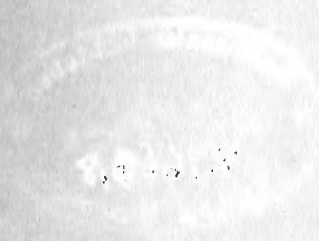


1870
1871



91

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X. - NÚMS. 1, 2 Y 3.

Julio, Agosto y Septiembre
de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

REVISTA
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 8.

1911

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*

Zurbano, 56.

Excmo. Sr. D. Eduardo Saavedra, *Vicepresidente.*

Fuencarral, 74.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo.

Fuentes, 9.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.

Velázquez, 16.

Excmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*

Orellana, 10.

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*

Valverde, 26.

Excmo. Sr. D. Julián Calleja y Sánchez, *Tesorero.*

Argensola, 6.

Ilmo. Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*

Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.

Carrera de San Jerónimo, 53.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.

Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.

Atocha, 118.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.

Príncipe, 49.

Ilmo. Sr. D. Pedro Palacios.

Monte Esquinza, 9.

Sr. D. Blas Lázaro é Ibiza.

Palafox, 19.

Excmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.

Quintana, 38.

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.

Válgame Dios, 3.

Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario*.

Zurbano, 18.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.

Piamonte, 14.

Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.

Campomanes, 8.

Ilmo. Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.

Génova, 17.

Sr. D. José Gómez Ocaña.

Atocha, 127 dupdo.

Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.

Amnistía, 10.

Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.

Cervantes, 3. — Alcalá de Henares.

Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández y Rodríguez.

Fuencarral, 51.

Ilmo. Sr. D. Vicente de Garcini.

Alarcón, 1.

Sr. D. Miguel Vegas.

Pez, 1.

Ilmo. Sr. D. Juan Fages y Virgili.

San Bernardo, 18.

Sr. D. Blas Cabrera.

Paseo de Martínez Campos, 1.

Sr. D. Enrique Hauser.

Zorrilla, 33.

Ilmo. Sr. D. Eduardo Mier y Miura.

Serrano, 29.

ACADÉMICOS ELECTOS

Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.

Paseo de Martínez Campos, 17.

Ilmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sagasta.

Casa de Oficios.—Moncloa.

Ilmo. Sr. D. Pedro de Avila y Zumarán.

Travesía de la Ballesta, 8.

Sr. D. Ignacio González Martí.

Hernán Cortés, 7.

Excmo. Sr. D. Manuel Benítez y Parodi.

Plaza de la Lealtad, 4.

Sr. D. Eduardo León y Ortiz.

Fuencarral, 19 y 21.

La Academia está constituida en tres Secciones:

1.^a CIENCIAS EXACTAS.— Sres. Saavedra, *Presidente*, Vegas, *Secretario*; Arrillaga, Torroja, Navarro-Reverter, Torres Quevedo, Ventosa, Ugarte, Fernández y Rodríguez y Garcini.

2.^a CIENCIAS FÍSICAS.— Sres. Carracido, *Presidente*; Mourelo, *Secretario*; Echegaray, Salvador, Muñoz del Castillo, Madariaga, Marvá, Fages, Cabrera, Hauser y Mier.

3.^a CIENCIAS NATURALES.— Sres. Hidalgo, *Presidente*; Gómez Ocaña, *Secretario*; Cortázar, Calleja, Mallada, Cajal, Palacios, Lázaro y Sánchez Lozano.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr. D. Andrés Poey. *Paris*.

Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. *Valencia*.

Ilmo. Sr. D. Luis Mariano Vidal. *Barcelona*.

Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. *Madrid*.

Excmo. Sr. D. Rogelio de Inchaurrendieta. *Madrid*.

Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. *Sevilla*.

Excmo. Sr. D. Modesto Domínguez Hervella. *Madrid*.

Sr. D. Salvador Calderón y Arana. *Madrid*.

Ilmo. Sr. D. Ricardo Vázquez-Illá y Martínez. *Valladolid*.

Sr. D. Zoel García de Galdeano. *Zaragoza*.

Sr. D. Eduardo J. Navarro. *Málaga*.

Ilmo. Sr. D. José María Escribano y Pérez. *Murcia*.

Sr. D. Lauro Clariana y Ricart. *Barcelona*.

Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. *Segovia*.

- Excmo. Sr. D. Joaquín María de Castellarnáu y Lleopart.
Segovia.
- Excmo. Sr. D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde
de Villamar, Almirante de la Armada.
- Excmo. Sr. D. Rafael Pardo de Figueroa. *Puerto Real.*
- Sr. D. Juan Vilaró Díaz. *Habana.*
- Excmo. Sr. D. Pablo Alzola y Minondo. *Bilbao.*
- Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. *Salamanca.*
- Excmo. Sr. D. José J. Landerer. *Valencia.*
- Sr. D. José Eugenio Ribera. *Madrid.*
- Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. *Barcelona.*
- Sr. D. Eugenio Mascareñas. *Barcelona.*
- Sr. D. Juan J. Durán Loriga. *Coruña.*
- Sr. D. Bernabé Dorronsoro. *Granada.*
- Sr. D. Esteban Terradas. *Barcelona.*
- Sr. D. Ventura Reyes Prosper. *Toledo.*

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

- Anguiano (A.). *Méjico.*
- Lemoine (V.). *Reims (?)*.
- Collignon (E.). *París.*
- Barrois (Ch.). *Lille.*
- Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de). *Río de Janeiro (?)*.
- Gomes Teixeira (F.). *Porto.*
- Príncipe de Mónaco (S. A. el). *Mónaco.*
- Choffat (P.). *Lisboa.*
- Arata (P. N.). *Buenos Aires.*
- Carvallo (M.). *París.*
- Eneström (G.). *Estocolmo.*
- Ferreira da Silva (A. J.). *Porto.*
- Pina Vidal (A. A. de). *Lisboa.*
- Brocard (H.). *Bar-le-Duc.*
- Ocagne (M. d'). *París.*
- Romiti (G.). *Pisa.*
- Wettstein Ritter von Westersheim (R.). *Viena.*

- Engler (A.). *Berlin*.
Guedes de Queiróz, Conde de Foz (G.). *Lisboa*.
Rayleigh (Lord), *Salisbury*.
Arrhenius. (S.). *Estocolmo*.
Ramsay (G.). *Londres*.
Castanheira das Neves (J.). *Lisboa*.
Pilsbry (E.). *Filadelfia*.
Porter (C. E.). *Santiago de Chile*.
Herrero Ducloux (E.). *La Plata (República Argentina)*.
Chervin (A.). *Paris*.
Urbain (G.). *Paris*.
Moureu (C.). *Paris*.
Sarasin (E.). *Ginebra*.
Guye (F. A.). *Ginebra*.
Guimarães (R.). *Lisboa*.
Capellini (J.). *Bolonia*.
Academia Mejicana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Méjico*.
-

I.— Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimoquinta.

SEÑORES:

En la confusión del movimiento de un sistema compuesto de muchos puntos materiales, ya sea un sistema discontinuo, ya sea un sistema continuo, como es el que consideramos al estudiar el de un fluido continuo y perfecto, la manera de darnos cuenta de lo que tal movimiento pueda ser, y de construir en cierto modo *su imagen*, es, como hemos dicho en alguna de las conferencias anteriores, considerar en la masa fluida un sistema de líneas y particularizar el movimiento general en cada una de ellas.

Estas líneas pueden ser de muchas clases, y vamos á señalar algunas de ellas, á las que ya hemos hecho referencias repetidas en las conferencias precedentes.

*
* *

1.º *Las trayectorias*.—Podemos escoger en el fluido, en un instante cualquiera, que no hay inconveniente en considerar como el instante inicial, y aun en corresponder al tiempo $t=0$, puesto que el origen del tiempo es arbitrario; podemos, repito, escoger un punto a y seguirlo en su movimiento, y determinar su trayectoria y las magnitudes mecánicas que á esta trayectoria se refieren.

Esto ya lo hemos explicado en otras conferencias. Hemos supuesto que el punto no era un punto geométrico, sino un elemento de fluido, y al acompañarle en su marcha, hemos seguido su movimiento de traslación, hemos observado la torsión, por decirlo de este modo, del filete fluido, que es la que constituye en cada instante un elemento de torbellino, y por último hemos hecho notar la expansión ó contracción de dicho filete fluido.

Y de tal estudio dedujimos dos clases de movimiento: el rotacional y el irrotacional.

2.º *Una curva cualquiera.*—Podemos considerar en un instante determinado, no un punto, sino *una línea*, que para más sencillez podemos suponer *cerrada*; línea que marchará con el fluido, como si fuera un hilo de elementos infinitamente pequeño.

Y demostramos que, dada la definición del fluido perfecto y la continuidad y uniformidad de las integrales de Lagrange, este hilo fluido conservaba, si se nos permite la palabra, su personalidad, por más que sea palabra atrevida en este caso.

Podrá variar la forma de su curva, pero siempre estará compuesta de los mismos elementos fluidos, condensados ó dilatados, trazando sus trayectorias propias y girando ó no girando, según sea el movimiento rotacional ó irrotacional.

Con la imaginación podemos suponer, que acompañamos al punto cuando se trata de una trayectoria; ó á todos los puntos de la línea, que ahora consideramos, y á un conjunto de rectas con orientaciones determinadas en cada instante, que serán los ejes de otros tantos elementos de torbellinos.

Más aún, demostramos en otra conferencia, que para estas curvas cerradas no sólo persistía en cada curva la materia del fluido, sino cierta magnitud dinámica á que dábamos el nombre de *circulación*, y que podíamos asemejar al trabajo de las velocidades de sus diferentes puntos, consideradas como fuerzas á lo largo de dichas curvas.

Era el alma dinámica, y valga la imagen, de la línea, y se conservaba íntegra, mientras el cuerpo variaba de forma, aunque conservando siempre su materia flúida.

Claro es que éstas son imágenes, analogías, semejanzas, acaso fórmulas nemotécnicas del fenómeno físico, y nada más.

En esta clase no podemos dar otra transcendencia á ciertas analogías.

Y por de contado, no debe olvidarse, una vez más lo repetimos, que se trata de un caso ideal y de condiciones é hipótesis, que algunas veces podrán verificarse con cierta aproximación, pero que en la realidad compleja de los fenómenos á otros fenómenos, se enlazan; y en ellos veremos rotas estas curvas, dispersos sus elementos y cambiando á cada instante la supuesta constancia de la circulación.

La viscosidad, el rozamiento, todos estos fenómenos todavía no bastante estudiados, vienen á quebrantar las condiciones del flúido perfecto y del problema ideal que ahora estudiamos.

3.º *Línea de corriente.*—Para nuestro caso aún hay otra clase de curvas más importantes que las que acabamos de señalar, que son las *líneas de corriente*.

Fijemos bien las ideas, porque vamos penetrando cada vez más en la materia propia de este curso, y no quisiera ni por un momento perder la claridad y la precisión posibles á que aspiro.

Imaginemos el sistema de Euler.

Consideremos un instante determinado del tiempo t .

Cada punto del flúido ocupará una posición determinada del espacio, y al pasar por este punto tendrá una velocidad determinada V cuyas tres componentes hemos designado siempre por u, v, w .

Sea, pues, la figura 36.

Sean A un punto del flúido en dicho instante, y V la velocidad de ese punto ó elemento del flúido al pasar por la posición A .

En el intervalo dt , el punto A con la velocidad V habrá descrito un elemento infinitamente pequeño de su trayectoria

$$AB = V dt$$

y habrá venido á parar á la posición B .

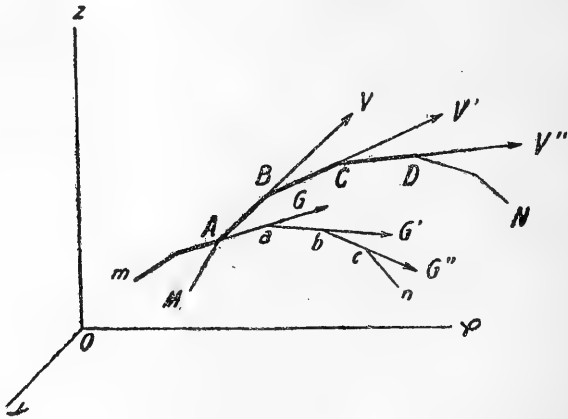


Figura 36.

En ese mismo instante t , pasará por B otro elemento de fluido con una velocidad V' que diferirá de V en una cantidad infinitamente pequeña.

Mientras el elemento que estaba en A pasa de A á B , el elemento correspondiente á B pasará de B á C .

Y el elemento fluido que en el instante t estaba en C , describirá en el intervalo dt otro elemento CD con la velocidad V'' .

Y así sucesivamente.

De este modo podemos imaginar una línea flúida A, B, C, D, \dots correspondiente al instante t y al intervalo dt .

Pasando al límite, este polígono infinitesimal se convertirá en una curva $MABCDN$, en todos los puntos de la cual la tangente coincidirá con la velocidad del elemento

fluido que en el mismo instante t pasa por dicho punto.

Será, pues, una envolvente de velocidades para el instante t .

Y como esta línea, es fácil trazar otras infinitas en el fluido para el instante considerado t .

Podemos designarlas con el nombre de *líneas de corriente* para un instante determinado t .

Para *otro instante*, el sistema de estas líneas en general será distinto, á menos que el movimiento no sea permanente.

Claro es que cada elemento AB es un elemento de trayectoria: de la trayectoria que pasa por A ; pero, en general, la línea ABC , que hemos llamado de corriente, no coincidirá con ninguna trayectoria.

Este punto lo aclararemos después.

4.º *Línea de torbellinos*.—Lo que hemos explicado para un instante cualquiera sobre las líneas de corriente, ó envolventes de velocidades, podemos repetir casi palabra por palabra, para las líneas de torbellinos, y la misma figura 36 puede servirnos.

Supongamos el mismo instante t .

El elemento fluido que pasa por A , en el movimiento rotacional tendrá tendencia á girar, y ejecutará un giro infinitamente pequeño, que si el vector de giro es G , tendrá por valor

$$G\partial t.$$

Sea AG dicho eje.

Tomemos sobre él un elemento infinitamente pequeño Aa , y repitamos para el elemento que pasa por a lo mismo que hemos dicho para el elemento que pasa por A .

Este elemento fluido que pasa por a tenderá también á girar con una velocidad G' distinta de la anterior. Sea aG' dicho eje de rotación.

Tomemos sobre él la magnitud ab , también infinitamente pequeña, y repitamos para el punto b lo dicho para A y a .

De este modo tendremos un polígono $mabc$, que en

el límite se convertirá en una curva su $Aabcn$, que tendrá esta propiedad. La tangente en todos sus puntos será el eje de rotación, es decir, el eje del torbellino infinitamente pequeño que pasa por dicho punto.

Como la curva anterior $AB\zeta$ era la envolvente de las velocidades para el instante t , la curva $Aabc$ será la envolvente de los ejes de los torbellinos de todos sus puntos.

Le daremos el nombre de línea ó *filete de torbellinos*.

*
* *

Hemos señalado cuatro clases de curvas: *Las trayectorias; una curva cualquiera; las líneas de corriente y las líneas de torbellinos.*

Hablemos ahora de su expresión analítica, es decir, de sus ecuaciones; aunque ya sobre esto hemos dicho algo, que repetiremos en forma sucinta.

En cuanto á las *ecuaciones de las trayectorias* resultan de integrar las ecuaciones del movimiento expresadas en las variables de Lagrange.

Hemos dicho que, si a , b , c son las coordenadas de un punto inicial, dichas integrales tendrán la forma

$$x = f_1(a, b, c, t),$$

$$y = f_2(a, b, c, t)$$

$$z = f_3(a, b, c, t),$$

y que las ecuaciones ordinarias de la trayectoria correspondiente al punto (a, b, c) se obtendrán eliminando t entre las tres ecuaciones anteriores, con lo cual obtendremos en general dos ecuaciones en x, y, z .

$$F_1(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

$$F_2(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

que serán las ecuaciones ordinarias de dicha curva.

También dijimos que se podían obtener en el sistema de Euler.

Sobre esto insistiremos en breve.

De todas maneras, estas trayectorias en general no pueden conocerse sin integrar las ecuaciones diferenciales, salvo en casos particulares de la práctica.

*
* *

Cuando consideramos una curva arbitraria en el instante inicial, el problema que se nos plantea es el siguiente: conocer las ecuaciones de dicha curva en un instante cualquiera.

También hemos resuelto ya este problema.

Si las ecuaciones de la curva en el momento inicial son:

$$\varphi_1(a, b, c) = 0,$$

$$\varphi_2(a, b, c) = 0,$$

uniendo á estas dos ecuaciones las integrales generales de Lagrange antes escritas,

$$x = f_1(a, b, c, t),$$

$$y = f_2(a, b, c, t),$$

$$z = f_3(a, b, c, t),$$

para un instante cualquiera t , no habrá más que eliminar entre las cinco ecuaciones precedentes a , b , c y tendremos dos ecuaciones en x , y , z , t

$$\psi_1(x, y, z, t) = 0,$$

$$\psi_2(x, y, z, t) = 0,$$

que serán las ecuaciones ordinarias de la curva en el instante t que se considera.

Claro es que t en ambas ecuaciones debe considerarse como un parámetro, es decir, como una constante que marca el momento para el cual queremos determinar la forma y la posición que ha tomado la curva inicial.

Las únicas variables serán x, y, z .

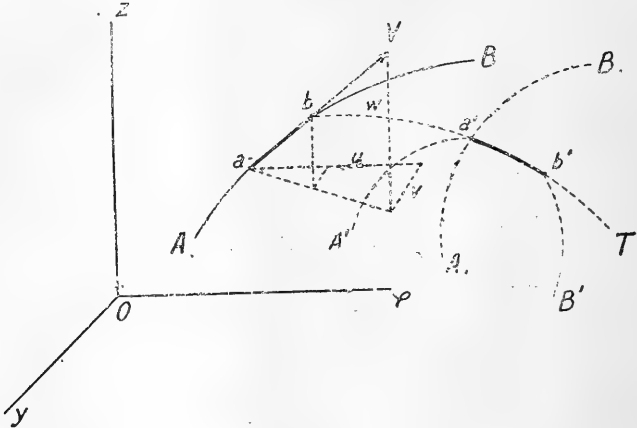


Figura 37.

Con igual facilidad podríamos resolver el problema habiendo elegido las variables de Euler.

*
**

Pasemos á las curvas envolventes de velocidades en un instante cualquiera t ; es decir, que cada curva ha de gozar de esta propiedad.

En el instante t , si a (fig. 37) es un punto de dicha curva AB , la tangente en a debe tener la dirección de la velocidad V para dicho punto a .

Si ab es el elemento infinitamente pequeño ds de la curva, y sus componentes son dx, dy, dz , como puede suponerse que este elemento ab coincide en dirección con V , los tres puntos a, b, V estarán en línea recta, y tendremos evidentemente, como se ve en la figura, que las tres compo-

nentes de ds serán proporcionales á las tres componentes de V siempre para el tiempo t .

De modo que deberemos tener

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w};$$

ó expresando que u, v, w dependen, en el sistema de Euler, de x, y, z y del tiempo,

$$\frac{\partial x}{u(x, y, z, t)} = \frac{\partial y}{v(x, y, z, t)} = \frac{\partial z}{w(x, y, z, t)}$$

que son dos ecuaciones diferenciales en x, y, z . En estas ecuaciones, t es una constante, es el valor del tiempo para el instante que se considera.

Tales ecuaciones expresan, pues, una propiedad característica de estas curvas envolventes de velocidades ó curvas de corriente, según las hemos llamado.

Como es propiedad de todas las curvas de corriente, claro es que no caracterizan dichas ecuaciones ninguna de ellas, sino que las comprenden á todas; como sucede con todas las ecuaciones diferenciales que expresan una propiedad de toda una *familia de curvas*, superficies ó sistemas.

La integración de las ecuaciones anteriores, ó, si se quiere, de estas dos, que son equivalentes,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v(x, y, z, t)}{u(x, y, z, t)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{w(x, y, z, t)}{u(x, y, z, t)}$$

dará dos ecuaciones con dos constantes arbitrarias C_1, C_2 , ecuaciones que podremos representar por

$$F_1(x, y, z, t) = C_1$$

$$F_2(x, y, z, t) = C_2.$$

Esta será la forma general de todas las curvas de corriente.

Si queremos caracterizar una, la que pasa, por ejemplo, por el punto cuyas coordenadas sean x_0, y_0, z_0 , no tendremos más que substituir estos valores en vez de x, y, z , y de este modo obtendremos los valores de C_1 y C_2 , es decir:

$$F_1(x_0, y_0, z_0, t) = C_1,$$

$$F_2(x_0, y_0, z_0, t) = C_2.$$

Con lo cual, las ecuaciones para el punto (x_0, y_0, z_0) en el instante t serán:

$$F_1(x, y, z, t) = F_1(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$F_2(x, y, z, t) = F_2(x_0, y_0, z_0, t).$$

Es decir, dos ecuaciones con tres variables, que son las que en el sistema ordinario definen una curva.

Ocurre preguntar:

Y si las funciones F tienen más de una determinación, ¿cuál de ésta representará los valores de C_1 y C_2 ?

En el problema analítico esto dependería de las integrales generales de las ecuaciones del movimiento, y además de la integración de las dos últimas ecuaciones á que venimos refiriéndonos; pero en el problema mecánico, ó mejor dicho, en la práctica, esta indeterminación no cabe, porque el fluido no puede moverse en un instante más que de una sola manera.

En todo caso, el armonizar el problema analítico con el problema mecánico, es punto digno de consideración, pero en que por ahora no podemos fijarnos.

Por lo demás, debemos repetir aquí lo que hemos dicho varias veces: para la determinación de todas estas curvas, hemos de suponer integradas las ecuaciones diferenciales del movimiento, ya en las variables de Lagrange, ya en las va-

riables de Euler; porque de otro modo, y viniendo á las curvas de corriente, no conoceremos la forma analítica de las tres funciones

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

y no podremos integrar las dos últimas ecuaciones que hemos escrito.

Todos estos son estudios interesantes, pueden enseñarnos propiedades del fluido en movimiento; mas para la integración de las ecuaciones de éste, al menos por el pronto, no pueden servirnos.

La forma de las dos ecuaciones diferenciales últimas será la misma para todas las curvas de corriente y para todos los instantes, mas para cada instante C_1 y C_2 serán diversas en cada curva, según hemos indicado. Y como de un instante á otro varía t , la magnitud y la posición de las curvas de corriente variará también.

Si se nos permite una imagen que materialice el movimiento del fluido, podemos decir que en cada momento el fluido se compone de infinitos ríos infinitamente estrechos y en contacto continuo.

Pero de un instante á otro, en el espacio, el cauce de cada río cambia, las líneas de corriente son otras.

Los puntos que constituyen cada línea de corriente seguirán formando una línea continua, como demostramos en otra conferencia; pero ya esa línea no será una línea de corriente, envolvente de velocidades, sino que cada punto formará parte de otro río, siguiendo otro cauce instantáneo en el espacio.

Permitaseme otra observación más para concluir este punto.

Al integrar las dos ecuaciones precedentes hemos dicho que de un momento á otro varía t , que es el tiempo, y que como t entra en las ecuaciones, las curvas de corriente va-

riarán de un instante á otro; pero si t no entrase en dichas ecuaciones diferenciales, sus integrales serían las mismas para todos los instantes y las curvas de corriente serían invariables también. Y esos infinitos ríos, infinitamente estrechos, á que antes nos referíamos, tampoco cambiarían con el tiempo, siempre irían por el mismo cauce; puede decirse que la forma del movimiento sería permanente, y este es precisamente el nombre que se da al movimiento en estos casos: *movimiento permanente*.

Esta condición especial de dicho movimiento simplifica mucho el problema, y su estudio forma un capítulo importantísimo de la hidrodinámica; pero es cuestión en que no podemos detenernos.

*
**

Antes de pasar adelante, para evitar confusiones á los alumnos, debemos insistir sobre un punto, que no deja de tener importancia.

Si en un instante t , y para un punto a , dicho punto a recorre, en el intervalo dt , el elemento infinitesimal ab correspondiente á la línea de corriente AB , en tal instante es evidente que el elemento ab también pertenecerá á la trayectoria que pasa por a ; de modo que en ese instante ó en ese intervalo, la línea de corriente AB y la trayectoria aT , que pasa por a , estas dos líneas, repetimos, serán tangentes en a , ó si se quiere, tendrán el elemento común ab .

Pero no hay que creer por eso que ambas líneas se confunden.

La línea de corriente es $AabB$, y la trayectoria del punto a será otra línea distinta abT , tangente en a á la primera.

Sólo se confundirían en el caso del movimiento permanente, porque en este caso cada línea de corriente es una trayectoria, como vamos á demostrar desde luego, y como geoméricamente más que se demuestra se ve por intuición.

Si acudimos á la representación analítica, la misma duda aparece al pronto, y del mismo modo se desvanece, como pasamos á indicar.

Para el punto a , el elemento ab es el mismo en la línea de corriente y en la trayectoria, y por lo tanto, la misma proporcionalidad existirá, ya se considere una ú otra de ambas líneas, según se ve en la figura, entre las componentes ∂x , ∂y , ∂z de ds y las componentes u , v , w de la velocidad V .

De modo que, al parecer, para la trayectoria aT tendremos las mismas ecuaciones diferenciales que para la línea de corriente aB , á saber: las que teníamos antes:

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w}.$$

Y si las ecuaciones diferenciales son las mismas, las mismas parece que deben ser las integrales.

Pero este razonamiento es falso, porque en las ecuaciones precedentes

$$\frac{\partial x}{u(x, y, z, t)} = \frac{\partial y}{v(x, y, z, t)} = \frac{\partial z}{w(x, y, z, t)}$$

aplicadas á la línea de corriente AB , el tiempo es una constante; las únicas variables de la integración son x , y , z .

Y en estas ecuaciones aplicadas á la trayectoria, el tiempo es una variable. Es la variable independiente de la integración; y hay que obtener, no *dos* funciones en x , y , z , sino *tres* ecuaciones que nos den x , y , z , en función de t . Es volver á las variables de Lagrange partiendo de la notación de Euler.

Como que, en rigor, las ecuaciones que tenemos que integrar son

$$\frac{\partial x}{u(x, y, z, t)} = \frac{\partial y}{v(x, y, z, t)} = \frac{\partial z}{w(x, y, z, t)} = \partial t,$$

porque, evidentemente,

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w} = \partial t,$$

toda vez que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w,$$

de donde se deducen las anteriores.

De modo que, como hemos dicho, no son *dos* ecuaciones diferenciales, sino *tres*, con tres funciones x , y , z , y una variable independiente t .

Al paso que para la línea de corriente tenemos que integrar dos ecuaciones diferenciales que han de darnos, por ejemplo, dos funciones y , z , en valores de una variable independiente x . Como que se trata de una curva independiente del tiempo: la curva AB .

Para otro instante t , la trayectoria del punto a siempre será aT , como se ve en la figura; el elemento ab en este caso será el $a' b'$, y la curva de corriente será $A' B'$, que no será la transformada de AB .

Esta se habrá transformado en otra curva continua que pasará por a' , por ejemplo, la $A_1 B_1$.

De modo que ni siquiera el elemento $a' b'$ será la transformación de ab .

Este elemento $a' b'$ substituirá, como antes decíamos, en el contacto con la trayectoria al elemento ab , pero no estará formado de los mismos elementos flúidos que éste.

Todas estas son consideraciones elementales, sencillísimas, pero son puntos sobre los que conviene llamar la atención de los principiantes, siquiera sean completamente ociosas, no ya para los maestros, sino para los que están versados en estos problemas.

Y pasemos ya á las líneas de torbellino, que en la figura 36 representábamos por $Aabcn$. Es decir, era esta línea una de las líneas de torbellino, la que en el instante t pasaba por el punto A .

Tanto la definición geométrica de esta línea de torbellinos, como de la línea de corriente MN , en la misma figura, si hemos de decir lo cierto, dejaban bastante que desear. Eran más bien intuiciones que definiciones exactas; porque para definir las era forzoso demostrar que, respecto á la línea de corriente, sea cual fuere la ley de los elementos AB, BC, CD, \dots , al tender éstos á 0, nos íbamos á encontrar con una línea límite independiente de aquella ley de decrecimiento; y otro tanto podemos decir y aún con más razón respecto á la línea de torbellino mn ; porque aún más arbitraria parece la ley de los elementos Aa, ab, bc, \dots . Al fin, en la línea de corriente, los elementos eran caminos recorridos por un elemento flúido en intervalos iguales dt . Aquí ni aun eso, porque estos elementos son direcciones de ejes sucesivos de giro.

Pero así como hemos dado rigor analítico á la definición de las líneas de corriente, podemos dar rigor analítico á la definición de las líneas de torbellino.

Y la definición será enteramente análoga; diremos que una línea de torbellino, *en un instante dado, es aquella en que la tangente en cualquier punto á dicha línea es precisamente el eje del torbellino infinitesimal que corresponde al expresado punto*. Es decir, la recta alrededor de la cual el elemento de flúido tiende á girar, ó como decíamos, el filete flúido tiende á retorcerse.

Si aún queremos más claridad, podemos decir que la línea de torbellino tiende á retorcerse alrededor de sí misma, es decir, de sus propias tangentes.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas de torbellino las encontraremos del mismo modo que hemos encontrado las ecuaciones diferenciales de las líneas de corriente, y

análoga á la figura 37 será la figura 38, de que vamos á servirnos ahora.

Sea un punto a del flúido, y vamos á determinar la línea de torbellino mn , que pasa por dicho punto.

El elemento ab de dicha línea debe coincidir en dirección, según lo dicho, con el eje del torbellino ó vector-torbe-

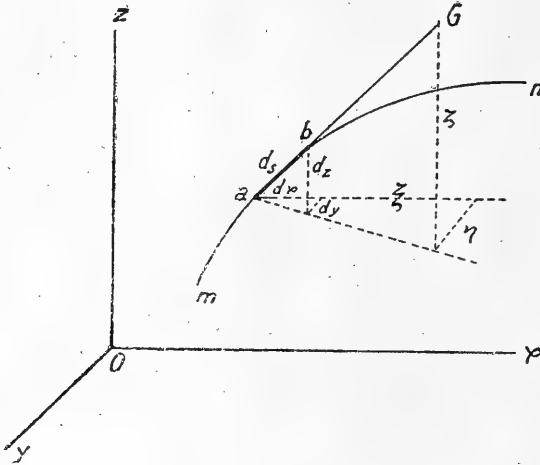


Figura 38.

lino correspondiente á dicho punto a , eje que hemos representado por aG .

O de otro modo, la tangente en a á la línea mn debe ser el eje del torbellino en a .

Puesto que los tres puntos a, b, G están en línea recta, sus coordenadas deben ser proporcionales si se refieren al punto a como origen.

O si se quiere decir de otro modo, las componentes de $ab = ds$ que son dx, dy, dz deben ser proporcionales á las componentes del eje del torbellino aG que hemos designado por ξ, η, ζ . Tendremos, pues,

$$\frac{\partial x}{\xi} = \frac{\partial y}{\eta} = \frac{\partial z}{\zeta},$$

y sustituyendo por ξ , η , ζ sus valores

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

resultarán:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial w}}{\frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Como suponemos para la aplicación de estas ecuaciones, que el problema está resuelto y que conocemos en un instante cualquiera t , los valores de u , v , w en función de x , y , z , t , claro es que los denominadores de las ecuaciones precedentes serán funciones perfectamente conocidas de x , y , z , t ; bastará derivar con relación á x , y , z los valores conocidos de u , v , w , y hecha la substitución de las derivadas que entren en los denominadores, tendremos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial x}{\lambda_1(x, y, z, t)} = \frac{\partial y}{\lambda_2(x, y, z, t)} = \frac{\partial z}{\lambda_3(x, y, z, t)}$$

Estas serán las ecuaciones diferenciales de las líneas de torbellino, é integradas darán las dos ecuaciones con dos constantes arbitrarias que definirán dichas líneas.

Y podemos repetir palabra por palabra todo lo que dijimos en las líneas de corriente.

Así, por ejemplo, para cada punto del fluido (x_0, y_0, z_0) en un instante t_0 , substituyendo las coordenadas de dicho punto en ambas ecuaciones, que podemos representar por

$$r_1(x, y, z, t) = C_1,$$

$$r_2(x, y, z, t) = C_2,$$

tendremos

$$\tau_1(x_0, y_0, z_0, t_0) = C_1,$$

$$\tau_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = C_2,$$

que nos darán los valores C_1, C_2 de dichas constantes.

Y las ecuaciones de la línea de torbellino que pasa por (x_0, y_0, z_0) serán

$$\tau_1(x, y, z, t) = \tau_1(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

$$\tau_2(x, y, z, t) = \tau_2(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

Esto nos prueba, suponiendo, como decíamos antes, que las funciones τ no tengan más que una determinación, ó que se puede escoger una sin ambigüedad, que por cada punto del fluido, en cada instante, no pasa más que una línea de torbellino.

* * *

Todo ello supone que el problema ha sido resuelto, es decir, que las ecuaciones diferenciales del movimiento se han integrado, y que se conocen las expresiones de u, v, w en funciones de las variables de Euler x, y, z, t .

De no ser así, ni conoceremos las funciones λ , puesto que no conocemos las funciones u, v, w ; ni podremos integrar las dos ecuaciones diferenciales, ni podremos hallar las funciones τ tampoco; pero *sabremos que existen* aunque no las conozcamos, y que expresan propiedades perfectamente definidas del movimiento del fluido, y podremos construir toda una teoría de las líneas de torbellino, que es precisamente lo que vamos á hacer en las conferencias siguientes.

Por eso llamábamos la atención de nuestros lectores diciéndoles: Sin integrar las ecuaciones diferenciales de un sistema, fundándonos sólo en esas ecuaciones diferenciales,

se puede construir, si vale la palabra, toda una teoría de muchas de las propiedades del sistema, que las ecuaciones diferenciales representan.

Este es precisamente el caso de la célebre teoría de los torbellinos de Helmholtz y Thomsom; porque, como veremos en la conferencia próxima, vamos á partir, para establecer esta teoría del teorema de Helmholtz, que ya hemos demostrado, á saber: toda línea flúida, cerrada, se conserva en el movimiento del flúido, aunque variando de forma y posición, como nueva línea flúida cerrada; los mismos elementos de flúido entran en una que en otra, su individualidad es permanente, y además la cantidad, á que hemos dado el nombre de circulación de la línea, conserva también un valor numérico constante.

¿Y cómo demostramos este teorema?

Sin integrar las ecuaciones diferenciales fundamentales. Diferenciando, con relación al tiempo, la circulación, que representábamos por I , y sustituyendo, en vez de

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

sus valores, deducidos de dichas ecuaciones diferenciales.

De las ecuaciones diferenciales nos servíamos directamente.

Si esto pudiera hacerse siempre y para todas las propiedades de un sistema, el cálculo integral habría llegado á su perfección.

Mejor dicho, el cálculo integral seria inútil, porque de las ecuaciones diferenciales deduciríamos todas las propiedades de las ecuaciones finitas; pero esto requiere estudio más detenido, porque ocurre esta pregunta:

Las ecuaetones diferenciales por el pronto sólo expresan una propiedad del sistema finito; ¿estarán todas escritas en esta propiedad única?

Pretender contestar á la pregunta precedente sería separarnos por completo de la materia de estas conferencias, y aun del objeto de esta asignatura, que no es de cálculo diferencial é integral, sino de Física matemática. Advirtamos, sin embargo, de paso, que las propiedades dependientes del *valor de las constantes arbitrarias* no pueden estar explícitamente expresadas en las ecuaciones diferenciales.

Volvamos, pues, á la teoría de los torbellinos, y no nos dejemos arrastrar por el torbellino de nuestro propio pensamiento.

Pero son tantos los problemas de análisis que nos van saliendo y que han de salirnos al encuentro, que con toda sinceridad hemos de confesar que la tentación es muy fuerte.

Resistámosla y volvamos al objeto principal de este curso.

II.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décimosexta.

SEÑORES:

Los hechos aislados, por numerosos que sean, jamás llegan á constituir una ciencia, como muchas piedras sueltas en un solar no constituyen un edificio.

Para constituir éste es preciso agrupar las piedras dentro de una unidad arquitectónica.

Para formar una ciencia es preciso reunir los hechos en una ó en varias unidades.

Esta es la labor de la intelectualidad; por qué la ciencia es de fabricación humana.

En rigor es un gran simbolismo intelectual de fenómenos exteriores, que serán lo que fueren, pero en cuyo fondo jamás podemos penetrar.

Estas grandes unidades, en que los hechos van poco á poco fundiéndose, forman las pequeñas leyes ó las grandes leyes de la ciencia humana.

La ley supone algo constante, invariable y en nuestro lenguaje, tan pobre, como soberbio, algo eterno.

Las leyes son, si se nos permite emplear el lenguaje moderno, las *invariantés* de los fenómenos.

Y apliquemos estas ideas generales y que á decir verdad, de puro sabidas, son ya vulgarísimas; apliquemos estas

ideas, repito, al problema general de la hidrodinámica y al problema particular de los torbellinos en que venimos ocupándonos en esta nueva serie de conferencias.

*
* * *

Buscábamos una representación material, ó al menos, representaciones parciales, del problema del movimiento á que se vea sujeta, por la acción de fuerzas determinadas, una masa finita ó infinita del flúido, que designábamos con el nombre de flúido perfecto.

Y en la variedad confusa, y dado lo imperfecto de nuestros sentidos, podemos decir caótica, de los diferentes elementos de flúido, habíamos ido poniendo cierto orden; y en la confusa variedad nos empeñábamos en ir marcando algo constante é invariable.

Y decíamos: una *línea flúida*, es decir, compuesta de elementos flúidos infinitamente pequeños, durante todo el movimiento estará siempre compuesta de los mismos elementos flúidos: conservará, digámoslo así, su individualidad.

Entiéndase bien; sucederá esto en las hipótesis establecidas respecto á la naturaleza de dicho flúido y de las fuerzas que sobre él actúan; en el problema general de la hidrodinámica esto no sucederá.

Y lo que hemos dicho de una línea flúida, pero con las mismas hipotéticas restricciones, sucederá con una superficie flúida.

También la superficie cambia de un momento á otro de posición, de forma, y de velocidad cambian sus diferentes puntos; pero en todos estos diferentes estados la superficie estará formada de los mismos elementos flúidos que en el primer instante.

Y sigamos resumiendo: el teorema de Helmholtz que de-

mostramos en una de las conferencias precedentes, es el teorema fundamental de la teoría de los torbellinos.

Una línea flúida, cerrada, no sólo conserva en el movimiento todos sus elementos flúidos, sino que conserva cons-

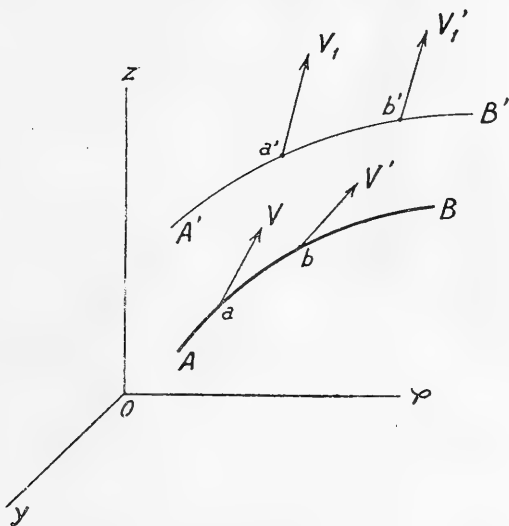


Figura 39.

tante cierta magnitud determinada, que es la integral á lo largo de dicha línea

$$\int_C (u \partial x + v \partial y + w \partial z)$$

y que hemos representado por I .

Estos principios generales los hemos aplicado, después de decir algo sobre las trayectorias de los diferentes puntos, á las líneas de velocidades ó líneas de corriente y á las líneas de torbellino.

Mas, entre uno y otro caso, hay una diferencia fundamental.

Sea (fig. 39) AB una línea de velocidades ó línea de corriente; es decir, una línea que en el instante t , que conside-

ramos, sea la envolvente de las velocidades del fluido en sus diferentes puntos $a, b \dots$. De modo que la velocidad del fluido en a sea aV , tangente en a á AB ; la velocidad en b será bV' , tangente en b á la misma línea AB , y así sucesivamente.

Si del instante t pasamos al instante t' , la línea de corriente AB , conservando su individualidad, como antes decíamos, habrá pasado á la posición $A'B'$. Los elementos de ésta serán los mismos elementos flúidos de AB , por ejemplo: el elemento a' será el elemento a , el b' será el b , y así sucesivamente.

Estos elementos se habrán condensado ó dilatado, según cierta ley que supondremos continua; pero, si la línea de corriente AB se ha transformado en la $A'B'$, no conservará la propiedad en esta transformación de ser *línea de corriente*. Las velocidades en el nuevo instante t' no serán tangentes á $A'B'$ como lo eran á AB .

Por ejemplo: la velocidad a' será V_1 que forma un ángulo finito con la tangente en a' .

De igual modo la velocidad en b' , á saber, V_1' tampoco será tangente á $A'B'$ en dicho punto b' , sino que formará cierto ángulo con esta última tangente.

En suma, la línea de corriente, al pasar del tiempo t al tiempo t' , conserva sus elementos flúidos; pero no conserva su propiedad de ser línea de corriente; esta es propiedad de un instante; la pierde en el movimiento.

¿Sucede lo mismo con la línea de torbellino?

Esto es lo que vamos á ver.

* * *

Sea (fig. 40) AB una línea de torbellino.

Los ejes para los diferentes puntos a, b, \dots de esta línea serán las tangentes aG, bG_1 , á la línea AB en los puntos a, b , porque ya sabemos, por definición, que las líneas de

torbellino son las envolventes de los ejes de giro de cada elemento fluido.

Cuando el tiempo varía y pasa del instante definido por t á otro instante cualquiera t' , la línea AB , como línea flúida, vendrá á tener la forma y ocupar la posición $A'B'$.

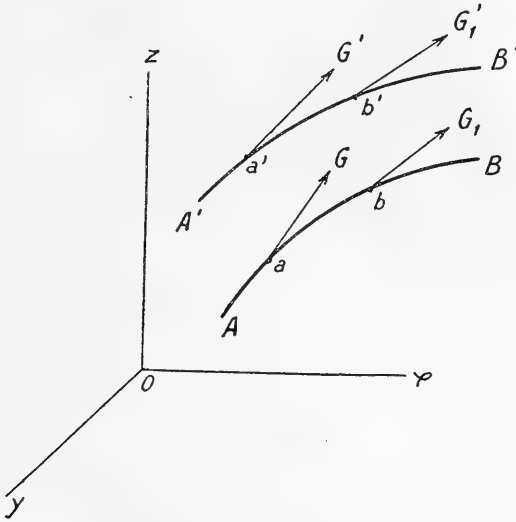


Figura 40.

El punto a , vendrá á ocupar la posición a' ; el b , la posición b' , y así sucesivamente, y se plantea el mismo problema que en las líneas de corriente.

¿Cuál será el eje de torbellino para el punto a' , para el b' y para todos los demás?

¿Serán las tangentes en a' , b' , ó formarán ángulo finito con dichas tangentes?

Vamos á demostrar desde luego, que se verifica la primera de dichas hipótesis, es decir, que los nuevos ejes de torbellino $a' G'$, $b' G'_1$ son precisamente las tangentes en a' ; b'

De suerte que las líneas de torbellino en el movimiento, se conservan como tales líneas de torbellino, lo contrario de lo que sucedería con las líneas de corriente.

Esta circunstancia es la que da importancia extraordinaria al movimiento rotacional y á las líneas que en los diferentes instantes lo representan, y es lo que viene á constituir en su desarrollo la teoría de los torbellinos.

Hay varias demostraciones; pero la que podemos llamar demostración clásica, aunque á decir verdad no es una demostración directa, porque hay, en cierto modo, que dar un rodeo, es sumamente sencilla y sumamente ingeniosa.

Necesitamos, para desarrollarla, explicar un nuevo concepto, de esta serie de movimientos del flúido que consideramos.

*
* *

Necesitamos definir lo que se entiende por *superficie de torbellinos* en un instante dado.

Se llama en un instante t *superficie de torbellinos* una superficie tal, que si en ella se toma un punto cualquiera y se traza para este punto el eje del torbellino que le corresponde, este eje es siempre tangente á la superficie.

Para imaginar una de estas superficies de torbellinos, supongamos en el instante t una curva cualquiera, AB (fig. 41).

Y por todos los puntos de esta línea a, b, c, \dots , hagamos pasar en el flúido, otras tantas líneas de torbellino aa', bb', cc', \dots

Esto es posible:

1.º Porque estamos suponiendo que existe en la región del flúido que se considera, el movimiento que hemos llamado rotacional.

2.º Porque por cada punto del flúido en cada instante pasa una línea de torbellino, y una sola.

Pero dada la ley de continuidad que suponemos, el conjunto de líneas $aa', bb' \dots$, constituirán evidentemente una superficie S_t , que será una superficie de torbellinos tal como la hemos definido.

Porque cualquier punto a_1 de esta superficie estará sobre una línea de torbellino $a a'$, y el eje correspondiente á a_1 , por ser la línea $a a'$, una línea de torbellino será tangente á dicha línea: y como la línea está sobre la superficie, $a_1 G$ será tangente la superficie.

Como esta propiedad subsiste para todos los puntos de la

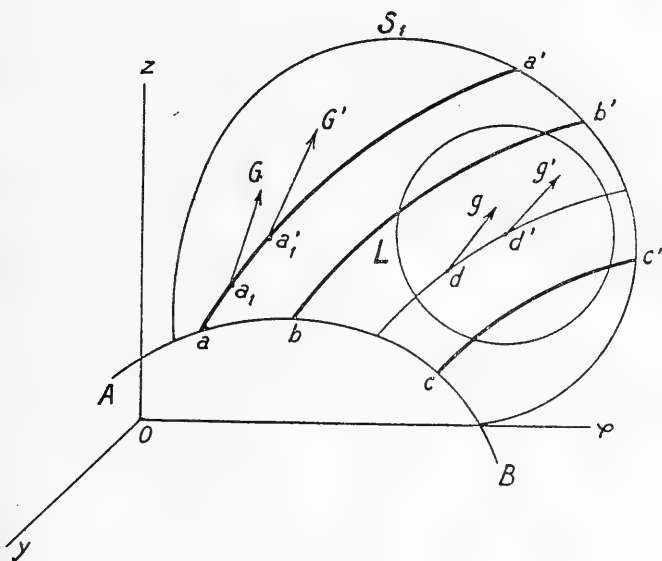


Figura 41.

superficie S_t , dicha superficie será, según definición, una superficie de torbellinos.

Y recíprocamente, toda superficie de torbellinos la podremos considerar en general de este modo, como se comprende inmediatamente.

Ahora bien; esta superficie de torbellinos tiene una propiedad importantísima que la define en forma muy sencilla, y de la que se deducen otras propiedades muy importantes.

Tracemos en la superficie de torbellinos S_t una línea cerra-

da cualquiera L , y determinemos, siempre para el instante t , el valor I de la circulación sobre dicha línea, es decir,

$$I = \int_L (u\partial x + v\partial y + w\partial z)$$

en que u, v, w , serán las componentes de la velocidad para los diferentes puntos de dicha línea L ; por eso en la expresión anterior ponemos L como determinando la línea de integración.

La propiedad á que nos referimos, y que es fundamental, es la siguiente:

En una superficie de torbellino S_t para toda línea cerrada L que en ella se trace, el valor de la circulación es nulo, es decir,

$$I = 0.$$

Y recíprocamente, si para toda línea cerrada, que en una superficie se trace, el valor de la circulación es nulo, la superficie es una superficie de torbellinos.

Vamos á demostrar primero la proposición *directa*.

Hemos demostrado, aplicando el teorema de Stokes, que el valor de la circulación en una línea es igual al flujo del vector de torbellino, que pasa por el interior de dicha línea.

Si consideramos la línea cerrada L , trazada sobre una superficie de torbellino, el valor I de la circulación sobre dicha línea será igual al flujo del vector torbellino sobre una superficie cualquiera que pase por L , y podemos suponer que esta superficie es la misma superficie torbellino S_t . Es decir, el flujo, á través de dicha superficie, de todos los vectores torbellinos $dg, d'g' \dots$ de los diferentes puntos $d, d' \dots$, comprendidos en L ; pero todos estos vectores $dg, d'g' \dots$ son tangentes á la superficie por definición de ésta; luego sus componentes normales serán nulas, y, por lo tanto, el flujo en cuestión será nulo también, y nula será la circula-

ción I sobre la línea L . Con lo cual queda demostrada la proposición directa, á saber: *la circulación, para todas y cada una de las líneas cerradas que se tracen en una superficie de torbellino, es nula.*

Pasemos á la demostración de la proposición inversa.

Si una superficie S_t , siempre en un momento determinado, es tal que la circulación de cualquier línea L trazada sobre esta superficie es nula, la superficie es una superficie torbellino.

En efecto, puesto que la línea L es arbitraria, podemos suponer que es infinitamente pequeña, y alrededor de cada punto d podemos suponer un contorno infinitamente pequeño que tienda á confundirse con dicho punto.

Pero la circulación, en este circuito infinitamente pequeño, es nulo por hipótesis: no infinitamente pequeño, sino nulo en absoluto; luego el flujo del área que comprende será, no infinitamente pequeña, sino nula.

Por fin, la componente normal del torbellino medio correspondiente á esta área, será igual á cero, lo que nos demuestra que el torbellino será perpendicular á la normal. Es decir, tangente á la superficie.

Queda, pues, demostrada la proporción inversa puesto que, en todos los puntos el torbellino es tangente á la superficie y esta es la definición de la superficie de torbellinos.

*
* *

Una superficie-torbellino se conserva como superficie flúida en los diferentes instantes del movimiento; pero además, y esto es importantísimo, se conserva como superficie de torbellinos.

En efecto, sea (fig. 42) S una superficie de torbellino correspondiente al instante t .

En otro instante t' todos los elementos del fluido que constituían S constituirán otra superficie flúida S' .

Pero esta superficie continuará siendo una superficie de torbellinos en el nuevo instante t .

Y la demostración es bien sencilla. Toda línea cerrada s trazada en la superficie S , por ser esta una superficie de tor-

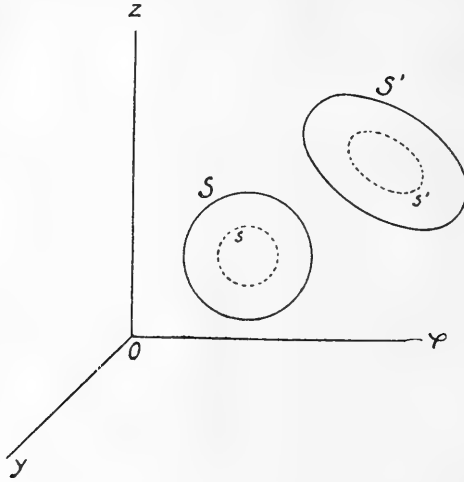


Figura 42.

bellinos, tiene una circulación nula. Es decir, que si representamos el valor de esta circulación por I_s tendremos

$$I_s = 0.$$

La línea s , como está sobre la superficie S , se transformará en el movimiento en otra línea cerrada s' , que estará evidentemente sobre la superficie S' , transformada de S .

Pero sabemos, por el teorema de Helmholtz, que la circulación de toda línea cerrada en su movimiento, es constante.

Luego la circulación de s' , transformada de s , será nula como la circulación en ésta.

Llamándola $I_{s'}$, tendremos

$$I_{s'} = 0.$$

Pero la línea s' es arbitraria en la superficie S' , porque la s lo es en S ; por lo tanto, la superficie S' cumple con esta condición: que la circulación de toda línea s' trazada en ella es nula, de donde resulta que la superficie S' es una superficie-torbellino.

En suma, las superficies de torbellinos conservan este carácter en todas sus transformaciones durante el movimiento.

Podemos decir, por modo abreviado y por analogía, que toda superficie-torbellino es una invariante respecto á dicha propiedad.

Y fundándonos en esta propiedad de toda superficie-torbellino, podemos demostrar otra propiedad análoga respecto á toda línea-torbellino.

* * *

Sea S (fig. 43) una superficie torbellino en un instante

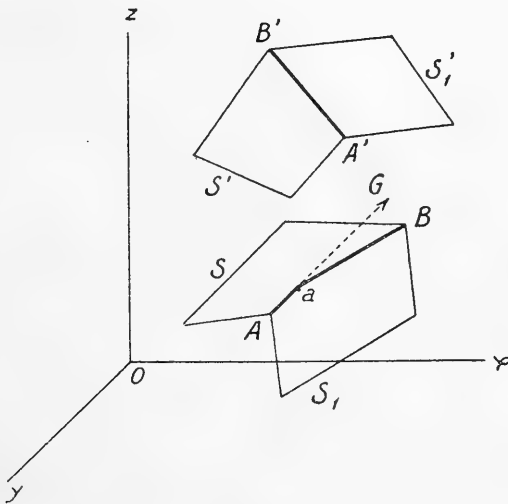


Figura 43.

dados, y sea en el mismo instante S_1 otra superficie-torbellino: supongamos que se cortan según la línea AB .

Decimos que esta línea AB será una línea-torbellino.

En efecto; tomemos (fig. 43) un punto a de dicha línea AB , é imaginemos el eje torbellino ag , correspondiente á este punto a .

Por ser la superficie S una superficie-torbellino, el vector torbellino ag estará en el plano tangente á S en el punto a .

Pero como podemos repetir el mismo razonamiento respecto á la superficie S_1 , resulta que ag también estará en el plano tangente á S_1 en a , y si está en los dos planos tangentes será su intersección, la cual es, como se sabe, la tangente en a de la intersección AB de las dos superficies.

Luego, en todos los puntos de la línea AB , la tangente coincide con el vector torbellino, y por lo tanto, la línea AB es una línea-torbellino.

Queda, pues, demostrada esta proporción que antes enunciábamos: *la intersección de dos superficies de torbellinos es una línea-torbellino.*

*
* * *

Consideremos ahora otro instante t' y supongamos que en este instante la superficie flúida S se ha convertido en la superficie S' , y la S_1 en la S'_1 .

Si estas dos superficies se cortan según $A'B'$, evidentemente $A'B'$ será la transformada en el movimiento de AB .

Esto es evidente: todo punto de AB , por estar en S en el instante t , estará en S' en el instante t' ; y por estar en S_1 en aquel primer instante, estará en S'_1 en el segundo instante; y si está en S' y en S'_1 , estará en su intersección $A'B'$.

De modo que todo punto de AB viene á parar á un punto de $A'B'$, ó si se quiere, esta última es, en el movimiento, la transformada de AB .

Ahora bien, siendo S' y S'_1 superficies de torbellinos, su intersección, según hemos demostrado, será una línea de torbellino; luego $A'B'$ lo es.

Y por fin, la transformada de AB , que es $A'B'$, es una línea-torbellino.

Queda, pues, demostrada la proposición que habíamos enunciado al empezar este análisis: Toda línea de torbellino conserva este carácter en su movimiento.

* *
* *

Hemos definido lo que se entiende por superficie de torbellino. En la figura 41 estudiamos esta clase de superficies

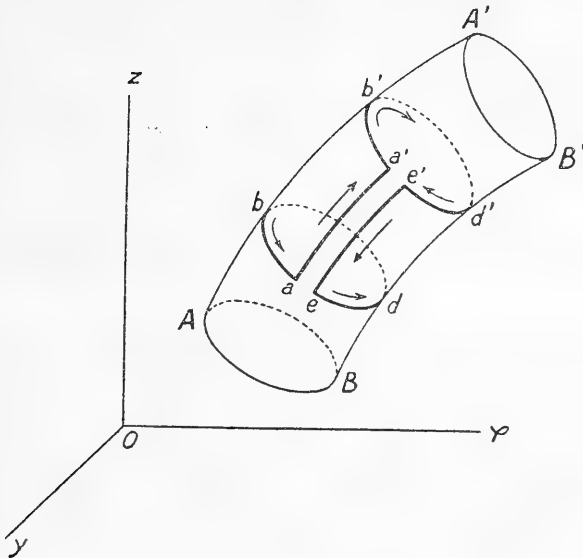


Figura 44.

flúidas; pero en esta figura AB era una línea cualquiera, cerrada ó no cerrada.

Ahora vamos á estudiar un caso particular, pero importantísimo, fundamental pudiéramos decir, de las superficies de torbellinos.

Sea AB (fig. 44) una línea cerrada cualquiera; por sus di-

ferentes puntos $A, B \dots$ hagamos pasar, como antes hacíamos, una serie continua de líneas de torbellino $AA', BB' \dots$

Estas líneas $AA', BB' \dots$, como la AB es cerrada, formarán una especie de tubo $AB A'B'$, cuyas generatrices serán todas, líneas de torbellino.

La superficie así formada, por su figura especial, recibe precisamente este nombre, y se llama *tubo de torbellino* ó abreviadamente *tubo-torbellino*.

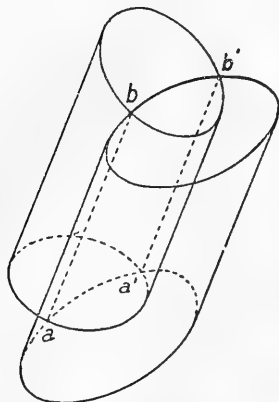


Figura 45.

Claro es, que en el fluido, ó al menos en la región de éste, en que el movimiento es rotacional, se pueden formar infinitos tubos de torbellinos, tantos como líneas cerradas AB puedan imaginarse.

Tendremos, pues, en una región de movimiento rotacional, infinitos tubos de torbellinos: en tubos de torbellinos puede descomponerse dicha región.

En general, no podrán cortarse unos con otros; porque de lo contrario, por cada punto de intersección pasarían dos líneas de torbellino, la de uno y la de otro tubo, lo cual, dadas las hipótesis establecidas, es imposible; pues por cada punto sólo puede pasar una línea de torbellino.

Si se cortan, las intersecciones serán líneas de torbellino, como indica, por ejemplo, la figura 45, en que los dos tubos de torbellino se cortan según $ab, a'b'$; pero estas son dos líneas de torbellino, y la contradicción que antes señalábamos desaparece.

Volvamos á la figura 44 y vamos á demostrar una propiedad importantísima de los tubos de torbellinos.

Consideremos dos líneas cualesquiera $bd, b'd'$ rodeando ambas por completo, en curva cerrada, el tubo en cuestión $AB A'B'$.

Interrumpamos por un pequeñísimo intervalo ae la línea bd , y por otro intervalo muy pequeño también $a'e'$ la línea $b'd'$. Por último, unamos los puntos a, a' ; e, e' por dos líneas cualesquiera infinitamente próximas aa', ee' .

Habremos formado así una línea continua $aa'b'd'e'edba$ que podemos suponer que se recorre, por ejemplo, en el sentido de las flechas.

Esta línea, trazada toda ella sobre la superficie del tubo, constituye, como vemos, una línea cerrada.

Luego su *circulación* I será, como antes demostramos, igual á cero.

Es decir,

$$\text{circulación } (aa'b'd'e'edba) = 0.$$

O descomponiendo en partes y escribiendo I en vez de la palabra *circulación*:

$$I(aa') + I(a'b'd'e') + I(e'e) + I(edba) = 0.$$

Observemos ahora que, como las dos líneas aa', ee' están infinitamente próximas, y en el límite se confunden, y para medir la circulación en cada una hay que tener en cuenta que están recorridas en sentido contrario, según las flechas marcan, los elementos de ambas integrales I serán iguales y de signos contrarios. Siendo como siempre u, v, w las componentes de la velocidad del punto fluido, serán ambos elementos

$$\begin{aligned} &\text{el de } aa' \dots u\partial x + v\partial y + w\partial z \\ &\text{y el de } e'e \dots -u\partial x - v\partial y - w\partial z \end{aligned}$$

iguales y de signos contrarios, de modo que en la ecuación precedente

$$I(aa') + I(e'e)$$

se destruirán y la ecuación quedará reducida á

$$I(a'b'd'e') + I(edba) = 0$$

ó bien

$$I(a'b'd'e') = -I(edba)$$

Pero si invertimos el sentido de la circulación en el segundo miembro, esto equivale, como dijimos en momento oportuno, á cambiar el signo de la integral; luego tendremos, por último,

$$I(a'b'd'e') = I(abde)$$

ó representando, para abreviar, cada curva por solo dos letras y teniendo en cuenta que el límite los intervalos ae , $a'e'$, desaparecen y las curvas quedan cerradas,

$$I(bd) = I(b'd').$$

De donde resulta este teorema, que es capital en la teoría de los torbellinos:

Dado un tubo de torbellinos cualquiera, todas las curvas cerradas que lo abarquen bd , $b'd'$ á manera, por decirlo así, de cinturón, tienen *igual circulación flúida*.

La circulación alrededor de todas estas líneas es constante para todo el tubo; es, en cierto modo, una constante del tubo, una invariante, pudiéramos decir también.

*
* *

Pero hay más, y aquí los teoremas se van generalizando:

Todo lo que hemos dicho se refiere á un momento determinado t . Si consideramos otro instante cualquiera t' , el tubo podrá tener otra posición y otra forma, pero observemos:

1.º Que continuará siendo un tubo, porque su directriz AB era cerrada y cerrada será en otro momento cualquiera.

2.º Que las generatrices del tubo (curvilíneas en general) serán generatrices del tubo transformado, y como eran líneas de torbellino en el instante t , seguirán siendo líneas de torbellino en el instante t' .

3.º Que por lo tanto, el tubo de torbellino primitivo continuará siendo tubo de torbellino.

Y 4.º Y esto es muy digno de consideración: Que *el valor de la circulación* del primer tubo, será el mismo para el segundo. Es decir, para el instante t' .

En efecto, cualquier curva de circuito bd , del primer tubo, se convertirá, en el instante t' , en curva de circuito del nuevo tubo torbellino. Pero sabemos, que la *circulación* de una curva cerrada conserva un valor constante en el movimiento; luego la curva de circuito de dicho segundo tubo tendrá el mismo valor para su circulación que la del primero, y como esta es la que mide la circulación del nuevo tubo, ambos tendrán el mismo valor I .

Si para abreviar las explicaciones llamamos *momento del tubo* á la circulación I para una de sus curvas de circuito, que será el mismo que para otra cualquiera, podremos decir que *el movimiento no altera el valor del momento de un tubo torbellino* y resulta esta proporción importantísima y curiosa: Que *un tubo torbellino, en el movimiento de un fluido perfecto, se conserva como tubo-torbellino y conserva el valor de su momento.*

* * *

Entre los tubos torbellinos hay una clase muy importante que son los que podemos llamar infinitamente estrechos, los que llamaba Helmholtz «Wirbelfaden», verdaderos *filetes de torbellino*, que se pueden aproximar tanto como se quiera á una línea torbellino.

A éstos se les puede aplicar todo lo que hemos dicho para el tubo torbellino de sección finita.

Sea AB (fig. 46) un tubo torbellino infinitamente estrecho.

Las generatrices, por decirlo así, ac, bd, \dots del tubo serán líneas-torbellinos. Es decir, que si trazamos en a , por ejemplo, el eje ag del torbellino correspondiente al punto a , esta

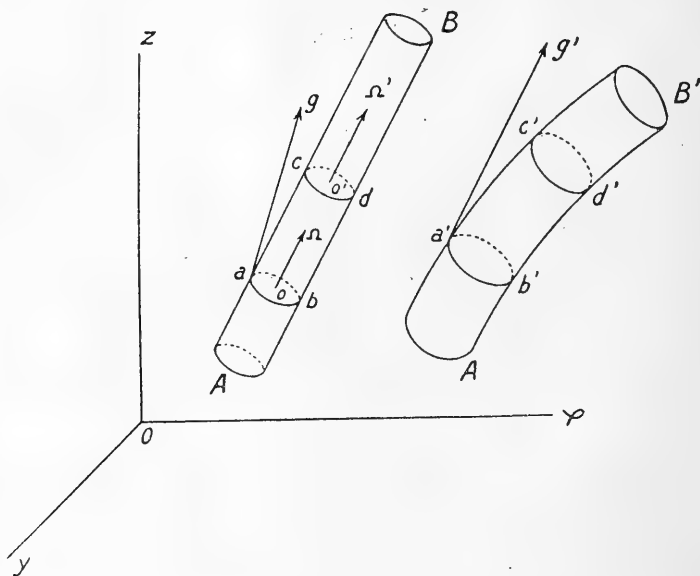


Figura 46.

línea será tangente á la línea ac , y lo mismo podremos decir para otro punto cualquiera de la superficie del tubo.

Supongamos que se traza por a un plano perpendicular á ag , el cual determinará una sección ab del tubo torbellino infinitamente estrecho. La llamaremos sección recta del tubo, y como el tubo es infinitamente estrecho y los ejes de los torbellinos varían por la ley de continuidad, todos los ejes de torbellinos de los diferentes puntos de la sección ab serán próximamente paralelos al elemento ac .

Por eso podemos decir que esta sección es la sección recta del tubo.

Como en el caso general, la circulación del tubo, ó *el momento del tubo*, ó *la intensidad del tubo*, que todos estos nombres recibe la cantidad á que nos referimos, estará representada por el valor I de la circulación medida en la curva ab , la cual, como sabemos, tiene el mismo valor para otra sección oblicua cualquiera ó para otra curva de doble curvatura, con tal que forme circuito cerrado alrededor del tubo.

Aquí, como en el caso general, este *momento* ó *intensidad* puede medirse, según el teorema de Stokes, de dos modos: ó por la *circulación* I de la curva ab , ó por el flujo de torbellinos sobre los puntos de la superficie ab .

Llamando Ω_n á la proyección normal del eje-torbellino de cualquier punto de ab sobre la normal á esta sección, y llamando $\partial\sigma$ al área de la sección recta ab , tendremos:

$$I = 2 \iint_{ab} \Omega_n \partial\sigma.$$

Mas para todos los puntos de la sección ab , los ejes torbellinos son próximamente iguales y paralelos, y además normales á dicha sección ab ; luego, tomando el eje Ω correspondiente á un punto interior o de ab , la integral doble puede sustituirse por el área multiplicada por este valor medio del eje torbellino. En suma, el *momento* del tubo infinitamente estrecho será:

$$I = 2\Omega\partial\sigma.$$

Es decir; que el *momento* ó la *intensidad* de un filete torbellino, es igual á dos veces el área de su sección recta por el valor del eje-torbellino de un punto cualquiera o del filete, que puede estar dentro del mismo ó en la superficie, tomando, por de contado, este punto o en dicha sección recta. Y resulta esta propiedad importantísima: Como en otra sección cualquiera cd , la medida del momento del tubo debe ser

siempre la misma, y para dicha sección, llamando $\partial\sigma_1$ al área y Ω_1 al torbellino, su valor es

$$\Omega_1 \partial\sigma_1$$

tendremos

$$I = \Omega \partial\sigma = \Omega_1 \partial\sigma_1.$$

Es decir, que en un tubo torbellino infinitamente estrecho el producto del área de cualquier sección recta por el eje del torbellino que le corresponde, es una cantidad constante, característica, por decirlo así, del tubo torbellino.

Si el tubo estrecha y la sección recta disminuye, aumenta el valor del eje del torbellino.

Si la sección ensancha, el valor del eje disminuye para que el producto quede invariable.

Es lo mismo, y valga esta imagen, que si el tubo fuese una cañería sin rozamiento y por ella circulase con movimiento permanente un líquido sin viscosidad. La continuidad del fluido exigirá que el producto de la sección por la velocidad fuese constante.

Este tubo, infinitamente estrecho, sigue al fluido en su movimiento. Si en el instante t era AB , en el instante t' será $A'B'$; continuará siendo tubo de torbellino, continuará siendo infinitamente estrecho y su intensidad ó momento quedará invariable.

Puede decirse que

$$\Omega \partial\sigma$$

conserva el mismo valor en todos los puntos del tubo y en todas las posiciones de éste.

*
* *

De aquí se deducen algunas consecuencias importantes en las que sin embargo no podemos detenernos.

Diremos tan solo que los tubos de torbellinos, de sección finita ó infinitamente estrecha no pueden terminar bruscamente en el interior del fluido, si no que, ó bien terminan en las superficies límites, ó vienen á cerrarse formando una línea continua.

Porque en efecto, si han llegado á un punto A y para fijar las ideas suponemos que se trata de un tubo infinitamente estrecho, como los ejes de los torbellinos son continuos en valor y dirección, más allá del punto A , en la masa fluida habrá un eje de torbellino que se enlazará con el del punto A , y á él corresponderá una sección determinada que satisfaga á la ecuación que antes establecimos.

Basta para nuestro propósito esta indicación general, de la que se deduce que el área del torbellino no puede anularse, única manera de que el torbellino se interrumpiera: para que en

$$\Omega \partial \sigma = \Omega_1 \partial \sigma_1, \text{ fuese } \partial \sigma_1 = 0$$

sería preciso que tuviésemos $\Omega_1 = \infty$ y puesto que las dos secciones están infinitamente próximas, dada la continuidad de los ejes de torbellino, no puede ser Ω finito y Ω_1 infinito.

En la conferencia próxima continuaremos estudiando estos movimientos singularísimos de un fluido perfecto que, á decirverdad, no sabemos si en la Naturaleza se realizaran, y en cambio sabemos, que en la mayor parte de los casos que tenemos á la vista, no se realizan; pero que aproximadamente pueden realizarse y aun se han ideado experiencias para conseguirlo.

III.— Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décimoséptima.

SEÑORES:

La ciencia, como tantas veces hemos dicho, no es un conjunto de hechos, una especie de almoneda del *Cosmos*, si se nos permite expresarnos de esta manera.

Por los hechos empieza; pero, buscando analogías y relaciones y rasgos comunes de familia, si vale la palabra, los agrupa y clasifica, y este agrupamiento, y esta clasificación constituyen un primer esfuerzo de la ciencia para formarse como tal ciencia; porque si varios hechos se agrupan bajo una rúbrica común, será porque en todos ellos se encuentra algo que á todos pertenece, y de este modo empieza á dibujarse la unidad sobre la variedad.

Y de este modo, repetimos, empiezan á dibujarse las leyes de la Naturaleza; que después de todo, las leyes naturales vienen á expresar lo constante en lo variable, lo uno en lo múltiple, la unidad en la variedad, como antes decíamos.

Al principio, estas leyes son un tanto vagas; son, en cierto modo, leyes de la *cualidad*; pero luego se hacen más precisas, y en las ciencias superiores, quiero decir, en las ciencias más perfectas, se convierten en leyes matemáticas. Leyes de la cantidad, leyes del orden, y, á veces, leyes de

la distribución geométrica, que todas ellas, á las leyes numéricas pueden referirse por procedimientos matemáticos.

Y como decíamos en una de las conferencias anteriores, si para ciertas escuelas se ha llegado á la perfección única accesible, cuando los fenómenos se han expresado por fórmulas matemáticas, para otras escuelas más exigentes, con las fórmulas matemáticas no basta; son precisas las representaciones sensibles de los fenómenos.

Para unos, las fórmulas.

Para otros, las fórmulas y la representación plástica y sensible.

* * *

Las ideas que preceden nos han guiado, en las conferencias anteriores, al estudiar el problema del movimiento de un fluido perfecto.

En la confusión del movimiento buscábamos, en primer lugar, la ley del fenómeno; y nos daba esta ley la aplicación de la hipótesis mecánica, ó sea de la mecánica racional al equilibrio y al movimiento del fluido en cuestión.

Y la aplicación de la mecánica clásica nos procuraba la ley suprema del movimiento del fluido; es decir, nos ofrecía la solución del problema. Y esta solución la podíamos expresar de dos modos, según las variables que escogíamos.

Si escogíamos las variables de Lagrange, teníamos un sistema de ecuaciones, de las que podíamos deducir las coordenadas x, y, z de cualquier punto en función de las coordenadas a, b, c de este punto en el origen del movimiento, de las velocidades iniciales y del tiempo como única variable independiente para cada sistema de a, b, c .

Si escogíamos las variables de Euler, los principios de la mecánica racional nos daban todavía otro sistema de ecuaciones, de las que era posible deducir las componentes u, v, w de la velocidad, en función de las coordenadas x, y, z de cada punto y además del tiempo.

Uno ú otro grupo de ecuaciones expresan la ley del fenómeno.

Pero, obedeciendo á la segunda de las dos tendencias que antes indicábamos, al deseo de buscar representaciones materiales, al afán de ir penetrando en el movimiento del flúido, para ver si en la variedad del movimiento hay algo constante y permanente, formas ó magnitudes, emprendimos el estudio, no ya de las integrales, sino de ciertas propiedades deducidas de las mismas ecuaciones diferenciales; y llegamos á una serie de consecuencias, que se traducen por algo permanente en la variabilidad, al parecer confusa, de los movimientos del flúido.

Y antes de seguir adelante corriendo el peligro de que se nos acuse de pesadez, vamos á hacer el resumen de las consecuencias obtenidas hasta ahora.

No; en el movimiento del flúido perfecto, y dentro de las hipótesis establecidas y tantas veces recordadas, no todo es confusión, no se mezclan caprichosamente los elementos del flúido; bien, al contrario, guardan cierto orden y cierta formación, como ejército bien disciplinado, si no es exceso de retórica expresarnos de este modo.

*
* *

1.º Cuando en un momento cualquiera varios elementos flúidos, infinitamente pequeños, forman una línea, en el resto del movimiento la línea flúida camina y se deforma, pero no se deshace, ni los elementos flúidos se dispersan, destruyendo la continuidad.

Podemos decir que hay conservación de líneas.

Así una línea cerrada continúa siendo una línea cerrada.

2.º Cuando en un momento dado, para un valor t del tiempo, diferentes elementos infinitamente pequeños del flúido, constituyen lo que podemos llamar una superficie flúida,

da, y si se tratara, por ejemplo, de un líquido, podríamos decir una superficie líquida, esta superficie en el resto del movimiento cambiará en general de posición, de forma, de magnitud, pero se conservará como superficie flúida y estará formada por los mismos elementos flúidos que al principio.

Lo que decíamos de la conservación de la línea, podemos decir de la conservación de la superficie.

No se desgarrará, no se deshará, no se pulverizará en polvo flúido.

Si era, por ejemplo, una superficie cerrada, continuará siendo cerrada y los elementos flúidos que estaban dentro de ella, dentro de ella seguirán y no penetrarán los que estaban fuera.

Y así en el flúido perfecto y en las hipótesis particularísimas que estamos considerando, se ve desde luego, que en el sistema hay cierta especie de organización y cierto esfuerzo de la *Naturaleza hipotética*, que hemos forjado, al establecer las condiciones de flúido perfecto, cierto esfuerzo, repetimos, á procurar la *conservación* de algo: hasta aquí una especie de conservación geométrica.

3.º Una línea cerrada, no sólo conserva su substancia flúida, la misma siempre, y siempre bajo forma de línea cerrada, sino que lleva consigo, por decirlo de este modo, á través del movimiento, una constante numérica á que se da el nombre de *circulación* y que se obtiene, como hemos explicado, determinando algo así como el trabajo de las velocidades de sus diferentes puntos á lo largo de la expresada línea.

Conserva ésta, si la imagen vale, el cuerpo, que es el flúido, el alma, que es el valor de la *circulación*.

4.º Si la línea que consideramos no es una línea cualquiera, sino una *línea-torbellino*, no sólo se conserva en el movimiento como línea flúida en que permanecen todos los elementos de dicho flúido, sino que se conserva siempre como *línea-torbellino*. Es constante la substancia y es cons-

tante la propiedad de la rotación alrededor de sus tangentes.

5.º De una propiedad análoga goza toda superficie-torbellino, y ya sabemos lo que dicha denominación significa: para cada punto de la superficie el eje torbellino es tangente á la misma.

Pues bien, tal superficie flúida se conserva en el movimiento como superficie flúida, compuesta siempre de los mismos elementos del flúido y siempre como superficie-torbellino.

Podemos repetir lo que hemos dicho hace un momento: se conserva la materia, se conserva la forma superficial y se conserva la propiedad que constituye el movimiento llamado rotacional.

6.º La intersección de dos superficies de torbellinos es una línea-torbellino, y cuando las superficies se mueven, su intersección representa el movimiento de la intersección primitiva, siempre con el carácter de línea-torbellino.

7.º Un tubo torbellino estará definido por una serie continua de líneas de torbellinos que se apoyan sobre una línea cerrada.

Sobre un tubo torbellino, todas las líneas cerradas que lo abarcan como cinturón dan un valor único á la circulación de dichas líneas. Es en cierto modo un número característico del tubo, y en el movimiento del flúido todo tubo se conserva como tubo-torbellino y su momento ó intensidad se conserva constante.

Podíamos repetir, empleando la imagen que antes empleábamos, que en el tubo torbellino hay algo así como un principio de organización hidrodinámica, á saber: que en su movimiento como flúido conserva la forma general de su organismo; hace más que los seres vivos, porque conserva la substancia flúida que lo constituye y conserva lo que pudiéramos llamar su alma, que es su momento ó intensidad, ó sea la *circulación* de cualquier circuito que lo abarque.

8.º Lo que hemos dicho de un tubo cualquiera podríamos repetir de un tubo infinitamente estrecho.

El momento en este caso tiene otra expresión más sencilla que para los tubos de dimensiones finitas.

Dicho momento ó intensidad, es el producto del área de cualquier sección recta, por el eje del torbellino correspondiente á cualquier punto de esta sección recta; por ejemplo, de un punto central.

9.º Finalmente, es propiedad muy importante, que estos tubos no pueden terminar bruscamente en el interior del flúido: ó han de llegar á los límites de la masa flúida, ó han de cerrarse en sí mismos.

Hemos hecho el resumen de las principales propiedades, las más elementales de la teoría de los torbellinos, escogiendo las demostraciones más sencillas y, por decirlo así, más plásticas; pero hay otros métodos analíticos de demostración por todo extremo elegantes; por ejemplo, las demostraciones de Kirchhoff, Helmholtz y Cauchy.

Los que quieran ampliar las ideas ó nociones que hemos expuesto, pueden consultar las obras que en otras conferencias citamos, y sobre todo la de Poincaré y la mecánica de Appell.

Todo lo que hemos dicho se aplica al flúido perfecto en general, pero los resultados obtenidos se simplifican notablemente en el caso particular de que sea permanente el movimiento.

*
* *

Del movimiento rotacional en el caso del movimiento permanente.—Supongo que mis alumnos por el estudio de los flúidos, en la Mecánica racional, saben lo que se entiende por movimiento permanente. Además, aunque de paso, lo hemos definido en otra conferencia, y es tan sencillo, que en cualquier momento puede definirse. El nombre lo indica;

es un movimiento, que en cualquier instante es igual á sí mismo, es lo que era en todos los instantes anteriores.

Si se nos permite la imagen, podremos decir: que tomando dos instantes t y t' , los dos movimientos pueden superponerse y coinciden matemáticamente.

En cada punto la velocidad es siempre la misma, en magnitud y en dirección, aunque será distinta de un punto á otro. Las mismas son las aceleraciones, las mismas cada *línea-torbellino*, cada *superficie-torbellino* y cada *tubo*.

Un río de régimen permanente, con la misma forma, las mismas orillas, las mismas líneas de corriente, las mismas velocidades, nos da una imagen, aunque imperfecta, del movimiento permanente.

*
* *

Una circunstancia importantísima encontramos en este movimiento, que no encontrábamos en el movimiento general.

A saber, *que las trayectorias y las líneas de corriente coinciden*; lo mismo da decir línea de corriente para un momento dado, que trayectoria.

Y esto se desprende de la definición analítica del movimiento permanente.

Porque la definición analítica sería esta: que para cada punto de coordenadas x, y, z , las componentes de la velocidad son independientes del tiempo.

El tiempo no influye sobre el movimiento permanente.

En el movimiento general u, v, w , son funciones de x, y, z, t ,

$$u = \varphi_1(x, y, z, t)$$

$$v = \varphi_2(x, y, z, t) \quad (\text{movimiento general}).$$

$$w = \varphi_3(x, y, z, t)$$

En el movimiento permanente la t no entra en estas ecuaciones; y tenemos

$$\begin{aligned}u &= \varphi_1(x, y, z) \\v &= \varphi_2(x, y, z) \quad (\text{movimiento permanente}). \\w &= \varphi_3(x, y, z)\end{aligned}$$

Así es, que las ecuaciones diferenciales de corriente, que como vimos en otra conferencia eran

$$\frac{dx}{\varphi_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\varphi_2(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\varphi_3(x, y, z, t)}$$

en que debíamos considerar á t como una constante, en este caso son las mismas, pero no contienen t .

Y del mismo modo las ecuaciones de las trayectorias, siendo las trayectorias independientes de t , porque siempre son las mismas, coinciden con las anteriores.

A este resultado podemos llegar, por consideraciones geométricas, acaso no tan rigurosas en el concepto de algunos, como las consideraciones analíticas; pero con mucha más claridad plástica.

En efecto.

Sea (fig. 47), un punto A del fluido en un instante t .

El elemento fluido que pasa por este punto, tendrá determinada velocidad V , y en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt , describirá un elemento

$$AB = Vdt,$$

que será evidentemente un elemento de su trayectoria.

Pero aquí se presentan dos casos, según sea el movimiento general, ó sea el movimiento permanente.

1.º Si el movimiento es general, AB será evidentemente un elemento de la trayectoria que pasa por A ; pero en el

punto B se separarán la línea de corriente BCD y la trayectoria $B'C'D'$.

Porque, en efecto, en el instante t , si para el punto A la dirección de la velocidad es AB y la dirección de la velocidad en este instante para el punto B , es BC , la línea de corriente, ó dos elementos consecutivos de ella serán AB, BC ,

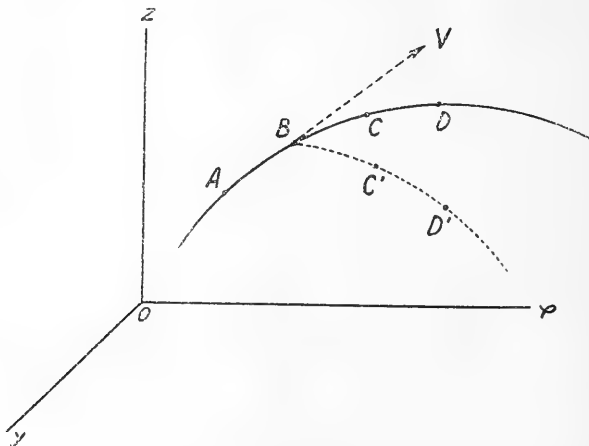


Figura 47.

Pero como el elemento flúido llega á B en el instante $t + dt$, la velocidad del elemento que pasa por B habrá cambiado de dirección y no será BC sino BC' .

Era BC en el instante t . Es BC' en el instante $t + dt$ y precisamente para este momento BC' es el camino que sigue la partícula flúida que partió de A en dicho instante t ; como antes decíamos, ABC era la corriente del flúido, es decir, la corriente de velocidades para el instante t y ABC' es la trayectoria.

2.º Pero si el movimiento es permanente, la dirección de la velocidad en B es siempre BC , lo mismo en el instante t que en el instante $t + dt$.

De modo que, BC' coincide con BC , y ABC es al mismo tiempo la línea de corriente ó de velocidades, que pasa

por A , y la trayectoria del elemento fluido que pasa por este punto A .

Estas consideraciones simplifican los resultados que antes obtuvimos, y nos suministran un nuevo concepto geométrico, el de superficies de corriente y de torbellino al mismo tiempo, ó, si se quiere, de corriente, de trayectoria y de torbellino.

*
* *
*

Sea (fig. 48) AA_1A_2T una línea de torbellino en un instante dado t .

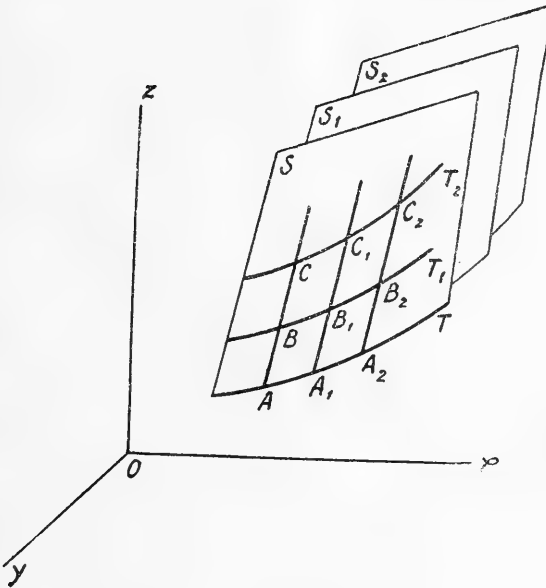


Figura 48.

Tomemos en esta línea una serie de puntos, tantos como se quieran, A, A_1, A_2, \dots y pasemos del instante t á una serie de instantes sucesivos $t + dt, \dots$

El punto A en esta serie de instantes seguirá su trayecto-

ria, que representaremos por $A C$, y que, como el movimiento es permanente, será la línea de corriente ó de velocidades que pasa por el punto A . Si se nos permite la comparación, $A C$, será como una cañería por donde el fluido circula constantemente.

El elemento fluido, situado en A , nunca abandona esta cañería; lo que hace es pasar de A á B y á C

Y como el movimiento es permanente, mientras el elemento que estaba en B pasa á C , el que estaba en A pasa á B , y otro elemento de la cañería viene á A en sustitución del que ha pasado á B .

Si pudiéramos con la vista seguir al fluido en esta cañería, hasta podríamos creer que dicho fluido estaba inmóvil.

Lo que hemos dicho para el punto A podemos repetir para el punto A_1 , trazando la trayectoria ó línea de velocidades ó cañería infinitamente estrecha $A_1 B_1 C_1$.

Y otro tanto puede repetirse para el punto A_2 ó elemento que en él se encuentre en el instante t ; y en suma, para todos los puntos de la línea de torbellino $A T$.

Ahora bien, el lugar geométrico de todas las líneas $A C$, $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, que á la vez son líneas de corriente y trayectorias, forman una superficie S , que es en cierto modo una hoja fluida del movimiento, y para abreviar, este nombre podemos darle: *hoja fluida* del movimiento permanente.

Ahora bien, como para el instante $t + d t$ el punto A viene á B , el A_1 al B_1 , el A_2 al B_2 y así sucesivamente, la línea de torbellino T se habrá transportado á $B T_1$, y en el instante siguiente se transportará á $C T_2$; siempre apoyándose sobre las líneas C , C_1 , C_2

En resumen, sobre cada hoja fluida, según el nombre que les hemos dado, están las diversas posiciones de la línea de torbellino T , que ha servido de directriz á la superficie S , las líneas de corriente C , C_1 , C_2 , y las trayectorias de los diferentes puntos de la línea de torbellino, que son estas mismas líneas de corriente.

El fluido que en un instante se encuentra en una hoja fluida, no la abandona nunca.

Y si consideramos una serie de hojas fluidas análogas á la anterior, S_1, S_2, \dots podemos decir, que el movimiento permanente se realiza por hojas fluidas de líneas de torbellino.

La hoja S siempre se conserva ella misma, sin que el fluido que está en ella pase á S_1, S_2, \dots

Veamos ahora cuál será la ecuación de dichas hojas fluidas, que representan un papel importante en estas cuestiones.

*
* *
*

Recordemos las ecuaciones generales del movimiento de un fluido en el sistema de Euler, que eran las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= X - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz} - \frac{du}{dt}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= Y - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dt}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= Z - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dt}, \\ \rho &= f(p), \\ \frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen, como dijimos en otra ocasión, forma regular para ser integradas.

Las funciones desconocidas son u, v, w, p, ρ , y no entran en dichas ecuaciones más que estas cantidades como funciones desconocidas.

Además las variables independientes x, y, z , y por fin, las derivadas de aquellas funciones con relación á estas variables independientes.

Fácilmente se pueden poner bajo otra forma que tiene importancia para nuestro objeto.

Si representamos, siguiendo en este caso, y en otros muchos, las notaciones de Mr. Appell en su Mecánica racional, por W la velocidad del elemento de fluido que ocupa en el instante t el punto (x, y, z) , como las componentes de esta velocidad las hemos representado por u, v, w , tendremos evidentemente:

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

ó también

$$\frac{1}{2} W^2 = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2$$

y por lo tanto, diferenciando con relación á x ,

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx}.$$

De aquí se deduce una identidad, restando de

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \text{ en el primer lugar } d \frac{\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dx} \text{ y}$$

después su igual $u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx}$, á saber:

$$\begin{aligned} & u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} - \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dx} = \\ & = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} - u \frac{du}{dx} - v \frac{dv}{dx} - w \frac{dw}{dx} \end{aligned}$$

y simplificando

$$u \frac{d u}{d x} + v \frac{d u}{d x} + w \frac{d u}{d z} = \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{d x} + \\ + v \left(\frac{d u}{d y} - \frac{d v}{d x}\right) + w \left(\frac{d u}{d z} - \frac{d w}{d x}\right);$$

pero los paréntesis del último miembro, según la notación adoptada para los torbellinos, son precisamente -2ξ y 2η , luego tendremos por último,

$$u \frac{d u}{d x} + v \frac{d u}{d y} + w \frac{d u}{d z} = \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{d x} + 2(\eta w - \xi v),$$

y sustituyendo este valor en la primera de las cinco ecuaciones del movimiento, resultará

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d x} = X - \frac{d}{d x} \left(\frac{1}{2} W^2\right) - 2(\eta w - \xi v) - \frac{d u}{d t}.$$

Repitiendo los mismos cálculos para las otras dos ecuaciones del movimiento, obtendremos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d y} = Y - \frac{d}{d y} \left(\frac{1}{2} W^2\right) - 2(\xi u - \zeta w) - \frac{d v}{d t}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d z} = Z - \frac{d}{d z} \left(\frac{1}{2} W^2\right) - 2(\xi v - \eta u) - \frac{d w}{d t}.$$

Todo esto que hemos explicado, son puras transformaciones analíticas, en que no hemos hecho otra cosa, que introducir nuevas cantidades W , ζ , η , ξ , enlazadas con u , v , w por ecuaciones de forma conocida.

Pero hemos de aplicar estas ecuaciones al caso de los torbellinos, y este caso depende de varias hipótesis, que vamos

á suponer satisfechas para las fórmulas precedentes, con lo cual aquellas fórmulas generales serán aplicables á la teoría de los torbellinos que vamos estudiando.

En primer lugar, admitíamos que para las fuerzas que actuaban sobre el flúido existía una función de fuerzas, que llamábamos U ; de modo que tendremos

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.$$

Además, dentro de la misma teoría de los torbellinos, considerábamos el caso particular del movimiento permanente, de modo que u, v, w eran funciones de x, y, z , pero independientes del tiempo; de donde resulta

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0.$$

Más aún, como prescindimos de la temperatura, puesto que la consideramos constante, ó mejor dicho, igual á cero, para no complicar el movimiento general del flúido con los supuestos movimientos vibratorios del calor, la ecuación

$$\rho = f(p)$$

nos permite simplificar los primeros miembros de las tres primeras ecuaciones del movimiento, según ya hemos hecho en otra ocasión.

Porque en efecto tendremos, representando por P la integral

$$P = \int_{P_0}^P \frac{dp}{f(p)} = \int_{P_0}^P \frac{dp}{f(p)},$$

ó llamando $f_1(p)$ á la integral en p

$$P = f_1(p) - f_1(p_0).$$

Ahora bien, p es función sólo de x, y, z , y no de t , porque el movimiento es permanente; luego por las reglas de la diferenciación resultará

$$\frac{dP}{dx} = \frac{df_1(p)}{dp} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dP}{dy} = \frac{df_1(p)}{dp} \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{df_1(p)}{dp} \frac{dp}{dz},$$

toda vez que $t_1(p_0)$ es una constante.

Y como evidentemente, según resulta de la integral primitiva, la derivada de P con relación á p es $\frac{1}{f(p)}$ ó bien $\frac{1}{\rho}$ tendremos

$$\frac{df_1(p)}{dp} = \frac{1}{\rho},$$

y las tres ecuaciones anteriores se convertirán en

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dP}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}.$$

Introduciendo todas estas modificaciones en las tres primeras ecuaciones generales del movimiento, se transformarán éstas en las siguientes:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dU}{dx} - \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dx} - 2(\eta w - \zeta v)$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dU}{dx} - \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dy} - 2(\zeta u - \xi w)$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dU}{dz} - \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dz} - 2(\xi v - \eta u).$$

O bien

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dU}{dx} + \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dx} = 2 (\zeta v - \eta w)$$

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dU}{dy} + \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dy} = 2 (\xi w - \zeta u)$$

$$\frac{dP}{dz} - \frac{dU}{dz} + \frac{d\left(\frac{1}{2} W^2\right)}{dz} = 2 (\eta u - \xi v).$$

Las tres cantidades P , U , $\frac{1}{2} W^2$ están diferenciadas en los primeros miembros de las tres ecuaciones, respectivamente, con relación á x , y , z ; luego podemos escribir

$$\frac{d\left(P + \frac{1}{2} W^2 - U\right)}{dx} = 2 (\zeta v - \eta w),$$

$$\frac{d\left(P + \frac{1}{2} W^2 - U\right)}{dy} = 2 (\xi w - \zeta u),$$

$$\frac{d\left(P + \frac{1}{2} W^2 - U\right)}{dz} = 2 (\eta u - \xi v).$$

Y si representamos por una letra la cantidad comprendida dentro del paréntesis en los primeros miembros, habremos reducido las tres primeras ecuaciones del movimiento á una forma sencillísima.

Haciendo, pues

$$P + \frac{1}{2} W^2 - U = H$$

resultará

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= 2(\zeta v - \eta w) \\ \frac{dH}{dy} &= 2(\xi w - \zeta u) \\ \frac{dH}{dz} &= 2(\eta u - \xi v) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

No olvidemos que H es una función de x, y, z en que no entra el tiempo.

Y si el problema estuviera resuelto sería una función conocida de estas tres variables x, y, z , porque, en efecto, P es $\int \frac{dp}{f(p)}$ y por lo tanto, una función de p , la cual, resuelto el problema, es una función conocida de x, y, z .

W es la velocidad en cada punto, y será también una función de x, y, z sin que entre el tiempo ni en p ni en u, v, w , pues el movimiento es permanente.

Por último, U es la función de fuerzas, que por definición es función de las tres variables independientes x, y, z .

Y no olvidemos tampoco, y esto es importantísimo, que las tres ecuaciones anteriores, que son las tres primeras del movimiento, se refieren á un caso particular, cuyas condiciones hemos fijado y eran:

- 1.º Que las fuerzas tenían una potencial.
- 2.º Que ρ era función de p .
- 3.º Que el movimiento era permanente.

*
**

Y ahora volvamos á nuestro objeto y á la figura 48.

Recordemos, ante todo, que hemos considerado dividida la masa fluída en hojas ó superficies S, S_1, S_2, \dots en cada

una de las que se encuentran situadas las líneas de torbellinos T, T_1, T_2, \dots para los diferentes instantes del tiempo.

Más claro; la línea de torbellino T , que corresponde al instante t , se mueve en la superficie S ocupando las posiciones T_1, T_2, \dots . Cuando T_1 pasa á T_2 es sustituida por T y ésta por otra anterior.

Para un observador que pudiera distinguir estas diversas líneas de torbellino, todas parecerían inmóviles, porque cuando una abandona su posición es sustituida idénticamente por otra.

Además, las líneas de velocidades, ó sean las trayectorias, también se encuentran sobre dicha superficie S ; por lo tanto, estas superficies son fijas en el espacio y el movimiento se verifica sobre cada superficie sin salir de ella, y gráficamente puede representarse este movimiento por el de las líneas de torbellino que se sustituyen unas á otras.

Lo mismo puede repetirse para las demás superficies ú hojas flúidas S_1, S_2, \dots , que son otras tantas superficies de movimiento, en las cuales el flúido se desliza.

Ahora bien, al empezar esta digresión dijimos, que nuestro objeto era determinar la ecuación de las superficies S .

Precisamente vamos á demostrar que la ecuación de cualquiera de estas superficies es

$$H = C,$$

siendo C una constante arbitraria, distinta para cada superficie S, S_1, S_2 , y que por su valor en cierto modo las caracteriza.

Ya sabemos que si el problema estuviera resuelto, H sería una función de x, y, z que se podría conocer sin dificultad, bien acudiendo á la expresión de H , que es función de u, v, w , de p y de U ; ya, si se quiere, al segundo miembro, que si se expresa en función de x, y, z poniendo por $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ sus valores en x, y, z , se convertirá en una

función de estas variables, idéntica á la del primer miembro.

Pero la forma de las ecuaciones (I), nos demuestran inmediatamente cuál sea la ecuación de las superficies S .

Y llegamos á esta demostración sin pasar por las integrales del problema, con sólo poner las tres primeras ecuaciones diferenciales bajo dicha forma (I).

He aquí la demostración:

Vamos á demostrar, primero: que todas las líneas de torbellino están sobre la superficie $H = C$.

Partamos del punto A y recorramos un arco infinitamente pequeño $A A_1$ sobre la línea-torbellino.

Las componentes de este arco serán las que se deducen de las ecuaciones diferenciales de la línea-torbellino

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \lambda,$$

en que llamamos λ al valor común de los tres quebrados; así, pues,

$$dx = \lambda \xi, \quad dy = \lambda \eta, \quad dz = \lambda \zeta.$$

Por otra parte, si en la ecuación $H = C$ damos á la constante C , lo cual siempre es posible, un valor tal que la superficie determinada por dicha ecuación pase por el punto A , diferenciando H , es decir, pasando en la superficie $H = C$ del punto A á otro infinitamente próximo, tendremos:

$$\frac{dH}{dx} dx + \frac{dH}{dy} dy + \frac{dH}{dz} dz.$$

Y substituyendo en vez de las dx , dy , dz , de esta última ecuación, los tres valores antes escritos, que corresponden al punto A_1 , resultará

$$\frac{dH}{dx} \xi \lambda + \frac{dH}{dy} \eta \lambda + \frac{dH}{dz} \zeta \lambda,$$

ó bien

$$\lambda \left(\frac{dH}{dx} \xi + \frac{dH}{dy} \eta + \frac{dH}{dz} \zeta \right).$$

Pero esta expresión, vamos á demostrar, que resulta igual á cero, lo cual nos probará que el punto A_1 se encuentra en la superficie $H = C$, y que, por lo tanto, el elemento $A A_1$ está todo él en dicha superficie.

Y como partiendo del punto A_1 , podemos demostrar que el punto A_2 se encuentra en la superficie de que se trata, y así sucesivamente habremos probado que toda la línea de torbellino T , se encuentra en la superficie $H = C$ que pasa por el punto A .

Sólo nos queda por demostrar, que la última expresión, ó lo que es lo mismo, su paréntesis, es igual á cero. Para ello multipliquemos las ecuaciones (I) por ξ, η, ζ , y sumemos: resultará,

$$\begin{aligned} & \frac{dH}{dx} \xi + \frac{dH}{dy} \eta + \frac{dH}{dz} \zeta = \\ & = 2 (\xi \zeta \nu - \xi \eta w + \eta \xi w - \eta \zeta u + \zeta \eta u - \zeta \xi \nu), \end{aligned}$$

en que el segundo miembro se reduce idénticamente á cero. Tendremos, pues, lo que nos proponíamos demostrar:

$$\frac{dH}{dx} \xi + \frac{dH}{dy} \eta + \frac{dH}{dz} \zeta = 0.$$

Lo mismo que hemos demostrado, que la línea-torbellino T , está contenida en la superficie $H = C$, correspondiente al punto A , podemos demostrar, que la trayectoria $A C$, ó línea de corriente, está situada en dicha superficie. Basta para ello ver que sustituyendo en la diferencial de H ,

$$\frac{dH}{dx} dx + \frac{dH}{dy} dy + \frac{dH}{dz} dz,$$

en vez de dx , dy , dz , los valores del punto B , esta expresión se reduce á cero. Pero las ecuaciones de la línea de corriente, ó de la trayectoria, sabemos que son

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \mu,$$

siendo μ el valor común de los tres quebrados.

Y de aquí se deduce

$$dx = \mu u, \quad dy = \mu v, \quad dz = \mu w,$$

que sustituidos en la diferencial de H dan

$$\frac{dH}{dx} \mu u + \frac{dH}{dy} \mu v + \frac{dH}{dz} \mu w,$$

ó bien

$$\mu \left(\frac{dH}{dx} u + \frac{dH}{dy} v + \frac{dH}{dz} w \right)$$

Todo queda reducido á demostrar que esta expresión, ó el paréntesis, se reduce idénticamente á cero; porque esto nos demostrará que los incrementos infinitamente pequeños, á partir de A , en la línea de corriente AC , es decir, las componentes del elemento AB , satisfacen á la ecuación diferencial de $H = C$; es decir, que son incrementos de las coordenadas de A en esta superficie. Y así en esta superficie estará el punto B y el elemento AB .

Partiendo de B , demostraríamos que el elemento BC estaba todo él en dicha superficie, y continuando de este modo resultaría que toda la línea de corriente AC estaría en la superficie $H = C$ que pasa por el punto A .

Vamos á demostrar ahora, partiendo de las ecuaciones (I), que

$$\frac{dH}{dx} u + \frac{dH}{dy} v + \frac{dH}{dz} w,$$

es igual á cero.

Basta para ello multiplicar las ecuaciones (I) por u , v , w y sumar. Tendremos:

$$\begin{aligned} & \frac{dH}{dx} u + \frac{dH}{dy} v + \frac{dH}{dz} w = \\ & (\zeta v u - \eta w u + \xi w v - \zeta u v + \eta w u - \xi v w); \end{aligned}$$

pero el segundo miembro es idénticamente nulo porque se destruyen sus términos dos á dos; luego resultará

$$\frac{dH}{dx} u + \frac{dH}{dy} v + \frac{dH}{dz} w = 0,$$

que es precisamente lo que nos proponíamos probar.

Tendremos, pues, que el punto B estará en la superficie $H = C$ que pasa por el punto A y como otrò tanto podríamos demostrar para el punto C y para todos los puntos de esta línea de corriente, resulta demostrado que dicha línea AC está por completo en la superficie $H = C$ perteneciente al punto A .

En suma; en dicha superficie se encuentran la línea de torbellino AT y la línea de corriente AC .

Si repetimos la demostración partiendo de los puntos A_1, A_2, \dots de AT , que todos están en la superficie $H = C$ del punto A , demostraremos que todas las líneas de corriente $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots$ están en dicha superficie.

Y si se repite todavía esta misma demostración, partiendo de los puntos B, C, \dots veríamos del mismo modo, que en la

misma superficie se encuentran todas las líneas de torbellino T, T_1, T_2, \dots .

Resulta, pues, en resumen, que $H = C$ es la ecuación de cualquiera de las hojas S, S_1, S_2, \dots .

A cada hoja corresponderá un valor determinado de la constante C .

Si el problema estuviera resuelto, como H no contiene más que las componentes de la velocidad, la presión p y la potencial U , que son funciones de x, y, z el primer miembro sería la ecuación de dichas hojas en las coordenadas ordinarias.

Y con esto damos por terminado el estudio preparatorio de los torbellinos, ó sea de los movimientos rotacionales, sin perjuicio de ampliarlo más adelante.

IV.— Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décimooctava.

SEÑORES:

En las últimas conferencias hemos demostrado ciertas propiedades fundamentales y verdaderamente muy curiosas de la teoría de los torbellinos, ó sea del movimiento rotacional de un flúido perfecto.

Esta idea del flúido perfecto es una creación ideal del matemático: en la Naturaleza no conocemos ningún flúido perfecto; de modo que las consecuencias á que hemos llegado, son puramente hipotéticas y al venir á la realidad, ó no se verificarán, ó sólo se verificarán de una manera aproximada.

Sucede, con la teoría de los torbellinos, lo que con tantas otras teorías de la ciencia, empezando por las Matemáticas puras, con la Mecánica racional y con casi todas las teorías de la Física Matemática.

La inteligencia humana, apoyándose en la lógica y sirviéndose de la imaginación, crea mundos especiales dotados de ciertas leyes; mundos que el sabio hace brotar de la nada, en las regiones, en los dominios, pudiéramos decir, de su cerebro.

Y desarrolla esos mundos ideales de su propia creación, y les aplica las matemáticas, y obtiene fenómenos diversos.

Y luego, cuando cree tener bastante avanzada su obra,

aplica esta creación ideal con todas sus leyes y todos sus accidentes, á los fenómenos del mundo real, para ver si el mundo ideal, que ha creado, se ajusta más ó menos íntimamente al mundo de la realidad, ó á algún pedazo de esto que llamamos Naturaleza.

Y si no hay tal ajuste, si no hay coincidencia, ó por lo menos paralelismo entre ambos órdenes de fenómenos, si al determinar las constantes del mundo ideal, para que se acomode al mundo de la realidad, es imposible obtener de una manera concordante los coeficientes de las fórmulas matemáticas, el trabajo será perdido, al menos para la práctica, la teoría inútil, el esfuerzo pura gimnasia del entendimiento y de la imaginación. Pero esta gimnasia tiene su utilidad, no lo olvidemos.

Mas si, por el contrario, la creación ideal se ajusta á los hechos reales y cada combinación de estos últimos tiene un simbolismo propio y adecuado en una combinación de los primeros, si por diversos caminos se llega á los mismos coeficientes numéricos, y aplicando las fórmulas matemáticas se consigue prever nuevos hechos y nuevos fenómenos, antes jamás observados, entonces la teoría es buena, legítima y fecunda. Y puede creerse, que durará mucho tiempo, hasta que la realidad inagotable del *Cosmos* se desborde y se aleje de aquel símbolo científico, como una curva se desborda y separa del círculo osculador, que en buena parte del curso de la primera á ella puede sustituirse con ventaja, y que siempre quedará como aproximación de una ley más complicada, como primer grupo, si se nos permite la imagen, de varios términos de una serie convergente.

Y así, viniendo á nuestro objeto, decimos una vez más, que aun cuando la teoría de los torbellinos suponga ciertas hipótesis y sea, en toda su pureza, una teoría ideal, aun con estas restricciones puede tener y tiene verdadera importancia en el estudio de la hidrodinámica ó, mejor dicho, de los flúidos reales.

Las curvas, filetes, ondas y remolinos, que forma un cigarro al arder, y que se elevan por el espacio, no son, seguramente, torbellinos de la teoría ideal; pero cierta tendencia hay en ellos á esta creación idealista.

Y otro tanto podemos decir de las burbujas de hidrógeno sulfurado, al estallar y elevarse en anillos por el espacio. Y aparatos se han construído para expulsar, de una caja llena de humo, algo así como anillos que representan, hasta cierto punto, curvas cerradas de torbellino.

Aun en las teorías del éter, á veces, asalta la tentación de imaginar, que está poblado de torbellinos de diversas formas y; por fin, no hace muchos años que la estabilidad de los átomos de la Química se asemejaba á la estabilidad de los tubos y anillos, que para los torbellinos demostrábamos en las últimas conferencias.

*
* * *

Las condiciones, que definían el flúido perfecto, eran aplicables al movimiento más general de esta substancia, así como á la naturaleza de las fuerzas que sobre él debieran actuar; mas al estudiar la teoría de los torbellinos, aún precisábamos más aquellas condiciones á que acabamos de referirnos.

Decíamos, por ejemplo, que las fuerzas X , Y , Z , habían de tener una potencial U ; y aún debíamos agregar que esta función había de ser uniforme y continua. Todo ello para que de este modo las aceleraciones tuvieran una potencial, es decir, para que las tres primeras ecuaciones del movimiento se expresasen de este modo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{dQ}{dz}$$

Expresiones en las que Q pudiera considerarse como una función uniforme y continua de x, y, z .

Decimos que *pudiera considerarse* y nada más, porque en general dicha función Q será desconocida para nosotros, á menos que no hayamos de antemano resuelto el problema.

Pero, aun sin resolverlo, si Q *puede considerarse* como tal función uniforme y continua de x, y, z, t , sin necesidad de pasar por la integración podemos demostrar, como hemos demostrado, muchas propiedades de los torbellinos.

Todo esto, que vamos indicando con cierta vaguedad, se refiere á cuestiones muy delicadas; pero en que no podemos detenernos, porque sería alejarnos á gran distancia de nuestro objeto.

Agreguemos, sin embargo, á lo dicho, alguna otra nueva observación.

*
* * *

Decíamos en otra conferencia, que había tres problemas entre los que existían grandes analogías analíticas:

El de transformación de figuras.

El de deformaciones de sistemas elásticos.

Y el de movimientos de flúidos.

En todos ellos se pasaba de un sistema de puntos á otro. Ya sean estos sistemas, puntos de una figura, ya elementos de un sólido elástico, ya elementos flúidos del flúido en movimiento.

Y de un sistema se pasaba á otro por tres ecuaciones, que expresaban las coordenadas del segundo sistema en función de las coordenadas del primero, según explicábamos detalladamente en otra ocasión.

Si, por ejemplo, a, b, c , eran las coordenadas de un punto de la primera figura, y x, y, z las del punto correspondiente á éste, en la figura transformada, las fórmulas de transformación serían,

$$\begin{aligned}x &= f_x(a, b, c), \\y &= f_y(a, b, c), \\z &= f_z(a, b, c).\end{aligned}\tag{1}$$

Y en el caso del movimiento de un fluido podríamos repetir otro tanto, sólo que, en el segundo miembro, debería entrar el tiempo t como una constante, que por su valor determina el momento á que se refiere el segundo sistema, es decir,

$$\begin{aligned}x &= f_x(a, b, c, t) \\y &= f_y(a, b, c, t) \\z &= f_z(a, b, c, t).\end{aligned}\tag{2}$$

Claro es que, tanto en el grupo (1) como en el grupo (2), á cada punto a, b, c , corresponde un punto x, y, z ; y claro es todavía que, tanto en el sistema (1) como en el sistema (2), es decir, en los dos problemas de transformación de figuras y de movimiento de un fluido, las fórmulas de transformación son las mismas para todos los puntos.

En el grupo (1) por definición del problema, porque todos los puntos se transforman por la misma ley analítica. En el grupo (2), porque son las integrales de Lagrange y todas las trayectorias están dentro de estas fórmulas, sin más que variar para cada instante las coordenadas iniciales a, b, c .

Pero hay algo sobre lo cual llamamos la atención de nuestros alumnos en otra conferencia y que ahora debemos recordar, toda vez que se ha de enlazar con lo que dijimos al principio de ésta.

En el grupo (1), cuando sólo se trata de transformación de figuras y es un problema que nosotros planteamos, por decirlo de este modo, con entera libertad, con entera libertad podemos escoger la forma de las funciones f , y podemos establecer la siguiente condición fundamental:

Que x, y, z , sean uniformes, con relación á a, b, c , y recíprocamente, que si del grupo (1) despejásemos a, b, c , en

función de x, y, z , fuesen a, b, c , uniformes, con relación á x, y, z , también.

Más claro: que á un punto de la segunda figura, sólo corresponde un punto de la primera, y que á un punto de la primera, sólo corresponde un punto de la segunda. Se corresponden, pues, por manera unívoca.

Pero en el grupo (2), las funciones f , no dependen de nuestra voluntad, son integrales que se deducen de las ecuaciones diferenciales, que hemos establecido.

Y estas diferenciales y estas integrales, contienen fuerzas que en el problema general pueden ser cualesquiera y cabe esta duda: ¿Las funciones f del grupo (2) serán uniformes, es decir, á cada sistema a, b, c , sólo corresponderá un sistema x, y, z , y recíprocamente?

Y si esto no siempre sucede, ¿qué condiciones deberán verificarse para que tal uniformidad recíproca subsista?

Este es un problema de análisis, que no podemos tratar aquí; pero que debíamos recordar, y aun más, que debíamos recomendar á nuestros alumnos.

Es problema, que depende de la teoría general de la integración de ecuaciones diferenciales, y sobre el cual, prescindiendo de trabajos especiales y ateniéndonos á la teoría ordinaria, debemos recordar los métodos, tan generales como profundos de Cauchy, que los aficionados á estas materias de la ciencia pura, pueden encontrar en varias obras de las que no citaré más que tres:

El cálculo diferencial é integral de Humbert.

El de Jordán y el de Coursat, que ya he citado en otras ocasiones.

Allí verán los teoremas que se llaman de *existencia* de las integrales, y cuando son holomorfas, y cómo pueden obtenerse series convergentes que las expresen, y cómo se procura *extender la serie de Taylor*.

Pero todo esto, con ser de suma importancia para nuestro caso, por su extensión, porque son problemas que no de-

ben tratarse á la ligera y por ser materia que corresponde á otra asignatura, no puede ser desarrollado en estas conferencias.

Demos, por supuesto, que se verifican las condiciones indispensables para que los teoremas, relativos á la teoría de los torbellinos que hemos citado, sean rigurosamente exactos, y continuemos nuestra tarea.

*
*
*

Dos clases de movimientos, según hemos dicho, pueden presentarse en el movimiento de un fluido perfecto.

Los movimientos *rotacionales*, en que cada elemento del fluido gira, en un intervalo dt , un ángulo infinitamente pequeño.

Y movimientos *irrotacionales* en que los movimientos de rotación desaparecen y los elementos del fluido sólo experimentan movimientos de traslación, y contracciones ó expansiones, paralelamente á los tres ejes de un elipsoide, determinado en cada instante para cada punto.

Los primeros movimientos, es decir, los rotacionales, se presentan y, como hemos visto, subsisten, cuando los tres binomios, ó por lo menos uno,

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$

tienen valores finitos, porque entonces la rotación, por unidad de tiempo, será finita también.

El movimiento irrotacional se presenta cuando los tres binomios anteriores son nulos y, por lo tanto,

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy}$$

En todo punto, ó en toda extensión, en que los valores de u , v , w , en función de x , y , z , satisfagan idénticamente á las tres condiciones anteriores, el movimiento del flúido será irrotacional.

En un flúido, ¿pueden presentarse, á la vez, ambos movimientos?

Una región del flúido, ¿puede estar sujeta á movimiento rotacional, es decir, que todos sus elementos giren y otra porción del flúido á movimiento irrotacional?

Parece que sí, y que esto depende de las condiciones iniciales; porque si en el instante inicial, $t = 0$, en ciertas regiones del flúido, se verifican las condiciones precedentes, que son las que expresan que la velocidad tiene una potencial; esta condición subsistirá en todo el movimiento que emana de dicha región, y esta porción del flúido conservará constantemente su movimiento irrotacional.

Y si en el resto del flúido los binomios anteriores tienen un valor finito, el movimiento en toda esta región será rotacional en cierto instante y continuará siéndolo para tal porción del flúido durante todo su movimiento; entiéndase que nos referimos al *flúido*, no al espacio geométrico.

Lo hemos demostrado; los movimientos rotacionales, en las condiciones tantas veces explicadas, ni se crean ni se anulan: sería preciso, por ejemplo, someter de nuevo al sistema á fuerzas que no tuvieran una potencial.

Sería preciso, y valga este caso, que apareciesen rozamientos ó viscosidades.

Pero sobre todo esto, si tenemos tiempo, algo diremos en otra ocasión.

Por ahora, admitiremos la posibilidad de la coexistencia en un flúido de los movimientos rotacionales é irrotacionales, merced á las condiciones iniciales del sistema.

Cierto es, que aquí aparece como la sômbra de una duda; porque para dicho instante inicial, aunque las velocidades sean continuas y, por lo tanto, lo sean sus componentes u ,

v , w , y aunque sean continuas sus derivadas, con relación á x , y , z , una discontinuidad aparece, que no deja de infundir cierta inquietud en el ánimo, del que aspira á la claridad absoluta en todas estas materias.

Los binomios citados, que expresan cantidades proporcionales á las componentes ξ , π , ζ de la rotación, en un dominio del fluido, tienen valores finitos, y de pronto, ó lentamente, se anulan y se conservan nulos en todo el resto de la masa fluida.

Esta discontinuidad claro es que se explica en parte por discontinuidad en las fuerzas iniciales; pero parece que exigiría más amplias explicaciones, siquiera tales discontinuidades se presenten en otros muchos problemas de la Física matemática, como tendremos ocasión de observar.

Sin ir más lejos, en la Electroestática y aun en la Hidrodinámica, el movimiento de las ondas presenta problemas análogos.

Las observaciones que preceden nos conducen á dividir este estudio elemental, que estamos haciendo, de la Hidrodinámica en tres grupos ó partes distintas:

Primero. Estudio del movimiento rotacional.

Segundo. Estudio del movimiento irrotacional.

Tercero. Caso en que, en un mismo fluido, existen estos dos movimientos.

Este caso, que es el más general, es importantísimo, y no sé si en el curso presente podremos estudiarlo, al menos en su parte elemental, ó si nos veremos obligados á dejarlo para el curso inmediato.

De los movimientos rotacionales de las líneas, tubos y superficies de torbellino, ya hemos dicho algo, al menos lo más esencial.

Debemos ahora hacer un estudio, siquiera sea muy rápido, de los movimientos irrotacionales.

Movimientos irrotacionales de un fluido perfecto.—Vamos á empezar del mismo modo que empezamos en los movimientos rotacionales. Por el movimiento de una curva cerrada y por el estudio de su *circulación*.

Sea (fig. 49) un espacio E del fluido que consideramos, en que el movimiento es irrotacional.

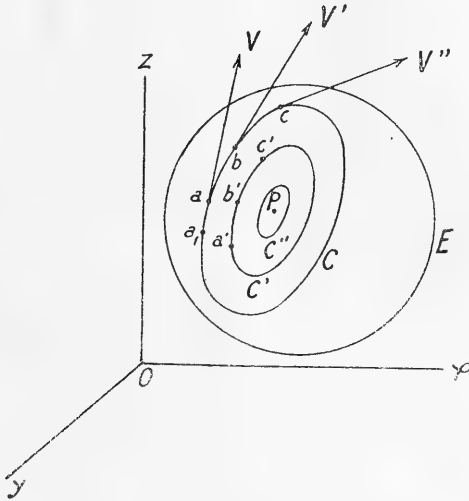


Figura 49.

E imaginemos en este espacio una curva cerrada C .

Si para diferentes puntos de esta curva a, b, c, \dots , las velocidades de los elementos flúidos infinitamente pequeños que ocupan dichas posiciones a, b, c, \dots tienen en un instante t , las velocidades V, V', V'', \dots , sabemos que se llama *circulación*, en el instante t , de la curva C , la integral relativa á toda la extensión de la curva de los productos de cada velocidad V , proyectada sobre el elemento ab , por la longitud de dicho elemento.

Así, que si llamamos α al ángulo V a b , tendremos

$$\text{circulación de } C \text{ en el instante } t = \int_C V \cos \alpha ds.$$

De suerte, que considerando á V como una fuerza, esta integral representaría el trabajo de las fuerzas V á lo largo de la curva C .

Y como sabemos, que el trabajo de una resultante es igual á la suma de los trabajos de las componentes, llamando u, v, w , las componentes de V , y dx, dy, dz , á las componentes de $ab = ds$, también podremos escribir la expresión anterior en esta forma:

$$\text{cir. } C = \int_c (u dx + v dy + w dz)$$

que es la que hemos empleado en conferencias anteriores.

El teorema de Helmholtz nos demuestra que, si el movimiento es rotacional, la expresión anterior es constante para todos los instantes.

Y ahora vamos á demostrar, que en el movimiento irrotacional dicha integral es *nula*, aunque sólo en ciertos casos, que esto luego lo explanaremos.

Así, pues, el valor de la circulación caracteriza y distingue unos movimientos de otros.

Para los rotacionales es constante en cualquier momento.

Para los irrotacionales también es constante; pero su valor es *nulo*.

Vamos á demostrar el teorema para este último caso y podemos darle una forma más precisa; según hace monsieur Appell.

Si la curva cerrada C se contrae según C', C'' , hasta condensarse en un punto P y si la superficie, que engendra en este movimiento, está toda ella en el espacio irrotacional, sin salirse nunca de él, todo esto, en un instante determinado t , para ese instante, la circulación en la línea C , será igual á cero.

La demostración es bien sencilla.

Y al principio parece inmediata.

Porque, en efecto, como el movimiento es irrotacional, para todos los puntos de la curva C , debemos tener

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}$$

luego $u dx + v dy + w dz$ es una diferencial exacta de x, y, z .

Si representamos esta función por $\varphi(x, y, z)$ tendremos $u dx + v dy + w dz = d\varphi(x, y, z)$.

Por consiguiente, el valor de la circulación sobre la curva C , será

$$\text{cir. } C = \int_C (u dx + v dy + w dz) = \int_C d\varphi(x, y, z);$$

y como la integral de la diferencial de una función, es esta función, entre los límites que marca la integral, suponiendo que el origen de la integral sobre la curva es a , resultará:

$$\text{cir. } C = [\varphi(x, y, z)]_C$$

Si tomamos dos puntos infinitamente próximos: a que es el origen de la curva y cuyas coordenadas representaremos por x, y, z ; y a_1 que supondremos, que es el último punto de la curva C al cerrarse, de modo que en el límite a_1 se confunde con a , y designamos por x_2, y_2, z_2 las coordenadas de a_1 podremos escribir

$$\text{cir. } C = \left[\varphi(x, y, z) \right]_a^{a_1} = \varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1).$$

Pero en el límite, a_1 coincide con a ; luego la expresión anterior se reduce á la siguiente

$$\text{cir. } C = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_1, y_1, z_1)$$

que parece ser siempre igual á cero, con lo cual quedaría

demostrado el teorema; pero la demostración no es correcta y el teorema no queda demostrado en general.

Si la función φ fuese *uniforme*, es decir, si no tuviera más que un valor para cada sistema de valores de x, y, z , correcta sería la demostración, porque al tender x_2, y_2, z_2 , hacia x_1, y_1, z_1 , la función φ tendería hacia el mismo valor que tuvo en el punto de partida.

Pero el estudio de las funciones demuestra, que no todas las funciones son uniformes, y la verdad es que no sabemos si la función φ lo es.

Debemos, pues, desechar esta demostración ilusoria y acudir á otra que sea correcta y en que se salve este caso de excepción.

Suponiendo, que la superficie engendrada por la curva C , según hemos dicho, al contraerse por ley de continuidad y reducirse á un punto P , está toda ella comprendida en la parte irrotacional del flúido, para toda ella, es decir, para todos los puntos de esta superficie, el eje del torbellino y su proyección sobre la normal serán nulos.

Ahora bien; el teorema de Stokes nos ha demostrado que, en general, la circulación sobre la curva C es igual al doble del flujo del torbellino.

Representando por Ω_n la proyección del eje de torbellino, tendremos:

$$\text{cir. } C = 2 \iint_s \Omega_n d\omega$$

Mas acabamos de decir que Ω_n es nula en toda la superficie S , porque toda ella está en la región irrotacional; luego todos los elementos de la integral se reducirán á cero, y tendremos

$$\text{cir. } (C) = 0,$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

La condición de que la superficie S esté toda ella dentro de la región irrotacional es importantísima, mejor dicho, es esencial, como vamos á ver, profundizando más en el problema; porque en este caso, por la demostración anterior, resulta que la función φ es uniforme.

Pero si la condición no se cumpliera, podría no serlo, y entonces la circulación no sería nula, puesto que la función φ para el punto a y para el punto a_1 , tendría valores no infinitamente próximos, sino distintos.

Mas para comprenderlo bien, necesitamos entrar en algunas consideraciones sobre las diferentes clases de espacios que pueden considerarse en este orden de problemas que estudiamos.

*
* *

1.º Se dice que un volumen ó espacio es *simplemente conexo* cuando toda línea cerrada, que se trace en este volumen ó espacio, puede reducirse á un punto por continuidad, *sin salir de dicho espacio*.

Por ejemplo, una esfera ó un elipsoide es un volumen simplemente conexo. Así vemos en la figura 49, que toda línea C trazada en el interior del volumen E , recorriéndose por la ley de continuidad, pasa de C á C' y á C'' , hasta anularse en el punto P .

En cambio, el volumen que se designa con el nombre de *toro*, no es una superficie simplemente conexa.

En efecto, en la figura 50 y en el volumen E , engendrado, como se sabe, por un círculo proyectado en e y que gira alrededor de una recta proyectada en O , es decir, en dicho volumen podemos trazar una serie de líneas C que, por continuidad, puedan confundirse en un punto P ; pero pueden trazarse otras infinitas C' , que dentro del *toro* dan vuelta al eje O , las cuales no pueden anularse sin salirse del expresado volumen, como vemos en C_1 transformada de C' .

En suma, que el *toro*, como antes decíamos, no es un volumen simplemente conexo.

2.º Un volumen es *doblemente conexo* cuando no es *sin-*

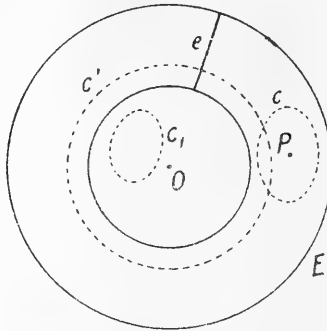


Figura 50.

plemente conexo, como antes explicábamos; pero que por medio de una sección ó corte, á modo de muro ó tabique de

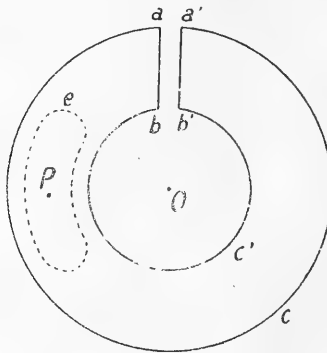


Figura 51.

separación, puede convertirse en volumen simplemente conexo.

El *toro* se encuentra en este caso.

Así vemos en la figura 51, que representa un *toro*, que dando un corte, según *ab*, que para más claridad desdoblaremos en dos secciones infinitamente próximas: la una *ab*,

para cerrar el volumen por la izquierda; la otra, $a' b'$, para cerrar el volumen por la derecha; el volumen que de este modo resulta es simplemente conexo.

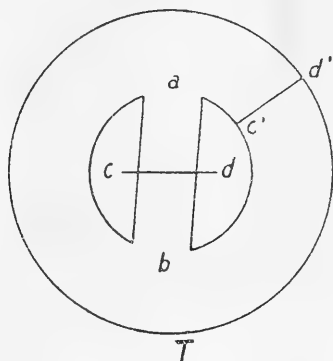


Figura 52.

Toda línea que se trace en el interior de $ab c' b' a' c$, por ejemplo, la línea e , podrá, por continuidad y sin salir del expresado volumen, recogerse y anularse en un punto P .

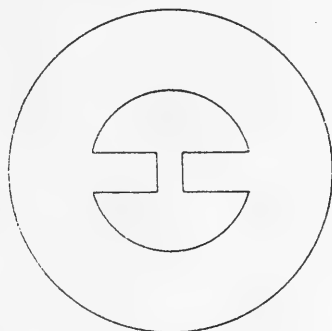


Figura 52 bis.

3.º Asimismo, un volumen ó espacio será *triplemente conexo*, cuando por un corte ó sección se convierta en un espacio doblemente conexo, y por dos secciones en un espacio simplemente conexo.

De este modo, en la figura 52, si imaginamos un tubo $a b$

que viene á enlazar dos partes a, b , de un *toro* T , el espacio será triplemente conexo; porque cortando el tubo $a b$ por una sección $c d$, resulta un *toro* con dos apéndices (figu-

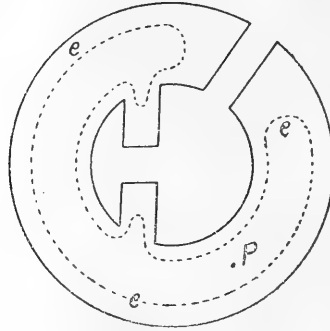


Figura 52 tercera.

ra 52 bis), que es como el *toro* primitivo, el cual es doblemente conexo.

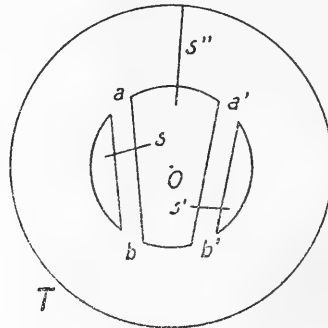


Figura 53.

Y cortando, además, por $c' d'$ (fig. 52 tercera) un volumen simplemente conexo.

Toda línea e puede condensarse en un punto P sin salir del espacio que recubre.

4.º En general, un espacio ó volumen es n veces conexo, cuando por una sección se convierte en un volumen $n - 1$ veces conexo y por $n - 1$ secciones se convierte en un volumen simplemente conexo.

Por ejemplo, la figura 53, que es un *toro* T con dos tubos $a b, a' b'$, es un volumen conexo de cuarto orden, porque necesita tres secciones, s, s', s'' , para convertirse en superficie simplemente conexa (fig. 53 bis).

Todas estas consideraciones son puramente geométricas, independientes de la teoría de los torbellinos y de toda otra teoría mecánica ó de Física matemática, así es que muchas veces tendremos que acudir á la anterior clasificación; pero

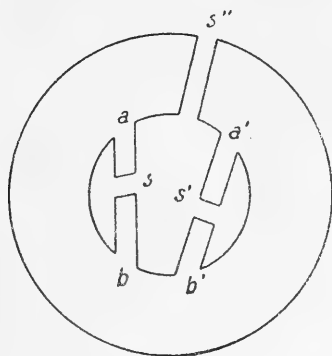


Figura 53 bis.

se aplica también á los movimientos irrotacionales de un flúido y dan sentido riguroso á teoremas, que de otro modo quedarían en cierta vaguedad, y cuyos enunciados aún podrían ser inexactos.

*
* * *

Dijimos que la *circulación*, es decir, el coeficiente numérico que la representa, para una curva cerrada cualquiera, que trazásemos en un volumen ó espacio lleno de flúido sin movimiento rotacional, era *igual á cero*. Es decir,

$$\int_c (u dx + v dy + w dz) = 0$$

lo contrario de lo que sucedía, cuando el fluido en la región considerada estaba dotado de movimiento rotacional.

Pero este teorema, así expresado, es falso en unos casos, aunque para otros sea exacto.

La *circulación* de una curva cerrada en un espacio irrotacional, démosle este nombre, para abreviar la explicación, puede no ser igual á cero.

Depende, como vamos á ver, de la naturaleza del espacio.

Si el espacio ó volumen es *simplemente conexo*, el teorema es rigurosamente exacto dentro de las hipótesis: la circulación de la curva cerrada es nula.

Por eso dimos rigor al enunciado, diciendo: que era preciso que se tratase de una curva que, recorriéndose por la ley de continuidad, pudiera reducirse á un punto, sin salir del espacio considerado.

Vamos á precisar más estas ideas.

* * *

Tomemos, para fijar los conceptos, una superficie doblemente conexa. El *toro*, por ejemplo.

Ya hemos dicho, que en este volumen, ó espacio, con esta forma determinada, es decir, en su interior, pueden trazarse dos clases de líneas, unas como C (fig. 54), que por continuidad y sin salir del volumen pueden recogerse y anularse en un punto o .

Para estas líneas, la circulación es nula, porque en todos los puntos del interior del *toro*, suponemos que el movimiento del fluido que lo rellena es irrotacional; así es que, la curva C , al recogerse en un punto o , va trazando una superficie que está toda ella, en el instante que se considera, sumergida, por decirlo así, en un movimiento irrotacional, y como no hay rotación para ninguno de sus puntos, el eje del torbellino es constantemente nulo, y es nulo el flujo de

los torbellinos á través de dicha superficie, con lo cual, según el teorema de Stokes, es nula la circulación. La demostración que dimos es rigurosa.

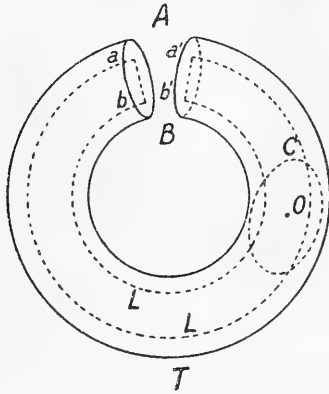


Figura 54.

Pero hemos visto, que en el interior del *toro* se pueden trazar (fig. 55) otras líneas L que envuelvan el eje del *toro* A .

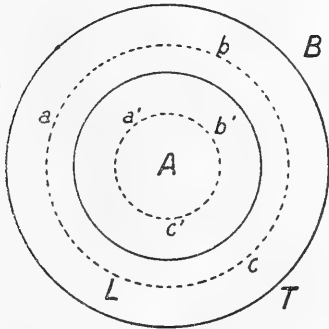


Figura 55.

Y para estas líneas L , la demostración es de todo punto inaceptable.

En efecto, sea la línea L (fig. 55) trazada en el interior del *toro* T .

Para calcular la circulación de dicha línea L será preciso, como antes hacíamos, recoger dicha línea, hasta que se concentre en un punto y aplicar á ella y á la superficie que traza el teorema de Stokes.

Y la circulación que busquemos, para dicha línea L , será igual al flujo á través de la superficie.

Mientras L se mueve en la zona abc , que está dentro del espacio en que el movimiento es irrotacional, el flujo es nulo.

Pero al continuar la línea su transformación y penetrar en el espacio A , no sucederá lo mismo.

Porque no ha de olvidarse que suponemos que en el interior del *toro* T , el movimiento es irrotacional. Pero fuera del *toro*, en A y B , es rotacional el movimiento del fluido.

Por eso, al transformarse la línea L en $a' b' c'$, ya no puede decirse que el flujo es nulo, porque para el espacio A no es nulo el eje del torbellino en cada punto.

Luego lo natural es que á la superficie engendrada por la línea L corresponda un flujo finito, que será precisamente la circulación de la línea propuesta L .

Más adelante precisaremos esto mismo por medio de un ejemplo.

Deducimos de lo dicho, y volviendo á la figura 54, que en el *toro*, espacio ó volumen doblemente conexo, hay dos clases de líneas: la línea C , cuya circulación es nula, y la línea L (fig. 54), que da vuelta al eje del *toro* y que en general tendrá un valor determinado, que representaremos por μ .

Mas aquí debemos consignar un teorema importante.

Todas las líneas de esta segunda categoría, $L, L' \dots$, que dan vuelta al eje del *toro* una sola vez, y que quedan cerradas con esta sola vuelta, tienen el mismo valor para su circulación (fig. 54 y 56).

Si la circulación de L es μ , la circulación de otra cualquiera L' será μ .

La demostración es bien sencilla.

Demos al *toro* (fig. 56) una sección AB , que es la misma de la figura 54.

Interrumpamos la línea L (fig. 56) en los puntos a, a' infinitamente próximos á la sección AB , é interrumpamos asimismo otra línea cualquiera de esta misma clase L' en los puntos b, b' , también infinitamente próximos á dicha sección AB .

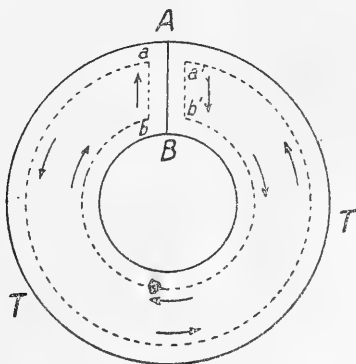


Figura 56.

Unamos por una línea los puntos a, b , por otra los $a' b'$, y observemos:

1.º Que la sección AB , como ya hemos explicado otras veces, convierte al *toro*, espacio de doble conexión, en un espacio de conexión sencilla, como se ve desde luego en la figura 54.

2.º Que rebajado el grado de conexión del *toro*, la línea $aL a' b' L' b a$ es una línea cerrada de primera especie, ó mejor dicho, una línea trazada en un espacio de conexión sencilla.

Luego, según lo demostrado, la circulación, á lo largo de esta línea cerrada en cualquier sentido, por ejemplo, en el que marca la flecha, será nula, y tendremos:

$$\text{cir. } (aL a' b' L' b a) = 0.$$

Y descomponiendo en varias partes

$$\text{cir. } (aLa') + \text{cir. } (a'b') + \text{cir. } (b'L'b) + \text{cir. } (ba) = 0.$$

Pero $\text{cir. } (a'b')$ y $\text{cir. } (ba)$ son cantidades iguales y de signos contrarios, porque ab y $a'b'$ son dos líneas infinitamente próximas que casi coinciden, y que en el límite coincidirían por completo.

Y además, como indican las flechas de la figura 56, el punto móvil las recorre en sentido contrario; luego las dos integrales, circulación $(a'b')$ y $\text{cir. } (ba)$ ó

$$\begin{aligned} \int_{a'b'} (udx + vdy + wdz) \text{ y } \int_{ba} (udx + vdy + wdz) &= \\ &= \int_{ab} (-udx - vdy - wdz) \end{aligned}$$

serán iguales y de signo contrario y se destruirán.

La circulación á lo largo de la línea que consideramos quedará reducida á

$$\text{cir. } (aLa') + \text{cir. } (b'L'b) = 0,$$

ó bien

$$\text{cir. } (aLa') = - \text{cir. } (b'L'b).$$

Y como cambiando el sentido del movimiento se cambia el signo á la integral, cambiando la flecha de $b'L'b$, con lo cual el sentido será el mismo en aLa' que en $b'L'b'$, tendremos:

$$\text{cir. } (aLa') = \text{cir. } (b'L'b'),$$

ó abreviadamente:

$$\text{cir. } L = \text{cir. } L'.$$

En suma: todas las líneas cerradas, que dan una sola vuel-

ta al eje del *toro*, tienen el mismo valor para su circulación, que es un módulo constante μ para todas ellas.

Claro es que si dan dos vueltas, como en la segunda, se repiten los mismos incrementos de la integral acumulados al resultado de la primera vuelta, el valor de la circulación será 2μ . Si dan tres vueltas, la circulación será 3μ , y en general, para n vueltas, el valor de la circulación será $n \mu$.

Como cambiando el sentido de la circulación, ó sea el movimiento del punto que recorre la línea, (dx, dy, dz) cambian de signo, los elementos de la integral cambiarán de signo también y cambiará de signo el valor de la circulación.

Así, si el módulo es μ y el punto recorre m veces la línea en el sentido directo, que es el que nos ha servido para calcular μ , y n en sentido contrario, el valor de la circulación será

$$m \mu - n \mu = (m - n) \mu.$$

Todos estos resultados pueden generalizarse, como veremos en la conferencia próxima.

V—El Profesor D. Juan Fages.

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Apenas pasa año sin que la muerte deje claros en la hueste de los cultivadores de las ciencias en España, y es el presente señalado, hasta el momento actual, por cruel y sañudo, como si el destino se complaciera en arrebatarse á la vida las inteligencias llegadas apenas á la plenitud de su desarrollo, cuando más sazonados y maduros frutos podían dar, en el momento que por el trabajo realizaban cumplidamente las esperanzas puestas en ellas y alcanzaban aquellos ideales alentadores de sus anhelos de saber y de camino la personalidad científica del investigador original en las materias de las ciencias positivas. Llegaron á tanto, cada uno por su vía, los dos Profesores de la Universidad de Madrid D. Salvador Calderón y Arana, que lo fué de Mineralogía, y D. Juan Fages y Virgili, de Análisis Químico, fallecidos con cortos días de intervalo y bien poco después de haber publicado sus mejores obras; Calderón, la magnífica descripción de *Los Minerales de España*; Fages, el capital estudio de *Los Métodos indirectos de la Química analítica*, muy pronto traducido en lengua alemana y en todas partes celebrado.

Mas ni al uno ni al otro fueles dado gozar las alegrías del vencimiento, ni aun saborear el triunfo de tantos años de ansiedades y de labor incesante, sólo para conseguir aquella cortísima porción de gloria correspondiente á su merítísimo esfuerzo; parece como si las cosas estuviesen arregladas para arrebatárselos á la vida al llegar su entendimiento á la plenitud del vigor, cuando, ya hecho y afianzado, podía entregarse á la producción científica. Fueron dos adalides de la verdad y por ella trabajaron con el mayor desinterés, ansiosos tan sólo de alcanzarla y que los suaves resplandores de

su pura llama iluminasen aquellas inteligencias tan bien cultivadas, mostrándose á ellas, en regiones ya más superiores, vestida de luz, para indicarles nuevos caminos y horizontes sin fin, tan claros y hermosos, cuanto hermosa y clara es la ciencia.

Bastantes puntos de contacto pudieran notarse en la respectiva labor científica de los profesores Calderón y Fages, aun cuando los aparten la diversidad de las aptitudes y de las aficiones. Llevóle al primero su vocación por los campos de la Geología, y consagró su vida y su actividad á los estudios petrográficos, en los cuales fué excelente investigador, capaz de estudiar los pormenores de menos bulto, como de elevarse á los conceptos de orden muy superior, relativos á la formación de los complejos agregados constitutivos de las rocas. Dedicóse el segundo á la Química, y fué consumado analista, de una elegancia y pulcritud en el trabajo, de tan rigurosa escrupulosidad en las determinaciones cuantitativas, que nadie podía superarle; bien es cierto que su investigación analítica iba guiada por el más perfecto y acabado conocimiento de las doctrinas generales de la ciencia y de sus principios, desde donde bajaba hasta las operaciones peculiares del análisis, y no hubo quien mejor se diese cuenta de ellas, ni con mayor acierto supiese considerarlas aplicación de leyes superiores, explicándolas y mostrándolas consecuencia suya, sujetas á ellas y no rutinarias prácticas mecánicas, auxiliares y no principales en cuanto atañe á la caracterización de las especies químicas.

