stehende Oberfläche durch das Constantsetzen einer angemessen gewählten Function der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 dargestellt ist. Durch die Anwendung eines neuen Coordinatensystems y_1, y_2, y_3 verwandelt sich vermöge einer vorhin gemachten Bemerkung die quadratische Form der drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 in eine quadratische Form der drei Differentiale dy_1, dy_2, dy_3, und gleichzeitig die eingeführte constant zu setzende Function der x_1, x_2, x_3 in eine constant zu setzende Function der y_1, y_2, y_3. *Die analytischen Ausdrücke für die Grundbegriffe der Theorie der Krümmung haben aber zu der neuen quadratischen Form und der constant zu setzenden Function der y_1, y_2, y_3 eine gleiche allgemeine Beziehung, wie zu der ursprünglichen quadratischen Form und der constant zu setzenden Function der x_1, x_2, x_3; sie besitzen deshalb die Eigenschaft, in dieser Hinsicht invariant zu sein.* Dies gilt auch von den Coefficienten der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln die negativ genommenen reciproken Werthe der beiden Haupt-Krümmungsradien sind. Zwischen den beiden Coefficienten der erwähnten Gleichungen existirt jedoch ein Unterschied, welcher durch die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* von Gauss berühmt geworden ist. Bei einer ohne Dehnung ausgeführten Biegung der Oberfläche ändert sich zwar der erste Coefficient, welcher der Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien gleich ist, aber nicht der zweite Coefficient, welcher dem Producte der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien gleich ist, und *das Krümmungsmass der Oberfläche in dem betreffenden Punkte* constituirt. *Denn das Krümmungsmass ist eine Invariante in Bezug auf diejenige quadratische Form von zwei Differenzialen, welche das Quadrat des Linearelements für die betreffende Oberfläche darstellt.*

Nach Hervorhebung dieser allgemeinen Gesichtspunkte ist zu erwähnen, dass die vorliegende Abhandlung an eine Verallgemeinerung der Theorie der Krümmung anknüpft, welche in den Aufsätzen *Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differenzialen*, Borchardt's Journal Bd. 71, pag. 274 und pag. 288 mitgetheilt ist. Daselbst erscheint an der Stelle der drei Coordinaten eines Punktes im Raume ein System von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, an der Stelle von dem Quadrate des Linearelements im Raume eine wesentlich positive quadratische Form der n Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, bei der die Coefficienten in beliebiger Weise von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, und die mit $2f(dx)$ bezeichnet ist, an der Stelle der constant zu setzenden Function, welche die Gleichung der Oberfläche ergiebt, ein System von l constant zu setzenden Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$. Namentlich zeichnet sich nun der Fall aus, in welchem die Zahl l der gegebenen Functionen gleich der Einheit ist. Alsdann tritt für eine dort mit ω bezeichnete Grösse eine Gleichung des $(n-1)$ten Grades auf

$$D_0\omega^{n-1} + D_1\omega^{n-2} + \cdots + D_{n-2}\omega + D_{n-1} = 0,$$

deren $n-1$ Wurzeln eine Verallgemeinerung der negativ genommenen reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien bilden. Bei der Voraussetzung, dass $n = 3$ und $2f(dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ sei, gehen jene Wurzeln in diese Werthe selbst über, und die in Rede stehende Gleichung wird zu einer Darstellung der vorhin besprochenen quadratischen Gleichung.

Die Coefficienten der für einen beliebigen Werth der Zahl n angeführten Gleichung, das heisst die Quotienten $\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_2}{D_0} \cdots \frac{D_{n-1}}{D_0}$, haben die Eigenschaft, dass diejenigen unter ihnen, deren Zeiger eine gerade Zahl ist, und die Producte aus irgend zweien von ungeradem Zeiger *in Bezug auf die quadratische Form $2f(dx)$ und die hinzugefügte constant zu setzende Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ invariant* sind.

In den angeführten Aufsätzen ist auf die quadratische Form von $n-1$ Differentialen hingewiesen, in welche die Form $2f(dx)$ übergeht, sobald die in dem Constantsetzen der bezeichneten Function bestehende Gleichung angewendet wird. Man darf annehmen, dass jene Function, die y_1 heissen soll, zu einem System von n unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gehört, dass die $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen der $y_1, y_2, \ldots y_n$ angesehen werden, dass durch die Substitution dieser Variabeln die quadratische Form $2f(dx)$ sich in die quadratische Form $2g(dy)$ der Differentiale $dy_1, dy_2, \ldots dy_n$ verwandelt, und dass aus der letztern, indem $y_1 =$ const. und $dy_1 = 0$ gesetzt wird, die erwähnte Form der $(n-1)$ Differenziale $dy_2, \ldots dy_n$ entsteht, welche mit $2\overline{g(dy)}$ notirt werden möge. Unter der Voraussetzung, dass $n = 3$ und $2f(dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ sei, wird $2\overline{g(dy)}$ der Ausdruck von dem Quadrate des Linearelements für die Oberfläche $y_1 =$ const., und bei der erwähnten zugehörigen quadratischen Gleichung ist der Coefficient $\frac{D_2}{D_0}$ oder das *Krümmungsmass in einem Punkte der Oberfläche* eine *Invariante der Form $2\overline{g(dy)}$*, während der Coefficient $\frac{D_1}{D_0}$, oder, genauer gesprochen, das Quadrat dieses Coefficienten, diese Eigenschaft nicht hat. Aus dieser Beobachtung entspringt für einen beliebigen Werth der Zahl n die Frage nach den Merkmalen derjenigen Coefficienten oder derjenigen Verbindungen von Coefficienten, welche *nicht nur mit Rücksicht auf die Form* $2f(dx)$ *und die constant zu setzende Function* y_1, *sondern auch in Bezug auf die Form* $2\overline{g(dy)}$ *von* $n-1$ *Differentialen invariant* sind. Bei der Voraussetzung, dass die Form $2f(dx)$ eine Form mit constanten Coefficienten oder in eine solche Form transformirbar ist, zeigte es sich, dass die *sämmtlichen Coefficienten von geradem Zeiger* $\frac{D_2}{D_0}$, $\frac{D_4}{D_0}, \ldots$ diese Eigenschaft besitzen.

Unter der gleichen in Betreff der Function $2f(dx)$ geltenden Annahme wird in der gegenwärtigen Abhandlung für *die Coefficienten von ungeradem Zeiger* der Satz bewiesen, *dass alle Producte von zwei solchen Coefficienten* $\frac{D_{2r+1}\,D_{2s+1}}{D_0{}^2}$, *bei denen die Summe der Zeiger* $2r+2s+2$ *gleich der Zahl* $n+1$ *oder grösser als diese Zahl ist, Invarianten der Form* $2g(dy)$ *sind.* Hieraus folgt eine eigenthümliche Bestimmung für die Coefficientenvon ungeradem Zeiger, mit Ausnahme des ersten Coefficienten $\frac{D_1}{D_0}$, vermittelst invarianter Verbindungen. Hier möge nur das Ergebniss angeführt werden, dass, wenn β die grösste ungerade Zahl bedeutet, welche nicht über $n-1$ liegt, und wenn die vermöge des erwähnten Satzes invariante Verbindung $\frac{D_\beta{}^2}{D_0{}^2}$ einen von Null verschiedenen Werth hat, der Coefficient $\frac{D_\beta}{D_0}$ durch die Ausziehung der Quadratwurzel aus der so eben charakterisirten Invariante entsteht, und alle übrigen Coefficienten von ungeradem Zeiger, den Coefficienten $\frac{D_1}{D_0}$ ausgenommen, mit Hülfe von dieser Quadratwurzelgrösse und von Invarianten der Form $2\overline{g(dy)}$ rational darstellbar sind. Wenn jetzt die sämmtlichen Coefficienten von geradem und ungeradem Zeiger $\frac{D_2}{D_0}, \frac{D_3}{D_0}, \cdots \frac{D_{n-1}}{D_0}$ ins Auge gefasst werden, so zeigt sich, dass dieselben, wofern die Quadratwurzel aus einer Invariante ebenfalls als eine Invariante betrachtet wird, an der Eigenschaft des Krümmungsmasses Theil nehmen, in Bezug auf die zugehörige Form $2\overline{g(dy)}$ invariant zu sein. Von diesen sämmtlichen Coefficienten trennt sich daher auf das schärfste der Coefficient $\frac{D_1}{D_0}$. Seine Bedeutung für den Fall einer im Raume angenommenen Oberfläche ist vorhin hervorgehoben.

Ausserdem weiss man, dass die charakteristische Bedingung für eine Oberfläche, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Inhalt hat, oder eine Minimalfläche, in dem Verschwinden dieses Coefficienten besteht. Diejenige Gleichung, welche bei der zu Anfang erwähnten Verallgemeinerung der Theorie der Krümmung dieser Gleichung entspricht, liefert aber auch die partiellen Differenzialgleichungen des Variationsproblems, auf welches sich die Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen bezieht, die in einem Aufsatze von gleicher Ueberschrift in Borchardts Journal f. Math. Bd. 78 auseinander gesetzt ist.

Boenkeim bei Königsberg i. Pr. R. Lipschitz.

A. Toepler: Zur Theorie der stationären elektrischen Strömung in gekrümmten, leitenden Flächen.

(Herrn Poggendorff für die Annalen übergeben.)

Nachdem schon von Heine (Journal für Mathematik, Bd. 79) auf die Uebereinstimmung des Problems der elektrischen Strömung in ebenen Flächen mit dem der conformen Abbildung aufmerksam gemacht worden war, hat Kirchhoff in einer sehr bemerkenswerthen Abhandlung (Monatsber. d. Kgl. Ak. d. Wissensch. zu Berlin, 19. Juli 1875) gezeigt, dass diese Uebereinstimmung für beliebige gekrümmte, leitende Flächen stattfinden muss, so dass, wenn man in einem bestimmten Falle das eine Problem gelöst hat, man auch die Lösung des anderen besitzt. Ich habe nun in einem wie oben betitelten Aufsatze nachgewiesen, dass sich die in Rede stehende Beziehung auf einfachem Wege unmittelbar aus der Definition der conformen Abbildung einerseits und der Strömung als einer längs der Kraftrichtung verlaufenden Bewegung andererseits ableiten lässt. Aus dieser Betrachtungsweise ergiebt sich zugleich eine sehr einfache Beziehung für den Leitungswiderstand zweier auf einander abgebildeten Flächen.*)

Ich gehe von der Vorstellung aus, dass zwei beliebige, in der leitenden Fläche liegende, geschlossene Curven, welche sich nicht schneiden, mit constantem aber verschiedenem Potential besetzt werden, wodurch eine Strömung in dem Aussenfelde entsteht. Ein

*) Die von mir mitgetheilte Betrachtungsweise habe ich, soweit sie sich auf ein einziges Elektrodenpaar bezieht, schon früher gekannt und in Vorlesungen benutzt, ohne dieselbe indessen zu verallgemeinern und zu publiciren.

System unendlich benachbarter Stromlinien und Linien gleichen Potentials zerlegt das Stromfeld in rechteckige Flächenelemente. Die conforme Abbildung dieses Liniensystems auf eine zweite Fläche zerlegt diese ebenfalls in rechteckige Elemente, welche wegen der Aehnlichkeit mit den entsprechenden Elementen des Originals gleichen Widerstand haben für Elektricitätsbewegung, welche über entsprechende Seiten ein- und austritt, (wobei selbstverständlich gleiches specifisches Leitungsvermögen und gleiche, unendlich kleine Flächendicke vorausgesetzt wird). Dieser Umstand genügt, um zu zeigen, dass das System der Bildcurven wieder ein System von Stromlinien und Linien gleichen Potentials einer möglichen Elektricitätsbewegung in der Bildfläche ist, und zwar derjenigen Elektricitätsbewegung, bei welcher die Elektricität auf den Bildern der Ein- und Ausströmungscurve ein- und austritt. Dies ist in geometrischer Fassung die von Kirchhoff ausgesprochene Beziehung, bei welcher vorausgesetzt wird, dass auch die Grenzen der auf einander bezogenen Flächen Bilder zu einander sind.

Bei der Ableitung des Satzes denke ich mir die Bildfläche längs der Stromlinienbilder aufgeschnitten, so dass getrennte, unendlich dünne Leiterstreifen zwischen den Bildern der Ein- und Ausströmungscurve entstehen. Auf diese Streifen kann man die bekannten Formeln anwenden, welche für die Elektricitätsbewegung zwischen unendlich nahen Stromlinien gelten. Unter der Voraussetzung, dass auf den Enden aller Streifen constante, aber beiderseits verschiedene Potentialwerthe bestehen, dass also die Bilder der Ein- und Ausströmungscurve die Elektricität zu- und abführen, ergibt sich, dass die Bilder aller Linien constanten Potentials selbst constantes Potential annehmen. Hieraus folgt aber sofort, dass die durch jene Formeln ausgedrückte Elektricitätsbewegung fortbesteht, wenn die getrennt gedachten Streifen wieder leitend vereinigt werden, womit der Satz bewiesen ist.

Da diese Schlussfolgerung durchaus unabhängig ist von dem Umstande, ob die Flächenelemente kleine Grössen derselben Ordnung sind oder nicht, so kann man unmittelbar auf die Fälle übergehen, in denen die Ein- und Ausströmung auf ungeschlossenen Curven, durch den Flächenrand, oder durch Punkte erfolgt. Für letztere werden unendlich kleine geschlossene Kreise substituirt. Sind mehr als zwei Curven für die Ein- und Ausströmung vorhanden, so zeigt dieselbe Betrachtungsweise, dass die conforme Abbildung die Elektricitätsbewegung in der Bildfläche für denjenigen Fall darstellt, dass die constanten Potentialdifferenzen der Ein- und Ausströmungscurven im Bilde proportional sind den Potentialdifferenzen der entsprechenden Curven des Originals.

Für den Leitungswiderstand der Flächen zwischen einem einzigen Elektrodenpaar ergiebt die obige Betrachtung folgende Lehrsätze:

Geschieht die Strömung zwischen Curven, welche Bilder von einander sind, so ist der Widerstand des Bildes gleich dem des Originals.

Geschieht die Ein- und Ausströmung so, dass an die aufeinander bezogenen Flächen dieselben unendlich dünnen Zuleitungsdrähte von cylindrischem Querschnitt senkrecht in entsprechenden Punkten angelegt werden, so ist der Widerstand des Bildes gleich dem des Originals, vermehrt um die Grösse $\frac{1}{2\pi k \delta} lg \beta_1 \beta_2$, wobei β_1 und β_2 die bei der Abbildung der Elektrodenkreise stattfindenden linearen Bildgrössenverhältnisse, k und δ das Leitungsvermögen und die unendlich kleine Flächendicke bedeuten. Dieser letztere Satz, welcher selbstverständlich experimentell nur angenähert bestätigt werden könnte, erklärt jenes auffallende Resultat, welches Boltzmann für den Widerstand der Kugelfläche fand, dass derselbe nämlich nicht abhängt vom Kugelradius, sondern nur von der gradlinigen Entfernung derjenigen Punkte, welche man als Elektrodenpunkte wählt. Er ist derselbe für alle durch zwei feste Raumpunkte gelegte Kngelflächen. Es ergiebt sich ferner, dass dieselbe Beziehung auch gültig ist für alle unendlichen Cylinderflächen, wenn die beiden festen Elektrodenpunkte ihrer Querschnittscurve angehören.

Endlich habe ich noch bemerkt, dass ein System von Stromlinien und Linien gleichen Potentials auch nach Vertauschung des Sinnes dieser Curven eine mögliche Elektricitätsbewegung darstellt, ein Umstand, welcher bei physikalischen Untersuchungen meines Wissens bisher keine Anwendung fand. Kirchhoff hat gezeigt, wie man mit grosser Schärfe die Linien gleichen Potentials einer gegebenen Flächenströmung mit dem Galvanometer aufsuchen kann. Würde die eben bemerkte Vertauschung physikalisch vollzogen, so würde dieselbe Methode sich auch für die experimentelle Feststellung der Stromlinien verwenden lassen, und hierdurch wäre die Möglichkeit geboten, Abbildungsprobleme unter Umständen mit erheblicher Genauigkeit in der bereits von Kirchhoff angedeuteten Weise experimentell zu behandeln.

Dresden. A. Toepler.

G. Kirchhoff: Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. (Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876.)

Der Zweck dieser Abhandlung ist es, die von F. Neumann entwickelte und später von Mac Cullagh behandelte Theorie der Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenzfläche krystallinischer Mittel in einer neuen Form darzustellen, welche die nicht zu übertreffende Einfachheit derselben deutlicher als bisher hervortreten lässt. Diesen Zweck glaubt der Verfasser erreicht zu haben, indem er die Grundhypothese der Theorie anders ausgesprochen und das zu behandelnde Problem etwas allgemeiner gefasst hat, als es von den genannten Forschern geschehen ist. Die Grundlage der durchgeführten Betrachtungen ist die Annahme, dass der Aether in Bezug auf die Lichtschwingungen sich wie ein fester elastischer Körper verhält, auf dessen Theile keine andern Kräfte wirken, als die durch die relativen Verschiebungen bedingten, während auf die Flächen, die die Grenzen heterogener Mittel bilden, auch Druckkräfte, die andern Ursprungs sind, ausgeübt werden, und zwar Druckkräfte, die bewirken, dass bei der Reflexion und Brechung der transversalen Lichtwellen keine longitudinalen Wellen entstehen. Die Bedingungen zwischen den Verrückungen, die hiernach an der ebenen Grenze zweier verschiedenen, krystallinischen Mittel zu erfüllen sind, bestehen in 4 linearen homogenen Gleichungen. Es wird eine particuläre Lösung der für die Schwingungen geltenden Differentialgleichungen untersucht, die diesen Grenzbedingungen genügt, und die ein System ebener Wellen darstellt, die theils in dem einen, theils in dem andern Mittel sich bewegen. Eine von diesen Wellen kann beliebig gegeben sein: beliebig in Bezug auf ihre Richtung und in Bezug auf das Gesetz, welches die Grösse der Verrückung eines Punktes mit der Zeit verbindet; die Richtungen der andern Wellen sind dann durch die Wurzeln zweier biquadratischen Gleichungen bestimmt, von denen die eine auf Wellen in dem einen, die andere auf Wellen in dem andern Mittel sich bezieht. Eine Wurzel der einen dieser Gleichungen führt auf die gegebene Welle zurück; es besteht daher das ganze System aus 8 Wellen, von denen 4 dem einen, 4 dem andern Mittel angehören. Für jede dieser Wellen ist mit ihrer Richtung die Richtung der Verrückung vollständig, und die Grösse der Verrückung in jedem Augenblick bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Nennt man diese Constante die Amplitüde der Welle (indem man einen bei Sinusschwingungen üblichen Ausdruck auf Schwingungen allgemeinerer Art überträgt), so bestehen zwischen den Amplitüden der 8 Wellen 4 lineare, homogene Gleichungen; neben der Amplitüde der gegebenen Welle können also noch die Amplitüden von 3 andern willkürlich gewählt werden. Haben die beiden biquadratischen Gleichungen nur reelle Wurzeln, so sind in jedem Mittel 2 einfallende Wellen vorhanden und 2, die reflektirt oder gebrochen sind; um Fälle zu erhalten, die durch das Experiment verwirklicht werden können, hat man dann im Allgemeinen die Amplitüden von 3 einfallenden Wellen gleich Null zu setzen, so dass nur *eine* einfallende Welle übrig bleibt. Aber die biquadratischen Gleichungen können auch complexe Wurzeln haben; das Entsprechende tritt bei isotropen Mitteln ein, wenn totale Reflexion stattfindet. Um *dann* auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, hat man die Constanten, die die Bedingung, dass nur *eine* einfallende Welle da sei, noch unbestimmt lässt, so zu wählen, dass die Verrückung nirgend unendlich wird; es ist dabei die Aufgabe zu lösen, eine Function eines complexen Arguments zu finden, deren reeller Theil für reelle Werthe des Arguments gegeben ist, und die nicht unendlich wird für Werthe des Arguments, deren imaginärer Theil gleich $\sqrt{-1}$, multiplicirt mit einer positiven Grösse, ist.

Bei der Ableitung der Gleichungen zwischen den Amplitüden eines Systemes von 8 zusammengehörigen Wellen brauchte der Begriff der *Strahlen* nicht zu Hülfe gezogen werden. Bei der Entscheidung der Frage, ob eine Welle eine einfallende ist oder eine reflektirte oder gebrochene, kann derselbe nicht umgangen werden. Er ist daher auch in Betracht gezogen und definirt. Sucht man für eine gegebene ebene Welle die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des Druckes, der von den relativen Verschiebungen der Aethertheile herrührt und auf ein Element einer beliebigen Ebene wirkt, so ergiebt sich dieselbe gleich Null, falls die Ebene einer gewissen Richtung parallel ist; diese Richtung ist die des Strahles, der zu der Welle gehört.

Berlin. G. Kirchhoff.

R. Clausius: Ueber die Ableitung eines neuen electrodynamischen Grundgesetzes. (Borchardt's Journal Bd. 82.)

In dieser Abhandlung giebt der Verf. die Ableitung des Grundgesetzes, welches er schon im Dec. v. J. und in etwas vereinfachter Form im Febr. d. J. vorläufig veröffentlicht hatte.

Bekanntlich hat zuerst W. Weber versucht, alle electrodynamischen Erscheinungen auf ein Grundgesetz zurückzuführen, welches die Kraft bestimmt, die zwei bewegte Electricitätstheilchen auf einander ausüben. Seien nämlich e und e' die beiden in Puncten concentrirt gedachten Electricitätstheilchen und r ihr gegenseitiger Abstand zur Zeit t, so sollen die Theilchen nach Weber eine Abstossung von der Stärke

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$

auf einander ausüben, worin c eine Constante ist.

Bei der Ableitung dieser Formel ist Weber von der Vorstellung ausgegangen, dass bei einem galvanischen Strome in jedem Leiterelemente gleiche Mengen von positiver und negativer Electricität sich mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten bewegen. Da diese Doppelbewegung eine sehr complicirte ist, so hat der Verf. sich die Frage gestellt, ob man nicht auch aus einer einfachen strömenden Bewegung alle electrodynamischen Erscheinungen erklären könne.

Dieser letzteren Vorstellung von nur Einer Strömung hat in neuerer Zeit C. Neumann nach dem Vorgange von Riemann eine bestimmtere Form gegeben, indem er annimmt, dass die negative Electricität fest an die ponderablen Atome gebunden sei und nur die positive Electricität im festen Leiter strömen könne, und diese Vorstellung legt der Verf. seinen Betrachtungen zu Grunde.

Er untersucht zunächst, ob die Weber'sche Formel auch mit dieser Vorstellung vereinbar sei, findet aber, dass sie unter der Voraussetzung von nur Einer strömenden Electricität zu Kräften führen würde, welche in der Wirklichkeit nicht stattfinden. Dasselbe stellt sich für eine von Riemann aufgestellte Formel, welche in neuester Zeit von Hattendorff veröffentlicht ist, heraus.

Der Verf. schreitet dann dazu, selbst eine Formel abzuleiten, welche ebenfalls alle bis jetzt bekannten electrodynamischen Erscheinungen erklärt, und auch unter der Voraussetzung von nur Einer strömenden Electricität zu keinen Widersprüchen führt. Er wählt zuerst ein specielles Coordinatensystem und stellt einen Ausdruck auf, welcher ausser den Coordinaten der Electricitätstheilchen die Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten d. h. die Differentialcoefficienten erster und zweiter Ordnung der Coordinaten nach der Zeit enthält, und in welchem alle möglichen Glieder mit Differentialausdrücken bis zur zweiten Ordnung vorkommen, mit Ausnahme solcher Glieder, die sich durch einfache geometrische Betrachtungen sofort als unmöglich ergeben. Diesen Ausdruck überträgt er dann auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, in welchem die beiden Electricitätstheilchen zur Zeit t die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben, und gelangt dadurch zu folgendem Resultate.

Wenn die drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft, welche das Theilchen e von dem Theilchen e' erleidet, durch Xee', Yee' und Zee' dargestellt werden, so lässt sich X in nachstehende Summe zerlegen:

$$X = \frac{x-x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3 \tag{1}$$

und zur Bestimmung von X_1, X_2 und X_3 gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_1 = {} & B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2x}{dt^2} + B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt} \\ & + \left\{C\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} + \left[C_1\frac{d^2r}{ds^2} + C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + C_3\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + C_1\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right\}(x-x'). \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} X_2 = {} & B_3\frac{dx'}{dt} + B_4\frac{d^2x'}{dt^2} + B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ & + \left\{C_4\frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \left[C_5\frac{d^2r}{ds'^2} + C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + C_7\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + C_5\frac{dr}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right\}(x-x'). \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} X_3 = {} & B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{dt}\frac{ds}{dt} + B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ & + \left(C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + C_9\cos\varepsilon\right)(x-x')\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin bedeuten ds und ds' die von den beiden Electricitätstheilchen während der Zeit dt zurückgelegten Bahnelemente, und ε den Winkel zwischen den Richtungen derselben. $B, B_1 \ldots. B_7$ und $C, C_1 \ldots. C_9$ stellen unbestimmte Functionen des Abstandes r dar, um deren Bestimmung es sich im Folgenden handelt.

Um die in X_2 vorkommenden Functionen zu bestimmen wird zunächst der Satz angewandt, *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ein ruhendes Electricitätstheilchen keine bewegende Kraft ausübt.*

Um die in X_1 vorkommenden Functionen zu bestimmen wird der umgekehrte Satz angewandt, *dass eine ruhende Electricitätsmenge auf einen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen und constanten galvanischen Strom keine Kraft ausübt.*

Um ferner die in X_3 vorkommenden Functionen zu bestimmen wird aus der Ampère'schen Theorie der Ausdruck *derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche zwei geschlossene galvanische Ströme auf einander ausüben*, als sicher angenommen, und dann wird noch der Satz angewandt, *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom einen anderen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen galvanischen Strom in seiner Intensität nicht zu ändern sucht.*

Um endlich in X_2 noch eine weitere Bestimmung von noch unbestimmt gebliebenen Functionen auszuführen, wird für geschlossene Leiter aus der Inductionstheorie der Satz angewandt, *dass, wenn entweder der Leiter s in einer bestimmten Lage in der Nähe des Leiters s' verharrt, aber im letzteren die Stromstärke von Null bis zu einem gegebenen Werthe wächst, oder die Stromstärke in s' unveränderlich diesen Werth hat, aber s sich aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage heranbewegt, in beiden Fällen eine gleich grosse Inductionswirkung in s stattfindet.*

Durch diese Sätze, welche alle als zuverlässig betrachtet werden dürfen, werden die obigen achtzehn unbestimmten Functionen von r auf fünf reducirt, und wenn diese mit E, F, G, H und J bezeichnet werden, so lautet der Ausdruck von X folgendermaassen:

$$(5)\quad X = \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d\,[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2\,[G\,(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$
$$+ \frac{d\,[G\,(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(H\frac{dx}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$
$$+ \left\{\frac{k\,(x-x')}{2r^3}\frac{d^2\,(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2\,[E\,(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

worin k eine Constante bedeutet.

Um die hierin noch vorkommenden unbestimmten Functionen ebenfalls zu bestimmen, wird nun die Annahme gemacht, *dass die Kräfte, welche zwei Electricitätstheilchen e und e' auf einander ausüben, für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen.* Hierdurch reducirt sich die vorige Gleichung auf folgende:

(6) $$X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(1 + \frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right],$$

worin R die einzige noch übrig bleibende unbestimmte Function von r ist.

Nennen wir nun die Grösse, deren negatives Differential die während eines Zeitelementes dt bei der Bewegung der Electricitätstheilchen von den Kräften gethane Arbeit darstellt, das *Potential* der Theilchen auf einander, so wird das Potential ausgedrückt durch

$$ee'\left[\frac{1}{r} - \left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right].$$

Dieses Potential können wir in zwei Bestandtheile zerlegen, das *electrostatische* Potential U und das *electrodynamische* Potential V. Dann gelten die Gleichungen:

(7) $$U = \frac{ee'}{r}$$

(8) $$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Der hier gegebene Ausdruck des electrodynamischen Potentials ist bei der Annahme von nur Einer im festen Leiter beweglichen Electricität der einzig mögliche.

Die in ihm noch vorkommende, mit R bezeichnete unbestimmte Function von r lässt sich aus den Wirkungen geschlossener Ströme überhaupt nicht bestimmen, und man ist daher, wenn man auch sie noch bestimmen will, für jetzt auf Wahrscheinlichkeitsgründe angewiesen.

Macht man die Annahme, dass die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung nach einem einheitlichen Gesetze stattfinden müsse, so gelangt man zu dem Schlusse, dass

(9) $$R = k_1 r$$

zu setzen ist, worin k_1 eine Constante bedeutet. Dadurch geht (8) über in:

(10) $$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + k_1\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Sucht man ferner noch durch Bestimmung der Constanten k_1 diesen Ausdruck möglichst einfach zu machen, so findet man zunächst, dass zwei Werthe sich in dieser Beziehung besonders auszeichnen, nämlich $k_1 = 0$ und $k_1 = -k$, welche geben:

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \tag{11}$$

$$V = -k\frac{ee'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \tag{12}$$

Diese beiden Formeln sind äusserlich nahe gleich einfach; benutzt man sie aber zu Rechnungen, indem man aus ihnen die Kraftcomponenten zu bestimmen sucht, so findet man, dass für diese aus der ersteren Formel viel einfachere Ausdrücke entstehen, als aus der letzteren, und man wird also, wenn man dasjenige Kraftgesetz erhalten will, welches, während es allen bis jetzt bekannten Erscheinungen entspricht, zugleich möglichst einfach ist, $k_1 = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $R = 0$ zu setzen haben.

Da der Ausdruck des electrodynamischen Potentials kürzer und übersichtlicher ist, als diejenigen der Kraftcomponenten, so ist er ganz besonders dazu geeignet, die verschiedenen bis jetzt aufgestellten electrodynamischen Grundgesetze, (mit Ausnahme des Gauss'schen, welches dem Princip von der Erhaltung der Energie nicht genügt,) unter einander zu vergleichen, und es möge hier eine Zusammenstellung der Art Platz finden. Die zur Bestimmung des electrodynamischen Potentials dienende Gleichung ist

1) nach Weber*):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

2) nach Riemann**):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

3) nach den hier ausgeführten Entwickelungen

a) in allgemeinster Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

b) in vereinfachter Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + k_1\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

---

*) Pogg. Ann. Jubelband S. 212.

**) Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernh. Riemann bearbeitet von Hattendorff, Hannover 1876, S. 326.

c) in einfachster und daher wahrscheinlichster Form:

$$V = -k \frac{ee'}{2r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

Dem letzten Ausdrucke kann man auch folgende Gestalt geben:

$$(13) \qquad V = k \frac{ee'}{r} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right),$$

oder, wenn man mit v und v' die Geschwindigkeiten der beiden Electricitätstheilchen und mit ε den Winkel zwischen ihren Bewegungsrichtungen bezeichnet:

$$(14) \qquad V = k \frac{ee'}{r} vv' \cos \varepsilon.$$

Um nun aus dem electrostatischen und electrodynamischen Potential wiederum Kraftcomponenten abzuleiten, hat man Gleichungen anzuwenden, in denen das electrodynamische Potential in derselben Weise vorkommt, wie in den auf allgemeine Coordinaten bezüglichen mechanischen Grundgleichungen von **Lagrange** die lebendige Kraft. Für die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche das Theilchen e erleidet, lautet die Gleichung:

$$(15) \qquad Xee' = \frac{d(V-U)}{dx} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}} \right).$$

Durch Ausführung der hierin angedeuteten Differentiationen erhält man für X den unter (6) gegebenen Ausdruck.

Setzt man in diesem Ausdrucke $R = 0$ und nimmt mit ihm noch die vorher bei V angewandten Umformungen vor, so erhält man:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} \left(1 + \frac{k}{2} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt} \right) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \\ &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} \left[1 - k \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right) \right] - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right) \\ &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} (1 - kvv' \cos \varepsilon) - k \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{dx'}{dt} \right), \end{aligned}$$

und Gleichungen derselben Art lassen sich natürlich auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen bilden.

Will man nun das auf zwei einzelne Electricitätstheilchen bezügliche Grundgesetz dazu anwenden, die ponderomotorische Kraft zwischen zwei galvanischen Stromelementen ds und ds' zu bestimmen, so hat man in jedem Stromelemente die bewegte positive und die ruhende negative Electricität zu betrachten, und die Kräfte auszudrücken, welche die beiden Electricitätsmengen des einen Stromelementes von den beiden Electricitätsmengen des anderen erleiden. Bestimmt man auf diese Weise die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, und wendet dabei für X den unter (6) gegebenen allgemeinen Ausdruck an, so hebt sich in der zu bildenden Summe die unbestimmte Function R auf, und man erhält folgenden ganz bestimmten Ausdruck, worin i und i' die Stromintensitäten bedeuten:

$$k i i' \, ds \, ds' \left(\frac{d \frac{1}{r}}{dx} \cos \varepsilon - \frac{d \frac{1}{r}}{ds} \frac{dx'}{ds'} \right),$$

welcher Ausdruck der einzige ist, der sich mit den beiden Annahmen, dass nur Eine Electricität im festen Leiter beweglich sei, und dass die gegenseitigen Einwirkungen zweier Electricitätstheilchen für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen, vereinigen lässt.

Bonn. R. Clausius.

A. Weiler: Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von unbeschränkter Allgemeinheit. (Zeitschr. für Mathem. und Physik 1875, S. 271—299.)

Die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in ihrer allgemeinsten Form lässt sich auf die Integration partieller Differentialgleichungen zurückführen, in welchen die Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen nur linear vorkommen. Auf diesem Wege hat Lagrange die Integration der partiellen Differentialgleichung $f(z\, y\, x\, q\, p) = 0$ ausgeführt, wo $\frac{dz}{dy} = q$ und $\frac{dz}{dx} = p$ gesetzt ist.

Es handelt sich darum, die partielle Differentialgleichung mit mehr als drei Veränderlichen ebenso zu integriren, wie Lagrange die partielle Differentialgleichung mit drei Veränderlichen integrirt hat. Die von Jacobi gegebene Methode ist erst nach dessen Tode im Druck veröffentlicht worden. Ich hatte schon vorher in Grunert's Archiv, Jahrg. 1859, eine andere Methode gegeben, und da es sich zeigte, dass dieselbe vollkommenere Resultate liefert als die Jacobi'sche, so habe ich sie weiter ausgearbeitet und in der

Zeitschr. für Mathem. und Physik, Jahrg. 1863, veröffentlicht. Wiewohl diese Methode schon damals Anerkennung gefunden hat, so ist sie doch nur theilweise verstanden und gewürdigt worden. In der neuen Bearbeitung, welche ich gleichfalls in der Zeitschr. für Mathem. und Physik, Jahrgang 1875, gegeben habe, ist man meinen Aufstellungen zwar einen Schritt weiter, aber doch wieder nur theilweise gefolgt (vgl. Repert. S. 75). Ich ergreife deshalb gern diese Gelegenheit, diejenigen Resultate, durch welche sich meine Methode vor allen andern auszeichnet, unabhängig von deren Begründung, in Kürze mitzutheilen.

Ich schreibe die zu integrirende Gleichung

$$f(z\, x_1 x_2 \dots x_n p_1 p_2 \dots p_n) = 0,$$

wo f eine beliebige Function ist, und die partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx_1} \frac{dz}{dx_2} \cdots \frac{dz}{dx_n}$ abkürzend gleich $p_1 p_2 \dots p_n$ gesetzt sind. Es handelt sich um die Herleitung eines vollständigen Integrals. Man denkt sich unter demselben eine Gleichung zwischen den Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \dots x_n$, welche der partiellen Differentialgleichung $f = 0$ Genüge leistet, und zugleich n willkürliche Beständige enthält. Nachdem man ein vollständiges Integral aufgefunden hat, erhält man das allgemeine Integral durch eine bekannte algebraische Operation.

Man sucht die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$ als Function von $z\, x_1 x_2 \dots x_n$ darzustellen, und erhält alsdann das vollständige Integral durch die Integration der vollständigen Differentialgleichung

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n\, dx_n.$$

Schreibt man die zu integrirende Gleichung $f = 0$ in der Form $\varphi_1 = c_1$, wo c_1 irgend eine der in der Gleichung $f = 0$ vorkommenden Beständigen ist, so hat man, um die vorliegende Aufgabe zu lösen, $n - 1$ andere ähnliche Gleichungen $\varphi_2 = c_2$, $\varphi_3 = c_3 \dots \varphi_n = c_n$ aufzustellen, in welchen $c_2 c_3 \dots c_n$ willkürliche Beständige, und $\varphi_2\, \varphi_3 \dots \varphi_n$ ebenso wie φ_1 bestimmte Functionen der $2n + 1$ Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \dots x_n p_1 p_2 \dots p_n$ sind. Indem man diese Gleichungen mit der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ in Verbindung bringt, erhält man durch die algebraische Auflösung der Gleichungen die partiellen Differentialquotienten $p_1 p_2 \dots p_n$ als Function der Veränderlichen $z\, x_1 x_2 \dots x_n$.

Zur Bestimmung der Funktion $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ habe ich partielle Differentialgleichungen von linearer Form aufgestellt. Die Function φ_2 ist eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen. Die Function φ_3 ist eine gemeinsame

Lösung von 2 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2$ unabhängigen Veränderlichen, die Function φ_4 eine gemeinsame Lösung von 3 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-4$ unabhängigen Veränderlichen. Die Function φ_n schliesslich ist eine gemeinsame Lösung von $n-1$ partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2(n-2)=4$ unabhängigen Veränderlichen. Schreibt man das vollständige Integral in der Form $\varphi=c$, wo c eine willkürliche Beständige ist, so kann man die Function φ als die gemeinsame Lösung von n partiellen Differentialgleichungen mit je 2 unabhängigen Veränderlichen auffassen. Die partiellen Differentialgleichungen der nach einander zu integrirenden Systeme haben also beziehungsweise $2n$, $2n-2$, $2n-4\ldots 2$ unabhängige Veränderliche.

Wenn ich das in Abrechnung bringe, was ich über die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen in den zu integrirenden Systemen partieller Differentialgleichungen gesagt habe, so sind die im Vorstehenden angegebenen Operationen übereinstimmend mit den nach der Jacobi'schen Methode vorgeschriebenen. Jacobi hat aber die zu integrirenden Systeme nicht in ihrer einfachen Gestalt aufgestellt. Denn die von Jacobi aufgestellten partiellen Differentialgleichungen enthalten ausnahmslos eine unabhängige Veränderliche mehr als die von mir aufgestellten. Dieselben haben nicht, wie die obigen $2n$, $2n-2$, $2n-4\ldots 2$, sondern $2n+1$, $2n-1$, $2n-3\ldots 3$ unabhängige Veränderliche.

Für den besonderen Fall, dass die unabhängige Veränderliche z in der Gleichung $f=0$ fehlt, hat auch Jacobi die zu integrirenden Systeme in ihrer einfachen Gestalt gegeben. Für diesen Fall ist die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen der obigen partiellen Differentialgleichungen um die Einheit kleiner als in der allgemeinen Aufgabe. Die partiellen Differentialgleichungen der nach einander zu integrirenden Systeme haben beziehungsweise nur noch $2n-1$, $2n-3$, $2n-5\ldots 1$ unabhängige Veränderliche. Diese für den besonderen Fall giltigen Systeme sind in der That nicht wesentlich verschieden von denjenigen, welche auch Jacobi für diesen Fall aufgestellt hat.

Die Jacobi'sche Methode beschränkt sich im Wesentlichen darauf, die Systeme partieller Differentialgleichungen aufzustellen, welche nach einander integrirt werden sollen, und überlässt die Integration der Lösung der besonderen Aufgabe, in welcher die Function f nicht mehr unbestimmt ist. Man kann aber die Integration der Systeme auch dann, wenn die Gleichung $f=0$ die unbestimmte Form hat, bis zu einem vorgerückten Punkte verfolgen, was Jacobi nicht bemerkt hat. Um dem Leser ein Verständniss von der Beschaffenheit der von mir aufgefundenen Resultate geben zu können, bin ich genöthigt, auf eine Eigenschaft der vorliegenden Systeme einzugehn; und vor Allem muss ich auf die Zählung der unabhängigen Veränderlichen in den zu integrirenden Systemen zurückkommen.

Es ist oben bemerkt worden, dass die Function φ_3 eine gemeinsame Lösung von 2 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2$ unabhängigen Veränderlichen ist. Diese partiellen Differentialgleichungen enthalten im Ganzen $2n-1$ unabhängige Veränderliche. Wir haben aber von vornherein angenommen, dass jede eine unabhängige Veränderliche weniger, also deren $2n-2$ habe, weil man einen partiellen Differentialquotienten der Function φ_3 durch Elimination wegbringen kann. Die betreffende unabhängige Veränderliche kommt dann freilich noch in den Coefficienten der partiellen Differentialgleichung vor; allein sie hat dann die Bedeutung einer unbestimmten Beständigen oder eines Parameters. Ferner ist die Function φ_4 eine gemeinsame Lösung von 3 partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-4$ unabhängigen Veränderlichen. Diese partiellen Differentialgleichungen enthalten im Ganzen $2n-2$ unabhängige Veränderliche. Da man aber je 2 partielle Differentialquotienten der Function φ_4 durch Elimination wegbringen kann, so haben wir von vornherein jeder partiellen Differentialgleichung 2 unabhängige Veränderliche weniger, also deren $2n-4$ gegeben. Diese 2 unabhängigen Veränderlichen kommen dann in der partiellen Differentialgleichung als Parameter vor. Die Function φ_{i+2} ist eine gemeinsame Lösung von $i+1$ partiellen Differentialgleichungen mit je $2n-2i$ unabhängigen Veränderlichen. Im Ganzen enthalten diese partiellen Differentialgleichungen $2n-i$ unabhängige Veränderliche. Da man aber je i partielle Differentialquotienten der Function φ_{i+2} durch Elimination wegbringen kann, so haben wir von vornherein angenommen, dass jede partielle Differentialgleichung i unabhängige Veränderliche weniger, also deren $2n-2i$ habe. Diese i unabhängigen Veränderlichen kommen dann in der partiellen Differentialgleichung als Parameter vor.

Ich kann mich jetzt über eine wichtige Eigenschaft der vorliegenden Systeme verständlich machen. Die Function φ_{i+2} wird durch ein System von $i+1$ partiellen Differentialgleichungen bestimmt mit je $2n-2i$ unabhängigen Veränderlichen. Die Anzahl der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung mit $2n - 2i$ unabhängigen Veränderlichen ist bekanntlich $2n - 2i - 1$. In das System führen wir die $2n - 2i - 1$ Lösungen der letzten Gleichung als neue Veränderliche anstatt derjenigen $2n - 2i - 1$ Veränderlichen ein, welche auch in den andern i partiellen Differentialgleichungen als solche vorkommen. Die letzte Gleichung fällt dann weg, und die eine noch übrige der $2n - 2i$ Veränderlichen dieser Gleichung, welche in den andern i partiellen Differentialgleichungen als Parameter vorkommt, fällt aus denselben von selbst hinaus. Nach vollzogener Transformation hat man ein System von i partiellen Differentialgleichungen anstatt des ursprünglichen von $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen. Jede der i partiellen Differentialgleichungen hat wieder $2n - 2i$ Veränderliche; aber die Anzahl der Parameter ist um die Einheit kleiner als in den partiellen Differentialgleichungen des ursprünglichen Systems. In gleicher Weise führt man das neue System von i partiellen Differentialgleichungen zurück auf eines von $i - 1$ partiellen Differentialgleichungen. Die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist wieder $2n - 2i$; allein die Anzahl der Parameter ist um 2 Einheiten kleiner als in den ursprünglichen $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen. Schliesslich behält man nur eine partielle Differentialgleichung mit $2n - 2i$ unabhängigen Veränderlichen; aber die Anzahl der Parameter ist um i Einheiten kleiner als in den ursprünglichen $i + 1$ partiellen Differentialgleichungen.

Diese Eigenschaft des vollständigen Systems habe ich bei der Integration der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ verwerthet. Die Function φ_2 ist durch eine einzige partielle Differentialgleichung bestimmt, die Function φ_3 durch ein System von 2 partiellen Differentialgleichungen, die Function φ_4 durch ein System von 3 partiellen Differentialgleichungen, die Function φ_n schliesslich durch ein System von $n - 1$ partiellen Differentialgleichungen. Indem man das vollständige Integral der Gleichung $\varphi_1 = c_1$ in der Form $\varphi = c$ schreibt, erhält man zur Bestimmung von φ ein System von n partiellen Differentialgleichungen. Bei der Bestimmung von φ_2 und φ_3 habe ich an diesen Systemen Nichts geändert. Bei der Bestimmung der übrigen Functionen $\varphi_4 \ldots \varphi_n$ φ aber ergiebt sich eine wesentliche Vereinfachung, da ich an die Stelle dieser Systeme jedesmal ein System von nur 2 partiellen Differentialgleichungen gesetzt habe. Diese neuen Systeme sind identisch mit denjenigen, welche man auf dem vorstehend beschriebenen Wege aus den ursprünglichen herleiten könnte. Dieselben sind also vor den ursprünglichen Systemen darin ausgezeichnet, dass die Anzahl der in einer partiellen Differentialgleichung vorkommenden Parameter um ebenso viele Einheiten kleiner geworden ist, als die Anzahl der partiellen Differentialgleichungen abgenommen hat. Zur Herstellung der neuen Systeme bedarf es keiner Integration. Es ergeben sich dieselben durch bestimmte algebraische Operationen aus den ursprünglichen Systemen.

Mannheim. A. Weiler.

H. W. Lloyd Tanner. The solution of partial differential equations of the second order, with any number of variables, when there is a general first integral.

(Proceedings. Lond. Math. Soc. Vol. VII.)

We take z for dependent variable: $x_1, x_2 \dots x_n$ for independent variables: $\frac{dz}{dx_i}$ is represented by p_i: and $\frac{d^2 z}{dx_k\, dx_l}$ by s_{kl}.

In the fiirst part of the paper we seek the form of the equation of the second order which has a first integral of the form

$$(1) \qquad F(u_1, u_2, \dots u_n) = 0$$

where F is arbitrary, and $u_1, u_2 \dots u_n$ are n independent functions of $z, x_1, \dots x_n, p_1 \dots p_n$. Such an equation consists of at most $\frac{1}{2} \cdot \frac{2n!}{(n!)^2} + 2^{n-1}$ terms. One factor of each of these is the determinant

$$\begin{vmatrix} s_{11}, & s_{12}, \dots & s_{1n} \\ s_{12}, & s_{22}, \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{1n}, & s_{2n}, \dots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

or a minor of this determinant. The other factor is a function of the derivatives of $u_1 \dots u_n$, whose form is specified for each term.

In the second part of the paper we start with an equation of the second order and seek to determine its first integral (1), should there be one; viz. we seek to find $u_1 \dots u_n$. For this purpose, $\frac{2n!}{\overline{n+1}!\,\overline{n-1}!}$ linear equations of the first order can be employed. Of this system n, and only n equations are independent: and their coefficients are expressed directly or indirectly in terms of the coefficients of the given equation of the second order. There is always a second set of equations corresponding to another first integral: but, except possibly in one case, there are not more than two first integrals. The case of the equation with two independent variables is discussed as an example of the general theory.

In the third part we consider the theory of the second integration; viz. the integration of (1). If there be only one first integral (as distinguished from two identical first integrals) we cannot get a general integral of (1) but can find as many particular solutions as we please.

If two first integrals occur, the arguments of one furnish the equations required to integrate the other. In this case it would appear to employ a generalisation of a method proposed by Imschenetsky*) for the case of two independent variables.

If the two first integrals be identical, the complete primitive is found by equating to constants the different arguments of F; hence deducing values of $p_1, p_2 \dots p_n$ in terms of $x_1, x_2, \dots x_n, z$; and integrating the expression

$$dz - p_1\,dx_1 - \dots - p_n\,dx_n$$

which is then an exact differential.

H. W. Lloyd Tanner.

F. Caspary: Die Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. (Borchardt's Journ. Bd. 81. S. 143 ff.)

Die Krümmungsmittelpunktsflächen sind seit ihrer Einführung in die Wissenschaft durch Monge in Bezug auf ihre allgemeinen Eigenschaften zwar vielfach behandelt, indess nur diejenigen für die Oberflächen zweiter Ordnung durch Clebsch (Borchardt's Journ. Bd. 62. S. 64 ff.) zum Gegenstande speciellerer Untersuchungen gemacht worden. Jedoch lassen sich die letzteren nur auf die Mittelpunktsflächen zweiten Grades anwenden und sind nicht ausreichend für die anderen, weil die Specialitäten der Flächen zweiter

---

*) Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. — Chapitre IV.

Ordnung ohne Mittelpunkt durchgehends die Resultate bedeutend modificiren und nicht unerheblich vereinfachen.

Die in der Ueberschrift genannte Abhandlung, aus einer von der philosophischen Facultät der Berliner Universität preisgekrönten Arbeit des Verfassers hervorgegangen, beschäftigt sich ausschliesslich mit der Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. Sie stellt in ihrem ersten Theile die Coordinaten durch zwei Parameter dar, zeigt die vorläufige Beziehung der Fläche zum Normalenproblem, leitet eine für die Aufstellung und Discussion der Fläche fundamentale Gleichung ab und giebt in Punktcoordinaten die Darstellung derselben in schliesslicher Endform. In dem zweiten Theile der Arbeit werden die singulären Ebenen, Curven und Punkte der Fläche, und in weiterer Ausführung die Beziehungen derselben zum Normalenproblem entwickelt, ferner wird die Doppelcurve der Fläche nebst ihren Singularitäten, und die polare reciproke Fläche abgeleitet und behandelt. Bemerken möchte ich noch, dass die Discussion der Fläche durch die Untersuchung einer binären Form fünften Grades geschieht.

§ 1. Durch die beiden Grössen u und v, welche die Parameter der beiden zu dem gegebenen Paraboloide

$$\frac{x'x'}{a} + \frac{y'y'}{b} - 2z't' = 0 \tag{1}$$

confocalen Flächen zweiten Grades bedeuten, werden die Coordinaten jeder der zwei Schalen der Fläche der Centra*) *getrennt* ausgedrückt, und nach Einführung des Parameters λ (S. 144) ergiebt sich als *gemeinsame* Gleichung beider Schalen, oder als Gleichung der Fläche der Centra:

$$\begin{aligned} a(a-b)X^2 &= (2Z+3\lambda+b)(\lambda+a)^3 \\ b(a-b)Y^2 &= -(2Z+3\lambda+a)(\lambda+b)^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch eine einfache lineare Transformation von λ und Z gehen diese Gleichungen, wenn $a-b=2\delta$ gesetzt wird, in

$$\begin{aligned} 2a\delta x^2 &= (2z+3\mu-\delta)(\mu+\delta)^3 \\ 2b\delta y^2 &= -(2z+3\mu+\delta)(\mu-\delta)^3 \end{aligned} \tag{3}$$

über, und die durch die Formeln (13) der Arbeit definirten Grössen p und q gestatten diese Coordinaten auch in *rationaler* Form darzustellen.

*) So wird, Kürze halber, die Fläche der Krümmungsmittelpunkte genannt.

Drückt man durch die Relationen, welche die Coordinaten des Paraboloids mit denen der Fläche der Centra verbinden, die ersteren durch die letzteren aus, so gehen die Gleichungen des Paraboloids und der confocalen Flächen in

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{-\Omega(\lambda)}{(a+\lambda)^2(b+\lambda)^2} &= \frac{aX^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{bY^2}{(b+\lambda)^2} - 2T(Z+T\lambda) = 0, \\ \text{und} \qquad & \frac{aX^2}{(a+\lambda)^3} + \frac{bY^2}{(b+\lambda)^3} + T^2 = 0; \end{aligned}$$

oder in

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{-\Omega(\mu)}{(\mu+\delta)^2(\mu-\delta)^2} &= \frac{ax^2}{(\mu+\delta)^2} + \frac{by^2}{(\mu-\delta)^2} - 2(z+t\mu)t = 0, \\ \text{und} \qquad & \frac{ax^2}{(\mu+\delta)^3} + \frac{by^2}{(\mu-\delta)^3} + t^2 = 0 \end{aligned}$$

über. Die Bemerkung, dass von diesen beiden Formen die zweite die nach μ genommene partielle Ableitung der ersten ist, zeigt, dass das Eliminationsresultat von μ aus (5) mit der Discriminante von $\Omega(\mu)$ identisch ist. Diese ist aber in den Coordinaten x, y, z vom 16. Grade und da sie den Faktor $x^2y^2t^3$ absondert, folgt, dass der andere Faktor nämlich *die Fläche der Centra vom neunten Grade ist.* Andererseits zeigt das Verhältniss der beiden Gleichungen (4) zu einander, *dass die Fläche der Centra die Enveloppe der durch*

$$\frac{aX^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{bY^2}{(b+\lambda)^2} - 2T(Z+T\lambda) = 0$$

dargestellten Paraboloidenschaar ist. Dieser Satz wird später (p. 188) dazu benutzt, die Gleichung der Fläche der Centra in Ebenencoordinaten $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ zu erhalten, denn es folgt aus ihm, *dass die reciproke Polare der Fläche der Centra die Enveloppe der Paraboloidenschaar*

$$\frac{(a+\lambda)^2}{a}\xi^2 + \frac{(b+\lambda)^2}{b}\eta^2 - 2\zeta(\vartheta - \zeta\lambda) = 0$$

sei, woraus als Gleichung der Polarfläche sich ergiebt:

$$(6) \quad H(\xi,\eta,\zeta,\vartheta) = \xi^2\eta^2(a-b)^2 - 2\zeta\vartheta(b\xi^2 + a\eta^2) - 2ab\zeta^2(\xi^2+\eta^2) - ab\zeta^4 = 0.$$

Die Fläche der Centra ist also neunten Grades und vierter Classe. Die erste der Gleichungen (5) bestimmt auch die fünf Normalen, welche von einem Punkte des Raumes an das elliptische Paraboloid gezogen werden können und zeigt in Verbindung mit der zweiten Gleichung, *dass von jedem Punkte der Fläche der Centra zwei dieser Normalen in eine zusammenfallen.* Dadurch ist die vorläufige Beziehung zum Normalenprobleme gegeben.

§ 2. Wie bemerkt, sind durch die Gleichungen (3) *beide* Schalen der Fläche der Centra dargestellt; sollen jene Gleichungen nur *eine* Schale charakterisiren, so schreibe ich für den Parameter μ den Buchstaben m. Substituirt man in $\Omega(\mu)$ für die Coordinaten die aus (3) hervorgehenden Werthe, nachdem man μ durch m ersetzt hat, so erhält man eine Gleichung in μ, m und z, welche für μ vom fünften Grade ist. Diese Gleichung erweist sich für die gesammte Untersuchung von fundamentaler Bedeutung, und um sie in einfachster Form zu erhalten, erwähnt die Arbeit eine zweite Erzeugungsweise der Fläche der Centra, welche für deren schliessliche Darstellung in Punktcoordinaten ebenfalls verwandt wird. Wie bekannt, lassen sich durch die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades $\psi = 0$ und $\chi = 0$ vier Kegel zweiten Grades legen, deren Spitzen harmonische Pole der Fläche $\lambda\psi + \chi = 0$ sind. Bedeutet $\psi = 0$ das gegebene elliptische Paraboloid und $\chi = 0$ eine Kugel mit dem Mittelpunkte (X, Y, Z) und dem Radius r, so ergiebt sich für die die vier Kegelspitzen liefernde Gleichung vierten Grades:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Phi}(\lambda) = -\overline{f}(\lambda) + r^2\overline{\varphi}(\lambda) = 0\\
(6)\quad &\overline{f}(\lambda) = \lambda\,\{(\lambda+b)X^2 + (\lambda+a)\,Y^2 - (2Z+\lambda)(\lambda+a)(\lambda+b)\},\\
&\overline{\varphi}(\lambda) = \quad (\lambda+a)(\lambda+b).
\end{aligned}
$$

Hat $\overline{\Phi}(\lambda)$ zwei bezw. drei gleiche Wurzeln, wodurch das Verschwinden ihrer Discriminante, bezw. ihrer beiden Invarianten $\overline{I}_2$ und $\overline{I}_3$ bedingt wird, so berührt die Kugel das Paraboloid einfach bezw. stationär. In dem letztern Falle ist das Kugelcentrum ein Hauptkrümmungsmittelpunkt des Paraboloids. Es wird nun gezeigt, dass die die einfache bezw. stationäre Berührung ausdrückenden Bedingungen $\frac{d(r^2)}{d\lambda} = 0$ bezw. $\frac{d^2(r^2)}{d\lambda^2} = 0$, Gleichungen ergeben, welche mit (4) identisch sind. Jene Bedingungen, vorerst in μ statt in λ ausgedrückt, werden für diese Gleichungen benutzt und liefern, ohne erhebliche Rechnung, $\Omega(\mu)$ in folgender Form:

$$
(7)\quad \begin{aligned}\Omega(\mu) = 2(\mu-m)^2\{\mu^3 + \mu^2(2m+z) + \mu(3m^2+2mz-2\delta^2)\\
-\delta^2(3z+4m)\} = 0.\end{aligned}
$$

§ 3. Da das Eliminationsresultat von r^2 aus $\overline{I}_2 = 0$ und $\overline{I}_3 = 0$ die Fläche der Centra ohne überflüssigen Faktor ergiebt, und die genannten Gleichungen bezw. vom zweiten und dritten Grade in

r^2 sind, so erfordert die Aufstellung der gesuchten Fläche, das Eliminationsresultat aus einer Gleichung zweiten und einer dritten Grades in eine solche Form zu bringen, welche für den vorliegenden Fall keine weitere Graderniedrigung zulässt. Zu dem Ende werden einige Invariantenrelationen abgeleitet, mit deren Hilfe folgende Covariantenidentität bewiesen wird:

$$K_3^2 + \varDelta . C_3^2 \equiv -16 S_2^3 . R. \tag{8}$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\begin{aligned} &S_2 = a_0 \xi^2 + 2a_1 \xi\eta + a_2\eta^2; \quad S_3 = b_0\xi^3 + 3b_1\xi^2\eta + 3b_2\xi\eta^2 + b_3\eta^3; \\ &\varDelta = a_0 a_2 - a_1^2; \; C_1 = (b_0\xi + b_1\eta)a_2 - 2(b_1\xi + b_2\eta)a_1 + (b_2\xi + b_3\eta)a_0; \\ &C_3 = 3S_2 . C_1 - 4S_3 . \varDelta; \end{aligned} \tag{9}$$

$$K_3 = S_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial S_2}{\partial \xi} & \frac{\partial C_1}{\partial \xi} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S_2}{\partial \eta} & \frac{\partial C_1}{\partial \eta} \end{vmatrix} - 4\varDelta \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial S_2}{\partial \xi} & \frac{1}{3}\frac{\partial S_3}{\partial \xi} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S_2}{\partial \eta} & \frac{1}{3}\frac{\partial S_3}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

während R die Resultante von $S_2 = 0$ und $S_3 = 0$ bedeutet. Benutzt wird die Identität (8) nur für den speciellen Fall $\xi = 1$, $\eta = 0$. Transformirt man $\overline{\Phi}(\lambda)$ in $\Phi(\mu)$, was durch eine lineare Substitution mit der Determinante $+1$ geschieht, so wird $\overline{I}_2 = I_2$ und $\overline{I}_3 = I_3$, wobei unter I_2 und I_3 die Invarianten von $\Phi(\mu)$ verstanden sind. Statt nun diese Invarianten direkt aus der Form von $\Phi(\mu)$ herzustellen, welche die Coordinaten x, y, z enthält und dann die Elimination von r^2 vorzunehmen, benutze ich die Darstellung von $\Phi(\mu)$ in m und z, drücke in diesen Parametern die aus (8) für $\xi = 1$, $\eta = 0$ hervorgehenden Bildungen aus, und weise nach, dass letztere sich in einfachster Weise aus drei Formen A, B^2 und Γ zusammensetzen lassen, welche sich aus Funktionen von m und z leicht in solche von x, y, z umformen lassen. Auf diese Weise findet man, wenn man mit S_2 und S_3 diejenigen Ausdrücke bezeichnet, die aus I_2 und I_3 hervorgehen, wenn man $r^2 - \varrho_0^2 = \varrho = \frac{\xi}{\eta}$ setzt und homogen macht:

$$\begin{aligned} &S_2 = \xi^2 - 12\xi\eta B; \\ &S_3 = -\xi^3 + 18\xi^2\eta(B - 3\delta^2) - 54\xi\eta^2(m^2 - \delta^2)(z + 2m)^2; \\ &B = m^2 + mz + \delta^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Bezeichnet man den Factor von S_2 in K_3, nachdem man $\xi = 1$, $\eta = 0$ gesetzt hat, mit $3.6^2.A$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} &K_3 = 3.6^2 (A - 24B^2\delta^2); \quad C_3 = 18\Gamma\xi^3; \\ &\Gamma = 4B^2 - 3\sigma B\delta^2 - 3(m^2 - \delta^2)(z + 2m)^2, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass S_2 Factor von S_3 sei. Ferner erhält man:

$$B\Gamma = A - 24 B^2 \delta^2.$$

Nachdem noch gezeigt ist, dass B^2, Γ und $B\Gamma$ rationale und ganze Funktionen von x, y, z sind, werden für dieselben die folgenden Werthe gefunden:

$$\begin{aligned}(11)\qquad 6B^2 &= zS + 2\delta D - 2\delta^2(z^2 - 4\delta^2) = V,\\ 6\Gamma &= zS - 16\delta D + 16\delta^2(z^2 - 13\delta^2) = W,\\ -8B\Gamma &= S^2 - 4z^2\delta D + 16\delta^2(zS + 4\delta D) - 64\delta^4(z^2 - 5\delta^2) = U,\\ S &= ax^2 + by^2,\quad D = ax^2 - by^2,\end{aligned}$$

woraus die Fläche der Centra

$$(12)\qquad F(x, y, z) = 27U^2 - 8VW^2 = 0$$

hervorgeht. Da U vom vierten, V und W vom dritten Grade sind, ergiebt sich $F = 0$ als Oberfläche neunten Grades. Hiermit schliesst der erste Theil der Arbeit.

In dem zweiten Theile wird die Discussion der Fläche $F = 0$ gegeben und dieselbe durch die Untersuchung der binären Form $\Omega(\mu) = 0$ geleistet. Es werden der Reihe nach die Punkte aufgestellt, von denen aus von den fünf an das Paraboloid zu ziehenden Normalen drei, zweimal zwei, einmal zwei und einmal drei, endlich vier Normalen in eine einzige zusammenfallen, und die Bedeutung dieser Punkte für $F = 0$ untersucht.

§ 4. Auf der Fläche der Centra giebt es ausser der unendlich entfernten Ebene, welche längs dreier Geraden osculirt, sechs singuläre Ebenen, welche die Fläche in einer Parabel osculiren und in einer Curve dritten Grades (Parabelevolute) schneiden. Von jedem Punkte der sechs Parabeln und von allen Punkten der unendlich entfernten Ebene fallen drei Normalen in eine zusammen.

Von den sechs singulären Ebenen sind zwei reell und vier imaginär; ich unterscheide sie als singuläre Tangentialebenen erster und zweiter Art. Die in je einer dieser Ebenen liegenden Parabeln und Curven dritten Grades schneiden sich in zwei Punkten und berühren sich in zwei andern. Ferner berühren in jeder der beiden singulären Tangentialebenen erster Art zweimal zwei Kegelschnitte zweiter Art in zwei Punkten einander und den in der singulären Tangentialebene erster Art gelegenen Kegelschnitt. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspunkten der Kegelschnitte sind die Durchschnittslinien von zweimal zwei singulären Tangentialebenen zweiter Art und zugleich die gemeinschaftlichen Tangenten jedes Kegelschnitts in den Berührungspunkten mit der in seiner Ebene liegenden Curve dritten Grades. Die vier singulären Tangentialebenen zweiter Art schneiden sich in einem Punkte, welcher auf der Schnittlinie der beiden singulären Tangentialebenen erster Art liegt. Längs der vier singulären Kegelschnitte zweiter Art durchschneiden sich die beiden Schaalen der Fläche der Centra unter rechtem Winkel.

§ 5. Von jedem Punkte der beiden in den singulären Tangentialebenen erster Art liegenden Curven dritten Grades und von jedem Punkte der durch $U=0$, $W=0$ oder $\Gamma=0$ dargestellten Doppelcurve der Fläche der Centra fallen zweimal zwei Normalen zusammen. Ferner giebt es zwölf Punkte, von denen einmal zwei und einmal drei Normalen in je eine zusammenfallen. Von diesen zwölf Punkten sind zwei die Rückkehrpunkte der in den beiden singulären Tangentialebenen erster Art liegenden Curven dritten Grades, und zugleich die Berührungspunkte der Schnittlinie jener beiden Ebenen mit diesen Curven. Diese zwölf Punkte sind die Schnittpunkte jedes der sechs singulären Kegelschnitte erster und zweiter Art mit derjenigen Curve dritten Grades, welche mit ihm in derselben singulären Tangentialebene liegt. Von zwei Geraden der Fläche der Centra und vier Punkten fallen vier Normalen in eine zusammen. Die zwei Geraden sind die conjugirt imaginären Graden, längs deren die unendlich entfernte Ebene die Fläche der Centra osculirt; und die vier Punkte sind diejenigen, in welchen die singulären Kegelschnitte die in ihren Ebenen liegenden Curven dritten Grades berühren.

§ 6. Die durch den Schnitt von $U=0$ und $W=0$ dargestellte Doppelcurve *zwölften* Grades besitzt *sieben* Doppelpunkte und *zwölf* Rückkehrpunkte, die gleichzeitig die sieben Doppelpunkte von $U=0$ und die zwölf Berührungspunkte von $U=0$ mit $W=0$ sind. Andererseits sind die zwölf Rückkehrpunkte auch identisch mit den zwölf Punkten, in welchen die sechs singulären Kegelschnitte die mit ihnen in derselben singulären Tangentialebene liegenden Curven dritten Grades schneiden. Die vier Berührungspunkte dieser Curven sind vier von den sieben Doppelpunkten der Doppelcurve, während die drei übrigen Doppelpunkte die Schnittpunkte der drei Geraden sind, in welchen die unendlich entfernte Ebene die Fläche der Centra osculirt. Wegen der genannten Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten ergiebt sich das *Geschlecht* der

Doppelcurve als *Null.* Daraus folgt, dass die Coordinaten dieser Curve, die sich als irreductibeler Durchschnitt zweier Flächen dritten und vierten Grades ergiebt, sich als *rationale* Functionen eines Parameters darstellen lassen. In der That erhält man bei Anwendung homogener Coordinaten als Gleichung der Doppelcurve:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
\sqrt{a}\, x &= 2\delta\sqrt{\delta}\,(r^2+l^2)^3(r^4-4r^2l^2+l^4)\,rl,\\
\sqrt{b}\, y &= 2\delta\sqrt{\delta}\,(r^2-l^2)^3(r^4+4r^2l^2+l^4)\,rl,\\
2z &= \delta\,\{32r^4l^4-(r^4+l^4)^2\}(r^4+l^4),\\
t &= r^2l^2(r^4+l^4)^2.
\end{aligned}
$$

und für die abwickelbare reciproke Polarfläche ergiebt sich:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= -\sqrt{a}\,(r^4-4r^2l^2+l^4)(r^2+l^2),\\
\eta &= -\sqrt{b}\,(r^4+4r^2l^2+l^4)(r^2-l^2),\\
\zeta &= 8\sqrt{\delta}\,r^3l^3,\\
\vartheta &= 12\,\delta\sqrt{\delta}\,(r^4+l^4)\,rl.
\end{aligned}
$$

Aus je dreien der die Ordnung, Classe, Geschlecht, Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte angebenden Zahlen, folgen die anderen Charakteristiken der Doppelcurve, wie sie in der Arbeit erwähnt sind.

§ 7. Die in (6) angegebene zu $F=0$ reciproke polare Fläche $H=0$ besitzt sechs Doppelpunkte und einen triplanaren Punkt, womit ich einen solchen Punkt als dreifachen bezeichne, dessen Osculationskegel dritten Grades in drei Ebenen degenerirt. Diese Singularitäten reichen hin, um die Classe von $H=0$ oder die Ordnung von $F=0$ von 36 auf 9 zu reduciren.

Berlin. F. Caspary.

G. Escherich: Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmaass der Flächen. (Grunert's Archiv. 57. Theil. 1875.)

Gauss entwickelt in den „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ zuerst den Ausdruck für das Krümmungsmaass unter der Voraussetzung die Gleichung der Fläche habe die Form $z=f(x,y)$, transformirt dann die so erhaltene Formel in die Variablen p,q und zeigt, dass sich dieselbe durch die alleinigen Grössen E,F,G darstellen lasse. Bei dieser Transformation sind die schleppenden Rechnungen des art. 10 nicht zu umgehen und ich versuchte deshalb in der genannten Abhandlung den Ausdruck Gauss' direkt zu entwickeln.

Sind p,q die Coordinaten eines Punktes der Fläche, $p'q'$ die entsprechenden der Kugel, so ist das Krümmungsmaass*)

$$k = \frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}$$

Hieraus findet man durch eine leichte Rechnung

$$k\,(EG - F^2) = \begin{vmatrix} A\,, & B\,, & C \\ \frac{\partial A}{\partial p}\,, & \frac{\partial B}{\partial p}\,, & \frac{\partial C}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}\,, & \frac{\partial B}{\partial q}\,, & \frac{\partial C}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Die rechts stehende Determinante 3. Grades lässt sich aber in

$$\begin{vmatrix} A\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\,, & A\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} \\ A\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} + B\frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q} + C\frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}\,, & A\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \end{vmatrix}$$

verwandeln, welche selbst wieder, wie man sogleich erkennt, sich durch eine Determinante 6. Grades darstellen lässt, sodass

$$k\,(EG - F^2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}, & \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q} \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q} \\ 0, & 0, & \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}, & \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}$$

wird.

Multiplicirt man die vierte, fünfte und sechste Zeile dieser Determinante mit -1 und die derart transformirte mit der ursprünglichen, so erhält man für $[k\,(EG - F^2)]^2$ eine „Determinante gauche", deren jedes Element durch die alleinigen Grössen E,F,G sich ausdrücken lässt. Die positive Quadratwurzel der Determinante gauche gibt dann $k\,(EG - F^2)$, also k nur durch E,F,G ausgedrückt.

Graz. G. Escherich.

*) Ich gebrauche durchwegs die Bezeichnungen der Disquisitiones generales.

G. Escherich: Beiträge zur Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzelsysteme und der Resultante simultaner Gleichungen. (Denkschriften der k. Akademie in Wien. Bd. XXXVI, 1876.)

Eine kleine Vereinfachung in den Methoden, welche von Cauchy und Abel Transou zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung aufgestellt wurden, führten zu einem Analogon derselben in der Theorie der simultanen Gleichungen.

Es seien

$f_1(x_1, x_2 \dots x_n) = 0, f_2(x_1, x_2 \dots x_n) = 0 \dots f_n(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$ simultane Gleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2 \dots x_n$. Ihre Endgleichungen

$$F_1(x_1) = 0, F_2(x_2) = 0 \dots F_n(x_n) = 0$$

nach $x_1, x_2 \dots x_n$ seien vom Grade μ und besässen bezüglich die Wurzelsysteme

$$\begin{matrix} \alpha_1^1, \alpha_1^2 \dots \alpha_1^\mu \\ \alpha_2^1, \alpha_2^2 \dots \alpha_2^\mu \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_\mu^1, \alpha_n^2 \dots \alpha_n^\mu \end{matrix}$$

Bezeichnet dann $D(x_1, x_2 \dots x_n)$ die Functionaldeterminante von $f_1, f_2 \dots f_n$, so besteht, wie Jacobi bei dem Falle zweier Gleichungen schon zeigte, stets eine Function $\Phi(x_1, x_2 \dots x_n)$, welche keine Wurzeln der Gleichungen enthält und für welche

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \dots x_n)}{F_1 \, F_2 \dots F_n} = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{1}{D\left(\alpha_1^k, \alpha_2^k \dots \alpha_n^k\right)\left(x_1 - \alpha_1^k\right)\left(x_2 - \alpha_2^k\right) \dots \left(x_n - \alpha_n^k\right)}$$

Um nun die λ-förmige symmetrische Funktion

$$\sum_{h_1, h_2 \dots h_\lambda} \Psi\left(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \dots \alpha_n^{h_1}; \dots \alpha_1^{h_\lambda}, \alpha_2^{h_\lambda} \dots \alpha_n^{h_\lambda}\right)$$

welche durchaus nicht ein einfachster Typus sein muss, zu berechnen, subtrahire man von beiden Seiten der obigen Gleichung $(\lambda - 1)$ z. B. die $(\lambda - 1)$ ersten Glieder der Summe rechts; dadurch ergibt sich:

$$\frac{\Phi(x_1, x_2 \dots x_n)}{F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n)} - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{1}{D\left(\alpha_1^k, \alpha_2^k \dots \alpha_n^k\right)\left(x_1 - \alpha_1^k\right)\left(x_2 - \alpha_2^k\right) \dots \left(x_n - \alpha_n^k\right)}$$

$$= \sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{1}{D\left(\alpha_1^k, \alpha_2^k \dots \alpha_n^k\right)\left(x_1 - \alpha_1^k\right) \dots \left(x_n - \alpha_n^k\right)}.$$

Multiplicirt man in dieser Gleichung den Ausdruck links mit $\Psi\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^1; \dots \alpha_1^{\lambda-1}, \alpha_2^{\lambda-1} \dots \alpha_n^{\lambda-1}; x_1, x_2 \dots x_n\right) D\left(x_1, x_2 \dots x_n\right)$, und bezeichnet in der Entwicklung des so gefundenen Productes nach fallenden Potenzen der x den Coëfficienten von $\left(x_1\ x_2 \dots x_n\right)^{-1}$, welcher eine Function der Wurzeln $\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^{\lambda-1}$ sein wird, mit $\psi\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^{\lambda-1}\right)$, so ist die $(\lambda - 1)$förmige symmetrische Function:

$$\sum_{h_1, h_2 \dots h_{\lambda-2}} \psi\left(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_1} \dots \alpha_n^{h_1}; \dots \alpha_1^{h_{\lambda-1}}, \alpha_2^{h_{\lambda-1}} \dots \alpha_n^{h_{\lambda-1}}\right)$$

gleich der gegebenen λ-förmigen, also die Berechnung dieser auf die jener zurückgeführt.

Das auseinandergesetzte Verfahren lässt in manchen Fällen erhebliche Vereinfachungen zu, so auch bei den einfachsten Typen der symmetrischen Functionen. Denn dann erlauben die Sätze Schlaefli's und Betti's über den Grad, das totale und partiale Gewicht bei symmetrischen Functionen, schon während der Ausführung der Rechnungen Glieder zu vernachlässigen. Auch für den Fall, dass die gegebene symmetrische Function von der Form:

$$\psi\left(\alpha_1^1, \alpha_2^1 \dots \alpha_n^1\right) \psi\left(\alpha_1^2, \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2\right) \dots \psi\left(\alpha_1^\mu, \alpha_2^\mu \dots \alpha_n^\mu\right)$$

ist, lässt sich die Rechnung erleichtern. Dies führt zur allgemeinen logarithmischen Berechnungsweise der Resultante, der sich im Falle zweier Gleichungen schon Lagrange bedient hatte.

Die Eigenschaften der Function Φ legen noch ein anderes Verfahren zur Berechnung der symmetrischen Functionen nahe, das gewissermassen ein Analogon zur Methode Borchardt's für die Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung bildet. In der

$$\Sigma \frac{1}{\left(t_1^1-\alpha_1^1\right)\left(t_2^1-\alpha_2^1\right)\cdots\left(t_n^1-\alpha_n^1\right)\left(t_1^2-\alpha_1^2\right)\left(t_2^2-\alpha_2^2\right)\cdots\left(t_n^2-\alpha_n^2\right)\cdots\cdots\left(t_1^\mu-\alpha_1^\mu\right)\left(t_2^\mu-\alpha_2^\mu\right)\cdots\left(t_n^\mu-\alpha_n^\mu\right)}$$

welche ausser dem angeschriebenen noch alle Glieder umfassen soll, die aus ihm durch alle möglichen Vertauchungen der simultanen Wurzelsysteme erhalten werden, sind nämlich die Coëfficienten in ihrer Entwickelung nach fallenden Potenzen der t gleich den Coëfficienten, welche in der analogen Entwickelung von

$$\frac{D\left(t_1^1, t_2^1 \dots t_n^1\right) \dots D\left(t_1^\mu, t_2^\mu \dots t_n^\mu\right) \Phi\left(t_1^1, t_2^1 \dots t_n^1\right) \dots \Phi\left(t_1^\mu, t_2^\mu \dots t_n^\mu\right) \Pi^2\left(t_1^1, t_2^1 \dots t_1^\mu\right)}{F_1\left(t_1^1\right) F_2\left(t_2^1\right) \dots F_n\left(t_n^1\right) \dots F_1\left(t_1^\mu\right) F_2\left(t_2^\mu\right) \dots F_n\left(t_n^\mu\right) \Pi^2\left(\alpha_1^1, \alpha_1^2 \dots \alpha_1^\mu\right)}$$

— wo Π nach Jacobi das Differenz-Product bezeichnet —, zu demselben Producte der t gehören. Der letztere Ausdruck besitzt aber, da $\Pi^2(\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^\mu)$, als die Discriminante von $F_1(x_1) = 0$ sich durch die Coëfficienten von F_1 ausdrücken lässt, in seinen Entwicklungs-Coëfficienten keine Wurzeln der vorgelegten Gleichungen.

Schliesslich wird in der Abhandlung aus der Formel Jacobi's, welche derselbe seiner Lösung des Cramer'schen Paradoxons zu Grunde legte, durch passende Specialisirung jene Relation Liouville's abgeleitet, welche dieser durch sein Eliminations-Verfahren erhielt und aus welcher er durch einen Uebergang von $(n+1)$ zu n Dimensionen die Jacobi'sche folgerte. Es wird gezeigt, dass sich aus dieser Liouville'schen Formel mittelst der gewöhnlichen Regeln allle Resultate gewinnen lassen, zu welchen Liouville durch sein Eliminations-Verfahren gelangte, so dass im Grunde die merkwürdige Formel Jacobi's die Quelle ist, aus der auch Liouville's Eliminations-Methode fliesst.

Graz. G. Escherich.

M. Allé: Ein Beitrag zur Theorie der Functionen von drei Veränderlichen. (Sitzb. d. kais. Acad. d. W. in Wien. Bd. LXXII. Juniheft 1875).

Um die Theorie der Functionen dreier Veränderlichen in ähnlicher Weise geometrisch zu interpretiren, wie dies für Functionen von 2 Veränderlichen zu geschehen pflegt, werden als Hauptmomente der Betrachtung die Anordnung der Functionswerthe und die Aenderung derselben beim Uebergange von einem Punkte des Raumes zu einem beliebigen Nachbarpunkte ins Auge gefasst.

Durch Einführung von Niveauflächen wird die Betrachtung von 3fach unendlich vielen Functionswerthen auf die Betrachtung einfach unendlich vieler Niveauflächen zurückgeführt; Form und Aufeinanderfolge der Niveauflächen vervollständigt das geometrische Bild einer Function dreier Veränderlichen.

In dieser Hinsicht kommt für jeden Punkt des Raumes zunächst die Steigung der Fuuction nach irgend einer mit r bezeichneten Richtung in Betracht, welche für die beiden Normalenrichtungen der durch diesen Punkt gelegten Niveaufläche beziehungsweise ein Maximum oder Minimum ist, während sie für alle in die

Tangentialebene dieses Punktes der Niveaufläche fallenden Richtungen verschwindet.

Der absolute Betrag der Maximal- oder Minimal-Steigung wird durch die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = h$$

bestimmt und die Steigung nach irgend einer Richtung erscheint als Projection der Maximal- oder Minimal-Steigung auf diese Richtung.

Mit Hülfe zweier Kugeln vom Durchmesser h, welche die Niveaufläche eines Raumpunktes in diesem beiderseits berühren, wird die Steigung nach irgend einer von diesem Punkte ausgehenden Richtung dem absoluten Werthe nach durch das innerhalb einer dieser Kugeln auf dieser Richtung liegende Segment dargestellt.

Um das Gesetz, welches die Werthe des Differentialquotienten $\frac{d^2 u}{d r^2}$ für alle von einem bestimmten Punkte ausgehenden Richtungen verbindet, mit einem Male zu überschauen, wird für jede Richtung ein von dem festen Punkte ausgehender Fahrstrahl R construirt, so dass

$$\frac{d^2 u}{d r^2} = \pm \frac{1}{R^2}$$

je nachdem

$$\frac{d^2 u}{d r^2} \gtrless 0$$

ist.

Der geometrische Ort der Endpunkte aller dieser Fahrstrahlen ist durch die Gleichung

$$3) \qquad \pm 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2\alpha YZ + 2\beta ZX + 2\gamma XY$$

bestimmt, in welcher die Coëfficienten der von dem festen Punkte gerechneten Coordinaten XYZ des Fahrstrahl-Endes die auf diesen Punkt bezogenen Derivirten zweiter Ordnung bedeuten.

Die Unterscheidung der hier zu betrachtenden Fälle wird durch die Natur des Asymptoten- oder charakteristischen Kegels von 3) bedingt, der reell oder imaginär ausfällt, je nachdem

$$4) \qquad D = (\beta^2 - AC)(\gamma^2 - AB) - (\beta\gamma - \alpha A)^2 \lesseqgtr 0$$

wobei der Zwischenfall $D = 0$, welchem ein Zerfallen dieses Kegels in ein reelles oder imaginäres Ebenenpaar entspricht, eine besondere Beachtung verdient.

Wird 3) als Gleichung der charakteristischen Fläche des zweiten Differentialquotienten bezeichnet, so liefert die Betrachtung der einzelnen Fälle folgende Ergebnisse.

Die charakteristische Fläche ist für

a) $D < 0$ ein System von zwei conjugirten Hyperboloiden und die Seiten des gemeinschaftlichen reellen charakteristischen Kegels bezeichnen jene Richtungen, nach welchen der zweite Differentialquotient mit Zeichenwechsel verschwindet.

b) $D > 0 \quad AB - \gamma^2 > 0$ ein dreiaxiges Ellipsoid mit imaginärem charakteristischem Kegel, dessen Spitze allein reell ist, und der zweite Differentialquotient kann das Zeichen nicht ändern, weil er für keine reelle Richtung verschwindet.

c) $D = 0 \quad AB - \gamma^2 < 0$ ein System von zwei conjugirten hyperbolischen Cylindern mit gemeinschaftlicher Axe. Die beiden reellen Ebenen, in welche der charakteristische Kegel zerfällt, schneiden sich in dieser Axe. Der zweite Differentialquotient verschwindet mit Zeichenwechsel, so oft eine Richtung in eine der beiden Ebenen fällt.

d) $D = 0 \quad AB - \gamma^2 < 0$ ein elliptischer Cylinder. Axe desselben ist die reelle Schnittlinie des imaginären Ebenenpaares, in welches der charakteristische Kegel ausartet. Der zweite Differentialquotient ändert das Zeichen nicht.

e) $D = 0$ weil $AB - \gamma^2 = 0 \quad AC - \beta^2 = 0 \quad \beta\gamma - \alpha A = 0$ ein System von zwei parallelen Ebenen die zu beiden Seiten des Ausgangspunktes von demselben gleichen Abstand besitzen. Der charakteristische Kegel ist in eine durch den Ausgangspunkt gehende reelle und doppelt zu zählende Ebene ausgeartet, welche mit den beiden früher genannten parallel ist. Der zweite Differentialquotient ändert das Zeichen nicht und verschwindet für jede Richtung welche durch den Ausgangspunkt gehend in die doppelte Ebene fällt.

Eine andere geometrische Construction des zweiten Differentialquotienten einer Function dreier Veränderlichen nach einer beliebigen Richtung erhält man, wenn derselbe direct als Fahrstrahl ϱ einer Fläche dargestellt wird. Setzt man nämlich

$$\pm \frac{d^2 u}{d r^2} = \varrho,$$

so erhält man bei passender Wahl der Axen als Gleichung dieser Fläche

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^3 = (A_0 X^2 + B_0 Y^2 + C_0 Z^2)^2$$

dieselbe Gleichung, durch welche Plücker die Hauptparameter der linearen Complexe einer dreigliedrigen Gruppe dargestellt hat.

Zum Schlusse wird die Bedeutung der Singularitäten der Niveauflächen berührt.

Graz. M. Allé.

M. Allé: Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmasses. (Sitzb. d. kais. Acad. d. W. in Wien. B. LXXIV. Juniheft 1876.)

Wenn für einen Punkt einer Oberfläche die Indicatrix eine Ellipse ist, so kann das Krümmungsmass für diesen Punkt durch die Fläche dieser Ellipse und durch die Fläche der Indicatrix einer Kugel vom Halbmesser 1, welche die Oberfläche in dem betrachteten Punkte berührt, ausgedrückt werden.

Bezeichnet man nämlich das Krümmungsmass mit k und die beiden der Oberfläche und der Kugel im Berührungspunkte entsprechenden Indicatrix-Flächen oder ihre Projectionen auf die XY-Ebene bezüglich mit E und K, so ist

$$1) \qquad k = \left(\frac{K}{E}\right)^2.$$

Für eine dreifache ebene Mannigfaltigkeit existirt ein geometrisches Gebilde welches vollständig die Stelle der auf die XY-Ebene projicirten Indicatrix spielt.

Es ist dies eine centrische Fläche 2. Ordnung, und wenn man in dem Falle als dieselbe ein Ellipsoid ist, das Volumen desselben wieder mit E und das Volumen jenes Ellipsoides, welches an die Stelle der früheren Kugel-Indicatrix-Projection tritt, mit K bezeichnet, so wird für eine solche dreifache ebene Mannigfaltigkeit das Krümmungsmass wieder durch 1) ausgedrückt, oder wenn man die beiden Volumina durch dreifache Integrale darstellt, so erscheint die Quadratwurzel aus dem Krümmungsmasse in diesem Falle als das Verhältniss zweier dreifachen Integrale. Ebenso kann das Krümmungsmass einer n fachen ebenen Mannigfaltigkeit, welche durch die Gleichung $u = f\ (x_1\ x_2 \cdot \cdot x_n)$ aus einer $n + 1$ fachen Mannigfaltigkeit ausgeschieden wird für den Fall als die aus den partiellen Derivirten der zweiten Ordnung von f gebildete quadratische Form durch eine Summe positiver Quadrate darstellbar ist durch das Verhältniss zweier $n$fachen Integrale ausgedrückt werden und ergibt sich dabei diejenige Gleichung, welche die Verallgemeinerung des Begriffes der Hauptkrümmungen enthält.

Graz. M. Allé.

M. Allé: Ueber die Bewegungsgleichungen eines Systems von Punkten. (Sitzb. d. kais. Acad. d. W. in Wien. Bd. LXXIII. Januarheft 1876.)

Unter der Voraussetzung, dass die Kräftefunction von den Coordinaten der bewegten Punkte und der expliciten Zeit abhängt, dagegen die Componenten der Geschwindigkeiten nicht enthält, können die Bewegungsgleichungen eines Systems von Punkten auf eine Form gebracht werden, welche in dem einfachsten Falle eines einzigen Punktes mit einer Kräftefunction die *nur* die Coordinaten enthält, mit der von Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnés curvilignes" (1859 pag. 168) angegebenen Form zusammenfällt.

Den Ausgangspunkt für die Ableitung bildet die Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen und wenn die allgemeinen Coordinaten, welche die Lage des Systems bestimmen mit q_i bezeichnet werden, T die lebendige Kraft vorstellt, $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ gesetzt wird, wenn dann die $q'_i = \frac{d q_i}{dt}$ als Functionen der q_i sowohl als der expliciten Zeit aufgefasst werden und das Integral der Lagrange'schen Gleichungen, welches an die Stelle des Princips der lebendigen Kraft tritt durch

$$T - U = \varpi \tag{1}$$

dargestellt wird, wo U die Kräftefunction und

$$\varpi = -\int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt \tag{2}$$

so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial \varpi}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right) q'_j. \tag{3}$$

Sie werden erfüllt durch die beiden Systeme von Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial \varpi}{\partial q_i}, \tag{4}$$

wo φ eine zu bestimmende Function der q_i und von t ist, für welche man aus 4) die bekannte partielle Differentialgleichung findet, von welcher Hamilton die Lösung mechanischer Probleme gemacht hat, und die Gleichungen 4) werden durch einige Transformationen in die bekannte canonische Form der Bewegungsgleichungen übergeführt.

Die Einführung gewöhnlicher krummliniger Coordinaten zeigt dann die Bedeutung des ersten Systemes der Gleichungen 4).

Wählt man nämlich statt der Coordinaten q_i krummlinige Coordinaten von der Art, dass jeder Punkt des Raumes als Durchschnitt dreier Flächen

$$\varrho_1 = f_1(x, y, z) \qquad \varrho_2 = f_2(x, y, z) \qquad \varrho_3 = f_3(x, y, z)$$

dargestellt wird, so sind die Grössen

$$\frac{\partial p_2}{\partial \varrho_3} - \frac{\partial p_3}{\partial \varrho_2} \qquad \frac{\partial p_3}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \varrho_3} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \varrho_1}$$

proportional der Drehungsgeschwindigkeiten um die Normalen der 3 Flächen im Durchschnittspunkte, daher das 1. System der Gleichungen 4) ausdrückt, dass der betrachteten Bewegung ein Geschwindigkeitspotenzial zukomme.

Graz. M. Allé.

G. Biasi: Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche — Studî analitici —. 84 pag. in 8^0 (Verona, H. F. Münster 1876).

L'impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni di grado superiore al quarto da una parte, e la possibilità di determinare con ogni approssimazione le radici di una equazione a coefficienti numerici dall' altra, mi condussero a studiare la teoria delle equazioni algebriche sotto un altro punto di vista.

Considerando le radici delle equazioni come risultati di operazioni numeriche, le incognite delle equazioni stesse possono essere trattate come funzioni semplici dei coefficienti; le quali, espresse con simboli adatti, possono sostituire le espressioni generali, che si cercano colla risoluzione algebrica, ove su quelle funzioni si possano eseguire i calcoli, che si sogliono effettuare sulle funzioni algebriche. La risoluzione delle equazioni può dunque essere sostituita dal seguente problema: stabilire le regole per il calcolo delle incognite considerate come funzioni semplici dei coefficienti.

Il problema, nella sua massima generalità, consisterebbe nel determinare i coefficienti dell' equazione:

$$F(z) = 0,$$

essendo z una funzione algebrica qualunque delle incognite $x_1, x_2, \ldots.$ di date equazioni algebriche:

$$f_1(x_1) = 0, \quad f_2(x_2) = 0, \ldots\ldots.$$

Le trasformazioni, che hanno per iscopo di eseguire sopra l'incognita d'una equazioni una determinata operazione, ne sono un caso particolare.

Limitando il problema generale ai casi fondamentali:

$$z = x_1 \pm x_2, \quad z = x_1\, x_2^{\pm 1}, \quad z = x_1^{\pm x_2^{\pm 1}},$$

le note relazioni fra i coefficienti d'una equazione e le somme delle potenze simili delle sue radici offrono un mezzo elementare di risolvere il problema stesso. Se non che la complicazione eccessiva dei calcoli rende un tal metodo inopportuno nei casi particolari, e inadatto a stabilire la forma generale dell' equazione che dà il risultato dell' operazione.

Un metodo più semplice per la formazione dell' equazione che dà la differenza delle incognite di due equazioni proposte (onde si ottiene anche l'equazione per la somma) si ha coll' uso del risultante delle due equazioni e dell' operazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + \cdots\cdots + \frac{\partial}{\partial l},$$

dove $a, b, \ldots. l$ denotano le radici di una delle equazione proposte. Un' altra forma generale della stessa equazione avrebbe i coefficienti della forma:

$$\sum \sigma f_{\pi \varrho \ldots}^{p\, r \ldots},$$

dove il simbolo $\sigma f_{\pi \varrho \ldots}^{p\, r \ldots}$ indica una funzione simmetrica delle radici facilmente esprimibile per mezzo dei coefficienti. Quest' ultima forma presenta il vantaggio di poter determinare nel modo più completo il numero delle radici comuni alle due equazioni, distinguendo tutti i gruppi di radici eguali.

I differenti termini del risultante, aggruppati secondo i loro gradi rispetto alle radici, offrono invece i coefficienti della equazione, che dà il quoziente delle incognite. Anche quessa equazione ci somministra dei criterî per riconoscere l'esistenza di radici comuni alle due equazioni; i quali se danno una soluzione del problema meno completa di quella fornitaci dall' equazione precedente ed hanno lo svantaggio di contenere dei fattori superflui, sono però di più facile applicazione.

Nel caso particolare delle equazioni binomie, denotando con δ e con M rispettivamente il massimo divisore e il minimo multiplo comuni ai numeri m e μ, si trova facilmente che la somma $\sqrt[m]{A} + \sqrt[\mu]{B}$ è una radice δ^{ma}, il cui radicando dipende da un' equazione di grado M, e che il prodotto $\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt{B}$ ha M valori distinti ripetuti δ volte.