No están tan separados como á primera vista parece el análisis petrográfico y el análisis químico, antes bien, en varias cosas se asemejan en esta nota fundamental común: ambos son trabajo de diferenciación metódica en cuanto á su fin y también en cuanto á su procedimiento. Se investiga en ambas disciplinas partiendo de las leyes y de los principios generales de la ciencia, y los datos adquiridos en la paciente labor del petrógrafo y del analista, sirven á su vez de apoyo

y primera materia de las grandes hipótesis y de las teorías más trascendentales, y el haberlo así entendido y tomado por norma de sus investigaciones, es lo que tienen de común los profesores Calderón y Fages. Jamás fué en ellos rutina la práctica de los métodos, sino fruto sazonado de los razonamientos, y así los extremaban hasta conocer sus límites y los afinaban á cada punto para saber su alcance y eficacia en los casos más variados, siempre en consonancia con los principios teóricos originarios.

Cuando Fages murió, el día 4 del último mes de Agosto, sólo contaba cuarenta y nueve años de su edad, ocho en el magisterio de la cátedra de Análisis Químico general en la Universidad de Madrid y dos como individuo de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; su vida ha sido bien aprovechada en los trabajos de laboratorio y nada fácil hasta lograr el puesto oficial que había conquistado. En los últimos años concediéronsele á su mérito honores tales como las vicepresidencias de la Sociedad Española de Física y Química y de la Sección de Ciencias Físico-Químicas de la Asociación Española para el progreso de las Ciencias; fué vocal del Real Consejo de Sanidad, correspondiente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona y Presidente honorario del Centro de naturales de Tarragona y su campo, en cuya tierra había nacido. Fages vino á Madrid en 1882, procedente de Barcelona, en cuya Universidad había estudiado las Facultades de Ciencias y Farmacia, y en ambas recibió el grado de Doctor, con la nota máxima, en la Universidad Central, habiendo ejercido en ella, durante diez y seis años y en las expresadas Facultades, los cargos de Ayudante y Profesor auxiliar; así cuando en 1903, mediante lucidísimas oposiciones, llegó á ser Catedrático numerario, estaba formada su cultura en materias de Química, era analista excelente é investigador bien reputado.

Otra ocasión y no la presente sería la más propicia para discutir la conveniencia, respecto del individuo y de la en-

señanza, de llegar al magisterio superior en la edad juvenil relativa ó cuando los ardores juveniles son pasados y el caudal de experiencia, sólo adquirida viviendo y trabajando, es norma de nuestros actos. Tiene lo primero todas las ventajas del entusiasmo comunicado á las enseñanzas, las de la fe en lo porvenir, las del ideal conseguido, reclamando alcanzar otros más elevados; quizá los frutos no hayan llegado á la sazón precisa, en cambio las flores tienen sus colores más vivos y es más exquisita su fragancia por la primavera; y si es hermosa la serena majestad de las tardes otoñales, es en la mañana sonriente y placentera de Mayo cuando el sol hace brotar los gérmenes é imprime nueva vida á la Naturaleza. Se debe llegar á tiempo, nunca demasiado temprano.

Desde bien joven hubo de comenzar Fages la labor docente, aunque por azares de la suerte sólo fuele dado ocupar los ocho últimos años de su vida, con el carácter de propietario, la cátedra para la cual se formara; cuando la tuvo era ya notable investigador, y de tal campo procedía, no por accidente, sino á impulsos de aquella bien afirmada vocación científica que le hacía estudiar las sublimidades fundamentales de la Química general, conocer los admirables encadenamientos de las combinaciones del carbono, penetrar el utilísimo y nunca bien ponderado artificio de las fórmulas de estructura, adiestrarse en los procedimientos analíticos y sintéticos de las substancias orgánicas y apoderarse de los métodos físicos, con intento sólo de aplicarlos á su sistema de enseñar y practicar, con no superada escrupulosidad, la Química Analítica, razonando todas las operaciones y dándose cuenta de todos los resultados. Acrecienta todavía el mérito de Fages, en su calidad de maestro y de investigador, el haberse formado en España, sin haber menester de acudir, este hombre tan moderno y de su tiempo, á Escuelas extranjeras, en las cuales su nombre y sus trabajos fueron debidamente apreciados: buen ejemplo del poder del estudio, de la vocación y de la voluntad, puesto todo ello al servicio de un

ideal, con aquel gran desinterés, cualidad eminente del investigador cuyas ansias véñse colmadas cuando ha logrado vislumbrar siquiera los resplandores de la verdad en el orden de la ciencia.

Quizá respondió éste como empeño de no abandonar ni alejarse de la tierra nativa para buscar en las extrañas, más prósperas y adelantadas, conocimientos de orden superior, prefiriendo adquirirlos por sí mismo, sometiéndolos á rigurosas comprobaciones, á una de las grandes virtudes de Fages: á su patriotismo. Fué un gran español; sin envidia veía marchar, en demanda de la buena nueva, á cuantos querían encontrarla en el extranjero, y con la mejor buena fe los impulsaba y aconsejaba en tal empresa, digna de los elegidos, laudable aspiración de cuantos desean saber; van en busca de nuevas herramientas, quieren aprender su manejo, y al tornar al patrio solar, sabrán cultivar mejor nuestro jardín. Mensajeros de ideas, llevarán noticias nuestras adonde no somos conocidos, y si son buenos hijos, volverán queriendo más á su madre y más españolizados.

Esta sana idea del patriotismo túvola nuestro buen compañero é hizola norma de sus actos, y eso que en los días del aprendizaje oía de contiuo, conforme lo oímos todos, cuando nos tocó la vez, pregonar con los mayores encomios las excelencias de las grandes Escuelas alemanas, por un singular profesor, de ruda fiereza, maestro notable, antiguo alumno de Will en la Universidad de Giessen. Cuando los años son pasados, cuantos hemos sido sus discípulos hemos dado al olvido las bruscas genialidades de aquel buen D. Magín Bonet para conservar el recuerdo de su excelente enseñanza; áspera por demás era la corteza, sano el fruto y tan sabroso que el tiempo no ha borrado su memoria y la evocamos con cariñoso respeto. Sin haber sido investigador, era Bonet maestro en el análisis, admiraban su pulcritud en el trabajo, su escrupulosidad y su rigor en todas las operaciones; acaso excedían de prolijas sus explicaciones,

quizá pudiera tachársele de conceder sobrada importancia á los pormenores; pecaba de minucioso ciertamente; pero es lo cierto que sin tener una personalidad científica saliente, enseñaba á trabajar; no era en la forma externa atractivo su método, allá en el fondo tenía algo que nos estimulaba al estudio; quizá por tener amargada la vida, no se hacía amable; en cambio sabía hacer amar la ciencia. Tal fué el maestro de Fages, y sería injusto el no reconocer cómo debió su iniciación en los métodos analíticos á D. Magín Bonet, quien sucedió en la cátedra, y baste decir que profesor y discípulo se tuvieron siempre simpatía y franca amistad.

Pero la influencia de Bonet en Fages no pasa, en realidad, de esta iniciación y pruébese examinando los primeros trabajos originales de éste, tan diferentes del sentir y del pensar de su maestro: la formación de Fages es su propia obra, el fruto exclusivo de su estudio y de su voluntad; él mismo se ha hecho su personalidad mediante el asiduo y solitario trabajo de no pocos años de laboratorio. Quien sólo vivió para la benemérita labor, nunca bastante agradecida de parte de cuantos fuimos sus discípulos, de la enseñanza elemental de la ciencia, no podía formar investigadores, ni por tal camino llevábanle tampoco sus aficiones, ni las tradiciones de Escuela; y el medio, de su parte, no era todavía propicio para acometar, ni siquiera intentar tamañas empresas.

Fuera de las disciplinas de la Química, era muy versado en otras de variada índole el profesor Fages, quien, lejos de desdeñar cierto linaje de estudios, los cultivó con amor, halló en ellos el necesario descanso del trabajo cotidiano del laboratorio y sirviéronle á maravilla para formar su sólida cultura. Tenía predilección por los estudios clásicos y recreábase en los históricos, prefiriendo el de los grandes y más trascendentes hechos cuyo influjo ha sido universal, y esto, lejos de perjudicar la labor metódica y paciente del analista, parecía contribuir á realzarla y hacer subir de muchos quilates

su mérito, comunicándole cierta nota de atractiva elegancia y distinción, bastante por sí misma para señalar la individualidad característica del investigador. Producto de tales aficiones es el estudio acerca de *Los químicos de Vergara*, interesante capítulo de la Historia de la Química en España, cuyas primicias gozó la Academia de Ciencias; pues sirvió á Fages de tema para su discurso de ingreso en ella. Y aquí vendría de molde el abordar una cuestión de nuevo palpitante, tratada en todas partes con muy vario criterio, y es precisamente el problema de la cultura llamada clásica en sus relaciones con la cultura científica. Por desgracia, cierto género de estudios de aquella índole hállanse en España en lamentable abandono y son desdeñados, con harta injusticia, de cuantos se dedican al cultivo de las ciencias positivas, y eso que el ejemplo de Fages bien á las claras demuestra cómo hay perfecta compatibilidad y mutua ayuda entre el saber científico y el saber literario, uniéndose y completándose en las superiores regiones del pensamiento.

Recordaré á tal propósito como lejos de ser perdido el tiempo invertido, allá en la primera juventud, en los estudios antes bien llamados de humanidades, constituye, con el peculiar de las Matemáticas elementales, la mejor y más sólida preparación para abordar el de las ciencias experimentales, aguza el ingenio, excita el afán de saber, da mayor solidez al juicio, forma el buen gusto y deja en el ánimo un gran sedimento de energía, cuyos provechos recogemos en la edad madura. No constituyen las obras clásicas tan sólo un bello recreo de la imaginación, ni son puro y agradable pasatiempo; tienen empero una gran finalidad y muy elevado valor educativo.

Gracias á haber gustado las bellezas clásicas de las Artes y estudiado la historia de las grandes transformaciones sociales, acertando á unir sus enseñanzas con las propias de las ciencias químicas, es como Fages logró formar y determinar su personalidad en el doble carácter de investigador

original y de maestro, si bien la función docente y del que inquiere la verdad experimentando, completábanse y uníanse á maravilla y así el analista á la moderna, gran conocedor de la Química general, dotado de grandísimo ingenio, poseyendo en grado máximo la habilidad experimental, aparecía siempre en este hombre, cuyo espíritu había sido cultivado por igual en las disciplinas científicas y en las de las Artes, la Literatura clásica y la Historia. Con intento de demostrarlo y rindiendo á la memoria del amigo y compañero el debido tributo, elegiré entre la copiosa labor de Fages tres series de investigaciones, en las cuales, siendo todas á igual fin encaminadas, manifiéstanse las principales dotes del químico; refiérense á *la determinación cuantitativa del arsénico, pesando piroarseniato magnésico*, al estudio de la *acción de los sulfuros sobre los nitroprusiatos* y á *los métodos indirectos de la Química Analítica*, su último trabajo. Fueron publicados todos, naturalmente en español; los dos últimos vieron la luz en la REVISTA DE LA ACADEMIA y los tres han sido reproducidos en alemán y en francés; el postcero figura íntegro en lengua alemana en la colección de monografías científicas publicadas bajo la dirección del Dr. W. Herz de Breslau, lo cual basta para formar idea del mérito de un trabajo en el que son por igual admirables la sagacidad del crítico y la originalidad del investigador.

Seguramente no resulta fácil la empresa de dar novedad á lo muy sabido, hallar errores en determinaciones analíticas de constante repetición y hacer tema de originales investigaciones las cosas mejor conocidas y disputadas por difinitivamente resueltas. Y no obstante, la característica de la indagación científica experimental es no considerar nada terminado, sino en período constituyente y someterlo á constantes comprobaciones, en cuanto nada hay definitivo ni es tampoco posible el señalar límites invariables al alcance y resultados de los métodos de investigación.

Hállase de esto la mejor prueba en lo acontecido respecto

del aire atmosférico, sin duda el gas mejor y más veces analizado, lo cual no fué parte á impedir que, buscando la causa de ciertos insignificantes errores cometidos en medidas de sobra rectificadas, llegase Ramsay á descubrir toda la serie de cuerpos inertes, llamados gases nobles, existentes en el aire en variadas proporciones, no insignificantes tocante á alguno de ellos. Fué en realidad un trabajo de rectificación de análisis, y buscando las diferencias entre el nitrógeno del aire atmosférico y el obtenido en determinadas reacciones químicas, es como se llegó al descubrimiento del argo, el primer término de la serie. Aunque se concrete á términos mucho más modestos y se limite á un método analítico de uso frecuentísimo, como es la determinación del arsénico pesando piroarseniato magnésico, el trabajo del profesor Fages pertenece á la misma categoría, sin haber logrado, ni con mucho, la transcendencia del citado; bien es cierto que nuestro compañero, al llevarlo á cabo, no tuvo semejantes pretensiones, y sólo quiso averiguar el alcance y los límites de conocidísimo método analítico.

Tuvo como preliminares de la investigación de referencia ciertos estudios, en mi entender de mucha cuantía, difíciles, minuciosos, en los cuales puso el analista todo su ingenio y sus más exquisitos cuidados. Precedentes de tal labor fueron dos Notas publicadas, primero, en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, reproducidas luego en los *Annales de Chimie Analytique de Paris* (1903), y en *Physikalisch-Chemisches Centralblatt*, de Leipzig (1904); refiérese la primera á las fórmulas generales de corrección en determinaciones analíticas, en las que se utiliza la llamada filtración parcial, y trata la segunda de las fórmulas especiales de corrección en la filtración parcial, cuando las determinaciones experimentales son por polarimetría ó volumetría. En ambos trabajos, que son á modo de pruebas de un sistema de investigación, resplandece la exactitud hasta en los menores detalles, la elegante finura de quien en la propia

labor se complace, y la originalidad en el discurso y en los procedimientos; es decir, el conjunto de aquellas cualidades que hacían de Fages un analista de relevante mérito, no formado con la continuada repetición de operaciones muy sabidas, sino en el estudio perfecto de la Química general.

Iniciado en la aplicación de sus principios á las operaciones del análisis, de las cuales habíase de dar cuenta perfecta, explicándolas á modo de consecuencia lógica de aquéllos, y entendiendo, de otra parte, cómo en el orden de las ciencias experimentales ninguna cosa está, por fortuna, terminada y todo hállase en continuo período de transición, y ello es acaso la mayor excelencia de tales ciencias, es como emprendió la revisión de un método muy corriente para determinar el arsénico, tema de su predilección, conforme demuéstralo el haberse ocupado asimismo en el procedimiento consistente en pesarlo al estado de arseniato de plata, ya de menos frecuente empleo, aun siendo conocidísimo. Revélase principalmente en todas las investigaciones enumeradas el espíritu de la más escrupulosa exactitud, eminente cualidad del analista, unida al riguroso razonamiento, indispensable complemento de ella, preciso para formar el debido juicio acerca del valor y alcance de los resultados numéricos obtenidos, en relación con los medios empleados para obtenerlos.

Un excelente punto de partida tuvo Fages en su investigación respecto de las determinaciones cuantitativas del arsénico al estado de piroarseniato magnésico, y fué la excelente doctrina que Ostwald expone en sus principios científicos de la Química analítica, tocante á los precipitados cristalinos y al tamaño de los cristales que los constituyen, deduciendo de ello los métodos de su lavado. Ocurríense al caso muy pertinentes observaciones en sentido del aumento de las impurezas con el de la magnitud de los cristales, y este solo detalle vale para dar á entender hasta dónde llegó el minucioso estudio del analista en la revisión de las causas de error en un procedimiento clásico, y cómo antes de

proponer los medios de eliminarlas, en todo lo posible, llega hasta conocer los más insignificantes pormenores de ellas. Trata en particular de probar cómo en las determinaciones del arsénico la exactitud en cada caso es á modo de resultado de una compensación de errores, no regulable de modo general, y que, conforme á sus palabras, tiene mucho de fortuito y es deber del químico; agrega, conocer las causas de error y su sentido, para modificar la parte experimental de la manera que mejor convenga á esta necesaria compensación, disminuyendo, en lo posible, lo fortuito de ella; lo cual significa reducir los errores al mínimo.

Junto al trabajo citado, aunque sea de índole diferente y le aventaje en alcance y transcendencia, es menester colocar las investigaciones de Fages relativas á la *Acción de los sulfuros sobre los nitroprusiatos*, publicadas en la REVISTA DE LA ACADEMIA, y reproducidas muy luego en otras publicaciones importantes de Química de Alemania y Francia. Como el caso ya antes citado, tuvo este otro sus precedentes, y fueron: el estudio de la reacción de Bædeker relativa á la acción de los sulfitos sobre los nitroprusiatos, publicado en francés (*Annales de Chimie et de Physique*, París 1902), reproducido, al igual de los anteriores, en distintas Revistas extranjeras, y la aplicación del nitroprusiato sódico á la investigación de los compuestos estanosos de la propia suerte publicada en francés (*Annales de Chimie Analytique*, París 1902), y luego en alemán (*Chemisches Centralblatt*, 1903, y *Merk's Reagentien Verzeichniss*, Berlín 1903), los cuales fueron el antecedente del para mí principal trabajo de investigación del profesor Fages.

Vió un asunto digno de ocupar toda su atención — y se la consagró por entero durante largo tiempo, — en el conocidísimo fenómeno utilizado para reconocer los sulfuros, si de constante y fácil repetición, no explicado de manera satisfactoria, y aplicóse á estudiarlo con todo aquel afán y aquella constancia que ponía en cuantas investigaciones llevaba á

cabo. Este de los nitroprusiatos todavía le entretuvo con más atractivo afán que los estudios acerca de los cloratos, cuya data es 1908; y quizá por ser campo menos explorado, prestábase mejor á lucir y ejercitar el ingenio del analista y el saber del químico; además era el tema de mucha generalidad y comprendía cuestiones desconocidas y otras mal ó poco estudiadas, siendo preciso esclarecerlas todas, cosa no fácil ni breve. Requeríase, de una parte, buena copia de labor experimental, encaminada con sumo acierto, precedida de minuciosa observación de los hechos ya conocidos, y de otra buen juicio, abundante ciencia y lógico raciocinio para interpretarlos y explicarlos, llegando al conocimiento y demostración de los principios por que se rigen las acciones de los sulfuros sobre los nitroprusiatos; tal fué el programa del conjunto del trabajo del profesor Fages, en nada parecido al hermoso estudio que de los nitroprusiatos en general hizo el químico italiano Miolatti.

Lógicamente había de desarrollarse el trabajo en dos sentidos, por decirlo así complementarios uno del otro. Cuando sobre la solución de un nitroprusiato viértese otra de un sulfuro, al punto aparece una coloración; pero no se detiene aquí el fenómeno: es su primera fase y tiene varias, mal determinadas acaso, bastante á complicarla sobremanera; de consiguiente, era menester indagar, ante todo, la causa de la coloración resultante y las de sus variaciones, problema muy general, dilucidado de manera completa en la primera parte del trabajo de Fages, sin duda la de mayor interés desde el punto de vista de la Química pura. Sus indagaciones están consignadas en cuatro proposiciones concretas referentes al hecho, á afirmar cómo es una combinación molecular el cuerpo azul producido, á las variaciones del color conforme á las cantidades de los cuerpos reaccionantes y á las causas de las distintas coloraciones, rojizas, amarillas y purpúreas.

Un trabajo de semejante índole requería practicar numerosos experimentos y mucha variación en ellos, tanta como

son variadas las cuestiones tratadas en los cuatro puntos indicados, y Fages no los escaseó, ciertamente, desplegando hasta en los menores detalles la finura de su ingenio y la pulcra elegancia característica de su método de trabajo. Había en el problema de los nitroprusiatos otro sentido en que investigar, constitutivo de sus aplicaciones: la reacción con los sulfuros constituye, de tiempo atrás, excelente procedimiento analítico de frecuente empleo, y era menester estudiar los límites de sensibilidad de tal reacción desde este punto de vista, é interpretarla debidamente, y esto es lo esclarecido en la segunda parte del notabilísimo trabajo del profesor Fages. Estudió el asunto con el criterio de la moderna teoría de los iones, y tomándola por base y punto de partida, realizó larga serie de investigaciones prácticas, de las cuales dedujo que «el nitroprusiato sódico no es reactivo del sulfuro-ión, sino de los sulfuros solubles más ionizados, y por tanto es menos sensible que las soluciones metálicas que reconocen el sulfuro-ión y que la sensibilidad del nitroprusiato como reactivo de los sulfuros aumentará, disminuyendo la ionización de éstos, con el empleo de disolventes que impidan ó disminuyan la ionización, con la adición de exceso de reactivo ó introduciendo más iones (sales neutras y en especial carbonatos alcalinos)». De esta manera tan precisa y segura expresa lo concerniente á la sensibilidad de la reacción investigada.

Merecióle con razón atenciones mayores la influencia de la hidrólisis y hubo de consagrarse á investigarla con minuciosos cuidados en los diversos casos, para deducir de sus propios experimentos las condiciones de ella; como disminuye la sensibilidad del nitroprusiato sódico en cuanto reactivo de los sulfuros y de que suerte aquellas circunstancias que aminoran la hidrólisis, la aumentan. Trabajando con soluciones congeladas y no alcalinizadas de sulfuros, vió duplicarse la sensibilidad del nitroprusiato, sin llegar á la propia de los reactivos del sulfuro-ión, aumento conseguido también

añadiendo alcalis fijos; demostrando asimismo que la máxima sensibilidad alcanzase congelando las disoluciones alcalinizadas de los sulfuros, luego de haberles agregado el nitroprusiato.

Ya llegada á este punto la investigación; pudo afirmar Fages que no sirve el reactivo estudiado para distinguir los sulfuros de los sulfhidratos, siendo además el límite experimental de su sensibilidad bastante inferior del correspondiente á los reactivos específicos del sulfuro-ión. Sólo restaba interpretar los hechos con tanto rigor estudiados y en semejante tarea es donde mejor se ha revelado el talento superior del químico, la lógica de sus razonamientos y lo bien fundado de sus apreciaciones; así empieza afirmando como toda solución capaz de tomar color, débil ó acentuado, en seguida ó á la larga, con el nitroprusiato sódico, contiene sulfuro. Hace depender la debilidad de la coloración y el tiempo invertido para su formación del estado del sulfuro, iontizado ó hidrolizado por completo. Dada la pequeña sensibilidad del reactivo, cuyo límite se alcanza pronto, el no advertir cambios de color no implica la ausencia de sulfuro y compréndese entonces el que no sea posible la medida colorimétrica de los sulfuros, atendiendo á esto mismo y á la imposibilidad de lograr coloraciones comparables. En suma, las magníficas investigaciones del Profesor Fages acerca de los nitroprusiats, llevadas á cabo con sumo arte é intentos de apreciar su valor en cuanto reactivo analítico, pueden considerarse definitivas y suficientes para establecer los límites de su empleo, no tan general y preciso como se creyó por lo común durante mucho tiempo.

Nunca se llega de una vez al fin deseado en materias de investigación experimental y aun muchas veces alcánzanse resultados bien diferentes de los previstos, y el caso de los nitroprusiats es de ello excelente ejemplo. Prueba asimismo, al demostrar las cualidades del investigador español, la eficacia de los procedimientos experimentales, seguidos con la

más escrupulosa atención hasta agotarlos, razonando las distintas fases de su mecanismo y deduciendo de sus resultados las leyes y las reglas que rigen los fenómenos. Si en tal sentido, y respecto del estudio de las acciones de los sulfuros sobre los nitroprusiatos, se preguntase cuál de las condiciones de Fages preponderaba, respondería al punto: la atención.

A ella, llevada á un grado máximo, se deben los resultados obtenidos; mas no es la única característica de la labor científica de nuestro compañero; fué analista de primer orden é investigador de mucha cuantía; pero también supo transmitir á los demás su saber con persuasiva palabra, y cuantos pasaron por su cátedra admiraron las dotes del maestro, cuyo primer afán era enseñar, y en el trabajo docente pocos ponían tanto empeño; sus discípulos inspirábanle interés sobre todas las cosas, afanábase por mostrarles la ciencia en sencillos términos, haciéndola atractiva, y su laboratorio ordenado y alegre, si no sobrado de recursos, lleno de luz y de sol, era por todo extremo simpático y atrayente. De las calidades del maestro da testimonio su último trabajo acerca de *los métodos indirectos de la Química analítica*: ciertamente el asunto habrá sido tratado de variados modos en distintas ocasiones anteriores; pero Fages lo hizo, no en el sentido que con lamentable ligereza le atribuye un maestro insigne, sino con verdadera originalidad, bien diferente de la advertida en famosos estudios publicados años atrás en el extranjero; muy conocidos del catedrático de Madrid y el mérito de su trabajo no es la recopilación de los precedentes, ni la crítica razonada y concienzuda, es la originalidad del modo de tratar las variadas cuestiones de los métodos indirectos y el de la aplicación de las fórmulas según los casos; la sencillez y la claridad del maestro, que tanto contribuyen á entender la verdad é impelen á aprender sus caminos.

Ocuparía mucho espacio el análisis de la última obra de mi buen amigo; baste indicar su carácter para entender cómo

es la labor de un maestro, cuyas facultades han llegado á la plenitud de su desarrollo. Cuando estaban dispuestas para producir mucho y bueno, y de la elegancia y severidad del analista, de los talentos del investigador y de las cualidades del maestro, tanto esperaban la ciencia y la patria, su vida se extinguió, y con ella todas las ilusiones y todos los ideales; apenas había alcanzado la cátedra tan merecida, logrando todas sus aspiraciones, y sólo un momento gozó su legítimo triunfo.

Bastantes años hace que lazos de sincero afecto me unían á Fages, y durante ellos he tenido ocasión de apreciar su valor moral; fué un hombre bueno en toda la extensión de la palabra, leal amigo, en quien la rectitud y el bien eran la norma de sus actos; y si parecía á primera vista reservado, en su trato íntimo era en extremo amable y jovial, y eso que los quebrantos de su salud, venidos ya de lejos, no siempre le permitían las expansiones del buen humor. Nadie le aventajó en el cumplimiento de sus deberes; era en ello inflexible; jamás intervinieron en sus juicios influencias extrañas, ni los emitía sin razonarlos mucho; era constante y asiduo en el trabajo, y lo proseguía con admirable tenacidad. Poseía en grado eminente la virtud del patriotismo y sentía en lo más hondo nuestros infortunios; pero no era pesimista; confiaba en la virtualidad de la raza y cuanto le era dado, todo lo ponía al servicio de la cultura y de la ciencia española, y así el móvil de sus trabajos de investigación, mejor que la gloria personal, constituía el engrandecimiento de la patria, y en contribuir á él se afanaba, inculcando el mismo ideal á sus alumnos. Fué un hombre todo sencillez y modestia; creyente y observante, profesaba sus ideas con verdadera convicción y eran sus sentimientos puros, honrados y dignos del mayor respeto, y así lo tuvo Fages, sincero y cariñoso, de todos sus compañeros y de todos sus amigos; vivió como viven los buenos, y murió como mueren los justos. Descanse en paz.

Lista de los trabajos científicos del profesor Fages ⁽¹⁾.

Recherche des chlorates et des bromates au moyen de la strichnine.

Publicado en *Annales de Chimie Analytique*, París, 1900, pág. 441.
Reproducido en *Merck's Report X*, pág. 120, Darmstadt.— *Formulaire général des Reactions et Reactifs*, París, 1906, pág. 107 y 116.— *Merck's Reagentien Verzeichniss*, Berlín, 1903.

Action des sulfites sur les nitroprussiates (réaction de Bædeker).

Publicado en *Annales de Chimie et de Physique*, París, 1902.
Extractado en *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, 1902. — Reproducido en *Annales de Chimie Analytique*, París, 1902. *Bulletin de la Société Chimique de Paris* y *Moniteur Scientifique*.

Application du nitroprussiate sodique á la recherche des composés stanneux.

Publicado en *Annales de Chimie Analytique*, París, 1902, pág. 442.
Reproducido en *Chemisches Centralblatt*, 1903, pág. 252, tomo I.— *Merck's Reagentien Verzeichniss*, Berlín, 1903.

Fórmulas generales de corrección en determinaciones analíticas, en las que se utiliza la llamada filtración parcial.

Publicado en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1903. Reproducido en *Annales de Chimie Analytique*, París, 1903, pág. 252 y en *Physikalisch-chemisches Centralblatt*, Leipzig, 1904, pág. 340.

Fórmulas especiales de corrección en la filtración parcial, cuando las determinaciones experimentales son por polarimetría ó volumetría.

Publicado en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1903, pág. 113. Reproducido en *Annales de Chimie Analytique*, París, 1903, pág. 252 y en extracto en *Physikalisch-chemische Centralblatt*, Leipzig, 1904, pág. 341.

Recherche des chlorates.

Nota presentada en el *V Congreso de Química Aplicada*, Berlín, 1903. Publicada en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1903, pág. 262. Reproducida íntegra ó en extracto en la mayor parte de las Revistas alemanas de Química.

De la determinación cuantitativa del arsénico, pesando piroarsenato magnésico.

Publicado en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1904, pág. 106. Reproducido en *Zeitschrift für Analytische Chemie*. Wiesbaden, 1905, pág. 492, y *Annales de Chimie Analytique*, París, 1905, extractado en *Physikalisch-chemisches Centralblatt*. 1905. pág. 702.

(1) Formada por su ayudante D. Angel del Campo y Cerdán.

De la determinación cuantitativa del arsénico, pesando piroarsenato magnésico. (2.^a Nota).

Publicado en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, pág. 300 y en *Annales de Chimie et de Physique*, de París, refundida con la primera Nota.

De la determinación cuantitativa del arsénico, pesando arseniato argéntico.

Publicado en el *Monitor de Farmacia*, Madrid, 1904, pág. 227. Reproducido en varias Revistas de Farmacia nacionales y extranjeras.

Acción de los sulfuros sobre los nitroprusiatos; causa de la coloración resultante y de sus variaciones.

Publicado en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1905, Marzo, pág. 176. Reproducido en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1905, pág. 65; en *Zeitschrift für Analytische Chemie*. Wiesbaden, 1905, pág. 409; en la *Revista da Chimica pura e applicada*. Oporto, 1906, y extractado en *Chemiker Zeitung*, 1906, pág. 321. *Chemische-Centralblatt*, 1906. *Annales de Chimie Analytique*, París, 1905, y *Bulletin de la Société Chimique de France*, París, 1907.

Acción de los sulfuros sobre los nitroprusiatos; sensibilidad é interpretación de la reacción analítica.

Publicado en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1905, Mayo. Reproducido ó extractado en las mismas Revistas que la Nota anterior.

Del modo de expresar la acidez.

Publicado en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1907, Octubre. Reproducido en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química* y en extracto en *Chemiker Zeitung*, Diciembre 1907.

Consideraciones sobre los errores y la técnica de la balanza en análisis químico.

Publicado en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, 1908, pág. 429.

Investigación analítica de los cloratos.— Generalización á muchos oxidantes.— Colorimetría de los cloratos.

Memoria presentada al Congreso celebrado en Zaragoza por la Asociación Española para el progreso de las Ciencias. Publicada en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1908. Reproducida en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1908, y en *Annales de Chimie Analytique*, París, Marzo de 1909, en largo extracto en *Chemiker Zeitung*, Diciembre 23 de 1908.

Aplicación de la orina á la investigación general de oxidantes.

Publicada en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, Octubre de 1908. Reproducida en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, Diciembre de 1908, en *Annales de Chimie Analytique* París, Abril de 1909, y en extenso extracto en *Chemiker Zeitung*, Enero de 1909.

Investigación y determinación cuantitativa del clorato potásico en la orina.

Publicada en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, Octubre de 1908. Reproducida en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, en *Annales de Chimie Analytique*, París, Marzo de 1909, y en extenso extracto en *Chemiker Zeitung*, 27 Febrero 1909.

Contribución á la toxicología de los cloratos.

Publicada en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, Noviembre de 1908. Reproducida en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Marzo de 1909, y en extenso extracto en *Chemiker Zeitung*, Marzo 1909.

Los Químicos de Vergara y sus obras.

Discurso leído en su solemne recepción en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid el día 27 de Junio de 1909.

Análisis de nitros refinados, pólvoras y explosivos cloritados.

Publicado en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1909, pág. 239. Reproducido en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, 1909, pág. 403.

Contribución al análisis del nitro de Chile.

Publicado en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1910, pág. 239. Reproducido en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, 1910, pág. 83.

Un caso de acción catalizadora de las sales argénticas: aplicaciones.

Publicado en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, Madrid, 1910, pág. 222.

Los métodos indirectos de la Química Analítica.

Publicado en la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID, 1910, Julio á Octubre. Traducido íntegramente al alemán por el Dr. Werner Mecklenburg y publicado en la colección de monografías científicas, que bajo la dirección del Dr. W. Herz, profesor de la Universidad de Breslau, aparece en Stuttgart.

VI.—Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

INTRODUCCIÓN

Desde que Augusto Comte expuso en sus *Lecciones de Filosofía Positiva* el concepto de una *Física social*, y pensó en una ciencia nueva á la cual dió el nombre de *Sociología*, él mismo sugirió (y después otros muchos escritores han desenvuelto), la idea de una *Mecánica de la Sociedad*, con sus tres secciones. *Cinemática, Estática y Dinámica*. Sería una rama de la Sociología pura ó abstracta, y sería una ciencia particular para el estudio de los movimientos ó del equilibrio producidos en las Sociedades—cualesquiera que éstas sean—por la acción de fuerzas de naturaleza psíquica, que muchos denominan fuerzas sociales. Dice De-Greef que la Sociología abstracta ha de investigar las leyes generales que resultan de las relaciones de los hombres entre sí, independientemente de las formas transitorias que han revestido ó revistan dichas relaciones en las Sociedades particulares que hayan existido ó existan.

Yo creo en la posibilidad de constituir una Mecánica social abstracta, cuando considero que la *Mecánica racional* es una ciencia general sobre *entes de razón*, y que en ella las fuerzas aparecen como *abstracciones*. En esta pureza estriba precisamente la excelencia de la Mecánica racional, porque permite que sus Principios y Teoremas se apliquen á todo género de fuerzas de la Naturaleza.

Así, por ejemplo, cuando se asimilan los astros á simples

puntos materiales de diferentes masas, y se admite que las fuerzas que actúan sobre ellos son las de gravitación universal que siguen la ley de Newton, se constituye la Astronomía como una ciencia positiva abstracta; y es *una Mecánica*, en la cual se ha podido aplicar con su lenguaje matemático, y en toda su pureza, los Teoremas de la *Mecánica racional*, para descubrir las leyes de los movimientos de los astros, y por tanto, sus posiciones futuras. Estas predicciones son después verificadas y comprobadas por las observaciones.

En la *Mecánica aplicada* á los sistemas materiales de la Naturaleza que nos rodea, en la cual los cuerpos naturales no son ya entes de razón, se aplican también los Teoremas de la *Mecánica racional*; pero la obscuridad de las leyes por las cuales se rigen las fuerzas moleculares de todo género, impiden que esa ciencia de aplicación pueda ser hoy como la Mecánica celeste. En ella, los Teoremas de la Mecánica racional dan, sin embargo, una primera aproximación, que después las ciencias físicas pueden reemplazar por otras leyes más y más aproximadas.

Si los Principios y Teoremas de la *Mecánica racional* son aplicables á todo género de fuerzas, parece que deben de serlo también á las de naturaleza psíquica, llamadas *fuerzas sociales*. Para hacer la aplicación sería preciso que (sobre convenciones especiales) se pudiera:

1.º Definir bien los puntos de aplicación, determinando de un modo preciso sus posiciones;

2.º Determinar las direcciones y los sentidos en que actúen las fuerzas;

3.º Definir las masas de los individuos y de los elementos sociales;

4.º Concebir como medibles las intensidades de las fuerzas psíquicas, aunque nos sea desconocida su esencia íntima; como lo es la esencia de todo género de fuerzas de la Naturaleza.

La esencia de las cosas es siempre inaccesible para el

hombre; dado que la realidad no está, para nosotros, sino en nuestras representaciones interiores. Pero las ciencias son, en último término— como dice Poincaré,— sistemas de relaciones entre las cosas; y por ellas no se aspira á conocer la verdadera naturaleza de éstas, sino sus relaciones permanentes, tales como se den para el hombre mismo; porque como observa Mr. Le Dantec, lo que llamamos *las cosas* no depende sólo de la naturaleza del mundo, sino también de la naturaleza de quien lo describe. Cuando aperecimos en nuestro interior alguna relación constante expresada— para nosotros— por una ley alcanzada por los métodos científicos; y nos la representamos como aperecida del mismo modo por los demás hombres que la conocen científicamente; es muy natural que la consideremos como una ley que revela la armonía del Universo, aunque ella sea por nosotros y para nosotros, toda vez que en la Naturaleza misma lo que hay son los casos repetidos de cada fenómeno.

En un discurso ha dicho recientemente Poincaré que: «si la complejidad del mundo no fuera armoniosa, nuestro espíritu sólo vería los detalles á la manera del miope, y tendría que olvidar cada detalle antes de examinar el siguiente, porque sería incapaz de verlo todo á la vez: por eso el orden, en la complejidad, es lo que hace que ésta sea accesible».

Debe de notarse también que *las cosas* entre las cuales se investigan relaciones científicas abstractas no son— si bien se mira— más que *símbolos*; porque al designarlas, ó bien nos referimos al *estado fugitivo* por que pasan (para nuestra consideración) en un instante dado, ó bien nos referimos á la *ley de variación* de la cosa de que se habla. En esta segunda manera no se trata sólo de un símbolo abstracto, sino que es además *puramente matemático*, como expresión de una función de muchas variables que estén en relación de dependencia mutua con la que se considere.

En estos *Apuntes* vamos á intentar un ensayo de asimilación de los movimientos sociales— vistos de un modo pecu-

liar — á los movimientos de los sistemas que estudia la Mecánica de los sistemas materiales, mirando los hechos sociales como fenómenos naturales (*), y admitiendo que por la *Psicología experimental* se pudiera llegar algún día á precisar y determinar todo lo que dijimos antes.

Se necesita esto indispensablemente como base para poder *transportar* (si así puede decirse) las leyes generales y abstractas del movimiento y de las fuerzas del mundo real del espacio al mundo igualmente efectivo, aunque psíquico, de los asuntos de carácter social. Habría de tenerse esa base, después de un estudio hecho directamente por la Psicología y la Sociología, ayudadas de la Estadística, toda vez que la Mecánica es impotente para esas investigaciones, que han de ser dirigidas por otros Principios, y por los métodos propios de aquellas ciencias. Ya comprendo que el orden lógico debía de ser el inverso, á saber: tener primero las bases psicológica y sociológica, obtenidas y asentadas por el estudio directo del hombre y de la sociedad, y después aplicar las leyes de la Mecánica. Pero como aquellas ciencias no nos proporcionan todavía lo necesario, he de suponer que algún día se tuviera; lo cual ya indica que mi intento es algo temerario, ó por lo menos, prematuro. Pero entreviendo yo la posibilidad de aplicar las leyes puras de la *Mecánica racional* á los individuos y á las agrupaciones de individuos, he partido — como se verá en los *Preliminares* — de aquellas suposiciones que he considerado adecuadas para encauzar los razonamientos. Es evidente, por lo demás, que si se llegara á demostrar algún día la absoluta imposibilidad de establecer las bases para la constitución positiva de la Mecánica social, tal como la he concebido, todas las especulaciones que encontrará el lector en estos *Apuntes* serían baldías. Pero deben de recordarse estas palabras del *Dr. Maudsley*: «¡Cuáles no serían nuestro gozo y

(*) Damos á esta palabra su más amplio sentido.

nuestro triunfo si llegáramos algún día (y esta esperanza no tiene nada de insensata) á medir por instrumentos delicados las energías que en la conciencia se manifiestan bajo las formas de sentimientos, de ideas y de voliciones!» (Cap. 1.º de la *Fisiología del espíritu*.)

Nosotros intentamos transformar en medios lógicos para el estudio de la *Mecánica social*, los resultados científicos obtenidos por la *Mecánica racional*: ésta trata, después de la Aritmética y la Geometría, del modo más simple y más universal de la existencia, como dice Augusto Comte; y este modo debe de volverse á encontrar espontáneamente en los otros modos de existencia más compuestos, como son los del individuo y la agrupación humanas, consideradas primero desde el punto de vista biológico, y después desde el punto de vista psicológico-sociológico.

El sociólogo americano, Mr. Small, indica que todas las ciencias que descubren y formulan las leyes de los procesos que se verifican en los órdenes antecedentes al orden social, deben de elaborar sus leyes con bastante minuciosidad para poder incorporarlas á la Sociología. Yo creo que las leyes mecánicas se hallan en este caso; y por eso las imágenes y los conceptos de la Mecánica racional—formulados por medio del simbolismo matemático—pueden valer acaso para imaginar y comprender los fenómenos psíquico-sociales *en su aspecto mecánico*, construyendo—por decirlo así—el modelo mecánico (de que hablaba Lord Kelvin) para facilitar la inteligencia de esos fenómenos.

Los sociólogos que han escrito sobre Mecánica social han desenvuelto generalmente sus ideas, preocupándose de las *cualidades* de las fuerzas que actúan sobre los individuos en sociedad, y también de los *finés* ó tendencias económicas, morales, etc.

Este modo de considerar la Mecánica social es totalmente distinto del que yo intento seguir. Habré de pensar sólo en el *cómo* de la acción de las fuerzas psíquicas, independien-

temente de su naturaleza específica; puesto que para mí esas fuerzas serán *puras abstracciones*, como lo son las de la *Mecánica racional*. La consideración de los fines es, por otra parte, enteramente ajena á nuestro estudio.

A la Sociología—apoyada en todas las ciencias—le corresponde, á mi entender, el estudio de los muy variados géneros de fuerzas sociales, con sus diversas cualidades, para penetrar, si es posible, en todo el proceso de la asociación humana; pero á mí me parece que la Mecánica debe de ceñirse al estudio de la acción (estática ó dinámica) de las fuerzas sobre los individuos y las agrupaciones sociales. En lo que los sociólogos denominan *Dinámica social* se comprende el estudio de la evolución de las estructuras de las Sociedades, cuestión que parece trascender ya de lo puramente mecánico.

El eminente Profesor *Ernst Mach* considera que es una preocupación la idea de buscar la explicación mecánica de los fenómenos físicos; y llega á calificar de absurda la aplicación de los conceptos mecánicos á otros órdenes de fenómenos, porque—dice él—esos conceptos no han sido desarrollados más que *para* la exposición de los hechos mecánicos, y no *para* la de los hechos fisiológicos ó psicológicos. Esto es cierto; pero en la *Mecánica racional* se expone simplemente un *aspecto* de los fenómenos del Universo, y yo no alcanzo á ver la razón por la cual no puedan ser aplicadas las leyes mecánicas *abstractas* á los fenómenos psíquicos, si éstos se miran *sólo bajo su aspecto mecánico*. Pensando en las causas ó fuerzas que producen modificaciones psíquicas en los individuos ó en las agrupaciones de individuos, cabe—á mi entender—investigar *cómo* se realizan en el tiempo esas modificaciones ó cambios, y ver si las leyes de la *Mecánica racional* son aplicables.

Spencer dice que toda verdadera *generalización* lleva comúnmente consigo, no sólo una explicación de los hechos ó de la serie de hechos que se han estudiado *para* descubrirla

y formularla, sino también de alguna otra serie de hechos diferentes que, á primera vista, parecían no poder entrar en aquella generalización. Con arreglo á esta idea de Spencer, veo yo, por ejemplo, que la generalización sobre velocidad— (al estudiar en *Cinemática* el hecho del movimiento de un punto en el espacio)—sirve para otros hechos diferentes, y, en general, para todos los cambios cuantitativos (de cualquier género que sean) que se realicen por ley de continuidad en el tiempo.

El Profesor Ostwald dice en su libro sobre la Energía, que Mr. Ernst Solvay había tenido ya la idea de aplicar á los fenómenos sociales la ciencia de la Energía, y á esta aplicación dedica la última parte de su libro aquel eminente Profesor.

Al intentar la aplicación de la *Mecánica racional* á entes y fuerzas psíquicas, se habrá de tener presente que *los conceptos puros* de la Mecánica no tienen otra realidad que la que alcanzan en nuestro pensamiento; que pueden servir para representarnos la conexión y sucesión de los hechos sociales en un aspecto de sus relaciones de dependencia mutua (si se consideran los fenómenos psíquicos que sean generales para todos los hombres en esas relaciones mutuas), viendo así el aspecto mecánico como abstraído de la realidad social; pero no pretender que por aquellos conceptos se explique toda la realidad social en su desenvolvimiento. Esta pretensión sería vana aun tratando de los fenómenos puramente físicos, toda vez que el aspecto mecánico abstraído del fenómeno físico no puede explicarlo totalmente. Ese aspecto, lo repetimos una vez más, es una abstracción, como lo es el aspecto geométrico.

Entre los Sociólogos se admite ya generalmente que la Sociología pueda llegar á constituirse como ciencia; porque consideran que los fenómenos sociales obedecen á leyes; que si éstas no se han formulado todavía, es porque los hechos no son bastante conocidos, á causa de la complejidad de su carácter psíquico.

Dice Ostwald que no se debe de renunciar nunca á la esperanza de llegar á explicar científicamente un fenómeno, ni á la de alcanzar tal ó cual conquista científica; porque todo hecho que entre en la esfera de nuestra observación, ya cumple por eso sólo la condición para poder sernos más y más conocido, es decir, que cae ya bajo el poder de la ciencia.

Se ha dicho, con razón, que el hecho de que los fenómenos meteorológicos, por ejemplo, no sean bastante conocidos, no prueba ni remotamente que esos fenómenos dejen de obedecer á leyes uniformes é invariables; y se ha hecho observar que algunos fenómenos sociales, como los matrimonios, los nacimientos, los suicidios, la criminalidad, etc., aparecen, por las estadísticas demográficas, como obedeciendo á leyes regulares y determinadas, cuando se agrupan esos hechos en grandes números. Parece que en el curso ordinario de los sucesos humanos—como fenómenos psíquicos naturales—(si se miran en grande escala, eliminando las particularidades individuales; y se tiene cuidado de apartar las influencias perturbadoras), rigen leyes tan invariables como en los fenómenos naturales puramente físicos; de tal manera que el tanto en cada uno de aquellos hechos sociales parece una consecuencia *necesaria* de la manera de ser de los individuos que constituyen una agrupación social en un instante dado, y de toda la organización de la Sociedad que se considere. Influyendo sobre estas causas y modificándolas, cabe influir sobre aquéllos tantos que son su efecto.

Respecto al método, conviene recordar que aunque la Mecánica haya sido una ciencia inductiva en los comienzos de su desenvolvimiento histórico, y se hayan empleado para su constitución, la observación y la experiencia que usan todas las ciencias físicas; hoy la encontramos ya como ciencia predominantemente *deductiva*, construída sobre las entidades abstractas de la *Mecánica racional*, en la cual las Matemáticas con su Análisis infinitesimal desempeñan el principal

papel. Esto permite ya lo que Mach llamó con frase tan celebrada y repetida *la economía del pensamiento*, es decir, el menor gasto intelectual.

Anque los razonamientos se hacen siempre en la *Mecánica racional* abstracta sobre simples *entes de razón*, hay que tener en cuenta que sus investigaciones no se dirigen metafísicamente hacia las causas esenciales, sino hacia las *leyes efectivas* del fenómeno natural del movimiento. La observación de lo que ocurra, como fenómeno natural, en los individuos y en las agrupaciones sociales, podrá servir como método de comprobación (de la exactitud ó probabilidad en unos casos, de la falsedad en otros) de las proposiciones abstractas de *Mecánica social* que se formulen, guiándose por los teoremas de la *Mecánica racional*. John S^t. Mill, después de indicar que los fenómenos sociales dependen de las acciones de los hombres, así como de las circunstancias exteriores bajo el influjo de las cuales está el genero humano, dice que el *método deductivo* es el único aplicable al estudio de los hechos sociales; pero basado — naturalmente — en las leyes de la actividad humana por una parte (*), y en las propiedades de las cosas exteriores, que serán el objeto de todas las ciencias físicas y naturales. Para obtener aquellas leyes y estas propiedades, podrá servir, según S^t. Mill, el método inductivo.

El mismo Augusto Comte reconoce que dependiendo necesariamente las ciencias más complejas de las que son más generales (en su Teoría jerárquica de las ciencias), las consideraciones derivadas de estas ciencias anteriores tienen una importancia tal, que su introducción juiciosa conduce á hacer esencialmente deductivas muchas de las nociones fundamentales que en las ciencias aisladas no podrían ser más que inductivas.

(*) A mi entender estas leyes á que se refiere S^t. Mill han de ser investigadas por la Psicología fisiológica.

En estos *Apuntes* nos abstenemos con todo rigor de hacer consideraciones filosóficas acerca de las nociones primeras de espacio, tiempo, fuerza, etc., á las cuales se han de referir necesariamente nuestras especulaciones; porque aunque tales consideraciones no llegaran á degenerar en metafísicas, nos habrían de alejar grandemente del fin que perseguimos, para lo cual nos desligamos de todo género de concepciones filosóficas. Siendo mi trabajo de simple exposición, no debe de extrañar al lector que revista cierta apariencia didáctica ó dogmática. No es que yo en manera alguna considere que el punto de vista en que me he colocado haya de ser aceptado indiscutiblemente; estimo, por el contrario, que habrá muchos á quienes repugne admitirlo. Pero (ajeno á todo espíritu de polémica) he procurado hacer la exposición siguiendo las huellas de la *Mecánica racional clásica*, tal como se expone ésta en los cursos elementales; y por esto, y nada más que por esto, aparece cierta forma didáctica.

Al terminar esta *Introducción* me ocurre la idea de que el contenido de mi trabajo á nadie habrá de satisfacer. Los hombres de ciencia positiva como los matemáticos, los físicos ó los naturalistas, verán, desde luego, que no hay en él una labor científica propiamente dicha, y acaso lo consideren como una fantasía sobre motivos de la *Mecánica racional* (*);

(*) D. Eduardo Saavedra ha escrito estas palabras, que me alien-
tan: «Al par de las creaciones artísticas, las creaciones científicas
proceden del raudal inagotable de la fantasía.» El mismo Ernst Mach
dice: «En el orden científico-abstracto puede la imaginación ejercer
su acción sobre los puros conceptos, dejándose guiar por las aso-
ciaciones y haciendo las convenientes selecciones.» Y el eminente
Profesor D. J. R. Carracido ha dicho en un discurso reciente, que:
«en el mundo físico y en el psíquico son las imágenes la fuente más
copiosa de nuestros conocimientos, y la fantasía la facultad espiritual
de mayor alcance para la percepción de lo inaccesible á nuestros sen-
tidos, y para relacionar los datos inconexos de la mera observa-
ción», y más adelante añade que: «la euritmia de las construcciones
científicas es obra de las hipótesis, de las imágenes compuestas por
la fantasía para satisfacer exigencias del razonamiento».

y encontrarán, además, que carece en muchos puntos de la precisión y del rigor exigibles.

Los sociólogos pensarán que sobra toda la armazón matemática que viene de la *Mecánica racional*; y que, además de no servir á su juicio para el caso, embrolla las cuestiones que ellos estudian por otros procedimientos que estiman más adecuados. Y los simples aficionados á leer trabajos sobre esta clase de estudios estimarán fundadamente que estos *Apuntes* son oscuros é indigestos, porque no he sabido manejar el estilo que se debe de usar para la vulgarización científica.

Perdóneseme no haber podido satisfacer, como era de desear, á uno siquiera de esos grupos de lectores.

IDEAS PRELIMINARES.—DEFINICIONES HIPÓTESIS

I

Mirando cada Sociedad como un todo constituido por individuos y colecciones parciales de individuos, enlazados unos y otras entre sí por modos determinados, se nota que hay estrechas relaciones entre lo científico, lo artístico, lo económico, lo jurídico, lo político, lo religioso, lo moral, etcétera; y es natural que así sea, porque todos estos diversos géneros de asuntos de carácter social se dan simultáneamente en su psiquis colectiva, que es como una síntesis de las psiquis individuales. En cada individuo esos distintos géneros de asuntos están asimismo relacionados entre sí, al darse simultáneamente en su psiquis individual.

En los individuos de cada especie animal hay una psiquis, que es específica; y casi todas las especies animales viven

en agrupaciones de individuos, influyendo en ellas fuerzas psíquicas, lo mismo que en las agrupaciones de hombres. Pero siendo la especie humana la que ofrece el mayor desarrollo de tales fuerzas (al actuar como fuerzas sociales), nos referimos á las agrupaciones humanas en todo lo que hayamos de decir sobre la *Mecánica social* (*).

Para el estudio pura y exclusivamente mecánico, es indiferente que todos los asuntos de carácter social se deriven ó no de lo económico, y que éste ú otro cualquiera sea ó no sea el hecho social primitivo, porque estas cuestiones de principios, que podrán ser muy interesantes para la Sociología, carecen de importancia para nosotros, según veremos. Al tratar del aspecto mecánico en cada determinado asunto social, éste puede ser *uno cualquiera* de los diversos asuntos que hemos dicho.

A cada ciencia social particular corresponde la investigación de las leyes á que puedan obedecer los individuos y las agrupaciones sociales con respecto á un género dado de

(*) Por los estudios biológicos se ha podido establecer, como ley general, que los individuos de las especies animales cuya vida activa ha de ser regida casi exclusivamente por los instintos heredados, pueden, casi desde que nacen, vivir por sí mismos; y que los individuos de las especies que durante su vida han de ir adquiriendo conocimientos, nuevos hábitos, etc., nacen, por el contrario, imposibilitados de vivir por sí mismos; y así lo están por mucho tiempo.

La capacidad para aprender es mínima en los insectos (que están en el primer caso) y llega á un máximo en el hombre (que está en el segundo caso). En el hombre no es lo más importante quizás la pura herencia natural, sino todo lo que va adquiriendo en la experiencia, y mediante la acción de las fuerzas psíquicas de que hablaremos más adelante. Por esto, dice el psicólogo americano Baldwin, la conciencia se da en el hombre en su forma más elevada, porque para lograr el aprendizaje ó la modificación, se produce en el niño una atención sostenida con esfuerzos repetidos. Para ello la materia gris del cerebro del hombre es muy inestable y muy plástica; y en su organización sucesiva durante la vida se va registrando, por decirlo así, todo lo adquirido por los esfuerzos y las experiencias; pero este orden de consideraciones es ajeno á nuestro propósito.

asuntos, que sea el particular objeto de ella; pero puede haber una ciencia más general y comprensiva, que tenga por misión investigar las leyes generales por las cuales se rijan los movimientos de modificación de individuos y agrupaciones, bajo la acción de las fuerzas psíquicas, y *cualquiera que sea* el asunto que se considere (*).

Con esta generalidad concebimos nosotros la *Mecánica social* como una rama de la Sociología abstracta.

Muchos sociólogos encuentran tales semejanzas y tantos caracteres comunes entre las agrupaciones sociales psíquicamente consideradas, y los organismos animales, — particularmente el cuerpo humano (que es el organismo más perfecto), — que para el estudio de su estructura, de su fisiología y de su vida, no vacilan en mirar las agrupaciones sociales como organismos naturales, y en analizar así el proceso de su desenvolvimiento y de su vida. Algunos como Lilienfeld llegaron hasta decir que dicha analogía no debía de concebirse en un sentido figurado, sino perfectamente real; aunque después este sociólogo abandonó esa extravagante posición intelectual. Otros, como D. Francisco Ginner, piensan que el organismo social no es fisiológico, sino psicofísico. Pero todo ese estudio de los órganos, de sus funciones, de sus relaciones mutuas y de sus relaciones con todo el ser de la agrupación social, etc., es enteramente ajeno á lo que nosotros intentamos tratar en estos *Apuntes*.

Así como es posible hacer abstracción de la complejidad orgánica del cuerpo de un animal, considerarlo simplemente como un sistema de puntos materiales y verle sometido, por la acción de fuerzas físicas, á las leyes de la *Mecánica* para su equilibrio ó su movimiento en el espacio (aunque á

(*) El Profesor Simmel dice que las leyes de la asociación en general podrán ser descubiertas, si se ve lo que haya de común en las diversas asociaciones humanas que existan con fines especiales, ya económicos, ya religiosos, ya políticos, etc. etc.

veces aparezca lo contrario), así también parece posible hacer abstracción de la disposición orgánica que haya en una agrupación social como ser vivo, de la manera como cada órgano desempeñe su función sirviendo al fin común del organismo todo (por el principio de la división del trabajo), etcétera; prescindir — en una palabra — de lo que se relacione con la vida de la agrupación social y con las leyes biológicas, para considerarla como un sistema de individuos y de colecciones parciales de individuos, sobre los cuales se ejerzan influencias de naturaleza psíquica, que actúen como fuerzas, é intentar — *sobre convenciones especiales* — la aplicación de los Principios y Teoremas de la *Mecánica racional*. En este estudio, puramente mecánico, no interesa ya todo aquello, que será objeto de las ciencias sociales particulares apoyadas en la Sociología; lo mismo que en el estudio mecánico del cuerpo de un animal no interesa lo que se refiere á su organización para la vida que es el objeto propio de las ciencias llamadas naturales, incluyendo en éstas la Psicología.

Sea de esto lo que fuere, — y volviendo á lo que decíamos — se observa que así en los individuos como en las agrupaciones sociales, cada uno de aquellos géneros de asuntos de carácter social es *influido* por todos los otros, y *refluje* á su vez sobre todos ellos, con lo cual se revela la solidaridad en lo psíquico, así individual como colectivo. Pero para el estudio, habremos de considerar solamente *un determinado asunto*, sea científico, económico, político ó religioso, etc., para ver, respecto de ese solo asunto, lo que puede haber de mecánico, es decir, intentar la aplicación de las leyes de la Mecánica al *equilibrio ó movimiento en ese asunto*, de los individuos y de las agrupaciones sociales.

Aunque en cada hecho social se den conjuntamente todos ó casi todos los géneros de asuntos, penetrándose mutuamente, consideramos indispensable mirar por abstracción el hecho bajo uno solo de sus aspectos sociales (uno cualquie-

ra), porque la complicación sería enorme si se intentara aplicar las leyes mecánicas al hecho social en toda su complejidad. Conviene no olvidar, sin embargo, que cada aspecto es influido—como decíamos—por todos los demás.

Habremos de considerar á los hombres en su aspecto individual, y bajo el aspecto de agrupaciones sociales, tales como se nos presentan hoy en las sociedades civilizadas, sin entrar en consideraciones sobre origen, historia, etc., que son cuestiones sociológicas extrañas al estudio que intentamos hacer.

Al pensar en el ser colectivo de una agrupación social dada, notamos que, aunque los individuos y los elementos sociales constitutivos de ella se renuevan, como se renuevan ciertas partes constitutivas del organismo de un animal, de tal modo que en el transcurso de algún tiempo todas esas partes han cambiado; notaremos, digo, que hay otras cosas fundamentales en la agrupación, como ser vivo, que permanece á través de todos esos cambios realizados. Este punto de vista, muy interesante para la Sociología, no ha de ser tampoco tomado en cuenta aquí, porque nos alejaría demasiado de las leyes puramente mecánicas.

Cuando hablemos de *agrupación social* entenderemos siempre referirnos á una entidad constituida por individuos y por colecciones parciales de individuos, enlazados unos y otras entre sí por modos bien definidos para todos los asuntos de carácter social. Así serán para nosotros agrupaciones sociales de grados sucesivos: la familia, el municipio, la provincia ó región, la nación (*). Quizá podrían ser consideradas también como agrupaciones sociales la raza y la humanidad.

*
* *

(*) Estas son las que D. Gumersindo Azcárate denomina *personas sociales totales*. No adoptamos esta denominación, por ser nuestro estudio exclusivamente mecánico; y ser, por tanto, ajeno, en cierto modo, al concepto de persona.

Antes de definir lo que entendemos por *movimiento en un asunto* de carácter social, empecemos por notar que en un instante dado hay en cada individuo un conjunto psíquico de ideas, conocimientos, sentimientos, hábitos, cierto temple de voluntad para la acción, etc., *en ese asunto* de que tratemos; y que en todo esto, aunque no bien definido, domina alguna especie de homogeneidad, que dimana del asunto mismo á que se refiere lo psíquico, considerado en aquel conjunto (*). Así también en un instante dado hay en toda agrupación social un conjunto de instituciones establecidas, de conocimientos, de arte adquirido; hay un cierto sentido ético, etc., y todo ello, en relación á *un mismo asunto*, lo podemos mirar, aunque algo vagamente, como un conjunto, en el cual reina también, en cierto modo, alguna homogeneidad.

A fin de poder conservar las proposiciones de la *Mecánica racional* con los mismos términos que ésta emplea, daremos á las palabras *posición en un asunto* de un individuo ó de una agrupación social un significado que corresponda á algo análogo á la *posición en el espacio* de un punto ó de un sistema de puntos. Llamaremos *posición en un asunto* de un individuo ó agrupación *en un instante* dado: *el conjunto de todo lo psíquico que haya, de cualquier modo que sea, en ese instante en el individuo ó en la agrupación y que se refiera al asunto*.

Atentos solamente á la aplicación teórica que vamos á intentar, prescindimos de aquilatar la mayor ó menor propiedad de esa denominación. Siento no encontrar otra palabra más apropiada que la palabra *posición* para expresar lo que quiero indicar. La palabra *estado* corresponde en Mecá-

(*) Dice Durkheim que esas notas psíquicas tienen un cierto valor de hechos sociales, en tanto cuanto los demás hombres con quienes ha convivido el individuo hayan influido en ellas. Esto ahora no nos interesa, aunque más adelante habremos de considerarlo.

nica, no sólo á eso que hemos llamado posición, sino también á lo que llamaremos *velocidad*; por esto diremos más adelante *estado de reposo*, para significar que un individuo tiene velocidad nula, cualquiera que sea su posición en un asunto en un instante dado. El *estado de movimiento* requiere—para ser algo bien definido—no sólo el conocimiento de lo que hemos llamado posición, sino además el conocimiento de la velocidad en el mismo instante. Esto se aclarará más adelante.

Si en un asunto del género científico, por ejemplo, consideramos á un individuo de los que se ocupan en él, diremos que tiene ese individuo, en un instante dado, su determinada *posición en el asunto*, que se manifiesta:

Por sus conocimientos é ideas actuales sobre el asunto;

Por su hábito (con valor actual) de mirarlo de cierto modo;

Por los sentimientos que en él acompañan actualmente á esos conocimientos y hábitos;

Por el tono actual de su voluntad, etc.

Respecto de un asunto de cualquier otro género—político, jurídico, económico, religioso, moral, artístico, pedagógico, etcétera, podría decirse lo mismo, tratando de un individuo (*).

(*) Respecto de la definición que hemos dado de la *posición en un asunto* del individuo, debemos de hacer notar que lo que haya en el individuo en un instante cualquiera puede estar: ó bien en la conciencia (que es lo estrictamente psíquico), ó bien sumergido en el fondo insondable de lo inconsciente ó subconsciente. Pero como á juicio de los psicólogos más eminentes lo inconsciente tiene su valor tan real y efectivo como lo consciente, debe de quedar incluido en lo que hemos llamado *posición del individuo en un asunto*; y es más fundamental—como indica Maudsley—que lo que haya en los estados de conciencia, y sea por esto estrictamente psíquico. Al considerar, pues, la posición en un asunto del individuo se ve que es en realidad en un instante dado, lo mismo que la abstracción mental que (según Maudsley) llamamos nuestro *yo en ese instante*; que es: «una combi-

Si como caso particular de agrupación social se piensa en una nación, y se la considera en un asunto del género político, por ejemplo, diremos, igualmente: que en un instante dado esa nación tiene su determinada *posición en el asunto*, y que está expresada por todo el conjunto psíquico anteriormente expuesto de ideas, sentimientos, aspiraciones, etc., de todos y cada uno de los individuos, así como de todos y cada uno de los elementos sociales de que hablaremos más adelante—y que enlazados entre sí y con los individuos constituyen la agrupación nacional. — Se entiende que esas ideas, deseos, sentimientos, etc., han de referirse al asunto político de que se trate.

La diferencia entre lo que llamamos aquí *posición en un asunto* de un individuo y la de un punto geométrico en el espacio, estriba en que ésta es simple—por decirlo así—mientras que aquélla es compuesta, porque comprende todo lo psíquico que, en relación al asunto, haya en el individuo en un instante dado; y consta, por tanto, de muy variados componentes (*). Podemos, sin embargo, concebirla como *simbolizada* por la posición que un punto ocupa en el espacio en ese instante.

La misma diferencia se nota entre lo que hemos llamado *posición en un asunto* de una agrupación social en un instante, y la de un sistema de puntos en el espacio. Aquella se refiere—como ésta—al conjunto de todos los individuos y de los varios elementos sociales que constituyan la agrupación; pero las posiciones en el asunto de estos individuos

nación que contiene todos los residuos de todos los pensamientos, de todos los sentimientos y de todas las voliciones precedentes, combinación que cambia continuamente .

Este cambio de la posición por ley de continuidad en el tiempo es lo que llamaré después *movimiento del individuo en un asunto*.

(*) No entramos en disquisiciones de Psicología acerca de esos componentes psíquicos, y usamos la palabra *compuesta* en el sentido vulgar y corriente del lenguaje ordinario.

y elementos es compuesta, como hemos dicho. La posición que un sistema de puntos ocupe en el espacio en un instante dado nos servirá—á pesar de esas diferencias—como *símbolo* de la posición en un asunto de una agrupación social en ese instante.

Claro es que cada punto con su posición en el espacio es el símbolo de un individuo ó elemento social con la suya en el asunto. Las posiciones simultáneas (en un instante dado) en el espacio de los diversos puntos que constituyen un sistema material son *meros símbolos geométricos* de las varias posiciones que — en ese instante — tienen en un asunto los individuos y los elementos sociales que constituyen la agrupación, toda vez que estas posiciones de que hablamos aquí son concebidas como compuestos psíquicos *ajenos al espacio* (*).

Si concibiéramos que la posición en un asunto de un individuo ó de una agrupación fuera invariable en el tiempo; es decir, que no tuviera cambio ó *modificación alguna* al transcurrir el tiempo, diríamos que ese individuo ó esa Sociedad se hallaría en *estado de reposo en el asunto considerado*.

A esta posición invariable *correspondería* un *determinado* modo de pensar, de sentir y de proceder en el asunto que se considera, y ese determinado modo no se modificaría, sería constante en el tiempo.

Si, por el contrario, la posición en el asunto cambia con el tiempo, es decir, que se modifica por ley de continuidad al transcurrir el tiempo (por ley de continuidad también), diremos que el individuo ó la agrupación social se halla en *estado de movimiento en el asunto*, socialmente hablando. Esta palabra movimiento expresará, pues, para nosotros aquí, que hay modificación ó cambio en la *posición* del indi-

(*) Definiremos más adelante lo que entendemos, en general, por *elementos sociales*; y diremos cómo concebimos que podrían ser simbolizados geoméricamente por puntos.

viduo ó de la sociedad dentro del asunto á que nos referimos; y á este cambio corresponderán modificaciones en la manera de pensar, de sentir y de proceder.

Fijando la atención en un solo individuo — para simplificar —, y concibiéndolo en movimiento en un asunto, hemos de pensar que, á partir de un instante dado, el movimiento de modificación se efectúa en una cierta y determinada *dirección y sentido*; y esta noción adquirida por la experiencia *corresponderá* en la representación geométrica á una dirección y sentido, cuando un punto se mueve en el espacio. Para explicar el significado que damos aquí á las palabras *dirección y sentido* — hablando de lo psíquico —, podemos decir que entre las innumerables orientaciones posibles de modificación, á partir de una posición dada, la modificación que se efectúa ó que se realiza, tiene una determinada orientación (entre esas infinitas posibles), y ésta es la que llamamos *dirección del movimiento en el asunto*.

Y así como en cada una de estas direcciones en el espacio hay los dos sentidos opuestos; y que para definir el elemento de trayectoria de un punto es preciso decir en cuál de los dos sentidos es este elemento de trayectoria, así también, para definir un determinado *movimiento elemental* — en lo psíquico — se debe de decir en *cuál* de los dos sentidos opuestos se efectúa, puesto que la dirección sola en el asunto no basta para determinar cuál sea ese movimiento elemental.

A fin de aclarar esto con un ejemplo, veamos al individuo en lo religioso. Su posición en este género de asuntos se compone, en un instante dado, de un conjunto de ideas (verdaderas ó falsas) que, sentidas de cierto modo, ó, mejor dicho, que unidas á ciertos sentimientos religiosos (que las mismas representaciones ideales pueden provocar) y que dependen del estado general del organismo, llegan á producir actos religiosos voluntarios que el individuo realiza. Pues bien; si todo este conjunto psíquico y también lo inconsciente — en el cual hay cierta homogeneidad — permaneciera

inalterable al transcurrir el tiempo, ese individuo, en lo religioso, *estaría en reposo*, puesto que su posición religiosa no cambiaría en el tiempo (*).

Pero si por influencias psíquicas cualesquiera, directas ó indirectas, de origen interno ó externo (lo cual ahora no nos interesa), se ejerce sobre el individuo acciones que obren como fuerzas, y suponemos que éstas modifiquen, ya sus ideas ó sus conocimientos, ya sus sentimientos ó voliciones, etc., es decir, que modifiquen su posición religiosa, empleando en ello un cierto tiempo, veremos á ese individuo *en movimiento religioso* á partir de la posición inicial. El cambio muy pequeño que se realice en un transcurso muy pequeño de tiempo, tendrá una determinada dirección, verbigracia, conocimiento adquirido (que no tenía) sobre la intervención ó no intervención directa (en todos los sucesos) del Dios en que él crea. Ese movimiento elemental en esa *determinada dirección*, puede ser en el *sentido* del providencialismo ó en el sentido contrario. Otro individuo en estado de movimiento religioso también, podría moverse en otra dirección, por ejemplo, modificando sus ideas ó sentimientos sobre las relaciones del sacerdote con los fieles para determinados actos. En esta dirección determinada caben los dos sentidos opuestos, á saber: afirmarla ó negarla, estrecharla (haciéndola más íntima) ó aflojarla.

Si pensamos—no ya en un simple individuo—sino en una agrupación social que se halle *en estado de movimiento*, veamos cómo se podría definir este estado á partir de una posición dada en un asunto. Para ello veamos el movimiento ó cambio que se realice en un intervalo muy pequeño de tiempo, lo que llamaremos el movimiento elemental.

Primeramente veamos la agrupación como constituída por

(*) Este supuesto no se ofrece generalmente en los individuos que viven en las sociedades modernas civilizadas, *con vida efectiva* dentro de ellas.

individuos. En la Mecánica de los sistemas materiales, los cuerpos son considerados en general como constituídos por partículas suficientemente pequeñas para que el movimiento de cada partícula sea *único*, es decir, para que sus partes (si las tuviera) tengan todas el mismo *único movimiento* en cada instante: pero como es imposible decir cuál debe ser el grado de pequeñez que se requiere para eso, se corta la dificultad en la Mecánica racional, tratando la partícula como un *punto geométrico materializado* (doble abstracción), que se llama *el punto material*. En la *Mecánica social* parece legítima la asimilación del individuo al punto material, toda vez que su movimiento en un asunto es único en un instante dado. El individuo *abstracto é ideal* que concebiremos, es (bajo este aspecto) tan indivisible, como lo es el punto material en la Mecánica racional. (Sobre esto ya hablaremos más adelante, en la *Primera parte de la Dinámica*). Y así, para los estudios mecánicos, miramos toda agrupación social como constituida por individuos.

Pero, además, cuando la agrupación social que se considere sea de un grado de complejidad mayor que el de la familia (primer grado), ya aparecen en su constitución, no sólo los individuos, sino también las varias colecciones de individuos, que—dentro de la agrupación total—designaremos con el nombre genérico de *elementos sociales*.

Importa explicar desde ahora lo que habremos de entender por *elementos sociales* en general, cuando los consideremos como constitutivos de una agrupación, juntamente con los individuos: éstos conservarán siempre para nosotros su propia individualidad, no como miembros de ésta ó aquella colección parcial, sino como miembros de la agrupación, vista en su *totalidad*. Cuando hayamos de intentar la aplicación de los Teoremas de la Mecánica racional á una agrupación social mirada como *sistema de individuos y elementos sociales*, será necesario además considerar definido el sistema—como tal—por todos los *enlaces* (como se dice en Mecánica) que

haya de los individuos entre sí, de los elementos entre sí ó de los individuos con los elementos.

Los enlaces son los que ponen en relación los individuos y elementos, estableciendo cierta coordinación entre ellos. Determinan, por decirlo así, la constitución social particular de una agrupación dada. Es difícilísimo (por no decir imposible), llegar á conocer detalladamente las acciones mutuas interiores que *directamente* se ejercen entre unos y otros individuos y elementos de una agrupación, así como las que *indirectamente* resulten actuando entre ellos, por intermedio de los enlaces. Ya veremos en la *Segunda parte de la Dinámica*, que si estas últimas fuerzas interiores que provienen de los enlaces, no pueden ser determinadas particularmente; se podría, sí, hallar por el teorema de d'Alembert, un conjunto de fuerzas interiores que, para cada individuo y para cada elemento social, fuera equivalente á las de los enlaces, refiriéndonos siempre al asunto social de que se trate. No es posible desenvolver esta idea aquí en los *Preliminares*.

Veamos las agrupaciones sociales de diversos grados. En la de primer grado (que es la familia) se ve la agrupación constituída simplemente por individuos, y éstos enlazados entre sí. Los enlaces que en cada pueblo y en cada época de su historia ligan entre sí á los individuos de una familia, pueden ser muy varios y de carácter jurídico, económico, moral ó religioso. El estudio de esto corresponde á los historiadores, á los juristas y á los sociólogos; y su conocimiento sería indispensable para una Mecánica social práctica. No pudiendo ni siquiera aspirar á un bosquejo de ésta, nos basta, para nuestras simples especulaciones abstractas, concebir, como antes, la existencia de los enlaces. Téngase por hecha, de una vez para todas, esta indicación respecto de los enlaces más complicados en las agrupaciones de grado superior (*).

(*) Sobre los enlaces sociales ha hecho el profesor Durkheim

En el Municipio como agrupación de segundo grado (*), encontramos los individuos—las familias—y una multitud de otras colecciones de individuos organizadas para diversos fines sociales. Dentro de la agrupación municipal serán para nosotros *elementos sociales* las familias y todas estas colecciones.

Supondremos que todos y cada uno de los elementos se puedan simbolizar por centros que respectivamente los representen; y así lo pensaremos para cada familia y para cada centro ó asociación científica, artística ó profesional; y para las que se llaman Cámaras de Comercio, Agrícolas ó Industriales; y para las Asociaciones filantrópicas, religiosas y de templanza; y para las Asociaciones de obreros y las patronales; y para las representaciones de los partidos políticos, etc., etc.

Claro es que para esta individualización—como si dijéramos—de los elementos sociales, se requiere que todos los individuos que los formen tengan algunas notas comunes en relación con el asunto que se considere; y además, y muy principalmente, que haya principios de coordinación que establezcan la *constitución* del elemento mismo, para que sea posible conocer en cada instante *la posición en el asunto* de cada colección, por los procedimientos adecuados (para cada una), según las relaciones que liguen entre sí á los miembros de ella. Así puede concebirse individualizado cada elemento social, dentro de la agrupación total.

Se entiende—ya lo indicamos antes—que aunque un individuo forme parte de varios elementos sociales, conserva

múltiples y atinadas observaciones en su libro sobre la *División del trabajo social*.

(*) Hablamos de Municipio—como hablaremos de provincia ó región y de nación—no en el sentido de subdivisión para fines políticos y administrativos en general, sino en el más amplio sentido de *agrupación social*.

siempre su ser, como miembro de la agrupación en su totalidad; y por eso decimos que ésta se halla constituida por individuos y elementos sociales. Es claro que cada individuo, como parte integrante de un elemento, no aparece en la agrupación social, porque queda como fundido en el centro que simboliza el elemento.

En cuanto á los enlaces, debemos de repetir lo que ya dijimos, á saber: que cada agrupación municipal se definirá por los enlaces que se hallen establecidos de los individuos entre sí—elementos entre sí—é individuos con elementos (*), y serán enlaces de muy varios géneros. Nos basta hacer constar su existencia y tener presente que pueden experimentar modificaciones en el tiempo cuando se considere una agrupación dada.

Si de los Municipios pasáramos á las Provincias ó Regiones,— y de éstas á las Naciones — considerándolas como agrupaciones sociales de 3.º y 4.º grado, figurarían como elementos de las primeras los municipios, representados por centros simbólicos para individualizarlos; y como elementos de las segundas las Provincias ó Regiones, análogamente individualizadas dentro de las Naciones. Pero además aparecerán en las primeras nuevos elementos sociales de carácter provincial ó regional, que pueden ser de naturaleza muy varia; que estarán enlazados entre sí, y con los Municipios é individuos, como éstos lo estarán á su vez unos con otros y entre sí; entendiendo que aquí los individuos han de ser considerados como miembros de la Región mirada en su totalidad.

Lo mismo podríamos decir de las Naciones, en las cuales habrá elementos sociales de carácter nacional muy variados, enlazados entre sí y con las Regiones é individuos. En éstos,

(*) No se habla ahora de los enlaces ó relaciones internas de los individuos de una misma colección. Ya dijimos que estos enlaces sirven para individualizar cada colectividad.

como se indicó antes, sólo hemos de ver ya miembros ó ciudadanos de la Nación (*).

* * *

Para dar ahora idea de lo que entendemos por movimiento de una agrupación social cualquiera en un asunto, recordemos que su posición en un instante se simboliza por la posición en el espacio de un sistema de puntos. La agrupación, por tanto, podrá ser concebida en estado de reposo ó en estado de movimiento—socialmente hablando—, según el estado de reposo ó de movimiento en que se hallen en

(*) Terminamos ya estas ligeras indicaciones. No nos incumbe examinar lo que haya de ser la representación de una agrupación cualquiera en su totalidad. Si eso es el *Estado* de esa agrupación, no hemos de entrar en su estudio, porque no nos interesa especialmente.

Ya hemos dicho que para el estudio mecánico de una agrupación sólo habremos de considerar en ella individuos y elementos sociales, sean éstos cualesquiera.

A los políticos y juristas y sociólogos corresponde la clasificación y examen de todos y cada uno de los elementos sociales, estudiando el modo interno de ser constituido cada elemento social (su esfera privada, como se dice), y los modos de enlace con el resto de la agrupación. Los enlaces pueden ser de esta ó de aquella naturaleza, más ó menos íntimos, más ó menos bien dispuestos, etc. Todo esto, así como las transformaciones—por evolución ó por revolución—de los elementos, y la aparición de unos elementos y desaparición de otros en el transcurso de la vida de una agrupación social, etc., así como la aparición, desaparición ó modificación de los enlaces, son cuestiones enteramente ajenas á nuestro estudio, aunque los sociólogos las llaman dinámicas.

Se comprende bien que el número de los enlaces entre los individuos y los elementos sociales de una agrupación, y el modo de ser de dichos enlaces dependerán, no sólo del número de individuos y elementos, sino principalmente de su modo de vivir en sociedad. Por esos enlaces—que definen una agrupación dada—es que se determinan los efectos que las fuerzas psíquicas sociales hayan de producir sobre los individuos y elementos que constituyan la agrupación, según veremos más adelante en la *Dinámica Social*.

ese instante sus *individuos* y *elementos* constitutivos. Diremos, pues, que se define el movimiento elemental de una agrupación por el conjunto de cambios muy pequeños que experimenten *las posiciones en el asunto* de todos sus individuos y elementos sociales en un intervalo muy pequeño de tiempo; cada uno de los movimientos elementales de los individuos y elementos se define, según hemos explicado, por su dirección y sentido particular.

Si se considera una Nación como ejemplo de agrupación social, y se trata de lo político, por ejemplo, se ve que la posición política de la nación en un instante está dada por las posiciones políticas en ese instante de *todos* sus individuos y de *todos* sus elementos sociales. Si se concibiera que este complejo conjunto de *posiciones* (con la significación convenida) no cambiara en el tiempo, diríamos que esa nación *estaría en reposo* en lo político. Pero la realidad no es así en general, porque un inmenso número de influencias (para fines políticos) ejercen acciones psíquicas sobre los individuos y sobre los varios elementos sociales, y estas fuerzas sociales modifican lo que hemos llamado *la posición y el estado político* de la Nación. En esta modificación elemental (que es un conjunto de modificaciones elementales) estriba el movimiento político ó el cambio elemental del estado político de la nación en el instante que se considera.

Expuesto ya cómo entendemos *el movimiento* de un individuo ó el de una agrupación *en un asunto*, diremos que la *Cinemática social* es, para nosotros, la ciencia que estudia los movimientos *en sí mismos*, haciendo abstracción de las causas que los producen — es decir, de las fuerzas sociales — para tener sólo en cuenta *los cambios de posición en el asunto, y el tiempo* en que se operan esos cambios. Cuando se haya de estudiar la influencia de las fuerzas psíquicas que como fuerzas sociales actúen, ya sobre un individuo abstractamente mirado como aislado, ya sobre los individuos y los elementos de una agrupación, se presentarán dos casos:

1.º Que los efectos de las fuerzas se contrarresten unos por otros, de tal modo, que el estado en el asunto del individuo ó de la agrupación no cambie, es decir, que no se produzca modificación efectiva alguna, á pesar de las acciones ejercidas como presiones ó tensiones por las fuerzas. En tal caso, diremos que el individuo ó la agrupación *está en equilibrio en el asunto*, ó bien diremos que *las fuerzas sociales se equilibran* en el individuo ó en la agrupación. El estudio de las leyes que rijan este equilibrio será para nosotros el de la *Estática social*. Se comprende que las presiones ó tensiones que se equilibren deberán de tener magnitudes, direcciones y sentidos que estén en ciertas relaciones mutuas. Tales fuerzas no obran sino *estáticamente*; no realizan, por tanto, *trabajos efectivos*, ni dan *impulsiones*.

2.º Que las fuerzas que actúen produzcan un cambio efectivo para el estado en el asunto del individuo ó de la agrupación; es decir, que la influencia de las acciones de las fuerzas se realice, ó bien haciendo pasar al individuo ó á la agrupación del estado de reposo al de movimiento, ó bien si el individuo ó la agrupación se encontraban en estado de movimiento en el instante en que empezaron á actuar las fuerzas, que el movimiento continuara de modo distinto de como hubiera continuado sin esas influencias. En uno y otro caso diremos que el efecto de esas fuerzas sociales ha sido *dinámico*. El estudio de las leyes á que obedezcan estos cambios reales y efectivos de estado en un asunto, de los individuos y las agrupaciones sociales, bajo la acción de las fuerzas psíquicas que actúen, de modo continuo, durante un transcurso cualquiera de tiempo, constituye la *Dinámica social*, en la cual habrá que apreciar ya las *impulsiones* y los *trabajos* de las fuerzas, como veremos más adelante.

Así, pues:

—En la *Cinemática* sólo intervendrán las *posiciones variables en un asunto* de individuos ó agrupaciones, y el *tiempo*.

—En la *Estática* sólo las *posiciones actuales en un asunto*, y las *fuerzas*.

—En la *Dinámica* hay que considerarlo todo, á saber: *posiciones en el asunto, tiempo, fuerzas*, y lo que llamaremos *masas*. Es ya la *Mecánica social* propiamente dicha.

Nótese que la *Estática* y la *Dinámica* tienen para nosotros una significación exclusivamente mecánica, porque tomamos las palabras en su sentido estricto, como dijimos en la *Introducción*. Los sociólogos —pasando por encima del aspecto mecánico, ó desconociéndolo— dan á esas palabras un sentido muy amplio, para poder tratar en la *Estática* de *todos los fenómenos sociales*, que se muestran, por decirlo así, en el estado estático; y en la *Dinámica* de *todos los fenómenos* que se van desenvolviendo en el proceso evolutivo que acompaña—digámoslo así—á la acción dinámica de las fuerzas sociales. Como se ve, nuestro intento es mucho más modesto. Nos habremos de ceñir á la aplicación de las leyes del equilibrio y del movimiento, formuladas por la *Mecánica racional*, que es el terreno en que nos encerramos, y siempre dentro del círculo de las ideas generales que corresponden á un curso elemental.

Como veremos más adelante, los hechos sociales, como hechos naturales, aparecen — para nosotros — determinados por los hombres mismos, considerados ya individualmente, ya como miembros de elementos sociales, y teniendo en cuenta el ambiente físico y psíquico en que se hallen. Será indispensable, además, la consideración de los enlaces de individuos y elementos entre sí. De esta suerte—para el estudio mecánico—llegaremos á la entidad agrupación, pasando por los individuos y los elementos sociales.

Algunos sociólogos proceden inversamente, y ven á los individuos y elementos sociales á través de la agrupación que constituyen éstos. En nuestro modo de proceder *para el estudio* no se desconocerá, sin embargo, que los individuos y elementos—tales y como aparezcan en un instante dado—

pueden ser, y son en último análisis, un producto de la evolución de la sociedad misma de que se trate.

Todo lo que haya en el interior de cada individuo ó elemento social—sea físico ó psíquico—actúa directamente sobre él mismo y sobre los otros; y lo que haya difuso, por decirlo así, en el medio ambiente (aunque al fin y al cabo en los individuos) obra sobre todos, como proviniendo del conjunto de la agrupación misma, vista en su totalidad. Esta última influencia, muy compleja, proviene de algo que aparece como resultado de toda la vida anterior de la agrupación en cada asunto de carácter social; y será para nosotros equivalente, en cada caso, á una fuerza que actúe sobre los individuos y elementos. Esta fuerza, que proviene del ambiente, es lo que generalmente se denomina *la acción social*; y emana—como se ve—de algo que esté en la conciencia pública. Cuando ésta es bien conocida, se puede estimar la dirección y el sentido de la fuerza y su intensidad. En unos asuntos podría ser muy pequeña ó nula la acción de dicha fuerza, y en otros intensísima.

Se comprende bien que sólo por abstracción se puede considerar una sociedad como entidad aislada de los individuos y elementos que la constituyen; y sólo por abstracción también podremos considerar al individuo aisladamente, porque siempre es, en realidad, miembro de una agrupación social. Una y otra abstracción son—á mi modo de ver—legítimas *para el estudio*, según que se quiera fijar la atención sobre los fenómenos generales que se dan en las agrupaciones ó sobre los fenómenos individuales particulares; pero siempre sin olvidar que las agrupaciones están constituidas por individuos y elementos sociales, ó que los individuos viven en las agrupaciones. Como dice muy acertadamente el Profesor Cooley, una vista *completa* de una Sociedad sería también una vista completa de todos los individuos, y *viceversa*. Este distinguido Profesor americano considera que las agrupaciones sociales hacen á los indivi-

duos tanto como éstos hacen á aquéllas; porque no hay, dice, ninguna razón para mirar el aspecto individual de la vida como anterior ni como causa con relación al aspecto colectivo. La sociedad—según él—debe de ser mirada como un todo vital; y así pensada, es tan primaria y tan causal como puedan serlo los individuos. Pero los fenómenos generales ó sociales no son algo separado y como contrapuesto á los individuos, toda vez que el individuo y la sociedad no son más que aspectos de *una misma causa*, la cual—como dice Cooley—se desenvuelve por una serie de fenómenos, y va *toda ella* de unos tipos á otros más elevados, más complejos.

Cuando hayamos de tratar del equilibrio y del movimiento de una agrupación social, consideraremos este objeto de estudio, del mismo modo que la *Mecánica racional* considera un sistema de puntos. Para uno ú otro estudio, los enlaces definen—por decirlo así—el objeto, que es el sistema ó la agrupación; como entidad.

Las leyes generales y abstractas del equilibrio y del movimiento á que obedecen con regularidad los sistemas de puntos materiales entre los cuales median enlaces, nos conducirán á formular leyes generales y abstractas también á las cuales puedan obedecer con la misma regularidad las agrupaciones de individuos y elementos sociales entre los cuales median enlaces, ya sean leyes de equilibrio, ya de movimiento.

El verdadero problema general de la Mecánica es el de la Dinámica de los sistemas ó agrupaciones. Así como en la *Mecánica racional* se puede teóricamente predecir para cada instante futuro las posiciones y las velocidades de los puntos de un sistema *bien definido*, si son dadas *todas las fuerzas* que actúan, y es dado el *estado inicial* del sistema; así también parece que el día en que se pudiera tener constituida científicamente la *Dinámica social*, se podría llegar á aquel resultado para las posiciones y velocidades (en un

asunto social) de los individuos y elementos de una agrupación *bien definida*, con los datos indispensables de *fuerzas* y el conocimiento del *estado inicial*. Es claro además que las tensiones dinámicas de los enlaces sociales deberán de obedecer á las leyes formuladas por la Dinámica de los sistemas materiales, como veremos en lugar oportuno (*).

(Continuará.)

(*) *Schaeffle* dice que respecto de una agrupación social dada se puede predecir de un modo enteramente cierto como haya de conducirse respecto de un problema económico, político, artístico ó religioso.

Esta indicación de *Schaeffle* corresponde bien á lo que hemos apuntado; porque decir *una agrupación social dada*, equivale á decir que se conocen bien los individuos y los elementos sociales, así como los enlaces que definen la agrupación de que se trata; y también el estado inicial en que se encuentre esta agrupación respecto del asunto que se considere. Y al decir *un problema*, se refiere quizá *Schaeffle*—así parece—al conjunto de fuerzas así exteriores como interiores que, en relación con el asunto, actúen sobre la agrupación.

VII. — Estudio acerca de la dunita platinífera de los Urales.

POR S. PIÑA DE RÚBIAS.

El objeto del presente trabajo es dar á conocer la composición química de la dunita, roca hiperbásica cuya constitución, muy semejante á la de varios meteoritos, presenta importancia excepcional. En efecto, se sabe, después de los trabajos de *Inostranzeff* (*), *Wyssotsky* (**) y particularmente del profesor *Duparc* (***), que es precisamente la

(*) *Gisement primaire de platine dans l'Oural. Mittheilung der Naturforschenden. Gesellschaft. St. Petersburg.*

(**) *Notice préliminaire sur les gisements de platine dans les bassins des rivières Yss, Wya, Toura, Niasma. Bulletin du Comité géologique de Russie, tome XXII.*

(***) 1902 y 1905 *Duparc et Pearce. Recherches géologiques et pétrographiques sur l'Oural du Nord. Mém. de la Soc. de physique Genève. Vol, 34.*

1903 *L. Duparc. Les gisements platinifères del l'Oural. Quatrième période, tome XV. Archives des sciences physiques et naturelles.*

1909 *L. Duparc. Les gisements platinifères et l'origine du platine. Archives des sciences physiques et naturelles. Geneve, Quatrième période, tome XXVII.*

1910 *L. Duparc. Note préliminaire sus quelques gisements curieux de platine de l'Oural Riv. Omontuaia. Laboratoire minéralogique de l'Institut polytechnique de Pétersbourg.*

1910 *L. Duparc et F. Pom fil, Sur la composition chimique et l'uniformité pétrographique des roches qui accompagnent la dunita dans les gisements platinifères. Bulletin de la Société minéralogique de France.*

1911 *L. Duparc et H. C. Holtz. Notiz über die chemische Zusammensetzung einiger Platinerze aus dem Ural. Tschernmales Mineralogische un petrographische Mittheilung.*

roca madre del platino, y se puede decir que la casi totalidad de los yacimientos platiníferos de los Urales tiénela por origen.

Recientemente *Duparc* ha demostrado que, aparte la dunita, existen otras rocas platiníferas, especialmente las piroxenitas; pero el caso debe considerarse excepción, y los yacimientos cuyo origen no sea la dunita, carecen de importancia desde el punto de vista práctico. La mayor parte del platino producido en el mundo (92 por 100), procede de los Urales y según puede verse más adelante, la mayor parte de dicho metal se obtiene de la dunita.

A pesar de ser una roca de importancia capital, es poco conocida, y, sobre todo, se ignoran las relaciones que existen entre ella y las diversas variedades de platino.

Siguiendo las indicaciones del profesor *Duparc*, de la Universidad de Ginebra, emprendí el estudio de tan interesante problema.

Emplazamiento de la dunita en los yacimientos platiníferos.

Resulta muy uniforme en los yacimientos primarios de los Urales, y puede resumirse, según *Duparc* (*), de la siguiente manera:

1.º Al centro un afloramiento macizo de dunita de forma vagamente elíptica. El eje mayor de la elipse está orientado en la dirección de la cordillera de los Urales.

2.º Alrededor, una faja más ó menos desarrollada de piroxenitas, acompañadas de rocas melanócratas con ellas relacionadas.

3.º Una zona periférica de rocas feldespáticas más leucó-

(*) 1911 *L. Duparc*. Le platine et les gites platinifères de l'Oural. Arch. des sciences phy. et naturells. Geneve, tome XXXI, mars, avril, mai et juin.

cratas denominadas comúnmente gabros, gabrodioritas, dioritas, etc.

Examinando sus relaciones recíprocas se ve que hay penetración de las unas en las otras; por ejemplo, de la dunita en la piroxenita.

El plano adjunto, debido á Wysotsky (y que puede considerarse prototipo en su clase) reproduce la disposición indicada (fig. 1.)

La dunita se halla de ordinario descompuesta superficialmente, llegando algunas veces á ser profunda su alteración, y entonces se desmenuza como el grés ferruginoso. Cuando la altura de la montaña sobrepasa el límite de la vegetación, el color de la dunita es rojizo debido á la descomposición indicada.

La topografía de los ouwals duniticos es muy característica y uniforme, las cimas son onduladas, sin crestas agudas, y ordinariamente cubiertas por bosques de pinos.

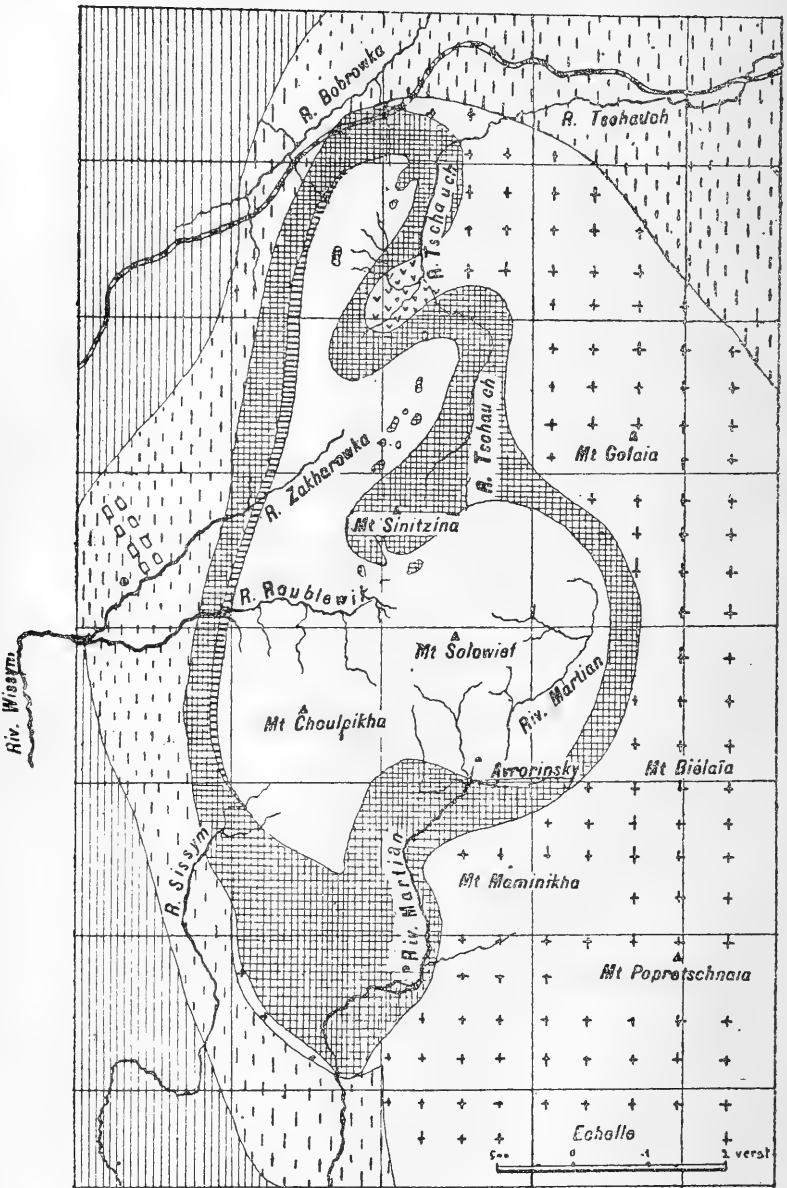
En las regiones muy alteradas la dunita se distingue siempre de la verdadera serpentina, cuya dureza es mayor y cuya pátina es también diferente; además, se erosiona de otra manera.

Es de notar que cuando la dunita está en relación con un macizo de rocas básicas (piroxenitas singularmente), no aflora nunca en el centro de éstas, sino en los bordes. Tal es el caso de los yacimientos del Iss que están situados en el borde occidental del gran macizo de Katchkanar.

Conocida la disposición de los yacimientos duniticos, vamos á describir ahora su situación en la cordillera de los Urales, descendiendo de Norte á Sur:

1.º Yacimiento de *Daneskin-Kamen* (*), situado en la orilla izquierda del riachuelo Soswa del Sur. Toman origen en este yacimiento los arroyos Soswa y sus afluentes platiníferos Solwa y Supreña.

(*) Este yacimiento fué estudiado por Lewinson-Lessing.



- | | |
|----------------|-------------------------------|
| Dunita. | Gabrodioritas, etc. |
| Piroxenitas. | Pizarras dinamo-metamorficas. |
| Tilaitas. | Pizarras cristalinas. |
| Serpentinatas. | |

Figura 1.

Carta geológica típica del centro platinífero de Taguil, según los Sres. Wyssotsky y Lavaritsky,

2.º Yacimiento de *Gladkaia-Sopka* (*), en la orilla izquierda del Wagran, en la Wagranskaya-Datcha, hacia el Oeste del pueblecillo de Baroaskve. Este yacimiento da origen al riachuelo platinífero Travianka afluente del Wagran.

3.º Yacimiento de *Tilai-Kanjahonwsky*, en el extremo Norte de la Pawdiuskaya-Datcha, próximo al monte Ostchy y al río Kalwa, posee este yacimiento dos placeres platiníferos: Jow y Paloudniewaïa, que se deslizan por la vertiente siberiana.

4.º Yacimientos de *Koswisky-Kamen* en la Pawdiuskaya y Rastenkaya-Datcha.

Los yacimientos son dos.

El primero se halla situado en la vertiente occidental del Koswinsky y constituye el *Sosnowsky-Ouwal*, del cual descienden los placeres platiníferos: Logwiuska, Malaïa y Balchaïa Sosnowka, afluentes del Tilai, situados todos en la vertiente europea de los Urales.

El segundo centro primario *Kitlim* está situado en la falda oriental del Kosvinsky y alimenta de platino á los aluviones del Kitlim que corre por la vertiente asiática, y probablemente á los de la ribera Malaïa-Koswa, afluente del gran Koswa, que desciende por la vertiente europea.

5.º Yacimiento de *Kaménouchky*, situado en la Pawdiuskaya-Datcha (50 kilómetros más al Sur que el anterior), con el Niasma y sus afluentes Kaménouchka y Kamenka, en la vertiente asiática.

6.º Yacimientos del *Iss*. Son dos: el primero, llamado *Waressowy-Ouwal*, está situado al Norte y en él nacen los placeres platiníferos Maloï y Balchoï Pokap, Malaïa y Balchaïa Prostokischenka y la Bererowka.

El segundo ó del Sur, *Swetli-bor*, que alimenta de platino á las vertientes Kossia é Iss. Esta última penetra en la parte

(*) Este y los siguientes yacimientos fueron descubiertos y estudiados por Duparc.

Norte de Swtli-bor y contiene platino durante el recorrido que hace por dicho yacimiento. Recibe como afluentes varios riachuelos ó lojoks, que proceden indistintamente de ambos centros duníticos, y es á su vez afluente del Toura, el mayor placer platinífero de los Urales que corre por la vertiente asiática.

7.º Yacimiento de *Taguil*. Es el más importante de los centros duníticos primarios; está situado en la Taguilskaya-Datcha y al Sur de los anteriores.

Los arroyos platiníferos á que da origen son: Martiau, Wissym y Syssym, afluentes de la Outka, en la vertiente europea. En la asiática el Tschauch, que desemboca en el lago Tschernoistotschnik.

8.º Yacimiento de *Omontnaia*, uno de los más pequeños, situado en la cordillera Sysserskaya-Datcha, al Sur de Ekaterineburg; provee de platino al placer de Omontnaia y á algunos lojoks afluentes del mismo.

Las diferentes rocas que se encuentran en la doble faja de piroxenita y gabros que circunscriben la región dunítica han sido ya estudiadas por *Duparc*.

Me he limitado, pues, á la dunita, y he analizado varias muestras procedentes de los yacimientos anteriormente citados, con el objeto de precisar:

1.º Si la composición química de la dunita es constante, ó si por el contrario varía notablemente de un yacimiento á otro.

2.º Si los minerales constitutivos de dicha dunita son de composición variable.

3.º Si existe una relación entre la composición de la dunita y la del platino que contiene. Además, como se indicará luego, aparte del platino, la dunita contiene segregaciones de diversos minerales, especialmente de cromita, habiéndome propuesto resolver el mismo problema respecto de tales segregaciones.

Método analítico seguido.

El análisis cualitativo demuestra que dichas rocas contienen: sílice, alúmina, cromo, hierro, magnesia (jamás calcio), titanio é indicios de manganeso.

Se toma exactamente un gramo de mineral bien pulverizado, se disgrega con $Na_2 CO_3$, se disuelve en HCl y se insolubiliza la sílice; al lavarla por decantación, hay que tener mucho cuidado que las partículas de SiO_2 no caigan sobre el filtro; las que caen se sacan con una espatulita de platino, con muchísimo cuidado (para no romper el filtro), se reúnen con las de la vasija (*), se filtra y se repite la insolubilización en el líquido filtrado.

Después de haber determinado la sílice, guárdese cuidadosamente el crisol, pues puede contener indicios de hierro, etcétera, que no han podido ser separados de la sílice.

Precipitación del hierro, cromo, alúmina y titanio (**).

Se precipitan dichos metales con amoníaco. Al principio se añade concentrado y en frío y cuando el punto de neutralización se acerca, entonces se calienta el líquido hasta la ebullición y se le añade gota á gota amoníaco diluído.

Se lava tres veces por decantación. Se disuelve el precipitado en HCl (que se verterá sobre el filtro, para disolver las partículas que no han podido ser sacadas con la espátula de platino).

Se repite la precipitación (cuidando que en el líquido haya

(*) Para obtener una sílice muy blanca hay que lavar 8-10 veces con HCl concentrado y muy caliente.

(**) Método *L. Duparc.*—*Archives des sciences physiques et naturelles.*—Genève, 1905.

exceso de NH_4Cl) y demás operaciones como anteriormente. (Se lava luego con las mismas precauciones que se tuvieron con la sílice.) Se calcina y pesa.

Separación del hierro y del titanio de la alúmina y el cromo (*).

Se disgrega la mezcla de los óxidos con 6 gramos de Na_2CO_3 . La masa es disuelta en agua hirviendo; se lava el óxido de hierro y de titanio, por decantación (sobre doble filtro), y se recoge el precipitado que se calcina en el mismo crisol. Se repite la fusión con el carbonato y se lava de nuevo sin hacer pasar el precipitado. Este se disuelve (como en el caso anterior), y, por fin, se precipitan el hierro y el titanio con NH_3 . Y se pesan como óxidos, siempre en el mismo crisol.

Separación del hierro del titanio.

Disgréganse los óxidos con bisulfato potásico, la masa fundida se disuelve en agua acidulada por H_2SO_4 y se divide el volumen en dos partes iguales. En la una se titula el hierro con el $KMnO_4$ y en la otra se busca el titanio por el procedimiento *Weller* (**), algo modificado.

Separación del cromo de la alúmina.

Para la separación del cromo de la alúmina ensayé el método estudiado en la Universidad de Ginebra, durante el curso de mis análisis, por mis compañeros los Sres. *Tcharviani* y *Wunder* (***), comparándolo con los resultados ob-

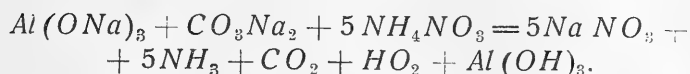
(*) *L. Duparc*. Ann. chim analyt., 1904, p. 201.

(**) *Treadwell*. L. C. D., p. 78.

(***) *Wunder Tcharviani*. Ann. chim. analy. 16 1-7-1911.

tenidos por el método general y lo adopté definitivamente por resultar excelente.

Está basado en la reacción siguiente:



En lugar de neutralizar el exceso de Na_2CO_3 con un ácido, con lo que se reducía siempre una pequeña cantidad de cromato, en este método se emplea la acción del NH_4NO_3 para descomponer el Na_2CO_3 excedente.

Modo de operar: á la solución conteniendo el aluminato, cromato y exceso de carbonato sódico, se le añade en caliente un exceso de nitrato amónico (sólido). La precipitación está terminada cuando no hay más desprendimiento de anhídrido carbónico, siendo necesario eliminar el amoniaco por ebullición para que la precipitación sea completa.

El cromo se precipita con el amoniaco, después de haber acidulado el líquido filtrado con HNO_3 y haberlo reducido con alcohol (hay que tener cuidado de no acidular mucho, pues la acción del ácido nítrico sobre el alcohol es muy violenta).

Precipitación y determinación del *Mg*.

Al líquido filtrado, después de haber precipitado los cuatro metales, se le alcaliniza fuertemente con NH_3 y se le añade fosfato sódico (véase Treadwell). Se calcina primero el filtro, después el precipitado en un crisol de porcelana. Si el precipitado es gris se le añaden unos cristallitos de NH_4NO_3 (*) y se calcina de nuevo. Se pesa como pirofosfato.

(*) Empleo de preferencia el NH_4NO_3 al HNO_3 , pues con este último hay que evaporar y calcinar con mucho cuidado al principio para que la masa no decrepita, y, por lo tanto, no haya pérdidas.

Determinación del hierro ferroso.

Por el método corriente: disolver el mineral en *HFl* en corriente de CO_2 y titular con $KMnO_4$. El resultado obtenido se calcula en hierro férrico y se resta de la cantidad total de hierro obtenido anteriormente.

Determinación del agua de constitución.

Se pesa un gramo de substancia previamente desecada á 110° , se calcina en un crisol de platino durante hora y media con el soplete.

Durante la operación se hace pasar una corriente de CO_2 para evitar la oxidación del hierro ferroso. Se pesa y se repite la operación hasta peso constante. La diferencia da el agua de constitución en este caso.

La dunita desde el punto de vista petrográfico.

La dunita es una roca compacta de color verde oscuro; su estructura granular es muy uniforme y cristalina, y á simple vista se distinguen los granos de olivino de los pequeños octaedros muy brillantes de cromita.

Observada al microscopio, cualquiera que sea el yacimiento de que proceda, se nota uniformidad absoluta.

La dunita platinífera no contiene más que dos minerales: el olivino y la cromita.

El olivino se presenta en forma de granos redondeados, idiomorfos, de dimensiones constantes; su exfoliación es $g=0,10$, difícilmente visible en los diferentes minerales examinados.

Las propiedades ópticas son muy constantes: $ng=1.689$, $nm=1.671$, $np=1.654$.

$$ng - np = 0.035, \quad ng - nm = 0.019, \quad nm - np = 0.016.$$

El ángulo de los ejes ópticos $2V$, oscila entre 83 y 84° ; las variaciones observadas son pequeñísimas.

La cromita, en pequeños granos octaédricos, se encuentra diseminada en el olivino, ó situada entre sus granos.

Por orden de consolidación, la cromita ha precedido al olivino.

Igualmente se encuentran en la dunita unos haces ó segregaciones más ó menos importantes de cromita, formando un mineral compacto de estructura cristalina, que se localiza en forma de venas irregulares (Schlierias).

El platino se halla muy irregularmente distribuído en la dunita. Considerada en conjunto resulta muy pobre de metal, como lo demuestran las recientes investigaciones de *Duparc* (*); pero teniendo en cuenta sólo ciertas regiones, puede decirse que es muy rica, porque el platino se halla concentrado en ellas, unas veces cristalizado en la dunita (formando pequeños cristales aislados) y otras veces cristalizado en la cromita, rodeándola y moldeándola como si fuera un cemento. En el orden de consolidación es, pues, posterior á la cromita.

La dunita, como se ha dicho anteriormente, se encuentra á menudo alterada; la alteración proviene del olivino, que se transforma en serpentina, según el proceso siguiente (**): La serpentinización del olivino empieza á lo largo de sus grietas, y poco á poco se desarrollan como unas cintas de un mineral verdoso ó amarillo dorado, la antigorita. Estas se van ensanchando y pasan de un cristal á otro hasta invadir la roca, tomando la forma de una red. A veces presentan una especie de fibrosidad transversal, que les da aspecto de

(*) *L. Duparc*. Le platine et les gites platinifères de l'Oural. *Asch. des Scien. Phy. et Nat. Genève*, tome XXXI-1911.

(**) *L. Duparc et F. Pearce*: Recherches géologiques et pétrographique sur l'Oural du Nord. *Mém. de la Soc. de Physique de Genève*.

muaré muy particular, y están divididas en dos partes simétricas por una línea meridiana formada por puntuaciones de magnetita.

Desde el punto de vista óptico, estas cintas son positivas longitudinalmente.

La birefringencia no pasa de 0.009. En ciertas regiones, la roca serpentinoso parece isotrópica y haría la ilusión de una substancia coloide si no fuera por las manchas isotrópicas, que son (con luz natural) idénticas á las cintas birefringentes.

Con luz convergente, estas regiones isotrópicas dan una cruz oscura, uniáxica, de signo óptico negativo. Tales caracteres coinciden con los de la antigorita uniáxica. En las variedades de coloración intensa se nota un ligero policroísmo, que es de la siguiente manera: ng = verdoso, np = amarillo claro, algunas veces amarillo de oro. La coloración de las cintas de antigorita puede variar en una misma preparación microscópica.

Si la serpentinización continúa, los granos de olivino se reducen á pequeños núcleos, que llegan á veces á desaparecer por completo en ciertas regiones. Hasta hoy apenas se han encontrado dunitas que hayan llegado á tal grado de serpentinización, conteniendo siempre indicios del olivino primitivo.

La estructura que presenta la antigorita en las regiones de donde ha desaparecido el olivino, varía á menudo: á veces predomina la estructura reticular idéntica á la descrita por Lacroix. Las cintas más ó menos delgadas de antigorita, rodean ciertas zonas del mineral, orientadas ópticamente de distinta manera. Generalmente las cintas son mucho más birefringentes que los espacios que rodean; éstos, sin embargo, están formados por antigorita, sin que nunca exista materia coloide. Cuando la estructura reticular predomina regionalmente, ciertos espacios de la preparación parecen isotrópicos, debido á la relativa delgadez de las cintas birefringentes, respecto del núcleo central que rodean y que casi es isotrópico.

Otras veces la estructura de la antigorita en los puntos de donde el olivino ha desaparecido, es muy distinta: las anchas cintas de antigorita se reúnen en haces. Para cierta posición de la platina del microscopio, todos los haces parecen igualmente iluminados, y si la zona es bastante ancha para llenar el campo visual, podría creerse que se trata de un sólo cristal. Sin embargo, haciendo girar la platina del microscópico se iluminan los haces de diferentes maneras y toman el aspecto de muaré, que recuerda el de ciertas preparaciones de picrolita.

La serpentinización, en la mayoría de los casos, no llega á tal extremo, siendo la estructura alveolar la más corriente, en la cual las cintas de antigorita se han ensanchado mucho y rodean los pequeños núcleos de olivino que han quedado intactos.

La antigorita se presenta, pues:

- 1.º En forma de red ó malla.
- 2.º En forma de haz.
- 3.º En forma alveolar.

Según el grado de alteración del olivino.

Análisis de las dunitas de los principales yacimientos platiníferos.

A continuación se exponen los datos de los análisis, expresando los contenidos en la columna *A* los resultados directos, y en la columna *B*, los calculados para la composición centesimal, no comprendiendo en ella el agua de constitución.

Examinaremos los yacimientos, yendo del S. al N.

Dunita del yacimiento de Omontuaña.

Es uno de los más pequeños de los Urales; está situado en el monte Sysserskaya-Datcha, en la falda europea. El afloramiento dunítico tiene forma elíptica, midiendo su eje prin-

cial, que se dirige de NO. á SE. cerca de 2 kilómetros, mientras que el otro eje apenas mide 1. La dunita está ro-

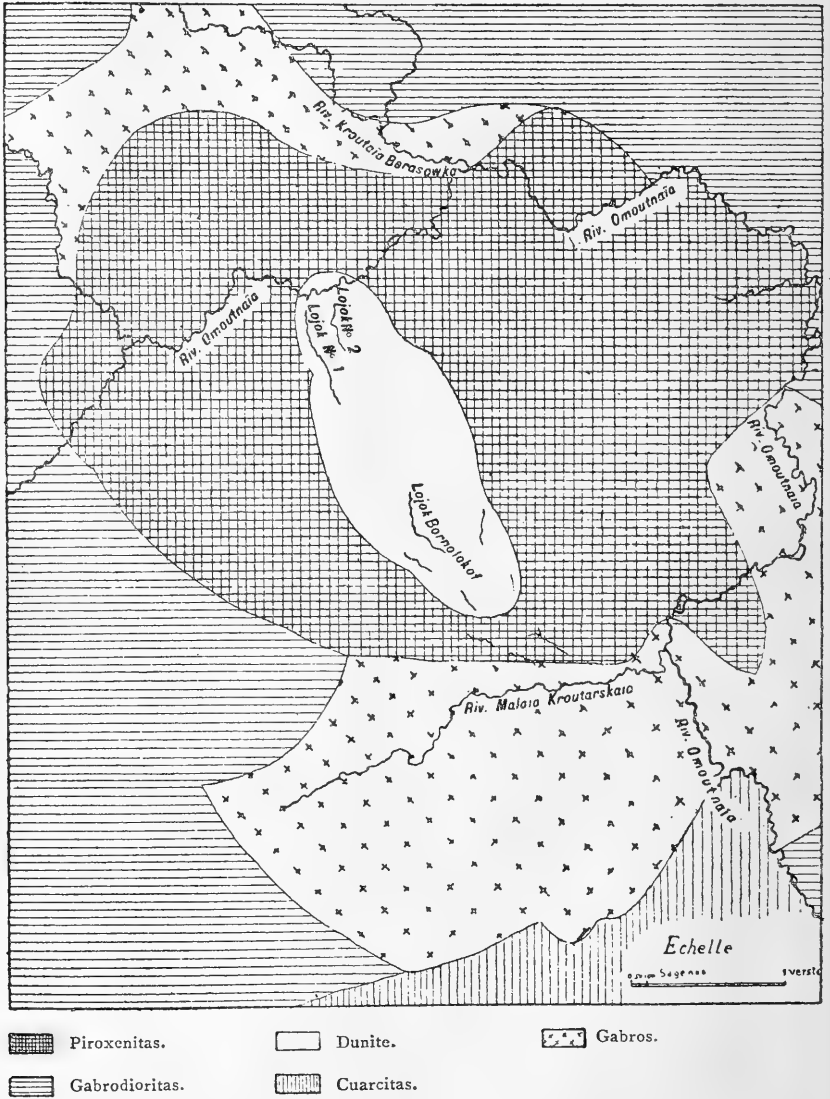


Figura 2.

Carta del yacimiento platinifero de Omontnia.

deada de una ancha faja de piroxenitas, y éstas á su vez de gabros y gabrodioritas.

El río Omontuaña atraviesa la región extrema NO. del afloramiento dunitico. (Fig. 2).

Análisis de la muestra tomada en el lojole Bornolokof (E).

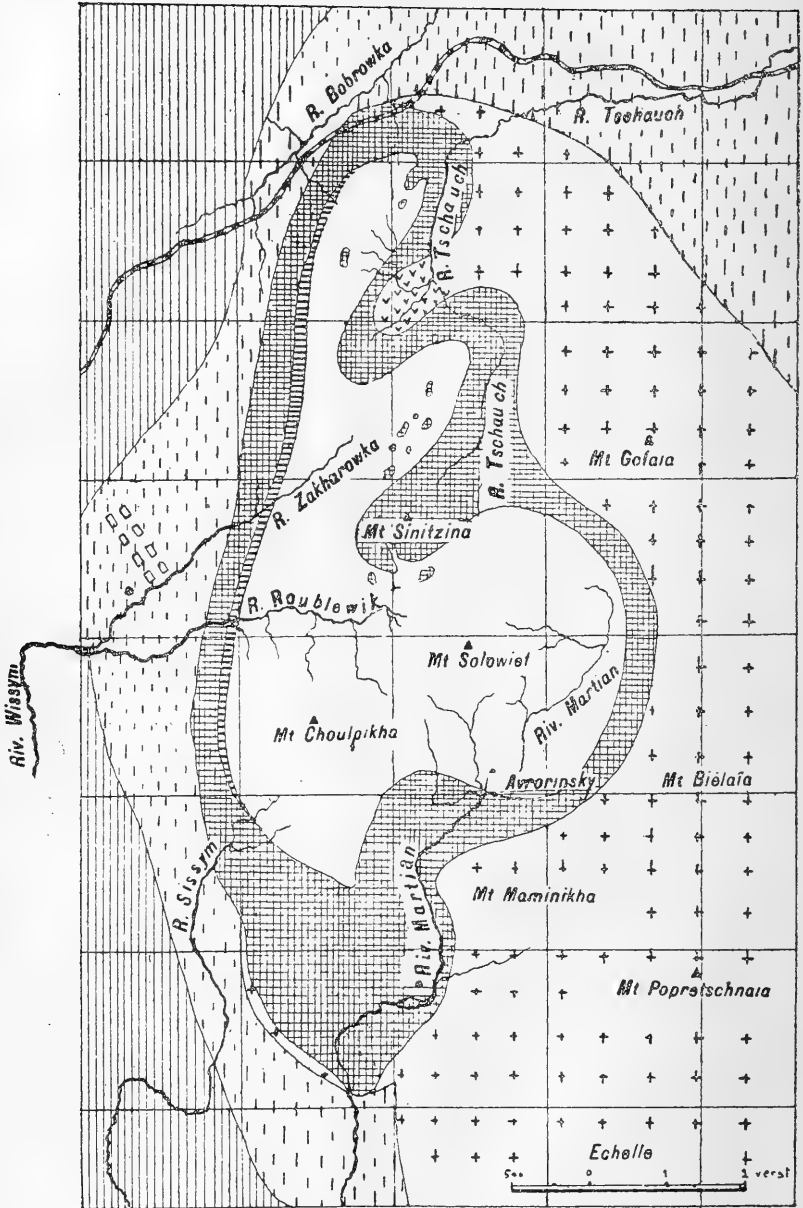
	A	B	
$H_2O =$	11.97	»	
$SiO_2 =$	35.00	39.79	
$Al_2O_3 =$	0.15	0.17	
$Cr_2O_3 =$	0.66	0.76	
$Fe_2O_3 =$	3.85	4.37	
$FeO =$	4.36	4.95	
$MgO =$	44.13	50.06	
$TiO_2 =$	»	»	
	100.12	100.00	

Yacimiento de Taguil.

Situado á unos 25 kilómetros al SO. de Taguil. Es el más considerable é importante yacimiento dunitico primario, y presenta la forma de una lenteja; su eje principal, orientado de N. á S. mide más de 10 kilómetros. En la región S. tiene un ensanchamiento, y su segundo eje mide allí unos 5 kilómetros. (Fig. 3.)

La dunita forma una serie de cimas redondeadas y características, cubiertas siempre de pinos, por ejemplo el monte Solowieff, y contiene abundantes secreciones de cromita, sobre todo en la base de dicho monte.

Circunscribe á la dunita una faja continua de piroxenitas delgada en las regiones S. y O., y muy abundante en la parte S. y N., donde avanza como unos brazos hacia el interior de la dunita, en la que se encuentran, además, esparcidas algunas placas poco profundas constituídas por dicha piroxenita.



- | | |
|--|---|
|  Dunita. |  Gabros, dioritas, etc. |
|  Piroxenitas. |  Pizarras dinamo-metamórficas. |
|  Tilaitas. |  Pizarras cristalinas. |
|  Serpentinatas. | |

Figura 3.

Carta geológica del centro platinífero de Taguil, según los Sres. Wyssotsky y Lavaritsky.

En la región O. y NO. se intercala, entre la dunita y la piroxenita, una faja de verdaderas serpentinas muy distintas de la dunita; son más duras, tienen otra pátina y se les encuentra en los aluviones, de los que la dunita ha completamente desaparecido.

El yacimiento dunítico se encuentra en el borde occidental del gran macizo de rocas básicas. Los placeres que provienen de dicho centro, son: Martian, Wissym y Sissym en la vertiente europea, y Tschauch y Bobrowka en la asiática.

Análisis de las muestras tomadas en (179) Solowresky, log (218) Alexandrowky, log (129) Krontinsk, log (207) cresta de Solowieff, (314) 2.º manantial de la Bobrowka.

	179		218		129		207		314	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
H ₂ O =	13.39		13.37		14.02		13.28		7.28	
S ₁ O ₂ =	34.85	40.38	34.66	40.09	34.51	39.93	33.87	39.19	36.98	40.10
Al ₂ O ₃ =	0.50	0.58	0.39	0.46	0.22	0.25	0.06	0.06	0.38	0.44
Cr ₂ O ₃ =	0.03	0.03	0.44	0.51	0.36	0.42	0.66	0.76	0.22	0.25
Fe ₂ O ₃ =	6.24	7.23	5.49	6.36	3.26	3.77	3.46	4.00	2.45	2.59
Fe O =	1.26	1.48	1.42	1.64	3.27	3.78	3.63	4.21	5.46	5.93
Mg O =	43.41	50.30	44.02	50.91	44.81	51.85	44.76	51.78	46.75	50.66
Ti O ₂ =	—	—	0.03	0.03	—	—	—	—	—	—
	99.68	100.00	99.84	100.00	100.45	100.00	99.72	100.00	99.52	100.00

En este yacimiento, como se ha visto en su descripción, existen igualmente serpentinas bien caracterizadas como tales, y que bordean el yacimiento dunítico; tenía mucho interés el saber si su composición era la misma que la de la dunita ó si se diferenciaba de ella.

Al objeto, he analizado dos variedades de dichas serpentinas:

	315		303	
	B	A	A	B
H_3O	15.20		14.92	
SiO_2	33.71	39.77	35.10	41.63
Al_2O_3	0.33	0.39	0.31	0.36
Cr_2O_3	0.32	0.37	0.89	1.05
Fe_2O_3	5.73	6.76	3.12	3.71
FeO	1.26	1.49	1.66	1.98
MgO	43.39	51.19	43.18	51.22
TiO_2	0.03	0.03	0.05	0.05
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	99.97	100.000	99.23	100.00

Como se ve, comparando los diversos resultados:

1.º La dunita de Taguil es muy homogénea; en efecto, existen pequeñísimas variaciones entre las diversas variedades de este yacimiento.

2.º La serpentina no se diferencia de la dunita, á no ser por la cantidad mayor de agua que encierra, lo que resulta normal.

De todas maneras, el número 303 se distingue por la pequeña cantidad de hierro.

Yacimientos de Iss.

Se encuentran en la vertiente asiática de los Urales, no lejos de Nijne-Toura y de Teploïa-Gora, estación del ferrocarril Perm-Kouchwa, Los dos centros duniticos se hallan al O. del monte Katchkanar, constituido por una mole de piroxenitas.

El primer yacimiento, llamado *Swetli-bor*, confina inmediatamente con el Katchkanar. Aflora la dunita en forma de una gran elipse, cuyo eje principal se dirige de N. á S., ó ligeramente de N. á NO., y mide 6 kilómetros aproximadamente, el eje menor mide 3; esta región dunitica, poco elevada, está cubierta de pinos y surcada por varios lojotes afluentes del Iss ó del Kossia. El tipo de dunita es el habi-

tual, no muy rica en segregaciones de hierro-cromo, ó rodeada de una faja (muy estrecha) de piroxenita, como de costumbre. Esta faja se halla interrumpida al N. y en algunas regiones del E. y NE., en las que los gabrodioritas están en contacto directo con la dunita, hallándose además ésta, en la región SO., en donde no existen gabros ni piroxenitas, en contacto con pizarras metamórficas.

La segunda faja de gabrodioritas también se encuentra en varias partes interrumpida, encerrando en la región NE., como un islote de piroxenita. También se halla otro en la región occidental; pero éste, en parte, está rodeado por pizarras cristalinas. (Fig. 4.)

El río Iss atraviesa oblicuamente la región N. de este centro dunitico, y recibe, como principales afluentes, el Koro-bowsky-log. el log núm. 1 y el núm. 2, que toman origen en la dunita, y el riachuelo Kossia, que tiene á su vez, como afluentes, los logs núm. 7, 6, 3, el Travenisty-log, el Yllinsky-log y el Kroutoï-log, situados todos en su orilla izquierda.

Muestras de de *Swetli-Bor* tomada en (115) la orilla izquierda del Iss, (99) Kroutoï-log, (112) Travenisti-log (83) la parte superior del manantial del log núm. 1.

	115		99		112		83	
	A	B	A	B	A	B	A	B
$H_2 O$	6.28	—	10.21	—	7.89	—	7.86	—
$Si O_2$	38.00	39.90	36.06	40.01	37.01	40.01	35.94	38.91
$Al_2 O_3$	0.50	0.52	0.60	0.66	0.40	0.43	0.82	0.88
$Cr_2 O_3$	0.25	0.26	0.34	0.38	0.36	0.39	1.29	1.30
$Fe_2 O_3$	5.67	5.95	5.68	6.30	4.97	5.37	5.99	6.44
$Fe O$	3.23	3.38	2.29	2.55	3.63	3.92	2.58	2.88
$Mg O$	47.58	49.99	45.13	50.08	46.14	49.88	42.21	49.75
$Ti O_2$	—	—	0.02	0.02	—	—	0.04	0.04
	101.51	100.00	100.33	100.00	100.40	100.00	99.75	100.00

El segundo centro dunitico, llamado *Waressowy-ouwal*, se halla al Norte y algo al Oeste del anterior del cual dista apenas 1 kilómetro; su forma es de cresta orientada de N. á S.

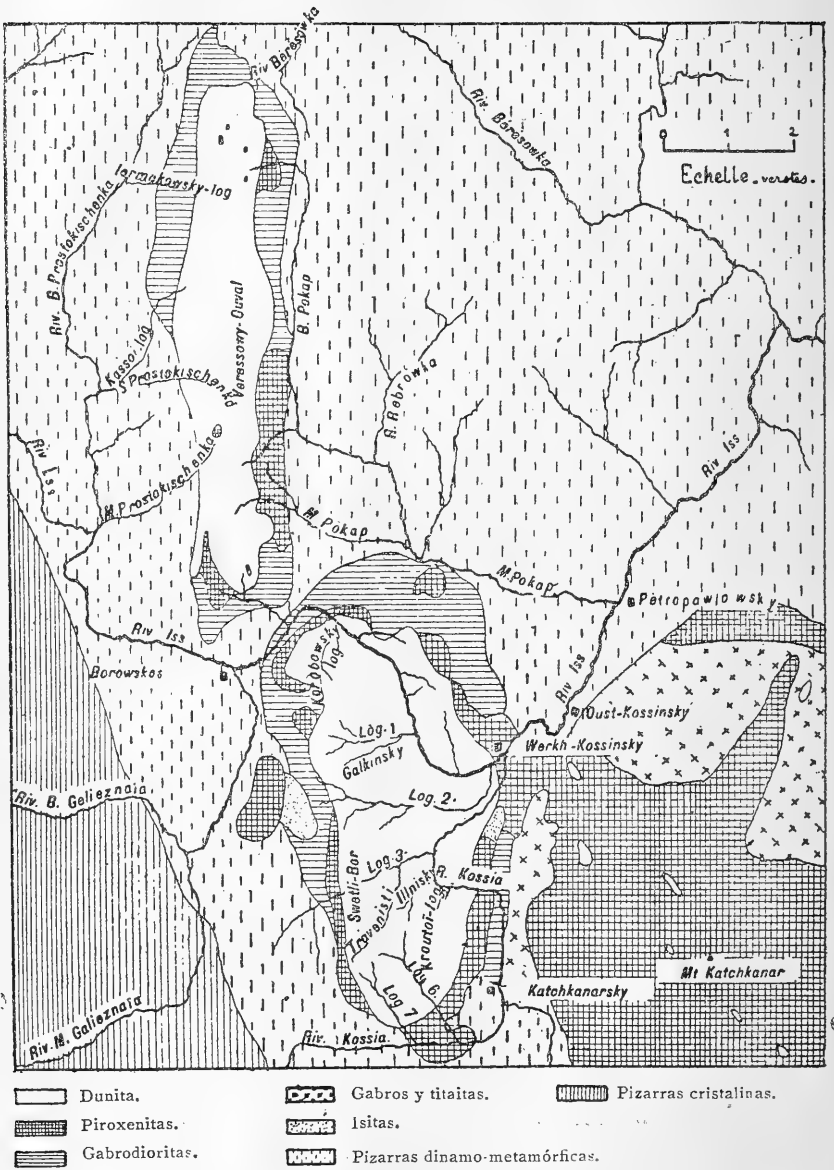


Figura 4.

Carta geológica de los yacimientos platiníferos del Iss, según el Sr. Wyssotsky.

larga de 8 kilómetros por 1, 6 kilómetros de anchura. Es más elevado que Swetli-Bor y la dunita es idéntica á la de este centro, pero contiene más cantidad de segregaciones de hierro cromado.

La faja de piroxenitas se halla completamente interrumpida, apareciendo una parte en la región S. E. y en la S. O. En la zona Norte se encuentran algunos islotes de piroxenita enclavados en la dunita.

Dicha roca se presenta á veces, como en otros yacimientos, en forma de koswitas.

La segunda faja de rocas gabróicas es muy discontinua encontrándose en algunos puntos en contacto con la dunita.

Lós placeres platiníferos de este centro dunitico son:

1.º El Beresowka.

2.º El pequeño Pokap afluente del gran Pokap.

3.º El Malaia-Prostokischenka, el Srednia-Prostokischenka, Kasso-log, el Jermakowskv-log, cuatro afluentes del Balchaia-Prostokischenka.

Estos tres arroyos son, á su vez, afluentes del Iss.

Dunitas de Wéressowy-ouwal.

(65) muestra tomada en la última cima del yacimiento, (58) donde está la torre, (67) extremidad S. de Waressowy-ouwal.

	65		58		67	
	A	B	A	B	A	B
H_2O	8.05		6.59		7.95	
SiO_2	36.71	39.38	34.56	40.18	36.77	39.86
Al_2O_3	0.38	0.39	0.30	0.32	0.29	0.31
Cr_2O_3	0.41	0.44	0.33	0.35	0.21	0.23
Fe_2O_3	6.11	6.55	6.00	6.42	6.10	6.61
FeO	2.61	2.80	2.68	2.86	3.16	3.43
MgO	46.97	50.39	46.62	49.87	45.71	49.56
TiO_2	0.05	0.05	—	—	—	—
	101.27	100.00	100.08	100.00	100.19	100.00

Yacimiento de Kaménouchky.

Encuétrase en el Pawdinskaya-Datcha al N. NE. de Weissowoy-ouwal, del cual dista unos 20 kilómetros y al NO del gran macizo de gabros que constituye el monte de Sarannaya. (Fig. 5.)

La elipse dunítica orientada de N. NO. á SE. mide unos 3 kilómetros de longitud por 1 á 1,5 de anchura; se halla cubierta de bosque, y su topografía es la habitual. La dunita es muy uniforme y bastante alterada, y se halla acribillada de venas leucocratas (del tipo plagiaplites), de venas melanocratas (issitas é issitas plagioclásicas), de algunas variedades mesócratas y de gran cantidad de enormes filones de pegmatita de hornablenda, idénticos á los del yacimiento de Omontuaia.

También contiene segregaciones de cromita.

La faja de piroxenitas es continua, pero no uniforme, desarrollándose con más amplitud en la región N. y S., y en la región OE., al contrario, es muy estrecha.

Las rocas gabraicas que rodean á la piroxenita son verdes y pizarrosas en la región OE., mientras que en el E. son del tipo uralizado normal.

Los placeres que provienen del Kaménouchky son:

1.º El Malaia-Kaménouchka, que desciende por la falda occidental y en la región S. de la cresta dunítica y termina en el riachuelo Kamenka, cuyo platino procede del anterior. El Kamenka es á su vez afluente del Niasma.

2.º El Balchaia-Kaménouchky que nace en la región oriental del afloramiento dunítico y recibe una serie de lojoks platiníferos como afluentes, y termina en el Niasma.

Este contiene solamente el platino que le aportan los M. y B. Kaménouchka.

Muestras tomadas en el centro y en los extremos de la cumbre de Kaménouchky (22), (27), (28).

	22		27		28	
	A	B	A	B	A	B
H_2O	8.24		7.40		7.74	
SiO_2	36.87	39.94	37.71	40.48	37.47	40.57
Al_2O_3	0.56	0.61	0.35	0.38	0.75	0.81
Cr_2O_3	0.90	0.97	0.34	0.36	0.39	0.42
Fe_2O_3	5.75	6.23	5.09	5.46	5.22	5.65
FeO	3.00	3.25	3.39	3.64	3.24	3.50
MgO	45.21	48.97	46.26	49.65	45.27	49.01
TiO_2	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04
	100.56	100.00	100.57	100.00	100.12	100.00

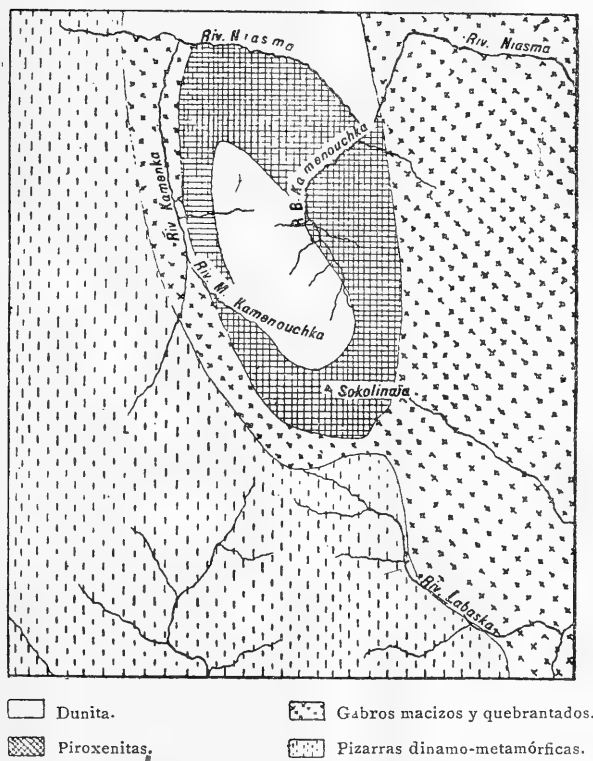
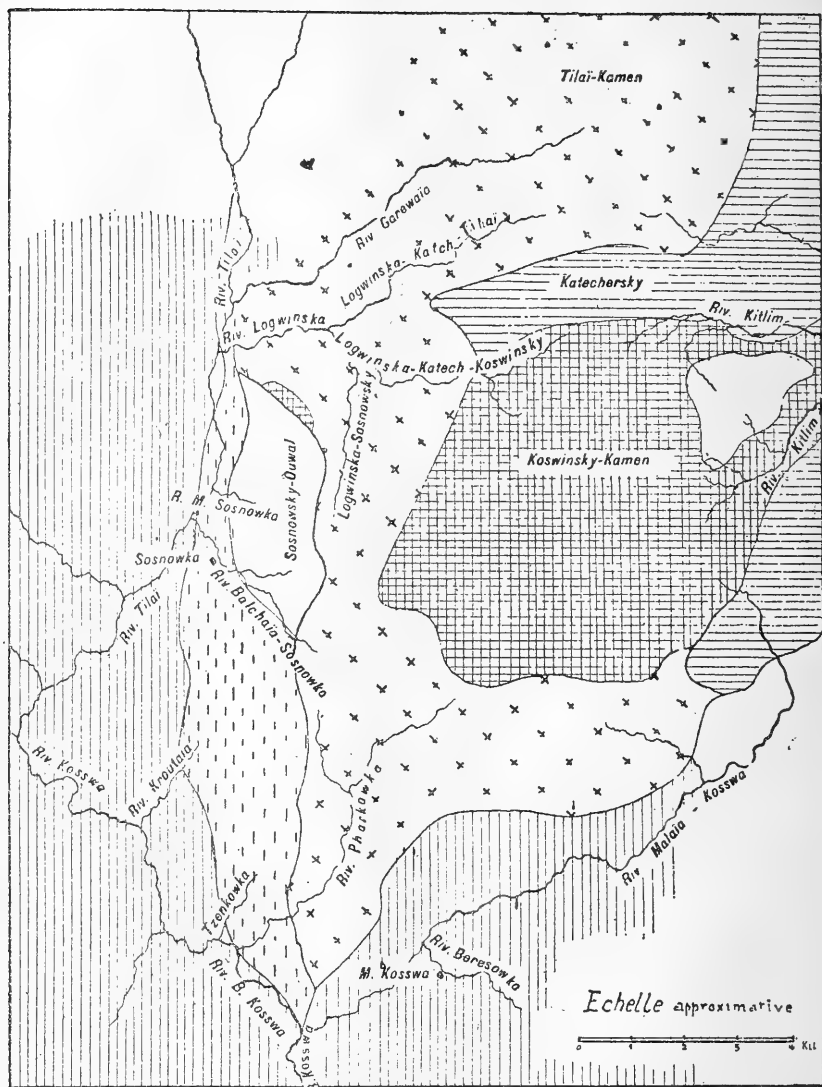


Figura 5.

Croquis geológico del yacimiento de Kamenouchky por M. L. Duparc.









- | | | |
|---|--|---|
|  Pizarras cristalinas. |  Dunita. |  Tilaitas, Gabros. |
|  Diabasas. |  Piroxenitas. |  Gabrodioritas. |

Figura 6.

Carta geológica de los yacimientos platiníferos de Koswinsky, por M. L. Duparc.

Yacimientos de Koswinski.

Están situados en las dos vertientes del monte Koswinsky.

1.º El yacimiento de *Sosnowsky-ouwal* se encuentra en la vertiente O., y está formado por una larga cresta de dunita orientada de N. á S. y de unos 4 kilómetros de longitud por apenas 2 kilómetros de anchura; aparecen algunas variedades de dunita pizarrosa, las segregaciones de cromita son muy abundantes, pero pequeñas. (Fig. 6.)

La faja de piroxenita falta por completo, y sólo en la región NE. existen algunos afloramientos.

La dunita se halla en contacto con tilaitas y gabros en la zona E. y con diabasa en la zona O.

Los placeres platiníferos á que este yacimiento da origen, son: el gran Sosnowka y el pequeño Sosnowka en la parte occidental, el Logwinska en la oriental. Estos tres arroyos afluyen al Tolaï, que del hecho se vuelve patinífero.

(75) Muestra tomada en Sosnowsky-ouwal (*).

	A	B
H_2O	12.28	»
SiO_2	35.41	39.57
Al_2O_3	1.33	1.49
Fe_2O_3	4.43	4.95
FeO	3.66	4.09
MgO	44.65	49.90
	101.76	100.00

2.º El yacimiento de *Kitlim* hállase en la vertiente oriental del Kowinsky. El tipo de este yacimiento es el normal; la dunita está completamente rodeada por la piroxenita y el

(*) El análisis de esta dunita y de las tres siguientes, no los hice personalmente, toda vez que estaban ya ejecutados por Profesor Duparc, que me ha comunicado amablemente los resultados.

afloramiento, enteramente desnudo, alcanza gran altura. Atraviesan la dunita estrechos filones de variadas rocas: albítas, granulitas, wehrlitas, íssitas, etc. También contiene abundantes segregaciones de cromita.

La faja de piroxenitas y korwitas se halla atravesada por algunos filones de dunita y de dunita sideronítica.

La faja exterior de gabros constituye la montaña de Ka-téchersky y el Kitlimsky-ouwal.

Los placeres platiníferos son: el Kitlim, con una serie de lojoks como afluentes (Abodranny-lojok, Djudinsky-log, Papowsky-log.)

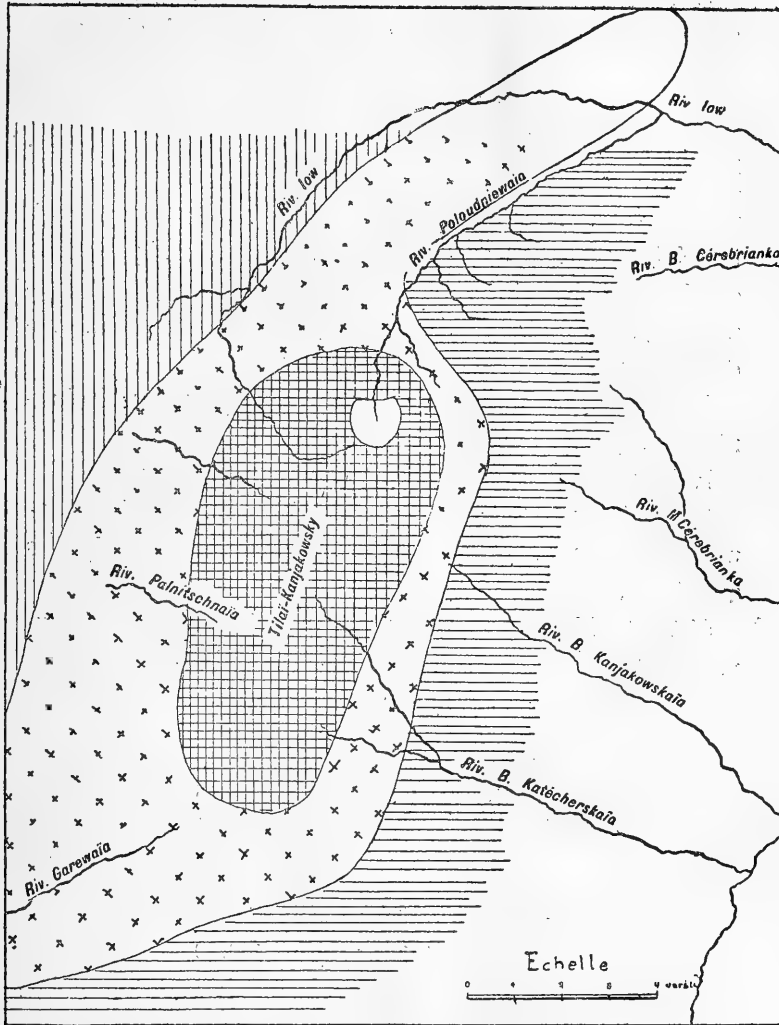
Probablemente el pequeño Kosura, que aunque no nace en terreno dunitico debió nacer en otros tiempos, pues su platino no puede proceder de otro centro que el Kitlim.

(1030) Muestra tomada en la cresta de dunitas de Kos-winsky.

	A	B
H_2O	8.535	»
SiO_2	38.06	41.34
Al_2O_3	0.31	0.33
Cr_2O_3	1.39	1.51
Fe_2O_3	6.72	8.30
FeO	5.29	5.75
MgO	40.30	43.77
	100.42	100.00

Yacimiento de Tilai-Kanjakowsky.

La cordilera de Tilai-Kanjakowsky, situada al N. de Kos-winsky, está formada por una cresta de piroxenitas, limitada al O. por tilaitas y gabros de olivino, y al E. por gabros uralizados. Al N. de la cima principal, Tilai, la cordillera se bifurca; en el valle, formado por los dos brazos de la montaña, corre el río Poloudniewaia, y en el origen del valle y ribera se halla el afloramiento dunitico, circular y de pequeñas dimensiones. (Fig. 7.)








- | | |
|--|---|
|  Dunita. |  Gabros y gabrodioritas. |
|  Piroxénitas. |  Pizarras metamórficas. |
|  Tilaitas y gabros de olivino. | |

Figura 7.

Croquis geológico del yacimiento de Telai-Kanjakowsky, por M. L. Duparc.

La dunita ha sido puesta al descubierto por la constitución de un puerto que forma una depresión al pie de la cima principal de Tilai; esta depresión está ocupada en verano por un lago que alimenta al Poloudniewia; caen las aguas por una pared casi vertical de dunita, de unos 300 metros de altura. La dunita es de tipo normal, y contiene muchas segregaciones de cromita. Está completamente rodeada por piroxenitas; éstas se hallan entrecruzadas de filones de pegmatita con hornablenda, análogos á los de Omoubnaia y de Kame-nouchky. La piroxenita, á su vez, está completamente rodeada por gabros uralizados.

Los placeres platiníferos de este yacimiento son: el Poludniewia, que nace en la misma dunita.

El Jow, que nace en el puerto citado anteriormente.

El Kaujakowska, que tiene su origen fuera del afloramiento dunitico, pero que debió de nacer en él en épocas anteriores.

(1.127) Muestra tomada en las paredes verticales de dunita, en la cascada que alimenta al Paloudniewia.

	A	B
H_2O	3.95	
SiO_2	37.91	39.03
Cr_3O_3	1.18	1.21
Fe_2O_3	0.95	0.97
FeO	9.21	9.48
MgO	47.87	49.31
	<hr/>	<hr/>
	101.07	100.00

Yacimiento de Gladkaia-Sopka.

Situado á 7 kilómetros del pueblo de Bogarlowsh, al que se halla unido por un sendero que costea el río Wagan.

El afloramiento dunitico constituye por completo el yacimiento, orientado de N. á S., y desciende gradualmente hacia el S. Su longitud es, aproximadamente, de 1.5 á 2 kiló-

metros, y su anchura escasa. El Glodkaño-Sopka forma una cresta acerada y estrecha, con las vertientes muy abruptas. (Fig. 8.)

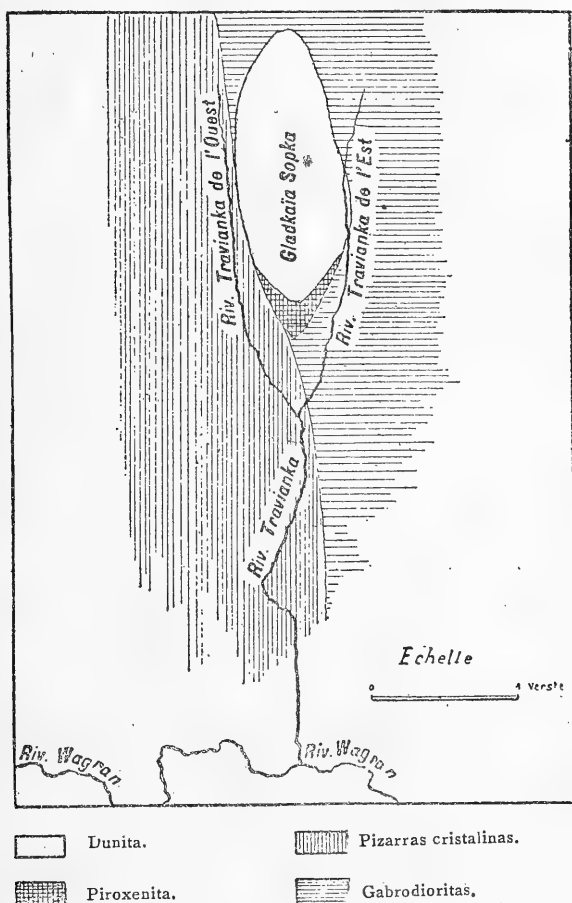


Figura 8.

Croquis geológico del yacimiento platinífero de Gladkaia-Sopka.

La dunita de este yacimiento, á pesar de estar muy alterada, es de tipo normal y pobre en cromita.

La faja de piroxenitas es reducidísima, y rodea solamente

el extremo S, del afloramiento dunitico, el cual, por la región O., entra en contacto con pizarras cristalinas, y por la parte N. con magníficos gabrodioritas, semejantes á los de Tilaï-Kanjakowsky.

Los ríos que surcan dicho yacimiento son:

El Travianka oriental y el Travianka occidental, que se reunen más allá del Sud del yacimiento y forman el Travianka.

Muestra procedente del Travianka.

	A	B
<i>HiO</i>	5.45	»
<i>SiO₂</i>	39.36	41.01
<i>Al₂O₃</i>	0.41	0.15
<i>Cr₂O₃</i>	0.80	0.83
<i>Fe₂O₃</i>	1.74	1.81
<i>FeO</i>	8.14	8.48
<i>MgO</i>	45.80	47.72
	101.43	100.00

Para mejor evidenciar las conclusiones que se pueden deducir de dichos análisis, los he reunido en un solo cuadro, distribuyendo las dunitas de las diferentes yacimientos por grupos.

Como el agua que se encuentra en estas rocas es debida exclusivamente á un fenómeno de descomposición, es decir, de hidratación, se ha tomado la composición centesimal después de haber reducido todo el hierro al estado ferroso, pues la transformación de dicho metal es debida exclusivamente á la acción oxidante del aire, como se prueba en el siguiente ejemplo, comparando los óxidos de hierro con la cantidad de agua; así en la dunita de Tilaï, que contiene 3.95 por 100 de agua, hay 0.95 de *Fe₂O₃* por 9.21 de *FeO*, mientras que en la dunita de Alexandrowsky-log (Taguil), que contiene 13.37 por 100 de agua, no se encuentra más que 1.42 de *FeO* contra 5.49 de *Fe₂O₃*.

	I S S										KOSWINSKY		Sladkaia-Soplea.	MEDIO				
	Taguil.					Svetli-hor.					Weressow-oual.				Kamionchky.		Tilai-kayakouday	
Omoutnaia.	E.										Sosnowsky-ouod.		Kitliti.					
SiO ₂	179	218	129	207	314	115	99	112	83	67	22	27	28	705	1030	1127		
Al ₂ O ₃	40.38	40.09	39.03	39.19	40.10	39.90	40.01	40.01	38.71	39.38	39.94	40.48	40.57	39.57	41.34	39.08	41.01	39.95
Cr ₂ O ₃	0.17	0.58	0.46	0.25	0.06	0.52	0.66	0.43	0.88	0.39	0.61	0.38	0.81	1.49	0.33	—	0.75	0.48
Fe ₂ O ₃	0.76	0.51	0.42	0.76	0.25	0.26	0.38	0.39	1.30	0.44	0.97	0.36	0.42	—	1.51	1.21	0.83	0.59
FeO	4.37	7.23	6.36	3.77	4.00	5.95	6.30	5.37	6.44	6.55	6.23	5.46	5.65	4.95	7.30	0.78	1.81	5.21
P ₂ O ₅	1.48	1.64	3.78	4.21	5.93	3.38	2.55	3.92	2.88	2.83	3.25	3.64	3.50	4.09	5.75	9.48	8.48	4.10
MgO	50.06	50.91	51.85	51.78	50.69	49.99	50.08	49.88	40.75	50.39	48.97	49.65	49.01	49.90	43.77	49.31	47.72	44.64
TiO ₂	—	0.03	—	—	—	—	0.02	—	0.04	0.05	0.03	0.03	0.04	—	—	—	—	0.03

Considerando los datos contenidos en el cuadro anterior aparecen conclusiones muy importantes, que pueden resumirse de la manera siguiente:

1.º La dunita es una roca extremadamente uniforme; las variaciones que se observan en las muestras procedentes de diversos yacimientos no son mayores que las observadas entre las de un mismo yacimiento. Estas variaciones provienen del cromo y de la alúmina y corresponden á una cantidad más ó menos grande de cromita en la dunita.

2.º En ninguna de las dunitas analizadas se encuentra el menor indicio de calcio, lo cual demuestra la ausencia de las formas de transición entre la dunita platinífera y la piroxenita á olivino, al contrario de otras dunitas no platiníferas, que contienen espinela en vez de cromita, y que contienen calcio procedente de una cierta cantidad de piroxeno romboédrico, que hace pasar dichas dunitas á hartburgitas.

3.º A pesar de ser la dunita una roca uniforme, de composición constante, no resulta lo mismo para el platino que encierra.

Los trabajos de *Duparc* y *Holtz* (*) sobre la composición química del platino dunitico demuestran:

1.º Hay variación sensible entre el platino procedente de un mismo yacimiento. Sin embargo, esta variación es pequeña y se puede caracterizar cada yacimiento dunitico por la composición del platino que encierra.

2.º Hay grandes diferencias entre la composición de dos platinos, de dos yacimientos vecinos, por ejemplo: el *Swellicbor Weressowy-ouwal*.

3.º Las diferencias son considerables entre el platino de los diversos yacimientos duniticos de los Urales.

Esta uniformidad de la dunita permite, gracias á los nu-

(*) Notiz über die chemische Zusammensetzung einiger Platinerge aus dem Ural. *Tschermks Mineralogische und petrografische Mittheilung*.

merosos análisis que de ella he hecho, calcular la composición química media de la dunita platinífera, es decir, del magma primordial que contenía en disolución el platino.

Para ello basta calcular el promedio de los análisis (referidos á 100 partes), transformar todo el hierro á FeO y referirlo de nuevo á 100 partes.

El resultado obtenido es el siguiente.

SiO_2	=	40.18
Al_2O_3	=	0.48
Cr_2O_3	=	0.59
FeO	=	8.84
MgO	=	49.88
TiO_2	=	0.03
		100.00

Igualmente interesante era ver el comportamiento de las serpentinas. Aparte los dos tipos analizados de Taguil, he procedido al análisis de una tercera muestra sacada de un filón, no ya de dunita, sino de piroxenita platinífera. Estos filones de serpentina han sido considerados como dunitas completamente serpentinizadas.

He aquí el resultado:

Muestra (2) tomada en Gusseyv Kamén.

	A	B
H_2O	11.66	
SiO_2	36.39	40.65
Al_2O_3	0.05	0.05
Fe_2O_3	13.84	15.46
FeO	1.97	2.21
MgO	37.26	31.63
	101.17	100.00

Comparemos los resultados de esta serpentina con los de las serpentinas de Taguil (315), (303).

	N.º 315 B	N.º 303 B	N.º 2 B
$Si O_2 =$	39.77	41.63	40.65
$Al_2 O_3 =$	0.39	0.36	0.06
$Cr_2 O_3 =$	0.37	1.05	—
$Fe_2 O_3 =$	6.76	3.71	15.46
$Fe O =$	1.49	1.98	2.21
$Mg O =$	51.19	41.22	41.63
$Ti O_2 =$	0.03	0.05	—

Se ve perfectamente que las serpentinas de Taguil, límites del yacimiento dunítico (fig. 5), derivan necesariamente de esta roca con la que tienen indiscutibles analogías. Por el contrario, los filones de serpentinas en la piroxenita parecen derivar de una roca, de olivino sin duda, pero que no es la dunita platinífera normal, de la que se alejan por la ausencia de cromo, la débil cantidad de alúmina y la fuerte proporción de hierro.

Composición del Olivino.

Las propiedades ópticas de este mineral son muy poco variables, y como por otra parte el olivino forma casi exclusivamente la dunita y los análisis de ella son sensiblemente idénticos, es de esperar que el tipo realizado por este mineral, será á su vez de una gran uniformidad.

Para establecer este tipo he procedido de la siguiente manera: después de haber calculado cada análisis para 100 partes (previa sustracción del agua), elimino todo el cromo como Cr_2O_3 , FeO y la alúmina como Al_2O_3 , FeO . Luego transformo el hierro en FeO , después de haber restado la cantidad retenida por los óxidos en cuestión. Hecho esto, se refiere el resto á 100 partes, y el resultado obtenido, corresponde sensiblemente á la composición que debería tener el olivino antes de la descomposición.

Luego, por medio de los cálculos ordinarios, busco la correspondencia relativa del número de moléculas de $Mg_2 Si$

O_4 y $Fe_2 Si O_4$ que entran en la composición del mineral; luego calculo en sentido inverso el tanto por ciento correspondiente á los diversos elementos según la fórmula obtenida.

El ejemplo siguiente demuestra la manera de operar:

(N.º 28) Dunita. $Si O_2 = 40.57$ $Al_2 O_3 = 0.81$ $Cr_2 O_3 = 0.42$ $Fe_2 O_3 = 5.65$ $Fe O = 3.50$ $Mg O = 49.01$ $Ti O_2 = 0.04$ <hr style="width: 100%;"/> 100.00	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} Al_2 O_3 Fe O = 1.38 \\ Cr_2 O_3 Fe O = 0.62 \end{array} \right\} =$	Olivino encontrado. $Si O_2 = 41.66$ $Fe O = 8.02$ $Mg O = 50.32$ <hr style="width: 100%;"/> 100.00
--	--	---

Dividiendo estos resultados por los pesos moleculares respectivos obtendremos el número de moléculas:

$$\begin{aligned} Si O_2 &= 0.6897 \\ Fe O &= 0.1115 \\ Mg O &= 1.2467 \end{aligned}$$

Haciendo el más pequeño igual á la unidad obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} Si O_2 = 6.185 \\ Fe O = 1 \\ Mg O = 11.43 \end{array} \right\} Fe_2 Si O_4 + 11 Mg_2 Si O_4$$

Para comprobar si los resultados obtenidos son exactos cálculo el olivino partiendo de la fórmula obtenida:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 Fe O}{Fe_2 Si O_4 + 11 Mg_2 Si O_4} &= \frac{x}{100} = 8.18 \\ \frac{22 Mg O}{Fe_2 Si O_4 + 11 Mg_2 Si O_4} &= \frac{x}{100} = 50.55 \\ \frac{12 Si O_2}{Fe_2 Si O_4 + 11 Mg_2 Si O_4} &= \frac{x}{100} = 41.27 \end{aligned} \right\} \text{Olivino calculado.}$$

Olivino.

	Encontrada.	Calculada.
$Si O_2 =$	41.66	41.27
$Fe O =$	8.02	8.18
$Mg O =$	50.32	50.55
	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
	100.00	100.00

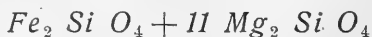
Como se ve, la fórmula encontrada era exacta.

En el cuadro siguiente están contenidas las fórmulas calculadas para el olivino junto con los demás componentes de la dunita en cada una de las muestras analizadas.

NÚM.	Yacimiento.	Fórmula (Olivino)	$Cr_2 O_3 FeO$	$Al_2 O_3 FeO$
	Omonthaña.....	$Fe_2 Si O_4 + 11 Mg_2 Si O_4$	1.13	0.29
179	Taguil.....	I + 12 >	0.04	0.90
218		I + 13 >	0.75	0.78
129		I + 14 >	0.62	0.43
207		I + 12 >	1.12	0.10
314		I + 11 >	0.37	0.75
115	Swetli-bos. Iss.....	I + 11 >	0.38	0.89
99		I + 12 >	0.56	1.12
113		I + 11 >	0.58	0.73
83		I + 12 >	1.92	1.50
65	Weressow-ouwal, Iss.....	I + 11 >	0.65	0.60
58		I + 11 >	0.52	0.55
67		I + 10 >	0.34	0.53
22	Kaménouchtey.....	I + 11 >	0.43	1.04
27		I + 11 >	0.53	0.65
28		I + 11 >	0.62	1.38
705	Sosnowsky-ouwal. Koswiusky..	I + 11 >	—	2.19
1030	Kitlur. Koswiusky.....	I + 8 >	2.22	0.60
1127	Tilal-Kaujakowsky.....	I + 9 >	1.79	—
—	Glodkała-Sopka.....	I + 9 >	1.17	0.24

De lo que precede se deduce que la composición química del olivino oscila entre $Fe_2 Si O_4 + 8 Mg_2 Si O_4$ y $Fe_2 Si O_4 + Mg_2 Si O_4$.

La mayor parte de las variedades analizadas corresponden á

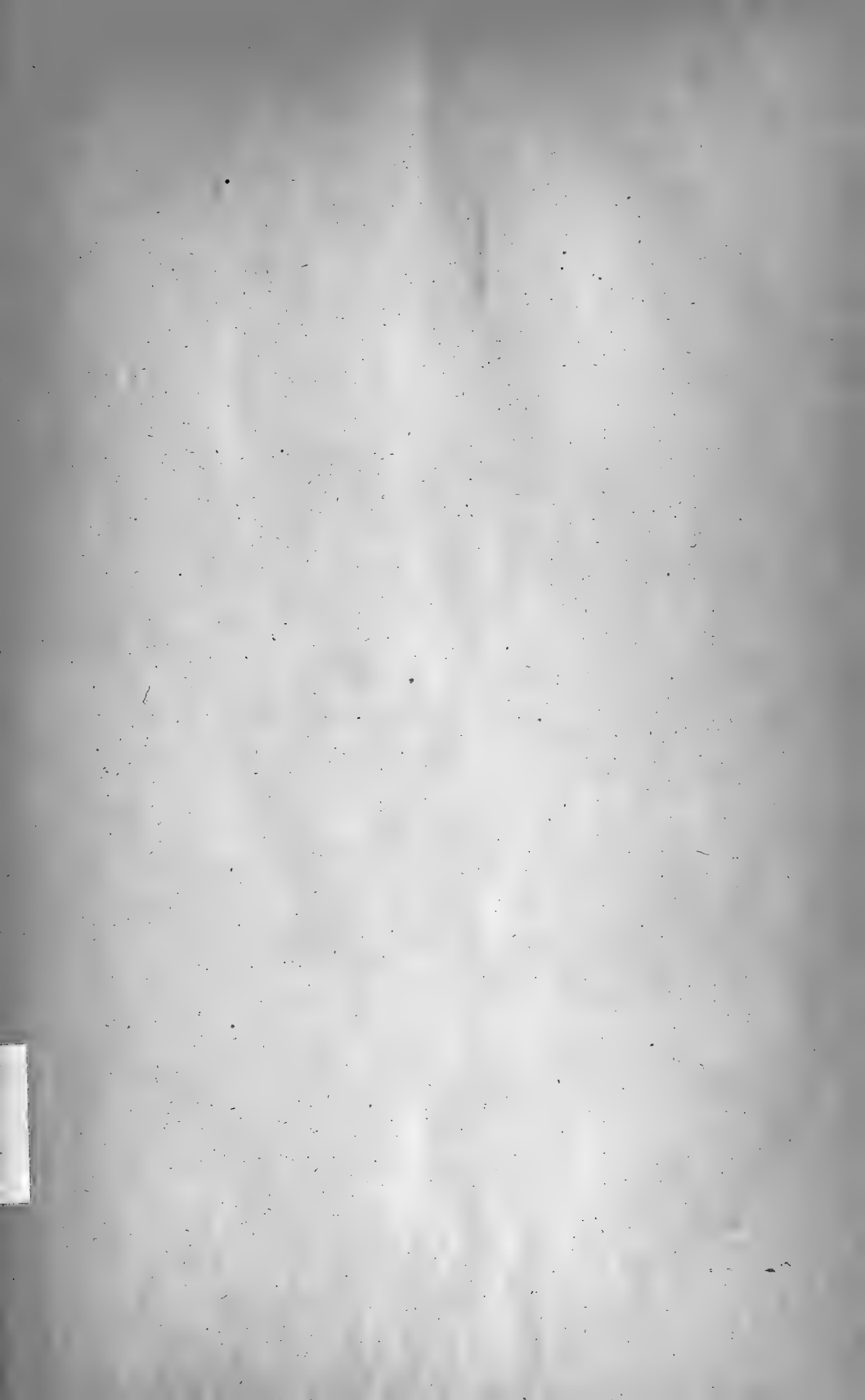


pudiendo establecerse dicho tipo como fórmula del olivino en la dunita platinífera.

Llevé á cabo este trabajo en los laboratorios de análisis químico mineral de la Universidad de Ginebra siendo asistente del Prof. Duparc.

Quedo sinceramente agradecido á mi antiguo Maestro por los innumerables datos que sobre este asunto me ha facilitado, así como por el material etc. que puso desinteresadamente á mi disposición durante todo el curso de mi trabajo.

Madrid, 1911.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1911.	5
I.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimo-quinta.	11
II.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimo-sexta.	31
III.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimo-séptima.	52
IV.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimo-octava.	76
V.— El Profesor D. Juan Fages, por <i>José Rodríguez Mourelo</i>	100
VI.— Apúntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i>	119
VII.— Estudio acerca de la dunita platinífera de los Urales, por <i>S. Piña de Rúbies</i>	151

La suscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

7

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X.—NÚM. 4.

Octubre de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

VIII.—**Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.**

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimonovena.

SEÑORES:

Varias veces he expresado esta idea, que de nuevo voy á recordar.

Que en la ciencia, así en la ciencia experimental, como en la ciencia teórica, si los hechos son la materia de que la ciencia parte, no son ellos la ciencia misma.

La ciencia se compone de grandes leyes ó de pequeñas leyes, según está más ó menos adelantada.

La ciencia busca lo constante en lo variable, que es, como si dijéramos, el orden en el caos.

Estas leyes, esta constancia, no negamos que en cierto modo pueda presentarse en las cualidades de las cosas, y en su combinación, para constituir los fenómenos complejos.

Pero esto sucede en las ciencias embrionarias. En las ciencias positivas, cuando alcanzan cierto grado de perfección, las leyes son cuantitativas, y se traducen en fórmulas matemáticas.

Y cuanto más avanzan las ciencias, este carácter de la constancia, de la permanencia, de la invariabilidad, más y más se acetúa.

Casi me atrevería á decir, acudiendo á términos hoy muy en boga, que si los hechos son la masa ó el *sustratum* de los fenómenos, la esencia de la ciencia ya formada, son las *invariantes*.

Teoría extensísima que á casi todas las ramas de la ciencia pura, y de la ciencia teórica y aun de la ciencia experimental, se aplica.

*
* *

Estudiábamos en las conferencias anteriores la hidrodinámica en general, y en ella, el caso particular de los torbellinos, y en aquélla y en éste procurábamos determinar, en la gran complicación del fenómeno del movimiento, algo permanente é invariable.

En el caso particularísimo, casi pudiéramos decir en el caso ideal del fluido perfecto, hacíamos constar que una línea flúida y cerrada permanecía siempre como línea flúida y cerrada también.

Y lo propio respecto á las superficies flúidas, y otro tanto respecto á las línea y superficies de torbellinos, que en todo el movimiento conservaban este carácter.

La línea de torbellino, línea de torbellino continuaba siendo.

El tubo de torbellino se conservaba como tal tubo de torbellino, y todas estas, podemos decir, sin forzar mucho el sentido del término, que son propiedades invariantes, pero invariantes de cualidad.

La cualidad de ser línea flúida cerrada, se conserva.

La cualidad de ser superficie flúida cerrada, se conserva también.

Y se conservan en todo el movimiento las cualidades de ser línea de torbellinos, tubo de torbellinos ó superficie de torbellinos en general.

Pero aquí no aparecen todavía las invariantes perfectas ó

que nosotros, dado el carácter de la ciencia positiva, como más perfectas que las anteriores consideramos.

Aquí no entra todavía la medida, el número, la función cuantitativa.

Esta aparece, por decirlo de este modo, con el teorema de Helmholtz, que hemos demostrado y aplicado en las conferencias precedentes.

A saber:

La circulación, á lo largo de una línea fluída cerrada, se conserva en todo el movimiento de esta línea en el fluído; es un número determinado, característico hasta cierto punto, de la línea y que es invariable en todos los instantes del tiempo.

Como en la Física, se afirma la constancia de la materia en todos los instantes, desde el tiempo infinito negativo hasta el tiempo infinito positivo, y á esta ley, ó á este postulado, se le da el nombre de conservación de la materia, así en la hidrodinámica, se puede establecer, para toda línea fluída cerrada, la constancia de la *circulación*.

Y tal circulación, ya lo hemos dicho, es una integral.

Si la llamamos I podemos escribir

$$I = \int_c (u dx + v dy + w dz)$$

en que u , v , w , son las componentes de la velocidad para todos los puntos de la curva cerrada C , y en que dx , dy , dz , son las componentes de cada elemento ds de dicha curva.

Dada la forma de la expresión anterior, podemos afirmar, que en la hidrodinámica es *una invariante de integral*, ó si se quiere, que es una integral invariable.

Si el problema del movimiento se ha resuelto, u , v , w serán conocidas en función de x , y , z , t y la propiedad señalada podrá comprobarse materialmente efectuando la integración, y prácticamente veríamos en este caso, que desaparecía

el tiempo t al efectuar dicha integración, en cualquier instante, ó sea para cualquier valor de t .

Y que la integración podría efectuarse teóricamente, no cabe duda, porque las ecuaciones de la curva C serían

$$\begin{aligned}y &= f(x, t), \\z &= f_1(x, t); \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}dy &= f'(x, t) dx, \\dz &= f'_1(x, t) dx; \end{aligned}$$

y sustituyendo en I , resultará:

$$I = \int_c (u dx + v f'(x, t) dx + w f'_1(x, t) dx),$$

ó bien

$$I = \int_c [u + v f'(x, t) + w f'_1(x, t)] dx.$$

Pero si el problema está resuelto, conoceremos u, v, w , en función de x, y, z ; y aunque no esté resuelto, sabemos que, para cualquier instante, estas tres componentes de la velocidad, son funciones de x, y, z, t es decir

$$\begin{aligned}u &= \varphi(x, y, z, t), \\v &= \varphi_1(x, y, z, t), \\w &= \varphi_2(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Ahora bien; como se trata de las velocidades para puntos de la curva C , en vez de y, z , debemos sustituir sus valores dados por las ecuaciones de dicha curva, de modo que tendremos:

$$u = \varphi(x, f(x, t), f_1(x, t), t),$$

$$v = \varphi_1(x, f(x, t), f_1(x, t), t),$$

$$w = \varphi_2(x, f(x, t), f_1(x, t), t),$$

y sustituyendo, en el valor de I resultará por último

$$I = \int_c [\varphi(x, f(x, t), f_1(x, t), t) + \varphi_1(x, f(x, t), f_1(x, t), t)f'(x, t) + \varphi_2(x, f(x, t), f_1(x, t), t)f'_1(x, t)] dx.$$

Todo el paréntesis del segundo miembro es una función de x, t ; representándolo, para abreviar, por F , es evidente que I será de la forma

$$I = \int_c F(x, t) dx,$$

que es una integral de la sola variable x tomada á lo largo de la curva cerrada C .

Y el teorema de Helmholtz tiene este sentido:

Que en dicha integral desaparece t y que I tiene, por lo tanto, el mismo valor en cualquier instante.

Este valor es finito, si el movimiento es rotacional.

Este valor es constante, pero es igual á cero, si el movimiento es irrotacional.

Pero dicho valor sólo es igual á cero, cuando el espacio en que se mueve la curva C es simplemente conexo; por ejemplo, una esfera, un elipsoide.

Si el espacio es doblemente conexo, hay que considerar dos clases de curvas: para las que pueden recogerse en un punto y anularse, el valor de I , es decir, la *circulación* es nula todavía; para las que no gozan de esta propiedad, sin salirse del espacio irrotacional, la circulación tiene un valor determinado á que hemos dado el nombre de módulo para

una sola vuelta, resultado que se generaliza como vimos para muchas vueltas en uno ó en otro sentido.

Tal es el resumen de las últimas conferencias que hemos querido presentar en forma sintética á nuestros alumnos.

*
* *
*

Dichos resultados pueden generalizarse, sin dificultad de ningún género, para espacios de conexión múltiple.

Nos limitaremos á un ejemplo, y no se olvide que se trata de movimientos irrotacionales.

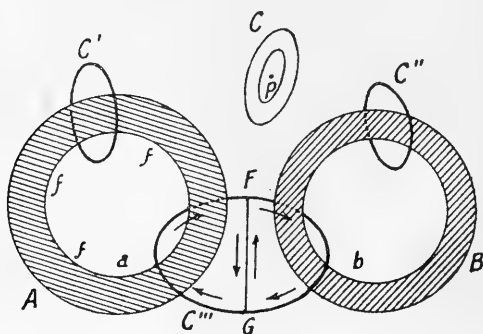


Figura 57.

Sea (fig. 57), un espacio en que el fluido tiene movimiento irrotacional definido del siguiente modo:

Imaginemos dos anillos A, B : decimos anillos para generalizar la figura que se llama *toro*. Son, por decirlo así, figuras análogas á esta última, sólo que no son de revolución.

El interior de dichos anillos corresponde á movimientos rotacionales y el exterior, todo él, á un movimiento irrotacional.

Es, en rigor, un espacio triplemente conexo, porque si imaginamos un diafragma a , que corte al primer anillo,

abriéndolo á lo largo de fff , y otro diafragma análogo b , que corte al segundo, ambos anillos se convertirán en espacios simplemente conexos, y el espacio exterior será simplemente conexo también, como por ejemplo, el que rodea á una esfera.

En el sistema primitivo, es decir, antes de trazar las secciones a , b , pueden imaginarse cuatro clases de curvas.

1.º Curvas análogas á C , que pueden recogerse en un punto P por la ley de continuidad. La circulación de estas líneas C es nula, porque es aplicable la demostración que hemos dado para este caso.

La superficie que traza C hasta reducirse á un punto P , está toda ella en un espacio simplemente conexo de movimiento irrotacional, luego todos los ejes de los torbellinos para sus diferentes puntos son iguales á *ceró*, y si el flujo es nulo en la superficie, la circulación es nula en la curva.

2.º Líneas, como la C' , que dan vuelta al anillo A , enlazándose á él como un eslabón á otro eslabón.

3.º Líneas, como la C'' , que dan vuelta al anillo B .

4.º Líneas, como la C''' , que enlazan ambos anillos A y B , del mismo modo que un eslabón enlaza á dos eslabones.

Estas tres últimas clases de líneas, pueden dar una ó varias vueltas antes de cerrarse.

Según explicábamos á propósito de la conexión doble, para simplificar la explicación supondremos, que no dan más que una vuelta.

Líneas análogas á la C' = Imaginemos (fig. 57) el anillo A y la curva C' .

A esta línea no se le puede aplicar la demostración anterior porque para recogerse en un punto tiene que penetrar en el interior del anillo; de modo que no puede decirse que su circulación es nula.

Su circulación tendrá un valor determinado μ , al cual le daremos el nombre de *módulo*, como antes hacíamos.

Y podemos demostrar, que dos líneas, ó tantas líneas como se quieran C' , C'_1, \dots de esta misma clase, todas tienen el mismo módulo μ , es decir, el mismo valor para la circulación.

La demostración es idéntica á la que dimos para los espacios doblemente conexos.

En efecto, cortemos el anillo (figuras 58 y 58 bis) por un

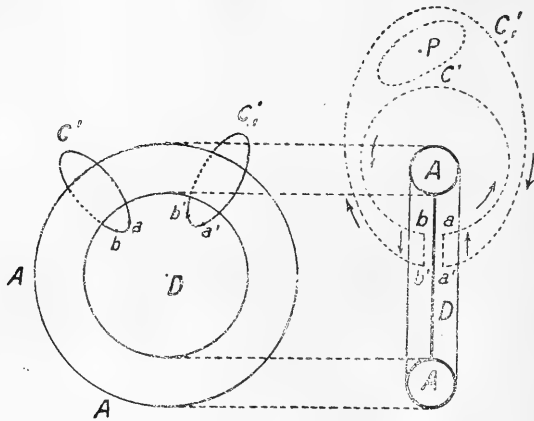


Figura 58.

Figura 58 bis.

diafragma ó sección D ; y hemos duplicado la figura, poniéndola de frente y de costado, ó si se quiere, en dos proyecciones, para mayor claridad de la explicación.

En la figura 58, se ve el anillo de frente; en la figura 58 bis, se ve, por decirlo así, de canto. Las mismas letras representan los mismos elementos de ambas figuras.

La sección D ó diafragma se ve también de frente en la figura 58 llenando el hueco del anillo y en la figura 58 bis se proyecta, según la recta D .

Ahora bien, interrumpamos la línea C' en dos puntos a, b infinitamente próximos á uno y otro lado del diafragma.

Interrumpamos, asimismo, otra línea cualquiera, C'_1 de

la misma clase que C' , en dos puntos a' , b' , infinitamente próximos y á ambos lados del diafragma D .

Y unamos, por líneas, los puntos a , a' y b , b' .

Ambas líneas, estarán infinitamente próximas y en el límite se confundirán sobre el diafragma D .

El resto de la demostración es idéntico al que dimos en la conferencia precedente.

La línea $aC'bb'C'_1a'a$, es una línea cerrada. Está toda ella en un espacio simplemente conexo; se encuentra en el mismo caso que la línea C de la figura 57 y puede recogerse en un punto P , sin tener que salir del espacio en que no hay movimiento rotacional.

Luego su circulación es nula y podremos escribir sucesivamente sin necesidad de entrar en más explicaciones:

$$\begin{aligned} \text{circulación } (aC'bb'C'_1a'a) &= 0, \\ \text{cir. } (aC'b) + \text{cir. } (bb') + \text{cir. } (b'C'_1a') + \text{cir. } (a'a) &= 0, \\ \text{cir. } (bb') + \text{cir. } (a'a) &= 0, \\ \text{cir. } (aC'b) + \text{cir. } (b'C'_1a') &= 0, \\ \text{cir. } (aC'b) &= - \text{cir. } (b'C'_1a'), \\ \text{cir. } (aC'b) &= \text{cir. } (a'C'_1b'), \\ \text{cir. } C' &= \text{cir. } C'_1. \end{aligned}$$

En resumen, todas las curvas de segunda clase C' , que dan una vuelta al anillo en el mismo sentido, tienen la misma circulación, es decir, el mismo módulo.

Líneas de tercera clase como C'' (fig. 57). = Todo lo que hemos dicho de las líneas de segunda clase C' , puede repetirse para estas líneas C'' .

Todas tendrán el mismo módulo, que en general, será distinto del de las C' .

Pasemos á las líneas de cuarta clase como C''' . = Estas enlazan los dos anillos A , B (fig. 57).

Como en las dos clases anteriores no puede demostrarse que la circulación sea nula, porque, por ejemplo, la línea C''' para reducirse á un punto necesita penetrar en los anillos A, B que son espacios de movimiento rotacional.

El valor de su módulo se deduce de los dos módulos de los casos anteriores.

En efecto, dividamos la línea C''' (fig. 57), por medio de la línea FG , en dos contornos.

El de la izquierda, envuelve al anillo A , como la línea C' .

El de la derecha, envuelve al anillo B , como la línea C'' .

Por otra parte, la circulación de la línea C''' , es igual á la suma de las circulaciones de los dos contornos, toda vez que las circulaciones á lo largo de FG se destruyen.

Luego, en primer lugar, la circulación en todas las líneas C''' será la misma y el módulo de C''' será la suma de los módulos de C' y C'' .

Los signos serán positivos ó negativos, según el sentido de la circulación.

No insistamos más sobre este ejemplo, que como puede verse, es sencillísimo.

* * *

De todo lo dicho resulta, que la cantidad I es una invariante ó una serie de invariantes, en el sentido que ya hemos suficientemente explicado, lo mismo en el movimiento rotacional que en el irrotacional.

Esta teoría de las invariantes, como antes dijimos, es importantísima en dinámica, como en hidrodinámica.

Ha sido magistralmente desarrollada por el eminente matemático Mr. Poincaré en el tercer tomo de su obra titulada «Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste», y abre extensos y fecundos horizontes en la teoría de la integración de las ecuaciones diferenciales.

Y como todo se enlaza en las ciencias matemáticas y físico-matemáticas, es imposible pensar en las invariantes integrales, sin pensar al mismo tiempo en otro orden de problemas que se comprenden bajo el título general de «Statistical Mechanics» del profesor Gibbs.

Y al recordar, que en esta última obra una de las principales aplicaciones de la mecánica estadística es á la termodinámica, nos asalta una vez más el remordimiento de que el programa que expusimos en la primera conferencia de este curso es incompleto, y á cada paso que damos resulta más incompleto todavía.

Pero todo no puede decirse de una vez, ni todos los caminos que se descubren desde cierta altura pueden recorrerse á medida de la voluntad.

Terminemos, pues, esta digresión y continuemos el estudio de los torbellinos, que es la materia propia de este curso.

*
* *

Estudiábamos la circulación de curvas cerradas en un espacio doblemente conexo, y presentábamos como ejemplo el volumen llamado *toro*, ó si se quiere, *anillo* de revolución en que la sección meridiana es un círculo que no corta al eje.

En el interior de este espacio admitíamos la existencia de un movimiento irrotacional, y decíamos:

Que la circulación de toda curva, que en dicho espacio daba una vuelta al eje, era una cantidad determinada que se designaba con el nombre de módulo.

Los principiantes, no siendo de inteligencia excepcional, á los que asaltan á veces dudas, que quién sabe si á veces son presentimientos de algo, que más bien adivinan con la imaginación, que no afirman con la razón fría y severa, tal vez se formulan esta pregunta:

¿Pero en un toro, ó anillo de revolución, pueden existir movimientos irrotacionales?

La idea de que el *toro* es un sólido de revolución, se impone en cierto modo á los fenómenos de movimiento, que en su interior se desarrollan, haciendo creer que también han de ser de revolución y que han de formar parte de lo que hemos llamado movimiento rotacional.

Ésta sería una verdadera ilusión.

En el interior de un toro pueden existir, como hemos supuesto, movimientos irrotacionales.

Y esta es una de aquellas afirmaciones, que se demuestran con el hecho mismo.

Basta presentar ejemplos, y vamos á presentar uno:

Supongamos, como hemos dicho, un toro ó anillo de revolución, en que el movimiento sea circular.

Supongamos que todos los puntos del flúido que rellena el interior del toro describen curvas planas, cuyos planos sean perpendiculares al eje.

Este eje es el eje de las z , y el plano de las x y y pasa por el centro de la figura: es claro que las velocidades, en cualquier instante, serán paralelas al plano de las x y y , y que la velocidad paralela al eje de las z será nula.

Además, supondremos que las componentes u , v están definidas por las siguientes ecuaciones, á las que agregaremos que la velocidad paralela al eje de las z es igual á cero; y tendremos para definir la velocidad de cualquier punto del fluido, en cualquier instante

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad w = 0.$$

Puesto que u , v , w son independientes del tiempo, claro es que este ejemplo, que vamos á estudiar, se referirá, no sólo al caso de los movimientos irrotacionales, sino al caso particular de los movimientos permanentes.

Supongamos que el eje del *toro* se proyecta en O (figura 59).

El coeficiente angular de la recta AV , que representa la velocidad, es decir, la tangente del ángulo que forma con el eje de las x , será

$$\frac{v}{u} = \frac{\frac{-x}{x^2 + y^2}}{\frac{y}{x^2 + y^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Y como el coeficiente angular del radio OA es $\frac{y}{x}$, el producto de ambos coeficientes angulares será

$$\frac{v}{u} \times \frac{y}{x} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1,$$

de modo que ambas rectas son perpendiculares.

De aquí resulta, que la línea de corriente para cualquier punto A , es decir, la envolvente de las velocidades V , tiene su tangente AV , perpendicular al radio OA .

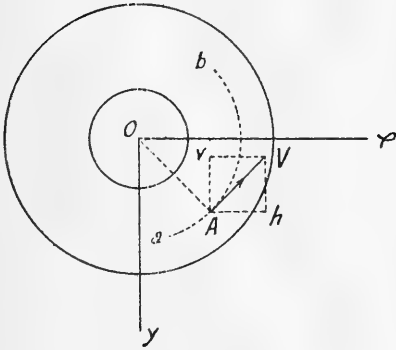


Figura 59.

En suma, la línea de corriente para cualquier punto A del interior del *toro* es una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje proyectado en O , y cuyo radio es OA .

Sabemos además, puesto que el movimiento es permanente, que las trayectorias se confunden con las líneas de corriente.

De modo que todo punto del fluido describe circunferencias cuyos planos son perpendiculares al eje O .

Y juzgando á la ligera, un principiante podría ver confirmada la duda que antes expusimos; podría creer que el movimiento del fluido es en su totalidad y en sus elementos un movimiento rotacional, cuando hemos dicho y probaremos inmediatamente, que es un movimiento irrotacional.

La figura 60, que comprende dos esquemas, uno para el movimiento rotacional, otro para el movimiento irrotacional, aclara la duda á que venimos refiriéndonos.

En el *toro A* imaginemos, que *a* es un elemento infinitamente pequeño de fluido, elemento prismático, porque sus

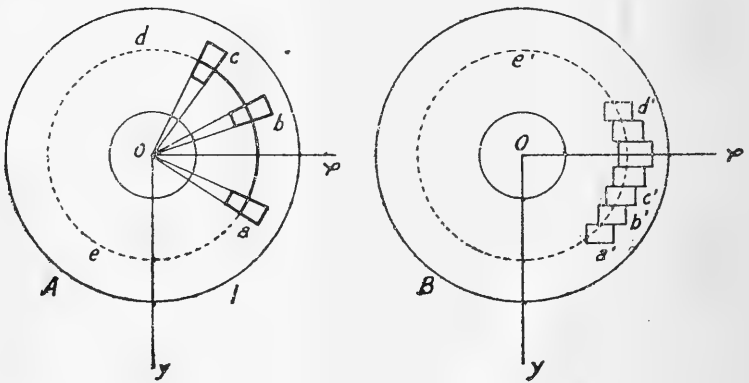


Figura 60.

aristas son paralelas al eje *O*; pero cuya sección recta es un trapecio curvilíneo, infinitamente pequeño, compuesto de dos radios y dos arcos de círculo.

Si este elemento infinitamente pequeño de fluido, como si fuera un cuerpo sólido, girando alrededor del eje *O*, pasa por las posiciones *a*, *b*, *c*....., y otro tanto sucede en todos los planos paralelos al de las *x* y con cada elemento trapecoidal de fluido; el movimiento de éste en el interior del *toro A*, será, en efecto, un movimiento rotacional:

Aquí, la ilusión y la realidad están de acuerdo, cada elemento de fluido girará alrededor de un eje que pasa por

su centro al recorrer las posiciones a, b, c, \dots , que es como si girase alrededor de O , y al mismo tiempo el centro de cada uno de estos elementos describe circunferencias alrededor de O .

Este es un esquema clarísimo del movimiento rotacional.

En cambio, en el toro B cada elemento a' también describe una circunferencia alrededor del eje O ; pero si imaginamos un elemento de fluido infinitamente pequeño a' , y para facilitar el esquema damos á su sección recta la forma de un pequeño rectángulo cuyos lados sean paralelos á los ejes x, y , siendo por de contado la arista siempre paralela al eje de las z proyectada en O , este rectángulo, ó elemento de fluido, aunque su eje describa la circunferencia $a' e'$ se moverá paralelamente asimismo, ocupando las posiciones a', b', c', d', \dots . Pero sin girar nunca dicho elemento; de modo que el fluido, se moverá con movimiento irrotacional.

Aquí la ilusión y la realidad son distintas.

Vemos, pues, que los movimientos rotacionales no deben buscarse en el movimiento total y aparente, sino en los movimientos internos, por decirlo así, de los elementos del fluido.

Y en rigor teórico, el trapecio ó el rectángulo de las dos figuras, no son más que símbolos aproximados y, por decirlo así, diferenciales: en puro idealismo hay que pasar al límite.

*
* *

Hemos dicho que las fórmulas supuestas

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad w = 0$$

corresponden á un movimiento irrotacional; pero esto no es evidente, hay que ver si tales valores de las componentes de la velocidad satisfacen á la condición de dicho movimiento,

es decir, si estamos en el caso de la figura A (fig. 60) ó de la figura B.

Sabemos, por haberlo demostrado en conferencias anteriores, que para que en una región, el movimiento del fluido sea irrotacional, es preciso que se tenga

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy},$$

ecuaciones que se deducen de igualar á cero las tres ecuaciones del eje del torbellino para cualquier punto.

Veamos si los valores de u , v , w , satisfacen á estas tres condiciones.

Tendremos

$$\frac{d \frac{y}{x^2 + y^2}}{dy} = \frac{d \frac{-x}{x^2 + y^2}}{dx}, \quad \frac{d \frac{y}{x^2 + y^2}}{dz} = \frac{dw}{dx} = 0,$$
$$\frac{d \frac{-x}{y^2 + y^2}}{dz} = \frac{dw}{dy} = 0.$$

Las dos últimas ecuaciones se reducen á $0 = 0$, porque en el primer miembro no entra z y en el segundo w es nula. Y esto, por otra parte, es evidente, puesto que se trata de movimientos paralelos al plano de las x y , y la coordenada z no entra en juego. No queda más que efectuar las diferenciaciones de la primera ecuación, y resultará

$$\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ó bien simplificando

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

es decir, una identidad.

Luego, en efecto, el movimiento definido por los valores anteriores de u, v, w , es un movimiento irrotacional.

Pero la comprobación anterior era indispensable, toda vez que los valores u, v, w , aunque escogidos de propósito por el autor de quien tomamos este ejemplo, para quien no conoce el origen de dichos valores, deben ser considerados como elementos, por decirlo así, de un teorema que es preciso demostrar; ó como las integrales en el sistema de variables de Euler, de un grupo de ecuaciones diferenciales del movimiento del flúido, que no conoce tampoco.

* * *

Tanto es así, que antes de seguir debemos demostrar, que los valores de u, v, w , corresponden á un problema real del movimiento hidrodinámico, y que satisfacen al sistema de ecuaciones diferenciales de Euler.

Las ecuaciones de Euler hemos visto que tienen la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz} - \frac{du}{dt},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dt},$$

$$\rho = f(p),$$

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{d(\rho u)}{dx} - \frac{d(\rho v)}{dy} - \frac{d(\rho w)}{dz} = 0.$$

Estas ecuaciones se simplifican por las hipótesis que hemos hecho: á saber, porque suponemos un movimiento permanente, de modo que, u, v, w , son independientes del tiempo, y además, el movimiento es paralelo al plano de las

x, y ; de suerte que los derivados con relación á z son nulas y w es nula también.

Teniendo esto en cuenta, las ecuaciones anteriores se reducen á las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= X - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= Y - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy}, \\ \rho &= f(p), \\ \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} &= 0. \end{aligned}$$

A estas ecuaciones es preciso demostrar que satisfacen los valores de u, v, w establecidos *à priori*.

Pero aun consideraremos ecuaciones más especiales, y si á éstas satisfacen dichos valores de u, v, w , con más razón satisfarán á las anteriores, que contienen funciones arbitrarias; porque es, por decirlo así, prescindir de funciones que pueden contribuir por su indeterminación á que tales ecuaciones sean satisfechas.

Vamos á suponer que no actúan fuerzas exteriores; el fluido se mueve por las impulsiones iniciales, y por lo tanto, $X = 0, Y = 0, Z = 0$,

Y todavía supondremos que la densidad ρ es una constante.

Con todo lo cual, las últimas ecuaciones del movimiento se reducirán á las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= -u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= -u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy}, \\ \rho &= \text{constante}, \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} &= 0. \end{aligned}$$

A estas últimas deben satisfacer los valores

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad w = 0.$$

Empecemos por la ecuación de continuidad, que ha quedado reducida á

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0.$$

Sustituyendo u y v resultará:

$$\frac{d \frac{y}{x^2 + y^2}}{dx} + \frac{d \frac{-x}{x^2 + y^2}}{dy} = 0,$$

y efectuando

$$\frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

ó bien

$$\frac{-2xy + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

que es en efecto una identidad.

Dicha condición de continuidad queda, pues, satisfecha.

Pasemos á las dos primeras ecuaciones y veremos que pueden reducirse á la siguiente:

$$dp = \rho \left(-u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} \right) dx + \rho \left(-u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} \right) dy;$$

porque, en efecto, si satisfacen á la condición de integrabilidad, claro es que los coeficientes $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$ de las dos ecuaciones fundamentales, son los coeficientes diferenciales parciales de la diferencial total dp .

La condición de integrabilidad será, como se sabe

$$\frac{d \cdot \rho \left(-u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} \right)}{dy} = \frac{d \cdot \rho \left(-u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} \right)}{dx}$$

O dividiendo por ρ y cambiando signos

$$\frac{d \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} \right)}{dy} = \frac{d \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} \right)}{dx}$$

Sustituyendo los valores de u , v , $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ que son los siguientes:

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

tendremos

$$\frac{d \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]}{dy} =$$

$$= \frac{d \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{+2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right]}{dx},$$

ó bien

$$\frac{d \frac{-xy^2 - x^3}{(x^2 + y^2)^3}}{dy} = \frac{d \frac{-x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^3}}{dx},$$

y, por fin,

$$\frac{d \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}}{dy} = \frac{d \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}}{dx},$$

que diferenciado da

$$\frac{-x \cdot 2(x^2 + y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-y \cdot 2(x^2 + y^2) 2x}{(x^2 + y^2)^4}$$

que es, en efecto, una identidad.

*
*
*

Las consideraciones que preceden, han tenido por único objeto demostrar, que los valores de v , v , w , que hemos establecido, no son valores incompatibles con las ecuaciones del movimiento del fluido, lo cual *á priori*, casi pudiera suponerse, porque aun fijando valores para u , v , w , en las ecuaciones generales de Euler, quedaban cinco expresiones que determinar por medio de dichas cinco ecuaciones, á saber: X , Y , Z , p , ρ .

Pero no contentándonos con esta observación general, hemos querido descender á los últimos pormenores del problema y al llegar á este punto podemos hacer dos afirmaciones rigurosas.

1.^a Que las expresiones

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \quad w = 0$$

no son incompatibles en modo alguno con las ecuaciones generales del movimiento en el sistema de coordenadas de

Euler, y que, por lo tanto, se refieren á un movimiento posible, mejor dicho, á un movimiento real.

2.^a Que los valores de u, v, w , dan valores nulos, para las componentes del eje de torbellino en el interior del *toro*.

Es decir, que

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

De suerte que, el movimiento en el interior de dicho espacio será un movimiento irrotacional.

Y ahora en este ejemplo podemos ver prácticamente, que la circulación de cualquier curva de segunda clase, es decir, de las que dan vuelta al eje por el interior del *toro*, no es igual á cero, sino que tiene un valor determinado para una vuelta y múltiplos de este valor para vueltas sucesivas.

Como u, v, w tienen formas en x, y perfectamente definidas, la demostración, mejor dicho, la comprobación de este aserto, se reduce á efectuar prácticamente la integración de

$$I = \int_c (u dx + v dy + w dz),$$

que en este caso se reduce á

$$I = \int_c \left(\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right).$$

Esta integración, puesto que los coeficientes obedecen á la ley de integrabilidad, puede efectuarse por el procedimiento general que en el cálculo integral se enseña; pero la integración es inmediata recordando, que si se tiene la función de dos variables,

$$U = \text{arc. } tg \frac{x}{y},$$

La diferencial total de U , á saber

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy,$$

puesto que

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d \cdot \text{arc. tg } \frac{y}{x}}{dx} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{d \text{ arc. tg } \frac{y}{x}}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

será

$$dU = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

luego, salvo el signo que depende del sentido de la rotación

$$I = \int_c d \left(\text{arc. tg } \frac{y}{x} \right) = \left[\text{arc. tg } \frac{y}{x} \right]_c$$

El arco que tiene por tangente $\frac{y}{x}$ es el correspondiente al ángulo AOx , fig. 59.

Pero la función definida por la tangente no es una función uniforme, puesto que á una misma tangente $\frac{y}{x}$ corresponden infinitos arcos que difieren unos de otros en una semicircunferencia π .

Cuando y es cero, siendo $r = I$ que es el radio de la circunferencia, al arco podemos suponer que es cero, como punto de partida.

Cuando y vuelve á ser cero, el arco es igual á π .

Cuando se cierra el círculo, el arco es 2π , y así sucesivamente.

Luego la circulación, al cerrarse el círculo, no es nula y si la curva continúa dando vueltas, la circulación continúa creciendo que es precisamente lo que nos proponíamos comprobar.

En la conferencia próxima, que acaso sea la última de este curso, resumiremos el resultado de estas últimas conferencias y plantaremos uno de los problemas fundamentales de la teoría de los torbellinos, que no es para tratado á la ligera y que probablemente servirá de materia, por lo menos para una parte del curso próximo.

IX.— Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia vigésima.

SEÑORES:

Después de establecer en las primeras conferencias de este curso los principios generales de la hidroestática y de la hidrodinámica, y de hallar las ecuaciones generales aplicables á este orden de fenómenos, dijimos que en el movimiento del fluido perfecto, tal como al empezar lo definíamos, existen dos clases diversas de movimientos, á saber:

El movimiento rotacional.

Y el movimiento irrotacional.

En uno y en otro, y en el movimiento general del fluido, pertenezca á uno ó á otro de dichos movimientos, procuramos hallar *lo constante en lo variable*, y perdónesenos esta fórmula un tanto filosófica.

Y así demostrábamos, en general, que toda línea flúida cerrada se conservaba constantemente cerrada en todos los instantes, y que siempre estaba compuesta de los mismos elementos flúidos.

Y demostrábamos, además, que toda superficie flúida y cerrada presentaba el mismo carácter.

Esta circunstancia de líneas y superficies responde bien, en este caso general, á la fórmula que hace un momento hemos establecido: lo constante en lo variable, empleando la palabra constante en el sentido tantas veces explicado.

Y completando estas mismas propiedades, demostrábase el teorema de Helmholtz; que para toda curva cerrada, durante todo el movimiento, existía un valor constante para *la circulación*.

Pasando después al movimiento rotacional, definíamos las líneas de torbellino, los tubos de torbellino y las superficies de torbellino, estableciendo una serie de teoremas siempre dominados por la misma idea: buscar la constancia de propiedades ó de magnitudes en la variabilidad del movimiento.

Y así decíamos: toda línea de torbellino en todos los instantes, se conserva como línea de torbellino. Toda superficie de torbellino sigue siéndolo á través del tiempo.

Todo tubo de torbellino variará de forma, pero se conserva á través del movimiento como tubo de torbellino; y la constante que lo caracteriza, su intensidad, pudiéramos decir, ó sea el valor de la circulación de una curva de circuito, no cambia de valor numérico.

Pasábamos después al movimiento irrotacional, buscando resultados en cierto modo análogos á los que habíamos hallado en el movimiento rotacional, á saber: el valor de la circulación de una curva cerrada, y demostrábamos otra serie de teoremas, para las diferentes clases de espacios simplemente conexos, ó de conexión múltiple.

En el primer caso, la circulación era nula, diferenciándose del movimiento rotacional en que la circulación en éste tiene un valor determinado.

En cambio, para la conexión múltiple, hacíamos una clasificación de líneas, en las que, exceptuando el caso de la conexión sencilla, la circulación toma valores finitos, aun-

que para cada clase de curvas el módulo era el mismo

Y en estos términos podemos decir que hemos hecho el resumen del presente curso.

*
* *

Lo hemos dicho y lo hemos repetido hasta la saciedad.

En el fluido perfecto que hemos tomado, como materia primera de los fenómenos que estudiamos, pueden presentarse dos clases de movimientos: 1.º El movimiento rotacional en que cada elemento fluido, en un tiempo infinitamente pequeño dt , ejecuta un giro, que podemos suponer uniforme y que es infinitamente pequeño como el tiempo dt , alrededor de un eje, que es el eje del torbellino; y 2.º, el movimiento irrotacional en que los elementos fluidos no giran, sino que se transportan, paralelamente á sí mismos y en todo caso se dilatan ó se contraen.

Pero aquí ocurre una pregunta:

¿En cualquier masa del fluido perfecto, pueden coincidir ambos movimientos, para una parte el rotacional y para otra el irrotacional? ¿Ó por el contrario se excluyen, y en toda la masa no existe al mismo tiempo más que el movimiento rotacional ó el irrotacional?

La contestación á esta pregunta es concreta y terminante.

Sí; pueden existir á la vez ambos movimientos.

Una porción del fluido, ó varias porciones separadas del mismo, pueden estar dotadas de movimiento rotacional y de movimiento irrotacional el resto del fluido.

Ya esta misma cuestión la hemos apuntado otras veces, y casi es evidente la posibilidad de la coexistencia de ambos movimientos.

En el origen del movimiento, las velocidades iniciales, aun

siendo continuas, así como sus derivadas, pueden ser tales, que para determinadas regiones del fluido tengan una potencial, y por lo tanto, las componentes del eje de torbellino sean nulas.

En esta región ó regiones, el movimiento será irrotacional é irrotacional se conservará en el transcurso del tiempo, lo cual se puede ver de muchas maneras; entre otras, recordando que la propiedad de conservar una potencial las velocidades del sistema es propiedad permanente.

En cambio, puede suceder que en otra ó en otras regiones del fluido las velocidades del instante inicial sean tales, que no tengan una potencial, y que, por lo tanto, los tres binomios

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad \frac{du}{dx} - \frac{du}{dy}$$

tengan valores finitos.

Pero hemos demostrado, que los movimientos irrotacionales se conservan en cualquier instante, sin que en ellos puedan aparecer movimientos rotacionales, á no ser que en ellos se presenten fuerzas de rozamiento ó viscosidad, ó, en general, que no tengan una potencial.

Los torbellinos no aparecen espontáneamente, si vale la palabra.

Asimismo, los movimientos rotacionales que aparecen en un instante por la acción de cierta clase de fuerzas, tampoco desaparecen y se convierten en movimientos irrotacionales de una manera espontánea.

En suma: se comprende que en un fluido puedan coexistir ambas clases de movimientos.

Claro es que esto supone cierto orden de discontinuidad en las derivadas de u , v , w , con relación á x , y , z .

Más claro: las componentes u , v , w en todo el fluido, pueden ser funciones continuas.

Pueden ser también funciones continuas sus derivadas, con relación á x, y, z .

Y, sin embargo, los binomios anteriores pueden tener en una región valores finitos y continuos, en cuyo caso el movimiento será rotacional y en la región contigua ser iguales á cero.

La figura 61 es un esquema de la clase de discontinuidad á que nos referimos.

Por ejemplo, una ordenada finita para la curva AB de pronto se convierte en nula, y nula se conserva en todo el eje CD .

O bien, la ordenada de $A'B'$ se reduce á cero al llegar á B' y se conserva igual á cero en toda la línea $B'D'$.

En estas faltas de continuidad y en otras análogas nos ocuparemos en otra ocasión, porque constituyen toda una clase de problemas, que en este momento no podemos abordar.

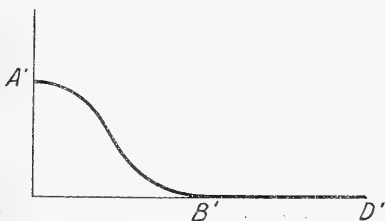
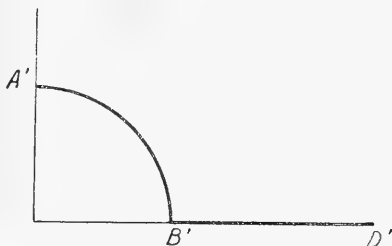
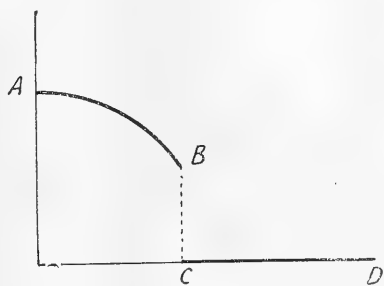


Figura 61.

De las explicaciones que preceden se deduce que en el interior de un fluido perfecto y en su movimiento á través del tiempo, pueden presentarse simultáneamente regiones de movimiento rotacional y regiones de movimiento irrotacional.

Pueden, por ejemplo, siguiendo el movimiento general del fluido, que supondremos irrotacional, caminar diversas líneas de torbellino cerradas, formando anillos, ó indefinidas; tubos de torbellinos; superficies de torbellinos también, á la manera que navegan sobre un río embarcaciones de diversas clases.

* * *

Y aquí se presenta un problema importantísimo, que ya en este curso no podemos estudiar por completo, pero que probablemente, y si no cambio de idea, será el asunto principal del próximo curso.

Cuestión importante, porque con ella se enlazan al menos por la forma de la representación, y por analogía entre las funciones analíticas, los problemas de la electro-estática y de la electro-dinámica, por una parte, y por otra ciertos problemas de química, como puede verse en la obra ya citada de J. J. Thomsoun, titulada *A Treatise ou the Motion of Vortex Rings*.

No es muy antigua, aunque ya tiene veintisiete años y la ciencia camina hoy con velocidades eléctricas.

Pero así y todo, y aunque hemos de estudiar ó nos proponemos estudiar obras más modernas, la que hemos citado merece ocupar un puesto de honor en este conato de enciclopedia que aspiran á formar estas conferencias.

Y el problema á que venimos refiriéndonos en los párrafos anteriores, es el siguiente:

Las ecuaciones que determinan las componentes del eje

de rotación ó de torbellino en cada punto de un fluido perfecto y en cada instante, sabemos que son

$$2\xi = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad 2\eta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad 2\zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Si los segundos miembros son nulos, el movimiento será irrotacional, porque las componentes del eje del torbellino ξ , η , ζ serán nulas también.

Si por el contrario estos segundos miembros tienen valores en los puntos (x, y, z) , para éstos, es decir, para todos los puntos en que los binomios anteriores no se anulen, el movimiento será rotacional y se compondrá de torbellinos.

Advirtamos una vez más que las ecuaciones precedentes no son ecuaciones ya integradas; y por ahora sólo se ve que pueden resolver ciertos problemas sin previa integración.

Expresan, única y exclusivamente, propiedades del movimiento del fluido, muy interesantes, muy curiosas, acaso muy fecundas, pero nada más.

Mientras no integremos las ecuaciones diferenciales, no podremos saber cuál es la forma en función de x, y, z, t de las funciones de estas variables $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$.

Pero aquí se presenta el problema á que venimos refiriéndonos, sin haberlo enunciado todavía, y que por fin vamos á enunciar ahora.

Si el problema general del movimiento hubiera sido resuelto, es decir, si hubiéramos integrado las ecuaciones diferenciales de dicho movimiento, claro es que conoceríamos u, v, w , en función de x, y, z, t ; á saber:

$$u = \varphi_1(x, y, z, t)$$

$$v = \varphi_2(x, y, z, t)$$

$$w = \varphi_3(x, y, z, t)$$

y en este caso podríamos inmediatamente conocer las componentes de los ejes del torbellino para cualquier instante, y para todos los puntos del fluido. Si las ecuaciones precedentes fueran generales, conoceríamos los valores de ξ , η , ζ , para todo punto x , y , z , y en cualquier instante t , y donde el movimiento fuera irrotacional, deberíamos hallar

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Y este resultado se obtendría mediante seis diferenciaciones.

En efecto; tomemos el valor de ξ que es

$$2\xi = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz},$$

y lo que de él digamos podríamos repetir para η y ζ .

Basta diferenciar, con relación á y y z , las expresiones

$$w = \varphi_3(x, y, z, t),$$

$$v = \varphi_2(x, y, z, t),$$

y tendremos

$$\frac{dw}{dy} = \varphi'_{3y}(x, y, z, t)$$

$$\frac{dv}{dz} = \varphi'_{2z}(x, y, z, t),$$

sustituyendo en el valor de ξ , resultará:

$$2\xi = \varphi'_{3y}(x, y, z, t) - \varphi'_{2z}(x, y, z, t);$$

de suerte, que conoceremos esta primera componente del eje del torbellino en cualquier punto x , y , z , y para cualquier instante t , con sustituir en la ecuación precedente, en vez de x , y , z , las coordenadas del punto, y en vez de t , el valor de esta variable para el instante que se considere.

Como el problema de la integración suponemos que está resuelto, y que las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, son conocidas, el segundo miembro de la última ecuación quedará perfectamente determinado y nos dará el valor de ξ .

Esto mismo podemos decir para las otras dos componentes del eje de torbellino.

Por eso hemos dicho, que esta primera parte del problema se resolvía inmediatamente conociendo u, v, w , en función de x, y, z, t .

Y ahora, se plantea la segunda parte del problema, ó mejor dicho, el problema inverso. A saber: Conociendo ξ, η, ζ , en función de x, y, z , en cualquier instante, determinar en ese instante u, v, w , para cualquier punto del fluido.

Vemos, en resumen, que el problema comprende dos partes:

1.^a Conociendo u, v, w , en función de x, y, z, t , determinar ξ, η, ζ , para cualquier punto; y esto hemos visto que es sencillísimo.

2.^a Suponiendo que por cualquier medio se han determinado, ó dicho en general, que se conocen ξ, η, ζ , determinar u, v, w .

En rigor, este es un problema de cálculo integral, porque puede plantearse de este modo: Integrar las ecuaciones

$$2\xi = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad 2\eta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad 2\zeta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Un problema análogo á este, mejor dijéramos, que con él coincide, lo hemos resuelto en el curso anterior (véase curso 1909 á 1910, pág. 299), y en el curso próximo lo trataremos con alguna extensión.

Por el momento, y ya que no sea posible entrar en otros desarrollos, nos limitaremos á presentar un caso tomado de la obra de Mr. Poincaré.

*
* * *

Preguntábamos a veces. ¿Pueden coincidir en el movimiento de un fluido perfecto los movimientos rotacionales y los irrotacionales, es decir, en unas regiones unos y en otras regiones otros?

Y á esta pregunta contestábamos afirmativamente; y á este caso, se refiere el ejemplo que vamos á presentar.

Imaginemos, que el fluido es un líquido absolutamente incomprensible; pero sin viscosidad, es decir, que entra en la definición del fluido perfecto.

Suponemos que el fluido se extiende hasta el infinito y que el movimiento se verifica paralelamente al plano de las x y, é igualmente, por decirlo de esta manera, en todos los planos paralelos á dicho plano coordenado.

Claro es, que no habrá que contar con la variable z , porque sea cual fuere z , con tal que x , y no varien, el movimiento será el mismo. Podemos decir, que el movimiento se efectúa por rectas paralelas al eje de las z .

Luego toda derivada, con relación á esta variable, será nula.

Por una razón análoga podemos establecer $w = 0$, puesto que no existe movimiento paralelo al eje de las z .

Si además suponemos que no existen fuerzas exteriores, claro es, que las ecuaciones generales del movimiento, según el sistema de Euler,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz} - \frac{du}{dt},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - u \frac{dw}{dy} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz} - \frac{\partial w}{\partial t},$$

$$\rho = f(p)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0.$$

se simplificarán por manera notable, y más, si se agrega que el movimiento sea permanente.

Aplicando dichas simplificaciones, es decir, suprimiendo X, Y, Z ; las derivadas con relación á z ; los términos en que entra w ; las derivadas con relación al tiempo, porque el movimiento hemos dicho que es permanente, y dividiendo la ecuación de continuidad por ρ , toda vez que hemos supuesto que se trata de un líquido incomprensible, tendremos que las ecuaciones generales de Euler se reducirán á

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= -u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= -u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy}, \quad (1) \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} &= 0. \end{aligned}$$

Dicho esto, definamos el sistema que vamos á escoger en las condiciones ya establecidas, siendo el movimiento, como queda expuesto, paralelo al plano de las x y y .

Consideraremos un tubo de torbellino cuya sección por el plano de las xy sea el círculo AB (fig. 62). Su centro O y su radio R .

Este tubo supondremos que es indefinido y su eje coincide con el eje de las z .

Fuera de este tubo de torbellino, el resto del espacio admitiremos, que está sometido á un movimiento irrotacional; en cambio, dentro del tubo ó del cilindro AB todos los filetes paralelos al eje de las z son otros tantos tubos-torbellinos.

De modo que el tubo torbellino AB es un tubo torbellino macizo, si vale la palabra. Y nos proponemos demostrar, que pueden coincidir ambos movimientos: el *rotacional* del tubo macizo AB y el *irrotacional* del espacio exterior á este tubo, y que las velocidades de todo este espacio dependen de las constantes que determinan el tubo rotacional.

Supongamos el problema resuelto, tomando la solución que da Mr. Poincaré y vamos á *comprobar* dicha solución, demostrando que en el interior de AB el movimiento es rotacional, en el exterior irrotacional, y que las velocidades en la parte exterior dependen del tubo torbellino, que hemos establecido paralelo al eje de las z .

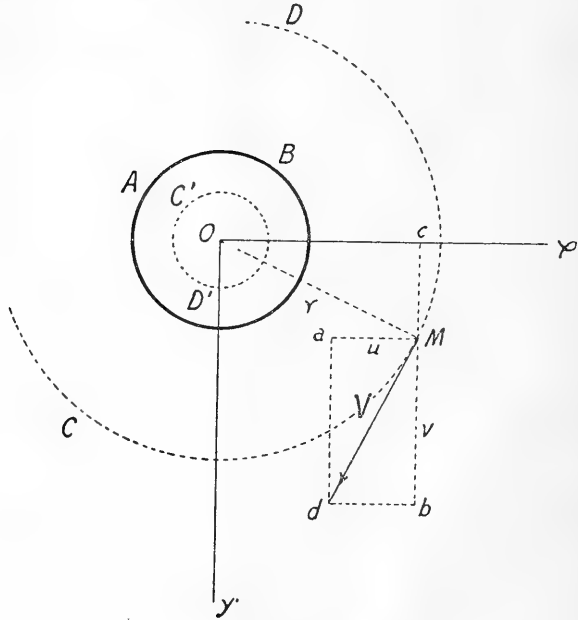


Figura 62.

Supongamos que la velocidad de un elemento infinitamente pequeño del fluido, situado en M , á la distancia r , del centro O tenga por valor V , siendo V función de r y que, además, Md sea perpendicular al radio OM .

Esta es una hipótesis que necesita comprobarse.

Porque no nos satisface decir, que por razón de simetría tendrá dicha dirección.

Resulta de lo supuesto, que las componentes de V , es decir, u , v , serán

$$u = -V \cos aMd, \quad v = V \cos bMd;$$

y como

$$\cos aMd = \cos OMc = \frac{y}{r} \quad \text{y} \quad \cos bMd = \cos cOM = \frac{x}{r}$$

resultará

$$u = -V \frac{y}{r}, \quad v = V \frac{x}{r}.$$

Claro es que la tercera componente será $w = 0$, puesto que el movimiento es paralelo al plano de las x y y .

Hemos dicho que V es, ó se supone que es una función de r , función que determinaremos más adelante, de modo que satisfaga á las condiciones del problema.

Para abreviar haremos:

$$\frac{V}{r} = \frac{V(r)}{r} = \varphi(r)$$

y resultará

$$u = -\varphi(r)y, \quad v = \varphi(r)x.$$

Vamos á comprobar que estas dos expresiones satisfacen á las ecuaciones generales del movimiento, sin especificar la naturaleza de la función φ , y después determinaremos φ de modo que en el cilindro AB el movimiento sea rotacional, fuera del cilindro irrotacional y que las velocidades sean continuas al pasar del interior al exterior del cilindro.

* * *

En primer lugar demostraremos que los valores anteriores de u , v satisfacen á la ecuación de continuidad que es una de las ecuaciones generales del movimiento. A saber:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0.$$

Sustituyendo los valores de u, v tendremos:

$$\frac{d(-\varphi(r)y)}{dx} + \frac{d(\varphi(r)x)}{dy} = 0,$$

en que evidentemente, según la figura 62,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ó} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La ecuación de continuidad, efectuando las diferenciaciones se convierte en

$$-\varphi'(r) \frac{dr}{dx} \cdot y + \varphi'(r) \frac{dr}{dy} \cdot x = 0,$$

ó bien

$$-\varphi'(r) \frac{x}{r} y + \varphi'(r) \frac{y}{r} x = 0,$$

que es, en efecto, una identidad.

Luego, estos valores de u, v , por lo pronto, *satisfacen á la ecuación de continuidad.*

Veamos ahora si satisfacen á las dos primeras ecuaciones (1), que son

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= -u \frac{du}{dx} - v \frac{dv}{dy} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= -u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} \end{aligned}$$

en que hemos supuesto que ρ es una constante.

Para que estas dos ecuaciones puedan integrarse y den un valor para p en función de x, y , es preciso que

$$dp = \frac{du}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy,$$

ó bien

$$dp = \rho \left(-u \frac{du}{dx} - v \frac{dv}{dy} \right) dx + \rho \left(-u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dx} \right) dy$$

sea una diferencial exacta, de los dos variables x , y . Deberá, pues, verificarse la condición

$$\frac{d\left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy}\right)}{dx}$$

en que hemos cambiado el signo y hemos dividido por φ .

Sustituyendo los valores de u , v , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d\left[-\varphi(r)y \frac{d(-\varphi(r)y)}{dx} + \varphi(r)x \frac{d(-\varphi(r)y)}{dy}\right]}{dy} = \\ & = \frac{d\left[-\varphi(r)y \frac{d(\varphi(r)x)}{dx} + \varphi(r)x \frac{d(\varphi(r)x)}{dy}\right]}{dx}, \end{aligned}$$

y efectuando las primeras diferenciaciones de los numeradores,

$$\begin{aligned} & \frac{d\left[\varphi(r)\varphi'(r) \frac{dr}{dx} y^2 + \varphi(r)x \left(-\varphi'(r) \frac{dr}{dy} y - \varphi(r)\right)\right]}{dy} = \\ & = \frac{d\left[-\varphi(r)y \left(\varphi'(r) \frac{dr}{dx} x + \varphi(r)\right) + \varphi(r)x\varphi'(r) \frac{dr}{dy} x\right]}{dx}, \end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} & \frac{d\left[\varphi(r)\varphi'(r) \frac{xy^2}{r} - \varphi(r)\varphi'(r) \frac{xy^2}{r} - \varphi^2(r)x\right]}{dy} = \\ & = \frac{d\left[-\varphi(r)\varphi'(r) \frac{yx^2}{r} - \varphi^2(r)y + \varphi(r)\varphi'(r) \frac{yx^2}{r}\right]}{dx} \end{aligned}$$

y simplificando,

$$\frac{d(-\varphi^2(r)x)}{dy} = \frac{d(-\varphi^2(r)y)}{dx}.$$

Efectuando las diferenciaciones

$$-2\varphi(r)\varphi'(r)\frac{dr}{dy}x = -2\varphi(r)\varphi'(r)\frac{dr}{dx}y,$$

y por fin

$$-2\varphi(r)\varphi'(r)\frac{yx}{r} = -2\varphi(r)\varphi'(r)\frac{xy}{r},$$

que es una identidad.

Resulta de lo que precede, que suponiendo que un fluido perfecto se mueve paralelamente al plano de las x y , siendo las componentes de cada punto á la distancia r del eje

$$u = -\varphi(r)y, \quad v = \varphi(r)x,$$

estos valores de las componentes de la velocidad satisfarán á todas las ecuaciones diferenciales del movimiento.

Representarán, pues, un *movimiento posible*, sea cual fuese la forma de la función φ , la cual quedará, por lo tanto, indeterminada por el momento.

Y vamos á demostrar ahora, para completar la solución del problema, que puede darse á dicha función $\varphi(r)$ una forma tal, que en el espacio exterior al cilindro AB , el movimiento sea irrotacional; que cambiando la forma de φ en el interior de dicho cilindro AB , el movimiento será rotacional, y que la velocidad variará de una manera continua al pasar del interior al exterior.

Para que el movimiento sea irrotacional es preciso, como sabemos, que se verifique la condición

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0,$$

ó bien

$$\frac{du}{dy} = \frac{av}{dx}.$$

Sustituyamos en esta ecuación los valores de u , v , y determinemos la función indeterminada φ de modo que la ecuación precedente quede satisfecha.

Tendremos

$$\frac{d(-\varphi(r)y)}{dy} = \frac{d(\varphi(r)x)}{dx};$$

y desarrollando,

$$-\varphi'(r) \frac{dr}{dy} y - \varphi(r) = \varphi(r) \frac{dr}{dx} x + \varphi(r),$$

ó bien

$$-\varphi'(r) \frac{y^2}{r} - \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{x^2}{r} + \varphi(r),$$

de donde,

$$-\varphi'(r) \frac{x^2 + y^2}{r} = 2\varphi(r),$$

y por fin,

$$-\varphi'(r) r = 2\varphi(r).$$

Sustituyendo por $\varphi(r)$ su valor $\frac{V(r)}{r}$, en que V representa la velocidad Md (fig. 62), tendremos

$$-\frac{d\left(\frac{V(r)}{r}\right)}{dr} r = 2 \frac{V(r)}{r},$$

y diferenciando

$$\frac{-rV'(r) + V(r)}{r^2} r = 2 \frac{V(r)}{r},$$

ó bien

$$-V'(r) + \frac{V(r)}{r} = 2 \frac{V(r)}{r},$$

de donde

$$-V'(r) = \frac{V(r)}{r}.$$

Tenemos, pues, que integrar la ecuación diferencial

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{V(r)}{r}$$

que será

$$\frac{dV(r)}{V(r)} + \frac{dr}{r} = 0,$$

cuya integral es

$$\log V + \log r = \log C,$$

siendo C una constante.

De aquí se deducen sucesivamente

$$\log Vr = \log C$$

$$Vr = C$$

$$V = \frac{C}{r}.$$

En suma, para que en el exterior del cilindro AB el movimiento sea irrotacional, la velocidad V , que en la figura hemos representado por Md , debe ser tangente á la circun-

ferencia CD , como antes demostramos, y su valor debe ser inverso del radio $OM = r$.

Supongamos ahora que nos proponemos determinar φ de modo que el movimiento en el interior del cilindro AB sea rotacional y que en cada punto del interior de dicho cilindro AB el eje del torbellino paralelo al eje de los z tenga el valor ζ .

En este caso deberemos establecer:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta,$$

y sustituyendo por v, u sus valores.

$$\frac{a(\varphi(r)x)}{dx} + \frac{d(\varphi(r)y)}{dy} = 2\zeta,$$

y efectuando las diferenciaciones

$$\varphi(r) + x\varphi'(r)\frac{dr}{dx} + \varphi(r) + y\varphi'(r)\frac{dr}{dy} = 2\zeta,$$

ó bien

$$2\varphi(r) + \varphi'(r)\left(\frac{x^2 + y^2}{r}\right) = 2\zeta,$$

que se reduce á

$$2\varphi(r) + r\varphi'(r) = 2\zeta;$$

y sustituyendo en vez de φ su valor $\frac{V(r)}{r}$ tendremos

$$2\frac{V(r)}{r} + r\frac{d\frac{V(r)}{r}}{dr} = 2\zeta.$$

No habrá más que integrar esta ecuación para determinar $V(r)$.

Pero la ecuación queda satisfecha, y esto es hacer la integración inmediatamente, estableciendo

$$V(r) = C_1 r,$$

en que C_1 es una contante.

En efecto, sustituyendo este valor de $V(r)$, resulta:

$$2 \frac{C_1 r}{r} + r \frac{dC_1}{dr} = 2\zeta.$$

Como hemos dicho que C_1 es una constante, resulta

$$C_1 = \zeta,$$

luego la ecuación queda satisfecha dando á la constante el valor ζ .

Así, pues, el movimiento del fluido en el interior del cilindro AB será rotacional, si á cada punto del interior de dicho cilindro le damos una velocidad normal al radio que pasa por dicho punto, y cuyo valor sea

$$V(r) = \zeta r.$$

Sólo queda por llenar una condición para la continuidad de las velocidades. A saber: que en cada punto de la circunferencia AB que separa la región rotacional de la irrotacional, los valores de V coincidan.

Para el exterior teníamos

$$V = \frac{C}{r}.$$

Para el interior

$$V = \zeta r,$$

y como el radio de la circunferencia AB lo designamos por R , la condición á que nos referimos será

$$\zeta R = \frac{C}{R},$$

de donde deduciremos para la constante C el valor $C = R^2 \zeta$.

En resumen, podremos tener, paralelamente al plano de las x y y un movimiento tal, que en el interior del cilindro AB tenga el flúido un movimiento rotacional, en el exterior un movimiento irrotacional, coincidiendo ambos para la superficie AB , satisfaciendo á todas las condiciones del movimiento, así respecto á la ecuación de continuidad como á las dos primeras ecuaciones diferenciales, y dando valores determinados para la presión p , salvo la constante de esta última integración; todo esto se realizará, repetimos, si la velocidad de cualquier punto exterior es perpendicular al radio que pasa por dicho punto y tiene por expresión

$$V = \frac{\zeta R^2}{r}$$

y la velocidad para los puntos interiores es igual á

$$v = \zeta r.$$

*
* * *

M. Poincaré, que trata este ejemplo, llega á los mismos resultados con mucha más rapidez, aunque para la inteligencia de los alumnos hayamos creído más conveniente seguir la marcha general, que acabamos de explicar.

M. Poincaré dice; aunque no con estas palabras:

«El trabajo de la velocidad en una circunferencia cualquiera CD , trazada desde O , es decir,

$$\int (u d\varphi + v dy)$$

equivale evidentemente, toda vez que V es tangente á dicha circunferencia, al producto de la longitud de CD por la velocidad tangente V , es decir,

$$\text{circulación sobre la circunferencia } CD = 2\pi r V.$$

Esto, por una parte; pero se sabe por el teorema de Stókes que dicha circulación es igual al flujo del vector torbellino sobre toda el área que comprende dicha circunferencia.

Como la corona comprendida entre CD y AB corresponde al movimiento irrotacional, los torbellinos serán nulos y el flujo nulo también.

No hay que contar, pues, con dicha corona.

Queda el círculo comprendido en la circunferencia AB . Si para toda esta área el eje del torbellino es constante é igual á 2ζ , el flujo que buscamos será igual al área multiplicada por ζ , es decir,

$$\text{flujo área } AB = 2\pi R^2 \zeta.$$

E igualando esta expresión á la anterior, toda vez que la circulación es igual al flujo, tendremos

$$2\pi R^2 \zeta = 2\pi r V,$$

de donde

$$V = \frac{\zeta R^2}{r},$$

que es el mismo resultado que antes habíamos obtenido para la velocidad en los puntos exteriores.

Supongamos ahora, que el punto que se considere es interior á la circunferencia AB . Sea, pues, $C'D'$.

Llamando como antes r á su radio y V á la velocidad tangencial, la circulación será, como antes, $2\pi r V$.

Por el teorema de Stokes esta expresión debe ser igual al flujo del vector torbellino en el círculo que comprende $C'D'$, advirtiendo que aquí todo se aprovecha para el flujo, porque no hay ninguna corona en que el flujo sea nulo.

Tendremos, pues,

$$\text{flujo torbellino} = 2\pi r^2 \zeta.$$

E igualando á la expresión anterior

$$2\pi r V = 2\pi r^2 \zeta.$$

De donde se deduce

$$V = \zeta r,$$

que es también el resultado obtenido anteriormente.

*
* *

Este ejemplo, que es sencillo, y, por decirlo así, sugestivo, se presta á muchas consideraciones, y muchas observaciones pueden hacerse también respecto á su aplicación.

Por ejemplo, si R disminuye tendiendo hacia cero, con tal que ζ crezca en la debida proporción, de manera que ζR^2 tienda hacia una constante m , el valor V de la velocidad del movimiento irrotacional será una cantidad finita

$$V = \frac{m}{r},$$

y tendremos en presencia, por decirlo de este modo, un filete torbellino proyectado en O , y alrededor un campo de movimiento irrotacional.

Y lo que es más importante, la velocidad de cualquier punto del fluido que diste r del eje torbellino, tendrá un valor inverso á dicha distancia y quedará perfectamente determinado.

Más aún: si el eje-torbellino se asemeja á una corriente eléctrica, la velocidad de cualquier punto exterior coincidirá en magnitud y en dirección con la fuerza que ejercería dicha corriente sobre un polo magnético colocado en el expresado punto.

Y aquí empiezan una serie de analogías, que ya anunciábamos al empezar este curso, entre la electrodinámica y la teoría de los torbellinos.

Pero todo esto y otros muchos problemas importantes, será preciso, bien contra mi voluntad, que queden para el curso próximo.

X.—La copelación, según antiguas recetas

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Aquí comienzo la publicación de algunas curiosidades de Alquimia, todas recogidas de Manuscritos españoles, casi ninguna de ellas original, no desprovistas, sin embargo, de interés, en las cuales se contiene lo esencial de las prácticas sutiles del Arte Magno, mezcladas con extravagantes doctrinas, y á veces, como en el caso actual, con procedimientos racionales, ahora llegados á los mayores adelantos, y cuyo fundamento encuéntrase en ciertos métodos alquimistas de gran fama, y no en las doctrinas profesadas por quienes los usaban con mayor esmero. Una idea mueve mi ánimo para decidirme á publicar, añadido de comentarios, lo recogido en mis largas pesquisas, y es la de contribuir, cuanto me fuere dado, á esclarecer la historia de la evolución de las ideas científicas en España, siquiera no haya sido otorgado á mis empeños y diligencia el favor de haber encontrado algo peregrino y singular, de todos ignorado; limitándose los resultados conseguidos á rectificar algunos puntos que á la historia química del alcohol se refieren, y serán á su tiempo tratados.

Mucho antes de ahora hubo escritores de mérito extraordinario, para quienes fueron objeto principal de notables investigaciones las referentes á las ideas de los contados verdaderos y originales alquimistas habidos en España; pues aun cuando hayan sido, en cierto modo, adeptos de la doctrina transmutatoria, la de más boga durante largo tiempo, nunca pueden entrar en la categoría de tales nuestros buenos metalurgistas, que tanto arte y tanto ingenio pusieron en ex-

traer el oro de sus placeres, la plata y el mercurio de cuantos minerales los contenían. Y entre estos escritores, he de rendir pleito homenaje, en el principio de mi trabajo, á don Marcelino Menéndez y Pelayo, cuya obra de *La Ciencia Española*, es la que encaminó mi voluntad hacia tal género de estudios, y á D. José Ramón de Luanco, autor del libro *La Alquimia en España*, colección de noticias admirables, de la cual puede sacar muchos provechos quien pretenda ocuparse en nuestra historia científica en determinados períodos.

Bien será decir ahora el objeto de sacar á plaza olvidadas vejeces y declarar mis intentos al dar á conocer estas peregrinas recetas para hacer oro y plata ó preparar los complejos brebajese, dotados de la excelencia y virtud de conservar el cuerpo en la más cabal salud y energía, privándolo de todo contagio y enfermedad, no siendo la última. Entre la barahunda y confusión de las prescripciones, siempre oscuras y enigmáticas, como para ser entendidas sólo por los adeptos y escrutadores del arte, la profusión de los ingredientes recomendados y lo misterioso y ambiguo del lenguaje, hay ciertas ideas fundamentales, por lo general sólo esbozadas, las cuales, andando los tiempos, adquirieron los debidos desarrollos, hasta convertirse en doctrinas científicas importantes, y aun en la misma práctica de varias operaciones primordiales, y de ellas es la copelación, contiéndose el germen y principio de bastantes y muy usados procedimientos metalúrgicos, y esto pretendo hacer resaltar en primer término, siquiera cuanto haya de dar á conocer sólo constituya, en definitiva, variantes más ó menos prácticas é ingeniosas de los contados métodos y de la teoría general que comprendieron el fondo de la Alquimia.

No se concretan á lo dicho mis propósitos. Hoy la historia de cualquiera ciencia no ha de limitarse al relato cronológico de los hechos, en el orden como fueron descubiertos, indagando á quién se deben y al de los orígenes de las doctrinas; antes bien, partiendo de lo actualmente conocido, debe tratar-

se de saber como en cada época y cada investigador ha pensado ó ha trabajado respecto de lo ahora sabido y al propio tiempo cuáles fueron sus medios y procedimientos y los modos de servirse de ellos. Si trato de la copelación es para saber su práctica, su teoría, y cómo pensaban acerca de ella, y cuál fué su importancia y sus resultados en determinada época y sigo en esto el criterio del famoso profesor W. Ostwald, porque es mejor darse cuenta de cómo pensaron y cómo ejecutaron nuestros predecesores, respecto de las cuestiones actuales ó de sus equivalentes, y preferible á entretenerse en buscar la sucesión, en el tiempo, de los descubrimientos y de las doctrinas, cuyo encadenamiento no suele aparecer claro, permaneciendo casi ignorados los términos esenciales de la evolución de las ciencias.

Conforme á tal modo de pensar, no me esforzaré en averiguar quiénes fueron ó pudieron ser los autores de las recetas y procedimientos encontrados; basta fijar su data para conocer que fueron practicados en la forma descrita, de ordinario variante de métodos tradicionales y de muy antiguo conocidos, y es menester además determinar su filiación y relaciones con lo primitivo, para darse cuenta de los cambios y perfeccionamientos debidos al tiempo, al lugar y al ingenio de los hombres. Faltar al sistema conduce á errores tan graves como el de haber considerado á Ramón Lull alquimista de profesión, hasta que, no ha mucho, demostró el señor Luanco cómo nunca lo había sido, á pesar de las tradiciones alquimistas llamadas lulianas, sostenidas por aquel Raimundo de Tárrega, usurpador del nombre insigne del Doctor Iluminado. Siguiéndolo, llégase á darse cuenta de cómo los primitivos metalurgistas, que sabían extraer oro y plata de arenas y minerales, no habían menester de afanarse buscando la piedra filosofal, aunque fuesen partidarios de la doctrina de la transmutación; y se explica el por qué en España no hubo alquimistas verdaderos, á no calificar de tales á los falsarios reduplicadores del oro, capaces de em-

baucar á los personajes de mayor jerarquía, deslumbrándolos con los más fabulosos resultados.

Otra ventaja dedúcese todavía del criterio expuesto, referente al carácter de los procedimientos descritos, siempre con gran lujo de pormenores, en los viejos manuscritos alquimistas españoles, y es su sentido práctico dominante, consistiendo en ello su nota distintiva. Tienen, si se quiere, escasa ó ninguna originalidad en lo fundamental, son acaso operaciones tradicionales; pero llevan en las variantes y en la propia descripción cierto sello de realidad muy de notar, y hay de continuo vislumbres y adivinaciones de cosas nuevas y de ideas generales, fruto de admirables intuiciones, sin desconocer, no obstante, como todos los autores de tales recetas para apartar el oro de la plata ó la plata del plomo estaban bien inficionados del legítimo virus alquimista, y con haber sido glorioso fundador de la Metalurgia científica, también de alquimista, en cuanto á las doctrinas, tuvo muchos puntos y ribetes el gran Alvaro Alonso Barba, y de ello encontrará cuantas pruebas quisiere quien registre su famoso y original libro de *El Arte de los Metales*.

De un procedimiento para copelar trata una receta puesta al final de cierto curioso Manuscrito de Alquimia del siglo xv, existente en nuestra Biblioteca Nacional, bajo la signatura Ii-6-, 10.824, procedente de la casa ducal de Osuna. Perteneció al primer marqués de Santillana y así lo describió Mr. Mario Schiff, á cuya buena amistad debo el conocimiento del documento, del cual conservo copia hecha de mi mano (1); habla de él el Sr. Rocamora en su Catálogo de la Librería de Osuna (2); da muy breves é incompletas noticias

(1) SCHIFF (MARIO).—«La Bibliothéque du Marqués de Santillana».—París 1905.

(2) ROCAMORA.—«Catálogo abreviado de los Manuscritos de la Biblioteca del Sr. Duque de Osuna é Infantado».—Núm. 12.—Madrid 1882.

de su contenido el Sr. Luanco, acaso sólo de referencia (1), y lo tengo descrito muy por menudo, hace tiempo, con ciertas ilustraciones de subido valor, porque proceden de monsieur Berthelot, con quien hube de consultar algunos puntos del Manuscrito en cuestión (2). No es un Tratado del Arte de la Alquimia, sino conjunto de fórmulas, recetas y doctrinas expuestas sin método, á modo de compilación, y entre ellas ocupa parte muy principal el libro nombrado *Imagen de la vida*, en el cual hállanse explicados ciertos procedimientos de destilación de líquidos alcohólicos y las figuras de los toscos y primitivos alambiques, acaso lo de mayor importancia en el Manuscrito contenido, y en él abundan extravagantes recetas, cuya eficacia se asegura con las palabras más rotundas, procedimientos metalúrgicos y descripciones de aparatos; todo ello mezclado con disertaciones filosóficas y morales acerca de la ciencia alquimista.

Para mí trátase de una colección de fragmentos reunidos por quien conocía bien la materia, añadiéndoles bastante de su cosecha, en torno del no acabado Tratado de la *Imagen de la vida*, cuyo fin es el nunca bien ponderado elixir, destinado á conservarla en el mejor estado por tiempo indefinido. Sin embargo, verdaderas novedades, aun para su data, que el Sr. Schiff ha fijado en el primer tercio del siglo xv, el Manuscrito contiene pocas; pero algunas son de notoria importancia, aun las reducidas á pormenores de carácter industrial, en general presentados con suficiente claridad dentro del enrevesado y enigmático lenguaje peculiar de los escritos de Alquimia. Reside, por lo tanto, en mi entender, el interés del Manuscrito en su fecha, en su procedencia española, siquiera sea ignorado el autor, en los dibujos, en ex-

(1) LUANCO.--«La Alquimia en España».—Tomo II, página 86.

(2) «Revista de Archivos, Bibliotecas y Museos». — Febrero de 1899.

tremo toscos que lo ilustran, y en lo accidental que le plugo añadir, sin relacionarlo para nada con las doctrinas del principal contenido, á su anónimo autor.

Entre estas cosas accidentales intercaladas, figuran cuantas van á ser dadas á conocer, con sus adecuados comentarios, en los presentes apuntes, los cuales comienzan por una receta referente á la copelación, reproduciendo el texto con la puntuación correspondiente, no existente en el original, y los dibujos, fielmente calcados, nada frecuentes en manuscritos de este orden y de este tiempo, siguiendo el estudio del texto, con el criterio antes apuntado y los necesarios esclarecimientos. Sería punto menos que ilegible el Manuscrito transcripto conforme es y sin corrección alguna; en nada cambia su carácter dividiendo los párrafos ó supliendo palabras donde faltan, trasladándolo á nuestra ortografía ó poniéndole los signos, de los cuales carece en absoluto; antes bien, esta primera labor, nada sencilla en verdad, conservando la idea y la palabra del texto, constituye una primordial interpretación y un comentario de cierto valor fundamental, y es, además, indispensable para la inteligencia del objeto y contenido de las fórmulas alquimistas, á veces intrincados jeroglíficos, cuando no expresivos símbolos, hechos para uso de muy enterados adeptos, ahora con gran trabajo descifrables, aún tratándose, como en el caso presente, de procedimientos prácticos, con vistas á una metalurgia elementalísima de la plata, y á los modos de separarla del plomo en casos determinados. He aquí la receta íntegramente copiada:

**Obra blanca particular, la mejor de quantas son particulares,
es esta que se sigue.**

Toma dos libras de limalla de fierro, preparada en su lexia é desecada en polvora, é otro tanto de plomo calcinado,

en la manera que los olleros hacen quando quieren vedriar, e toma 4 libras de sinabrio, las quales 3 cosas molerás sobre el mármol, cada una por sy, e después las encorporarás en uno, en moliendo e abrevando sobre el mármol, con buena agua ardiente, en desecando al sol ó sobre cenizas calientes todavía, moliendo é abrevando del agua ardiente fasta tanto que beba

la dicha mystion la mitad del peso de la dicha materia, en manera que la dicha materia quede en manera de pasta ny dura, ny blanda. La qual meterás en un vaso de vedrio fecho en esta manera que se muestra por figura, el qual vaso sea bien lutado, el uno de los cuerpos de buen luto de sapientia, e la boca bien sellada de paño de lienço e de pasta de farina, e quando será seco, mete el vaso en un forno fecho por la

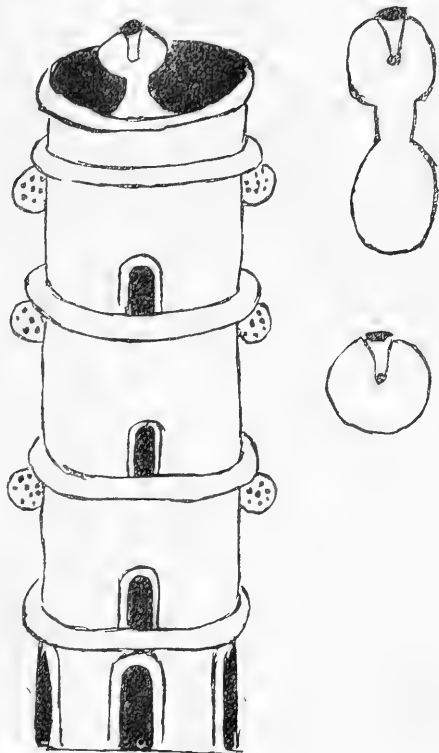


figura que se muestra aquí, enterrado entre arena fasta todo el luto de un cuerpo, e por encima cubierto de un cobertor de tierra, el qual será bien lutado al forno. E despues farás fuego en la cámara baxa del forno, muy simple e suave, por 24 oras naturales, e á la fin de aqueste término farás el fuego en la otra cámara mas alta, un poco mas fuerte, por otras 24 ora-; e á la fin de aqueste término multiplicarás el fuego,

en la tercera cámara mas alta, de llama de leña, por espacio de 24 oras, tan fuerte como tu podrás; e á la fin de aqueste término dexa refriar el forno, e frio trae el vaso de fuera e rompelo, e tu fallarás la materia de dentro congelada, dura como piedra, e negra como carbón. Metela dentro en un mortero de fierro, en la quebrando e moliendo, fasta que sea tornada en pólvora menuda, e después, aquesta pólvora metela sobre el mármol, en moliendo e abrevando del olio de tártaro, e desecando al sol ó sobre cenizas calientes, fasta atanto que aya bebido la materia del olio de tártaro en tanta cantidad como fizo primeramente del agua ardiente, e que sea tornado asy como primeramente en masa ny dura ny blanda; la qual masa meterás dentro en un vaso de vedrio, redondo como una pelota, el qual sea todo bien lutado, e la boca bien sellada e lutada de buen luto de sapiencia de la grosor de un dedo. E quando será seco, metelo enterrado dentro en tu forno, dentro entre cal viva, e fas tu fuego por los grados primos; primeramente, en la cámara mas baxa, de carbon, muy symplemente, por 24 oras, e en la segunda cámara un poco mas fuerte por otras 24 oras, e en la tercera cámara, mas alta, multiplicarás el fuego, de llama de leña, muy fuerte, tanto que tu podrás, por otras 24 oras. E á la fin de aqueste término deja el forno refriar, e saca el vaso de el fuera, e rompelo, e tu fallarás la materia asy dura como un fierro, e color, e en todo, e no tan negra como la primera. Metela de dentro en un mortero de fierro, e rompela, la qual será mala de quebrar, e muelela muy bien en pólvora menuda, la qual meterás con ella 4 onças de salitre, en moliendo muy fuerte, fasta que todo sea incorporado; e después fas una cendrada muy grande, e mete á fundir de dentro 2 libras de plomo, e quando sea bien fundido mete con una cuchara de fierro la dicha pólvora, poco á poco, asy como se va tornando el plomo en fundiendo materia; e quando sea acabada de ser la cendrada, tu fallarás 2 marcos de fina

plata de los 8 marcos de mystion, teniendo á todo juyzio. E por esta manera puedes tu fer de 10 en 10 días, en moliendo, abrevando, e desecando, e cociendo por el término sobre dicho.

Esta es la lexia que se sigue.

Toma un peso de cal de cáscaras de huevos, e atanto de ceniça de sarmientos, e dos pesos de ceniça de rayçes de havas, e un peso e medio de rayçes sin arder, e medio peso de alumbre de roca, e quarto peso de sal amoniaco; las cuales cosas sean cocidas en 10 partidas de orina de vacas e 6 pesos de vinagre. Quiere decir que 10 vegadas debe ser de orina tanto como de todas las otras cosas e asy de vinagre el peso de 6 vegadas como toda la materia, contando la orina. E quando todas estas cosas sean cochadas en uno, por 2 oras, e refriadas e destilada el agua por mecha e metida en una olla vedriada, tu debes en 20 pesos de aquesta agua meter 1 peso de la dicha limalla, la cual debe ser primeramente lavada con sal e con agua por muchas vegadas, fasta quel agua salga clara, e despues exugada al sol e asy mismo la pólvora del plomo, e quando esta limalla será asi exugada al sol, dexala templar dentro en esta lexia por el espacio de 9 días, e al cabo deste término traela de fuera e obra como dicho es, dexandola secar primeramente al sol. La qual fallarás ynpalpable, de color pardilla.

Que el nombre de *obra blanca* corresponde á la operación de extraer la plata, no pocas veces designada también por *argen* en el Manuscrito de autor anónimo donde se contiene la receta copiada, es cosa fuera de toda duda, en cuanto al final de la misma se declara explícitamente cómo se recoge plata fina, en buenas proporciones respecto de las cantidades

de la primitiva mezcla empleada. Así pues, está bien explicado que se trata de cierta especie de procedimiento metalúrgico rudimentario, no original, y cuya filiación, según luego se verá, debe buscarse en antiquísimas prácticas y tradiciones de la Alquimia.

Fuera inútil la tarea de buscar las razones fundamentales de las singulares y repetidas manipulaciones hechas con las limaduras de hierro, partiendo del tratamiento con la extraña lejía, cuya preparación, en verdad nada sencilla, es objeto de la segunda receta copiada, con la cual se cierra el Manuscrito, hasta la mezcla de su polvo impalpable con el plomo fundido, pasando por una serie de tratamientos largos y detenidos. Nunca se dieron cuenta los alquimistas de tales operaciones, cuya práctica era corriente en el arte transmutatorio, y para ellos, ignorantes de la composición química de los minerales, unos metales podían convertirse en otros, y todo su ingenio poníanlo en acendrar los vulgares y comunes, de suerte que, perfeccionándolos con el fuego, el agua, el azufre y el mercurio, iban sucesivamente mejorando hasta convertirse en los más nobles y en los más inalterables, todo por la virtud de aquellas materias, agentes y preparados dotados de la excelencia de dar y quitar propiedades á los cuerpos mediante su contacto ó directo influjo, sin experimentar muchas veces alteraciones de ningún género.

Realmente, para el autor de la receta, los dos marcos de plata hallados en la cendrada al término de las operaciones, no procedían del plomo, por contenerlo ya el empleado, sino que, conforme á la general doctrina de la Alquimia, admítase la formación de la plata mediante transmutación del plomo, perfeccionado merced á las preparaciones y á las operaciones preliminares, de las cuales resulta la mezcla destinada á ser fundida. No hay, pues, novedades tocante á la doctrina, ni mayor conocimiento positivo de los hechos, antes bien, responden las prescripciones de la *obra blanca par-*

ricular á las tradicionales prácticas alquimistas; en cambio, es de notar el haber puesto por figura el horno y las vasijas empleadas, no siendo éste el único lugar del Manuscrito donde hay dibujos de aparatos. Partiendo de los antecedentes aquí indicados, emprendo la tarea de comentar é interpretar las dos recetas transcritas, atendiendo de preferencia á las ideas que las inspiraron y á su filiación, explicando el significado de palabras; nombres de cosas y conceptos solo cuando fuere menester.

(*Concluir*).

XI.—Sobre el electrómetro de cuadrantes.

POR E. TERRADAS

Habiendo observado que era á mis alumnos dificultoso el procedimiento seguido en el texto (1) para establecer la fórmula del electrómetro, que poco más ó menos es el que se indica en la mayor parte de textos, me propuse dar con la fórmula, utilizando otros razonamientos acaso más evidentes. El método que se indica en la exposición que sigue, se reduce á establecer á priori, como demostradas experimentalmente, ciertas simetrías. Tiene, además de la sencillez, una ventaja: permite calcular los términos que se quieran del desarrollo del par eléctrico, en serie según las potencias de la desviación.

Las dos hipótesis primeras sobre la simetría del aparato, son, racionalmente, válidas aunque existan potenciales de contacto. La experimentación confirma ese modo de ver, siempre que un determinado arreglo preceda á las medidas definitivas. Aplicadas á la fórmula general, las mencionadas simetrías conducen á una fórmula simplificada (15), en que el cociente del potencial de la aguja por el de uno de los cuadrantes es proporcional á una sencilla función de cuatro lecturas, siendo la constante de proporcionalidad independiente de todo potencial, ya de carga, ya de medida, ya de contacto.

He creído que estos resultados podrían interesar, y ello es

(1) Bouase, *Traité de Physique*, tomo IV, Paris.

el objeto del presente escrito. Contiene, además, una crítica del método de medida seguido hasta ahora en el Laboratorio y que era el indicado por Damien (1).

*
* *
*

Í. Sean A y B los potenciales de los cuadrantes, C el de la aguja, θ la desviación de ésta á partir de la posición para la que $A = B = C = O$. Las masas eléctricas de los cuadrantes y de la aguja, serán:

$$\begin{aligned}M_a &= aA + \gamma B + \beta C \\M_b &= \gamma A + bB + \alpha C \\M_c &= \beta A + \alpha B + cC.\end{aligned}$$

Los coeficientes $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, pueden considerarse como funciones de θ , funciones que supondremos desarrolladas en series, según las potencias de θ (Gouy).

$$\begin{aligned}a &= a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 \\&\dots\dots\dots \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2.\end{aligned}$$

A las derivadas de a, \dots, γ respecto á θ , se las designará por a', \dots, γ' . Así:

$$a' = a_1 + 2a_2 \theta, \quad \dots \quad \gamma' = \gamma_1 + 2\gamma_2 \theta.$$

La energía del sistema de tres conductores, cuadrantes y aguja, es W , dada por

$$2W = M_a A + M_b B + M_c C.$$

(1) Damien, *Manipulations de Physique*, Paris

El par á que se halla sometida la aguja, siendo los *potenciales constantes*, es:

$$F = + \frac{dW}{d\theta},$$

de modo que

$$2F = a' A^2 + b' B^2 + c' C^2 + 2\alpha' BC + 2\beta' AC + 2\gamma' AB. \quad (1)$$

Sentado esto, he ahí las tres hipótesis fundamentales:

Primera. Si los cuadrantes están al mismo potencial, la aguja no es desviada, cualquiera que sea su posición y su potencial. Es decir, si $A = B$, $F = 0$, cualesquiera que sean:

$$A, C \text{ y } \theta.$$

Segunda. Si un cuadrante y la aguja están al mismo potencial $A = C$, el potencial del otro cuadrante es $B = D$, y θ el ángulo de desvío, el par F es igual y de signo contrario á cuando el potencial C de la aguja es igual al del segundo cuadrante, esto es, $C = B$, siendo el potencial A del primer cuadrante ígual á D é ígual á θ el nuevo ángulo de desvío, aunque de sentido opuesto al anterior. Esto es:

$$\text{si } B = C, \quad A = D, \quad \theta = \theta, \text{ el par vale } F,$$

$$\text{si } A = C, \quad B = D, \quad \theta = -\theta, \text{ el par vale } -F.$$

Tercera. En la posición inicial $\theta = 0$, si el potencial de la aguja es la media de los potenciales de los cuadrantes, no hay desviación. Es decir: si $\theta = 0$, $C = \frac{A + B}{2}$, se tiene

$$F = 0.$$

La primera de estas tres hipótesis depende de un arreglo de la aguja. La práctica demuestra que se puede lograr la simetría que supone en el aparato, variando la altura de la

aguja y modificando la posición de uno de los cuadrantes en los aparatos en que esta corrección se puede efectuar.

La segunda depende de un arreglo de la posición inicial. La experimentación comprueba también que se puede lograr la simetría que supone esta segunda hipótesis, variando el cero, mediante la rotación alrededor de un eje vertical, del tambor de que pende la aguja.

Dejemos de momento toda particularidad relativa á estos arreglos y vamos ya á introducir en (1) las simplificaciones debidas á estas hipótesis.

Si en (1) se hace $B = A$, resulta

$$2F = (a' + 2\gamma' + b')A^2 + 2(\alpha' + \beta')AC + c'C^2 = 0.$$

Debiendo tener lugar esta igualdad para todo valor de A y C , no hay más remedio que

$$a' + 2\gamma' + b' = 0, \quad \alpha' + \beta' = 0, \quad c' = 0 \quad (2)$$

Y, como éstas deben, á su vez, tener lugar para todo valor de θ , se tendrá

$$a_1 + 2\gamma_1 + b_1 = 0 \quad \alpha_1 + \beta_1 = 0 \quad c_1 = 0 \quad (3)$$

$$a_2 + 2\gamma_2 + b_2 = 0 \quad \alpha_2 + \beta_2 = 0 \quad c_2 = 0 \quad (4)$$

Antes de introducir en (1) las simplificaciones debidas á la segunda hipótesis, convendremos en que $\underline{a}' = a_1 - 2a_2\theta, \dots, \underline{\gamma}' = \gamma_1 - 2\gamma_2\theta$, con lo cual se tendrá:

$$C^2(a' + 2\beta') + 2CD(\gamma' + \alpha') + D^2b' = \\ - [C^2(\underline{b}' + 2\underline{\alpha}') + 2CD(\underline{\gamma}' + \underline{\beta}') + D^2\underline{a}']$$

Mas debiendo cumplirse esta igualdad para todo valor de C, D y θ , se necesita, como antes, que

$$\left. \begin{aligned} a_1 + b_1 + 2(\beta_1 + \alpha_1) &= 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 &= 0 \\ a_1 + b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 - b_2 + 2(\beta_2 - \alpha_2) &= 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 &= 0 \\ a_2 - b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

De las ecuaciones (3) y (5) se deduce inmediatamente

$$c_1 = \gamma_1 = 0 \quad \alpha_1 + \beta_1 = 0 \quad a_1 + b_1 = 0 \quad (a)$$

De (4) y (6), análogamente,

$$a_2 = b_2 = -\gamma_2 \quad \alpha_2 = \beta_2 = c_2 = 0 \quad (b)$$

Los 12 coeficientes $a_1 \dots \gamma_1$, $a_2 \dots \gamma_2$, quedan de ese modo reducidos á 3: a_1 , α_1 y a_2 . El valor de $2F$ se convierte en:

$$\begin{aligned} 2F &= (A - B)[a_1(A + B) - 2\alpha_1 C] + \\ &\quad + 2a_2(A - B)^{2\theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Introduciendo aquí la hipótesis tercera, $a_1 = \alpha_1$, y queda la fórmula ordinaria:

$$2F = (A - B)[A + B - 2C] + 2a_2(A - B)^{2\theta}. \quad (8)$$

II. El procedimiento puede aplicarse sin necesidad de detener los desarrollos de $a \dots \gamma$ en la segunda potencia de θ . Si se cumplen las dos primeras hipótesis, entre los coeficientes de las potencias impares, existirán las relaciones siguientes:

$$c_{2n-1} = \gamma_{2n-1} = 0, \quad \alpha_{2n-1} + \beta_{2n-1} = 0, \quad a_{2n-1} + b_{2n-1} = 0.$$

Y entre los de las potencias pares,

$$a_{2n} = b_{2n} = -\gamma_{2n}, \quad \alpha_{2n} = \beta_{2n} = c_{2n} = 0.$$

La potencia $2n - 2$ en la fórmula de $2F$ será

$$(2n - 1)(A - B) [a_{2n-1}(A + B) - 2x_{2n-1}C] \theta^{2n-2}$$

y la impar siguiente

$$2n x_{2n} (A - B)^2 \theta^{2n-1}.$$

Por consiguiente, de un modo general, en virtud de las dos primeras hipótesis ó simetrías,

$$2F = (A - B) [(A + B) \theta_0 - 2C \theta_2] + (A - B)^2 \theta_1,$$

siendo θ_0 y θ_2 funciones pares de θ y θ_1 una función impar.

III. Se ha deducido la fórmula (8) partiendo de las tres simetrías ya expuestas. Recíprocamente, la fórmula (8) supone estas simetrías, y no debe emplearse en todo rigor como no se hayan ejecutado los arreglos preliminares que colocan al aparato en condiciones de satisfacerlas.

IV. Hasta aquí se ha prescindido de los potenciales de contacto. Si se quieren tener en cuenta, los potenciales de la aguja y los cuadrantes serán por ejemplo, $C + p$ y $A + p_1, B + p_1$. Veamos, con esta complicación de los potenciales de contacto, cuál será la fórmula definitiva. No aplicaremos la tercera hipótesis, pues no es posible comprobarla prácticamente, ya que los potenciales de la aguja y de los cuadrantes son desconocidos; los A, B, C , de los cuerpos que se ponen en contacto con la aguja y los cuadrantes, son propiamente, ó conocidos, ó que interesa medir. En cambio, las dos primeras hipótesis son igualmente razonables, tanto si hay como si no hay potenciales de contacto. El par será ahora tal, que

$$\begin{aligned} 2F = a' (A + p_1)^2 + b' (B + p_1)^2 + c' (C + p)^2 + \\ + 2x' (B + p_1)(C + p) + 2\beta' (A + p_1)(C + p) + \\ + 2\gamma' (A + p_1)(B + p_1). \end{aligned} \quad (9)$$

La introducción de la primera hipótesis conduce á las igualdades (3) y (4). La fórmula á que conduce la segunda, por la igualación á cero de los coeficientes C^2 , D^2 y CD , dá las fórmulas (5) y (6); los términos lineales en C y D , así como el término libre, se anulan en virtud de las consecuencias de 3, 4, 5 y 6, consecuencias expresadas en (a) y (b). Por consiguiente, llevando las simplificaciones (a) y (b) á (9), se tiene, poniendo para simplificar $2v_1 - 2\alpha_1 p = m$, $2F = (A - B)[a_1(A + B) + m - 2\alpha_1 C] + 2a_2(A - B)^2\theta$ (10).

Esta fórmula contiene cuatro constantes, una de las cuales depende de los potenciales de contacto. Vamos á aplicarla á las dos conexiones más empleadas en el uso del electrómetro, la cuadrantal y la idiostática.

V. En la conexión cuadrantal la aguja comunica con el potencial C , uno de los cuadrantes con el potencial A y el otro está á tierra: $B = 0$. Con esto,

$$2F = A(a_1 A + m - 2\alpha_1 C) + 2a_2 A^2\theta. \quad (11)$$

El par eléctrico es equilibrado por el de torsión. Suponiendo que éste es $\frac{K}{2}\theta$, y llamando f , h , g y l á los valores de los coeficientes a_1 , m , α_1 y a_2 divididos por K , el valor de la desviación θ_1 resulta del equilibrio entre el par de torsión y el eléctrico. La ecuación de equilibrio es, pues:

$$\theta_1 [1 - 2lA^2] = A(fA + h - 2gC). \quad (12)$$

El ángulo θ es el giro de la aguja á partir de la posición en que $A = B = C = 0$.

Poniendo ahora la aguja en contacto con el potencial — C , y siendo θ_2 el nuevo ángulo de desvío,

$$\theta_2 (1 - 2lA^2) = A(fA + h + 2gC). \quad (13)$$

Si el cuadrante que no está á tierra comunica en un tercer experimento con el potencial $-A$, y θ_3 es el ángulo de desviación,

$$\theta_3 (1 - 2lA^2) = -A (-fA + h + 2gC) \quad (14)$$

De (12), (13) y (14) se saca

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_3} = \frac{2g}{f} \frac{C}{A},$$

ó sea, si $\frac{g}{f} = e$, siendo e una constante independiente de todo potencial, sea de carga, de medida ó de contacto.

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_3} = 2e \frac{C}{A}. \quad (15)$$

La constante e no difiere mucho, prácticamente, de la unidad. En ausencia de potenciales de contacto, y suponiendo válida la tercera hipótesis, es exactamente igual á la unidad.

VI. El método ordinario de medida supone siete lecturas, cuatro estando la aguja en comunicación con un potencial elevado C y uno de los cuadrantes con el potencial que se busca A , y otras tres estando la aguja en iguales condiciones y el cuadrante anterior en comunicación con un potencial conocido. Una de estas siete lecturas es la posición del cero.

Estas siete medidas pueden reducirse á cuatro, poniendo la aguja ó el cuadrante en comunicación con el patrón de fuerza electromotriz; pero en este caso, hay que conocer la constante e . Para determinarla, si no se tienen dos patrones iguales, pueden utilizarse las conexiones siguientes ideadas por el Dr. Jardí. Se toman dos series de pilas del mismo número de elementos, como pilas de carga. Sean D_1 y D_2 los potenciales de sus bornas, estando las otras en comunicación

con tierra. Se aplican las medidas que exige la fórmula 15, suponiendo primero $C = D_1$ y $A = D_2$ y después $C = D_2$ y $A = D_1$. El producto de las fórmulas 15, correspondientes, dá en su primer miembro $4e^2$.

Como á comprobación del arreglo, una vez efectuadas las tres lecturas θ_1 , θ_2 y θ_3 , puede efectuarse una cuarta en que la aguja comunica con $+C$ y el cuadrante con $-A$. Llamando θ_4 á la nueva desviación, debe verificarse, si el arreglo es correcto, que

$$\theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3.$$

VII. En la conexión llamada idiostática, la aguja y uno de los cuadrantes comunican con el potencial C , y el otro cuadrante está á tierra. La fórmula (12) da en este caso

$$\theta_1 (1 - 2lC^2) = hC + (f - 2g) C^2.$$

Invirtiendo C ,

$$\theta_2 (1 - 2lC^2) = -hC + (f - 2g) C^2.$$

De donde poniendo $q = f - 2g$,

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{qC^2}{1 - 2lC^2}.$$

Aproximadamente, dada la pequeñez de l

$$\theta_1 + \theta_2 = qC^2.$$

Los valores de θ_1 y θ_2 se diferencian sólo en el término hC . Si no hubiera potenciales de contacto, θ_1 y θ_2 serían iguales.

VIII. Se ha deducido la fórmula general 10 y las especiales 15 y 16 de las condiciones de simetría, fundadas en las hipótesis primera y segunda. Ahora bien: un electrometro de

cuadrantes dado, ¿satisface á estas condiciones? Fácil es ver, en un electrometro cualquiera, que, si la aguja y los cuadrantes están de cualquier modo, no se cumple ni una ni otra condición. Se necesita un arreglo preliminar, que puede hacerse con precisión y facilidad. Se empieza por subir ó bajar la aguja, y mover, si es preciso, el cuadrante móvil, hasta que, puestos los cuadrantes en comunicación entre sí y con varios potenciales $-A, 0, +A$ etc., cualquiera que sea el potencial $+C, 0, -C$ que se dé á la aguja, esta no desvíe cuando es llevado el cero á distintas divisiones de la escala. A una posición de la aguja inferior ó superior á la que debe tener, corresponden desviaciones en sentidos contrarios, cuando viene á cambiar del mismo modo el potencial de la misma. Prácticamente, basta tener los cuadrantes á 0 y cargar la aguja á $+C$. Esta desvía en un sentido, v. gr., á la derecha. Se baja ó sube la aguja de una cantidad apreciable, después de haber puesto la aguja á tierra. Si la desviación es en sentido contrario, es que se ha pasado la posición más favorable. Por tanteo se encuentra fácilmente la posición en que no hay desviación. Se procurará que la diferencia de potencial entre los cuadrantes y la aguja sea la mayor posible. Si el cuadrante móvil se ha dispuesto ya con la mayor simetría, al llevar el 0 de la aguja á otra división de la escala, ocurrirá generalmente que tampoco habrá desviación. Si la hubiere, se modifica la posición del cuadrante móvil y se repite el tanteo que dé la posición correcta de la aguja.

Lograda de este modo la simetría que supone la primera hipótesis se procede á lograr la que supone la segunda. Todo se reduce á buscar el cero de la aguja, es decir, la graduación de la escala que ha de indicar la posición de equilibrio $A = B = C$. Para ello, se cambia la orientación ó azimut del espejo móvil hasta tanto que las desviaciones á la derecha haciendo $A = C, B = D$ sean iguales á las desviaciones á la izquierda obtenidas haciendo $A = D, B = C$.

Si el electrómetro debe permanecer fijo en un lugar determinado, basta hacer estos arreglos, así como la determinación de la constante, sólo de tiempo en tiempo.

En el laboratorio se ha podido comprobar la facilidad y precisión de estos arreglos y del procedimiento, comparando, v. gr., un patrón Weston y otro Clark. El electrómetro usado ha sido uno Mascart. Me ha prestado su valioso concurso en estas medidas mi amigo Dr. Jardí.

IX. Para terminar, voy á criticar el método de medida usado hasta ahora en el Laboratorio de la Universidad. Este método no supone más arreglo que el de lograr para $C = 0$, $A = B$, que la desviación sea nula á partir de $A = B = C = 0$. La posición del espejo en que esto ocurre se toma como la que define el cero de la escala de desviaciones. Los cuadrantes se regulan á ojo, así como la altura de la aguja. Sólo varía en el tanteo el azimut del espejo. Siendo un arreglo para $\theta = 0$, la simetría introducida no modificará en nada los términos dependientes de θ en el valor de F .

Por consiguiente, no los tendré en cuenta desde luego. La simetría introducida impone á la fórmula (9) la única condición

$$a_1 + b_1 - 2\gamma_1 = 0$$

luego

$$2F = a_1(A + p_1)^2 + b_1(B + p_1)^2 + c_1(C + p)^2 + (a_1 + b_1)(A + p_1)(B + p_1) + 2\beta_1(A + p_1)(C + p) + 2\gamma_1(B + p_1)(C + p).$$

El método de medida responde á las cuatro medidas del siguiente esquema

Cuadrante	A	$- A$
Cuadrante	$- A$	$+ A$
Aguja	$\pm C$	$\pm C$
Desviación	θ_1, θ_2	θ_3, θ_4 .

Substituyendo valores, y siendo K la constante de torsión, resulta

$$\theta_1 + \theta_4 - (\theta_2 + \theta_3) = \frac{8C}{K} [p_1 \beta_1 - \alpha_1 A.]$$

Si se prescinde de p_1 el primer miembro es proporcional al producto CA . Esto es lo que se supone prácticamente. Pero, como se ve, con esta hipótesis se prescinde del par eléctrico función de θ y del potencial de contacto.

XII.—Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

II

Para intentar más adelante la exposición teórica de los Principios y Teoremas de *Estática social* y de *Dinámica social*, aplicando los de la Mecánica racional á los individuos y á las agrupaciones sociales, es indispensable recordar algunas nociones é ideas preliminares de la ciencia del movimiento y de las fuerzas.

Se sabe que la idea de movimiento es esencialmente *relativa*, y arranca de la experiencia muy antigua del hombre por los movimientos de los cuerpos *con relación* á su propio cuerpo (*). Pero Newton partió de la noción abstracta y metafísica de lo que él llamaba tiempo absoluto ó matemático, como transcurriendo siempre del mismo modo; y de la noción — también abstracta y metafísica — de espacio absoluto, que permanece siempre como inmóvil y semejante á sí mismo.

Estas nociones, y la consiguiente del movimiento absoluto, aunque careciendo de toda significación real, sirvieron á Newton de base para sus deducciones matemáticas, y para explicar el encadenamiento en la dependencia mutua de los fenómenos mecánicos. Así Galileo y Newton constituyeron definitivamente la Mecánica como Ciencia. Sea lo que fuere de esas nociones metafísicas sobre las cuales nos abstene-

(*) Piensan algunos que la creencia en el movimiento *absoluto* proviene de haberse fijado hereditariamente, á través de millares de generaciones aquella idea de movimiento, que ha tomado así el aspecto de absoluto. Los que así piensan aplican idéntica consideración á todas las nociones que el hombre tiene hoy como absolutas.

mos de filosofar, nos expresaremos por medio de ellas, como se expresa todo el mundo.

En la exposición newtoniana de la Mecánica, después de adoptar como base esas nociones, se admite como *primer Principio* el de *la inercia*, por el cual se afirma que, si no hubiera fuerza alguna, un punto material permanecería en reposo eternamente, ó se movería en el espacio absoluto uniformemente y en línea recta indefinida (*). Si como hecho físico, se observa que un punto pasa del reposo al movimiento, ó se observa que existe alguna aceleración en el movimiento de un punto, es lógico inferir de ese hecho la existencia de alguna acción *exterior* que lo produce, y se llama *fuerza*. Por esto se dice, con razón, que la fuerza es una abstracción á que se llega por una inferencia lógica, si se admite el principio de la inercia (**). La hipótesis de la

(*) La inercia debe de ser vista como *Postulado* que se refiere al punto material y no á los cuerpos; porque en éstos hay ya fuerzas interiores que están ejerciendo su acción, por pequeño que sea el cuerpo que se quiera concebir. Hay que admitir el principio de la inercia para la pura abstracción del *punto material*, de que parte la *Mecánica racional*. Hay quienes rechazan el principio de la inercia, porque supone las nociones metafísicas del espacio y del tiempo *absolutos*, que no son admisibles; y estudian la exposición de algunas leyes mecánicas sin el principio de la inercia. Ya dijimos en la *Introducción* que para la aplicación á los asuntos de carácter social seguiríamos el camino trillado de los cursos elementales de la Mecánica racional *clásica*.

(*) A propósito de la noción de fuerza, son de recordar las palabras de Cournot: «si el hombre no tuviera conciencia de su propio esfuerzo (por el sentido muscular), el espectáculo de la Naturaleza habría podido despertar en él las nociones de espacio, de tiempo y otras; pero no la de fuerza».

Sobre la génesis de la noción de espacio, Poincaré dice á su vez: «para un ser completamente inmóvil, no habría espacio; en vano se moverían á su alrededor los objetos exteriores; las variaciones que él notara en sus impresiones propias no serían atribuidas por ese ser á cambios de posición, sino á simples cambios de estado, porque él no tendría medio alguno de distinguir esas dos especies de cambios; esta distinción — capital para nosotros — carecería de sentido para él».

existencia de la fuerza envuelve, como se ve, algo que trasciende del hecho mismo; y cuando en la *Mecánica racional* se hace la hipótesis para la acción á distancia, se introduce además algo que parece repugnar al sentido común. Para las aplicaciones en las ciencias físicas, el éter salva esta repugnancia; pero para la pura Mecánica racional se puede perfectamente omitir la acción á distancia como un símbolo, según dice Echegaray.

No es cosa de nuestro tiempo modernísimo el escrúpulo sobre las acciones á distancia, porque al mismo Newton (al introducirlas en la ciencia) le parecía absurdo que un cuerpo pudiera actuar sobre otro á través de un espacio vacío, sin intermediario. Newton desistió de hacer hipótesis para explicar el fenómeno de la gravitación universal; y por eso dijo clara y terminantemente que él no había encontrado la explicación del fenómeno. El no se ocupó en especulaciones sobre las causas ocultas, ni sobre el origen de las acciones mutuas en razón inversa del cuadrado de las distancias. Trató de examinar los fenómenos del movimiento tales como aparecen, y vió *cómo se podrian realizar* los hechos, dejando á un lado el *por qué* (*).

Pasando á otra noción, recordemos que se define la *masa m* de un punto material como la relación de la fuerza á la aceleración $m = \frac{F}{j}$; es decir, como un coeficiente constante de *capacidad para el movimiento* de ese punto material. Aunque Newton para designar la masa de cada punto material, hablara de cantidad de materia, lo cual (así dicho) no significa nada, él vió y señaló claramente la *constante* que

(*) El concepto metafísico de *causa* no conduce á nada en las ciencias positivas. Estas lo reemplazan —como dice Mach—por el concepto matemático de *función*, la cual expresa simplemente la dependencia recíproca de los elementos que intervienen en los fenómenos.

hay en cada punto material para los efectos del movimiento. Invirtiendo la definición de masa, se dice que la magnitud de la fuerza es el producto de la masa m por la aceleración J ($F = m \cdot J$).

El profesor *Ernst Mach* insiste mucho en su Mecánica en que la noción de masa—como característica determinante para el movimiento—debe de arrancar del hecho de experiencia, de que dos cuerpos libres A y B , sometidos solamente á su *acción mutua*, se comunican aceleraciones opuestas, que pueden ser iguales ó diferentes. En el primer caso se dice que A y B son *de la misma masa*, y así queda definida la igualdad de dos masas; en el segundo caso, se dice que el cuerpo B es *de masa m* (si se adopta como unidad la del cuerpo A), cuando la aceleración que reciba A es m veces la que reciba B . De aquí pasa después—para cualquier unidad ó término de comparación—á que la relación de masas es la relación inversa de las aceleraciones producidas en uno y otro cuerpo por su acción mutua. Y se ve que, decir

que $\frac{m}{m'} = \frac{J'}{J}$, conduce á afirmar que $m j = m' j'$, que

es el principio de la igualdad de las fuerzas de acción y reacción (de que hablaremos más adelante), si al producto $m j$ se le llama *fuerza*.

Si se dice que la *dirección* y el *sentido* de la fuerza son la dirección y el sentido de la aceleración, y se llama *punto de aplicación* al punto mismo que se mueve, se ve que la fuerza debe de ser mirada, para el estudio, como un *vector localizado en el punto*; y se establece la regla del paralelogramo para la composición de dos fuerzas como vectores, generalizándola después para la composición de muchas fuerzas.

Recordados estos primeros pasos para la constitución de la Mecánica como Ciencia, vengamos ya á nuestro intento, y pensemos en un solo individuo y en un asunto cualquiera de carácter social. Sea un instante como instante inicial para el

transcurso del tiempo, y consideremos lo que hemos llamado la posición en el asunto en ese instante. Esta posición se llamará *posición inicial* del individuo. Si primeramente — para simplificar — concebimos á éste en reposo en su posición inicial, y *admitimos el principio de la inercia*, y vemos que la posición en el asunto se modifica, inferimos la existencia de alguna *acción exterior* al individuo, que influyendo sobre él, ha determinado el cambio ó modificación de su posición en el asunto (*). La acción ó las acciones de alcance psíquico son las que llamaremos *fuerzas*. Cuando se relacionen á un asunto de carácter social, al cual se refiera la posición del individuo, diremos que esas fuerzas psíquicas desempeñan el papel de *fuerzas sociales*.

Cualquiera que sea el origen de una acción que se ejerza sobre el individuo, aunque sea puramente físico, y aunque brote del interior del cuerpo del individuo, de sus órganos mismos, diremos que la acción que se ejerza obra como una *fuerza psíquica*, desde el momento en que admitimos que

(*) En la *Primera parte de la Dinámica* examinaremos cómo el Principio de la *inercia* podría ser admitido para la *pura abstracción* del individuo en un asunto, y explicaremos el sentido que damos á la palabra *exterior*.

Habremos de justificar entonces la asimilación del individuo al punto material, y habremos de sentar *como admisibles para el individuo los tres postulados de la Mecánica*. Con esto nos parecerá ya estar autorizados á traducir las proposiciones de la *Mecánica racional*, puesto que se podrían repetir los razonamientos que se hacen en esta Ciencia. Lo que haremos no será — así me parece — un simple juego de palabras para calcar las proposiciones de la Mecánica racional, poniendo fuerza psíquica donde diga fuerza física, individuo por punto material, un asunto social por el espacio, etc. En las ocasiones en que lo creamos indispensable (para la claridad), repetiremos los razonamientos para establecer las proposiciones de la *Mecánica social*; pero como se necesitaría un Tratado completo para reproducir el de Mecánica racional, nos limitaremos á meras indicaciones en estos *Apuntes*.

determina el *efecto psíquico* de influir en la *posición psíquica* del individuo en el asunto.

Corresponde á la *Psicología general* el análisis de estos procesos en que nosotros no hemos de ocuparnos.

En ciertas circunstancias podrán predominar las influencias que vienen del medio ambiente externo, físico ó psíquico; y en otras, las que proceden del medio ambiente interno, digámoslo así. El profesor americano Baldwin ve unas ú otras fuerzas, como actuando sobre dos polos distintos desde la niñez, y contribuyendo unas y otras fuerzas á las modificaciones psíquicas del individuo.

Según Baldwin, el proceso se sigue como en círculo; primero por la acción de las fuerzas del exterior sobre el polo *receptivo* ó imitativo del niño, y luego por la acción de las fuerzas de lo interior sobre su polo activo ó *agresivo*, según la expresión de Baldwin. Pero todo esto es ajeno á nuestras especulaciones mecánicas. Nosotros veremos unas y otras fuerzas actuando en un instante dado según las mismas leyes, como explicaremos más adelante. Las fuerzas que proceden del medio ambiente interno de un individuo, no se ven tan claramente como las que vienen de lo exterior como sugerencias; y parece que nos manifestamos como árbitros de nuestras propias acciones. Quizá esto se deba simplemente al hecho de que esas fuerzas emanan de nuestro propio interior, fisiológico ó psíquico. Prescindimos de todas las cuestiones que puedan suscitarse acerca de si tales ó cuales influencias merecen ó no merecen tal ó cual nombre y si su estudio corresponde á tal ó cual ciencia.

Siguiendo nuestra exposición, diremos que el individuo— asimilado á un punto material—será considerado como el *punto de aplicación de la fuerza*.

Si se trata de una sola fuerza, y el individuo está en reposo en su posición inicial, la dirección y el sentido del movimiento de modificación que se inicie, se atribuyen á la fuerza; y así diremos que esa es *la dirección* y ese *el sentido de*

la fuerza psíquica. Son éstas las mismas idénticas abstracciones hipotéticas que sirven de punto de partida á la *Mecánica racional* clásica.

No se olvide que siempre que decimos fuerzas psíquicas entendemos referirnos á las fuerzas de muy variados géneros que actúan por intermedio de las psiquis individuates, ó las que producen, como quiera que sea, un efecto psíquico. Usamos este calificativo como contrapuesto á *físico* para distinguir esas fuerzas de otras como la gravitación, la de cohesión ó de elasticidad, la de afinidad química, etc., que influyen en los fenómenos de movimientos (en el espacio) de los cuerpos materiales, ejerciendo sus acciones físicas.

Para establecer el segundo principio de la Mecánica y tratar el problema dinámico de las fuerzas actuando sobre un individuo *en estado de movimiento*, será indispensable fijar antes los conceptos de *velocidad* y de *aceleración* en el movimiento de un individuo. Entonces podremos definir también la *masa* de cada individuo *para un determinado asunto*, como un *coeficiente de capacidad* de ese individuo *para modificarse en el asunto* que se considere, á semejanza de lo que hemos recordado sobre la masa de un punto material, es decir, como una relación de la fuerza á la aceleración. No podemos decir más en estos *Preliminares*, reservando la explicación de ello para la *Primera Parte de la Dinámica*.

En la Mecánica racional se admite el principio de la *igualdad de la acción y de la reacción* en la dirección de la recta que une dos puntos materiales y en sentidos opuestos — sean atractivas ó repulsivas.—De este principio se desprende que la relación $\frac{m}{m'}$ de las masas de dos puntos materiales es la inversa de la relación de las aceleraciones que la fuerza de *acción mutua* produciría en el uno y en el otro $\frac{J'}{J}$; puesto que en el uno y en el otro — siendo iguales las fuerzas de

acción y de reacción — el producto mJ es igual al producto $m' J'$ (*).

Admitiendo este principio para las acciones y reacciones *sociales*, se podría decir igualmente: que cuando un individuo ó elemento social reciba la acción de una fuerza, reaccionará con igual intensidad en sentido opuesto. Si se consideran la acción y la reacción entre dos individuos ó elementos, se comprende que los efectos de cambio en el estado de movimiento que se produzcan en el uno y en el otro por esa acción y reacción *mutua*, serán muy diferentes, si las masas para el asunto de los dos individuos ó elementos lo son, toda vez que esos cambios en su estado han de ser en razón inversa de las masas. Por esto, el individuo ó elemento social dotado de gran masa, es decir, de poca capacidad para modificación en ese asunto (relativamente á la que tenga el individuo ó elemento sobre quien actúe, y de quien reciba la reacción) sufrirá relativamente pequeña modificación en su estado.

(*) Se ha hecho notar por algunos que al aplicar esta propiedad á la acción de la gravedad se comprueba que la relación de las masas de dos cuerpos A y B , es decir $\frac{m}{m'}$ es igual á la de sus pesos $\frac{p}{p'}$; porque siendo una misma g la aceleración de los movimientos de caída de los dos cuerpos A y B , al pensar en la acción y reacción del cuerpo A con la Tierra (de masa M), se tiene: $\frac{m}{M} = \frac{J}{g}$; y al pensar en la acción y reacción del cuerpo B con la Tierra, se tiene: $\frac{m'}{M} = \frac{J'}{g}$.

Y de aquí se deduce que $\frac{m}{m'} = \frac{J}{J'}$; pero como J y J' son aceleraciones de la Tierra, debidas, por una parte, á la fuerza de reacción p del cuerpo A , y por otra á la fuerza de reacción p' del cuerpo B , la relación $\frac{J}{J'}$ es igual á la de estas fuerzas $\frac{p}{p'}$; y por tanto $\frac{m}{m'} = \frac{p}{p'}$, como debía de ser por las definiciones mismas.

Cuando hayamos de considerar, no ya un sólo individuo, sino una agrupación social, deberemos de pensar que las fuerzas que ejercen su acción sobre un individuo ó elemento cualquiera de la agrupación, pueden emanar de algo exterior á ella, ó del interior de la agrupación misma. Las primeras se llaman fuerzas *exteriores*; las segundas fuerzas *interiores*. Estas aparecen siempre conjugadas dos á dos, en virtud del principio de la acción y la reacción. A este conjunto de acciones y reacciones mutuas contribuyen todos los individuos y elementos de la agrupación social. Si éstos son conscientes de ello, el movimiento ó el *equilibrio* social se realiza con conciencia; pero eso no nos interesa aquí.

Tampoco á la *Mecánica social*—tal como la concebimos—le importa desentrañar los caracteres y la naturaleza específica de las acciones que obren sobre los individuos y elementos, ni los caracteres psicológicos de los individuos ó elementos de quienes emanen fuerzas. A la Mecánica le bastaría conocer los puntos de aplicación, las direcciones y sentidos, y las intensidades de las fuerzas. (*).