Applicando i principî precedentemente esposti alla risoluzione algebrica delle equazioni, ottenni per l'incognita dell' equazione di secondo grado le forme:

$$x = A + \sqrt{B}, \quad x = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2,$$

e per quella della cubica, la forma:

$$x = A + (\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C})^3,$$

dove A dipende dai coefficienti per mezzo d'una equazione lineare e B, C sono le due radici d'una equazione quadratica. L'equazione di quarto grado, per mezzo della sostituzione $z = x^2 - \vartheta x$, ha una risoluzione della forma:

$$z = A + B,$$

dove A e B sono le incognite di due equazioni di secondo grado. Se poi l'equazione del quarto grado manca del secondo e del quarto termine, la sua incognita si può determinare direttamente nella forma:

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B}.$$

Il continuo uso delle funzioni simmetriche rendeva necessaria qualche semplificazione nella teoria delle funzioni stesse, e più di tutto importava evitare, quanto fosse possibile, la rappresentazione delle funzioni simmetriche delle radici per mezzo dei coefficienti. A tale scopo adottai, per le funzioni simmetriche della forma $\sum a^p b^r \ldots$, la notazione:

$$s^{p\,r\,t\ldots}_{\pi\,\varrho\,\tau\ldots},$$

nella quale $p, r, t, \ldots$ indicano gli esponenti, e $\pi, \varrho, \tau, \ldots$ sono indici che esprimono quante volte il relativo esponente sia ripetuto. Con questa notazione si ha:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + \cdots + \frac{\partial}{\partial l}\right) s^{p\,r\,t\ldots}_{\pi\,\varrho\,\tau\ldots} = p s^{p-1\;\;p\;\;\;\;\;\;r\,t}_{\;1\;\;\;\pi-1\;\varrho\,\tau} + r s^{p\;r-1\;\;r\;\;\;\;\;t\ldots}_{\pi\;\;1\;\;\;\varrho-1\;\tau\ldots} + \cdots,$$

dove, potendosi trovare degli esponenti eguali o nulli, riescono necessarie le riduzioni:

$$s_{\pi\varrho\tau\ldots}^{ppt\ldots} = \binom{\pi+\varrho}{\pi} s_{\pi+\varrho\tau\ldots}^{p\ \ t\ldots},$$

$$s_{\nu\pi\varrho\ldots}^{opr\ldots} = \binom{m-\pi-\varrho-\cdots}{\nu} s_{\pi\varrho\ldots}^{pr\ldots},$$

essendo m il grado dell' equazione, e denotando in generale con $\binom{k}{i}$ il numero figurato $\frac{k(k-1)\ldots.(k-i+1)}{1.2.3\ldots i}$.

La suesposta notazione per le funzioni simmetriche mi condusse ad una forma generale della trasformata di Tschirnhaus. Infatti sia $f(x)=0$ l'equazione proposta del grado m ed

$$y = \vartheta_n x^n + \vartheta_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \vartheta_0$$

l'incognita della trasformata; allora indicando con $\sum_{n,i}$ l'espressione:

$$\sum_{n,i} \vartheta_p^\pi \vartheta_r^\varrho \ldots s_{\pi\varrho\ldots}^{pr\ldots},$$

dove il segno sommatorio s'estenda a tutti i termini che si possono ottenere dando a $p, r, \ldots$ i valori della serie $0, 1, 2, \ldots. n$, sotto la condizione $\pi+\varrho+\cdots=i$, la trasformata di Tschirnhaus diviene:

$$z^m - z^{m-1}.\sum_{n,1} + z^{m-2}.\sum_{n,2} - \cdots\cdots (-1)^m \sum_{n,m} = 0.$$

L'ultimo termine $\sum_{n,m}$ è il risultante delle due equazioni $f(x)=0$ $y=0$.

Verona. G. Biasi.

R. Engelmann: Abhandlungen von F. W. Bessel. Herausgegeben von Dr. Rud. Engelmann. — Zweiter Band: III. Theorie der Instrumente. IV. Stellarastronomie. V. Mathematik. — Mit 2 Tafeln nnd verschiedenen Holzschnitten. Leipzig. W. Engelmann 1876.

(Erster Band besprochen in dieser Zeitsch. I. S. 128.)

In keinem Theil astronomischer Forschung hat Bessel in schöpferischer Weise Grösseres geleistet, als in der *Stellarastronomie* und der ihr zu Grunde liegenden *Theorie der Instrumente*; hier trafen alle Anlagen und Neigungen zusammen, um mittelst neuer oder wesentlich verbesserter älterer Messaparate, ausgehend von sorgfältiger Beobachtung und deren strenger Kritik, und durch Anwendung zum Theil eigenthümlicher Methoden der Reduction und Rechnung, epochemachende Resultate zu gewinnen. Zum ersten Mal betonte Bessel die Nothwendigkeit das Instrument, wie es vom Künstler dem Astronomen überliefert wird, als etwas Unvollkommenes, Unfertiges anzusehen, welches erst in der Hand und durch die Prüfung des aufmerksamen Beobachters zu dem wird und das leistet, was es leisten soll und kann. Frühere hatten das astronomische Instrument nur als Mittel zum Zweck betrachtet; eine Untersuchung des Mittels, wodurch das vorgesetzte Ziel erreicht werden sollte, erschien überflüssig; Bessel erst behauptete und bewies durch die That, dass eine astronomische Beobachtung erst dann einen Werth erhält, wenn der Astronom denkend beobachtet, wenn er weiss, was beobachtet werden soll und welches die Beobachtungsmittel sind; wenn er sein Instrument so zu sagen geistig für eine Grösse gleicher Ordnung wie das zu beobachtende Object hält; es als ein Individuum betrachtet, dessen Eigenthümlichkeiten, Vorzüge und Mängel untersucht und erst erkannt und geprüft sein müssen, ehe die Beobachtung eine wahrhaft zuverlässige und brauchbare wird. — Ergibt sich diese Auffassung der astronomischen Beobachtung schon aus der Art und Weise, wie Bessel im Beginn seiner praktisch-astronomischen Thätigkeit ältere und kleinere Instrumente behandelt, z. B. Sextanten, Mauerkreis, Kreismikrometer und später den Prismenkreis (vgl. die Abh. 52—58 und 72), so tritt sie noch deutlicher hervor, als nach Berufung nach Königsberg und Einrichtung der neu erbauten Sternwarte (1813) anfangs im Dollond'schen Mittagsfernrohr und Cary'schen Kreis, später (1820) im Reichenbach'schen und seit 1842 besonders in dem neuen Repsold'schen Meridiankreis stetig sich verfeinernde Hilfsmittel in seine Hand kamen. Mit jedem neuen und besseren Instrument wächst wie die Lust so auch die Fähigkeit und Kraft, stets Vollkommeneres zu erreichen, jeden Apparat nach seiner mathematischen Idee wie individuellen Beschaffenheit immer gründlicher kennen zu lernen und vollständiger zu benutzen. Noch die letzte Arbeit über den Einfluss der Schwere auf die Gestalt eines vertikalen Kreises (Abh. 76), die speciell durch das Studium des Repsold'schen Kreises hervorgerufen ward, legt Zeugniss dafür ab, wie er besonders das Meridianinstrument (in den Abh. 59—65) in allen seinen Theilen und mit den dazu gehörigen Hilfsapparaten (Uhren, Abh. 66 und 67) zu höchster Leistungsfähigkeit auszubilden bestrebt war. — Wie von den feststehenden Meridianinstrumenten, so gilt dies auch von dem beweglichen Aequatoreal und vor allem von dem complicirtesten mikrometrischen Apparat, dem Heliometer. Die Darstellung der Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatorealinstruments (Abh. 70), wie die Besondere Untersuchung des Königsberger Heliometers (Abh. 71) — noch von Fraunhofer 1824 begonnen und zum Theil unter Benutzung Bessel'scher Ideen 1829 vollendet — sind für Jahrzehnte Ausgangspunkt und Grundlage der meisten ähnlichen Arbeiten gewesen und sind es in vieler Hinsicht auch noch jetzt.

Bildete für Bessel das Instrument an und für sich immer einen Gegenstand höchsten Interesses, so vergass er doch nie, dass es nur das Mittel zur Erlangung astronomischer Resultate sei; im Grunde nur das Material abgebe, um das Gebäude sicher und harmonisch daraus zu erbauen. Wenn aber Bessel's Arbeiten besonders im Gebiete der Stellarastronomie die Fundamente geliefert haben, auf denen spätere Zeiten weiter bauten, so ist der Grund dazu nicht am wenigsten in der Meisterschaft zu suchen, mit welcher er das Instrument selbst theoretisch beherrschte und praktisch benutzte. Der Zusammenhang zwischen der Untersuchung der astronomischen Instrumente und den aus dieser Untersuchung abgeleiteten Resultaten ist überall ein so enger, dass man vom Heliometer z. B. nicht sprechen kann, ohne an die Parallaxe von 61 Cygni oder an die Untersuchungen über p Ophiuchi; von den beiden Meridiankreisen nicht, ohne an die Arbeiten über die Fundamentalsterne oder die veränderlichen Eigenbewegungen zu denken. — Mit — freilich fruchtlosen — Untersuchungen über Fixsternparallaxen hatte sich Bessel schon zur Zeit seines Lilienthaler Aufenthalts beschäftigt (vgl. Abh. 77—79). Besonders war es der durch starke Eigenbewegung ausgezeichnete Doppelstern 61 Cygni, der ihn anzog und dessen Oerter und Abstände von benachbarten Sternen er zu verschiedenen Zeiten bestimmte (Abh. 80—82); aber ein Erfolg für die Ermittelung seiner Entfernung zeigte sich erst, als er das Heliometer zur mikrometrischen Vergleichung benutzen konnte. Das Endresultat, dessen Ableitung die Abh. 83 und 84 mit allem nöthigen Zahlendetail enthalten, eine Parallaxe von 0″.348 oder eine Entfernung von 592000 Erdbahnhalbmessern, war zum ersten Male eine Zahl, welche das ihr zugebrachte Vertrauen durchaus verdiente; wenn schon neuere Untersuchungen sie um etwa 0″.16

vergrössert, die Entfernung also dem entsprechend verkleinert haben. — Die Meridianinstrumente der Königsberger Sternwarte dienten für Jahrzehnte dem von Bessel gesetzten Hauptzwecke, der Ableitung möglichst genauer Positionen einer verhältnissmässig nur geringen Zahl von (36) Fundamentalsternen, als Grundlage aller weiteren Beobachtungen und aus Beobachtungen gezogenen Schlüsse im Fixstern- wie im Sonnensysteme. Zweimal, für 1815 und 1825, bestimmte er die Rectascensionen; öfter noch, für 1815, 1820 und 1840 (letztere Beobachtungen von Prof. E. Luther berechnet), die Declinationen dieser Sterne (Abh. 86—91). — Diese Bestimmungen bilden auch einen Theil der Grundlagen zu der umfangreichsten und zeitraubendsten von Bessel unternommenen Arbeit, zu seinen Zonenbeobachtungen. Von August 1821 bis Januar 1833 hat er, unterstützt von Argelander und Busch, in 536 Sitzungen 75011 Beobachtungen der Sterne bis zur 9. Grösse gemacht, dieselben reducirt und veröffentlicht (in den Königsberger Beobachtungen, 7—17. Abtheilung); ein glänzender Beweis ausserordentlicher Energie und unermüdlichen Fleisses. In engstem Zusammenhang damit stehen die von der Berliner Akademie nach Bessel's Plan seit 1828 herausgegebenen, die Zone von -15 bis $+15^0$ der Declination umfassenden Himmelskarten, die, von verschiedenen Astronomen bearbeitet, allerdings erst lange nach Bessel's Tode (1859) vollendet wurden. Ueber diese beiden Unternehmen, ihr Entstehen, Art der Bearbeitung, Fortschritt und Abschluss (für die Zonen) berichten die Abh. 92—99. — Der Besitz des Heliometers veranlasste 1830 und 31 die genauen Messungen einer Anzahl von (37) Doppelsternen, deren Vergleichung mit den nahe gleichzeitig von Struve am Fadenmikrometer des Dorpater Refractor erhaltenen die Thatsache ergab, dass die Königsberger Distanzen fast ohne Ausnahme erheblich grösser als die Dorpater gemessen wurden, während die Positionswinkel im Allgemeinen übereinstimmten (s. Abh. 101 und 102). Diese eigenthümliche seither noch oft beobachtete Erscheinung verfolgte Bessel noch weiter in dem Doppelstern p Ophiuchi (Abh. 103); während Struve auch durch Messung an künstlichen Doppelsternen die Richtigkeit der von ihm gemessenen Distanzen zu beweisen suchte, schloss Bessel seine eigenen Untersuchungen in der Ueberzeugung, dass seine Messungen als frei von constanten Fehlern zu betrachten seien. — Die Verbindung heliometrischer Vergleichungen schwächerer mit häufig am Meridiankreis beobachteten helleren Sternen ergab ferner (1840) ein sehr genaues Verzeichniss von 53 Sternen der

Plejaden-Gruppe, welches für viele praktische Zwecke auch heute noch von grösstem Werthe ist. Der betreffenden Abhandlung 104 hat der Herausgeber zu grösserer Brauchbarkeit eine Karte hinzugefügt, welche (zum Theil nach eigenen Beobachtungen) die meisten Sterne bis zur 11. Grösse in dieser Gegend enthält. — Die letzte Abhandlung endlich aus dem Gebiete der Stellarastronomie (105) legt die epochemachenden Untersuchungen ausführlich dar, welche Bessel über die Veränderlichkeit der Eigenbewegungen der Fixsterne, speciell des Procyon und Sirius anstellte und die ihn bekanntlich zu der Ueberzeugung und dem Nachweis führten, dass die beobachteten Abweichungen nur durch Annahme relativ naher und dunkler Massen zu erklären seien, die mit den genannten hellen Sternen in physischem Connex ständen.

Die Arbeiten aus der reinen *Mathematik*, welche die letzte Abtheilung des 2. Bandes enthält, und zu denen Bessel mit wenigen Ausnahmen bei Behandlung astronomischer Probleme geführt wurde, können hier nur kurz erwähnt werden. Obschon die Natur und Leistungen Bessel's nicht wesentlich charakterisirend, haben manche von ihnen doch eine selbständige, nach Inhalt wie Methode werthvolle Bedeutung erlangt. Hauptsächlich sind es die auf die Integrallogarithmen (Bessel'sche Functionen) bezüglichen Arbeiten (Abh. 106—108); zum Theil auch die Abhandlung über die Zahlenfakultäten (109), sowie die sich mit der Entwickelung von Functionen zweier Winkel beschäftigenden (117 und 121), welche zu ähnlichen Untersuchungen von mathematischer Seite auch später anregten. — Die, gleichfalls umfangreicheren, Arbeiten über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung (118) und über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler (119) sind zwar nach Form und Methode mathematischer Natur, Bessel wurde zu ihnen aber doch durch wesentlich astronomische Probleme veranlasst. — Einige kleinere geometrische Aufsätze (110, 114—116) finden sich als gelegentliche Mittheilungen in Briefen an Olbers, zwei andere (113 und 114) behandeln die Pothenot'sche Aufgabe.

Leipzig. R. Engelmann.

F. Klein: Ueber lineare Differentialgleichungen. (Erlanger Bericht vom 26. Juni 1876. — Abgedruckt in den Mathem. Annalen XI. S. 115—118.)

Bekanntlich hat in einer Abhandlung*) in Borchardt's Journal Bd. 81 Hr. Fuchs die Aufgabe, bei einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten zu entscheiden, ob sie durchaus algebraische Integrale besitzt, dadurch auf eine Zahl immer durchführbarer Versuche zurückgebracht, dass er folgendes Theorem bewies: *Sind y_1, y_2 zwei unabhängige Integrale der von ihrem zweiten Gliede befreiten Differentialgleichung, so gibt es gewisse ganze binäre Formen $f(y_1, y_2)$, welche gleich sind Wurzeln aus rationalen Functionen der unabhängigen Veränderlichen.* Die Zahl dieser „Primformen" erweist sich nämlich, sofern man in jedem Falle nur die niederste beibehält, als endlich.

Ich bemerkte nun sofort, als ich diesen Sommer zum Studium der genannten Fuchs'schen Arbeit veranlasst wurde, dass diese Primformen keine anderen sind als eben die „binären Formen mit linearen Transformationen in sich", welche ich im neunten Bande der Mathematischen Annalen behandelt habe (vergl. das Referat im ersten Hefte dieses Repertoriums) und deren Beziehung zu den linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen durch das Ineinandergreifen meiner Arbeit mit den Untersuchungen von Schwarz über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal Bd. 75) bereits angezeigt war. Hieraus ergab sich mir das Resultat, dass die Liste der Primformen niedersten Grades, wie sie Fuchs angibt (p. 126 seiner Arbeit), noch zu reduciren ist**); es gelang mir aber namentlich auch, fast ohne Rechnung, *die betr. Differentialgleichungen wirklich zu bilden und ihre Integrale anzuschreiben.*

Handelt es sich nun darum, bei einer vorgelegten Differentialgleichung zu untersuchen, ob sie durchaus algebraische Integrale

*) Ueber diejenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. — Vergl. auch das Referat im ersten Hefte dieses Repertoriums.

**) Das Gleiche behaupten Camille Jordan (Comptes Rendus 13. März 1876) und Pepin (Ebenda, 5. Juni 1876). Aber ihre Angaben sind nicht richtig, was hinsichtlich der Behauptungen von Pepin bereits Fuchs gezeigt hat (Comptes Rendus, 26. Juni, 3. Juli 1876). Nach C. Jordan würde der auf das Ikosaeder bezügliche Fall keine selbständige Bedeutung haben.

besitzt, so bietet sich *die Methode der directen Coëfficientenvergleichung*. Aber ich bin auf eine Darlegung dieser Methode noch nicht eingegangen; ich kann für's Erste nur aussprechen, dass sie in jedem Falle vermöge einer endlichen Anzahl ausführbarer Operationen zum Ziele führt.

München. F. Klein.

E. Edlund: Ueber die Abhängigkeit der contactelectromotorischen Kraft von der Temperatur. (Pogg. Ann. B. 159. S. 448.)

Wir werden uns vorstellen, dass zwei verschiedene Leiter M und N mit einander in Berührung seien, und dass M auf ein elektrisches Molekül m eine grössere Anziehung als N ausübe. Hier mag im Vorbeigehen bemerkt werden, dass die Anziehung, welche ein Körper auf ein in seiner unmittelbaren Nähe belegenes elektrisches Molekül ausübt, nicht nur von der Beschaffenheit der Moleküle des Körpers, sondern auch von deren gegenseitiger Lage und Entfernung abhängen muss. Wir wollen nun annehmen, dass das Molekül m auf derselben Seite der Contactfläche wie N und in der Entfernung r von derselben Fläche gelegen sei, und dass r nicht grösser sei als die Entfernung, in welcher die molekularen Kräfte wirken können. Es ist dann einleuchtend, dass die Anziehungskraft, welche das Molekül m nach der Berührungsfläche zu führen sucht, wächst, wenn die Entfernung von dieser Fläche abnimmt; die Kraft erreicht ihr Maximum, wenn m sich auf der Berührungsfläche selbst befindet, nimmt aber wieder ab, sobald m davon entfernt wird und in M eindringt. Schliesslich wird die Kraft unmerklich, wenn das Molekül m so weit in M eingedrungen ist, dass die Entfernung von der Contactfläche die Grösse des Wirkungsradius der molekularen Anziehungskräfte erreicht. Uebrigens muss das Gesetz, nach welchem die Anziehung zunimmt, wenn m sich in N befindet und sich der Berührungsfläche nähert, dem Gesetz gleich sein, nach welchem die Anziehung abnimmt, wenn m sich in M befindet und sich von der genannten Fläche entfernt. Die Anziehung, die das Molekül m der Berührungsfläche zu nähern strebt, kann dann mit $\frac{a}{r^n}$ ausgedrückt werden, worin n die Potenz bezeichnet, nach welcher die Anziehung abnimmt, wenn die Entfernung grösser wird, und a eine Constante ist. Wenn das Molekül m in der Entfernung $r - \varrho$

von der Berührungsfläche belegen wäre, so würde die Anziehung mit $\frac{a}{(r-\varrho)^n}$, und in der Entfernung $r+\varrho$ mit $\frac{a}{(r+\varrho)^n}$ ausgedrückt werden. Wenn wir uns nun vorstellen, dass das Molekül m während der Zeit t_0 in der Entfernung $r-\varrho$ und danach während eben so langer Zeit in der Entfernung $r+\varrho$ sich befände, so würde die *mittlere* Anziehung während der Zeit $2t_0$ gleich sein

$$\frac{1}{2t_0}\left(\frac{at_0}{(r-\varrho)^n}+\frac{at_0}{(r+\varrho)^n}\right)=\frac{a}{r^n}+\frac{n(n+1)}{2r^{n+2}}a\varrho^2;$$

wo höhere Potenzen von ϱ zu vernachlässigen sind, weil angenommen wird, dass ϱ ausserordentlich klein ist. Man erhält also hieraus, dass die *mittlere* Anziehung, die das Molekül m der Berührungsfläche zu nähern sucht, wenn dasselbe Molekül während der einen Hälfte der Zeit sich in der Entfernung $r-\varrho$ und während der andern Hälfte in der Entfernung $r+\varrho$ belegen wäre, grösser ist als wenn dasselbe sich während der ganzen Zeit in der Entfernung r befände. Wenn nun das Molekül m in der Zeit $2t_0$ um seine ursprüngliche Gleichgewichtslage eine geschlossene Bahn beschreibt, welche von einer Ebene, die durch die Gleichgewichtslage des Moleküls geht und mit der Berührungsfläche zwischen M und N parallel ist, in zwei gleiche Hälften geschnitten wird, so ist die Veränderung der Entfernung von der Berührungsfläche oder ϱ eine Function der Zeit t, und für entsprechende Punkte in jeder Hälfte der Bahn gleich gross, obgleich mit entgegengesetzten Zeichen. Der Zuwachs der mittleren Anziehung, welche in Folge der Bewegung des Moleküls um seine Gleichgewichtslage entsteht, kann dann durch

$$\frac{n(n+1)a}{2t_0r^{n+2}}\int_{t=0}^{t=t_0}\varrho^2\,dt$$

ausgedrückt werden.

Wenn das Molekül m in *derselben Zeit* $2t_0$ um die Gleichgewichtslage eine mit der vorigen *gleichförmige* Bahn beschreibt, doch mit einer tangentialen Geschwindigkeit, die in jedem Punkt p Mal grösser als vorher ist, so ist die Entfernung von der Gleichgewichtslage in jedem Punkt auch p Mal grösser als in dem entsprechenden Punkt der vorigen Bahn; aber die Veränderungen in den Entfernungen des Moleküls von der Berührungsfläche werden dann auch p Mal grösser als vorher und können deshalb durch $p\varrho$ ausgedrückt werden. Der Zuwachs der mittleren Anziehung, der durch die Bewegung des Moleküls um seine Gleichgewichtslage entsteht, wird folglich in diesem Falle

$$\frac{n(n+1)}{2t_0 r^{n+2}} ap^2 \int\limits_{t=0}^{t=t_0} \varrho^2 dt.$$

Die ganze Anziehung A, welche das Molekül m erfährt, während es in derselben gegebenen Zeit gleichförmige Bahnen mit verschiedener Geschwindigkeit um seine Geschwindigkeitslage beschreibt, kann also, wenn C eine Constante bezeichnet, durch

$$A = \frac{a}{r^n}\left(1 + \frac{Cp^2}{r^2}\right)$$

ausgedrückt werden.

Was hier angeführt worden ist, kann natürlich auf jedes beliebige Molekül, das sich der Berührungsfläche nahe genug befindet, angewandt werden.

Wir nehmen nun an, dass das elektrische Fluidum aus dem Lichtäther besteht und dass die Wärme eines Körpers, wenigstens zu einem gegebenen Theile, durch die Schwingungen der Aethermoleküle um ihre Gleichgewichtslagen verursacht wird.*) Die Wärmemenge, welche der Körper enthält, wird dann durch die Summe der lebendigen Kraft der Moleküle bestimmt, und seine Temperatur, von dem absoluten Nullpunkt an gerechnet, kann als dieser Summe proportional betrachtet werden; denn die Abweichung, die hiervon stattfinden kann, wirkt nicht auf das erzielte Resultat ein. Wenn der Körper bei gewöhnlicher Temperatur eine unbedeutende Erhöhung seines Wärmegrades erhält, z. B. von 16 bis 20 Graden, so hat man keine physikalischen Gründe für die Annahme, dass die Schwingungszeit der Moleküle dadurch merkbar verändert wird. Dagegen sind die Amplituden der Moleküle durch die kleine Temperaturerhöhung vergrössert worden, während die Bahn übrigens mit der bei der niedrigen Temperatur gleichförmig verbleibt. Die Schwingungsbahnen der Aethermoleküle erfüllen auch die gestellte Bedingung, dass sie von einer Ebene, die durch die Gleichgewichtslage der Moleküle geht, und mit der Berührungsfläche zwischen M

*) Die Wärme, welche ein Körper besitzt, wird ohne Zweifel zum Theil auch von den Schwingungen der eigenen Moleküle des Körpers verursacht. Die Veränderung der Anziehung, welche durch die Vermehrung der lebendigen Kraft der materiellen Moleküle entsteht, braucht man, wenn von einem thermoelektrischen Ringe die Rede ist, doch nicht in Betracht zu ziehen, weil die Wirkung dieser Veränderung für den ganzen Ring gleich Null wird.

und N parallel ist, in zwei gleiche Hälften getheilt werden. Ist dagegen der Temperaturzuschuss gross, so zeigt die Erfahrung, dass nicht nur die Schwingungszeit der Moleküle *abnimmt*, sondern auch, dass die Moleküle des Körpers ihre Lage verändern und sich von einander entfernen. Man kann also nur für kleine Temperaturzuschüsse die obenstehende Schlussfolge zur Berechnung der Anziehungsveränderung anwenden. Es ergiebt sich von selbst, dass p^2 der lebendigen Kraft der Aethermoleküle proportional ist, und dass also, wenn T die absolute Temperatur des Körpers bezeichnet, man $p^2 = fT$ schreiben kann, wo f eine Constante bedeutet. Wenn A_0 die Grösse der Anziehung bei der Temperatur T_0, und A_1 bei der etwas höheren Temperatur T_1 ist, so erhält man also:

$$A_1 - A_0 = Da\,(T_1 - T_0);$$

wo D eine neue Constante bezeichnet.

Wenn die Berührungsfläche bei gewöhnlicher Temperatur eine kleine Erhöhung ihres Wärmegrades erhält, so wachsen also die Anziehungskräfte, welche das elektrische Fluidum zu dem Leiter, der die stärkere Anziehung ausübt, zu führen suchen, und dieser Zuwachs der Anziehung muss dem Temperaturunterschiede, wenn dieser nicht zu gross ist, annäherungsweise proportional sein.

Wir wollen uns nun denken, dass z. B. der Leiter M in zwei Theile M_1 und M_{11} getheilt sei, von welchem M_1 eine höhere Temperatur als M_{11} habe, doch so, dass dieser Temperaturüberschuss so gering ist, dass die materiellen Moleküle im Theile M_1 deshalb ihre gegenseitigen Lagen und Entfernungen nicht merkbar verändern. Die in der vorhergehenden Formel eingehende Constante a ist also in diesem Falle gleich Null, und folglich erhält man für die Berührung zwischen dem wärmeren und dem kälteren Theile von M, dass $A_1 - A_0 = 0$. Hierbei kann allerdings bemerkt werden, dass der Theil M_1 sich von M_{11} darin unterscheidet, dass die eigenen Moleküle des ersteren in stärkeren Schwingungen als die des letzteren begriffen sind; aber dieser Umstand braucht nicht in Betracht genommen zu werden, weil, wie oben schon bemerkt worden, die Wirkung hiervon für einen *ganzen* Ring gleich Null wird. Ist der Temperaturüberschuss, welchen M_1 besitzt, gering, so verhalten sich also M_1 und M_{11} hinsichtlich ihrer Anziehung gegen ein elektrisches Molekül nicht als zwei verschiedene Metalle. Die verschiedene Temperaturvertheilung in einem und demselben Leiter vermag folglich nicht die elektrische Flüssigkeit in Bewegung zu setzen. Sollte dagegen M_1 eine so bedeutend höhere Temperatur als M_{11} haben, dass dessen Moleküle dadurch ihre Gleichgewichtslagen und gegenseitigen Entfernungen merkbar verändern, so kann das Verhältniss sich anders gestalten. Es kann dann geschehen, dass die Anziehung, welche M_1 auf ein in der Nähe der Berührungsfläche gelegenes elektrisches Molekül ausübt, nicht mehr eben so gross ist wie die Anziehung, welche von M_{11} ausgeht, und dass also der Theil M_1 hinsichtlich seiner Anziehung gegen ein elektrisches Molekül gewissermassen sich so verhält, als wäre er von einem andern Stoffe als M_{11}.

In einem aus zwei verschiedenen Metallen M und N bestehenden Ringe, dessen eine Löthstelle eine unbedeutend höhere Temperatur als die andere besitzt, muss also ein elektrischer Strom entstehen, dessen Stärke dem Temperaturunterschiede annäherungsweise proportional ist; welches Resultat bekanntlich mit der Erfahrung übereinstimmt.

Wenn die eine Löthstelle eine bedeutend höhere Temperatur als die andere erhält, so wird die lebendige Kraft der Aethermoleküle, die sich an der Löthstelle befinden, im Verhältniss dazu vergrössert. Dies kann nun dadurch geschehen, dass die Schwingungszeit abnimmt, während die Amplituden entweder sich vergrössern, unverändert beibehalten oder sogar kleiner als vorher werden. Wenn das letztgenannte stattfindet, so wird die Wirkung der Anziehungskraft, welche die elektrischen Moleküle von N nach M zu führen sucht, bei der höheren Temperatur geringer als bei der niedrigen, und in dem thermoelektrischen Ringe entsteht deshalb ein Strom, der in entgegengesetzter Richtung gegen denjenigen Strom läuft, welcher durch einen kleineren Temperaturunterschied zwischen den beiden Löthstellen erzeugt wird. Hierin kann man die Ursache zu der bekannten Veränderung der Stromesrichtung sehen, welche mehrere Metallcombinationen bei grossem Temperaturunterschied zwischen den Löthstellen zeigen.

Nimmt man also an, dass die elektrische Flüssigkeit aus dem Lichtäther besteht, so kann es als bewiesen angesehen werden, dass die contactelektromotorische Kraft sich mit der Temperatur verändern muss; ein Verhältniss, das von Le Roux (Annales de chimie et de ph. (4) T. 10) auf experimentellem Wege schon dargelegt worden ist.

Stockholm. E. Edlund.

R. Clausius: Ueber die Behandlung der zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte nach dem electrodynamischen Grundgesetze. (Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens Bd. XXXIII, 1876.)

In dieser Abhandlung wird das in einer früheren Abhandlung, über welche S. 287 berichtet wurde, abgeleitete electrodynamische Grundgesetz dazu angewandt, die zwischen zwei linearen galvanischen Strömen stattfindenden ponderomotorischen Kräfte und die von einem linearen Strome auf einen linearen Leiter ausgeübte Inductionswirkung zu bestimmen.

Wenn Xee' die x-Componente der Kraft ist, welche ein zur Zeit t im Punkte x, y, z befindliches bewegtes Electricitätstheilchen e von einem anderen um die Strecke r von ihm entfernten, im Punkte x', y', z' befindlichen bewegten Electricitätstheilchen e' erleidet, so gilt nach dem Grundgesetze die Gleichung:

$$(1)\quad X = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right).$$

Dieses Gesetz unterscheidet sich von denjenigen, welche W. Weber und Riemann aufgestellt haben, wesentlich dadurch, dass seine Anwendbarkeit nicht, wie die der letzteren, an die Bedingung gebunden ist, dass ein galvanischer Strom aus zwei gleich starken nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Strömen von positiver und negativer Electricität bestehe. Es ist ursprünglich unter der Voraussetzung abgeleitet, dass nur die positive Electricität ströme, und die negative in Ruhe bleibe, es kann aber auch dann angewandt werden, wenn man für beide Electricitäten Bewegungen, und zwar mit beliebigen Geschwindigkeiten, annimmt. Da nun in der That, wenn man sich auch der von C. Neumann gemachten Voraussetzung anschliesst, dass die negative Electricität fest an die ponderablen Atome gebunden sei, damit nicht für alle Leiter die Bewegung der negativen Electricität ausgeschlossen ist, indem in den electrolytischen Leitern, bei welchen die Electricitätsleitung durch Bewegungen der Atome vermittelt wird, jedenfalls beide Electricitäten als bewegt angenommen werden müssen, so wird in der vorliegenden Abhandlung die allgemeinere Voraussetzung gemacht, dass beide Electricitäten nach entgegengesetzten Richtungen strömen mit Geschwindigkeiten, welche für den Leiter s mit c und c_1 und für den Leiter s' mit c' und c_1' bezeichnet werden. Will man dann für feste Leiter die negative Electricität als ruhend betrachten, so braucht man nur c_1 und c_1' gleich Null zu setzen.

Ferner wird angenommen, dass die beiden Leiter in Bewegung und die Stromintensitäten i und i' in ihnen veränderlich sein können.

Unter diesen allgemeinen Voraussetzungen wird nun zunächst die *ponderomotorische Kraft* abgeleitet, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet. Es stellt sich dabei heraus, dass diese Kraft davon, ob man beide Electricitäten oder nur Eine als strömend annimmt, ferner davon, ob die Stromelemente in Ruhe oder Bewegung sind, und ob die Stromintensitäten in ihnen constant oder veränderlich sind, unabhängig ist. Bezeichnet man die drei Componenten der Kraft mit $\xi ds ds'$, $\eta ds ds'$ und $\zeta ds ds'$, so gelten für ξ, η, ζ folgende schon früher gegebene Gleichungen, worin (ss') den Winkel zwischen den Richtungen der Elemente ds und ds' bedeutet:

(2)
$$\begin{aligned}
\xi &= kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(ss') - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)\\
\eta &= kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(ss') - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\,\frac{\partial y'}{\partial s'}\right)\\
\zeta &= kii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(ss') - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\,\frac{\partial z'}{\partial s'}\right).
\end{aligned}$$

Die durch diese Gleichungen bestimmte Kraft liegt in der durch r und ds' gelegten Ebene und ist auf ds senkrecht, während die von Ampère angenommene Kraft in die Richtung von r fällt. Ferner unterscheidet sie sich von der letzteren dadurch, dass sie für den Fall, wo die Richtungen von ds und ds' mit r zusammenfallen, Null wird, während nach Ampère in diesem Falle eine Abstossung oder Anziehung stattfindet, je nachdem die Ströme gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Bestimmt man dagegen aus den obigen Gleichungen durch Integration die Kraft, welche ein geschlossener Strom s' auf ein Stromelement ds ausübt, so erhält man dasselbe Resultat, wie nach der Ampère'schen Theorie.

Was nun die von einem Strome s' in einem Leiter s *inducirte electromotorische Kraft* anbetrifft, so möge dieselbe mit E bezeichnet werden, so dass die von dem Stromelemente ds' in dem Leiterelemente ds inducirte electromotorische Kraft durch $\frac{\partial^2 E}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'$

dargestellt wird. Ferner mögen, da die Elemente ds und ds' als bewegt vorausgesetzt werden, die von ihnen während des Zeitelementes dt beschriebenen Bahnelemente mit $d\sigma$ und $d\sigma'$ und ihre Geschwindigkeiten mit γ und γ' bezeichnet werden. Der Winkel zwischen ds und $d\sigma'$ soll durch $(s\sigma')$ und der zwischen $d\sigma$ und ds' durch $(\sigma s')$ dargestellt werden. Endlich ist in Bezug auf die in den Gleichungen vorkommenden veränderlichen Grössen, wie z. B. r, zu bemerken, dass sie einerseits von den durch die Bogenlängen s und s' bestimmten Stellen, welche wir in den beiden Leitern betrachten, abhängen, und andererseits für gegebene Stellen der Leiter mit der Zeit veränderlich sind. Hierauf sollen sich die durch $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial s'}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ angedeuteten Differentiationen beziehen. Dann lautet die betreffende Gleichung:

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial s \partial s'} = k \Bigg[& -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i' \cos (ss')}{r}\right) + i' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma \cos (\sigma s')}{r}\right) \\ & - i' \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma' \cos (s\sigma')}{r} + \frac{(c' - c_1') \cos (ss')}{r}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Hieraus kann man durch Integration die inducirte electromotorische Kraft für jedes Stück des inducirenden Stromes und des inducirten Leiters berechnen. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn der inducirende Strom s' geschlossen ist, das Glied, welches den Differentialcoefficienten nach s' enthält, das Integral Null giebt, und ebenso, wenn der inducirte Leiter s geschlossen ist, das Glied, welches den Differentialcoefficienten nach s enthält, das Integral Null giebt. Sind beide geschlossen, so erhält man einfach:

$$(4)\qquad E = -k \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int \frac{i' \cos (ss')}{r}\, ds\, ds',$$

worin zur Andeutung der Differentiation nach t auch das aufrechte d statt des runden ∂ angewandt werden kann.

Nachdem die ponderomotorische und die electromotorische Kraft bestimmt sind, kann man auch die von diesen Kräften während des Zeitelementes dt gethane Arbeit leicht angeben, und zwar erhält man dafür folgende Ausdrücke.

Arbeit der zwischen zwei Stromelementen ds und ds' wirkenden ponderomotorischen Kräfte:

$$kii'\, ds\, ds'\, dt \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos (ss')}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma \cos (\sigma s')}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma' \cos (s\sigma')}{r}\right)\right].$$

Arbeit der von den Elementen ds und ds' in einander inducirten electromotorischen Kräfte:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{(c'-c_1')\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Arbeit aller zwischen den Elementen ds und ds' wirkenden Kräfte:

$$-k\,ds\,ds'\,dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ii'\cos(ss')}{r}\right)+ii'\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma\cos(\sigma s')}{r}+\frac{(c-c_1)\cos(ss')}{r}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\gamma'\cos(s\sigma')}{r}+\frac{(c'-c_1'\cos(ss')}{r}\right)\right]\right\}.$$

Bei der Integration dieser Ausdrücke nach s und s' treten für den Fall, dass die eine oder andere dieser Curven geschlossen ist, die schon vorher erwähnten Vereinfachungen ein, indem dann die Glieder, welche die Form von Differentialcoefficienten nach resp. s. oder s' haben, den Werth Null geben. Sind s und s' beide geschlossen, so bleiben nur die Integrale der Glieder übrig, welche Differentialcoefficienten nach t enthalten. Führt man dann noch das Zeichen w ein mit der Bedeutung:

$$w=k\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds' \tag{5}$$

und bezeichnet die auf die Zeit dt bezügliche Arbeit der ponderomotorischen Kräfte mit dA_p, die der electromotorischen Kräfte mit dA_e und die aller Kräfte einfach mit dA, so lauten die Gleichungen:

$$dA_p=ii'dw \tag{6}$$

$$dA_e=-d(ii'w)-ii'dw \tag{7}$$

$$dA=-d(ii'w). \tag{8}$$

Bekanntlich hat F. Neumann eine Grösse eingeführt, welche dazu bestimmt ist, durch ihr negatives Differential die bei einer unendlich kleinen Lagenänderung der Ströme von den ponderomotorischen Kräften gethane Arbeit darzustellen, und welche er das Potential der Ströme auf einander genannt hat. Der Ausdruck dieses Potentials ist:

$$-kii'\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds'$$

oder unter Anwendung des durch (5) definirten Zeichens w:

$$-ii'w.$$

Wenn man die Ströme in der bekannten Weise durch magnetische Flächenpaare ersetzt, und für die darauf gedachten Magnetismusmengen das Potential von der gewöhnlichen, bei Agentien, welche sich einfach nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehen oder abstossen, gebräuchlichen Art bildet, so erhält man einen Ausdruck, welcher sich durch eine leichte mathematische Transformation in die Gestalt des vorigen Ausdruckes bringen lässt. Die durch diesen Ausdruck dargestellte Grösse möge daher das *magnetische* Potential der Ströme genannt werden, um sie von dem gleich zu besprechenden anderen Potential zu unterscheiden.

Bei der Aufstellung des neuen electrodynamischen Grundgesetzes hat der Verf. eine Grösse gebildet, welche er das *electrodynamische Potential* der Electricitätstheilchen e und e' auf einander genannt und durch folgenden Ausdruck dargestellt hat:

$$k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right).$$

Von dieser Grösse hat er nachgewiesen, dass ihr negatives Differential die Arbeit darstellt, die während der Zeit dt von den Kräften, welche die Theilchen auf einander ausüben, geleistet wird. Da nun bei geschlossenen Strömen dieselben Electricitätsmengen, welche einmal in ihnen sind, auch in ihnen bleiben, so kann man unter Anwendung des vorigen Ausdruckes auch das *electrodynamische Potential geschlossener Ströme auf einander* bilden, und dieses Potential muss ebenfalls jener Bedingung genügen, dass die von allen Kräften, welche die Ströme auf einander ausüben, während der Zeit dt geleistete Arbeit durch das negative Differential des Potentials dargestellt wird. Bezeichnet man dieses electrodynamische Potential mit W, so erhält man die Gleichung:

$$W = kii'\int\int\frac{\cos(ss')}{r}\,ds\,ds', \tag{9}$$

oder unter Berücksichtigung von (5):

$$W = ii'w. \tag{10}$$

Aus der Vergleicung dieses für W geltenden Ausdruckes mit dem vorher für das magnetische Potential angeführten ergiebt sich, dass das electrodynamische Potential dem magnetischen Potential dem absoluten Werthe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist.

Betrachtet man nun endlich die oben gegebenen Ausdrücke der während der Zeit dt gethanen Arbeit, so sieht man, dass die Arbeit *aller* von geschlossenen Strömen auf einander ausgeübten Kräfte in der That durch das negative Differential des electrodynamischen Potentials dargestellt wird. Der für die Arbeit der ponderomotorischen

Kräfte gegebene Ausdruck $ii'dw$ dagegen ist nur dann das negative Differential des magnetischen Potentials, wenn die Stromintensitäten constant sind, oder wenigstens ein constantes Product haben.

Bonn. R. Clausius.

S. Günther: Adolph Zeising als Mathematiker. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 21. Jahrgang.)

Kurze Schilderung der Verdienste, welche der genannte Gelehrte um die Begründung der mathematischen Aesthetik sich erworben. Es werden mit kurzen Worten die wichtigsten Abhandlungen Zeising's angeführt, in welchen er für sein Princip, das Gesetz des goldenen Schnittes regle das ganze weite Gebiet des Schönen, Propaganda zu machen suchte. Manche seiner Aufstellungen werden geradezu verworfen, andere, wie die auf architektonische Verhältnisse und die mathematische Theorie der Blattstellung bezüglichen, vollkommen anerkannt. Zum Schluss folgt dann noch eine gedrängte Analyse derjenigen Arbeiten, welche ein allgemeineres Studium der geometrischen Formenlehre — ohne specielle Rücksicht auf die Theilung nach äusserem und mittlerem Verhältniss — zum Gegenstande haben.

Es möge an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass, wie uns von competenter Seite mitgetheilt wird, dem Zeising'schen Theorem eine allgemeinere rein psychologische Bedeutung innewohne, dass aber der Urheber darin fehlte, nur immer nach Bestätigungen der Norm zu suchen, Ausnahmen aber gänzlich ausser Acht zu lassen. Ferner sei eines dem Grundgedanken nach verwandten Versuches des Franzosen Lagout gedacht, auf welchen uns Professor Favaro in Padua aufmerksam machte; dessen „esthétique nombrée, application de l'équation du beau à l'analyse“ (Paris 1863) vermag sich jedoch trotz manches geistreichen Raisonnements mit der consequent durchgeführten Systematik des deutschen Forschers nicht zu messen.

Ansbach. S. Günther.

L. Königsberger: Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen. (Mathematische Annalen Band XI.)

Die fundamentalen Untersuchungen von Clebsch haben gelehrt, dass, wenn y mit x durch eine algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung

$$(a) \ldots . F(x, y) = 0$$

von der Art verbunden ist, dass x und y sich als rationale Functionen einer Hülfsvariabeln t ausdrücken lassen, die Curve (a) die höchste Anzahl der Doppelpunkte nämlich

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

besitzt, und dass umgekehrt, wenn diese Anzahl der Doppelpunkte erreicht wird, sich x und y als rationale Functionen einer andern Variabeln darstellen lassen, so dass in diesem Falle

$$\int f(x, y)\, dx,$$

worin $f(x, y)$ eine rationale Function von x und y bedeutet, auf das Integral einer rationalen Function von t also auf eine algebraisch-logarithmische Function dieser Variabeln reducirbar ist, sich somit auch algebraisch-logarithmisch durch x und y ausdrücken lässt. Eine andere Frage tritt auf, wenn es sich nicht um die ganze Klasse der zugehörigen Abel'schen Integrale handelt, sondern um specielle Integrale aus den verschiedenen Klassen, and in dem Sinne kann man sich die Aufgabe stellen, aus der Gattung der hyperelliptischen Integrale der verschiedenen Ordnungen diejenigen zu charakterisiren, welche auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sind. Herr Tchebichef hat sich im 18. Bande des Liouville'schen Journals mit der Reduction von Integralen der Form

$$\int \frac{F_0(x)}{f_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen beschäftigt und sich stützend auf die Liouville'schen Untersuchungen gezeigt, wie, wenn die Reduction möglich ist, der algebraische Theil dieses Integrals bestimmt, die Anzahl der einzelnen logarithmischen Ausdrücke ermittelt und die Form der letzteren festgestellt werden kann; in einer folgenden Arbeit desselben Journals hat derselbe unter der Annahme, dass die Bedingungen erfüllt sind, in dem einfachsten Falle der elliptischen Integrale auch die logarithmischen Ausdrücke wirklich zu finden gelehrt. Herr Weierstrass ging in den Monatsberichten der Berliner Akademie — vom Jahre 1857 — näher auf diese letzte Arbeit Tchebichef's ein, und indem er den von demselben eingeschlagenen Weg nicht für den naturgemässen hält, sondern die Frage für elliptische Integrale bereits durch die von Abel in seiner letzten unvollendet gebliebenen Arbeit über die allgemeinsten zwischen elliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen stattfindenden Relationen entwickelten Principien für erledigt betrachtet, zeichnet er einen Weg für die Behandlung dieser Frage für elliptische Integrale vor, der sich, wie er hervorhebt, auch für hyperelliptische Integrale durchführen lässt. Das Charakteristische der Weierstrass'schen Untersuchung besteht darin, dass das vorgelegte elliptische Integral dadurch dass für das elliptische Integral erster Gattung eine Variable u eingeführt wird, in bekannter Weise, von einem in u linearen Posten abgesehen, in eine Summe von $E(u)$, einer Reihe von Functionen der Form $\Pi(u, a_\alpha)$ und einem aus sin am u und $\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du}$ rational zusammengesetzten Theil zerlegt wird, und nun aus der Annahme, dass das Integral auf eine algebraisch-logarithmische Function reducirbar sein soll, durch Vergleichung der Perioden der elliptischen Functionen und der Logarithmen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction ermittelt werden.

Ich nehme die Untersuchung für die Reduction der hyperelliptischen Integrale beliebiger Ordnung auf, ohne das Umkehrungsproblem dieser Gattung Abel'scher Integrale zu benutzen, sondern suche direct mit Benutzung der früher von mir in den Annalen ausgeführten Reductionsformeln der allgemeinen hyperelliptischen Integrale auf die Integrale der drei Gattungen und den algebraischen Theil, sowie mich stützend auf die von mir vor Kurzem im Journal für Mathematik behandelte Zurückführung des allgemeinen Transformationsproblems auf das rationale und die dort aufgestellte allgemeinste Relation zwischen hyperelliptischen Integralen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales beliebiger Ordnung auf algebraisch-logarithmische Functionen herzuleiten.