Cuando queramos darnos cuenta de lo que es primeramente en cada individuo la actividad psíquica, pensemos que se halla solicitado—en un instante dado—por muy varias impresiones (sean sensaciones ó representaciones de diversos géneros) que son provocadas en él por excitaciones *simultáneas* de origen externo ó interno. De todas estas acciones desempeñarán para nosotros el papel de fuerzas psíquicas que *obran efectivamente*, aquellas impresiones que se impon-

(*) Nos parece hoy aspiración irrealizable la de medir esas intensidades, por lo cual nuestro intento es meramente especulativo, sin aplicación posible hoy. Pero si algún día se pudiera hacer la medición de las fuerzas psíquicas por procedimientos que sugiriese la Psicología experimental; y se pudiera además determinar de un modo preciso las *posiciones* en un instante dado de los individuos y de los varios elementos de una Sociedad, parece que la Mecánica social podría quedar constituida científicamente.

gan de tal modo que el individuo *atienda* á ellas, y las perciba.

Unas veces será debida la atención á la novedad de la impresión; otras veces á la nota sentimental que la acompañe; otras á la analogía que tenga con lo que ocupe la conciencia del individuo en ese instante, etc. Podría decirse en general que la atención recaerá sobre aquellas impresiones que el individuo acoja con mayor interés, cualquiera que sea la razón para ello.

Pues bien, á estas impresiones efectivamente percibidas y á las representaciones de diversos géneros que se unan á ellas se referirán las fuerzas psíquicas que habremos de considerar en estos *Apuntes*. Su intensidad no dependerá tan sólo de la magnitud—para decirlo así—del excitante (físico ó psíquico, externo ó interno por su origen), sino también de la disposición de ánimo en que se halle el individuo ó el elemento social sobre quien actúe en el instante que se considere. (*).

Conviene, por todo esto, advertir que no basta que emane de un individuo ó elemento social una iniciativa para que ésta deba ser considerada como una fuerza por el sólo hecho de existir, sino que es necesario que *obre* para modificación. Es de notar, además, que el *carácter psíquico*, así de la iniciativa como de su acción ejercida, reclama cierta adaptación del individuo ó elemento social de quien emane, á los individuos y elementos sobre quienes se ejerza, para que sea una *fuerza efectiva*. Y así lo comprueba la observación, porque hay, por ejemplo, períodos en la vida de algunos pue-

(*) Veremos más adelante que al tratar de un determinado asunto—quizá se pudiera llevar esa disposición de ánimo á ser mirada como una constante, si se pudiera llevar la influencia de su variabilidad á ser expresada en cada caso por medio de un coeficiente de corrección que afectara á la magnitud del excitante. Pero ya hemos dicho que nos parecen irrealizables hoy estas aspiraciones:

blos en que las iniciativas de ciertos individuos ó elementos (desempeñando el papel de fuerzas sociales), operan profundas modificaciones porque son *adecuadas* al estado de la agrupación social; y en otros pueblos (siendo análogas, al parecer, las circunstancias) las iniciativas para producir modificaciones, no logran desempeñar el verdadero papel de *fuerzas* en la Mecánica social, por no ser dichas iniciativas adecuadas al estado de la agrupación (*).

Para la Mecánica es indiferente el motivo á que se deba esa falta de adaptación. Bastaría que se diera como un hecho, para que las iniciativas hubieran de ser consideradas como *nulas* para su efecto mecánico. Si por la escritura ó por cualquier otro procedimiento, cuando se trata de ideas éstas fueran conservadas para los tiempos futuros, podrían tal vez llegar á ser fuerzas efectivas en otra época posterior, aun no viviendo ya el individuo de quien emanaron.

(*) Al tratar D. Francisco Giner de la acción social de las personalidades poderosas, dice, de acuerdo con otros escritores: «Por grandes que sean sus facultades, nunca habrían ejercido esa acción, sino en una Sociedad dispuesta para ella; esto es, cuyas condiciones se encontrasen en determinada conexión con las de su individualidad»

Mr. James Mark Baldwin indica que «el genio, que de hecho no fuera comprendido por la Sociedad en que vive, no sería para ésta una fuerza efectiva».

Y así habría de ser necesariamente. Si no fuera entendido, no podría ser *atendido*, y no podría, por tanto, ejercer influencia.

Pero debe de notarse que, en general, los hombres extraordinarios á que se refieren estos escritores, no podrían *inversamente* aparecer, sino apoyados en un estado social adecuado para su aparición; es decir, que los genios son á su vez un producto de la raza, de la época, etc ; es decir, de la Sociedad en la cual nacen, como dijo Spencer.

III

Es forzoso decir algo en estos *Preliminares* sobre los sistemas de referencia, y sobre la medición de las cantidades fundamentales y de las cantidades derivadas de ellas, que aparecen en la *Mecánica racional*, á fin de poner de relieve las grandísimas dificultades que aquellas cuestiones ofrecen.

Cuando en la *Mecánica racional* se dice que un punto está, en un instante dado, en una posición en el espacio, y tiene en ella una cierta velocidad y una cierta aceleración, se sobreentiende siempre:

1.º Que la posición en el espacio ha sido referida á algún sistema geométrico fijo en el espacio absoluto, ó al menos concebido como fijo. Y que la determinación de esa posición se hace según el número de dimensiones, mediante las magnitudes coordenadas—que se necesitan en igual número que las dimensiones—, con sus correspondientes signos;

2.º Que el instante en el tiempo ha sido también referido á un instante fijo en el tiempo absoluto, ó al menos concebido como fijo. Y que la determinación de aquel instante se hace, por ser una dimensión, mediante la magnitud de tiempo, que es una coordenada con su correspondiente signo;

3.º Que adoptadas ciertas unidades para la medición de las magnitudes en el espacio (1.º) y en el tiempo (2.º), estas mismas unidades sirven y se usan para la medición de los incrementos que, así en el espacio como en el tiempo, se emplean para llegar á los conceptos y mediciones, tanto de la velocidad como de la aceleración en un instante.

El carácter puramente teórico de la *Mecánica racional* exige tan sólo que se suponga haber sido elegidos los siste-

mas fijos de referencia en el espacio y en el tiempo, sin que sea necesario concretarlos, lo cual, por otra parte, sería inasequible.

Ahora bien; lo que con la noción de tiempo se hace en nuestro espíritu, ajeno á todo reparo filosófico, tanto para la concepción del instante como para la medición de un intervalo de tiempo, lo aceptamos aquí desde luego, tal y como se acepta al emprender el estudio de la Cinemática (y después el de toda la Mecánica racional clásica), cualesquiera que sean las dificultades que entrañe.

Nada nuevo ni distinto se presenta aquí.

Lo que—desligados de las lucubraciones de profundos pensadores—hacemos en nuestro espíritu con la noción del espacio en general, con el concepto de punto geométrico y con las magnitudes geométricas, había sido aceptado ya al dar los primeros pasos en la Geometría, sin parar mientes tampoco en las objeciones que podían presentarse. Pero aquí, en estos *Apuntes*, no se trata ya del espacio. En vez del espacio tenemos *un asunto*, y esto es algo psíquico; y lo que hemos llamado *posición en un asunto*, es un compuesto psíquico de todos los residuos de conocimientos, de sentimientos, de voliciones, etc., del individuo ó del elemento social. ¿Cómo definirla en un instante dado? Desde luego se piensa que habrá de ser referida esa posición á algo que pudiera concebirse como fijo, es decir, como constante conocido; y ocurre admitir que retrogradando hasta la entrada del individuo en la vida externa, cuando fueran nulos sus conocimientos, sentimientos, etc., es decir, retrogradando hasta el nacimiento del individuo, se podría tener un punto de referencia para su posición en un asunto cualquiera. La posición en un instante cualquiera de una agrupación social en un asunto, habría de ser así determinada por referencia también al nacimiento—como si dijéramos—de esa agrupación, cuando todas las notas psíquicas que intervienen en la posición de sus individuos y elementos sociales, brotaran

(por decirlo así) con carácter social; aunque ya se comprende que sería sumamente difícil, por no decir imposible, señalar concretamente el instante en que nace una agrupación social, para adoptarlo como punto de referencia.

La suma de conocimientos que un individuo posee acerca de un asunto en un instante dado, referido á los conocimientos nulos que tuvo al nacer, se ha formado sucesivamente por integración de incrementos; y lo mismo podría decirse de las demás notas psíquicas conscientes é inconscientes que intervengan en la *posición* del individuo en el asunto. Se habrían de requerir varias magnitudes coordinadas psíquicas—como si dijéramos—que correspondiesen á todas esas notas, que serían como otras tantas dimensiones. Para ello se habría de adoptar una serie de *unidades*, á las cuales se refiriesen esas magnitudes, y tener así la serie de *números de medida* correspondientes. Después, habría que ver una combinación que fuera como suma ó conjunto de productos, porque habría de multiplicarse el *patrón unidad* de cada nota psíquica por el número que le correspondiera en el individuo que se considerase. Creo haber dicho anteriormente que es difícilísimo—por no decir imposible—en el estado actual de nuestros conocimientos, señalar cuántas y cuáles sean las notas psíquicas conscientes é inconscientes que intervienen en lo que hemos llamado *la posición* del individuo en un asunto; y añadido ahora que es más difícil aún determinar la manera cómo se compenetren, influyendo y refluyendo mutuamente unas sobre otras en el mismo individuo. ¿Pero cómo adoptar la unidad ó patrón que se necesitaría para cada especie de magnitud, ó sea en cada dimensión? Si pensamos—por ejemplo—en la suma de muy variados conocimientos acerca de un asunto que el individuo posee en una *posición* dada, ¿cómo concebir una unidad de conocimiento para medirla? Pero además—y es dificultad más grave todavía—¿cómo definir con algún rigor la igualdad de dos conocimientos para poder llegar á los números por

el proceso matemático de medición? Iguales ó mayores dificultades se ofrecerían para todas las dimensiones, es decir, los sentimientos, voliciones, etc. (*). Todas estas gravísimas para dificultades se nos presentan como insuperables hoy. No viendo modo de salvarlas las cortaremos, suponiendo:

1.º Que se afecte al individuo de un *parámetro simbólico* que compendie en sí todo lo psíquico y lo inconsciente que intervenga para *su posición en el asunto* de que se trate;

2.º Que ese parámetro tenga, para cada instante, un valor de su expresión compleja, que corresponda á los valores de todas las magnitudes coordinadas de que hemos hablado; y

3.º Que el paso de un valor de ese parámetro á otro valor muy próximo, en el mismo individuo, durante un intervalo de tiempo muy pequeño, marque en el orden psíquico *una dirección y un sentido*, determinados por las dimensiones que hayan cambiado muy poco en la expresión compleja del parámetro.

Habremos de suponer que el incremento de ese parámetro (definidor de la posición) fuera medible, es decir, que se pudiera representar numéricamente. No podemos dejar de pensar que por los progresos de la *Psicología*, y mediante las relaciones existentes entre las varias notas psíquicas que constituyan la posición del individuo, pudieran ser algún día reducidas unas á otras, y así no habría tantas variables *independientes* como notas psíquicas ó dimensiones. Si fuera n el número de notas ó dimensiones psíquicas, y suponemos que se descubrieran $n-1$ ecuaciones de relación entre ellas, estarían determinadas $n-1$ en función de la n .^{ésima}; y conocida esta última en función del tiempo, quedarían conocidas todas. El parámetro sería—en tal supuesto—una función de esa n .^{ésima} dimensión psíquica—ó ésta sería una función in-

(*) Ya veremos en la Cinemática cómo se procede aproximadamente por las medias en los Laboratorios de Psicología experimental.

versa del parámetro—con lo cual las demás notas se podrían expresar ya en funciones distintas del parámetro. Quizá no sean más que tres las dimensiones psíquicas, y se refieran á la voluntad (voliciones), á la intelectualidad (representaciones) y á la sentimentalidad (sentimientos). Es sabido que los Psicólogos trabajan incesantemente en descubrir las relaciones entre ellas. El parámetro que hemos admitido (para cortar las dificultades) habría de ser mirado en definitiva como una función continua del tiempo, que permitiera aceptar las tres hipótesis dichas. Según éstas, el incremento infinitamente pequeño del parámetro habría de tener por factor *escalar* su valor numérico, y además correspondería á una dirección y sentido psíquicos, con lo cual se vería ese incremento infinitamente pequeño del parámetro *como si fuera una cantidad vectorial psíquica*, con sus tres atributos de *magnitud, dirección y sentido*; pero estos dos últimos atributos de la dirección y el sentido se refieren á orientaciones, no en el espacio, sino *en el asunto social de que se trate*. Extendemos así á lo psíquico la noción de los vectores espaciales usados en los estudios matemáticos; y el vector matemático se debería de pensar como *símbolo geométrico* del vector psíquico de que hablamos. El parámetro sería una representación simbólica, y después la combinación lógica de los símbolos podría ser quizá — como ha dicho mi maestro el insigne Echegaray — el símbolo de la combinación real de los fenómenos. A pesar de la dificultad de este símbolo (en un mundo imaginario de tantas dimensiones psíquicas), que parece violento y arbitrario, sigo adelante en mi empeño, recordando otro pasaje de Echegaray, que transcribo:

«La inteligencia humana puede forjar y tiene derecho á forjar un mundo á su capricho, con tal que lo defina de tal suerte que en el contenido de ese mundo imaginativo no exista ni imposibilidad ni contradicción lógica; y por lo tanto, ese mundo deberá de estar sujeto á las leyes de las Matemá-

ticas, porque á ellas está sujeta la razón humana, en cuanto es razón humana.

Y luego puede aplicar ese mundo imaginario al mundo real, y ver si ambos se ajustan, y si las combinaciones del primero representan y — aun más — si pueden prever realidades del segundo; y en este caso, aunque el mundo de la imaginación haya sido formado arbitrariamente, no podrá negarse que es una especie de símbolo de la Naturaleza con todas las ventajas, aunque con todos los inconvenientes, del simbolismo.»

Mediante las suposiciones que preceden, admitiremos que el movimiento elemental de modificación de cada individuo y de cada elemento social se realiza — durante un intervalo de tiempo muy pequeño — en una dirección y en un sentido determinados; y que la magnitud del cambio muy pequeño de la posición en el asunto se pueda medir por el incremento muy pequeño del parámetro, que por modo complejo simbolice la posición y la defina.

Es claro que, mediante esa hipótesis, no se intenta expresar con un símbolo la realidad, tal como ella sea, y en toda su complejidad. Ya se ve que todo cuanto digamos, apoyándonos en esa hipótesis, no podrá ser considerado sino como una primera aproximación. No creemos, sin embargo, llegar á conclusiones absurdas ni contradictorias al traducir — para los fenómenos sociales humanos — lo que encontremos escrito en el lenguaje matemático de la *Mecánica racional*. Pretendemos llegar á las conclusiones por razonamientos que permitan la extensión á lo mecánico-social de la *Mecánica racional*, y esto con todo género de salvedades, pues ya dijimos desde la *Introducción*, que en estos *Apuntes* no se habría de encontrar un trabajo de rigurosa ciencia positiva (*).

(*) El lector habrá visto, por todo lo dicho en estos *Preliminares*, que nosotros prescindimos de las delicadísimas cuestiones acerca de

Importa mucho, sin embargo, resolver una dificultad que parece cerrar el paso á nuestro intento de extender á los fenómenos sociales (en su aspecto mecánico) las leyes de la *Mecánica racional*. La dificultad consiste en que si los Postulados de ésta y todos sus Teoremas son para nuestro espacio de tres dimensiones, y se expresan por medio de ellas, ¿cómo es concebible su aplicación á movimientos—(cambios de posición psíquica) que no tienen lugar—que no se realizan en el espacio de tres dimensiones, y que han de expresarse por medio de un gran número de dimensiones psíquicas?

Concretemos la dificultad. Se determina, por ejemplo la posición de un punto en el espacio por tres coordenadas—supuestos fijos los elementos de referencia—y esas tres coordenadas son funciones continuas del tiempo si el punto está en movimiento; ¿cómo aplicar esto al movimiento de un individuo en un asunto tal como se ha definido?

Además. Si las velocidades y las aceleraciones y las fuerzas, por ejemplo, son pensadas y definidas en la Mecánica racional como vectores *espaciales* con sus atributos, es en nuestro espacio de tres dimensiones donde se las piensa y se las define; ¿cómo aplicar estos conceptos al mundo psíquico, á lo que no puede estar en el espacio, ni definirse por medio de nuestras tres dimensiones?

Examinemos la dificultad respecto á las posiciones de un punto en el espacio, y de un individuo en un asunto. Nos parece que se resuelve sin violencia, pensando que si bien

la posibilidad ó imposibilidad de que un estado psíquico ó una fuerza psíquica sean *magnitudes* sin ser extensas, es decir, sin tener relación alguna con el espacio. Ya se ha visto que la noción de magnitud la aplicamos á lo psíquico, como si pensáramos en el espacio; y para ello usamos el lenguaje ordinario del sentido común y corriente, sin entrar para nada en las disquisiciones de Filosofía psicológica como las del eminente filósofo Bergson, según las cuales, son puras ilusiones de la conciencia tales magnitudes.

la posición del punto depende de sus tres coordenadas, podemos concebir que cada una de éstas dependa á su vez de una sólo y única variable — que sea de valor constante si el punto está en reposo — ó que sea función del tiempo, si el punto está en movimiento. Cada una de las tres coordenadas sería (así mirada) una función de función del tiempo. De una ley de variación de esa variable en el tiempo, resultarían leyes de variación independientes entre sí para las tres coordenadas espaciales, y á estas leyes correspondería á su vez el movimiento determinado del punto en el espacio. Lo que así concebimos puede quizá aplicarse también al *movimiento de un individuo en un asunto*, si se piensa que á una ley de variación en el tiempo del parámetro que hemos definido para un individuo, corresponderían leyes de variación independientes entre sí de las distintas notas ó coordenadas psíquicas (cualquiera que sea su número, y aunque no estén en el espacio); y estas leyes permitirían determinar las *posiciones en el asunto* por las cuales pasaría sucesivamente el individuo; es decir, el movimiento de este individuo.

En cuanto á los vectores espaciales de que hablábamos— como las velocidades, por ejemplo—(dejando á un lado el atributo de la magnitud, al cual no afecta la dificultad por ser factor *escalar*),—notemos que la *dirección* y el *sentido* se presentan á nuestro espíritu como nociones adquiridas experimentalmente —por la experiencia externa en nuestro espacio de tres dimensiones—y que experimentalmente también—aunque adquiridas por la experiencia interna ó psíquica,— se nos ofrecen las nociones de dirección y sentido, ajenas al espacio. Así como del paso de un punto de una posición en el espacio á otra infinitamente próxima, nace en nosotros la noción de la dirección y el sentido de la velocidad del movimiento en ese instante, así también del paso de *nuestro individuo* de una posición psíquica (no espacial) á otra infinitamente próxima nace en nosotros la noción de dirección y sentido de la velocidad del movimiento de modi-

ficación en ese instante. Aunque lo primero se dé en el espacio de tres dimensiones, y lo segundo fuera del espacio, y como si dijéramos, en medio de tantas dimensiones cuantas sean las notas psíquicas que intervengan en la posición, lo que nos interesa es que podemos pensar en la *determinada dirección y sentido* de un particular vector psíquico lo mismo que en los de un vector espacial. Así, por ejemplo, cuando en la Mecánica racional pensamos y decimos que la dirección y el sentido del cambio de la velocidad de un punto—de un instante al infinitamente—próximo, son las mismas dirección y sentido de la fuerza en ese instante, me parece que podemos aplicar esto á la Mecánica psíquica, aunque lo uno se refiera al espacio de tres dimensiones, y lo otro no.

Hemos partido de la idea fundamental de que todos los fenómenos, de cualquier género que sean, realizan su proceso por ley de continuidad en el tiempo, con lo cual se quiere significar, como es sabido, que el cambio operado de un instante á otro instante posterior, puede ser menor que cualquiera magnitud que se asigne—por pequeña que sea—, si corresponde á un intervalo de tiempo suficientemente pequeño entre los dos instantes. Es decir, que si se concibe el intervalo de tiempo como variable que disminuya *indefinidamente*, el cambio realizado debe de ser concebido también como *indefinidamente* decreciente. El decrecimiento incesante de una variable, pero con un límite efectivo para su pequeñez, no se diría *indefinido*.

Se ve que el concebir un cambio infinitesimal en la posición de un individuo (ó de un elemento social) durante un intervalo de tiempo, también infinitesimal, no es concebir un intervalo muy pequeño, y un cambio correspondiente muy pequeño, porque esto, así dicho, no significaría nada, pues la pequeñez en sí no es nada; y si por muy pequeño se quisiera dar á entender lo que escapara á todos los procedimientos de observación y de medida, *por perfeccionados que se supongan*, caeríamos en el cero, que no es nada.

Lo que se piensa, en definitiva, son *leyes de variación* tales, que el *decrecimiento* (en el sentido regresivo para esta concepción) sea *sin límite*, aunque es costumbre decir que las variables infinitamente pequeñas tienen por límite *cero*, como si el cero fuera una cantidad que sirviera de límite. Esto es, á mi entender, una incorrección de lenguaje (*).

En resumen: procediendo el tiempo por incrementos infinitesimales, el fenómeno natural—(físico, fisiológico ó psíquico)—que en el tiempo se realiza, procede también por cambios infinitesimales. Si las modificaciones que va experimentando una planta ó el cuerpo de un animal en dimensiones, forma, composición, estructura, etc., obedecen á esa ley de continuidad, á ésta igualmente obedecen las modificaciones psíquicas de un hombre ó de una agrupación de hombres en el tiempo; y por esto debe de ser visto el *movimiento en un asunto* como una sucesión de infinito número de movimientos elementales.

(*) Puede verse mi *Ensayo sobre el Infinito*. Allí decía:

«Si después de abstraído el intervalo de tiempo en cuyo transcurso se ha desenvuelto un fenómeno, concebimos otro menor como abstraído también del mismo fenómeno, y otro menor aún, y así sucesiva é *indefinidamente*, habremos concebido el tiempo como variable *infinitamente pequeña*, y el fenómeno en la continuidad del tiempo; pero, ¿cómo concebir el *instante* ó sea el *cero en el tiempo*? Tan imposible es, como concebir el punto geométrico aislado en el espacio; y asimismo podría decirse con verdad que el presente aislado es una quimera. El tiempo, en su variación continua, puede ser concebido como *infinitamente pequeño*, según una cualquiera de las leyes infinitesimales de decrecimiento; y como *infinitamente grande*, según una cualquiera de las leyes infinitesimales de crecimiento; y así puede decirse que el tiempo pasado ó el tiempo futuro, decreciendo, se desvanece... *sin límite*, creciendo, se agranda... *sin límite*.»

Como recuerdo de las muchas cantidades que habremos de considerar más adelante, derivadas ó deducidas de las tres fundamentales de la Mecánica, pondremos á la vista un cuadro que contenga las principales. Suponemos que son conocidas por el lector.

Adoptando, según costumbre, como cantidades fundamentales las *longitudes*, las *masas* y los *tiempos*, y escogiendo como unidades respectivas

el centímetro.....	símbolo	L	
el gramo.....	»	M	(c, g, s);
el segundo.....	»	T	

— las <i>velocidades</i> , que son longitudes divididas por tiempos, tendrán como símbolo de su unidad.....	$V = L^1 \cdot T^{-1}$
— las <i>aceleraciones</i> , que son velocidades divididas por tiempos, ó longitudes divididas por cuadrados de tiempos, tendrán por símbolo de su unidad.....	$J = L^1 \cdot T^{-2}$
— las <i>velocidades angulares</i> , que son ángulos divididos por tiempos, ó bien velocidades divididas por longitudes, tendrán como símbolo de su unidad.....	$\omega = T^{-1}$
— las <i>fuerzas</i> , que son masas multiplicadas por aceleraciones, tendrán por símbolo de su unidad (*).....	$F = M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$
— las <i>cantidades de movimiento</i> , que son masas multiplicadas por velocidades, tendrán como símbolo de su unidad.....	} $M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-1}$
— las <i>impulsiones de fuerzas</i> , que son fuerzas multiplicadas por tiempos, tendrán como símbolo de su unidad.....	
— los <i>momentos de fuerzas</i> } que son fuerzas multiplicadas por	} $M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
— los <i>trabajos de fuerzas</i> ... } longitudes, tendrán como símbolo de su unidad.....	
— las <i>energías cinéticas</i> , que son masas multiplicadas por cuadrados de velocidades, tendrán como símbolo de su unidad.....	} (**)
— los <i>momentos de cantidades de movimiento</i>	} $M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-1}$
— los <i>momentos de impulsiones</i> ... { niento ó impulsiones multiplicadas por longitudes...	
— las <i>cantidades de acción</i> , que son cantidades de movimiento multiplicadas por longitudes, o bien energías cinéticas multiplicadas por tiempos.....	} $M^1 \cdot L^2$
— los <i>momentos de inercia</i> , que son masas por cuadrados de longitudes.....	
— las <i>potencias</i> , que son trabajos ó energías divididas por tiempos (***).....	$M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-3}$

Las diversas expresiones simbólicas de unidades que hemos enumerado, deben de ser miradas como *símbolos de dimensiones*, porque ellas indican el grado ó dimensión de la cantidad derivada con respecto á cada una de las tres fundamentales. Habiendo de cumplirse toda ecuación (entre magnitudes físicas) independientemente de las unidades que se escojan, es claro que debe de haber homogeneidad; es decir, que todos los términos de la ecuación han de ser del mismo grado con respecto á cada una de las cantidades fundamentales, á saber: longitudes, masas y tiempos. Esta observación ofrece, como es sabido, un procedimiento cómodo para advertir á veces la existencia de algún error en las ecuaciones.

(*) Esta unidad de fuerza se llama *dina*. Siendo una fuerza que aplicada á un punto material de masa un gramo (M), le imprime la aceleración un centímetro (L); si se usa el segundo (T) (repetido dos veces) como unidad de tiempo; es claro que, como el peso de un gramo le imprime á este mismo punto material la aceleración $981 \times L$, ese peso vale 981 dinas . Por tanto, el peso de un kilogramo vale $10^3 \times 981 \text{ dinas}$.

(**) Esta unidad de trabajo se llama *ergo* ó *ergio*. Siendo el trabajo de una *dina* por un *centímetro* de recorrido en su dirección, es claro que el *kilográmetro* vale $10^3 \times 981 \text{ dinas} \times 10^2 \text{ centímetros} = 10^5 \times 981 \text{ ergios}$

La cantidad de trabajo expresada por $10,000,000$ de *ergios*, se llama *julio*, y así: 1 *kilográmetro* = $9,81 \text{ julios}$ ó inversamente: 1 *julio* = $1,7 \text{ ergios}$ = $0,102 \text{ kilográmetros}$.

(***) Esta unidad de *potencia* es la de un motor que suministra un *ergio por segundo*.— El múltiplo que se usa es *el watio*, que es un *julio por segundo* = $10^7 \text{ ergios por segundo}$.

El *kilowatio* es pues = $10^3 \text{ julios por segundo}$.

Siendo 1 *julio* = $0,102 \text{ kilográmetros}$ se ve é que: 1 *kilowatio* = $102 \text{ kilográmetros por segundo}$; ó en otros términos, que 1 *kilowatio* = $1,36 \text{ caballos-vapor}$; é inversamente que 1 *caballo-vapor* = $0,736 \text{ kilowatios}$.

Directamente se ve: 1 *caballo-vapor* = $75 \text{ kilográmetros por } 1'' = 75 \times 10^5 \times 981 \text{ ergios por } 1'' = 736 \times 10^7 \text{ ergios por } 1'' = 736 \text{ julios por } 1'' = 736 \text{ watios}$.

Al terminar aquí estos *Preliminares*, advertimos una vez más al lector—aunque ya lo hemos hecho anteriormente—que seguiremos el sistema de exposición de Galileo y Newton, que funda la Mecánica sobre tres principios:

- 1.º El de la inercia;
- 2.º El de la independencia de los efectos de las fuerzas respecto del estado de reposo ó de movimiento en que se halle el punto, y el de su composición. (Principio de Galileo);
- 3.º El de la igualdad de la acción y de la reacción. (Principio de Newton).

Adoptamos—pues—el sistema newtoniano (que es el clásico), á pesar de las graves objeciones que á él se hacen: Tomaremos los Principios y Teoremas de la *Mecánica racional*, tales como los encontramos en los Tratados elementales, sin entrar en las críticas que en los tiempos modernos se han hecho, ni mucho menos en las exposiciones en que se prescindía de alguno de aquelllos Principios.

Por otra parte, es sabido que algunos físicos eminentes—estimando que la Mecánica es una ciencia física—parten de la ley (como experimental) de la Conservación de la energía; y también de la ley del menor esfuerzo, ó sea el Principio de Gauss. La ecuación de la energía (la que antiguamente se llamaba ecuación de las fuerzas vivas y del trabajo), no es para ellos una integral de la Mecánica, y por tanto, un verdadero Teorema, sino que toman la conservación de la energía como un *primer principio*. En ese sistema de exposición de la Mecánica—que denominan *energético*—tienen que empezar por definir las energías cinética y potencial; no quieren hacer uso de la noción de fuerza, por ser esto una abstracción (*), y quieren abandonar también la hipótesis de la constitución de los cuerpos por partículas materiales. Cree-

(*) Echegaray dice que si la fuerza es una abstracción, la energía es otra abstracción.

mos que ese sistema de exposición no ha alcanzado un grado suficiente de madurez y de vulgarización; y nos atenderemos en todo y para todo al método clásico newtoniano, tanto más, cuanto que se reconoce por todos, que es el preferible *para las aplicaciones*; y lo que nosotros vamos á intentar es, al fin y al cabo, una aplicación.

Aun mirada la Mecánica clásica (la establecida por Galileo y Newton) como caso particular de una Mecánica más general, deberíamos dejarnos guiar por nuestra Mecánica clásica, puesto que las velocidades que hemos de considerar son las usuales y corrientes en la vida del hombre, y para estas velocidades es valedera.

*
* *

De lo expuesto en estos *Preliminares* retengamos lo siguiente, que doy por aceptado, para entrar en el estudio de la Cinemática:

1.º Las agrupaciones sociales—de grado superior al primero—serán consideradas por nosotros como sistemas de individuos y de colecciones parciales de individuos enlazados entre sí. Los enlaces sociales definen la agrupación constituida por los individuos y las colecciones.

2.º Cada colección—que denominamos *elemento social*—se individualiza por un centro que lo simbolice. La *posición* psíquica de este centro en un asunto social se conoce en cada instante por la constitución interna del elemento que se considere.

3.º Así los individuos como los elementos individualizados están afectos de su respectivo *parámetro*. El valor del parámetro en cada instante corresponde á la *posición* que en ese instante tenga en el asunto el individuo ó el elemento social á que esté afecto.

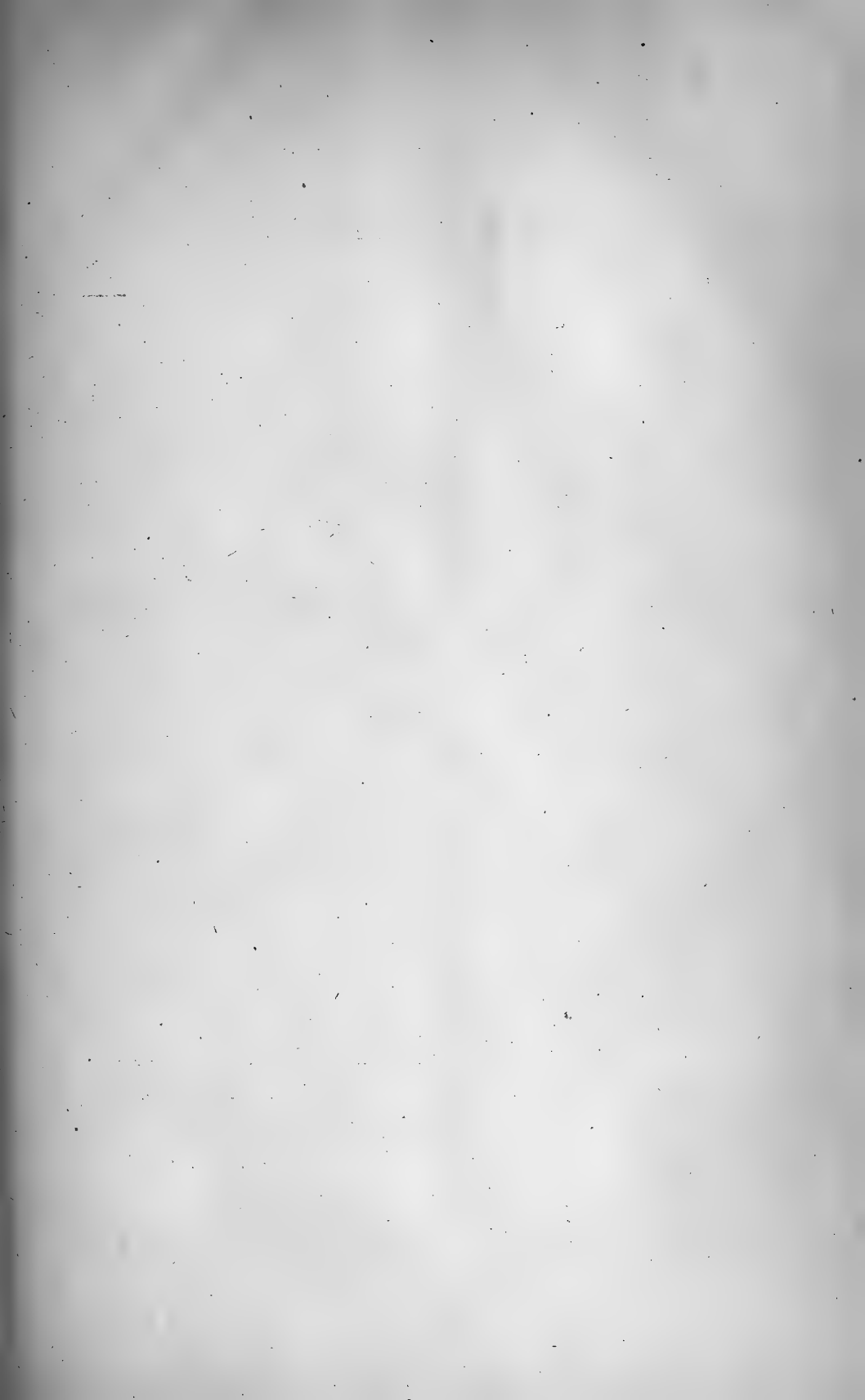
4.º Los parámetros serán constantes en el tiempo si los individuos y los elementos se hallan en estado de reposo en el asunto social que se considere; ó dicho de otro modo, si las *posiciones* de los individuos y los elementos son invariables en el tiempo.

5.º Los parámetros serán variables continuas si las *posiciones* se modifican por ley de continuidad en el tiempo. Estas modificaciones ó cambios expresan lo que hemos llamado *el movimiento en el asunto social* que se considere.

6.º Cada individuo y cada elemento social realiza su movimiento de modificación infinitamente pequeño—que es único—en una determinada *dirección* y *sentido*. Admitimos que la magnitud, dirección y sentido de la modificación infinitamente pequeña de cada individuo y de cada elemento estén determinados por el incremento infinitamente pequeño de su parámetro. Este incremento infinitamente pequeño tiene así el carácter de un *vector psíquico*.

Hecho este breve resumen, procedamos ya al estudio de la *Cinemática social*.

Cuando hayamos de pasar á la *Estática* y á la *Dinámica* volveremos sobre el concepto abstracto de las *fuerzas sociales*; y explicaremos el sentido en que admitimos el Principio de la inercia, así como el alcance que damos á la noción de masa de un individuo ó de un elemento para un asunto de carácter social.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
VIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimoviena.	187
IX.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia vigésima.	211
X.—La copelación, según antiguas recetas, por <i>José Rodríguez Mourelo</i>	235
XI.—Sobre el electrómetro de cuadrantes, por <i>E. Terradas</i>	246
XII.—Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i>	258

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X.—NÚM. 5.

Noviembre de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XIII.— Conferencias sobre Física matemática.

Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia primera.

SEÑORES:

Al empezar el nuevo curso de Física Matemática, y en él la séptima serie de conferencias, que vengo dando en la Universidad Central, debo recordar el objeto que con esta labor me propongo.

Ya lo decía al dar comienzo al curso precedente.

Sería mi propósito, suponiendo que pudiera realizarlo, explicar en esta clase y publicar más tarde en una serie de libros, una *enciclopedia elemental*, que abarcara las principales teorías de la Física Matemática clásica, así como las de la Física Matemática moderna.

Empresa, como he declarado más de una vez, sobrado ambiciosa, aun teniendo en cuenta el carácter elemental de mis explicaciones: sobrado ambiciosa, repito, por la extensión casi indefinida de la materia, y aun más si se tienen en cuenta mis muchos años y mis ya escasas fuerzas.

De todas maneras, llegaré á donde pueda llegar; y año tras año, *en los siete* que vengo desempeñando esta asignatura, es lo cierto que voy exponiendo diferentes materias, de las que deberían constituir el trabajo ideal con que desde un principio me encariñé, aunque sin esperanza, no ya de darle cima, pero ni siquiera de realizar una parte importante de la totalidad de la empresa.

Algo llevo, sin embargo, realizado, y así, en los seis cursos que han precedido á éste, he expuesto las siguientes materias:

Una introducción á la Física Matemática en que procuré marcar el carácter de esta ciencia y sus relaciones con la Física experimental; presentando ejemplos de la teoría del calor, de la luz, del magnetismo y de la electricidad, y algunas teorías de la Mecánica que eran esenciales en la ciencia clásica, cuyas ramas, por regla general, en la hipótesis mecánica se fundaban, y que aun hoy mismo tienen aplicación en varias teorías de la Física Matemática moderna.

Fué este primer curso algo así como un bosquejo de los principales problemas, que la Física Matemática abarca.

Y después, considerando que en esta ciencia es problema fundamental el *problema de la elasticidad*, me ocupé, en los tres cursos siguientes, en exponer lo más importante de esta materia, según tres métodos: el de Cauchy en el segundo curso, el de Lamé en el tercero, el de Poincaré en el cuarto.

Y sin haber agotado la materia ni mucho menos, pero habiendo expuesto todos los elementos de ella, que pudieran facilitar el estudio de las memorias y obras especiales de los grandes maestros de la ciencia, pasé, en el quinto curso de esta asignatura, á la exposición de *teorías y teoremas* indispensables al penetrar en el estudio de la ciencia moderna.

Por ejemplo: la teoría de los vectores, el teorema de Green y el teorema de Stokes.

Y de estas teorías y teoremas, hice aplicación á la electrostática y á la electrodinámica, que fué como un prelude, si vale la palabra, de estudios más serios y más completos que me propongo llevar á cabo, si puedo, en los cursos próximos de esta cátedra. Fué en cierto modo, hacer que mis alumnos se asomasen á amplios horizontes de la ciencia nueva. Verlos en conjunto no es imposible, como no es imposible ver de un golpe un inmenso paisaje; penetrar en él y recorrerlo, es ya materia de mucho tiempo y mucha labor; lle-

gar á los límites de estos horizontes es empresa imposible, porque los horizontes de la ciencia son infinitos y el ser humano, que es, esencialmente finito, no podrá abarcarlos nunca.

En el curso precedente, que fué el sexto en esta serie de trabajos, traté en particular de la *teoría de los torbellinos*, dándole la importancia que creo que tiene, por las razones que en dicho curso expuse.

No agoté tampoco esta materia, y tanto es así que, en el curso presente, ó en una parte de él, ó en el inmediato, seguiré exponiéndola.



Al comenzar los cursos precedentes, he seguido la costumbre de hacer en las primeras conferencias, de cada uno de ellos, *un resumen*, bastante detallado, de las materias explicadas desde que me encargué de esta asignatura.

Decía y desarrollaba, en lugar oportuno, esta idea: que la Física Matemática es una ciencia tan enorme que es imposible abarcarla en las conferencias de un sólo año.

Que es, por el contrario, indispensable dedicar, cada nuevo curso, á una materia distinta.

Lo contrario sería más cómodo para el profesor: le bastaba repetir periódicamente, un año y otro, las mismas nociones elementales. Pero este sistema destruiría, en absoluto, mi pensamiento, que es, como queda dicho, el de acumular en una especie de enciclopedia los fundamentos de la Física Matemática durante el siglo precedente y de las nuevas teorías que en estos últimos veinte ó treinta años se han desarrollado.

Las monteras de Sancho son buenas para caperuzas infantiles. La propaganda de la alta ciencia, siquiera sea en

sus bases elementales, exige más paño, más tiempo y más labor.

Y he agregado siempre, que ya que en cada curso debo explicar una materia nueva, creía necesario hacer en cada uno el resumen de los cursos precedentes.

Y así he venido haciéndolo hasta el curso actual, en que voy á faltar á esta regla, que hasta hoy me había impuesto.

Y la razón es bien sencilla.

El resumen de los cinco primeros cursos está hecho con bastante minuciosidad, en varios de los tomos de Física Matemática que lleva publicados la Academia de Ciencias.

En estos tomos pueden consultar dicho resumen mis alumnos. No hay por qué hacerlo de nuevo, mermando el tiempo escaso de que dispongo para las nuevas lecciones.

Mas aún, sin perjuicio de las conferencias que yo he de dar, el inteligente ayudante de esta asignatura, Sr. Carrascosa, explica una serie de lecciones semanales, en que se ocupa de lo más esencial que llevo publicado, desde el año 1905, hasta la fecha; con lo cual, en cada curso, se realiza una doble labor: la exposición de las materias más importantes de los cursos anteriores y las nuevas materias que yo expongo en cada nuevo curso. Así se sintetiza lo ya explicado en años anteriores por una parte; y yo, por la mía, avanzo en nuevas teorías hacia nuevos horizontes.

Por todo lo expuesto, no me propongo hacer la síntesis de los cinco cursos primeros en estas conferencias; y en cuanto al curso anterior, como en éste he de continuar tratando de la teoría de los torbellinos, sin hacer dicho resumen de propósito, he de hacerlo al enlazar la materia que expliqué en el curso académico de 1910 á 1911, con la materia que me propongo explicar en este nuevo curso de 1911 á 1912.

La materia principal de este curso ha de ser, como he indicado antes, la continuación del estudio de los torbellinos, y ya en las últimas conferencias del año precedente planteábamos este problema.

Suponiendo que en un fluido perfecto coinciden, en un instante determinado, los movimientos rotacionales y los irrotacionales; ó, dicho de otro modo, suponiendo que en el fluido, cuyo movimiento es irrotacional, existen determinados torbellinos en número finito ó infinito; y suponiendo que, por cualquier medio, ó, si se quiere, como dato del problema, se conocen para un instante dichos movimientos rotacionales, determinar la velocidad de cualquier punto del fluido en cualquier instante.

Estudiábamos en la última conferencia un ejemplo ó caso particular, y anunciábamos que en este curso habíamos de resolver en general el problema, deduciendo de él consecuencias importantes y analogías curiosísimas entre este problema de los torbellinos y el problema de la electricidad.

Y esta, en efecto, ha de ser la materia principal del presente curso; esto, al menos, es lo que me propongo; luego será lo que Dios quiera.

Pero aquí se nos presenta una dificultad, de que ya me he hecho cargo en otras ocasiones.

La Física matemática, como su nombre lo indica, tiene por objeto la explicación matemática de los principales fenómenos de la Física.

Y hoy aun podríamos ampliar esta definición, dadas las nuevas, inesperadas y profundas relaciones entre la Física y la Química, diciendo que la Física matemática también se ocupa en los problemas generales de la Química.

Pero unos y otros problemas pretende resolverlos por relaciones matemáticas.

De modo que, en esta ciencia, se mezclan íntimamente estos tres elementos, á saber:

- 1.º El fenómeno físico ó químico, cuyos accidentes todos,

como hemos explicado en otras ocasiones, dependen de un número determinado de parámetros, que podemos llamar parámetros del fenómeno.

2.º Las hipótesis fundamentales, que en el siglo pasado casi se reducían á una hipótesis, la hipótesis mecánica, y que aun hoy mismo, aunque aquella hipótesis clásica esté en descrédito, bien pudiéramos asegurar que en muchas teorías, por nuevas hipótesis mecánicas, ha sido sustituida.

La Mecánica clásica podrá estar en tela de juicio; en parte se habrán ampliado ó se habrán modificado sus conceptos; pero, digan lo que quieran ciertos críticos y ciertos autores, de hipótesis mecánicas están impregnadas las nuevas teorías, incluyendo la moderna energética.

Y 3.º Del elemento matemático, es decir, casi siempre de ecuaciones diferenciales entre aquellos parámetros determinantes del fenómeno. Ecuaciones diferenciales que es preciso integrar, ó en las cuales, aun sin integrarlas, hemos de estudiar las propiedades de las funciones, que representan dichos parámetros; como explicábamos detalladamente en las últimas conferencias del curso anterior, con aplicación á la teoría de los torbellinos.

Esta última parte es importantísima en la Física Matemática, que por algo es ciencia matemática.

Presenta y da ocasión á nuevos problemas de la ciencia pura.

Provoca nuevos desarrollos de esta ciencia, y aun hay quien supone, aunque sin razón, como hemos explicado varias veces, que la mayor parte de las ciencias matemáticas ha sido creada en cierto modo por requerimientos de la Física.

Sobre esto ya hemos disertado ampliamente en otras ocasiones.

Que las ciencias químicas y físicas planteen nuevos problemas matemáticos; que aquéllas hayan sido el estimulante, por decirlo así, para la creación de muchas teorías, nadie

puede ponerlo en duda; basta recorrer, por una parte, la historia de las Matemáticas, y por otra, la de la Física Matemática.

Pero hemos protestado más de una vez, y seguiremos protestando siempre que la ocasión se presente, contra estas pretensiones invasoras de las ciencias físicas, en que se supone que las matemáticas son la alta servidumbre de la materia inorgánica y de sus fenómenos; un instrumento más ó menos elevado del fenómeno material, y que su único objeto es resolver problemas del orden matemático, planteados por el físico ó por el químico para la explicación de los fenómenos naturales.

No; ya lo hemos dicho más de una vez: las matemáticas puras son una ciencia autónoma; podrán ser útiles para la práctica, para las necesidades de la vida social, para medir ó dividir campos en Egipto, para hacer cálculos numéricos, para seguir el movimiento de los astros, para determinar los efectos de las máquinas; como podrán servir hoy para la termodinámica en sus aplicaciones á la Química, para el estudio y aplicaciones industriales de la electricidad, como para penetrar en la dinámica del electrón; pero todo esto no impide que la ciencia matemática sea una ciencia autónoma con su campo propio de investigación, con sus creaciones, no serviles, sino libres, espontáneas, con sus grandes leyes del número discreto, de la cantidad continua, de las funciones continuas ó discontinuas, de las variables, de lo finito, de lo indefinido ó de lo infinito, de los grupos y de los complejos, de todo un mundo que se desarrolla en las profundidades misteriosas del cerebro, y que existirá mientras exista el pensamiento humano, aunque la electricidad, el magnetismo y la materia existiesen de otro modo ó no existiesen, ó si no se quiere ir tan lejos, aunque fuesen desconocidos para la ciencia humana.

Las matemáticas puras son lo que son, y su utilidad práctica la dan de añadidura.

Sólo una vieja tendencia materialista, tosca y exagerada, puede confundir hasta identificar las demostraciones puramente matemáticas con las demostraciones fatalmente experimentales.

Pero nos vamos alejando de nuestro objeto.

*
* *

De todas maneras, la parte matemática en la Física de este nombre es importantísima, es exuberante; casi nos atreveríamos á decir que en ocasiones es excesiva.

Libros hay, sobre todo de la Física Matemática clásica, en que los problemas de la parte física están como perdidos en un océano inmenso de cálculos y de fórmulas.

Y aquí surge la dificultad á que antes nos hemos referido, y que ya otras veces hemos señalado.

Para insistir en ella, para hacerla comprender con más claridad y también para justificar la marcha que vamos á seguir, presentaremos algunos ejemplos.

En el curso de 1909 á 1910 explicábamos dos teoremas, fundamentales en la Física Matemática moderna.

Estos teoremas pertenecían, en rigor, á las matemáticas puras. Eran la transformación de integrales triples en integrales dobles; y de integrales dobles en integrales sencillas: ó si se quiere, de integrales de volumen en integrales de superficie, y de integrales de superficie en integrales de línea cerrada.

Considerados ambos teoremas, según decimos, como pertenecientes al cálculo integral puro, y al emplear esta última palabra queremos excluir del pensamiento del matemático toda aplicación práctica, nada hay que oponer á su rigor lógico ni á su legitimidad, por decirlo así, en el campo de la ciencia abstracta.

Pero es claro, que al alumno que los estudiase sin ningún otro antecedente, le causarían cierta extrañeza y acaso pensara: «Sí, ambos teoremas son exactos; pero ¿por qué se les ha ocurrido á Green y á Stokes?»

Y esta introducción de los vectores en ambos problemas, ¿qué ventajas puede presentar y de qué modo facilitar la integración de las integrales múltiples?»

Si, por el contrario, el alumno conoce ciertas teorías de la Física Matemática moderna, ciertos problemas de la electrostática y de los campos electromagnéticos, se habrá encontrado forzosamente con ambas transformaciones y aquí, no ya la duda, pero la dificultad habrá cambiado, en cierto modo, de signo.

Comprenderá la importancia de ambas transformaciones, cuando á las acciones á distancia de la Física Matemática clásica se sustituye la transmisión de estas acciones por el espacio. Pero se detendrá pensando cuál podrá ser la demostración de ambas transformaciones, si de antemano no las estudió.

Y la demostración matemática de ambos teoremas interrumpirá y distraerá su atención del verdadero problema de Física Matemática que analiza.

De suerte que el dilema es este:

O desconoce la demostración de los teoremas al tener que aplicarlos; ó estudia su demostración sin gran empeño, ni gran interés, por no ver claramente su enlace con otras teorías de las Matemáticas puras, ni su aplicación á los problemas de la Física Matemática.

Y en este ejemplo, el inconveniente no es grave, porque las demostraciones son sencillas é interrumpen por poco tiempo la marcha principal de su estudio y sin absorber en gran manera la atención del alumno.

Pero vamos á ver que esto no sucede en otros ejemplos.

En el año anterior estudiábamos la teoría de los torbellinos, y al finalizar el curso examinamos un caso particular, aunque importante, á saber: cuando el flúido perfecto tenía un movimiento paralelo al plano de las x , y .

En este caso, suponíamos varios torbellinos, infinitamente estrechos, aunque de esta hipótesis se puede pasar á otra más general; y decíamos que las ecuaciones del movimiento de estos torbellinos paralelos al eje de las z , podían reducirse á las ecuaciones generales de la Mecánica, mejor dicho, á las ecuaciones de Hamilton.

Así obtenía Mr. Poincaré, en su teoría de los torbellinos, estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_k \frac{dx_k}{dt} &= - \frac{dP}{dy_k} \\ m_k \frac{dy_k}{dt} &= \frac{dP}{dx_k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Y dice el insigne autor con toda verdad, como hemos indicado hace un momento: «bajo esta forma se reconocen, desde luego, las ecuaciones canónicas de Hamilton, salvo el factor m_k ».

Y agrega, al final del capítulo:

«Hemos obtenido tres integrales de las ecuaciones diferenciales (1) y las propiedades de dichas ecuaciones nos permitirán integrarlas por cuadraturas, cuando sólo sean tres los tubos de torbellino.»

Y continúa:

«En efecto, las ecuaciones en cuestión, tienen, como queda expuesto, la forma de las ecuaciones canónicas de Hamilton, las cuales se integran por cuadraturas cuando contienen $2n$ variables y se conocen n integrales particulares.»

«Ahora bien, cuando existen sólo tres tubos de torbellino, las ecuaciones encierran seis variables $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ y nosotros hemos encontrado tres integrales particulares.»

Todo esto es rigurosamente exacto y, probablemente, desarrollaremos dicho problema, en este mismo curso.

Más téngase presente que estamos en España, en donde, aunque las matemáticas se cultivan, con más interés, que en otro tiempo, con más perfección, porque el profesorado es cada vez más ilustrado y con más amplitud también, lo probable es que la mayor parte de los alumnos que llegan á mi clase, no conozcan estas teorías importantísimas, que se comprenden bajo la denominación de *teoría de las ecuaciones generales de la Mecánica*.

De suerte que al venir á este punto el principiante, ó tendrá que creer al autor y al profesor bajo su palabra, y esto no satisface á ninguna inteligencia independiente, y que siente verdadero amor por la ciencia, ó tendrá que interrumpir la teoría de los torbellinos para engolfarse en el estudio, verdaderamente enorme para él, de la integración de las ecuaciones diferenciales en general, ó más particularmente de las ecuaciones de la Mecánica, y en éstas de las ecuaciones canónicas de Hamilton.

De aquí resulta que, aun en esta teoría particular de los torbellinos, que no es ni siquiera de las más modernas de la Física Matemática, para que el alumno marche con cierto desembarazo y el profesor no sienta resquemores de no ser entendido, sería preciso, para la perfecta inteligencia de todos los problemas y en particular del que hemos señalado, que explicásemos de antemano, siquiera fuese en forma muy concisa, las teorías á que acabamos de hacer referencia.

*
* *

Otro ejemplo todavía tomado de la teoría de los torbellinos que ha de continuar siendo la materia de este curso si el tiempo alcanza para ello.

Planteábamos ya el problema general á que nos referimos en las últimas conferencias del año anterior, y decíamos:

Si se han integrado las ecuaciones generales, ya las del sistema de Lagrange, ya las del sistema de Euler, claro es que en cualquier instante t conoceremos los valores de u , v , w en función de x , y , z , y, por lo tanto, para cualquier punto y en cualquier instante podremos determinar las componentes del eje del torbellino que le corresponde.

No habrá más que sustituir los valores de las derivadas de u , v , w , con relación á x , y , z , en las tres ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 2\xi \\ \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 2\eta \\ \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta. \end{array} \right.$$

Los primeros miembros serán funciones perfectamente determinadas de x , y , z , t , y, por tanto, conoceremos para cualquier instante y para cualquier punto los valores de ξ , η , ζ ; tendremos, pues:

$$\begin{aligned} \xi &= f_1(x, y, z, t) \\ \eta &= f_2(x, y, z, t) \\ \zeta &= f_3(x, y, z, t), \end{aligned}$$

y sabremos con toda certeza que para todo punto existe un eje de torbellino cuyas componentes serán las tres expresiones anteriores, en cuyo caso para tal punto y tal instante el movimiento será rotacional y conocido. Pero si los valores de dichas componentes son nulos, se sabrá también que en ese instante y en ese punto, no existe eje de torbellino y el movimiento es irrotacional.

El problema, pues, sabiendo integrar las ecuaciones diferenciales del movimiento, es elemental.

Pero planteábamos el problema inverso que era este:

Cuando por cualquier medio se han llegado á conocer las componentes del eje del torbellino en un instante y en cualquier punto, es decir, si se conocen ξ , η , ζ en función de x , y , z , se trata de determinar u , v ; w . Es decir, las componentes de la velocidad para todo punto en función de las coordenadas de este punto x , y , z .

Aun simplificaremos este problema, suponiendo que se trata de un líquido; y aun lo simplificaremos más, admitiendo que es un líquido indefinido y este será, como hemos anunciado, uno de los problemas en que nos ocuparemos en el presente curso, ó acaso en el siguiente, así como de sus analogías y aplicaciones, respecto á la electro-dinámica.

Pero, así y todo, al tratar de integrar las ecuaciones anteriores, nos encontraremos con un caso de la teoría de la *potencial newtoniana*, porque tendremos que integrar ecuaciones de esta forma, que es la ecuación de Poisson:

$$\Delta U = 4 \pi \rho.$$

Y aquí, aparece, para la enseñanza, la dificultad que vemos señalando.

Lo probable es que, mis alumnos, no hayan estudiado, con la extensión necesaria para este caso, la teoría á que acabamos de referirnos, ó sea; la *teoría de la potencial newtoniana*, en cuya hipótesis, su enseñanza quedará incompleta.

Tratar de resolver un problema, ya trate de resolverlo un maestro ó un discípulo; hacer depender, la solución de este problema de otros problemas matemáticos y no conocer estos últimos, es en el fondo, dejar sin resolver el primero. Y si se le asegura al alumno que estos últimos están ya resueltos, tendrá que creerlo, como artículo de fe, por la que

en el maestro deposita, pero no por visión clara y directa de la verdad.

Resulta en este ejemplo, como en el anterior, la necesidad, de explicar de antemano en esta clase, otra nueva teoría matemática, de integración ó de mecánica, como quiera entenderse.

Ya señalamos una en el ejemplo anterior: la teoría de la *integración de las ecuaciones canónicas de Hamilton*.

Ahora señalamos otra: la *teoría de las atracciones y de la potencial newtoniana*.

Otro ejemplo más he de citar, y voy tomándolos á la casualidad.

*
* * *

En la admirable obra de Lorentz, titulada «The Theory of Electrons» y al estudiar el movimiento de éstos, como el autor ha separado una gran masa de cálculos, para que no le perturben en la exposición de sus conferencias, consignándolos en notas; en la *nota quince*, nos encontramos con fórmulas que todavía se refieren, como en el ejemplo anterior, á la teoría de la potencial, ó mejor dicho, á las fórmulas de atracción de los elipsoides.

Así es que, cuando lleguemos, que no será este año seguramente, pero que quizás sea el inmediato, si mis propósitos se realizan, á la exposición de estas novísimas teorías de la Física Matemática, nos encontraríamos, con la misma dificultad y con el mismo punto de parada ó con el mismo dilema.

O dar por conocida una teoría, que mis alumnos no conocen, citando fórmulas matemáticas como se citan recetas, imponiéndolas como punto dogmático ó como artículo de fe científica, ó bien interrumpir, una vez más, la exposición de

una *teoría física* para desarrollar durante tres ó cuatro meses una teoría matemática.

*
* * *

Aun otro ejemplo, y también tomado á la casualidad, en las obras del ilustre Lodge.

Dice este insigne maestro, al estudiar el movimiento de una carga eléctrica, para el cálculo de la inercia que finge, si es lícito expresarnos de este modo:

«El valor de la fuerza eléctrica en el punto de que se trata es

$$E = \frac{e}{kr^2},$$

y si el movimiento es lento, este valor será suficientemente exacto.

Pero si el movimiento es rápido y comparable á la velocidad de la luz, el campo eléctrico tomará un valor más débil á lo largo del eje, y más intenso ecuatorialmente: como ha demostrado M. Heaviside, dicho valor tiene la forma

$$E = \frac{e}{kr^2} \frac{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{u}{v} \sin \theta\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

El alumno ó el aficionado á estas materias, que se encuentra con dicha fórmula, es imposible que pase adelante sin hacer un esfuerzo para buscar la demostración, ó, en todo caso, sin buscar la demostración en su fuente original.

Toda conciencia científica, si es un poco delicada, siente cierto malestar y hasta cierta humillación al emplear fórmulas cuyas demostraciones ignora.

Pues bien; la fórmula precedente, tal como el ilustre matemático inglés la ha desarrollado, se funda en el *cálculo simbólico de integración* que, probablemente, la mayor parte de mis alumnos desconocerán.

Y por eso, cuando llegue el caso antes de desarrollar la teoría física, procuraré desarrollar, en un par de conferencias, la teoría matemática.

*
* *

De este modo pudiera seguir acumulando ejemplos.

Ya citaba en otras conferencias la fórmula de Fourier, que es fundamental.

Y la teoría de las armónicas.

Citamos aún la teoría de las funciones de variables imaginarias ó complejas.

La teoría de los cuaternios, de la cual hace uso tan frecuente la escuela inglesa.

Y otras muchas de las teorías de las matemáticas puras; ó de las creadas por la influencia y el estudio de los problemas de Física matemática; ó de las que esta ciencia puede sacar partido, aun habiendo sido creadas sin fin alguno utilitario en el campo infinito de la lucubración abstracta.

Todo esto pone de relieve y demuestra la dificultad constante del profesor, que dedica sus enseñanzas á la Física Matemática; sobre todo cuando no existen otras asignaturas que sirvan de amplia y completa preparación á la asignatura propia de aquella ciencia.

Me veo, pues, obligado á escoger, como ya dije en otro curso, una especie de término medio, alternando las teorías propias de la Física Matemática con ciertas teorías de las Matemáticas abstractas.

Dividiendo, por decirlo así, aquéllas en varios grupos y

haciendo preceder cada uno de ellos de las teorías matemáticas más indispensables.

Esto hice en uno de los cursos precedentes al explicar, á modo de introducción, los elementos de la teoría de los vectores, las notaciones de Grassman y los dos teoremas fundamentales en toda la Física Matemática moderna: el de Green y el de Stokes.

Una cosa análoga vamos á hacer en este curso antes de completar la teoría de los torbellinos, que empezamos á estudiar en el curso precedente.

Y ya podemos puntualizar el programa de las materias de esta asignatura en el curso que hoy empieza.

Es programa que procuraremos cumplir fielmente, si el tiempo nos alcanza para ello y para ello alcanzan mis fuerzas.

* * *

Así, pues, en el presente curso me propongo explicar:

La teoría de los torbellinos, que será continuación del último curso.

Y como introducción á éste, explicaré ante todo:

1.º La teoría de la atracción newtoniana.

La teoría de la potencial, también newtoniana, y muy particularmente la ecuación de Laplace.

La extensión de estas teorías, ó mejor dicho, su aplicación á la electricidad y al magnetismo.

2.º El estudio de la integración de las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Todo ello en forma muy elemental, lo puramente preciso para la inteligencia de los problemas de Física Matemática.

Son teorías estas últimas que no vamos á explicar por sí, como problemas abstracios de las Matemáticas puras, sino como medios ó auxiliares de los problemas de Física Mate-

mática, que hemos de ir estudiando sucesivamente. Por ejemplo, la teoría de los torbellinos, la electrostática, la electrodinámica, el magnetismo, ya según las teorías y las hipótesis de la ciencia clásica, ya en el dilatado y novísimo campo de la ciencia moderna.

En la conferencia próxima empezaremos, pues, el estudio de la potencial newtoniana, en el que nos han de servir de guía, entre otras varias obras, la de Mr. Poincaré y la de Mr. Appell, obras importantísimas de ambos maestros, que no es la primera vez que hemos citado y á las que de continuo tendremos que acudir para nuestras explicaciones y nuestros estudios propios.

Y no hablo de otras por no aumentar, innecesariamente, esta bibliografía, que es bien conocida y está al alcance de cualquiera.

XIV.— Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia segunda.

SEÑORES:

Dijimos en la primera conferencia de este curso, que en el mismo procuraríamos completar la teoría de los torbellinos, que tiene por sí verdadera importancia, que la tiene por sus aplicaciones y hasta por sus semejanzas y analogías con otras teorías de la Física Matemática.

Pero dijimos también, que antes de completarla y darla por concluída, teníamos que intercalar, interrumpiéndola, dos teorías de otro orden:

La de las atracciones y de la potencial con más el estudio de la ecuación de Laplace y un examen rápido, unas nociones, pudiéramos decir, de las ecuaciones de la Mecánica, ó mejor dicho, de las ecuaciones canónicas de Hamilton.

En fin, anunciamos que en esta segunda conferencia empezariamos el estudio de la potencial newtoniana.

Algo nos remordía la conciencia al interrumpir el estudio de los torbellinos, estudio que pertenece, por buen derecho, á la Física Matemática; y explicábamos, minuciosamente, las razones que para ello teníamos, y aun presentábamos nuestras excusas por alterar, en cierto modo, el programa general de estos cursos, que todos ellos corresponden y deben corresponder á la Física Matemática, por ser la asignatura de que estoy encargado.

Pero acaso estos escrúpulos son exagerados, porque al estudiar la potencial newtoniana, y mejor dicho, al estudiar cualquier cuestión de Mecánica, en rigor, no traspaso los límites de la asignatura ni dejo de estudiar cuestiones que á la Física Matemática pertenezcan.

La Física Matemática, como su nombre lo indica, estudia los fenómenos del mundo físico y dentro de la ciencia novísima, los fenómenos de la Química en toda su extensión.

Pero los fenómenos del movimiento y sus leyes, las del equilibrio, como caso particular de aquél, ó mejor dicho, como cierto grado de abstracción del mismo, son fenómenos del mundo inorgánico, son fenómenos físicos en su totalidad, al menos en una primera aproximación, de suerte que puede afirmarse que, todo fenómeno de Mecánica, á la Física Matemática pertenece; lo mismo la mecánica de los sólidos, que la de los flúidos, que la de cualquier sistema, sujeto á determinados enlaces.

Tanto es así, que tengo la esperanza de estudiar más adelante, por una parte, la célebre Mecánica de Hertz, y además la energética de Duhem, obra importantísima esta última en curso de publicación y de la cual ya ha visto la luz el primer tomo.

En suma, al estudiar cualquier problema de Mecánica, ó nuevos aspectos de esta ciencia, desde la cinemática á la moderna energética, no traspaso los límites de la asignatura; dentro de la Física Matemática estoy siempre y lo único que pudiera extrañar á primera vista es el interrumpir una teoría como la de los torbellinos, para empezar este nuevo curso por la teoría de lo potencial.

Pero las razones que tengo para ello ya las he expuesto ampliamente en la primera conferencia de esta nueva serie.

Empiezo, pues, á estudiar desde luego la teoría de las atracciones newtonianas y de la potencial.

Atracciones newtonianas—Potencial.

La Mecánica clásica sabido es que se divide en tres partes:

1.^a *La cinemática*, en que se estudian los movimientos de los sistemas, no sólo en su forma geométrica, sino en su relación con el tiempo.

En esta primera parte no vamos á ocuparnos por ahora.

2.^a *La estática*, ó sea la teoría del equilibrio.

Busca esta rama de la Mecánica las condiciones de equilibrio de cualquier sistema sujeto á enlaces determinados y sometidos á fuerzas determinadas también.

Se dirá, y dicen algunos, que el equilibrio no existe, que es una pura abstracción; pero esto importa poco: ni un solo problema de los que la ciencia estudia deja de ser una abstracción en el seno de los fenomenos totales, que sólo de esta manera puede la inteligencia humana estudiar el inmenso Cosmos.

Y el equilibrio es una abstracción casi necesaria para resolver los problemas dinámicos. Al menos lo ha sido hasta hoy.

Ya, sobre este punto, hemos discurrido con bastante extensión en otras conferencias de otros cursos.

De todas maneras resulta, que en la Estática es concepto fundamental este concepto de *fuerza*, y que al pretender resolver un problema de la Mecánica es preciso conocer de antemano todas las fuerzas ó cierta parte de ellas.

La fuerza es, si se nos permite esta imagen, la urdimbre del equilibrio, y de la combinación de fuerzas resulta éste.

3.^a Por último, *Dinámica* es la tercera sección de la Mecánica, y dos son los conceptos fundamentales de esta ciencia, mejor dicho de la Mecánica en general:

La *masa* y la *fuerza*.

Ya sabemos, que ciertos críticos modernos rechazan este

dualismo de la Mecánica clásica y hasta pretenden ponerlo en ridículo, comparando la fuerza á la caballería que tira de un vehículo y el vehículo á la masa misma.

Pero en rigor este ejemplo es una prueba más, con ser tan vulgar y tan tosco, de la terquedad con que la misma experiencia impone estos dos conceptos:

La acción que se ejerce y algo material sobre lo cual se ejerce dicha acción. Esto proclama el sentido común en un carromato como en un astro.

Y como el efecto producido se marca por el movimiento y este efecto ha de medirse, por decirlo así, por un coeficiente que dependerá de la fuerza y dependerá del elemento material, sobre el que se ejerce, de aquí, naturalmente, el concepto de *inercia*.

La palabra quizá no sea propia; pero la experiencia, con interminable terquedad, volvemos á repetirlo, despierta en la inteligencia humana estos tres conceptos:

Lo que actúa, aquello sobre lo cual actúa y el efecto producido, que es como si dijéramos el cambio que se produce en el estado de las cosas.

Y mientras la inteligencia humana esté organizada como hoy lo está, estos tres conceptos, ó estas tres ideas, ó estas tres representaciones intelectuales, ó estos tres símbolos parciales de tres cosas reales, ó déseles el nombre que se quiera, se impondrán á la experiencia, se impondrán á la razón humana y se impondrán á toda ciencia por más artificios que se busquen para salvar dificultades y dudas.

La metafísica busca en todas partes su desquite.

Resulta, sea del modo que fuere que, como en la *Estática*, nos encontramos el concepto fundamental de *fuerza*; en la *Dinámica* nos lo encontramos también, complicado, con otro concepto, el de *masa*.

Pero de este último, podemos prescindir por ahora.

Y vemos, en resumen, que, así en un problema de equilibrio, como en un problema de movimiento, las fuerzas, por

regla general, constituyen datos necesarios del problema.

Esto, volvemos á repetirlo, en términos generales, aunque claro es que en ocasiones, las fuerzas no sólo son datos, sino que algunas de ellas pueden ser incógnitas del problema. Por ejemplo: cuando en un problema de estática se buscan las presiones, las tensiones y todas las fuerzas internas que se desarrollan en el sistema, una vez establecido el equilibrio. Precisamente estos son los problemas, que el ingeniero constructor se ve obligado á resolver de continuo.

*
* *

De todas maneras resulta que, en los problemas de Mecánica, y sobre todo en la Mecánica clásica, la fuerza es un elemento y un concepto fundamental; claro que nos referimos á las fuerzas de la vieja mecánica, á las que se definían diciendo que eran *las causas del movimiento*, á las que se medían y se miden por *kilogramos*.

En ciertas renovaciones de la ciencia moderna y en ciertas nuevas teorías, ya hemos dicho repetidamente, en otros cursos, que el concepto de fuerza va perdiendo, en cierto modo, terreno y que en cambio aparece con ambiciones poderosísimas otro concepto, el concepto de *energía*. Tanto, que á la Mecánica y á la Física y á todas las ciencias del mundo inorgánico, por el pronto, sin perjuicio de la suerte que al mundo orgánico le esté reservada en la mente de los innovadores; á esta nueva ciencia total, repetimos, se le da el nombre de *ciencia de la energía*.

Ya este punto lo hemos tratado en años anteriores, aunque de paso y reservándole el lugar preferente para más adelante; y ahora, también de paso, vamos á tratarlo.

Dijimos que la energía era una denominación genérica, y en el concepto de algunos físicos de la nueva escuela, la energía casi se confundía con la esencia de las cosas.

Mas *siendo una en su esencia*, y valgan los términos metafísicos, es múltiple en sus determinaciones.

Así, según la nueva escuela, tenemos: *la energía mecánica, la energía calorífica, la energía lumínica, la energía eléctrica, la energía magnética, la energía química, la energía fisiológica* y aun si se quiere *la energía espiritual*, que de todas trata, en su interesante obra, el eminente y laureado químico W. Ostwald.

De todas estas energías, la primera, la fundamental en la ciencia clásica, es la *energía mecánica*, que se mide por kilogrametros.

Y ocurre preguntar ¿todas las energías de la lista anterior son fundamentalmente distintas unas de otras, y unas á otras irreducibles, sin que pueda señalarse la unidad de todas ellas?

¿Es problema racional y sensato buscar esa unidad, ó es empresa, por el contrario, insensata, imposible, absurda?

No pretendemos resolver en este momento dicha cuestión verdaderamente transcendental.

En toda la ciencia clásica del siglo anterior se ha contestado á las anteriores preguntas con una afirmación absoluta; llena de esperanzas, y de ambiciones, dicen otros.

La hipótesis mecánica tiene esta significación y aspira á reducir todas las formas de la energía á la energía mecánica.

Hoy mismo, al establecer las *unidades* de la Física, todas las energías de ésta se expresan por unidades de la energía mecánica. Es decir, por kilogrametros, ó de otro modo, por el producto de fuerzas por caminos recorridos.

¿Y admitir, puede preguntarse, que la energía calorífica, la eléctrica, la magnética, la lumínica y la química, se expresan por las mismas unidades que la energía mecánica, no es admitir, implícitamente, cierta unidad de esencia entre todas estas formas de la energía?

Acaso se diga que *la equivalencia* entre diversas unidades físicas, no supone *identidad* en la esencia de los fenómenos.

Acaso la contestación tenga fuerzas para algunos; pero

no duden los nuevos críticos, que por este camino de la equivalencia de las unidades, va el espíritu humano á la unidad de fondo entre los fenómenos.

No se llegará, ó se llegará al fin; pero este es el camino que conduce á una nueva hipótesis mecánica, si bien más amplia que la del siglo precedente y más comprensiva que aquélla, porque abarcará, no sólo la materia ponderable sino la luz, el calor, la electricidad, el magnetismo, las reacciones químicas y ese nuevo mundo de iones, electrones, rayos X, rayos catódicos y radio-actividad.

La nueva hipótesis, repetimos, será mucho más amplia que la vieja hipótesis mecánica; pero será una hipótesis mecánica, de una nueva mecánica, que comprenderá á la antigua, con su hipótesis, como caso particular ó como primera aproximación de nuevas soluciones para los fenómenos inorgánicos de la Naturaleza.

*
* *

Vemos, sea como fuere, que todas las formas de la energía se expresan por unidades de la *energía mecánica* y se reducen á kilográmetros. Y como el kilográmetro supone dos unidades fundamentales, para la fuerza, por ejemplo el kilogramo, y otra para el camino, el metro por ejemplo, con estos dos factores, fuerza y espacio lineal, tendrán que contar forzosamente todas las energías que la nueva escuela de la energética imagine.

Podrán los partidarios de las modernas teorías descomponer, como hace Otswald, y es descomposición muy curiosa y quizás profunda, cada energía en dos factores especiales. Por ejemplo: la electricidad, en los factores *potencial* y *cantidad de corriente*; el calórico, en estos otros dos, *temperatura* y *eutropia*, y así sucesivamente. Pero siempre el producto de estos dos factores determinará un número, que re-

presentará la energía, el cual, á su vez, se descompondrá en fuerza y camino recorrido.

Es, si se nos permite la comparación, una teoría análoga á la descomposición de un número en números primos ordinarios, en números primos complejos, y así sucesivamente, en una serie de representaciones transcendentales del concepto del número.

Queremos significar, con las observaciones que preceden, que, si bien en las teorías modernas, como más de una vez hemos hecho observar, al concepto de *fuerza* se va sustituyendo de preferencia el concepto *energía*, esto no significa, de ningún modo, que haya de abandonarse, ni en un porvenir próximo, ni en un porvenir remoto, el concepto de *fuerza*, de la fuerza clásica medida por kilogramos, que encarna en la realidad de los hechos y circula en lo más profundo de los fenómenos.

Y es inútil que los innovadores digan que la fuerza es una abstracción sin realidad. Si á la palabra abstracción se le da un sentido absoluto, podremos decir, que la inteligencia humana vive de abstracciones y sólo abstracciones maneja.

Si es abstracción la fuerza, es abstracción la energía; ni una ni otra abarcan por completo la totalidad de un fenómeno.

Los sentidos suministran á la inteligencia materiales, en los que, por decirlo así, hay una parte real y una parte abstracta.

Volvemos á repetirlo: si la fuerza es una abstracción, otra abstracción, aunque quizás más saturada de realidad, es la energía.

Podríamos decir, análogamente, que si la línea geométrica es una abstracción, abstracción es también el plano.

El concepto de fuerza y el concepto de energía en el mundo inorgánico, los encontramos, como encontramos la materia.

De los objetos exteriores, el sentido de la vista extrae una representación, y por eso creemos que vemos la materia.

Pues en rigor, no es más privilegiada la vista que el tacto, porque el tacto nos da también el concepto de fuerza, de resistencia, de presión, de empuje.

Ni en Geometría se podrá prescindir de la línea, pretendiendo anularla ante el volumen de un espacio.

Ni en la Mecánica se podrá anular la fuerza ante la energía.

Espacio y campo hay, por decirlo así, para todos los elementos de la ciencia clásica y para todos los elementos de la ciencia novísima; que la historia de la ciencia, que es la de su evolución, abarca á unos y á otros, en un organismo cada vez más perfecto, y que aspira, cada vez con más ansia, á formas definitivas, aunque jamás llegue á alcanzarlas.

Hemos dicho todo lo que precede, porque vamos á considerar en estas conferencias á la fuerza, á la manera que la consideraba la Mecánica clásica.

*
* * *

El concepto de fuerza va unido casi constantemente, en la vieja Mecánica, á la *acción ó distancia*.

La hipótesis newtoniana supone, que la materia actúa sobre la materia, atrayéndola proporcionalmente á las masas y en razón inversa del cuadrado de las distancias.

En esta hipótesis cualquier elemento de materia ponderable, que ha sido lo que, traduciendo nuestras sensaciones, hemos llamado siempre *materia*; una molécula, un átomo se supone que atraen á toda la materia restante del Universo, como si el espacio no existiese, como si todo estuviera en contacto con todo, y además como si no existiera el tiempo, porque la acción se supone que es instantánea.

El espacio influye, pero es sólo para debilitar la atracción, porque sabemos que en tal hipótesis la atracción es inversa del cuadrado de la distancia.

Este principio de las atracciones de la materia se ha hecho popular, indiscutible, y como verdad indiscutible ha pasado á la gran masa de las inteligencias.

Hoy la mayor parte de los físicos rechazan la acción á distancia y vuelven á la primitiva fórmula de Newton: la materia atrae á la materia proporcionalmente á las masas y en razón inversa del cuadrado de las distancias. O las cosas pasan, es decir, ó los fenómenos se desarrollan, como si esta atracción á distancia fuese una realidad.

Hipótesis, simbolismo, fórmula práctica ó como se quiera, que simplifica los cálculos y las teorías y que crea toda la Mecánica celeste.

No vamos á discutir una vez más este tema; en la exposición de la teoría de las atracciones y de la potencial admitiremos la fórmula clásica como si fuera una realidad.

Si á pesar de la crítica, lo es, por serlo.

Si es un puro simbolismo, por su comodidad y su fecundidad.

*
* *

En un sistema de puntos materiales, continuos ó discontinuos, tendremos que considerar dos elementos para el estudio de las atracciones: *las masas y las fuerzas*.

Las fuerzas que actúan sobre cada punto podrán tener dos orígenes; procederán del mismo sistema ó vendrán de sistemas exteriores á éste.

De estas últimas fuerzas vamos á prescindir por completo. Es decir, supondremos que no existen.

En pura teoría decimos que no existen, y si de la pura teoría pasásemos á la práctica, supondremos que son tan insignificantes sus acciones, por proceder de sistemas inmensamente lejanos, que será legítimo despreciarlas.

En suma, supondremos que toda fuerza que actúa sobre

un punto del sistema procede de otro punto del sistema mismo.

De modo que en el sistema, por decirlo así, cerrado, que estamos considerando, tendremos dos clases de elementos:

1.º Una serie de masas m, m_1, m_2, \dots que podrán ser discontinuas ó podrán formar una continuidad total, ó podrán constituir una serie de grupos continuos.

2.º Un sistema de fuerzas que serán las atracciones entre cada dos puntos del sistema cerrado.

Estas atracciones, supondremos, que obedecen á la ley newtoniana. De modo que si m es la masa de un punto, m_1 la masa de otro punto del sistema, y r la distancia entre ambos puntos, el valor de su atracción, prescindiendo ahora del signo, será

$$f \frac{m m_1}{r^2},$$

en que f es un coeficiente numérico, que dependerá de la unidad que se elija para las masas, y de las unidades que se elijan para las distancias y para las fuerzas.

Será f el valor numérico de la atracción entre dos masas infinitamente concentradas, iguales á 1 y distantes una unidad.

Porque, en efecto, si $m = 1, m_1 = 1, r = 1$, la fórmula anterior se reduce á f .

Además, suponemos que la *acción* es igual y contraria á la *reacción*.

Si M atrae á M' con una fuerza F de M' á M , á su vez M' atrae á M con una fuerza F de M á M' , ó sea en sentido contrario que antes.

Por último, la *acción es nstantánea*: la fuerza F se transmite, por decirlo así, de golpe: *tarda* un tiempo *cero* en ir de una masa á otra: *no va*, existe.

Toda esta teoría de las atracciones y de la potencial vamos á dividirla en dos partes:

En la *primera* trataremos del caso en que las masas forman un *sistema discontinuo*.

Admitiremos en la segunda, que los elementos materiales forman uno ó varios sistemas continuos.

Empecemos desde luego por el primer caso.

Atracciones y potencial de sistemas discontinuos.

Sea un sistema cerrado, es decir, único S (fig. 1.^a), compuesto de puntos materiales m, m_1, m_2, \dots .

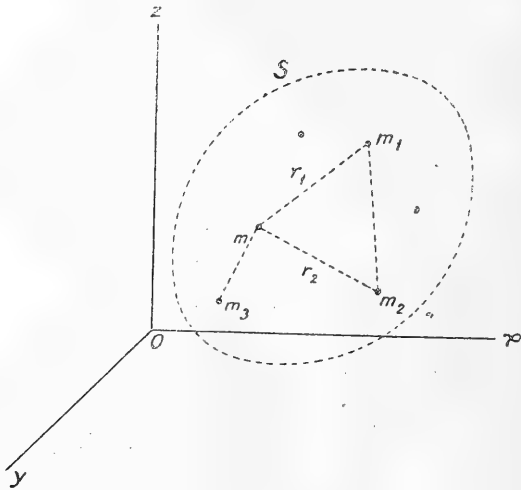


Figura 1.^a

Cada uno de estos puntos tiene una masa ponderable, que representamos por estas mismas letras; masas que podrán ser infinitamente pequeñas, ó que podrán ser finitas; esto importa poco para nuestro objeto; pero admitiremos que están reconcentradas en un punto geométrico cada una de ellas, ó si se quiere, en un elemento de volumen infinitamente pequeño.

Abarcamos todos estos puntos en una superficie S para indicar el aislamiento del sistema respecto al espacio exterior; no tiene otra significación la superficie S , que en rigor no existe sino como símbolo geométrico, superficie que podrá ser, por lo demás, tan grande como se quiera.

Entre estos puntos, dos á dos, suponemos que existen atracciones; por ejemplo, entre m y m_1 , entre m y m_2 , entre m_1 y m_2 y así sucesivamente, tomando los puntos dos á dos.

Y según el principio de igualdad entre la *acción y la reacción*, la de m sobre m_1 será la misma, y en sentido contrario que la de m_1 sobre m . Por fin, estas acciones, como antes decíamos, son instantáneas.

Tres son, pues, los principios que rigen la mecánica del sistema:

Primero. La ley de las atracciones $f \frac{m m_1}{r^2}$.

Segundo. La igualdad de la acción y la reacción.

Tercero. La acción instantánea.

No existen, pues, en el sistema, lo repetimos, más que estas dos clases de elementos: las masas m y las atracciones que resultan de todas las combinaciones binarias de dichas masas.

Para estudiar problemas de estática ó de dinámica del sistema que consideramos, no hacen falta otros datos más que las masas señaladas, la ley de las fuerzas, que es la ley newtoniana, y la distribución de los puntos m, m_1, m_2, \dots : si es problema dinámico hay que agregar las velocidades iniciales.

Y con estos datos podremos determinar evidentemente la fuerza que actúa sobre cada punto de los indicados, porque podremos calcular la acción de cada uno de los restantes y la resultante de todas estas acciones.

Más á fin de que no quede la menor duda á mis alumnos, debo insistir todavía en estas explicaciones, por más que parezcan elementales.

A la expresión

$$f \frac{m m_1}{r_1^2}$$

que mide la acción recíproca atractiva, entre dos masas m y m_1 , muchos autores le dan un signo, que es el signo — en

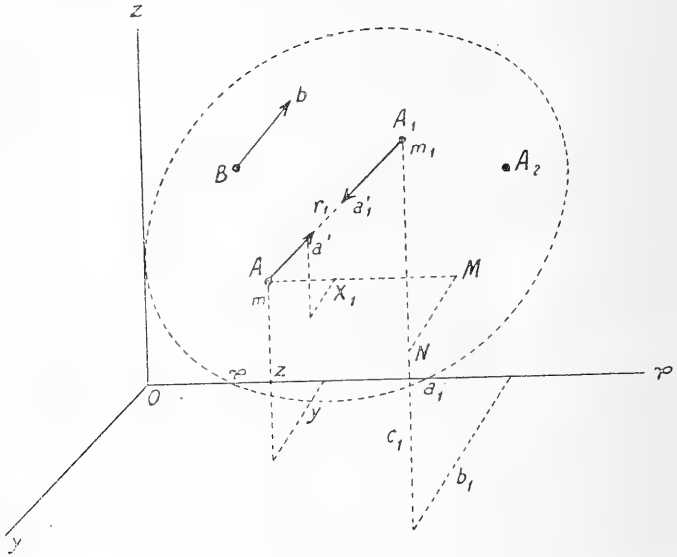


Figura 2.^a

este caso de atracción; pero nosotros preferimos otro sistema, que nos parece, al menos por el pronto, más sencillo, más natural y menos expuesto á dudas para los principiantes.

La acción sobre cada punto A (fig. 2.^a) ya de un punto del sistema $m_1, m_2 \dots$ ya de todos ellos, la consideraremos como un vector y la expresión

$$A a' = f \frac{m m_1}{r_1^2},$$

como esencialmente positiva.

Ahora, este vector $A a'$, referido á tres ejes, podrá tener di-

ferentes orientaciones, y las componentes del vector serán positivas ó negativas según vamos á explicar, y resultarán con su signo, sin género ninguno de duda.

En efecto, consideremos, para simplificar la explicación, la acción de la masa m_1 sobre la m : luego determinaremos las acciones de los demás puntos sobre A y el conjunto de todas ellas, es decir, el vector resultante de todos estos vectores parciales, análogos al Aa' , será el vector que represente, la atracción total del sistema menos m , sobre el punto A que hemos elegido.

Claro es, que podremos repetir para otro punto cualquiera B , con sus vectores parciales Bb y su vector total todo lo que hemos dicho para A .

En notaciones vectoriales y representando, por el pronto por Σ una suma vectorial, podremos decir

$$\text{atracción sobre } A = \Sigma \bar{A}a',$$

extendiendo la suma á todos los puntos del sistema menos m .

Volviendo al par de puntos A, A_1 , tendremos

$$\text{fuerza ó vector } \bar{A}a' = f \frac{m m_1}{r_1^2}.$$

Vamos á determinar ahora las componentes de esta fuerza Aa' que para abreviar representaremos por F_1 .

Así como representaremos por X_1, Y_1, Z_1 sus componentes paralelas á los ejes; y tendremos, desde luego, para la componente

$$X_1 = F_1 \cos A_1AM.$$

Designemos por x, y, z , las coordenadas del punto, A , y por a_1, b_1, c_1 , las del punto A_1 .

Como vamos á estudiar la acción de todos los puntos del

sistema, sobre el punto A , empleamos notaciones distintas y análogas en cada caso, para el punto *atraído* A y para los puntos que atraen $A_1, A_2, A_3 \dots$

Tendremos, evidentemente, en la figura 2.

$$\cos A_1 A M = \frac{A M}{A A_1} = \frac{a_1 - x}{r_1};$$

y, por lo tanto,

$$X_1 = f \frac{m m_1}{r_1^2} \frac{a_1 - x}{r_1},$$

ó bien

$$X_1 = f \frac{m m_1}{r_1^3} (a_1 - x).$$

Veamos desde luego cómo en esta figura resulta para X_1 el signo que debe resultar.

Y en efecto, la componente del vector $A a' = F_1$, fuerza paralela al eje de las x , en la figura es positiva pues actúa en el sentido de las x positivas; y el segundo miembro es también positivo. Porque f es un número positivo por naturaleza; m, m_1 , en el caso de la atracción de masas ponderables son otros dos números positivos. Cuando amplíemos todo esto para las acciones eléctricas, tendremos que ampliar esta hipótesis, más por el momento positivas son, como hemos dicho, m y m_1 .

La distancia $A A_1 = r_1$, es positiva por ser una distancia y nada más. Y signo positivo lleva $a_1 - x$, toda vez que a_1 en la figura es mayor que x .

Hay concordancia, pues, entre el signo del primer miembro y el del segundo.

Más aún, esta fórmula en que restamos, de la *coordenada* a_1 de la masa atrayente m_1 , la *coordenada* x de la masa *atraída* es general, como vamos á ver, y da siempre concor-

dancia en los signos de ambos miembros de la expresión anterior.

Consideremos, en efecto, la figura 3.^a en la que hemos invertido los puntos A y A_1 .

La componente X_1 del vector $F_1 = Aa$, en este caso, se-

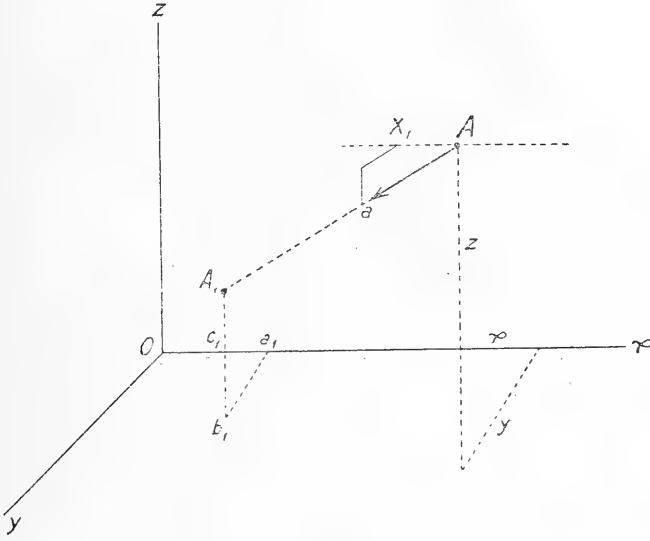


Figura 3.

gún la figura, es negativo; de modo que es negativo el primer miembro de la fórmula.

Veamos el segundo.

Lo mismo que antes, f , m , m_1 y r_1 , son cantidades positivas. Pero $a_1 - x$ es evidentemente negativa, porque a_1 es menor que x . Luego el segundo miembro es negativo, como debía ser.

De suerte que la fórmula al menos para las masas ponderables es general y da los valores de la componente del vector-atracción X_1 con su valor numérico y con su signo.

Todo esto, podemos repetirlo, para las otras dos componentes.

Y tendremos, en suma, que las componentes del vector de atracción F_1 de una masa m_1 sobre una masa m serán

$$X_1 = f \frac{m m_1}{r_1^3} (a_1 - x)$$

$$Y_1 = f \frac{m m_1}{r_1^3} (b_1 - y)$$

$$Z_1 = f \frac{m m_1}{r_1^3} (c_1 - z).$$

Estas fórmulas son generales; pero es necesario restar de las coordenadas del punto atrayente, las coordenadas del punto atraído, y en este caso, el vector de atracción es un *escalar* positivo y su orientación, respecto á los ejes, es decir, los cosenos de los ángulos que forma con dichos ejes, son los que determinan el signo de las componentes de dicho vector ó fuerza.

*
* *

Del mismo modo que hemos determinado, las componentes de la atracción que ejerce la masa m_1 , sobre la masa m , y que son, según queda expuesto:

$$X_1 = f m m_1 \frac{a_1 - x}{r_1^3},$$

$$Y_1 = f m m_1 \frac{b_1 - y}{r_1^3}.$$

$$Z_1 = f m m_1 \frac{c_1 - z}{r_1^3},$$

se determinan las componentes de la atracción que ejerce la masa m_2 sobre la masa m , y serán estas componentes empleando notaciones análogas:

$$X_2 = f m m_2 \frac{a_2 - x}{r_2^3},$$

$$Y_2 = f m m_2 \frac{b_2 - y}{r_2^3},$$

$$Z_2 = f m m_2 \frac{c_2 - z}{r_2^3}$$

otro tanto podríamos repetir para las masas $m_3, m_4 \dots m_n$.

Cada una de estas masas da un vector para m , con las tres componentes que le corresponden, y sumando las componentes paralelas á cada eje, y representando por X, Y, Z , las tres componentes totales de la atracción, tendremos:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n;$$

ó abreviadamente y empleando el signo S para expresar la suma, pero no una suma vectorial, sino una suma ordinaria, tendremos que sobre el punto m , los demás puntos del sistema $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$, ejercen una atracción, cuyas tres componentes serán

$$X = S_1^n X_1,$$

$$Y = S_1^n Y_1,$$

$$Z = S_1^n Z_1.$$

O bien substituyendo los valores de cada componente parcial, que antes hemos determinado,

$$X = S_1^n f m m_1 \frac{a_1 - x}{r_1^3}$$

$$Y = S_1^n f m m_1 \frac{b_1 - y}{r_1^3}$$

$$Z = S_1^n f m m_1 \frac{c_1 - z}{r_1^3}:$$

el subíndice y el índice del signo S , significan, naturalmente, que hay que sumar términos de la misma forma que el que se expresa, pero en que los subíndices de las letras m, a, b, c, r , varían desde 1 hasta n .

Estas son, por lo tanto, las *componentes de la atracción* que buscábamos, expresadas, como es natural, en función de la masa m del punto atraído y de sus coordenadas x, y, z , y además, de todas las masas restantes del sistema m_1, m_2, \dots , de sus coordenadas correspondientes $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots$ y de las distancias r_1, r_2, \dots de todos los puntos al punto m .

Si en el sistema los puntos m_1, m_2, \dots quedasen fijos y solo variase de posición el punto m , las componentes de la atracción sobre m serían funciones de las variables x, y, z . Entran, en efecto, explícitamente, y entran además en las distancias r , que son de la forma

$$r = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}.$$

De modo que, puede decirse desde este punto de vista, que X, Y, Z , son funciones de x, y, z .

*
* *

Para concluir esta conferencia vamos á hacer dos observaciones finales:

Es la primera que, cada dos puntos A, A_1 (fig. 2.^a), ejercen atracciones iguales y contrarias. Es principio fundamental de la Mecánica clásica éste que acamos de indicar, como ya lo dijimos antes.

De modo que si A_1 ejerce sobre A una atracción representada por el vector Aa en el sentido que marca la flecha, el punto A ejercerá á su vez sobre el A_1 una fuerza igual y contraria á la anterior, representada por el vector A_1a_1 , que

es igual en valor numérico y va en sentido contrario que el vector Aa .

Esto se comprueba por la expresión analítica de ambos vectores.

Según la regla que hemos establecido,

$$\text{las tres componentes de } Aa \text{ son } \left\{ \begin{array}{l} fm m_1 \frac{a_1 - x}{r_1^3} \\ fm m_1 \frac{b_1 - y}{r_1^3} \\ fm m_1 \frac{c_1 - z}{r_1^3} \end{array} \right.$$

$$\text{y las tres componentes de } A_1 a_1 \text{ son á su vez } \left\{ \begin{array}{l} fm m_1 \frac{x - a_1}{r_1^3} \\ fm m_1 \frac{y - b_1}{r_1^3} \\ fm m_1 \frac{z - c_1}{r_1^3} \end{array} \right.$$

porque según dicha regla, debe restarse de las coordenadas del punto que atrae las coordenadas del punto atraído y para el vector $A_1 a_1$ el punto que atrae es m y el punto atraído es m_1 .

Y se ve, comparando unas componentes con otras, que las tres últimas son iguales y de signo contrario á las tres primeras, de donde resulta que, en efecto, el vector $A_1 a_1$ es igual y contrario al vector Aa .

Esto en cuanto á la primera observación de las dos que hemos anunciado.

La segunda observación nos sirve para indicar lo que ya sabemos por conferencias de años anteriores, ó sea que la ley newtoniana de la relación inversa del cuadrado de las distancias puede generalizarse fácilmente.

Puede suponerse, que la atracción entre dos puntos materiales es proporcional á las masas, á una función determinada de la distancia, pues también de la distancia depende, que es instantánea, y que obedece al principio de la reacción, igual y contraria á la acción.

Entonces la acción de una masa sobre otra será

$$m m_1 f(r),$$

y podremos repetir, para este caso, todo lo que hemos dicho para la atracción newtoniana, sustituyendo á $\frac{1}{r^2}$ la expresión $f(r)$.

Precisamente esto es lo que hicimos en el segundo curso de esta asignatura al explicar la teoría de la elasticidad por el método de Cauchy.

Por ahora volveremos á la teoría exclusivamente newtoniana, continuando con ella en la conferencia próxima.

XV.—La copelación, según antiguas recetas.

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

(Conclusión.)

Interpretación y comentarios.

Gracias á las indicaciones precisas contenidas en una carta que me dirigió Berthelot, datada en París á 16 de Noviembre de 1897, respuesta á otra mía en la cual describía muy por menudo el Manuscrito de Alquimia donde las recetas copiadas se contienen, no es ya difícil explicar y entender la manera como fueron consideradas y definidas las operaciones de la copelación, conforme al texto de la *obra blanca particular* y á la técnica de la famosa lejía, en la cual debía ser preparada la limadura de hierro. No se trata, en manera alguna, de cosa nueva ó de invención peregrina, fruto sazonado de los estudios y experimentos del desconocido autor de la *Imagen de la vida*, sino de la práctica tradicional de un sistema, con poquísimas variantes repetido, y encaminado al beneficio de los plomos, más ó menos argenfíferos, con aquellas complicaciones y aditamentos curiosos, obligado cortejo de todo linaje de preparaciones alquimistas.

Seguramente cuantas hay descritas en el Manuscrito de la Biblioteca Nacional, objeto de mis investigaciones, y muy en particular las ahora examinadas, refiérense á bien conocidas tradiciones de Alquimia, provenzales y aun españolas; pues se hallan tales procedimientos y son cosa corriente en aquellos adeptos de la piedra filosofal y de la doctrina transmutatoria que se valieron del seudónimo de Ramón Lull para

dar mayor crédito á sus patrañas, cuando no á sus falsificaciones, en cuyas artes fueron siempre extremados. Esto no obstante, menester será el reconocer un fondo real y positivo en la práctica de la *obra blanca*, en cuanto es á modo de un término ó punto de las tradiciones de la copelación llegadas hasta nuestros días y convertidas, á la postre, en un método excelente de la metalurgia de la plata. Claro está, como debe despojarse la técnica descrita de todo lo inútil, depurar las ideas positivas del fárrago en que están envueltas y verlas claras, con su valor real en el tiempo de la receta, enlazadas á las tradiciones anteriores, de las cuales son al cabo hijas y continuación, siquiera tengan las variantes dadas al mejor conocimiento de las cosas y al propio saber individual de su anónimo autor, quizá muy apto en su práctica.

Hay necesidad de distinguir la doctrina informadora del procedimiento y el arte ó modo de operar en su práctica, ambas cosas de importancia, si bien lo segundo, como más real y positivo, resulta de bastante mayor interés. En sentir del autor de la receta, sea éste quien quiera, háyala copiado de otros Tratados el que compuso el Manuscrito, ó proceda de su práctica é ingenio, trátase de fabricar plata sin plata, ó, acaso más propiamente, de convertir el plomo en plata, perfeccionándolo y acendrándolo mediante el fuego, y con auxilio de las limaduras de hierro preparadas con su singular legía, del cinabrio y del mismo plomo calcinado, ejecutando con todo ello el conjunto de operaciones tan por menudo descritas en la famosa receta, y así resultaba un argumento positivo y de gran eficacia en favor de la grande y fundamental doctrina transmutatoria.

Tal era el común sentir de los alquimistas en este punto y el canon de sus teorías. Cuando en las distintas operaciones á las cuales sometían las substancias metálicas desaparecía un metal, bien por ser oxidado, volatilizado, servir de reductor ó substituir á otro en cualesquiera combinaciones sa-

linas, era que se transformaba, perfeccionándose siempre, convirtiéndose en materia más próxima del oro, á expensas del peso primitivo. Así, para el autor de la receta de la *obra blanca* no había cambio integral de la materia, y cuidase bien de decir cómo de cada ocho marcos de la mezcla empleada sólo resultan dos marcos de fina plata, significando que la materia del plomo, al perfeccionarse perdiendo su calidad para adquirir otra mejor, se condensa y pierde también de peso, y no de una vez, por cuanto es dable repetir la operación cada diez días, practicando de nuevo cuanto se prescribió para la vez primera. Fundiéndose poco á poco la mezcla incorporada al plomo en la cendrada, desaparece como tal, pierde, como si dijéramos, su naturaleza; pero como el propio fuego y el contacto de las otras sustancias la purifica y condensa, de aquellas cenizas, eliminadas en cuanto se producen, nace la plata brillante, metal ya dotado de muchas perfecciones, aunque hijo del plomo blando, oscuro, sin brillo y muy alterable; en este sentido podría considerarse prueba de mucho valor respecto de las transformaciones de los metales la fabricación del *argén* mediante la *obra blanca*.

Iniciada aparece la doctrina en los primitivos alquimistas, filósofos por lo general y casi nunca experimentadores, y como tradición esencial del arte transmutatorio llega hasta tiempos bien cercanos de los presentes, cuando en el siglo XVIII el traductor español de cierto libro de Ireneo Filaleta, bajo el seudónimo de Teófilo, para mejor acreditar su título de apto escrutador de la piedra filosofal, pretende demostrar la realidad de la Alquimia con la transformación del hierro en cobre, realizada mediante experimento. El cual está reducido al conocidísimo método de cementación, y el desconocer la presencia de compuestos cúpricos en los líquidos donde sumergía las barras de hierro, indúcele á pensar que cuando este metal desaparece en aquéllos, se crea el otro á sus expensas.

Usa el autor de la *obra blanca*, á guisa de primeras materias destinadas á ser mezcladas con el plomo en la cendrada, limaduras de hïerro preparadas con su lejía, plomo calcinado y cinabrio, éste último acaso desiinado para conseguir el mercurio del plomo, su amalgama, diríamos ahora, por cuanto el lograr el mercurio de cada metal era término obligado para alcanzar su perfeccionamiento. Ordena cómo ha de hacerse la lejía en receta aparte y prescindiendo del vinagre, el cual formaría acetatos con el carbonato de potasio de las cenizas de las raíces y la cal de las cáscaras de huevos y de la orina de vacas, ingrediente muy de la preferencia de los alquimistas, á juzgar por la frecuencia con que se encuentra en sus más complicadas prescripciones, con la dicha cal de las cáscaras de huevos, hervida con cenizas de sarmientos y de raíces de habas, obtiéndose potasa, más ó menos concentrada, mediante un cambio químico harto conocido. Prúebase así la escasa originalidad del autor en cuanto á la preparación de su famosa lejía; pues era tradicional también y ya las ponen muy semejantes los autores del siglo XIII, sin duda tomándolas de otros todavía más antiguos, siendo en la Alquimia cosa corriente semejante copia, más ó menos alterada; lo cual indujo no pocas veces á considerar procedimientos distintos las insignificantes variantes de uno solo. Debe tenerse presente cómo la Alquimia es arte tan pobre de métodos verdaderos como rico de palabras y de fórmulas cabalísticas, destinadas muchas á expresar una sola idea positiva.

Juntando las limaduras con su lejía, después de bien lavadascon salmuera, en primer término se desengrasan y luego, como permanecen nueve días dentro de aquélla, aléranse un poco, no por la alcalinidad del líquido, sino mediante el agua, lo cual vale tanto como decir la inutilidad de preparar en su lejía las limaduras de hïerro. Mas era preciso seguir la tradición, á la que tan apegado se muestra el autor de la *obra blanca*; de no ser el primer tratamiento de las

limaduras de hierro un medio de disgregarlas, quizá á causa de alteraciones superficiales, para luego reducir las á polvo impalpable, facilitando su mezcla con los demás ingredientes á ellas incorporados.

Viniendo ya al significado de los mismos, aparece en primer término el plomo dicho calcinado. Conforme en los símbolos alquimistas de los metales hay siempre alguna señal para indicar su estado físico, pues era creencia general su influencia en la propia substancia de aquéllos, así en las combinaciones, faltando el conocimiento de la composición química, agregaban al nombre del metal el de la operación ú operaciones á las cuales hubiera sido sometido, y resultando el plomo de los más alterables, sobre todo mediante el fuego, había muchas suertes ó especies de plomo. Seguramente, en el caso de nuestra *obra blanca*, se parte de la galena, de remotos tiempos empleada, porque se prescribe cómo ha de ser empleado el plomo calcinado, conforme hacen los ollereros para el vidriado, y uno de los nombres de la dicha galena es precisamente *alcohol de alfareros*. Tostándola al aire, como se hace todavía en muchos procedimientos metalúrgicos, y lo hacían alquimistas de manera harto incompleta, se obtiene un producto complejo, de composición y color variables, en el cual hay subóxido de plomo, sulfato y sulfuro, ó sea la materia que sirve para obtener el plomo, y la receta no es única para el plomo calcinado, otras veces, y antiquísimos Tratados, llamado quemado, pues abundan y son numerosas las variantes de ellas, conduciendo todas al mismo fin. Este plomo calcinado es reductible por el hierro, y esto explica ahora su empleo en la forma dicha en la receta del Manuscrito, siquiera cuando en el siglo xv fué escrita, se ignoraran en absoluto semejantes transformaciones químicas.

Leyendo la palabra cinabrio en la receta de la *obra blanca*, no ha de creerse que se trata de nuestro actual sulfuro de mercurio y el principal de sus minerales, por cuanto los

alquimistas han llamado cinabrio á muchas materias minerales dotadas de color rojo, de ordinario óxidos y sulfuros, y también á algunas vegetales. Con mucha frecuencia es llamado cinabrio el minio, y de seguro minio quiere significar el autor anónimo, por cuanto ni una sola vez nombra el mercurio en las operaciones descritas con tanto lujo y variedad de pormenores, encaminados á su mejor práctica y resultado.

Ya se entiende también cómo el agua ardiente en la cual se empapa la mezcla de las tres sustancias dichas al porfirilizarlas sobre el mármol, no es el líquido designado ahora con tal nombre, porque entonces no se comprendería su papel en las operaciones subsiguientes. Según Berthelot, quien se apoya en textos muy antiguos, era una palabra genérica esta de agua ardiente, y fué aplicada á líquidos de toda especie; sólo en tiempos relativamente próximos á los actuales, sirve para designar los alcohólicos, luego de haber sido destilados, y juzgo verosímil que se trata de un ácido diluído, más ó menos enérgico, quizá una disolución de ácido nítrico, capaz de transformar el minio en ácido plúmbico y nitrato de plomo, ambos materias oxidantes. Procédese entonces al primer tratamiento por el calor, y vale decir cómo las gradaciones del fuego, del modo indicado en la *obra blanca*, reproducen una tradición tan antigua, que se encuentra en los alquimistas griegos. Igualmente son tradicionales las vasijas de vidrio esféricas, y el calentar en ellas, bien enlodadas y cerradas, las mezclas destinadas á las transformaciones y cambios, empleando baños de arena y de cal viva. Fué una de las mayores preocupaciones de los alquimistas el capítulo de los lodos, por lo general resistentes al fuego y á los agentes corrosivos, destinados á hacer herméticos los cierres de aparatos ó á proteger su superficie externa. Uno de los lodos citados en la *obra blanca*, es simplemente la pasta de harina y agua, y el otro aquel famoso cemento ó lodo de los sabios, clásico en la Alquimia, y del

cual hay recetas á docenas, desde Mario Greco y aún quizá bastante anteriores.

Merece citarse, como prueba de la filiación tradicional del procedimiento, el empleo del aceite de tártaro para impregnar segunda vez la masa al pulverizarla, luego de haber estado sometida en vasija cerrada á los diferentes grados del fuego, resultando negra, dura y bastante difícil de quebrantar. Sin duda, los compuestos de plomo calentados con las limaduras de hierro en vasija cerrada, experimentaron un comienzo de reducción, quedando el metal incorporado á la escoria, constituida por óxido y sulfuro de hierro, y como eran atribuidas singulares virtudes y excelencias en achaques transmutatorios al producto líquido recogido cuando era sometido á la destilación seca el tártaro crudo de las heces del vino, con aceite de tártaro se hace la pasta destinada al segundo tratamiento por el fuego; es cuerpo complejo, de variable composición, dependiente en gran parte de la temperatura á que ha sido obtenido. Fué corriente, desde antiguos tiempos, su empleo en la Alquimia, y constituyó, en ciertas épocas, una suerte ó especie de panacea, al igual de la bilis de tortuga marina, la sandaraca y otras sustancias que, á la postre, nada quitaban ni ponían en las sùtiles operaciones del arte.

Aún quiere el anónimo autor de la receta que sea mezclada la materia resultante, dura y parda, al tiempo de molerla con mucho trabajo en resistente mortero de hierro, con unas cuatro onzas de salitre, cuyos oficios serían los de oxidante, y fundente cuando el momento de ello sea llegado. Habrá sido llevada más adelante la reducción de los compuestos de plomo en la segunda fase del tratamiento, resultando una mata rica de plomo con escoria de hierro, la cual no ha menester ser separada; y así se hacía en el beneficio primitivo de bastantes minerales. Tampoco es nuevo describir los instrumentos y aún ponerlos por figura é indicar sus dimensiones; pues vense así en los Tratados de mayor crédito, en

los consagrados mejor á la Metalurgia y no exclusivamente á la Alquimia, adviertense dibujos de hornos, y vale ya decir cómo el de nuestra receta, si bien conserva en esencia lo tradicional de tales aparatos, aparece perfeccionado en algunas partes, como son sus distintas cámaras de los grados del fuego; y lo propio acontece respecto de las vasijas ó recipientes, cuya diversa forma algo pudiera influir en las operaciones: quizá el ensanchamiento superior de la primera al quedar fuera del baño, sirve para condensar los productos volátiles ó sublimables.

No se necesitaban menos de las operaciones y tratamientos, con tanta proligidad descritos en la fórmula de la *obra blanca*, para conseguir aquella singular materia, dura y parda, bastante difícil de quebrantar, mezcla de metal y escoria ferruginosa, de la cual, luego de mezclada con salitre é incorporada al plomo fundido, había de proceder la plata; lo siguiente es la verdadera y tradicional copelación, y por hacerse un poco en grande, no son absorbidos ó volatilizados todos los óxidos de plomo formados, y quedan escorias; aun cuando de ellas no hable nada el ignorado autor del método, pudiera tenerse como procedimiento de afino de una mata ya rica de plata, empleando el plomo, sin duda también argentífero. En el primer tercio del siglo xv poco ó nada sabíaase de los minerales plomíferos con plata, ni siquiera hallase mención de galenas argentíferas; su desplatación, por consiguiente, no se hacía de un modo sistemático, y sólo había aquellos ingeniosísimos sistemas metalúrgicos, en los que tan hábiles fueron los españoles. Veniales, al cabo, su práctica de muy antiguo abolengo, y las platas de España de tiempo inmemorial eran explotadas; habíalas abundantes, y según aumentaba el consumo eran perfeccionados los métodos de su beneficio.

Bastante fácil es comprender el significado de la palabra *ceñrada*, y la interpretación aquí puesta está sacada de antiguos diccionarios de nuestra lengua. Equivale en español

antiguo á puro y limpio, *purus, mundus*, acepción adecuada á la copela, en la cual se purifica la plata separándola de los metales oxidables; también se aplica al afino del oro, y hay recetas muy viejas para su copelación empleando el sulfuro de antimonio, y también aquí el metal brillante aparece debajo de una escoria oscura y no demasiado dura. Á lo que se infiere, entre la actual copelación y la antigua hay la diferencia que en aquélla todo el plomo de obra se oxida, quedando la plata pura, y la de los alquimistas es mejor un sistema de afino de matas argentíferas, de las cuales queda un residuo, de ordinario ferruginoso, constituyendo verdadera escoria en la parte superior de la masa metálica, y refiriéndose al oro, hace Berthelot una interesante citá acerca del particular. Con más ó menos variantes, nunca de extremada importancia, el procedimiento va siguiendo en sus desarrollos los de las ideas fundamentales de la Alquimia.

Observaré cómo *cendrado, cendrada*, es el participio del verbo *cendrar*, y hay además otro verbo, *acendrar*, bastante empleado en escritos místicos y oraciones piadosas, ahora poco usado en el lenguaje corriente. Significan ambos depurar y purificar, y fueron aplicados corrientemente á la purificación en crisoles del oro, la plata y otros metales: asimismo han sido empleados en las acepciones de limpiar, dejar sin mancha y quitar defectos, y dicese para lo primero: *aurum aut argentum ad purum excoquere*; y tocante á lo segundo: *purgare, detergere, expolire, excolere*. De aquí se colije el abolengo y origen de nuestra *cendrada*, en modo alguno confundible con los crisoles y otras vasijas de uso corriente para las operaciones con los metales. También se encuentra en las mismas fuentes la palabra *cendra*, nombre dado á una pasta formada con ceniza cocida, ó sea privada de sustancias alcalinas, tuétano de cuerno de carnero calcinado y otras materias muy variables, destinada precisamente al afino de la plata y así definida: *masa cinerea meta-*

lis excoquendi et purgandis apta, con lo cual queda declarada su equivalencia con la actual copela, siendo la cendrada á modo de un precedente suyo, aun cuando haya las naturales diferencias en el tamaño y la manera de utilizar las substancias que la constituyen.

Puede observarse en la receta de la *obra blanca* una característica peculiar, y es la carencia de invocaciones y simbolismos; digerase obra de un metalurgista y no de un alquimista, al ver sus prescripciones escuetas, claras y sin ningún género de aditamentos, cuando era lo habitual cargar de ellos, con intento de obscurecerlas, las descripciones de los procedimientos, así fuesen los más ciertos y positivos destinados á la extracción del cobre y del mercurio de sus minerales propios. Quizá denote esto su filiación española, porque raras veces, en nuestros antiguos escritores del beneficio de los metales, bastante escasos hasta la data del Manuscrito, aparecen tales cosas, y más que la piedra filosofal y que las doctrinas transmutatorias, siquiera fuesen sus adeptos, preocupábales el dar con los excelentes minerales de plata y con los medios de su mejor aprovechamiento y más completo beneficio, á cuyos fines y no á otros va encaminada la siempre notable receta á cuyo comentario pongo aquí término.

XVI.—Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Continuación.)

CINEMÁTICA

Movimiento de modificación de un individuo.

Si en el estudio de los cambios ó modificaciones de carácter psíquico que se operan en los individuos al transcurrir el tiempo, se hace abstracción de las causas que los producen (fuerzas), mediante su acción, y nos fijamos solamente en los cambios mismos de la posición de un individuo en un determinado asunto, la primera noción que se nos presenta es la *velocidad* del movimiento de modificación (*).

Velocidad.—*Movimiento uniforme.*—En este tipo de movimiento de modificación de un individuo es en el que aparece primeramente la noción de *velocidad*. Simbolizada por un parámetro *la posición* del individuo en un instante, se dice que el movimiento ó cambio de posición es *uniforme*, cuando los incrementos numéricos que experimente el pará-

(*) Se sabe que la noción de velocidad en el movimiento de un punto en el espacio es aplicable (cualquiera que sea la naturaleza de las cosas á que se aplique) á todo lo que cambie *por ley de continuidad* en el tiempo; ó—como se dice en el lenguaje matemático—á todo lo que sea *función continua* del tiempo. Prescindimos de las singularidades de algunas funciones continuas, que no tienen derivada, por ser asunto muy ajeno de este lugar.

metro en intervalos de tiempo iguales, son iguales por pequeños que se tomen esos intervalos de tiempo (*).

Según dijimos en los *Preliminares*, todo cambio muy pequeño en la posición del individuo se realiza en una determinada dirección y sentido; y para ver más claramente todo el movimiento de modificación *uniforme* del individuo por ley de continuidad en el tiempo, conviene distinguir dos casos:

PRIMER CASO.—*Movimiento uniforme de dirección constante*.—Si los cambios de posición que realiza el individuo son en todos los instantes en la misma dirección y sentido, esta dirección y sentido se atribuyen á la velocidad, que es entonces *constante* en *magnitud, dirección y sentido* para todo el movimiento del individuo; y ella sirve para definirlo de un modo completo. El movimiento del individuo en este primer caso, que es el más sencillo, se *simboliza* por el movimiento uniforme y rectilíneo de un punto en el espacio. La velocidad se representa geoméricamente por un vector localizado en una línea recta—que es la trayectoria—y queda indeterminado su punto de aplicación en la línea recta, porque cualquiera que sea el punto que se tome en ésta, el vector es uno mismo. Reconocido el carácter vectorial de la velocidad, se puede aplicar á ella todas las proposiciones de los vectores.

SEGUNDO CASO.—*Movimiento uniforme de dirección variable*.—Cuando las direcciones sucesivas en que realiza el individuo sus cambios *elementales* varían de un instante á otro, el incremento del valor numérico del parámetro en

(*) Aunque la unidad de tiempo es arbitraria, se comprende que en la práctica—cualquiera que sea el asunto social de que se trate—para que se pueda estimar un cambio apreciable (en la posición del individuo) que se haya operado en la unidad de tiempo, sería molesto adoptar una unidad muy pequeña: en un día ó en una semana, por ejemplo, el cambio en la posición sería sumamente pequeño y difícil de apreciar por su pequeñez.

cada unidad de tiempo, es decir, la velocidad en *magnitud* del movimiento uniforme, es una *constante* que no define de un modo completo el movimiento. Se requiere además el conocimiento de esas varias direcciones sucesivas en que se va realizando el cambio de posición. En este segundo caso, el movimiento del individuo se simboliza por el uniforme curvilíneo de un punto en el espacio; y la velocidad geoméricamente se representa por un vector de magnitud constante, pero localizado en cada instante en la tangente á la trayectoria curvilínea en la posición que ocupe el punto *en ese instante*; porque esta tangente *representa* la dirección en la cual se verifica el movimiento elemental del individuo en ese instante.

Tanto en el movimiento de dirección constante, como en el de dirección variable, la velocidad que hemos definido *para el movimiento uniforme*, expresa la relación constante del incremento del parámetro al incremento de tiempo, cualquiera que sea este intervalo de tiempo. Por eso se escribe la ley del movimiento de modificación uniforme en la ecuación

$$p = p_0 + v \cdot t;$$

en la cual p es el valor del parámetro que corresponde á la posición del individuo en un instante cualquiera t ; p_0 á la posición en el instante que se haya adoptado como inicial ($t = 0$); y v es la magnitud constante de la velocidad.

Se sabe que esa ley se representa gráficamente por una línea recta, empleando el procedimiento usual de dos coordenadas cartesianas para las representaciones gráficas en Geometría plana.

Numéricamente, por medio de la ecuación—ó gráficamente por esa representación—se resuelven con suma facilidad los problemas sobre el movimiento uniforme. Así, el cambio ó modificación que se realizará en un transcurso dado t de tiempo, ó sea $(p - p_0)$, se obtiene multiplicando la velocidad

por el tiempo: inversamente la velocidad se obtiene dividiendo el cambio operado por el tiempo empleado, etc. (*).

(*) Por la ecuación del movimiento uniforme, se resuelve el siguiente problema:

Si dos móviles A' y A parten en un mismo instante inicial de posiciones que disten entre sí a metros, y recorren la misma trayectoria rectilínea con movimientos uniformes en el mismo sentido de velocidades v' y v (siendo $v' > v$ si A' está detrás de A) ¿cuanto tiempo T tardará A' en alcanzar á A ? ¿En qué posición se encontrarán?

Basta plantear la ecuación $v'T = a + vT$, de la cual se deduce

$$T = \frac{a}{v' - v}.$$

Si S es el camino recorrido por A , y S' el recorrido por A' , se tiene:

$$S = \frac{av}{v' - v}; \quad \text{y} \quad S' = \frac{av'}{v' - v}.$$

La famosa paradoja de que Aquiles (móvil A') no podría alcanzar *nunca* á una tortuga (móvil A), se funda en que cuando el primero acabe de recorrer la distancia a , la segunda se habría adelantado; y cuando el primero acabe de recorrer esta nueva distancia que le separa de la tortuga, ésta se habrá adelantado á su vez, y como esto se repetirá sucesiva é indefinidamente, habrá *siempre* una distancia—por pequeña que sea—que separa á los dos móviles.—Esta paradoja, sobre la cual tanto se ha escrito, ha motivado afirmaciones (como la de W. James) de que la lógica hace menos inteligible la realidad, y que hay que repudiar el intelectualismo.

Es sabido que se desvanece la paradoja, demostrando que los tres valores *finitos* y *determinados* que obtuvimos antes para T , S , S' están en *perfecta armonía* con el razonamiento del filósofo griego, puesto que son respectivamente las sumas de los términos indefinidamente decrecientes de las tres progresiones:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a}{v'} + \frac{v}{v'} \cdot \frac{a}{v'} + \frac{v^2}{v'^2} \cdot \frac{a}{v'} + \dots &= \frac{\frac{a}{v'}}{1 - \frac{v}{v'}} = \frac{a}{v' - v} = T \\ \frac{v}{v'} \cdot a + \frac{v^2}{v'^2} \cdot a + \dots &= \frac{\frac{v}{v'} a}{1 - \frac{v}{v'}} = \frac{av}{v' - v} = S. \\ a + \frac{v}{v'} \cdot a + \frac{v^2}{v'^2} \cdot a + \dots &= \frac{a}{1 - \frac{v}{v'}} = \frac{av'}{v' - v} = S' \end{aligned} \right.$$

Movimiento no uniforme.—Si las modificaciones sucesivas que experimenta la posición del individuo en un asunto se

A los que no conocen las series convergentes, les sigue perturbando la paradoja, porque se limitan á *concebir* que Aquiles recorra primero la distancia a , y después $\frac{v}{v'}$ a , y después $\frac{v^2}{v'^2}$ a , etc., y que la tortuga *va siempre delante*, sin fijarse en que no es eso lo que Aquiles y la tortuga hacen *real y efectivamente*. Somos nosotros los que pensamos esos sumandos, y *concebimos* así S' como el límite de la suma de un número infinito de partes, sin que por eso deje de tener S' su valor finito y determinado; como no deja de tenerlo el área de un círculo, aunque yo *pueda concebirla*, como el límite de la suma de un cuadrado inscrito, y de cuatro triángulos y de ocho triángulos más, y de 16, y así indefinidamente.

Para ver (con vista directa) *cómo es* que Aquiles llega á alcanzar á la tortuga; y para seguir, por decirlo así, los pasos por los cuales *se va formando la realidad* en el tiempo y en el espacio á partir del instante inicial $t = 0$, se debe de pensar (prescindiendo de consideraciones filosóficas sobre el tiempo y el espacio).

1.º Que durante el primer intervalo infinitamente pequeño dt , los móviles A y A' recorren en el mismo sentido espacios infinitamente pequeños $v dt$ y $v' dt$; y que la distancia que separaba á los móviles en el instante inicial *disminuye* por consiguiente en $v' dt - v dt = (v' - v) dt$. Esta es la realidad.

2.º Que fluyendo el tiempo de modo continuo, como simple variable independiente, y repitiéndose siempre el mismo hecho, la distancia irá disminuyendo sucesivamente á compás que trascorra el tiempo; y al llegar la suma de esas sucesivas *disminuciones infinitesimales* de distancia á ser *exactamente igual* á a , la distancia *se anula*. Esto se escribe así:

$$\text{de donde} \quad \int_0^T (v' - v) dt = (v' - v) T = a;$$

$$T = \frac{a}{v' - v}.$$

Para los que arguyan que — á pesar de todo — sigue siendo cierto que Aquiles recorre real y efectivamente los espacios

$$a; \quad \frac{v}{v'} \cdot a; \quad \frac{v^2}{v'^2} \cdot a; \quad \dots$$

en los intervalos de tiempo

$$\frac{a}{v'}; \quad \frac{v}{v'} \cdot \frac{a}{v'}; \quad \frac{v^2}{v'^2} \cdot \frac{a}{v'}; \quad \dots$$

y siempre queda detrás de la tortuga, digamos finalmente:

Que si la magnitud T (por ejemplo) se puede pensar formada por

realizan en el tiempo por ley de continuidad, pero *sin uniformidad*, es de todo punto imposible precisar la noción vaga de rapidez ó *velocidad del movimiento en un instante t* , sin recurrir al método infinitesimal. Si se ve el cambio muy pequeño que experimenta la posición del individuo en un intervalo muy pequeño de tiempo θ , á partir del instante t y se divide ese incremento muy pequeño del parámetro por el intervalo de tiempo θ , se tiene una *velocidad media* para ese intervalo. El límite de esa velocidad media, si θ decrece indefinidamente, se llama *velocidad en el instante t* (*).

Por esta definición se ve que para obtener *aproximadamente* el cambio muy pequeño que se opere en la posición del individuo en un asunto cuando transcurra un intervalo muy pequeño de tiempo θ , se podrá multiplicar la velocidad v en el instante t por esa magnitud θ . Pero si se quiere calcular la magnitud del cambio que se operaría en un transcurso cualquiera de tiempo, no se puede ya proceder por simple multiplicación y hay que recurrir á la integración ó suma—en ese tiempo—de todos los incrementos sucesivos muy pequeños del parámetro, obteniendo *aproximadamente* cada uno de éstos por simple multiplicación, como acabamos de decir.

Sólo nos falta añadir que si el movimiento de modificación no uniforme del individuo es de dirección constante (simbolizado por el rectilíneo de un punto en el espacio), el procedimiento anterior sirve para determinar cuál sea la posición del individuo en un instante cualquiera t , toda vez

esa serie (como se podría pensar por otra), no es así como fluye la realidad, sino *de modo continuo é igual*.

Decir que una hora, por ejemplo, *no se acaba nunca*, porque transcurre la primera media hora y después la mitad de la otra media, y después la mitad de lo que falte, y así *siempre*, es substituir la realidad fluyente continua é igual por un puro concepto artificial, que puede servir para fines matemáticos puros, pero no más.

(*) Es lo que se llamaría en el cálculo diferencial *coeficiente diferencial* del parámetro con respecto al tiempo.

que se conoce la dirección constante en que se ha movido; pero no basta, si el movimiento es de dirección variable de un instante á otro (simbolizado por el curvilíneo de un punto en el espacio). En este caso hay que conocer la sucesión de direcciones en que el individuo se ha movido (la trayectoria del símbolo geométrico) para llegar á determinar cuál sea la posición del individuo en un instante cualquiera t .

En la práctica, las direcciones en las cuales se operan los cambios de posición de un individuo, no varían, generalmente, sino á intervalos de tiempo bastante largos, y por tanto, su movimiento de modificación total es de ordinario una sucesión de movimientos de dirección constante (rectilíneos), de larga duración relativa.

*
* *

Si se llegara á inventar procedimientos suficientemente aproximados de observación psíquica, que fueran aplicables á las varias notas que intervienen para la posición en un asunto de un individuo sometido á observación, de tal modo que fuera posible asignar en un instante dado un valor de observación al parámetro que definiera la posición en el asunto de ese individuo, se podría emplear para lo psíquico el método *de las medias*, que se usa como método práctico, para lo físico-fisiológico, v. gr., la estatura, el peso, la fuerza muscular, la agudeza de los sentidos (vista, oído, etc.) de los diversos individuos.

Ya *M. A. Quetelet* procedió así en su *Ensayo de Física social* para investigar las leyes del desarrollo del *hombre medio*.

Si se clasifica á los individuos por edades, por ejemplo, y se verifican numerosas observaciones sobre individuos normales de un mismo país, en igualdad de circunstancias ordi-

narias de vida, se puede determinar las medias que corresponden al tipo normal. — Se compara después con estos patrones cualquier individuo de la edad correspondiente, que se somete á observación sobre una de esas cosas físico-fisiológicas y psíquicas (*).

Si sobre un asunto de carácter social fuera posible, decimos, concretar los conocimientos, sentimientos, temple de voluntad, etc., que tiene cada individuo sometido á observación, se podría quizá llegar á tener medias parciales referentes á cada una de esas notas, y quizá también llegar convencionalmente á valores medios del parámetro complejo definidor de la posición en el asunto, para los individuos de las diferentes edades en igualdad de circunstancias externas. Se debe de pensar que la nota menos difícil de concretar para hacer observaciones individuales, sería la de los conocimientos en un asunto. Se comprende que lo que se refiere á sentimientos, voliciones, etc., habría de ofrecer dificultades mucho más graves (**).

En las mediciones para las cuales se disponga de procedimientos de observación, si se hacen las observaciones sobre un gran número (m) de individuos de la misma edad, que se encuentren en muy análogas condiciones, puede asimilarse el caso al de m observaciones que se hubieran hecho m veces repetidas sobre un mismo individuo, y que fueran discordantes por causas accidentales desconocidas.

(*) Así se procede en muchos laboratorios, como el de M. Binet, en París.

(**) M. A. Quetelet, apoyado en numerosos datos estadísticos, ha hecho, sin embargo, muy curiosas deducciones sobre los sentimientos estimados por sus efectos. Así, por ejemplo: comparando el *tipo medio* (en Francia, según los datos de cuatro años) de los hombres de edad comprendida entre veintiuno y veinticinco años, con el *tipo medio* de los de edad entre treinta y cinco y cuarenta, calculó que para la inclinación al robo (en aquella época) esos dos tipos medios estaban en la relación de 5 á 3.

Se podría poner muchos reparos á estas apreciaciones numéricas, como el mismo Quetelet indica.

Para tener entonces el valor M más aceptable que haya de adoptarse como patrón, se aplica el *Postulado* de la *media aritmética*; es decir, que se suman los m valores de observación, y se divide la suma por el número m . Suponemos que las m observaciones merecen igual confianza en todos sentidos, y que las discrepancias son debidas tan sólo á *errores accidentales* é inevitables.

Recordando los resultados á que se llega en la *Teoría de los errores accidentales*, se sabe:

1.º Que sí se representan por x las diferencias, por exceso ó por defecto, entre los valores de observación y su media aritmética M , el *error medio cuadrático de las observaciones* se calcula por la fórmula práctica $E = \sqrt{\frac{[x^2]}{m-1}}$, en la cual $[x^2]$ representa la suma de los cuadrados de todas las x , siguiendo la notación de *Gauss*.

2.º Las m observaciones tienen un *módulo de precisión* h , que es $h = \frac{1}{E\sqrt{2}}$.

Se dice también que *el peso* p de esas observaciones es $p = h^2 = \frac{1}{2E^2}$.

Se ve — como es natural — que el módulo de precisión h ó el peso p de las observaciones es tanto mayor, cuanto más pequeño sea el error medio E . Esto último es indicio de que las diferencias x entre los valores de observación y su media son pequeñas, lo cual hace pensar que las observaciones han sido hechas todas ellas con esmero. Por eso se dice que son de gran precisión ó de mucho peso.

3.º Que el *error probable* r de las observaciones se calcula por la fórmula

$$r = 0,6745 \times E,$$

y nos indica que hay *la probabilidad* $\frac{1}{2}$ de que en una nue-

va observación que se hiciera del mismo modo que las m hechas, el valor que se encontrara, estuviera comprendido entre $M - r$ y $M + r$.

Añadiremos, como recuerdo de la *Teoría de los errores*:

1.º Que si se concibiera como valores *verdaderos* de lo que se quiere medir, todos los valores posibles alrededor de la media M , á ésta le corresponderían errores posibles respecto del verdadero, y la media cuadrática E_1 de estos errores, que se llama *error medio cuadrático de M* , se calcula por la fórmula $E_1 = \frac{E}{\sqrt{m}}$.

2.º El *módulo de precisión de la media M* es $h_1 = h \sqrt{m}$; y el *peso de la media* es $P = mp$.

Y se ve, como es natural, que la precisión h_1 de la media M — ó el peso P de ésta, depende no sólo de la precisión h ó del peso p de las observaciones, sino también del número m de éstas. — La precisión de la media crece proporcionalmente á la raíz cuadrada del número de observaciones á igual precisión de éstas. El peso de la media crece proporcionalmente al número de observaciones á igual peso de éstas.

En la precisión ó el peso de la media M (como valor de lo que se quiere medir), las fórmulas indican que el número de observaciones puede compensar su poca precisión ó su poco peso. Claro es que conviene que sean de mucho peso las observaciones (ó de mucha precisión), y además en gran número.

3.º El error probable de la media M que es

$$R = 0,6745 \times E_1 \text{ ó } R = \frac{r}{\sqrt{m}}$$

(siendo r , como dijimos antes, el error probable de las observaciones), indica que hay la *probabilidad* $\frac{1}{2}$ de que el

valor verdadero de lo que se mide esté comprendido entre $M - R$ y $M + R$.

Y se ve también — como es natural — que el error probable R de la media M varía en razón inversa de la raíz cuadrada del número de observaciones, á igual error probable de éstas (*).

* *

Cuando se dispone de muchas medias M_1, M_2, \dots (en número N , por ejemplo), obtenidas por diferentes observadores, y sólo se sabe que han sido obtenidas respectivamente como resultado de m_1, m_2, \dots , observaciones, pero sin conocer el detalle de cada carpeta de observaciones; no pudiendo distinguir, por tanto, el peso de las observaciones de un grupo del peso de las de otro; y no habiendo, por tanto, motivo fundado para tener más confianza en unas que en otras (caso que se presenta con frecuencia), lo más sencillo es atribuir el mismo peso á todas las observaciones, y adoptar como unidad de peso ese peso común de cada observación simple, de las que hayan concurrido á formar M_1, M_2, M_3, \dots

Así el peso de M_1 sería m_1

— — de M_2 — m_2

— — de M_3 — m_3

.....

.....

(*) Todos los resultados que preceden son deducidos en la Teoría de los errores accidentales, partiendo de la *función de Gauss*

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2};$$

como se puede ver en mis *Apuntes sobre Cálculo de Probabilidades. Teoría de los errores y Método de los minimos cuadrados.*

y se adopta como valor más aceptable de lo que se quiere medir

$$M = \frac{M_1 \times m_1 + M_2 \times m_2 + M_3 \times m_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots},$$

porque esto equivale á la media aritmética, si hubiera

m_1	observaciones,	todas iguales entre sí,	de valor	M_1
m_2	—	—	—	M_2
.....
.....

La regla práctica es:

Multiplicar cada media conocida por el número de observaciones de que provino, y dividir la suma de estos productos por la suma de los números de observaciones.

Es claro que el peso P de esa M , adoptando como unidad el peso de una observación simple, es la suma de los pesos de las medias conocidas

$$P = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots = [m],$$

es decir, el número total de observaciones simples.

Si se piensa solo en una de las medias conocidas, la M_1 , por ejemplo, de peso m_1 , y se llama x_1 su diferencia (por exceso ó por defecto) con M , se ve que á cada una de las observaciones simples de peso unidad de que provino M_1 le corresponde un error medio z_1 dado para la proporción

$$\frac{1}{m_1} = \frac{x_1^2}{z_1^2},$$

porque los pesos son inversamente proporcionales á los cuadrados de los errores medios.

Así, pues, $z_1^2 = m_1 x_1^2$.

Aplicando á cada una de las N medias conocidas este razonamiento, el error medio *en conjunto* E , para cada unidad

de peso, será dado por la fórmula $E^2 = \frac{[m x^2]}{N-1}$.

Y de aquí que el error medio E_1 para la media final M se calcule por la fórmula $E_1^2 = \frac{E^2}{[m]}$.

El error probable de la M es $R = 0,6745 \cdot E_1$.

*
* *

Se puede afinar más; es decir, que se puede hacer el cálculo con mayor aproximación, cuando se conoce el detalle de todas y cada una de las carpetas de observaciones. Supongamos que además de tener la media que arroja cada carpeta y el número de observaciones de que proviene, se ha calculado el error medio, ó, mejor, el peso de sus observaciones.

Sean, por ejemplo,

- 1.^a carpeta. $\left\{ \begin{array}{l} M_1 \text{ la media aritmética de sus observaciones.} \\ m_1 \text{ el número de sus observaciones.} \\ p_1 \text{ el peso de sus observaciones.} \end{array} \right.$
- 2.^a carpeta. $\left\{ \begin{array}{l} M_2 \text{ la media aritmética de sus observaciones} \\ m_2 \text{ el número de sus observaciones.} \\ p_2 \text{ el peso de sus observaciones.} \end{array} \right.$

y así sucesivamente hasta N carpetas.

Se sabe que

- el peso de M_1 es $m_1 p_1$
- el peso de M_2 es $m_2 p_2$
- el peso de M_3 es $m_3 p_3$
-
-

y que el valor más aceptable de lo que se trata de medir será

$$M = \frac{M_1 \times m_1 p_1 + M_2 \times m_2 p_2 + \dots}{m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots};$$

y que tendrá un peso $P = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + \dots$

Por un razonamiento análogo al que se hizo anteriormente, se ve que á cada unidad de peso le correspondería, por el primer grupo de observaciones (1.^a carpeta), un error medio z_1 dado por la expresión $z_1^2 = m_1 p_1 \times x_1^2$, si se llama x_1 el error de M_1 respecto á M .

Aplicando el mismo razonamiento á las N medias, se ve que el error medio E en todo el conjunto, para unidad de peso, se tendrá por la fórmula $E^2 = \frac{[m p \cdot x^2]}{N - 1}$.

Después el error medio E_1 para la M final, se calculará por la fórmula $E_1^2 = \frac{E^2}{[m p]}$, y el error probable R por la fórmula $R = 0,6745 \times E_1$.

*
* *

Todo lo dicho es aplicable á las observaciones físicas y fisiológicas, y quizá podría serlo también algún día á las de carácter social. Si recordamos las fórmulas del error medio

$$E_1 = \frac{E}{\sqrt{m}}, \text{ y del error probable } R = \frac{r}{\sqrt{m}}$$

cualquiera (*), se ve, como dijimos, que el error con que el número de medida M expresa el valor de lo que se haya sometido á observación, será tanto menor cuanto menor sea

$$E = \sqrt{\frac{[x^2]}{m - 1}}, \text{ es decir, cuanto más perfecto haya sido el}$$

(*) Se sabe que R es próximamente los dos tercios de E_1 , así como r lo es de E .

procedimiento de observación empleado, y mayor esmero en todo haya habido por parte de los observadores; y además, cuanto más grande haya sido el número m de observaciones por medio de las cuales se obtuvo el número M de medida.

Ya se ve aquí la influencia de los *grandes números*. Para ponerla de relieve en un asunto de carácter social, supongamos que en un país se hicieran observaciones sistematizadas sobre niños de seis años de edad, por ejemplo, que empezaran á aprender la lectura, y que estuvieran colocados en igualdad de condiciones, hasta donde esto sea posible y sucedero; siguiendo el mismo método de enseñanza, con las mismas reglas pedagógicas dentro y fuera de la escuela, etc.: Supongamos, para simplificar el ejemplo, que se trata de medir solamente la *velocidad media* con que hace un individuo el total aprendizaje por ese procedimiento y mediante esas reglas y condiciones, empezando á la edad dicha de seis años (*). Admitiendo que sea fácil hacer la observación del instante en que pueda decirse aproximadamente que cada individuo *ya sabe leer*, es decir, que ya ha terminado el aprendizaje, se tendría por la observación la duración total T de su aprendizaje, desde el instante en que empezó á los seis años de edad. Y si se representa por un número H constante el valor del camino recorrido por el individuo para pasar de la *posición* en que no sabía leer á la *posición* en que ya sabe, se ve que la *velocidad media* V del movimiento variado por el cual ese individuo ha pasado de una á otra posición, se expresa por $V = \frac{H}{T}$ (**).

(*) En el Laboratorio de Mr Binet se hacen observaciones de este género con cuidado, dividiendo el tiempo total empleado en el aprendizaje en cuatro períodos. A cada uno de estos períodos, de desigual duración, habría de aplicarse lo que decimos del tiempo total para simplificar el ejemplo.

(**) Nos limitamos exclusivamente al conocimiento adquirido de la lectura prescindiendo de todas las demás notas psíquicas que hay en el individuo, porque la observación de éstas ofrecería, como antes dijimos, dificultades gravísimas.

Pues bien; si se someten á observación 100 niños en las condiciones de igualdad que decíamos, las diferencias que entre sí tengan los 100 valores de observación de V , serán pequeños (con relación á los valores mismos) si se trata de niños normales y se cumplen con rigor aquellas condiciones de igualdad en todos sentidos, que dependan de nosotros. Aplicando los resultados de la teoría de la compensación de errores accidentales que hemos expuesto minuciosamente, se tendría por la media aritmética entre los 100 valores discordantes (de observación) de V , el número de medida más aceptable para ésta, Llamémoslo V_M . Si las diferencias x entre V_M y los 100 valores de observación de V son muy pequeños, el error medio E de las observaciones será muy pequeño, y también lo será el error probable r de dichas observaciones.

Es evidente que V_M expresará con mucha mayor aproximación que cada una de las observaciones lo que se quiere medir, puesto que su error medio E_1 vale $\frac{E}{\sqrt{m}}$

(siendo $m = 100$);

y su error probable R vale $\frac{r}{\sqrt{m}}$, que es tan solo los dos tercios de E_1 , ó poco más.

Poniendo la atención en estos errores muy pequeños, se puede decir que probablemente la velocidad V con que aprendería á leer cualquier otro niño normal, en iguales condiciones que los observados, estaría comprendida entre $V_M - E_1$ y $V_M + E_1$; y que es igualmente probable que V resulte comprendida entre $V_M - R$ y $V_M + R$, ó comprendida entre estos límites y los anteriores más amplios.

Se comprende la influencia que decíamos de los *grandes números*; porque á igualdad de esmero en todo, si en vez de 100, se hicieran 1.000, 10.000, 100.000, observacio-

nes, los límites se irían estrechando cada vez más; y *el peso* del valor que se adoptara para la velocidad media V que se quiere medir, sería cada vez mayor.

* * *

Expuesto lo que precede, y aplicando los principios del *Cálculo de Probabilidades*, si se llama q la *probabilidad* de que la velocidad con que un niño (escogido al azar entre los normales) aprenda á leer en las condiciones dichas *esté comprendida* entre $V_M - E_1$, y $V_M + E_1$, es claro que la probabilidad de que *no resulte así*, será $(1 - q)$.

Y se puede decir por el *Teorema de Bernoulli*, que si se someten á esa prueba n niños normales cualesquiera, *la más probable* entre todas las combinaciones posibles de niños que resulten en el primer caso, y niños que estén en el segundo caso, será: que haya nq individuos en el primero; y $n(1 - q) = n - nq$ en el segundo. Como q será en general

bastante grande, es decir, mucho mucho mayor que $\frac{1}{2}$, el

número nq será probablemente mucho más de la mitad de los sometidos á la prueba; y mientras mayor sea q , más predominará nq sobre $n - nq$. Lo que decimos suele expresarse de otro modo diciendo: que en las n pruebas repetidas, la relación del número de individuos que resulten en el primer caso al número total de pruebas será muy probablemente q , es decir, la probabilidad simple de que un individuo escogido al azar esté en el primer caso.

Pero nótese bien que decimos que esto es *lo más probable*, y nada más; porque puede resultar que en vez de nq individuos, que estén en el primer caso, no haya más, al realizar la prueba, que $nq - h$ individuos, ó, por el contrario, $nq + h$

en ese caso. Diríamos entonces que en la experiencia ha habido una *desviación* h respecto de lo normal (*).

Bernoulli ha demostrado que esta desviación h respecto de lo normal, obedece á una ley (**), que suele llamarse *la ley de los grandes números*, y es la siguiente:

Que si se señala un número k (tan pequeño como se quiera) como límite máximo de *la desviación* por defecto ó por exceso, y se dispone del número n de pruebas, mientras más grande se adopte este número n , mayor será *la probabilidad* P de que la desviación h que pueda resultar en la experiencia, sea menor que el número dado k ; y si n creciera indefinidamente, el límite de la probabilidad P sería 1; es decir, *la certeza*. Lo cual indica que se podría concebir (y determinar por las Tablas que hay construídas) un valor para n suficientemente grande, para tener una *probabilidad tan cercana como se quiera á la certeza*, de que la desviación no puede llegar á valer k , pudiendo ser este número dado tan pequeño como se quiera.

Esta ley (matemática, no física), de los grandes números, no puede darnos nunca la certeza, que no cabe en este género de cálculos sobre errores accidentales, ó—como se dice vulgarmente—debidos al azar.

Acabamos de aplicarla á una cuestión cinemática, cual es la velocidad con que los individuos normales aprenden á leer en igualdad de circunstancias; pero debe notarse que esa ley de los grandes números—ó sea el *Teorema de Bernoulli*—se puede aplicar igualmente á todos los hechos sociales.—Así, por ejemplo, si por estadísticas demográficas, cuidadosamente hechas durante muchos años en una gran población en que las circunstancias no hayan cambiado sensiblemente, se calcula el valor medio m del número anual de

(*) Usamos la palabra *desviación* en el sentido que se da en Francés á la palabra *écart*.

(**) Damos á la palabra *ley* un sentido puramente matemático, que no debe de confundirse con el sentido de las leyes físicas.

nacimientos, y se toma su relación al número p de habitantes de la población, la relación media $\frac{m}{p}$ se adoptará como el tipo de natalidad en dicha población, mientras no cambien las circunstancias. Si E_1 es el error medio de esa relación $\frac{m}{p}$, y se llama q la probabilidad de que al siguiente año la relación oscilara entre $\frac{m}{p} - E_1$ y $\frac{m}{p} + E_1$, pensando en los n años venideros, lo normal sería que hubiese nq de ellos en que la relación oscilara entre $\frac{m}{p} - E_1$ y $\frac{m}{p} + E_1$ y $(n - nq)$ en que no fuera así. Si esto no se cumpliera exactamente cuando llegue la realidad, diríamos que ha habido una *desviación* respecto de lo normal; y podríamos añadir que mientras mayor fuera el número n de años en que se pensase, mayor sería la probabilidad de que la desviación que pudiera aparecer fuera menor que un número dado tan pequeño como se quiera. Se sobreentiende en lo dicho que prescindimos—para simplificar—de los cambios que se hayan ido operando en las circunstancias.

* * *

Cuando hayamos de hacer más adelante el estudio *dinámico* del movimiento de un individuo, á partir de un instante cualquiera que consideremos como inicial, necesitaremos como dato el *estado inicial* del individuo (*), que comprenderá:

- 1.º La posición inicial del individuo en el asunto; y
- 2.º Su velocidad inicial en magnitud, dirección y sentido.

(*) La palabra *estado*, tiene aquí en Cinemática significación enteramente distinta de la que tiene en Física ó en Fisiología.

Este estado proviene naturalmente de todas las variadísimas influencias que, en relación al asunto, haya recibido el individuo desde antes de su nacimiento hasta el instante que hemos llamado inicial para el estudio. La herencia recibida directamente de sus padres desde el instante de ser concebido, es un primer eslabón complicadísimo. Después de su nacimiento, la herencia fisiológica acompañada de una determinada predisposición psíquica, también heredada, se va complicando gradualmente por las acciones que todo lo que le rodea en el medio ambiente, físico y psíquico-social, ejerce sobre el individuo. Todas estas fuerzas que han ido influyendo en su movimiento de modificación habrán producido *como efecto*, aquella posición y aquella velocidad que juntas constituyen el *determinado estado*, que llamamos inicial, para el estudio de las subsiguientes modificaciones.

Análogamente, cuando hayamos de intentar el estudio dinámico del movimiento en un asunto de una agrupación social—á partir de un instante inicial—habremos de tener como *dato* el *estado inicial de la agrupación*, que comprenderá:

- 1.º El conjunto de las posiciones sociales de todos los individuos y elementos de la agrupación; y
- 2.º Las velocidades iniciales de todos los individuos y elementos.

Este estado inicial ha provenido de las acciones anteriormente ejercidas—sean interiores ó exteriores—que han influido en los individuos y elementos de la agrupación, y han determinado en general un efecto doble:

- 1.º Los conjuntos de conocimientos, sentimientos, creencias, hábitos, etc., que constituyen las posiciones en el instante inicial; y
- 2.º Las direcciones, magnitudes y sentidos de las velocidades con que se encuentran individuos y elementos sociales en el instante inicial.

Todo eso ha llegado como herencia á la agrupación social

de que se trate; y ya se vé que, en general, la herencia debe de ser considerada para la Mecánica bajo un doble aspecto. Se concibe, sin embargo, que se herede una cierta posición *sin velocidades*; entonces el estado inicial es *de reposo* en el asunto.

James Mark Baldwin examina detalladamente el contenido de ese caudal que se transmite como herencia de unas generaciones á otras de la misma agrupación social, y trata de determinar á qué individuos de ella se transmite, y quiénes son los desheredados. Examina también cómo se transmite por aprendizaje—mediante la imitación—bajo la influencia de las condiciones que rodean á los individuos y elementos de la agrupación, y que forman lo que suele llamarse la atmósfera social.

Creemos que á la *Mecánica social* nada de eso lo interesa. Nos parece que en ella—á semejanza de la Mecánica de los sistemas materiales—sólo ha de ser considerada la herencia social como un *estado inicial* de que partir como dato.

*
* *

Aceleración.—Después de haber tratado de lo que se refiere á la velocidad del movimiento de modificación del individuo en un asunto, pensemos que si la velocidad es *variable* por ley de continuidad — ya sea solamente en magnitud (movimiento de dirección constante), ya sea en magnitud y dirección á la vez—aparece la noción de *aceleración*, porque siendo la velocidad *algo*, que cambia de algún modo en el tiempo por ley de continuidad, le será aplicable á su vez el concepto de velocidad, y á esta velocidad de la velocidad se la llama aceleración. Es innecesario justificar que en un movimiento uniforme de dirección constante, la noción de aceleración no aparece, puesto que la velocidad no cambia en nada.

Recordemos estas primeras sencillas ideas de Mecánica racional (como lo hemos hecho al tratar de la velocidad) empezando por el caso en que la velocidad en el movimiento de modificación del individuo varíe solamente *en magnitud*, porque el individuo se mueva siempre en la misma dirección y tendencia (trayectoria rectilínea).

Si esta variación de magnitud de la velocidad fuera tal que los incrementos—positivos ó negativos—que experimente en intervalos de tiempo iguales sean iguales, por pequeños que se tomen esos intervalos, se dice que el movimiento es *uniformemente variado*, y se llama aceleración al incremento j de la magnitud de la velocidad en la unidad de tiempo. En el caso del movimiento que se simboliza en la trayectoria rectilínea, la dirección de la aceleración es la de la velocidad, que es la de la trayectoria. Se ve que en el movimiento rectilíneo uniformemente variado, la aceleración se puede representar por un vector (como se hizo con la velocidad) localizado en la recta de la misma trayectoria. Y como esta j expresa la relación constante del incremento de la velocidad al incremento de tiempo—cualquiera que sea este intervalo—se escribe la ecuación conocida

$$v = v_0 + j \cdot t$$

en la cual v es la velocidad en un instante cualquiera t ; v_0 la que corresponde al instante inicial $t = 0$; y j es la aceleración.

Sobre la representación gráfica de esta ecuación y sobre la resolución numérica ó gráfica de los problemas, se repetirá lo que se dijo al hablar de la velocidad en un movimiento uniforme, porque la ley es la misma. Que por una simple multiplicación se calcula el incremento ($v - v_0$) de la velocidad; y que por simple división se calcula j .

Pasando al caso en que las velocidades no varíen proporcionalmente á los tiempos, es decir, en que las variacio-

nes de la magnitud de la velocidad se realicen *sin uniformidad*, se precisa la noción de *aceleración en un instante* por el mismo método infinitesimal que se indicó al precisar la noción de *velocidad en un instante*. Así la aceleración en un instante del movimiento de modificación del individuo, cuando es de *dirección constante*, es el coeficiente diferencial en un instante, de la velocidad respecto del tiempo $\left(\frac{dv}{dt}\right)$.

Y por esto, para obtener *aproximadamente* el cambio muy pequeño de la velocidad en un intervalo muy pequeño θ de tiempo, á partir de un instante t , se podrá multiplicar la aceleración en este instante por el intervalo θ . Pero si se ha de calcular la magnitud del cambio de la velocidad en un intervalo cualquiera (por medio de la aceleración variable de un instante á otro) hay que recurrir á la integración durante ese intervalo, como ya dijimos para el cambio en la posición por medio de la velocidad variable.

*
* * *

En el caso general de un movimiento de modificación del individuo en que éste va cambiando, continúa y sucesivamente la dirección en el mismo asunto, y con velocidades que varían también en magnitud de un instante á otro, hemos de pensar que esta variación ó cambio *total* hace nacer el concepto más general de aceleración en un instante dado, que es el de *aceleración total*.

El procedimiento para llegar á esta noción es el mismo infinitesimal ya dicho; pero es, en este caso, más complejo, porque afecta simultáneamente á la magnitud y á la dirección y sentido de la velocidad, es decir, á todos los atributos del vector-velocidad. Al trascurrir un intervalo muy pequeño de tiempo θ , á partir de un instante t , la velocidad v en este instante recibe un *incremento total* muy pequeño con

cierta magnitud, dirección y sentido, que, compuesto con v , determina la velocidad v' en el instante $t + \theta$. En el límite del decrecimiento indefinido de θ , la relación á θ de ese incremento total de la velocidad es la *aceleración total* J en el instante t . (Véase la fig. 1.^a simbólica.)

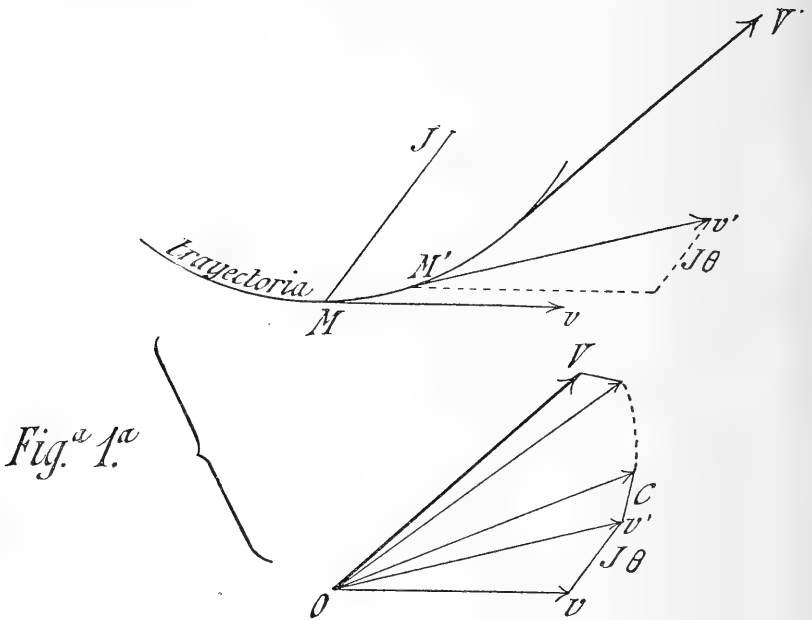


Fig.^a 1.^a

Y se vé que esta aceleración corresponde exactamente á la velocidad en el mismo instante de un punto que recorriera la curva hodógrafa C , construída á partir de nn punto cualquiera o . Por ser total, es declr, por referirse á *todo* lo que constituye la velocidad, esta aceleración permite pasar aproximadamente de la velocidad v en el instante t á la velocidad v' en el instante $t + \theta$, componiendo aquélla con la $J\theta$, que se obtiene por simple multiplicación.

Y es claro que para conocer (en un todo) la velocidad V al cabo de un trascurso cualquiera de tiempo, hay que recurrir á la integración en este tiempo de los cambios totales muy pequeños $J\theta$ de la velocidad. Y el vector V que se ob-

tenga en el símbolo. geométrico por la composición de la velocidad inicial v con todas las J .^o sucesivas (véase la figura) deberá de localizarse (para el instante final del trascurso de tiempo) en la tangente á la trayectoria trazada en la posición correspondiente del móvil.

Hemos recordado con excesiva prolijidad de detalles estas primeras ideas vulgares de la Cinemática sobre velocidades y aceleraciones, con el propósito de que se vea que serían aplicables sin modificación alguna al movimiento de un individuo en un asunto cualquiera, si admitiéramos (como decíamos en los *Preliminares*) que el paso de una posición del individuo en el asunto á otra posición muy próxima durante un intervalo de tiempo muy pequeño θ , quedara determinado en *magnitud, dirección y sentido* por el incremento muy pequeño que experimentara un parámetro complejo que sirviera para definir aquella posición psíquica.

Es claro que en la práctica—ya lo dijimos—los cambios de dirección en el movimiento de un individuo sólo ocurren á intervalos de tiempo suficientemente grandes, para que el movimiento deba de ser mirado como una sucesión de movimientos de dirección constante y de mucha duración, cada uno de los cuales puede ser uniforme ó puede ser de velocidad variable en magnitud. En este segundo caso es cuando se presenta prácticamente la aceleración.

Pero como nuestro propósito ha sido seguir la exposición de la Mecánica racional con el carácter general científico y puramente teórico que ella tiene, sin preocuparnos aquí de las aplicaciones, hemos tratado del movimiento más general posible de un individuo en el cual la dirección de su movimiento fuera incesantemente cambiante (representación curvilínea), y la magnitud de su velocidad fuera también cambiando de un instante á otro, para que se viera en este caso general la *aceleración total* en cada instante, que es muy interesante para la Dinámica, como veremos.

En las indicaciones cinemáticas hechas anteriormente sobre el movimiento de modificación de un individuo, se nos ha impuesto (como indispensable) la noción de *dirección* y *sentido* del movimiento en un instante dado. Ya dijimos en los *Preliminares* que suponíamos afectado al individuo de un parámetro simbólico que — por su valor en cada instante — definiera la posición en el asunto, y que fuera además susceptible de marcar — por su incremento en un transcurso muy pequeño de tiempo θ —, no sólo la magnitud muy pequeña del *cambio de posición* en ese intervalo θ , sino también *la dirección y el sentido* de ese cambio de posición (*) Esta suposición responde á la idea que tenemos de que todo cambio psíquico muy pequeño que experimente un individuo en el conjunto de sus ideas, sentimientos, etc., sobre un asunto, ha de ser — así me parece — en una cierta y determinada dirección y sentido psíquicos.

En el intrincado campo de lo psíquico — y á partir de una determinada posición del individuo en un asunto — concibamos toda la infinidad de direcciones posibles que se distinguen unas de otras por la orientación psíquica que cada una señale en el asunto. En relación á todas ellas, veamos el determinado cambio muy pequeño de posición del individuo, con su determinada dirección y sentido, que corresponden á su velocidad v en ese instante.

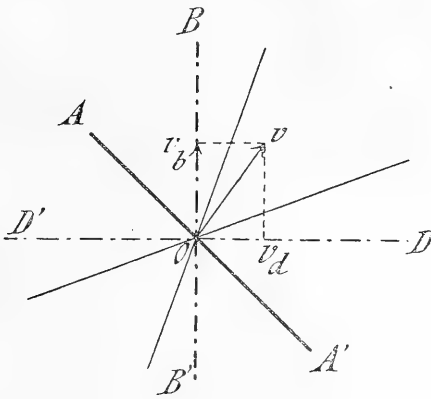
Se puede notar que este movimiento será *enteramente ajeno* á algunas de aquellas direcciones, pero que — generalmente hablando — participará en algo de las demás direcciones: participará en mayor grado, naturalmente — de aquellas que se aparten menos de la dirección de la velocidad. Se podría apreciar el cuánto de la velocidad v en una dirección dada D (véase la figura 2.^a), concibiéndola v como

(*) He de repetir aquí que me parece sumamente difícil — por no decir imposible — señalar hoy un procedimiento por virtud del cual se pueda hallar, para cada individuo y en cada asunto, ese parámetro.

compuesta de una parte v_d en la dirección D , y de otra v_b , ajena por completo á esta dirección D . La componente v_d es lo que se llama *la velocidad v estimada en la dirección D* .

La representación *esquemática* de lo que decimos se vería figurando en ov (fig, 2.^a) la velocidad en magnitud, dirección y sentido. Se ve que en algunas de estas direcciones la v no tiene componente alguna, pero que en cualquiera de las otras, en la D , por ejemplo, hay una componente v_d

Fig.^a 2.^a



de la velocidad v , si se concibe ésta como resultante de v_d , y de otra v_b situada en el plano BB' perpendicular á D , en el cual están representadas las direcciones por completo ajenas á la D .

Así se concibe simbolizada en v_d *la velocidad estimada en la dirección D* , porque expresa (por su magnitud y su sentido) *cuánto* tiene la v , y *en qué sentido* de esa dirección D .

Si se piensa—por ejemplo—en la posición o como símbolo de la que tiene un individuo en un asunto económico, y su estado es de movimiento en el asunto con una velocidad conocida v , cabe estimar ésta en aquellas direcciones

que no sean enteramente ajenas á la dirección del movimiento. Si, por ejemplo, se supone que ese movimiento en el asunto económico de que se trate se relaciona en algo con el cambio internacional de productos (dirección D), al *estimar su velocidad v en esta dirección*, se vería *cuánto* hay (en el movimiento elemental) de *sentido* librecambista ó prohibicionista, y esto se vería *por la magnitud de v_d y por su sentido*.

Consideremos otro ejemplo. Si tratando de un asunto del género político se considera en éste una dirección D —á partir de la posición o —, que simbolice la participación del pueblo el asunto político; y se supone que el movimiento del individuo es en una dirección política v , que no sea ajena por completo á la dirección D , se ve que la velocidad v , estimada en la dirección D , nos indicará *cuánto* hay de sentido democrático ó antidemocrático (que son los dos sentidos diametralmente opuestos oD y oD' en la dirección D) en el movimiento elemental de que se trata.

Todo lo que decimos sobre la velocidad podría decirse sobre la aceleración de un movimiento en un instante, que se podría *estimar también en una dirección dada D* . Nos ayudaríamos para esta concepción simbólica de las representaciones geométricas que usamos al definir anteriormente la aceleración total J en un instante, en magnitud, dirección y sentido.

* * *

COMPOSICION DE MOVIMIENTOS. MOVIMIENTO RELATIVO

Composición de dos movimientos.—En el estudio de los movimientos de modificación de los individuos, habremos de considerar á éstos más adelante como están en la realidad, es decir, formando parte siempre de una agrupación social; con lo cual queremos significar que *participan*— como

por vía de arrastre — del movimiento de conjunto de la agrupación en el asunto social de que se trate, cualquiera que éste sea, puesto que supondremos que los individuos están ligados á ella. Este movimiento de conjunto de una agrupación es muy difícil de definir y precisar, tal como se da en la realidad, y por esto nos limitaremos al caso teórico de que fuera posible conocer en magnitud, dirección y sentido la *velocidad de arrastre* que corresponda en un instante dado á cada individuo por el hecho de participar del movimiento de conjunto de la agrupación, en virtud de los enlaces que tenga en ella. Esta velocidad de arrastre no será en general la misma en un instante dado para todos los individuos de la agrupación, á no ser en casos muy especiales (*).

Ahora bien; si concebimos que un individuo tenga en un instante dado una velocidad propia con relación á la agrupación á que pertenece, esta velocidad no sería la real y efectiva del individuo, sino en el supuesto de que la agrupación estuviera en reposo. Pero si suponemos que ésta á su vez se halla en movimiento, el individuo (á quien suponemos participe de este movimiento), tendrá, además de su velocidad propia *relativa*, otra velocidad de *arrastre*; y el movimiento de modificación del individuo en el asunto será — en el instante que se considera — el que corresponda á la velocidad resultante de las dos, y que se representaría en la dirección y con el sentido de la diagonal del paralelógramo formado con las magnitudes, direcciones y sentidos de las dos velocidades componentes. Además, la magnitud de la

(*) En un asunto religioso de importancia se dará á veces (no siempre) el caso de que todos los que formen parte de la colectividad social constituida por los individuos de una misma confesión religiosa, reciban de la colectividad una misma, idéntica velocidad de arrastre para un determinado movimiento en aquel asunto. Entonces se podría decir con toda propiedad que esa es la *velocidad de la colectividad*, y el movimiento de ésta se podría representar perfectamente por el de simple *traslación* de un sólido invariable de los que estudia la *Mecánica racional*.

velocidad resultante estará representada (con arreglo á escala) por la longitud de la diagonal. — Es evidente que la velocidad real y efectiva se acercará más á la que en magnitud predomine entre las dos componentes.

La operación de determinar por la regla del paralelogramo, la velocidad absoluta como resultante de la relativa y la de arrastre, es la que suele llamarse *composición de velocidades*.

El problema de la determinación de la velocidad relativa es el inverso, á saber: conocida la velocidad real y efectiva que el individuo en un instante dado tiene en su movimiento absoluto en un asunto — digámoslo así, — y conocida también su velocidad de arrastre en el asunto, por su enlace con la agrupación de que forma parte, hallar la velocidad que podría decirse tiene con relación á la agrupación, es decir, su velocidad relativa. — Este problema se llama de la *descomposición*, y queda resuelto evidentemente, llevándolo al de la composición de la velocidad absoluta con una igual y opuesta á la de arrastre, para reducir al reposo á la agrupación, y que no quede (de la velocidad efectiva) más que la velocidad relativamente á la agrupación.

Para evitar confusiones en que muy á menudo se incurre, conviene llamar la atención (como lo hace *Bour* en su excelente Tratado de Mecánica racional) sobre las frases anteriores. Nótese bien que un individuo, en un instante dado, no puede tener varias velocidades *distintas*, en su determinado movimiento en un asunto, porque eso es inconcebible. No tiene ni puede tener, en el instante considerado, más que *una* única velocidad *real y efectiva*; y es la que hemos llamado velocidad absoluta (para darle un nombre) como si pudiera ser contemplada desde algún punto de vista absolutamente fijo (*).

(*) Se sabe que esto del punto de vista absolutamente fijo es una mera concepción abstracta sin realidad; pero este modo de pensar en un punto de referencia absolutamente fijo, es útil al pensamiento puramente especulativo.

Si esta misma velocidad efectiva del individuo no es mirada aisladamente, sino en relación con la agrupación que está toda ella en movimiento, puede concebirse al individuo de que tratamos como teniendo una velocidad relativa, pero ésta *no es más* que la misma velocidad absoluta contemplada desde un punto de vista que fuera arrastrado por la agrupación en su movimiento de conjunto. Quizá podría decirse también que la velocidad de arrastre que hemos dicho que tiene el individuo, no es más que la misma velocidad absoluta de la cual imaginamos que se descuenta (si vale la frase) lo que hubiera en ella de individual é independiente del movimiento de la agrupación; es decir, mirando la velocidad absoluta desde un punto de vista colocado idealmente en el interior de un individuo que conservara su movimiento propio individual, y se sustrajera al movimiento de la agrupación (*).

Antes de pasar á la composición de muchos movimientos, presentemos algún ejemplo de lo dicho sobre la composición de dos. Pensemos en la agrupación social más sencilla, que es la familia, como la vemos hoy en nuestras sociedades, y consideremos un individuo de ella en un asunto religioso — por ejemplo. — En un instante dado, el individuo que consideramos está en una cierta determinada posición en ese asunto. Dejando aparte las diversas influencias que hayan tendido anteriormente á modificar su posición religiosa, ejerciendo su acción como fuerzas en muy varias direcciones y sentidos, y con varias intensidades (**), supongamos el hecho escueto de que el individuo, en el instante en que lo vemos, tenga una velocidad propia, individual, suya, de movimiento en ese asunto religioso, y que sea conocida en magnitud, dirección y sentido, venga de donde vinere. Si además supo-

(*) Esta concepción es algún tanto violenta. Quizá Bour tiene razón al decir que bajo ningún pretexto se puede (en ningún caso) considerar el movimiento de arrastre como perteneciendo al punto.

(**) Esta cuestión es de Dinámica, de que ahora no tratamos.

nemos que la familia á que pertenece (por causas que aqui tampoco nos interesan), se halla en ese mismo instante en estado de movimiento de modificación religiosa en el asunto, y admitimos que sea conocida en magnitud, dirección y sentido también, la velocidad de arrastre para ese individuo de la familia vemos que, en *dirección y sentido*, así como en *magnitud*, la velocidad efectiva en ese instante del movimiento de modificación religiosa del individuo, será la resultante de las dos componentes, y se representaría geométricamente por la diagonal del paralelogramo que se construyera sobre las representaciones geométricas de las dos velocidades conocidas (*).

Composición de varios movimientos.— Para tratar el caso en que la agrupación primera (la familia, por ejemplo) forme parte á su vez de una segunda agrupación más comprensiva (el municipio en que vive, por ejemplo) y que aquella primera agrupación participe del movimiento de conjunto de la segunda, hemos de partir del supuesto de que (así como antes suponíamos que era conocida la velocidad de arrastre para el individuo por el enlace con su familia) sea también conocida en el mismo instante la segunda velocidad de arrastre (la del municipio, por ejemplo), para el mismo individuo en el mismo asunto. Es claro que al participar la familia — como por vía de arrastre — (en este asunto) del movimiento del pueblo, de éste participará en general el individuo que pertenece á la familia (**).

(*) Claro es que si se considera un individuo de tal manera desligado de su familia (por lo que toca á su posición en este asunto) que la velocidad de arrastre fuera para él *nula*, no habría entonces composición de velocidades, pues se trataría de un individuo absolutamente libre de las sugerencias de la agrupación familiar en este asunto.

(**). No nos incumbe á nosotros entrar aquí á examinar si para cada individuo — en la generalidad de los asuntos de carácter social — esas dos velocidades de arrastre, á saber: la que proviene de la familia y la que proviene del pueblo, tienen direcciones y sentidos

La regla de composición de velocidades será siempre la del paralelogramo, porque después de compuesta la propia individual (relativa á la familia) con la primera de arrastre, la resultante habrá de ser tratada como una velocidad relativa con respecto al municipio, para componerla á su vez con la segunda de arrastre (la del municipio), que hemos supuesto conocida también. La resultante de esta segunda composición será la velocidad efectiva del individuo en el asunto — en magnitud, dirección y sentido.

Con toda generalidad podemos decir: que si el municipio participa del movimiento de conjunto que pueda tener la provincia ó región á que pertenece; y ésta á su vez del movimiento de la nación, y ésta del movimiento de su raza; y, finalmente, su raza del movimiento total de la humanidad; cada individuo tendrá en un instante dado (para cada asunto) una velocidad en su movimiento de modificación que estará determinada por la resultante de su velocidad propia individual y de todas las simultáneas de arrastre que hemos enumerado. Es claro que alguna de estas componentes no existiría si el enlace ó la conexión correspondiente no existiera; como, por ejemplo, si un individuo y su familia estuvieran completamente separados de la corriente de movi-

que se separen poco ó mucho la una de la otra. Hay quienes creen que — generalmente hablando — hay antagonismo; es decir, que (en la misma dirección) es frecuente que los sentidos sean diametralmente opuestos. Esto nada interesa en la Cinemática pura y abstracta de que aquí tratamos.

Ya dijimos al principio que en la Cinemática se hace siempre abstracción completa de las fuerzas que producen los movimientos, pero en una Cinemática aplicada sería muy interesante el examen y determinación de los movimientos que (proviendo de los intereses, concordantes ó discordantes, de las simpatías ó antipatías, etc.) determinan las velocidades de arrastre de los individuos en una ú otra dirección y sentido.

Dentro de una nación — por ejemplo — habrían de ser consideradas las familias, los municipios y las regiones — para esa consideración cinemática.

miento del municipio en que vive, ó una nación estuviera aislada del movimiento general de las de su raza, etc.

Si ponemos la atención en un asunto económico — un asunto de agricultura, por ejemplo — y escojemos un individuo que en un instante dado dedique á este asunto su actividad, y pensamos en lo que hemos llamado su posición en el asunto en ese instante, diríamos primeramente que está *en reposo*, si no está en vías de introducir modificación de ninguna especie en su modo de llevar ese asunto como agricultor, y no hace más que conservar la posición heredada ó adquirida anteriormente. Si, por el contrario, suponemos que está animado de una velocidad propia de modificación en determinada dirección y sentido, y que ese agricultor no está aislado, sino que forma parte de una corporación agraria, y que ésta tiene un movimiento general de modificación en el asunto de que tratamos, el individuo recibirá, como partícipe de este movimiento de la corporación, una primera velocidad de arrastre.

Si á su vez la Corporación participara de un movimiento general de la región ó del país, que se relacione con aquella especie de modificación, el individuo recibiría una tercera componente de velocidad; y la resultante de las tres velocidades dichas sería en el instante que consideramos la velocidad real y efectiva del individuo, y ella señalaría la dirección y el sentido de su movimiento efectivo de modificación.

Parece innecesario decir que sería difícilísima, por no decir imposible, la determinación de cada una de las velocidades componentes que se requieren como datos para aplicar el procedimiento expuesto de composición que habría de conducirnos á la velocidad resultante para cada individuo. Es primeramente difícil conocer con precisión la dirección, sentido y magnitud de la velocidad propia individual, relativamente á la primera agrupación social á que pertenece; pero la dificultad es mucho mayor para las demás compo-

mentes, que son velocidades de arrastre del individuo por las distintas agrupaciones sociales más y más comprensivas que envuelven, por decirlo así, al individuo. Y son mucho más difíciles de determinar con precisión estas componentes, porque habría que conocer, no ya una dirección y sentido general de velocidad como dirección media con su magnitud media, sino la que particularmente correspondiera al individuo de que se trate. Se comprende que esta última varíe de un individuo á otro, según su enlace (para el asunto) con la familia, con el Municipio y la región, etc., para ser arrastrado en una ú otra dirección y sentido, y con más ó menos intensidad.

Entraría por mucho en estas determinaciones un complicadísimo, y casi inextricable, conjunto de circunstancias de carácter psíquico social (*).

ADVERTENCIA. Tengo ahora conocimiento de un libro del Profesor *SP. C. Haret*, de Bucarest, titulado *Mecánica social*, y publicado á fines de 1910. Veo que ese trabajo es enteramente distinto del mío, aunque en ambos se aplique á los individuos y á las agrupaciones sociales los Principios y Teoremas de la Mecánica racional; porque se hace la aplicación desde puntos de vista diferentes

(*) A los sociólogos corresponde el estudio de estas difíciles cuestiones sobre las velocidades de arrastre y las velocidades propias individuales, según sean los tipos de las agrupaciones sociales, y según sean las circunstancias en que se encuentren. Con el tema de la composición de velocidades, guardan cierta conexión las observaciones del Profesor Durkheim acerca de la debilitación progresiva de la conciencia común ó colectiva, por la cual, las velocidades propias individuales van predominando más y más.

Las velocidades propias individuales dependen sin duda de todo lo que hay en el interior de cada individuo, en lo que denominaremos más adelante su medio interno; pero esta consideración es de orden dinámico, y trataremos de ella más adelante.

y con muy diverso criterio, como podrá apreciar quien leyere uno y otro trabajo. Mi estudio es predominantemente psicológico (como base de lo social), y además puramente abstracto y teórico. Mientras que Mr. Haret aspira en el suyo á hacer una Mecánica social aplicada (al menos como primera aproximación), habiendo sido la aplicación á la Política el móvil que le ha impulsado á hacer su trabajo.

Así, en toda la segunda mitad del libro, se trata de cosas que no tienen analogía alguna con lo tratado por mí en estos *Apuntes*; y termina con reflexiones sobre la marcha de la civilización.

En la Mecánica social propiamente dicha, veo que Mr. Haret había estudiado ya alguna de las cuestiones que yo he abordado en este trabajo; pero lo había hecho de manera muy diferente. Es de notar, sin embargo, que yo haya llegado— aunque por distinto camino—á un modo de extender el principio de la inercia que en algún punto coincide con el de Mr. Haret; y que yo haya llegado también á concepciones algo análogas á las suyas sobre la noción de masa, para poder mirar ésta como constante.

(Continuará).

XVII.—Cráneos araucanos del Museo Antropológico Nacional.

POR LUIS DE HOYOS SÁINZ

La gran familia étnica de los araucanos, es clasificada por los antropólogos de muy diverso modo, en las subdivisiones de los pueblos sudamericanos; pues mientras Quatrefages y el Sr. Antón forman con ellos los patagones y extinguidos charruas, la *raza pampense*, Siemiradzki, Virchow, Deniker y otros, constituyen un tronco de la gran *raza andina*, de origen centroamericano y en relación directa con los atacameños, afirmación que podremos estudiar en otra ocasión por haber medido varios cráneos de esta tribu, procedentes de la «Expedición al Pacífico» de los naturalistas españoles en 1862 al 66: optamos nosotros,—rectificando por conocer mejor este punto, nuestra opinión del libro *Clasificaciones, prehistoria y razas americanas*, 2.^a edición del 1900,—por el último modo de ver, aunque no tiene en este caso concreto gran valor la diferencia, porque los cráneos que analizamos proceden de modo indubitable de la región de los araucanos chilenos. Es, además, para nosotros indudable, que los araucanos pampenses no son más que una adaptación al medio y á la vida de la estepa, de emigrantes de la cordillera.

Los dos ejemplares que estudiamos, son representantes de la raza considerada como la originaria de esta gran zona, que Ehrenreich (*) estima como el tronco de todos los america-

(*) Dr. Paul Ehrenreich.—*Die Ethnographie Sudamerikas un Be- giundes XX Jahrhunderts usw.* Arch. f. Anhr. Neue Folge III, pági- na 61, 1905.

nos del grupo sud, y de los que han salido los transandinos á mezclarse con los puelches. El interés de su estudio está en que los trabajos craneométricos de araucanos, están basados principalmente en ejemplares de las razas derivadas ó de los territorios argentinos, ya que las excelentes publicaciones de Guevara en los «Anales de la Universidad de Santiago de Chile», así como de Medina (*), Lenz y Polakowski, son estudios etnográficos, y el de Zampa (**), sobre tres individuos vivos, no tiene utilidad para nosotros.

Masculino el uno, femenino el otro, son, sin embargo, estos dos cráneos de una semejanza tal, que pueden describirse conjuntamente en lo que á su morfología y arquitectura craneal atañe, y que sólo en la natural proporción de los caracteres métricos de ejemplares de los dos sexos difieren algo, aunque conservando casi en todo las mismas relaciones: Idéntico es no sólo el aspecto, sino la conservación y estado como procedentes del mismo yacimiento.

Son ambos pequeños, globulosos, de líneas redondeadas y finas, verdaderamente afeminados, y contrastando, por ello, con el prejuicio de pertenecer á una raza fuerte, indomable y guerrera, que justificó el nombre que se daban de moluchos ó guerreros, venciendo á nuestro célebre Valdivia y mereciendo ser llevados á la epopeya por Ercilla.

Esta primer impresión se afirma con los datos de capacidad y las medidas de los principales diámetros y curvas craneanas, que son los siguientes:

(*) Medina.—*Los aborígenes de Chile*. Santiago, 1882.

Lenz. R.—*Estudios araucanos*. An. de la Un, de Santiago de Chile, 1895-1897, así como *Introducción á los estudios araucanos*, con un apéndice bibliográfico. Valparaíso, 1892.

Polakowski.—*Geschichte der Eroberung Chiles*. Zeits für Erderkunder XXII, y del mismo autor. *Die eutigen Araukaner*. Globus, tom. 74 del 1898.

(**) Zampa. R.—*Fueghini ed Araucani*. Arch. per l'Antropologia XXII, pg. 362, 1892.

Capacidad	1375 ♂	1218 ♀	cm. ³
Diámetro: A. P. Mx.	164 »	166 »	mm.
Diámetro transverso	137 »	128 »	»
» . . . vertical	129 »	122 »	»
Curva horizontal	480 »	470 »	»
» . . . transversal	410 »	396 »	»
» . . . antero-posterior . . .	334 »	348 »	»

*
* *

Demuestran las cifras de la capacidad craneal obtenidas por el procedimiento clásico de Broca, y las del *módulo* ó semisuma de los tres diámetros cefálicos, que si el azar no ha presentado estos valores individuales reducidos para la representación de la raza, es ésta de pequeño volumen encefálico, pues tanto en la nomenclatura francesa como en la alemana corresponden á los grupos inferiores y se observa en ellos la justa reducción que el sexo femenino presenta respecto al otro. Además, esta capacidad es aún algo superior á la de 1313 cm.³, que es la media general obtenida por nosotros en las series de cráneos de los Andes medidas en el Museum d'Histoire Naturelle, de París, y en el Laboratorio de Antropología del Museo de Ciencias Naturales, de Madrid, con los cuales nos parece lógico comparar, como contraste, los valores de estos ejemplares, ya que las afinidades étnicas se han de traducir en analogías métricas. La diferencia de 2 unidades en el módulo á favor de las series peruanas nos da idea, teniendo en cuenta su menor volumen real, del aumento de la braquicefalia en estos araucanos.

Los valores absolutos de las curvas craneales siguen el mismo incremento, pues exceden en 15, en 25 y en 8 mm. á los medios de los sujetos andinos, cosa verdaderamente de notar, porque se consideraba esta raza como inferior á las

andinas puras, y no es ciertamente esta la deducción que podemos hacer con estos datos.

Los *índices cefálicos* fijan la característica de cada cráneo, y por el cefálico verdadero hallamos una extrema braquicefalia en el hombre, que tiene 83,5, cifra casi igual á la que para esta raza da Virchow (*) y correspondientes ambas á las de Tenkate, que de 300 cráneos halló 96 cuyo índice pasa de 80, y á los resultados de Latham, que en los cráneos por él medidos y en los de los Sres. Guevara y Medina halló el 52 por 100 en los grupos braquicéfalos. Tiene la mujer una mesaticefalia que sólo á mezcla ó á una variación individual puede atribuirse, pues reduce su índice á 76,1, por efecto del alargamiento antero-posterior, que excede al del hombre, á pesar de su menor tamaño total (fotografías I y II). Comparados con los procedentes de la costa y la cordillera, resultan una unidad menos braquicéfalos que aquéllos y cuatro más que éstos, siendo de notar que tienen menores diámetros á pesar de su mayor volumen real. Son más braquicéfalos que los medidos por varios autores y recopilados por Siemiradzki ó Deniker, como araucanos chilenos, y que los dados á conocer por La Vaúlz y Tenkate, como de la rama pampense.

El *índice vertical* hace verdaderamente hipsicéfalo al cráneo masculino con 78,6 y deja como ortocéfalo al femenino, aunque son más elevados que los del Pacífico, y, sobre todo, que los de la Cordillera; el *vértico-transversal* invierte sus valores respecto á las razas afines y á los sexos, pues es de 94 y 95,3, valores ambos del grupo medio, que se explican más por la gran anchura del cráneo que por su aplastamiento que no existe, ya que su diámetro vertical basio-bregmático se eleva por un particular y característico abombamiento del occipital baxilar, que sirve de plano de sustentación al cráneo, quedando las apofisis mastoideas altas por no ser

(*) Virchow. R.—*Crania Ethnica Americana*. Berlín, 1892.



I.—Hombre araucano, Norma lateral.
Plano vertical alveolo-auditivo.



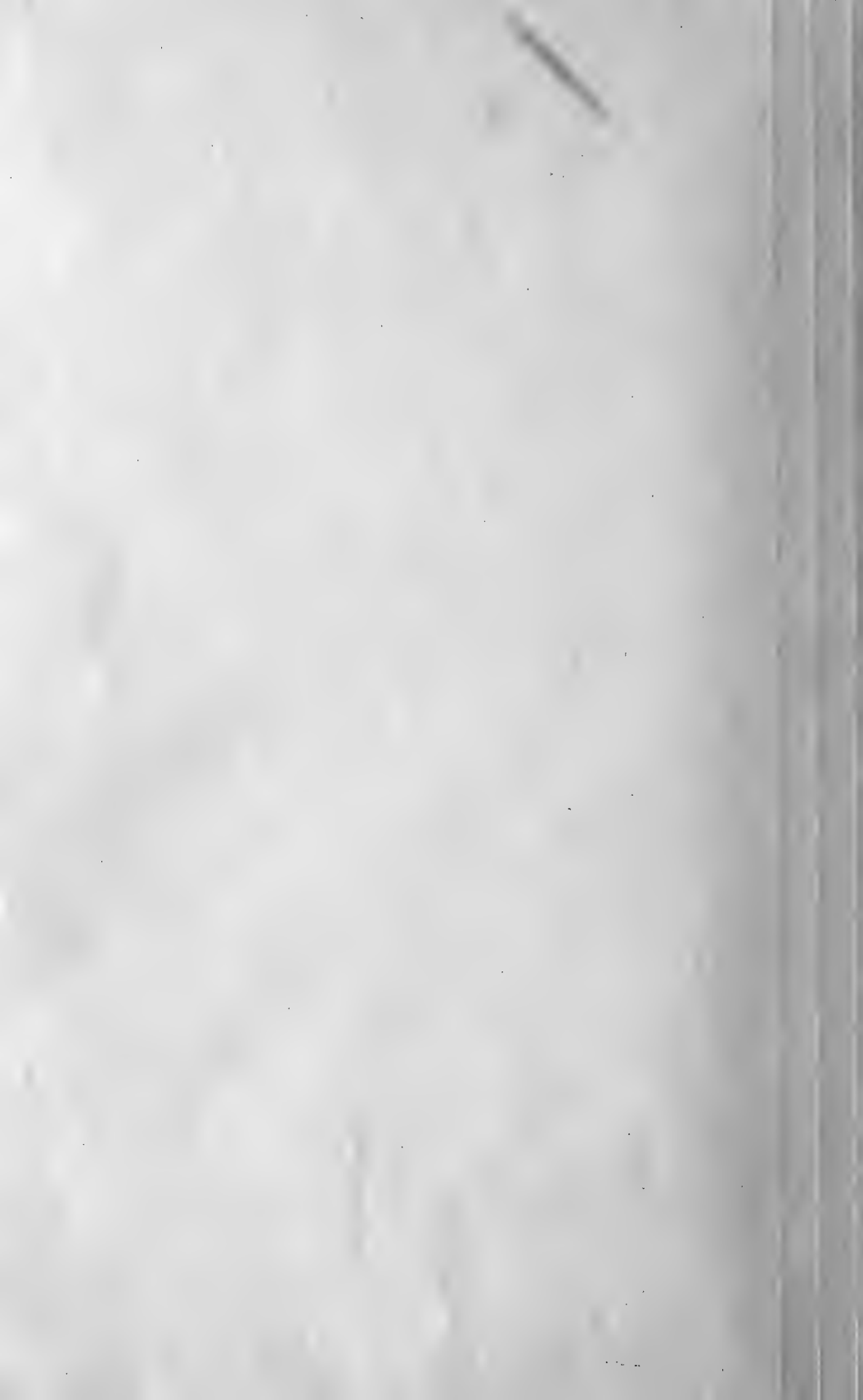
III.—Hombre araucano, Norma basal ó inferior.
Plano vertical auditivo-alveolar.

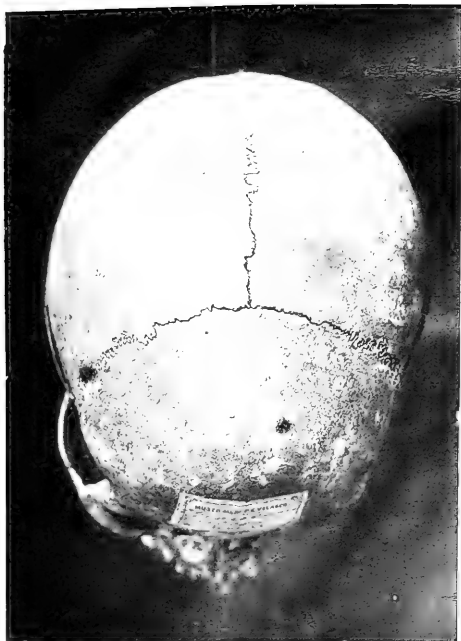


IV.—Hombre araucano, Norma lateral.
Plano horizontal.



Mujer araucana, Norma lateral.
Plano vertical auditivo-alveolar.





I.—Hombre araucano, Norma superior ó vertical.
Plano vertical alveolo-occipital ó de sustentación.



II.—Hombre araucano, Norma facial ó anterior.
Plano horizontal alveolo-condileo.



III.—Hombre araucano, Norma basal ó inferior.
Plano vertical auditivo-alveolar.



IV.—Hombre araucano, Norma lateral.
Plano horizontal de sustentación alveolo-condileo.



V.—Mujer araucana, Norma lateral.
Plano horizontal alveolar y occipital cerebeloso.

tampoco muy fuertes ni grandes, como puede verse en las fotografías laterales.

El análisis parcial de la curva media naso-opzítica, como se ve en las dos fotografías laterales, permite afirmar, en primer término, que la dolicocefalia femenina es parietal y occipital, reduciéndose notablemente la región frontal en todas sus medidas, cosa análoga á lo observado por nosotros en la explicación de la relativa dolicocefalia de los cráneos de la región audina sobre los de la costa, y que tiene su última comprobación en la reducción del segmento preauricular del cráneo femenino.

Las *proyecciones* que tomando por base el plano de sustentación y por origen el basio, dividen al cráneo en anterior ó facial y posterior, demuestran el alargamiento palatino y alveolar, pues en el cráneo masculino son, respectivamente, de 102 y 90 mm., lo contrario que en el femenino, cuyo predominio es, como en todo, occipital ó posterior, teniendo por índice basilar 53,6 y 62,3 respectivamente.

Los más típicos de los índices que relacionan los diversos valores cefálicos son los que expresan el *estrechamiento anterior*, dado como característico de esta raza, y que si en la norma superior ó vertical no resaltan inmediatamente más que por el estrechamiento de la hemiclipse anterior, en las relaciones métricas más exactas y menos sujetas al error de observaciones, se determinan de un modo indudable, y hasta exagerado, pues el índice *fronto-cigomático* es de 68,8 y 67,1, valores ambos más bajos que los considerados como límite inferior de las razas en que se ha determinado, y el *fronto-parietal* tiene igual carácter de excepción en el cráneo masculino, ya que no pasa de 61,3, subiendo en el femenino solamente á 64; es decir, dos unidades del extremo inferior de los valores medios étnicos.

Este carácter es correlativo del que Ten-Kate (*) conside-

(*) Ten-Kate, *Contribution à la Craniologie des araucans argentins*, 1 vol. 8.^a, 1893. La Plata.

ra como típico de esta raza, que es abultamiento de las bolsas temporales, bien manifiesto en estos cráneos por las fotografías de las normas superior y facial del masculino y la facial del femenino, si bien hay que esperar la solución por nuevas observaciones, ya que no se presentan estas particularidades en los cráneos estudiados por Latham.

Insiste en la plena confirmación del carácter tal vez más esencial de los araucanos, el valor del *índice frontal*, ya que su diámetro mínimo ó anterior es sólo de 77,7 centésimas del máximo ó posterior, siendo el valor medio de esta relación en las diversas razas de 87.

Como último elemento que á la craneometría afecta, están los datos relativos al *agujero occipital* (fotografía IV), que indican la gran armonía de todos los caracteres, por sus índices de 93,9 y 87, en relación también con la pureza braquicéfala de ambos ejemplares; no siendo notables, ni el módulo que expresa el tamaño, ni el ángulo de Daubenton, que es de 19 y 18°, respectivamente, teniendo la forma redondeada y de apariencia grande, con abultados y extensos cóndulos.

* * *

Presenta la *norma vertical* (fotografía III), una forma elíptica, ó mejor ovoide, con el diámetro menor por delante, dejando ver unas arcadas cigomáticas del número 2, y los elementos todos del prognatismo facial, al que contribuyen de un modo verdaderamente gradual el plano orbitario, los elementos de la nariz, y especialmente los maxilares y el borde alveolar, cosas todas más claras aún, en la norma lateral que marca una línea de igual inclinación, desde los incisivos á la inflexión de la curva frontal, que es muy homogénea y continuada igualmente por la región lambdoidea y occipital, tras una marcada depresión del obelio que;

unida á la línea occipital, hace aparecer muy abultada la región occipito-cerebral.

Evidentes son, por esta norma lateral, los caracteres que ha de presentar la *facial*, que es de aspecto rectangular con los maxilares altos, vueltos los pómulos y grande la fosa canina, destacándose toda ella sobre un abombamiento de los parietales y de la frente, que hace conservar á la cara el carácter globuloso de toda la calavera, y que coincide con la descripción de la cara hecha por Latcham (*).

Los *índices faciales* corresponden á una marcada cameprosopia, verdaderamente extrema en el cráneo femenino, pues los valores, según la fórmula del Congreso de Mónaco, ó sea la de Kollmann, son de 56,5 y 48,3, muy análogas á las dadas por Latcham, de modo parecido á lo que ocurre en el índice según Wirchow, que es de 86,2. Por la fórmula de Broca, sirviéndonos de la altura ofrio-alveolar, los índices son de 71,3, en el hombre, y 62,3, en la mujer. Es de notar la igualdad del diámetro bicigomático en los dos sexos, que es de 122 mm., ó sea la media asignada al cráneo femenino, según los últimos estudios de Mies y Török, y que no caracteriza ciertamente como ancha esta cara, precisamente por el escaso valor que aisladamente presentan las medidas absolutas.

Pocas deducciones podemos hacer del estudio de la *región nasal*, pues hállase muy estropeada en el cráneo masculino, y apuntaremos sólo que el índice en el femenino es de 51,1, ó sea más platirrino que los estudiados por Oddendorf, aunque persiste el carácter de su nariz estrecha y convexa, de forma acorazonada y de bordes finos y cortantes, como le presentan los antiguos peruanos, que en la serie por nosotros estudiada tienen valores de 48 y 43,6, res-

(*) Latcham. B. *Notes on the physical characteristics of the Arancos*, Journal of the Anht. Inst. of Great Britain and Ireland xxxiv, 1904, pág. 190.

pectivamente; en los procedentes de la «Expedición del Pacífico», en el Museo de Madrid y los del Museum de París.

La *órbita* es uno de los más característicos elementos faciales de esta raza, por su grandísimo tamaño, que reduce el diámetro interorbitario á 18 mm., siendo el biorbitario de 93 en ambos ejemplares, y presentando un índice de 93,2 el masculino, siendo, por tanto, hipsiconquio ó de órbita alta, y de 87 el femenino, en el que se atenúa este carácter, aunque persiste en el mismo grupo de la nomenclatura.

La región palatina (fotografía IV) tiene una marcada forma elíptica, y es profunda de alta bóveda, presentando el prognatismo ya indicado, que se acentúa en el borde alveolar, del que salen oblicuos hacia afuera unos dientes completos y sanos, usados en bisel agudo los caninos y los molares del cráneo femenino, estando aún con los tubérculos verdaderamente cuspidados los del masculino, que es indudablemente más joven, como lo prueba la falta de sinostosis en las suturas, ya osificadas en parte en la mujer. Estas suturas son bastante complicadas, pues pertenecen al núm. 4 de la escala de Broca, salvo en la región coronal media y en la sagital anterior. Debe hacerse constar la presencia de un hueso ptérico suplementario ó vormiano en el cráneo femenino.

En el grupo de los caracteres que atañen á la orientación natural del cráneo, daremos el valor del ángulo facial espinal, que llega á 71° en el hombre y á 79° en la mujer, que tiene el ángulo alveolar de 66°, cifra no muy baja, á pesar del marcado prognatismo que presenta el cráneo, lo cual se explica claramente por el abombamiento y saliente de la región frontal, que parece ganar en desarrollo anterior lo que la falta en el lateral.

Terminaremos anotando los valores relativos al análisis de los índices de curvatura ó aplastamiento que, utilizando el craneómetro del Dr. Verneau, hemos obtenido en todos los cráneos americanos en busca de los datos de las deformaciones, que tan importantes son en el estudio de la crania americana, y especialmente de la región á que éstos pertenecen. Los radios basilares tienen los valores siguientes, respectivamente, en el hombre y la mujer.

Alveolar, 87.-Ofriaco, 108.-Vertical, 135.-Lambdoideo, 112.-Iniaco, 80.
» 76.- » 97.- » 127.- » 113.- » 80.

Cifras son éstas que comprueban por este final método la tendencia dolicoide de la mujer y su menor prognatismo, que en el radio incisivo ó dentario, da 4 mm. sobre el valor alveolar en el hombre.

Los índices, deducidos por la fórmula

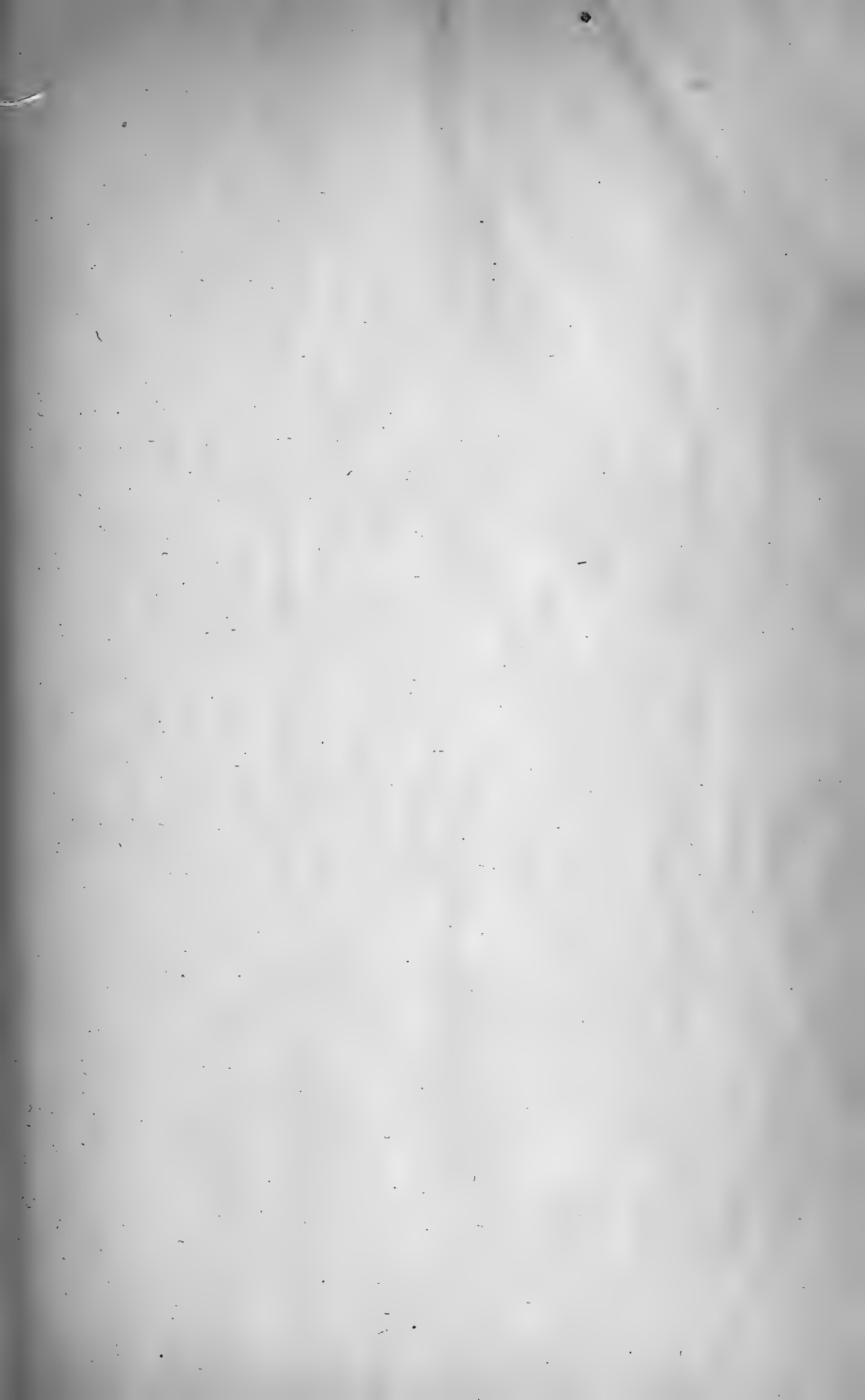
$$\frac{\text{cuerda} \times 100}{\text{curva}}$$

presentan la curiosa particularidad de ser iguales en las regiones frontal y parietal del cráneo masculino, por corresponder á valores idénticos en sus dos elementos; el valor de 71 hace notar un aplastamiento grande de los lóbulos frontales, contrastando con el de los occipitales que baja á 83, exagerando aún el desarrollo occipital, el cráneo femenino con 80,5, siendo casi igual en el parietal, y más desarrollado en el frontal, en el cual se hace notar la escasa altura del ofrio de 80 y 70 mm., respectivamente, en los dos sexos, que son los valores más bajos de todas las series americanas por nosotros estudiadas.

La falta de correlación de las cifras que damos con las de otros autores, confirman la verdadera necesidad de una revisión de la craneología araucana, cuya variabilidad afirma

Ten Kate (*), por las muchas modificaciones cefálicas que desde los Huiliches á los Manzaneros, tiene esta extensa raza, que para nosotros es verdaderamente la central de la etnogénia del O. y S. de América meridional.

(*) Ten Kate.—*Materiaux pour servir a l'Anthropologie des Indiens de la Republique Argentine*. Rev. del Museo de la Plata, tomo XII, 1904.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
XIII.— Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia primera.	283
XIV.— Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia segunda.	301
XV.— La copelación, según antiguas recetas, por <i>José Rodríguez Mourelo</i> .	323
XVI.— Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i> .	333
XVII.— Cráneos araucanos del Museo Antropológico Nacional, por <i>Luis de Hoyos Sáinz</i> .	369

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X. - NÚM. 6.

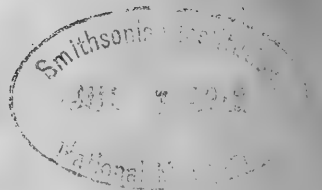
Diciembre de 1911.

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911



ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XVIII.— Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia tercera.

SEÑORES:

Esta conferencia, como la anterior, tiene por objeto:

La teoría de la atracción newtoniana y la potencial correspondiente.

Además ya saben mis alumnos que habíamos dividido en dos partes dicho estudio. Primero considerábamos el caso de varias masas $m, m_1, m_2, m_3 \dots m_n$, reconcentradas en puntos cuyas coordenadas conocíamos. Es decir, que este caso se refiere á la *distribución discontinua* de materia, y es el que por el momento nos ocupa.

El segundo caso se refiere á la *distribución continua* de materia, ponderable todavía.

Continuemos estudiando el primero de estos dos casos.

Recordarán mis alumnos, que habíamos determinado las componentes X, Y, Z , de la atracción de las masas $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ sobre la restante de ellas m , y que dichas componentes venían expresadas de este modo:

$$\begin{aligned} X &= S_1^n f m m_1 \frac{a_1 - x}{r_1^3} \\ Y &= S_1^n f m m_1 \frac{b_1 - y}{r_1^3} \\ Z &= S_1^n f m m_1 \frac{c_1 - z}{r_1^3}, \end{aligned}$$

en que había que sumar, como indica el signo S_1^n , expresiones de la misma forma que la que aparece explícitamente, y en las que el subíndice variaba de 1 á n .

También dijimos, que en este caso, de atracción de masas ponderables, para que las fórmulas tuvieran la debida generalidad y resultaran acordes los signos de los primeros y de los segundos miembros, debía cuidarse de restar de las coordenadas a, b, c , de las masas atrayentes, las coordenadas x, y, z de la masa atraída.

Por último llamábamos la atención sobre esta circunstancia: que si las masas que atraen m_1, m_2, \dots, m_n son fijas y la masa m puede variar, las tres expresiones serán tres funciones perfectamente determinadas de las variables x, y, z , coordenadas de dicha masa m .

Con esto en rigor el problema queda completamente resuelto: podemos determinar en todo sistema de masas discontinuas, reconcentradas en puntos aislados unos de otros, el valor de la atracción y de sus componentes; problema fundamental ó mejor dicho datos necesarios para todo problema de estática ó de dinámica, según explicábamos en la conferencia anterior.

Y con lo dicho hemos hecho un rápido resumen de aquella conferencia.

* * *

Las tres fórmulas que determinan las componentes X, Y, Z de la atracción sobre cualquier masa m , quedan, pues, perfectamente determinadas; mas gracias á una observación de Lagrange, la determinación de estas tres expresiones puede reducirse á la de una sola expresión analítica, y de aquí arranca el concepto de *función de fuerzas*, toda la teoría de la *potencial* y simplificaciones importantísimas para varios problemas de la Mecánica.

En rigor ya esto lo hemos explicado en otros cursos;

ahora vamos á explicarlo en forma breve, pero sistemática.

Y por lo demás, tan enlazados están los problemas de la Física Matemática, que para la claridad de nuestras explicaciones, y, por decirlo así, para refrescar las ideas del lector, en tales repeticiones hãbremos de incurrir más de una vez, y casi siempre de propósito.

Para simplificar lo que vamos á exponer, de las expresiones anteriores tomemos sólo de cada una un término, el que corresponde á la atracción y á los componentes de esta atracción para dos puntos m, m_1 , y tendremos

$$X_1 = f m m_1 \frac{a_1 - x}{r_1^3}$$

$$Y_1 = f m m_1 \frac{b_1 - y}{r_1^3}$$

$$Z_1 = f m m_1 \frac{c_1 - z}{r_1^3}.$$

Se puede observar inmediatamente que estas tres expresiones por su forma analítica, son las derivadas con relación á x la primera, con relación á y la segunda, y con relación á z la tercera, de una sola expresión. Es decir, de una sola función de x, y, z ; á saber

$$\frac{f m m_1}{r_1^3},$$

ó bien llamando U_1 á esta función

$$U_1 = \frac{f m m_1}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2}},$$

puesto que r_1 es la distancia entre los puntos (a_1, b_1, c_1) y (x, y, z) .

Ahora bien, diferenciando con relación á x el valor de U_1 , tendremos:

$$\frac{dU_1}{dx} = fmm_1 \frac{\frac{dr}{dx}}{r^2}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= \frac{d\sqrt{(a_1-x)^2 + (b_1-y)^2 + (c_1-z)^2}}{dx} = \\ &= \frac{-2(a_1-x)}{2\sqrt{(a_1-x)^2 + (b_1-y)^2 + (c_1-z)^2}} = \frac{-(a_1-x)}{r}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dU_1}{dx} = fmm_1 \frac{a_1-x}{r^3}$$

y

$$X_1 = \frac{dU_1}{dx}.$$

Del mismo modo podíamos demostrar que

$$Y_1 = \frac{dU_1}{dy}$$

$$Z_1 = \frac{dU_1}{dz}.$$

En suma, la solución del problema de la atracción newtoniana toma esta otra forma. Las tres componentes X_1 , Y_1 , Z_1 , se expresan de este modo:

$$X_1 = \frac{dU_1}{dx},$$

$$Y_1 = \frac{dU_1}{dy},$$

$$Z_1 = \frac{dU_1}{dz},$$

siendo

$$U_1 = \frac{f m m_1}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2}} = \frac{m m_1 f}{r}.$$

Así, pues, para calcular las expresadas componentes X_1 , Y_1 , Z_1 , basta conocer la función, perfectamente determinada por otra parte, U_1 , y diferenciarla con relación á x , y , z según decíamos antes.

Para atenernos á las notaciones más generalmente empleadas, separaremos la constante f y la masa m atraída, y en la función U sólo comprenderemos la masa atrayente m_1 , en cuyo caso podemos decir que la atracción de una masa m_1 sobre la masa m es tal, que sus tres componentes X_1 , Y_1 , Z_1 son las derivadas de una función U_1 , de esta forma

$$U_1 = \frac{m_1}{r_1}.$$

multiplicadas por mf . Es decir, en resumen:

$$X_1 = mf \frac{dU_1}{dx}$$

$$Y_1 = mf \frac{dU_1}{dy}$$

$$Z_1 = mf \frac{dU_1}{dz},$$

siendo

$$U_1 = \frac{m_1}{r_1}$$

Si además, como hacen otros autores, tomamos la masa m atraída por unidad, y escogemos las unidades físicas de modo que se tenga $f = 1$, aún se simplificarán más las fórmulas y el enunciado del teorema, porque tendremos:

$$U_1 = \frac{m_1}{r_1},$$
$$X_1 = \frac{dU_1}{dx}; \quad Y_1 = \frac{dU_1}{dy}; \quad Z_1 = \frac{dU_1}{dz}.$$

Es decir, que las componentes de la atracción de una masa m_1 sobre una masa igual á *la unidad*, cuando $f = 1$ son las derivadas con relación á x, y, z de una función perfectamente conocida $\frac{m_1}{r_1}$ cuyas diferenciaciones son inmediatas.

* * *

Lo que hemos dicho de la acción de m_1 sobre m , podríamos repetir para la acción de la masa m_2 del sistema, y para todas las demás hasta la última m_n .

Y sumando todas estas componentes, en la hipótesis para simplificar la escritura $m=1$ y $f=1$, resultaría

$$X = \frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_2}{dx} + \dots + \frac{dU_n}{dx} = \frac{d(U_1 + U_2 + \dots + U_n)}{dx}$$
$$Y = \frac{d(U_1 + U_2 + \dots + U_n)}{dy}$$
$$Z = \frac{d(U_1 + U_2 + \dots + U_n)}{dz},$$

y haciendo

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

que es

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n}$$

tendremos por fin

$$X = \frac{dU}{dx},$$

$$Y = \frac{dU}{dy},$$

$$Z = \frac{dU}{dz}.$$

Resulta, pues, en términos generales, que en un sistema de masas ponderables $m, m_1, m_2 \dots m_n$, las componentes de la atracción de todas las masas, menos una m , sobre ésta, son las derivadas de una función única U , con relación á x, y, z .

No hay que hallar, pues, tres sumas S , sino una sola U , que es de la forma

$$U = S \frac{m_1}{r_1},$$

y que es, evidentemente, una función de x, y, z , puesto que $r_1, r_2 \dots$ se expresan de este modo:

$$r_1 = \sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(a_2 - x)^2 + (b_2 - y)^2 + (c_2 - z)^2}.$$

.....

Determinando, según esto, dicha expresión U , y diferenciándola con relación á x, y, z , tendremos las tres componentes de la atracción newtoniana que buscábamos.

A esta función U de x, y, z , se le puede dar el nombre de *función de fuerzas*, porque es la *función única* de la cual dependen las componentes de la atracción de $m_1, m_2 \dots$ sobre una masa cualquiera m del sistema.

Hemos supuesto, para simplificar $m=1, j=1$. En cual-

quier momento podemos prescindir de estas hipótesis, restableciendo el factor mf , en cuyo caso resultaría

$$X = mf \frac{dU}{dx}, \quad Y = mf \frac{dU}{dy}, \quad Z = mf \frac{dU}{dz}$$

*
* *
*

Este resultado de que en la atracción newtoniana las tres componentes X , Y , Z , son las derivadas parciales con relación á x , y , z de una determinada función U , se obtiene en un caso mucho más general, á saber: cuando la acción (atracción ó repulsión) de dos masas materiales m y m_1 es una función de la distancia de r_1 de ambas masas, aun cuando esta función no sea precisamente la relación inversa del cuadrado de las distancias.

En este caso podremos escribir

$$F_1 = f m m_1 f' (r_1)$$

en que F_1 es la acción entre m y m_1 y $f' (r_1)$ la ponemos bajo forma de una derivada para la comodidad del cálculo, sin que esto sea restringir la generalidad del problema en la práctica, porque en general, toda función de una variable r_1 puede considerarse como la derivada de otra función de r_1 .

Más claro: si $\varphi (r_1)$ es la función de la distancia, podremos escribir

$$f(r_1) = \int \varphi (r_1) dr_1$$

y es claro que $\varphi (r_1)$ podrá representarse en este caso por $f' (r_1)$.

Ahora bien; á las acciones atractivas ó repulsivas de la forma

$$F_1 = f m m_1 f' (r_1)$$

se les puede aplicar todo lo que hemos dicho para el caso particular en que

$$f'(r_1) = \frac{l}{r_1^2}.$$

Y sin volver á repetir aquellos cálculos, y suponiendo, para simplificar, $m=1$, $f=1$, tendremos

$$X_1 = m_1 f'(r_1) \frac{a_1 - x}{r_1},$$

$$Y_1 = m_1 f'(r_1) \frac{b_1 - y}{r_1},$$

$$Z_1 = m_1 f'(r_1) \frac{c_1 - z}{r_1}.$$

Estas tres expresiones vemos que pueden obtenerse, derivando la función única:

$$U_1 = -m_1 f(r_1).$$

Comprobemos tal afirmación para X_1 , y tendremos sucesivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d U_1}{d x} &= -m_1 f'(r_1) \frac{d r_1}{d x} = \\ &= -m_1 f'(r_1) \frac{d \sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2}}{d x}; \\ \frac{d U_1}{d x} &= -m_1 f'(r_1) \frac{-2(a_1 - x)}{2 r_1} = m_1 f'(r_1) \frac{a_1 - x}{r_1} \end{aligned}$$

que es precisamente el valor de X_1 .

Demostrada esta propiedad para cada par de masas m, m_1 , la propiedad queda demostrada, en general, con sólo sumar las componentes parciales.

Es decir, que en el caso general, en que dado un sistema m, m_1, m_2, \dots , reconcentradas las masas en puntos A, A_1, A_2, \dots , la acción de cada dos masas es igual al producto de ellas y de una función de las distancias $f'(r_1)$, las componentes de las acciones de m_1, m_2, \dots, m_n sobre m , serán proporcionales á las derivadas con relación á x, y, z , de una función determinada U de estas cantidades.

En el caso general tendremos

$$X = m f \frac{dU}{dx}$$

$$Y = m f \frac{dU}{dy}$$

$$Z = m f \frac{dU}{dz}$$

siendo

$$U = - \sum_1^n m_1 f(r_1)$$

y en la hipótesis $m=1, f=1$

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.$$

*
**

Siempre que esto sucede, á saber: cuando las componentes de una fuerza son las derivadas con relación á x, y, z de una cierta función U de estas variables (ó proporcionales á ellas), se dice que dichas fuerzas dependen de una *función de fuerzas*, que es esta función U .

Detengámonos algunos momentos en esta conclusión, y séannos permitidas algunas reflexiones, casi nos atreveríamos á decir de carácter filosófico.

El que se puedan obtener las componentes de ciertas fuerzas de la Naturaleza, tomando las derivadas con relación á x , y , z , de una función determinada $U(x, y, z)$, parece á primera vista que es una propiedad puramente analítica, que se prevé que procurará facilidades en el cálculo, pero sin importancia ni transcendencia para los fenómenos de la Naturaleza.

Que una fuerza tenga por componentes ciertas derivadas, ¿en qué puede afectar al orden, á la armonía de los fenómenos naturales?

Entre esta abstracción, esta curiosidad del cálculo, pudiéramos decir, y la realidad palpitante de la Naturaleza, no ocurre, á primera vista, que existan relaciones transcendentales.

Y, sin embargo, no es así. Si no existiese esta relación analítica para ninguna fuerza de la Naturaleza; sin ir más lejos, si no existiese para las atracciones planetarias ó para la gravitación, el mundo sería para nosotros completamente *distinto* de lo que es ó de lo que nos parece.

El cosmos se nos transformaría por completo, como á la orden del maquinista se transforma una decoración del teatro.

Se transformarían las leyes más fundamentales de la Física, y para no presentar más que un ejemplo, es evidente que la multitud de mecánicos incipientes, que pretenden resolver el problema del *movimiento continuo*, se convertirían en investigadores, serios y provechosos, que ninguna persona sensata podría rechazar y que invadirían con sus invenciones, hoy condenadas al ridículo en la alta ciencia, Universidades y Academias, y en la práctica, toda la industria humana.

Más para comprender estas afirmaciones y para darse cuenta de la transcendental importancia, que en la realidad tiene esta proposición, al parecer puramente analítica, que hemos señalado, es preciso que dando de mano á conside-

raciones filosóficas que luego han de explanarse, continúen estudiando la hipótesis en cuestión.

*
* * *

Y la hipótesis es esta: Que las fuerzas atrayentes de un sistema ponderable tienen una función de fuerzas $U(x, y, z)$; ó de otro modo, que sus componentes son las derivadas de U con relación á x, y, z , suponiendo para simplificar $m=1, f=1$.

Tenemos, pues,

$$X = \frac{dU}{dx},$$

$$Y = \frac{dU}{dy},$$

$$Z = \frac{dU}{dz}.$$

Multiplicando sucesivamente por dx, dy, dz , y sumando, se obtiene

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz.$$

Pero toda vez que los tres coeficientes del segundo miembro son, por hipótesis las tres derivadas parciales de U con relación á x, y, z , es evidente que dicho segundo miembro será la diferencial total de U , de donde resulta

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU.$$

Es evidente aun, que siendo U una función de x, y, z , que además supondremos uniforme, tendrá un valor determina-

do para cada punto del espacio; es decir, para cada sistema de valores x, y, z . En la teoría de las funciones uniformes y multiformes no podemos entrar por el momento.

Sea A (fig. 4.^a) este punto en que suponemos colocada la masa $m = 1$.

Si el punto A' está infinitamente próximo al A , el valor

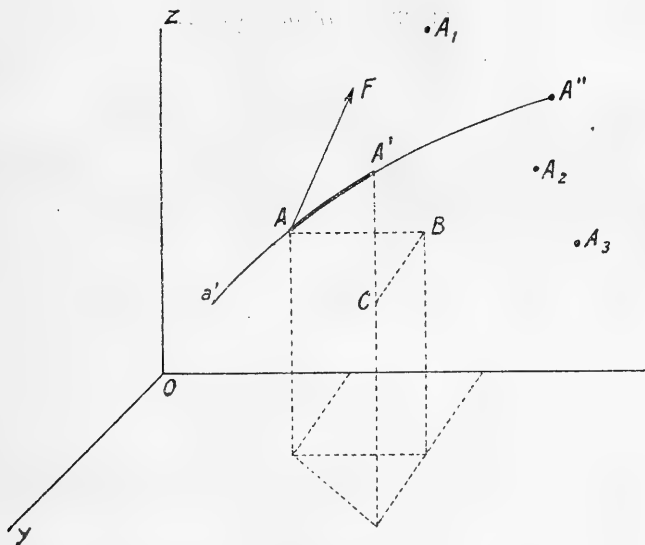


Figura 4.

de U , para este punto A' diferirá de U precisamente en el valor de la diferencial total dU , siendo,

$$AB = dx, \quad BC = dy, \quad A'C = dz.$$

Por otra parte, es evidente que el primer miembro representa la suma de los trabajos de las tres componentes X, Y, Z de la fuerza F , ó sea de la acción sobre la masa m situada en A por las masas m_1, m_2, m_3, \dots del resto del sistema, situadas en A_1, A_2, A_3, \dots .

Y tenemos esta consecuencia importante:

Si la masa m situada en A recorre el camino infinitamente pequeño AA' , el trabajo que las demás masas del sistema ejercen sobre m estará representado por dU .

Esta función de fuerzas U que hasta ahora no tenía más que una *significación puramente analítica*, tiene ya una *significación mecánica* de suma importancia. Mide por sus incrementos, y por lo tanto, por sus diferencias, por sus variaciones totales mejor dicho, *el trabajo* que las masas m_1, m_2, \dots que suponemos, fijas ejercerían sobre la masa m móvil, ya sea este movimiento *expontáneo*, ya sea *obligado*, y en breve explicaremos el sentido de estas dos palabras.

Por ahora tenemos las dos consecuencias siguientes: una que se refiere á un camino infinitamente pequeño AA' ; otra que se refiere á un camino finito de la masa m , camino que representaremos por AA'' .

Trabajo que el sistema m_1, m_2, \dots ejerce sobre m al pasar de A á $A' = dU$.

Trabajo que ejerce al pasar de A á $A'' = U_1 - U_0$.

Siendo U_0 el valor de U en A y U_1 el valor de U en A'' .

Y notemos, antes de pasar adelante, que para estas afirmaciones no tenemos en cuenta más que diferencias de U , no el valor absoluto de esta función.

De modo, que lo mismo se aplican dichas consecuencias á U que á $U + C$, siendo C una constante arbitraria.

Sobre esto volveremos á insistir más adelante.

Para abreviar, representemos el trabajo que ejerce el sistema m_1, m_2, \dots sobre m al pasar esta masa de A á A' por la notación $T_{AA'}$, con lo cual la primera de las dos ecuaciones anteriores puede escribirse de este modo:

$$T_{AA'} = dU,$$

en que ya hemos dicho que dU representa lo que varía la función de fuerzas U al pasar del punto A al punto A' .

Pero aquí pueden ocurrir dos casos:

1.º Que el trabajo T , y por lo tanto, dU , sean positivos.

Si por ejemplo el punto m cede á la acción de los puntos m_1, m_2, m_3, \dots espontáneamente y describe AA' , ó aunque sea *guiado* al describir este camino, si el vector F forma un ángulo agudo con la recta AA' , es evidente que el trabajo T será positivo.

El sistema, al haber actuado sobre sí mismo, mejor dicho, sobre el punto móvil m , que se hallaba en A , mientras los demás puntos los suponemos fijos; el sistema, repetimos, ha desarrollado trabajo, ha creado un trabajo positivo T . Y otro tanto podemos decir de todos los elementos de la curva AA'' si la hipótesis subsiste.

2.º Pero puede presentarse otro segundo caso, y es que T sea negativa, es decir, siendo Aa' el camino recorrido, que tengamos

$$T_{Aa'} < 0,$$

en cuyo caso

$$dU < 0.$$

Esto sucederá si el ángulo del vector F con Aa' , es obtuso.

En este caso el trabajo será negativo.

Claro es que este caso no se presentará obedeciendo m á la acción de F ; será necesario que artificialmente, es decir, empleando una fuerza exterior, hayamos obligado al punto m á pasar de A á a' .

Si esta fuerza exterior cesase y dejáramos á la fuerza-vector ejercer su acción, el punto m volvería de a' á A , y se desarrollaría un trabajo positivo, debido á las acciones de las masas m_1, m_2, \dots sobre m .

Sucede aquí lo mismo que cuando se estira un resorte. Al cesar la acción del estiramiento el resorte se contrae, desarrollando un trabajo igual al trabajo exterior, que fué necesario emplear para estirarlo.

Y aquí prescindimos de las velocidades que adquiriera la masa m . Suponemos que estos movimientos se efectúan con

tal lentitud, que las fuerzas vivas son despreciables, como explicábamos ya en conferencias de años anteriores. Claro es que si *guiamos* á *m* en su marcha, la resistencia ó *fuerza normal* de la *guía* desarrolla un *trabajo nulo*, porque el camino y la fuerza son normales, con lo cual subsisten las consecuencias anteriores.

*
* *

En resumen: en estos movimientos, infinitamente pequeños del punto *m* pueden, como hemos dicho, ocurrir dos casos:

- 1.º Que el trabajo desarrollado sobre *m* sea positivo.
- 2.º Que sea negativo, en cuyo caso habremos tenido que aplicar un trabajo exterior.

Y aquí ocurre que podría emplearse un cambio de notaciones, que parece insignificante, que sin embargo sería muy cómodo para el enunciado de los teoremas, y que, por decirlo así, da nombre á la teoría que vamos á explicar.

En vez de la función de fuerzas *U* supongamos que se emplea una función de *x*, *y*, *z*, que llamaremos *V* igual en valor numérico pero de signo contrario; es decir

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

ó abreviadamente

$$V = -U.$$

A esta función *V* es á la que podríamos dar propiamente el nombre de función potencial, por la razón que explicaremos en breve.

Autores hay también, muchos, la generalidad, que dan este nombre á la función *U*; y esto importa poco sabiendo lo que una y otra función significan, y que además para cada valor de *x*, *y*, *z*, ó sea para cada posición de *m* el va-

lor numérico de ambas es el mismo y sólo difieren en el signo.

Por lo que hemos explicado antes, se ve que cuando U crece, esto significa que las fuerzas del sistema ejercen sobre m en movimiento un *trabajo positivo*.

Por el contrario, cuando U decrece y es negativa, el trabajo ejercido sobre m es negativo y podrá emplearse en forma de trabajo positivo, al permitir que m vuelva á su primera posición, de modo que es aumentar la energía en potencia del sistema.

En rigor es un recuerdo de la clasificación aristotélica, que dividía la fuerza en potencia y en acto.

Es lo mismo que cuando se separa una masa del suelo elevándola á cierta altura: la gravedad desarrolla un trabajo negativo, y el hecho de colocar la masa á mayor altura es crear una energía potencial que se desasrollará al dejar caer la masa elevada.

En este caso, al subir, la variación de U es negativa; pero si representamos por V la potencia de que es capaz dicha masa, la variación de esta función V será positiva.

*
* *

Si alejamos hacia el infinito la masa m , la función *potencial* (aceptamos el nombre)

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n},$$

tenderá hacia 0, porque todas las distancias r_1, r_2, \dots de m á los puntos fijos, tenderán hacia infinito y podremos decir que la función U significa el trabajo que habría que emplear para alejar la masa m desde su posición inicial en el sistema hasta el infinito: Esto en valor numérico.

En cuanto al signo claro es que sería negativo.

Pero si abandonásemos el punto m en lo infinito y le dejáramos volver *lentamente* á la posición inicial, el trabajo desarrollado sería igual á U y sería positivo. Y podríamos decir que era la potencial correspondiente á la posición de que se trata.

Pero en rigor ésta no sería una potencia disponible, sino una potencia empleada ó gastada, si vale la palabra.

Todo esto ya lo explicamos minuciosamente en las conferencias de uno de los cursos precedentes, y sólo recordaremos que en estos movimientos del punto m hay que tener en cuenta dos circunstancias.

Primero: que los movimientos son muy lentos para no tener en cuenta la fuerza viva.

Segundo: que el punto m puede moverse apoyando sobre una guía ideal en la que no exista rozamiento y en la que *la presión* necesaria, para mantener al punto m sobre dicha guía, no ejercerá trabajo ninguno, puesto que siendo dicha presión perpendicular al camino recorrido, por ser la normal á la curva, el trabajo será nulo, toda vez que es nulo el coseno del ángulo que forman ambas líneas.

Y antes de terminar esta conferencia justifiquemos ciertas apreciaciones filosóficas que hicimos al principio.

Decíamos, que siendo X, Y, Z las derivadas de una función U de x, y, z el trabajo

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

que sobre m desarrollan las fuerzas atractivas, que ejercen m_1, m_2, \dots , es precisamente igual á dU , es decir

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU.$$

Sean ahora (fig. 5) P_0 y P_1 dos posiciones de la masa m . Llamemos U_0 el valor de U para la posición P_0 y U_1 el

valor de la misma función U correspondiente á la posición P_1 .

Claro es que para obtener estos dos valores de U basta sustituir en

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n}$$

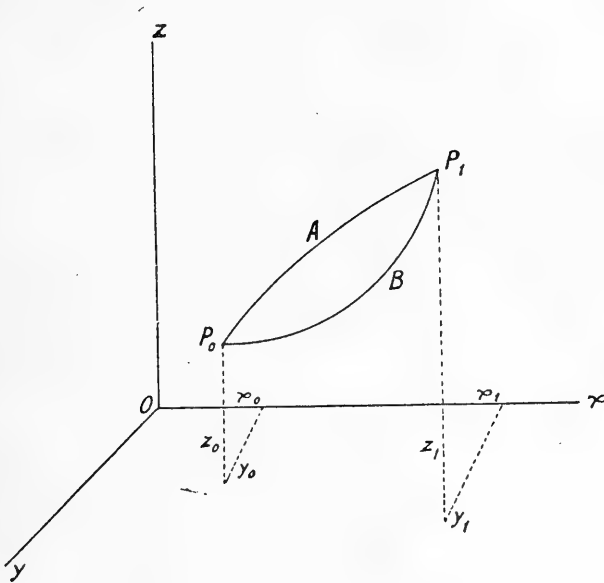


Figura 5.

en vez de r_1, r_2, \dots las distancias de P_0 á m_1, m_2, \dots con lo cual tendremos el valor U_0 . Y después en la misma función U en vez de dichas distancias r_1, r_2, \dots las del punto P_1 á las mismas masas m_1, m_2, \dots con lo cual obtendremos el valor U_1 .

Además, para fijar las ideas, supongamos que U_1 es mayor en valor numérico que U_0 , lo cual es natural en la figura porque las distancias á las masas atrayentes desde P_1 suponemos que son menores que desde P_0 : admitimos que m_1, m_2, \dots estén á la derecha.

Supongamos ahora que entre P_0 y P_1 se traza una curva $P_0 A P_1$, que es la que va á recorrer el punto m en las condiciones que antes indicábamos. A saber, que esta curva es como una *guía ideal* sin rozamiento, de suerte que su acción sobre el punto m será siempre normal y su trabajo nulo, y que la velocidad puede suponerse infinitamente pequeña y la fuerza viva despreciable, para lo cual basta introducir una fuerza resistente que vaya conteniendo á la masa m sin otro efecto que destruir su velocidad.

Al pasar m de P_0 á P_1 , por la curva $P_0 A P_1$, las masas m_1, m_2, \dots desarrollarán un trabajo, como antes indicábamos, representado por

$$\int_{P_0}^{P_1} (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{U_0}^{U_1} dU = U_1 - U_0,$$

en que U_0 sólo dependerá de las coordenadas x_0, y_0, z_0 del punto P_0 ; y asimismo U_1 sólo dependerá de las coordenadas x_1, y_1, z_1 del punto P_1 . Expresándolo así tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo sobre } P_0 A P_1 &= \int_{P_0}^{P_1} (Xdx + Ydy + Zdz) = \\ &= U_1 - U_0 = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que se traza otra curva $P_0 B P_1$, y que se hace pasar al punto m de P_0 á P_1 por esta última curva.

Repitiendo lo dicho anteriormente tendremos

$$\text{Trabajo sobre } P_0 B P_1 = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Y como el segundo miembro es igual al de la fórmula anterior; porque se trata de la misma función uniforme U , tomando los mismos valores para las mismas coordenadas de los puntos extremos, resulta que los primeros miembros también serán iguales, es decir

Trabajo sobre $P_0 A P_1 =$ trabajo sobre $P_0 B P_1$.

De modo que cuando pasa la masa m bajo la acción de las demás masas m_1, m_2, \dots del sistema, de una posición P_0 á una posición P_1 , el trabajo desarrollado sobre m es independiente del camino que siga, y sólo depende de la posición de los puntos extremos.

El mismo trabajo desarrollan entre P_0 y P_1 las masas del sistema m_1, m_2, \dots á lo largo de la curva A , que á lo largo de la curva B , que á lo largo de otra curva cualquiera por caprichosa que pueda ser en su curso; con tal que una los mismos dos puntos P_0 y P_1 ; y esta propiedad es importantísima y caracteriza en cierto modo la naturaleza mecánica del sistema formado por las masas m, m_1, m_2, \dots

Porque en efecto; supongamos que la masa m bajo la acción de las atracciones m_1, m_2, \dots ; y guiada sin rozamiento ni velocidad por la curva $P_0 A P_1$, pasa de P_0 á P_1 ; se desarrollará un trabajo representado por las fórmulas anteriores y que para abreviar designaremos por T .

Supongamos ahora que se obliga á la masa m á volver desde P_1 al punto de partida P_0 aplicando un trabajo exterior T' ; que compense y venza en cada momento el trabajo de las fuerzas atractivas desarrollado por m_1, m_2, \dots á lo largo de dicha curva $P_1 B P_0$, siempre en las dos condiciones indicadas: ni rozamiento ni creación de fuerza viva.

El sistema volverá á su posición primitiva puesto que m_1, m_2, \dots están fijos y m ha vuelto á P_0 .

Si hacemos ahora el balance del trabajo desarrollado T , en la curva A , y del que hemos tenido que emplear en la curva B , veremos que la diferencia es nula, es decir, $T = T'$; puesto que en la hipótesis que consideramos el trabajo de las masas m_1, m_2, \dots es el mismo para todas las curvas que van de P_1 á P_0 , y, por lo tanto, para las dos curvas A, B .

De otro modo: el trabajo creado en A es igual al consumido en B .

Trabajo que es preciso consumir por compensar la resistencia que las atracciones de m_1, m_2, \dots oponen en la curva B á que la masa m vuelva al punto de partida.

De donde resulta esta consecuencia práctica é importantísima: Que al describir la masa m cualquier contorno cerrado $P_0 A_1 P_1 B P_0$, ni se crea trabajo ni se pierde, la suma de los trabajos positivos y negativos es igual á cero.

El sistema (m, m_1, m_2, \dots, m_n) ni es creador de trabajo ni es destructor de trabajo tampoco. Es *conservador de trabajo*; como vulgarmente se dice, de fuerza.

No sería lo mismo si al pasar m de P_0 á P_1 en unos caminos desarrollasen las atracciones de m_1, m_2, \dots un trabajo superior ó inferior al que en otros caminos desarrollaran; por ejemplo, si T fuese mayor que T' , porque entonces recorriendo m la curva A se habría creado el trabajo T y haciéndola volver nosotros, consumiendo un trabajo T' por la curva B , habíamos *consumido en B menos trabajo que el que se había creado en A* . El sistema es, pues, *creador de trabajo*, escogiendo determinado camino para su ciclo, puesto que $T - T'$ es una cantidad positiva.

Por el contrario, si el punto m recorre primero espontáneamente, por la acción de las atracciones de m_1, m_2, \dots la curva B se habrá creado un trabajo T' y si la hacemos volver por el camino A tendremos que consumir un trabajo T , y, por lo tanto, al volver el sistema á su posición se habrá destruído cierta cantidad de trabajo, $T - T'$.

Este sistema sería creador ó destructor de trabajo, según los caminos recorridos.

¿Los sistemas de la Naturaleza ó los que imitando á la Naturaleza pueda crear el hombre, á cuál de estos dos tipos pertenecen?

Si por ahora prescindimos del problema de las resistencias pasivas y del problema de la *degradación de la energía*; si consideramos una mecánica ideal que se ajuste, sin embargo, todo lo posible á los grandes fenómenos astronómi-

cos ó á las grandes leyes de las atracciones y las repulsiones; si suponemos, en suma, que es ley fundamental de la Naturaleza en sistemas cerrados en que pueden despreciarse influencias exteriores, la ley de la conservación de la energía, claro es que *los fenómenos naturales obedecen al primer tipo: al de la conservación de la energía.*

Y vemos, lo anunciamos antes, que en una ó en otra hipótesis las consecuencias son radicalmente distintas. Al pasar de una hipótesis á otra el mundo se transforma.

O conserva invariable su energía, ó la ve aumentar ó disminuir en cada momento, según la curva que describa cada uno de los puntos de un sistema material.

Así, en la segunda hipótesis, el ser humano puede aumentar la energía de la Naturaleza, escogiendo con inteligencia las curvas *A, B*, de nuestra figura.

O puede anular para siempre ciertas cantidades de energía, si escoge el contorno *A, B*, torpemente, ó con intención torcida.

En la primera hipótesis la Naturaleza ha puesto á salvo las energías que contiene de la torpeza ó de la mala intención de los seres libres, ó más ó menos libres.

En el segundo caso y entre ciertos límites, el Universo está en manos de una raza de nihilistas cada vez más inteligente y poderosa.

Y aun cabe otra hipótesis que hoy aceptan muchos, y es que estas leyes de la Naturaleza, que nosotros creemos eternas, son *próximamente constantes en grandes periodos cósmicos*, pero que de unos á otros pueden variar, sin que la raza humana sospeche nunca, ni la forma, ni el sentido de estas variaciones.

La ley hoy conocida, si se nos permite la imagen, es el círculo osculador de una curva eterna; acaso calculan los sabios el radio, pero ignoran el resto infinito de la curva.

De todas maneras se ve desde luego, que si el sistema es conservador de energía, á este gran resultado cósmico, aproximado, ó exacto, ó lo que fuere, se llega por aquella hipótesis modesta y al parecer sólo de carácter analítico que formulábamos al principio: la hipótesis de la función de fuerzas.

Y podemos convencernos de ello, retrocediendo paso á paso en la serie lógica de las consecuencias que hemos venido deduciendo.

El sistema es conservador, si el trabajo que corresponde á la línea *A* es igual al que corresponde á la línea *B*.

Pero estos dos trabajos han resultado iguales, porque dU era una diferencial exacta y la integral no dependía más que de las coordenadas de los puntos extremos.

Y á su vez dU era una diferencial exacta, porque X, Y, Z , eran las derivadas con relación á x, y, z , de una función de fuerzas ó de una función potencial.

Y aquí vemos cómo la inteligencia humana enlaza por manera verdaderamente admirable la realidad del cosmos y de sus fenómenos con las creaciones más abstractas y al parecer menos reales del espíritu creador del matemático.

No será esta la última vez que insistamos en estos problemas en parte físicos, pero en gran parte filosóficos, dicho sea con licencia de la ciencia positiva.

XIX.— Conferencias sobre Física matemática.

Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia cuarta.

SEÑORES:

En el estudio que hemos comenzado de las atracciones newtonianas, y para masas distintas m_1, m_2, \dots , constituyendo un sistema discontinuo, demostramos, que si las atracciones eran funciones de las distancias, y, por lo tanto, como caso particular en la hipótesis de Newton, las tres componentes de las atracciones de todas las masas menos una sobre ésta, eran las derivadas de una función fU de x, y, z , con relación á estas variables.

Y vimos, que las consecuencias de esta hipótesis, puramente analítica, eran verdaderamente transcendentales y que definían, por decirlo de este modo, un *Universo conservador de la energía*, entre otros infinitos universos que la imaginación concibe ó cree concebir.

Mas para llegar á estas conclusiones, prescindíamos de las resistencias pasivas, del problema de la dispersión ó degradación de la energía y de otra porción de problemas, ya de Filosofía, ya de Crítica científica, que nos irán saliendo al encuentro en la serie de nuestros trabajos.

Por lo pronto, limitémonos á las hipótesis más sencillas en el estudio de este problema de Mecánica ideal, que es en rigor la Mecánica clásica del pasado siglo.

La función U , cuyas derivadas, multiplicadas por la constante mf eran iguales á las tres componentes X, Y, Z , de la atracción sobre la masa m , es la que se designaba con el nombre de *potencial*, y el producto fU con el de *función de fuerzas*, de modo que

$$X = mf \frac{dU}{dx}, \quad Y = mf \frac{dU}{dy}, \quad Z = mf \frac{dU}{dz}.$$

Generalmente, para el caso de masas ponderables, que es el que estamos tratando, casi todos los autores dan á esta función U , como hemos dicho, el nombre de *potencial*.

Por razones que en parte hemos desarrollado, y que completaremos al aplicar esta teoría á las acciones eléctricas, creemos que el nombre sería más propio para la función $—U$, ó, mejor dicho, para $C—U$, siendo C una constante que definiremos en otra ocasión.

Mas por ahora, estas observaciones tienen poca importancia, y nos limitaremos á la definición que ya dimos en la conferencia precedente.

En resumen, y para fijar las ideas:

$U(x, y, z)$ es la *potencial* del sistema (m_1, m_2, \dots)

También puede decirse que es el trabajo que desarrollan (m_1, m_2, \dots) sobre la masa $m=1$, cuando $f=1$, para traer $m=1$ del ∞ al punto x, y, z .

$fU(x, y, z)$ es este trabajo, cuando f tiene un valor, según las unidades elegidas, distinto de 1.

$fmU(x, y, z)$ es la *función de fuerzas* que da X, Y, Z , para m .

Algunos autores distinguen $V=—U$ como la verdadera potencial.

Adoptando la denominación más usual.

$$U = \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right)$$

será la potencial del sistema con relación al punto m ; es decir, la potencial de $m_1, m_2 \dots$ respecto á m , ó, si se quiere, al punto que m ocupa y cuyas coordenadas son x, y, z .

Claro es que U es una función de x, y, z , y que las coordenadas de los demás puntos $a, b, c \dots$, son cantidades fijas y determinadas.

Esto se ve desde luego, con sólo poner, en vez de $r_1, r_2 \dots$ sus valores, dando siempre al radical el signo positivo.

En efecto; resulta

$$U = \left(\frac{m_1}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(a_2 - x)^2 + (b_2 - y)^2 + (c_2 - z)^2}} + \dots + \frac{m_n}{\sqrt{(a_n - x)^2 + (b_n - y)^2 + (c_n - z)^2}} \right)$$

donde vemos que

$$U = U(x, y, z, a_1, b_1, c_1 \dots a_n, b_n, c_n),$$

ó abreviadamente

$$U = U(x, y, z).$$

Con tal que se recuerde la significación de $r_1, r_2 \dots$, la primera expresión de todas éstas es *la más cómoda*, y aun se puede expresar en forma más breve, empleando el signo S :

$$U = S_1^n \frac{m_1}{r_1},$$

variando dentro de S los subíndices de 1 á n .

Dijimos que esta expresión representa la suma de los trabajos de todas las fuerzas atractivas que ejercen $m_1, m_2 \dots m_n$ sobre la masa $m=1$, siendo $f=1$ para traerla desde el infinito hasta la posición que ocupa definida por las coordenadas x, y, z .

Este trabajo total es el que llamamos *potencial*, y, dicho sea de paso, volvemos á repetir que no nos parece correcto el nombre. Porque lo natural es que se dé la denominación de *potencial de un sistema* al trabajo ó energía que *puede todavía desarrollar*, no al que ha desarrollado y *consumido*, por decirlo de este modo.

De todas maneras, si U_0 representa el trabajo hasta la posición P_0 y U_1 el trabajo que ha desarrollado el sistema hasta la posición P_1 , es claro que cuando el sistema se encuentre en P_0 hasta llegar á la posición P_1 podrá desarrollar un trabajo ó energía $U_1 - U_0$, esencialmente positivo. Y este sí que es un trabajo verdaderamente potencial, porque en el P_0 está *en potencia*, no *en acto*, como decían los aristotélicos.

De suerte que si tomamos la posición P_1 como una posición fija de referencia, por ejemplo, el suelo, para los objetos superiores; si representamos U_1 por una constante C , y á P_0 le damos su valor general en función de x , y , z , la expresión anterior será idéntica á la que antes indicábamos $C - V$, ó si se quiere $V = C - U$.

*
*

Por ahora sigamos llamando potencial á la función U .

Venimos estudiando la atracción de todas las masas del sistema sobre una de ellas m .

Suponemos que ésta puede variar de posición, y por eso designamos sus coordenadas por x , y , z .

En la Mecánica clásica ni las masas ponderables ni las masas eléctricas ó magnéticas ejercían acción sobre el espacio como tal espacio.

Sobre el espacio geométrico ni la materia ni ninguna substancia material puede ejercer acción, porque sería ejercer acción sobre la Nada, privilegio reservado al misterio de las religiones.

Pero ya hemos dicho en otras conferencias de años precedentes, que este modo de ver ha cambiado por completo, que al espacio abstracto se han substituído *campos* llenos de éter ó formados por dieléctricos. En suma, la materia lo llena todo bajo diversas formas, sea materia ponderable, sea éter continuo, sean sistemas de electrones, sea lo que fuere, que todo esto ya lo discutiremos más adelante, si llegamos á tiempo.

Pero en este problema de las atracciones newtonianas, que va siendo problema histórico, aunque con estos problemas históricos á cada paso se encuentran las teorías modernas, y por eso hay que conocerlos y hay que estudiarlos. y por eso, para estudiarlos, estamos abriendo á cada instante estos enormes paréntesis; en este problema de las atracciones newtonianas, repetimos, donde no hay materia no hay atracción, y las masas m_1, m_2, \dots sólo ejercen sus acciones, entre sí, desde luego, y además sobre la masa m , que hemos elegido como término de comparación.

Y por eso todavía hacemos variar la masa m , colocándola en distintas posiciones, para ver cómo varían las acciones que las demás masas ejercen sobre ella.

Así pues si tomamos en el espacio un punto A , en que no esté colocada ninguna de las masas, no decimos: ¿cuál será la acción de las masas m_1, m_2 sobre el punto A ? sino que diremos: Si el punto m viniera á colocarse en A , ¿cuál sería la acción sobre él de las demás masas del sistema?

A esta misma idea se le puede dar otra forma.

Se pueden estudiar las propiedades mecánicas del sistema paseando, por decirlo de este modo, una masa de prueba $m = 1$, por todo el espacio en que el sistema m_1, m_2, \dots se encuentra.

En estas lucubraciones se ve en cierto modo la tendencia á pasar del espacio vacío de la vieja mecánica á los campos materiales de la ciencia moderna.

Para cada posición de m , es decir, para cada sistema de valores de x, y, z corresponde un valor U de la potencial, lo cual da, en cierto modo, un sentido mecánico á los puntos del espacio geométrico.

Se puede preguntar: Si en el punto x, y, z se colocase una masa m , ó si se quiere una masa 1, ¿cuál sería la potencial de esta masa para el sistema que se considera?

Y la potencial claro es que sería $U(x, y, z)$.

Pero economizando palabras, sobreentendiendo que hay que colocar sobre el punto x, y, z una masa para que la pregunta tenga sentido, bien se puede preguntar en forma elíptica: ¿cuál es la potencial para el punto x, y, z ?

Y la contestación es la misma: $U(x, y, z)$ si la masa es 1. Igualemos la función U á una constante cualquiera C .

La ecuación

$$U(x, y, z) = C,$$

considerando á x, y, z como variables, representará respecto á los tres ejes coordenados trirrectangulares x, y, z , una superficie que gozará de esta propiedad fundamental: Que si en cualquier punto de esta superficie colocásemos una masa igual á 1, la potencial debida al sistema m_1, m_2, \dots sería constante é igual á C .

Esta superficie se llama por esta razón superficie *equipotencial*, que es decir abreviadamente, que todos sus puntos tienen la misma potencial C .

O de otro modo: para traer desde el infinito una masa 1 á cualquier punto de la superficie, el sistema de masas m_1, m_2, \dots desarrolla exactamente el mismo trabajo.

Esto hemos representado en la figura 6.

m_1, m_2, m_3, \dots constituyen un sistema de masas ponderables fijas.

m , la masa restante del sistema, que la estamos haciendo recorrer el espacio para estudiar las acciones que sobre ella ejercen las expresadas masas m_1, m_2, \dots . Y aquí se pueden

tomar dos puntos de vista que en el fondo son idénticos.

O m, m_1, m_2, \dots forman el sistema, y estudiamos las acciones de todas las masas m_1, m_2, \dots menos una sobre la restante m , que ocupa diversas posiciones;

O solamente m_1, m_2, \dots forman el sistema y la masa m es, por decirlo así, una *masa de prueba*, como los planos de prueba de la electricidad.

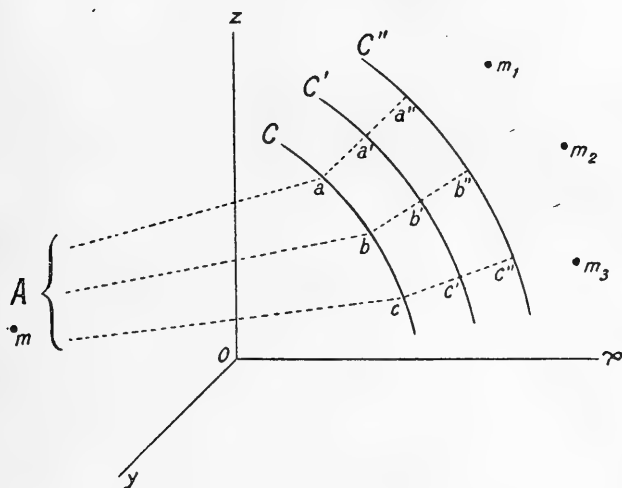


Figura 6.

Y decíamos antes: Si C (fig. 6) es una superficie definida por la ecuación

$$U(x, y, z) = C$$

y suponemos que A es un punto cualquiera del infinito, en que esta m , el mismo trabajo tendrán que desarrollar, ó mejor dicho, desarrollarán las masas m_1, m_2, \dots , al venir m desde el infinito A á cualquier punto a, b, c, \dots de la superficie S , sea cual fuere el camino que recorra. C (siendo $m = 1, f = 1$) será el trabajo desarrollado al venir de A á a ; y C al venir de A á b ; ó de A á c y así sucesivamente.

Todos los puntos $a, b, c \dots$ de la superficie C , corresponden al mismo trabajo ó á la misma potencial C .

Pero C , en la ecuación anterior, es completamente arbitraria, y si le damos una serie de valores $C, C', C'' \dots$ tendremos una serie de *superficies equipotenciales*, cuyas ecuaciones serán

$$U(x, y, z) = C,$$

$$U(x, y, z) = C',$$

$$U(x, y, z) = C''.$$

.....

Serie de superficies continua ó discontinua, y que si es continua porque C varía por la ley de continuidad, dividirán al espacio en zonas ó capas comprendida cada una entre dos *superficies equipotenciales* infinitamente próximas.

Claro es que hasta aquí, en la vieja Mecánica, estas *superficies equipotenciales* sólo tenían una significación geométrica ó analítica; en rigor, no tenían existencia: para que la propiedad mecánica, que señalamos, tuviera realidad era preciso pasear, si la palabra vale, la masa de prueba m por cada una de las superficies, y sólo en el punto y en el instante en que m estaba colocado, la potencial y las atracciones tenían realidad para dicho punto.

Para los demás puntos era todo esto una concepción abstracta.

Ya veremos como estos conceptos de la Mecánica clásica van tomando realidad física, hasta llegar á su plenitud en las teorías modernas.

Se sabe por analítica que si una superficie C (fig. 7) tiene por ecuación

$$U(x, y, z) = C,$$

los cosenos de los ángulos que forma con los tres ejes una normal á dicha superficie, en un punto cualquiera a , son proporcionales á

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz}.$$

De modo que la normal aN á la superficie C en el punto a , formará con los ejes ángulos cuyos cosenos serán proporcionales á las tres derivadas anteriores.

Pero hemos demostrado, que si C es una superficie equipotencial correspondiente al sistema $m_1, m_2 \dots$, y coloca-

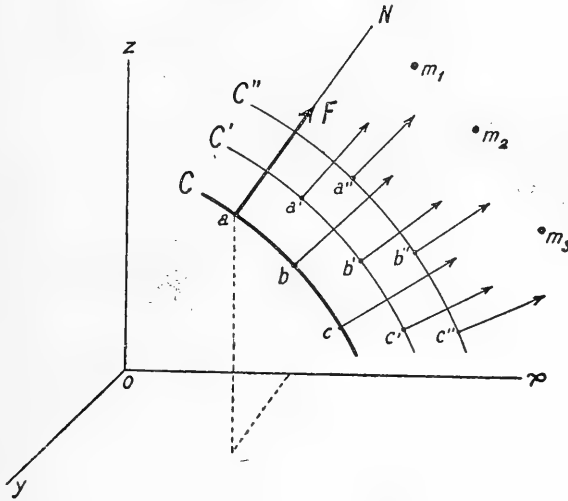


Figura 7.

mos en a una masa 1, la acción F del sistema $m_1, m_2 \dots$ sobre la masa colocada en a tiene por componentes

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz};$$

luego es evidente que F y N coinciden en dirección; y tenemos esta propiedad del sistema: Que todos los esfuerzos ó atracciones del sistema en cuestión, $m_1, m_2 \dots$, serán normales á la superficie equipotencial que pasa por el punto que se considere.

Así la fuerza, ó como se dice en términos modernos, el vector-fuerza F correspondiente al punto a , será la normal, en este punto a á la superficie C ; y esta es una propiedad de todos los puntos del espacio para un sistema determinado m_1, m_2, \dots de masas ponderables que suponemos fijas.

Así, pues, si consideramos las infinitas superficies equipotenciales $C, C', C'' \dots$, y por todos los puntos $a, b, c, \dots, a', b', c' \dots, a'', b'', c'' \dots$, trazamos normales, con la magnitud que les corresponda, este infinito número de normales representará el campo de atracciones, ó de fuerzas, ó de vectores que corresponden al sistema m_1, m_2, m_3, \dots

De aquí la idea de campo de fuerzas ó campo de vectores que hoy está tan en uso.

Lo que hay es, que en la Mecánica clásica, en los tiempos de su dominio absoluto, y aun en el período de transición, estos campos de vectores y estas superficies equipotenciales eran concepciones puramente abstractas, eran conceptos matemáticos; ni las atracciones, ni los vectores, ni las superficies equipotenciales tenían realidad física.

Donde no existe una masa sólo existía una posibilidad de acción física, para cuando existiese.

Todo lo demás era algo así como una ilusión, algo de lo que sucede en las paletas de los ventiladores. Por la rapidez del movimiento, fingen una hoja metálica circular que no existe; lo que existe es la paleta, en posición determinada, cuando por esa posición pasa.

Un punto debemos aclarar todavía.

Hemos dicho (fig. 7) que F y N coinciden en dirección, pero hay que fijar el sentido.

Admitamos que las constantes C, C', C'' , van creciendo, pues supondremos que el sentido de la normal y de la fuerza F es el de la potencial creciente; por ejemplo, en la figura 6, desde a hacia a' . En la figura 7 el que marca la flecha de F .

Hemos definido las superficies *equipotenciales*; hemos definido asimismo el *campo de fuerzas atractivas* ó vectores, y ahora vamos á definir otro concepto más: El de *líneas de fuerza*.

Sea (fig. 8) una superficie equipotencial C , y á cierta distancia otra segunda equipotencial C' .

De una á otra podemos imaginar una serie de líneas $a a'$, $b b'$, $c c'$... que sean normales á todo el sistema de superficies

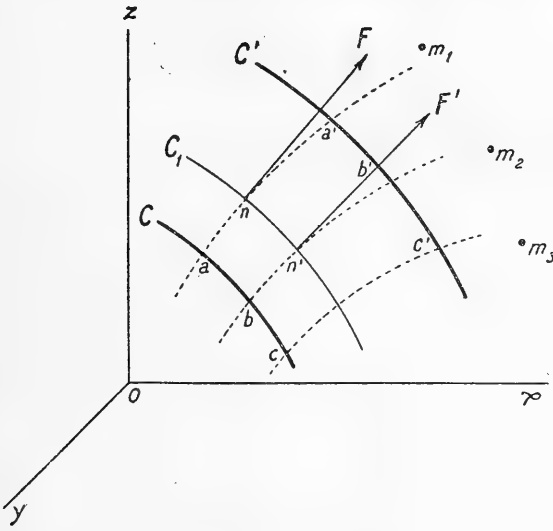


Figura 8.

equipotenciales, comprendidas entre C y C' ; por ejemplo, la C_1 , así como á las anteriores y posteriores.

Para decirlo brevemente: un sistema de líneas, que serán en número infinito, que corten normalmente á todo el sistema de superficies equipotenciales.

Así, por ejemplo, si tomamos en C_1 el punto n , la línea $a a'$ cortará en n normalmente á C_1 , asimismo la línea $b b'$ cortará normalmente en n' á C_1 , y así en general.

Pero el vector del punto n corta también normalmente á C_1 , luego este vector F , ó fuerza atractiva del sistema m_1, m_2, \dots

será evidentemente tangente á la línea aa' ; y lo mismo diremos para n' y para todos los puntos de la superficie C_1 , así como para todos los puntos de cualquier otra superficie equipotencial.

Este sistema de líneas aa' , bb' , cc' ... normales á todas las superficies equipotenciales C , C_1 , C' ..., se llama sistema de *líneas de fuerza*, y gozan dichas líneas de esta propiedad: Que la tangente en cualquier punto n de cualquier línea de fuerza marca la dirección del vector en este punto, es decir, de la fuerza atractiva que sobre ese punto ejercería el sistema m_1 , m_2 ..., si en dicho punto colocásemos una masa m igual á la unidad.

Podemos decir, según esto, que las líneas de fuerza son las envolventes de los vectores F que expresan las atracciones.

Podemos también decir, que representan los vectores del campo *ordenados* ó agrupados en formas de líneas envolventes.

Todos estos conceptos de superficies equipotenciales, campos de fuerzas ó vectores de atracción y líneas de fuerza, que hasta aquí son conceptos geométricos y abstractos, han ido tomando consistencia, por decirlo de este modo, y materializándose en la moderna física; sobre todo en las aplicaciones de la teoría de la potencial á los flúidos eléctricos y magnéticos. Citemos por anticipación las líneas de fuerza de Faraday que hasta se asemejaban á algo así como á *cordones elásticos*.

Citemos asimismo las hojas ó superficies eléctricas materializando en cierto modo las superficies potenciales.

Y en esta evolución ó desarrollo de la ciencia se pasa por tres grados, sin afirmar que el tercero sea el último y definitivo, que nada hay definitivo en la ciencia como no hay nada definitivo ni en la evolución del pensamiento, ni en la evolución del cosmos observada y estudiada por la inteligencia humana.

Y estos tres grados son los siguientes:

1.º El espacio es el vacío absoluto, es el espacio geométrico; y nada más.

Así, por ejemplo, las masas m_1, m_2, \dots actúan á distancia sobre la masa m .

2.º El espacio geométrico entra en juego y se ordena, por ejemplo, en superficies equipotenciales, en campo de vectores, en líneas de fuerza; pero todos estos son todavía conceptos abstractos, sin realidad física.

Para que adquieran realidad en un punto, por un instante al menos, ya como elemento de superficie, ya como elemento de línea, ya como punto de aplicación de un vector, es preciso que por ese punto pase la masa de prueba 1.

Las masas del sistema m_1, m_2, \dots sólo pueden hacer presa, si vale la palabra, en otra masa como ellas, es decir, en otra masa ponderable, no en el vacío.

Pero, si todavía la ciencia, en este momento de su desarrollo, no cree en la realidad de ninguno de estos conceptos, asegura que *las cosas pasan* como si todos estos conceptos fueran reales.

Es una especie de simbolismo cómodo y provisional.

3.º Mas la inteligencia humana tiende á creer que es real todo lo que le agrada, todo lo que representa, por decirlo de este modo, *comodidad y economía de esfuerzos intelectuales*.

Y así, en este tercer período del desarrollo de la ciencia, el espacio entra en juego como realidad física y cuando se pasa de las masas ponderables á los flúidos eléctricos y magnéticos, casi pudiéramos decir, que la masa de prueba m , ponderable, eléctrica, magnética, ya se descomponga en iones, ya en electrones, *tiende á estar presente* en todos los instantes y en todos los puntos del espacio.

Pero este conjunto de teorías modernísimas me propongo y deseo que sean materia de otras conferencias en otros cursos.

Por el pronto volvamos á nuestro objeto, á la Física clásica, á la teoría de la potencial newtoniana, á las masas ponderables y á las masas discontinuas.

* * *

Otros dos conceptos más hemos de agregar á los conceptos anteriores. El de *tubos de fuerza* y el de *flujo de fuerzas*.

Empecemos por el de tubos de fuerza, concepto bien sencillo, que se relaciona con algo de lo que dijimos en el curso

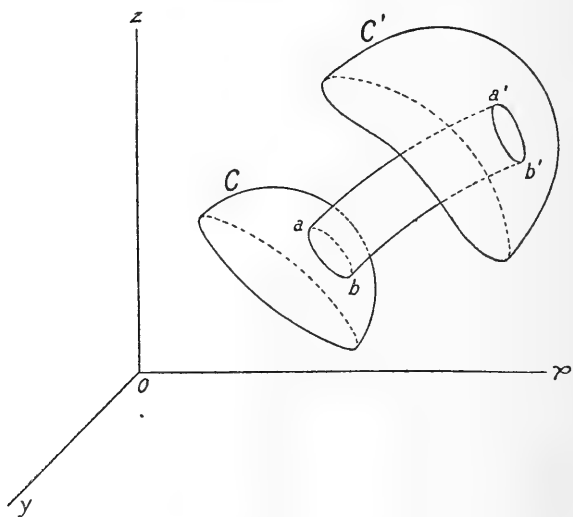


Figura 9.

anterior, y que es una consecuencia inmediata de las líneas de fuerza.

Sea C (fig. 9) una superficie equipotencial, y tracemos en ella una línea cerrada ab sumamente pequeña.

Por todos los puntos de dicho contorno ab , hagamos pasar las líneas de fuerza correspondiente aa' , bb'

Formaremos de este modo una especie de tubo, *cuyas generatrices serán todas ellas líneas de fuerza.*

A esta superficie tubular se le da el nombre de *tubo de fuerza.*

Y es evidente, ó la demostración es tan sencilla que no vale la pena de darla, que cada tubo de fuerza cortará normalmente á todas las superficies equipotenciales: sus generatrices gozan, por definición, de esta propiedad.

Así, en la figura, el tubo $ab a' b' \dots$ corta normalmente, según la curva $a' b'$, á otra superficie equipotencial cualquiera, C' .

En rigor esto es substituir la línea de fuerza sencilla, ó el cordón de fuerza de Faraday, por un tubo infinitamente estrecho.

Otro concepto más que añadir á los conceptos anteriores, á la superficie equipotencial, al campo de fuerzas ó vectores y á las líneas de fuerza.

Y el tubo de fuerza recorrerá el mismo ciclo que antes señalábamos para los demás conceptos del mismo orden: pura abstracción geométrica; hipótesis, ó mejor dicho representación cómoda para el estudio del fenómeno mecánico; y, por fin, realidad física. Hasta que nuevas evoluciones de la ciencia conviertan estas realidades en creaciones de la imaginación y pretendan substituir las por nuevas creaciones, al parecer más consistentes, ó hasta que se nieguen en absoluto, y volvamos á lo abstracto, ó hasta que se vuelva al hecho físico y á la pura fórmula matemática, que será renegar de la Física matemática.

Mas nótese que así como hay atrevimientos positivos, hay atrevimientos negativos; y quizá pertenezca á esta clase el atrevimiento que consista en negar en absoluto toda sombra de realidad á las creaciones abstractas de la inteligencia humana.

Este atrevimiento negativo se llama *excepticismo.*

Pasemos ya á calcular el *flujo de las fuerzas* á través de una superficie.

Claro es que podemos suponer una superficie infinitamente pequeña, porque si fuera finita no habría más que descomponerla en elementos, calcular el flujo correspondiente á cada elemento y sumar ó integrar todos estos flujos elementales.

Sea (fig. 10) un elemento de superficie AB infinitamente

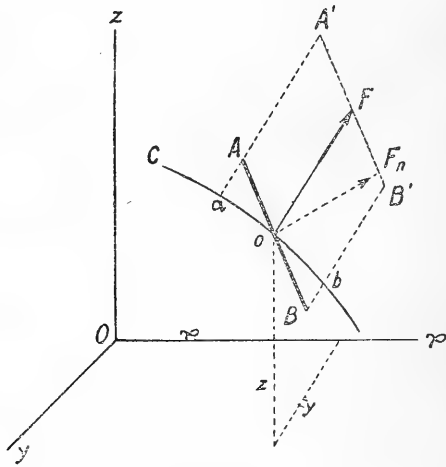


Figura 10.

pequeño, que pasa por el punto o y cuyas coordenadas sean x, y, z .

Si colocásemos en el punto o una masa ponderable igual á 1 el sistema de masas m_1, m_2, m_3, \dots que siempre consideramos, ejercerían sobre esta masa 1 una fuerza que podemos representar por el vector oF ; pero si en vez de esto sobre cada área infinitamente pequeña $d\omega$ en que podemos considerar dividida AB , colocásemos una masa igual á $1 \times d\omega$, la fuerza que pasase por este elemento, sería

$$d\omega \cdot F,$$

que es suponer que la *unidad* de masa se aplica á la unidad de área, y tendríamos un conjunto de vectores paralelos á F , que llenarían un cilindro $ABB'A'$, cuyas bases paralelas suponemos proyectadas en AB y $A'B'$ y formado por rectas paralelas é iguales á oF .

El conjunto de estas fuerzas es lo que llamamos el flujo á través de la superficie AB , y lo representaremos por el expresado volumen.

Es decir:

$$\text{flujo á través de } AB = \text{volumen } ABB'A'.$$

Claro es que este concepto, como todos los anteriores, en un principio fué puramente abstracto; pues no existiendo masas ponderables en AB , mal podían existir las fuerzas F .

Pero buscando analogías y tendiendo á materializar las fuerzas F y sus efectos, se dijo: Si por la superficie AB pasase un líquido incomprensible, formado por filetes paralelos á la dirección AA' , ó sea á oF con la velocidad $v = F$, ó sea que v tenga el mismo valor numérico que F , en la unidad de tiempo pasaría un volumen de líquido representado precisamente por el volumen $ABB'A'$, volumen que sería igual á

$$\text{área } AB \times oF_n$$

siendo oF_n la proyección de oF sobre la normal á AB .

Llamando Ω al área AB y asemejando este volumen al flujo de la fuerza F , tendremos abreviadamente

$$\text{flujo } AB = \Omega \times F_n.$$

Hagamos ahora pasar por el punto o la superficie equipotencial C , y proyectemos sobre ella el área AB en ab , representando ésta por ω .

Tenemos evidentemente

$$F_n = F \cos (FoF_n) = F \cos (Aoa)$$

por lo tanto,

$$\text{flujo } AB = \Omega \cdot F \cdot \cos (A o a);$$

pero

$$\omega = \Omega \cos (A o a),$$

luego

$$\text{flujo } AB = \omega \cdot F.$$

Es decir, que esto que hemos llamado flujo á través de una superficie, de la fuerza F que produciría sobre la *unidad de masa* el sistema $m_1 m_2 \dots$ se puede expresar de dos modos:

1.º Por el producto del área Ω por la proyección de la fuerza F , que es F_n , sobre la normal á la superficie AB .

2.º Por el producto de la fuerza F por la proyección del área sobre la superficie equipotencial que pasa por o .

Que en el fondo es reproducir un teorema elemental de geometría y expresar el volumen del mismo cilindro de dos maneras distintas: Proyectando la generatriz sobre la norma á la base, ó proyectando la base sobre el plano normal á la generatriz.

Claro es, que este concepto de flujo de fuerza, por el pronto no tiene ninguna significación física; pero es de una gran comodidad en las teorías eléctricas, y los físicos se han ido acostumbrando, sobre todo, desde las hipótesis de Faraday á ir dando sentido de realidad á todas estas abstracciones, que pudiéramos decir que corresponden á un período de transición entre la vieja Mecánica de la acción á distancia y de las fuerzas instantáneas, á las teorías modernas.

*
* *

De la aplicación de esta teoría del flujo de fuerzas en que se considera á la fuerza abstracta como algo material que pasa y circula, ó como los cordones elásticos de Faraday, ó

como los tubos de fuerza, ó como filetes de un flúido incomprensible, se deducen tres teoremas importantes, que por ahora vamos á definir en el caso de la potencial newtoniana de masas ponderables; pero que aplicaremos más adelante, al estudiar sistemáticamente la electrostática.

Y estos teoremas son los siguientes:

Primer teorema.—Supongamos una superficie cerrada S

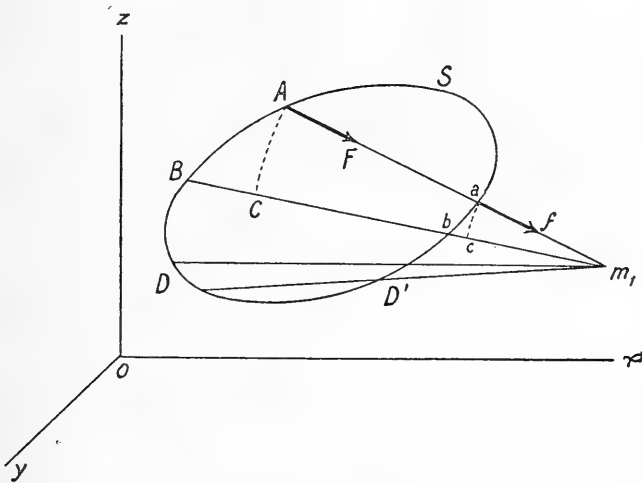


Figura 11.

(figura 11), y consideremos exteriormente á dicha superficie una masa ponderable m_1 .

Vamos á demostrar, que el flujo total de fuerzas que proceden de m_1 , sobre toda la superficie S , es igual á cero. Pero aunque sea repitiendo lo que tantas veces hemos dicho, expliquemos el sentido de este teorema.

Claro es, que sobre una superficie puramente geométrica S , una masa ponderable m_1 , no puede producir acción ninguna, ni engendrar fuerzas, ni determinar flujos de fuerzas, y en este sentido el teorema ni tendría ninguna significación física, ni tendría objeto alguno. Y, sin embargo, el

teorema es importante y tiene importantísimas aplicaciones prácticas.

Para darle sentido y realidad desde el punto de vista de la ciencia clásica, es preciso suponer que la definición encierra un concepto condicional; cuando se habla de fuerzas que proceden de la masa m_1 , es preciso entender que se habla de fuerzas que se *producirían* por la acción de dicha masa m_1 , si en la superficie se colocara una masa ponderable igual á 1 sobre cada unidad de superficie, lo mismo que hemos dicho al explicar el concepto de flujo de fuerzas.

Y aún necesitamos otra aclaración.

Es necesario especificar si el flujo es hacia el interior ó hacia el exterior de la superficie. Es decir, si aquellos filetes líquidos, á que asemejábamos la fuerza F , penetran ó salen del espacio que la superficie encierra.

Y esta imagen material del teorema abstracto da, desde luego, una demostración, ó mejor dicho, una intuición del teorema.

Porque si esta especie de emanación de fuerzas se materializa en un líquido, que va á m_1 , ó mejor dicho, que en m_1 se absorbe, puesto que hablamos de atracciones, es claro que en el espacio que S comprende, y siendo el líquido incompresible, entrará tanto líquido como salga; y si á los filetes que entran se les da el signo $+$ y á los filetes que salen el signo $-$, claro es todavía que la suma algebraica de unos y otros, ó dicho de otra manera, que el flujo del líquido á través *de todo el volumen*, tendrá que ser *igual á cero*: tanto líquido entrará como saldrá.

Pero sin acudir á esta imagen ó semejanza, la demostración es bien sencilla.

Supongamos que parten de m_1 un número infinito de conos de abertura infinitamente estrecha. Sea uno de ellos $m_1 A B$: lo que de él digamos, podríamos decir de otro cualquiera; por ejemplo, $m_1 D...$

El cono $m_1 A B$ determinará un área de entrada del flujo

AB ; y decimos que AB corresponde á un flujo de entrada, porque todas las atracciones de m_1 , en los diferentes puntos de AB son próximamente iguales y paralelas á la atracción AF .

Este mismo cono determinará un área de salida ab ; y es área de salida del flujo, porque las acciones, sobre todo los puntos de dicha área, son próximamente iguales y paralelas á af .

Y vamos á demostrar desde luego que el flujo de entrada es igual al flujo de salida, con lo cual la suma algebraica de ambos será igual á cero.

En efecto: tracemos desde m_1 , con los radios m_1A y m_1a , dos porciones de dos esferas concéntricas AC , ac .

Como el cono es de abertura infinitamente pequeña, podrán considerarse á las porciones esféricas AC y ac como áreas planas normales á m_1A ó á cualquier otra generatriz del cono.

Es decir, que podemos considerar al área AC como la proyección del área AB sobre el plano AC normal á F . Así que, según lo demostrado en esta misma conferencia, el flujo de entrada por AB será el producto de la proyección de AB sobre un plano normal á F , por la fuerza ó vector F , es decir,

$$\text{flujo } (AB) = \text{área } \overline{AC} \cdot F$$

cantidad positiva, puesto que es el flujo de entrada.

Por consideraciones análogas podemos establecer desde luego

$$\text{flujo } (ab) = \text{área } \overline{ab} \cdot f$$

cantidad negativa si la anterior es positiva, puesto que es flujo de salida.

Y el flujo correspondiente al cono será

$$\text{área } AC \cdot F - \text{área } ac \cdot f.$$

Pero llamando ω á la abertura del cono y llamando R y r á las distancias $m_1 A$ y $m_1 a$, tendremos

$$\text{área } AC = \omega R^2; \text{ área } ac = \omega r^2$$

y además las fuerzas F y f , suponiendo, igual á k el coeficiente, serán, según la ley newtoniana

$$F = k \frac{m_1}{R^2}, \quad f = k \frac{m_1}{r^2}.$$

Sustituyendo estos cuatro valores en la expresión del flujo correspondiente al cono, tendremos por fin

$$\omega R^2 \cdot \frac{k m_1}{R^2} - \omega r^2 \frac{k m_1}{r^2} = \omega k m_1 - \omega k m_1 = 0;$$

con lo cual queda demostrada la proposición; es decir, que el flujo correspondiente al cono elemental es nulo. Y como lo mismo podemos decir de otro cono cualquiera $m_1 D$ y todos ellos agotan el espacio comprendido en S , resulta que *el flúido total es igual á cero.*

Si la fuerza, en vez de ser atractiva, fuera repulsiva, las consideraciones serían idénticas.

* * *

Este primer teorema puede generalizarse para un número cualquiera de masas ponderables m_1, m_2, \dots

Es decir, que el flujo de un sistema de masas m_1, m_2, \dots exteriores todas al espacio comprendido en una superficie cerrada S , es nulo.

Esto resulta inmediatamente de la superposición de flujos que constituyen el flujo total. Si el flujo de m_1 es nulo, y el

de m_2 y el de m_3 la suma de todos ellos también será igual á cero.

Más claro todavía:

Supongamos en la superficie S un área elemental Ω y la normal N .

Supongamos que para dicha área el vector-fuerza correspondiente á m_1 , es decir, la atracción que *ejercería* si por unidad área se colocase una masa *uno*, fuese $F_1\Omega$.

Que asimismo el vector-fuerza de la masa Fm_2 fuese $F_2\Omega$.

Y basta con estas dos masas, porque lo que de su conjunto digamos, diríamos de un número cualquiera de masas.

Según lo que hemos demostrado en esta misma conferencia, puede obtenerse el flujo multiplicando el área por la proyección de la fuerza sobre la normal á dicha área; luego sobre el área Ω

$$\text{flujo de } m_1 = \Omega \cdot F_1 \cos (F_1 N)$$

$$\text{flujo de } m_2 = \Omega \cdot F_2 \cos (F_2 N)$$

y

$$\text{flujo } m_1 + \text{flujo } m_2 = \Omega [F_1 \cos (F_1 N) + F_2 \cos (F_2 N)].$$

Pero si F es la resultante de F_1 y de F_2 , como se sabe, que la proyección de la resultante es igual á la suma de las proyecciones de las componentes, se tendrá

$$F \cos (FN) = F_1 \cos (F_1 N) + F_2 \cos (F_2 N)$$

luego

$$\text{flujo } (m_1) + \text{flujo } (m_2) = \Omega F \cos (FN).$$

Mas el segundo miembro es el flujo de la acción F total de m_1 y de m_2 sobre los puntos de la superficie Ω , luego

$$\text{flujo } (m_1) + \text{flujo } (m_2) = \text{flujo } (m_1 + m_2).$$

Es decir, que el flujo del sistema es igual á la suma de los flujos de cada masa aislada, y como estos son todos nulos, nulo será el segundo miembro.

Así, pues, el teorema primero queda generalizado para un número cualquiera de masas exteriores al espacio que comprende una superficie cerrada S .

Y se prevee desde luego, que podrá generalizarse para las masas eléctricas positivas ó negativas dando á cada masa el signo que le corresponda.

Aun podemos establecer otra generalización.

En la figura 11 hemos supuesto, que una recta que par-

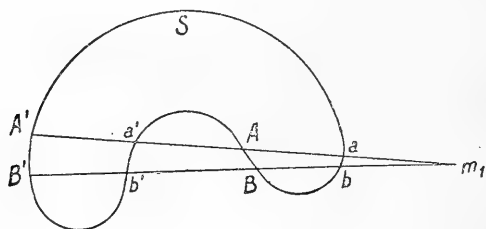


Figura 1.

tiese de m_1 sólo encontraba á la superficie en dos puntos a, A .

Y ahora agregamos: importa poco que la corte en un número cualquiera de puntos, con tal que éste sea *par*, á fin de que puedan distribirse en grupos de á dos, y que pueda aplicarse el teorema del cono elemental á cada dos pares de superficies infinitamente pequeñas de entrada y de salida.

Esto sucede, por ejemplo, en la figura 12.

Una recta que parta de m_1 puede cortar á la superficie S , por ejemplo, en cuatro puntos A, a, A', a' , porque el teorema se aplica sin dificultad á las superficies AB, ab y $A'B', a'b'$.

Obsérvese que en la parte superior de la figura los puntos de intersección no son más que dos.

Los casos particulares que pueden presentarse son tan sencillos que no insistiremos más sobre este punto.

Pasemos al segundo de los teoremas que anunciamos y que viene á ser un complemento del primero.

*
**

Segundo teorema ó teorema de Gauss.— También en éste se considera una superficie cerrada, figura 13, y una masa m_1 que en cierto modo irradia todo alrededor fuerzas atrac-

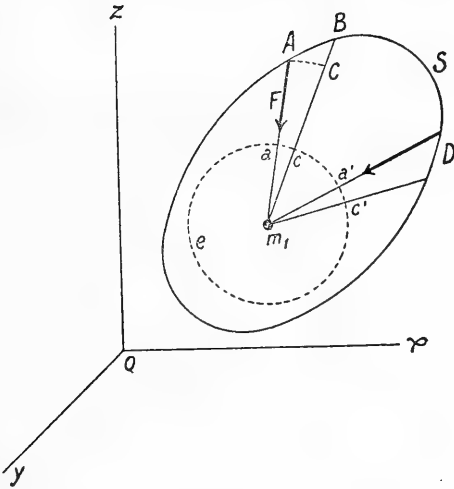


Figura 13.

tivas. Pero esta masa ponderable m_1 en vez de ser exterior á la superficie S es interior como se marca en la figura.

El teorema puede decirse que en su origen fué puramente abstracto lo mismo que en el caso precedente, y que después se fué materializando.

De todas maneras, al hablar de flujos, que pasan por elementos de la superficie, ha de entenderse, al menos por el

pronto, que no actúan materialmente sobre la superficie, si no que *actuarían* cuando en cada unidad de superficie se colocase una masa ponderable igual también á la unidad.

Con todas las salvedades, pues, y todas las explicaciones que hemos dado respecto al primer teorema, podemos enunciar este teorema segundo ó teorema de Gauss, de este modo:

Dada una superficie S cerrada, y en el interior de ella una masa ponderable m , el flujo de fuerza á través de la superficie, procedente de dicha masa será igual á

$$4 \pi m_1;$$

y consideraremos como positivo dicho flujo, porque es flujo que entra en el espacio cerrado por S .

Y en efecto; la fuerza ejercida por m_1 sobre una masa igual á la unidad colocada sobre la superficie, actuará, como F , del exterior al interior, lo cual demuestra que el flujo es positivo, si convenimos en dar el signo $+$ á todo flujo que penetre en el espacio de que se trata; porque no ha de olvidarse que se trata de atracciones.

Y la demostración del teorema es bien sencilla.

Sea AB un elemento infinitamente pequeño de la superficie S ; consideremos un cono que tenga por vértice m_1 y por directriz el contorno de AB , y calculemos el flujo correspondiente á dicho cono.

Tracemos ahora dos esferas, una de radio $m_1 A = R$, la cual cortará el cono, según un área infinitamente pequeña AC , que, conforme á lo que antes explicábamos, puede considerarse como la proyección del área AB sobre el plano tangente á la esfera en A , que se confundirá sensiblemente con AC .

La segunda esfera la trazaremos también desde m_1 , como centro, con un radio igual á *la unidad*, y esta esfera e cortará al cono $m_1 AB$, según un área infinitamente peque-

ña ac , que será la medida de dicho cono y que designaremos por $d\omega$.

Hemos demostrado que el flujo, según AB , es igual al flujo de la fuerza correspondiente F sobre el área AC , luego tendremos

$$\text{flujo en el cono } \overline{m_1 AB} = \text{área } AC \cdot F;$$

pero

$$\text{área } AC = d\omega \cdot R^2$$

y

$$F = \frac{km_1}{R^2}.$$

Y substituyendo estos últimos valores en el valor del flujo,

$$\text{flujo en el cono } m_1 AB = d\omega \cdot R^2 \cdot \frac{km_1}{R^2} = km_1 d\omega.$$

Para otro cono cualquiera, cuyo vértice esté en m_1 , y que se apoye sobre otro elemento de la superficie, por ejemplo, sobre D , tendremos una expresión análoga

$$km_1 d\omega'$$

siendo $d\omega'$ la abertura de este cono medida en la esfera e .

Descomponiendo el espacio que comprende S en infinitos conos análogos á los anteriores, y sumando todos estos flujos parciales, como los conos agotan el espacio de que se trata, y abarcan toda la superficie S , obtendremos el flujo total, y resultará:

flujo á través de

$$S = km_1 d\omega + km_1 d\omega' + \dots = km_1 (d\omega + d\omega' + \dots)$$

Pero la suma de las áreas comprendidas en el paréntesis del segundo miembro, representan precisamente la superfi-

cie de la esfera e , que, como su radio es 1, tiene por valor 4π .

Luego el flujo de que se trata será

$$\text{flujo } (S) = k m_1 \cdot 4 \pi$$

con lo cual queda demostrado el teorema de Gauss.

Si suponemos $k=1$, el flujo en una superficie cerrada, que comprende una masa ponderable m_1 , toma la forma sencillísima

$$4 \pi m_1$$

Este teorema, lo mismo que el anterior, puede generalizarse para un número cualquiera de masas $m_1 m_2 \dots$, comprendidas en S ; porque hemos demostrado por el teorema de la proyección de una resultante de varias fuerzas, que el flujo del conjunto es igual á la suma de los flujos parciales. Luego si en el interior de S existen las masas $m_1, m_2 \dots$, suponiendo siempre $k=1$, tendremos

$$\text{flujo } (S) = 4 \pi (m_1 + m_2 \dots).$$

Representando para abreviar la suma de todas las masas $m_1, m_2 \dots$ por M tendremos el teorema de Gauss generalizado. Si en el interior de una superficie S existen distribuidas de cualquier modo varias masas, cuya suma es igual á M , el flujo total será

$$\text{flujo } (S) = 4 \pi M.$$

* * *

Todavía puede generalizarse este teorema, como hicimos con el anterior, suponiendo que existan masas que determinen repulsiones en vez de atracciones sobre las masas de prueba colocadas en la superficie S .

Esto sucede precisamente con las masas eléctricas. Las positivas determinan sobre la masa eléctrica $+1$ una repulsión, y por lo tanto un flujo negativo, y por el contrario las negativas una atracción á la cual acompaña un flujo positivo

Pero todo lo dicho se aplica sin dificultad á este caso con esta modificación, que se desprende de lo expuesto:

Que el flujo de una masa eléctrica total

$$M = m_1 + m_2 + \dots$$

será

$$\text{flujo } (S) = -4\pi M,$$

en que m_1, m_2, \dots tendrán los signos que le correspondan y el signo M resultará de la suma algebraica anterior.

Si M es positiva el flujo será negativo, como debe ser, puesto que dos masas eléctricas de igual signo se rechazan.

Si M es negativo el flujo será positivo.

Pasemos al tercer teorema.