Der von Herrn Fuchs zuerst ohne jede Beschränkung ausgesprochene Satz, dass die Determinante der zwischen den Verzweigungspunkten genommenen Integrale erster und zweiter Gattung stets einen von Null verschiedenen, von den Verzweigungspunkten völlig unabhängigen Werth besitzt, liess für die auf algebraische Functionen reducirbaren hyperelliptischen Integrale

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

wenn

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})$$

und

$$z_1, z_2, \cdots z_n$$

die Werthe von z bedeuten, für welche $F(z)$ unendlich wird, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen bei Anwendung bekannter Bezeichnungen in der Form finden

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \cdots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n{}^{\alpha} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int\limits_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int\limits_{\infty} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

wenn

$$R(z) = A z^{2p+1} + B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p}$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \cdots + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

und

$$r = 0, 1, 2, \cdots p-1, p, \cdots 2p-1$$

gesetzt wird; der algebraische Werth des Integrales nimmt dann die Form an

$$\left\{\sum_1^n{}^{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int\limits_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int\limits_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\} \sqrt{R(z)}.$$

Um in ähnlicher Weise die Bedingungen für die Reduction eines hyperelliptischen Integrales auf algebraisch-logarithmische Functionen zu finden, wird wiederum das Integral in die Summe von p Integralen erster, p Integralen zweiter, n Integralen dritter Gattung und einem algebraischen Theile zerlegt und gezeigt, dass, wenn sich diese Summe in einen algebraisch-logarithmischen Theil umwandeln soll, nach Elimination der nicht von einander unabhängigen Coefficienten der Integrale dritter Gattung je ein Complex von diesen mit ganzzahligen Coefficienten versehenen Integralen einem Logarithmus einer aus z und $\sqrt{R(z)}$ rational zusammengesetzten Function gleich sein muss, und dass somit vermöge des Satzes von der Vertauschung der Unstetigkeitspunkte und Grenzen der Integrale dritter Gattung die zu je einem Complex gehörigen Unstetigkeitspunkte Lösungen einer Gleichung von der Form

$$p^2 - q^2 R(z) = 0$$

sein müssen, worin p und q rationale Functionen von z bedeuten; hat man nun geprüft, ob die Grössen je eines Complexes Lösungen einer so gestalteten Gleichung sind — und die Methoden, wie dies geschehen muss, werden angegeben —, dann hat man zu untersuchen, ob einerseits die bei der Reduction sich ergebenden Coefficienten der Integrale zweiter Gattung verschwinden, andererseits ob die dabei resultirenden Coefficienten der Integrale erster Gattung absolut gleich sind, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, den Coefficienten derjenigen Integrale erster Gattung, welche der Satz von der Vertauschung der Unstetigkeitspunkte und der Grenzen der Integrale dritter Gattung noch einführte, indem diese Vertauschung ohne Werthveränderung nur für solche hyperelliptische Hauptintegrale dritter Gattung gültig ist, deren Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem verschwinden; für die Form der letzteren Coefficienten werden verschiedene Formen gefunden. Sind alle diese Bedingungen befriedigt, so sind nicht bloss die logarithmischen Functionen, sondern auch die algebraischen Theile unmittelbar hinzuschreiben, so dass die Erfüllung der auch als hinreichend erkannten Bedingungen zugleich das Transformationsresultat liefert. Das gesammte Ergebniss lässt sich folgendermassen aussprechen:

Man bilde die Gleichung

$$T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} + \cdots + T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2 \ldots T_n$ zu befriedigen; mögen sich nur $n-k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{array}{llll} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-k\,1} & T_{n-k\,2} & \cdots & T_{n-k\,n}\,, \end{array}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n-k$ Gleichungen die Relationen ergeben

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}} = \lambda_{11}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{1k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = \lambda_{n-k\,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{n-k\,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D \quad \lambda_{1i} \quad \lambda_{2i} \cdots \lambda_{n-ki},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)}, \quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)}, \cdots \frac{\lambda_{n-ki}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt. Lassen sich nun Gleichungen von der Form finden

$$P^{(1)^2} - Q^{(1)^2} R(z) = 0, \quad P^{(2)^2} - Q^{(2)^2} R(z) = 0, \cdots P^{(k)^2} - Q^{(k)^2} R(z) = 0$$

welche aus den resp. Werthen

$$\begin{array}{llll} z_1, & z_{k+1}, & \cdots & z_n \\ z_2, & z_{k+1}, & \cdots & z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_k, & z_{k+1}, & \cdots & z_n \end{array}$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$\begin{array}{llll} t_0^{(1)}, & t_1^{(1)}, & \cdots & t_{n-k}^{(1)} \\ t_0^{(2)}, & t_1^{(2)}, & \cdots & t_{n-k}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_0^{(k)}, & t_1^{(k)}, & \cdots & t_{n-k}^{(k)} \end{array}$$

nur noch Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$\frac{1}{t_0^{(1)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{1}{t_0^{(2)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{t_0^{(k)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}} \log \left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducirbaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen. Setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz}$$

$$= \sum_1^k {}_i \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_i)^{-1}} \frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\frac{dP^{(i)}}{dz} - P^{(i)}\frac{dQ^{(i)}}{dz}\right] - P^{(i)} Q^{(i)} \frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)^2} - Q^{(i)^2} R(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(z)}} \right\}$$

$$= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

so müssen ferner die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int\limits_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int\limits_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}=0$$

für die Werthe $r = 0, 1, 2, \cdot\cdot\, p-1$, und

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int\limits_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int\limits_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}=0$$

für die Werthe $r = p,\ p+1, \cdots 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_{1}^{n}{}_{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int\limits_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int\limits_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Dresden. L. Königsberger.

L. Königsberger: Referate aus den hinterlassenen Papieren von F. Richelot. Trigonometrische Form der hyperelliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung.

(Der Inhalt der folgenden Mittheilung ist in den Michaelisferien 1874 niedergeschrieben.)

Richelot führt zuerst für die Lösungen $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ des Polynoms $2n^{\text{ten}}$ Grades

$$R(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2n})$$

eine Reihe von Moduln, analog dem Modul des elliptischen Integrals, durch folgende Betrachtungen ein. Transformirt man das hyperelliptische Integral durch den linearen Ausdruck

$$\zeta_1 = \frac{z_1-a_2}{z_1-a_{2n}}\quad\frac{a_1-a_{2n}}{a_1-a_2}$$

oder durch

$$\zeta_2 = \frac{z_2-a_4}{z_2-a_{2n}}\quad\frac{a_3-a_{2n}}{a_3-a_4}$$

u. s. w. oder endlich durch

$$\zeta_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \quad \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}},$$

wodurch den Werthen

$$z_1 = a_2 \quad z_2 = a_4 \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n-2}$$
$$z_1 = a_1 \quad z_2 = a_3 \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n-1}$$
$$z_1 = a_{2n} \quad z_2 = a_{2n} \cdots\cdots z_{n-1} = a_{2n}$$

für die Grössen ζ sämmtlich resp. die Werthe Null, die Einheit und ∞ zugeordnet werden, so erkennt man leicht, dass für die *erste* Transformation sich

$$z_1 = a_3 \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_2} \quad \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{13}^2$$

$$z_1 = a_4 \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_4 - a_{2n}}{a_4 - a_2} \quad \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{14}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_1 = a_{2n-1} \qquad \frac{1}{\zeta_1} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_2} \quad \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = k_{1\,2n-1}^2$$

entsprechen, für die *zweite* Transformation

$$z_2 = a_5 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_5 - a_{2n}}{a_5 - a_4} \quad \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{35}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_2 = a_{2n-1} \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_4} \quad \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{3\,2n-1}^2$$

$$z_2 = a_1 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_4} \quad \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{31}^2$$

$$z_2 = a_2 \qquad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_4} \quad \frac{a_3 - a_4}{a_3 - a_{2n}} = k_{32}^2,$$

u. s. w. endlich für die letzte

$$z_{n-1} = a_1 \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_{2n-2}} \quad \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,1}^2$$

$$z_{n-1} = a_2 \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-2}} \quad \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,2}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{n-1} = a_{2n-3} \qquad \frac{1}{\zeta_{n-1}} = \frac{a_{2n-3} - a_{2n}}{a_{2n-3} - a_{2n-2}} \quad \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-1} - a_{2n}} = k_{2n-3\,2n-3}^2;$$

diese $(n-1)(2n-3)$ Werthe k^2 werden Moduln genannt und vor

Allem die Beziehungen, die zwischen ihnen stattfinden, aufgesucht. Mit Hülfe der Substitution

$$a'_h = \frac{1}{a_h - a_{2n}}$$

erhält man leicht die Ausdrücke

$$k^2_{1h} = \frac{a'_2 - a'_1}{a'_2 - a'_h}, \quad k^2_{3h} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_h}, \quad \ldots\ldots \; k^2_{2n-3h} = \frac{a'_{2n-2} - a'_{2n-3}}{a'_{2n-2} - a'_h}$$

und somit, wenn h und i weder 1 noch 2 sind,

$$a'_h - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k^2_{1h}}, \quad a'_i - a'_2 = \frac{a'_1 - a'_2}{k^2_{1i}}$$

also

$$a'_i - a'_h = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{1i}} = \frac{1}{k^2_{1h}}\right);$$

daraus ergiebt sich aber sofort für alle von 1 und 2 verschiedenen h

$$k^2_{3h} = \frac{k^2_{14} - k^2_{13}}{k^2_{14} - k^2_{1h}} \quad \frac{k^2_{1h}}{k^2_{13}},$$

$$k^2_{5h} = \frac{k^2_{16} - k^2_{15}}{k^2_{16} - k^2_{1h}} \; \frac{k^2_{1h}}{k^2_{15}}, \quad \ldots\ldots \; k^2_{2n-3h} = \frac{k^2_{12n-2} - k^2_{12n-3}}{k^2_{12n-2} - k^2_{1h}} \quad \frac{k^2_{1h}}{k^2_{12n-2}}.$$

Um den Fall $h = 1$ und $= 2$ zu erledigen, beachte man, dass

$$k^2_{32} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_2}, \quad k^2_{31} = \frac{a'_4 - a'_3}{a'_4 - a'_1}$$

ist und dass, wenn oben $h = 4$, $i = 3$ gesetzt wird,

$$a'_3 - a'_4 = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{13}} - \frac{1}{k^2_{14}}\right) \text{ und } a'_4 - a'_1 = (a'_1 - a'_2)\left(\frac{1}{k^2_{14}} - 1\right)$$

wird, so dass

$$k^2_{32} = \frac{k^2_{13} - k^2_{14}}{k^2_{13}}, \qquad k^2_{31} = \frac{k^2_{13} - k^2_{14}}{k^2_{13}\left(1 - k^2_{14}\right)}$$

und ähnlich

$$k^2_{52} = \frac{k^2_{15} - k^2_{16}}{k^2_{15}}, \qquad k^2_{51} = \frac{k^2_{15} - k^2_{16}}{k^2_{15}\left(1 - k^2_{16}\right)}$$

u. s. w., endlich

$$k^2_{2n-32} = \frac{k^2_{12n-3} - k^2_{12n-2}}{k^2_{12n-3}}, \quad k^2_{2n-31} = \frac{k^2_{12n-3} - k^2_{12n-2}}{k^2_{12n-3}\left(1 - k^2_{12n-2}\right)}$$

folgen. Somit sind *sämmtliche* Moduln durch die Modulreihe

$$k_{13}^{\,2}, k_{14}^{\,2}, \ldots . k_{12n-1}^{2}$$

ausgedrückt, also durch $2n-3$ Moduln, die offenbar von einander unabhängig sind, da sie ausser a_1' und a_2' jeder eine andere Grösse $a_3', a_4', .. a_{2n-1}'$ enthalten und diese von einander unabhängige Grössen vorstellen.

Richelot stellt sich nun die Aufgabe, die hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung mit Hülfe der oben eingeführten Moduln in trigonometrische Form umzusetzen und zwar definirt derselbe als Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach Herrn Weierstrass (Theorie der Abel'schen Functionen, Journal für Mathematik) die Integrale

$$\int \frac{dz}{z-a_{2h}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a_{2h-1}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \int \frac{dz}{z-a} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

worin

$$P(z) = -a_{2n}(z-a_2)(z-a_4)\ldots.(z-a_{2n-2})$$
$$Q(z) = (z-a_1)(z-a_3)\ldots.(z-a_{2n-1})(z-a_{2n})$$

und a eine willkürliche Zahl ist. Ich will bemerken, um eine Vergleichung mit den von Riemann definirten Integralen der drei Gattungen zu gestatten, dass die von Richelot aufgenommenen Integrale *erster* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_2} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_4} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots . \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-2}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für *alle* Punkte der zu $\sqrt{R(z)}$ gehörigen Riemann'schen Fläche endlich sind, die Integrale *zweiter* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_1} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_3} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots . \int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a_{2n-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nur in den resp. Verzweigungspunkten $a_1, a_3, \ldots . a_{2n-1}$ algebraisch unendlich und zwar von der $-\frac{1}{2}$ten Ordnung werden, während endlich die Integrale *dritter* Gattung

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p-a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nur im Punkte $z = a$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werden.

Setzt man nach Richelot

$$\zeta_1 = \sin^2\varphi_1 = \frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \quad \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2}$$

$$\zeta_2 = \sin^2\varphi_2 = \frac{z_2 - a_4}{z_2 - a_{2n}} \quad \frac{a_3 - a_{2n}}{a_3 - a_4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\zeta_{n-1} = \sin^2\varphi_{n-1} = \frac{z_{n-1} - a_{2n-2}}{z_{n-1} - a_{2n}} \quad \frac{a_{2n-1} - a_{2n}}{a_{2n-1} - a_{2n-2}}$$

und führt zuerst die erste Transformation durch, welche mit Weglassung des Index 1 bei z und φ die Form hat

$$\frac{z - a_2}{z - a_{2n}} \quad \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \sin^2\varphi,$$

so folgt durch logarithmisches Differentiiren

$$\frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = (a_2 - a_{2n}) \frac{dz}{(z - a_2)(z - a_{2n})}$$

oder

$$2\,d\varphi = \sqrt{-(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})}\, \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{z - a_2}{z - a_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z - a_{2n}}$$

wofür, weil

$$\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(z - a_2)(z - a_4)\cdots(z - a_{2n-2})}{(z - a_1)(z - a_3)\cdots(z - a_{2n-1})} \cdot \frac{-a_{2n}}{z - a_{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, auch

$$\left(\frac{a_{2n}}{(a_1 - a_{2n})(a_2 - a_{2n})}\right)^{\frac{1}{2}} 2\,d\varphi \left(\frac{(z - a_4)\cdots(z - a_{2n})}{(z - a_3)\cdots(z - a_{2n-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dz}{z - a_2} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt werden kann.

Beachtet man nun aber, dass, weil

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = C_h \cdot \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}$$

sein muss und sich hieraus wegen der entsprechenden Werthe $z = a_2$, $\varphi = 0$

$$C_h = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}}$$

ergiebt,

$$\frac{z - a_{2h}}{z - a_{2h-1}} = \frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}} \quad \frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}$$

folgt, so wird jeder Factor des obigen Ausdruckes für $h = 2, 4, \cdots 2n-1$ trigonometrisch umgeformt sein, nur für $h = n$ wird, wie leicht zu sehen,

$$\frac{z - a_{2n}}{z - a_{2n-1}} = \frac{a_2 - a_{2n}}{a_2 - a_{2n-1}} \; \frac{1}{1 - k_{12n-1}^2 \sin^2 \varphi}$$

sein, und man wird somit auch den vorher gefundenen Ausdruck gelten lassen können, wenn man nur $k_{12n} = 0$ setzt; man erhält somit

$$\frac{(z-a_4)(z-a_6)\cdots(z-a_{2n})}{(z-a_3)(z-a_5)\cdots(z-a_{2n-1})} = \prod_2^n {}^h \left(\frac{a_2 - a_{2h}}{a_2 - a_{2h-1}}\right) \prod_2^n {}^h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi}\right),$$

so dass sich, wenn

$$2\,\frac{a_{2n}}{a_1 - a_{2n}} \left(\frac{(a_2 - a_4)(a_2 - a_6)\cdots(a_2 - a_{2n-2})}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_5)\cdots(a_2 - a_{2n-1})}\right)^{\frac{1}{2}} = M_{12}$$

gesetzt wird, mit Wiedereinführung der Grössen z_1 und φ_1 der gesuchte Ausdruck

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_2} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}} = M_{12} \int_0^{\varphi_1} d\varphi_1 \prod_2^n {}^h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi_1}{1 - k_{12h-1}^2 \sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergiebt. Zur Umformung des Integrales

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-2}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

braucht man nur vor der Integration die obige Gleichung mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2r-2}} = C_{2r-2} \frac{\sin^2\varphi_1}{1 - k_{12r-2}^2 \sin^2\varphi_1}$$

zu multipliciren, in welcher offenbar

$$C_{2r-2} = - k_{12r-2}^2 \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-2}}$$

sein muss, und erhält somit

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-2}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-2}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k_{12r-2}^2 \sin^2\varphi_1 \, d\varphi_1}{1 - k_{12r-2}^2 \sin^2\varphi_1} \prod_2^n {}^h \left(\frac{1 - k_{12h}^2 \sin^2\varphi_1}{1 - k_{12h-2}^2 \sin^2\varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In dem Falle, dass $R(z)$ nur $2n-1$ lineare Factoren hat, ändert sich nichts als dass man überall $a_{2n} = \infty$ zu setzen und den Grenzwerth zu nehmen hat, wobei die Factoren

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r}}$$

der Einheit gleich werden.

Um nun die übrigen Integrale erster Gattung in $z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$ ebenso umzuformen, hat man nur nöthig die Indices

$$1, 3, 5, \ldots . 2n-3, 2n-1$$

und die Indices

$$2, 4, 6, \ldots . 2n-4, 2n-2$$

cyclisch zu vertauschen, und erhält allgemein

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n} - a_{2p}}{a_{2n} - a_{2r}} M_{2p-1\,2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1\,2r} \sin^2 \varphi_p \, d\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2r} \sin^2 \varphi_p} \prod_{1}^{n}{}_{h\,(p)} \left(\frac{1 - k^2_{2p-1\,2h} \sin^2 \varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2h-1} \sin^2 \varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}};$$

so sind $(n-1)^2$ Integrale erster Gattung in die canonische Form umgesetzt.

Die hyperelliptischen Integrale zweiter Gattung werden ebenso einfache Formen annehmen; man braucht nur vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2r-1}} = -\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-1}} \quad \frac{k^2_{1\,2r-1} \sin^2 \varphi_1}{1 - k^2_{1\,2r-1} \sin^2 \varphi_1}$$

zu multipliciren und erhält

$$\int_{a_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a_{2r-1}} M_{12} \int_0^{\varphi_1} \frac{k^2_{1\,2r-1} \sin^2 \varphi_1 \, d\varphi_1}{1 - k^2_{1\,2r-1} \sin^2 \varphi_1} \prod_{2}^{n}{}_{h} \left(\frac{1 - k^2_{1\,2h} \sin^2 \varphi_1}{1 - k^2_{1\,2h-1} \sin^2 \varphi_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder wieder durch cyclische Vertauschung der Indices

$$\int\limits_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a_{2r-1}} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{a_{2n} - a_{2p}}{a_{2n} - a_{2r-1}} M_{2p-1\,2p} \int\limits_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1\,2r-1} \sin^2 \varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2r-1} \sin^2 \varphi_p} \prod_1^n{}_h{}_{(p)} \left(\frac{1 - k^2_{2p-1\,2h} \sin^2 \varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2h-1} \sin^2 \varphi_p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um endlich das hyperelliptische Integral dritter Gattung umzuformen, wird man vor der Integration der ersten Reihe mit

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a}$$

zu multipliciren haben; es mögen

$$z_1 = a \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \frac{1}{k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12}}$$

vermöge der Substitution

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a_{2n}} \cdot \frac{a_1 - a_{2n}}{a_1 - a_2} = \zeta_1$$

entsprechende Werthe sein, so dass

$$\sin^2 \alpha_{12} = \frac{1}{k^2_{12}} \frac{a - a_{2n}}{a - a_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}$$

wird, dann ergiebt sich

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = C \frac{\sin^2 \varphi_1}{1 - k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1}$$

und daraus

$$\frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} = - \frac{C}{k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12}},$$

so dass

$$\frac{z_1 - a_2}{z_1 - a} = - \sin^2 \alpha_{12} \frac{a_{2n} - a_2}{a_{2n} - a} \frac{k^2_{12} \sin^2 \varphi_1}{1 - k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1}$$

folgt. Bedenkt man ferner dass

$$\frac{a - a_2}{a - a_{2n}} = \frac{1}{k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}} = 1 - \frac{a_2 - a_{2n}}{a - a_{2n}}$$

ist, so folgt mit Benutzung aller dieser Werthe

$$\int\limits_{\alpha_2}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1 - a} \left(\frac{P(z_1)}{Q(z_1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12}} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_{2n}}} M_{12} \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1 \, d\varphi_1}{1 - k^2_{12} \sin^2 \alpha_{12} \sin^2 \varphi_1} \prod_2^n{}_h \left(\frac{1 - k^2_{12h} \sin^2 \varphi_1}{1 - k^2_{12h-1} \sin^2 \varphi_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

und wieder allgemein

$$\int_{a_{2p}}^{z_p} \frac{dz_p}{z_p - a} \left(\frac{P(z_p)}{Q(z_p)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{1 - \frac{1}{k^2_{2p-1\,2p}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}} \cdot \frac{a_{2p-1} - a_{2p}}{a_{2p-1} - a_{2n}}} M_{2p-1\,2p} \int_0^{\varphi_p} \frac{k^2_{2p-1}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}\sin^2\varphi_p\, d\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2p}\sin^2\alpha_{2p-1\,2p}\sin^2\varphi_p}$$

$$\times \prod_1^{n}{}^{h}{}_{(p)} \left(\frac{1 - k^2_{2p-1\,2h}\sin^2\varphi_p}{1 - k^2_{2p-1\,2h-1}\sin^2\varphi_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alle diese Transformationsformeln gelten auch für den Fall, dass $R(z)$ vom $2n - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, wenn man nur $a_{2n} = \infty$ setzt und zu den Grenzwerthen übergeht.

Dresden. L. Königsberger.

Berichtigung:

p. 132 vorletzte Zeile: statt Maudel'schen lies Mandel'schen.

H. Schubert: Allgemeingültige Formeln und Vorstellungen der abzählenden Geometrie. (Erste Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie“.) (Math. Ann. Bd. 10, S. 1—112.)

Die vorliegende Abhandlung ist die erste von drei Abhandlungen, welche aus der von der Königlichen Akademie zu Kopenhagen Januar 1875 gekrönten Preisschrift allmählich herausgewachsen sind. Das Thema dieser Preisschrift verlangte die Ausdehnung der *Charakteristikentheorie* auf die Systeme desjenigen geometrischen Gebildes, welches aus den Punkten und den Schmiegungsebenen einer *cubischen* Raumcurve besteht, und die Bestimmung der Charakteristiken der als elementar zu betrachtenden Systeme. Bei der Auffindung der Methoden, durch welche man die in diesem Thema steckenden Fragen zu lösen vermag, erkannte der Verfasser, dass allen geometrischen Anzahl-Bestimmungen gewisse *allgemeine Formeln* zu Grunde liegen, von denen man bisher nur wenige, z. B. das Chasles'sche Correspondenzprincip, aufgestellt hatte. Von diesen fundamentalen Formeln wird ein Theil im IIten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung aus dem *Princip von der Erhaltung der Anzahl*, der andere Theil im IIIten Abschnitt aus dem *Chasles'schen Correspondenzprincip* abgeleitet, nachdem im Iten Abschnitt eine einheitliche Terminologie für die geometrischen Grundgebilde und Grundbedingungen, sowie eine gewisse *Symbolik* für gegebene Bedingungen entwickelt ist.

Der Abhandlung geht eine allgemeine Einleitung voran, in welcher der Verfasser die Entwickelung der Abzählungsmethoden seit der unter dem Namen „Charakteristikentheorie“ bekannten Schöpfung Chasles' (Comptes rendus Februar 1864) darstellt, und zugleich angiebt, welche Stellung die Resultate der drei Abhandlungen, theils durch Form, theils durch Inhalt, gegenüber den bekannten Resultaten der abzählenden Geometrie einnehmen.

Die im ersten Abschnitt begründete Symbolik macht ein *Rechnen* mit Bedingungszeichen möglich, welches sich als sehr fruchtbringend erweist. Wir benutzen diese Symbolik auch in dem vorliegenden Referate, weil ohne dieselbe die Mittheilung auch nur der wichtigsten

Resultate der Abhandlung zu lang würde. Wir lassen die Regeln, auf denen die Symbolik fusst, hier folgen, mit dem Bemerken, dass die ersten Keime derselben sich bei Halphen finden im Bull. de la Soc. math. Tome I, Heft 5.

1) Sagt eine Bedingung nichts anderes aus, als dass mehrere von einander unabhängige Bedingungen zugleich erfüllt werden sollen, so heisst sie *zusammengesetzt*, im entgegengesetzten Falle *einzeln*. *Einzeln* heisst also namentlich auch die Gesammtheit zweier *von einander abhängiger* Bedingungen. Z. B. Für eine Plancurve ist die Bedingung P, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, einzeln, ebenso die Bedingung μ, dass sie ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke, und die Bedingung ν, dass sie eine gegebene Gerade schneide. Einzeln ist auch die Bedingung, eine gegebene Fläche an zwei Stellen zu berühren. Zusammengesetzt ist die Bedingung, dass die Plancurve durch einen gegebenen Punkt gehe, und zugleich eine gegebene Gerade schneide.

2) Jede definirte einzelne Bedingung erhält als *Symbol* einen Buchstaben mit oder ohne unteren Index. Z. B. die eben definirten Bedingungen haben die Symbole P, μ, ν.

3) Das *Product* mehrerer Bedingungssymbole bedeutet diejenige zusammengesetzte Bedingung, welche verlangt, dass die von diesen Symbolen dargestellten Bedingungen *zugleich* erfüllt werden sollen. Z. B. $P\nu$ bedeutet für die erwähnte Plancurve, dass sie durch einen gegebenen Punkt gehen, und eine gegebene Gerade schneiden soll.

4) Die $n$te *Potenz* eines Bedingungssymbols bedeutet demgemäss, dass die von diesem Symbol bezeichnete Bedingung $n$mal erfüllt werden soll, wobei übrigens die gegenseitige Lage der n Gebilde, welche diese $n$mal zu erfüllende Bedingung etwa verursachen sollten, ganz willkürlich ist. Z. B. μ^3 bedeutet für die Plancurve, dass ihre Ebene durch drei beliebig gegebene Punkte gehe.

5) Giebt die Definition eines Gebildes demselben die *Constantenzahl* c — z. B. $c = \frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2\varkappa$ bei einer Plancurve $n$ter Ordnung mit δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen in fester Ebene —, so bildet die Gesammtheit aller derjenigen Gebilde dieser Definition, welche eine gewisse a*fache* einzelne oder zusammengesetzte Bedingung erfüllen, ein $(c-a)$*stufiges System*, das heisst eine Gesammtheit von ∞^{c-a} Elementen. Z. B. alle Kegelschnitte, welche die dreifache zusammengesetzte Bedingung $P\nu$ erfüllen, bilden ein System $(8-3)$ter Stufe.

6) Jeder $a$fachen Bedingung ist hinsichtlich eines hinzuzudenkenden Systems $a$ter Stufe eine gewisse *Anzahl zugehörig*, nämlich die Zahl derjenigen Gebilde des Systemes, welche diese Bedingung erfüllen. *Das Symbol einer Bedingung soll zugleich auch immer die so zugehörige Anzahl bedeuten.* Z. B. $P\nu$ bedeutet zugleich die *Anzahl* derjenigen Kegelschnitte eines dreistufigen Systems, welche die dreifache Bedingung $P\nu$ erfüllen.

7) Wenn hinsichtlich *jedes* $a$stufigen Systems eine Gleichung zwischen den Anzahlen besteht, welche gewissen Bedingungen zugehören, so nennen wir, der Kürze wegen, diese *Bedingungen selbst* durch die Gleichung von einander abhängig, und die Function, welche eine der Bedingungen von den andern abhängig darstellt, *Modul* dieser Bedingung. Z. B. für jede Plancurve $a$ter Ordnung sind die Bedingungen $P, \mu\nu, \mu^2$ (vergl. 1)) von einander abhängig durch die unten folgende Relation:

$$P = \mu\nu - a \,.\, \mu^2.$$

8) Aus einer für ein Gebilde mit der Constantenzahl c aufgegestellten Gleichung $a$ter Dimension zwischen $a$fachen Bedingungssymbolen erhält man also immer eine Identität, wenn jedes dieser Symbole gleich der *Zahl* der Gebilde gesetzt wird, welche die von diesem Symbole dargestellte $a$fache Bedingung, und ausserdem eine beliebig gewählte einzelne oder zusammengesetzte $(c-a)$fache Bedingung erfüllen. Z. B. für die cubische Plancurve mit Doppelpunkt erhält man aus der in 7) angegebenen Gleichung eine Identität, wenn man jede der 3 zweifachen Bedingungen $P, \mu\nu, \mu^2$ gleich der Zahl der Plancurven setzt, welche P, resp. $\mu\nu$, resp. μ^2 und ausserdem die Bedingung ν^9 erfüllen, d. h. 9 gegebene Gerade schneiden. Man hat nach des Verfassers Tabellen $P\nu^9 = 1392$, $\mu\nu^{10} = 2040$, $\mu^2\nu^9 = 216$. In der That ist:

$$1392 = 2040 - 3 \,.\, 216.$$

9) Hieraus folgt, dass bei einem Gebilde mit der Constantenzahl c die Richtigkeit einer Gleichung zwischen $a$fachen Bedingungssymbolen nicht beeinträchtigt wird, wenn jedem Symbole *ein und dasselbe*, sonst ganz willkürliche, etwa $b$fache Bedingungssymbol hinzugesetzt wird, oder, wie wir sagen, wenn die Gleichung mit der zugehörigen $b$fachen Bedingung *multiplicirt* wird. Daraus erwächst nämlich eine Gleichung $(a + b)$ter Dimension, aus welcher man immer eine Identität erhält, wenn jedes der $(a + b)$fachen Symbole gleich der Zahl der Gebilde gesetzt wird, welche die von

diesem Symbole dargestellte $(a+b)$fache Bedingung, und ausserdem eine beliebig gewählte, einzelne oder zusammengesetzte $(c-a-b)$fache Bedingung erfüllen. Z. B. Aus der oben erwähnten Gleichung

$$P = \mu\nu - a\,.\,\mu^2$$

folgt unter anderen:

$$\mu\nu P = \mu^2\nu^2 - a\,.\,\mu^3\nu,$$
$$\mu^2 P = \mu^3\nu - a\,.\,\mu^4 = \mu^3\nu.$$

μ^4 war gleich Null zu setzen, weil durch 4 beliebige Punkte keine Ebene gelegt werden kann. Man erhält also auch durch Potenzirung mit 2 eine richtige Gleichung, nämlich:

$$P^2 = \mu^2\nu^2 - 2a\,.\,\mu^3\nu.$$

10) Bezeichnet ε die endliche Anzahl derjenigen Gebilde eines einstufigen Systems von Gebilden Γ, welche die Definition von Γ vollkommen erfüllen, dabei aber in einer angegebenen Weise *specieller* sind *(Ausartungen)*, so soll εz die Zahl derjenigen Gebilde Γ bezeichnen, welche auf dieselbe Weise specieller sind und zugleich die Bedingung z erfüllen. Derartige Ausartungssymbole εz können auch in die eben besprochenen Gleichungen $a$ter Dimension, d. h. Gleichungen zwischen $a$fachen Bedingungen eintreten, nur dass z dann eine $(a-1)$fache Bedingung sein muss.

11) Soll eine Gleichung $a$ter Dimension nicht für alle, sondern *nur für gewisse* $a$stufige Systeme gelten, so muss dies besonders hervorgehoben werden. In diesem Falle erleiden die obigen Regeln über die symbolische Multiplication einige leicht erkennbare *Modificationen.*

Jedes beliebig definirte Gebilde von der Constantenzahl c kann als Raumelement aufgefasst werden. In Bezug auf dasselbe ist der Raum dann von c Dimensionen. Den modernen Anschauungen der Geometrie gemäss, werden Punkt, Ebene, Strahl mit den bezüglichen Constantenzahlen 3, 3, 4 als die drei *Hauptelemente* des Raumes betrachtet, und zwar alle drei mit völlig gleichem Anrecht auf Ursprünglichkeit. Jedes System von Hauptelementen heisst *Ort.* Es giebt also Punktörter und Ebenenörter nullter bis dritter Stufe, Strahlenörter nullter bis vierter Stufe. Die Oerter werden durch die endliche Anzahl — *Grad* — ihrer gemeinsamen Elemente mit gewissen speciellen Oertern, den sogenannten *Grundgebilden* charakterisirt. Für die Grundgebilde wird die aus der folgenden Tabelle ersichtliche Terminologie eingeführt.

Grundgebilde.

	des Punktes.	der Ebene.	des Strahls.
nullter Stufe	Punkt	Ebene	Strahl
erster Stufe	Punktaxe	Ebenenaxe	Strahlbüschel
zweiter Stufe	Punktfeld	Ebenenbündel	{Strahlenfeld Strahlenbündel}
dritter Stufe	Punktraum	Ebenenraum	Strahlenaxe
vierter Stufe			Strahlenraum

Jedes dieser 14 Grundgebilde erzeugt eine einem Orte auferlegbare *Grundbedingung*, nämlich diejenige, welche verlangt, dass der Ort mit diesem als gegeben betrachteten Grundgebilde *ein Element gemeinsam* haben soll. Die Namen der so erzeugten Grundbedingungen sind den Namen der 14 Grundgebilde nachgebildet, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

Grundbedingungen.

A. Für Punktörter.

p_0 Raumbedingung,
p_1 Feldbedingung c,
p_2 Axenbedingung c_g, ν,
p_3 Punktbedingung C, P, Π.

B. Für Ebenenörter.

e_0 Raumbedingung,
e_1 Bündelbedingung μ,
e_2 Axenbedingung μ_g, ν',
e_3 Ebenenbedingung M', P', Π'.

C. Für Strahlenörter.

s_0 Raumbedingung,
s_1 Axenbedingung g,
$\begin{cases} s_2 \text{ Feldbedingung } g_e,\ \varrho, \\ s_{II} \text{ Bündelbedingung } g_p,\ \varrho', \end{cases}$
s_3 Büschelbedingung g_s, t, β,
s_4 Strahlbedingung G, T, B, S.

Der Index i des jeder Grundbedingung vorgesetzten Symbols giebt an, dass ihre Dimension für einen Ort $a$ter Stufe $i—a$ ist.

Die nachgesetzten Symbole sind die für die folgenden Formeln vorzugsweise verwendeten, und zwar bezeichnet immer das $n$te Symbol die einem Orte $(n-1)$ter Stufe zugeschriebene Grundbedingung. Z. B. P bedeutet, dass ein Punktort erster Stufe, also eine Curve, durch einen gegebenen Punkt gehen soll; g_s bedeutet, dass ein Strahlenort nullter Stufe, d. h. eine Gruppe von endlich vielen Strahlen, aus einem gegebenen Strahlbüschel einen Strahl enthalten soll.

Ein Ort $a$ter Stufe, dessen Element die Constantenzahl c hat, hat mit jedem von demselben Elemente erzeugten Grundgebilde $b$ter Stufe ein System von ∞^{a+b-c} Elementen gemein, also eine endliche Anzahl, wenn $b = c - a$ ist. Diese endliche Anzahl heisst *Grad* des Ortes. Z. B. Bei einer Fläche $n$ter Ordnung $r$ten Ranges $m$ter Klasse ist der Punktort zweiter Stufe und $n$ten Grades, der Ort der Tangenten dritter Stufe und $r$ten Grades, der Ort der Tangentialebenen zweiter Stufe und $m$ten Grades. Eine Gruppe von a Punkten ist ein Punktort nullter Stufe $a$ten Grades. Ein Strahlenort zweiter Stufe *(Congruenz)* hat zwei Gradzahlen, den *Bündelgrad* und den *Feldgrad.* Ein Ort $a$ter Stufe, dessen Element die Constantenzahl c besitzt, hat mit einem von demselben Elemente erzeugten Grundgebilde $b$ter Stufe im Allgemeinen kein Element gemein, wenn $a + b < c$ ist; der Ort erfüllt vielmehr dadurch, dass er ein Element mit einem solchen Grundgebilde gemein hat, eine $(c-a-b)$-fache Grundbedingung.

Wenn ein Hauptelement selbst mit einem Buchstaben bezeichnet ist, so soll die diesem Hauptelement zukommende einfache Grundbedingung mit demselben Buchstaben, und die mehrfachen Grundbedingungen mit denjenigen Symbolen bezeichnet werden, welche aus diesem Symbole ebenso hervorgehen, wie die in obiger Tabelle nachgesetzten ersten Symbole aus c, μ, g hervorgehen. Z. B. Die Feldbedingung des Strahles h heisst h_e, seine Strahlbedingung H.

Ein Ort heisst einem Grundgebilde *incident**), wenn jedes seiner Elemente zugleich Element des Grundgebildes ist. Z. B. Eine Plancurve ist ihrer Ebene incident, sowohl wenn man die Curve als Punktort und die Ebene als Punktfeld, wie auch, wenn man die Curve als Ort ihrer Tangenten und die Ebene als Strahlenfeld auffasst.

*) Dieser Ausdruck ist in letzter Zeit von Sturm und Anderen eingeführt. Er lässt sich leicht von Oertern auf Systeme übertragen, die statt von Hauptelementen, von beliebigen Gebilden erzeugt werden.

Mit Hilfe der eingeführten Begriffe lässt sich jetzt der Inhalt des IIten und IIIten Abschnittes der vorliegenden Abhandlung kurz so angeben.

Der zweite Abschnitt entwickelt ausser den nahe liegenden Gleichungen, welche zwischen den sämmtlichen Grundbedingungen eines Hauptelements bestehen, namentlich die sämmtlichen Gleichungen, welche zwischen den Grundbedingungen aller möglichen Grundgebilde und den Grundbedingungen aller möglichen *ihnen incidenter Oerter* bestehen; dann folgen Anwendungen der gefundenen Formeln, welche zu neuen, für gewisse Fragen der abzählenden Geometrie wichtigen Resultaten führen.

Der dritte Abschnitt entwickelt die sämmtlichen Gleichungen, welche zwischen den Grundbedingungen eines aus zwei Hauptelementen bestehenden Gebildes Γ und den Grundbedingungen seiner Coincidenz bestehen, d. h. desjenigen specielleren Gebildes Γ, bei dem die beiden Hauptelemente *unendlich nahe liegen*. Die so gefundenen *Correspondenzformeln* erledigen die von Salmon und Zeuthen angebahnte Erweiterung des Chasles'schen Correspondenzprincipes vollständig. In den folgenden Anwendungen dieser Formeln werden mehrere bekannte, bisher ungelöste Probleme gelöst.

Die Quelle für die Formeln des zweiten Abschnittes ist einzig das *Princip von der Erhaltung der Anzahl* oder, wie es wegen seiner Anwendungen auch genannt werden könnte, das *Princip der speciellen Lage*. Dasselbe lautet:

„Die räumliche Lage der Gebilde, welche gewisse, einem Gebilde Γ auferlegte Bedingungen verursachen, ist für die Anzahl der Gebilde Γ, welche diese Bedingungen erfüllen, gleichgültig, sobald diese Anzahl überhaupt endlich bleibt.“

Nach diesem Principe bleibt z. B. die Zahl der Strahlen, welche eine beliebige zweifache Bedingung Z erfüllen, und zwei gegebene Gerade schneiden, erhalten, wenn man diesen beiden gegebenen Geraden die specielle Lage zweier sich schneidender Geraden ertheilt, die Zahl ist also gleich der Summe der beiden Zahlen, von denen die erste angiebt, wieviel Strahlen Z erfüllen, und durch einen gegebenen Punkt gehen, die zweite angiebt, wieviel Strahlen Z erfüllen, und in einer gegebenen Ebene liegen.

Sobald man nach diesem Principe im zweiten Abschnitte die Formel niedrigster Dimension zwischen Grundbedingungen gewonnen hat, erhält man die Formeln höherer Dimension sehr leicht durch symbolische Multiplication mit den Grundbedingungen.

Die Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Punktes c lauten (wegen der Bezeichnung der Grundbedingungen vergleiche man die obige Tabelle):

$$c^2 = c_g;\ c^3 = cc_g = C.$$

Für die Ebene μ reciprok:

$$\mu^2 = \mu_g;\ \mu^3 = \mu\mu_g = M.$$

Für den Strahl g

$$g^2 = g_p + g_e;$$
$$gg_p = gg_e = \tfrac{1}{2}g^3 = g_s;$$
$$gg_s = g_p{}^2 = g_e{}^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \tfrac{1}{2}g^4 = G;\ g_p g_e = 0.$$

Ist ein Punkt c und ein Strahl g einander incident, so hat man zunächst:

$$cg = c_g + g_e = c^2 + g_e.$$

Daraus folgt mit Benutzung der obigen Formeln durch symbolische Multiplication:

$$cg_p = C \ + g_s = c^3 \ + \tfrac{1}{2}g^3,$$
$$cg_s = Cg + G = c^3 g + \tfrac{1}{2}g^4.$$

Durch dualistische Uebertragung erhält man die analogen Formeln für eine Ebene μ und einen Strahl g, die einander incident sind.

Für einen Punkt c und eine Ebene μ, die einander incident sind, hat man:

$$c^3 - c^2\mu + c\mu^2 - \mu^3 = 0,$$

also auch

$$c^3\mu - c^2\mu^2 + c\mu^3 = 0.$$

Für zwei Strahlen g und h, die sich schneiden, lautet die Formel niedrigster Dimension zwischen den Grundbedingungen:

$$G - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - g h_s + H = 0.$$

Daraus folgen:

$$Gh - g_s(h_p + h_e) + (g_p + g_e)h_s - gH = 0,$$
$$\begin{cases} Gh_p - g_s h_s + g_e H = 0, \\ Gh_e - g_s h_s + g_p H = 0, \end{cases}$$

und endlich:

$$Gh_s - g_s H = 0.$$

Diese Formeln sind ganz allgemein. Die beiden in Betracht kommenden Hauptelemente können also ganz beliebigen Systemen angehören. So giebt die obige Formel

$$c^3 = c^2\mu - c\mu^2 + \mu^3$$

z. B. für eine kubische Plancurve mit Spitze die Zahl derjenigen Curven, welche ihre Spitze in einem gegebenen Punkt haben, und eine beliebige 7fache Bedingung Z erfüllen, sobald man kennt erstens die Zahl derjenigen, welche Z erfüllen, ihre Spitze in einer gegebenen Geraden haben, und ihre Ebene durch einen gegebenen Punkt schicken, zweitens die Zahl derjenigen, welche Z erfüllen, ihre Spitze in einer gegebenen Ebene haben, und ihre Ebene durch eine gegebene Gerade schicken, drittens die Zahl derjenigen, welche Z erfüllen, und deren Ebene gegeben ist.

Aus den obigen Formeln resultiren die Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Grundgebildes und denen eines demselben incidenten *Ortes* nullter Stufe $a$ten *Grades*, indem immer der Factor a zu denjenigen Gliedern hinzutritt, welche eine Grundbedingung dieses Ortes *gar nicht* enthalten. Z. B. Für einen Punktort nullter Stufe $a$ten Grades mit den Grundbedingungen c, c_g, C, welcher einem Punktfelde μ incident ist, hat man die Formel:

$$C - \mu c_g + \mu^2 c - a . \mu^3 = 0.$$

Auch die Formeln zwischen den Grundbedingungen eines Grundgebildes und denen eines ihm incidenten Ortes von *höherer* als der nullten Stufe haben einen gewissen Zusammenhang mit den obigen Stammformeln. Wir erwähnen hier nur die Gleichungen, welche die Grundbedingungen einer Ebene μ mit den Grundbedingungen ν, P des Punktorts, und mit den Grundbedingungen ϱ, ϱ', t, T des Tangentenorts (vgl. die obige Tabelle der Grundbedingungen) einer in dieser Ebene liegenden Plancurve $a$ter Ordnung $b$ten Ranges verbinden:

$$\begin{aligned} P &= \mu\nu - a \cdot \mu^2, \\ \varrho' &= b \cdot \mu, \\ t &= \mu\varrho, \\ T &= \mu^2\varrho - b \cdot \mu^3. \end{aligned}$$

Von den Anwendungen, welche auf diese Formeln folgen, führen wir hier nur eine an. Bei einem einem Grundgebilde incidenten Orte nullter Stufe $a$ten Grades lassen sich diejenigen zusammengesetzten Grundbedingungen des Ortes, welche mehr als a symbolische Einzel-Factoren besitzen, durch diejenigen, welche a oder weniger als a Einzel-Factoren enthalten, und durch die Grundbedingungen des Grundgebildes ausdrücken. Die hierauf bezüglichen Formeln werden für einen in einer Ebene μ liegenden Strahlenort nullter Stufe dritten Grades (z. B. für die drei Wendetangenten einer kubischen

Plancurve mit Doppelpunkt) entwickelt. Es mögen f, f_p, f_e, f_s, F die Grundbedingungen dieses Strahlenorts bezeichnen. Dann hat man, den oben besprochenen Formeln gemäss:

$$f_p = \mu f \ - 3\mu^2,$$
$$f_s = \mu f_e - 3\mu^3,$$
$$F = \mu^2 f_e - \mu^3 f.$$

Hieraus werden auf verschiedenen Wegen alle Formeln gewonnen, welche die Symbole $f^m f_e^n$, wo $m + n > 3$ ist, durch die Symbole $f^m f_e^n$, wo $m + n \overline{\overline{<}} 3$ ist und durch die Potenzen von μ ausdrücken. Beispielsweise folgen hier zwei solcher Formeln:

$$f^5 = 15 f f_e{}^2 + 50 \mu f^2 f_e - 60 \mu f_e{}^2 + 15 \mu^2 f^3 - 210 \mu^2 f f_e - 90 \mu^3 f^2 + 360 \mu^3 f_e,$$

$$f^3 f_e{}^2 = 8 \mu f_e{}^3 + 21 \mu^2 f f_e{}^2 - 6 \mu^3 f^2 f_e - 66 \mu^3 f_e{}^2.$$

Den Schluss des IIten Abschnitts bilden zwei weitere Anwendungen, deren Auseinandersetzung hier zuviel Raum kosten würde.

Der III te Abschnitt entwickelt die sämmtlichen Formeln zwischen den Grundbedingungen eines *aus zwei Hauptelementen zusammengesetzten Gebildes* und denen seiner *Coincidenz* d. h. desjenigen specielleren Gebildes, bei dem diese beiden Hauptelemente unendlich nahe sind. Die Hilfsmittel zur Ableitung dieser Formeln sind einzig und allein das ursprüngliche Chasles'sche Correspondenzprincip, die symbolische Multiplication, über welche oben gesprochen ist, und die auf dem Princip von der Erhaltung der Anzahl beruhenden Formeln des IIten Abschnitts. Sobald die letztern als bekannt angesehen werden, erscheinen die sämmtlichen hier entwickelten Correspondenz-Formeln als blosse *Umformungen der Chasles'schen Correspondenzformel.* Damit ist dann, wie schon erwähnt ist, die Erweiterung des Correspondenz-Princips in der von Salmon und Zeuthen angebahnten Richtung vollständig erledigt. Wir lassen hier einige Correspondenzformeln für das Punktepaar*) und das Strahlenpaar folgen mit dem Bemerken, dass aus den ersten Formeln alle übrigen durch blosse symbolische Multiplication erhalten werden können.

Die beiden Punkte eines *Punktepaars* seien c und d, ihr Ver-

*) Inzwischen hat der Verfasser auch Correspondenzformeln für *Gruppen* von beliebig vielen, in einer Geraden befindlichen Punkten abgeleitet.

bindungsstrahl g, so dass, gemäss den obigen Festsetzungen, seine einzelnen Grundbedingungen sind:

$$c,\, c^2,\, c^3,\, d,\, d^2,\, d^3,\, g,\, g_e,\, g_p,\, g_s,\, G.$$

Die Coincidenz dieses Punktepaares heisse ε und zwar mögen bei ε die Punkte c und d im Punkte b unendlich nahe liegen. Dann gelten folgende Formeln:

(1) $$c + d - g = \varepsilon,$$
(2) $$c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g,$$
(3) $$cd - g_e = \varepsilon b,$$
(4) $$c^3 + d^3 + g_s = \varepsilon g_p,$$
(5) $$cdg - g_s = \varepsilon bg = \varepsilon g_e + \varepsilon b^2,$$
(6) $$c^2 d + cd^2 - cdg = \varepsilon b^2.$$

Daraus folgen andere durch Eliminationen, z. B.

(7) $$c^3 + cd + d^2 - g_p = \varepsilon b + \varepsilon g,$$
(8) $$c^3 + c^2 d + cd^2 + d^3 = \varepsilon g_p + \varepsilon bg + \varepsilon b^2.$$

An diese Formeln schliesst sich eine Erörterung über die Uebersetzung derselben in Worte*), wobei namentlich darauf aufmerksam gemacht wird, dass die Coincidenz des Punktepaars in drei Gattungen zerlegt werden kann, je nachdem man als Verbindungsstrahl jeden aus einer endlichen Anzahl von Strahlen, oder jeden aus ∞^1, oder jeden aus ∞^2 durch die Coincidenzstelle gehenden Strahlen aufzufassen hat. Im zweiten Falle erfüllt die Coincidenz die Grundbedingung g, im dritten Falle die Grundbedingung g_p *von selbst.* Fasst man z. B. jeden Punkt einer Fläche mit jedem Punkt einer Raumcurve als Punktepaar zusammen, so erhält man ein dreistufiges System von Punktepaaren, dessen Coincidenzen in den Schnittpunkten der Fläche und der Raumcurve liegen, und zwar derartig, dass *jeder* durch einen Schnittpunkt gelegte Strahl als Verbindungsstrahl einer Coincidenz aufzufassen ist. Folglich erfüllt hier jede Coincidenz die Bedingung g_p von selbst.

Auf die Behandlung des Punktepaars folgt eine sehr eingehende Behandlung des *Strahlenpaars.* Die beiden Strahlen desselben heissen g und h. Es giebt ∞^2 Strahlen, deren jeder g und h zugleich schneidet. Die von diesen schneidenden Strahlen gebildete *lineare Congruenz* habe die Grundbedingungen β und B, wo β resp. B bedeutet, dass die Congruenz einen ihrer Strahlen in einem gegebenen

*) In einer Abhandlung, welche im XI. Bande der Math. Ann. (S. 323) erscheint, sind viele Punktepaar-Formeln *in Worten* ausgesprochen.

Strahlbüschel resp. in einem gegebenen Strahle besitze. Die Coincidenz dieses Strahlenpaars heisse ε, und zwar mögen bei ε die beiden Strahlen g und h im Strahle k unendlich nahe liegen. Eine zweite Ausartung σ des Strahlenpaars entsteht dadurch, dass die beiden Strahlen g und h im Schnittpunkte c und der Schnittebene μ sich schneiden, ohne im allgemeinen unendlich nahe zu sein. Eine höhere Ausartung $\varepsilon\sigma$ entsteht dadurch, dass g und h sich schneiden, und zugleich unendlich nahe sind. Zwischen g, h, β, σ, ε bestehen die beiden Beziehungen:

(9) $$g + h - \beta = \varepsilon,$$

(10) $$\beta = \sigma + \varepsilon.$$

Von Formeln höherer Dimension erwähnen wir:

(11) $\beta^2 = B + g_e + h_e + c\sigma,$

(12) $\beta^2 = B + g_p + h_p + \mu\sigma,$

(13) $gh = B + k\varepsilon,$

(14) $gh_e + g_e h = \mu^2\sigma + \varepsilon k_e - \varepsilon k_p + \varepsilon\beta k,$

(15) $gh_p + g_p h = c^2\sigma + \varepsilon k_p - \varepsilon k_e + \varepsilon\beta k,$

(16) $g_s + \frac{1}{2}g^2 h + \frac{1}{2}gh^2 + h_s + \frac{1}{2}(\mu - c)^2\sigma = \varepsilon\beta^2 - \varepsilon\beta k + 2\varepsilon k^2,$

(17) $g_e h_e = \mu^3\sigma + \varepsilon\beta k_e - \varepsilon k_s,$

(18) $g_p h_p = c^3\sigma + \varepsilon\beta k_p - \varepsilon k_s,$

(19) $$\begin{aligned} G + g_s h + g_e h_e + g_p h_p + g h_s + H &= \varepsilon\beta^3 - 2\varepsilon\beta^2 k + 3\varepsilon\beta k^2 \\ &= \varepsilon\sigma\mu c + \varepsilon\beta k^2 + \varepsilon k^3 = \varepsilon\sigma\mu c + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma k^2 + 4\varepsilon k_s, \end{aligned}$$

(20) $g_s\sigma + h_s\sigma + \mu^3\sigma + c^3\sigma = \varepsilon\sigma\mu c.$

Die Formel (19) repräsentirt das Correspondenzprincip im Strahlenraume. Im Anschluss an diese Entwicklungen wird darauf aufmerksam gemacht, dass gerade so wie zwischen den Grundbedingungen eines Kegelschnitts und zwischen denen einer quadratischen Fläche*) gewisse allgemeine Relationen bestehen, dass so auch die Grundbedingungen einer linearen Congruenz durch gewisse Beziehungen mit einander verbunden sind. Von diesen ist die Beziehung niedrigster Dimension folgende:

$$\beta(\beta^2 - B)(\beta^2 - 3B) = 0.$$

In ähnlicher Weise werden dann das aus Punkt und Strahl, sowie das aus Punkt und Ebene bestehende Paar behandelt.

---

*) Man vergleiche des Verfassers Abhandlung über Moduln bei Flächen zweiter Ordnung, Math. Ann. Bd. X, S. 318, oder das Referat hier S. 364.

Aus den Strahlenpaar-Formeln ergeben sich unmittelbar alle Zahlen, welche angeben, wieviel lineare Congruenzen ihre beiden erzeugenden Axen irgend welche Grundbedingungen erfüllen lassen, zugleich gegebenen Strahlbüscheln Strahlen zuführen, und dabei auch gegebene Strahlen enthalten. Von solchen Zahlen führen wir hier beispielsweise an, dass es 14 lineare Congruenzen giebt, welche jedem von 8 gegebenen Strahlbüscheln einen Strahl zuzuführen vermögen, und dass es 38 lineare Congruenzen giebt, welche jedem von 6 gegebenen Strahlbüscheln einen Strahl zuführen, und dabei jede ihrer beiden erzeugenden Axen einen gegebenen Strahl schneiden lassen.

Eine zweite Anwendung der Strahlenpaar-Formeln constatirt die Abhängigkeit der auf das Sturm'sche Problem der räumlichen Projectivität (Math. Ann. Bd. VI) bezüglichen Anzahlen von einander, und bestimmt einige neue, diesem Probleme angehörige Anzahlen.

Hierauf folgt die Aufdeckung des natürlichen Zusammenhangs der Correspondenz-Formeln für ein Paar von Gebilden mit den *Productensätzen* dieses Gebildes. Unter Productensatz ist nämlich im allgemeinen jeder Satz zu verstehen, welcher Bedingungen des Systems derjenigen Elemente, welche zweien von ein und demselben Elemente erzeugten Systemen *gemeinsam* sind, durch Bedingungen dieser beiden Systeme ausdrückt, im speciellen Falle also die *Zahl* der zweien Systemen gemeinsamen Elemente durch Anzahlen ausdrückt, welche jedem dieser beiden Systeme angehören. Die Productensätze für Systeme von Punkten und Ebenen stecken in dem Bezout'schen Satze vom Grade der Eliminationsgleichung. Die Productensätze für Systeme von Strahlen sind erst von Halphen präcis aufgestellt (Comptes rendus Bd. 68, S. 141 und Bd. 74, S. 41) und von ihm und Zeuthen bewiesen. Hier ergiebt sich jeder Productensatz für Hauptelemente als ein sehr specieller Fall einer der obigen Correspondenzformeln, indem immer alle Glieder der linken Seite bis auf eins oder zwei verschwinden. An die Ablesung der Produktensätze aus den Correspondenzformeln wird ein aus dieser Ablesung resultirender Beweis des Halphen'schen Satzes angeschlossen, in welchem von der Bedingungssymbolik und den Formeln des Verfassers absichtlich nichts vorausgesetzt wird.

Die Punktepaar-Formel erster Dimension

$$c + d - g = \varepsilon$$

löst ohne Schwierigkeit die bis dahin ungelösten, von Salmon aufgestellten (Salmon-Fiedler's Raumgeometrie II. Th., II. Aufl., Artikel 447) Probleme β, γ, δ, ε, ζ.

Es ergeben sich folgende Zahlen:

Eine Fläche *nter* Ordnung besitzt

$$5n\,(n-4)\,(7n-12)$$

fünfpunktig berührende Tangenten; und

$$2n\,(n-4)\,(n-5)\,(n+6)\,(3n-5)$$

an einer Stelle vierpunktig, an einer andern Stelle zweipunktig berührende Tangenten; und

$$\tfrac{1}{2}n\,(n-4)\,(n-5)\,(n^3+3n^2+29n-60)$$

an zwei Stellen dreipunktig berührende Tangenten; und

$$\tfrac{1}{2}n\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n^3+9n^2+20n-60)$$

an einer Stelle dreipunktig und an zwei Stellen zweipunktig berührende Tangenten; und

$$\tfrac{1}{12}n\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n-7)\,(n^3+6n^2+7n-30)$$

an vier Stellen zweipunktig berührende Tangenten.*) Diese Resultate sind vom Verfasser zugleich auch durch die Gött. Nachr. (Februar 1876) publicirt. Inzwischen hat derselbe die Untersuchungen über die Tangenten-Singularitäten der Fläche *nter* Ordnung fortgesetzt in den Math. Ann. Bd. 11, S. 323. Eine weitere Anwendung der Punktepaar-Formeln führt zu den Anzahlen, welche sich auf die Berührung von Elementen zweier Curven- oder Flächen- Systeme erster Stufe beziehen. Von diesen Anzahlen stecken einige in den von Fouret aufgestellten Formeln für die implexes de surfaces. Hier mag als Beispiel folgender Satz Platz finden:

„Die Berührungspunkte von allen möglichen zwei sich berührenden Flächen zweier Flächensysteme $(\mu_1, \nu_1, \varrho_1)$ und $(\mu_2, \nu_2, \varrho_2)$ bilden eine Raumcurve vom Grade:

$$\mu_1\varrho_2+\mu_2\varrho_1+\nu_1\nu_2+\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1.\text{“}$$

Die Abhandlung schliesst mit der Besprechung der eigentlichen Charakteristikentheorie der drei Hauptelemente, welche durch die bekannten Productensätze erledigt ist.

Die beiden anderen Abhandlungen der „Beiträge zur abzählenden Geometrie“, welche auf diese erste Abhandlung bald folgen sollten, sind noch immer nicht publicirt, weil eine zeitraubende Amtsthätig-

*) Inzwischen hat der Verfasser die analogen Zahlen für den Liniencomplex *n*ten Grades bestimmt. (Math. Ann.)

keit dem Verfasser wenig Zeit für die Redaction seiner Untersuchungen übrig lässt.

Die zweite Abhandlung bestimmt, wie schon in dieser ersten angegeben wird, für die Plancurve dritter Ordnung mit Spitze sachlich alle Zahlen, welche angeben, wieviel solcher Curven im Raume alle möglichen *fundamentalen Bedingungen* erfüllen. Unter fundamentaler Bedingung wird jede Bedingung verstanden, welche für die Ebene der Curve, oder für ihren Punktort, oder für ihren Tangentenort oder für die 3 Ecken und die 3 Seiten ihres *Singularitäten-Dreiecks* Grundbedingungen sind, wo unter Singularitäten-Dreieck das aus Spitze, Rückkehrtangente, Wendepunkt, Wendetangente gebildete Dreieck zu verstehen ist. Bei dieser Gelegenheit werden auch die 13 fundamentalen *Ausartungen* dieser Curven mit ihren Eigenschaften, sowie gewisse räumliche Beziehungen des Singularitäten-Dreiecks aufgefunden. In derselben Weise wird in dieser Abhandlung die Plancurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt behandelt.

Die dritte Abhandlung findet bei der *kubischen Raumcurve* 11 verschiedene Ausartungen, sowie deren Eigenschaften. Ferner werden hier von den 5374 Elementarzahlen der kubischen Raumcurve 5335 sachlich bestimmt, wo unter Elementarzahl jede Zahl zu verstehen ist, die angiebt, wieviel Curven durch gegebene Bedingungen bestimmt sind, welche für ihren Punktort, ihren Tangentenort und ihren Schmiegungsebenenort *Grundbedingungen* sind. Von diesen Zahlen greifen wir, um Beispiele zu geben, einige beliebig heraus.

Es giebt 2200800 kubische Raumcurven, welche 6 gegebene Ebenen berühren, und 6 gegebenen Punkten Tangenten zuschicken,

Es giebt 288360 kubische Raumcurven, welche 8 gegebene Ebenen berühren und durch 4 gegebene Geraden Schmiegungsebenen schicken;

Es giebt 11424 kubische Raumcurven, welche durch 1 gegebenen Punkt gehen und 10 gegebenen Punkten Tangenten zuschicken;

Es giebt 144 kubische Raumcurven, welche durch 3 gegebene Punkte gehen, 2 gegebene Ebenen zu Schmiegungsebenen haben, und 2 gegebene Ebenen berühren.

Hamburg. H. Schubert.

H. Schubert: Moduln vielfacher Bedingung bei Flächen zweiter Ordnung. (Math. Ann. Bd. X, S. 318—364.)

Für ein $a$stufiges System von quadratischen Flächen F_2 bezeichne immer das Symbol

$$\mu^b \nu^c \varrho^{a-b-c}$$

die Zahl derjenigen Flächen des Systems, welche durch b gegebene Punkte gehen, c gegebene Gerade und $a-b-c$ gegebene Ebenen berühren. Jedes dieser

$$\tfrac{1}{2}(a+1)(a+2)$$

Symbole heisse eine *afache Charakteristik* der F_2. Ferner soll ein elementarer *Modul* einer der F_2 auferlegten $a$fachen Bedingung B_a eine solche ganze lineare Function der a-fachen Charakteristiken bedeuten, welche in *jedem* beliebigen $a$stufigen Systeme die Zahl der die Bedingung B_a befriedigenden Flächen auszudrücken vermag, oder, was dasselbe ist, welche angiebt, wieviel Flächen die Bedingung B_a und ausserdem eine ganz *beliebig* gewählte $(9-a)$fache Bedingung Z erfüllen, sobald man für jedes in dem Modul vorhandene Symbol

$$\mu^b \nu^c \varrho^{a-b-c}$$

die Anzahl der Flächen einsetzt, welche durch b gegebene Punkte gehen, c gegebene Gerade berühren, $a-b-c$ gegebene Ebenen berühren, und ausserdem jene Bedingung Z erfüllen.

Durch diese Definition gewinnen gewisse von Halphen (Bull. de la Soc. math. de France, tome II, und Comptes rendus, Band 76, S. 1074—1077) ausgesprochene Resultate folgende Gestalt:

„*Jede einer F_2 auferlegte afache Bedingung besitzt einen elementaren Modul.*"

Die Richtigkeit dieses Satzes*) für $a = 1$ war schon von Chasles beobachtet. Von *vielfachen* unzerlegbaren Bedingungen jedoch waren bisher nur sehr wenige hinsichtlich ihrer elementaren Moduln untersucht.

In der vorliegenden Abhandlung leitet deshalb der Verfasser die elementaren Moduln einer grossen Gruppe solcher Bedingungen ab. Die dieser Gruppe angehörigen Bedingungen, welche *Paar-*

*) Sein Analogon für Kegelschnitte ist in letzter Zeit namentlich von Lindemann (Vorles. üb. Geom. von Clebsch, S. 403 u. f.), von Halphen (Comptes rendus, 4 sept., 13 nov. 1876) und von Schubert (Gött. Nachr. November 1876) besprochen.

bedingungen genannt werden, erhält man in folgender Weise. Man ordne von den ∞^1 in einer F_2 liegenden Geraden je zwei sich schneidende einander zu. So erhält man ∞^2 der F_2 angehörige *Geradenpaare*. Folglich ist jede Bedingung, welche eine F_2 dadurch erfüllt, dass eines ihrer ∞^2 Geradenpaare eine $(a+2)$fache Bedingung erfüllt, für die F_2 $a$fach. So erwachsen der F_2 aus den 3- bis 7fachen *Grundbedingungen* des Geradenpaars gewisse 1- bis 5fache Bedingungen, welches die untersuchten *Paarbedingungen* sind. Dabei war unter Grundbedingung des Geradenpaares jede Bedingung zu verstehen, welche sich aus Grundbedingungen*) der 4 Hauptelemente des Geradenpaares, nämlich seiner beiden Geraden, deren Schnittpunkt und deren Schnittebene, zusammensetzt.

Durch die auch in den Math. Ann. Bd. X, S. 27 u. f. aufgestellten, allgemeinen Beziehungen zwischen den Grundbedingungen *incidenter* Hauptelemente, gelingt es dem Verfasser, die sämmtlichen Paarbedingungen durch gewisse unter ihnen, welche Hauptbedingungen genannt werden, auszudrücken. Die sämmtlichen Hauptbedingnngen setzen sich aus μ, ν, ϱ und 7 Hauptbedingungen zusammen, welche *wesentliche* genannt werden. Für die 7 wesentlichen Hauptbedingungen erhält der Verfasser die folgenden elementaren Moduln:

1) Die Bedingung γ, dass die F_2 eine gegebene Ebene in irgend einem Punkte einer auf der Ebene gegebenen Geraden berühren soll, hat den Modul:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,\nu\varrho.$$

2) Die hierzu reciproke Bedingung γ', dass die F_2 eine gegebene Gerade in einem auf ihr gegebenen Punkte berühren soll, hat den Modul:

$$\gamma' = \tfrac{1}{2}\,\nu\mu.$$

3) Die Bedingung δ, dass die F_2 einen Strahl eines gegebenen Strahlbüschels enthalte, hat den Modul:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\,\mu\varrho.$$

4) Die Bedingung x, dass die F_2 eine gegebene Gerade enthalte, hat den zuerst von Hurwitz in Hildesheim bestimmten Modul:

$$x = \tfrac{1}{4}\,[2\,\nu^3 - 3\,\nu^2\,\mu - 3\,\nu^2\,\varrho + 3\,\nu\mu^2 + 2\,\nu\mu\varrho + 3\,\nu\varrho^2 - 2\,\mu^3 - 2\varrho^3].$$

*) Die Definition der Grundbedingungen der Hauptelemente ist in des Verfassers „Beiträgen zur abzählenden Geometrie" (Math. Ann. Bd. X, S. 18) und auch in dem, in dieser Zeitschrift befindlichen Referate über diese Abhandlung angegeben.

Die Bedingung w, dass die F_2 eine gegebene Ebene in einem auf ihr gegebenen Punkte berühre, hat den Modul:

$$w = \tfrac{1}{8}\,[-2\nu^3 + 3\nu^2\mu + 3\nu^2\varrho - 3\nu\mu^2 - 3\nu\varrho^2 + 2\mu^3 + 2\varrho^3].$$

6) Die Bedingung y, dass die F_2 eine gegebene Gerade enthalten und dabei eine gegebene, durch die Gerade gehende Ebene in einem gegebenen, auf der Geraden liegenden Punkte berühren soll, hat unendlich viele elementare Moduln, welche man sämmtlich erhält, wenn man in:

$$\begin{aligned} y = \tfrac{1}{8}\,[&2\nu^3\mu + 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\varrho - 3\nu^2\varrho^2 + 2\nu\mu^3 + 6\nu\mu^2\varrho \\ &+ 6\nu\mu\varrho^2 + 2\nu\varrho^3 - 4\mu^3\varrho - 4\mu\varrho^3] \\ &+ \alpha_1 . V + \alpha_2 W \end{aligned}$$

den beiden willkürlichen Coefficienten α_1 und α_2 alle möglichen Werthe beilegt, und

$$\begin{aligned} V \equiv\ & 2\nu^4 - 5\nu^3\mu - 5\nu^3\varrho + 6\nu^2\mu^2 + 8\nu^2\mu\varrho + 6\nu^2\varrho^2 \\ & - 4\nu\mu^3 - 6\nu\mu^2\varrho - 6\nu\mu\varrho^2 - 4\nu\varrho^3 + 4\mu^3\varrho + 4\mu\varrho^3, \\ W \equiv\ & 2\nu^3\mu - 2\nu^3\varrho - 3\nu^2\mu^2 + 3\nu^2\varrho^2 + 2\nu\mu^3 - 2\nu\varrho^3 \end{aligned}$$

einsetzt.

7) Die Bedingung Z, dass die F_2 zwei gegebene, sich schneidende Gerade enthalten soll, hat unendlich viele elementare Moduln, welche man sämmtlich erhält, wenn man in

$$\begin{aligned} Z = \tfrac{1}{16}\,[&2\nu^5 - \nu^4\mu - \nu^4\varrho + 2\nu^2\mu^3 - 2\nu^2\mu^2\varrho - 2\nu^2\mu\varrho^2 \\ &+ 2\nu^2\varrho^3 - 4\nu\mu^4 + 6\nu\mu^3\varrho + 6\nu\mu\varrho^3 - 4\nu\varrho^4 \\ &- 4\mu^4\varrho - 4\mu\varrho^4] \\ &\quad + \beta_1 . \nu V + \beta_2 . \mu V + \beta_3 . \varrho V \\ &\quad + \beta_4 . \nu W + \beta_5 . \mu W + \beta_6 . \varrho W \\ &\quad + \beta_7 . \mu^4 (2\mu - \nu) + \beta_8 . \varrho^4 (2\varrho - \nu) \end{aligned}$$

den 8 willkürlichen Coefficienten $\beta_1 \ldots . \beta_8$ alle möglichen Werthe beilegt, und für V und W die eben unter 6) angegebenen Functionen einsetzt. Die Mittel zur Ableitung dieser und der Moduln der übrigen Paarbedingungen werden dem Verfasser geliefert sowohl durch die allgemeinere Fassung, welche derselbe im III. Abschnitte seiner „Beiträge zur abzählenden Geometrie“ dem *Correspondenzprincipe* giebt, wie auch durch das *Princip von der Erhaltung der Anzahl* (Beitr. z. abz. Geom. §. 7).

Die willkürlichen Coefficienten, welche bei den oben angegebenen Moduln für y und für z auftreten, weisen darauf hin, dass zwischen den 15 *vierfachen* Charakteristiken der F_2 2 und *nicht mehr* als 2 von einander unabhängige Relationen bestehen, nämlich

$$V = 0 \text{ und } W = 0,$$

und dass zwischen den 21 *fünffachen* Charakteristiken 8 und *nicht mehr* als 8 von einander unabhängige Relationen bestehen, nämlich die 6, welche sich aus $V = 0$ und $W = 0$ durch Multiplication mit μ, ν, ϱ ergeben, und ausserdem:

$$2\mu^5 - \mu^4\nu = 0 \text{ sowie}$$
$$2\varrho^5 - \varrho^4\nu = 0.$$

Es sind also höchstens 13 vierfache und höchstens 13 fünffache Charakteristiken von einander unabhängig. Im Anschluss an diese Resultate beweist der Verfasser den allgemeinen Satz, dass bei jedem Gebilde mit der Constantenzahl c die höchste Zahl der von einander unabhängigen $a$fachen Charakteristiken gleich der höchsten Zahl der von einander unabhängen $(c - a)$fachen Charakteristiken ist. Da ferner gezeigt wird, dass zwischen den 3 einfachen, den 6 zweifachen und den 10 dreifachen Charakteristiken der F_2 keine Relationen bestehen, so giebt jener Satz das Resultat, dass zwischen den 28 sechsfachen Charakteristiken 18, zwischen den 36 siebenfachen 30, zwischen den 45 achtfachen Charakteristiken 42 von einander unabhängige Relationen bestehen müssen. Diese Relationen kann man durch gewisse Eliminationen aus den Elementarzahlen (Borch. J. Bd. 71, S. 383) der F_2 leicht erhalten.

Diese Resultate für die F_2 hängen mit den analogen Resultaten für den *Kegelschnitt im Raume* durch eine der drei *Ausartungen* der F_2 zusammen, nämlich durch diejenige, auf welcher die Punkte zwei zusammenfallende Ebenen bilden, und die Tangenten die sämmtlichen ∞^3 Secanten eines in ihnen liegenden *Kegelschnitts* sind.

Die Charakteristiken des Kegelschnitts im Raume setzen sich aus den 3 Bedingungen m, n, r zusammen, wo m bedeutet, dass der Kegelschnitt seine Ebene durch einen gegebenen Punkt schicke, n bedeutet, dass er eine gegebene Gerade schneide, r bedeutet, dass er eine gegebene Ebene berühre.

Der Verfasser findet, dass zwischen den 3 einfachen und den 6 zweifachen Charakteristiken des Kegelschnitts keine Relation besteht, dass aber zwischen den 10 dreifachen Charakteristiken eine, und *nur* eine Relation besteht. Diese heisst:

$$K \equiv 2n^3 - 3n^2r + 3nr^2 - 2r^3 - 6mn^2 + 4mnr + 12m^2n$$
$$- 8m^2r = 0.$$

Aus dieser Formel erhält man die speciellere, in Clebsch-Lindemann's Werke auf S. 406 mit Nr. 11 bezeichnete Cremona-

Halphen'sche Formel, wenn man die Ebene des Kegelschnitts als fest annimmt, d. h. $m = 0$ setzt.

Zwischen den 14 vierfachen Charakteristiken bestehen 4, und *nur* 4 von einander unabhängige Relationen, nämlich ausser

$$mR = 0, \; nR = 0, \; rR = 0$$

noch eine von diesen unabhängige. Daraus folgt nun, dass beim Kegelschnitt im Raume höchstens:

3 einfache, 6 zweifache, 9 dreifache, 10 vierfache

Bedingungen von einander unabhängig sind, woraus wir mit Hilfe des oben erwähnten allgemeinen Satzes ferner schliessen können, dass auch höchstens

3 siebenfache, 6 sechsfache, 9 fünffache

Bedingungen von einander unabhängig sein können.

Hamburg. H. Schubert.

E. Bertini: Sistema simultaneo di due forme biquadratiche binarie (pubblicato nel giornale di Napoli t. XIV e riprodotto nei Mathematische Annalen t. XI).

I metodi esposti nella importantissima opera di Clebsch *Theorie der binären algebraischen Formen* sono applicati alla ricerca del sistema simultaneo di due forme biquadratiche. Si dimostra che questo sistema si può ridurre a sole 30 forme, proprietà gia data da Gordan (Math. Ann. t. 2 p. 273). Si stabiliscono inoltre varie relazioni sussistenti fra le forme del sistema e in particolare quella unica che ha luogo fra gli otto invarianti.

E. Bertini: Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie. (Annali di Matematica t. VIII.)

Lo scopo di questo lavoro è la determinazione delle trasformazioni univoche, le quali sono anche involutorie (cioè tali che due punti si corrispondono in doppio modo), nel caso particolare studiato da Jonquières (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1864), nel quale alle rette corrispondono curve di ordine n aventi a comune un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ e $2(n-1)$ punti semplici. Lo studio di tutti i casi che si possono presentare conduce alle seguenti proprietà, nelle quali per curva punteggiata unita s'intende una curva, di cui ciascun punto corrisponde a se stesso:

a) Ogni trasformazione involutoria di Jonquières che ammette una curva punteggiata unita di genere $p > 0$, è deducibile con successive trasformazioni quadratiche dalla trasformazione involutoria d' ordine $p+2$ che ammette una curva punteggiata unita d' ordine $p+2$ con un (solo) punto p^{plo} nel punto $(p+1)^{\text{uplo}}$ della trasformazione.

b) Ogni altra trasformazione involutoria di Jonquières è deducibile con successive trasformazioni quadratiche dall' omologia armonica.

Si osserva ancora che ogni trasformazione univoca involutoria che ammette una curva punteggiata unita di ordine n è necessariamente una trasformazione di Jonquières.

Pisa. E. Bertini.

Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. (Zweite Abhandlung.) (Math. Annalen Bd. XI. S. 84.)

Die erste Abhandlung obigen Titels (erschienen im VIII. Bande, S. 145 der math. Annalen) giebt eine Darstellung der von v. Staudt vorgeschlagenen Darstellung des Imaginären in der Geometrie und des von demselben Geometer erfundenen Rechnens mit Würfen. Die oben angeführte zweite Abhandlung beschäftigt sich mit einer von Klein vorgeschlagenen Interpretation des Imaginären mit Hilfe cyklisch-projectivischer Punktreihen. Der erste Theil der Arbeit ist der näheren, rein geometrischen Betrachtung dieser Punktgruppen gewidmet. Sind mit $a_1 a_2 \ldots a_n$ die Punkte einer Gruppe bezeichnet, so heisst sie *cyklisch-projectivisch,* wenn $a_1 a_2 \ldots a_n \overline{\wedge} a_2 a_3 \ldots a_n$ ist. Es zeigt sich, dass die Gruppe vollständig und eindeutig bestimmt ist, wenn drei, in der Geraden aufeinanderfolgende Punkte derselben gegeben sind, und dass jeder andere, nicht zur Gruppe gehörige Punkt der Geraden eine neue Gruppe bestimmt, von der gesagt wird, sie gehöre mit der gegebenen zu derselben *cyklischen Involution.* Bei der Betrachtung von cyklisch-projectivischen Punktgruppen eines

Kegelschnittes ergiebt sich eine vollständige Analogie mit den regulären Polygonen, die einem Kreis eingeschrieben sind, indem jede cyklisch-projectivische Gruppe auf einem Kegelschnitt aus den Ecken eines regulären Polygons durch Projection abgeleitet werden kann. In Folge dessen gehört, wie zu jedem regulären Kreispolygon die unendlich ferne Gerade, so zu jeder cyklischen Involution eines Kegelschnittes eine Gerade, die umgekehrt, wenn sie gegeben ist, die cyklische Involution eindeutig bestimmt.

Im zweiten Theil der Arbeit wird der Nachweis geführt, dass mit Hilfe der cyklisch-projectivischen Gruppen eine consequente Interpretation des Imaginären in der Geometrie durchgeführt werden kann, bei der, ebenso wie bei der v. Staudt'schen, die für reelle Gebilde gültigen Sätze ihre Gültigkeit beibehalten, und die, bei blosser Anwendung des Reellen bleibenden, Ausnahmen beseitigt werden.

Karlsruhe. Lüroth.

Lüroth: Vergleichung zweier Werthe des wahrscheinlichen Fehlers. (Astron. Nachrichten Nr. 2078, Bd. 87.)

Gegenstand dieser Abhandlung ist wesentlich die Vergleichung der Wurzel $\varrho = 0{,}47694$ der Gleichung

$$\int_0^{\varrho} e^{-x^2}\, dx = \int_{\varrho}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

mit der Wurzel ϱ_p der Gleichung

$$\int_0^{\varrho_p} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} = \int_{\varrho_p}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}},$$

in der p eine positive ganze Zahl bezeichnet. Es ergiebt sich durch einen allgemeineren Satz über Wurzeln solcher Gleichungen einfach, dass

$$\varrho_p > \varrho \sqrt{\frac{2}{p+2}};$$

dagegen, auf einem complicirteren Wege, die genauere Begrenzung

$$\varrho \sqrt{\frac{2}{p+1}} < \varrho_p < \varrho \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Die Zahl ϱ wird gebraucht bei Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers bei p überschüssigen Beobachtungen, wenn man das Präcisionsmaass als bekannt annimmt, während ϱ_p anzuwenden ist bei unbestimmt gelassenem Präcisionsmaasse.

Karlsruhe. Lüroth.

M. Noether: Zur Eliminationstheorie. (Sitzungsber. der phys.-med. Soc. in Erlangen am 4. Dec. 1876.)

Ein algebraisches Gebilde, von m Dimensionen und vom Grade μ, das durch irgend ein System von Gleichungen zwischen den Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots . x_r$$

gegeben ist, kann, mittelst Elimination einiger der Variabeln, durch ein Gleichungssystem der Form definirt werden:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{m+2}) = 0, \varphi x_{m+3} = \psi_{m+3}, \ldots, \varphi x_r = \psi_r,$$

wo, wenn $(x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+2} = 0)$ kein Werthsystem des Gebildes ist, f eine homogene Function μ^{ter}, die ψ solche Functionen ϱ^{ter}, φ eine solche $(\varrho - 1)^{ter}$ Ordnung von $x_1, x_2, \ldots x_{m+2}$ sind.

Für das Schnittgebilde zweier solcher Gebilde, bez. von den Dimensionen m, n und den Graden μ, ν, existirt der Satz, *dass der Grad desselben* $= \mu . \nu$ ist (vorausgesetzt, dass $m + n \geqq r - 1$, und dass die beiden Gebilde nicht ein solches von wenigstens $m + n - r + 2$ Dimensionen gemein haben). Aber dieser Satz war bisher nicht streng bewiesen worden. Erst H. Halphen hat in einem Aufsatze im Bull. d. l. Soc. math. d. France, t. II, p. 34, die Idee zu einem Beweis gegeben, indem er durch Zufügung weiterer Variabeln und einer Reihe von linearen Gleichungen die Eliminationsaufgabe auf eine solche von *einer* Variabeln aus *zwei* Gleichungen zurückzubringen sucht. In der vorliegenden Note wird der Beweis in einer für alle Fälle gültigen, strengen Gestalt geführt.

Erlangen. M. Noether.

Helmert: Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. v. Schönmilch, 1876. S. 192—218.)

Die absoluten Werthe von n Beobachtungsfehlern (wahren Fehlern) seien $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, die Summe ihrer m^{ten} Potenzen $n\sigma_m$, der durchschnittliche Werth aller möglichen $n\sigma_m$ gleich nS_m. Die Wahrscheinlichkeit, dass $[\varepsilon^m]$ zwischen $n\left(\sigma_m - \frac{\delta_m}{2}\right)$ und $n\left(\sigma_m + \frac{\delta_m}{2}\right)$ liege, werde mit $\varphi(\sigma_m)_n\,\delta_m$ bezeichnet. Hierdurch ist zugleich die Wahrscheinlichkeit der Differenz $S_m - \sigma_m = w_m$ charakterisirt. Betrachtet man aber verschiedene hohe Potenzsummen, so sind offenbar deren w_m nicht vergleichbar. An Stelle der Abweichungen w_m setzt man daher besser andere, v_m, wofür

$$\sqrt[m]{\sigma_m} = \sqrt[m]{S_m}\,(1 + v_m).$$

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich damit, zunächst die einfachen Fälle zu betrachten, wo $n = 1$ oder 2, $m = 1$, 2 oder 3 ist und die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers ε entweder constant ist oder der Gauss'schen Exponentialfunction folgt. Für diese Fälle werden die Wahrscheinlichkeitsfunctionen $\varphi(\sigma)$ und $\varphi(v)$ abgeleitet und letztere auch graphisch dargestellt. Die weitere Behandlung der Fälle $n > 2$ und $m > 3$ ist unterlassen und nur der Fall $m = 2$ für beliebiges n, als zu eleganter Formel führend, behandelt.

Ist h die Präcision der Beobachtungen, so wird für diesen Fall

$$\varphi(\sigma_2)_n\delta_2 = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,(n\sigma_2)^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-h^2 n\sigma_2}\,n\,\delta_2$$

$$\varphi(v_2)_n dv_2 = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}(1 + v_2)^{n-1}\,e^{-\frac{n}{2}(1+v_2)^2}\,dv_2$$

$$v_2 > -1.$$

Die Annäherung an die Gauss'sche Fehlerfunction ist Gegenstand weiterer Untersuchung. Da sie evident ist, die andern nicht behandelten Fälle aber ein ganz ähnliches Verhalten andeuten, so ist auch für diese einigermaassen der Grad der Annäherung an diese Function bei wachsendem n charakterisirt. Mit Hülfe von Discontinuitätsfactoren wird schliesslich für beliebig denkbares Fehlergesetz noch nachgewiesen, dass die in Rede stehenden Wahrscheinlichkeitsfunctionen, wenn nur n nicht zu klein ist, die Form der Gauss'schen Function annehmen.

Zwei vorletzte §§. des Aufsatzes beschäftigen sich mit der *Frage der günstigsten Hypothesen zur Berechnung des Genauigkeitsmaasses.* Man kann sich die Fälle hierbei sehr verschieden denken. Zur *absolut günstigsten Hypothese* kann man nur gelangen, wenn alle ε einzeln gegeben sind. Bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit setzt man dann den

Maximalbeob.-Fehler $a =$ dem beobachteten grössten ε.

Bei Vorhandensein des Gauss'schen Fehlergesetzes ist dagegen bekanntlich nach Gauss zu nehmen die Präcision

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon^2]}}.$$

Sind die Fehler einzeln nicht gegeben, sondern nur $[\varepsilon]$ oder $[\varepsilon^2]$ oder irgend eine andere Potenzsumme, so erhält man nur eine *relativ günstigste* Hypothese.

Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit *constant*, so ist zu setzen

$$a = \sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m}, \text{ falls } n \text{ gross.}$$

Bei kleinen n gilt diese Formel nicht. Man hat

$$a = \varepsilon \text{ für } n = 1,\ m \text{ beliebig}$$

$$a = \sqrt[m]{2\sigma_m} \text{ für } n = 2,\ m = 1 \text{ bis } 3.$$

Diese günstigste Berechnung scheitert für $n > 2$ daran, dass es schwer ist, allgemeine Formeln zu gewinnen. Man wird sich daher begnügen, eine *praktisch bequeme* Hypothese zu substituiren und annehmen, dass σ_m gleich S_m sei; für grosse n erhält man damit zugleich wieder die relativ günstigste Hypothese. Man setzt also

$$a = \sqrt[m]{(m+1)\,\sigma_m}$$

und hat den Exponenten m möglichst hoch zu nehmen (falls man die Wahl hat), um der besten Hypothese möglichst nahe zu kommen.

Besteht das *Gauss'sche Fehlergesetz* für die Beobachtungsfehler ε, so ist

$$\left.\begin{aligned} h^m &= \frac{\alpha}{\sigma_m}\left(1 + \frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2 n}\right) \\ h^m &= \frac{\alpha}{\sigma_m} \text{ genähert,} \end{aligned}\right\} n \text{ gross,}$$

wobei

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad m = 1,$$

$$\alpha = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \left(\frac{m-1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \; m \text{ ungerade}$$

$$\alpha = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (m-1)\, 2^{-\frac{m}{2}}, \; m \text{ gerade}$$

$$\beta = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2m-1)\, 2^{-m}.$$

Ist n klein, so geben diese Formeln nicht die relativ günstigste Hypothese, da man diese aber für beliebige kleine n nicht ermitteln kann, behält man die Formeln als praktisch-bequeme Hypothese bei, was um so zulässiger ist, als dieselbe sich der relativ-günstigsten mit wachsendem n rasch zu nähern scheint.

Ein letzter § giebt nun noch *den wahrscheinlichen Fehler der Hypothesen* an (für Gauss'sches Gesetz der Beobachtungsfehler). Ist σ_m gegeben, so sind bei grossen n die wahrscheinlichen Grenzen von h und der wahrscheinlichste Werth desselben (s. o.)

$$\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\sigma_m}} \left(1 \mp 0{,}6745 \sqrt{\frac{\beta - \alpha^2}{n m^2 \alpha^2}}\right).$$

Durch Betrachtung des Falles $n = 1$, $m = 1$ bis 3, wird noch gezeigt, dass diese Formel auch bei kleinen n als eine Näherung brauchbar ist.

Helmert: Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. — Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den Quadraten der Verbesserungen directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit und die Fechner'sche Formel. — Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den ersten Potenzen der Differenzen gleich genauer directer Beobachtungen. (Astronomische Nachr. Nr. 2096—2097, Bd. 88, S. 115.)

Die Peters'sche Formel lautet: es ist der wahrscheinliche Beobachtungsfehler

$$\varrho = 0{,}84535 \frac{[\text{val. abs. } \lambda]}{\sqrt{n\,(n-1)}},$$

wo λ die Verbesserungen der n Beobachtungswerthe auf ihr arithmetisches Mittel sind. Der mittlere Fehler dieser Bestimmung von ϱ wird nun zunächst in der Abhandlung aufgesucht und gefunden gleich

$$\pm \varrho \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{n-1} - n + \sqrt{n(n-2)}}{n}}$$

oder in immer ausreichender Näherung

$$\pm \varrho \sqrt{\frac{\pi - 2}{2(n-1)}}.$$

Hiernach berechnet sich derselbe gleich (je nach der angewandten Formel)

$\pm$ 0,756 ϱ	oder 0,756 ϱ	bei $n =$ 2
0,525	0,534	3
0,430	0,436	4
0,373	0,378	5
0,250	0,252	10
0,756 : $\sqrt{n-1}$		∞

Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von ϱ folgt hieraus durch Multiplication mit 0,67449 solange n gross ist; ist $n = 2$, so hat man ihn nach dieser Regel gleich $\pm$ 0,510 ϱ, während eine strenge Ableitung $\pm$ 0,443 ϱ ergiebt.

Die günstigste Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers ϱ erfolgt mittelst des mittlern Fehlerquadrates μ^2 nach den Formeln:

$$\varrho = 0,67449\,\mu$$

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right).$$

Das Wurzelglied in den Parenthesen ist selbst wieder der mittlere Fehler der Bestimmung. Diese Formeln werden scharf begründet bezw. verbessert. Zunächst wird zu dem Zweck die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\lambda_1 \ldots . \lambda_n$ abgeleitet und gefunden

$$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Daraus folgt sofort als günstigste Hypothese für h^2 oder μ^2

$$\frac{1}{2h^2} = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1} = \mu^2.$$

Als Wahrscheinlichkeit einer Summe $[\lambda\lambda] = \sigma$ ergiebt sich weiter derselbe Werth, wie für die Wahrscheinlichkeit einer Quadratsumme $[tt]$ von $n-1$ wahren Fehlern t gleich σ zu sein, d. i. nach der oben citirten Abh. in Schlöm. Zeitschr.

$$\frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\sigma^{\frac{n-3}{2}}\,e^{-h^2\sigma}\,d\sigma.$$

Hiermit berechnet sich nun auch der mittlere Fehler in der Bestimmung von μ, den die oben angegebene Formel nicht correct giebt, trotzdem der mittlere Fehler für μ^2 ganz richtig ist, weil sie aus diesem unter der nicht immer zulässigen Voraussetzung berechnet ist, dass derselbe klein sei. Man erhält genauer

$$\varrho = 0{,}67449\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

mit dem mittlern Fehler

$$\pm\,\varrho\sqrt{2-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{8}{n-1}}}\,.$$

Folgende Tabelle zeigt den mittlern Fehler in der Bestimmung von ϱ, berechnet nach der ältern und nach der zuletzt angegebenen Formel:

$\pm$ 0,707 ϱ	und $\pm$ 0,636 ϱ	bei $n =$	2
0,500	0,477		3
0,408	0,397		4
0,354	0,346		5
0,236	0,234		10
$0{,}707 : \sqrt{n-1}$			∞

Aus diesem mittleren Fehler folgt der wahrscheinliche durch Multiplication mit 0,67449, wenn n gross ist; ist $n = 2$, so giebt diese Regel $\pm$ 0,477 ϱ anstatt des strengen Werthes $\pm$ 0,382 ϱ.

Fechner hatte im Jubelbande von Pogg. Ann. folgende Formel angegeben:

$$\varrho = 0{,}67449\,[\text{val abs }\lambda]\sqrt{\frac{\pi}{n(\pi+2n-4)}}\,.$$

Diese Formel wird in der Abh. streng abgeleitet und gefunden

$$\varrho = 0{,}67449\,[\text{val abs }\lambda]\sqrt{\frac{\pi:(n-1)}{\pi+2\arcsin\frac{1}{n-1}+2\sqrt{n(n-2)}}}\,.$$

Es ist jedoch kein irgend erheblicher Unterschied zwischen diesem und dem Fechner'schen Ausdruck, den man auch wie folgt schreiben kann:

$$\varrho = 0{,}84535 \frac{[\text{val abs } \lambda]}{\sqrt{n\left(n - \frac{4-\pi}{2}\right)}}.$$

Diese Formel schliesst sich für kleine n eng an die beste Berechnung von ϱ an, im Gegensatz zur Peters'schen Formel. Für grosse n fällt sie mit dieser zusammen. Der mittlere Fehler in dieser Berechnung von ϱ wird gleich

$$\pm \varrho \sqrt{2 - \sqrt{\frac{8\,(n-1)}{\pi + 2n - 4}}}$$

also

$\pm$ 0,636 ϱ	bei $n =$	2
0,486		3
0,408		4
0,359		5
0,246		10
$0{,}756 : \sqrt{n-1}$		∞

Der wahrscheinliche Fehler folgt hieraus bei grossen n durch Multiplication mit 0,67449; bei $n = 2$ giebt diese Regel $\pm$ 0,477 ϱ anstatt des strengen $\pm$ 0,382 ϱ.