*
* *

Tercer teorema.—Es un teorema de transición entre los dos teoremas anteriores, y se refiere al caso en que una masa m_1 está precisamente sobre la superficie S .

En este caso, si una masa m_2 está colocada en A (fig. 14) sobre la superficie S , y el plano tangente en A está bien definido, considerando como antes una serie de conos elementales ABC y la esfera de radio 1, que llamaremos e , es evidente que al sumar los flujos de todos estos conos, cuya suma dará el flujo total á través de S , las áreas bc , que miden cada uno de dichos conos elementales, no sumarán más que la superficie E e E' de media esfera, la que está á la izquierda del plano tangente t ; porque al otro lado ni hay superficie, ni fuerzas atractivas, ni flujo de fuerzas.

Y como el área de media esfera es 2π , el flujo tendrá por valor del exterior al interior

$$\text{flujo } (S) = 2\pi m.$$

Generalizando el teorema para muchas masas pondera-

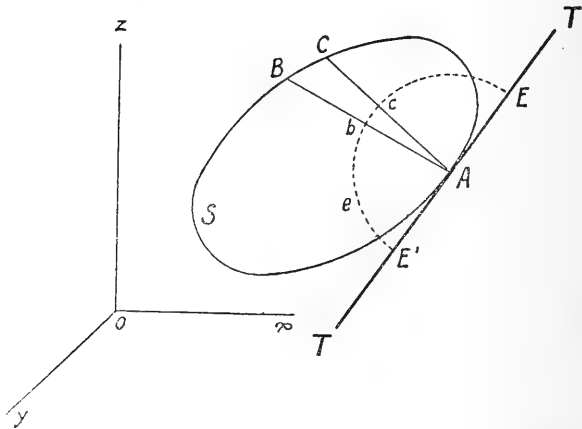


Figura 14.

bles m_1, m_2, \dots distribuidas sobre la superficie S , y llamando M á la suma de todas ellas resultará

$$\text{flujo } (S) = 2\pi M,$$

siempre en la hipótesis $k = 1$.

También este tercer teorema se generaliza y del mismo modo que los anteriores para las masas eléctricas.

Así veremos, al estudiar la electrostática, que en esta rama de la Física son fundamentales los tres teoremas que acabamos de explicar, y sobre los que algo diremos todavía en la conferencia próxima.

XX.—Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Continuación.)

ESTÁTICA Y DINÁMICA

I.^a PARTE: EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE LOS INDIVIDUOS

Antes de estudiar el equilibrio y el movimiento de las agrupaciones sociales, hemos de estudiar en esta 1.^a Parte (como preliminar indispensable), el equilibrio y el movimiento de los individuos y elementos sociales que las constituyen, imitando en esto — como en todo — el procedimiento que se emplea en la Mecánica racional.

Véamos antes los primeros jalones de esta Ciencia.

EL PUNTO MATERIAL. Para la exposición newtoniana, se requiere la noción abstracta del punto material, que *no es* la partícula física.

Por el marcado carácter matemático de la *Mecánica racional* (no decimos de la Mecánica en general) los elementos que, enlazados entre sí, constituyen los sistemas, no son ni pueden ser las moléculas, los átomos, los electrones, ni cualesquiera otras partículas que los físicos establezcan como constitutivas de los cuerpos de la Naturaleza, y sobre las cuales versan hoy, (ó puedan versar el día de mañana) las teorías físicas y químicas. En la *Mecánica racional* pura y abstracta, que es la que nosotros necesitamos para nuestras especulaciones de Mecánica social, no se consideran estas partículas que admiten la Física y la Química, sino que se

trata del *punto material*, significando con estas dos palabras unidas, que se trata del *punto matemático* de la Geometría, al cual se le atribuye la condición abstracta de *material*, es decir, que se le dota de una masa, como coeficiente de capacidad para el movimiento en el espacio.

Por esto las Teorías de la *Mecánica racional* no están—á mi entender—pendientes de los descubrimientos físicos y químicos, *del mismo modo* que puedan estar las Teorías físicas y químicas. A mi modo de ver, la evolución que se ha operado (y que incesantemente se opera) en los conceptos matemáticos, así de la Geometría como del Análisis, trascienden directamente á la Mecánica racional, y determinan la evolución de esta ciencia; mientras que la evolución en los conceptos físicos y químicos que trascienden muy directamente á la Mecánica aplicada (por ser ésta una rama de las ciencias físicas), no puede influir sobre las leyes puras de la *Mecánica racional*. Tal como ésta ha quedado construída después de Galileo y de Newton, con su armazón científica, podrá ser ensanchada y desenvuelta, como lo es incesantemente; podrá ser expuesta de diferentes modos por exigencias del espíritu filosófico ó por conveniencias de las ciencias que la necesitan; pero siempre será cierto que *si se admiten* como Postulados los *Principios fundamentales*, todas las leyes de la *Mecánica racional* se imponen lógicamente á la razón, sin que dependan de los descubrimientos físicos ó químicos, porque esas leyes son formuladas con el lenguaje matemático, y *para nosotros* nada más. Hasta hoy la Naturaleza se ha correspondido muy bien con esas leyes teóricas; pero si por virtud de observaciones perfectamente hechas, y con todo género de garantías, esa correspondencia se rompiera algún día, y los físicos hubieran de repudiar Teoremas demostrados por la Mecánica racional de hoy, ésta—aunque subsistiendo como edificio lógico, digamos así—no sería ya de utilidad para las ciencias físicas. En tal supuesto conflicto, habría que revisar los *Principios*

fundamentales, y me parece que el nuevo Newton que reparara el defecto en los cimientos, y construyera una nueva Mecánica racional utilizable por los físicos, habría de modificar los *Postulados*, pensando siempre en el dato puro y abstracto del punto material.

Recordemos brevemente lo ocurrido en los últimos años en que han surgido descubrimientos que en el campo de la Física y de la Química han producido tan honda y legítima emoción. Después de los descubrimientos de los rayos X, de los rayos de urano, de los de torio y del gran poder radioactivo de muchos minerales, se logró finalmente obtener (aunque en cantidad pequeñísima) *el radio* que emite rayos luminosos y caloríficos con propiedades asombrosas, para la explicación de las cuales se ha supuesto que son de tres clases α , β , γ (con diferente modo de ser) que se han reconocido por la conductibilidad eléctrica que producen en el aire, lo cual no nos interesa aquí. La enorme cantidad de energía representada por el calor que emite incesantemente un gramo de radio (100 calorías-gramo en una hora) le deja, al parecer, sin alteración alguna, ó al menos sin alteración que sea apreciable por los más finos y delicados instrumentos y procedimientos de observación. ¿Rompe este descubrimiento la correspondencia de la Naturaleza con el Teorema de la *Conservación de la energía*, y hay que repudiar este Teorema de la Mecánica?

Así fué planteada por algunos en los primeros momentos la cuestión que surgía con tan emocionante descubrimiento físico. Pero es tal la fe en la ley mecánica, no considerada como pendiente de ningún descubrimiento particular físico ó químico, que se desechó bien pronto toda duda sobre el Teorema de la Mecánica, y se dedicaron con ahínco los investigadores á examinar si habría algún proceso natural, antes desconocido, por virtud del cual quedarán en libertad cantidades de energía que fueran muchos millones de veces mayores que las que aparecían en los procesos conocidos.

y que explicara cómo es producida la energía que expide sin cesar el radio. Estas investigaciones han conducido á una nueva concepción acerca de la constitución de los cuerpos materiales.

Se sabía por la Química cómo las moléculas de los cuerpos estaban constituidas por átomos de los cuerpos elementales; y se conocían y se medían las cantidades de energía que iban envueltas en ese proceso de composición molecular; al dividir—ó mejor dicho—descomponer la molécula en sus átomos. Pero en los átomos de los cuerpos elementales se acababa todo; eran indescomponibles, eran irreductibles; habían sido infructuosas cuantas tentativas se habían hecho pára dividir los átomos, y aunque se habían visto conexiones entre unos y otros cuerpos elementales por sus respectivos pesos atómicos, no se había podido pasar del átomo. Ahora se cree ya que, probablemente, hay partículas mucho más pequeñas que los átomos, y que éstos se componen de esas partículas, no siendo, por tanto, indivisibles, como se pensaba.

Se tiene hoy por demostrado, según afirman, que cada una de esas partículas es *mil veces menor* que el átomo del hidrógeno (que es el menor de todos), y que lleva cada una la misma cantidad de electricidad negativa que la que lleva un átomo de hidrógeno al salir del agua por descomposición de ésta. Esa partícula cargada con esta cantidad de electricidad negativa es *el electrón*. Decimos que se tiene por demostrado, porque diferentes investigadores, por procedimientos muy diversos, han coincidido, han llegado (según se dice) á ese mismo valor para el electrón. Así, pues, en cualquier cuerpo se puede llegar hasta el electrón—es decir, la milésima parte de un átomo de hidrógeno.—Ya se puede concebir que por el diferente número de electrones, por el diverso modo de agrupación de éstos y por sus velocidades, se diferencien, unos de otros, los átomos de los diversos cuerpos considerados como elementales.

Prescindiendo de las hipótesis que han hecho algunos físicos sobre la base de los electrones y los iones (electro-positivos), lo que ya se puede concebir desde luego es: que la descomposición del átomo de un cuerpo elemental, como *el radio* — por ejemplo —, deje en libertad una enorme cantidad de energía, muy superior á la que conocíamos por la descomposición de la molécula en sus átomos. Así también es concebible ya, que un cuerpo elemental pueda transformarse en otro al cambiar su peso atómico por pérdida de electrones. Esto parece haberse comprobado en las experiencias hechas con la emanación del radio, por las cuales se ha obtenido *el helio*.

De toda esta digresión (salvando las inexactitudes en que podamos haber incurrido), resulta que, por virtud de descubrimientos físicos y químicos, se ha penetrado más y más en la constitución íntima de los cuerpos materiales, llegando á partículas físicas mas y más pequeñas. Y hay que pensar en la imposibilidad de poner límite alguno á lo que las investigaciones futuras puedan sugerir en orden á la pequeñez de las partículas que hayan de mirarse como en las entrañas de los cuerpos materiales; nada impide concebir que pueda llegarse á partículas que sean muchos millones de veces menores que los electrones de hoy, sin límite alguno. La Física y lá Química, y con ellas la Mecánica de *los cuerpos materiales*, estarán siempre pendientes de evoluciones futuras por ese motivo; pero la *Mecánica racional no está en el mismo caso* — á mi entender — toda vez que establece sus teorías sobre la entidad *abstracta* del punto material (que sólo está en nuestra mente), y á él no pueden llegar, ni en nada pueden afectarla, los descubrimientos físicos, por lo mismo que está sólo en nuestra mente, fuera de la realidad física.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA RACIONAL

Vimos en los *Preliminares* que:

Del *primer principio*—ó sea el de *la inercia* del punto material—se infiere la existencia de alguna causa exterior al punto, si se observa algún cambio en el estado de reposo ó de movimiento de éste. La causa se llama *fuerza* (*).

Del *segundo principio* se deduce que *el cambio de movimiento* producido por una fuerza se realiza en la dirección y en el sentido en que ella actúe. Esa dirección y sentido del cambio de movimiento, es lo que en la *Cinemática* hemos llamado dirección y sentido de la *aceleración total* J . Y se admite que la magnitud de esta J es proporcional á la fuerza motriz F (**).

Invirtiendo, se dice que la fuerza motriz F —mirada como una acción externa sobre el punto material que le hace cambiar su estado de reposo ó de movimiento—es proporcional (para un punto dado) á la aceleración J que este recibe ($F = m J$).—La fuerza se ve como un vector localizado en la posición que ocupa el punto.

El *coeficiente de proporcionalidad* m , afecto á cada punto material, se llama su *masa*.

De este *segundo principio* se deduce el *teorema del paralelogramo* para la composición de dos fuerzas que actúen si-

(*) Claro es que no cabe hacer observaciones sobre el punto material que *es una abstracción*. Se aplica á él lo que pudiera observarse en un cuerpo material. No se olvide que estos Principios de la Mecánica son para nosotros simples *Postulados*.

(**) La ley de la inercia puede ser mirada, no cómo un primer Principio, sino como un caso particular de este segundo Principio, puesto que si no hay fuerza, no hay aceleración; es decir, no hay cambio alguno en la velocidad, y ésta subsistirá, por consiguiente, en magnitud, dirección y sentido.

multáneamente sobre un mismo punto, basándose en la composición cinemática de las aceleraciones correspondientes, y en virtud de la independencia de los efectos de las fuerzas.

Si se llama *cantidad de movimiento* de un punto de masa m en un instante, á un *vector localizado* en la posición que ocupa el punto, y que — con la misma *dirección* y el mismo *sentido* de la velocidad — tenga por *magnitud* la de ésta multiplicada por el coeficiente m , y se recuerda lo que sabemos sobre la aceleración total J , se ve la fuerza motriz mJ como produciendo (por una simple multiplicación) el incremento total (vectorial) muy pequeño $mJ \times \theta$ que experimentará la cantidad de movimiento mv en el intervalo muy pequeño de tiempo θ (*). Se podría decir, en vista de esto, que la fuerza es la derivada total geométrica (respecto al tiempo) del vector que representa la cantidad de movimiento; así como en Cinemática se podía decir que la aceleración total es la derivada total geométrica del vector que representa la velocidad.

El *tercer principio* que aceptamos fué el de la igualdad de la acción y la reacción; es decir, que siempre que un punto material recibe una acción que emana de otro punto material, éste á su vez experimenta — como emanando del primero — una reacción igual y directamente opuesta á la acción (**).

Los tres principios, que hemos recordado por segunda vez, no se imponen por sí mismos, ni son demostrables, ni pueden comprobarse por la experiencia. Aunque se han he-

(*) El producto de la fuerza $F = mJ$ por el intervalo muy pequeño tiempo θ en que actúa, es lo que se llama *impulsión elemental de la fuerza*.

(**) Este tercer Postulado es el conocido particularmente con el nombre de *Principio de Newton*, porque los dos primeros habían sido ya previstos por Galileo, aunque éste se limitó al estudio de la caída de los cuerpos por la acción de la gravedad.

cho objeciones contra ellos, y descansan sobre nociones que son metafísicas, los admitiremos como si fueran incontestables. Es muy de lamentar tal deficiencia en los cimientos de la *Mecánica racional*, que hasta hoy ha ostentado como timbre científico el hecho de que la observación y la experiencia hayan confirmado siempre todos sus Teoremas (*).

ADAPTACIÓN Á LA MECÁNICA SOCIAL

El propósito de aplicar á los individuos y á las agrupaciones sociales, y refiriéndonos á un determinado asunto, los teoremas de la *Dinámica* de los puntos materiales y de los sistemas materiales, nos pone en el caso de justificar primeramente la asimilación que haremos del individuo — como *entidad ideal y abstracta* — al punto material para concebir los movimientos de modificación de aquél (en un asunto) como los movimientos de éste en el espacio; y de admitir después para *ese individuo abstracto y simple* que concibamos, los tres *Postulados*.

Sin esta justificación previa no tendría valor alguno cuanto dijéramos, porque sería un simple cambio de palabras.

(*) El hecho es que, partiendo Newton de ideas metafísicas sobre espacio, tiempo y movimiento absolutos (ideas sin realidad), pudo constituir, sin embargo, una Ciencia como la *Mecánica racional*, exuberante de verdades comprobadas y verificadas después por la observación y la experiencia; es decir, de resultados que no se resienten de la falsedad en la base.

Este hecho histórico es muy digno de meditación, no para la rehabilitación de los procedimientos metafísicos (definitivamente muertos para las ciencias positivas), sino para tratar de explicar el hecho de un modo positivo; es decir, para ver cómo ha podido producirse, ó, dicho de otro modo, cómo se ha eliminado lo que había de irreal en el punto de partida. Tal investigación sería grandemente instructiva, porque algo análogo ocurre en los puntos de partida de todas las Ciencias.

Veamos lo primero.

Si se admitiera con algunos fisiólogos y psicólogos, que en el individuo vivo (como conjunto de células vivas enlazadas entre sí mediante el organismo todo del cuerpo del animal) aparece la unidad de la conciencia individual con su *psiquis*, como una síntesis; pensando que las células vivas son de suyo conscientes, y que del conjunto orgánico armónico de las células, con sus *psiquis* celulares, brota la *psiquis* individual; es claro que para una *Mecánica social aplicada* á la realidad, habría que considerar la célula viva, con su *psiquis* celular, como la partícula, y el individuo animal debería de ser mirado como una verdadera colectividad ó agrupación. Pero ya hemos dicho que serían enormes las dificultades con que se tropezaría al intentar el estudio de la *Mecánica social aplicada*, que no era ese nuestro intento; y añadimos ahora que las dificultades serían inmensamente mayores, si con arreglo á aquella concepción psico-fisiológica se descendiera hasta la célula.

Nosotros intentamos permanecer encerrados en el campo estricto de la *Mecánica racional*, y necesitamos primeramente concebir lo análogo á la *posición* del punto material en el espacio.

Aunque no sepamos cómo hacer la medición por un parámetro, concebimos, sin embargo, la posición de cada individuo en un asunto dado; pero sería inconcebible para nosotros la posición de cada célula consciente en un asunto, porque al fundirse todas las células en la conciencia individual, ellas no nos aparecerían ya, y no nos sería posible asignarles *posición*, en el sentido que damos á esta palabra. Sea lo que fuere de todo esto, el individuo que nosotros concebimos, uno é indivisible, y que asimilamos al punto material, quedará (como éste en la *Mecánica racional*) siendo *una entidad que esté sólo en nuestra mente*, fuera de la realidad física y fisiológica, por lo cual no pueden afectarle los nuevos descubrimientos que en el campo de la Fisiología y

Psicología se hagan en el porvenir en orden á la constitución del individuo como organismo viviente, y en orden á la aparición de la conciencia y la evolución de la psiquis individual.

El sociólogo Lilienfeld basa todo su sistema de Sociología en la *realidad* del organismo social, en el cual son para él verdaderas células sociales los individuos. Para este escritor las acciones psíquicas que se ejercen de individuo á individuo en el interior de una agrupación social, son perfectamente comparables á las acciones físico-fisiológicas que en el interior del cuerpo de un animal se ejercen de célula á célula. Nosotros no entramos en este terreno porque nos hemos de limitar al estudio de los efectos mecánicos.

Quizá lo que Lilienfeld denomina *substancia social intercelular* desempeña un papel que tiene alguna analogía con lo que nosotros denominamos *enlaces* entre los individuos y elementos de una agrupación. Los grados de tensión á que estén sometidos en cada instante los enlaces de la agrupación, podrían quizás guardar cierta correspondencia con el estado en que se encuentre esa substancia intercelular que media (según Lilienfeld) entre todos los individuos y elementos de una Sociedad dada.

La asimilación que nosotros haremos del individuo al punto material—para nuestro peculiar modo de ver sus *movimientos en un asunto* como los de un punto en el espacio—nos permitirá relacionar dichos movimientos con las impulsiones que el individuo reciba, si se pueden adaptar á la *Mecánica social* los tres principios fundamentales. Aunque el ser humano individual no es una abstracción, podemos concebir *en él un ente abstracto ó ente de razón*, al cual denominamos *individuo* para nuestra Mecánica social pura (*).

(*) Quizá esta concepción nuestra del *individuo abstracto y simple* sea, en cierto modo, comparable al *alma* á que se refiere el profesor Ebbinghans en su Psicología. Según Wundt, el alma debe de ser definida al empezar el estudio de la Psicología científica como *el*

Los individuos en una agrupación social—lo mismo que los puntos materiales en un sistema—no son contiguos, como lo son las células en los cuerpos vivos.

*
* *
*

Veamos ahora la *adaptación á la Mecánica social* de los tres *Postulados*.

Primer Postulado.—Para admitir que el individuo por sí mismo permanecería en su estado de reposo ó de movimiento *en un asunto* (siguiendo este movimiento como uniforme y de dirección constante), si no fuera compelido á cambiar ese estado; y deducir lógicamente, de este *Principio de la inercia*, que cuando se observe un cambio, existe alguna causa *exterior*, es de todo punto inexcusable explicar lo que queremos significar.

Ante todo, parece innecesario repetir que al hablar del individuo nos referimos á un ente psíquico abstracto é ideal.

La calidad de *inerte* que le atribuiremos consiste: en que su tendencia natural es á conservar su *posición* psíquica en cada asunto, si está en reposo; ó á conservar su *velocidad* en el asunto (tal como la tenga) sin alteración alguna, siguiendo un movimiento uniforme de dirección constante. Cuando decimos que al observar un cambio en el estado del individuo en el asunto, es lógico inferir la existencia de alguna causa *exterior al individuo*, hablamos de éste como del ente psíquico *abstracto y simple* respecto del cual consideramos *como exterior*, no sólo todo lo que está en la Natura-

sujeto (en el sentido lógico) al cual unimos como predicados todos los hechos de la observación interna. En estos hechos el fenómeno muy esencial es la unificación dentro de la multiplicidad.

Se ve que para estos psicólogos no hay necesidad de hacer hipótesis alguna *inicial* sobre la existencia ó no existencia de un ser ó de una substancia independiente de la materia.

leza fuera del concreto individuo natural con su propio cuerpo, sino también todo lo que—aun siendo interior á este último— desempeña, sin embargo, el papel de *exterior* respecto al ente psíquico abstracto y simple para el asunto que consideremos.

Y así como un hecho físico de la Naturaleza que sea exterior al cuerpo del individuo, ó un acto de otro individuo, es un hecho exterior que puede influir sobre el individuo que consideramos, y ejercer una acción mecánica-psíquica (que sea una fuerza) para cambiar su estado en el asunto, admitimos *asimismo* que los apetitos que brotan de su propio organismo en su funcionamiento fisiológico normal, como el hambre, la sed, el apetito genésico, etc., ó bien una alteración cualquiera en sus órganos (cerebro, corazón, hígado, sistema nervioso, etc.), aunque ocurriendo todo ello en el interior del organismo del individuo natural, puede ejercer, y ejerce, una acción psíquica sobre el individuo abstracto y simple de que hablamos; y podemos mirarla como *exterior* al *ente de razón* que llamamos *el individuo*.

Este se distingue para nosotros del cuerpo, y es como exterior á éste (*). Y más aun: como nuestro estudio de las posiciones del individuo ha de ser siempre sobre el supuesto de un *determinado asunto*; podremos mirar como exterior al individuo en el asunto, todo aquello que, aun siendo *psíquico suyo*, corresponda á otros órdenes cualesquiera de asuntos, y sean por tanto, para nuestra consideración, como *exteriores al individuo en el asunto*. Del orden general psíquico individual emanan influencias que indudablemente ejercen acción para cambiar el estado del individuo en el asunto.

La adaptación á la Mecánica social del *Postulado de la*

(*) No pretendemos entrar en las cuestiones que se plantean los psicólogos. Nos limitamos á explicar los que nosotros queremos significar al decir que admitimos *la ley de la inercia*, para el individuo en un asunto.

inercia, tal como la presentamos, deberá de ser vista como un último avance en la generalización de esa ley, puesto que ya los fisiólogos habían dado el primer paso. El eminente fisiólogo Mr. A. Dastre dice que aunque la opinión vulgar desconoce la generalización de la ley de la inercia, para los cuerpos vivos, y no la aplica sino á la materia bruta, se debe de pensar que la materia viva no posee por sí misma espontaneidad real, y que se requieren los excitantes (de su vitalidad) que provienen del medio ambiente. Por esto el mecanismo vital sería un mecanismo inerte si nada del medio viniera á provocarle á la acción. Es decir, que la ley de la inercia no es solamente aplicable á los cuerpos brutos, sino también á los vivos, cuya *aparente espontaneidad* no es más que una ilusión desmentida por toda la fisiología; ó en otros términos: que las manifestaciones vitales son réplicas (por la irritabilidad) á un estímulo, esto es, actos provocados, y no actos espontáneos.

Las fuerzas sociales por excelencia que actúan sobre cada individuo ó elemento de una agrupación son:

1.º Las que emanan de otros individuos ó elementos, ya sean de la misma agrupación (interiores), ó ya sean de fuera de ella (exteriores). Revisten formas variadísimas é innumerables. Se puede decir en general, que todo lo de un individuo ó elemento social que excite la psiquis del individuo ó elemento que se considere, es para éste un estímulo ó presión sugestiva, es decir, una fuerza en el asunto, toda vez que el individuo ó elemento considerado puede adquirir, mediante aquella influencia estimulante, un nuevo conocimiento ó puede modificar los que tenía, ó bien puede despertarse en él un sentimiento nuevo, ó pueden modificarse otros, ó bien puede templarse ó aflojarse su voluntad, etcétera. Todo ello vendría á ser un cambio en la posición del individuo ó elemento en el asunto, y podría alcanzarse por imitación (como dice *Tarde*), ó de cualquier otro modo. El escritor Demarest Lloyd considera que la más poderosa de

las fuerzas sociales naturales es *la simpatía humana*, que en su más amplio sentido es inagotable, y es la llamada á provocar los más altos grados de perfeccionamiento en el porvenir de las sociedades humanas. Todas las fuerzas de que hablamos ahora surgen del contacto del hombre con el hombre, y en ellas aparece muy claramente el principio de la igualdad de la acción y la reacción de que hablaremos después (*).

2.º Además de esas fuerzas habrá de ser considerado cada individuo ó elemento de una agrupación como sometido en el asunto de que se trate á una fuerza que represente la *acción social*, que es (como dice *Durkheim*), la coerción de la agrupación toda sobre la psiquis de cada individuo, y no puede considerarse como emanando *sólo* de un particular elemento ó individuo de la agrupación. Habremos de suponer que esta fuerza sea también conocida en magnitud, dirección y sentido (**).

(*) El distinguido escritor D. Adolfo Posada, con el sentido intencionalmente altruista que le caracteriza, al considerar los fenómenos de cooperación y de sacrificio como emanaciones de un principio superior de simpatía expansiva, habla del amor, del cariño, del mutuo auxilio, del sacrificio, etc., como de sugestiones que tienden á unir las almas; y por eso añade: «Si es cierto que la Naturaleza se nos revela al pronto como un inmenso teatro de luchas implacables, el examen reflexivo acaso nos la presenta como centro fecundo de amor y de simpatía».

(**) Sobre los efectos y las causas dice *Hume* que:

«Si examinamos la producción de los efectos por sus causas hallamos que en nuestra concepción de esta relación no podemos pasar más allá de la simple observación de que hay un enlace constante que inclina al espíritu — por una transición — á concluir lo uno de lo otro. Pero los hombres están muy dispuestos á creer que en el dominio de la Naturaleza material hay algo como una relación necesaria de causa ó efecto... Están, por otra parte, algo inclinados á suponer que hay alguna diferencia entre los efectos que resultan de una fuerza material y los que provienen del pensamiento y de la inteligencia.»

Y añade *Hume* estas expresivas palabras:

«Pero sí estamos bien convencidos de que respecto de cualquiera

Segundo Postulado.—Lo admitimos para la Dinámica del individuo abstracto y simple. Y así diremos que todo *cambio en el movimiento* de modificación producido por una fuerza psíquica que influya sobre un individuo *en movimiento*, se realiza en la dirección y en el sentido en que la fuerza actúe. Es la dirección y el sentido de la aceleración total J . La magnitud de ésta es proporcional á la de la fuerza motriz F . Inversamente se diría que la intensidad F es proporcional á la magnitud de J ($F = mJ$) para un *determinado individuo en un asunto dado*. Este coeficiente de proporcionalidad m aparece, pues, en la *Dinámica social*, dándonos también la noción de *masa* como *coeficiente de capacidad* del individuo para el *género de modificación* que constituya el movimiento (*). Habrá de ser afectado cada individuo de una masa diferente, según el asunto de que se trate. Será de masa muy grande, si requiere la aplicación de una fuerza muy grande para adquirir una aceleración dada J en un asunto; y podrá ser ese mismo individuo de masa muy pequeña para otro asunto.

Por el principio de *Galileo* se pasa al teorema del paralelógramo para la composición simbólica de dos fuerzas sociales que actúen simultáneamente sobre un individuo, apo-

causalidad no sabemos sino que hay un enlace constante, y, por ende, la inferencia de nuestro espíritu de lo uno á lo otro; y si encontramos que estas dos circunstancias son universalmente admitidas para nuestras acciones voluntarias estaremos dispuestos á aceptar que la misma necesidad es común á todas las causas.»

(*) Si fuera posible someter á cada individuo —en un asunto dado— á la experiencia necesaria para determinar la aceleración J de su *cambio de movimiento* en el asunto, por la acción de una fuerza psíquica F conocida (que se pudiera medir) se deduciría experimentalmente así su masa $m = \frac{F}{J}$ para ese asunto. Si inversamente se conociera la masa del individuo, una fuerza que sobre él actuara se mediría por el producto de la masa, por la aceleración que aquella le imprimiera; ó bien podría medirse una fuerza por otra que la equilibra, actuando simultáneamente sobre el mismo individuo.

yándose en la composición cinemática de las aceleraciones correspondientes á dichas fuérzas. Tanto las fuerzas como las aceleraciones son aquí cantidades vectoriales psíquicas, representables por vectores espaciales que las simbolicen.

Se puede repetir en la Dinámica del individuo, que por la *impulsión elemental* de la fuerza F en el intervalo muy pequeño de tiempo θ ($F.\theta = m.J.\theta$), se mide el incremento total muy pequeño de la cantidad de movimiento mv , toda vez que si (por Cinemática) J^θ da (en *magnitud, dirección y sentido*) el incremento total muy pequeño de v ; $m.J^\theta$ dará el de mv .

Podría hacerse una objeción importantísima contra la adaptación del principio de *Galileo* á la *Mecánica social*, y es la siguiente:

Si el cambio en el movimiento de modificación de un individuo se realiza en la dirección y en el sentido en que actúa la fuerza, y la magnitud de la aceleración es proporcional á la de la fuerza ($F = mJ$), no parece natural que el coeficiente de proporcionalidad m sea *constante* para un individuo dado, moviéndose en un asunto, *cualquiera que sea la especie de fuerza* psíquica que actúe sobre él, puesto que la observación y la experiencia muestran, al contrario, que cada individuo se mueve ó se modifica por unas especies de influencias psíquicas más fácilmente que por otras (menor coeficiente m). Así á un individuo dado se le mueve muy fácilmente, ó se le lleva muy fácilmente á modificarse (es decir, á cambiar su estado en un asunto) por influencias sentimentales, por ejemplo, y por el contrario se le modifica muy poco con reflexiones que obren por intermedio de la razón, y menos aún por meras sensaciones que afecten casi exclusivamente á su sensibilidad. Siendo esto así, ¿cómo admitir que el coeficiente m sea el mismo para la acción de esas distintas especies de fuerzas psíquicas sobre dicho individuo?

Para contestar esta objeción—que aparece muy grave—debo de recordar, ante todó, que así como los tres Postula-

dos en la *Mecánica racional* se admiten *sólo* para el punto material, así en la *Mecánica social* proponemos que se admitan *sólo* para el individuo abstracto y simple que hemos concebido como absolutamente *inerte*, y que concebimos, además, como absolutamente indiferente para recibir las acciones de las fuerzas psíquicas de cualquiera especie que sean, y cualquiera que sea el estado de movimiento en que se halle. El fenómeno que observamos en la experiencia sobre la mayor ó menor capacidad de un individuo dado para obedecer, en su vida práctica, á la acción de una ú otra especie de fuerza psíquica, es un fenómeno de observación empírica hecha sobre ese individuo concreto y complejo. En la realidad de ese fenómeno pueden intervenir é intervienen procesos psicológicos complicados por virtud de los cuales una influencia sentimental exterior — por ejemplo — provoca la acción de otras fuerzas psíquicas que, brotando del interior del individuo natural y concreto (ocultas para el observador), refuerzan el efecto sobre el individuo abstracto y simple de la sola influencia sentimental exterior que el observador podría apreciar desde fuera. Asimismo, y en virtud de los procesos psicológicos á que nos referimos, una reflexión (aun siendo de gran valor) puede producir en ese individuo poco efecto, porque se componga esa fuerza intelectual con otras ocultas (interiores al individuo natural) que contrarresten su efecto, es decir, el efecto de la que actúa desde fuera. Todas son siempre exteriores al individuo abstracto y simple. Además, y como ya dijimos en los *Preliminares*, todas las fuerzas han de obrar real y efectivamente para su acción psíquica, porque si así no fuera, serían como nulas para la *Mecánica*.

De esta suerte—y tomándolas todas en consideración para la estimación de una resultante — podrían ser pensadas las componentes (ó la resultante) como actuando sobre el individuo abstracto y simple dotado de una masa que sea un coeficiente constante de capacidad para modificación en el

asunto, cualquiera que sea la naturaleza específica de las fuerzas.

Las explicaciones que acabamos de dar se basan en lo que la Psicología nos enseña sobre las varias especies de fuerzas psíquicas. Cada una de ellas es acompañada ó provoca y queda asociada á otras muchas de diferentes especies (*).

Todas tienen ante nuestra consideración igual título para actuar sobre el individuo abstracto y simple que concebimos en cada hombre, lo cual no obsta, sin embargo, para que en el análisis psicológico se encuentre que las fuerzas que provienen de las ideas no producen las impulsiones dinámicas de un modo *directo*, porque estas impulsiones vienen directamente de los deseos, es decir, de sentimientos. Pero al fin y al cabo las ideas ejercen su acción, aunque sea por intermedio de los sentimientos que las acompañen, y por eso nosotros las consideramos como fuerzas, cuando obran efectivamente.

Todas las fuerzas serán — para nuestras especulaciones dinámicas — cantidades vectoriales psíquicas con sus tres atributos, y admitiremos su composición por suma vectorial. En esta suma aparecen como fundidas ya todas las acciones de fuera y de dentro del límite *U* de *Mach*.

TERCER PRINCIPIO (llamado *de Newton*).—Ya dijimos en los *Preliminares* que en lo psíquico admitiremos también el Principio de que *la reacción es igual y contraria á la acción*, significando con esto que siempre que un individuo reciba una acción psíquica para cambiarle su estado de reposo ó

(*) En el cerebro del hombre hay innumerables vías de comunicación que hacen posibles las acciones recíprocas entre las diversas impulsiones.

Dice el Dr. Höfding en su Tratado de Psicología que «al pensar que cada excitación produce en las células una descarga de energía potencial, y que el resultado de esta descarga en cada célula puede combinarse en el cerebro con los resultados en muchos millones de otras células, se siente uno acometido de una especie de vértigo ante la idea de todas las combinaciones que son posibles.»

de movimiento, él ejerce á su vez—por reacción—otra igual y directamente opuesta, que se aplica al punto de donde dimana la acción. Claro es que siendo también esta reacción de naturaleza psíquica sólo puede ser estimada como una fuerza en la *Mecánica social*, cuando se aplique á otro individuo ó elemento social individualizado (*).

La acción que reciba un individuo (ó elemento) como proviniendo de la agrupación en su totalidad, es decir, la *acción social*, originará (como todas) la reacción del individuo, que será igual y directamente opuesta á la acción recibida; pero como habría de aplicarse á la Sociedad *en masa* (como se dice vulgarmente), su efecto sería insensible, por la enormidad de esta masa con relación á la del simple individuo que consideramos.

Lo que se llama *fuerza de inercia*, no es otra cosa que la reacción que emana de un individuo cuando es solicitado por una fuerza F ; y por el *Principio de Newton* se vé, que la fuerza de inercia será de sentido contrario á F , y su magnitud se medirá, como la de ésta, por el producto de la masa m por la aceleración J .

*
* *

Por todo lo que acabamos de decir sobre la adaptación á la Mecánica social de los Principios de la Mecánica racional, se ha visto que el cambio de movimiento de un individuo *libre* en un asunto, aparece para nosotros *determinado* por

(*) Si fuera posible determinar experimentalmente las aceleraciones J y J' que dos individuos sufrirían por la acción y reacción recíprocas (de igual intensidad) entre ellos, se podría conocer entonces la relación $\frac{m}{m'}$ de las masas (en el asunto) de esos dos individuos, porque sería igual á la relación inversa de sus aceleraciones respectivas $\frac{J'}{J}$.

la fuerza psíquica motriz, y por la masa para el asunto del individuo sobre el cual actúe; lo mismo que el cambio de movimiento de un punto material *libre* en el espacio, aparece *determinado* por la fuerza física motriz, y por la masa del punto sobre el cual actúa.

Eso que hemos establecido para seguir nuestras especulaciones mecánicas, es, en el fondo, *análogo* á lo que se dice cuando se afirma que los actos en general de un individuo se producen *necesariamente* por la acción de la resultante de los *motivos* (como fuerza motriz) sobre el *carácter* del individuo á quien solicitan. Me parece que el ente abstracto y simple, que aquí hemos llamado el *individuo*, no debe de ser concebido como causa de su propio cambio de estado de movimiento, sin intervención de fuerza psíquica alguna; así como no puede ser concebido actuando sin motivos. Y parece indudable que el acto que un hombre *libre* realiza *por su voluntad*, es *necesariamente* en la dirección y el sentido del motivo más poderoso *para él*, es decir que su voluntad se orienta en esa dirección y sentido, ó mejor dicho, en la dirección y en el sentido de la resultante de todos los motivos, cada uno de los cuales tendrá la intensidad que le atribuya el *carácter* del hombre mismo. Para mí es inconcebible la *libertad de indiferencia* de que hablan algunos, porque pienso en la verdad de Pero-Grullo de que un individuo no puede dejar de querer lo que quiere.

Si pensamos en dos individuos sometidos á la influencia de los mismos motivos que, objetivamente considerados, sean idénticos; y suponemos que los dos individuos *no orientan* su voluntad en la misma dirección ni con igual intensidad, vemos esto como debido á la *diferencia de sus caracteres*, la cual hace que la relación de cada motivo al carácter no sea la misma en los dos individuos. Si se admite que el carácter sea uno é invariable en cada individuo (para el asunto que se considere), se ve que cada uno de los motivos se convierte en una fuerza de intensidad determinada para

dicho individuo, y así queda determinada su voluntad por la resultante de los motivos como fuerza motriz, la cual es diferente en uno y otro individuo, tanto en dirección y sentido como en magnitud. Por esto el carácter es factor tan indispensable para la dinámica del individuo, como lo son las circunstancias en que se encuentre colocado, toda vez que las intensidades de los diversos motivos que actúen como fuerzas—ó si se quiere la fuerza de los motivos—están en íntima conexión con el carácter del individuo.

Con profundo sentido dice Maudsley que: «Podríamos predecir con certeza la manera de obrar de un individuo en circunstancias dadas, si pudiéramos penetrar en los repliegues más ocultos de su carácter, y conocer todos los perfiles de éste, tanto heredados como adquiridos. El desconocimiento de todos esos datos es lo que nos impide prever los hechos futuros.» Y añade que «el carácter de un individuo sólo podemos *deducirlo* del conocimiento de los actos que ha cumplido en su vida, y de las circunstancias concomitantes; porque los unos y las otras muestran lo que ese individuo *ha querido* y lo que *no ha querido*, es decir, muestran su carácter».

Conviene advertir — como lo han advertido muchos — que si admitimos que el carácter es algo inherente al hombre mismo, é invariable en cada asunto, aunque varíen sus conocimientos, sus ideas, sus sentimientos, etc., es decir—aunque varíe su *posición en el asunto*,—ello no obsta para que estas variaciones ejerzan grande influjo en la determinación de su voluntad, porque habrá motivos que puedan aparecer y ejercer su acción sobre el individuo cuando él se halle en la *nueva posición psíquica*, aunque el carácter se haya conservado como *una constante* del individuo para el asunto que se considere. Por estas nuevas fuerzas, la orientación de la voluntad, y la intensidad de ésta, pueden ser muy diferentes en una y otra ocasión, aunque las circunstancias exteriores sean las mismas, y sea el mismo el carácter.

Hemos hablado del *individuo libre* en el mismo sentido en que se habla en la *Mecánica racional* del *punto material libre*. Así como esta libertad se refiere á la *no existencia* de impedimentos para que el punto material pueda obedecer á la acción combinada de las fuerzas exteriores que le soliciten, las cuales, *necesariamente*, producirán el cambio correspondiente del estado de movimiento, ó producirán el equilibrio; así también la libertad del individuo consiste (para nosotros) en la *ausencia* de impedimentos para que pueda obedecer á la acción compuesta de los motivos ó fuerzas exteriores que le soliciten, los cuales producirán, *necesariamente*, ó un cambio en su estado de movimiento ó bien el equilibrio, según los casos.

El sentido que damos á fa palabra *Libertad* fué perfectamente definido por *Hume*: «¿Qué entendemos por la palabra *libertad* cuando la aplicamos á las acciones voluntarias? Seguramente no entendemos que las acciones tengan tan poco enlace con los motivos, las inclinaciones y las circunstancias, que no haya cierto grado de uniformidad en la sucesión de los dos términos, y que sea imposible inferir de la presencia de lo uno la existencia de lo otro; porque todo eso es cuestión de hecho perfectamente indudable.— Por *libertad* no podemos, pues, entender sino *el poder de obrar ó de no obrar según las determinaciones de la voluntad*; es decir: que si decidimos permanecer en reposo, podemos; que si decidimos movernos, podemos.—Y esta libertad hipotética es universalmente reconocida á todo hombre que no esté prisionero ó cargado de cadenas. No hay sobre esto discusión posible (*).»

(*) Para conciliar la necesidad rigurosa con una libertad moral metafísica (de la cual dimana el sentimiento de nuestra responsabilidad) se recurre á la distinción de Kant entre el carácter *empírico* y el *inteligible*. El primero es el que se revela (como hemos visto) al entrar en juego los motivos que actúan como fuerzas; y como sólo de un modo empírico—es decir, por la experiencia y con ocasión de

No creo necesario insistir, porque lo hemos hecho ya demasiado, en que lo llamado por nosotros movimiento del individuo en un asunto, es heterogéneo con el movimiento del punto material en en el espacio que se estudia en la Mecánica racional. En rigor, ni siquiera puede ser mirado el segundo como representación del primero, sino como un *mero símbolo*. En estos *Apuntes* nos dejaremos guiar siempre por la Mecánica racional, pero entendiendo bien que el lenguaje de ésta será para nosotros puramente simbólico. Téngase por hecha de una vez para todas esta advertencia.

(Continuará)

nuestros propios actos y los actos de los demás—es que se revela y se reconoce el carácter, de aquí el llamarlo empírico. En cuanto al carácter inteligible (para mí ininteligible) como *cosa en sí* (noumeno), ageno al espacio y al tiempo, no sujeto á la ley de casualidad, y que sirve como de *substratum* al fenómeno, sin ser visible en el mundo de la experiencia, no podemos tomarlo en cuenta para especulaciones positivas, dejando esas lucubraciones á los metafísicos, puesto que ellos creen poder elevarse á esas realidades misteriosas.

XXI.— La Asimetría de los Tripletes de Zeeman.

POR MANUEL MARTÍNEZ-RISCO Y MACÍAS.

INTRODUCCIÓN

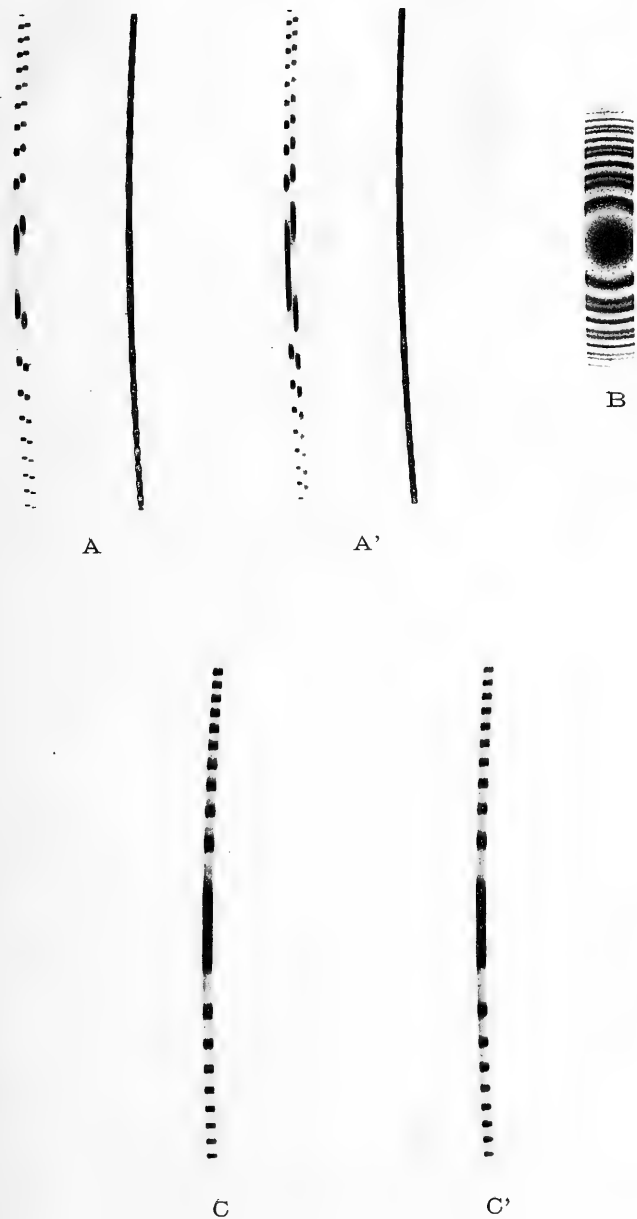
Tienen actualmente excepcional interés las investigaciones experimentales relativas á los tripletes asimétricos, porque comparando sus resultados con los obtenidos teóricamente por Voigt, ha de llegarse á conocer el grado de exactitud de las hipótesis de que este físico parte para explicar el fenómeno de Zeeman.

Sabidas son las aplicaciones que del mismo se hacen hoy en la formación de series de rayas espectrales y en los trabajos de Astronomía Física, y no es, por tanto, necesario encarecer la importancia del estudio de la descomposición magnética de las rayas espectrales.

En esta Memoria nos proponemos dar á conocer los resultados de un trabajo, encaminado principalmente á encontrar la ley de la asimetría de posición del triplete 5.791 *u. A*, del mercurio. Realizamos este estudio en el *Natuurkundig Laboratorium* de Amsterdam, bajo la sabia dirección del Profesor Zeeman.

De los primeros trabajos que este físico realizó acerca del triplete 5.791 *u. A*, resulta que su componente mediana experimenta un desplazamiento directamente proporcional á la intensidad del campo magnético actuante. En cambio, según las últimas investigaciones de Zeeman, el desplazamiento de la componente mediana de dicho triplete varía como el cuadrado de la intensidad del campo magnético. Tal discordan-

M. RISCO. La asimetría de los tripletes de Zeeman



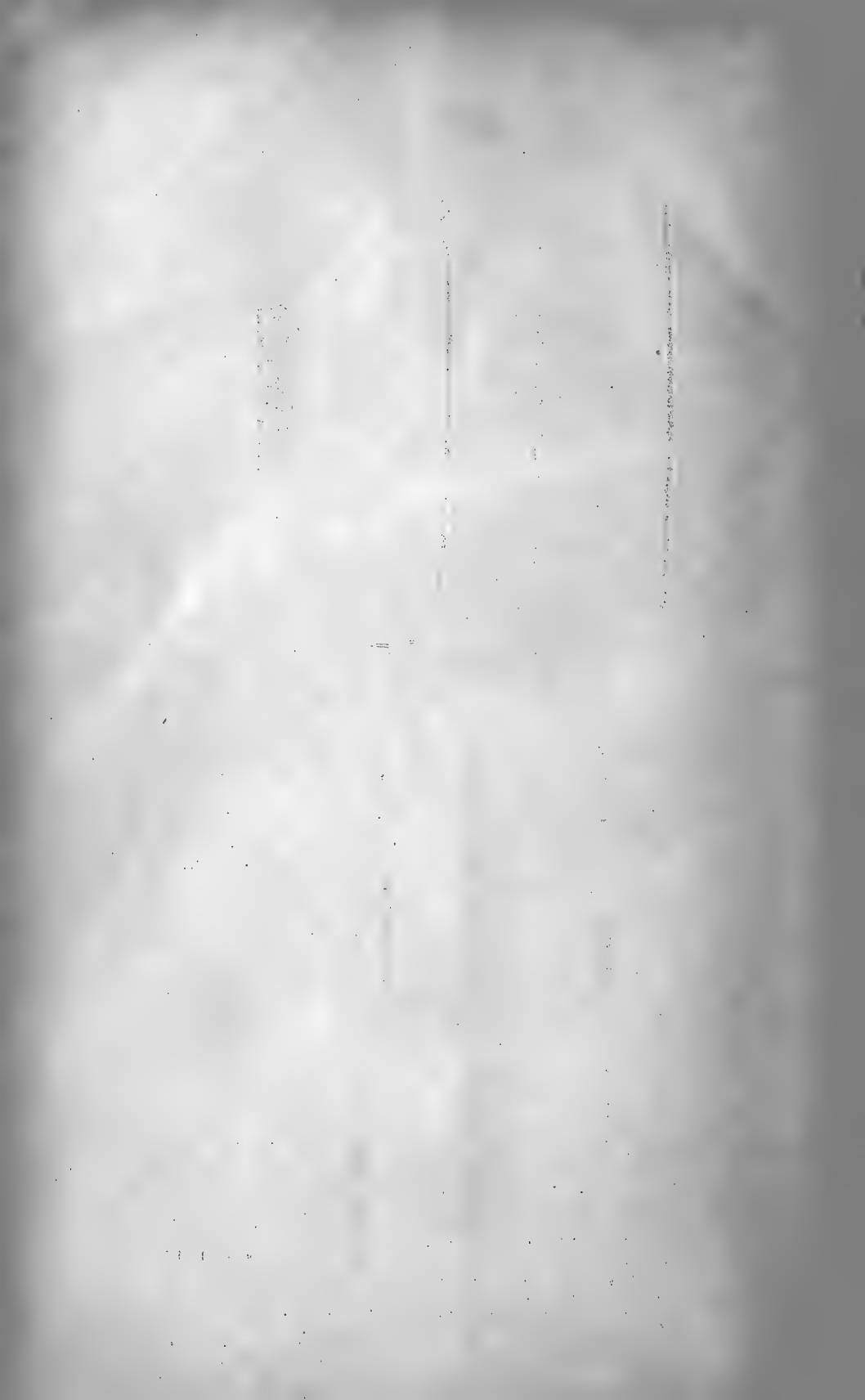
En A. anillos de la raya 5791 u. A. sobre ésta.

En A', > de la componente mediana del triplete 5791 u. A. sobre la raya espectral original

B, > del triplete central del nonete 5461 u. A.

C, > de la raya 5461 u. A.

C', coincidencia de anillos del triplete central del nonete 5461 u. A.



cia de resultados, aunque puede tener por causa la diversidad de condiciones experimentales, nos movió á emprender el presente estudio.

Antes de comenzar, debo manifestar mi profundo agradecimiento al Profesor Zeeman, por sus doctas enseñanzas, y á la Junta para Ampliación de Estudios é Investigaciones Científicas, por haberme proporcionado medios para desarrollar este trabajo.

I

EL FENÓMENO DE ZEEMAN

Varias medidas que Zeeman realizó acerca del fenómeno de Kerr, indujéronle á pensar que un campo magnético podría modificar la luz emitida por una llama, y fueron causa de algunos trabajos que, con resultado negativo, llevó á cabo dicho sabio hacia el año 1892. Zeeman confiesa que no habría vuelto tan pronto á ocuparse en tal género de experimentos, de no haber leído, en 1894, un pasaje de Maxwell (*), relatando los trabajos que Faraday (**) hizo en 1862, sin resultado positivo, con objeto de buscar la relación que entre el magnetismo y la luz pudiera existir. «*Si un Faraday — dijose Zeeman (***) — a songé à la possibilité de cette relation, il n' était peut-être pas inutile de reprendre l' experience, en profitant des moyens actuels de l' analyse spectrale.*» Pensándolo así, emprendió de nuevo sus trabajos, en el Laboratorio de Física de la Universidad de Leyden, llegando esta vez á resultados interesantísimos.

(*) Maxwell.— Collected Works II, pág. 790.

(**) Véase la biografía de Faraday por Bence Jones (II, página 449, 1870.) Véase también A. Cotton.—Le phénomène de Zeeman III, pág. 32, 1899.

(***) P. Zeeman.—De l' influence d' un champ magnétique sur la lumière emise par un corps. (Traducción de las «Verslagen» de la Academia de Ciencias de Amsterdam, Octubre, Noviembre, 1896.)

Para analizar la luz emitida por el foco luminoso, valíase Zeeman de una red cóncava de Rowland, de 14.438 trazos por pulgada inglesa y de 10 pies de radio. Producía Zeeman el campo magnético por medio de un electroimán Ruhmkorff, de dimensiones medias, excitado por una corriente que frecuentemente llegaba á 27 amperios.

Zeeman vió, en primer término, que las rayas *D*, producidas por la llama de un mechero de Bunsen, en la que previamente se había introducido un trozo de amianto impregnado de cloruro sódico, ensanchábanse al dar la corriente en el electroimán, entre cuyos polos paraboloidales la citada llama estaba situada. En el momento de la ruptura del circuito, las rayas *D* recuperaban su primitiva anchura.

La raya roja del litio presentó fenómenos completamente análogos.

Estos hechos, por sí solos, no bastan, sin embargo, para afirmar que existe una acción directa del magnetismo sobre la emisión de la luz; porque la deformación que la llama experimenta al establecer el campo, supone un cambio de temperatura acaso suficiente para producir el ensanchamiento de las rayas espectrales.

Teniéndolo en cuenta, Zeeman emprendió una serie de experimentos, cuyos resultados hacen muy improbable el que una variación de la temperatura del foco luminoso sea la causa del fenómeno observado, é inducen, por tanto, á creer en la existencia de una acción específica del magnetismo sobre la emisión de la luz. Recordaré aquí, que estos experimentos mostraron que las rayas de absorción producidas por el vapor de sodio que un tubo situado entre las piezas polares del electroimán contenía, adquieren un ensanchamiento al crear el campo (*).

Realmente, la existencia de un cambio magnético en el

(*) Para detalles, véase *P. Zeeman*.—De l'influence d'un champ magnétique sur la lumière émise par un corps, pág. 2.

periodo de las vibraciones, que es lo que constituye el fenómeno de Zeeman, sólo quedó probada después del descubrimiento de la polarización circular de los bordes de la raya ensanchada. Lorentz, al tratar de explicar, dentro de su teoría electromagnética, los hechos observados por Zeeman, habíase visto obligado á admitir tal circunstancia del fenómeno; y dando cuenta á este sabio de las consecuencias á que llegaba, movióle á examinar, desde el punto de vista de la polarización, las rayas espectrales modificadas. Los resultados que Zeeman obtuvo, concuerdan completamente con las consecuencias de Lorentz, lo que constituye una prueba elocuentísima en favor de la teoría electromagnética.

Permítasenos ahora exponer sucintamente la teoría elemental del fenómeno de Zeeman (*).

Actualmente, según es sabido, admítase que la luz es un fenómeno originado por la vibración de cargas eléctricas contenidas en los átomos ó moléculas de los cuerpos ponderables.

Para desarrollar la teoría elemental del fenómeno de Zeeman, H. A. Lorentz, dando á esta hipótesis la forma más simple posible, supone que cada molécula radiante contiene un sólo electrón, y que una vez separado éste de su posición de equilibrio, es atraído hacia ella por una fuerza elástica proporcional al desplazamiento é independiente de su dirección. Las componentes de esta fuerza, tomadas en un sistema de ejes cuyo origen sea la posición de equilibrio, pueden, pues, representarse por

$$-fx, \quad -fy, \quad -fz$$

siendo x , y , z las coordenadas del punto ocupado por el electrón y designando por f una constante, que depende de las propiedades del átomo ó molécula radiante.

(*) Véase *H. A. Lorentz The theory of electrons* (III, página 98, 1909).

De lo dicho dedúcese que, cuando no existe campo magnético exterior alguno, las ecuaciones del movimiento del electrón, cuya masa designaremos por m , son:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -fx \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -fy \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -fz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

que tienen por solución general

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t + \alpha \right) \\ y &= b \cos \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t + \beta \right) \\ z &= d \cos \left(\sqrt{\frac{f}{m}} t + \gamma \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

donde

$$a, b, d, \alpha, \beta, \gamma,$$

son constantes arbitrarias.

Las ecuaciones (2) permiten afirmar que los movimientos vibratorios en que puede descomponerse la vibración del electrón, ya sean rectilíneos, circulares ó elípticos, tienen todos por frecuencia (*)

$$n_o = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

(*) Designamos por frecuencia el número de vibraciones que se efectúan en un tiempo 2π .

Supongamos ahora establecido un campo magnético homogéneo de intensidad H y cuyas líneas de fuerza tengan la dirección del eje Z .

En este caso, además de la fuerza elástica, deberemos tener en cuenta otra que actúa también sobre el electrón; porque sabido es que si una partícula electrizada se mueve con velocidad \bar{u} en un campo magnético de intensidad \bar{H} , obra sobre ella una fuerza representada por la expresión

$$\frac{e}{c} \left| \bar{u} \bar{H} \right|.$$

Puede, pues, afirmarse que el campo magnético modifica el movimiento del electrón, y que después de la transformación, tiene éste por ecuaciones, en el sistema de coordenadas adoptado,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -fx + \frac{eH_z}{c} \frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -fy - \frac{eH_z}{c} \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -fz \quad (5)$$

La última de estas ecuaciones forma parte también del sistema (1). Esto prueba que el campo magnético no ejerce modificación alguna sobre las vibraciones realizadas en la dirección del eje Z .

El sistema formado por las ecuaciones (3) y (4), admite como soluciones particulares

$$x = a_1 \cos(n_1 t + \alpha_1), \quad y = -a_1 \sin(n_1 t + \alpha_1) \quad (6)$$

y

$$x = a_2 \cos(n_2 t + \alpha_2), \quad y = a_2 \sin(n_2 t + \alpha_2) \quad (7)$$

estando definidas las frecuencias n_1 y n_2 por las relaciones

$$n_1^2 - \frac{eH_z}{mc} n_1 = n_0^2 \quad (8)$$

$$n_2^2 + \frac{eH_z}{mc} n_2 = n_0^2 \quad (9)$$

y siendo $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ constantes arbitrarias.

La solución general del sistema (3)-(4)-(5) es, pues,

$$x = a_1 \cos(n_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(n_2 t + \alpha_2) \quad (10)$$

$$y = -a_1 \sin(n_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(n_2 t + \alpha_2) \quad (11)$$

$$z = d \cos(n_0 t + \gamma) \quad (12)$$

Dedúcese de aquí que el movimiento que el electrón realiza en el campo magnético, puede considerarse descompuesto en tres movimientos vibratorios: uno rectilíneo, definido por la ecuación (12), y dos circulares, representados por los pares de ecuaciones (6) y (7). Quiere esto decir que un foco luminoso que en ausencia de campo magnético produzca una raya espectral única, emitirá tres clases de luz monocromática, con polarización peculiar, si está situado en un campo magnético.

Examinando en este caso, con un espectroscopio potente, la luz que el foco emite, obtendrase, pues, en general, un espectro formado por tres rayas, que se denomina *tripleto*. Y digo en general, porque sabido es que si se efectúa la observación en la dirección de las líneas de fuerza, se verán solamente dos rayas (*doblete*).

Las rayas de un tripleto producido por luz emitida perpendicularmente á las líneas de fuerza, estarán rectilíneamente polarizadas. A la raya mediana, de frecuencia n_0 , le corresponden vibraciones dirigidas según dichas líneas, y las rayas laterales tendrán por plano de polarización uno paralelo á las líneas de fuerza y á la dirección visual. Aparecen las rayas laterales rectilíneamente polarizadas; porque, no sien-

do nuestra retina impresionable por vibraciones longitudinales, los movimientos circulares (6) y (7) producirán en nosotros el mismo efecto fisiológico que los rectilíneos definidos, cuando el eje x coincide con la dirección visual, por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= -a_1 \operatorname{sen}(n_1 t + \alpha_1) \\ y &= a_2 \operatorname{sen}(n_2 t + \alpha_2). \end{aligned}$$

Cuando se observa el fenómeno en la dirección de las líneas de fuerza, sólo son visibles las rayas laterales; porque á la raya central correspóndele entonces vibraciones longitudinales. Las rayas del doblete aparecerán polarizadas circularmente y en sentidos contrarios.

Si la raya espectral original no es suficientemente fina, ó el campo magnético suficientemente intenso, las componentes del triplete resultan parcialmente superpuestas, siendo ésta la causa del ensanchamiento que Zeeman observó en las rayas espectrales, al hacer sus primeras investigaciones acerca de la influencia del magnetismo sobre la emisión de la luz.

Los bordes de la raya espectral ensanchada, que debe ser considerada como un triplete incipiente, ó al menos como un triplete especial, estarán polarizados del mismo modo que las componentes exteriores de un triplete normal. La región central de la citada raya, emitirá, ó luz polarizada ó luz natural; en el primer caso, entre los bordes de la raya y su región central, existen dos zonas que emiten luz natural. Estas son las *formas de transición* que Zeeman, que fué quien las observó y explicó (*), distingue respectivamente con los nombres de *triplete a* y *triplete b*.

Examinado sin nicol el triplete *a*, presenta un aspecto muy análogo al de un doblete; porque, por ser resultantes de la

(*) P. Zeeman.— Sur des doublets et des triplets, produits dans le spectre par des forces magnétiques extérieures. — 1897.

superposición de dos componentes, las regiones que emiten luz natural tienen mayor brillo que la región central y ésta parece oscura por contraste.

A los dobletes corresponde, como forma de transición única, una raya espectral ensanchada, cuyos bordes están polarizados circularmente, y cuya región central emite luz natural.

Zeeman, utilizando una red de Rowland de seis pies de radio y de 14.438 trazos por pulgada inglesa, y observando en el espectro de segundo orden, logró ver, en 1897, el doblete y el triplete a de la raya $480 \mu\mu$ del Cd. De las formas de transición, la denominada triplete a es la que exige, para ser observada, campo magnético más intenso.

Continuando sus investigaciones, Zeeman descubrió el *triplete normal* de la citada raya del Cd. Con anterioridad á estos trabajos de Zeeman, Egoroff y Georgiewsky habían demostrado que el campo magnético modifica la raya $480 \mu\mu$.

El descubrimiento del triplete normal fué seguido de una serie numerosísima de trabajos acerca de la descomposición magnética de las rayas espectrales. Preston, Cornu y otros físicos dieron pronto á conocer otros tripletes, mediante observaciones concordantes por completo con la teoría de Lorentz; pero, en cambio, descubrieron rayas espectrales que, en virtud del fenómeno de Zeeman y para observaciones efectuadas perpendicularmente al campo, descompónense, contra lo previsto por dicha teoría, en cuatro, seis, nueve ó más componentes (*cuadruplete, sextete, nonete, etc.*)

Paso ahora á ocuparme detalladamente en una de las consecuencias á que se llega en la teoría elemental de Lorentz, por ser de importancia grande para el trabajo que desarrollo.

De experimentos realizados, dedúcese que las frecuencias n_1 y n_2 , correspondientes á las rayas laterales de un triplete, difieren muy poco de la frecuencia n_0 de la raya mediana; por consiguiente, el coeficiente $\frac{eH_z}{mc}$, que figura en las re-

laciones (8) y (9), debe ser muy pequeño comparado con n_0 , y podemos establecer:

$$n_1 = n_0 + \frac{eH_z}{2mc}, \quad n_2 = n_0 - \frac{eH_z}{2mc} \quad (13)$$

ó tambien

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{eH_z}{4\pi mc^2} \lambda_0^2, \quad \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{eH_z}{4\pi mc^2} \lambda_0^2 \quad (14)$$

siendo λ_1 , λ_0 , λ_2 las longitudes de onda de las tres componentes.

Los tripletes predichos por la teoría de Lorentz son, pues, figuras simétricas, y tienen por eje de simetría la raya espectral original. Además, tales tripletes son simétricos desde el punto de vista de la intensidad luminosa; porque, según es fácil hacer ver, las componentes laterales tienen intensidades iguales entre sí.

Como hemos dicho, las primeras medidas conducían todas á resultados completamente concordantes con la teoría y, por tanto, á tripletes simétricos; pero de trabajos que Zeeman (*), Jack y Gmelin (**) realizaron, en 1908, resulta que la componente mediana del triplete 5791 u. A. del *Hg* cambia de longitud de onda al variar de intensidad el campo magnético actuante, ocupando siempre las componentes laterales posiciones simétricas respecto de la raya inicial.

Esta asimetría, no sólo es inexplicable dentro de la teoría elemental expuesta, sino que también lo es en la teoría ge-

(*) *P. Zeeman.*—Magnetic resolution of spectral lines and magnetic force.—1907.

P. Zeeman.—New observations concerning asymmetrical triplets.—1908.

P. Zeeman.—Changement de longueur d'onde de la raie médiane d'un triplet dans un champ magnétique.—1909.

(**) Véase *Voigt.*—Magneto-optik, pág. 178.

neral que Lorentz dió (*) y que conduce á admitir la descomposición compleja de rayas espectrales.

Voigt ha dado una explicación posible del desplazamiento de la componente mediana (**). Nos ocuparemos de la teoría de Voigt en el capítulo V de esta Memoria. Como veremos, nuestros resultados experimentales concuerdan en parte con los de esta teoría.

Conviene hacer notar que la asimetría es circunstancia que puede presentarse en el caso más general del fenómeno de Zeeman. Dufour, por ejemplo, ha publicado recientemente un trabajo (***), del que resulta que varias de las rayas del *Cr.*, una vez descompuestas en la forma compleja que les es propia, muestran asimetrías de ambas clases: *asimetrías de posición* y *asimetrías de intensidad*.

Lo dicho basta para afirmar que la descomposición magnética de las rayas espectrales es un fenómeno muy complicado; pero para hacer resaltar ésto aún más, me permitiré recordar aquí que de una de las últimas investigaciones de Zeeman, realizada, mediante el *efecto inverso*, en colaboración con el Dr. Winawer (****), resulta que, de acuerdo con las recientes predicciones de Lorentz (*****), en el caso en que la dirección de observación forma un cierto ángulo con las líneas de fuerza, y siendo éstas y aquélla horizontales, los ejes de las elipses de vibración de las componentes exteriores de los *seudo tripletes* D_1 y D_2 , del *Na*, están inclinados respecto de la vertical, y las vibraciones de las compo-

(*) Véase Rapports sur la physique de 1900.—(Congrès international de physique), III, pág. 1.

(**) Voigt—Magneto-und elektrooptik, p. 261.

(***) Dufour.—Journal de Physique (Serie 4.^a, t. IX, Abril 1910).

(****) P. Zeeman y B. Winawer.—La décomposition magnétique des raies d'absorption et son rapport avec le spectre des taches solaires.—1911.

(*****) H. A. Lorentz. — Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles.—(Serie 2.^a, t. XV, 429, 1910).

nentes medianas son rectilíneas, aunque no horizontales, ó elípticas, sin eje horizontal.

Todo hace comprender lo difícil que es el formular una teoría que permita prever cuantas circunstancias pueden presentarse en el fenómeno de Zeeman.

Para terminar este capítulo, réstame sólo recordar que, en virtud de la expresión

$$\frac{e}{m} = \frac{\Delta\lambda \cdot 2\pi c^2}{H\lambda^2}, \quad (15)$$

que se deduce fácilmente de las fórmulas (14), puede encontrarse, para cada raya espectral, el valor de la relación de la carga á la masa del electrón móvil, con sólo medir la intensidad del campo magnético actuante y la diferencia $\Delta\lambda$ entre las longitudes de onda de las rayas laterales del triplete correspondiente. Ya antes del descubrimiento del primer doblete, Zeeman, fundándose en que, según sus medidas, el ensanchamiento de las rayas del sodio es de 1/40 de la distancia que las separa, en un campo magnético de intensidad 10^4 , fijó en 10^7 el orden de magnitud de $\frac{e}{m}$, suponiendo expresada e en unidades electromagnéticas *C. G. S.* Esta cifra parecía ser demasiado elevada; pero hoy está comprobada por otras medidas, como, por ejemplo, las realizadas con los iones que constituyen los rayos catódicos.

Cabe ahora preguntarse ¿son iones positivos ó iones negativos los que, moviéndose, producen la luz? La experiencia ha demostrado que, en un doblete, la componente correspondiente á las vibraciones circulares *sinistrorsum* está situada hacia el violeta; por tanto, $n_2 > n_1$ y $e < 0$. Los iones móviles son, pues, negativos, ó, por lo menos, á los iones negativos corresponden las órbitas mayores.

II

EL MÉTODO DE ESPECTROSCOPIA INTERFERENCIAL DE FABRY Y PEROT

De la exposición que en el capítulo I hemos hecho del fenómeno de Zeeman, dedúcese que éste sólo puede ser observado y estudiado con aparatos espectroscópicos cuyo poder de resolución sea grande. Las medidas relativas á la asimetría de posición de los tripletes son de las que presentan mayor dificultad; porque el desplazamiento de la componente mediana es siempre extraordinariamente pequeño: 0,04 u. A., aproximadamente, en un campo de 30.000 Gauss para la del triplete 5791 u. A.

Para realizar los estudios de asimetría de tripletes á que esta tesis se refiere, me valí del espectroscopio interferencial ó patrón de Fabry y Perot. Zeeman fué quien demostró la utilidad del patrón en las investigaciones relativas á su fenómeno, y á dicho sabio débense también los primeros trabajos que acerca de los tripletes asimétricos se realizaron con este aparato.

Debo, al comenzar este capítulo, ocuparme del modo de formación y de las propiedades de los anillos de interferencia del aparato de Fabry Perot; pero siendo tales anillos una modificación de los originados entre dos superficies planas y paralelas, más que conveniente, creo indispensable el recordar aquí la teoría de semejante clase de franjas.

Franjas de las láminas paralelas.

Sean KL y $K'L'$, MN y $M'N'$, superficies, todas planas y paralelas entre sí, que limitan dos láminas de vidrio.

Un rayo de luz monocromática, SA , que incida con ángulo i sobre la superficie KL , se refleja parcialmente al llegar á C , originando dos rayos: uno que camina según CD ,

sufre en D una reflexión parcial y emerge según $P'R'$, y otro cuya marcha es CPR (fig. 1.^a)

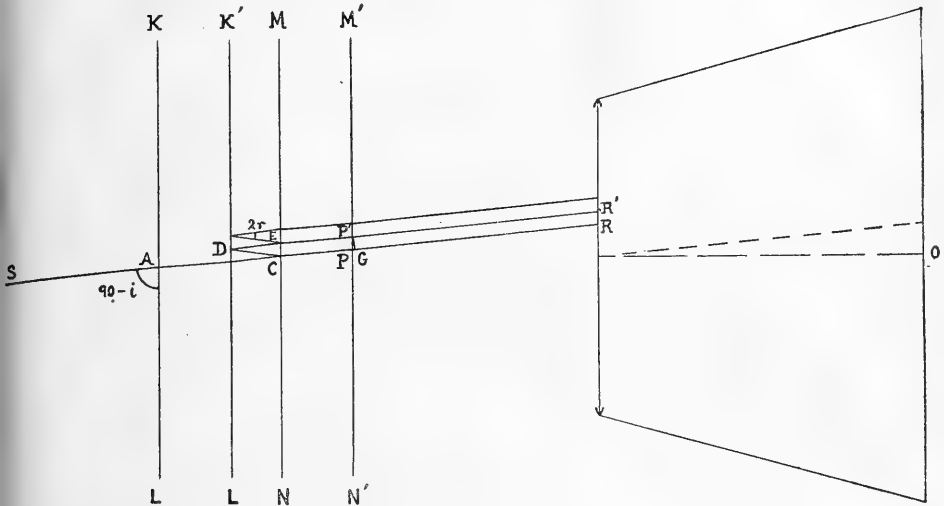


Figura 1.^a

Denominando e á la distancia que separa las dos láminas de vidrio, n al índice del medio interpuesto y r al ángulo de refracción en este medio, la diferencia de marcha geométrica entre las ondas correspondientes á los dos rayos emergentes es:

$$\Delta = 2ne \cos r. \quad (16)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta &= n(DC + DE) - PG = \frac{2ne}{\cos r} - PP' \operatorname{sen} i = \\ &= \frac{2ne}{\cos r} - 2ne \operatorname{tg} r \operatorname{sen} r = 2ne \cos r. \end{aligned}$$

Cuando r ó i sea tal que

$$\Delta = 2ne \cos r = k\lambda,$$

siendo k un número entero cualquiera y λ la longitud de onda, los rayos emergentes interferirán de un modo concordante, y habrá interferencia discordante si

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Iluminando con luz monocromática emitida por un foco puntual el aparato constituido por las láminas paralelas, se obtendrá, pues, un sistema de franjas localizado en el infinito. Pueden, según esto, observarse las franjas, directamente ó por medio de una lente, sobre el plano focal principal de otra lente convergente.

Cuando el eje óptico de la lente objetiva, y por tanto el del anteojo astronómico que ésta y la primera forman, es perpendicular á las superficies que separan las láminas de vidrio, las franjas son circulares y tienen todas por centro el punto O , en que el eje óptico corta al plano focal.

A cada punto de éste corresponde, evidentemente, un sólo valor de Δ , que será el mismo para posiciones distintas del punto luminoso. En lugar de un foco puntual, puede, pues, emplearse un foco extenso para producir, con limpieza perfecta, el sistema de franjas (*).

Es evidente, además, que de la posición de las franjas que da una luz simple podrá deducirse su longitud de onda.

Hasta aquí, he supuesto que la luz incidente es monocromática. Voy á decir ahora, en dos palabras, lo que en otro caso sucede.

El fenómeno que un aparato interferencial cualquiera produce con luz compuesta, es simple superposición de los que originaría, separadamente, con cada una de las luces monocromáticas componentes, porque, como se sabe, los movi-

(*) Véase *J. Macé de Lépinay*.—Franges d'interférence, capítulo III.

mientos vibratorios de períodos diferentes no pueden interferir.

Si las radiaciones incidentes son lo suficientemente próximas para que el ojo no pueda distinguir entre ellas diferencia alguna de color, la intensidad luminosa en cada punto del sistema de franjas será la suma de las intensidades que corresponderían al mismo punto en los sistemas de franjas dados por las luces monocromáticas componentes. El cálculo permite demostrar que, en este caso, la intensidad luminosa varía en función de Δ según una senoide cuyos mínimos dependen de Δ . La visibilidad de las franjas, que varía esencialmente con la constitución de la luz incidente, cambiará, pues, con Δ .

El método de espectroscopia interferencial de Michelson se funda precisamente en el estudio de los cambios que experimenta la visibilidad del sistema de franjas al variar e .

Realmente, para desarrollar de un modo completo la teoría de las franjas de las láminas paralelas, debiera tenerse en cuenta la influencia de todas las ondas transmitidas previo un número par de reflexiones parciales del rayo luminoso sobre las superficies $K'L'$ y MN ; pero, á causa del poco poder reflector del vidrio, los movimientos vibratorios que corresponden á las ondas que han sufrido más de dos reflexiones parciales, tienen amplitud muy pequeña, y podemos, por tanto, considerar simplemente los dos primeros rayos de cada serie.

Fundamentos del método de espectroscopia interferencial de Fabry y Perot.

El patrón de Fabry y Perot consiste en un sistema de dos láminas paralelas con superficies reflectoras semi-plateadas. El gran poder reflector de éstas hace que la intensidad disminuya muy lentamente en el sistema que forman las infinitas ondas luminosas dadas por una onda plana cualquiera.

Las ondas de cada sistema son todas planas, paralelas y equidistantes.

De lo dicho dedúcese que, á diferencia de lo que ocurriría si las superficies reflectoras no estuviesen plateadas, en el estudio teórico de las interferencias producidas por el patrón de Fabry y Perot, será preciso tomar en consideración todas las ondas luminosas emergentes.

Los anillos de Fabry y Perot prodúcense, pues, por un mecanismo completamente análogo al de formación de los espectros de diverso orden de una red de difracción. Esto basta para explicar el gran poder de resolución del patrón de Fabry y Perot: cada anillo es asimilable á una raya espectral, ó, mejor dicho, á un espectro.

Insistiremos algo acerca de este punto importantísimo.

La diferencia de marcha entre dos ondas consecutivas cualesquiera de una serie es constante. Cuando esta diferencia, que llamaremos Δ , sea igual á un número entero de longitudes de onda, todas las ondas de la serie interferirán de un modo concordante. Por el contrario, si $\frac{\Delta}{\lambda}$ difiere, aunque sea en poco, de un número entero, á cada onda podrá buscársele otra, dentro de su serie, que esté en discordancia completa con ella. Los anillos luminosos que produce el interferómetro de Fabry y Perot serán, pues, muy brillantes y estrechos, y estarán separados por anillos muy oscuros y muy anchos (*). Dos anillos luminosos del mismo orden sólo se superpondrán, pues, parcialmente cuando las luces monocromáticas de que proceden difieran muy poco en longitud de onda.

Como los resultados de este trabajo dan idea clara del poder de resolución del patrón, no nos detendremos en

(*) Véase en *Annales de Chimie et de Physique*, 7.^a serie, t. XII dec. 1897, un trabajo de Fabry y Perot en que se da á conocer la forma de la curva que relaciona la diferencia de marcha con la intensidad, para una lámina isótropa de caras semi-plateadas.

cálculos numéricos que, por otra parte, pueden verse en uno de los trabajos de Fabry y Perot (*).

Conviene advertir, antes de pasar adelante, que, con el plateado de las superficies reflectoras, no cambian de posición, aunque sí de aspecto, los anillos producidos por el sistema de láminas.

Vamos ahora á deducir varias fórmulas importantísimas en nuestro trabajo. Aunque partiremos de una relación aplicable, no sólo al patrón de Fabry y Perot, sino también al aparato que constituyen dos láminas paralelas no plateadas, la mayor parte de las fórmulas que obtengamos no tendrán aplicación práctica en este último caso, por tratarse de un aparato de poco poder de resolución.

La fórmula fundamental, ya demostrada (**), es

$$\Delta = 2ne \cos r,$$

siendo e el espesor del patrón, n el índice del medio que separa las dos láminas y r el ángulo de refracción en este medio cuando la diferencia de marcha entre dos rayos emergentes consecutivos es Δ (***) .

Si $n = 1$, $r = i$, y la fórmula anterior se convierte en la siguiente:

$$\Delta = 2e \cos i \quad (17)$$

Ahora bien; como siempre se observan los anillos de menor radio, que corresponden á valores muy pequeños de i , podemos admitir que

$$\Delta = 2e - ei^2.$$

(*) *Fabry et Perot.*—Théorie et applications d'une nouvelle méthode de spectroscopie interférentielle.—Annales de Chimie et de Physique, 7.^e serie, t. XVI, Jan. 1899.

(**) Véase la página 469.

(***) Las pérdidas de fase por reflexión sobre la plata darían lugar á un término correctivo despreciable.

Para un anillo luminoso cualquiera $\Delta = k\lambda$, siendo k un número entero, que llamaremos orden de interferencia del anillo. El ángulo de incidencia, i_k , correspondiente á un anillo de orden k , hállase definido por la relación

$$k\lambda = 2e - e i_k^2 \quad (18)$$

si es pequeño el radio, r_k , del anillo. Esto, como ya hemos dicho, es lo que en la práctica sucede.

Llamando f á la distancia focal de la lente empleada para recoger el sistema de anillos,

$$i_k = \frac{r_k}{f},$$

y sustituyendo este valor en la fórmula (18), resulta:

$$k\lambda = 2e - e \frac{r_k^2}{f^2} \quad (19)$$

De esta relación, ó de la relación (17), dedúcense las conclusiones siguientes:

1.^a De dos anillos de una misma luz monocromática, tiene mayor radio aquel cuyo orden de interferencia es menor.

2.^a Toda variación de longitud de onda se traducirá en un cambio en los diámetros de los anillos. Si la longitud de onda aumenta, el diámetro de cada anillo disminuye. Cuando, por el contrario, la longitud de onda disminuye, los anillos se agrandan.

3.^a Si aumenta el espesor del patrón, los anillos se agrandan, y los anillos disminuyen de diámetro si disminuye el espesor del patrón.

(Continuará.)



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
XVIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia tercera.....	379
XIX.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia cuarta...	403
XX.—Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i>	433
XXI.—La asimetría de los tripletes de Zeeman, por <i>Manuel Martínez-Risco y Macías</i>	456

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID.

TOMO X. - NÚM. 7.

Enero de 1912.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXII. — Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

En la última conferencia explicamos tres teoremas fundamentales, relativos al flujo de fuerza, de diversas masas discontinuas, por una superficie cerrada.

Cada teorema se refería á un caso distinto, según estaban las masas fuera del volumen, en el interior ó sobre la superficie misma.

Nos fijamos, principalmente, en el caso de masas ponderables, es decir, de fuerzas atractivas; pero dijimos que los tres teoremas se aplicaban en términos casi idénticos al de masas eléctricas, en el cual, las fuerzas podían ser de atracción ó de repulsión, según los signos de cada una de las masas; y llamamos muy principalmente la atención sobre esta circunstancia: Que los tres teoremas de que se trata, en la Física antigua, son teoremas puramente abstractos, y por decirlo así, hipotéticos. Cuando hablábamos de fuerzas hipotéticas, eran estas fuerzas ideales, ó si se quiere puramente simbólicas para todos los puntos del espacio en que no existían *masas reales*.

Y otro tanto puede decirse respecto al flujo de dichas fuerzas. Para que las fuerzas y el flujo de fuerzas pasen de ser una abstracción puramente matemática, á ser una realidad

física, es preciso que en cada punto de los que se consideren, se coloque una masa igual á 1, que llamábamos *masa de prueba*.

Pero agregábamos, que todos estos conceptos, que en la Física antigua y aun en el período de transición, eran puramente abstractos, tomaban realidad física en las teorías modernas, á partir de las hipótesis de Faraday, de las teorías de Maxwell y de la campaña, si vale la palabra, contra las acciones á distancia de la Astronomía y de la Mecánica clásica.

*
* *

Para terminar el estudio de las atracciones y de la potencial en el caso de masas ponderables discontinuas, sólo nos falta tratar de un punto ó de un problema, que es la generalización de otro problema ya estudiado en las conferencias precedentes.

Hemos considerado en ellas un sistema de masas ponderables m, m_1, m_2, \dots sujetas á atracciones mutuas, expresadas estas atracciones por la ley newtoniana.

Hemos supuesto fijas las masas m_1, m_2, \dots y haciendo variar la posición de la masa restante m , hemos determinado las componentes de la atracción, que sobre la masa m ejercerían las otras masas, expresando dichas componentes por medio de las derivadas de la potencial.

Precisamente, con este motivo, estudiamos este concepto de *potencial*, que es de importancia suma en toda la Física moderna y que hasta ha entrado en el lenguaje vulgar por las múltiples aplicaciones de las corrientes eléctricas á diferentes servicios de la vida práctica.

Definimos, pues, lo que significaba la palabra *potencial*, aplicada á la acción de las masas m_1, m_2, \dots sobre la masa m ; y decíamos, siguiendo la definición de casi todos los autores:

La potencial del sistema fijo m_1, m_2, \dots sobre m en P_0 , es el trabajo que dicho sistema ejecutaría sobre la masa m , si esta masa, con velocidades infinitamente pequeñas, viniera por cualquier línea desde lo infinito á la posición P_0 .

El valor de dicho trabajo, vimos que estaba definido por la expresión

$$m \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots \right)$$

O si la masa m fuese igual á la unidad, por el paréntesis tan sólo.

Más otros autores, y á veces, los mismos que emplean la anterior definición, usan esta otra: La potencial del sistema m_1, m_2, \dots sobre m , en la posición P_0 , es el trabajo exterior que necesitaríamos aplicar para transportar m desde P_0 al infinito, en presencia y bajo la acción de la masa m_1, m_2, \dots ; advirtiendo que siempre en el movimiento la velocidad ha de ser infinitamente pequeña, de modo que, en cada instante, el trabajo exterior sólo diferirá en cantidades infinitamente pequeñas del trabajo de las atracciones; ó sea en la cantidad puramente precisa para vencerlas, é ir alejando la masa m , lentamente, hasta el infinito.

En ambas definiciones, es claro que el trabajo desarrollado es el mismo y el mismo el valor numérico de la potencial; pero en rigor ambas definiciones no son idénticas en absoluto: el uno es trabajo espontáneo y consumido; el otro es trabajo que se aplica y acumula.

Así, pues, como ya explicábamos en la conferencia precedente, la masa m , donde tiene una potencial representada por la expresión anterior no es en P_0 , sino en el infinito, con relación á P_0 .

Cuando está en el infinito es cuando se puede decir que el resorte está estirado y en disposición de desarrollar un trabajo.

Cuando ha llegado á P_0 , este trabajo está ya consumido ó gastado.

Pero, en fin, estas no son distinciones fundamentales, ni que trastornen la teoría, con tal que en cada caso se precise el sentido de la palabra potencial.

Y continuemos ahora la generalización del problema, tras esta digresión que es un recuerdo de lo que ya expusimos en la conferencia precedente y aun en las conferencias de otros cursos.

*
* * *

El problema vamos á generalizarlo de este modo.

Hasta aquí hemos supuesto, que sólo la masa m podía moverse bajo la acción de las atracciones de las restantes.

Ahora vamos á suponer, que pueden moverse todas las masas bajo sus mutuas atracciones, siempre con velocidades infinitamente pequeñas, para no complicar este problema de los trabajos desarrollados con el problema de las fuerzas vivas.

Se moverán, pues, todas las masas, pero muy *lentamente*; y hasta podremos fijar *las curvas* á lo largo de las que se han de mover, excluyendo, en absoluto, todo rozamiento y toda resistencia pasiva.

Para que cualquier masa se mueva sobre cualquier curva, basta introducir ciertas fuerzas de presión normales á dicha curva, toda vez que el trabajo de estas fuerzas de presión será nulo, por ser normales al elemento recorrido.

En rigor, tales hipótesis equivalen á introducir enlaces que no impidan el movimiento, ni alteren los trabajos de las fuerzas de atracción.

Todo esto es elemental, pero conviene consignarlo explícitamente para evitar á los alumnos dudas y confusiones.

Y admitiendo que todas las masas pueden moverse simul-

táneamente, si es preciso, no hay para qué hacer una distinción especial de la masa m .

En adelante prescindiremos de ella, y consideraremos un sistema formado por las masas m_1, m_2, \dots, m_n , sujetas á atracciones mutuas según la ley newtoniana.

En todo sistema de puntos materiales m_1, m_n, \dots ocupando posiciones determinadas, y constituyendo, en cierto modo, una figura geométrica, por lo cual á dicho sistema en tal posición se le puede llamar abreviadamente *configuración de los expresados puntos*; cuando, además, están sometidos á fuerzas interiores y recíprocas, que en nuestro caso serán fuerzas obedeciendo á la ley newtoniana; *hay una cantidad importantísima* que considerar, que afecta al sistema y que depende de su configuración, de modo que si ésta varía, varía *la cantidad* de que se trata.

Y esta cantidad es la que se llama *potencial del sistema*, correspondiente á tal configuración.

En rigor, esta cantidad, esta función, porque si depende de la configuración, depende de las coordenadas de todos los puntos, no es otra cosa que lo que llamábamos potencial en las conferencias anteriores.

Es aquel mismo concepto, pero generalizado.

Allí la configuración era fija para todos los puntos, menos uno, el de la masa m . Y sólo porque éste variaba de posición, la configuración variaba.

Ya recordarán mis alumnos que la potencial dependía y era función, por lo tanto, de las coordenadas x, y, z del punto, ó sea de la posición que ocupaba la masa m .

Ahora vamos á suponer, que todos los puntos pueden variar, en las condiciones antes explicadas, y la configuración dependerá de todos ellos.

Lo cual conduce á dar á este concepto de potencial un sentido más amplio que hasta aquí.

Ni es ésta en rigor la primera vez que tratamos del concepto de potencial generalizado, porque en el tercer curso

de esta asignatura, al explicar la teoría de la elasticidad por el método de Poincaré, tratamos ya de la potencial, y precisamente de este concepto partimos.

Concepto importantísimo, repetimos, en todas las teorías modernas, porque la potencial expresa trabajo y expresa energía, y este concepto de la energía es hoy preponderante en la ciencia, y hay obras modernas muy importantes, que en este concepto de la energía pretenden fundar, no sólo la Mecánica, sino toda la Física y aun la explicación de todos los fenómenos del cosmos.

Limitémonos nosotros á estos conceptos puramente mecánicos, íntimamente enlazados entre sí, y tan enlazados, que casi coinciden: *La función de fuerzas*, la *potencial* y la *energía* en general, bajo sus dos formas mecánicas ya clásicas, *energía actual* y *energía potencial*. Conceptos muy claros, por más que en ellos muerda á veces la crítica, al menos con la claridad relativa, que á la inteligencia humana le es dado alcanzar.

*
* *

Sea, pues, un sistema de masas ponderables (m_1, m_2, m_3, \dots) que también podrán ser, generalizando esta teoría, masas eléctricas ó magnéticas.

Supongamos que á la *configuración* geométrica que representan, se la designa, para abreviar, por la letra C .

En tal sistema, á tal configuración, corresponde una potencial que será un número y lo designaremos por P .

Veremos bien pronto, que este número P designa un trabajo mecánico.

Si la configuración varía y se convierte en otra distinta C' la potencial variará, tomará otro valor P' .

De modo que generalizando el concepto de función podríamos decir que P es función de C .

Y vamos ahora á definir esta palabra potencial para un sistema de varios puntos.

Para fijar las ideas supongamos que las masas m_1, m_2, \dots son masas ponderables y que dos á dos se atraen según la ley newtoniana.

Dice Mr. Appell en su gran tratado de Mecánica racional lo que traducimos literalmente:

«La energía potencial de varios puntos en cierta configuración, es el trabajo total que producirían las fuerzas atractivas si los puntos en cuestión infinitamente distantes unos de otros al principio, vinieran á ocupar las posiciones que les corresponde en la configuración considerada.»

Y agrega á continuación:

«Se puede decir, por lo tanto, que esta energía potencial es el trabajo de las fuerzas exteriores, que sería preciso que actuasen sobre el sistema de puntos en la configuración considerada, para separar estos puntos y llevarlos en reposo á distancias infinitas unos de otros.»

Pues aquí volvemos á una observación que ya hemos hecho al tratar de la potencial de un solo punto perteneciente á un sistema.

En el fondo y, apurando los términos, ambas definiciones no son absolutamente equivalentes; porque si bien es cierto que el valor numérico del trabajo es el mismo en ambos casos, ya se dejen venir los puntos del infinito á la configuración C , ya se deshaga esta configuración alejando los puntos á distancias infinitas unos de otros, ambos trabajos, como hicimos observar en otra ocasión análoga, tienen signos contrarios. No es lo mismo estirar un resorte, que una vez estirado dejarlo que vuelva á la primitiva posición, por más que si no hay pérdida ambas energías sean numéricamente iguales.

De todas maneras esta observación, en el fondo, no tiene ninguna transcendencia.

De las dos definiciones precedentes tomemos la primera y fijemos bien su sentido.

Dado el sistema de puntos m_1, m_2, m_3, \dots imaginemos que, desde el infinito y á distancias infinitas unos de otros, obedeciendo á sus atracciones mutuas, caminan con velocidades infinitamente pequeñas y vienen á constituir la configuración C .

Las tuerzas atractivas habrán desarrollado sobre cada punto determinado trabajo.

La suma de todos estos trabajos es lo que llamamos potencial del sistema, ó si se quiere, energía potencial del sistema, correspondiente á la configuración C .

Es el trabajo que le ha costado al sistema, la energía que ha necesitado gastar, para atraerse á sí mismo desde el infinito, hasta formar la figura C .

Podíamos decir que es el trabajo de formación del sistema.

Y para destruirlo es claro que necesitaríamos *un trabajo idéntico*, que quedará *almacenado*, si vale la palabra, en dicho sistema.

Decimos *es claro*, y sin embargo, no es tan claro, ni tan evidente, y á no ser por las hipótesis que hemos establecido y porque se trata de casos en que existe la función de fuerzas, esto que acabamos de afirmar, que es tan claro, no sólo sería obscuro, sino que sería absolutamente falso.

Fijemos las ideas y aclaremos los conceptos.

Cualquier punto A de la configuración cuando pasa á un punto A' del infinito, *sea cual fuere el camino que siga*, determinará el mismo trabajo de las fuerzas del sistema, si quedan inmóviles los demás puntos; porque existe, como hemos supuesto, una función de fuerzas.

Y es más: al volver desde el punto A' al punto A , *sea cual fuere este camino de vuelta*, el trabajo desarrollado desde A' asta A será hnuméricamente igual y de signo contrario al desarrollado desde A á A' .

Y como esto es aplicable á todos los puntos de la configuración, la duda que antes indicábamos queda desvanecida.

Por otra parte el valor de la potencial es único, con tal

que en el infinito las masas m_1, m_2, \dots estén á infinita distancia unas de otras, como vamos á ver inmediatamente calculando dicho valor de la potencial.

Podemos hacer este cálculo ya partiendo de las componentes, ya de las fuerzas mismas; este es el sistema que ahora seguiremos.

Basta para ello combinar los puntos dos á dos y alejarlos á una distancia infinita. Y sumar los trabajos correspondientes, para cada par, á todas estas deformaciones.

Consideremos las masas m_1 y m_2 , que en la configuración primitiva suponemos que están á la distancia r_{12} .

La fuerza atractiva que estas masas ejercen sabemos que es

$$K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Si la distancia crece en una cantidad infinitamente pequeña de dr_{12} , el trabajo desarrollado será evidentemente

$$- \frac{K m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12}.$$

Porque la fuerza se ejerce siempre en la dirección de la distancia; la proyección del camino que recorre m_1 , suponiendo m_2 fijo, es precisamente la diferencial de la distancia y el trabajo es resistente, por lo cual le damos el signo menos. Es decir, la fuerza actúa en sentido contrario del camino recorrido.

El trabajo total hasta el infinito será,

$$\begin{aligned} \int_{r_{12}}^{\infty} -K \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} dr_{12} &= \left(K \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right)_{r_{12}}^{\infty} = K \frac{m_1 m_2}{\infty} - K \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \\ &= -K \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

De este modo hemos alejado á la masa m_1 hasta el infinito, quedando todas las demás fijas, y hemos determinado el trabajo que sobre ella ejerce la masa m_2 , y sólo la masa m_2 .

Considerando ahora las masas m_1 y m_3 podríamos repetir el cálculo anterior, obteniendo una expresión de la misma forma que la precedente; y repitiendo esto para todas las demás masas tendríamos, como ya hemos visto en otras conferencias (y prescindiendo del signo —), para el trabajo resistente sobre m_1 al pasar al infinito

$$\frac{K m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{K m_1 m_3}{r_{13}} + \dots + \frac{K m_1 m_n}{r_{1n}}.$$

Ya hemos transportado la masa m_1 al infinito; no hay que contar con ella porque está á una distancia infinita de las masas restantes, y éstas, por definición, aun al llegar al infinito, han de quedar á distancia infinita de m_1 .

El sistema queda reducido á m_2, m_3, \dots, m_n ; pues alejamos m_2 hacia el infinito, y tendremos un resultado análogo al precedente para el trabajo sobre m_2 , en el sistema m_3, \dots, m_n al pasar al ∞ :

$$K \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dots + K \frac{m_2 m_n}{r_{2n}},$$

De este modo tendremos en el infinito las dos masas m_1, m_2 y no habrá que contar con ellas, al estudiar las acciones de las demás masas.

Continuando de este modo hasta las últimas masas

$$m_{n-1}, m_n$$

habremos obtenido una serie de expresiones de la forma

$$K \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

en que estarán combinadas las masas, dos á dos, pero sin repetición, de todos los modos posibles.

En suma, el trabajo resistente que han desarrollado las atracciones cuando todas las masas se han transportado al infinito y á distancias infinitas unas de otras, ó si se quiere el trabajo exterior y positivo que ha sido necesario emplear para esta dispersión, será de la forma

$$S K \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

en que hay que combinar las masas y las distancias, como antes hemos explicado.

Este valor único es el que se llama potencial del sistema; es decir, el trabajo necesario para deshacerlo, aparte del signo; ó el trabajo que desarrolla al constituirse desde el infinito.

* * *

A esta potencial, ó energía potencial del sistema, se le puede dar otra forma.

Se puede alejar la masa m_1 hasta el infinito ó suponer que viene desde el infinito hasta el punto que le corresponde en la configuración, y aparte del signo, hemos visto que el trabajo desarrollado será

$$K m_1 \left(\frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right)$$

ó abreviadamente,

$$K m_1 V_1$$

llamando V_1 al paréntesis $\frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n}$ que sabemos

que es la potencial del sistema para el punto m_1 cuando m_1 y K son iguales á la unidad.

Del mismo modo, si volvemos á colocar m_1 en su posición y alejamos m_2 , el trabajo desarrollado será, con notaciones análogas á la precedente,

$$K m_2 V_2;$$

es decir, que si V_1 se refería á todas las masas menos m_1 , V_2 se referirá á todas las masas menos m_2 .

Repitiendo lo mismo para m_3 y sumando, obtendremos

$$S_1^n K m_i V_i$$

Esta expresión se compone de elementos idénticos á la primera que obtuvimos para la potencial, es decir $\frac{K m_i m_j}{r_{ij}}$ pero en la primera expresión combinábamos cada subíndice con los que le seguían, y nada más; y aquí combinamos cada subíndice con todos los restantes, con lo cual duplicamos los términos. Por ejemplo, en la primera fórmula teníamos

$$\frac{K m_1 m_2}{r_{12}} \text{ y en la última } \frac{K m_2 m_1}{r_{12}} \text{ y } \frac{K m_2 m_1}{r_{21}}$$

que son iguales y se duplican.

De suerte que esta última expresión es doble de la primera, y podremos escribir:

Potencial total del sistema:

$$SK \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} S_1^n m_i V_i.$$

Ambas fórmulas expresan, como hemos dicho, el trabajo que han desarrollado todas las atracciones del sistema desde

una dispersión infinita de todas ellas hasta la configuración que tienen.

O también significan en valor numérico igual al anterior, el trabajo que habría que emplear para dispersar el sistema.

* *
* *

De los tres teoremas que explicamos en la conferencia precedente, se pueden deducir muchas consecuencias importantes.

1.^a Dada una configuración C_0 , esta configuración ó sistema tendrá, en un punto cualquiera del espacio, una potencial determinada, que se expresará por una función $U(x, y, z)$ cuya forma ya conocemos, pues se sabe que es la suma de términos $\frac{m_1}{r_1}$, en que las r son funciones de x, y, z , á saber:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Es, por lo tanto, una función algebraica perfectamente determinada, para cada punto del espacio, exceptuando para los puntos en que están colocadas m_1, m_2, \dots, m_n .

Para éstos, como la r correspondiente se reduce á cero, la expresión se hace infinita.

Será, pues U una función con n infinitos.

Dicha función potencial, ó potencial del sistema, podrá ordenarse en superficies de nivel para las que la potencial tendrá el mismo valor, y que se llamarán superficies *equipotenciales*. Su expresión será evidentemente

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} = C,$$

siendo C una constante, que variará de una superficie de nivel á otra.

En rigor esto es repetir lo dicho para el sistema m, m_1, m_2, \dots . Sólo que ahora prescindimos de m , y consideramos únicamente el campo y una masa ideal de prueba.

Hemos visto, además, que en un punto cualquiera del espacio la atracción del sistema, sobre dicho punto, tiene la dirección de la normal á la superficie equipotencial que pasa por él, y va de la superficie de menor potencial á la de mayor potencial.

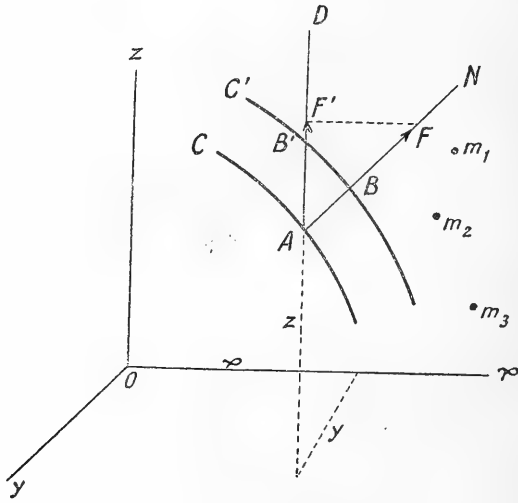


Figura 15.

Más claro. Imaginemos un sistema m_1, m_2, m_3, \dots de puntos ponderables, y tomemos un punto A del espacio (figura 15).

Para obtener la atracción, sobre este punto A , del sistema m_1, m_2, m_3, \dots , no hay más que trazar por el punto A la superficie equipotencial C que le corresponde.

Para lo cual, sustituyendo en

$$U(x, y, z) = C$$

por x, y, z , las coordenadas de A , quedará determinada la constante C , la ecuación de la superficie y la superficie misma.

Teniendo la superficie C , trazaremos la normal AN en el punto A , y esta será la dirección de la fuerza que buscamos.

En efecto, la fuerza F , atracción sobre A del sistema m_1, m_2, \dots coincide en dirección con la N .

Pero no solamente las superficies equipotenciales determinan la dirección de la fuerza F en cada punto, sino su intensidad, y de aquí resulta el siguiente teorema.

Si C y C' son dos superficies equipotenciales infinitamente próximas, y representamos los valores de las constantes por U_A y U_B , el valor de F será:

$$F = \frac{U_B - U_A}{AB}.$$

Que en el límite, y suponiendo que AB es igual á ds será

$$F = \frac{dU}{ds};$$

es decir, la derivada de la potencial en el sentido de la normal AN para el punto A que se considera.

Esta fórmula se demuestra inmediatamente.

Sabemos que las tres componentes de la fuerza F para el punto A , suponiendo como siempre, que la masa de prueba es igual á 1 y suponiendo que el coeficiente numérico de la atracción es también 1, son

$$X = \frac{dU}{dx}, Y = \frac{dU}{dy}, Z = \frac{dU}{dz}.$$

Luego no habrá más que proyectar estas tres componentes sobre la normal AN .

Pero si las tres componentes de $AB = ds$ se representan por dx , dy , dz , que son los incrementos de las coordenadas de A al pasar á B , tendremos que los cosenos de dirección serán

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds};$$

y el valor de F

$$F = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz}{ds}.$$

en que el numerador es la diferencial de U al pasar de A á B ; si abreviadamente se expresa por dU , queda demostrada la fórmula

$$\text{atracción del sistema } (m_1 m_2 \dots) = F = \frac{dU}{ds}.$$

Por fin, la fuerza F actúa en el sentido de la menor potencial C á la mayor C' .

Pero no olvidemos lo que tantas veces hemos explicado, á saber; que para todos estos teoremas se supone, al determinar, por ejemplo, la potencial en un punto, ó la atracción en él, que en dicho punto hay que colocar *una masa igual á la unidad* para que el teorema tenga un sentido real y positivo.

En rigor, no debería decirse: la potencial del sistema $m_1, m_2, m_3 \dots$ en A es U , sino más bien: la potencial del sistema $m_1 m_2 \dots$ en A sería U si agregásemos al sistema en dicho punto A una masa de prueba igual á 1.

2.^a La fórmula anterior de F podemos generalizarla y podemos determinar en todo punto A la proyección de F sobre cualquier dirección AD , y vendremos á parar á una fórmula análoga á la precedente.

En efecto, sea AF la atracción del sistema sobre el punto A .
Sea AD una recta cualquiera.

Bajemos la perpendicular FF' sobre AD ; y AF' ó abreviadamente F' será la componente que buscamos.

Así

$$F' = F \cos BAB' = F \frac{AB}{AB'}$$

$$\text{pero } F = \frac{dU}{ds}, \text{ luego } F' = \frac{dU}{ds} \frac{ds}{AB'} = \frac{dU}{AB'}$$

Así la componente buscada se obtiene dividiendo el incremento dU de la potencial al pasar de la superficie C á C' por la distancia AB' entre las dos superficies potenciales, contada dicha distancia sobre la recta AD . Si llamamos á esta distancia ds' , tendremos $AB' = ds'$ y

$$F' = \frac{dU}{ds'}$$

Resulta de aquí, que la componente F' se obtiene, lo mismo que la fuerza F , tomando la derivada de U en el sentido de la recta AD .

Cuando se trata de la fuerza F la variable es s y se cuenta sobre N ; cuando es la componente F' la variable es s' y se cuenta sobre D .

Por lo demás, el incremento de U siempre es el mismo entre dos puntos cualesquiera de las dos superficies potenciales.

3.^a Hemos definido el tubo de fuerzas y la definición era ésta.

Sea C (figura 16) una superficie equipotencial correspondiente á un sistema de masas ponderables $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$.

Consideremos en esta superficie un área cerrada ab , que para fijar las ideas supondremos infinitamente pequeña.

Por cada punto del contorno ab hagamos pasar una línea de fuerza, que ya sabemos que será normal á todas las superficies equipotenciales.

El conjunto de estas líneas de fuerza constituye la figura que se llama *tubo de fuerza*.

Limitemos este tubo de fuerza que, por su naturaleza, es indefinido por dos superficies equipotenciales C, C' y al es-

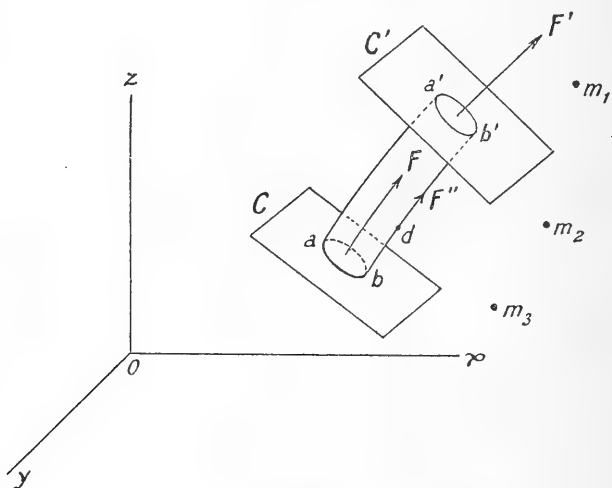


Figura 16.

pacio cerrado por el tubo y por las dos áreas extremas, área ab , que representaremos por $d\omega$, y área $a'b'$ que designaremos por $d\omega'$, podemos aplicarle los tres teoremas que hemos demostrado en la conferencia anterior.

Supongamos que en el interior de este segmento de tubo de fuerzas, no existe ninguna de las masas m ; pues en este caso, el flujo de dichas masas sobre la superficie total del segmento de tubo sabemos que será nulo.

Ahora bien, dicho flujo se compondrá del flujo sobre la área ab , que en la figura suponemos que es flujo entrante;

del flujo sobre $a' b'$ que será saliente, dado que la potencial va creciendo de C á C' y que la fuerza atractiva no cambia de sentido; y, por último, del flujo sobre la superficie lateral.

Tendremos, pues, según dicho teorema

$$\text{flujo } (ab) + \text{flujo } (a' b') + \text{flujo (superficie lateral)} = 0.$$

Pero como las fuerzas F y F' que determina el sistema m_1 m_2 m_3 sobre las áreas infinitamente pequeñas ab , $a' b'$, son normales á dichas áreas, los flujos se obtendrán multiplicando el área por la fuerza y tendremos

$$\text{flujo } (ab) = F d\omega$$

$$\text{flujo } (a' b') = F' d\omega'.$$

Y además, como la superficie lateral está formada por líneas de fuerza y en estas líneas la tangente, en cualquier punto d , es precisamente la fuerza atractiva F'' , el flujo será nulo para el elemento correspondiente al punto d , puesto que la proyección de F'' sobre la normal en d á la superficie del tubo, será igual á cero.

Luego

$$\text{flujo (superficie lateral)} = 0.$$

Y substituyendo esos tres valores del flujo en la ecuación general, tendremos:

$$F d\omega - F' d\omega' = 0;$$

de donde

$$F d\omega = F' d\omega'.$$

Es decir, que el producto del área por la fuerza será igual á lo largo del tubo, en todas las superficies equipotenciales, puesto que dejando C fija, podemos variar C' .

Y aquí ocurre una imagen material, que da realidad en cierto modo al teorema abstracto que hemos demostrado.

Si el tubo fuese una cañería, si por ella circulase un líquido incomprensible, y F, F', \dots fuesen las velocidades del movimiento en cada sección, la ecuación anterior significaría que por cada sección pasa la misma cantidad de líquido, lo cual evidentemente debe suceder, si el líquido es incomprensible.

4.^a Vamos á demostrar que la potencial U satisface á una ecuación diferencial de segundo orden que aparece constantemente en la Física Matemática y á que se da el nombre de ecuación de Laplace.

La forma de esta ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

A esta ecuación satisface la potencial U de cualquier sistema de masas ponderables, y ya veremos que eléctricas ó magnéticas, en espacio libre.

Es una propiedad muy general, curiosísima y fecunda.

Porque, fijense bien mis alumnos: el teorema que vamos á demostrar dice, que sea cual fuese el sistema de masas ponderables m_1, m_2, \dots el valor de éstas y su distribución geométrica, la potencial U del sistema, tal como la hemos definido, satisface á una ecuación diferencial de la forma indicada. Es decir, que diferenciando

$$U = \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots \right)$$

es decir

$$U = \left(\frac{m_1}{\sqrt{(a_1-x)^2 + (b_1-y)^2 + (c_1-z)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_2}{\sqrt{(a_2-x)^2 + (b_2-y)^2 + (c_2-z)^2}} + \dots \right)$$

dos veces con relación á x , dos veces con relación á y y dos veces con relación á z , y sustituyendo en la ecuación de Laplace, ésta se reduce á una *identidad*.

La ecuación de Laplace, como las ecuaciones diferenciales en general, tienen muchas integrales particulares, por mejor decir, muchos grupos de integrales particulares; pues bien, uno de estos grupos, que comprende infinitos casos particulares todavía, es precisamente el de las potenciales newtonianas.

La ecuación de Laplace expresa una propiedad diferencial de un sinnúmero de funciones x, y, z , es un carácter común á multitud de familias, si vale la palabra, y uno de estos grupos ó familias es precisamente el de la potencial de un sistema de masas ponderables, cuyas atracciones obedecen á la ley de Newton en *espacios libres*; y ya explicaremos esta restricción.

Y aún es más general el carácter indicado, porque se aplica á la electricidad y al magnetismo, es decir, lo mismo á las atracciones que á las repulsiones; lo mismo á las masas ponderables que á las masas eléctricas ó magnéticas.

La demostración no puede ser más sencilla; se reduce á una *comprobación* algebraica.

En primer lugar, observemos que todos los términos de U son de la forma

$$\frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

y observemos además, que si dos ó más términos satisfacen aisladamente á la ecuación de Laplace, la suma satisfará también.

Porque en efecto, si U_1 y U_2 son dos soluciones particulares de la ecuación de Laplace, la suma $U_1 + U_2$ satisfará también á dicha ecuación.

Y la comprobación es inmediata. Puesto que U_1 es solución de la ecuación diferencial, y también U_2 , tendremos:

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} + \frac{d^2 U_1}{dy^2} + \frac{d^2 U_1}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2 U_2}{dx^2} + \frac{d^2 U_2}{dy^2} + \frac{d^2 U_2}{dz^2} = 0,$$

y sumando y reuniendo las derivadas relativas á la misma variable,

$$\frac{d^2(U_1 + U_2)}{dx^2} + \frac{d^2(U_1 + U_2)}{dy^2} + \frac{d^2(U_1 + U_2)}{dz^2} = 0$$

Luego $U_1 + U_2$ satisface á la ecuación diferencial.

Tomemos ahora un solo término del valor diferencial de la potencial. En general $\frac{m}{r^2}$, en razón á que todos son de este tipo.

Si éste satisface á la ecuación de Laplace, todos en particular y la suma en la potencial, satisfarán á dicha ecuación.

La comprobación respecto á este término es bien fácil.

Diferenciando dos veces $\frac{m}{r}$, ó prescindiendo de la constante m , que entrará como factor en los tres términos de la ecuación, tendremos para las derivadas primeras:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{r} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} = \frac{2(a-x)}{r^2} = \frac{a-x}{r^3}$$

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{r} = \frac{b-y}{r^3},$$

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{r} = \frac{c-z}{r^3};$$

y para las derivadas segundas:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} = \frac{d \frac{a-x}{r^3}}{dx} = \frac{-r^3 + (a-x) \cdot 3r^2 \frac{a-x}{r}}{r^6} = \frac{-r^3 + 3(a-x)^2 r}{r^6}$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} = \frac{d \frac{(b-y)}{r^3}}{dy} = \frac{-r^3 + 3(b-y)^2 r}{r^6}$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} = \frac{d \frac{(c-z)}{r^3}}{dz} = \frac{-r^3 + d(c-z)r}{r^6}$$

y sustituyendo estas tres derivadas segundas en la ecuación de Laplace:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} &= \frac{-r^3 + 3(a-x)^2 r}{r^6} + \\ &+ \frac{-r^3 + 3(b-y)^2 r}{r^6} + \frac{-r^3 + 3(c-z)^2 r}{r^6} \end{aligned}$$

cuyo segundo miembro se reduce á

$$\begin{aligned} &\frac{-3r^3 + 3r((a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2)}{r^6} = \\ &= \frac{-3r^3 + 3r^2}{r^6} = 0. \end{aligned}$$

Resulta, pues, comprobado que $\frac{1}{r}$ es una solución de la ecuación de Laplace.

También lo será $\frac{m}{r}$ y la suma de un número cualquiera de términos análogos á éste, puesto que hemos visto que los valores de m , a , b , c , no influyen en el resultado.

En suma, la potencial de un sistema discontinuo cualquiera de masas ponderables, sea cual fuere su valor y sea cual fuere su distribución, es una función de x, y, z , que satisfice en todo el espacio libre, es decir, exterior á las masas, á la ecuación de Laplace.

Para estos puntos, claro es que la potencial es infinita, puesto que r se reduce á cero.

* * *

Como hemos indicado varias veces, toda la teoría de la potencial newtoniana se aplica á la electricidad y al magnetismo, en términos análogos á los de las masas ponderables, en razón á que la ley de las atracciones ó repulsiones es siempre la ley newtoniana, la de la relación inversa del cuadrado de la distancia.

La teoría general, es por lo tanto, independiente de los signos de m ; mas para que no quede ninguna duda, terminaremos esta conferencia aplicando la teoría de la función de fuerzas, que en el fondo es la teoría de la potencial, á dos masas eléctricas.

La primera, que es la que hemos llamado *masa de prueba*, supondremos que es una *masa eléctrica positiva*.

La segunda, la masa que atrae ó rechaza, m_1 , podrá tener signo positivo ó negativo y examinaremos ambos casos.

En la figura 17 hemos representado la masa eléctrica positiva m_1 , formando parte del sistema m_1, m_2, \dots y la masa de prueba positiva m , que bien puede ser igual á la *unidad*, pero que es indiferente que lo sea ó no, ó mejor dicho, que como unidad se considere.

Recordando que electricidades del mismo nombre se rechazan, se ve que la acción de m_1 sobre m , tendrá la dirección del vector F , que consideraremos como esencialmente

positivo, por ser un vector, ó si se quiere, la parte *escalar* del vector.

Su valor según la ley newtoniana será:

$$F = k \frac{mm_1}{r^2}$$

en que k es un coeficiente numérico distinto, naturalmente, del coeficiente que empleamos para las masas ponderables.

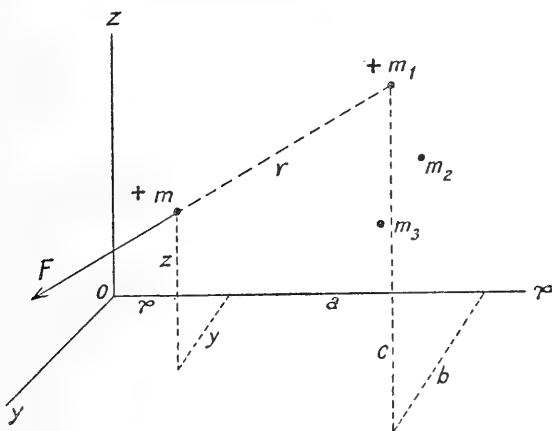


Figura 17.

Llamando X, Y, Z las componentes de F , y en la hipótesis que representa la figura,

$$X = -k \frac{mm_1}{r^2} \frac{a-x}{r} = -k \frac{mm_1}{r^3} (a-x)$$

$$Y = -k \frac{mm_1}{r^2} \frac{b-y}{r} = -k \frac{mm_1}{r^3} (b-y)$$

$$Z = -k \frac{mm_1}{r^2} \frac{c-z}{r} = -k \frac{mm_1}{r^3} (c-z).$$

Ponemos el signo menos porque las componentes de F son negativas y todos los demás factores son positivos.

Ahora bien; es evidente que los segundos miembros resultan de derivar una expresión única

$$-k \frac{mm_1}{r}$$

con relación á x, y, z , como se ve desde luego: por ejemplo respecto X ,

$$\begin{aligned} d \frac{-k \frac{mm_1}{r}}{dx} &= -r_1 mm_1 \frac{d \frac{1}{r}}{dx} = -k mm_1 \frac{-\frac{dr}{dx}}{r^2} = \\ &= \frac{k mm_1}{r^2} \frac{dr}{dx} = \frac{k mm_1}{r^2} \cdot \frac{-2(a-x)}{2r} = -\frac{k mm_1}{r^3} (a-x) \end{aligned}$$

que es precisamente el valor de dicha componente X .

De modo que, representado por V la función de fuerzas, $-k \frac{mm_1}{r}$ tendremos:

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}.$$

Si continuásemos llamando á V potencial del sistema, podría decirse que las componentes de la fuerza, son las derivadas de la potencial.

Si la potencial fuese una función $U = k \frac{mm_1}{r}$ igual numéricamente á V , pero de signo contrario, en este caso

$$X = -\frac{dU}{dx}, \quad Y = -\frac{dU}{dy}, \quad Z = -\frac{dU}{dz}.$$

En rigor, como las masas m , y m_1 se rechazan¹, rechazando m_1 á m hasta el infinito ejercerá un trabajo $k \frac{mm_1}{r}$ positivo que podremos aprovechar, que podría aprovecharse en

cualquier empresa; de modo que la expresión anterior representa *la potencia disponible* del sistema.

* * *

Supongamos por fin (fig. 18) que la masa m_1 del sistema m_1, m_2, m_3, \dots sea una masa eléctrica negativa.

Como la masa de prueba m suponemos que es positiva

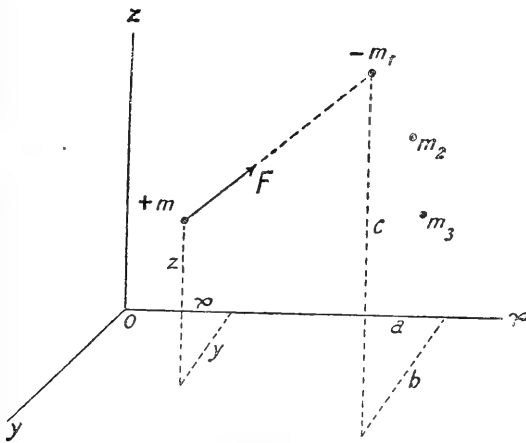


Figura 18.

siempre, la acción F , de m_1 sobre m , será una fuerza atractiva, según hemos representado en la figura, y las tres componentes de F deberán ser positivas.

Tendremos, pues,

$$X = -K \frac{mm_1}{r^2} \cdot \frac{a-x}{r} = -K \frac{mm_1}{r^3} (a-x)$$

$$Y = -K \frac{mm_1}{r^3} (b-y)$$

$$Z = -K \frac{mm_1}{r^3} (c-z).$$

y en efecto, estas tres componetes son positivas porque k , m , r y $a-x$, $b-y$, $c-z$ son cantidades positivas.

Pero m_1 es una masa negativa y dándole el signo que le corresponda, como el signo negativo afecta á toda la expresión, los valores X , Y , Z , serán positivos, según debían ser.

Claro es que X , Y , Z , se demostrará, que son las derivadas de una función de fuerzas lo mismo que en el caso anterior.

Por último, es evidente que este signo —, puede suponerse que está comprendido en la constante k , en cuyo caso el signo aparente sería positivo como para las masas ponderables y la constante k sería negativa.

Con lo dicho terminamos estas ligeras nociones sobre la potencial en el caso de masas discontinuas.

En la conferencia próxima repetiremos, porque esta es la palabra, toda la teoría anterior con aplicación á sistemas continuos.

Pero además de repetir, algo más tendremos que exponer.

XXIII.—Conferencias sobre Física Matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia sexta.

SEÑORES:

Terminamos la conferencia anterior con el estudio puramente elemental de las atracciones y de la potencial de un sistema de puntos discontinuos, ó mejor dicho, de las masas ponderables que en ellos suponíamos.

Realmente el problema era de extraordinaria sencillez, puesto que la atracción de cada punto, sobre cualquier masa m , en posición conocida, estaba perfectamente determinada por la ley newtoniana. Y lo mismo podemos decir de sus componentes. Si son varios los puntos del sistema, la fuerza y las componentes de cada uno de ellos se determinaban del mismo modo.

El problema era sencillísimo; las incógnitas estaban expresadas directamente en función de los datos.

Y, sin embargo, aún lo simplificamos más observando que las tres componentes pueden expresarse por las tres derivadas de la función potencial.

En vez de tres incógnitas teníamos una sola, que era U , y en función de ésta se expresaban X , Y , Z .

Pero es que ya no se trataba de resolver un problema particular, sino de expresar la ley general de las atracciones en

todo el espacio, y esta ley resultaba del estudio de U como función de x, y, z .

La función U , á que dábamos el nombre de potencial, era ya importante desde este punto de vista: simplificaba el problema de las atracciones, reduciendo las tres incógnitas X, Y, Z á una sola función U , y daba, en cierto modo, la ley de variación en todo el espacio cuando por todo el espacio paseábamos la masa de prueba 1.

Mas este nuevo concepto de potencial, que ya tenía una importancia grande en la Física clásica, adquiere transcendental importancia en la Física moderna, en que el concepto de energía va sobreponiéndose al concepto de fuerza. Y esto se comprende, porque después de todo, la potencial representa un trabajo, que es una de las formas de la energía.

Este concepto de potencial, generalizado para todo el sistema, nos determina el trabajo que ha sido necesario desarrollar para su formación desde el infinito, ó el que habría que desarrollar para destruirlo por dispersión absoluta, y también el que podría poner á nuestra disposición en cualquier trabajo industrial hasta la configuración que corresponde al equilibrio estable; de modo que la potencial es algo que da idea del valor mecánico del sistema.

Por eso, en todos los problemas de la Física moderna la potencial de un sistema es su nota característica.

Todo esto se refiere al caso de las masas discontinuas m_1, m_2, m_3, \dots y ahora debemos pasar, como ya se indicó al principio de estas conferencias, al caso de las masas continuas, resolviendo para este nuevo caso todos los problemas que hemos resuelto para el primero.

*
* *

El problema de lo continuo ó de lo discontinuo es un problema capital de la Física.

Y aún lo es de las Matemáticas puras, en las que pode-

mos señalar, por ejemplo, y en contraposición, la teoría de los números enteros y la teoría de las funciones continuas.

Y la continuidad, así en la ciencia pura como en la Física, tiene sus dificultades y tiene sus ventajas.

Me explicaré.

La teoría de los números, por ejemplo, precisamente por el carácter de discontinuidad presenta grandes dificultades, y así se da gran importancia á los trabajos de aquellos matemáticos que han logrado, más ó menos, reducir los problemas de la discontinuidad á problemas de funciones continuas.

Porque en las expresiones discontinuas la ley no se ve, por decirlo así, de una vez; la ley camina á saltos. Por el contrario, de una vez se dibuja, dentro de su continuidad, en la teoría de las funciones.

En cambio, en la teoría de la continuidad nos encontramos á cada momento, casi me atrevería á decir con dos misterios, por lo menos, con dos esfinges rebeldes á la interpretación. Lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande.

Y esto nos va á suceder precisamente al generalizar la teoría de la potencial á los sistemas continuos, y más tarde de masas eléctricas y magnéticas.

Bien fácil ha sido el estudio de la potencial en los sistemas discontinuos para todo el espacio, salvo para los puntos en que están colocadas las masas, puntos que ya constituyen, por decirlo de este modo, discontinuidades por valores infinitos.

Parece que la generalización de la teoría de la potencial para las masas continuas no ha de ofrecer dificultad, y que todo ha de quedar reducido á la sustitución de integrales á sumas finitas.

Tenemos, por ejemplo, tres masas discontinuas m_1 , m_2 , m_3 , pues para la potencial en cualquier punto, ó para las componentes de la atracción en el mismo, tendremos una suma de tres términos.

Tenemos en este nuevo caso, por ejemplo, una esfera rellena de materia continua, en que la densidad es conocida para cada punto de dicha esfera; pues el cálculo de las componentes de la atracción ó de la potencial en cualquier punto exterior del espacio, en teoría no debe ser mucho más difícil que en el ejemplo precedente.

Descompondremos la esfera en elementos infinitamente pequeños.

Cada uno será una masa conocida y de coordenadas conocidas también.

Luego en este caso no tendremos tres términos comprendidos en una suma; pero tendremos infinitos términos comprendidos en una integral.

La solución es análoga en uno y en otro caso.

En el primero, es una suma de un número finito de términos; en el segundo, es una suma de un número infinito de sumandos, que no es otra cosa que una integral.

Parece, pues, que teóricamente el caso de la continuidad no ha de ser más difícil que el de la discontinuidad, y, sin embargo, lo es. Y la dificultad se presenta cuando el punto es interior á la esfera de nuestro ejemplo, ó, en general, á la masa continua de materia para la que deseamos calcular la potencial.

Porque en el sistema discontinuo todo punto que se elija es *exterior al sistema*, como no coincide con uno de los puntos atrayentes.

Y en el sistema continuo, si el punto es interior á dicha masa continua, coincidirá con uno de los elementos, la distancia entre el punto y el elemento será nula, y como r entra en el denominador del elemento diferencial, el elemento de la integral será infinito ó *aparecerá como infinito*, que esto ya lo veremos.

Y de todas maneras la solución del problema no será inmediata y habrá que estudiar este caso detenidamente.

Entremos, pues, á estudiar el problema de las atracciones

y de la potencial para las masas continuas de materia ponderable, sin perjuicio de generalizar los resultados para la electricidad y el magnetismo.

*
* *

Atracciones y potencial para las masas ponderables continuas.—Sea (fig. 19) una masa continua comprendida en una superficie cerrada S , y vamos á determinar, como hicimos para las masas discontinuas, las componentes de la atracción que dicha masa ejerce sobre un punto cualquiera P , así como la potencial que corresponde á dicho punto.

Y repitamos otra vez, que para que estas denominaciones *atracción y potencial* tengan un sentido de realidad, es preciso que consideremos en un punto P una masa ponderable igual á 1, y esta condición debe suponerse satisfecha al hablar de un punto cualquiera del espacio; porque de otro modo todos estos serían conceptos vacíos, mejor dicho, cantidades completamente nulas; en un punto del vacío, ni hay atracción, ni componentes, ni potencial.

Pudiéramos decir en la terminología escolástica, que dada la presencia de la masa ponderable encerrada en S , en cualquier punto existen tales conceptos, *en potencia pero no en acto*.

Para que el acto exista, es preciso colocar en el punto en cuestión *una masa ponderable*, por ejemplo, $m = 1$.

Y dicho esto como última repetición, no es ya preciso insistir sobre ello á cada momento de nuestras explicaciones.

Vamos á descomponer el problema en dos partes, ó mejor dicho, en dos problemas.

1.º Que el punto P sea exterior, como en la fig 19, á la masa ponderable que comprende S .

2.º Que el punto sea interior.

Punto exterior.

Este es el caso que representa la figura, y es sumamente sencillo. Se reduce casi palabra por palabra al caso de las masas discontinuas; porque en efecto, si el punto P no coincide con ninguna de ellas, poco importa que estén muy próximas ó muy lejanas ó que estén en contacto unas con otras, apareciendo en forma continua.

Las fórmulas serán las mismas con sólo sustituir las integrales á las sumas.

En efecto, descompongamos la masa comprendida en S en paralelepípedos A infinitamente pequeños, por planos paralelos á los planos coordenados.

La atracción de la masa situada en A , que representamos por dm , sobre el punto P en que imaginaremos la masa 1, siendo r la distancia AP , a, b, c , las coordenadas de dm y f el coeficiente de atracción, será, como sabemos, llamado dF á dicha fuerza y dX, dY, dZ , á sus componentes, que por ser la masa dm infinitamente pequeña, serán cantidades infinitamente pequeñas también, y por eso aplicamos el signo diferencial á las componentes y á la fuerza; serán, repetimos, tales cantidades las siguientes:

$$dX = f \frac{1 \cdot dm}{r^3} (a - x)$$

$$dY = f \frac{1 \cdot dm}{r^3} (b - y)$$

$$dZ = f \frac{1 \cdot dm}{r^3} (c - z)$$

$$dF = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

La masa dm es igual evidentemente al producto de la densidad ρ por el volumen del paralelepípedo infinitamente pequeño, cuyo centro es A .

Es decir,

$$dm = \rho da db dc.$$

La densidad ρ será distinta, en general, para cada punto; de modo que será una función de a, b, c :

$$\rho = \rho(a, b, c).$$

Suponemos que esta función es continua, finita y bien determinada, que son las condiciones propias del problema de las atracciones como problema real.

Como hemos expresado las componentes de la atracción debida al punto A , expresaremos las de todos los demás puntos del volumen comprendido en S , y las componentes totales ya no serán una suma de términos análogos al anterior, pero en número finito, sino que serán integrales triples, extendida á toda la masa ponderable que comprende S .

Tendremos, pues, para el caso en que el punto P es exterior á la masa atrayente

$$\begin{aligned} X &= \iiint_{\text{vol}} \rho \frac{da db dc}{r^3} (a - x) \\ Y &= \iiint_{\text{vol}} \rho \frac{da db dc}{r^3} (b - y) \\ Z &= \iiint_{\text{vol}} \rho \frac{da db dc}{r^3} (c - z). \end{aligned}$$

Fijémonos un momento en estos tres valores, y tomemos por ejemplo el de X .

Como ρ es una función de a, b, c, y

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

también lo es, el segundo miembro será una integral triple, perfectamente determinada, en que las variables son a, b, c , y habrá que efectuar tres cuadraturas: una con relación á a , otra con relación á b , y á continuación, y sobre el resultado, otra con relación á c , por los métodos que enseña el cálculo integral.

El subíndice *vol* indica que esta triple integración ha de abarcar todo el volumen que comprende la superficie *S*.

Efectuada la triple integral, el segundo miembro será una función de *x*, *y*, *z*, que en estas integraciones son constantes, porque siempre se refieren al punto *P*, que no cambia.

Por último, como el punto *P* es exterior, nunca las tres coordenadas *x*, *y*, *z*, pueden todas ellas y al mismo tiempo, ó mejor dicho, á la vez, ser iguales á *a*, *b*, *c*, que se refieren en todos los elementos de la integración á puntos interiores á *S*.

Y como á la vez no se puede tener

$$a = x$$

$$b = y$$

$$c = z,$$

nunca *r* puede ser igual á cero; luego ningún elemento de la integración puede ser infinito.

En suma, la integral triple, que representa el valor de *X*, será una cantidad finita y bien determinada, que nos dará la componente *X* de la atracción, que ejerce sobre el punto *P*, en que suponemos la masa 1, toda la masa ponderable comprendida en *S*.

Otro tanto podemos repetir respecto á las componentes *Y*, *Z*.

El problema de la atracción queda, por lo tanto, resuelto para los puntos exteriores á la masa atrayente; pero al problema de las atracciones va unido el de la potencial; primero, porque simplifica aquél, y además, porque constituye por sí una teoría importantísima, y en la ciencia actual más aún, por sus enlaces con la teoría de la energía, que se halla tan en moda.

A primera vista, parece que para determinar la potencial del sistema, basta repetir los razonamientos anteriores.

La potencial de la masa *d m*, con relación al punto *P*, será

evidentemente, como ya hemos demostrado en otras conferencias,

$$\frac{dm}{r},$$

ó bien

$$\frac{\rho da db dc}{r}$$

y por lo tanto, la potencial de toda la masa comprendida en S , parece que será una integral triple, como lo eran X, Y, Z . Es decir, llamando U á la potencial para el punto P

$$U = \iiint_{\text{vol}} \frac{\rho da db dc}{r}.$$

Integral perfectamente definida, para la cual podemos repetir las explicaciones anteriores, y que, una vez efectuadas las integraciones, será una función de x, y, z , que representará la potencial en el punto P .

En efecto, así es; pero la demostración no es inmediata, por más que sea sencillísima.

Y no es evidente, como para el cálculo de X, Y, Z , porque si la suma de los componentes de los diferentes elementos de una masa sobre un punto exterior es la componente de la masa total, aunque el número de términos sea infinito; en cambio, *la potencial de una suma no es evidente que sea* la suma de las potenciales cuando es infinito el número de términos.

$$U = \iiint_{\text{vol}} \frac{\rho da db dc}{r}$$

será una integral perfectamente determinada, pero no podemos asegurar que sea la potencial de la masa para el punto P , si no demostramos que la diferencial de U , con relación

á x , es X ; que la diferencial de U , con relación á y , es Y , y que la diferencial de U , con relación á z , es Z .

Esta es la propiedad característica de la potencial ó de la función de fuerzas, y esto es lo que vamos á comprobar ahora.

Diferenciemos, por ejemplo, U con relación á x , y tendremos:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d \cdot \iiint_{\text{vol}} \frac{\rho da db dc}{r}}{dx}$$

y este segundo miembro debe ser precisamente el valor de X . Al pronto parece que esto es evidente, porque diferenciando dentro de las integrales, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \iiint_{\text{vol}} \rho da db dc \frac{d \frac{1}{r}}{dx} = \iiint_{\text{vol}} \rho da db dc \frac{-\frac{dr}{r^2}}{dx} = \\ &= \iiint_{\text{vol}} \rho da db dc \frac{a-x}{r^3}, \end{aligned}$$

que es, en efecto, el valor de X ; pero es que el signo diferencial no siempre puede pasar del exterior al interior en las integrales. La diferenciación bajo el signo integral tiene sus reglas, y es preciso ver si en este caso puede diferenciarse directamente bajo el signo integral.

Puede, en efecto, en este caso efectuarse dicha diferenciación, con lo cual la demostración es correcta, y la expresión de U que hemos escrito, expresa realmente la potencial del sistema continuo sobre un punto cualquiera exterior.

Tenemos, pues, para este caso resueltos los dos problemas: el de las componentes de la atracción y el de la potencial, y todas las consecuencias que dedujimos serán legítimas y podemos reproducirlas con sólo enumerarlas.

Las componentes de la atracción de la masa contenida en S sobre un punto P quedan determinadas.

Estas tres componentes son las derivadas con relación á x , y , z de la integral U , que representa la potencial, suponiendo $f = 1$ y si no con relación á fU .

Cada punto exterior tendrá una potencial determinada.

La masa encerrada en S ó cualquier otra masa continua, determinará una serie de superficies equipotenciales en el espacio que le rodea.

Determinará asimismo una serie de líneas de fuerza, que cortarán normalmente al sistema de superficies equipotenciales.

Dicho sistema de líneas de fuerza podrán agruparse en tubos de fuerza, normales todos ellos á las superficies de igual potencial.

En cada punto del espacio, la fuerza atrayente de la masa continua que consideramos, será tangente á la línea de fuerza que pasa por dicho punto, y, por lo tanto, normal á la superficie equipotencial.

Dicha fuerza atrayente actuará en el sentido de la menor á la mayor potencial, y su intensidad será igual á la derivada de la potencial tomada con relación á la normal, á la expresada superficie equipotencial.

Asimismo, la componente de la fuerza atractiva en cualquier dirección, será la derivada de la potencial en la dirección de que se trata.

Los teoremas relativos al flujo de fuerzas en superficies cerradas, mejor dicho, los dos primeros teoremas subsisten íntegros para este caso. Es decir, el flujo por una superficie cerrada exterior á la masa continua es nulo, y el flujo á través de la superficie que la envuelve por completo, es igual á $4\pi M$, siendo M la masa atrayente.

Claro es que el tercer teorema tomado al pie de la letra no tiene aplicación, porque un volumen no puede distribuirse sobre una superficie.

Por último, subsisten íntegros los teoremas relativos á los tubos de fuerza exteriores, á la masa atrayente y á la ecuación de Laplace, como luego veremos.

No hemos hecho, en lo que precede, otra cosa que repetir palabra por palabra todos los teoremas relativos á atracciones y potenciales para las masas discontinuas.

Podríamos pasar ya, probablemente pasaremos en la conferencia próxima, al caso en que el punto P está en el interior de la masa atrayente.

* * *

Pero antes, para completar estas explicaciones y salvar toda duda que á mis alumnos pueda ocurrir, he de volver á un punto que tiene importancia, no sólo para este problema, sino para otros análogos.

Vamos á recordar para ello, muy á la ligera, un problema de cálculo integral.

Para demostrar que U , expresada por la integral triple que antes obtuvimos, es realmente una potencial de la masa continua encerrada en S , decíamos que era preciso y era suficiente demostrar que las derivadas de U con relación á x, y, z , eran precisamente las componentes X, Y, Z , de la atracción en cualquier punto P .

Y á primera vista la demostración era inmediata, porque para diferenciar, por ejemplo, la integral triple con relación á x, y, z , bastaba pasar la diferenciación al interior de la integral triple, y en este caso no había más, toda vez que S, a, b, c , son distintas de x , que diferenciar $\frac{1}{r}$ pues sólo en r entran las variables de la diferenciación x , por ejemplo, si se trata de $X; y, z$, cuando se trate de Y, Z .

Pero la diferencial de $\frac{1}{r}$, por ejemplo, con relación á x ,

sabemos que es $\frac{a-x}{r^3}$, con lo cual, como decíamos, la demostración es inmediata.

Mas para que sea legítima tal demostración, es preciso que lo sea la diferenciación bajo el signo integral, y precisamente este es el problema de cálculo integral que voy á recordar á mis alumnos, aunque ya de antemano deben saberlo.

De todas maneras, el recuerdo no creo que sea completamente inútil.

Supongamos que se da la integral

$$A = \int_a^b f(\alpha, x) dx$$

en que x es la variable de la integración, α un parámetro; y para considerar el caso más sencillo, a , b , serán dos constantes.

Claro es que, efectuada la operación, la x desaparecerá, y el segundo miembro no contendrá más que α , a , b .

Si a , b , son constantes, y, por lo tanto, independientes de α , podemos afirmar que A es una función de α . Es decir, que la ecuación anterior puede escribirse explícitamente en esta forma:

$$A(\alpha) = \int_a^b f(\alpha, x) dx.$$

Y ahora se presenta este problema: Obtener la derivada de A con relación á α .

Es decir $\frac{dA(\alpha)}{d\alpha}$ ó abreviadamente $\frac{dA}{d\alpha}$.

Claro es, que habiendo efectuado la integración y habiendo obtenido la forma de A en función de α , es decir, $A(\alpha)$, no habría más que aplicar los métodos generales de diferenciación.

Pero no es este el caso, que se conoce con el nombre de *diferenciación bajo el signo integral*; el problema es obtener la derivada de A con relación á α sin efectuar la integración. Es decir, obtener una forma analítica de esta derivada.

Es un caso particular de otro problema mucho más general, que planteábamos en las conferencias del curso precedente, á saber: resolver problemas y efectuar transformaciones y descubrir propiedades de funciones definidas por ecuaciones diferenciales, sin efectuar las integraciones, partiendo sólo de las ecuaciones diferenciales mismas.

Pues aquí se nos presenta este problema: hallar la derivada de A con relación á α sin efectuar la integración del segundo miembro.

Y esto, á primera vista, parece muy sencillo.

Una integral es una suma de un número infinito de términos, que tienden á cero y crecen en número, según cierta ley; y cuando la integral tiene realidad matemática el límite de dicha suma está perfectamente determinado.

Pues descompongamos el segundo miembro en sus elementos, que para abreviar representaremos esquemáticamente por los subíndices 0, 1, 2, 3....., suponiendo, como siempre, que dx es un infinitamente pequeño, idéntico para todos los términos, y tendremos

$$A(\alpha) = [f(\alpha, x)]_0 dx + [f(\alpha, x)]_1 dx + [f(\alpha, x)]_2 dx + \dots$$

El segundo miembro es una suma, y todos sus términos son funciones de α ; y como la derivada de una suma es la suma de las derivadas de los diferentes sumandos, tendremos, al parecer evidentemente,

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \left[\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} \right]_0 dx + \left[\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} \right]_1 dx + \left[\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} \right]_2 dx + \dots$$

La x , claro es, que varía de un elemento á otro de la integral, y tomará los valores $a, a + dx, a + 2dx \dots b$, que

es lo que hemos expresado abreviadamente y en forma simbólica por los subíndices.