Der letzte Theil der Abhandlung giebt strenge Beweise einer von Herrn von Andrae aufgestellten Formel für die Berechnung von ϱ, die derselbe nur aus einer unvollständigen Induction gezogen. Es ist, wenn $[d]$ die Summe der $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Beobachtungsdifferenzen (nach dem absoluten Werth genommen) bezeichnet

$$\varrho = 0{,}84535 \frac{[d]\sqrt{2}}{n\,(n-1)}$$

mit dem mittleren Fehler

$$\pm \varrho \sqrt{\frac{\frac{n+1}{3}\pi + 2\,(n-2)\sqrt{3} - 4n + 6}{n\,(n-1)}}.$$

Speziell hat man den letztern gleich

$\pm$ 0,756 ϱ	bei $n =$	2
0,525		3
0,425		4
0,366		5
0,241		10
$0{,}715 : \sqrt{n-1}$		∞.

Ist n klein, so ist *Fechner's Formel* schon der Genauigkeit wegen vorzuziehen; wegen ihrer weit grösseren Bequemlichkeit wird man sie *immer vorziehen.*

Der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung von ϱ folgt aus dem mittleren durch Multiplication mit 0,67449; ist $n = 2$ so giebt diese Regel $\pm 0,510\ \varrho$ anstatt des strengen Werthes $\pm 0,443\ \varrho$.

Helmert. Untersuchung über den Einfluss eines regelmässigen Fehlers im Gange der Ocularröhre des Visirfernrohrs auf Messungen, insbesondere auf das geometrische Nivellement.
(Zeitschr. des Arch. und Ing.-Ver. zu Hannover. XXII. Heft 3.)

Eine mündliche Mittheilung des Herrn Director Cohen Stuart aus Delft verfolgend, untersucht Verf. den Einfluss einer Abweichung der Richtung der Bewegung der Ocularröhre von einer corrigirten Visiraxe. Es findet sich, dass ein aus Zielhöhendifferenzen abgeleitetes Nivellementsresultat frei von den durch die Bewegung der Ocularröhre entstehenden Fehlern bleibt, solange diese Bewegungen als geradlinig angesehen werden können und sobald entweder die corrigirte Visiraxe sich auf eine Ocularstellung für sehr entfernte Objecte bezieht, oder die Summen der Rück- und Vorwärts-Zieldistanzen gleich gross genommen werden.

Bislang fehlte bei der Theorie des Nivellements geradezu jede Untersuchung in dieser Beziehung, und man nahm nur an, dass ein Nivellirinstrument auf richtige Ocularröhrenbewegung untersucht sein müsse, ohne von dem Falle eines Fehlers zu reden.

Die Untersuchung wird durchgeführt für ein Visirfernrohr, dessen Ocular ausserhalb des Fadenkreuzes liegt und für ein solches, dessen Ocular dieses Kreuz einschliesst — Huyens'sches Ocular. Für diesen Fall wird auch der Begriff Visiraxe definirt, was unseres Wissens noch nicht geschehen war. Endlich wird auch kurz der Fall besprochen, wo das Objectiv beweglich ist, wie bei englischen und amerikanischen Instrumenten.

Helmert. Zur Untersuchung der Nivellirfernrohre. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1876. S. 34—38.)

Wenn man ein in Ringen drehbares Fernrohr während der Beobachtung dreht, so beschreibt das Bild in der Regel einen Kreis, welcher davon herrührt, dass nicht nur der optische Mittelpunkt des Objectes, sondern *auch der des Oculars* excentrisch liegen. Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Bestimmung derartiger Excentricitäten bei drehbaren und nicht drehbaren Fernröhren und zieht auch ein Beispiel für einen concreten Fall herbei.

Helmert. Ueber das Verticalaxensystem des Repetitionstheodoliten. (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1876. S. 296—300.)

Dieser Aufsatz behandelt zwei Fälle: denjenigen, wo man beim Beginne der Arbeit die Repetitionsaxe vertical stellt und denjenigen, wo man (wie es meist geschieht), die Alhidadenaxe vertical stellt. Letzterer Fall ist der ungünstigere, sobald beide Axen einen kleinen Winkel mit einander einschliessen, was schon daraus folgt, dass im ersten Falle die Alhidadenaxe zwar immer schief ist, aber ihre Lagen einen Kegel mit verticaler Axe bilden, während im andern Falle dieser Kegel schief liegt.

Repetirt man bei verticaler Repetitionsaxe n mal, so ist die aus der Axen-Convergenz v folgende Verbesserung des einfachen Winkels

$$\text{(I)} \qquad \frac{v}{n}\,\frac{\sin\frac{nA}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\left\{\sin\left(w+\frac{n-1}{2}A\right)\cot z-\sin\left(w+\frac{n+1}{2}A\right)\cot z'\right\},$$

worin z und z' die Zenithdistanzen für das linksliegende und rechtsliegende Object des Winkels A sind und w der horizontale Winkel zwischen der Verticalebene von v bei der ersten Einstellung aufs linksliegende Object und der Verticalebene durchs linksliegende Object ist.

Repetirt man aber, nachdem anfangs die Alhidadenaxe vertical gestellt worden ist, so hat man dieselbe Grösse gleich

$$\text{(II)} \qquad -I-v\left\{\sin(A+w)\cot z'-\sin w\cot z\right\}.$$

Während I mit n abnimmt, thut II wegen des hinzugetretenen Gliedes dies nicht. I lässt sich durch geeignete Wahl von n vernichten oder nahezu vernichten, dagegen II aber nicht.

Helmert. Zu Galles Methode der Nordlichtshöhen. (Astr. Nachr. 2070.)

Galle nimmt bei seiner Bestimmung der Höhe der Nordlichtstrahlen an, dass sie die Richtung der magnetischen Inclinationsnadel normal unterhalb auf der Erdoberfläche haben. Der Aufsatz leitet aus der Gauss'schen Potentialfunction für die erdmagnetische Kraft die Aenderung der Inclination mit der Meereshöhe ab. Dieselbe erweist sich nicht geradezu als in allen Fällen zu vernachlässigen.

Helmert: Constante Fehler in Cornus Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. (Astr. Nachr. 2072.)

Verf. fand bei näherer Untersuchung der Cornu'schen Beobachtungswerthe, dass sie regelmässige, von der Drehgeschwindigkeit des Rades abhängende Abweichungen untereinander zeigen. Welches der richtige Werth der Lichtgeschwindigkeit ist, lässt sich schwer angeben und jedenfalls dürfte der von Cornu aus allen Beobachtungen abgeleitete Werth nicht ganz das hohe Maass von Zutrauen verdienen, das man ihm sonst wohl beizulegen geneigt ist.

Helmert: Discussion der Beobachtungsfehler in Koppe's Vermessung der Gotthardtunnelaxe. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1876. S. 146—155.)

Es werden zuerst ausführlich die Verbesserungen der Horizontalwinkel discutirt. Dieselben befolgen nicht streng das Gauss'sche Gesetz, sondern häufen sich etwas an um den mittleren Fehler herum. Deutet dies auf constante Fehler, welche den Richtungen im Netz anhaften, so zeigt dies noch schärfer die Vergleichung des wahrscheinlichen Fehlers einer Richtungsbeobachtung nach der Netzausgleichung mit derjenigen nach der Stationsausgleichung, $1'',04$ gegen $0'',88$. Im letzteren Werth stecken ausserdem noch systematische Theilungsfehler, welche aus den Messungen nachgewiesen und geschätzt werden. Schliesslich ergiebt sich $\pm 0'',8$ als wahrscheinlicher Betrag der constanten Fehler der Richtungen im Netze.

Die trigonometrischen Höhenmessungen waren von Koppe nach der Hypothese

$$\text{Gewicht} = 100 : (\text{Distanz in Kilometern})^2$$

ausgeglichen worden. Die Verbesserungen der Höhen zeigen, dass es besser ist, die Gewichte proportional den Quadraten dieser Werthe zu nehmen — es wachsen also die Höhenfehler mit den Quadraten der Distanz, ein Umstand, der darauf hinweist, dass sie wesentlich von der Refraction herrühren.

Helmert: Näherungsformeln für die Gauss'sche Projection der Hannover'schen Landesvermessung. (Zeitschr. f. Vermessungswesen 1876. S. 238—253.)

Die Gauss'sche Projection des Ellipsoids auf die Ebene ist wenig bekannt in der Praxis, weil die Formelentwicklungen etwas umständlich sind. Beschränkt man sich aber auf Gebiete von 400^{km} Längen- und Breitenerstreckung, so lässt sich die Sache sehr einfach darstellen. Man hat dann aus Gauss' Untersuchungen nur zu adoptiren, dass innerhalb dieser Ausdehnung ein merklicher Unterschied zwischen den Dimensionen auf dem Ellipsoid und einer conformen Uebertragung auf eine Kugel mittlerer Krümmung nicht existirt. Darf man also das beobachtete Netz als auf dieser Kugel liegend annehmen, so handelt es sich nur darum, es conform von der Kugel auf die Ebene zu übertragen. Die sehr einfachen Entwickelungen zeigen einen innigen Zusammenhang mit den Formeln für rechtwinklige sphärische Coordinaten nach Soldner, so dass der Uebergang aus einem System ins andere sehr leicht ist. Die Benutzung der Gauss'schen Formeln erscheint aber dem Verf. bequemer als diejenige der Soldner'schen, was ausführlicher zu begründen versucht wird. Für die Correction der gemessenen Richtungswinkel, welche Gauss' Projection heischt, giebt Verf. eine *graphische* Tabelle, die innerhalb der gesteckten Grenzen völlig ausreicht.

Helmert: Zur Herstellung graphischer Tabellen mit zwei Eingängen. (Ztschr. f. Vermessungswesen 1876. S. 24—34.)

Ist w eine Function der Argumente u und v, gegeben durch die Gleichung

$$F(w, u, v) = 0,$$

so werden die Linien, welche alle Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten u und v für einen constanten w Werth enthalten, im Allgemeinen Curven sein. Bildet man aber die Curven dadurch ab, dass man als rechtwinklige Coordinaten nicht u und v, sondern $x = f_1(u)$ und $y = f_2(v)$ nimmt, so lassen sich die Functionen f_1 und f_2 unter Umständen so wählen, dass die Curven in Gerade übergehen. Der Aufsatz untersucht, vom Einfachen zum Schwierigeren aufsteigend, die Bedingungen dazu. Im Allgemeinen hängt die Möglichkeit der Abbildung durch Gerade ab von der Gleichung

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dy}} = f(w),$$

worin $f(w)$ eine beliebig zu wählende Function und w aus $F(w, u, v) = 0$ zu entnehmen ist. In dieser Gleichung müssen sich die Variablen derart sondern lassen, dass u und $\frac{du}{dx}$ links, v und $\frac{dv}{dy}$ rechts stehen, wenn die gewünschte Abbildung möglich sein soll. Die Integration links und rechts ergiebt dann sofort auch die Functionen f_1 und f_2.

Der Aufsatz behandelt auch die Abbildung durch Kreise, beschränkt sich aber auf den Fall concentrischer Kreise. Solche sind immer möglich, wenn parallele oder in einem Punkt sich schneidende Gerade möglich sind.

Selbstverständlich ist auch des Falles gedacht, dass u oder v als Functionen, w, v oder u, w als Argumente genommen werden.

Als Beispiel dient *das graphische Einmaleins*, welches auf einem Kärtchen in vier verschiedenen Formen dargestellt ist.

Aachen. Helmert.

Guido Hauck: Grundzüge einer axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. I. Planperspective, II. Perspectivische und projectivische Collineation im Raume. (Zeitschrift für Mathematik und Physik 1876. Bd. 21, S. 81—99 u. S. 402—462, mit 2 Tafeln.)

Eine eigenthümliche Erscheinung auf dem Gebiete der descriptiven Geometrie ist die *Axonometrie*, welche zuerst von Weissbach auf die orthogonale Parallelperspective beschränkt —, von Pohlke durch den nach ihm benannten Satz auf die allgemeine Parallelperspective übertragen wurde und in Folge der Leichtigkeit und Handlichkeit ihrer Anwendung eine überraschend schnelle Carrière gemacht hat. Während jedoch alle übrigen Theile der descriptiven Geometrie sich von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus betrachten lassen, insofern sie sich alle unter die Rubrik „geometrische Verwandtschaften" unterordnen lassen, stand die Axonometrie seither noch ausserhalb dieses Verbandes. Dies war eine Lücke, deren Ausfüllung um so wünschenswerther erschien, als die einseitige Beschränkung der Axonometrie auf die Parallelperspective nicht in ihrem Wesen begründet ist. Denn definirt man die Axonometrie allgemein als Methode, welche lehrt, perspectivische Bilder von Objecten, die durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte gegeben sind, dadurch zu verfertigen, dass die projicirenden Parallelepipeda der einzelnen Objectpunkte abgebildet werden: so reicht diese Methode bis auf Desargues zurück, welcher in seiner „Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis etc." (Paris 1636) die Centralperspective in dem genannten Sinne behandelte.

Der Verfasser machte sich demgemäss zur Aufgabe, 1) die Methode der Axonometrie in der Art für die Centralperspective zu verallgemeinern, dass namentlich für die zwei Kernpunkte der modernen Axonometrie, nämlich die von Weissbach eingeführten rationalen Verhältnisse der Massstäbe und den von Pohlke entdeckten und verwertheten Satz Analoga in der Centralperspective sich ergeben, — 2) die wichtigsten Formeln und Constructionen der parallel-perspectivischen Axonometrie als specielle Fälle der zu findenden centralperspectivischen nachzuweisen, — 3) diese ganze neue Theorie der Axonometrie auf der Grundlage der allgemeinen Collineationsverwandtschaft aufzubauen.

Ueber den Anknüpfungspunkt der Axonometrie an die Theorie der Collineation räumlicher Systeme konnte nicht lange ein Zweifel bestehen. Dieser Anknüpfungspunkt musste wohl in der Möbius-schen Fundamentalconstruction collinearer Systeme (Barycentr. Calcul S. 329) zu suchen sein.

Ist O, xyz ein rechtwinkl. Coordinatensystem, auf welches das Originalsystem bezogen wird, und ist der Dreistrahl $\Omega, \xi\eta\zeta$ dessen collineare Abbildung, sind ferner $F_1F_2F_3$ diejenigen Punkte des griechischen Systems, welche den unendlich fernen Punkten der lateinischen Achsen entsprechen, $G_1G_2G_3$ diejenigen Punkte des lateinischen Systems, welche den unendlich fernen Punkten der griechischen Achsen entsprechen, und bezeichnet man die Seiten des Dreikants $\Omega, \xi\eta\zeta$ mit $w_{12}w_{23}w_{31}$, die Abscissen der Punkte $F_1F_2F_3$ mit $f_1f_2f_3$ (*Fluchtstrecken*), die Abscissen der Punkte $G_1G_2G_3$ mit $g_1g_2g_3$ (*Gegenstrecken*): so ist das Bildsystem vollständig bestimmt, wenn die 9 Grössen $w_{12}w_{23}w_{31}f_1f_2f_3g_1g_2g_3$ gegeben sind. Man kann alsdann von jedem durch seine Coordinaten gegebenen Punkt das Bild durch eine einfache Construction finden, indem man das Bild des projicirenden Parallelepipedons des Punktes construirt. Die genannten 9 Grössen werden daher als axonometr. *Grundconstanten* bezeichnet, und es handelt sich nun darum, die Beziehungen aufzusuchen, die zwischen denselben für die einzelnen Specialfälle der collinearen Verwandtschaft bestehen.

Es ergiebt sich z. B. für die *centrische* Collineation die Bedingung, dass die zwei Dreiecke $F_1F_2F_3$ und $G_1G_2G_3$ ähnlich sind, dass also:

$$\lambda^2(g_i^2 + g_k^2) = f_i^2 + f_k^2 - 2f_if_k \cos w_{ik},$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. — Geht die centrische Collineation in die *Planperspective* über, so kommt die weitere Bedingung hinzu:

$$w_{12} + w_{23} + w_{31} = 360^0.$$

Es dürfen daher bei der Planperspective 6 Grundconstanten (z. B. $f_1f_2f_3g_1g_2g_3$) beliebig gewählt werden; die 3 übrigen sind dann Functionen der 6 willkürlich gewählten. Man erhält so z. B. folgenden Satz, welcher als Analogon zu dem Pohlke'schen Satz in der Parallelperspective angesehen werden kann:

„Zieht man in einer Ebene von einem Punkt Ω aus unter beliebigen Winkeln gegen einander drei Strecken von beliebiger Länge, jedoch so, dass das von den Endpunkten $F_1F_2F_3$ gebildete Dreieck spitzwinklig ist: so können die drei Strecken jederzeit als das perspectivische Bild eines rechtwinkl. Achsensystems — und die drei Endpunkte als die Fluchtpunkte der drei Achsen angesehen werden. Die zugehörigen Gegenstrecken findet man durch folgende Construction: Beschreibe über den drei Seiten des Dreiecks $F_1F_2F_3$ nach aussen Halbkreise, welche von den Verlängerungen der drei Höhen des Dreiecks in $A_1A_2A_3$ geschnitten werden. Verbinde diese drei Punkte mit den Ecken des Dreiecks, so sind je zwei von derselben Ecke ausgehende Verbindungslinien gleich und repräsentiren die gesuchten Gegenstrecken."

Specialisirt man die allgemeine Centralperspective dadurch, dass man für die einzelnen Perspectivarten der Parallelperspective (Orthogonalpersp., Malerische Persp., Eskarppersp., Militärpersp., Cavalierpersp.) Analoga in der Centralpersp. aufstellt: so treten zu den obigen Beziehungen noch weitere hinzu. So erhält man z. B. für die *Orthogonalpersp.* (Centralstrahl senkrecht zur Bildebene) die Beziehungen:

$$\cos w_{ik} = -\frac{1}{2\frac{f_i}{g_i}\frac{f_k}{g_k}}\sqrt{\left(-\frac{f_i^2}{g_i^2}+\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)\left(\frac{f_i^2}{g_i^2}-\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)}.$$

Für die *malerische* Persp. kommt man auf die allgemein übliche (Desargues'sche) Methode, u. s. w.

Jede dieser einzelnen Perspectivarten lässt sich dann unmittelbar für die *Parallelpersp.* specialisiren, indem man f_i und $g_i = \infty$ und die Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i} = p_i$ setzt. So gehen z. B. die zuletzt genannten Formeln für die Parallelperspective in die Weissbach'schen Formeln über. —

In den genannten zwei Abhandlungen erfährt nun diese axonometrische Theorie folgenden Gang der Entwicklung:

Die *erste* Abhandlung beschränkt sich auf die Planpersp., indem sie zuerst die Construction des Bildes lehrt, wenn die Grundconstanten gegeben sind. Sodann werden die Grundconstanten als Functionen der Orientirungsconstanten (d. h. derjenigen Grössen, durch welche die Lage des Projectionscentrums und der Bildebene zum Originalcoordinatensystem O,xyz bestimmt ist), entwickelt und einfache Constructionsverfahren (z. B. Herstellung von Reductionsmassstäben) zur praktischen Ausführung der Methode gelehrt. Hierauf folgt die Elimination der Orientirungsconstanten, die willkürliche Wahl der Grundconstanten und die Entwicklung der Orientirungsconstanten als Functionen der willkürlich gewählten Grundconstanten. Schliesslich werden die allgemeinen Formeln und Constructionen specialisirt 1) für die einzelnen Perspectivarten, — 2) für die Parallelperspective.

Die *zweite* Abhandlung überträgt zuerst die analytischen und graphischen Resultate der ersten Abhandlung auf die centrische Collineation räumlicher Systeme (Reliefpersp.) und verallgemeinert sie sodann für die projectivische Collineation, wobei sie auf die Möbius'sche Fundamentalconstruction stösst und ein einfaches Verfahren lehrt, zwei durch 5 Paare entsprechender Punkte gegebene centrisch-collineare Systeme in perspectivische Lage überzuführen, was jederzeit auf doppelte Weise (directe und inverse Lage) geschehen kann. — Es folgt sodann die Transformation des axonometrischen Coordinatensystems auf das conaxiale Cartesische Coordinatensystem, und werden im Zusammenhang damit die Beziehungen aufgestellt, die zwischen den axonometrischen Grundconstanten obwalten müssen, damit einem gegebenen Ellipsoid als collineare Abbildung ein bestimmter Flächentypus, namentlich eine Kugelfläche, entspreche. — Die Leichtigkeit, mit welcher sich diese Aufgabe erledigt, ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, dessen Achsen die Abbildungen der Coordinatenachsen der Originalfigur sind. Bezieht man aber nun die Bildfigur auf ein vollkommen willkürliches Coordinatensystem, so erhält man die collineare Verwandtschaft dargestellt durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Da diese Darstellungsweise den gewöhnlichen Ausgangspunkt bei der analytischen Untersuchung der collinearen Verwandtschaft bildet, so ergiebt sich die Aufgabe, diese Bestimmungsart der Collineation mit der axonometrischen Methode in Beziehung zu setzen, d. h. die 9 axonometrischen Grundconstanten auszudrücken als Functionen der in jenen Relationen enthaltenen 16 Coefficienten. Bei der Lösung dieser Aufgabe wird namentlich auch der Unterschied zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Collineation genauer beleuchtet.

Nachdem noch die in der allgemeinen Theorie mit inbegriffene Collineation *ebener Systeme* berührt ist und die wichtigsten diesbezüglichen Fragen erörtert sind, werden im Schlussparagraphen die axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und den von Fiedler als Bindeglied der analytischen und constructiven Methode aufgestellten projectivischen Coordinaten in Beziehung gesetzt, — wie denn auch der Verfasser einen Hauptvorzug dieser axonometrischen Behandlung der Collineation darin sieht, dass sie ein Bindeglied zwischen der analytischen und constructiven Theorie der Collineation bildet.

Tübingen. G. Hauck.

R. Sturm: Sulle forze in equilibrio. (Ann. di Matem. (ser. II) VII, 217—246.)

Möbius hat in seinem Lehrbuch der Statik den Satz gefunden, dass die Actionslinien von vier Kräften im Gleichgewichte derselben Schaar eines Hyperboloids — Regelschaar — angehören. Es wird nun in dem vorliegenden Aufsatze zuerst bewiesen, dass Kräfte auf vier Geraden einer Regelschaar im Gleichgewicht sind, wenn ihr Kräftepolygon sich schliesst; der Schluss des Axen- oder Momentenpolygons folgt dann von selbst. Ein solches geschlossenes Kräftepolygon lässt sich auf dem Hyperboloide selbst construiren, was zu einem einfachen Beweise des bekannten Chasles'schen Satzes führt. Sodann wird eine einfache — wie es scheint, noch nicht hervorgehobene — lineare Construction der linearen Congruenz und des linearen Complexes aus 4, bez. 5 Geraden besprochen; mit Hilfe derselben gelingt es die Sätze — die Möbius wohl richtig erkannte aber damals (1837), wo die Vorstellungen der Lineargeometrie noch fehlten, noch nicht befriedigend beweisen konnte —, dass nämlich die Actionslinien von 5, bez. 6 äquilibrirten Kräften in derselben linearen Congruenz, demselben linearen Complexe sich befinden, und die Umkehrungssätze nachzuweisen, indem das einfache Mittel der Theilung der einen Kraft angewandt wird. Es folgen dann weitere Sätze über den Ort der Wirkungslinie einer Kraft, die mit theilweise ganz, theilweise nur durch ihre Actionslinien gegebenen Kräften äquivalent (oder im Gleichgewicht) ist.

In der zweiten Hälfte werden unter Benutzung der Grassmann'schen geometrischen Addition von Strecken, von welcher die Kräftecomponirung ein Specialfall ist, mehrere — zum Theil ohne Beweis mitgetheilte — analytische Resultate von Möbius, Sylvester, Cayley (Lehrb. der Statik; Comptes rendus Bd. 52, 61) nachgewiesen:

so die 1, 2, 3 Gleichungen zwischen den Coordinaten der Actionslinien von 6, 5, 4 äquilibrirten Kräften, die Ausdrücke für die Intensitäten dieser Kräfte. Besonders wird der Fall von vier Kräften eingehender behandelt und unter anderm ein irrthümlicher Schluss von Möbius, der für die Wirkungslinien von 4 Kräften im Gleichgewichte *eine* Gleichung für genügend hielt, richtig gestellt. Es findet sich dabei Gelegenheit, das „Doppelverhältniss von 4 Geraden im Raume“ zu benutzen.

R. Sturm. Das Problem der Collineation. (Math. Ann. X, 117—146.)
— **On correlative Pencils.** (Proc. Lond. Mathematical Soc. VII, 175—194.)
— **Ueber correlative oder reciproke Bündel.** (Der Redaction der Math. Ann. übersandt.)

Schon längere Zeit habe ich mich mit Untersuchungen über die Lage von Trägern projectiver Gebilde beschäftigt; zuerst nahm ich (Math. Ann. I, 533) das Problem der ebenen Homographie oder Projectivität vor, das auch von Chasles, Jonquières, Cremona, Hesse behandelt ist, und gab eine vollständige synthetische Auflösung desselben.

Es sind in zwei (identischen oder verschiedenen) *Ebenen* zwei Gruppen von je σ Punkten gegeben, die einander zugeordnet sind; es sollen solche Paare von „associirten“ *Punkten* gefunden werden, aus denen die homologen Punkte der Gruppen durch entsprechende Strahlen *projectiver Strahlbüschel* projicirt werden. Je nachdem $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7$ ist, ist jedem Punkt der einen Ebene jeder der andern; eine Curve 2. O.; ein einziger Punkt associirt, der eine Curve 5. O. durchläuft, wenn jener sich auf einer Geraden bewegt; bilden die Punkte jeder Ebene, welche associirte besitzen, eine Curve 3. O.; existiren drei Paare associirter Punkte.

Darauf (Math. Ann. VI, 513) nahm ich die beiden Gruppen in zwei *Räumen* an und suchte solche associirte *Geraden*, aus denen homologe Punkte durch entsprechende Ebenen *projectiver Ebenenbüschel* projicirt werden. Wenn $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7$, so ist einer Geraden des einen Raumes jede im andern; ein Reye'scher Complex 2. Gr.; das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve; eine Regelschaar; eine einzige Gerade associirt. So viel hatte schon Herr H. Müller (Math. Ann. I, 413) gefunden. Ist $\sigma = 8, 9, 10, 11$, so bilden die

Geraden jedes Raumes, welche eine associirte besitzen, einen Complex 4. Gr., eine Congruenz 6. O. 10 Kl., eine Regelfläche 20. Gr., sind in der Zahl 20 vorhanden. Ausserdem wurden noch die Gebilde ermittelt, welche, je nachdem der Fall ist, einem Büschel, Bündel, einer Ebene, einem speciellen linearen Complexe associirt sind. Herr Schubert hat mit Hilfe seiner Correspondenzprincipien im Strahlenraume noch weitere Folgerungen hieraus gezogen (Math. Ann. X, 88).

In dem ersten der 3 Aufsätze der Ueberschrift werden nun für die beiden räumlichen Punktgruppen solche Paare von associirten *Punkten* gesucht, aus denen die homologen Punkte durch entsprechende Strahlen *collinearer Bündel* projicirt werden. Je nachdem $\sigma = 4, 5, 6, 7$ ist, ist jedem Punkte des einen Raumes jeder im andern; eine cubische Raumcurve associirt, welche eine Fläche 5. O. erzeugt, wenn jener Punkt eine Gerade durchläuft; bilden die Punkte jedes Raumes, welche einen associirten besitzen, eine Fläche 2. Gr.; giebt es 4 solche Punkte in jedem Raume.

Wären in dem einen Raume statt Punkte Gerade gegeben, so hätten wir es mit *reciproken oder correlativen Bündeln* zu thun, und zu diesen bin ich — auf Herrn Hirst's Veranlassung — in der weiteren Untersuchung übergegangen. Zunächst kann man die Grundelemente mischen: k Punkte, l Gerade in dem einen Raume, ihnen homolog k Gerade, l Punkte im andern. Verlangt man, dass ein Strahl des einen Bündels und eine Ebene des andern, die nach homologen Grundelementen geben, in der Correlation sich entsprechen, so ist das eine doppelte Bedingung; deshalb findet, wenn eine solche Bedingung neu hinzutritt, eine Erniedrigung um zwei Stufen statt; wie das auch das Collineationsproblem zeigt. Man erhält eine einfache Bedingung, wenn man blos verlangt, dass zwei Strahlen der beiden Bündel, die nach gegebenen Punkte, oder zwei Ebenen, welche nach gegebenen Geraden gehen, conjugirt seien; d. h. dass einer und infolge dessen jeder dieser beiden Strahlen in der dem andern entsprechenden Ebene liege, bez. eine und deshalb jede der beiden Ebenen den der andern entsprechenden Strahl enthalte. *Wir haben also k Punkte A_i, l Gerade a_i, m Punkte $\mathfrak{A}_i$, n Gerade $\mathfrak{a}_i$ im Raume A, ihnen homolog k Gerade b_i, l Punkte B_i, m Punkte $\mathfrak{B}_i$, n Gerade $\mathfrak{b}_i$ in* **B**. Diese Beschaffenheit der Grundelemente heisse die Signatur $[klmn]$. *Es sind solche associirte Punkte A, B gesucht, dass zwischen ihren Bündeln eine Correlation möglich ist, in welcher* *die* AA_i, Bb_i *und die* Aa_i, BB_i *sich entsprechen, die* $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$, *sowie die* $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ *conjugirt sind.*

Herr Hirst, der mich auch zu dieser Aufnahme conjugirter Elemente aufforderte, hat nämlich sich mit verwandten Untersuchungen beschäftigt: er hat die Anzahl der Correlationen zwischen zwei festen Bündeln A, B ermittelt für den Fall, dass $\sigma = 2k + 2l + m + n = 8$ ist, oder vielmehr das duale Problem der Correlation zweier festen Ebenen behandelt (Proc. Lond. Math. Soc. V, 40; Annali di Matem. (ser. II) VI, 260). Indem er sich dann zur Betrachtung der Correlation räumlicher Systeme wandte (worüber eine erste Mittheilung Proc. Lond. Math. Soc. VI, 7), ergab sich die Lösung des oben gestellten Bündelproblems oder des dualen als wünschenswerth. Wenn $n = 0$, so gelingt es mit Hilfe bekannter Eigenschaften der cubischen Fläche, der cubischen Raumcurve und der eindeutigen Raumtransformationen das Problem zu lösen; die Resultate sind in jedem Falle fast durch alle Signaturen gleich und zwar folgende:

1) $\sigma = 2k + 2l + m = 8$. Jedem B ist jeder A durch *eine* Correlation zugeordnet, Ausnahme [2200] (Hirst).

2) $\sigma = 9$. Einem B ist eine Fläche 3. O. associirt, Ausnahme [3110], [2210].

3) $\sigma = 10$. Einem B entspricht eine cubische Raumcurve Ausnahme [3200]; einer Geraden b eine Fläche 10. O.; Ausnahme [4100], [1400], [3200], [2300], [3120], [1320], [2220].

4) $\sigma = 11$. Jedem Punkte B ist ein und nur ein Punkt A associirt; wodurch sich eine eindeutige Transformation zwischen A und B ergiebt; keine Ausnahme. Einer Geraden b ist eine Curve, einer Ebene β eine Fläche 11. O. associirt; in jedem Raume giebt es eine Curve 10. O., deren jedem Punkte nicht nur ein Punkt, sondern eine ganze cubische Raumcurve entspricht. [3210], [2310] bilden Ausnahmen.

5) $\sigma = 12$. Die Punkte in jedem Raume, welche associirte besitzen, erzeugen eine Fläche 4. O. und einem ebenen Schnitte der einen entspricht eine Curve 14. O. auf der andern; Ausnahme [3300].

6) $\sigma = 13$. Die Punkte, welche associirte besitzen, erzeugen eine Curve 6. O.

7) $\sigma = 14$. Es giebt 4 Paare associirter Punkte.

Ueber diese engere Untersuchung handelt der zweite Aufsatz der Ueberschrift, doch *ohne ausführliche Beweise.*

Um aber das allgemeinere Problem zu lösen, benutze ich — wie Hirst — das Verfahren der Charakteristikentheorie. Hirst betrachtet, indem er bei festen Scheiteln A, B — ich dualisire, wie gesagt, seine Untersuchung — $\sigma = 7$ annimmt, das entstehende Correlationssystem. Ein solches System enthält eine Zahl von Correlationen, bei denen noch zwei gegebene Strahlen oder zwei gegebene Ebenen conjugirt sind; diese Zahlen nennt er die Charakteristiken des Systems: es sind die gesuchten Zahlen für $\sigma = 8$. Ausserdem enthält das System zweierlei ausgeartete Correlationen, die eine mit einem singulären Strahle (Axe), die andere mit einer singulären Ebene in jedem Bündel. Auf diese hat er — unabhängig von ihm hat sie auch Fiedler gefunden: Darst. Geom. 2. Aufl. — zuerst aufmerksam gemacht, ferner zwei Relationen zwischen ihren Zahlen und den Charakteristiken gefunden. Jene werden direct ermittelt, diese dann berechnet, und ähnlich geschieht es im Raume.

Die Correlation verwandelt sich bei diesen Ausartungen in eine Projectivität der Ebenenbüschel um die singulären Axen, bez. der Strahlbüschel in den singulären Ebenen. Ich bilde nun, durch Fallenlassen einer einfachen Bedingung, in den verschiedenen Problemen ebenfalls Correlationssysteme, in denen die Charakteristiken die Zahlen der Correlationen sind, bei welchen conjugirte Strahlen, bez. Ebenen durch gegebene Punkte, bez. gegebene Gerade gehen; wobei die Scheitel im allgemeinen beweglich sind. Während Hirsts Relationen dieselbe Gestalt haben, wie die für Kegelschnittssysteme, treten hier — infolge dieser Beweglichkeit — noch weitere Glieder zu. Z. B. bei $[klmn]_{\sigma=8}$ ist in $\boldsymbol{B}$ ein Punkt B, in A eine Gerade a gegeben. Die Correlationen der Bündel der Punkte A auf a und des festen Bündels B erzeugen das System; π_{8B}, λ_{8B} seien die Zahlen von dessen exceptionellen Correlationen mit singulären Strahlen, bez. Ebenen, μ_8, ν_8 die Charakteristiken d. h. die Zahl der A auf a, die dem B für $[k, l, m+1, n]_9$, bez. $[k, l, m, n+1]_9$ associirt sind, also die Ordnungen der hierfür dem B associirten Flächen; so hat man:

$$2\nu_8 = \mu_8 + \pi_{8B} + \zeta_8,$$
$$2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8B};$$

worin ζ_8, die Hirst'sche Zahl der Correlationen für $[klmn]_8$ bei festen Scheiteln, hinzutritt.

Diese additiven Glieder, wie hier ζ_8, sind stets aus der vorhergehenden Untersuchung bekannt, die Ausartungszahlen sind zu ermitteln, woraus μ und ν berechnet werden; dass ν für $[klmn]$

μ für $[k, l, m-1, n+1]$ wird, sowie dass die Zahlenwerthe für $n=0$ schon anderweitig gefunden sind, dient als Controlle.

Die Ausartungszahlen π und λ lassen sich mit Hilfe meiner in diesem Referate zuerst genannten Abhandlungen über projective Ebenen- und Strahlenbüschel ermitteln. Doch ist die Arbeit sehr mühsam und habe ich sie nur in dem leichteren Falle der Correlationen mit singulären Axen ganz durchgeführt, im andern nur angefangen. Man kann vielmehr die Charakteristikentheorie — und diese Idee verdanke ich Hirst — fortsetzen und, indem wiederum eine einfache Bedingung fallen gelassen wird, Systeme von ausgearteten Correlationen der einen und der andern Art bilden. In solchen Systemen giebt es Ausartungen vom 2. Typus von nur einer Art, in welche beide Ausartungen vom 1. Typus degeneriren. Sie enthalten in jedem Bündel einen singulären Strahl und eine durch ihn gehende singuläre Ebene. Hirst und Fiedler haben diesen zweiten Typus beschrieben. Für jedes solche System lässt sich je nur eine den früheren Formeln analoge Formel aufstellen, die andere wird illusorisch. Infolge dessen ist es doch nothwendig, die Ausartungen des 1. Typus für $n=0$ zu ermitteln; da wird aber, wie man a priori einsehen kann, die Zahl der Correlationen mit singulären Ebenen, die sonst grössere Schwierigkeiten bereitet, in den meisten Fällen 0, in den übrigen bietet sich keine grosse Schwierigkeit. Es verbleibt dann noch die wesentlich einfachere directe Ermittelung der Zahlen der Ausartungen des 2. Typus, bei denen es sich nur um reine Lagenbedingungen handelt. Also aus diesen Zahlen und denen der Ausartungen des 1. Typus für $n=0$ werden die übrigen Zahlen dieser Ausartungen berechnet, aus diesen dann die Zahlen der allgemeinen Correlationen.

Im allgemeinen ergiebt sich, dass für $n = 1, 2, 3 \ldots$ die Zahlen für $n=0$ sich verdoppeln, vervierfachen u. s. w. und zwar mit um so weniger Ausnahmen, je grösser σ ist. Anderseits wachsen die Ausnahmen mit n und spätestens bei $n=8$ haben sie die Regel unterdrückt.

Als Beispiel wählen wir die Signaturen $[000n]$:

Für $n = 8, 9, 10, 11$ ist einem Punkte B jeder Punkt einfach, eine Fläche 6. O., eine Curve 18. O., eine Gruppe von 32 Punkten associirt. Die Ordnung der Fläche, Curve, die bei $n = 10, 11$ einer Geraden associirt ist, ist 40, 132; die bei $n = 11, 12$ einer Ebene associirte Fläche, Curve hat die Ordnung 132, 476. Bei $n = 12, 13, 14$ erzeugen die Punkte jedes Raumes, welche associirte besitzen, eine Fläche 256., eine Curve 1008. O. und sind in der Zahl 2384 vorhanden.

Mit Hilfe der Correlationen mit singulären Ebenen erhalten wir z. B. folgende Sätze:

Man habe zwei Gruppen von einander zugeordneten Geraden $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$; $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n$. Es sollen projective Strahlbüschel (A,α) — d. h. dessen Scheitel A und Ebene α ist — und (B,β) gefunden werden, so dass $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ von homologen Strahlen getroffen werden

$n = 6$; B, β fest; die Punkte A erzeugen eine Fläche 4. Ordnung.

$n = 7$; B, β fest; die A erzeugen eine Curve 8. Ordnung.

$n = 8$; B, β fest; es giebt 6 Strahlbüschel (A, α). Blos B oder β fest; die A erzeugen eine Fläche 16. O.

$n = 9$; B oder β fest; die A erzeugen eine Curve 42. O.; B auf einer Geraden oder β um eine Gerade beweglich; die A erzeugen eine Fläche 96. O.

$n = 10$; B oder β fest; es giebt 60 Büschel (A, α). B oder β auf oder um eine Gerade beweglich, bez. B auf einer Ebene oder β um einen Punkt beweglich; die A erzeugen eine Curve, bez. eine Fläche 280. O.

$n = 11$; die Punkte A, B erzeugen eine Fläche 440. O.; soll B auf einer Ebene liegen oder β durch einen Punkt gehen, so erzeugen die A eine Curve 900. O.

$n = 12$; die A, B erzeugen eine Curve 1560. O.

$n = 13$; es giebt 3120 Paare von Büscheln (A, α) (B, β).

Die Ebenen α umhüllen das duale Gebilde zu dem von den A erzeugten.

Diese Untersuchungen, sowie die weiter ausgeführten des zweiten Aufsatzes enthält die dritte in der Ueberschrift genannte Abhandlung.

Darmstadt. R. Sturm.

Kostka: Ueber Borchardt's Function. (Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 82, S. 212—229.)

In Folge einer Aufforderung des Hrn. Professor Borchardt habe ich in dem vorliegenden Aufsatz es unternommen, den *Zähler* der bekannten erzeugenden Function aller ganzen symmetrischen Verbindungen genauer zu entwickeln. Derselbe hat die Form:

$$Z = \frac{\Sigma \pm F_0(t_1) F_1(t_2) \ldots F_{n-1}(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_n)},$$

wobei
$$F_h(t) = t^h f'(t) - h \cdot t^{h-1} f(t)$$
$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$$

und Π das Differenzenprodukt der t bedeutet. Dividirt man Z durch $f(t_1)\, f(t_2) \ldots f(t_n)$, so erhält man Borchardt's Function. Auf das Interesse einer solchen Entwicklung hat schon vor längerer Zeit Hr. Cayley und neuerdings wieder Hr. Faà de Bruno aufmerksam gemacht.

Mit Hilfe der Multiplicationsregel der Determinanten und desjenigen Satzes, über welchen ich in dieser Zeitschrift Bd. I, S. 158 f. berichtet habe, erhält Z die Form

$$\text{I.} \quad Z = \Sigma B.C,$$

worin die Grössen B Determinanten bedeuten, welche aus den Coefficienten von $f(t)$ zusammengesetzt sind, die C aber symmetrische und homogene Funktionen der t. Wenn man mit c_h die Summe der Combinationen der t ohne Wiederholung zur h^{ten} Klasse bezeichnet, so wird jedes C durch eine Determinante der c von der Beschaffenheit dargestellt, dass die Indices der c in jeder Zeile eine aufsteigende, in jeder Colonne eine absteigende Reihe bilden; und zwar ist die Reihe der Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Indices bei *allen* Zeilen *dieselbe*, und ebenso erhält man nur *eine* derartige Reihe von Differenzen für *alle* Colonnen. Die Form I, deren Bildungsgesetz leicht übersichtlich ist, soll nun verglichen werden mit der Form

$$\text{II.} \quad Z = \Sigma A.T,$$

in welcher jedes T eine jener bekannten symmetrischen Grundfunctionen, deren Glieder sämmtlich aus einem einzigen durch Permutation der Exponenten entstehen, und A den zugehörigen Factor bedeutet, der natürlich eine ganze Function der a sein wird.

Zunächst zeigt sich, dass die Formen I und II in der Anzahl der Glieder sowol im ganzen als in den einzelnen Dimensionen übereinstimmen; die weitere Betrachtung gliedert sich dann naturgemäss in zwei Theile: 1) Ueberführung einer Function C in ein Aggregat der T; 2) Zusammensetzung der A aus den B, resp. Darstellung der B in entwickelter Form. Für die Lösung dieser beiden Aufgaben werden in der Abhandlung Regeln angegeben, welche hier nicht ins einzelne verfolgt werden können. Erwähnt sei nur, dass es nicht gelungen ist, ein wirkliches, durchsichtiges Bildungsgesetz für II aufzustellen; vielmehr hat die Untersuchung nur dahin geführt, dass der Factor irgend einer bestimmten Function T im Werthe von Z ohne Kenntniss der übrigen Glieder von II nach übersichtlichen Rechenregeln ermittelt werden kann; auch ist gezeigt, dass die Aufgabe, *sämmtliche* Glieder von Z nach diesen Regeln zu berechnen, wegen des sehr symmetrischen Baues der untersuchten Function sich nahezu um die Hälfte reducirt. Indessen scheint mir die Meinung nicht ungerechtfertigt, dass die Functionen C sich ebenso gut zu symmetrischen Grundfunctionen eignen als die T, und dass bei Untersuchungen von allgemeiner Natur die Form I, deren Bildungsgesetz klar liegt, vor II den Vorzug verdient. Freilich wird der Uebergang auf II nothwendig sein, wenn Borchardt's Function dem Zwecke dienen soll, für den sie eigentlich aufgestellt ist, nämlich durch Entwickelung nach fallenden Potenzen der t die symmetrischen Functionen der Wurzeln von $f(t) = 0$ durch die Coefficienten auszudrücken; doch ist es mir nicht vergönnt gewesen, nach dieser Richtung hin das Thema weiter zu verfolgen.

Kostka: Ueber ein bestimmtes Integral. (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik u. Physik.)

Die kurze Abhandlung gibt den Beweis des Satzes: „Wenn

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0 = o$$

nur solche Wurzeln für $z_1, \ldots z_n$ liefert, deren reelle Theile gleiches Vorzeichen haben, so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_0 + A_1 z^2 + \ldots A_{n-1} z^{2n-2}}{(z^2 + z_1^2)(z^2 + z_2^2)\ldots(z^2 + z_n^2)}\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_0 + A_1 z^2 + \ldots A_{n-1} z^{2n-2}}{(z^n - a_{n-2} z^{n-2} + a_{n-4} z^{n-4} - \ldots)^2 + (a_{n-1} z^{n-1} - a_{n-3} z^{n-3} + \ldots)^2}\, dz$$

$$= \pm \pi \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \ldots a_{-n+2} & A_0 \\ a_2 & a_1 & \ldots a_{-n+4} & -A_1 \\ a_4 & a_3 & \ldots a_{-n+6} & A_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots a_n & (-1)^{n-1} A_{n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \ldots a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_2 & a_1 & \ldots a_{-n+4} & a_{-n+3} \\ a_4 & a_3 & \ldots a_{-n+6} & a_{-n+5} \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots a_n & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

wobei $+\pi$ oder $-\pi$ zu nehmen ist, je nachdem die reellen Theile der z_h sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ, und wo $a_n = 1$ und $a_{-h} = a_{n+h} = o$ zu setzen sind.“

Angegeben ist dieser Integralwerth bereits von Hrn. Matthiessen im Jahrg. 1867 d. Schlöm. Zeitschrift, und nur weil der Beweis sich etwas einfacher gestalten lässt, bin ich nochmals darauf zurückgekommen. Von Interesse ist vielleicht die Schlussbemerkung, dass aus jenem Integralwerth n Verhältnisse von Determinanten der a sich ergeben, welche, falls alle a reell sind, sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sein müssen, je nachdem alle reellen Theile der Wurzeln von $f(z) = 0$ positiv oder negativ sind.

Insterburg. Kostka.

R. Engelmann: Abhandlungen von Fr. W. Bessel. Herausgegeben von R. Engelmann. Dritter Band: VI. Geodaesie. VII. Physik. VIII. Verschiedenes. — Literatur. — Mit einem Bildniss Bessel's aus dem J. 1839, fünf lithographirten Tafeln und dem Facsimile eines Briefes an Encke. Leipzig, Engelmann 1876. (Zweiter Band, besprochen in dieser Zeitschr. I. Bd. 2. Hft. S. 318.)

Bei dem verschiedenartigen und reichen Inhalt des vorliegenden letzten Bandes der Bessel'schen Abhandlungen kann hier nur das Wesentlichste der Arbeiten über Geodaesie, Physik und verschiedene Theile der Astronomie kurz berichtend dargelegt werden. — Die VI. Abtheilung, *Geodaesie,* enthält neben rein theoretischen Aufsätzen und Abhandlungen über Berechnung geodätischer Vermessungen (125—129) und über den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten (130) hauptsächlich die Arbeiten, die sich auf die Ermittelung der wahrscheinlichsten Figur der Erde aus den von verschiedenen Seiten unternommenen Gradmessungen beziehen (131—134). Die Grundlagen, aus denen Bessel seine bis vor Kurzem allgemein angenommenen Constanten des Erdsphäroids ableitete, haben bekanntlich die peruanische, 1. und 2. indische, französische, englische, hannoversche, dänische, preussische, russische und schwedische Gradmessung geliefert; die Constanten, die sich aus ihrer Verbindung und nach Berücksichtigung eines Fehlers der französischen Gradmessung ergaben, sind: Halbe Achse *(a)* des Erdsphäroids 3272077,1, halbe kleine Achse *(b)* 3261139,3 Toisen, $\frac{a}{b} = \frac{299,15}{298,15}$.