En cambio, si x varía de un elemento á otro de la integral, α tiene el mismo valor para todos ellos, porque es un parámetro constante respecto á la integración.

Volviendo á la forma de las integrales, puede escribirse el segundo miembro de este modo:

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} dx.$$

Luego el problema se resuelve pasando la diferenciación con relación á α dentro de la integral. Es decir, diferenciando el coeficiente diferencial de la ecuación primitiva $f(\alpha, x)$ con relación á α , que es donde únicamente entra esta variable de la diferenciación, toda vez que hemos supuesto que no entraba ni en a ni en b y que dx en la diferenciación con relación á α es una constante.

Y ya tenemos el problema resuelto, como nos habíamos propuesto. Es decir, derivar A con relación á α sin efectuar la integración del segundo miembro.

Claro es que esta derivada no se nos presenta bajo forma finita, sino bajo forma de una integral, que no se ha efectuado

$$\int_a^b \frac{df(\alpha, x)}{dx} dx \quad \text{ó bien} \quad \int_a^b f'_\alpha(\alpha, x) dx.$$

Pero esto no importa, porque dicha integral está perfectamente definida, toda vez que conocemos la forma analítica del coeficiente diferencial $f'_\alpha(\alpha, x)$, que se obtiene por una diferenciación con relación á α de la función conocida, puesto que es un dato, $f(\alpha, x)$.

Parece, pues, que al menos cuando los límites de la integración son constantes, el problema se resuelve, como se dice vulgarmente, diferenciando bajo el signo integral.

Y, sin embargo, si esto es exacto muchas veces, otras

muchas no lo es, y la demostración anterior no es, por lo tanto, absolutamente rigurosa.

Vamos ahora á precizarla:

Hemos visto que

$$\frac{dA(a)}{da} = \left[\frac{df(a, x)}{da} \right]_0 dx + \left[\frac{df(a, x)}{da} \right]_1 dx + \left[\frac{df(a, x)}{da} \right]_2 dx + \dots$$

y al pronto creíamos que esta ecuación era rigurosa, porque estamos acostumbrados á afirmar *que la derivada de una suma es igual á la suma de las derivadas*, lo cual es cierto cuando el número de sumandos es *finito*, pero no es evidente cuando es *infinito* el número de sumandos.

Partamos, en efecto, de la ecuación

$$A(a) = [f(a, x)]_0 dx + [f(a, x)]_1 dx + [f(a, x)]_2 dx + \dots$$

que es el desarrollo de la integral en suma y que tiene sentido riguroso, puesto que suponemos que la integral existe. Demos un incremento Δa á la variable a de la diferenciación y tendremos

$$A(a + \Delta a) = [f(a + \Delta a, x)]_0 dx + [f(a + \Delta a, x)]_1 dx + \dots$$

y restando de esta ecuación la anterior, obtendremos

$$\begin{aligned} A(a + \Delta a) - A(a) &= [f(a + \Delta a, x) - f(a, x)]_0 dx \\ &+ [f(a + \Delta a, x) - f(a, x)]_1 dx \\ &+ [f(a + \Delta a, x) - f(a, x)]_2 dx \\ &+ \dots \end{aligned}$$

y dividiendo ambos por Δa

$$\begin{aligned} \frac{A(a + \Delta a) - A(a)}{\Delta a} &= \left[\frac{f(a + \Delta a, x) - f(a, x)}{\Delta a} \right]_0 dx \\ &+ \left[\frac{f(a + \Delta a, x) - f(a, x)}{\Delta a} \right]_1 dx \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Ya sabemos que en el segundo miembro sólo varía de un término á otro el valor de x , al cual se refieren precisamente los subíndices 0, 1, 2

Pasemos ahora al límite, suponiendo $\Delta\alpha$ infinitamente pequeña, y tendremos

$$\begin{aligned} \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} + \omega &= \left(\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} + \lambda_0 \right)_0 dx \\ &+ \left(\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} + \lambda_1 \right)_1 dx \\ &+ \left(\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} + \lambda_2 \right)_2 dx \\ &+ \dots \end{aligned}$$

ó bien dividiendo el segundo miembro en dos grupos

$$\begin{aligned} \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} + \omega &= \left(\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} \right)_0 dx + \left(\frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} \right)_1 dx + \dots \\ &+ (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots) dx \end{aligned}$$

en que ω y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ son cantidades infinitamente pequeñas, que en el límite se reducirán á cero.

Pasando, pues, al límite, el primer miembro será la derivada de A con relación á α y el primer grupo del segundo miembro podrá ponerse bajo la forma de integral. Así:

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(\alpha, x)}{d\alpha} dx + \text{límite de } (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots) dx.$$

Si la suma del segundo miembro fuese una suma de un número finito de términos, dicha suma $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \dots$ en el límite sería igual á cero; pero como su número es infinito, ya no es evidente que dicha suma tienda á anularse.

Es preciso demostrar en todos los casos que $(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \dots) dx$ tiende hacia cero á medida que tiende hacia cero $\Delta\alpha$.

Ahora bien, si todas las λ tienden hacia cero y la mayor de ellas tiende también hacia cero al mismo tiempo, tendremos

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots) dx = \int_a^b \lambda dx < L \int_a^b dx = L(b - a)$$

siendo L el máximo valor de las cantidades λ , y entonces, si $L(b - a)$ tiende hacia cero con $\Delta \alpha$, tendremos rigurosamente

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d \int_a^b f(\alpha, x) dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(\alpha, x)}{d\alpha}$$

y se podrá diferenciar bajo el signo integral.

Claro es que el problema es más complicado cuando la variable α de la diferenciación entra en los límites a, b .

El estudio completo de este problema puede verse en cualquiera de los tratados modernos de cálculo integral. Recordemos, sin embargo, brevemente el caso en que el límite inferior es variable, y lo que de él digamos podremos decir del límite superior con sólo cambiar un signo.

*
* *

Nos proponemos diferenciar la integral.

$$A(\alpha) = \int_b^a f(x, \alpha) dx$$

siendo b función de α : $b = \varphi(\alpha)$.

Sólo indicaremos las líneas generales de la demostración sin entrar en pormenores y sin repetir las consideraciones que quedan apuntadas para el caso en que los límites son constantes.

Demos un incremento á α en la ecuación

$$A(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha) dx$$

y tendremos

$$A(\alpha + \Delta\alpha) = \int_{\varphi(\alpha + \Delta\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx$$

y restando de esta ecuación la anterior y dividiendo por $\Delta\alpha$, según se hace siempre para diferencial, resultará

$$\frac{A(\alpha + \Delta\alpha) - A(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{\int_{\varphi(\alpha + \Delta\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha) dx}{\Delta\alpha}$$

Pasando al límite el primer miembro será evidentemente la derivada que buscamos $\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = A'(\alpha)$. En el segundo miembro podremos substituir en vez de $\varphi(\alpha + \Delta\alpha)$ su valor $\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha) \Delta\alpha$, con lo cual la primera integral se convertirá en

$$\int_{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha) \Delta\alpha}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx = \int_{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha) \Delta\alpha}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx$$

y como el límite inferior es una suma, podremos descomponer la integral en la diferencia de dos integrales

$$\int_{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha) \Delta\alpha}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha) \Delta\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx$$

con lo cual la ecuación precedente se convertirá en

$$A'(\alpha) = \limite \frac{\int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} f(x, \alpha) dx}{\Delta\alpha}$$

ó bien

$$A'(\alpha) = \limite \left[\int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - f(x, \alpha) dx}{\Delta\alpha} - \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx \right]$$

Pero la primera parte del paréntesis corresponde evidentemente al caso en que los límites no varían y en que se ha efectuado la diferenciación bajo el signo integral, en cuya hipótesis queda la derivada de f con relación á α , y tendremos

$$A'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx - \limite \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha} f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx.$$

Vamos á simplificar el último término de la ecuación anterior, que puede ponerse bajo esta forma

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha} \left(J(x, \alpha) + \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} \Delta\alpha \right) dx.$$

De la segunda parte puede prescindirse, si suponemos que la derivada de f con relación á α es una cantidad finita, porque los límites de la integral sólo difieren en una cantidad infinitamente pequeña, que es $\varphi'(\alpha)\Delta\alpha$, de modo que se integra entre dos valores de x , que difieren en un infinitamente pequeño, y en rigor esto es diferenciar la cantidad que está bajo el signo integral para el valor $\varphi(\alpha)$.

O de otro modo: se puede suponer, que el paréntesis es constante y sacarlo fuera de la integral por uno de dos valores $\varphi(\alpha)$ prescindiendo de la última parte que es infinitamente pequeña, puesto que contiene $\Delta\alpha$.

Tendremos, pues,

$$\frac{1}{\Delta(\alpha)} f(\varphi(\alpha), \alpha) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha} dx = \frac{1}{\Delta\alpha} f(\varphi(\alpha), \alpha) [x]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha}$$

ó bien

$$\frac{1}{\Delta\alpha} f(\varphi(\alpha), \alpha) [\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)\Delta\alpha - \varphi(\alpha)]$$

que en el límite es

$$(\varphi(\alpha), \alpha) \varphi'(\alpha).$$

Así, pues, tendremos para la derivada que buscamos

$$A'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\alpha} \frac{df(x, \alpha)}{dx} dp = f(\varphi(\alpha), \alpha) \varphi'(\alpha).$$

De modo que no hay más que restar, de la fórmula que corresponde al caso en que los límites son constantes, un término que representa el resultado de sustituir en la función f en vez de x el límite inferior multiplicando este resultado por la derivada del límite inferior con relación á α .

Esta fórmula, que parece un tanto extraña, toma un sentido clarísimo y es casi intuitiva si á la integral se le da una representación geométrica: la de un área; porque este término representa el rectángulo infinitamente pequeño que pierde la integral por el incremento del límite inferior $\varphi'(\alpha)\Delta\alpha$ que corresponde á la variación de α .

En efecto, este rectángulo tiene por base esta última ex-

presión y por altura el valor de f para dicho límite inferior.

Mas estas son consideraciones elementales, que conocerán mis alumnos ó que recordarán desde luego por las indicaciones que preceden.

Un resultado análogo se obtiene cuando el límite superior es variable. Entonces el área que representa la integral aumenta en un rectángulo cuya base es $da = \frac{da}{d\alpha} d\alpha$, es decir,

el incremento que recibe a por el que ha recibido α ; y en que la altura será la última ordenada del trapezio curvilíneo que representa el área, ó sea el valor de $f(x, \alpha)$ para $x = a$.

Resultará por lo tanto un término que agregar, $f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha} d\alpha$.

En resumen, si se quiere diferenciar

$$A(\alpha) = \int_b^a f(x, \alpha) dx$$

siendo a y b funciones de α , tendremos

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \int_b^a \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx d\alpha + f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha} d\alpha - f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} d\alpha$$

y la derivada será

$$A'(\alpha) = \int_b^a \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx + f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha} - f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha}$$

Todo esto con las restricciones que indicamos al principio.

Y terminado este pequeño paréntesis, que he creído necesario, por el carácter elemental de estas explicaciones, continuemos nuestra tarea.

Para terminar esta conferencia completaremos la compa-

ración entre el caso de masas discontinuas y el de masas continuas, cuando el punto P , para el cual hemos de calcular las atracciones y la potencial, es exterior á dichas masas, extendiendo á este último caso la propiedad de la potencial U de las masas discontinuas de satisfacer á la ecuación de Laplace.

Podemos afirmar que la potencial U de un sistema de varias masas discontinuas, cuando se trata de puntos exteriores á todas ellas satisfacen á la ecuación de Laplace.

En efecto, hemos obtenido para U la expresión siguiente:

$$U = \iiint_{\text{vol.}} \frac{\rho \, da \, db \, dc}{r}$$

en que a, b, c son las coordenadas de un elemento cualquiera A de la masa comprendida en S , r la distancia del punto A á un punto P exterior á S (fig. 19) y en que el subíndice *vol* significa que la integral ha de extenderse á todos los elementos del volumen que abarca S .

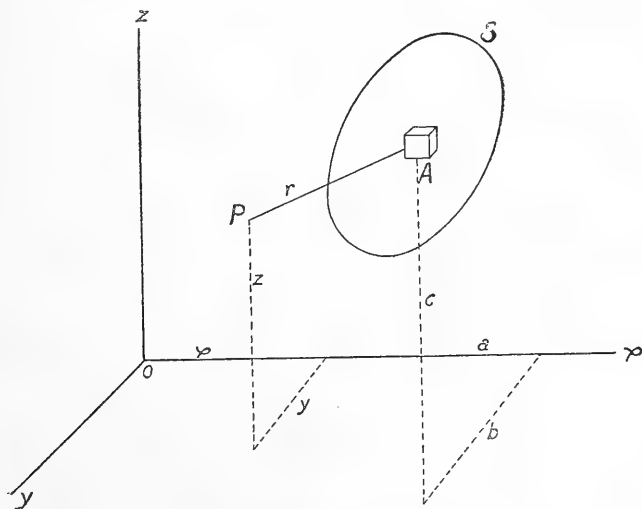


Figura 19.

Hemos dicho que ρ es la densidad de cada punto, y es, por lo tanto, una función finita y continua de a, b, c .

Si en vez de una masa continua como la comprendida en S , fueran varias, la demostración, que vamos á dar, sería la misma, y aun, si se quiere, la integral triple con su subíndice, puede aplicarse á un número cualquiera de cuerpos.

Ahora bien, la ecuación de Laplace sabemos que tiene la forma

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0;$$

luego para demostrar que la potencial de nuestro caso satisface á esta ecuación, no hay más que diferenciar dos veces U , con relación á x , dos veces con relación á y , dos veces con relación á z , sumar las tres derivadas segundas, y ver si resulta una identidad $0 = 0$.

Ahora bien: como el punto es exterior, los valores de r nunca se reducen á cero, luego ningún elemento de la integral será infinito; todos serán finitos, y si suponemos, como sucede en este caso, que la diferenciación bajo el signo integral es legítima, tendremos

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \iiint_{\text{vol}} \rho \, da \, db \, dc \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = \iiint_{\text{vol}} \rho \, da \, db \, dc \frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \iiint_{\text{vol}} \rho \, da \, db \, dc \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{r}$$

y sumando

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \iiint_{\text{vol}} \rho \, da \, db \, dc \left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{r} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{r} + \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{r} \right]$$

Pero hemos demostrado que el paréntesis del segundo miembro es idénticamente nulo; luego serán nulos todos los elementos de la integral, y tendremos satisfecha la ecuación de Laplace:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Definitivamente y en resumen, el caso de las masas continuas, cuando se trata de puntos exteriores, coincide punto por punto en sus consecuencias, con el caso de las masas discontinuas, lo cual intuitivamente se ve, y parece que sobran todas estas explicaciones y desarrollos. Para un punto exterior á las masas atrayentes, sean éstas grandes ó pequeñas, ocupen mucho ó poco espacio, son en rigor como masas discontinuas.

* * *

Para terminar de una vez esta conferencia, haremos algunas reflexiones sobre la ecuación de Laplace, que hemos encontrado y encontraremos en muchos problemas, y á la cual satisface la potencial de un sistema de masas, siempre que las variables x , y , z sean las coordenadas de un punto exterior.

Esta ecuación de Laplace es clásica en la Física matemática. Aparece en multitud de teorías; por ejemplo, en la teoría de la elasticidad; en la atracción newtoniana, como acabamos de ver; en la hidrodinámica, en la teoría del calor, en la teoría de la electricidad y en la del magnetismo, marcando ciertas analogías matemáticas entre todas estas ramas de la ciencia física.

Tal coincidencia no puede menos de llamar la atención, y es natural que se busque una explicación para ella.

¿Será que en el fondo de los diferentes grupos de fenó-

menos, que aparecen en el mundo inorgánico, haya *algo común*; una *unidad superior*; esa, á la cual aspira siempre la ciencia, buscándola en todas partes y procurando llegar á ella por una serie indefinida de hipótesis?

A esta unidad aspiran la mayor parte de los físicos, aunque hay muchos, sobre todo en los tiempos modernos, que acaso la niegan resueltamente, ó la ponen en duda, ó la consideran inaccesible.

Pero problema es éste que dejamos para más adelante.

¿Será, por el contrario, esta coincidencia á que nos referimos, puramente accidental, procediendo, por decirlo de este modo, de un grado idéntico en las aproximaciones del cálculo, y, por lo tanto, no dependiendo de los hechos en sí, sino de la manera matemática de expresar sus leyes?

Expliquémonos más claramente por medio de un ejemplo.

Imaginemos una serie de fenómenos reunidos en un grupo que, para abreviar la explicación, llamaremos G ; suponemos que un parámetro β del fenómeno depende de otro parámetro físico α , y que, ó bien por resultados experimentales, ó por la aplicación de ciertas hipótesis, dicho parámetro β resulta función lineal de α .

Es decir,

$$\beta = A\alpha + B \quad [1]$$

siendo A y B dos constantes.

Admitamos asimismo que en otra serie de fenómenos físicos, completamente distintos de los anteriores y que representaremos por G' , se verifica una cosa análoga, á saber: que este nuevo grupo de fenómenos contiene dos parámetros variables β' y α' , y que también la aplicación del método experimental ó determinadas hipótesis dan como ley aproximada una función lineal

$$\beta' = A'\alpha' + B' \quad [2]$$

Pues aquí también pudiera causar cierta sorpresa la coincidencia de las fórmulas (1) y (2); y el que fuera propenso al optimismo pudiera admirar la armonía de la Naturaleza, al ver que en fenómenos tan distintos, como hemos supuesto, que eran G y G' , las leyes de ambos fenómenos expresadas por los parámetros β , α y β' , α' resultaban idénticas en su forma matemática.

Y, sin embargo, esta coincidencia y esta armonía es puramente en este caso una coincidencia de aproximación numérica, por decirlo de este modo; como en dos curvas completamente distintas las ecuaciones de dos elementos considerados como pequeñas líneas rectas son también funciones lineales de dx , dy .

¿Pues no pudiera suceder, que el hecho de encontrar la ecuación de Laplace en multitud de teorías, dependa en cierto modo de una aplicación matemática idéntica al expresar U en función de x , y , z ?

No discutimos esta segunda explicación de coincidencia, que, en todo caso, es digna de un estudio detenido.

¿Será, por último, debida esta concordancia, ó, mejor dicho, esta unidad de las fórmulas matemáticas aplicables á diversos fenómenos de la Naturaleza, en una identidad del procedimiento lógico, que emplea en los casos más diversos la inteligencia humana para expresar los fenómenos por relaciones matemáticas?

La verdad es, que la fórmula de Laplace puede interpretarse siempre como la expresión lógica y hasta de sentido común de la aplicación de este principio: que en un espacio cerrado, si penetra *algo* en cantidad igual á la que sale, la variación de este *algo* en el espacio de que se trata es nula.

Y este *algo* puede ser flujo de fuerzas, ó cantidad de calórico, ó flujo eléctrico, ó líquido incomprensible.

Por ejemplo; si consideramos un paralelepípedo infinitamente pequeño y la cantidad que entra de ese *algo*, por la

cara perpendicular al eje de las x , depende de *una derivada* de una cierta expresión V con relación á x , á saber:

$$\propto \frac{dV}{dx} dy dz$$

Y la cantidad que sale por la cara opuesta tiene una expresión análoga

$$\propto \left(\frac{dV}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{dV}{dx} dx \right) dy dz$$

la diferencia será

$$\propto \frac{d^2 V}{dx^2} dx dy dz.$$

Y del mismo modo, para las caras perpendiculares á los otros dos ejes

$$\propto \frac{d^2 V}{dy^2} dx dy dz,$$

$$\propto \frac{d^2 V}{dz^2} dx dy dz.$$

De modo que la variación en el interior del paralelepípedo, de ese *algo* á que venimos refiriéndonos, será la suma de las tres expresiones anteriores; y si queremos expresar que la variación en el interior del paralelepípedo es nula, tendremos

$$\frac{d^2 V}{dx^2} dx dy dz + \frac{d^2 V}{dy^2} dx dy dz + \frac{d^2 V}{dz^2} dx dy dz = 0$$

ó bien

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

que es precisamente la forma de la ecuación de Laplace.

Ya expusimos un razonamiento parecido en el curso anterior, al estudiar la fórmula de Green, y no será esta la última vez que insistamos sobre tales analogías y semejanzas entre las teorías matemáticas aplicables á diferentes órdenes de fenómenos físicos.

Pasemos definitivamente al estudio de las atracciones y potenciales en el caso de masas continuas y para puntos interiores á dichas masas.

**XXIV.—Nota escrita con motivo de la venida á Madrid
del Príncipe Alberto I de Mónaco.**

POR JOAQUÍN GONZÁLEZ HIDALGO.

Designado por esta Corporación para dar la bienvenida á Su Alteza Serenísima el Príncipe Alberto I de Mónaco, y para poner en conocimiento de este ilustrado auditorio algunos de los hechos que han servido de fundamento á la alta reputación científica que le está reconocida á S. A. en todas partes, daré principio á mi relato, que será breve y sencillo porque carezco de aquella inspiración, de aquellos conocimientos y de aquellas dotes oratorias que sólo son patrimonio de contadas y conocidas personalidades.

Pero cumpro gustoso el acuerdo de la Academia y confío en obtener la indulgencia de mis oyentes.

Es innegable que en todos los adelantos que ha ido verificando la humanidad desde los tiempos antiguos, y especialmente en las épocas más modernas, se ha necesitado el concurso de dos grandes factores para la realización de aquéllos, y éstos son las condiciones antropológicas y la influencia del medio. Respecto á las primeras, es una verdad bien reconocida que no todos los seres de la especie humana que se van sucediendo en la superficie de nuestro globo tienen el mismo desarrollo en órganos semejantes, ni la misma intensidad funcional en cada uno de éstos, ni tampoco vienen al mundo en iguales condiciones sociales, lo cual hace que su vida futura sea tranquila, ó más ó menos azarosa, y que durante ella tengan mayor ó menor aptitud ó ayuda para las artes manuales ó los estudios científicos.

Las condiciones antropológicas serán inmejorables para esto último si el cerebro de los individuos se halla tan pode-

rosamente organizado que una gran memoria conserva en él todas las impresiones recibidas por sentidos también muy perfectos, y si un perspicaz entendimiento coordina á maravilla todos los elementos de juicio que le han sido aportados sucesivamente. Mas no basta esto; es preciso también que una enérgica y persistente voluntad le impulse á la realización de algún ideal que en él haya surgido y pueda vencer la influencia del medio, si éste es adverso, ó en casos más favorables otras influencias mundanales ó poco científicas, que pudieran anular la más útil para sus fines.

Dos ejemplos pueden presentarse, entre otros muchos, de estos seres privilegiados y de la influencia del medio: Edison y S. A. Serenísima. Hijo del pueblo el primero, escaso de recursos, con instrucción en un principio deficiente, su envidiable cerebro logró vencer todos los obstáculos materiales y obtener la admiración del mundo científico por sus notables descubrimientos. Descendiente de Príncipes S. A., con educación esmerada, dotado de bienes de fortuna, favorecido, además, por naturaleza como lo fué Edison, también tuvo sus ideales, también los ha realizado y se ha rendido homenaje mundial á su nombre, como yo tengo gran satisfacción en hacerlo en este momento.

La poderosa voluntad de ambos hombres de ciencia ha sido la causa determinante de los resultados científicos que han obtenido; en el primero, venciendo los obstáculos materiales; en el segundo, apartándole conscientemente de todo aquello que pudiera distraerle de los fines que se había propuesto conseguir.

Vistos y juzgados estos y otros hombres científicos por los individuos de cultura limitada, son reputados como seres distraídos ó insociables, siendo precisamente esas particularidades que se juzgan defectos los indicios de una concentración de su espíritu en la resolución de problemas más ó menos útiles á la sociedad, y que ésta en gran parte no llega á comprender, aun cuando luego disfrute de sus beneficios.

Los hombres inteligentes tienen, por regla general, afición á cualquier clase de estudios, rectitud de juicio, elevación de miras, espíritu altruista; y estas cualidades, no sólo redundan en provecho de sus semejantes, sino en el suyo propio, puesto que así adquieren el privilegio de gozar de una felicidad mayor y más duradera que los otros hombres, durante la mayor parte de su existencia.

El trabajo intelectual influye de un modo notable en la duración de la vida; los sabios, escritores y hombres que se distinguen por su inteligencia; llegan, por término medio, á una edad bastante avanzada. El ejercicio ordenado y constante de las funciones cerebrales comunica mayor actividad al sistema nervioso periférico y éste á todos los órganos en que se distribuye, los cuales se fortifican más aún por el régimen de vida tranquilo y sosegado que suelen seguir los hombres pensadores. Desempeña, además, un papel importante el dominio que tienen los individuos más inteligentes sobre algunas pasiones ó inclinaciones que son perjudiciales á la salud, y para evitar varias de las causas que ponen en peligro la existencia. En las pérdidas de seres queridos y otras contrariedades inevitables de la vida, también se aminora su sufrimiento, recurriendo á sus libros, á sus colecciones, á sus investigaciones favoritas, y este alivio en el padecer contribuye igualmente á la conservación de su organismo. Con sólo echar una ojeada á la publicación alemana *Naturæ Novitates*, donde cada quince días aparece la necrología de los hombres de ciencia, es fácil notar que los más significados de éstos por sus estudios y publicaciones científicas, suelen vivir hasta los ochenta y noventa años, habiendo algunos, como el químico francés Chevreul, que llegó á los ciento, y el naturalista alemán Philippi, fallecido á los noventa y seis, que conservaron hasta ese momento íntegras sus facultades intelectuales. Esta condición es casi constante en los hombres científicos de mucha edad, por lo cual las naciones ilustradas los conservan en los puestos que desem-

peñan, á pesar de sus años, porque no dejan de cumplir con sus obligaciones y de producir todavía notables trabajos por el caudal científico que han acumulado con una labor constante.

El influjo del medio le experimentan todavía de otra manera que la puramente material los hombres nacidos para los estudios científicos. ¿Por qué tal individuo se dedica á las investigaciones químicas, por qué tal otro á los estudios histológicos, por qué un tercero á la contemplación del mundo sideral, y por qué otros muchos á los distintos ramos de las ciencias que se conocen en los tiempos presentes? Sin duda alguna, por la impresión recibida de hechos ú objetos determinados que fijan su atención de un modo más ó menos permanente, ó por relaciones establecidas con personas que ya están dedicadas á diversos estudios, y cómo asimilan gran parte de los conocimientos de éstas, agregando el producto más ó menos valioso de su propia inteligencia, queda establecida de un modo lógico y natural la ley del progreso, merced á la cual contemplamos con asombro las maravillas científicas de la época actual, quedándonos el sentimiento de no conocer las que verán nuestros descendientes.

Las ligeras consideraciones antes expuestas acerca de las condiciones antropológicas y la influencia del medio en la producción científica y de las diversas aptitudes que pueden observarse en los hombres de ciencia, que han realizado de una ú otra manera el fin que se habían propuesto, me servirán de guía para dar á los oyentes una idea de la inmensa labor ejecutada por S. A. durante un período de más de veintiséis años, con una constancia admirable y un altruismo de que se ven pocos ejemplos.

Ni es lisonja ni causará extrañeza alguna que vuelva á repetir aquí lo pródiga que fué la naturaleza con S. A. el Príncipe respecto á sus facultades intelectuales, pues esto es ya una verdad demostrada por hechos que luego citaré, ni tampoco de que su posición social ha sido de las más favorables.

para todo aquello en que ha ocupado su inteligencia. El rumbo que ésta siguió cuando ya el organismo había terminado su crecimiento, fué determinado sin duda por las circunstancias en que se desarrolló la juventud del Príncipe. Si recordamos su residencia á orillas del mar, sus instructivos viajes, sus relaciones con diversos naturalistas, los años que navegó en la marina de guerra española y su conocimiento de las exploraciones verificadas por los buques *Porcupine* y otros en el Atlántico y el Mediterráneo y por el *Challenger*, alrededor del mundo, juzgaremos muy natural que esta preparación, casi involuntaria, ha sido sin embargo la que le decidió por la clase de estudios á que se ha dedicado desde entonces.

Resuelto ya á ir completando el conocimiento de las maravillas y misterios de los mares, puso manos á la obra, habilitando el buque *Hirondelle* para sus primeras expediciones, y con la experiencia en ellas adquirida, mandó construir otro más adecuado para el objeto, que denominó *Princesa Alicia*, y más adelante otro mejor aún con el nombre de *Princesa Alicia núm. II*. Sólo examinando y muy despacio el interior de estos buques, donde están acumulados aparatos y utensilios á cual más diversos para todo lo que se relaciona con esta clase de exploraciones, puede comprenderse hasta dónde ha llegado su interés científico y su estudio, sirviéndose con éxito de todos los aparatos conocidos y perfeccionando muchos de ellos por una apreciación exacta de algunas deficiencias observadas durante su empleo.

En sus repetidos viajes marítimos, que han sido más de veinte desde el año 1885 hasta el presente, todo ha sido preparado bajo su dirección, hasta en los menores detalles, vigilando y enterándose de las operaciones de sondeo y de dragado practicadas, al mismo tiempo que tomaba notas de lo que debía servirle para la publicación de la parte correspondiente á sus trabajos y de lo referente á los seres naturales recogidos que habían de ser descritos por especialistas de su confianza.

Con los buques de su pertenencia exploró las aguas y los fondos del Atlántico en los sitios siguientes: desde Lorient á Terranova, Spitzberg, islas Amsterdam, Faroer y de los Daneses, costa de Noruega, Golfo de Gascuña, desde Santander á Vigo, costa de Portugal, islas Berlengas, mar de Sargazos, islas Azores, de Madera y Cabo Verde, islas Canarias y estrecho de Gibraltar; y en el Mediterráneo, costas de Marruecos, Argelia, Sicilia, Italia, de Valencia en España, é islas Baleares, de Córcega y de Cerdeña.

Las exploraciones verificadas lo han sido por medio de sondas, nasas, dragas, termómetros, flotadores y otros aparatos que han servido para conocer con más exactitud los hechos siguientes: el relieve de una parte del fondo del Atlántico y del Mediterráneo, y, por lo tanto, las desigualdades del mismo y los sitios en que la profundidad llega á su máximum, la dirección de las corrientes superficiales del Atlántico, la existencia y dirección de las corrientes profundas, apreciadas por el análisis físico y químico de las aguas, cuando éstas han sido recogidas en series verticales en tres puntos del Océano dispuestos en triángulo, la temperatura de las aguas del mar en la superficie, en el fondo ó á diferentes alturas, tanto en el Océano como en el Mediterráneo ó en diferentes latitudes del Atlántico, la densidad y composición de las mismas y su examen bacteriológico, la naturaleza y composición de las muestras del terreno del fondo de los mares y la obtención de multitud de seres vivientes en el *plankton*, ó á diferentes profundidades. También se han hecho observaciones meteorológicas á bordo, y se han recogido animales y plantas en los sitios donde se ha desembarcado.

El resultado de todas estas expediciones científicas ha sido la publicación de unas 500 noticias, artículos ó memorias más ó menos extensas, debidas á S. A. el Príncipe ó á muchos hombres científicos de distintos países. Aquellas de que es autor S. A. son en número de 82, aparecidas desde 1885.

hasta 1910, todas interesantes, y de las cuales citaré algunos títulos: Corrientes del Atlántico. Corriente del Golfo de Méjico. Dragados en el Golfo de Gascuña. Empleo de las nasas para recolección de animales en aguas profundas. Dinamómetro y sondas empleadas en las expediciones del *Hirondelle*. Nuevos aparatos empleados para la recolección de los animales pelágicos y de los que viven á diferentes profundidades. Lanzamiento de globos sondas en los Océanos. Curvas barométricas observadas á bordo del *Hirondelle*. Proyecto de observaciones meteorológicas en el Atlántico y creación de observatorios de esta índole en las islas. Viaje al Spitzberg. La pesca de la sardina en España. Alimentación de los navegantes que han naufragado en alta mar. Desarrollo de las tortugas. Empleo del aceite para calmar el oleaje del mar, etc., etc.

Los restantes trabajos han sido hechos por un centenar de especialistas, á quienes ha facilitado S. A. los datos y las colecciones de muestras y seres naturales, reunidas con su perseverante trabajo de tantos años.

En varios de estos escritos se dan á conocer los caracteres, manera de vivir y lugar donde se han encontrado muchas especies de peces, de cangrejos, conchas y caracoles de todas clases; cefalópodos, holoturias, medusas, erizos y estrellas de mar; braquiópodos, esponjas, foraminíferos, etc., mencionándose igualmente las aves, insectos, miriápodos, arácnidos y plantas recogidas en las islas ó tierras visitadas.

En otras memorias se trata del color de las aguas del mar; de la composición, densidad y alcalinidad de éstas, como también de su análisis bacteriológico; de los sedimentos del fondo del mar, de la naturaleza de las muestras sólidas arrancadas del fondo por las sondas; de la existencia del arsénico en la composición del cuerpo de ciertas esponjas, y de otros varios asuntos que sería prolijo enumerar.

Tan interesantes fueron las expediciones y las publicaciones de S. A., que al poco tiempo de iniciadas, en 1889, esta

misma Academia tuvo la honra de admitirle como miembro corresponsal, á propuesta de varios académicos, ya difuntos, y del que aún vive para referirlo.

Á este acto de reconocida justicia ha correspondido espléndidamente S. A. el Príncipe, donando á la Academia todas las publicaciones de que antes se ha hecho mérito, y que también se imprimieron á sus expensas, con todo lujo y con magníficas láminas que sirven para la mejor comprensión del texto.

En la biblioteca de esta corporación pueden consultarlas todos los que tengan afición á esta clase de estudios, y como no es posible dar ahora una idea de su contenido por el mucho tiempo que en ello habría de emplear, me limito en este momento á la mención de algunos datos nuevos y curiosos dados á conocer en esos volúmenes.

De los repetidos sondeos verificados por S. A. en el Atlántico y Mediterráneo con instrumentos apropósito para averiguar la profundidad en diversos sitios, como también la temperatura de las aguas, las corrientes de éstas y la naturaleza ó estado del fondo de dichos mares, queda consignado en dichas publicaciones lo siguiente:

1.º Que la mayor profundidad alcanzada con la sonda en sus exploraciones ha sido la de 6.035 metros.

2.º Que al SO. de Fayal, en las Azores, hay un banco de 215 kilómetros de circunferencia, con una profundidad mínima de 44 metros, muy abundante en pesca, al cual ha dado S. A. el nombre de Princesa Alicia; además, una depresión muy considerable del fondo del mar cerca de las mismas islas, que denominó Fosa de la Hironnelle, en que la sonda llega á 3.075 metros, y otra mayor aún, Fosa de Mónaco, al SO. de Madera, con 5.530 metros de profundidad.

3.º Que en el fondo de los mares citados no hay agua inmóvil á 4º de temperatura, como antes se creía, sino diversas temperaturas (según las corrientes observadas), bastante menores en el Atlántico que en el Mediterráneo, sien-

do en éste generalmente de 23 á 26 grados en la superficie, y 13 en sitios más hondos, hasta la profundidad de 1.500 brazas.

4.º Que el fondo del Océano está en buenas condiciones para la vida de los seres animales, mientras que el del Mediterráneo está corrompido por la gran cantidad de materiales que vierten en dicho mar el Nilo (desagüe del Africa Oriental) y varios ríos de Europa, notándose por eso la escasez de seres vivos en las partes profundas del mismo.

5.º Que en el Estrecho de Gibraltar hay dos corrientes marinas en sentido inverso: una, superficial, del Atlántico al Mediterráneo, y otra, profunda, de éste al primero de dichos mares. Así, el agua de la superficie del mar, desde el Estrecho al Cabo de Gata, tiene la temperatura y densidad de las del Atlántico, que son menores que las del Mediterráneo, y la temperatura profunda del agua del Estrecho al salir del Atlántico es más considerable que la observada en el fondo del Océano, y más semejante á la del fondo del Mediterráneo.

6.º Que el análisis bacteriológico de las aguas del mar ha demostrado la existencia de gran número de microbios en las muestras recogidas en los puertos ó cerca de las costas, siendo escasos ó desapareciendo del todo á medida que se obtuvieron más lejos de éstas.

7.º Que las muestras del terreno del fondo del mar que rodea las islas Canarias, Cabo Verde y Madera son de naturaleza basáltica, y de piedra pómez las extraídas alrededor de las Azores.

8.º Que existe un miligramo de arsénico por cada kilo de materia seca de muchos espongiarios que viven en abundancia en el fondo del mar.

Y 9.º Que durante una de las expediciones, un temporal puso en peligro al buque explorador, comprobándose que tal vez debió su salvación al hecho de verter aceite poco á poco en las aguas del mar, lo cual disminuye la violencia del oleaje, según una opinión antigua, recomendada por Fran-

klín en 1774, y con la cual están de acuerdo diversos navegantes.

De la recolección de seres vivos á diferentes profundidades por medio de las nasas y las dragas, y, sobre todo, de los sitios más profundos, se ha confirmado más aún en las exploraciones de S. A. la existencia de la vida animal en esas regiones, con el descubrimiento de muchas nuevas especies, además de las ya encontradas en la expedición del *Porcupine*.

En parajes muy hondos y donde debe haber una obscuridad completa, viven, sin embargo, animales provistos de ojos (como un calamar denominado *Leachia cyclura* y un pez nombrado *Photostomias Guernei*), los cuales pueden ver cerca de su cuerpo merced á unos aparatos luminosos que rodean el órgano de la visión en el primero, y que tiene el segundo debajo de las órbitas, y en dos series á lo largo de la línea ventral. Otras especies de los grandes fondos, como los cangrejos de los géneros *Dorynchus* y *Munida*, presentan ojos grandes y brillantes, á pesar de no estar dotados de aparatos luminosos como los seres mencionados. Y sin embargo, pueden servirse de sus órganos visuales, porque en los sitios donde viven hay muchos animales fosforescentes que iluminan las aguas de su alrededor. Entre ellos, merecen citarse un erizo de mar, la *Ophiacanta spinulosa*, que da luces de un verde intenso, y una pluma de mar, la *Pavonia quadrangularis*, cuya fosforescencia es de un violeta pálido.

Varios animales recogidos, y que difieren bastante de formas antes conocidas, son la *Brisinga coronata*, estrella de mar, de brazos muy largos y muy brillante cuando se la observa dentro del agua; unas esponjas que presentan gran número de espículas silíceas, ya muy largas y en disposición radiada como en la *Tetilla longipilis*, ya formando un fino enrejado, en que las espículas presentan cinco puntas, como en la *Holtenia Carpenteri* y otras. Examinando des-

pacio las memorias antes citadas, se encuentran todavía, en seres muy pequeños de diversos grupos, particularidades de forma ó de organización, y por no ser muy difuso, terminaré esta ligera reseña mencionando tres especies de cangrejos y otras tres de calamares muy notables. Entre los primeros están el *Nymphon abyssorum*, cangrejo de cuerpo muy pequeño y extremidades muy largas, que le dan el aspecto de una araña; el *Neolithodes Grimaldii*, con el cuerpo y las extremidades erizadas de largas y puntiagudas espinas, y la *Caprella spinosissima*, á que se da el nombre vulgar de cangrejo esqueleto, porque realmente tiene ese parecido por su cuerpo largo y estrecho y la disposición de sus extremidades. De los Cefalópodos, los más curiosos son el *Lepidoteuthis Grimaldii*, con el cuerpo cubierto de escamas, como los peces; el *Ctenopteris cyprinoides*, que presenta dos aletas laterales grandes y con radios, como los pescados, y el *Grimalditeuthis Richardi*, en que la parte inferior y terminal del cuerpo ofrece un apéndice estrecho, con una lámina en forma de corazón y muy trasluciente, tanto, que se puede leer al través de ella cualquier impreso.

Con todo lo antes expuesto y á grandes rasgos, creo se ha comprendido hasta dónde llegó la pasión científica de S. A., el cual todavía ha traspasado esos límites con la creación de un edificio para conferencias científicas en París, y la de un monumental palacio en Mónaco, con el título de Instituto Oceanográfico. En esta bien situada y preciosa construcción hay inmensas salas donde están expuestas con un gusto exquisito, á la vista del público, las colecciones referentes á Oceanografía y Zoología marina, y existen, además de una sala grandiosa para recepciones ó conferencias, numerosos y bien entendidos departamentos para laboratorios, gabinetes de estudio, biblioteca, acuarios, etcétera, etc.

La inauguración del Instituto Oceanográfico, verificada en 1010, y á la que asistí como delegado del Gobierno de

España y de esta Academia, fué un éxito inmenso para S. A. Altos dignatarios y Comisiones oficiales de diversos Estados, centenares de profesores y naturalistas de todas las naciones, celebraron llenos de entusiasmo el servicio hecho á la ciencia por S. A., el cual ha dejado completa su obra con un espíritu eminentemente altruista, asignando una gran subvención en lo futuro para que las tareas por él emprendidas sean continuadas en dicho Instituto por hombres científicos de todos los países.

Y con esto termino, felicitando sinceramente á S. A., y mostrándole á mi auditorio, con un elogio muy español y muy expresivo: Señores, he ahí *una vida bien empleada*.

XXV.—Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Continuación.)

LEYES DEL EQUILIBRIO Y DEL MOVIMIENTO DE UN INDIVIDUO

Admitidos los *Principios fundamentales*, se pueden deducir las leyes que rigen el equilibrio y el movimiento, cuando se considera por abstracción un solo individuo *libre* en un asunto y se conocen las fuerzas (relacionadas con el asunto) que actúan simultáneamente sobre él, unas emanando del interior del organismo del individuo natural y otras del exterior.

EQUILIBRIO: Si un individuo se halla libre y en reposo, teniendo una determinada posición en un asunto de carácter social, y es solicitado simultáneamente por varias fuerzas dadas en diversas direcciones y sentidos en el asunto, y con intensidades conocidas, cada una de las cuales tiende á modificar la posición del individuo—sacándole del estado de reposo—para imprimirle un cierto movimiento con la velocidad que correspondiera á la intensidad de cada una de ellas, y en su dirección y sentido en el asunto de que se trate, es evidente—en virtud de su inercia y de la composición de las fuerzas—que (componiendo dos de las fuerzas y su resultante con una tercera, y así sucesivamente) el efecto de todo el conjunto de fuerzas que actúan es equivalente al de la *resultante final*; por consiguiente, el efecto será *nulo*, y el individuo permanecerá en la misma posición que tiene, sin experimentar cambio alguno en el asunto — y como si se le hubiera dejado entregado á sí mismo — si aquélla resultante

final es *nula*, es decir, si en la representación simbólica, el llamado polígono representativo de las fuerzas es cerrado. Se dice entonces que el individuo libre está *en equilibrio* bajo la acción de tales fuerzas; ó de otro modo: que las fuerzas que actúan sobre el individuo *se equilibran*. Con este último modo de expresión se significa más claramente que — por sus direcciones y sentidos particulares en el asunto y por sus respectivas intensidades — las influencias están contrarrestadas unas por otras.

La ley, pues, del equilibrio del individuo libre aislado, es que el polígono representativo de las fuerzas sea cerrado, porque así como ésta es condición *suficiente*, es también *necesaria*; es decir, que estando en equilibrio el individuo, habrá de cumplirse la condición necesariamente, pues de no ser cerrado el polígono, existiría una resultante final y á ella obedecería el individuo libre poniéndose en movimiento en la dirección y sentido de esta resultante.

Si en vez de considerar al individuo libre en reposo le consideramos en estado de movimiento, se dirá también que un grupo de fuerzas que sobre él actúa se equilibra, cuando el estado de movimiento no se altera; es decir, no se modifica, sino que continúa como si ese grupo de fuerzas no existiera. Del mismo modo que en el caso del reposo, las fuerzas del grupo en equilibrio deberán de cumplir la condición necesaria y suficiente que acabamos de formular.

Con esto queda dicho todo respecto al equilibrio de las fuerzas que actúen sobre un individuo libre.

MOVIMIENTO: Para tratar en toda su generalidad el problema del movimiento de un individuo libre bajo la acción de varias fuerzas dadas, fijemos primeramente la atención en *los datos* del problema. Estos son:

1.º El *estado inicial* del individuo en el asunto; es decir: la *posición* que tiene en el instante que consideramos como inicial para el estudio, y la *velocidad* que tiene en este instante en magnitud, dirección y sentido.

2.^a *La masa* del individuo en el asunto.

3.^o *Las varias fuerzas psíquicas* que simultáneamente actúan sobre el individuo, conocidas por sus magnitudes, direcciones y sentidos en cada instante. No se olvide que las únicas acciones que han de ser consideradas son las que *obran efectivamente* sobre la psiquis del individuo, como dijimos en los *Preliminares*.

Siguiendo el procedimiento que se emplea en la *Mecánica racional*, el problema del movimiento se resuelve procurando determinar el cambio *muy pequeño* de movimiento que experimentará el individuo en el asunto á partir de un cierto instante y durante un intervalo de tiempo muy pequeño θ ; es decir, el movimiento que se llama elemental, porque enlazando estos movimientos elementales por ley de continuidad *en el tiempo y en el asunto*, se tendría el movimiento real y efectivo de modificación del individuo en el asunto desde un instante cualquiera t_0 hasta otro instante cualquiera t_1 ; es decir, durante un trascurso cualquiera de tiempo.

Para determinar el movimiento elemental á partir de un instante dado (instante inicial), se empieza por reemplazar el conjunto de las fuerzas, que son conocidas en ese instante (dato tercero); por una sola F que sea la *resultante* de todas ellas.

Ya vista; si se aplica el segundo Principio fundamental, se deduce la aceleración total J del movimiento del individuo en ese instante, porque tendrá, en virtud de ese Principio, la misma dirección y el mismo sentido que F , y una magnitud que se obtendrá dividiendo la intensidad de F por la masa m (dato segundo) del individuo en el asunto $\left(J = \frac{F}{m}\right)$.

Determinada así en magnitud, dirección y sentido la aceleración total J en el instante inicial, bastaría componer J con la velocidad inicial v_0 (dato primero) por Cinemática, y la resultante indicará — tanto en dirección y en sentido como en magnitud — cuál ha de ser la velocidad v' del individuo

al fin de un intervalo muy pequeño de tiempo θ . Habremos determinado así el cambio de movimiento producido por las fuerzas en ese intervalo de tiempo muy pequeño θ . Es claro que la posición del individuo, cuando haya de tener esa nueva velocidad v' , se obtendría (según dijimos en la Cinemática) añadiendo á la posición p_0 (dato primero), el cambio ó modificación experimentado en el tiempo θ — que tendrá la dirección y el sentido de v_0 y una magnitud que puede medirse aproximadamente por $v_0\theta$.

Cuando en la *Mecánica racional* se considera un punto material que no está en libertad absoluta de moverse en el espacio en cualquiera dirección y sentido, se dice que tiene *enlaces*. La naturaleza física de éstos, así como su disposición especial en cada caso, deben de ser estudiadas y tenidas en cuenta en la Mecánica aplicada; pero en la *Mecánica racional* se supone siempre que esas limitaciones para el movimiento se expresan y definen tan sólo por ecuaciones. Si el enlace es unilateral, se expresa por una desigualdad negativa.

Para las especulaciones abstractas que intentamos en estos *Apuntes sobre Mecánica social*, basta que digamos que el individuo tiene *enlaces*, cuando no está en libertad absoluta de modificar *su posición*— en un asunto — en cualquiera dirección y sentido.

Si se intentara hacer una Mecánica social aplicada, habría de procederse á un estudio minucioso de la disposición especial de los enlaces en cada caso, porque tendría eso una importancia capital. A nosotros nos basta ahora concebir su existencia, y hacer intervenir los enlaces en los razonamientos.

Así, después de haber dado las leyes del equilibrio y del movimiento de un individuo *libre*, debemos de añadir que si no está libre, sino sujeto á enlaces, se deberá de reemplazar éstos por fuerzas equivalentes antes de aplicar aquellas leyes. Y se puede asegurar desde luego, que hay siempre en todo individuo un género de limitación al cual está ligado el ente abstracto y simple á quien llamamos nosotros *el indivi-*

duo, es á saber: el enlace de éste con el ser orgánico de su propio cuerpo. Por eso hemos sobreentendido siempre (al considerar al individuo como mecánicamente libre) que este enlace ha sido reemplazado por las fuerzas psíquicas que le sean equivalentes, en cuanto al efecto psíquico mecánico.

Se concibe que hay otros muchos géneros de enlaces psíquicos que deben de ser considerados en la *Mecánica social*. Proviene de las relaciones que medien entre el individuo de que se trate, y otros individuos ó elementos sociales. Estos enlaces son los que habremos de considerar al estudiar en la *Segunda parte* las agrupaciones sociales, desde nuestro punto de vista de la *Mecánica*.

La solución que hemos dado al problema del movimiento de modificación de un individuo libre, planteado en toda su generalidad para el caso teórico de que la fuerza motriz F , resultante de todas las que actúen en cada instante, varíe de un instante al siguiente por ley de continuidad, conduce, naturalmente, á un movimiento del individuo, que—como sucesión de movimientos elementales— es simbolizado por el movimiento de trayectoria curvilínea de un punto material (*).

Ya dijimos anteriormente que en la realidad del desenvolvimiento de la vida psíquica del individuo, las direcciones

(*) Al plantear el problema general, é indicar cómo podría concebirse—ya que no obtener— su solución, lo vemos como un problema *determinado*.

Decía John Stuart Mill: «dados los motivos que estén presentes en la mente de un individuo, y dados igualmente el carácter y la disposición de ese individuo, se podría inferir con certeza su modo de obrar».

Nosotros, al deducir el movimiento del individuo, hemos supuesto, dada la *posición inicial* y la *masa* del individuo, que parecen corresponder á lo que Stuart Mill quiere significar con la *disposición* y el *carácter*; y también dadas las varias fuerzas psíquicas que simultáneamente actúan sobre el individuo, que parecen corresponder á los motivos que estén presentes en su mente. En lo que Stuart Mill denomina el carácter y la disposición del individuo, van envueltas las fuerzas que nosotros concebimos como emanando del interior del propio organismo corporal.

en las cuales se operan sus cambios de posición en cada asunto—que son las direcciones de sus velocidades—no son generalmente variables de un instante al siguiente, sino á intervalos de tiempo de bastante duración para que el movimiento en la realidad sea *una sucesión de movimientos de dirección constante*, cada uno de los cuales es de duración relativamente larga dentro de la longitud de la vida total.

Para cada uno de esos movimientos parciales, suponemos que (si la velocidad inicial no es cero) adquiriera la velocidad —al empezar— una orientación y un sentido que sean los mismos que los de la fuerza motriz F que habrá de seguir actuando ya en todo el tiempo de la duración de ese movimiento *parcial*. Esto requiere que, en el instante crítico del cambio de dirección en el movimiento del individuo, las fuerzas cambien de un doble modo: primero, para cambiar la dirección de la velocidad al terminar el movimiento anterior; y después, para que su resultante se coloque—por decirlo así—en la dirección que ha de conservar ya por algún tiempo.

Pero como la teoría dinámica anteriormente expuesta es *general*, deberemos de aplicarla á cada uno de esos movimientos de dirección constante (representables por movimientos rectilíneos de un punto material) y diremos por tanto:

1.º Que si en uno de esos movimientos de dirección constante, todas las fuerzas que actúan incesantemente sobre el individuo, tuvieran una resultante F que no sólo fuera constante en dirección y sentido, sino también *en intensidad*, la aceleración J en ese movimiento del individuo, habría de ser también *de magnitud constante* $\left(J = \frac{F}{m} \right)$; es decir, que su movimiento habría de ser *uniformemente acelerado* en ese transcurso de tiempo. Si el sentido de F fuera el opuesto al sentido de la velocidad, el movimiento sería *uniformemente retardado*.

2.º Que si sólo fuera constante la dirección y el sentido

de la resultante motriz F (que sean los mismos de la velocidad), pero no lo fuera su intensidad (lo cual ocurrirá frecuentemente), el movimiento sería de aceleración variable J ; y que su ley de variación se deduciría de la ley de variación de la intensidad de la fuerza, que suponemos conocida (puesto que $J = \frac{F}{m}$). Conocida ya la J en cada instante, se sabe (por lo que dijimos en la *Cinemática*) que el cálculo del incremento de *la magnitud* de la velocidad en un cierto tiempo, se hace integrando los productos $J \cdot \theta$ que expresan *aproximadamente* los pequeños incrementos sucesivos de la velocidad en los intervalos pequeños de tiempo θ .

* * *

Por todo lo expuesto, se ve que la posición psíquica que llegue á alcanzar al cabo de algún tiempo un individuo en un asunto dado de carácter social, podría determinarse mecánicamente, si fuera posible conocer todas las variadísimas é innumerables influencias que—como fuerzas —ejercen su acción sobre él, y que por modo muy complejo emanan tanto del interior del propio individuo natural, como de otros individuos ó elementos sociales, y, por último, del ambiente *natural* y *social* en que esté colocado.

Las leyes que hemos tomado de la Mecánica racional, parecen indicar que el plan *ideal* para la educación de cada individuo, con el fin de que alcance (ó tienda á alcanzar) una cierta *posición* á que aspire, *en un asunto dado*, requeriría:

1.º Un conocimiento completo del temperamento nativo del individuo, que permitiera determinar las fuerzas que habrán de actuar sobre *él* (como ente abstracto ó simple), emando de su propia individualidad natural (fisiológica y psíquica), en relación con las sucesivas y variadas incidencias de su vida;

2.º Un conocimiento completo de todas las influencias que se habrán de ejercer como fuerzas sobre él, emanando de otros individuos y elementos sociales, y también del medio ambiente educativo natural y social en que esté colocado;

3.º Una apreciación de su masa para el asunto; y

4.º Un conocimiento perfecto de la dirección y el sentido en que debe de moverse (ó modificarse *la posición* del individuo), para llegar á alcanzar por el camino más corto la posición á que aspire.

Con estos conocimientos y datos, el problema de la educación consistiría en disponer del medio ambiente externo educativo (*) de tal modo, que las fuerzas varias que de él emanen, compuestas con las que emanen del propio individuo den, en todos los instantes, una resultante F que marque constantemente la *dirección y el sentido* en que se quiere ver realizado el movimiento de modificación del individuo en el asunto; y además, procurar que la intensidad F sea la mayor posible. Si se pudiera conseguir que esa resultante F de todo el conjunto de fuerzas, se conservara siempre *con esa intensidad, y en la dirección y sentido* que se desea, el movimiento (rectilíneo) del individuo sería *uniformemente acelerado*, según vimos: su aceleración J sería directamente proporcional á la intensidad de F , é inversamente proporcional á la masa del individuo en el asunto (**).

(*) En esto incluimos todo lo físico y psíquico que esté fuera del individuo natural, fuera del límite U de Mach.

(**) Hemos concebido siempre *la masa* de cada individuo *en un asunto*, como un coeficiente *constante* en el tiempo. Pero quizás debería de ser concebida como variable á compás de los cambios en *la posición* del individuo; porque parece que la posición misma debe de influir en la capacidad del individuo para su modificación. Quizás también puede decirse que, por sí sola, la edad del individuo influye en su masa, dotándole — á medida que aumenta, — de una menor capacidad de modificación, es decir, aumentando la masa del individuo con su edad. Estos son puntos muy delicados y oscuros, respecto de los cuales nos abstenemos de ahondar. En la *Mecánica racional* la masa se miró siempre como un coeficiente constante, aunque

Para terminar estas ligeras indicaciones que presentamos desde un punto de vista exclusivamente mecánico, diremos que sólo con ese ideal de perfección podrían evitarse los *zig-zags* que frecuentemente ocurren en los movimientos de modificación de los individuos durante su vida, y que son producidos, á mi entender, por las fuerzas psíquicas que, influyendo como componentes sobre la dirección y el sentido de la resultante motriz F , cambian de vez en cuando la dirección del movimiento, desviándole de aquella dirección que se deseaba. Mientras menos desviaciones y *zig-zags* haya, más nos acercaremos al ideal de perfección en la educación, cualquiera que sea el fin de ésta; es decir, cualquiera que sea aquella *posición* á que deseamos tienda el individuo, si no puede llegar á alcanzarla.

* * *

OBSERVACIÓN. Ya hicimos notar que lo que bajo el nombre genérico de fuerza hemos considerado para la acción (estática ó dinámica) sobre el individuo, puede ser de cualquiera especie, y ejercer su influencia por la sensibilidad ó por el entendimiento ó por el sentimiento, etc. Todas esas varias especies han tenido para nosotros el carácter común de fuerzas psíquicas, es decir, de causas de modificación de

recientemente se haya afirmado en los físicos, la idea de considerar la masa como aumentando al crecer enormemente la velocidad.

Seguiremos considerando la masa como constante, y esto se podría, quizás, conciliar con las observaciones ó los reparos que acabamos de hacer, teniéndolos en cuenta al hacer la medición de las fuerzas psíquicas, el día que esto pudiera intentarse por la Psicología experimental. Bastaría, en efecto, que la intensidad de una fuerza F se pudiera expresar (en medida) con arreglo á *la edad* y á *la posición* del individuo sobre quien actúa; para que su relación á la aceleración J fuera un coeficiente *constante* m . De esta suerte la masa quedaría como una constante del individuo para el asunto, y la dificultad iría á recaer sobre el problema de la Psicología referente á la medición de las fuerzas.

movimiento psíquico, y á todas les hemos atribuído dirección, sentido é intensidad. Así como la *Mecánica racional* no se preocupa de la naturaleza especial de las fuerzas, á la *Mecánica social pura* no le interesa saber si las fuerzas psíquicas, sobre las cuales versan sus especulaciones, son de una ú otra especie, siempre que se admita que unas y otras y todas, obedecen á los *Principios generales* que se han sentado como *Postulados*.

Prescindimos completamente de algunas cuestiones que se plantean en la Psicología, como, por ejemplo: si una fuerza intelectual para producir impulsión, ha de provocar antes en el individuo un estado de sentimiento (ó pasional) que sea el que realmente impulse al individuo. No podemos nosotros penetrar aquí en estos procesos que corresponde estudiar á los psicólogos; pero sí debemos de observar que, si para la *Mecánica* de los cuerpos materiales las fuerzas que más se diferencian unas de otras por sus caracteres físicos, son tratadas por la *Mecánica racional* como cantidades del mismo género (en cuanto son consideradas como causas de modificación de movimiento), y se refieren á una misma unidad (la dina ó el kilogramo), sería necesario asimismo para la *Mecánica social* que las fuerzas psíquicas que más se diferencian unas de otras por su naturaleza especial y por sus caracteres, pudieran ser referidas á alguna unidad común, mediante los progresos de la Psicología.

Esto que decimos respecto de las fuerzas psíquicas, deberá de aplicarse análogamente á los *trabajos* y á las otras formas de *energías psíquicas*. Ya hablaremos de esto más adelante.

No podemos entrar en disquisiciones acerca de la predominancia de lo intelectual sobre lo moral, para producir el movimiento progresivo de las sociedades. Parece que las fuerzas que sean puramente intelectivas, es decir, que estén desprovistas de todo elemento pasional, no se contrarrestan ni se contraponen unas á otras, del mismo modo que las fuerzas sentimentales. Por esto se alcanza en las sociedades

progresivas la acumulación de conocimientos y su difusión, y se obtiene en general un gran desarrollo para las fuerzas que provienen de la educación intelectual. Pero estas cuestiones son ajenas á nuestro estudio, como lo es la noción misma de Progreso, si se da á esta palabra el sentido de mejoramiento en general.

TEOREMAS SOBRE EL MOVIMIENTO DEL INDIVIDUO

1.º — TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS Ó DE LA ENERGÍA

Si adoptamos en los asuntos sociales la antigua denominación de fuerza viva, llamaremos aquí *fuerza viva de un individuo en un instante*, el producto de la masa del individuo (en el asunto de que se trate) por el cuadrado de la magnitud de su velocidad en ese instante ($m \cdot v^2$). Hoy se denomina *energía cinética en un instante*, la mitad de ese producto.

Veamos la definición del *trabajo elemental* de una fuerza. Cuando un individuo realiza un cambio muy pequeño *de posición*, en un asunto, en una determinada dirección y sentido (la de su velocidad en ese instante), y lo hace estando bajo la acción de una fuerza cualquiera P , se dice que esta fuerza hace un *trabajo elemental*; se llama así el producto de la intensidad de la fuerza por el pequeño cambio de posición *estimado en la dirección de la fuerza*. O bien, porque es enteramente lo mismo, y más apropiado á nuestro estudio: el producto de la intensidad de la fuerza *estimada* en la dirección de la velocidad, por el pequeño incremento del parámetro que define su posición. Se representaría en el movimiento elemental de un punto material por la expresión $P \cdot ds \cdot \cos \varphi$; siendo ds el camino elemental recorrido, y φ el ángulo de la dirección y sentido de la fuerza P con la dirección y sentido del desplazamiento elemental $ds = v \cdot \theta$. — Se dice que

el trabajo elemental de una fuerza es *motor* (positivo), cuando al *estimar* la fuerza en la dirección de la velocidad, aparece *en el mismo sentido* que ésta; cuando aparece *en sentido contrario*, se dice que el trabajo elemental es *resistente* (negativo).

Se ve fácilmente — por la ley de la descomposición de fuerzas — que si el individuo ha estado bajo la acción de varias fuerzas, el trabajo elemental de la resultante F de éstas, es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales de las componentes.

Para dejar establecido el *Teorema de las fuerzas vivas* (ó *de la energía*), considérese esa resultante motriz $F = m \cdot J$, que, estimada en la dirección del movimiento, da:

$$F \cdot \cos \alpha = m J \cdot \cos \alpha.$$

Se ve que su trabajo elemental es el producto $m J \cos \alpha \times v \theta$, ó bien $m v \times J \theta \cos \alpha$. Pero como $J \theta \cos \alpha$ (según lo que vimos en *Cinemática*, al tratar de la aceleración total J) puede considerarse que expresa el incremento muy pequeño experimentado por *la magnitud* de la velocidad v , y producido por la acción de la fuerza; si se representa por $d v$, se tiene que el trabajo elemental de F es igual á $m v \times d v$. Y como el producto $v \times d v$ puede considerarse que es la mitad del incremento muy pequeño que haya experimentado v^2 , y se representa por $\frac{1}{2} d v^2$, se tiene en definitiva que:

el trabajo elemental de F es igual á $\frac{1}{2} d \cdot (m v^2)$. En esto con-

siste el famoso *Teorema de las fuerzas vivas*, que (para el movimiento de un individuo durante un intervalo muy pequeño de tiempo θ) podría enunciarse de este modo:

La mitad del incremento muy pequeño (positivo, negativo ó nulo) que experimenta la fuerza viva del individuo, es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales efecti-

vos realizados por todas las fuerzas que hayan actuado simultáneamente sobre el individuo en su movimiento elemental.

O dicho de otro modo:

El incremento muy pequeño (positivo, negativo ó nulo) de la energía cinética del individuo es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales realizados por todas las fuerzas que hayan actuado simultáneamente sobre el individuo en su movimiento elemental.

Este teorema indica claramente:

1.º Que si en un movimiento elemental del individuo predominan los trabajos elementales *motores* que realicen unas fuerzas sobre los trabajos elementales *resistentes* de otras, la energía cinética del individuo aumentará, puesto que su incremento será positivo; el movimiento se habrá acelerado porque habrá habido un aumento en la *magnitud* de la velocidad;

2.º Que si predominan los trabajos elementales *resistentes* sobre los *motores*, la energía cinética del individuo disminuirá porque su incremento será negativo; habrá habido disminución en la *magnitud* de la velocidad;

3.º Que si hay compensación entre los trabajos elementales *motores* y los *resistentes* de unas y otras fuerzas, la energía cinética del individuo no se alterará porque su incremento será nulo; no habrá habido, por tanto, alteración en la *magnitud* de la velocidad.

Nótese que este teorema no afecta en nada al cambio de dirección de la velocidad; se refiere solamente al cambio de *magnitud* de la velocidad, puesto que esta *magnitud* es la que interviene en la energía cinética. Y nótese también que en este teorema no entra directamente el tiempo.

Si del movimiento elemental queremos pasar al movimiento del individuo por ley de continuidad en el asunto durante un transcurso cualquiera de tiempo, basta aplicar el teorema á todos y cada uno de los movimientos elementales que se integran en el movimiento total y hacer la suma.

Se ve desde luego que el incremento numérico de la energía cinética, desde un instante t_0 hasta otro instante cualquiera t_1 , es la suma de todos los incrementos *muy pequeños* (positivos, negativos ó nulos) que haya ido recibiendo la energía cinética en todos los movimientos elementales sucesivos. Y si llamamos *trabajo total de una fuerza* que haya actuado de un modo continuo sobre el individuo desde el instante t_0 hasta el instante t_1 , á la suma algebraica de los *trabajos elementales* (positivos, negativos ó nulos) que haya realizado la fuerza en todos los movimientos elementales sucesivos, el Teorema para los transcurros cualesquiera de tiempo, se enunciará así:

El incremento de la energía cinética del individuo desde un instante t_0 hasta otro posterior t_1 , es igual á la suma algebraica de los trabajos totales (motores y resistentes) realizados en ese transcurso de tiempo por todas las fuerzas que hayan estado actuando sobre él.

Así vemos que la energía cinética del individuo en un asunto, será en el instante t_1 mayor, igual ó menor que la que tenía en el instante t_0 , según que el trabajo *total* hecho por las fuerzas haya sido motor, nulo ó resistente. Decir que el trabajo total haya sido nulo desde t_0 á t_1 , equivale á decir que los trabajos totales positivos ó motores de unas fuerzas, hayan sido compensados por los negativos ó resistentes de otras. Y es evidente que si en todos y en cada uno de los instantes hubiera compensación de trabajos motores y resistentes, habría *conservación de la energía cinética del individuo para todo su movimiento en el asunto*; y este movimiento habría de ser necesariamente uniforme.

* * *

Tanto para el movimiento elemental como para el que se realiza en un transcurso cualquiera de tiempo, la expresión del *teorema* se simplifica, recordando que en cada instante

la suma algebraica de los trabajos elementales de todas las fuerzas, es igual al trabajo elemental de su *resultante* F en ese instante.

Y así el *teorema* se enunciaria diciendo:

1.º *Que en el movimiento elemental el incremento muy pequeño de la energía cinética es igual al trabajo elemental de la resultante motriz F .*

2.º *Que desde un instante t_0 hasta otro posterior t_1 , el incremento de la energía cinética es igual al trabajo total hecho por las resultantes motrices F .*

Si pensamos atentamente en los efectos de la acción (sobre el individuo) de la resultante F en cada instante, se nota que produce un doble cambio en el *estado de movimiento* del individuo, á saber: un cambio *en la dirección* de la velocidad v que tenía, y otro cambio *en la magnitud* de esa velocidad v .

El cambio de la *dirección* en que venía dispuesto á seguir modificándose la posición del individuo, se produce por la influencia que sobre él ejerce la componente de la fuerza, según una dirección en el asunto, que sea enteramente ajena á la dirección de v ; ó, lo que es igual, por la influencia de la componente de esa naturaleza que tenga F . Mientras mayor sea esta componente de F , más acentuado será el *cambio de dirección* del movimiento del individuo. Y se comprende que la componente de que hablamos influya *sólo de este modo*, porque se limita á llamar la atención del individuo—si vale la frase—hacia una dirección totalmente *extraña* á la que él trae, á fin de desviarle de ésta, pero sin empujarle ni retenerle, es decir, sin ejercer influjo alguno sobre su energía cinética. Es claro que si el movimiento del individuo se realiza sucesivamente en direcciones constantes que tienen largos transcurros de tiempo de duración, lo que acabamos de decir sólo será aplicable en los instantes *críticos* del cambio de dirección.

El cambio *en la magnitud* de la velocidad v , que trae el in-

dividuo, se produce por la componente F_1 que tenga la fuerza en la dirección misma de v , la que hemos llamado fuerza F , estimada en la dirección de v . Se comprende que esta F_1 sea la que por modo muy directo influya sobre la magnitud de v , ya empujando al individuo, ya reteniéndole, según que su aspiración sea acelerar ó retardar su movimiento. Para lo primero, el sentido de la fuerza F_1 habrá de ser el mismo de ésta; para lo segundo, el sentido contrario. En el primer caso, la componente de que hablamos aumentará la energía cinética del individuo; en el segundo caso, la disminuirá.

Este segundo efecto de la resultante motriz F , es decir, el *cambio en la energía cinética* del individuo será tanto más acentuado cuanto mayor sea el trabajo que haga la fuerza F , porque precisamente trabaja para eso, ya sea positivamente, ya negativamente. La que verdaderamente trabaja es la componente F_1 , porque la primera componente que vimos influyendo solamente para desviar al individuo de la dirección que traía, ejerce una influencia que *no es de trabajo*, puesto que, según la definición de esta palabra, su trabajo es *nulo*. Por esto se dice que *el trabajo que hace la F_1 , es el de la F* .

Pero volviendo á lo que decíamos: si el cambio en la magnitud de la velocidad v , es debido al trabajo que haga la resultante F de todas las fuerzas, ¿qué ley relaciona este trabajo con el cambio de magnitud de v ? A esta pregunta se ha contestado con el *teorema de la energía*, en el cual está formulada *la ley*, á saber: *que el trabajo hecho por la fuerza F es igual al incremento experimentado por la energía cinética*.

Sin insistir más en comentarios acerca de este *teorema*, diremos—para terminar—que en la vida social de cada individuo las fuerzas que sobre él actúan—tanto emanando de su propio cuerpo como de otros individuos ó elementos y del medio ambiente—serán más eficaces para desviarle de la dirección en que esté dispuesto á moverse ó modificarse por

causas anteriores, cuanto más tiendan á indicarle direcciones ajenas á la suya. Pero que cuando se quiere entrenarlo—si así puede decirse—en su misma dirección y sentido, imprimiéndole mayor energía cinética, deberá procurarse, para la mayor *eficiencia* de las fuerzas que actualmente ejerzan acción, que éstas (todas ellas) tengan direcciones y sentidos que se acerquen mucho á la de su velocidad actual, porque así se trabajará más eficazmente. Y que (por la misma razón) cuando se quiera quitarle energía cinética deberán de ejercerse las acciones todas, ó bien en la misma dirección de su movimiento, pero en sentido diametralmente opuesto, ó bien en direcciones que se separen poco de ella, pero siempre en sentido contrario. El trabajo que se haga en uno ú otro caso no es perdido, puesto que según el teorema es íntegramente recogido por el individuo en forma de aumento ó disminución de su energía cinética. Propiamente recogido será, en el caso de aumentar su energía cinética, porque se haya hecho trabajo positivo. En el otro caso, el trabajo negativo que se haya consumido se encontrará íntegramente compensado por la energía cinética que se haya quitado al individuo.

Parece innecesario añadir—como ya apuntamos en otra ocasión—que tratándose de fuerzas psíquicas y de *estado psíquico* del individuo en un asunto, todo lo dicho tendrá solamente aplicación cuando la acción de las fuerzas exteriores sea *recibida* por el individuo *real y efectivamente*, pues si no llegan á él *psíquicamente*, si así puede decirse, no pueden ejercer influencia. Y para una *Dinámica práctica* sería indispensable—como dijimos anteriormente—el conocimiento perfecto del temperamento fisiológico y del temple psíquico del individuo para descubrir cuáles serían en cada instante las fuerzas que brotarían del individuo mismo natural. Sólo así podría disponerse como convenga del medio ambiente con el fin á que se aspire respecto de la energía cinética. Las fuerzas que emanen de otros individuos y ele-

mentos sociales, así como del medio ambiente físico y social, podrían hacer—entre todas—un gran trabajo positivo—por ejemplo—y nosotros (por la observación) ver que se producía, sin embargo, una disminución de energía cinética, ó que se conservaba constante, no porque la ley dinámica de la energía deje de cumplirse, sino porque haya habido fuerzas que, brotando del interior del individuo natural, hayan hecho un trabajo negativo preponderante sobre aquél ó igual á aquél.

Habría que tener muy en cuenta que las fuerzas que brotan del interior del individuo natural, no dependen *tan sólo* de su organismo fisiológico-psíquico, como de una entidad aislada, sino que, por el contrario, esas fuerzas serán unas ú otras, según sea el medio ambiente *natural* y *social* en que esté colocádo, lo cual hace comprender la enorme complejidad y dificultad del problema general teórico (*).

2.º — TEOREMAS SOBRE LAS CANTIDADES DE MOVIMIENTO

Para poder formular estos *teoremas*, recordemos ante todo las dos *definiciones* siguientes:

(*) En el teorema que hemos expuesto — y en los que siguen — se formulan propiedades generales, del movimiento de modificación del individuo bajo la acción de fuerzas psíquicas cualesquiera. Pero no hay modo de comprobar por la observación ó la experiencia la verdad de estas propiedades, porque carecemos hoy de procedimientos suficientemente aproximados para medir los trabajos de las fuerzas psíquicas por una parte, y la energía cinética del individuo por otra.

La comprobación se puede hacer en la *Mecánica* de los sistemas materiales. Bien entendido que no se hace ni puede hacerse sobre *puntos materiales*, que son puras abstracciones de la *Mecánica racional*, sino sobre cuerpos; y para éstos son posibles aquellas mediciones con la aproximación propia de las observaciones y experiencias físicas.

En la *Mecánica social* no podemos hoy aspirar más que á prestar nuestro asentimiento á las proposiciones que se formulen en el terreno de la pura especulación, como deducidas de los Principios fundamentales.

1.^a Se llama *cantidaa de movimiento en un instante*, de un individuo en un asunto, el producto de su masa en el asunto por su velocidad en ese instante ($m v$). Pero conviene notar bien, desde ahora, que la velocidad se considera aquí con *su magnitud, dirección y sentido*, á diferencia de la fuerza viva, en la cual no intervenía la velocidad más que por su magnitud. Por eso la cantidad de movimiento es, en Dinámica, una cantidad vectorial representada por un vector localizado en la posición que tiene el individuo en un instante dado, lo mismo que la velocidad lo era en Cinemática. La magnitud del vector dinámico — cantidad de movimiento, — es la magnitud del vector-velocidad, afectado de un coeficiente, que es la masa del individuo en el asunto: la dirección y el sentido son los mismos.

2.^a Se llama *impulsión elemental* de una fuerza F , el producto de la intensidad de la fuerza por el tiempo θ muy pequeño de su acción. A este producto $F\theta$ se le atribuye la misma dirección y el mismo sentido de F , y así es también una cantidad vectorial representada por un vector (dinámico) localizado en la posición que el individuo tiene en el instante en que la fuerza es F .

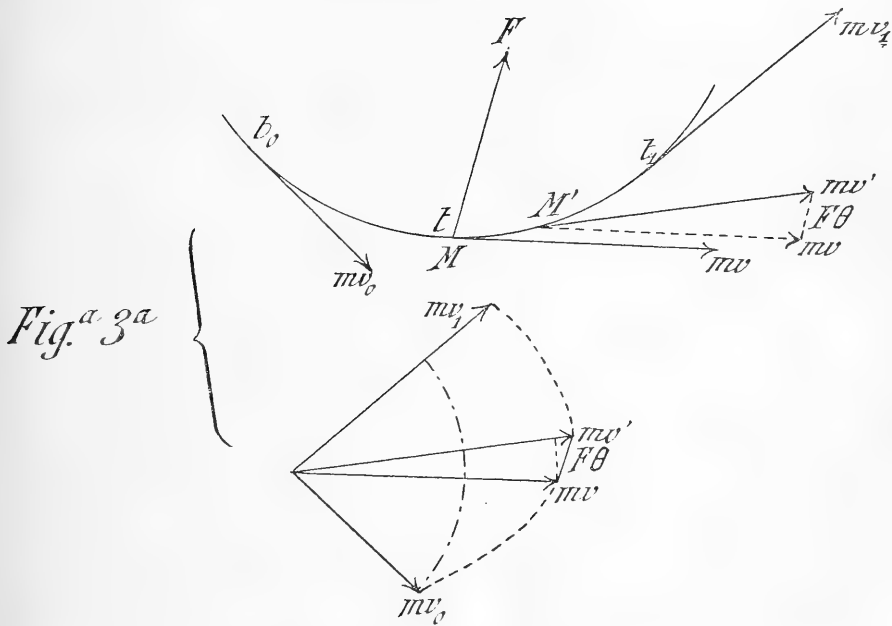
Para ver el *Teorema de las cantidades de movimiento*, pensemos, desde luego, en la resultante motriz F de todas las fuerzas que, en un instante dado, actúan sobre el individuo; y empecemos por notar que la ley formulada en el *Teorema de la energía* sólo se refería á la cantidad de *energía cinética* que gana ó pierde el individuo por el *trabajo* que hace la fuerza. Hemos hecho resaltar — en las explicaciones dadas acerca de esa ley dinámica — que ese no es más que uno de los cambios producidos en el estado de movimiento del individuo por la acción de la fuerza motriz F , y hemos dejado á un lado lo que se refería al cambio de dirección de la velocidad.

En el *Teorema general* que ahora vamos á formular sobre las cantidades de movimiento del individuo en relación con

las impulsiones de la fuerza motriz, se atiende — como veremos — al *cambio total* que experimenta la velocidad por la acción de la fuerza.

Se enuncia así:

El incremento total muy pequeño que experimenta la cantidad de movimiento del individuo es igual en magnitud, dirección y sentido á la impulsión elemental de la resultante motriz F . (Véase la figura 3.^a)



En esta ley dinámica se ve el efecto total de la fuerza motriz F actuando sobre el individuo en un intervalo muy pequeño de tiempo θ . Dice que su impulsión elemental en este intervalo ($F\theta$) se refleja en el individuo por el cambio total (muy pequeño) de su cantidad de movimiento, la cual pasa de ser (en el instante t) una mv (en magnitud, dirección y sentido) con que el individuo viene por causas anteriores, á ser otra mv' (en el instante $t + \theta$) que difiere en todo (mag-

nitudo, dirección y sentido) de la $m v$ — aunque muy poco.— Este cambio es exactamente igual á aquella impulsión elemental.

Y se comprende bien que la fuerza motriz F afecte así al individuo, compeliéndole á cambiar *simultáneamente* la dirección de su movimiento y la magnitud de su velocidad, mediante la impulsión que en su dirección (la de la fuerza) comunique al individuo, influyendo en éste en el intervalo de tiempo θ .

No existe nada instantáneo en el Universo; y para manifestarse un cambio en el estado de movimiento de modificación del individuo, se requiere que la fuerza obre durante algún tiempo, aunque sea muy pequeño, para que haya una verdadera impulsión que produzca efecto (*).

Si en vez de considerar la impulsión elemental de la fuerza motriz F , se pensara sólo en la impulsión elemental de aquella componente F_1 , que vimos para medir el trabajo elemental, esta impulsión elemental sería igual al incremento *sólo en magnitud*, que experimentaría la cantidad de movimiento desde el instante t hasta el instante $t + \theta$, lo cual nos conduce á este *segundo teorema* :

El incremento muy pequeño que experimente la MAGNITUD de la cantidad de movimiento del individuo, es igual á la impulsión elemental $F_1 \theta$ de la resultante motriz F , estimada en la dirección de la velocidad. (Véase la fig. 4.^a)

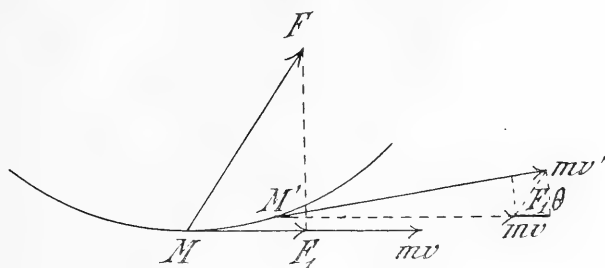
Esta ley serviría — como sirvió el *teorema de la energía* —, si sólo nos preocupáramos de apreciar los cambios en la magnitud de la velocidad. Nos valíamos antes de los cambios producidos en la energía cinética por *el trabajo de la fuerza F* . Ahora nos valdríamos de los cambios producidos en la cantidad de movimiento por la impulsión de la F_1 , que

(*) Lo que cabe estudiar son las leyes infinitesimales de decrecimiento. Aquí, por ejemplo, habría, en rigor, que concebir θ como una variable que decrece indefinidamente. No puedo detenerme ahora en estos rigorismos.

es la fuerza F , estimada en la dirección de la velocidad.

Por uno ú otro teorema se llega á las mismas conclusiones, atendiendo al *signo* del trabajo en el uno, ó al *sentido* de la fuerza, estimada en la dirección de la velocidad, en el otro.

Fig. 1.^a



Volvamos al *primer teorema general* de las cantidades de movimiento. Para aplicarlo á un transcurso cualquiera de tiempo, basta verlo en todos y cada uno de los movimientos elementales que se integran por ley de continuidad en el movimiento total. Así, por composiciones sucesivas de las distintas impulsiones elementales $F\theta$ (fig. 3.^a), con las sucesivas y distintas cantidades de movimiento, se pasaría de un instante inicial t_0 á otro instante cualquiera posterior t_1 , y se obtendría la cantidad de movimiento mv_1 (en magnitud, dirección y sentido) en este último instante, si la fuerza—variable de un instante á otro—ha actuado de modo continuo en ese transcurso de tiempo.

Análogamente—aunque con mayor sencillez—aplicaremos el segundo teorema al transcurso de tiempo desde el instante t_0 hasta otro instante cualquiera t_1 , para deducir la *magnitud* de la cantidad de movimiento mv_1 en este último instante, puesto que bastaría hacer la suma algebraica de los incrementos sucesivos (positivos ó negativos) de las *magnitudes* de las cantidades de movimiento, en los sucesivos mo-

vimientos elementales. Cada uno de estos incrementos muy pequeños sería igual á la impulsión elemental de la resultante motriz, *estimada en la dirección de la velocidad en cada instante*, siempre sobre el supuesto de que las fuerzas actúan de modo continuo en todo el transcurso de tiempo que se considera. (Véase la fig. 3.^a)

Tanto el teorema de la energía como el segundo teorema sobre las cantidades de movimiento serían de muy fácil aplicación en los movimientos parciales de dirección constante del individuo (rectilíneos), en que la resultante motriz F tiene constantemente la dirección misma del movimiento, si se supusiera que la intensidad de F fuera *constante*, porque:

1.º Para el *teorema de la energía*, el trabajo total hecho por F se mediría entonces simplemente por el producto de su intensidad F (constante) por el camino que hubiera recorrido el individuo en la dirección misma de la fuerza (*); y este producto expresaría el incremento de energía cinética, obtenido durante el movimiento parcial en esa dirección.

2.º Para el *segundo teorema de las cantidades de movimiento*, la impulsión total de F se mediría simplemente por el producto de su intensidad F (constante) por el tiempo de su acción; y este producto expresaría el incremento de la cantidad de movimiento, obtenido en el movimiento parcial que se considera.

Es claro que para que hubiera en este caso *conservación* de la energía cinética $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ ó *conservación* de la cantidad de movimiento (mv), se requeriría que la resultante F fuera constantemente nula; lo cual era evidente *à priori*, porque el movimiento sería, en virtud del *Principio de la inercia*, rectilíneo uniforme.

Los individuos que en sus movimientos parciales en cada

(*) Este camino recorrido se mediría por el incremento del parámetro definidor de la posición.

dirección conservan una energía cinética constante—ó una cantidad de movimiento constante—son aquéllos que por su temperamento fisiológico y su temple psíquico, resisten las fuerzas ó sollicitaciones exteriores ó interiores, que unas veces tienden á apresurarle, otras á retardarle. Y para lograr la uniformidad en estos movimientos parciales de dirección constante, es decir, para que la resultante motriz F sea *constantemente nula*, á pesar de aquellas sollicitaciones que emanan del medio ambiente externo ó interno, han de brotar del interior del individuo natural (consciente ó inconscientemente) otras fuerzas que las contrarresten en todos y cada uno de los instantes.

3.º--TEOREMA DE LA MENOR ACCIÓN

Se llamará *cantidad elemental de acción* de un individuo en un intervalo muy pequeño θ de tiempo, á partir de un instante t , el producto de la magnitud de su cantidad de movimiento en el instante t (mv), por el pequeño cambio de posición operado en el intervalo θ , es decir, por el incremento muy pequeño del parámetro. Si se simboliza el movimiento elemental del individuo por el de un punto material en el espacio, la expresión de la cantidad elemental de acción es $mv \times ds$, siendo ds el desplazamiento muy pequeño realizado en el intervalo θ .

Pudiendo ser mirado ds como igual á $v\theta$, se ve que la cantidad elemental de acción en este intervalo, á partir del instante t , se puede definir también, diciendo: que es el producto de la fuerza viva del individuo en ese instante mv^2 por el tiempo muy pequeño θ ; es idénticamente lo mismo. Se llamará *cantidad total de acción* del individuo en un transcurso cualquiera de tiempo T (desde un instante t_0 á otro t_1), cuando pasa de una posición a á otra posición b , la suma ó integral de las infinitas *cantidades elementales de acción* en-

tre esos dos instantes; en la representación por un punto material se escribiría así:

$$\int_{s_0}^{s_1} m v \cdot ds \quad \text{ó bien} \quad \int_{t_0}^{t_1} m v^2 \cdot dt.$$

Aunque nos parece difícil adaptar á lo psíquico el supuesto en que descansa el *teorema de la menor acción*, diremos que si las fuerzas psíquicas que obran sobre un individuo fueran asimilables—por las leyes de su acción—á las fuerzas que se consideran en los fenómenos de la Naturaleza, como las centrales newtonianas, ó, más en general, como las fuerzas atractivas ó repulsivas, con intensidades que dependen solamente de las posiciones, sin influir las velocidades que tengan los puntos á que se apliquen, se podría adaptar este *teorema* de la menor acción al movimiento del individuo, y—prescindiendo del rigorismo infinitesimal—enunciarlo así:

El movimiento efectivo que un individuo realizara recorriendo de un determinado modo su trayectoria (en sentido figurado), para pasar de una posición *a* (instante t_0) á una posición *b* (instante t_1) en un asunto, sería tal, por sus cambios sucesivos y continuos de posición y de velocidad, que:

La integral ó suma de todas sus cantidades elementales de acción, desde el instante t_0 hasta el t_1 , sería un *mínimo* (*) en el movimiento real y efectivo, con relación á todos los modos de moverse que podrían ser concebidos en otras trayectorias para alcanzar el mismo cambio ó modificación de posición, pasando de la primera posición *a* á la última *b*.

O más brevemente:

Que la cantidad total de acción de un individuo en su movimiento real y efectivo, sería un mínimo con relación á los

(*) Podría ser un mínimo ó un máximo. Decimos mínimo, porque suponemos que en la cuestión no sea admisible un máximo.

otros movimientos, por los cuales pudiera pasar de su primera posición á la última.

Si este teorema fuera cierto para los asuntos sociales por estar las fuerzas sociales en el caso que hemos dicho, se deduciría de él — como se deduce en la *Mecánica racional* — una consecuencia interesantísima, á saber: que si el paso de una posición *a* á otra *b* hubiera de hacerse necesariamente con movimiento uniforme de una velocidad *v*, siempre la misma en las diferentes trayectorias posibles, el individuo realizaría ese paso en su movimiento *efectivo* (si las fuerzas psíquicas naturales fueran como las físicas dichas) *en el menor tiempo posible, y con el menor desarrollo posible*, dentro de sus condiciones propias individuales y de las condiciones del medio ambiente. Efectivamente:

1.º La cantidad total de acción sería, en ese supuesto, el producto de la fuerza viva *constante* mv^2 por el tiempo total $T = t_1 - t_0$ empleado; luego su mínimo correspondería al *mínimo de T*;

2.º La cantidad total de acción sería también el producto de la cantidad de movimiento *mv constante* por el desarrollo total *S*; luego su mínimo correspondería también al *mínimo de S*.

*
* *

OBSERVACIÓN FINAL. — La teoría general expuesta sobre el equilibrio y el movimiento de un individuo, así como también todos los teoremas que hemos enunciado y comentado, son aplicables á lo que denominamos *elemento social* en los *Preliminares*. Suponíamos que la colección de individuos que lo constituye puede ser individualizada para el estudio mecánico, de tal suerte que en cada instante pueda conocerse en magnitud, dirección y sentido su velocidad y su aceleración total. Las fuerzas que pueden actuar sobre la colección de individuos — como tal colección, — habrán de mi-

rarse como si actuaran sobre un individuo abstracto y simple que *simbolizara* al elemento social. Y de esta suerte las fuerzas pueden emanar de otros individuos y de otros elementos sociales de la misma agrupación, y también del ambiente ó medio social externo en que el elemento vive. Otras fuerzas pueden emanar de su propio interior (es decir, de los individuos mismos que forman el elemento social), pero desempeñando el papel de exterior, para aquel *ente psíquico* individual que sirva de símbolo abstracto al elemento social.

(Continuará).

Programa de premios para el concurso del año 1913.

Artículo 1.º La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.º «*Deducción de una fórmula ó de un sistema de fórmulas ó, en suma, de una teoría matemática que suministre el medio de calcular á priori, con seguridad mayor que la consentida por los procedimientos en uso, la resistencia á la marcha que en aguas tranquilas encuentran las obras vivas de los buques.*»

Propuestas y aplicadas hoy fórmulas en gran número, muchas de ellas empíricas, para valuar la resistencia de los buques á la marcha, sería muy ventajoso disponer, al proyectar los buques, de expresiones analíticas, sólidamente cimentadas de las leyes á que obedece la antedicha resistencia, evitando así, en lo posible, incertidumbres enojosas y la necesidad del auxilio de los procedimientos delicados y hasta inseguros de la experimentación con modelos, á no ser como complementario recurso comprobatorio.

Se desea que el aspirante al premio exponga una teoría que dé respuesta satisfactoria al tema enunciado, deduciéndola de los adelantos en las ciencias de pura especulación, de experimentos nuevos y de los trabajos en uno y otro terreno realizados hasta el día con más ó menos fortuna.

2.º «*Estudio teórico ó experimental de cualquier fenómeno electróptico ó magnetóptico.*»

3.º «*Memoria geognóstico-agrícola de alguna comarca de España, que no haya sido objeto de publicación anterior.*»

Art. 2.º Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres cla-

ses: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mención honorífica*.

Art. 3.º El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación, una medalla de oro de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecunaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

Art. 4.º El *premio* se adjudicará á las memorias que no sólo se distinguan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

Art. 5.º El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo, y en la impresión de la memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

Art. 6.º El *accesit* se adjudicará á las memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas, ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reúnan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención del premio.

Art. 7.º La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accesit*, que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado ó á persona que le represente.

Art. 8.º La *mención honorífica* se hará de aquellas memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicación, por cuenta y bajo la

responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accesit*.

Art. 9.º El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid*, y cerrado en 31 de Diciembre de 1913 á las diez y siete horas; plazo hasta el cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, cuantas Memorias se presenten.

Art. 10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó extranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

Art. 11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

Art. 12. Las Memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

Art. 13. De las Memorias y pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, á las personas que los presenten y entreguen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

Art. 14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accesit* se abrirán en la sesión que se acuerde ó decida otorgar á sus autores una ú otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

Art. 15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abri-

rán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas, y, en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distinción que legitimamente les corresponde.

Art. 16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit*, ni con *mención honorífica*, se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiere declarado. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

Art. 17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporación podrá devolverseles, con las conformalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado, como modelos de la construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ellas sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las Memorias que respectivamente les correspondan.

Madrid 31 de Diciembre de 1911.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
XXII.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia quinta . . .	475
XXIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia sexta. . .	503
XXIV.—Nota escrita con motivo de la venida á Madrid del Príncipe Alberto I de Mónaco, por <i>Joaquín González Hidalgo</i>	532
XXV.—Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i> (continuación).	544
Programa de premios para el concurso del año 1913.	571

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X.—NÚM. 8.

Febrero de 1912.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 8.

1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXVI. — Conferencias sobre Física Matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia séptima.

SEÑORES:

Continuando el estudio de las atracciones y de las potenciales newtonianas, debemos pasar al caso en que el punto para el que pretendemos buscar los componentes de la atracción, así como la potencial, es interior á la masa ponderable continua que se considera.

Esta cuestión es delicada, porque las integrales contienen un elemento que toma la forma infinita, real ó aparentemente; que si fuera realmente infinita la integral no tendría sentido matemático, y menos para las aplicaciones prácticas.

El análisis de este caso, es decir, el de una masa continua y un punto en su interior, puede tratarse de diferentes maneras, que todas ellas vienen á reducirse á un fondo común.

Nosotros tomaremos por guía en esta conferencia la exposición y aun las notaciones del eminente matemático Mr. Appell, en su *Tratado de mecánica racional*.

Llamemos U , como Mr. Appell, á la potencial, y llamemos V al volumen de materia continua que consideremos.

Dicho esto, sea (fig. 20) un volumen V de materia ponderable. Las componentes de su atracción y su potencial sobre cualquier punto exterior, ya las hemos determinado; y ahora vamos á considerar el caso en que dicho punto P es interior.

El resto de las notaciones es el de siempre.

Las coordenadas de P serán x, y, z ; las coordenadas de

un punto cualquiera N del volumen de la masa serán a, b, c .

Si por el punto P hacemos pasar tres ejes, x', y', z' , paralelos á x, y, z , las coordenadas de N , con relación á x', y', z' serán evidentemente

$$Pl' = pl = a - x, l'n' = nl = b - y, Nn' = Nn - nn' = c - z.$$

Las expresiones X, Y, Z , se formarán en este caso lo mismo que cuando el punto era exterior.

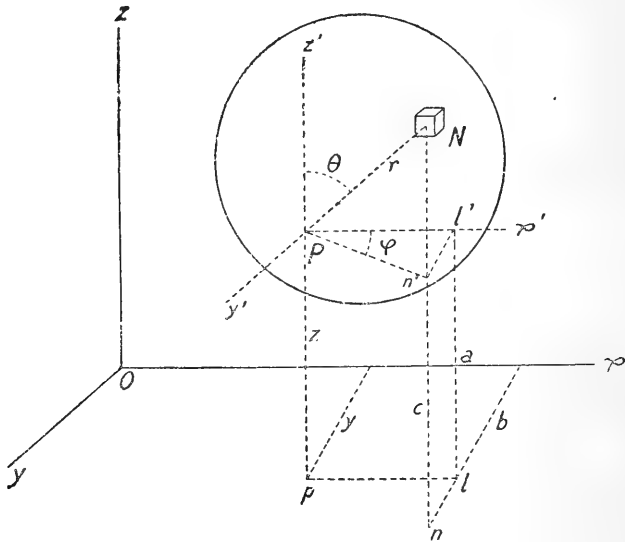


Figura 20.

Porque, en efecto, sea N un punto material del volumen V . Su masa, llamando ρ á la densidad de este punto, y $\delta\tau$ á su volumen, será $\rho\delta\tau$; y si suponemos en P una masa igual á la unidad, la atracción de N , mejor dicho, de $\rho\delta\tau$ sobre el punto P , ó sea sobre la masa 1, será, según la ley newtoniana, representando dicha atracción por ∂F ,

$$dF = f \frac{1 \cdot \rho \delta\tau}{r^2}$$

y sus tres componentes paralelas á los ejes

$$dX = f \frac{1 \cdot \rho \partial \tau}{r^2} \frac{a-x}{r}$$

$$dY = f \frac{1 \cdot \rho \partial \tau}{r^2} \frac{b-y}{r}$$

$$dZ = f \frac{1 \cdot \rho \partial \tau}{r^2} \frac{c-z}{r}$$

lo mismo que para el punto exterior; y para obtener las componentes totales, no hay más que sumar todas estas componentes parciales de los diferentes puntos N comprendidos en V . Es decir, integrar las tres expresiones anteriores, extendiendo la integral á todo el volumen V , y tendremos

$$X = \iiint_V f \frac{a-x}{r^3} \rho da db dc$$

$$Y = \iiint_V f \frac{b-y}{r^3} \rho da db dc$$

$$Z = \iiint_V f \frac{c-z}{r^3} \rho da db dc$$

en que hemos puesto á las integrales el subíndice V , para expresar que la integración comprende todo este volumen. Es decir, todas las atracciones de todos los puntos N , comprendidos en V sobre la masa 1 que está en P ; y además, en vez de da , su valor $da db, dc$.

Claro es que las integraciones se referirán, como á variables, á las coordenadas a, b, c , del punto N .

Y parece que este caso es igual al del punto exterior, al menos las fórmulas son las mismas, y, sin embargo, el caso es de todo punto distinto.

Porque como el punto P es interior á la masa y la integración comprende todos los puntos N , cuando consideremos un punto N muy próximo á P , la distancia $PN = r$

será muy pequeña, y cuando N y P coincidan, tendremos $r = 0$, y bajo cada integral triple un elemento

$$f \frac{c-x}{o} \rho \partial \tau, f \frac{b-y}{o} \rho \partial \tau, f \frac{c-z}{o} \rho \partial \tau,$$

que por ser el denominador o , será real ó aparentemente infinito, como antes decíamos.

Lo cual no podía suceder siendo el punto exterior; pues si P está fuera del volumen V , y N está siempre dentro, jamás en los límites de la integración podrán coincidir.

No sabemos, por lo tanto, si las fórmulas anteriores expresarán la atracción, sobre el punto P , de la masa comprendida en V , ni sabemos si X , Y , Z , tendrán valores finitos y bien determinados.

Otro tanto podemos repetir para lo que llamábamos la potencial, que evidentemente será de la forma

$$U = \iiint_V \frac{\rho \partial \tau}{r}.$$

Mas aun, con esta última expresión ocurren *dos dudas*; *primera*, si será una integral finita y bien determinada, porque también en ella hay un elemento, para $r = 0$ en que aparece la forma infinita; y en *segundo lugar*, y aun suponiendo que U sea una expresión determinada y finita, no sabemos *a priori* si será una *verdadera potencial* del sistema para puntos interiores, porque no sabemos si diferenciándola con relación á x , y , z , las tres derivadas coincidirán con las tres componentes. Es decir, si tendremos:

$$X = f \frac{dU}{dx}, Y = f \frac{dU}{dy}, Z = f \frac{dU}{dz}.$$

Digamos de paso que hemos puesto explícitamente f , porque no la habíamos comprendido en U . Esta función U era la potencial, no la función de fuerza.

Pero estas diferencias en las notaciones no tienen importancia de ningún género.

Por el pronto, el problema es éste: las expresiones X , Y , Z , U , ¿representan cantidades finitas y determinadas?

Es decir, la forma infinita que resulta del hecho de anularse r en el denominador, ¿es una forma aparente no más?

Como si tuviéramos, por ejemplo,

$$\frac{L}{r}$$

que para $r = 0$ toma la forma $\frac{L}{0} = \infty$; y en que, sin embargo, si L tuviese este valor, $L = r^2 + 3r$, sería $\frac{r^2 + 3r}{r} = r + 3$, y para $r = 0$, tendríamos $\frac{L}{r} = 3$.

Tal duda es preciso estudiarla detenidamente; pero en éste, como en muchos otros problemas de matemáticas, antes de la demostración rigurosa, hay algo como una intuición de la demostración misma.

Se ve, por ejemplo, que si es cierto que r entra en el denominador y tiende hacia 0, en el numerador del elemento de integral que se considera, hay también un factor que tiende hacia cero: $da. db. dc$.

Así es, que en los tres valores de X, Y, Z entra en el denominador r^3 , que podemos decir que es un infinitamente pequeño de tercer orden; pero en el numerador también entran $da. db. dc$ que constituyen otro infinitamente pequeño de tercer orden, y además $a - x, b - y, c + z$, que tienden á cero; y ocurre que acaso la relación sea finita y siendo finita pueda ser 0: y con más razón pueden aplicarse estas intuiciones á la expresión de U .

Todo esto no es una demostración rigurosa, pero es un presentimiento de la demostración, y más aún: es una guía para la demostración misma, lo cual le quita su carácter de

lucubración profunda ó sublime y la deja reducida á una argumentación de sentido común casi.

Y ahora vamos á desarrollar la demostración á que venimos refiriéndonos.

El artificio, por decirlo así, consiste en un cambio de coordenadas, por el cual en todos los factores de cada elemento diferencial se ponga en evidencia el factor r , que es el que se reduce á 0, cuando el centro de un elemento del volumen viene á coincidir con el punto P de su interior, para cuyo punto queremos calcular las componentes de la atracción y la potencial.

A las coordenadas ordinarias a, b, c vamos á sustituir las coordenadas polares, que generalmente se emplean para problemas de un espacio de tres dimensiones.

Así un punto N del volumen V (fig. 20) ó el elemento $d\tau$, estará definido por r , distancia de N á P ; por θ ángulo que forma PN con el eje z' , que es lo que suele llamarse distancia polar; y por el ángulo φ , que forma el plano meridiano $z'PN$ con el plano de las xz' . Es decir, el ángulo $l' P n'$, que pudiéramos decir que es la longitud geográfica, si de la Tierra se tratase.

Las fórmulas que determinan las tres componentes X, Y, Z , de la atracción, que sobre P ejerce la masa comprendida en V , tienen, según hemos visto, la siguiente forma, como en el caso general:

$$\begin{aligned} X &= f \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \rho d\tau, \\ Y &= f \iiint_V \frac{b-y}{r^3} \rho d\tau, \\ Z &= f \iiint_V \frac{c-z}{r^3} \rho d\tau, \end{aligned}$$

en que $d\tau$ es el elemento de volumen correspondiente á un punto cualquiera N .

En rigor, este elemento de volumen puede ser arbitrario, pero es preciso que estén contiguos y en continuidad unos elementos con otros y que llenen y agoten el volumen V .

Y además, para efectuar las integraciones es forzoso que el elemento general $d\tau$ se exprese en función de las variables de la integración.

Cuando las coordenadas eran a, b, c , el elemento $d\tau$ representaba el volumen de un paralelepípedo infinitamente pequeño, y así

$$d\tau = da, db, dc;$$

más como las nuevas variables de la integración son r, θ, φ , es indispensable modificar $d\tau$.

Así, cuando las variables eran a, b, c , dividíamos al volumen V en paralelepípedos infinitamente pequeños por tres sistemas de planos paralelos á los planos coordenados yz, xz, xy .

Ahora emplearemos un sistema de superficies acomodado á las nuevas coordenadas, y serán las siguientes:

1.º Planos meridianos $z' P n'$, que pasarán por z' : para cada uno de ellos φ será constante.

2.º Conos de revolución alrededor de Pz' engendrados por las rectas r : para cada cono θ es constante.

3.º Esferas concéntricas cuyo centro esté en P y cuyo radio sea r : para cada esfera, r será constante.

Estos tres sistemas de superficies dividirán al volumen V en volúmenes infinitamente pequeños y en la figura 21 hemos representado uno de éstos $NABC N'A'B'C'$.

Este volumen elemental, que será el que corresponda al punto N , está formado por dos planos meridianos $SCBE, SNAD$. Por dos conos PNC, PAB , y por dos esferas $NABC, N'A'B'C'$

Y es evidente que podemos considerarlo también como un paralelepípedo, puesto que las caras son próximamente paralelas dos á dos y normales entre sí.

En rigor, dicho volumen elemental se compone de dos superficies planas $CB C'B'$, $NA N'A'$; de dos superficies cónicas $NCC'N'$, $ABA'B'$ y de dos superficies esféricas $NABC$, $N'A'B'C'$.

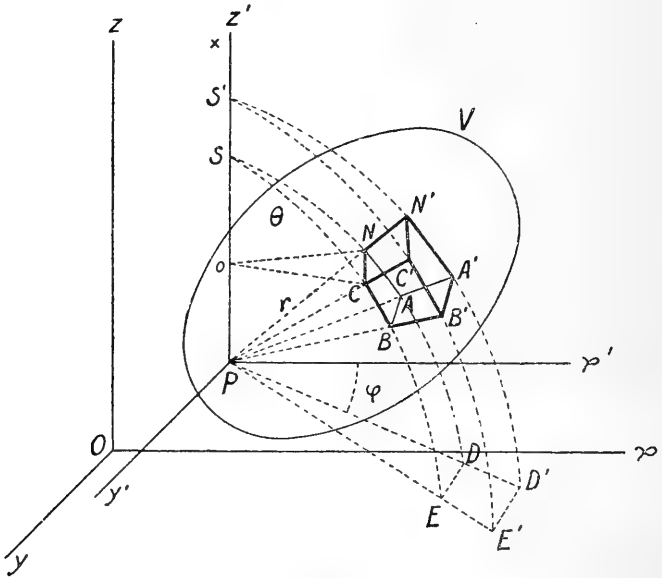


Figura 21.

Vamos ahora á expresar todos los elementos de la integral en función de las nuevas variables. Es decir, escogiendo el valor de X , por que lo que se diga para X puede repetirse para Y, Z , tenemos que expresar $a - x$, y $d\tau$ en función de r, θ, φ .

En la figura 20 tenemos evidentemente

$$a - x = Pl' = Pn' \cos \varphi = r \text{ sen } \theta \cos \varphi$$

como tendremos para Y, Z

$$b - y = n'l' = Pn' \text{ sen } \varphi = r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi$$

$$c - z = Nn' = r \cos \theta.$$

La figura 21 nos permitirá calcular el volumen $d\tau$, considerándolo como un paralelepípedo y multiplicando sus tres dimensiones NN' , NA , NC .

Así hallaremos:

$$d\tau = NN' \times NA \times NC = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$$

y como $r \sin\theta = r \sin\theta$

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Sustituyendo los valores de $a-x$, $b-y$, $c-z$, y $d\tau$ en los valores de X , Y , Z , éstos se convertirán en los siguientes

$$X = f \iiint_V \frac{\rho r \sin\theta \cos\varphi \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{r^3}$$

$$Y = f \iiint_V \frac{\rho r \sin\theta \sin\varphi \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{r^3}$$

$$Z = f \iiint_V \frac{\rho r \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}{r^3}$$

y suprimiendo, como ya habíamos previsto, el factor r^3 en numerador y denominador, tendremos:

$$X = f \iiint_V \rho \sin^2\theta \cos\varphi dr d\theta d\varphi$$

$$Y = f \iiint_V \rho \sin^2\theta \sin\varphi dr d\theta d\varphi \quad (I)$$

$$Z = f \iiint_V \rho \sin\theta \cos\theta dr d\theta d\varphi.$$

Una transformación análoga deberemos efectuar con U , que, como vimos, tenía la forma

$$U = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}.$$

En esta expresión no hay que eliminar más que el volumen $d\tau$ y se convertirá en

$$U = \iiint_v \frac{\rho r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{r}$$

y suprimiendo el factor r

$$U = \iiint_v \rho r \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{II})$$

Tenemos ahora que estudiar los valores de X, Y, Z, U , bajo estas nuevas formas, en las que desde luego ha desaparecido el factor r del denominador.

*
* *
*

Desde luego ningún elemento diferencial es infinito, y las variables r, θ, φ , varían entre términos finitos.

Si desde el punto P trazamos dos normales á la superficie que determina el volumen V , entre la menor y la mayor, como límites, varía r ; y puesto que las dimensiones de V son finitas, finitas son las longitudes de estas dos normales, pues ambas están comprendidas en V .

θ varía entre 0 y π . Es decir, desde Pz' hasta la posición inversa. Por último, φ varía entre 0 y 2π , es decir, que las tres variables varían entre límites finitos, y valores finitos tienen también los senos y los cosenos de θ y φ , que son los factores que entran en los coeficientes diferenciales.

Además, el cálculo integral enseña, que integrales que satisfacen á las condiciones expresadas, tienen valores finitos y bien determinados.

Lo que hemos dicho de X, Y, Z , podemos repetir de U .

De manera que X, Y, Z, U , tienen valores finitos y bien determinados para todo punto interior al volumen V .

Y como ya vimos que tenían valores finitos y bien determinados cuando el punto P era exterior, ahora podemos decir, condensando en uno estos dos teoremas, que X, Y, Z, U , tienen valores finitos y bien determinados, sea cual fuere la posición del punto P , ó dicho con más brevedad, para todo el espacio.

Pero nos queda, respecto al punto interior, otro teorema que demostrar: el que se refiere á la potencial en P .

No basta que U sea en el interior de V y para todos los puntos del volumen, finita y bien determinada.

Para que sea *una potencial*, es decir, una función potencial del sistema, es preciso que diferenciándola con relación á x , dé X ; que diferenciándola con relación á y , dé Y ; y, por último, que diferenciándola con relación á z , dé Z .

Y esto no es evidente, porque no sabemos si será legítima la diferenciación bajo el signo integral de que se trata.

No podemos á la ligera, digámoslo así, diferenciar $\frac{1}{r}$ por relación á x , y ver que resulta $\frac{a-x}{r^3}$ y análogamente diferenciando con relación á y, z .

La coincidencia pudiera ser puramente formal y no tener sentido riguroso, si la diferenciación bajo el signo integral de

$$U = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}$$

no fuera legítima.

Lo es; pero vamos á demostrarlo.

*
* *

Sea (fig. 22) V el volumen de la masa atrayente referida á los ejes x, y, z .

P , el punto interior de dicha masa, para el cual queremos calcular las atracciones y la potencial.

Para aislar, si se nos permite la palabra, la dificultad del problema, haremos lo que se hace siempre en estos casos: rodear el punto P por una superficie infinitamente pequeña, y que podremos ir achicando hasta que se anule.

Esta superficie que comprende el punto P , determina á su alrededor un volumen infinitamente pequeño V_1 .

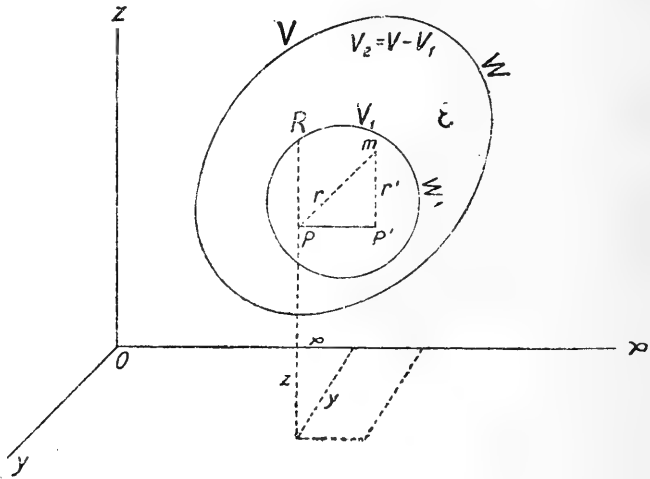


Figura 22.

Y explicaremos desde luego las notaciones que vamos á emplear, que son las mismas, como ya hemos dicho, que las de Mr. Appell en su *Mecánica*, la cual nos sirve de guía en este punto concreto.

V , representa el volumen de la masa ponderable que consideramos.

X, Y, Z , las componentes de la atracción en el punto P , componentes que ya sabemos que tienen valores finitos y bien determinados.

U la integral de la forma

$$U = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}$$

que todavía no decimos que sea la potencial del sistema, pero que es una función finita y bien determinada.

V_1 representa el pequeño volumen que hemos imaginado rodeando al punto P .

U_1 representará, tampoco decimos todavía la potencial, decimos la función finita y bien determinada

$$U_1 = \iiint_{V_1} \frac{\rho dr}{r}$$

Y ahora observamos que la superficie Σ_1 , que determina V_1 , divide al volumen V en dos partes. Una el volumen infinitamente pequeño V_1 y otra el resto de V . Es decir, la parte exterior á la superficie Σ_1 que limita V_1 , y estará comprendido este resto entre la superficie que limita V_1 y la que limita V entre Σ y Σ_1 .

Si empleamos el subíndice 2 para indicar los elementos que se refieren á esta parte del volumen total, podremos completar las notaciones anteriores de este modo.

$V_2 = V - V_1$ representará el volumen comprendido entre la superficie Σ_1 que limita V_1 y la Σ que limita V .

X_2, Y_2, Z_2 designarán las componentes de la atracción que ejerce sobre P la masa comprendida en el volumen V_2 .

U_2 será el valor de la función finita y bien determinada

$$U_2 = \iiint_{V_2} \frac{\rho d\tau}{r} = \iiint_{V - V_1} \frac{\rho d\tau}{r}.$$

En suma, hemos descompuesto el volumen V en dos partes, y para cada una de ellas vamos á considerar las componentes de la atracción sobre el punto P y la función U correspondiente.

Y distinguimos unos elementos de otros por el subíndice que suprimimos en V y que es igual á 1 ó á 2 para V_1 y V_2 .

Pero no olvidemos que lo que buscamos es la derivada de U con relación, primero, á x , luego á y , y luego á z . Y

como lo que digamos de la primera variable, podríamos repetir para las otras dos, vamos á obtener desde luego la derivación de U con relación á x .

Para ello trazaremos por el punto P (fig. 22) una recta infinitamente pequeña $PP' = \Delta x$. Todas las funciones que se refieren al punto P son funciones de x , y las mismas funciones para el punto P' tomarán valores distintos correspondientes á $x + PP' = x + \Delta x$. Estas últimas las distinguiremos por las mismas letras que las que se refieren al punto P , pero con un acento.

Así, por ejemplo, la función U correspondiente al punto P , en el punto P' será U' . De manera que el incremento que recibe U cuando á x se le da el incremento Δx , será evidentemente $U' - U$, y la relación entre el incremento de la función y el incremento de la variable será, por lo tanto, $\frac{U' - U}{\Delta x}$.

El límite de esta expresión, cuando Δx tiende hacia 0, será la derivada; y si U es, en efecto, la potencial del sistema para el punto interior P , será preciso que tengamos

$$f \lim \frac{U' - U}{\Delta x} = f \frac{dU}{dx} = X.$$

Y lo mismo respecto á y y respecto á z .

Si demostramos esto con todo rigor, habremos extendido á los puntos interiores de una masa continua los teoremas que demostramos en las conferencias anteriores para los puntos discontinuos.

Pero hemos descompuesto U en dos partes U_2 y U_1 . Es decir, la parte E comprendida entre las dos superficies Σ_1 y Σ y la parte comprendida en la supercie Σ_1 .

U_2 y U_1 se refieren al punto P . Sus valores para el punto P' los distinguiremos también por un acento, y tendremos

$$U = U_2 + U_1 \quad \text{y} \quad U' = U_2' + U_1'$$

y substituyendo en $\frac{U' - U}{\Delta x}$ resultará

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \lim \frac{U' - U}{\Delta x} = \lim \frac{(U_2' + U_1') - (U_2 + U_1)}{\Delta x} = \\ &= \lim \frac{U_2' - U_2 + U_1' - U_1}{\Delta x} \end{aligned}$$

y por último

$$\frac{dU}{dx} = \lim \frac{U_2' - U_2}{\Delta x} + \lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x}.$$

Tenemos que calcular los límites de los dos términos del segundo miembro y ver si en efecto su suma, que en el límite es $\frac{dU}{dx}$, resulta igual á X .

Veamos ahora cómo se calculan ambos términos.

El término $\lim \frac{U_2' - U_2}{\Delta x}$ se refiere, como hemos dicho, á la parte E comprendida entre las superficies Σ y Σ_1 , y como el punto P es exterior al espacio E , estamos en el caso de la atracción de una masa sobre un punto exterior, y para este caso no hay duda: la derivada de U_2 con relación á x da el valor de X_2 , multiplicándola por de contado la constante f , de modo que podremos escribir

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU_2}{dx} + \lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x}$$

ó bien

$$f \frac{dU}{dx} = X_2 + \lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x}.$$

Porque no ha de olvidarse que, según las notaciones adoptadas, X_2 es la componente paralela al eje de las x del espacio anular E sobre el punto exterior P .

Nos queda ahora por calcular el segundo término

$$\lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x}.$$

Y aquí empiezan las dificultades, porque V_1 es el volumen comprendido en la superficie Σ_1 , y en este volumen están el punto P y el punto P' . De manera que al efectuar la integración

$$U_1 = \iiint_{V_1} \frac{\rho d\tau}{r}$$

para todos los puntos m de V_1 , llegará un caso en que $mP = r$ se reducirá á 0, porque m coincidirá con P ; y del mismo modo al calcular la integral

$$U_1' = \iiint_{V_1} \frac{\rho d\tau}{r'}$$

tomará ésta la forma infinita, porque habrá otro elemento de la integral en que m coincida con P' y r' se reducirá á 0.

Para buscar la derivada de U_1 , es decir, el límite de la relación

$$\frac{U_1' - U_1}{\Delta x}$$

tendremos que restar las dos integrales anteriores, que es lo mismo que restar los dos elementos de cada integral que correspondan á un mismo punto m é integrar después la diferencia para todos los puntos m de V_1 .

En resumen, tendremos:

$$\lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} = \left[\iiint_{V_1} \frac{\rho d\tau}{r'} - \iiint_{V_1} \frac{\rho d\tau}{r} \right] \frac{1}{\Delta x}$$

ó bien

$$\lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} = \iiint_{V_1} \frac{\rho d\tau}{\Delta x} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right).$$

Y ahora se comprende la posibilidad de que U_1 tenga una derivada finita, porque aunque el minuendo y el sustraendo del paréntesis puedan ser infinitos, la diferencia en el límite puede ser finita.

Un sencillo artificio de cálculo convierte en realidad esta que pudiéramos llamar una sospecha.

Consideremos el factor diferencial de $\rho d\tau$ que es

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{\Delta x} \frac{r - r'}{rr'} = \frac{1}{rr'} \frac{r - r'}{\Delta x}.$$

En el triángulo mPP' , por un teorema de geometría elemental, se sabe que la diferencia de dos lados r, r' es menor que el tercero Δx , de suerte que numéricamente, es decir, prescindiendo del signo, por ser la diferencia $r - r'$ menor que Δx , el factor $\left| \frac{r - r'}{\Delta x} \right|$ será < 1 .

Y ponemos dicho factor entre dos líneas verticales, según es costumbre, para significar un valor absoluto, es decir, en que se supone el signo positivo. Luego sustituyendo á dicho factor la unidad, habrá aumentado el valor numérico del término, y tendremos:

$$\frac{1}{\Delta x} \left| \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right| < \frac{1}{rr'}.$$

Si en todos los elementos de la integral hacemos otro tanto, el valor de la integral habrá aumentado.

Luego

$$\left| \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right| < \iiint_{x_1} \frac{\rho dr}{rr_1}$$

y no hemos hecho otra cosa que sustituir á

$$\frac{\rho d\tau}{\Delta} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

una cantidad siempre positiva y mayor $\frac{\rho d\tau}{rr'}$.

Ahora bien, podemos establecer la siguiente serie de desigualdades:

$$0 < (r + r')^2$$

porque el segundo miembro, que es un cuadrado, es una cantidad esencialmente positiva; y de esta desigualdad se deducen las siguientes:

$$\begin{aligned} 0 &< r^2 - 2rr' + r'^2 \\ 2rr' &< r^2 + r'^2 \\ rr' &< \frac{r^2 + r'^2}{2} \\ \frac{1}{rr'} &< \frac{1}{2} \frac{r^2 + r'^2}{r^2 r'^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en el segundo miembro de la desigualdad fundamental, en vez de $\frac{1}{rr'}$, una cantidad mayor

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2} \right),$$

el segundo miembro de dicha desigualdad crecerá y con más razón tendremos:

$$\left(\frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right) < \iiint_V \rho d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2} \right)$$

ó bien

$$\left(\frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right) < \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\rho \partial \tau}{r'^2} + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \frac{\rho \partial \tau}{r^2}.$$

Para estudiar el segundo miembro es un pequeño inconveniente la variabilidad de la densidad ρ de un punto á otro del volumen V_1 ; pero esta dificultad desaparece si sustituimos en todos los elementos de la integral el máximo valor

de ρ , que representaremos por ρ_1 , y que será una cantidad finita y positiva, lo cual reduce la desigualdad precedente á esta otra.

$$\left| \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right| < \frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r'^2} + \frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2}$$

Si el segundo miembro de la desigualdad precedente es siempre una cantidad finita, aun cuando r y r' se reduzcan á 0 en ciertos elementos, el problema quedará resuelto; porque resultará que el primer miembro para cualquier volumen V_1 será una cantidad finita, la cual veremos que tiende hacia 0 cuando el volumen V_1 tiende á anularse.

Estudiemos ahora cada una de las dos integrales triples del segundo miembro, que en rigor son de la misma forma, hasta tal punto, que lo que digamos de una podemos decir de la otra, sin que sea una restricción el que supongamos el punto P' interior al volumen V_1 .

Consideremos, pues, una de estas dos integrales

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2}$$

que es de una forma análoga á otras que ya hemos estudiado; y cambiemos, como antes hacíamos, de coordenadas, para ver si en el numerador encontramos factores r que anulen el factor r^2 del denominador.

Hemos visto, en efecto, que empleando coordenadas polares, se tiene

$$d\tau = r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

y substituyendo este valor en la integral precedente, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2} &= \frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{r^2} = \\ &= \frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

De las tres integraciones del segundo miembro efectuemos la que se refiere á r , suponiendo θ y φ constantes, con lo cual tendremos la integral en determinada dirección.

Sea esta dirección la PR en la que habremos de integrar dr entre o y R .

Así,

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2} = \frac{\rho_1}{2} \int_0^\pi \partial_\varphi \int_0^{2\pi} R \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Claro es que la longitud de R depende de su dirección y de la forma de la superficie Σ_1 que limita el volumen V_1 . En rigor, R será una función de θ y φ ; pero si llamamos C la mayor cuerda que limita la superficie V_1 , y sustituimos en vez de R esta cuerda, como R y C son esencialmente positivas, el segundo miembro habrá aumentado, y tendremos

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2} < \frac{\rho_1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi C \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Y no ha de olvidarse que, tanto el primer miembro como el segundo, son cantidades esencialmente positivas. El primero, porque lo es ρ_1 y lo es r^2 , que es un cuadrado.

En el segundo miembro se ve esta misma propiedad, porque θ varía entre o y π , y su seno es siempre una cantidad positiva. Resultará, pues,

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2} < \frac{\rho_1}{2} C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Efectuando las integraciones

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta = -(\cos \theta)_0^\pi = 2; \int_0^{2\pi} 2 d\varphi = 4\pi$$

y, por fin,

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{d\tau}{r^2} < \frac{\rho}{2} C \cdot 4\pi.$$

Otro cálculo idéntico podremos hacer para la segunda integral

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_V \frac{d\tau}{r'^2}$$

que se refiere al punto P' ; porque es sustituir en vez de i, r' , y también obtendremos

$$\frac{\rho_1}{2} \iiint_{V_1} \frac{\partial\tau}{r'^2} < \frac{\rho_1}{2} C \cdot 4\pi$$

luego el conjunto de las dos integrales que es precisamente $\left(\frac{U_1' - U_1}{\Delta x}\right)$ será menor que $\frac{\rho_1}{2} C \cdot 4\pi + \frac{\rho_1}{2} C \cdot 4\pi = 4\pi C\rho_1$ y por fin

$$\left| \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right| < 4\pi C\rho_1.$$

Si ahora pasamos al límite tendiendo á anular constantemente el volumen V_1 , su cuerda C tenderá también hacia o , y podrá ser tan pequeña como se quiera; luego $4\pi C\rho_1$, se anulará y tendremos

$$\lim \left| \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right| = o,$$

puesto que se trata de una cantidad esencialmente positiva, y que es siempre menor que otra cantidad también positiva que tiende hacia o .

Y ahora recordemos la fórmula de que hemos partido

$$f \frac{dU}{dx} = f \lim \frac{U_2' - U_2}{\Delta x} + f \lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x}.$$

Pero hemos visto que

$$f \lim \frac{U_2' - U_2}{\Delta^2 x} = \lim X_2 \quad \text{y que} \quad \lim \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} = o$$

luego

$$f \frac{dU}{dx} = \lim X_2.$$

Escribimos en el segundo miembro $\lim X_2$; pero á medida que el volumen V_1 tiende hacia o , es decir, tiende á confundirse con el punto P , el valor X_2 tiende á confundirse con X , porque el espacio E tiende á confundirse con el volumen total.

De modo que en rigor el $\lim X_2$ no es otra cosa que X , que ya hemos visto que tiene un valor determinado para el punto P .

Aun esto resaltaría más claro, viendo que en efecto la atracción del volumen V_1 sobre el punto P tiende hacia o , lo cual se pondría en evidencia empleando, como antes hicimos, las coordenadas polares, porque quedaría en el numerador un factor r que en límite es o .

Resulta, pues, rigurosamente demostrado, que

$$f \frac{dU}{dx} = X.$$

Asimismo pudiéramos demostrar, repitiendo los anteriores razonamientos, que las otras dos componentes de la atracción sobre el punto interior P , es decir, Y , Z , resultan de diferenciar

$$U = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}$$

con relación á y y á z ; y en suma, tendremos las tres expresiones

$$X = f \frac{dU}{dx}, \quad Y = f \frac{dU}{dy}, \quad Z = f \frac{dU}{dz}$$

con lo cual se demuestra, que U es una potencial del siste-

ma para los puntos interiores de la masa lo mismo que para los puntos exteriores.

* * *

Para que no quede escrúpulo alguno á mis alumnos respecto á la demostración precedente, que es absolutamente rigurosa, les advertiré de nuevo, que el haber puesto el punto P' para la diferenciación de las U en el interior de la figura, no restringe en manera alguna el rigor de la demostración.

En primer lugar, la envolvente Σ_1 y la magnitud Δx , son por decirlo así, términos independientes uno de otro. Una cosa es el empleo de Σ_1 como artificio para la demostración, y otra cosa es la diferenciación de las funciones U .

Son, si valé la palabra, variables independientes, y siempre podemos tomar el punto P' en el interior de Σ_1 .

Pero aunque fuera exterior importaría poco, y la demostración subsistiría, tendiendo hacia o , por de contado, la Σ_1 y la Δx .

Porque aunque el punto P' fuera exterior á Σ_1 , exterior decimos, pero muy próximo por de contado, al integrar con relación á R , siempre quedaría la cuerda C y las integraciones con relación á θ y á φ , darían ángulos finitos, con lo cual, al anularse C , se anularía como en el primer caso la integral triple relativa al punto P' .

* * *

Vemos, resumiendo:

Primero. Que cuando se trata de un punto interior á una masa, las componentes de la atracción de la masa sobre dicho punto X, Y, Z , tienen valores finitos y determinados.

Y como lo mismo habíamos demostrado para los puntos

exteriores, esta propiedad de las componentes de la atracción subsiste para todo el espacio, lo mismo para lo interior de la masa continua que para lo exterior.

Segundo. La integral U , cuya forma ya conocemos, es decir, la integral triple de la masa de cada elemento, dividida por la distancia r á un punto interior P , es también una función finita y determinada, lo mismo que X , Y , Z .

Estas cuatro expresiones son funciones determinadas y finitas de x , y , z .

Tercero. No sólo U es una función de x , y , z , determinada y finita, en el interior de cualquier masa ponderable atrayente, sino que es la potencial del sistema. Es decir, una función de x , y , z , que diferenciándola con relación á estas variables, da las tres componentes de la atracción para el interior de la masa continua, como demostramos que daba estas tres componentes para los puntos exteriores. Luego U es una potencial finita y determinada para todo el espacio.

Decimos potencial del sistema. Es decir, en nuestro caso, de la masa continua comprendida en V .

Cuarto. Todos estos resultados se generalizan para un sistema cualquiera de masas continuas exteriores unas á otras, y para este nuevo sistema podríamos repetir las conclusiones precedentes.

Como X , Y , Z se obtienen derivando U , y como dichas componentes son finitas y determinadas, se ve, desde luego, que las primeras derivadas de la potencial, á saber:

$$\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz},$$

son finitas y determinadas también.

En términos más concisos: la potencial de cualquier sistema ponderable, y, en general, de cualquier sistema que obedezca á la ley newtoniana, como los eléctricos y magnéticos, *tienen primeras derivadas*, puesto que estas primeras

derivadas, según acabamos de decir, multiplicadas por f , son las componentes de la atracción.

Y ocurre inmediatamente este otro problema:

¿La función potencial U , tendrá segundas derivadas finitas y determinadas

$$\frac{d^2 U}{dx^2}, \frac{d^2 U}{dy^2}, \frac{d^2 U}{dz^2}?$$

Este problema es importante, porque se enlaza con otro que estudiamos y resolvimos al tratar de las masas discontinuas.

Nos referimos á aquel teorema que decía: «La función potencial satisface á la ecuación de Laplace».

Y ocurre averiguar si para los puntos interiores á una masa continua, la función potencial satisfará ó no á dicha ecuación; punto importantísimo en una porción de problemas y en este de la continuidad de las funciones X , Y , Z , U , y de la continuidad de sus derivadas.

XXVII.—La Asimetría de los Tripletes de Zeeman.

POR MANUEL MARTÍNEZ-RISCO Y MACÍAS.

(Continuación.)

Aplicando la fórmula (19) al anillo de orden $k + 1$, obtiéndose

$$(k + 1) \lambda = 2e - e \frac{r^2_{k+1}}{f^2}. \quad (20)$$

Restando miembro á miembro las igualdades (19) y (20), resulta

$$r^2_k - r^2_{k+1} = \frac{\lambda}{e} f^2,$$

y siendo $2r_k = d_k$ y $2r_{k+1} = d_{k+1}$, se tendrá:

$$d^2_k - d^2_{k+1} = 4 \frac{\lambda}{e} f^2; \quad (21)$$

por tanto, para los anillos de Fabry y Perot, como para los de Newton, la diferencia entre los cuadrados de los diámetros de dos anillos consecutivos es la misma cualquiera que ellos sean.

La relación (21) puede escribirse así:

$$d_k - d_{k+1} = \frac{1}{d_k + d_{k+1}} \cdot 4 \frac{\lambda}{e} f^2.$$

En virtud de lo antes demostrado, cuanto menor sea k , mayores serán d_k y d_{k+1} . Es, pues, evidente que en un sis-

tema simple de anillos de Fabry y Perot, la diferencia, $d_k - d_{k+1}$, entre los diámetros de dos consecutivos, es tanto menor cuanto menor sea el orden de cada uno.

Fundándonos en la relación (19), y siendo el x_o el diámetro de uno cualquiera de los anillos dados por una luz de longitud de onda λ_o y x_m , el diámetro de un anillo del mismo orden de otra luz cuya longitud de onda, λ_m , no difiera mucho de λ_o , podríamos fácilmente demostrar (*) que

$$\lambda_m - \lambda_o = \frac{\lambda_o}{8f^2} (x_o^2 - x_m^2) \quad (22)$$

Determinando x_o y x_m , se podrá, pues, hallar $\lambda_m - \lambda_o$. La fórmula que acabamos de escribir es, por tanto, la base del método de espectroscopia interferencial de Fabry y Perot. De ella nos valdremos para evaluar el desplazamiento de la componente mediana del triplete asimétrico estudiado.

Si el foco luminoso empleado emite varias luces monocromáticas, podrá haber coincidencia entre anillos de diverso orden. Cuando, en virtud del fenómeno de Zeeman, varias de dichas luces monocromáticas, ó todas ellas, cambian de período, aumentando progresivamente la intensidad del campo, se llegará siempre á observar fenómenos de coincidencia. Para terminar este capítulo, vamos á estudiar detalladamente un caso muy importante.

Coincidencias de los anillos de un triplete simétrico.

Supongamos, en particular, que el foco luminoso, por estar situado en un campo magnético, emite tres clases de luz monocromática, que definen un triplete simétrico. Llamemos λ_o

(*) Véase Zeeman.—Observations of the magnetic resolution of spectral lines by means of the method of Fabry and Perot.—1907, página 2.

á la longitud de onda de la componente mediana, λ_r á la de la componente situada hacia el rojo y λ_v á la que corresponde á la otra componente exterior.

Designemos por x_{mn} el diámetro del anillo de Fabry y Perot de orden n , en el sistema producido, con las condiciones experimentales ya expuestas, por una luz de longitud de onda λ_m .

En virtud de la fórmula (19), podemos escribir:

$$\lambda_r - \lambda_o = \frac{\lambda_o}{8f^2} (x_{o,k}^2 - x_{r,k}^2) \quad (23)$$

$$\lambda_o - \lambda_v = \frac{\lambda_o}{8f^2} (x_{v,k+1}^2 - x_{o,k+1}^2) \quad (24)$$

Sumando miembro á miembro estas dos igualdades, obtiéndose

$$\lambda_r - \lambda_v = \frac{\lambda_o}{8f^2} \left[(x_{v,k+1}^2 - x_{r,k}^2) + (x_{o,k}^2 - x_{o,k+1}^2) \right] \quad (25)$$

Ahora bien; la ley de los diámetros de los anillos de Fabry y Perot, nos obliga á admitir que

$$x_{o,k}^2 - x_{o,k+1}^2 = 4 \frac{\lambda_o}{e} f^2;$$

por tanto, la fórmula (25) puede escribirse así:

$$\lambda_r - \lambda_v = \frac{\lambda_o}{8f^2} \left[4 \frac{\lambda_o}{e} f^2 - (x_{r,k}^2 - x_{v,k+1}^2) \right] \quad (26)$$

Cuando el campo no existe,

$$\lambda_r - \lambda_v = 0 \quad \text{y} \quad x_{r,k} = x_{o,k}, \quad x_{v,k+1} = x_{o,k+1}.$$

Substituyendo estos valores en la relación (26), resulta:

$$x^2_{o,k} - x^2_{o,k+1} = 4 \frac{\lambda_o}{e} f^2.$$

La ley de los diámetros de los anillos de Fabry y Pero está, pues, contenida, para un caso crítico, en la fórmula (26), como debía suceder.

Cuando aumenta la intensidad del campo actuante, $\lambda_r - \lambda_v$ aumenta también. Esto exige que $x^2_{r,k} - x^2_{v,k+1}$ disminuya, llegando á anularse al tener $\lambda_r - \lambda_v$ el siguiente valor:

$$\lambda_r - \lambda_v = \frac{\lambda_o^2}{2e}.$$

Habrá, pues, una coincidencia de anillos, definida por la tigualdad

$$x_{r,k} = x_{v,k+1},$$

al tener el campo por intensidad

$$H = \frac{10^5}{C \lambda_o^2} \cdot \frac{\lambda_o^2}{2e} = \frac{1}{2eC} 10^5,$$

siendo C la separación específica característica del triplete.

Para que $x^2_{r,k} - x^2_{v,k+1}$ pueda seguir disminuyendo, es preciso que adquiera valores negativos. Distinguiremos los casos siguientes:

$$x^2_{r,k} - x^2_{v,k+1} = -4 \frac{\lambda_o}{e} f^2 \quad (27)$$

$$x^2_{r,k} - x^2_{v,k+1} = -8 \frac{\lambda_o}{e} f^2 \quad (28)$$

.....

Estos valores de $x^2_{r, k} - x^2_{v, k+1}$ corresponden á coincidencias definidas, respectivamente, por las igualdades

$$x_{o, k} = x_{r, k-1} = x_{v, k+1} \quad (27 \text{ a})$$

$$x_{r, k-1} = x_{v, k+2} \quad (28 \text{ a})$$

.....

Para hacer ver la manera de llegar á estas relaciones, partiendo de la fórmula (28), vamos á demostrar la fórmula (28 a).

Substituyendo en la fórmula (26) el valor de

$$x^2_{r, k} - x^2_{v, k+1},$$

resulta:

$$\lambda_r - \lambda_v = \frac{\lambda_o}{8f^2} \quad 12 \frac{\lambda_o}{e} f^2 = \frac{3}{2} \frac{\lambda_o^2}{e};$$

se efectuará, por tanto, que

$$\left. \begin{aligned} x^2_{o, k-1} - x^2_{r, k-1} &= \frac{8f^2}{\lambda_o} \frac{3}{4} \frac{\lambda_o^2}{e} = 6 \frac{\lambda_o}{e} f^2 \\ \text{y que} \\ x^2_{v, k+2} - x^2_{o, k+2} &= \frac{8f^2}{\lambda_o} \frac{3}{4} \frac{\lambda_o^2}{e} = 6 \frac{\lambda_o}{e} f^2 \end{aligned} \right\} (29)$$

Además, la ley de los diámetros de los anillos nos permitirá escribir:

$$x^2_{o, k-1} - x^2_{o, k+2} = 3 \cdot 4 \frac{\lambda_o}{e} f^2 = 12 \frac{\lambda_o}{e} f^2$$

ó lo que es igual

$$-x^2_{o,k-1} + x^2_{o,k+2} = -12 \frac{\lambda_o}{e} f^2 \quad (30)$$

Sumando miembro á miembro las relaciones (29) y (30), resulta:

$$x^2_{v,k+2} - x^2_{r,k-1} = 0$$

y por ser

$$x_{v,k+2} \quad \text{y} \quad x_{r,k-1}$$

esencialmente positivos,

$$x_{r,k-1} = x_{v,k+2}$$

Esta es, precisamente, la fórmula que queríamos demostrar.

Como ejemplo, traduzcamos al lenguaje ordinario las igualdades (27 a).

Dicen que, *para un cierto campo magnético, coincidió el anillo de orden k correspondiente á la componente mediana del triplete con el anillo de orden k - 1 de la componente más próxima al rojo y con el anillo de orden k + 1 de la otra componente exterior.*

Sería fácil demostrar que los campos magnéticos productores de las coincidencias definidas por las igualdades (27 a), (28 a), etc., tienen, respectivamente, por intensidades

$$H = \frac{1}{eC} 10^5$$

$$H = \frac{3}{2} \frac{1}{eC} 10^5$$

.....

.....

III

MÉTODO EXPERIMENTAL EMPLEADO

Para hallar la ley de la asimetría de posición de un triplete, es preciso realizar una serie de experimentos consistentes en determinar la intensidad, H , del campo magnético productor de la asimetría y en valuar el desplazamiento correspondiente, $\Delta\lambda_0$, de la componente mediana.

Nosotros hicimos once experimentos para estudiar la asimetría de posición del triplete 5791 u. A, del mercurio. Con objeto de facilitar la redacción de los capítulos III y IV, agruparemos los experimentos realizados, incluyendo dentro de cada grupo los correspondientes á campos de intensidades no muy diferentes. Con los experimentos 1.º y 2.º, formaremos un primer grupo; con los 3.º, 4.º, 5.º y 6.º, un segundo grupo, y los experimentos restantes constituirán un tercero y último grupo.

Determinación de desplazamientos.

Hemos demostrado en el capítulo II, página 468, que todo aumento ó disminución de longitud de onda va acompañado, respectivamente, de una disminución ó aumento en los diámetros de los anillos.

Los que caracterizan á la componente mediana del triplete 5791 u. A, disminuyen de diámetro á medida que aumenta la intensidad del campo actuante. Esto prueba que el desplazamiento productor de la asimetría de posición del referido triplete se realiza hacia el rojo.

Para valuar el desplazamiento correspondiente á un campo dado, basta, según indica la fórmula (22), medir el diámetro de dos anillos del mismo orden en los sistemas producidos por la componente mediana y por la raya espectral original. Nosotros efectuamos estas medidas por el método fotográfico.

La figura 2 es un esquema de la disposición experimental empleada. Tratándose de un estudio relativo, exclusivamente, á la componente mediana de un triplete, nos convenía evitar la formación de los anillos que darían las componentes exteriores de éste. Con tal objeto, entre el tubo de Geissler *A* y la lente *C*, colocamos un romboedro *B*, de espato calizo, y alejamos mediante una pantalla, representada con doble raya en la figura, la imagen correspondiente á vibraciones dirigidas normalmente á las líneas de fuerza de campo.

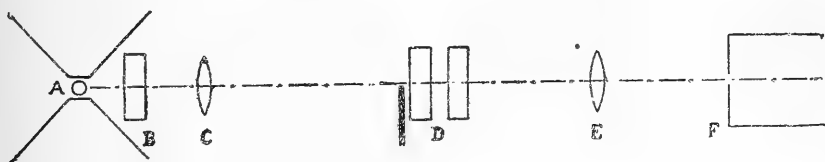


Figura 2.

La lente *E* sirve para producir sobre el plano de la rendija del espectroscopio una imagen del sistema complejo de anillos dado por el patrón *D*. El papel del espectroscopio es trasladar las franjas desde la rendija á las rayas espectrales, sin amplificación ni reducción alguna; por tanto, es evidente que la distancia focal que figura en la fórmula (22) es la de la lente *E*: 12 mm, en nuestro caso.

La raya espectral 5791 u. A. es, según hemos dicho, una de las que da el vapor de mercurio. Dos son los métodos que pueden seguirse para obtener los anillos de Fabry y Perot correspondientes á una cualquiera de las luces monocromáticas que un gas ó vapor incandescente emiten.

Fúndase el primero en el uso de soluciones absorbentes que, colocadas entre el foco luminoso y el patrón, permiten alejar las radiaciones extrañas á la luz monocromática que quiere emplearse.

El segundo, que es el que nosotros seguimos, consiste en

proyectar sobre la rendija de un espectroscopio ordinario, mediante una lente convergente, una imagen de los anillos en luz compuesta, pues sobre cada raya espectral podrá observarse el fenómeno en cuestión.

Si el foco luminoso está situado en un campo magnético, sobre cada raya espectral se verán, simultáneamente, los anillos correspondientes á las diversas componentes en que la raya se divide. (Véase la fotografía B.)