In mehr als einer Hinsicht massgebend für alle späteren wurde die in Verbindung mit Baeyer 1831—34 ausgeführte Gradmessung in Ostpreussen; sowohl die Originalität und Schärfe der Beobachtungs- und Reductions-Methoden, wie die durch Repsold's Kunst im Basisapparat wesentlich geförderte Genauigkeit der geodätischen — wie auch der astronomischen — Messungen und die Sicherheit der hieraus gezogenen Schlüsse und Resultate haben dieser eine der ersten Stellen unter allen neueren und jedenfalls die erste unter den Gradmessungen aus dem 1. Drittel des 19. Jahrhunderts verschafft. Aus dem umfangreichen, von Bessel und Baeyer hierüber veröffentlichten Werke (Berlin, 1838) findet sich das Hauptsächliche in Abh. 135 des vorliegenden Bandes; nur die eigentlichen Beobachtungen und numerischen, den speciellen Fall dieser Gradmessung betreffenden Daten wurden ausgeschlossen; dagegen Alles von allgemeinerem Interesse, Entstehung und Plan der Gradmessung, Untersuchungs- und Beobachtungsmethoden, Rechnungsvorschriften, sowie die Endresultate unverkürzt wiedergegeben.

Zwar nicht in beabsichtigtem und directem, aber in einem durch das gemeinsame Ziel doch erkennbaren Zusammenhang mit den geodätischen Arbeiten stehen die Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels (Abh. 137), die Bessel im Jahre 1826 an einem nach seinen Angaben von Repsold construirten Pendelapparat in Königsberg (später, 1835, auch in Berlin) anstellte. Diese grosse Arbeit gilt mit Recht als Muster einer exacten Untersuchung im Gebiete der *Präcisions-Physik*, sowohl nach Anordnung und Ausführung der Beobachtungen, wie hinsichlich der theoretischen Behandlung der Beobachtungsresultate. Abgesehen von verschiedenen zum Theil wenig einflussreichen Störungen, denen die Bewegung eines Pendels zufolge seiner Construction unterworfen ist, zeigte und berücksichtigte er zuerst den nicht unerheblichen Einfluss, den die Luft als mitschwingende Masse auf die Pendelbewegung ausübt, und der mathematisch in einem bisher vernachlässigten Glied der Reduction auf den leeren Raum, physikalisch in einer Vermehrung des Trägheitsmoments des Pendels zum Ausdruck kommt. In einer spätern Abhandlung kam er nochmals auf diesen Gegenstand zurück (Abh. 138). — Die Pendelversuche und der Besitz des vortrefflichen Pendelapparats führten Bessel zur Behandlung der Frage, ob die

Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, für alle als gleich anzusehen sei. Die Untersuchung von 13 Körpern von sehr verschiedenem specifischen Gewicht (Wasser — Eisen) bestätigten das schon von Newton aus freilich sehr rohen Versuchen gefundene Resultat der Proportionalität von Masse und Anziehung (Abh. 139).

Verschiedene kleinere, zum Theil durch die Reduction der Meridian-Höhen veranlasste Arbeiten behandeln meteorologische und physikalische Instrumente und deren Berichtigung; so giebt Abh. 141 die bekannte Calibrirungs-Methode für Thermometer; in Abh. 142 ist eine Tafel für die Reduction der Abwägungen, in 143 die Reduction beobachteter Barometerhöhen entwickelt; zwei umfangreichere (145 und 146) behandeln barometrische Höhenmessungen.

In dem Aufsatz 144, Bemerkungen über eine angenommene Atmosphäre des Mondes, zeigt Bessel, dass die Dichtigkeit einer solchen im günstigsten Fall $\frac{1}{500}$, wahrscheinlich aber geringer als $\frac{1}{968}$ der Erdatmosphäre sei. Drei kurze Aufsätze (147—149) berichten über das Nordlicht vom 18. October 1836, Irrlichter und eine bei einer Feuersbrunst wahrgenommene Lufterscheinung. — In den Jahren 1835—38 wurde die preussische Längeneinheit neu festgestellt und alle hierauf wie auf die Anfertigung genauer Copien des neuen Normalmasses bezüglichen Untersuchungen in einer besonderen Schrift (Berlin, 1839), ihre wesentlichen Resultate aber in den Astron. Nachrichten mitgetheilt (Abh. 150). Die Entwicklung des Schwereeinflusses auf die Figur eines geraden Stabes findet sich als besondere Beilage zu der genannten Schrift (Abh. 151). — Die letzte Abhandlung (152) der Physik stellt die Grundformeln der Dioptrik in einer der Möbius'schen ähnlichen Art, mit Hülfe von Kettenbruchsentwickelung, dar; Bessel leitete sie bei der Untersuchung des Königsberger Heliometers ab (vgl. Abh. 71).

Die letzte, VIII. Abtheilung des 3. Bandes der Abhandlungen umfasst eine Reihe von grösseren und kleineren Aufsätzen und Arbeiten aus *verschiedenen* Theilen der Astronomie, die sich theils nicht ohne Zwang einer der früheren Abtheilungen einordnen liessen, theils noch nachträglich und bei einer genauen Durchsicht aller Schriften als wünschenswerth zur Aufnahme herausstellten. Unter den grösseren mögen die Arbeiten: „über die Figur des Saturns, mit Rücksicht auf die Attraction seiner Ringe“ (154) — eine der frühesten theoretischen Untersuchungen Bessels aus dem Jahre

1807 —, ferner die Beobachtungen und Betrachtungen über die „persönliche Gleichung bei Durchgangsbeobachtungen“ (161, mit 2 Nachträgen), die Untersuchung „über den Einfluss der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen“ (162), die „Betrachtungen üb. die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen“ (163), „über die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen“ (164) und „über Sternschnuppen“ (165), hier namentlich erwähnt werden. Die umfangreichste Abhandlung, die „Analyse der Finsternisse“ (169), ist, wie die über den „Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen“ (Auszug, 167), die „Bestimmung der Masse des Jupiter“ (168), die „Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernungen des Mondes von anderen Himmelskörpern“, sowie zwei kürzere Aufsätze, von denen der zweite — die Beobachtung des Mercur-Durchganges am 5. Mai 1832 — die erste zuverlässige astronomische Untersuchung und Bestimmung der Irradiation enthält (171), den Astronomischen Untersuchungen (Königsberg, 1841, 42) entnommen. — Ausser einigen Aufsätzen biographischer Natur: Erinnerungen an F. W. Flemming (180, nur zum Theil von Bessel), Sir William Herschel (181), Ueber Olbers (182) sind schliesslich noch einige Stücke nicht-astronomischen Inhalts, die zur Beurtheilung Bessel's in anderer Hinsicht aber nicht ohne Interesse schienen, mit aufgenommen worden: ein Aufsatz über Erman's Reise in Sibirien und Kamtschatka (183), über Uebervölkerung (184) und endlich ein Schreiben an die Redaction der Königsberger Allgemeinen Zeitung (185), welches den Menschen und Politiker Bessel trefflich charakterisirt.

Den Abschluss vorliegender Ausgabe bilden *Literatur-Verzeichnisse*; zunächst ein „allgemeines Verzeichniss der Schriften Bessel's“, von dessen 487 Nummern Bessel selbst 401 angehören, die übrigen 86 Mittheilungen seiner Methoden, Formeln, Beobachtungen, sowie Auszüge und Uebersetzungen aus seinen Schriften und Abhandlungen enthalten. Als zweites schliesst sich noch die Literatur über Bessel, mit 25 Nummern, an. — Dem 3. Band ist überdiess noch ein Bildniss aus dem Jahre 1839 (Lichtdruck nach dem Jensen'schen Oelgemälde), sowie das Facsimile eines Briefes an Encke beigegeben.

R. Engelmann.

S. Günther: Note sur Jean-André Segner, premier fondateur de la météorologie mathématique. (Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Aprilheft 1876.)

Die Idee, meteorologische Veränderungen auf die durch Mond und Sonne bedingte Ebbe und Fluth der Atmosphäre zurückzuführen, findet sich nahezu bei allen Fachschriftstellern aus der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts, allein es scheint bisher allgemeine Unkenntniss darüber geherrscht zu haben, wer als der Erste die bezüglichen Verhältnisse mathematisch untersucht habe. Vorliegende Abhandlung vindicirt dies Verdienst dem tüchtigen Pressburger Andreas Segner, der folgeweise mathematische Professuren zu Jena, Halle und Göttingen bekleidete. In einem einführenden Paragraphen werden kurz die nicht unbeträchtlichen Leistungen, welche dieser produktive Gelehrte besonders im Fache der Mechanik und Optik bethätigte, skizzirt; alsdann wird das Jenaische Universitätsprogramm, welches die durch kosmische Einflüsse bedingten Oscillationen des Barometerstandes rechnerisch behandeln lehrt, wörtlich abgedruckt. Als positiv interessant wird an demselben die mathematische Einkleidung des physikalischen Problems und die Einführung der Nebenbedingungen in die aufgelöste Differentialgleichung hervorgehoben; als Mängel sind zu verzeichnen die Ignorirung des Mariotte'schen Gesetzes, Vernachlässigung mehrerer integrirender Nebenumstände und irrthümliche Auffassung der Halley'schen Erklärung der Passatwinde. Da natürlich auch das numerische Resultat ein viel zu erhebliches ist werden zur Vergleichung die von Laplace für den nämlichen Zweck aufgestellten complicirten Formeln sowie deren Ausrechnung durch Bouvard reproducirt. Als Anhang folgt die Bemerkung, dass noch vor Letzterem ein deutscher Astronom, Namens Stark, bei Beantwortung einer von der kurbayrischen Akademie gestellten Preisfrage zu analogen Ergebnissen gelangt ist.

Ansbach. S. Günther.

S. Günther: Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes. (Denkschriften der naturforschenden Gesellschaft zu Nürnberg. 6. Band.)

Diese Arbeit, welche eine Menge da und dort verstreuter Einzelbemerkungen zu sammeln und durch neu aufgefundene Materialien zu verbinden bestimmt ist, zerfällt naturgemäss in drei Theile: Alterthum, Mittelalter, Neuzeit bis zum Jahre 1636. Was den ersten anlangt, so galt es eigentlich einzig und allein kritisch zu untersuchen, ob die mannigfachen Fakta, welche eine bewusste oder unbewusste Anwendung des Coordinatenprincipes bei den Griechen zu involviren schienen, wirklich in diesem Sinne gedeutet werden dürfen. Diese Untersuchung lehrte, dass bei den allein in Frage kommenden Vertretern der reinen Mathematik, Archimedes und Apollonius, hievon gar keine Rede sein kann, und auch im Gebiete der angewandten Mathematik nur in sehr beschränktem Masse. Erst bei Eratosthenes und Hipparch tritt die Bestimmung eines Ortes der Sphäre durch zwei Bögen grösster Kreise bestimmt hervor; die Idee einer Ortsbestimmung durch Punktcoordinaten in der Ebene dagegen dürfte sich einzig und allein in der Geodaesie des Alexandriners Hero (100 v. Chr.) finden. — Was nun das Mittelalter anbelangt, so ist es dem Verf. gelungen, das Verbindungsglied zwischen jenen ersten Anfängen und der bereits ziemlich fortgeschrittenen Auffassung Nicole Oresme's aufzufinden. Ein lateinischer Münchener Codex (Nr. 14436) des ehemaligen Emeram-Klosters zu Regensburg enthält nämlich als Zugabe zum Somnium Scipionis des Macrobius einen Auszug aus Plinius, welcher die Bahnen der Planeten im Thierkreis behandelt und — was bis jetzt nicht nachweisbar gewesen sein dürfte — graphisch durch Abscisse und Ordinate darstellt. Würde man einen beliebigen Meridanschnitt durch die Zodiakalzone führen und von diesem aus die Gürtelfläche wie den Mantel eines abgestumpften Kegels nach der Tangentialebene des Aequatorpunktes abrollen, so bekäme man etwa jene Zeichnung, und zwar würde die Aufschlitzungslinie die Ordinatenaxe, der Parallelkreis von 66°30′ Südpol-Distanz die Abscissenaxe vorstellen. Der astronomischen Entstehung gemäss werden x und y beziehungsweise als latitudo und longitudo bezeichnet, und es erscheint so nicht unmöglich, dass jene allgemeinere Terminologie des Oresme — latitudines-Coordinaten — unmittelbar auf jenen Vorläufer im zehnten Jahrhundert zurückleitet. — Dass der genannte französische Geometer um die Mitte des vierzehnten Säculums den Coordinatenbegriff soweit ausgebildet hatte, als die Beschränkung auf den ersten Quadranten zuliess, war bereits seit längerer Zeit durch die umfassenden Forschungen Curtze's bekannt, und so musste sich an dieser Stelle die Darstellung darauf beschränken, von jenen Arbeiten Bericht zu erstatten, einzelne ferner liegende

Gesichtspunkte hervorzuheben und zumal auf Beziehungen jener alten Lehre von den „latitudines“ zu neueren Doktrinen hinzuweisen. — In der sogenannten Neuzeit ragt besonders Fermat's Name hervor; er operirte, wie dies zuerst von Baltzer nachgewiesen wurde, mit den Coordinaten ganz in unserem Sinne und wandte dieselben vielfach bei seinen Untersuchungen über algebraische Curven an; wie viel Gewicht seine Zeitgenossen auf diese Versuche legten, geht u. a. aus der hier ausführlicher erörterten Thatsache hervor, dass der bekannte Compendienschreiber Herigone selbst nach dem Jahre 1636 die Coordinaten nicht mit Descartes', sondern lediglich mit Fermat's Namen in Verbindung bringt. In jenem Jahre erschien des Erstgenannten „Geometria“, und damit endet die Vorgeschichte des Coordinatenprincipes, um in dessen Geschichte überzugehen. Damit endet denn auch naturgemäss unsere Erzählung, aus der jedenfalls so viel hervorgeht, dass die Coordinatengeometrie keine „proles sine matre creata“ genannt werden dürfe, wie dies von Chasles und im Anschluss an ihn auch von Anderen geschehen ist.

Ansbach. S. Günther.

A. Toepler: Bemerkung zur Fourier'schen Reihe. (Notiz in No. XXVI u. XXVII des Anzeigers der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien vom 7. Dec. 1876.)

Ich habe darauf aufmerksam gemacht, dass durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme der Coefficient der Fourier-schen Reihe bei endlicher Gliederzahl bestimmt ist, bevor überhaupt die Darstellbarkeit von Functionen durch die Reihe mit unendlicher Gliederzahl bewiesen ist.

Es sollen die Coefficienten a und b der nach ganzen Vielfachen von $\frac{\pi x}{A}$ fortschreitenden Reihe:

$$Y_1 = \sum_{k=o}^{k=m} a_k \sin \frac{k\pi x}{A} + \sum_{k=o}^{k=n} b_k \cos \frac{k\pi x}{A},$$

welche sich auf beliebige, endliche Gliederzahl (m und n) erstreckt, so bestimmt werden, dass die Reihe für alle Werthe des x innerhalb des Intervalles von $-A$ bis $+A$ eine gegebene Function $Y_2 = F(x)$ mit möglichst grosser Annäherung darstellt. Dies erfordert, dass das Integral:

$$Z = \int_{-A}^{+A} \left\{ F(x) - \sum_{k=o}^{k=m} a_k \sin \frac{k\pi x}{A} - \sum_{k=o}^{k=n} b_k \cos \frac{k\pi x}{A} \right\}^2 dx$$

ein Minimum werde, wobei die Coefficienten a und b als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind.

Die Differentiation liefert $m + n$ Bedingungsgleichungen, in welchen jedoch die Integrale der Glieder von der Form sin . cos, ferner sin . sin und cos . cos ungleicher Vielfacher von $\frac{\pi x}{A}$, zwischen den Gränzen verschwinden. Die Gleichungen reduziren sich auf die Gestalt:

$$\int_{-A}^{+A} F(x) \sin \frac{k\pi x}{A} dx = a_k \int_{-A}^{+A} \overline{\sin \frac{k\pi x}{A}}^2 dx \text{ und}$$

$$\int_{-A}^{+A} F(x) \cos \frac{k\pi x}{A} dx = b_k \int_{-A}^{+A} \overline{\cos \frac{k\pi x}{A}}^2 . dx$$

Aus diesen gehen die a und b als die bekannten Fourier'schen Coefficienten hervor. Es ist dabei gleichgültig, ob man in der Reihe eine begränzte oder unbegränzte Gliederzahl annimmt. Jeder beliebige Complex von Gliedern beider Arten, selbst ein einzelnes Glied führt zu demselben Coefficienten. Hat überhaupt eine Function $f(x)$ die Eigenschaft, dass

$$\int_o^A f(gx) f(kx)\, dx = 0$$

und dass $\int_o^A \overline{f(kx)}^2 dx$ einen bestimmten, endlichen Werth besitzt, wobei unter g und k zwei von einander verschiedene ganze Zahlen zu verstehen sind, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass nach derselben Methode die Coefficienten der Reihe

$$\sum_o^k a_k f(kx)$$

so bestimmt werden können, dass die Reihe eine gegebene Function mit möglichst grosser Annäherung zwischen $x = 0$ und $x = A$ darstellt, wobei stets die Werthe der Coefficienten von der Anzahl der Reihenglieder unabhängig sind.

Nach einer Bemerkung von Prof. Boltzmann*) steht diese Eigenschaft bei der Fourier'schen Reihe im Zusammenhange mit dem bekannten Satze, dass die mittlere lebendige Kraft der schwingenden Bewegung eines materiellen Punktes gleich ist der Summe der mittleren lebendigen Kräfte der einfachen Pendelschwingungen, in welche jene Bewegung zerlegt werden kann. Es lässt sich unter dieser Voraussetzung zeigen, dass der Ausdruck

$$\int_0^{+A} \left\{ F(x) - a_k \sin \frac{k\pi x}{A} \right\}^2 dx$$

ein Minimum ist, wenn a_k gleich dem Coefficienten des entsprechenden Gliedes in der für $F(x)$ gesetzten Fourier'schen Reihe wird; dies drückt in der That die obige Eigenschaft aus. Indessen wird bei dieser Betrachtungsweise die Entwickelung der Fourier'schen Reihe vorausgesetzt, während die in Rede stehende Eigenschaft für Reihen mit begränzter Gliederzahl unter den bezeichneten Bedingungen ausgesprochen werden kann, bevor die Darstellbarkeit von Functionen in unendlicher Reihe erwiesen ist.

Dresden. Toepler.

G. Escherich: Flächen II. Ordnung mit einer Symptosen-Axe.

(Grunert's Archiv. Theil LX.)

Als ich, durch die Abhandlnng Steiner's „Allgemeine Betrachtungen über doppelt berührende Kegelschnitte“ angeregt, die einander einbeschriebenen Flächen II. Ordnung zu behandeln versuchte, bedurfte ich bei dem gewählten Gange der Untersuchung verschiedener Sätze über jene Lage zweier Flächen II. Ordnung, bei welcher sie sich in ebenen Curven schneiden. Da die hierbei aufgetauchten Fragen meines Wissens nirgends in *rein geometrischer* Weise besprochen waren, so versuchte ich dies in der obigen Abhandlung. Ich war hiebei besonders bemüht, die Darstellung so einzurichten, dass eine Unterscheidung, ob einzelne Elemente der auftretenden Gebilde reell oder imaginär sind, überflüssig würde. Nach Ableitung der allgemeinen Eigenschaften untersuche ich dann, unter welchen Umständen einzelne dieser Gebilde reell oder imaginär sind.

---

*) Anzeiger der Wiener Akad. II vom 11. Jan. 1877.

G. Escherich: Die reciproken linearen Flächensysteme. (Erscheint in den Sitzungsberichten von 1877 der kaiserl. Akademie in Wien.)

Hiemit habe ich aus naheliegenden Analogien zwei solche lineare Flächensysteme bezeichnet, deren Parameter durch *nur eine* lineare Gleichung an einander geknüpft sind. Ich erörtere zunächst die geometrische Bedeutung dieser Verbindungsweise der Parameter. Die hiebei erhaltenen Gleichungen führen zu der Erkenntniss, dass in jedem der beiden linearen Systeme sich ein dreifach unendliches System von Flächen vorfindet, dessen einzelne Flächen als den einzelnen Punkten des Raumes zugeordnet erscheinen. *Die* Punkte des Raumes, welche in ihren zugeordneten Flächen dieser Systeme liegen, bilden eine Fläche, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen der beiden linearen Systeme ist. Diese Fläche nenne ich das Erzeugniss der beiden reciproken linearen Systeme. Durch jeden Punkt dieser Fläche gehen seine beiden ihm zugeordneten Flächen der beiden Systeme und jede Schaar dieser Flächen, welche demselben linearen Systeme angehört, umhüllt*) eine neue Fläche. Diese beiden Eingehüllten fallen zusammen, wenn die beiden reciproken Systeme aus demselben linearen Flächensysteme der III. Stufe abgeleitet werden. Bilden überdies in diesem Falle die Constanten der reciproken Beziehung eine symmetrische Determinante, so wird die Eingehüllte mit dem Erzeugniss der beiden reciproken Systeme identisch (Polarsystem); bilden die Constanten eine „schiefe" Determinante, so entspricht immer irgend einem Punkte des Raumes in beiden Systemen dieselbe Fläche und jeder Punkt liegt in seiner zugehörigen Fläche (Nullsystem).

Ausgehend von der Gleichung der von den beiden reciproken Systemen erzeugten Fläche, erörtere ich nun die Frage, ob auch umgekehrt jede Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung sich durch zwei reciproke lineare Flächensysteme darstellen lässt. Während nun für zwei reciproke lineare Systeme von höherer als der II. Stufe dies unmittelbar aus der Form der Gleichung einleuchtet, erscheint dies fraglich bei zwei reciproken Flächenbündeln. Für diesen Fall hat schon Reye**) nachgewiesen, dass sich die Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung dann durch zwei reciproke Bündel m^{ter} und n^{ter} Ordnung herstellen lässt, sobald sich auf derselben eine Punktgruppe (m, m, m) oder (n, n, n) vorfindet. Er hat ferner gezeigt, dass auf jeder

*) Dies Wort in etwas weiterer Bedeutung als gewöhnlich genommen.

**) Math. Annalen Bd. II.

Fläche nicht nur, wie selbstverständlich, die Gruppe $(1, 1, 1)$, sondern auch $(2, 2, 2)$ existirt, dass also jede Fläche auf zwei Arten durch reciproke Bündel erzeugt werden kann. Die Fragen nun, welche Reye hiebei als der Erledigung bedürftige hinstellte, ob sich auf einer Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung immer eine (m, m, m) construiren lässt, oder welche derartigen Gruppen sich auf ihr vorfinden, suche ich vollständig zu beantworten. Ich zeige auf Grund einiger von Reye bei dieser Gelegenheit gegebenen Sätze, dass sich mit Ausnahme der Fläche sechszehnter jede Fläche n^{ter} Ordnung nur durch Bündel 1^{ter} bis 7^{ter} und zu ihnen reciproke $(n-1)^{\text{ter}}$ bis $(n-7)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen lässt, und dass die Fläche sechszehnter Ordnung auch durch zwei reciproke Bündel 8^{ter} Ordnung hergestellt werden kann.

Im Anschlusse hieran bestimme ich die Anzahl der Knotenpunkte, welche von den beiden eine gegebene Fläche erzeugenden Bündeln willkürlich auf derselben angenommen werden darf. Damit ist bekannt, wie viele von den eine Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmenden Punkten man bei der Construction derselben aus dieser Anzahl von Punkten zu Knotenpunkten zweier reciproker Bündel verwenden darf, welche die Fläche hervorbringen sollen. Diese Zahl ist bei zwei reciproken Bündeln m^{ter} und n^{ter} Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}\{3N(n)+3N(m)-N(n+m)\}-2$$

wenn eben diese Zahl eine ganze Zahl ist oder, wenn dies nicht zutrifft:

$$\tfrac{1}{2}\{3N(n)+3N(m)-N(n+m)-1\}-2$$

wo aber dann noch eine Coordinate eines anderweitigen Knotenpunktes disponibel bleibt. Da aber in diesem Falle sich für eine directe Construction der gesuchten Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den gegebenen $N(m+n)$ Punkten die Verfügbarkeit über diese eine Coordinate nicht auswerthen lässt, so wird man durch $N(n+m)-1$ der gegebenen Punkte einen Flächenbüschel $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung legen und dann in diesem die Fläche suchen, welche durch den ausgeschiedenen Punkt hindurchgeht. Denn bei der Construction einer Fläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung aus nur $N(m+n)-1$ Punkten darf man

$$\tfrac{1}{2}\{3N(n)+3N(m)-N(n+m)+1\}-2$$

derselben zu Knotenpunkten der beiden reciproken Bündel wählen, mit deren Wahl aber die Fläche vollständig bestimmt ist. Je nach der verschiedenen Vertheilung dieser Zahl der verfügbaren Knotenpunkte unter die $N(n+m)-1$ Punkte erhält man *verschiedene* Flächen $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche also den gesuchten Flächenbüschel bilden.

Dieses Verfahren wird nun zur *Construction der allgemeinen Fläche III. Ordnung aus 19 gegebenen Punkten* eingeschlagen.

Ich zeige also zuvörderst eine Construction der Fläche III. Ordnung aus 18 gegebenen Punkten. In diesem Falle darf man nach den obigen Angaben sieben der gegebenen Punkte zu Knotenpunkten der beiden reciproken Bündel wählen. Ich bestimme sie zu Knotenpunkten des Bündels der II. Ordnung. Da nun ein Flächenbündel zu seinem Polarenbündel bezüglich irgend eines Punktes projectivisch ist, so reducirt sich die gestellte Aufgabe auf folgende:

„Den Mittelpunkt eines zu einem gegebenen reciproken Strahlenbündels zu finden, wenn von jeder Ebene des gesuchten Bündels, welche einem von elf bestimmten Strahlen des gegebenen entspricht, ein Punkt gegeben ist."

Eine einfache Discussion dieser Aufgabe lehrt, dass der gesuchte Punkt ein bestimmter von den vier Ausnahmepunkten eines tetraedalen quadratischen Complexes ist, zu dessen Construction man durch Lösung der folgeuden Aufgabe gelangt:

„Zu einem gegebenen Systeme ein reciprokes zu construiren, wenn einem gegebenen Punkte des ersten eine bestimmte Ebene des gesuchten zugewiesen und wenn von jeder Ebene des gesuchten Systems, welche einem von elf bestimmten Punkten des ersten entsprechen soll, ein Punkt gegeben ist."

Diese Aufgabe ist in der allgemeineren enthalten:

„Zu einem gegebenen Systeme ein reciprokes zu construiren, wenn von jeder der fünfzehn Ebenen des gesuchten Systems, welche einem von fünfzehn bestimmten Punkten des ersten entspricht, ein Punkt gegeben ist."

Diese Aufgabe löse ich durch ein stufenförmiges Verfahren, welches mit jedem Schritt von einem angenommenen Systeme, in welchem fünf Ebenen des gesuchten Systems durch fünf der gegebenen Punkte willkürlich gelegt und den bestimmten fünf Punkten des gegebenen Systems zugewiesen wurden, zu einem neuen führt, in welchem immer zwei weitere Ebenen durch die ihnen bestimmten der fünfzehn gegebenen Punkte gehen.

— Nebenbei bemerkt ist mit der Lösung dieser Aufgabe nicht allein der gesuchte Mittelpunkt des Strahlenbündels, sondern auch eine, allerdings nichts weniger als elegante, punktweise Construction der Fläche der II. Ordnung aus neuen gegebenen Punkten gefunden, und die Aufgabe erledigt:

Es sind zweimal vierzehn Punkte $A_1, A_2 \ldots A_{14}$; $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{14}$ gegeben, man soll zwei Punkte O und O' finden, welche die Mittelpunkte zweier reciproker Strahlenbündel sind, dergestalt, dass den Strahlen $OA_1, OA_2 \ldots OA_{14}$ des einen im anderen Ebenen entsprechen, welche bezüglich durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{14}$ gehen. —

Ich zeige nunmehr, wie sich zu jedem Strahle des Strahlenbündels die entsprechende Fläche des Flächenbündels und ihre Durchschnittspunkte finden lassen. Diese Constructionen können ebenso wie alle vorhergehenden mit blosser Hilfe von Lineal und Cirkel ausgeführt werden.

Nach Lösung dieser vorbereitenden Aufgaben gehe ich an die Construction der allgemeinen Fläche III. Ordnung aus neunzehn Punkten. Zu diesem Behufe lege ich durch achtzehn derselben zwei Flächen III. Ordnung d. h. es werden die sie erzeugenden reciproken Bündel in der gelehrten Weise construirt und ich zeige dann, wie man mit Hilfe derselben eine beliebige Zahl von Punkten der gesuchten Fläche construiren könne. Eine bestimmte Anzahl solcher hinzugewonnener Punkte genügt jedoch, um zwei reciproke Bündel festzulegen, welche die gesuchte Fläche erzeugen.

Die Möglichkeit, auch die hiebei aufgetauchte Aufgabe:

> „Wenn von sechs Durchschnittspunkten einer Curve III. Ordnung und eines Kegelschnittes zwei bekannt sind, den durch die vier anderen bestimmten Kegelschnittsbüschel zu construiren"

blos mit Lineal und Cirkel lösen zu können, verstattet es, diese ganze Construction der allgemeinen Fläche III. Ordnung durch nur diese Hilfsmittel ausführen zu können.

Graz. G. Escherich.

E. Hess: Ueber einige merkwürdige, nicht convexe Polyeder.
(Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. No. 1. Jan. 1877. S. 1—13.)

Der Verfasser hat durch die Ausdehnung seiner Untersuchungen über die *zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder* (vgl. diese Berichte I, S. 229 ff.) auf die *nicht convexen*, sowie auch auf die *nicht continuirlichen* Polyeder eine Anzahl von Körpern erhalten, die noch nicht berücksichtigt zu sein scheinen, obwohl sie in verschiedener Hinsicht merkwürdige und ausgezeichnete Eigenschaften besitzen. In dem vorliegenden Berichte werden die hierhergehörigen *nicht convexen*, aber *continuirlichen* Polyeder unter Angabe einiger ihrer wichtigsten Eigenschaften kurz aufgeführt.

Zuerst werden einige Definitionen und Sätze, die sich zumal auf die Bestimmung der *Art* eines nicht convexen Polyeders beziehen, vorausgeschickt und sodann kurz das Verfahren entwickelt, durch welches man die hierhergehörigen Polyeder auffinden und näher bestimmen kann. Das Verfahren beruht auf der Eigenschaft der zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder höherer Art, vermöge deren der *innerste Kern* ein gleichflächiges, die *äussere Hülle* ein gleicheckiges Polyeder der ersten Art bildet.

Die auf diese Weise erhaltenen, nicht convexen Polyeder zerfallen in zwei *Hauptgruppen*, in *eigentliche* und *uneigentliche* Polyeder, d. h. in solche, welche das von Moebius sog. *Gesetz der Kanten* erfüllen und in solche, bei denen dies nicht der Fall ist.

Die betreffenden *uneigentlichen* Polyeder, welche sog. Möbiussche Körper sind, d. h. solche, bei denen die Oberfläche sowohl durch die *Aussen-*, wie durch die *Innenseite* jeder Grenzfläche gebildet wird, deren Oberfläche und körperlicher Inhalt hiernach *Null* ist, werden nur kurz erwähnt, dagegen wird auf die hierher gehörenden *eigentlichen*, nicht convexen Polyeder etwas genauer eingegangen.

Diese letzteren werden in *zwei Classen* eingetheilt. Für die Polyeder der *ersten* Classe ist die die Art bestimmende Zahl $A < \frac{K}{2}$, wenn K die Summe der Kanten bedeutet, für die der *zweiten* Classe dagegen ist $A = \frac{K}{2}$; dabei ist zugleich für die ersteren Oberfläche und körperlicher Inhalt *von Null verschieden*, für die der zweiten Classe dagegen *gleich Null*, obwohl diese letzteren das Gesetz der Kanten erfüllen, also keine Möbius'schen Polyeder sind.

Die Zahl der Polyeder der *ersten Classe* beträgt 4, indem durch Anwendung des angegebenen Verfahrens aus der Gruppe des $(6 + 8 + 12)$eckigen (2×24) Flachs *zwei*, sich gegenseitig polar entsprechende und aus der Gruppe des $(12 + 20 + 30)$eckigen (2×60) Flachs ebenfalls *zwei* solcher Polyeder erhalten werden, von denen aber jedes sich selbst polar reciprok entspricht.

Die Polyeder der *zweiten Classe* haben, wie erörtert, die Eigenschaft, dass die *Oberfläche* und der *körperliche Inhalt gleich Null* wird. Jede der gleichen Grenzflächen setzt sich nämlich aus einer Anzahl *positiver* Zellen (mit dem gemeinsamen Coefficienten $+ 1$) und einer ebenso grossen Anzahl von *negativen* Zellen (mit dem Coefficienten $- 1$) zusammen, welche bezüglich den ersteren *entgegengesetzt gleich* sind, so dass hiernach der *Inhalt jeder Grenzfläche Null* wird. Für sämmtliche hierhergehörige Polyeder erhält der *innerste Kern* d. h. die innerste körperliche Zelle, so wie auch diesem anliegende Zellen den Coefficienten Null, dieselben bilden also *Löcher* des Polyeders.

Als solche *nicht convexe* Polyeder der zweiten Classe werden aus der Gruppe der gleichflächigen Polyeder mit *Hauptaxe zwei Gruppen* von Körpern erhalten, für welche der Verfasser mit Rücksicht auf ihre kronenförmige Gestalt den Namen *Stephanoide* vorschlägt.

Aus der Gruppe des $(6 + 8 + 12)$eckigen (2×24) Flachs ergeben sich ferner *zwei* nicht convexe Polyeder der 2. Classe, welche sich polar entsprechen und zu den beiden ersten, oben erwähnten der 1. Classe in naher Beziehung stehen.

Endlich liefert die Gruppe des $(12 + 20 + 30)$ eckigen (2×60) Flachs noch 5 solcher Polyeder, von denen sich je zwei polar entsprechen, während der 5. sich selbst entspricht.

Auf die nähere Beschaffenheit der abgeleiteten Polyeder kann hier nicht eingegangen werden; es möge daher nur noch erwähnt werden, dass die inneren Kerne und äusseren Hüllen derselben in vielen Fällen durch die *archimedeischen*, in einzelnen Fällen sogar durch die regulären *(platonischen)* Varietäten von gleichflächigen, bezw. gleicheckigen Polyedern gebildet sind.

Aus der Beschaffenheit dieser inneren Kerne und äusseren Hüllen ergibt sich auch die am Schlusse erwähnte Darstellung dieser Polyeder durch Papp- oder Fadenmodelle.

Marburg. E. Hess.

S. Günther: Note sur la résolution de l'équation indéterminée $y^2 - bx^2 = az$ en nombres entiers. (Journal de mathém. pures et appliquées, Octobre 1876.)

Das Bestreben, auch nicht homogene Gleichungen zweiten Grades in's Bereich der Betrachtung zu ziehen, liess die vorstehend genannte Gleichung bald als eine leicht lösbare erkennen. Setzt man den eingliedrig-periodischen Kettenbruch

$$\cfrac{b}{a - \cfrac{b}{a - \ldots - \cfrac{b}{a_{(n)}}}} = \frac{P_n}{Q_n},$$

so besteht die Relation

$$Q_{2n} = Q_n^2 - b\,Q_{n-1}^2,$$

welche an diesem Orte auf zwiefache Weise, durch Determinanten, wie durch direkte algebraische Umformung, hergeleitet wird. Da, wie hieraus ersichtlich, der constante Partialzähler ein für allemal gegeben ist, so handelt es sich weiterhin blos darum, die Grösse a aus der Gleichung

$$Q_{2n} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n+1}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}} = \dot{a}$$

zu bestimmen, wo $\dot{a}$ nach Crelle allgemein eine durch a ohne Rest theilbare Zahl vorstellt.

Es wird gezeigt, wie sich diese Aufgabe stets auf die Lösung der fundamentalen Gauss'schen Congruenz $u^2 \equiv av \pmod{b}$ zurückführen lässt, ferner werden die Fälle ausgeschieden, in welchen eine Lösung überhaupt nicht möglich ist, und zuletzt wird jeder mögliche Fall durch ein vollständiges Zahlenbeispiel erläutert. — Angehängt ist eine algebraische Notiz von Prof. Mansion in Gent.

S. Günther: Kritik der Raumtheorieen von Helmholtz und Schmitz-Dumont. (Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 1. Jahrg. 6. u. 7. Hft.)

Dieser Aufsatz soll eine vergleichende Kritik zweier modernen Raumtheorieen liefern, wie solche einerseits von Seite der empiristischen, andererseits von derjenigen der idealistischen Schule aufgestellt wurden; die beiden Arbeiten von Helmholtz (in dessen bekannten populären Vorträgen, 3. Heft) und von Schmitz-Dumont (Zeit und Raum, Leipzig 1876) können mit Fug als für jede dieser beiden verschiedenen Auffassungsweisen des Raumes charakteristisch gelten.

Es wird der Nachweis zu führen gesucht, dass der Begriff der ortsverschiedenen Identität (Congruenz) auch von solchen Organismen durch logische Schlüsse erreicht werden könne und müsse, welche durch ihre subjectiven Zustände an der anschauenden Erkenntniss jenes Begriffes gehindert sind, im Uebrigen aber denselben Denkgesetzen gehorchen, wie wir Menschen. Wäre es gelungen darzuthun, dass jene Geometrie, welche die von Helmholtz supponirten „Flächenwesen" auf ihre specielle wie immer gestaltete Wohnfläche begründen sollen, principiell von der unsrigen sich nicht unterscheide, so würde hieraus auch mit Nothwendigkeit folgen, dass, einen „unebenen" Raum in Riemann's Sinne als existirend vorausgesetzt, die darin lebenden Individuen gleichwohl in das Wesen eines krümmungslosen *(euclidischen)* Raumes mit unbeschränkter Transponibilität der Körper sich hineinzudenken im Stande wären.

Indem die zweitgenannte Untersuchung die Existenz eines dreidimensionalen ebenen Raumes als aprioristische Denknothwendigkeit zu begründen unternimmt, tritt sie gegen die Helmholtz'sche Lehre in Opposition. Es gelingt ihr, bei manchen dem ersten Versuche noch anhaftenden Mängeln, beachtenswerthe Gründe für jene Behauptung beizubringen; jedoch soll und kann nicht geleugnet werden, dass die Anschauung der Raumverhältnisse bei solchen Organisationen eine total verschiedene sein könne, welche mit durchaus abweichenden Perceptions- und Denkorganen operiren müssen.

S. Günther: Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 22. Jahrg. 1. Hft.)

Die einzige bislang bekannte Methode, jenes Problem in völlig expliciten Formeln zu lösen, rührt von Oettinger her; dieselbe leidet aber an dem Uebelstand, die bekannte Summenformel für den eingliedrig-periodischen Kettenbruch zu verwenden und somit also einen Specialfall der erst zu erledigenden Aufgabe als bereits bekannt vorauszusetzen. Diese neue Behandlung geht aus von der Identitat eines aufsteigenden und absteigenden Kettenbruches; es ist:

$$\cfrac{\beta_1 + \cfrac{\beta_2 + \cdots + \cfrac{\beta_n + \cfrac{\beta_1 + \cdots + \cfrac{\beta_1 \cdots + \cfrac{\beta_n + \cdots + \cfrac{\beta_q}{\alpha_q}}{\alpha_{n(p)}}}{\alpha_1}}{\alpha_1}}{\alpha_n}}{\alpha_2}}{\alpha_1} = \cfrac{\beta_1\beta_n}{\alpha_1\beta_n - \cfrac{\alpha_1\beta_2\beta_n}{\alpha_2\beta_1 + \beta_2 - \cfrac{\alpha_2\beta_1\beta_3}{\alpha_3\beta_2 + \beta_3 - \cdots - \cfrac{\alpha_1\beta_n\beta_2}{\alpha_2\beta_1 + \beta_2 - \cdots}}}}.$$

Der linkssteigende aufsteigende Kettenbruch ist rein periodisch und besitzt nebst p vollkommenen Perioden noch eine unvollständige von q Theilbrüchen; der rechtsstehende gewöhnliche Kettenbruch ist unrein periodisch, doch umfasst auch seine Periode je n Glieder, und nach p Perioden folgen noch $(q-1)$ Theilbrüche. Der Ausdruck zur rechten Hand ist leicht in independente Form zu bringen; um alsdann den absteigenden Kettenbruch auf die Normalform

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \ldots - \cfrac{b_n}{a_n - \cfrac{b_1}{a_1 - \ldots}}}$$

zu bringen, hat man nur das Gleichungssystem der $2n$ Unbekannten α, β

$$\alpha_i \beta_{i-1} \beta_{i+1} = b_i, \; \alpha_{i+1} \beta_i + \beta_{i+1} = a_i \; (n + i = i)$$

zu lösen. Nachdem α und β allgemein durch Determinanten dargestellt und in die Summenformel eingesetzt sind, ist der angestrebte Zweck völlig erreicht. — Aus diesem Resultat fliesst dann ohne Weiteres ein Satz für zweigliedrig-periodische Kettenbrüche, der von Kahl und dem Referenten früher mit Hilfe verwickelterer Betrachtungsweisen bewiesen worden war.

Ansbach. S. Günther.

A. Favaro: Saggio di cronografia dei matematici dell' antichità (A. 600 a. C. — A. 400 d. C.)

(Padova, premiata tipografia Francesco Sacchetto, 1875.)

Il presente lavoruccio, steso per celebrare una festa di famiglia, non era certamente destinato dall' autore al pubblico scientifico, eppure successivamente se ne occuparono il Cantor nella *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (XX. Jahrg. Hist. Lit. Abth. S. 20), il Günther nell' *Archiv der Mathematik und Physik* (LVIII. Theil, Lit. Ber. CCXXX, S. 14—17) ed il Curtze nel *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (VII. Bd., Jahrg. 1875, S. 1—2): alcuni appunti mossi dal primo e dall' ultimo di questi scrittori decisero autore ad esprimere i suoi intendimenti intorno a questo saggio, cosa, dalla quale si sarebbe astenuto se le sue intenzioni fossero state più giustamente interpretate.

Per quanto consta all' autore, prima di lui non si era peranco pensato ad applicare i metodi grafici agli studi cronologici, chè certamente in questo senso non devono intendersi i tentativi fatti per l'addietro dal Luini, dal Priestley, dal Quetelet e dal Poggendorff: per dare quindi un saggio di questa nuova applicazione egli scelse i dieci secoli che comprendono all' incirca le autichità classiche greca e romana e compilò un elenco degli scienziati che in questo lungo periodo si occuparono di scienze matematiche pure od applicate e ne distribuì i nomi in un rettangolo sopra uno dei cui lati segnò cento divisioni ognuna delle quali corrisponde ad un decennio Per facilitare il collocamento a posto dei singoli nomi, per ognuna delle divisioni segnate sopra uno dei lati del rettangolo condusse una parallela all' altro lato, cosicchè riesce anche più facile al lettore .' assegnare l' epoca nella quale visse un dato personaggio, la quale ricerca è anche agevolata perciò che i varii nomi sono disposti nel rettangolo secondo l' ordine alfabetico. Parve all' autore che per tal modo si possa ruiscire ad una rappresentazione grafica, la quale si presti in modo assai opportuno ad un giudizio sintetico intorno allo stato delle scienze in una determinata epoca, risultando con una semplice occhiata evidenti i nomi di quelli che contemporaneamente le coltivavano.

Naturalmente riferendosi ad epoche così remote sarebbe fuori di luogo il pretendere che la rappresentazione grafica si prestasse ad assegnare l' anno di nascita o di morte, giacchè questi dati nella maggior parte dei casi non sono somministrati dalla storia e la rappresentazione grafica non può crearli: la data relativa ai varii nomi è quella che presso gli scrittori più autorevoli si trova esposta ed in pressochè tutti i casi niuno saprebbe dire se essa si riferisca alla nascita, a qualche fatto importante della vita, od alla morte. La fretta poi colla quale, indipendentemente dalla sua volontà, l' autore dovette pubblicare per quel dato giorno il suo lavoro, non gli permise una esatta correzione, ciocchè per qualche nome aperse l' adito ad errori ortografici, i quali tuttavia non hanno alcuna influenza sulla essenza dello scritto e sullo scopo propostosi dall' autore, che è quello, lo ripetiamo, di porgere una nuova applicazione dei metodi grafici.

A. Favaro: Sulla ipotesi geometrica nel Menone di Platone.

(Padova, Tipografia del Seminario. 1875.)

Nel dialogo platonico che s' intitola da Menone, chiede questi a Socrate se la virtù possa o meno insegnarsi, o se non insegnandosi essa possa almeno venir praticata, ovvero, se non potendosi nè insegnare nè praticare, essa venga da natura agli uomini od in qual altro modo. Dopo una lunga disquisizione, affermando Socrate che ricercare ed apprendere è solo un ricordarsi e Menone richiedendolo di porgere una dimostrazione di questo suo asserto, il Filosofo fa chiamare uno dei servi di Menone ed in un lungo interrogatorio prova trovarsi esso a conoscenza di talune proprietà geometriche, delle quali *a priori* il servo istesso avrebbe potuto ritenersi affatto digiuno. L' autore riproduce questo interrogatorio, illustrandolo con opportune figure geometriche che non si trovano nel testo platonico e giunge finalmente al passo il quale sollevò tante e così animate discussioni e che il prof. Ferrai dell' Università di Padova tradusse come segne '*Ma almeno rimetti qualche poco del tuo imperio sovra di me, e permetti che per via d' ipotesi consideriamo s' ella si possa insegnare o per qual altro modo s' acquisti. E quand' io dico per via d' ipotesi, dico al modo che spesso praticano i geometri, quando si domanda loro per esempio d' una figura, se sia possibile in un dato circolo iscriverla come triangolo: un d' essi in tal caso ci risponderebbe: i' non so se questo sta; ma i' la prendo per un' ipotesi in quanto giova alla soluzione presente. Se questa figura è tale che su le sue linee date descrivendo un cerchio avanzi tanto spazio quanto sia quello della figura inscritta, parmi si ottenga un risultato e oppostamente un altro, se ciò non sia possibile, accada: posta questa ipotesi adunque, voglio dirti quanto risulta dalla inscrizione della figura nel cerchio, e se la sia possibile o no.*

Ora ritiene l' autore evidente che Socrate, giovandosi, per chiarire il suo concetto, d' un esempio tratto dalla geometria, ne agevolasse al suo interlocutore la intelligenza, mantenendolo nell' ordine stesso di idee tracciato nell' interrogatorio del servo, si servisse anzi dell' ultima figura che rimaneva tuttavia segnata sulla sabbia innanzi ad ambedue. Osservando dapprima come la essenza della ipotesi geometrica non abbia nel caso attuale importanza alcuna, ma solo importi di verificare se di ipotesi realmente si tratti, nel senso che di tale artifizio approfittano i geometri, con quello che v' aggiunge il filosofo ogni difficoltà potrebbe dirsi tolta completamente. Chiesto al geometra se sia possibile di inscrivere quel triangolo in un dato cerchio, questi avrebbe risposto: io non so se ciò sia, ma lo suppongo, poichè tale ipotesi mi giova per il progresso della soluzione. Se questa figura proposta è tale che adattata sul diametro del cerchio, avanzi tanto spazio che basti per adattarvi una figura uguale alla precedente, si ottiene un risultato, vale a dire la figura proposta trasformata nel triangolo può essere inscritta nel cerchio ed oppostamente avviene se ciò non ha luogo, vale a dire non è possibile la inscrizione del triangolo, qualora non si verifichi l' accennata condizione.

L' autore dimostra in seguito che la ipotesi è geometricamente esatta, e passa poi in breve rassegna alcune delle diverse interpretazioni date al passo medesimo. Osserva pertanto non doversi quì trattare di questione involuta, perciò che ponendo Platone in bocca a Socrate un esempio tratto dal dominio delle matematiche onde illustrare un concetto filosofico, ripugna il pensare che, mentre a chiarire che cosa intendano i geometri quando formulano una ipotesi, si prestano esempii tratti dalla parte più elementare delle matematiche, Socrate dovesse sceglierne uno la cui interpretazione presentasse difficoltà maggiori che non il concetto ch' esso era destinato a chiarire. L' autore accenna ancora all' importanza del passo sotto il punto di vista della storia delle matematiche.

A. Favaro: Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo.

(Bulletino di Bibl. e Storia delle Scienze Mat. e Fis. Roma 1875.)

Sono note le contraddizioni nelle quali caddero più volte gli storici delle scienze matematiche, i quali si fecero a studiare l' origine delle frazioni continue: sino al Libri era generalmente invalsa l' opinione che questa forma analitica fosse stata trovata dal Brouncker: Libri aveva accennato come un tale onore dovesse invece attribuirsi all' italiano Cataldi, fatto che venne in seguito sostenuto e vittoriosamente dimostrato dal Grunert.

Il Cantor ed il Martin avevano accennato di volo ad una certa forma di frazioni affatto speciale offerta da Leonardo Pisano nel suo *Liber Abbaci*, ma non riconoscendo in tal fatto tutta la importanza del quale è meritevole.

Ora l' autore, seguendo in parte le traccie segnate dal Günther nei suoi '*Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche*' si è proposto di sviluppare la storia delle frazioni continue dal decimoterzo al decimosettimo secolo, ma in ciò fare egli non si è vietata una breve escursione nei tempi che precedono e susseguono questo periodo. Prendendo le mosse dagli antichi Greci, egli dimostra che se riuscirebbe malagevole provare indiscutibilmente che gli antichi fossero in possesso delle frazioni continue, tuttavia il fatto che la maggior parte dei valori approssimati da essi usati sono vere frazioni d' approssimazione, dimostra che quei matematici già le conoscevano, od almeno avevano in ciò un tatto singolare ed è ad ogni modo accertato che essi possedevano gli stessi mezzi per rappresentare sotto forma più comoda il rapporto che passa fra due grandi numeri, benchè non si possa con tutta esattezza precisare l' artificio del quale a tale scopo facevano uso. A dimostrazione del suo assunto cita l' autore i *cicli* della cronologia degli antichi Greci e segnala la proposizione prima del libro settimo di Euclide siccome quella che contiene in sè stessa il metodo ancora oggidì generalmente seguìto per trasformare una frazione comune in una continua. Un altro indizio dell' antichità della forma analitica in questione lo ricava l' autore dalla soluzione data da Teone del problema di trovare in modo approssimato il lato d' una superficie che non ha radice esatta.

Passa quindi a prendere in esame le opere di Leonardo Pisano e dei matematici arabi, dai quali, secondo ogni probabilità, apprese il Fibonacci gran parte del tesoro di che egli seppe arricchire l'Occidente, e, tradotti nel linguaggio algebrico moderno i risultati ai quali erano pervenuti, ne mostra lo stretto nesso con quanto ci tramandarono fra Luca Pacioli, l'Ortega, F. Galigai, F. Feliciano da Lazisio, G. Cardano, N. Tartaglia, R. Bombelli, G. Unicorno ed altri, giungendo senza interruzioni al Cataldi, Del Cataldi si occupa l' autore in modo assai particolareggiato, esponendo un passo nel quale si contiene la invenzione delle frazioni continue, commentandolo algebricamente e porgendo ancora una idea del cammino seguìto dal matematico bolognesse onde pervenirvi.

Contemporaneamente al Cataldi, in Germania ed in Olanda lo Schwenter ed Alberto de Girard avevano accennato ad una forma analitica che ha colle odierne frazioni continue una grandissima affinità ed anche di questi si occupa l' autore.

Dopo ciò si arriva al Brouncker ed al Wallis e nelle ricerche che si riferiscono al metodo col quale il primo di essi sarebbe arrivato alle frazioni continue, l' autore dissente profondamente da quanto scrissero in proposito altri matematici, provando il suo assunto con documenti e dimostrazioni irrefragabili.

L'Huygens chiude la serie degli scienziati, i quali potrebbero vantare qualche pretesa alla invenzione delle frazioni continue, alle quali egli sarebbe pervenuto disegnando di costruire una rappresentazione del moto dei pianeti ed il lavoro si chiude con brevi cenni dati al fine di porgere una idea della parte che le frazioni continue furono chiamate a rappresentare nello sviluppo successivo delle matematiche per opera d' Eulero, dei Bernoulli e di Lagrange.

In tutto il corso del lavoro, l' autore si è astenuto dal sollevare odiose questioni di priorità, dalle quali del resto fa rifuggire l' assoluta originalità della via seguìta da pressochè tutti i citati matematici.

A. Favaro: Lezioni di Statica Grafica.

(Padova, premiata tipografia F. Sacchetto. 1877.)

Corrispondentemente al metodo da lui seguìto nell' insegnamento della Statica grafica al quale attende nella Università di Padova fin dall' anno 1870—71, l' autore ha diviso queste sue lezioni in tre parti, cioè Geometria di Posizione, Calcolo grafico e Statica grafica. Fin da bel principio egli ebbe motivo di riconoscere che troppo scarso era il numero dei suoi allievi, i quali conoscessero la lingua tedesca con profondità sufficiente da essere al caso di consultare con profitto la magistrale opera del Culmann e perciò egli pensò di redigere ad uso dei suoi scolari un riassunto degli scritti originali che gli servono di guida per le lezioni, citando scrupolosamente in capo ad ogni paragrafo le fonti alle quali attinse. Per la Geometria di Posizione egli si valse in particolar modo dell' opera di v. Staudt e di quella del Reye e per il Calcolo grafico e la Statica grafica di quella del Culmann, tenendo conto anche di tutte le pubblicazioni che da altri autori erano state fatte intorno ai medesimi argomenti.

Per quanto riguarda in particolare la Statica grafica, nel presente volume si occupò esclusivamente della parte teorica, riservandosi di pubblicarne le applicazioni in altro volume che vedrà la luce entro il 1878.

A. Favaro: Intorno al probabile autore di una predizione di terremoto riferita da Petrarca.

(Venezia, tip. Grimaldo e C. 1876.)

Quantunque dal titolo apparisca che questo lavoro sia estraneo alle matematiche, pure esso ne interessa la storia, giacchè vi si contengono notizie intorno ad un Vescovo d' Isola che fu discepolo di Andalò di Negro matematico ed astronomo genovese del secolo decimoquarto. Intorno a questo vescovo somministrarono notizie inesatte il Tiraboschi, lo Spotorno ed il Libri, tratti in errore dal P. Ximenes, il quale alla sua volta lo fu da un catalogo di manoscritti magliabechiani compilato dal Targioni-Tozzetti: nè tuttavia può dirsi che il presente scritto soddisfi a tutte le esigenze, ma maggior copia di materiali non riuscì l' autore a raccogliere e ciò non pertanto giudicò opportuno di pubblicare quei pochi dei quali venne a cognizione nella speranza di animare altri a studii ulteriori i quali approdino a qualche cosa di più concreto, somministrando esatte nozioni intorno a questo personnaggio, il quale a più titoli deve destare un certo interesse in quanti si occupano con amore della storia delle scienze.

Padova. A. Favaro.

Enrico Giordani: I sei cartelli di matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche, di Lodovico Ferrari, coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolò Tartaglia, comprendenti le soluzioni dei quesiti dall' una e dall' altra parte proposti. Raccolti, autografati e pubblicati da Enrico Giordani Bolognese. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. Silvestro Gherardi, Preside dell' Istituto Tecnico Provinciale di Firenze. Milano, 1876. R. Stabilimento litograficodi Luigi Ronchi, e Tipografia degli Ingegneri.

La disputa accompagnata da sfide, che ebbero fra loro Nicolò Tartaglia e Lodovico Ferrari in occasione della scoperta, fatta dal primo, della risoluzione delle equazioni algebriche del 3^0 grado, era nota da lungo tempo nei suoi tratti principali agli studiosi della storia delle Matematiche; ma le relative notizie erano quasi tutte d' origine tartagliana, e non potevano condurre lo storico ad un giudizio imparziale della questione. I sei cartelli di sfida del Ferrari, e le sei corrispondenti risposte del Tartaglia, che costituiscono i documenti più importanti in tale argomento erano sconosciuti, o si consideravano come irreparabilmente perduti. Nel 1844 al sig. Professore Gherardi riuscì fortunatamente di scoprire un esemplare di undici fra quei cartelli, mancandone un solo, cioè la sesta ed ultima risposta del Tartaglia. Più tardi fu ancora egli tanto fortunato, da trovare un esemplare di questo. Da tali scritti il Prof. Gherardi trasse importanti e affatto nuove notizie, che comunicò nel suo pregevole scritto, intitolato: *Alcuni Materiali per la storia della Facoltà Matematica dell' antica Università di Bologna* (Bologna 1844) Ma non sembra che i nuovi fatti esposti in questa Memoria siano stati ponderati da tutti con uguale attenzione, perchè vediamo il signor Hankel nella sua pregevolissima recente opera sulla storia delle Matematiche non tenerne conto alcuno, e narrare questa parte della storia con evidente parzialità verso il Tartaglia.*)

La completa collezione dei 12 Cartelli riuniti in un volume, di cui altro esemplare ugualmente perfetto non esistette nè prima nè dopo, fu ceduta dal Prof. Gherardi al celebre matematico ed istorico Guglielmo Libri: dalle mani del quale uscì più tardi non si sa come, per andare a collocarsi non si sa in qual luogo. Dovendo dunque essa riguardarsi praticamente come perduta, o almeno come sottratta indefinitamente al pubblico uso, venne in mente a me sottoscritto di salvare da una totale distruzione quella parte, che ancora si potesse, di così preziosi ed interessanti monnmenti. Fatte perciò ricerche in tutte le principali Biblioteche d' Italia così pubbliche come private (per le quali mi prestò efficace e potente ajuto il sign. Principe Boncompagni), trovai che di alcuni Cartelli esistevano quà e là scompagnati e dispersi ora due, ora tre, ora quattro esemplari; ad eccezione del sesto di Tartaglia, del quale un solo esemplare si conosce esistere qui in Milano; e del sesto Cartello di Ferrari, del quale più non fu possibile trovare esemplare alcuno in nessun luogo. Di tutto quello che ho potuto trovare, non badando

*) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und im Mittelalter. Leipzig 1874.

nè a fatica nè a spesa, ho tratto copia in forma di fac-simile con tutta quella esattezza, di cui sono stato capace, riproducendo non solamente la figura dei tipi, ma ancora tutte le più minute particolarità, in guisa da produrre esemplari per ogni uso equivalenti agli stessi originali.

Nel presente volume sono dunque riprodotti in fac-simile colla litografia tutti i cartelli, meno l' ultimo del Ferrari, che come si è detto, non esiste più, od è tenuto gelosamente nascosto. Ma anche questo si è voluto che non mancasse; e per completare la collezione, si è riprodotto coi tipi ordinarii e colla massima esattezza ortografica che si è potuto, la copia manoscritta, che per buona fortuna ne aveva conservato presso di sè il Professor Gherardi. Il volume è preceduto da una Introduzione storico-bibliografica, che per sua somma cortesia il Prof. Gherardi volle scrivere appositamente: vi è aggiunto un elenco, dove sono registrati per ciascuno dei 12 cartelli tutti gli esemplari, di cui si conosce l' esistenza e la loro sede. Del quale elenco per la massima parte sono debitore alla gentilezza di S. E. il Principe Boncompagni, ben chiaro in Italia e fuori per il largo e disinteressato favore, che presta a questi studi.

Con questo lavoro, nel quale se poco fu il merito dell' ingegno grave fu la fatica, e gravissima la spesa incontrata nella pubblicazione, io spero d' aver reso qualche servizio non solo agli amatori delle curiosità bibliografiche, ma anche alla storia della scienza. Infatti la materia di questi dodici cartelli non è già tutta di sfide, di minacce e d' insulti reciproci, come si potrebbe credere, e come era il costume di quei tempi: ma oltre ai materiali per ricostruire la vera storia della scoperta della risoluzione delle equazioni cubiche vi s' incontra il testo e la soluzione dei 31 problemi proposti da Tartaglia a Ferrari e degli altrettanti proposti da Ferrari a Tartaglia: problemi dei quali la difficoltà e l'estensione superano in alcuni casi tutto quello che si potrebbe immaginare in quel tempo. Così per esempio ad alcune questioni proposte da Tartaglia, concernenti la risoluzione di certi problemi di geometria con una data apertura di compasso risponde il Ferrari, dando in poche pagine sciolte in quel modo al suo avversario non solo le proposizioni date, ma tutti i teoremi e problemi d' Euclide. Noi apprendiamo qui ancora, che il primo a proporsi i problemi con data apertura di compasso non fu nè il Ferrari, nè il Benedetti, ma quello stesso Scipione dal Ferro, che primo riuscì nella soluzione delle equazioni cubiche.

Il volume consta di 164 pagine di litografia in-quarto e di 44 pagine stampate al modo ordinario. Del piccolo numero di esemplari che se ne è tirato gli amatori potranno ottenerne, inviando per ogni esemplare Marchi 48 (o Franchi 60) *al Signor Enrico Giordani, Milano, presso il Regio Osservatorio Astronomico,* oppure dandone commissione ad un librajo, al quale dietro pagamento in pronti contanti si farà lo sconto del 20 p%.

Milano 18 Marzo 1877. Enrico Giordani.

A. Cayley: An elementary treatise on Elliptic Functions. 8°. 1876 pp. I to X and 1 to 384.)

The treatise is founded upon Legendre's *traité des Fonctions Elliptiques* and upon Jacobi's *Fundamenta Nova* and Memoirs by him in Crelle's Journal: comparatively very little use is made of the investigations of Abel, or of those of later writers. It is shown how the transition is made from Legendre's Elliptic Integrals of the three kinds to Jacobi's amplitude, which is the argument of the Elliptic Functions (the sine, cosine, and delta of the amplitude, or as, with Gudermann, they are written sn, cn, dn) and also of Jacobi's functions Z, Π which replace the integrals of the second and third kinds, and of the functions Θ and H, which he was thence led to. Not included in the *Fundamenta Nova* there is the important theory of the partial differential equation satisfied by the functions Θ, H, and deduced therefrom, the partial differential equations satisfied by the numerators and denominator in the theories of the multiplication and transformation of the elliptic functions; these are regarded as essential parts of Jacobi's theory, and they are given in the treatise accordingly.

The work is an elementary one, and makes no pretensions to originality or completeness: as already mentioned the idea is to combine Legendre and Jacobi.

The Chapters are I. General Outline. II. The Addition-Equation; Landen's theorem. III. Miscellaneous Investigations. IV. On the Elliptic Functions sn, cn, dn. V. The three kinds of Elliptic Integrals. VI. The functions $\Pi(u, \alpha)$, Zu, Θu, Hu. VII. Transformation; General Outline. VIII. The quadric transformation $n=2$; and the odd-prime transformations, $n=3, 5, 7$. Properties of the modular equation and the multiplier. IX. Jacobi's partial differential equations for the functions H, Θ and for the numerators and denominator in the multiplication and transformation of the elliptic functions sn, cn, dn. X. Transformation for an odd and in particular an odd-prime order; development of the theory by means of the n-division of the complete functions. XI. The q-functions: further theory of the functions H, Θ. XII. Reduction of the differential expression $\frac{R\,dx}{\sqrt{X}}$. XII. Quadric transformation of the elliptic integrals of the first and second kinds: the arithmetico-geometrical mean. XIV. The general differential equation $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$. XV. On the determination of certain curves the arc of which is represented by an elliptic integral of the first kind. XVI. On two integrals reducible to elliptic integrals. Addition. Further theory of the linear and quadric transformations.

A few points may be adverted to.

I use throughout Gudermann's notation sn, cn, dn in place of Jacobi's sin am, cos am, $\triangle$ am: the amplitude itself in the few places where it occurs is written indifferently am, or $\sin^{-1}$ sn.

I consider explicitly, and introduce a notation for the extreme case $k = 1$, viz. am u is here the Gudermannian of u and is written gd. u. The sin am and the cos am and $\triangle$ am (which last two functions are of course equal) become sin gd u and cos gd u, or simply sg u, cg u. The formula for the Gudermannian are interesting for their own sake, and they afford very convenient verifications for the general formulae; viz. these, writing therein $k = 1$, should give the far more simple formulae which belong to the Gudermannian.

A notation is frequently used which seems to me convenient: we have, as in the expressions for $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$, groups of formulae involving fractions which have a common denominator, the numerators and denominator being complicated algebraical functions: I write down the numerators only, putting after each numerator the sign $(\div)$, thus, $\operatorname{sn}(u+v) =$ numerator in question $(\div)$; and, at the end of the group of formulae, say, where denominator $=$ its given value.

In chapter IV, I start from fundamental formulae for the sn, cn and cn of $u \pm v$, and give in considerable detail the various resulting formulae: viz. the formulae for the different combinations of the functions of $u+v$, $u-v$, Fund. Nova pp. 32. 34, showing the algebraical ground of the reductions which present themselves in the process of obtaining these formulae: the formulae belonging to the periods, viz. those for the functions of $u+(0, 1, 2, 3)K + (0, 1, 2, 3)iK'$; those for the duplication $2u$; for the dimidiation $\frac{1}{2}u$, and for the dimidiation of the periods, or formulae for the functions of $\frac{1}{2}K$, $\frac{1}{2}iK'$, $\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}iK'$ etc.: also, in several forms, the formulae for the functions of $u+\frac{1}{2}K$, $u+\frac{1}{2}iK'$, $u+\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}iK'$; the formulae for the triplication $3u$: and for the multiplication by 4, 5, 6 and 7 (the cases 6 and 7 after Baehr). I show also how the formulae are to be obtained for the multiplication by any positive integer n: and show how by the aid of the functions of $\frac{mK+m'iK'}{n}$, the several numerators and the denominator can be expressed in a factorial form. It is remarked that writing $\frac{u}{n}$ in place of u, and supposing ultimately that n is $=\infty$, we are thus led to formulae of the form

$$\text{sn}\, u = u\left\{1+\frac{u}{(m, m')}\right\} \div \left\{1+\frac{u}{(m, \overline{m'})}\right\}$$

where m, m' have each of them every integer value from $-\infty$ to $+\infty$, the simultaneous values $m=0$, $m'=0$ being excluded from the numerator of sn u; but that, the formulae thus arrived at are not only not proved, but that, *in the absence of further definition as to the limits*, they are wholly meaningless. This has of course reference to the double factorial form of the functions H, Θ, but the subject is not much gone into in the sequel.

The theory of the functions Θ, H is established as follows: the function Zu being introduced as in the Fundamenta Nova, and Θu defined by reference to it, $\Theta u = \Theta o\, e^{-\int_0 Zu\,du}$, we obtain Jacobi's formula $\Pi(u, a) = u\,Za + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$; which may be written $\Pi(u+a, a) = (u+a)\,Za - \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+2a)}{\Theta u}$; the function $\Pi(u+a, a)$ becomes integrable for the three values $a=\frac{1}{2}iK'$, $\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}iK'$, $\frac{1}{2}K$ viz. the values in question contain log sn u, log cn u and log dn u, and we thus obtain sn u, cn u, dn u as fractions with the common denominator Θu, having in their numerators (besides a constant or exponential factor) $\Theta(u+iK')$, $\Theta(u+K+iK')$, $\Theta(u+K)$ respectively: or introducing Hu in place of $\Theta(u+iK')$, the numerators contain Hu, $H(u+K)$, $\Theta(u+K)$ respectively.

The transformation theory gives $\operatorname{sn} u$ equal to a quotient of two q-functions, and the denominator herein is identified with Θu as in the Fundamenta Nova.

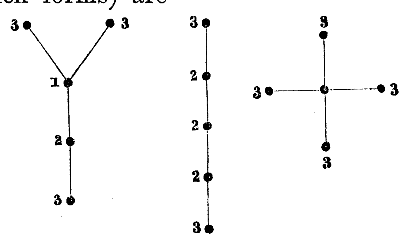
The partial differential equations satisfied by the numerators and the denominator in the multiplication and transformation of the functions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ are discussed Chap. IX in some detail. It is remarked that they are practically useless as regards the problem of transformation: for even when the modular equation is known, in seeking a solution by the method of indeterminate coefficients, the coefficients of the several powers of x are functions of (u, v) not only unknown, but in form indeterminate (as admitting of modification by means of the modular equation); and when the actual expression as a function of (x, u, v) is known, as of course it is for the cubic, quintic etc. transformations, it is from the complexity of the modular equations by no means easy to verify the formulae: in illustration, it is shown how the formula is verified in the case of the cubic transformation.

Chapters XIII to XVI may be regarded as supplementary. In Chapter XIV I gives some new developments in regard to Euler's integral $\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2 = C + d\,(x+y) + e\,(x+y)^2$, of the equation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$; showing how the integral equation when rationalised, assumes the form $u = 0$, where u is a rational and integral function of the second order as regards each of the variables x, y, and also of the second order as regards the constant C: it thence appears that regard C as a variable, the equation is an integral of the differential equation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dC}{\sqrt{\mathfrak{C}}} = 0$, where $\mathfrak{C}$ is a cubic function of C, invariantively connected with the function X, the actual expression (when $X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$) being $\mathfrak{C} = ad^2 + b^2e - bcd + C\{-4ae + bd + (C-c)^2\}$. I have further pursued the enquiry in a paper recently presented to the London Mathematical Society.

Cambridge. A. Cayley.

A. Cayley: On the analytical forms called Trees, with application to the theory of chemical combinations. (From the Report of the British Association for the advancement of Science for 1875, pp. 257—305.)

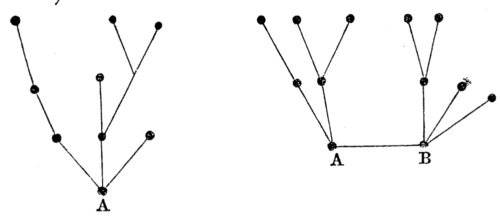
I have in two papers "On the Analytical forms called Trees," Phil. Mag. vol. XIII. (1857) pp. 172—176, and ditto, vol. XX. (1860) pp. 337—341, considered this theory, and in a paper „On the Mathematical Theory of Isomers," ditto, vol. XLVII. (1874) p. 444, pointed out its connexion with modern chemical theory. In particular as regards the paraffines $C_n H_{2n+2}$, we have n atoms of carbon connected by $n - 1$ bands, under the restriction that from each carbon-atom there proceed at most 4 bands (or, in the language of the papers first referred to, we have n knots connected by $n - 1$ branches), in the form of a tree; for instance, $n = 5$, such forms (and the only such forms) are



And if (under the foregoing restriction of only 4 bands from a carbon-atom) we connect with each carbon-atom the greatest possible number of hydrogen-atoms (as shown in the diagrams by the affixed numerals), we see that the number of hydrogen-atoms is 12 $(= 2 \cdot 5 + 2)$, and we have thus the representations of three different paraffines, $C_5 H_{12}$. It should be observed that the tree-symbol of the paraffine is completely determined by means of the tree formed with the carbon-atoms, or say of the carbon-tree, and that the question of the determination of the theoretic number of the paraffines $C_n H_{2n+2}$ is consequently that of the determination of the number of the carbon-trees of n knots, viz. the number of trees with n knots, subject to the condition that the number of branches from each knot is at most $= 4$.

In the paper of 1857 (which contains no application to chemical theory) the number of branches from a knot was unlimited; and moreover the trees were considered as issuing each from one knot taken as a root, so that, $n = 5$, the trees regarded as distinct (instead of being as above only 3) were in all 9.

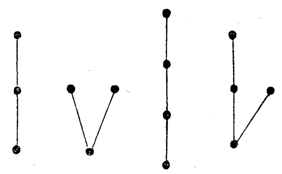
To count the trees on the principle first referred to, we require the notions of „centre“ and „bicentre“, due, I believe, to Sylvester; and to establish these we require the notions of „main branch“ and „altitude“: viz. in a tree, selecting any knot at pleasure as a root, the branches which issue from the root, each with all the branches that belong to it, are the main branches, and the distance of the furthest knot, measured by the number of intermediate branches, is the altitude of the main branch. Thus in the



left-hand figure, taking A as the root, there are 3 main branches of the altitudes 3, 3, 1 respectively: in the right-hand figure, taking A as the root, there are 4 main branches of the altitudes 2, 2, 1, 3 respectively; and we have then the theorem that in every tree there is either one and only one centre, or else one and only one bicentre; viz. we have (as in the left-hand figure) a centre A which is such that there issue from it two or more main branches of altitudes equal to each other and superior to those of the other main branches (if any); or else (as in the right-hand figure) a bicentre AB, viz. two contiguous knots, such that issuing from A (but not counting AB), and issuing from B (but not counting BA), we have two or more main branches, one at least from A and one at least from B, of altitudes equal to each other and superior to those of the other main branches in question (if any).

Hence, since in any tree there is a unique centre or bicentre, the question of finding the number of distinct trees with n knots is in fact that of finding the number of centre- and bicentre-trees with n knots; or say it is the problem of the „general centre- and bicentre-trees with n knots“: *general*, inasmuch as the number of branches from a knot is as yet taken to be without limit; or since (as will appear) the number of the bicentre-trees can be obtained without difficulty when the problem of the root-trees is solved, the problem is that of the „general centre-trees with n knots“. It will appear that the solution depends upon and is very readily derived from that of the foregoing problem of general root-trees, so that this last has to be considered, not only for its own sake, but with a view to that of the centre-trees. And in each of the two problems we doubly divide the whole system of trees according to the number of the main branches (issuing from the root or centre as the case may be), and according to the altitude of the longest main branch or branches, or say the altitude of the tree; so that the problem really is, for a given number of knots, a given number of main branches, and a given altitude, to find the number of root-trees, or (as the case may be) centre-trees.

We next introduce the restriction that the number of branches from any knot is equal to a given number at most; viz. according as this number is $= 2$, 3 or 4, we have, say oxygen-trees, boron-trees*), and carbon-trees respectively; and these are as before root-trees or centre- or bicentre-trees, as the case may be. The case where the number is 2 presents no difficulty: in fact if the number of knots be $= n$, then the number of root-trees is either $\frac{1}{2}(n + 1)$ or $\frac{1}{2}n$; viz. $n = 3$ and $n = 4$, the root-trees are



and the number of centre- or bicentre-trees is always $= 1$: viz. n odd, there is one centre-tree; and n even, one bicentre-tree; the case is considered only as a particular case of the general theorem. The number is $= 3$ is analytically interesting: although there may not exist, for any 3-valent element, a series of hydrogen compounds $B_n H_{n+2}$ corresponding to the paraffines. The case where the number is $= 4$, or say the carbon-trees, is that which presents the chief chemical interest, as giving the paraffines $C_n H_{2n+2}$; and I call to mind here that the theory of the carbon-root trees is established as an analytical result for its own sake and as the foundation for the other case, but that it is the number of the carbon centre- and bicentre-trees which is the number of the paraffines.

The theory extends to the case where the number of branches

*) I should have said nitrogen-trees; but it appears to me that nitrogen is of necessity 5-valent, as shown by the compound, Ammonium-Chloride, $= HN_4\,Cl$: of course the word boron is used simply to stand for a 3-valent element.

from a knot is at most $= 5$, or $=$ any larger number; but I have not developed the formula.

As regards the analytical theory: considering first the case of general root-trees, we endeavour to find for a given altitude N the number of trees of a given number of knots n and main branches α, or say the generating function

$$\Sigma \Omega t^{\alpha} x^{n},$$

where the coefficient Ω gives the number of the trees in question. And we assume that the problem is solved for the cases of the several inferior altitudes $0, 1, 2, 3 \ldots N-1$. This being so, we are able to form the generating function for the case of an altitude N and the formula with a slight modification becomes applicable to centre-trees. The bicentre-trees can be taken account of separately without much difficulty; and the general problem is thus solved.

Cambridge. A. Cayley.

Schiaparelli, G. V. Di alcune questioni concernenti il movimento degli occhi. (Annali di Oftalmologia del Profess. A. Quaglino. Anno V. Fascicolo 2 e 3. Milano 1876.)

Lo scopo di questa breve Memoria è di rischiarare alcuni dubbi, che erano stati proposti sulla teoria geometrica del movimento degli occhi, quale è sviluppata da Helmholtz nel §. 27 della *Physiologische Optik.* Queste spiegazioni, che sono di carattere affatto elementare, non avrebbero meritato di essere citate nel presente Giornale, se come loro conseguenza non mi fosse riuscito di presentare tutta la teoria geometrica della roteazione dell' occhio intorno alla linea visuale (cioè del fenomeno appellato *Rollung* dagli oftalmologi tedeschi) in una legge molto semplice, dalla quale tutte le proposizioni relative a quella teoria si deducono facilmente e brevemente.

Sopra una superficie sferica, concentrica al centro del moto rotatorio del bulbo si projettino i movimenti di questo, e s' indichi col punto fisso A la direzione primaria della linea visuale; con un altro punto mobile B di quella superficie designiamo la direzione che prende la stessa linea visuale durante un suo movimento qualunque. Chiamo *arco vettore* del punto B l' arco AB di circolo massimo, il quale si moverà esso pure intorno al suo estremo fisso A, variando ad ogni momento di direzione e di lunghezza. Nel moversi di B l' arco vettore descriverà sulla superficie sferica un' area in modo simile a quello, che fanno i raggi vettori dei pianeti nei piani delle loro orbite. Ciò posto, ed ammesso che il movimento dell' occhio abbia luogo esattamente secondo le leggi di Donders e di Listing, la sua roteazione intorno alla linea visuale si farà secondo quest' altra legge:

„Nel passare della linea visuale (o del punto B) da una posizione qualunque ad un' altra qualunque, percorrendo qualunque via intermedia: la roteazione dell' occhio intorno alla linea visuale si fa sempre in senso contrario al moto dell' arco vettore intorno alla posizione primaria A; e questa roteazione è ad ogni istante proporzionale all' area descritta dall' arco vettore intorno ad A, per modo che la roteazione cresce di un grado ogni volta che l' area predetta cresce di $\frac{1}{720}$ di tutta la superficie sferica."

Questa proposizione vale, qualunque sia il movimento di B rispetto ad A e qualunque sia la natura della curva percorsa da B sulla sfera. Quando la descrizione delle aree si fa in senso opposto, anche la roteazione cambia di segno. Si può così facilmente calcolare la quantità di roteazione (o *Rollung*) dell' occhio fra due fasi qualunque di movimento. Come caso particolare si deducono le formule date da Helmholtz pel calcolo di ciò ch' egli chiama *Raddrehung*, e pel calcolo dell' *inclinazione* di Donders. E facilmente si possono anche derivarne dimostrazioni dei teoremi eleganti sulla rotazione dell' occhio, che Helmholtz ha sviluppato a pag. 467—468 e 487—495 del suo grande Trattato.

Milano, Marzo 1877. G. V. Schiaparelli.

Désiré André: Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances.

I. Si l'on désigne par π un exposant entier et positif, et par $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ les trois fonctions elliptiques, on peut, comme on le sait, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, écrire:

$$\lambda^\pi(x) = A_0^{(\pi)} \frac{x^\pi}{\pi!} - A_1^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)} \frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - \cdots\cdot$$

$$\mu^\pi(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdot\cdot$$

$$\nu^\pi(x) = C_0^{(\pi)} - C_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdot\cdot$$

On sait de plus que, dans ces développements, les coefficients $A^{(\pi)}$, $B^{(\pi)}$, $C^{(\pi)}$ sont des polynômes entiers en k^2, de telle sorte que l'on a

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)} \varkappa^4 + \cdots\cdot$$

$$B_q^{(\pi)} = \beta_{q,0}^{(\pi)} + \beta_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \beta_{q,2}^{(\pi)} \varkappa^4 + \cdots\cdot\cdot$$

$$C_q^{(\pi)} = \gamma_{q,0}^{(\pi)} k^{2q} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} k^{2q-2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} k^{2q-4} + \cdots\cdot$$

M. Désiré André s'est proposé de trouver la forme générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ regardés comme des fonctions de q, les indices π et i étant supposés constants. Ses résultats ont été présentés à l'académie des sciences de Paris dans la séance du 10 Juillet 1876 et son travail fait l'objet d'un mémoire inséré in extenso dans les annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure.

Nous allons exposer d'abord, le plus brièvement possible, la méthode employée dans ce travail. Nous ferons connaître ensuite les résultats obtenus.

II. La détermination des coefficients du développement d'une fonction quelconque revient au calcul des dérivées successives de cette fonction. Dans le cas particulier des fonctions elliptiques et de leurs puissances, tout se ramène au calcul des dérivées d'ordre pair. L'auteur du mémoire s'occupe donc en premieur lieu de ces derivées, et, afin de conduire de front tout ce qui est relatif aux trois fonctions elliptiques, il étudie, non pas ces fonctions elles-mêmes, mais une fonction $\varphi(x)$, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = D + V\varphi^2 + G\varphi^4,$$

et qui contient les trois fonctions elliptiques comme cas particuliers.

Il est très-facile de voir que les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ sont des polynômes entiers en φ, pairs ou impairs suivant que l'exposant π est lui-même pair ou impair; et, comme tout se passe à très-peu près de la même manière dans les deux cas, nous pouvons, dans ce résumé, n'en considérer qu'un seul, supposer que l'exposant π et impair est égal à $2p+1$, et écrire

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = F_{q,0}^{(2p+1)}\varphi + F_{q,1}^{(2p+1)}\varphi^3 + F_{q,2}^{(2p+1)}\varphi^5 + \cdots.$$

M. Désiré André dispose en un triangle, analogue au triangle de Pascal, tous les coefficients F correspondant au développement de φ^{2p+1}, de telle sorte que chaque ligne horizontale présente les coefficients d'une même dérivée et chaque colonne verticale les coefficients d'une même puissance de φ; puis il montre que chaque F de ce triangle est égal à la somme des trois F les plus voisins de la ligne horizontale immédiatement supérieure multipliés respectivement par des facteurs déterminés.

Il s'ensuit que $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est un polynôme dont les différents termes présentent chacun un coefficient numérique et une puissance d'exposant positif ou nul de chacune des quantités V, D, G. Si l'on n'a effectué aucune réduction, le nombre des termes de ce polynôme est égal au nombre des chemins qui remontent, conformément à la loi de formation des F, du polynôme considéré $F_{q,r}^{(2p+1)}$ au polynôme initial $F_{o,p}^{(2p+1)}$. Si l'on figure chacun de ces chemins par des points marquant les F où il passe et par des traits, verticaux ou obliques, joignant ces points successifs, on obtient une ligne présentant des traits de trois sortes et formant ce que l'Auteur appelle un chemin ternaire. Le terme du polynôme qui correspond à ce chemin est le produit des facteurs apportés respectivement par chaque trait et chaque point. Quant au polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$, il est la somme de tous ces produits.

Ce même polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est homogène et du degré q par rapport aux quantités V, D, G. Son terme général est représenté par l'expression

$$f_{q,r,i}^{(2p+1)}\, V^{q-e-2i} G^{\mathrm{G}+i} D^{\mathrm{D}+i}$$

dans laquelle $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ désigne un coefficient numérique, e la différence, prise en valeur absolue, des deux nombres r et p, G et D deux entiers égaux l'un à e et l'autre à zéro. Ce terme général est la somme de tous les termes du polynôme considéré qui proviennent des chemins ternaires présentant chacun $q-e-2i$ traits verticaux. Si, dans chacun de ces chemins, on supprime tous les traits verticaux, ainsi que tous les points qui les surmontent immédiatement, puis qu'on rapproche les tronçons restants, on forme de nouveaux chemins, dits chemins binaires, parce qu'ils ne contiennent plus que deux sortes de traits. Les termes provenant de tous les chemins ternaires qui se réduisent ainsi à un même chemin binaire ont une somme dans laquelle les quantités correspondant aux points et aux traits de ce chemin binaire se mettent en facteur commun; et il en résulte que cette somme se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs dont le premier ne dépend pas de q, tandis que le second en dépend.

En étudiant, dans cette somme partielle, mise ainsi sous la forme d'un produit, le facteur qui dépend de q, on constate qu'il est le terme général du développement, suivant les puissances croissantes de la variable, d'une certaine fraction rationelle. Il en est de même de la somme partielle que nous considérons. De même encore du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, pris dans tout son ensemble. La fraction rationelle qui correspond à ce dernier cas est la fonction génératrice de $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ considéré comme fonction de q, les indices p, r, i étant supposés constants. M. Désiré André forme le dénominateur de cette fraction, il le donne tout décomposé en facteurs du premier degré, et il montre que le numérateur est un polynôme d'un degré inférieur au degré du dénominateur.

Puisque le dénominateur de cette fraction rationnelle se présente ainsi tout décomposé en facteurs du premier degré, il suffit d'appliquer les propriétés connues des séries récurrentes proprement dites pour obtenir le terme général du développement de la fraction, et c'est en opérant ainsi que l'auteur parvient à la forme analytique générale du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ regardé comme une fonction de q, tous les autres indices étant supposés constants.

On connaît ainsi la forme analytique de tous les coefficients des dérivées d'ordre pair de $\varphi^{2p+1}(x)$. En y remplaçant V, G, D par les quantités convenables, on arrive aux dérivées d'ordre pair des puissances $(2p+1)^{ième}$ des trois fonctions elliptiques. Il en résulte que l'on connaît la forme analytique des coefficients des puissances successives de x dans les développements considérés.

Seulement ces coefficients ne sont pas encore ordonnés par rapport aux puissances de $\varkappa^2$: ils présentent des puissances de k^2, de $1+k^2$, de $1-k^2$, de $2k^2-1$, de $2-k^2$. On suppose toutes ces puissances développées, on groupe les termes renfermant une même puissance de k^2, et l'on parvient finalement à la forme analytique générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(2p+1)}$, $\beta_{q,i}^{(2p+1)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p+1)}$.

C'est une méthode absolument semblable qui conduit à la forme analytique générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(2p)}$, $\beta_{q,i}^{(2p)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p)}$.

III. Voici les résultats, tout nouveaux, selon nous, auxquels M. Désiré André est parvenu en suivant la voie que nous venons d'indiquer:

Chacun des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, où q est seul variable, est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Cette série récurrente est définie par l'une ou l'autre des deux équations

$$\prod_{o}^{p}{}_t [z-(2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t [z-(2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0$$

$$\prod_{1}^{p}{}_t [z-(2t)^2]^{i+1} \qquad \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t [z-(2t)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

suivant que p est égal à $2p+1$ ou à $2p$.

Dans le cas où π est égal à $2p+1$, chacun des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ est de la forme

$$\sum_{o}^{p}{}_t\, \Xi_t(q)\,(2t+1)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t\, \xi_t(q)\,(2t+1)^{2q};$$

dans le cas où π est égal à $2p$, chacun de ces coefficients est au contraire de la forme

$$\sum_{1}^{p}{}_t\, \Xi_t(q)\,(2t)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t\, \xi_t(q)\,(2t)^{2q};$$

les expressions $\Xi_t(q)$, $\xi_t(q)$ représentant deux polynômes entiers en q, le premier toujours du degré i, le second du degré $p+i-t$.

Il suffit évidemment de remplacer p par zéro dans la première de ces formules pour obtenir les résultats relatifs aux fonctions elliptiques elles-mêmes, et de remplacer dans la seconde p par l'unité pour obtenir les résultats relatifs aux carrés de ces fonctions.

Mischer: Die Gesetze der Bewegung punktueller Massen. (Progr. des Gymn. u. der Realschule 1. O. zu Minden, 1877.)

Die Arbeit enthält eine Erweiterung einer in Schlömilch's Zeitschrift früher von mir veröffentlichten Abhandlung (die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen), worüber ich bereits in diesem Repertorium referirt habe. Der Calcül ist vollständig angegeben und die Methode auf mehrere Aufgaben der Mechanik angewendet.

Es wird gezeigt, dass die in jener Abhandlung aufgestellten Bewegungsgleichungen die ganze Mechanik eines Massenpunktes enthalten. Ferner wird (ein dort nur kurz berührter Punkt) folgendes Resultat gewonnen:

Die Zeit tritt auch dann nicht explicite in die Bewegungsgleichungen ein, wenn ein mit der Bahn fest verbundener Punkt O' sich entweder in einer Graden mit constanter Geschwindigkeit oder in einer Parabel wie ein geworfener Punkt bewegt, Wege, deren Ebenen der Richtung der das Mobile beeinflussenden constanten Kraft — nur eine solche darf wirken — parallel sein müssen. Dabei darf die Bahn mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine durch O' gehende, der Richtung jener Kraft parallel bleibende Axe rotiren.

Die behandelten Aufgaben sind folgende:

1) Das sphärische Pendel.

2) Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kreiscylinder, für verschiedene Bewegungsgesetze des letzteren.

3) Bewegung eines schweren Punktes auf einer rotirenden Geraden.

Minden i. Westf. Mischer.

Martin Krause: Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. (Math. Annalen, Bd. XII, S. 1—22.)

Neben anderen Gleichungen haben in der Theorie der elliptischen Functionen diejenigen Gleichungen Beachtung gefunden, welche zwischen dem Producte des ursprünglichen Moduls in dessen complementären und dem Producte des transformirten in dessen complementären bestehen. Die Theorie derselben ist für einen unpaaren

Transformationsgrad n, der keinen quadratischen Theiler enthält, von den Herren Hermite, Joubert, Königsberger begründet worden, beschränkt sich jedoch auf die Gleichungen selbst, während die Discriminante unberücksichtigt bleibt. Die oben erwähnte Arbeit hat den Zweck, diese Lücke auszufüllen. Es wird in derselben zunächst die Form der Discriminante festgestellt, dann eine Methode zur Bestimmung der von einander verschiedenen Wurzeln derselben gegeben und endlich nach Lösung des allgemeinen Problems der Wurzelentwickelung fixirt, wie vielfach eine jede dieser Wurzeln ist.

Als Beispiele sind die Transformationszahlen bis 30 gewählt worden.

Breslau. Martin Krause.

Hamburger: Ueber das Pfaff'sche Problem. (Grunert's Archiv, Theil LX, 185—214.)

In der Abhandlung „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen" Borch. J. Bd. 58) hat Herr Natani zuerst die Lösung des Pfaff'schen Problems auf die successive Integration integrabler Systeme totaler Differentialgleichungen zurückgeführt, derart dass von jedem Systeme nur je eine Lösung erforderlich ist. Nach ihm hat Clebsch im 60. und 61. Bande des Borch. Journ. die Lösung desselben Problems durch die successive Aufstellung simultaner partieller Differentialgleichungen, von denen je ein Integral zu ermitteln ist, bewerkstelligt. Vorliegende Abhandlung bezweckt, eine Darstellung des Problems zu geben, welche auf direktem Wege zu der Natani'schen Form der Lösung und zu den anderen von Hrn. Natani wie von Clebsch gefundenen Resultaten führt. Als Ausgangspunkt dient folgender Satz:

Besteht die Transformation

$$X_1\delta x_1 + \ldots + X_n\delta x_n = U_1\delta u_1 + \ldots + U_s\delta u_s$$

wo $X_1 \ldots X_n$ beliebige Functionen von x und $U_1 \ldots U_s$, $u_1 \ldots u_s$ ebenfalls Funktionen von x bedeuten, die vorstehender Gleichung genügen, so gelten als analytische Folgen derselben stets die n Identitäten

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{dX_i}{dx_\varkappa} - \frac{dX_\varkappa}{dx_i}\right)\delta x_\varkappa =$$

$$X_i\frac{\delta U_s}{U_s} + U_s\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s-1}\frac{du_\lambda}{dx_i}\delta\left(\frac{U_\lambda}{U_s}\right) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\frac{dU_\lambda}{dx_i}\delta u_\lambda$$

Aus diesen ergeben sich unmittelbar die zur Lösung des Pfaff-schen Problems nacheinander aufzustellenden Systeme integrabler Differentialgleichungen.

Es werden nacheinander behandelt

1) der Fall einer geraden Anzahl der x unter der Voraussetzung, dass die Determinante der Grössen

$$(i\varkappa) = \frac{dX_i}{dx_\varkappa} - \frac{dX_\varkappa}{dx_i}$$

nicht verschwindet.

2) der allgemeinere Fall, in welchem der vorhergehende als besonderer Fall enthalten ist, und welchen Clebsch den „determinirten Fall" des Pfaff'schen Problems nennt.

3) der Fall einer ungeraden Anzahl der x unter der Voraussetzung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} (1{:}1) \ldots (1n), & -X_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (n1) \ldots (nn), & -X_n \\ X_1 \ \ldots \ X_n, & 0 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Derselbe dient als Beispiel für die Behandlung des allgemeineren von Clebsch sogenannten „indeterminirten Falles" des Pfaff'schen Problems, auf welchen in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen wird.

Zum Schluss folgt eine Anwendung auf die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\varphi(z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n) = a \ \left(p_\varkappa = \frac{dz}{dx_\varkappa}\right)$$

d. h. auf die Transformation

$$dz - p_1 dx_1 \ldots - p_n dx_n = U_1 du_1 + \ldots U_{n+1} du_{n+1}$$

mit der Bestimmung, dass u_1 die gegebene Function φ sei.

Berlin. Hamburger.

Inhaltsverzeichniss.

Berichtigungen.

S. 63. Zeile 5 v. unten, lies: Culmann's graphische Statik statt „statische Graphik."

S. 90. Formel (2) lies $V + V_0 = (G + G_0)\ (xu + \sigma)$ statt $G\ (xu + \sigma)$

S. 212. Zeile 18 v. unten, lies: des Richtungskegels.

S. 216. Zeile 6 v. oben, lies: Hyperboloid.

S. 218. Zeile 19 v. unten, lies: „oder" statt der (Anfangswort).

S. 220. Zeile 10 v. unten, streiche „und" vor aus.

S. 225. Zeile 1 v. unten, lies: „der" statt den.

S. 225. Zeile 7 v. unten, fehlt ein Komma nach Classe.

S. 226. Zeile 4, v. oben. Der Schlusssatz sollte kurz heissen: Man weiss, dass die Schraubenlinie dasselbe thut.