Debe hacerse que los anillos ocupen una posición simétrica respecto de la rendija; pero, como vamos á demostrar, una pequeña distancia entre ella y el diámetro vertical del sistema, no sería causa de error en las determinaciones de diferencias de longitud de onda.

En la figura 3 hemos representado dos anillos del mismo orden de dos luces de longitudes de onda λ_o y λ_m ($\lambda_m > \lambda_o$).

Si la rendija ocupa la posición *A*, simétrica respecto del sistema de anillos, en virtud de lo antes demostrado, se tendrá

$$\lambda_m - \lambda_o = \frac{\lambda_o}{2f^2} (\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2).$$

Para hacer ver que si la rendija estuviese desplazada, teniendo la posición *A'*,

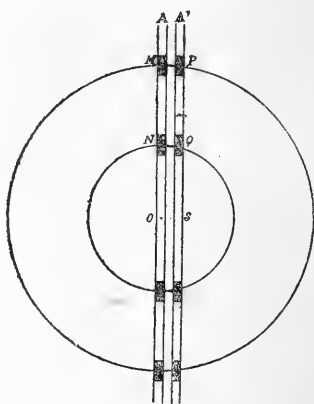


Figura 3.

$$\lambda_m - \lambda_o = \frac{\lambda_o}{2f^2} (\overline{PS}^2 - \overline{QS}^2)$$

basta aplicar el teorema de Pitágoras á los triángulos rectángulos *OPS* y *OQS*, pues, teniendo en cuenta que

$$OP = OM \quad \text{y que} \quad OQ = ON,$$

se llega á la siguiente igualdad:

$$\overline{PS}^2 - \overline{QS}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2.$$

Debo consignar que los aparatos estaban dispuestos de manera algo distinta en los experimentos del segundo grupo. En éstos, el patrón hallábase colocado entre la lente del colimador y el prisma. La distancia focal f será ahora, evidentemente, la del objetivo del anteojo.

La determinamos haciendo girar al patrón N alrededor de un eje horizontal, hasta dar á los anillos de una cierta raya un desplazamiento igual al diámetro de uno de ellos; midiendo, por el método de Poggendorff, el ángulo de giro, θ , y valuando, por el método fotográfico, el referido diámetro, d . La fórmula que debe aplicarse es

$$f = \frac{d}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta}$$

Para más detalles véase la figura 4.
Obtuvimos como resultado

$$f = 280^{mm},6.$$

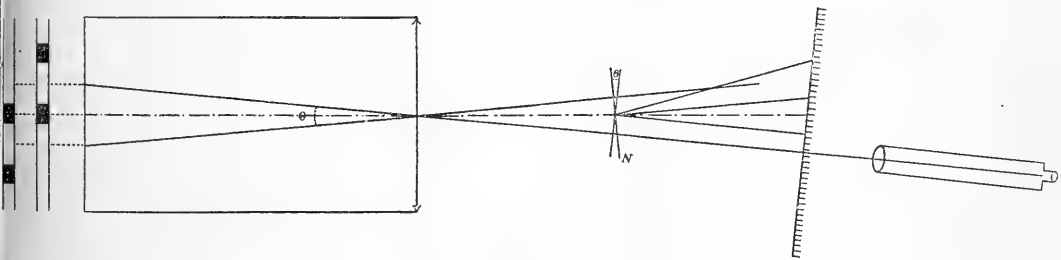


Figura 4.

Como hemos dicho antes, para determinar los diámetros de los anillos de la componente mediana y de la raya espec-

tral original, empleamos el método fotográfico. Cada uno de nuestros experimentos consta de tres fotografías: la primera, obtenida antes de aplicar el campo; la segunda, mientras el campo actuaba, y la tercera, después de haber actuado el campo. Las medidas de placas han sido realizadas con un comparador de Carl Zeiss.

Sirva de ejemplo el cuadro siguiente:

Diámetros en mm.:

	Sin campo. — (I)	Con campo de 29.560 Gauss. — (II)	Sin campo. — (III)
Primer anillo.....	2,022	1,840	2,032
Segundo anillo.....	2,779	2,639	2,779

Debe tomarse siempre para valor de x_0 la media de los números que figuran en las columnas 1.^a y 3.^a Estos serían los mismos, prescindiendo de los errores cometidos en la medida de las placas, si no hubiese habido durante el experimento cambio alguno en el espesor del patrón.

Con los números consignados anteriormente, resulta para desplazamiento de la componente mediana (*).

$$\Delta\lambda_0 = 0,0372 \text{ u. A.}$$

Hemos hecho siempre uso solamente de los dos primeros anillos, porque un error cometido en la medida del diámetro del anillo 3.^o, influye ya mucho en el resultado.

El patrón que empleamos, construido por la casa Hilger, tenía láminas de vidrio y capas reflectoras de paladio. Las piezas de distancia, que eran de cuarzo, tenían por coeficiente de dilatación lineal 0,00000059.

(*) Véanse las páginas 615 y 616.

Antes de pasar á ocuparnos en la determinación de campos magnéticos, vamos á decir dos palabras de los errores originados por los cambios de temperatura que el patrón experimenta.

Supongamos que cada experimento se hiciese obteniendo solamente dos fotografías, una con campo y otra sin campo. Durante el tiempo necesario para realizar un experimento, el espesor del patrón varía á causa de la inconstancia de temperatura, y como todo cambio de espesor del patrón produce un desplazamiento de los anillos, habrá, por tal causa, un error en la determinación de x_m , y, por tanto, en la medida de $\lambda_m - \lambda_0 = \Delta\lambda_0$. Es fácil hacer ver que, prescindiendo del signo,

$$d(\Delta\lambda_0) = \frac{\lambda_0}{4f^2} x_m dx_m \quad (31)$$

Ahora bien; diferenciando la fórmula fundamental

$$k\lambda_m = 2e - e \frac{x_m^2}{4f^2},$$

en que deben considerarse solamente como variables e y x_m , resulta

$$dx_m = \frac{8f^2 - x_m^2}{2ex_m} de,$$

y como, llamando K al coeficiente de dilatación lineal de las piezas de distancia y $(t_1 - t_0)$ á la variación de temperatura, de $= eK(t_1 - t_0)$, se tendrá:

$$dx_m = K \left(4 \frac{f^2}{x_m} - \frac{x_m}{2} \right) (t_1 - t_0).$$

Substituyendo este valor en la relación (31), obtiéndose

$$d(\Delta\lambda_0) = K\lambda_0 \left(1 - \frac{x_m^2}{8f^2} \right) (t_1 - t_0).$$

Como $\frac{x_m^2}{8f^2}$ es siempre una cantidad muy pequeña, comparada con la unidad, podemos afirmar que, si la temperatura varía de t_0 á t_1 durante el experimento, el desplazamiento de la componente mediana vendrá afectado de un error calculable por la fórmula

$$d(\Delta\lambda_o) = K\lambda_o(t_1 - t_0).$$

En nuestro caso,

$$K = 0,000000\ 59 \quad \text{y} \quad \lambda_o = 5791 \text{ u. A.}$$

por consiguiente, para $t_1 - t_0 = 1^0$,

$$d(\Delta\lambda_o) = 5791 \cdot 59 \cdot 10^{-8} \text{ u. A} = 0,003 \text{ u. A.}$$

Ya hemos dicho cómo se consigue disminuir los errores debidos á los cambios de temperatura. Estos, en nuestro caso, no podían ser grandes, porque el tiempo necesario para obtener las tres fotografías de una serie era, aproximadamente, de quince minutos.

En las ampliaciones negativas A y A' , aparecen tres rayas espectrales: la raya verde 5461 u. A, sobre-expuesta, y las rayas amarillas 5770 y 5791 u. A. En la fotografía A puede verse, sobre la 5791 u. A, el sistema de anillos que la caracteriza, y en la fotografía A' aparecen, sobre la misma raya, los anillos producidos por la componente mediana del triplete correspondiente.

El primero de estos sistemas de anillos tiene centro obscuro y el segundo centro brillante.

Si esto no sucediese, y fundándose en la simetría del triplete 5770 u. A, podría reconocerse por simple inspección de las fotografías el desplazamiento hacia el rojo de la compo-

nente mediana del triplete 5791 u. A, viendo que el ángulo β (figura 5) es mayor en la fotografía A que en la A'.

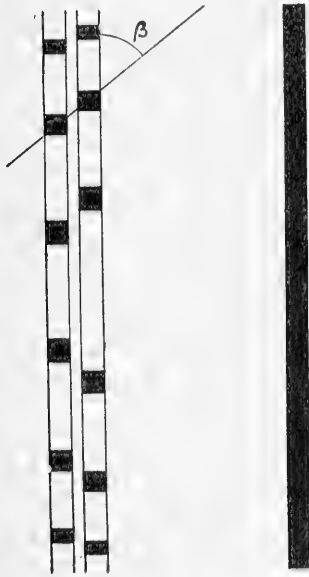


Figura 5.

Determinación de los campos magnéticos.

Primer grupo de experimentos. — Los campos magnéticos correspondientes á los experimentos del primer grupo, fueron determinados por el método de la espiral de bismuto. Previamente, á distintas temperaturas, hallamos la curva que representa la ley de variación de la resistencia eléctrica de la espiral con la intensidad del campo. Por el método de la espiral de bismuto no podrían determinarse con precisión suficiente, por ser demasiado

fuertes, los campos magnéticos correspondientes á los dos últimos grupos de experimentos.

Segundo grupo de experimentos. — En la segunda serie de experimentos me convenía emplear campos cuya intensidad no difiriese mucho de 25.000 Gauss.

Ahora bien; del estudio que hemos hecho al final del capítulo II, resulta que, para que exista una cierta coincidencia entre los anillos de los sistemas dados por un triplete simétrico, es preciso que tenga un cierto valor la diferencia $\lambda_r - \lambda_v$ entre las longitudes de onda de las componentes exteriores de dicho triplete, lo que equivale á que el campo magnético tenga una cierta intensidad, H_q .

En el cuadro siguiente consignamos el valor de la inten-

sidad del campo y el valor de $\lambda_r - \lambda_v$, para cada coincidencia, empleando las notaciones antes adoptadas.

Número de orden de la coincidencia	Igualdades que la definen.	$\lambda_r - \lambda_v$	H_q
1. ^a	$x_r, k = x_v, k+1$	$\frac{1}{2} \frac{\lambda_o^2}{e}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{eC} 10^5$
2. ^a	$x_o, k = x_r, k-1 = x_v, k+1$	$\frac{\lambda_o^2}{e}$	$\frac{1}{eC} 10^5$
3. ^a	$x_r, k-1 = x_v, k+2$	$\frac{3}{2} \frac{\lambda_o^2}{e}$	$\frac{3}{2} \frac{1}{eC} 10^5$
.....

Si λ_o y e se expresan en unidades del sistema *C. G. S.*, la diferencia $\lambda_r - \lambda_v$ vendrá dada en centímetros y H en Gauss.

Con el patrón empleado, cuyo espesor era de 0,9125 centímetros, el triplete central del nonete 5.461 u. A, del mercurio, dará la coincidencia 2.^a cuando el campo tenga por intensidad

$$H = H_q = \frac{10^5}{0,9125 \cdot 4,66} \text{ G.} = 23.500 \text{ Gauss.}$$

El valor 4,66 de la separación específica lo hemos calculado partiendo de los resultados experimentales de Runge y Paschen y de Gmelin (*).

El campo magnético, en los experimentos que componen el segundo grupo, era precisamente de 23.500 Gauss,

(*) *P. Zeeman.*—New observations concernig asymetrical triplets, 1908.

pues por el hilo del electroimán circulaba una corriente de intensidad apropiada para que sobre la raya verde 5.461 u. A coincidiesen, en la forma antedicha, los tres sistemas de anillos de Fabry y Perot que corresponden á las componentes del triplete central del nonete de la referida raya.

Claro está que en la observación de la coincidencia hay una cierta indeterminación. Para evitar el operar con un campo magnético muy distinto de H_q , deben obtenerse varias fotografías de los anillos en coincidencia; escoger de ellas aquella en que los anillos coincidentes presenten un aspecto más análogo al de los anillos, previamente fotografiados, que la raya original produce, y crear el campo haciendo circular por el electroimán una corriente igual á la que corresponde á la fotografía elegida.

Véanse las negativas ampliadas C y C' .

Zeeman fué quien primero determinó por medio de las coincidencias el valor de $\lambda_r - \lambda_o$ y el de $\lambda_o - \lambda_p$. El método seguido por dicho sabio, está expuesto con claridad admirable en uno de sus trabajos (*).

Tercer grupo de experimentos.—Uno de los campos magnéticos que empleamos en los experimentos del tercer grupo fué producido por una corriente de 5,62 amperios y determinado por el método que luego resumiremos. Las intensidades de los campos correspondientes á las observaciones restantes, han sido deducidas de la del anterior mediante correcciones halladas por un método fundado en la observación de las desviaciones que en un galvanómetro producen las corrientes inducidas originadas al quitar rápidamente una espiral de cada uno de los referidos campos.

(*) *Runge y Paschen.*—Anhang Abhandlungen y Köningl. Preuss Akademie, 1902.—Berlín.

Gmelin.—Der Zeeman-effekt einiger Quecksilber linien in schwachen Magnetfeldern Absolut gemessen.—Tübingen, 1909.

La intensidad del campo producido por la corriente de 5,62 amperios, fué determinada por el procedimiento que á continuación vamos á exponer.

Sean *A* y *B* (fig. 6.^a) los dobletes amarillos del mercurio, tal y como aparecen sobre una placa fotográfica obtenida con un espectrógrafo cuyo órgano de dispersión sea una red de Rowland.

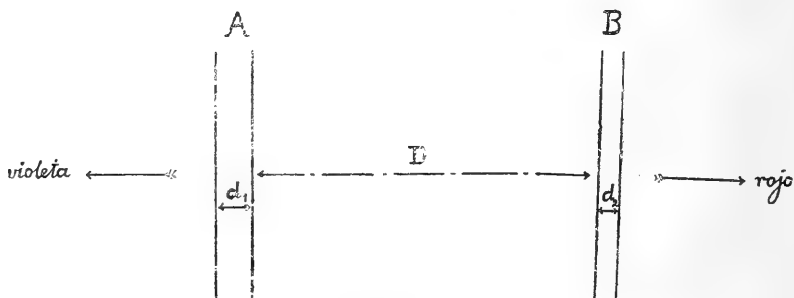


Figura 6.

Midiendo las distancias designadas en la figura por las letras *D*, *d*₁ y *d*₂, puede hallarse la que separa á las rayas espectrales originales, pues ésta tiene por expresión

$$D + \frac{d_1 + d_2}{2},$$

porque las componentes exteriores de un triplete, aun en el caso en que sea asimétrico, equidistan siempre de la posición que antes ocupaba la raya inicial.

Llamemos $\Delta\lambda$ á la diferencia entre las longitudes de onda de las rayas de un doblete. Las longitudes de onda de las rayas amarillas del mercurio difieren en 21,1 u. A. Evidentemente,

$$\text{para el doblete } 5770 \text{ u. A, } \Delta\lambda = \frac{d_1}{D + \frac{d_1 + d_2}{2}} 21,1 \text{ u. A,}$$

y para el doblete 5791 u. A, $\Delta\lambda = \frac{d_2}{D + \frac{d_1 + d_2}{2}} 21,1$ u. A.

El campo magnético productor de estos dobletes tendrá una intensidad dada, en Gauss, por cualquiera de las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{10^8}{C_1 \lambda^2} \frac{d_1}{D + \frac{d_1 + d_2}{2}} 21,1 \\ H &= \frac{10^8}{C_2 \lambda^2} \frac{d_2}{D + \frac{d_1 + d_2}{2}} 21,1 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

siendo C_1 y C_2 , respectivamente, las separaciones específicas de los dobletes 5770 u. A y 5791 u. A.

Para determinar el campo creado por el electroimán con corriente de 5,62 amperios, fotografiamos los dobletes amarillos del mercurio que entonces pueden observarse. Sobre la placa, medimos d_1 , d_2 y D , magnitudes que figuran en el segundo miembro de las fórmulas (32) y que permiten hallar H , puesto que C_1 y C_2 son conocidas por los trabajos de Gmelin (*). Así obtuvimos:

con el doblete 5770 u. A., $H = 27.520$ Gauss
y con el doblete 5791 u. A., $H = 27.340$ » ;

por tanto, en el experimento en cuestión, $H = 27.430$ Gauss.

Para producir los campos magnéticos nos valimos de dos electroimanes de la casa Hartmann y Braun. En los seis primeros experimentos utilizamos un electroimán pe-

(*) *Gmelin*.—«*Annalen der Physik*», 28, 1909, pág. 1.084.
Véase también Cotton et Weis, *Journal de Physique*, Juin, 1907.

queño; en los restantes, un electroimán capaz de dar un campo de 30.000 Gauss, aproximadamente, con un entrehierro de 3 mm.

El espectrógrafo de que nos servimos, que fué el que empleó la Sra. H. B. Bilderbeek-van Meurs en sus investigaciones acerca del fenómeno de Zeeman (*), tenía por órgano de dispersión una red de Rowland, con 14.438 trazos por pulgada inglesa y de 8 cm. de longitud.

^a(Continuará)

(*) *H. B. Bilderbeek van Meurs* — «La décomposition magnétique des raies du spectre ultraviolet du fer. (Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, série II, tome xv, p. 353, 1911.)

XXVIII.—Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Continuación.)

ESTÁTICA Y DINÁMICA

2.^a PARTE: EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE LAS AGRUPACIONES SOCIALES

ESTÁTICA SOCIAL

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Para hacer el estudio en general del equilibrio de las agrupaciones sociales, conviene recordar el *Teorema* llamado *de los trabajos virtuales* en la *Mecánica racional*, en la cual son considerados de un modo general y abstracto los sistemas de puntos con enlaces. En términos generales, puede decirse que la Estática está encerrada en ese gran Teorema, del cual se deduce la solución de casi todos los problemas particulares del equilibrio (*). En él se expresa *la condición necesaria y suficiente* del equilibrio. Es decir, que si el equilibrio existe, la condición *se cumplirá necesariamente*. Y recíprocamente, que si la condición se cumple, ella *bastará*; esto es, que el equilibrio *existirá*. La condición de que vamos á hablar da, pues, en general *la ley*, é indica en cierto modo (como veremos) la razón de ser del equilibrio.

Se supone que estén bien definidos los enlaces del siste-

(*) Es sabido que en la Mecánica racional no se considera que pueda haber rozamientos ni adherencias entre unas y otras partes. En lo que aquí recordamos se admite, en general, que los enlaces sean bilaterales, y se puedan definir analíticamente por ecuaciones.

ma por ecuaciones, es decir, que se sepa *cómo* cada punto de los que lo forman está ligado con los otros. Es evidente que si un punto no tuviera enlace alguno con ninguno de los demás puntos, no formaría parte del sistema: sería un punto aislado, y no habría que considerarle para nada al estudiar el equilibrio del sistema como de una entidad.

Si se supone, además, que sean perfectamente conocidas en magnitud, dirección y sentido todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre todos ó algunos de los puntos del sistema en las posiciones que ocupan, se ve que unas fuerzas pueden emanar, pueden venir de fuera del sistema: se las llama (como hemos dicho repetidas veces) *fuerzas exteriores*. Otras pueden emanar de puntos del sistema mismo: se las llama *fuerzas interiores* al sistema. Y es muy de notar que en virtud del principio de la acción y la reacción las fuerzas interiores que actúen sobre *puntos del sistema* son siempre *conjugadas dos á dos*, mientras que las fuerzas exteriores no lo son; porque aunque cada fuerza exterior tenga su conjugada, ésta no está aplicada á ningún punto del sistema, sino á algo que está fuera de él, que no nos interesa.

Es evidente que la condición necesaria y suficiente para el equilibrio del sistema es que todos y cada uno de los puntos que lo constituyen estén en equilibrio; pero para saber si cada punto está en equilibrio, sería preciso conocer todas, todas las acciones que sobre él se ejercen, y no nos encontramos en este caso; porque si bien suponemos conocidas las fuerzas que *directamente* actúan sobre cada punto, no conocemos en general las fuerzas que (como acciones *indirectas*) ejerce sobre cada punto el conjunto del sistema, por intermedio de los enlaces. En una palabra, las fuerzas llamadas *de los enlaces* nos son, en general, desconocidas para cada punto; y de esta suerte la consideración del equilibrio punto por punto aparece como irrealizable para llegar á establecer la condición necesaria y suficiente del equilibrio del sistema. Pero se observa y se demuestra que al ima-

ginar un conjunto de desplazamientos *virtuales* muy pequeños—de puntos del sistema—que sean *compatibles con los enlaces* que haya en éste, la suma *algebraica* de los *trabajos virtuales* de esas fuerzas desconocidas de los enlaces puede considerarse como nula (prescindimos de los rigorismos infinitesimales); y de aquí se deduce después que para esos desplazamientos de que hablamos, la suma de los trabajos virtuales de las demás fuerzas habrá de ser *nula* (*).

No puede tener lugar aquí la demostración (que es larga y difícil) de este gran *Teorema*. Hemos querido tan sólo recordar brevísimamente las notas que preceden y que nos interesan, para enunciarlo en forma vulgar que permita luego su adaptación á la *Estática social*. Prescindiendo, como hemos dicho, del rigorismo infinitesimal, diremos que: si un sistema de puntos entre los cuales haya enlaces, se halla en reposo en cierta posición, y sobre todos ó algunos de los puntos actúan fuerzas cualesquiera conocidas, el sistema permanecerá en equilibrio, ó dicho de otro modo, las fuerzas se equilibrarán en el sistema por intermedio de los enlaces, si se cumple esta condición, á saber: *Que si se conciben muy poco cambiadas las posiciones de los puntos, de cualquier modo, pero respetando los enlaces, la suma algebraica de los trabajos virtuales de todas las fuerzas dadas para los respectivos desplazamientos virtuales de sus puntos de aplicación sea nula* (**).

(*) No se olvide que el trabajo elemental de una fuerza para un desplazamiento muy pequeño (real ó virtual) de su punto de aplicación, es positivo (*motor*) cuando el desplazamiento, estimado en la dirección de la fuerza, tiene el mismo sentido que ésta; y que es negativo (*resistente*) cuando tiene el sentido contrario.

(**) Se dice que estos desplazamientos son *virtuales*, no efectivos, porque son puramente concebidos como un artificio para percibir los movimientos elementales que podrían hacer los puntos del sistema en vista de la naturaleza de sus enlaces mutuos. Y deben de ser concebidos en general, como muy pequeños esos desplazamientos para que se refieran á la disposición y forma en que está el sistema, y no á otra diferente.

O dicho de otro modo: *Que tomando en cuenta todas las fuerzas, la suma numérica de los trabajos virtuales motores (positivos) sea igual á la de los resistentes (negativos).*

Esta condición *suficiente* para el equilibrio, es también *necesaria*, es decir, que si hay equilibrio se cumplirá.

*
* * *

Pasando ya á la *Estática social*, y asimilados los individuos y elementos sociales que constituyen una agrupación, á los puntos de un sistema; y concibiendo que el hecho de formar parte de la agrupación, significa que cada uno de los individuos y elementos sociales está enlazado *de algún modo* con otros individuos ó elementos (conjunto de enlaces, que será tanto más complejo y variado, cuanto más elevado sea el grado de la agrupación); y suponiendo, por último, que en una *posición* dada de la agrupación se ejerce sobre algunos ó sobre todos los individuos y elementos sociales, fuerzas psíquicas que vengan de fuera de la agrupación ó de otros individuos ó elementos de la agrupación misma, ó bien del conjunto ó totalidad de ésta, diremos que la ley del equilibrio de la agrupación, con sus enlaces, bajo la acción de todas estas variadísimas fuerzas (condición necesaria y suficiente para que las fuerzas todas se equilibren en la agrupación social, por intermedio de los enlaces), es la siguiente:

Que al concebir cambios muy pequeños en las posiciones dadas de los individuos y elementos de la agrupación, que sean compatibles con los enlaces, la suma numérica de todos los trabajos virtuales motores, sea igual á la de los resistentes.

Si se piensa en esta proposición como expresiva de la ley del equilibrio en una agrupación social, se ve que todas las fuerzas ó influencias psíquicas—ya vengan del exterior, ya procedan de iniciativas de los particulares individuos ó elementos constitutivos de la agrupación misma, ya emanen

del ambiente social—que soliciten á los individuos y elementos sociales en muy varias direcciones y sentidos y con intensidades cualesquiera, *no producirán efecto alguno de movimiento*, es decir, de *cambio de posiciones*, si se cumple aquella condición esencial que equivale á una *compensación*. Pero el efecto se manifestará en el sistema por la *tensión de los enlaces*. Por esto se dice, con toda propiedad, que las fuerzas dadas se equilibran en el sistema ó agrupación *por intermedio de los enlaces*. Si estos enlaces fueran suficientemente vigorosos, en la agrupación social que se considere, para soportar las presiones ó tensiones que sufran, el equilibrio quedaría asegurado (*). Pero si no resistieran á las presiones ó tensiones, se romperían los enlaces de la agrupación y ésta se destruiría, es decir, dejaría de ser tal como era la agrupación. Las fuerzas á que habría sido sometida, tanto desde el exterior como en el interior de la agrupación misma, habrían sido demasiado enérgicas para la resistencia que los enlaces ofrecían; y esta debilidad relativa de los enlaces de la agrupación considerada, habría sido entonces la causa de su ruina, aunque aquellas fuerzas se habrían equilibrado entre sí—por medio de los enlaces—si hubiera habido el suficiente vigor en la constitución interna de la agrupación social.

Para cada asunto de carácter social que se quiera estudiar desde el punto de vista *estático*, y haciendo abstracción de los demás asuntos sociales en la agrupación, se deberá de poner atención:

1.º En las fuerzas relacionadas con el asunto que lleguen á la agrupación desde el exterior de ella, señalando bien los individuos ó elementos de la agrupación á quienes se apliquen, y sobre quienes obren *efectiva y directamente*;

(*) Esto se admite siempre en los sistemas que considera la *Mecánica racional*, puesto que se trata el caso ideal en que los enlaces sean *indefinidamente resistentes*.

2.º En las iniciativas, ó mejor dicho, fuerzas *efectivas* (de naturaleza apropiada al asunto) que emanen de individuos y elementos de la agrupación misma; aspirando á conocer, no sólo sus direcciones, intensidades y sentidos, sino también los individuos ó elementos sobre quienes se ejerzan y obren *efectiva é inmediatamente*; y

3.º En el examen de aquellos enlaces sociales que hayan de entrar principalmente en juego, por decirlo así, para transmitir de unos individuos ó elementos á otros las acciones de las fuerzas, tanto exteriores (1.º) como interiores (2.º)

Si respecto de un asunto jurídico—por ejemplo—pensamos que una nación dada tiene—en un instante en que la consideremos—una determinada *posición*; y suponemos (para simplificar) que los individuos y elementos nacionales se hallan en ese instante en estado de reposo en el asunto, sin velocidades de modificación de ninguna especie (*), se diría que esa nación se halla *en equilibrio en el asunto* si permanece en *esa misma posición* y conserva su estado de reposo, á pesar de las influencias que, como *fuerzas sociales*, exteriores é interiores, se ejerzan sobre los individuos y elementos de la nación para cambiar sus posiciones en el asunto jurídico de que se trate. Entonces se diría que todas las fuerzas se equilibran; y este equilibrio se produciría, porque habría individuos y elementos de la nación interesados en el asunto, con aspiraciones opuestas—por ejemplo—á la influencia de algunas de las fuerzas que vienen del exterior y á las de otras que emanen de individuos y elementos nacionales, acaso también reforzadas por la acción social. Para equilibrar á todas éstas, habrían de ser calculadas convenientemente aquellas fuerzas en sus direcciones, intensi-

(*) Esta hipótesis no se presenta casi nunca—cualquiera que sea el asunto de que se trate—en las naciones que están dentro de la civilización moderna. Veremos que en el caso del movimiento se puede aplicar lo que decimos en el caso del reposo para el equilibrio de un conjunto de fuerzas dadas.

dades y sentidos, así como en sus puntos de aplicación, contando indispensablemente con los enlaces (tales como existan) por medio de los cuales habría de lograrse el equilibrio social en el asunto. Y es indispensable, decimos, contar con los enlaces interiores de la agrupación, porque si el Teorema de los trabajos virtuales es admisible—tal como lo enunciamos para la *Mecánica social*,—debemos de pensar que la compensación por el equilibrio ó para el equilibrio no es—en puridad—una compensación de fuerzas, sino una *compensación de trabajos virtuales posibles*; y esta posibilidad depende de los cambios elementales posibles en las posiciones de individuos y elementos; y esto, finalmente, depende de los enlaces á que estén sujetos los individuos y elementos. Se ve la inmensa complejidad del problema si hubieran de determinarse fuerzas que equilibraran á otras dadas sobre una posición conocida de la agrupación. Aunque por lo demás, este problema así planteado sería indeterminado si se atendiera exclusivamente al *aspecto mecánico*. Si se impusieran á las fuerzas psíquicas otras condiciones *ajenas á la Mecánica*, el problema ya podría ser determinado ó absurdo. Más adelante volveremos sobre esta consideración, que es de gran transcendencia; pero limitándonos ahora á ver cómo una agrupación social puede permanecer en la misma posición que tenga en un asunto social cualquiera, conviene observar lo que ocurre con frecuencia en los pueblos poco civilizados y (más acentuadamente aún) en los pueblos de civilización estancada. El desprecio y el odio que sienten éstos hacia los fines de la civilización nuestra, despiertan en esas sociedades muy intensas fuerzas psíquicas interiores, y éstas son las que algunas veces equilibran á las exteriores que llegan á ellas desde Europa, tendiendo á poner en movimiento alguna de esas agrupaciones sociales que esté en reposo.

Ese mismo hecho mecánico se observa también en los países que se hallan de lleno en la corriente de la civiliza-

ción moderna. Aquí las fuerzas interiores que se despiertan para contrarrestar la acción de otras fuerzas son componentes para las resultantes motrices. Si no consiguen (en la mayor parte de los casos) impedir el movimiento de modificación, contribuyen algunas veces por su influencia á moderarlo, en ciertas agrupaciones sociales privilegiadas, para que se realice suavemente—por decirlo así—y se evite la ruptura violenta de algunos enlaces sociales. Además de estas fuerzas genuinamente conservadoras, podría en muchos casos contribuir al mismo fin la supresión ó modificación de algunos enlaces y el establecimiento de otros nuevos.

Pero volviendo á nuestro asunto, tratemos de aplicar la ley general del equilibrio de un número cualquiera de fuerzas sociales, actuando de cualquier modo sobre los individuos y elementos de una agrupación dada, al caso más sencillo de dos fuerzas solamente. Supongamos, para simplificar, que haya una sola fuerza exterior que aspire á modificar con una cierta tendencia las posiciones actuales de los individuos y elementos de la agrupación (que consideramos en reposo en un asunto de carácter social), y que haya una sola fuerza—exterior también—que tienda, por el contrario, á modificar en sentido inverso las posiciones actuales en el mismo asunto (*). Una y otra fuerza pueden ejercer sus acciones como aplicadas directamente sobre dos individuos—ó sobre dos elementos—ó sobre un individuo y un elemento, y por intermedio de éstos influir en las posiciones de los demás individuos y elementos en general, toda vez que los puntos de aplicación (sean individuos ó elementos individualizados) estarán enlazados de varios modos con el resto de la agrupación; y á ésta, en general, se transmitirá por los

(*) Este caso particular es puramente teórico para las grandes agrupaciones, porque no se dará casi nunca el supuesto de que sean solamente dos fuerzas exteriores las que actúen, respecto de un asunto, sobre una agrupación social de alguna complejidad. En una simple familia se presentará más frecuentemente este caso.

enlaces (como hemos dicho repetidas veces) la influencia de las dos fuerzas que consideramos. La condición esencial para el equilibrio de las dos fuerzas será, no la de igualdad de sus *intensidades psíquicas*—por decirlo así,—sino la de igualdad de sus *trabajos virtuales de signo contrario*. O dicho de otro modo: la relación de las intensidades de las dos fuerzas habría de ser igual á la relación inversa de los cambios de posición que pudieran virtualmente adquirir sus dos puntos de aplicación sin romper los enlaces; estimando las fuerzas en las direcciones de los desplazamientos respectivos de los puntos de aplicación para que los productos—esto es, los trabajos virtuales—sean iguales.

Se vería, pues, en el caso de dos fuerzas, lo siguiente: que una fuerza de intensidad psíquica muy pequeña podría equilibrar á otra relativamente grande, si por los enlaces interiores de la agrupación le fuera permitido al punto de aplicación de la primera un cambio de posición muy grande (en la dirección de esta fuerza); y, por el contrario, el punto de aplicación de la segunda fuerza no pudiera—sin romper los enlaces de la agrupación—hacer más que un cambio muy pequeño de su posición en el asunto. Acaso sirva esta consideración mecánica (idéntica á la que se hace en la *Mecánica racional* sobre las dos fuerzas llamadas ordinariamente potencia y resistencia, que se hacen equilibrio en una máquina simple como la palanca, el torno, etc.) para explicar el hecho, asombroso para algunos, de que una fuerza psíquicamente insignificante por su pequeñez, sea capaz—como se observa diariamente—de equilibrar á otra muy grande.—En las familias—como agrupaciones sociales muy sencillas—es fácil hacer la observación, especialmente respecto de asuntos religiosos, pedagógicos y otros, que se relacionan mucho con el medio social en que las familias viven.

Para terminar estas indicaciones generales de *Estática social*, tal como nosotros la consideramos, debemos de advertir que el concepto del equilibrio de un conjunto de fuerzas

sociales, es más general que el anteriormente expuesto. Lo dicho en el caso de las fuerzas equilibrándose sobre una agrupación social en reposo, se aplica también al caso en que la agrupación social se halla en estado de movimiento en un asunto. Este es el caso que se presenta ordinariamente. Entonces un conjunto de fuerzas exteriores é interiores que se equilibren en un instante dado, habría de ser tal, que el movimiento continuara como si ese conjunto de fuerzas no existiera (*). Las condiciones que se habrían de cumplir, serían las mismas que si en ese instante la agrupación, con sus enlaces, se hallara en reposo en la misma posición, puesto que las leyes sólo dependen de las posiciones y de los enlaces, así como de las direcciones, magnitudes y sentidos de las fuerzas. Excusado parece añadir que, aunque ese conjunto de fuerzas en equilibrio no influya en el movimiento de la agrupación, sí influirá en el estado interno de tensión de los enlaces.

DINÁMICA SOCIAL

La estructura (como dicen los sociólogos) de una agrupación social está, en general, en perpetuo estado de cambio, no ya por movimientos de modificación de los individuos y de los elementos sociales, sino principalmente por modificaciones de *los enlaces* de la agrupación, que son los que forman la estructura; y por eso dicen que, en la realidad, el estado

(*) Quizá esto corresponda, en cierto modo, á la indicación del sociólogo americano Ward, de que el estado *estático* de una agrupación social no debe de ser considerado como estado de reposo obligado, es decir, estacionario ó de estancación social; aunque Ward se refiere tan sólo á la conservación de la estructura de la agrupación social.

de las agrupaciones es *dinámico*. El profesor Charles H. Cooley hace notar que las amplias estructuras y los movimientos de conjunto de las sociedades no han sido, en general, producidos como efectos de una voluntad consciente que haya previsto los procesos dinámicos sociales, sino que han resultado (sin haber sido previstos) de un conjunto de diversas acciones ejercidas para intereses parciales, y con fines egoístas. Indica el citado profesor que la Sociología, basada en las leyes de la *Dinámica social*, debe de estudiar la formación de una efectiva opinión pública, y de una conciencia y voluntad sociales, cada vez más definidas, que permitan algún día realizar los movimientos de modificación de las sociedades, sabiendo adónde y por dónde se va.

Señala Cooley el hecho de que en las sociedades modernas se está elaborando indudablemente un conjunto de ideas armónicas para la vida social en toda su complejidad, y que de ellas va teniendo la sociedad misma más y más clara conciencia. Con el conocimiento más y más profundo que la Humanidad vaya teniendo de sí misma, y por intermedio del sentimiento, se va formando una voluntad social consciente. Pero estas ideas, muy interesantes desde el punto de vista general sociológico, salen fuera del terreno propio de estos *Apuntes*. A nosotros lo que nos interesa es el conocimiento de las leyes de la acción dinámica de las fuerzas psíquicas sociales, tanto interiores como exteriores, sobre los individuos y los elementos sociales que, enlazados entre sí, constituyen una agrupación dada.

Para nuestro estudio exclusivamente mecánico del movimiento de las agrupaciones sociales, hay que recordar el *Teorema de d' Alembert*, por virtud del cual se reduce, en principio, el estudio del movimiento de los sistemas de puntos materiales con enlaces, al estudio del equilibrio. Este *Teorema* es tan admirable por su sencillez como por su fecundidad, y revela el genio portentoso de d' Alembert.

Recordemos brevemente el Teorema, tal como se expone

en los Tratados elementales de *Mecánica racional* para los sistemas de puntos materiales.

Se sabe que cuando un sistema de puntos materiales, con enlaces, está en movimiento bajo la acción de fuerzas cualesquiera aplicadas á todos ó á algunos de sus puntos, cada punto del sistema se mueve — siguiendo su trayectoria con un determinado movimiento en ella, — no por la sola acción dinámica de las fuerzas aplicadas *directamente* á él, sino por esta acción combinada ó compuesta con la que ejerce sobre él todo el conjunto del sistema á que pertenece, y con el cual está ligado por ciertos enlaces que, en general, no le dejan libertad para obedecer exclusivamente á las fuerzas que directamente le solicitan. Y así vemos que la fuerza que determina en definitiva la aceleración del movimiento de un punto del sistema, es *la resultante* F de las fuerzas que actúan directamente sobre él, y de las *interiores* que llegan á él por intermedio de los enlaces.

Pues bien: si el punto que se considera es de masa m , la resultante motriz F de que hablamos provoca (por el principio de Newton) una fuerza de reacción ó de inercia, que es en magnitud igual al producto de su masa por su aceleración ($m.J$), y que tiene la misma dirección y *el sentido opuesto* al de aquella resultante motriz F . Se ve, por tanto, que ese punto — y en el mismo caso se hallan todos los del sistema — *estaría en equilibrio en ese instante, si por una ficción* imagináramos su fuerza de inercia *aplicada* á él mismo, y actuando juntamente con todas las fuerzas, incluso las interiores que provienen de sus enlaces con el resto del sistema.

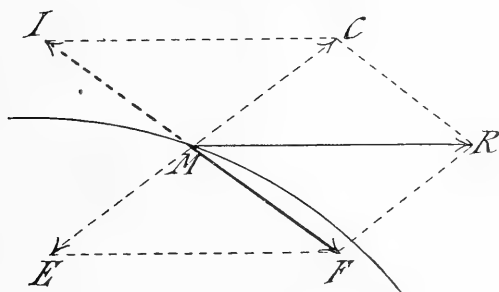
Pero la segunda idea fecundísima de d'Alembert fué la de ver todas las fuerzas interiores de los enlaces existentes en el sistema, produciéndose (mediante dichos enlaces) en el conjunto de todos los puntos del sistema, y ver, por consiguiente:

TEOREMA.— *Que el sistema todo en movimiento podría ser*

concebido en la posición por la cual pasa en un instante cualquiera, como en equilibrio ficticio, bajo la acción en ese instante de todas las fuerzas dadas y todas las de inercia, mediante los enlaces.

Este equilibrio *ficticio* concebido por d'Alembert en cada instante del movimiento, es lo que suele llamarse— con frase paradójica — *equilibrio dinámico*. Y las *tensiones dinámicas* de los enlaces serán en cada instante las que corresponderían (como se explicó en la *Estática*) á la acción simultánea de las fuerzas dadas y las de inercia en equili-

Fig. 5.^a



brio — mediante los enlaces — sobre la posición que tiene el sistema en ese instante.

Antes de dar por terminado este ligero recuerdo del *Teorema de d'Alembert*, nótese lo que ocurre en cada punto M del sistema en cada instante. La resultante R de las fuerzas dadas (fig. 5.^a) que sobre ese punto M del sistema actúan en un instante dado, no se aprovecha toda ella— como si dijéramos — para el movimiento *efectivo* que ese punto realiza, porque se descompone en dos, á saber:

1.º Una componente C , igual y opuesta á la resultante E de las acciones que sobre ese punto ejercen los demás del

sistema, por intermedio de los enlaces; esta componente C tiene por misión contrarrestar la resultante E de las acciones interiores de los enlaces.

2.º Otra componente F , que real y efectivamente *se aprovecha* para el movimiento del punto M : es en la dirección y el sentido de su aceleración J , y vale (como sabemos) $m \cdot J$. (*).

Por consiguiente, si pensando á la vez en todos los puntos del sistema, llamáramos *fuerzas perdidas* para el movimiento de éste, á aquellas primeras componentes C (por contraste en la denominación á las *aprovechadas* F), podría decirse, según el Teorema de d'Alembert:

*Que en cada instante, el conjunto de fuerzas perdidas para el movimiento se equilibra por intermedio de los enlaces en la posición que el sistema tiene en ese instante (**).*

* * *

Recordado todo lo que precede, y mirando una Sociedad ó agrupación como un sistema constituido por individuos y elementos sociales con enlaces, y que estos individuos y elementos se hallan sometidos á la acción de las fuerzas aplicadas á ellos — que hemos llamado fuerzas sociales —,

(*) Claro es que esta componente F , que se aprovecha para el movimiento del punto M , puede tener *igual*, *mayor* ó *menor* intensidad que la resultante R de que proviene.

(**) No podemos entrar aquí en la consideración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden á que conduce el desarrollo analítico de la solución del problema general de la Dinámica, ni mucho menos referirnos á la forma dada por Lagrange á las ecuaciones diferenciales, limitando el número de variables á las estrictamente necesarias.

No alcanzo yo á ver cómo se pueda ahondar para la Mecánica social hasta estas profundidades.

debemos de pensar que las acciones y reacciones que se ejercen entre los individuos y elementos que constituyen la agrupación, influyen sobre el movimiento de todos los individuos y elementos; porque al fin y al cabo, la comunicación se halla establecida á través de los enlaces de la agrupación misma, de que todos forman parte. Estas interacciones serán tanto más complejas cuanto mayor variedad y complicación haya en la estructura de la agrupación.

Pues bien: si pensamos que cada uno de los individuos y elementos constitutivos de la agrupación tiene su determinada *masa* para el asunto, podríamos enunciar el *Teorema de d'Alembert* (que admitiremos para la *Dinámica social*) de este modo:

TEOREMA.—*Cada una de las posiciones sucesivas por las cuales va pasando una agrupación social en el tiempo, podría ser mirada como una posición de equilibrio (equilibrio dinámico), si á las fuerzas psíquicas dadas que sobre ella actúan, y á las interiores de los enlaces, se unieran—por una ficción—las fuerzas de inercia de todos los individuos y elementos de la agrupación.*

O dicho brevemente:

Que en un instante cualquiera se equilibrarían todas las fuerzas dadas y todas las de la inercia mediante los enlaces.

Quizá se adapta mejor, y en forma más adecuada á la *Dinámica social*, la expresión del *Teorema* por su referencia á lo aprovechado y á lo perdido de las fuerzas que actúan sobre la agrupación, al efecto de cambiar el estado en que ella se encuentre respecto de un asunto, en un instante dado. Porque efectivamente: si se piensa que en el cambio de estado de cada individuo ó elemento no se aprovecha (para este cambio) más que una componente F de todo lo exterior R que sobre él actúa, puesto que necesariamente hay que emplear ó dedicar una primera componente C á equili-

brar, es decir, á contrarrestar las influencias de los enlaces que tenga el individuo ó elemento con el resto de la agrupación (*), se ve, como en la *Mecánica racional*:

Que en cada instante y en cada posición de una agrupación social han de estar equilibradas por las resistencias de los enlaces sociales aquellas componentes de las fuerzas exteriores que sean perdidas para el fin de la modificación efectiva que se opera en la sociedad en este instante.

Y es muy de notar que esas *tensiones dinámicas* á que están sometidos en cada instante los enlaces sociales provienen de la acción simultánea y compuesta de las fuerzas dadas, que tienden á modificar la sociedad, con las fuerzas de inercia de todos sus individuos y elementos (véase la fig. 5.^a); y que habiendo de resistir esas tensiones, los enlaces se romperían si no tuvieran la resistencia suficiente para soportarlas. Esto explica bien—á mi entender—el hecho de que las agrupaciones, como ciertas naciones (Inglaterra, por ejemplo), que están dotadas de enlaces sociales internos muy vigorosos, puedan soportar bien grandes movimientos de modificación; es decir, grandes cambios de estado, que se operen en un transcurso de tiempo relativamente pequeño, bajo la acción de fuerzas sociales de gran intensidad (esto ocurre á la hora presente); mientras que si á otras naciones se las sometiera á fuerzas motrices muy intensas, que tendieran á modificar grandemente su estado, se produciría relajación en sus enlaces internos, seguida de la ruptura de muchos de ellos, y de la consiguiente desorganización, que podría ocasionar hasta la disgregación de la agrupación, si la ruptura afectara á los lazos esenciales. Otras veces la firmeza ó gran resistencia de algunos de estos enlaces esenciales de una agrupación social, pueden salvarla de la ruina, aunque surja la perturba-

(*) Se comprende que estos enlaces influyen, de este modo indirecto, en el aprovechamiento de las fuerzas exteriores, unas veces favoreciéndolo y otras perjudicándolo.

ción consiguiente á la ruptura de algunos otros enlaces menos resistentes, de lo cual ha sido España un ejemplo (*).

Pero dejando esta digresión, vengamos al problema general de la *Dinámica social*, ya que hemos admitido el *Teorema de d'Alembert*.

Lo mismo que hicimos cuando se trató de un solo individuo bajo la acción de varias fuerzas, veamos ante todo los datos del problema en toda su generalidad.

Son los siguientes:

1.º *El estado inicial* de la agrupación en el asunto que se considere. Esto comprende no sólo *las posiciones* que tienen todos los individuos y elementos en el instante que tomamos como inicial para el estudio, sino además *sus velocidades* respectivas — en magnitudes, direcciones y sentidos — en ese instante.

2.º *Las masas* (para el asunto) de todos y cada uno de los individuos y elementos constitutivos de la agrupación.

3.º *La naturaleza ó constitución* de los varios enlaces internos que pueden influir en el asunto de que se trate; estos enlaces son los que definen, por decirlo así, la agrupación que se considere (**).

4.º *Todas las fuerzas efectivas* que (en relación con el asunto) estén aplicadas directamente á todos ó algunos de los individuos y elementos de la agrupación. Estas fuerzas serán muy varias en magnitudes, direcciones y sentidos. Pueden emanar (como sabemos) de individuos y elementos

(*) Esto se corresponde quizás con lo que dice Durkheim: «Tratar de realizar una civilización superior á la que reclame la naturaleza de las condiciones ambientes, es querer provocar la enfermedad en la sociedad de que todos forman parte; porque no es posible sobreexcitar la actividad colectiva, traspasando un cierto grado determinado por el estado del organismo social, sin comprometer la salud de éste.

(**) Es claro que en el *estado inicial* (que hemos citado como *primer dato*), las posiciones y velocidades deben de ser compatibles con estos enlaces.

exteriores á la agrupación, viniendo, por decirlo así, de fuera; ó pueden emanar de individuos y elementos interiores, es decir, que formen parte de la agrupación misma; ó bien pueden provenir del todo social.

Con estos datos, el problema de la *Dinámica social*—en toda su generalidad—consiste en determinar *cuál será el movimiento de modificación de la agrupación social en el asunto*. Para esto se podría empezar por hallar el *movimiento elemental* ó el conjunto de cambios muy pequeños en un intervalo muy pequeño de tiempo θ , y enlazar después, por ley de continuidad en el tiempo, estos movimientos elementales, haciéndolo para todos y cada uno de los individuos y elementos que forman parte de la agrupación. O bien se podría aspirar á la determinación directa de las leyes de los movimientos de todos y cada uno de los individuos y elementos de la agrupación, con sus respectivas trayectorias (usando esta palabra en sentido figurado).

Nótese que para la determinación del movimiento de cada individuo ó elemento social, tenemos ciertamente como datos su estado inicial y su masa (datos primero y segundo); pero surge una dificultad gravísima en cuanto á la fuerza motriz; porque, si bien son conocidas todas las fuerzas dadas que sobre él actúan (dato cuarto), *no lo son las interiores* que se ejercen también sobre él, por las influencias de los enlaces. Y lo que al parecer agrava aún más la dificultad, es que si estas fuerzas interiores de los enlaces influyen sobre el movimiento del individuo ó elemento, ellas, á su vez, son influenciadas por el movimiento que contribuyen á producir, es decir, que dependen de lo que sea este movimiento, por lo cual parece, á primera vista, que estamos en un círculo vicioso.

Y aquí resalta bien la hermosa fecundidad del *Teorema de d'Alembert*. Por medio de él se salva *en principio* la dificultad, procediendo á considerar los individuos y elementos sociales, no uno á uno—como si dijéramos—, sino en con-

junto y como partes del *todo social*. Porque, efectivamente; considerada así la cuestión, se ve que el *equilibrio dinámico* que debe de existir necesariamente entre todas las fuerzas dadas *R* (dato cuarto), y las de inercia *I*—por intermedio de los enlaces—obliga á estas de inercia á cumplir las condiciones esenciales del equilibrio, que ya expusimos en el *Teorema de los trabajos virtuales*; y de esta suerte, imponiendo á los cambios virtuales de posición *en cada instante* la compatibilidad con los enlaces conocidos (dato tercero), se podría llegar á determinar, por este *Teorema de Estática*, las fuerzas de inercia de todos y cada uno de los individuos y elementos—, y esto daría ya la solución del Problema general de la Dinámica, puesto que cada fuerza de inercia cambiada de sentido (se sobreentiende, en su misma dirección), y dividida por la masa del individuo ó elemento á que corresponda, nos daría la aceleración del movimiento de éste, y el movimiento mismo quedaría ya perfectamente determinado (Cinemática) por el conocimiento (dato primero) de su estado inicial.

Se ve, y casi es innecesario decirlo, que las dificultades serian enormes, y á mi entender, insuperables hoy (*).

*
* *

El *Problema inverso* es el siguiente: Dado en un instante inicial el estado en que se encuentra (posiciones y velocidades) una agrupación respecto de un asunto de carácter

(*) Durkheim ve claramente que las transformaciones ó modificaciones de una Sociedad no pueden derivarse exclusivamente de los precedentes históricos — ó sea de la herencia social — (que suministra tan sólo el *estado inicial* de que hemos hablado); porque es imposible concebir cómo este estado podría ser *la causa* determinante del siguiente. Como dice bien este sociólogo, los progresos realizados en el orden jurídico, en el político, económico, etc., hasta un instante dado, hacen *posibles* nuevos progresos, pero no los *prede-*

social, suponiendo conocidas las masas para el asunto de sus individuos y elementos, y también conocida la constitución interna de la agrupación por sus enlaces, y queriendo que la agrupación tenga un cierto *determinado movimiento*, ¿cuáles son las fuerzas capaces de producir este movimiento? (*).

terminan; son simplemente un punto de partida que permite ir más lejos. Y añade que lo que se ve es una serie de cambios entre los cuales la única relación que existe es exclusivamente cronológica (nosotros diríamos cinemática), no existiendo entre ellos enlace de causa á efecto, es decir, que el estado antecedente *no produce el* siguiente.

No podemos seguir á este sociólogo, cuando al concebir la Sociedad como un ser colectivo de naturaleza *sui géneris*, ve salir de sus entrañas mismas — no de los individuos y elementos — las fuerzas naturales que producen los cambios en los hechos sociales, tal como él los define. El se explica la variedad de las formas ó tipos sociales (que caracterizan las que él llama *especies sociales*) por la diversidad de los medios sociales, como él los concibe.

(*) El enunciado de este problema inverso, acaso corresponda bien á lo que dice D. Gumersindo Azcárate en su *Concepto de la Sociología*, porque se ve:

1.º Que *el estado inicial* en posiciones y velocidades, proviene de toda la *historia* de la agrupación en el asunto que se considere, y por tanto, el conocimiento del estado inicial, como herencia social, puede equivaler al conjunto de *lo hecho*, como dice Azcárate.

2.º La constitución interna de la agrupación define la agrupación particular de que se trate, tal como sea en el instante en que se la considere. Azcárate da por sobreentendido esto, á mi juicio.

3.º Las direcciones, sentidos y magnitudes de las velocidades con que se deben de seguir moviendo los individuos y elementos sociales, corresponden quizá á *lo que* — según la expresión de Azcárate— *se debe de hacer, se debe de conseguir*; y

4.º El conjunto de fuerzas convenientemente dispuestas en magnitudes, direcciones y sentidos, y puntos de aplicación para que se realice el movimiento que se quiere conseguir, el movimiento deseado, corresponde quizá á *cómo ha de hacerse*, que dice Azcárate.

Sobreentendido definida una particular y determinada agrupación social, el problema se podría tal vez enunciar, diciendo con Azcárate: *Conocido lo hecho, y lo que se debe de hacer, ¿cómo se ha de hacer?*

Se comprende que este problema inverso— así puesto — es en general *indeterminado*; porque el movimiento que se desea para la agrupación, podría ser obtenido (como efecto) de distintos modos, es decir, por las acciones de muy diferentes conjuntos ó sistemas de fuerzas. Las direcciones, magnitudes y sentidos de éstas, así como sus puntos de aplicación, son bastante indeterminados si se atiende exclusivamente al problema *dinámico* (*).

Ocurre pensar que siendo enorme la complejidad de estos

(*) En todo problema social, el *aspecto mecánico* de las fuerzas habrá de estar, á mi parecer, subordinado á otros aspectos como el jurídico, el ético, el económico, etc., en cuanto revistan estos caracteres las fuerzas de que se trata. (Si el problema mismo fuera sobre asunto jurídico, ético, etc., se le podría tratar mecánicamente; pero no decimos ahora eso.) Siendo así, se ve que entre aquellas infinitas soluciones posibles — puramente mecánicas — del problema inverso, es decir, entre los diversos sistemas de fuerzas que podrían resolver el problema mecánico, habrían de aceptarse *solamente* aquellos conjuntos de fuerzas que fueran *admisibles* desde el punto de vista jurídico, ó moral, ó económico, etc.; y esto ya hace comprender que habiendo de estar sometida la solución á estas nuevas condiciones *ajenas* á la pura Mecánica, el problema no será en general tan indeterminado, si se considera en toda su complejidad, y tal como en la realidad social se plantea. Por el contrario, los problemas se presentarán frecuentemente como *incompatibles*, porque las condiciones impuestas lo sean; y habrá que prescindir frecuentemente de algunas de estas condiciones para que sean determinados los problemas. Quizá el arte de los hombres de Estado — ó de los que dirijan la acción de las fuerzas sociales, — consista en designar bien las condiciones que hayan de cumplirse para llegar al resultado que se desea, y aquellas otras de que se pueda prescindir con el menor perjuicio posible para los intereses sociales en conjunto.

En el orden puramente científico, toca á la Sociología investigar — si le es posible — cuáles deban de ser las direcciones y sentidos de los movimientos para alcanzar el mejoramiento en los diversos asuntos de carácter social; y también investigar de qué género hayan de ser los sistemas de fuerzas que se apliquen, si á tanto pueden llegar en sus investigaciones. A la Mecánica le corresponde solamente determinar los movimientos de modificación que las fuerzas habrían de producir, si estas fuerzas hubieran sido convenientemente señaladas.

problemas de Dinámica social—planteados así en toda su generalidad—porque hay que seguir (por decirlo así) el movimiento de cada individuo y de cada elemento social—sería más asequible quizá el estudio del simple *movimiento de conjunto* de la agrupación social. Así lo haremos más adelante, cuando expongamos un *Teorema* que se refiere al movimiento de lo que llamaremos *Centro de masas* de la agrupación, por analogía con el centro de masas ó centro de inercia (que suele llamarse *Centro de gravedad*) de un sistema de puntos materiales.

Pasemos ya á hacer la exposición de algunos *Teoremas generales* de la *Dinámica social*. Son los mismos que expusimos al tratar del movimiento de un solo individuo; y además de ellos, ese *Teorema* del movimiento del Centro de masas, á que acabamos de aludir, y el *Teorema del menor esfuerzo*, conocido con el nombre de *Principio de Gauss*.

(Continuará).

XXIX. — Relaciones entre la fórmula estereoquímica de los «Carburos acíclicos» y su calor de combustión.

POR RUPERTO LOBO GÓMEZ.

Siendo los carburos de hidrógeno la base sobre que descansa todo el edificio de la Química orgánica, á la manera que los cuerpos simples lo son de la Química inorgánica, el estudio de estos carburos, aportando el mayor número de datos, ha de influir notablemente en el conocimiento de los cuerpos que de ellos se derivan, puesto que con menos esfuerzo y con paso más seguro hemos de deducir consecuencias importantes.

Punto esencialísimo en el estudio de tales cuerpos es su calor de combustión; no solamente porque da una idea clara de su constitución, sino también porque la mayoría de los combustibles que ordinariamente se emplean en la industria deben las calorías desarrolladas, en su mayor parte, al carbono é hidrógeno que forman su masa.

Con anterioridad al desarrollo de la Estereoquímica tratóse del estudio que nos ocupa, suponiendo que el calor de combustión dependía únicamente de los compuestos resultantes, y como todo carburo en su combustión completa desprende anhídrido carbónico y agua en diferente cantidad, según el número de átomos de carbono é hidrógeno que lo constituyen, no había más que sumar las calorías desprendidas en la formación de estos cuerpos para obtener el calor de combustión del carburo considerado.

Sentada esta base, se pudo observar que en algunos casos coincidían los valores obtenidos experimentalmente y los deducidos sumando los correspondientes al anhídrido

carbónico y agua formados; mas en otros casos no había relación entre estos valores.

Estudiando más profundamente la cuestión, observó Thomsen la gran influencia producida en el calor de combustión de estos carburos por la clase de enlace que existe entre los átomos de carbono, así como también el calor de combustión de cada átomo de carbono, según sea cristalizado ó amorfo, como el del hidrógeno aislado ó constituyendo molécula. Atendiendo á ello, pudo enunciar varias reglas referentes al calor de combustión y formación de tales carburos. Como consecuencia de sus estudios llegó á obtener para valor del enlace (a_1) (sencillo entre dos carburos), un valor igual que para el enlace (a_2) (doble ó etilénico) y para el enlace (a_3) (triple ó acetilénico) un valor igual á 0.

Diffenbach perfeccionó en parte este sistema, obteniendo valores más aproximados á los experimentales, y como consecuencia de sus estudios cayó en el error de obtener para (a_2) un valor igual que para (a_3).

El sistema de Lemoult, que es el que me propongo desarrollar, está fundado en el conocimiento del número de calorías desprendidas por la combustión de los átomos de carbono é hidrógeno, supuestos aislados ó constituyendo molécula, así como en la representación tetraédrica del átomo de carbono y en la ley de los enlaces de los mismos.

2 átomos de hidrógeno, supuestos aislados, en su combustión desprenden	55 calorías.
2 átomos de hidrógeno formando molécula, desprenden en su combustión	69 —

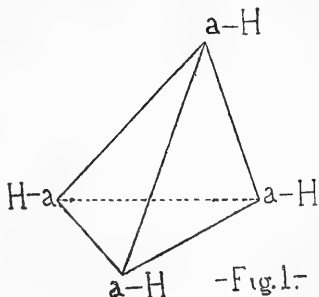
luego el calor de formación de la molécula de hidrógeno, partiendo de los átomos supuestos aislados, será $55 - 69 = -14$.

2 átomos de carbono supuestos aislados, en su combustión desprenden	204 calorías.
2 átomos de carbono formando molécula desprenden en su combustión	288 —

luego el calor de la formación de la molécula de carbono, partiendo de sus elementos aislados, será $204 - 288 = -84$.

Respecto de la tetravalencia del carbono se ha discutido mucho; mas con alguna atención, observaremos que este elemento obra siempre como tetravalente; pudiera citarse en contra el óxido de carbono CO y las carbilaminas (según Gautier), en los que aparentemente es divalente; pero esta objeción perderá su fundamento, desde el momento que consideremos que dichos cuerpos no son saturados, son moléculas abiertas, inestables; así, el CO no puede reaccionar por substitución, y sólo mediante adición, para dar, por ejemplo, CO_2 , ó puede unirse á dos Cl para formar gas cloxicarbónico COCl_2 .

Representando el átomo de carbono por el tetraedro característico figurémonos en cada vértice cada una de sus valencias y representémoslas por a ; en este caso sólo habrá enlaces de las valencias del carbono con el hidrógeno, ó sea de la forma $(a - 4)$, y para determinar su valor, diremos, según lo anteriormente indicado: el calor de combustión de dos átomos de hidrógeno, supuestos aislados, es

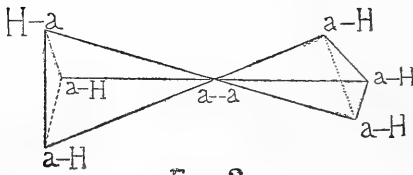


igual á 55 calorías; luego el de los cuatro de hidrógeno del tetraedro serán 110; de la misma manera, el calor correspondiente á un átomo de carbono es igual á 102; sumando estos dos valores, tendremos el calor de combustión del CH_4 (metano), ó sea 212; para determinar el correspondiente á cada enlace $(a - 4)$, no habrá más que dividir por 4, ó sea $(a - 4) = 53$, valor asignado por Lemoult.

Mas si, por el contrario, el carburo está formado de varios átomos de carbono, entonces, debido á la aptitud del

carbono, de saturarse por sí mismo, tendremos uniones, ya simples, dobles, etc., entre estos átomos y uniones de ellos con los átomos de hidrógeno. Los átomos de carbono están unidos en virtud de sus propias afinidades, formando una cadena cuyos eslabones son los mismos átomos, y que cada uno está unido al interior y posterior, de tal modo, que no se puede separar ninguno sin romperla.

Una de las maneras como pueden estar unidos dos átomos de carbono, es neutralizándose por una sola valencia, originando el enlace sencillo ($a - a$), caso de los carburos saturados, y para determinar su valor podemos partir del más sencillo, ó sea el etano



-Fig. 2-

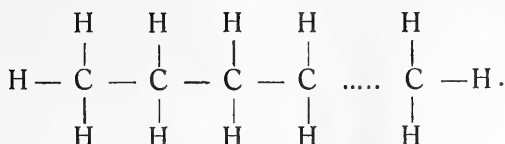
En esta determinación podemos observar que hay que considerar el calor de formación de la molécula de carbono, puesto que existe más de un átomo de éste.

Así, el calor de combustión de los seis átomos de hidrógeno aislados que posee el etano, es igual á 165 calorías; el calor de combustión de sus dos átomos de carbono unidos, es 288 calorías, luego el calor de combustión será la suma $165 + 288 = 453$; pero es necesario restar de esto el de formación de la molécula de carbono, que es 84, luego queda para el de combustión del etano 369; quitando de este número el que corresponde á las seis uniones de la forma ($a - H$), queda para la unión ($a - a$) = 51.

Apliquemos ahora estos datos á la determinación del calor de combustión de los carburos saturados en que sólo hay uniones de las formas



Sea un carburo saturado cualquiera



En él observamos que cada átomo de carbono pierde dos valencias¹, una que cambia con el anterior y otra con el que le sigue, excepto el primero y el último que pierden una sola, es decir, $2-1$; luego el número de valencias perdidas será igual al duplo del de átomos de carbono menos dos, y por lo tanto, el número de enlaces de la forma $(a-a)$ será precisamente la mitad, puesto que por cada dos perdidas aparece una:

$$(a-a) \text{ ó sea } (a-a) = n-1,$$

siendo n el número de átomos de carbono. Respecto de las valencias que quedan libres, observamos que cada átomo de carbono deja dos, excepto el primero y el último, que dejan tres; luego el número de enlaces de la forma

$$(a-H) \text{ es } 2n+2.$$

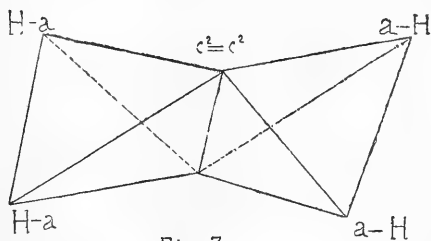
Aplicando los datos conocidos tenemos:

Calorías desprendidas en la combustión de los carburos saturados

$$C_n H_{2n+2} = (n-1) 51 + (2n+2) 53.$$

Cuando dos átomos de carbono están unidos de modo que se neutralizan dos valencias respectivas (caso de los carburos etilénicos, aparece el enlace doble

$$(a^2 - a^2),$$



-Fig. 3.-

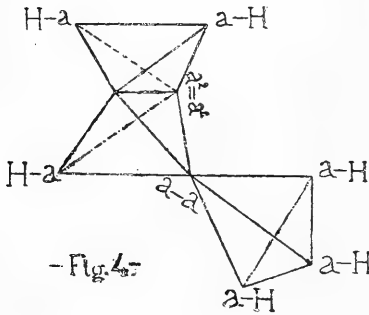
y para determinar el valor de éste partiremos del más sencillo, ó sea del eteno

El calor de combustión del eteno es 342; restando de este valor el correspondiente á los cuatro enlaces de la forma $(a - H)$, tendremos el valor del $(c^2 = c^2)$, ó sea

$$342 - 212 = 130 = (c^2 = c^2).$$

Aplicando estos datos á la determinación del calor de combustión de los carburos etilénicos y sea un carburo de esta clase cualesquiera.

En este carburo se observa que al igual de los saturados, en los átomos de carbono que hay enlace sencillo $(a - a)$ se encuentran $(n - 1)$ y de los $(a - 4) = 2n + 2$; pero entre los dos que existe enlace doble



$$(c^2 = c^2)$$

resulta que éstos pierden dos valencias cada uno, luego el número de los que quedan de la forma:

$$(a - H) \text{ será } 2n + 2 - 2 = 2n,$$

los de la forma

$$(a - a) = n - 2 \text{ y de la } (c^2 = c^2) = 1.$$

De aquí que calorías desprendidas en la combustión de los carburos etilénicos

$$C_n H_n \text{ será igual á } 130 + (n - 2) 51 + 2n \cdot 53$$

Si dos átomos de carbono están unidos de modo que se neutralicen, respectivamente, aparece el enlace triple

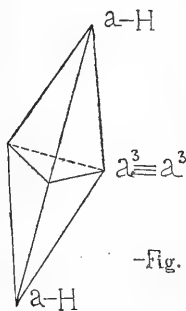
($a^3 \equiv a^3$), ó sea el correspondiente á los carburos acetilénicos, que para deducir su valor partiremos del etino ó acetileno:

Determinando prácticamente su calor de combustión resulta ser igual á 316 calorías, de modo que restando lo correspondiente á los dos de la forma

$$(a - H) = 2 \cdot 53$$

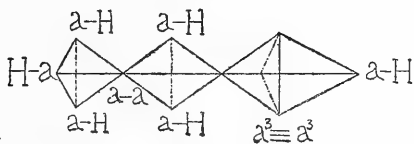
queda para

$$a^3 \equiv a^3 = 316 - 106 = 210.$$



-Fig. 5.-

Aplicando esto á la determinación del calor de combustión de un carburo acetilénico cualquiera, tenemos:



-Fig. 6.-

Vemos que el número de enlaces de la forma ($a - a$) es igual al número de átomos de carbono menos dos; de la forma ($a - 4$) quedan $2n - 2$ y de la $c^3 \equiv c^3$ es igual á uno. Luego; calorías desprendidas en la combustión de un carburo acetilénico

$$C_n H_{2n-2} = 210 + (n - 2) 51 + (2n - 2) 53.$$

Puede suceder que se presenten carburos dos veces con enlace etilénico ó acetilénico, ó ya tres ó más, y en este caso se ha observado que sólo uno de los enlaces múltiples conserva el valor primitivo, mientras que para los otros enlaces, ya dobles, ya triples, es necesario rebajar del valor primero

el número 40, ó sea que sólo un enlace múltiple obra como principal. Así la fórmula general para el número de calorías desprendidas en la combustión de un carburo dietilénico será:

$$130 + (130 - 40) + (n - 3) 51 + (2n - 2) 53.$$

Por la misma razón para un carburo diacetilénico será:

$$210 + (210 - 40) + (n - 3) 51 + n \cdot 53.$$

He aquí, por lo tanto, los valores obtenidos:

$$a - H = 53$$

$$a - a = 51 = 53 - 2$$

$$a^2 = a^2 = 130 = 2 \cdot 51 + 28$$

$$a^3 \equiv a^3 = 210 = 3 \cdot 51 + 2^{\cdot} 28 + 1$$

$$a^4 \equiv a^4 = 288 = 4 \cdot 51 + 3 \cdot 28.$$

Consecuencias.—1.^a El valor del enlace doble es igual al duplo del sencillo, más el duplo del calor de formación de la molécula de hidrógeno.

2.^a El valor del enlace triple es igual al triplo del enlace sencillo, más el duplo del de formación de la molécula de hidrógeno, más uno.

3.^a El valor del enlace cuádruple es igual al cuádruple del enlace sencillo, más el triplo del de formación de la molécula de hidrógeno.

4.^a Que hallando la diferencia entre los valores de los diversos enlaces, cada uno respecto del anterior, tenemos valores que oscilan alrededor de 79,5 calorías, que es precisamente el calórico de fusión del hielo, indicando la gran relación de estos hechos con otros quizá más trascendentales.

Bajo distinto aspecto, y fijándonos en las series homólogas, podemos deducir fórmulas generales respecto de la va-

riación que hará producir la cantidad constante CH_2 , fija á un carbono, y veremos que habrá ganado un grupo

$$(a - a) \text{ y dos } (a - H),$$

luego la ganancia total será:

$$51 + 2 \cdot 53 = 157 \text{ calorías.}$$

Este número es el llamado constante de homología, y, según el cual, la diferencia entre los valores de combustión de dos homólogos consecutivos es igual á 157 calorías.

Relacionando con este número el calor de combustión de los carburos, tendremos:

saturados

$$= (n - 1) 51 + (2n + 2) 53 = 157n + 55$$

etilénicos

$$= 130 + (n - 2) 51 + 2n \cdot 53 = 157n + 28$$

acetilénicos

$$= 210 + (n - 2) 51 + (2n - 2) 53 = 157n + 2$$

dietilénicos

$$= 130 + (130 - 40) + (n - 3) 51 + (2n - 2) 53 = 157n - 39$$

diacetilénicos

$$= 210 + (210 - 40) + (n - 3) 51 + n \cdot 53 = 157n - 91.$$

Ahora bien; podemos representar gráficamente estos carburos. La ecuación general que nos da su calor de combustión, hemos visto que es $157x + A$, ecuación que representa varias rectas paralelas por los diversos valores de x y de A , y la tangente del ángulo será $157 (\alpha)$, ó sea que el ángulo α tiene por valor $89^\circ, 38', 6''$. Como vemos, es un ángulo formado sobre el eje de las X , que se aproxima

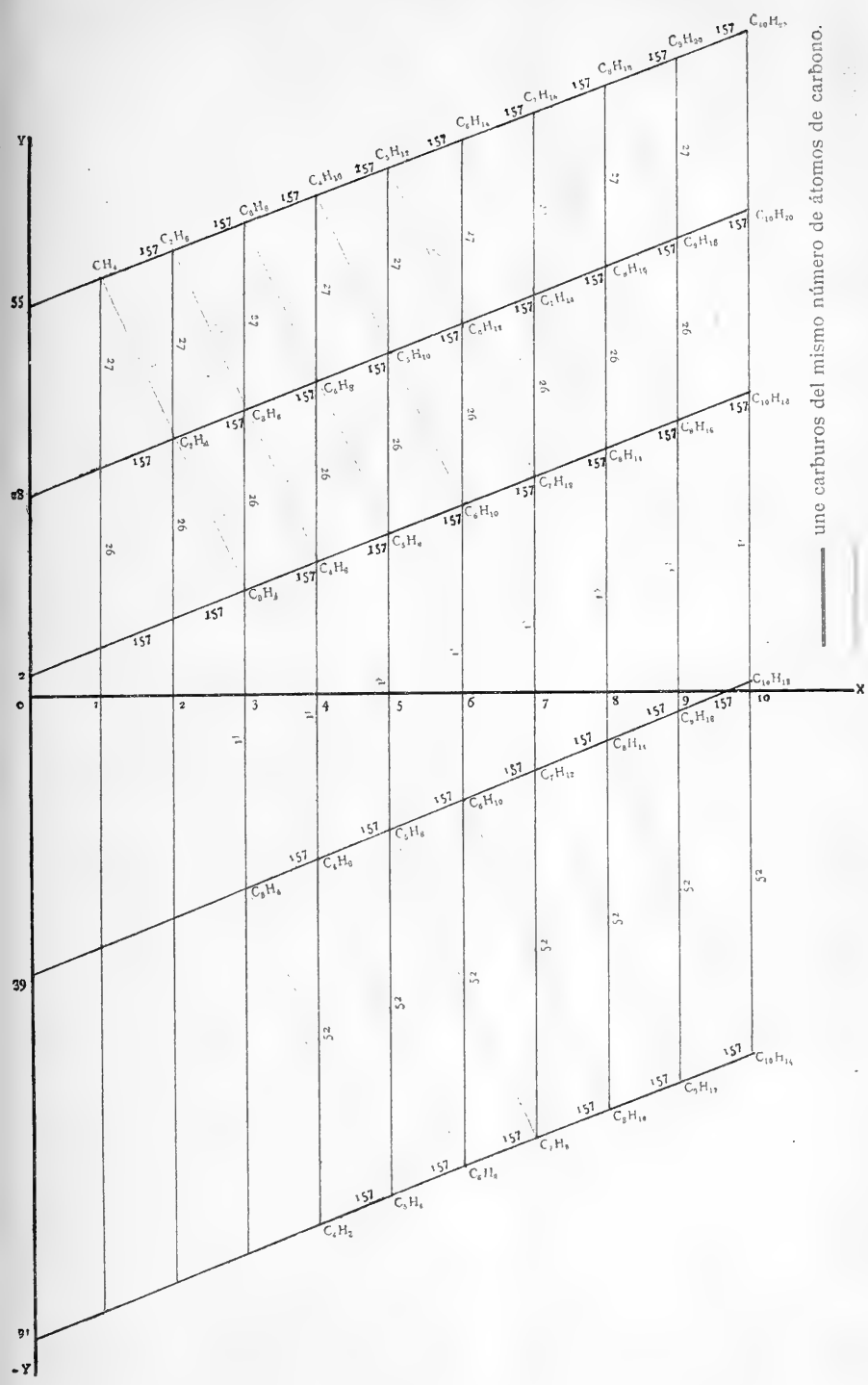
mucho al recto, y como esto haría que en la construcción gráfica no se viese bien la separación de estos carburos, he tomado un ángulo arbitrario, puesto que las relaciones de posición no varían. He aquí su representación (*véase el cuadro*).

Estudiando detenidamente la construcción, he podido deducir que, por medio de esta tabla, basta saber que el calor de combustión de un carburo contenido en ella para poder obtener el de cualquiera otro.

En efecto; si dado el calor de combustión de un carburo, queremos determinar el valor de otro que esté con relación al primero más elevado respecto de la horizontal y á la derecha, basta adicionar al calor de combustión de dicho primero el valor de las líneas que hay que recorrer yendo por el camino más próximo, hasta llegar al que queremos determinar.

En caso contrario, es decir, cuando el que queremos determinar está más bajo ó á la izquierda, hay que restar del calor de combustión del dado el de los valores de las líneas que por el camino más corto se pasan hasta encontrar el carburo propuesto.

Y, por último, con sólo saber el calor de combustión del metano, carburo que sirve de base, basta con el intermedio de esta tabla, para determinar el calor de combustión de todos los demás carburos acíclicos.



— une carburos del mismo número de átomos de carbono.

Base.— Calor de combustión del metano $CH_4 = 212$.

XXX - El astigmatismo de los resaltos cóncavos esféricos.

POR P. CARRASCO.

El empleo creciente de los resaltos cóncavos y la importancia capital de su astigmatismo, ya por las ventajas que supone en ciertos casos el producir un punto luminoso una imagen lineal, ó bien por la necesidad de corregir esta circunstancia, cuando se necesita obtener el espectro correspondiente á cada punto de una imagen definida que sirve de foco, nos ha inducido á publicar la presente nota, donde tratamos el astigmatismo del resalto con la generalidad conveniente, para que su conocimiento pueda aplicarse á las diversas monturas de espectrógrafos de este género (*).

Empecemos por recordar algunos conceptos fundamentales, que son necesarios para el desarrollo de nuestro tema, siguiendo en su exposición la teoría de Runge, expuesta por Kayser (**).

*
* *

Establecemos que el rayado del resalto se ha producido mediante desplazamientos iguales de la punta del buril, de tal modo que las líneas pueden considerarse determinadas por la intersección del espejo cóncavo con una serie de planos paralelos entre sí y al eje principal del espejo; á la distancia constante entre dos planos consecutivos, ó intervalo del ra-

(*) Véase nuestra Memoria sobre el «Resalto cóncavo, su instalación, etc.», presentada á la junta para estudios é investigaciones científicas.

(**) Véase *Handbuch der Spectroscopie*, t. I.

yado, la denominamos e , y trazo central al que pasa por el eje principal del resalto. Cuando la diferencia de marcha entre dos rayos que indiquen en trazos consecutivos es una longitud de onda, la imagen es difractada de primer orden, y del orden m cuando dicha diferencia vale $m\lambda$; por lo tanto, la diferencia de marcha entre el rayo central y el que incide en el n ésimo trazo valdrá $mn\gamma$, si estos rayos concurren á formar una imagen de n ésimo orden.

Refiramos los elementos del problema á tres ejes coorde-

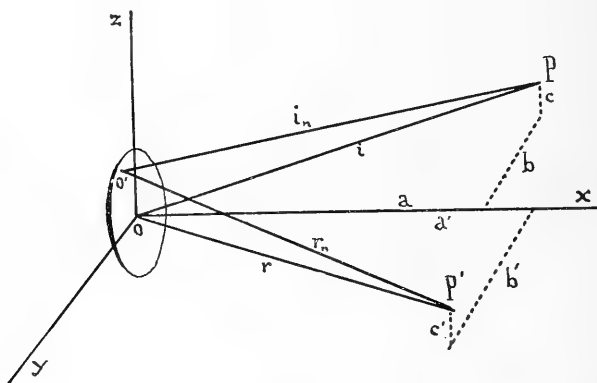


Figura 1.^a

nados rectangulares, tomando por eje de las x el eje principal del espejo, el vértice por origen de coordenadas y por plano de las xz el plano diametral que pasa por el trazo central del rayado; el eje de las y será normal al trazado y podemos expresar la posición de un trazo en función de la coordenada y , pues evidentemente para el trazo n ésimo

$$n = \frac{y}{e}.$$

En la figura 1.^a, P es un punto luminoso, P' su imagen, $PO'P'$ el rayo central, y $PO'P''$ un rayo cualquiera, que incide en el trazo n ésimo en un punto de coordenadas x, y, z ; las coordenadas de P son a, b, c , y las de P' , a', b', c' ;

designamos con i y r las longitudes PO y $P'O$, y por i_n y r_n las PO' y $P'O'$.

Para que estos dos rayos formen imagen en P' , se ha de verificar que

$$i_n + r_n = i + r \pm mn\lambda$$

ó bien

$$i_n + r_n = i + r \pm \frac{m\lambda}{e} y. \quad [1]$$

Expresemos los caminos ópticos en función de las coordenadas de los puntos extremos, para lo que tenemos las conocidas expresiones

$$\begin{aligned} i_n^2 &= (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 \\ r_n^2 &= (a' - x)^2 + (b' - y)^2 + (c' - z)^2 \end{aligned}$$

que podemos escribir

$$i_n^2 = i^2 - 2b y - 2c z - 2a x + x^2 + y^2 + z^2 \quad [2]$$

$$r_n^2 = r^2 - 2b' y - 2c' z - 2a' x + x^2 + y^2 + z^2 \quad [3]$$

puesto que

$$i^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{y} \quad r^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Pero siendo el resalto esférico, y llamando ρ al radio de la esfera, tendremos para ecuación de la superficie del resalto

$$2\rho x = x^2 + y^2 + z^2$$

y reemplazando el valor de x en la [2], resulta

$$\begin{aligned} i_n^2 &= i^2 - 2by - 2cz + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)y^2 + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)z^2 + \\ &\quad + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)x^2. \quad [4] \end{aligned}$$

Desarrollando en serie esta expresión se obtiene

$$i_n = i - \frac{b}{i} y - \frac{c}{i} z + \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) (y^2 + z^2 + x^2) - \\ - \frac{1}{2i^3} (by + cz)^2 + \frac{b}{2i^3} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) y^3 - \frac{b^3}{2i^5} y^3 + \dots$$

ó bien, ordenando

$$i_n = i - \frac{b}{i} y + \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2}\right) y^2 + \\ + \frac{b}{2i^3} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2}\right) y^3 + \dots - \frac{bc}{i^3} yz - \\ - \frac{c}{i} z + \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2}\right) z^2 + \dots - \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) x^2 + \dots$$

Análogamente obtendríamos el valor r_n desarrollando la [3], y el camino óptico vendría expresado por

$$i_n + r_n = i + r - \left(\frac{b}{i} + \frac{b'}{r}\right) y + \\ + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2}\right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{b'^2}{r^2}\right) \right] y^2 + \dots \\ + \left[\frac{b}{2i^3} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2}\right) + \frac{b'}{2r^3} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{b'^2}{r^2}\right) \right] y^3 + \dots \\ + \left(\frac{bc}{i^3} + \frac{b'c'}{r^3}\right) yz \dots - \left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r}\right) z + \\ + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2}\right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2}\right) \right] z^2 + \dots \\ + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho}\right) \right] x^2 + \dots \quad [5]$$

Este valor sustituido en la ecuación fundamental [1] nos da

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{i} + \frac{b'}{r} \pm \frac{m\lambda}{e} \right) y - \\ & - \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{b'}{r^2} \right) \right] y^2 + \dots \\ & \quad + \left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} \right) z - \\ & - \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z^2 + \dots \\ & \quad + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} \right) \right] x^2 + \dots = 0 \quad [6] \end{aligned}$$

Ahora bien; si esta ecuación se verificase para cualquier valor de x, y, z , ó lo que es lo mismo, para cualquiera que sea el rayo incidente i_n que se considere, todos los rayos luminosos concurrirán á formar una imagen perfecta en el punto P' y el sistema sería estigmático. Prácticamente el sistema lo será, y la definición de la imagen se considerará como buena, cuando los coeficientes del desarrollo [6] sean nulos hasta aquellos términos cuyo valor no exceda á $1/4$ de la longitud de onda de la radiación luminosa que se considere.

En la imposibilidad de anular simultáneamente todos los coeficientes del desarrollo [6], vamos á dividir el problema en dos partes, considerando en primer lugar la imagen formada por todos los rayos situados en el plano de las xy , y en segundo la acción de todos los rayos luminosos que inciden en un mismo trazo, que para más sencillez escogemos el trazo central. Esto equivale á estudiar la incidencia en dos secciones meridianas del resalto normales entre sí.

* * *

Para establecer la posición de las imágenes espectrales de los diversos órdenes, es clásico el considerar tan sólo una sección normal al rayado del resalto, buscando la imagen que definen los rayos luminosos situados en el plano de las $x y$. En este caso $z=0$, y tomando el punto luminoso en el mismo plano $x y$, también $c=0$ y la ecuación [6], se escribirá

$$\left(\frac{b}{i} + \frac{b'}{r} \pm \frac{m\lambda}{e}\right)y - \left[\frac{1}{2i}\left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2}\right) + \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{b'^2}{r^2}\right)\right]y^2 - \left[\frac{1}{2i}\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) + \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{a'}{\rho}\right)\right]x^2 \dots = 0 \quad [7]$$

Como buscamos la posición de la imagen con una precisión prácticamente aceptable, limitemos esta expresión en los términos de segundo orden; y teniendo en cuenta que x es de segundo orden respecto á y , ó bien el término x^2 es de cuarto orden, se obtendrá

$$\left(\frac{b}{i} + \frac{b'}{r} \pm \frac{m\lambda}{e}\right)y - \left[\frac{1}{2i}\left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{b^2}{i^2}\right) + \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{b'^2}{r^2}\right)\right]y^2 = 0.$$

Esta ecuación exige para que todos los rayos concurren en P' , esto es, para ser independiente del valor de y , que los coeficientes sean nulos. Tenemos, pues, las ecuaciones de condición

$$\frac{b}{i} + \frac{b'}{r} = \pm \frac{m\lambda}{e} \quad [8]$$

$$\frac{a}{i}\left(\frac{a}{i^2} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{a'}{r}\left(\frac{a'}{r^2} - \frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad [9]$$

que nos permiten calcular la posición de la imagen, puesto que nos determinan las coordenadas $a' b'$ de la imagen en función de las del foco $a b$ y del radio del resalto ρ . Las distancias i y r las eliminaríamos mediante las relaciones

$$i^2 = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad r^2 = a'^2 + b'^2.$$

que hemos utilizado al escribir la [9].

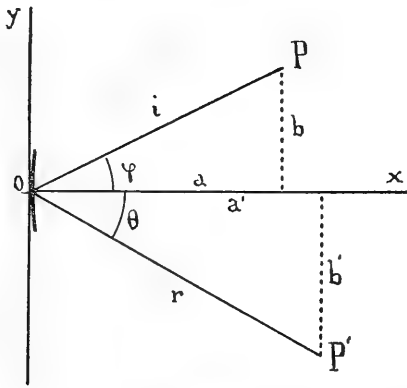


Figura 2.^a

Pasando á coordenadas polares, para lo que basta observar en la figura 2.^a que

$$\begin{aligned} a &= i \cos \varphi & b &= i \sin \varphi \\ a' &= r \cos \theta & b' &= r \sin \theta \end{aligned}$$

tendremos para la [8]

$$\sin \varphi + \sin \theta = \pm \frac{m \lambda}{e} \quad [10]$$

Esta fórmula nos permite determinar la dirección del rayo difractado, y coincide con la tan conocida de los resaltos planos. Es la que se utiliza para fijar la dirección en que ha

de situarse el micrómetro ocular ó la placa fotográfica de un espectrógrafo

La segunda ecuación [9] se convierte, hechas las sustituciones de a y a' , en

$$\cos \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{i} - \frac{1}{\rho} \right) + \cos \theta \left(\frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad [11]$$

que nos da, despejando r , la conocida expresión de Rowland,

$$r = \frac{\rho i \cos^2 \theta}{i (\cos \theta + \cos \varphi) - \rho \cos^2 \varphi} \quad [12]$$

valor de la distancia á que se forma la imagen.

Conocidos ya los elementos que fijan la posición de la imagen formada por los rayos situados en el plano xy , el problema para éstos estará resuelto si la influencia de los términos despreciados en el desarrollo de $i_n + r_n$ no producen aberraciones que dañen la buena definición de la imagen. Punto es este que no discutiremos en la presente nota; en cambio, necesitamos recordar que la segunda ecuación de condición [9] puede satisfacerse mediante una sencilla disposición experimental: consiste ésta en situar la rendija del espectrógrafo sobre una circunferencia de radio $\rho/2$, en cuyo caso tendríamos

$$a \rho = i^2 \quad \text{ó} \quad \frac{a}{i^2} - \frac{1}{\rho} = 0$$

y por la [9] habría de ser

$$a' \rho = r^2,$$

esto es, que la imagen se forma sobre la misma circunferencia (*). Además, vemos que m y λ , sólo influyen en la

(*) En la ecuación [11] tendríamos de igual modo $i^2 = \rho \cos \varphi$, $r = \rho \cos \theta$.

dirección del rayo [8]; pero no en el radio de la circunferencia donde se forma la imagen, por lo que esta disposición permite obtener simultáneamente los espectros de diversos órdenes enfocados sobre la misma circunferencia.

De aquí se deduce la instalación general de un espectrógrafo de resalto cóncavo: Se coloca el resalto tangente á un círculo de radio $\rho/2$, siendo por lo tanto su eje principal diámetro de dicha circunferencia y de modo que el rayado sea normal al plano del círculo; sobre un punto de ésta se sitúa la rendija y el ocular describe esta misma circunferencia, permitiendo observar cualquier línea de un espectro cualquiera. Si en vez de ocular se emplea placa fotográfica, conviene dar á ésta una curvatura de radio $\rho/2$, con lo que se consigue enfocar simultáneamente toda la placa.

Pero en la práctica para instalar un resalto, deben buscarse aquellas disposiciones particulares que, por los valores de φ y θ escogidos, permitan conseguir mayor número de ventajas en cuanto se refiere á la definición de la imagen, dispersión del espectro, facilidad en la identificación y medida de líneas é incluso mayores facilidades mecánicas y materiales de la construcción.

Citaremos tres disposiciones para las cuales hemos de calcular el astigmatismo: la clásica de Rowland, que sitúa el ocular ó la placa fotográfica en el extremo del eje principal del resalto, y corresponde al caso teórico $\theta = 0$; la que sitúa la rendija en dicho punto, $\varphi = 0$; y la montura en autocolimación (*) para la que $\theta = \varphi$.

*
* *

Estudiada ya la imagen que define un haz plano de rayos normal al rayado, vamos ahora á considerar los rayos que

(*) Véase *Eagle. On a new mountig for a concave grating. Astroph. J. V. XXXI, pág. 120.*

caen sobre un mismo trazo, ó rayos situados en un plano normal al xy . Tomemos para más sencillez el trazo central, lo que equivale á tomar para los puntos del resalto las dos únicas variables xz , puesto que para todos los puntos de incidencia de los diversos rayos $y = 0$.

No existiendo fenómeno de difracción entre ellos, puesto que todos concurren á la formación de la misma imagen, los caminos han de ser idénticos, esto es,

$$i_n + r_n = i + r \quad [13]$$

y como en este caso $y = 0$, la expresión general del camino óptico [5] será

$$\begin{aligned} i_n + r_n = & i + r - \left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} \right) z + \\ & + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z^2 + \dots \\ & + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} \right) \right] x^2 + \dots \end{aligned}$$

valor que exige para que se verifique la [13] que

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} \right) z + \\ & + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z^2 + \dots \\ & + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} \right) \right] z^2 \dots = 0. \end{aligned}$$

Limitándonos á los términos de segundo orden, puesto que x^2 es de cuarto orden respecto á z , obtenemos la ecuación de condición

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} \right) z + \\ & + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z^2 = 0 \quad [14] \end{aligned}$$

que habiendo de verificarse para todos los rayos ha de ser independiente de z , y , por lo tanto,

$$\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} = 0 \quad [15]$$

$$\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a'}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) = 0. \quad [16]$$

Estas ecuaciones nos permiten determinar las coordenadas c' y a' de la imagen. La coordenada b , ó bien en polares el ángulo con el eje de las x en el plano xy , se conoce al suponer que estos rayos concurren á la formación de la imagen directa ó de la difractada de un orden dado [10].

En cuanto al significado geométrico de las dos emanaciones [15] y [16], si w es el ángulo que forma el rayo central incidente con el plano de las xy , y w' el que forma el rayo r , podemos escribir la [15]

$$\text{sen } w + \text{sén } w' = 0$$

ecuación que nos determina w' ; y la [16] nos dice que ambos puntos, foco é imagen, se encuentran sobre la misma superficie

$$\frac{a^2 + b^2}{i^2} - \frac{a}{\rho} = 0$$

en cuyo caso se satisfará la [16].

Pero al instalar un espectrógrafo se impone á la rendija la condición de estar situada sobre una circunferencia de radio $\rho/2$, de modo que el punto central de dicha rendija ha de satisfacer á las ecuaciones

$$c = 0 \quad \text{y} \quad a = r \cos \varphi = \rho \cos^2 \varphi;$$

luego para el punto central de la rendija como foco, la imagen vendrá determinada por las [15] y [16], que en este caso se reducen á

$$c' = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\text{sen}^2 \varphi}{i} + \frac{\rho - a'}{r \rho} = 0 \quad [17]$$

la primera nos dice que el punto imagen se encuentra sobre el plano xy , y la [17] nos determina su distancia r al resalto ó su coordenada a' .

Podemos, en efecto, escribir la [17]

$$r \rho \text{sen}^2 \varphi + i \rho - i a' = 0$$

y como

$$i = \rho \cos \varphi \quad \text{y} \quad a' = r \cos \theta.$$

tendremos

$$r \text{sen}^2 \varphi + \rho \cos \varphi = r \cos \varphi \cos \theta,$$

de donde

$$r = \frac{\rho \cos \varphi}{\cos \varphi \cos \theta - \text{sen}^2 \varphi} = \frac{\rho}{\cos \theta - \text{sen} \varphi \text{tg} \varphi} \quad [18]$$

ó bien

$$a' = \frac{\rho \cos \theta}{\cos \theta - \text{sen} \varphi \text{tg} \varphi}. \quad [19]$$

Comparando la fórmula [18] que nos determina la distancia á que se forma la imagen con la obtenida para los rayos del plano xy , $r = \rho \cos \theta$, vemos que ambas expresiones son distintas, y, por lo tanto, el sistema es astigmático.

La figura adjunta nos da una representación gráfica del fenómeno: el punto P' es la imagen de P formada por el haz plano de rayos luminosos normal al rayado, y P_1 la imagen

que forman los rayos del haz POO_1 que inciden en el trazo OO_1 . El astigmatismo quedará determinado cuando conozcamos $P'P_1$, y la longitud de las focales $P'K'$ y P_1K_1 ; pero evidentemente por la [18]

$$P_1P' = OP_1 - OP' = \frac{\rho}{\cos \theta - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} - OP'$$

y como $OP' = \rho \cos \theta$, por estar P' sobre la circunferencia de radio $\rho/2$ tendremos

$$\begin{aligned} P_1P' &= \frac{\rho}{\cos \theta - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} - \rho \cos \theta = \\ &= \frac{\rho \cos \theta (\operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \theta - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} \end{aligned}$$

expresión general de la distancia entre ambas imágenes y medida, por lo tanto, del astigmatismo del sistema. General-

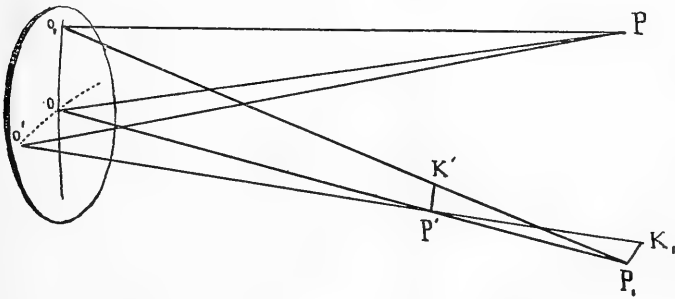


Figura 3.^a

mente, es de mayor interés el conocimiento de las dimensiones de la focal $P'K'$, que nos da la línea espectral sobre la placa fotográfica colocada en P' ; estas dimensiones, adoptadas como medida del astigmatismo, se deducen inmediatamente de la expresión anterior, pues, como se ve en la figura

$$\frac{P'K'}{OO_1} = \frac{P_1P'}{OP_1}$$

y sustituyendo valores

$$P' K' = O O_1 \cos \theta (\sin \theta \operatorname{tg} \theta + \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi),$$

esto es, que las líneas espectrales producidas por un punto P en un resalto cuyo rayado tiene la longitud l valen

$$l \cos \theta (\sin \theta \operatorname{tg} \theta + \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi). \quad [20]$$

Aplicando esta fórmula á diversas formas particulares de monturas espectrográficas tendremos que: si la rendija está en el extremo del eje $\varphi = 0$ y el astigmatismo valdrá

$$l \cos \theta \sin \theta \operatorname{tg} \theta = l \operatorname{sen}^2 \theta; \quad [21]$$

en la disposición clásica de Rowland, $\theta = 0$, y tendremos para dicho valor

$$l \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi; \quad [22]$$

y en la montura en autocolimación $\varphi = \theta$, y el astigmatismo es

$$2 l \cos \varphi \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi = 2 l \operatorname{sen}^2 \varphi \quad [23]$$

Para comparar entre sí estos valores expresémoslos en función de λ y el orden del espectro. Tenemos para la [21] siendo $m n \lambda = \operatorname{sen} \theta$

$$l m^2 n^2 \lambda^2$$

y análogamente para la [22]

$$\frac{l m^2 n^2 \lambda^2}{\sqrt{1 - m^2 n^2 \lambda^2}},$$

así como para el caso de autocolimación, siendo $m n \lambda = 2 \operatorname{sen} \varphi$

$$\frac{l m^2 n^2 \lambda^2}{2}.$$

Estas expresiones nos dicen que el astigmatismo tiene menor valor en la última disposición, siendo mayor que en las otras dos, en la forma clásica de Rowland, puesto que

$$\sqrt{1 - m^2 n^2 \lambda^2} < 1$$

A continuación damos un cuadro comparativo de los valores del astigmatismo en cada uno de los tres casos estudiados.

Valores del astigmatismo

$$(\lambda = 5.000 \text{ \AA})$$

MONTURA	$\theta = 0$		$\varphi = 0$		$\varphi = \theta$	
	$n = 15\ 000$	$n = 20.000$	$n = 15.000$	$n = 20\ 000$	$n = 15\ 000$	$n = 20.000$
$m = 1.\text{er orden}$	0.091 l	0.169 l	0.087 l	0.155 l	0.044 l	0.078 l
2.º —	0.432	1.006	0.349	0.620	0.174	0.310
3.º —	1.691	»	0.785	»	0.392	0.698
4.º —	»	»	»	»	0.698	1.240
5.º —	»	»	»	»	1.090	1.938

Este astigmatismo, debido á los rayos situados fuera del plano de las xy , puede anularse mediante una colocación adecuada del foco; todo se reduce á situar la placa fotográfica en el punto P , tomado antes como foco, y colocada la rendija en P' no enfocar sobre ella el foco luminoso, sino formar una imagen de él delante de la rendija en P_1 , esto es, á la distancia $P_1 P'$ antes calculada.

Apliquemos las fórmulas obtenidas á cada una de las instalaciones indicadas.

Si fuera $\varphi = 0$, tendríamos [19] y [18]

$$a' = \rho \quad r = \frac{\rho}{\cos \theta};$$

luego el foco conjugado del extremo P del eje principal se forma (fig. 4.^a) en el punto de encuentro P_1 de la normal $P_1 P$ al extremo del radio con el rayo luminoso $r = OP'$. Luego podemos anular el astigmatismo, colocando en P la

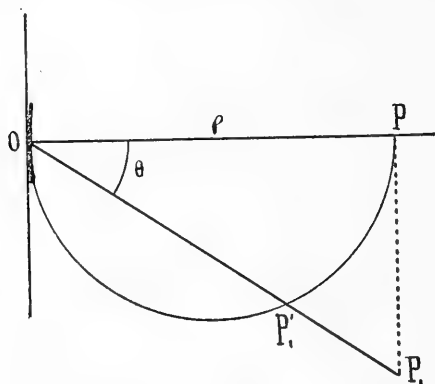


Figura 4.^a

placa fotográfica y enfocando la imagen cuyo espectro que-remos obtener delante de la rendija, á una distancia

$$P' P_1 = \frac{\rho}{\cos \theta} - \rho \cos \theta = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$$

Esta disposición es la aconsejada por Sirks (*), clásica ya en estos trabajos.

Si en vez de $\varphi = 0$ suponemos $\theta = 0$, tendremos

$$r = a' = \frac{\rho}{1 - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi}$$

(*) Por distinto procedimiento estudia el astigmatismo y deduce esta fórmula en el t. XIII *As. et Astroph.*, pág. 967.

esto es, que el punto luminoso situado en la circunferencia á un ángulo φ del eje del resalto, formaría su imagen estigmática sobre dicho eje en un punto situado á la distancia r , y, por lo tanto, se corregirá el astigmatismo, situada la rendija en el extremo del diámetro eje del resalto, enfocando la imagen que sirve de foco delante de ella á una distancia de la misma

$$\frac{\rho}{1 - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} - \rho = \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi}.$$

Esta distancia es mayor que en la anterior disposición, por lo que es preferible, para corregir el estigmatismo, situar la placa en el extremo del diámetro.

Examinando el caso de montura en autocolimación, vemos que, siendo $\varphi = \theta$

$$r = \frac{\rho}{\cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\rho \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

y para corregir el astigmatismo, el foco se habría de situar á una distancia de la rendija

$$d = \frac{\rho \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi} - \rho \cos \varphi = \frac{2 \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \varphi}. \quad (*)$$

Comparando el resultado obtenido en la montura de Rowland con éste, vemos que la corrección experimental del astigmatismo no es tan práctica en el caso de autocolimación, pues el valor de d aumenta rápidamente con φ , y, por lo tanto, con el orden del espectro, siendo teóricamente (**)
 $d = \infty$ para $\varphi = 45^\circ$.

* * *

(*) Eagle, loc. cit.

(**) Podemos escribir, $d = \rho \operatorname{sen} \varphi \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} 2 \varphi$.

El valor del astigmatismo podemos también deducirlo directamente de la expresión del camino óptico

$$i_n + r_n = i + r - \left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} \right) z + \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z^2,$$

determinando la coordenada c' sobre la placa fotográfica, situada según hemos convenido en la circunferencia de radio $\frac{\rho}{2}$. Esto nos permite tratar con más generalidad el problema, aplicándolo al caso de rendija finita.

Puesto que hemos visto que la imagen es astigmática, busquemos sobre dicha circunferencia la imagen que produce un pincel luminoso infinitamente estrecho correspondiente á un punto de incidencia de coordenada z . Esto equivale á buscar la intersección del rayo $i_n + r_n$, que incide en z , con el infinitamente próximo.

Pero la variación del camino óptico al pasar al rayo inmediato podemos expresarla, diferenciando dicho camino, por

$$-\left(\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} \right) + \left[\frac{1}{i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z,$$

y para que estos dos rayos del pincel formen imagen, han de ser concordantes, esto es, que la variación del camino óptico ha de ser nula, luego

$$-\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} - \left[\frac{1}{i} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c^2}{i^2} \right) + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{\rho} - \frac{c'^2}{r^2} \right) \right] z = 0$$

ó bien

$$\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} - \left[\frac{1}{i} \left(\frac{b^2}{i^2} + a \left(\frac{a}{i^2} - \frac{1}{\rho} \right) \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{b'^2}{r^2} + a' \left(\frac{a'}{r^2} - \frac{1}{\rho} \right) \right) \right] z = 0$$

y como buscamos la imagen sobre la placa situada en el círculo de diámetro ρ , $a \rho = i^2$ y $a' \rho = r^2$; y, por lo tanto,

$$\frac{c}{i} + \frac{c'}{r} - \left(\frac{b^2}{i^3} + \frac{b'^2}{r^3} \right) z = 0$$

ó en coordenadas polares

$$\frac{c}{\rho \cos \varphi} + \frac{c'}{\rho \cos \theta} = \left(\frac{\text{sen}^2 \varphi}{\rho \cos \varphi} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\rho \cos \theta} \right) z$$

ó bien

$$\frac{c'}{\cos \theta} = \left(\frac{\text{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \right) z - \frac{c}{\cos \varphi}. \quad [24]$$

Esta ecuación nos da la coordenada c' de la imagen en función de la longitud del rayado y de la coordenada c de la rendija, puesto que se deduce inmediatamente de la [24]

$$c' = z \cos \theta (\text{sen} \varphi \text{tg} \varphi + \text{sen} \theta \text{tg} \theta) - c' \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}. \quad [25]$$

Si se trata del punto medio de la rendija $c' = 0$, y, por consiguiente, al astigmatismo en un resalto cuyo rayado tiene la longitud l , valdrá

$$l \cos \theta (\text{sen} \varphi \text{tg} \varphi + \text{sen} \theta \text{tg} \theta)$$

que es la misma expresión anteriormente obtenida, por lo que no hemos de repetir su discusión.

La fórmula [25] nos resuelve el problema general, pues si la rendija tiene dimensiones finitas, basta determinar los valores de c' correspondientes á los extremos de la rendija.

Llamando h á la longitud de ésta, tendremos $c = \pm \frac{h}{2}$ y la longitud total de la imagen será

$$l \cos \theta (\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta \operatorname{tg} \theta) + h \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}. \quad [26]$$

La longitud de la rendija aumenta la luminosidad de la imagen, pero no se produce efecto alguno, sino aumentar inútilmente la longitud de la imagen cuando la longitud de la rendija alcanza cierto límite. En el caso general este valor límite se deduce de la igualdad

$$h \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} = l \cos \theta (\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta \operatorname{tg} \theta)$$

que da

$$h = l \cos \varphi (\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin \theta \operatorname{tg} \theta)$$

puesto que este valor de h duplica las dimensiones de la imagen y para valores superiores no se consigue superposición mayor de rayos, ni aumento en la luminosidad.

En los casos particulares que hemos estudiado, tendremos:

Si $\varphi = 0$, la longitud total de la imagen es

$$l \sin^2 \theta + h \cos \theta.$$

Si $\theta = 0$, esto es, en la disposición de Rowland se obtendrá para dicha longitud

$$l \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{h}{\cos \varphi}$$

y el valor límite de la altura de la rendija es

$$h = l \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

En el caso de autocolimación $\varphi = \theta$, y se obtiene

$$2 l \operatorname{sen}^2 \varphi + h$$

con el valor límite

$$h = 2 l \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Observatorio Astronómico, Abril, 1912.

XXXI.—**Mirmeleónido (Ins. Neur.) nuevo de
Canarias**

POR EL R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

La especie que voy á describir como nueva, ya era conocida hacía muchos años de Canarias, pero con nombre equivocado, por habérsela confundido con otra, por lo que, siendo en realidad distinta, precisa darla á conocer con nombre distinto.

Myrmeleon Cabreray sp. nov.

Similis cinereo Klug.

Caput fronte testaceo-pallida, puncto ad medium clypei et duobus ad labrum fuscis; palpis flavis, labialibus articulo ultimo crasso, fusco, nitente; fronte fusca; vertice et occipite testaceis, fusco maculatis; oculis globosis, fuscis; antennis thorace brevioribus, primo articulo flavo, clava dilatata, fusco-rufa.

Thorax fuscus, marginibus flavidis. Prothorax paulo latior quam longior, breviter pilosus antrorsum leviter angustatus.

Abdomen fuscum, griseo-pilosum.

Pedes flavidi, femoribus anterioribus et posterioribus in medio apicali, intermediis linea dorsali, fuscis; tibiis anterioribus fuscatis, posterioribus linea inferna fusca; calcaribus rectis, testaceis, primo tarsorum articulo brevioribus; tarsis pallidis, apice articularum fusco.

Alæ hyalinæ, reticulatione subtota fusca, stigmatibus flavescens, parum sensibili.

Ala anterior venis subcosta, radio, procubito et cubito fla-

vido interruptis; area radiali 9-11 venulis internis; sectore 10 ramis.

Ala posterior subtota flavescente, fusco ad venulas interrupta, radio fusco et flavido vario; sex venulis radialibus ante sectorem; sectore 9 ramis.

Long. corp.	22	mm.
— al. anter.	24	—
— — poster.	22	—

Patria. Tenerife. Varios ejemplares cogidos por D. Anaetael Cabrera, á quien dedico la especie. Los tipos existen en mi colección.

Debe de estar en toda la isla de Tenerife ó acaso en las demás Canarias, pues lo tengo de Candelaria (26 Octubre 1904), El Médano (4 Septiembre 1910), etc.

La sinonimia podrá establecerse así:

Myrmeleon Cabrerai Nav.

— *distinguendus* (= cinereus Klug) Mac Lachl.
nec Ramb.

OBSERVACIÓN. Esta especie se ha citado siempre con el nombre de *Myrmeleon distinguendus* Ramb.

Mac Lachlan (Linnean Journ. Zool. 1882, p. 167) lo citó con este nombre y dió la descripción extensa de la especie á la vista de ejemplares que presumió de Portugal. La especie de nuestra península es ciertamente el *distinguendus* de Rambur, sinónimo del más antiguo *cinereus* Klug.

Siguiendo á tan gran maestro mencioné el *M. distinguendus* con este mismo nombre en mi Catálogo descriptivo de los Neurópteros de las islas Canarias (REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES, de Madrid, Junio 1906), por más que veía alguna diferencia entre los ejemplares de Canarias y los de la península, que poseo en abundancia.

El envío de nuevos ejemplares me ha hecho revisar la especie y producídomé la convicción de que ambas formas eran específicamente distintas.

Como por otra parte el *Myrmeleon distinguendus* Ramb., especie de la región mediterránea, ha de identificarse con el *M. cinereus* Klug., he cotejado los ejemplares de nuestra península con otro de Egipto y con la descripción y figura perfectas de Klug, y no me cabe duda de su identidad específica.

Empero la nueva especie de Canarias no puede identificarse con el *cinereus* Klug. Difiere manifiestamente por la forma del protórax estrechado por delante, y por el color en todo más obscuro. Los segmentos del abdomen no están anillados de amarillo, ó apenas, y las alas, muy pálidas ó amarillentas en el *cinereus*, apenas tienen más que trazos amarillentos en algunas venas en la nueva especie.

Tampoco puede identificarse con el *M. hyalinus* Oliv. de Arabia, más pequeño.

Al *obscurus* Ramb. también se parece algo. Esta especie, de área muy extensa en el continente africano, está muy marcada de leonado en abdomen y alas.

Zaragoza, Febrero, 1912.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
XXVI.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia séptima.	575
XXVII.—La asimetría de los tripletes de Zeeman, por <i>Manuel Martínez-Risco y Macías</i> . (continuación)	600
XXVIII.—Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i> (continuación)	619
XXIX.—Relaciones entre la fórmula estereoquímica de los «Carburos acíclicos» y su calor de combustión, por <i>Ruperto Lobo Gómez</i>	641
XXX.—El astigmatismo de los resaltos cóncavos esféricos, por <i>P. Carrasco</i>	651
XXXI.—Mirmeleónido (Ins. Neur.) nuevo de Canarias, por el <i>R. P. Longinos Navás, S. J.</i>	672

La suscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X. - NÚM. 9.

Marzo de 1912.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 8.

1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXII. — Conferencias sobre Física Matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia octava.

SEÑORES:

Demostramos en la conferencia anterior la existencia, como funciones determinadas y finitas para un punto P , cuyas coordenadas representábamos por x, y, z , de las componentes de la atracción X, Y, Z , de una masa continua de materia ponderable, colocando en dicho punto, desde luego, una masa igual á 1, cuando las atracciones elementales obedecían á la ley newtoniana. Es decir, á la relación $\frac{1}{r^2}$, siendo r la distancia de cada elemento de la masa al punto en cuestión P : y demostrábamos esta proposición, cuando el punto P era interior á la masa.

Pero como ya lo habíamos demostrado para los puntos exteriores, resulta que toda masa continua ó todo sistema de masas continuas ejercen atracciones perfectamente determinadas sobre cualquier punto del espacio interior ó exterior á dichas masas. Estas atracciones son, pues, funciones determinadas y finitas de las coordenadas del punto; no hay que temer ni discontinuidades (como luego veremos), ni indeterminaciones, ni valores infinitos.

Antes al contrario, para puntos situados en el infinito los valores de X, Y, Z son nulos, porque en el denominador, r es igual al infinito y la expresión es cero.

Es inútil repetir, que todas las proposiciones que demostramos son generales, no sólo para masas ponderables, sino

para masas magnéticas ó eléctricas, que pueden ser ya positivas, ya negativas.

Pusimos en evidencia, asimismo, que U era también una función finita y determinada para todo el espacio, es decir, para puntos interiores ó exteriores de las masas continuas, y demostramos, por último, y esto era importantísimo, que dicha expresión

$$U = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}$$

era una potencial también para todo el espacio. En cualquier punto de éste, diferenciándola con relación á x, y, z obteníamos las tres derivadas de U , que multiplicadas por f , daban las tres componentes de la atracción sobre la masa 1:

$$X = f \frac{dU}{dx}, \quad Y = f \frac{dU}{dy}, \quad Z = f \frac{dU}{dz}.$$

Aunque aparentemente U tomaba la forma infinita, y diferenciando bajo el signo integral está apariencia de valor infinito continuaba, la apariencia no era realidad; pues no sólo U era finita y determinada en todo el espacio, sino que lo eran sus tres primeras derivadas, como que expresan, salvo el factor f , las tres componentes X, Y, Z de la atracción, que son finitas y determinadas, según tantas veces hemos dicho.

Y esto nos puede hacer comprender la importancia de la función potencial U para el problema de las atracciones, sin perjuicio de su importancia propia, que aún es mayor.

Pero es importante en la teoría de las atracciones, porque en vez de buscar tres funciones X, Y, Z no hay que buscar más que una, U ; y tres diferenciaciones nos dan las otras tres incógnitas X, Y, Z .

Aquí llegábamos al terminar la conferencia precedente.

Y planteábamos un nuevo problema.

Que la función potencial $U(x, y, z)$ tiene tres primeras derivadas es evidente, porque estas derivadas son precisamente los valores de X, Y, Z , cuya existencia hemos demostrado. Pero se plantea, como acabamos de indicar, un nuevo problema: ¿La función potencial U tiene segundas derivadas? ¿Existen con valores finitos y determinados

$$\frac{d^2 U}{dx^2}, \quad \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{d^2 U}{dz^2}$$

que son tres derivadas segundas fundamentales?

Parece, á primera vista, que el problema es sencillo; no hay más que diferenciar de nuevo la función U .

Hemos obtenido las derivadas primeras, que hemos visto, que, salvo el factor f , son iguales á X, Y, Z ; pues de

$$X = f \frac{dU}{dx}; \quad Y = f \frac{dU}{dy}; \quad Z = f \frac{dU}{dz}$$

se deducen

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{f} X; \quad \frac{dU}{dy} = \frac{1}{f} Y; \quad \frac{dU}{dz} = \frac{1}{f} Z;$$

y no habrá más que diferenciar estas últimas, con relación á x, y, z , y tendremos

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{f} \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{1}{f} \frac{dY}{dy}, \quad \frac{d^2 U}{dz^2} = \frac{1}{f} \frac{dZ}{dz}.$$

De manera, que si conociésemos X, Y, Z en forma finita, no habría más que diferenciar estas expresiones con relación á las variables del punto P , que son x, y, z .

Pero tratando el problema en general, X, Y, Z vienen expresadas por tres integrales:

$$X = f \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \rho d\tau$$

$$Y = f \iiint_V \frac{b-y}{r^3} \rho d\tau$$

$$Z = f \iiint_V \frac{c-z}{r^3} \rho d\tau$$

y se nos presenta el problema de siempre. Para diferenciar estas expresiones, sin obtenerlas bajo forma en que haya

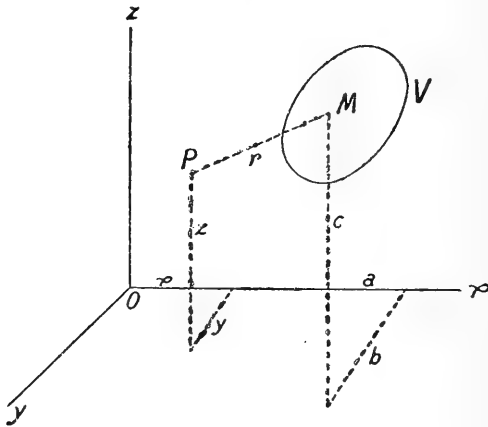


Figura 22

desaparecido la integración, y aun en el caso particular de que los límites son constantes, hay que ver si es legítima la diferenciación bajo el signo integral, lo cual no ofrece duda, como ya hemos visto en otra conferencia, cuando el punto P es exterior á la masa atrayente. Porque si V (fig. 22) es el volumen que contiene la masa ponderable continua, y P es el punto de que se trata, sea cual fuere el punto M á que se refiere el elemento dm , las coordenadas x, y, z del punto P

siempre serán distintas de las coordenadas a, b, c del punto M , por ser aquel exterior y estar M dentro de V .

Nunca podrán ser o á la vez los binomios

$$x - a, \quad y - b, \quad z - c;$$

luego tampoco podrá ser o para ningún punto M , es decir, para ningún elemento de V , y, por lo tanto, para ningún elemento de las integrales, la distancia $PM = r$, que entra en el denominador de la integral; así, pues, ningún elemento de la integral podrá ser infinito. Además, las x, y, z no entran ni en $\rho(a, b, c)$ ni en $d\tau$.

Resulta, pues, que la diferenciación bajo el signo integral de U será legítima, y para obtener, por ejemplo, $\frac{d^2 U}{dx^2}$ bastará

diferenciar, con relación á x , la derivada $\frac{dU}{dx}$ que es igual á

$\frac{1}{f} X$. Es decir, bastará diferenciar X .

Lo mismo podríamos decir respecto á $\frac{d^2 U}{dy^2}$ y $\frac{d^2 U}{dz^2}$.

Tendremos, pues,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{f} \frac{dX}{dx},$$

es decir:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{d \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \rho d\tau}{dx}$$

ó bien

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{\iiint_V d \frac{a-x}{r^3} \rho d\tau}{dx}$$

No queda, pues, más que obtener $\frac{d \frac{a-x}{r^3}}{dx}$ en que r nunca puede ser 0, y tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{a-x}{r^3}}{dx} &= \frac{-r^3 - (a-x) \cdot 3r^2 \frac{dr}{dx}}{r^6} = \\ &= \frac{-r^3 - (a-x) \cdot 3r^2 \frac{-2(a-x)}{2r}}{r^6}, \end{aligned}$$

de donde simplificando,

$$\frac{d \frac{a-x}{r^3}}{dx} = \frac{3(a-x)^2 r - r^3}{r^6} = \frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

y hallaremos para $\frac{d^2 U}{dx^2}$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \iiint_V \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \rho d\tau;$$

y asimismo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dy^2} &= \iiint_V \left(\frac{3(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \rho d\tau \\ \frac{d^2 U}{dz^2} &= \iiint_V \left(\frac{3(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \rho d\tau. \end{aligned}$$

Estos tres valores son determinados y finitos, porque r nunca puede ser igual á 0, y por otra parte ρ es finita en todos los elementos de la integral.

Luego en el caso en que el punto es exterior, existen los tres coeficientes diferenciales de segundo orden, con relación á x, y, z , que hemos expresado.

Precisamente por esta razón podíamos sumar las tres expresiones anteriores y teníamos

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = \iiint_V \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} + \frac{3(b-y)^2}{r^5} + \frac{3(c-z)^2}{r^5} - 3\frac{1}{r^3} \right) \rho d\tau$$

ó bien

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = \iiint_V \left(\frac{3r^2}{r^5} - 3\frac{1}{r^3} \right) \rho d\tau.$$

Y como para todos los elementos de la integral el factor

$$\frac{3r^2}{r^5} - 3\frac{1}{r^3} = 3\frac{1}{r^3} - 3\frac{1}{r^3} = 0$$

es idénticamente nulo, nulo es también el primer miembro y se verificaba para la potencial U la relación

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Por eso afirmamos que para el espacio exterior á las masas continuas la potencial U era una función de x , y , z que satisfacía á la ecuación de Laplace.

*
* *

Pero el razonamiento que precede, que es legítimo cuando el punto P es exterior á la masa atrayente comprendida en V de la figura 22, ya no es legítimo cuando el punto P es interior á la masa que atrae, como en la figura 23; porque habrá infinitos puntos alrededor de P , como el M , infinitamente próximos á P ; y á medida que consideremos puntos más próximos á este último, los M tenderán á P , las distancias r tenderán á 0, tendiendo a , b , c á x , y , z , y la integral triple dejará de tener un sentido claro y perfecto, y bien

determinado por el valor infinito del elemento que corresponde á $r = 0$.

La expresión que antes hemos obtenido

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \iiint_V \left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \rho a \tau$$

y lo mismo las

$$\frac{d^2 U}{dx^2} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 U}{dy^2}$$

carecerán de sentido y no podremos emplearlas para demostrar ningún problema; ni nos demuestran tampoco que la

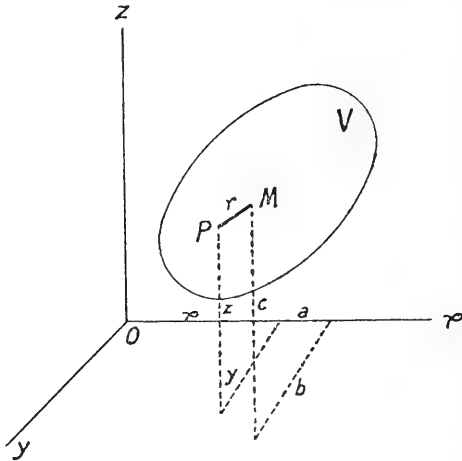


Figura 23

potencial U , en el caso del punto interior, tenga segundas derivadas.

Los términos

$$\frac{3(a-x)^2}{r^5}, \frac{3(b-y)^2}{r^5}, \frac{3(c-z)^2}{r^5} \text{ y } -\frac{1}{r^3}$$

para $r = 0$ se convierten en $\frac{0}{0}$ y en $-\infty$.

Y que esta forma no es solamente aparente, sino que constituye caso de excepción para las tres derivadas segundas, se demuestra substituyendo á las coordenadas x, y, z las coordenadas polares que ya hemos obtenido y por las que x, y, z se expresan de este modo:

$$\begin{aligned} a - x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ b - y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ c - z &= r \cos \theta \\ d\tau &= r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Consideremos, por ejemplo, $\frac{d^2 U}{dx^2}$; y lo que de esta derivada digamos podríamos decir de las otras dos.

Substituyendo en el anterior valor de $\frac{d^2 U}{dx^2}$, obtenido por la diferenciación bajo el signo integral de $\frac{X}{f}$, los valores de $a - x$ y $d\tau$ tendremos

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \iiint_V \left(\frac{3r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

ó bien

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \iiint_V \frac{3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1}{r} \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

y como

$$\frac{3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1}{r} \text{ para } r=0$$

es infinito, toda vez que el numerador no es igual á 0 constantemente y, por lo tanto, no cabe la indeterminación, resulta, como decíamos, que no es aplicable á este caso la diferenciación bajo el signo integral.

Tampoco, por otra parte, podemos afirmar todavía que no existá dicho coeficiente diferencial. Lo único que pode-

mos asegurar es, que no puede ponerse bajo la forma anterior en el caso en que el punto P esté en el interior de la masa continua.

*
* *

Para desvanecer la duda y salvar la dificultad se ha acudido, en el método que vamos á exponer, á un artificio sumamente ingenioso; pero no de aquellos que de antemano ocurren y que están indicados, por decirlo de este modo, por la naturaleza del problema.

Para hallar el segundo coeficiente diferencial, si existe, hemos visto que hay que diferenciar con relación á x , si por ejemplo se trata de la segunda derivada $\frac{d^2 U}{dx^2}$, la primera derivada $\frac{dU}{dx}$ cuyo valor es $\frac{X}{f}$, ó si se quiere, dado el valor general que hemos obtenido para X ,

$$\iiint_V \frac{a-x}{r^3} \rho d\tau.$$

Esta es la integral, pues, que debemos diferenciar.

Pero antes observemos, y aquí está el artificio, que

$$\frac{a-x}{r^3} = - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{da},$$

porque en efecto

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{da} &= \frac{d \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}}{da} = \\ &= \frac{-\frac{d\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}{da}}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = \frac{-2(a-x)}{r^3} \end{aligned}$$

ó bien

$$\frac{\left(\frac{d}{da} \frac{1}{r} \right)}{da} = - \frac{a-x}{r^3}$$

de donde

$$\frac{a-x}{r^3} = - \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{da}$$

• El segundo miembro no es más que una forma algebraica del primero.

Luego el factor que está bajo el signo integral podrá ponerse en esta forma:

$$\frac{a-x}{r^3} \rho = - \rho \frac{d}{da} \frac{1}{r}$$

Agregando y restando al segundo miembro $\frac{1}{r} \frac{d\rho}{da}$, que tiene un sentido perfecto, puesto que la densidad ρ es, como su derivada, función continua de a, b, c , tendremos:

$$\frac{a-x}{r^3} \rho = - \rho \frac{d}{da} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da}$$

Pero los dos primeros términos son evidentemente la diferencial con relación á a del producto $-\rho \frac{1}{r} = -\frac{\rho}{r}$; luego

$$\frac{a-x}{r^3} \rho = - \frac{d}{da} \frac{\rho}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da}$$

y substituyendo este valor en la integral triple, resultará

$$\frac{dU}{dx} = - \iiint_V \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{da} d\tau + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau,$$

y fijémosnos en la primera integral triple, prescindiendo del signo, es decir, en

$$\iiint_V \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{da} da db dc$$

en la que hemos puesto en vez de $d\tau$ su valor $da db dc$.

Esta es una integral de volumen, puesto que se refiere al volumen V , y vemos desde luego, que puede transformarse en una integral de superficie, aplicando el teorema de Green que explicamos en el curso anterior.

Establecimos, en efecto, en el curso de 1909 á 1910, página 103, la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S (F\alpha + G\beta + H\gamma) d\sigma. \end{aligned}$$

En aquella ocasión las variables de un punto cualquiera del interior del volumen, las representábamos por x, y, z .

En el caso actual las hemos representado por a, b, c ; para evitar toda confusión, volvamos á escribir la fórmula precedente con este cambio de notaciones.

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{dF}{da} + \frac{dG}{db} + \frac{dH}{dc} \right) da db dc = \\ = \iint_S (F\alpha + G\beta + H\gamma) d\sigma. \end{aligned}$$

Explicábamos minuciosamente, que esta fórmula de Green, era tan sólo una fórmula de transformación, que por la forma que suponíamos para el primer miembro, podía efectuarse una primera integración para cada término, convirtiendo de este modo la integral de volumen en integral de superficie, y transformando el primer miembro en el segundo.

En este segundo miembro α, β, γ , representan los cosenos de los ángulos, que forma con los ejes en un punto cualquiera de s la normal exterior en dicho punto á la superficie; así como $d\sigma$ representa el área infinitamente pequeña de superficie, correspondiente á este mismo punto.

Tal es la fórmula que vamos á aplicar á la integral de volumen.

$$\iiint_V \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{da} da db dc,$$

cuya forma es precisamente la del primer miembro de la fórmula de Green, que acabamos de escribir.

Entra en ésta, la derivada con relación á a de una función $\frac{\rho}{r}$ que es función de a, b, c porque lo son el numerador y el denominador. Verdad es que no entran las derivadas con relación á b, c ; pero esto, lo que prueba es que se trata de un caso particular de dicha fórmula de Green.

Si en la fórmula general hacemos $G = 0, H = 0$ se reduce á

$$\iiint_V \frac{dF}{da} da db dc = \iint_S F\alpha, d\sigma$$

cuyo primer miembro coincide con el de nuestro caso, haciendo

$$F = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho(a, b, c)}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} = F(a, b, c):$$

las x, y, z son aquí como parámetros respecto á la integración.

En suma, la aplicación de la fórmula de Green á la integral que consideramos, daría

$$\iiint_V \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{da} da db dc = \iint_S \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma \quad (A)$$

Y sin embargo, esta aplicación directa de la fórmula de Green no es legítima.

Porque al demostrar la fórmula en cuestión, suponíamos que todas las transformaciones empleadas podían emplearse, y suponíamos, por lo tanto, que F, G, H eran funciones finitas, continuas y bien determinadas; y esto no sucede en el caso actual, porque F , que es $\frac{\rho}{r}$, toma el valor infinito

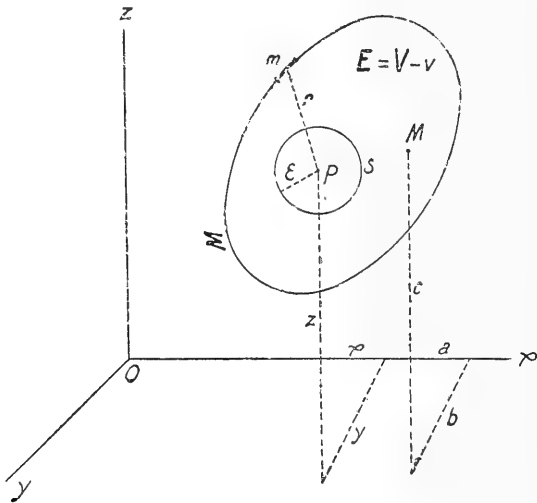


Figura 24

cuando el punto (a, b, c) coincide con el x, y, z , puesto que r se reduce á 0, y $\frac{\rho}{r}$ á ∞ .

Para aplicar la fórmula de Green á este caso, hay que acudir á un artificio que es sencillo y natural, y que á cualquiera le ocurre, á saber: *aislar la dificultad*, por decirlo de este modo.

Es un artificio que hemos usado muchas veces, y que seguiremos usando en adelante.

Puesto que el caso de excepción reside en el punto P (fig. 24) rodeemos este punto de una esfera infinitamente pe-

queña s , cuyo radio representaremos por ϵ , y no consideremos para la aplicación del teorema de Green más que el espacio comprendido entre el volumen V , limitado por la superficie Σ , y el volumen v , limitado por la esfera s .

A este volumen $E = V - v$, se le puede aplicar, sin dificultad alguna, el teorema de Green, porque todos los puntos de la integración, por ejemplo M , comprendidos en dicho espacio E , jamás pueden confundirse con P ; siempre los separa la esfera s , y nunca, por lo tanto, r puede reducirse á 0 .

Vamos, pues, á aplicar el teorema de Green al espacio E comprendido entre Σ y s . No es ésta, precisamente, la integral que nos interesa, que es la de todo el volumen; pero E tenderá hacia ella á medida que la esfera s tienda á anularse.

Bien veo que desciendo en mis explicaciones á minuciosidades excesivas; pero no se olvide que estas conferencias son conferencias *para la enseñanza*, y que si para los maestros, á los cuales ni mis conferencias ni mis libros se dedican, ciertas minuciosidades son hasta enojosas; el que por primera vez estudia una materia, agradece que se le separen del camino, no sólo los grandes obstáculos, sino hasta las pequeñas piedrecillas.

Y continuemos nuestras explicaciones.

*
* * *

Como vamos á aplicar la fórmula de Green al espacio $E = V - v$, comprendido entre las superficies Σ y s , la superficie que limita este sólido E estará formada de dos partes: una exterior, Σ , y otra interior, s .

De suerte, que en la fórmula de transformación de Green, el primer miembro se referirá al volumen $V - v$, y el segundo miembro comprenderá dos partes superficiales: una relativa á la superficie Σ , otra, á la superficie s .

Tendremos, pues, que en vez de la fórmula (A), deberemos emplear la siguiente:

$$\iiint_{V-v} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{da} d\tau = \iint_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma + \iint_S \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma \quad (B)$$

que ya es perfectamente correcta, porque se excluye de ella en ambos miembros el elemento infinito.

La segunda integral doble, la que se refiere á la superficie s que rodea el punto P , puede demostrarse fácilmente que tiende hacia cero, cuando tiende á anularse el radio ϵ de la esfera s .

En efecto, α es, á lo más, igual á la unidad, porque es un coseno; $d\sigma$ es una pequeña porción de área de la esfera; y si llamamos $d\omega$ á la abertura del cono que determina y cuyo vértice esté en el centro, tendremos evidentemente $d\sigma = \epsilon^2 d\omega$.

Además, r es constantemente igual á ϵ ; luego la integral se convertirá en

$$\iint_S \frac{\alpha d\omega \cdot \epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon \iint_S \alpha d\omega.$$

Como la integral doble es finita, la expresión se reduce á 0 cuando se anula ϵ .

En suma, la segunda integral del segundo miembro en la fórmula (B), se anula cuando se anulan v y s , y queda

$$\iiint_{V-v} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{da} d\tau = \iint_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma.$$

Para el valor anterior de $\frac{dU}{dx}$ resulta, pues:

$$\frac{X}{f} = \frac{dU}{dx} = - \iint_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau. \quad (C)$$

Afinando, por decirlo así, la demostración, una duda puede ocurrir, y es ésta: ¿Realmente la integral triple \iiint_{V-v} tenderá hacia \iiint_V cuando r tienda hacia o ? Porque obsérvese que dentro de la integral está r en el denominador, y un elemento de la integral tenderá hacia lo infinito, cuando v tiende hacia o .

Pero esta duda va á quedar desvanecida desde luego con las explicaciones que daremos inmediatamente.

La ecuación (B) es rigurosa. El primer miembro se ha descompuesto en las dos integrales segundas: una relativa á Σ , otra relativa á s . La parte s es la que comprende el elemento infinito, y la primera parte es finita, porque se refiere á la superficie Σ ; pero aquella hemos demostrado, que tiende hacia o , luego el primer miembro tenderá forzosamente hacia $\iint_{\Sigma} \frac{\rho \alpha}{r} d\sigma$, en que por lo demás todas las cantidades que entran r , α , $d\sigma$, Σ , se refieren única y exclusivamente á la superficie exterior Σ .

*
* * *

Y obsérvese que toda esta laboriosa y minuciosa transformación no tiene por objeto más que poner $\frac{X}{f}$, ó si se quiere $\frac{dU}{dx}$, bajo una forma propia para la diferenciación con relación á x .

Que X y $\frac{dU}{dx}$ eran cantidades finitas y determinadas, ya lo sabíamos y ya lo hemos demostrado; y no es esto lo que ahora nos importaba.

Lo que ahora pretendíamos era obtener la derivada se-

gunda $\frac{d^2 U}{dx^2}$, para lo cual nos basta conocer la primera $\frac{dU}{dx}$, que ya la conocíamos; pero ésta no tenía una forma propia para la derivación, porque hemos visto que para los puntos interiores la forma que obtuvimos era infinita.

De manera que lo que hemos hecho hasta ahora, es dar á $\frac{dU}{dx}$ en la ecuación (C) una forma tal, que la diferenciación se efectúa inmediatamente.

En efecto, consideremos la ecuación (C) á que antes hemos llegado

$$\frac{dU}{dx} = - \iint_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau.$$

Examinemos sucesivamente los dos términos del segundo miembro, y veremos que su diferenciación es posible y facilísima.

Diferenciemos ambos miembros y tendremos:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{d \left[- \iint_{\Sigma} \frac{\rho \alpha}{r} d\sigma \right]}{dx} + \frac{d \left[\iiint_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau \right]}{dx} \quad (D)$$

y veamos ahora lo que significan cada una de las partes del segundo miembro.

La integral doble $\iint_{\Sigma} \frac{\rho \alpha}{r} d\sigma$ tiene, precisamente, la forma de una potencial de superficie sobre un punto exterior P , puesto que r va de P á la superficie Σ , y en que la densidad por unidad de área fuese $\rho \alpha$. Esto es evidente: cada elemento de la integral sería el producto de esta especie de densidad ficticia por unidad de área de Σ , multiplicada por la superficie infinitamente pequeña $d\sigma$, es decir, una masa m

(figura 24), colocada en la superficie Σ , dividida por la distancia de m á P ; y esto para todos los elementos de Σ .

Es, pues, sin la menor duda una potencial de superficie, con relación á un punto exterior.

Como todo lo que hemos explicado para las masas continuas se aplica á este caso, porque una superficie es una masa continua, *la diferencial de esta potencial con relación á x da, precisamente, la componente X de la atracción que ejercería la superficie Σ , recubierta de una masa ponderable en que la densidad por unidad de superficie fuese $\rho\alpha$: cantidad finita, sobre un punto P que no está sobre la superficie.*

Pero esta atracción, repetimos, hemos demostrado que es una cantidad finita y determinada, y aún podemos fijar su fórmula poniendo $\rho\alpha$ donde antes poníamos m .

Es decir:

$$\frac{d \left[- \iint_{\Sigma} \frac{\rho\alpha}{r} d\sigma \right]}{dx} = - \iint_{\Sigma} \frac{a-x}{r^3} \rho\alpha d\sigma.$$

Pasemos á la integral triple

$$\iiint_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau.$$

Su forma es también la de una potencial de volumen en la que cada elemento del volumen tuviese una densidad $\frac{d\rho}{da}$.

Porque, es claro: si ésta fuese una densidad ficticia de cada elemento del volumen V , multiplicada por $d\tau$ daría la masa correspondiente á dicho elemento de volumen, y como está dividida por r , sería la potencial correspondiente al mismo.

La integral para todo el volumen V sería, pues, la potencial para el volumen V , en el cual cada punto tuviera una densidad ficticia $\frac{d\rho}{da}$, tomada dicha potencial con relación al punto interior P .

Mas hemos probado con todo rigor, que las masas continuas tienen potenciales finitas y determinadas para cualquier punto interior, y que diferenciándolas, por ejemplo, con relación á x , determinan la componente x de la atracción que la masa ejerce sobre dicho punto P ; mejor dicho: sobre la masa 1 colocada en él como masa de prueba.

De aquí resulta que podemos diferenciar esta integral triple que estamos considerando, y obtendremos una cantidad finita y determinada, y más aún: el resultado de la diferenciación será la fórmula general de las atracciones ó de sus componentes, pero en que la densidad sea $\frac{d\rho}{da}$.

Resultará, por lo tanto,

$$\frac{d \left[\iiint_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau \right]}{dx} = \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \frac{d\rho}{da} d\tau.$$

Sustituyendo en la fórmula (D) la integral doble y la triple, tendremos

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = - \iint_{\Sigma} \frac{a-x}{r^3} \rho^x d\sigma + \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \frac{d\rho}{da} d\tau.$$

Del mismo modo obtendríamos para las otras dos derivadas las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dy^2} &= - \iint_{\Sigma} \frac{b-y}{r^3} \rho^y d\sigma + \iiint_V \frac{b-y}{r^3} \frac{d\rho}{db} d\tau \\ \frac{d^2 U}{dz^2} &= - \iint_{\Sigma} \frac{c-z}{r^3} \rho^z d\sigma + \iiint_V \frac{c-z}{r^3} \frac{d\rho}{dc} d\tau. \end{aligned}$$

Hemos hecho ver que los segundos miembros son cantidades finitas y determinadas, porque representan componentes de la atracción de una superficie sobre la cual se extiende una capa de densidad finita de materia ponderable,

sobre un punto exterior; y componentes de la atracción así mismo de una masa continua de densidad finita en todos sus puntos sobre uno de su interior.

Claro es que la demostración supone, que las derivadas de ρ con relación á a , b , c , son cantidades finitas.

Estas tres derivadas segundas de U cuya existencia hemos demostrado, tienen una gran importancia en la teoría de las atracciones y en la teoría de la potencial.

Cuando se trataba de la potencial de un sistema de masas, continuo ó discontinuo, sobre un punto exterior al mismo, hemos visto que la potencial U satisfacía á una ecuación diferencial de segundo orden.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

á que se daba el nombre de *ecuación de Laplace*, y que es fundamental para muchas teorías de la Física Matemática.

Se encuentra, por ejemplo, como acabamos de ver, en la teoría de las atracciones newtonianas; y además en la teoría de la electricidad estática y dinámica, en la del magnetismo, en la de la propagación del calor y en la hidrodinámica.

Pero ocurre esta pregunta. ¿La potencial newtoniana sobre puntos interiores á una masa continua satisfará también á esta ecuación?

Por lo pronto, la demostración que hemos dado, para el caso de un punto exterior, en esta misma conferencia, hemos visto que no es aplicable al caso en que el punto es interior á las masas atrayentes; porque las derivadas segundas no se expresan en este caso como en aquél.

Por otra parte las tres ecuaciones que hemos obtenido para dichas tres derivadas segundas, no están bajo una forma propia para la demostración; sólo sirven para probar que que existen dichas tres derivadas.

Nos proponemos ahora demostrar, que las tres derivadas segundas de la potencial U , en el caso de un punto interior,

satisfacen, en efecto, á una ecuación diferencial de segundo orden, cuyo primer miembro es idéntico al de la ecuación de Laplace; pero en que el segundo miembro no es cero, sino una cantidad finita que vamos á determinar.

Para concluir la discusión de este problema, marcharemos rápidamente, y el alumno ó el lector que quiera estudiar más detenidamente esta materia, puede consultar las obras que ya en otra ocasión hemos citado, á saber; la Mecánica de Mr. Appell, ó el libro sobre la potencial newtoniana de Mr. Poincaré.

*
* *

La atracción sobre un punto exterior á las masas atrayentes, satisface á la ecuación de Laplace: Lo hemos demostrado.

La potencial newtoniana de un sistema sobre puntos interiores á las masas, satisface á la ecuación de Poisson, y esto es lo que vamos á demostrar ahora.

Podíamos acudir á la fórmula de Green, una vez demostrada la existencia de las derivadas segundas; mas preferimos la demostración directa.

Consideremos una masa atrayente continua encerrada en el volumen V (fig. 25), y consideremos el punto P .

Limitemos en el interior de V el paralelepípedo $PABC$ de caras paralelas á los planos coordenados y en que P sea el vértice de coordenados x, y, z .

Hemos demostrado en una de las conferencias anteriores, que el flujo de las fuerzas de un sistema sobre una superficie cerrada, es igual al producto de las masas interiores por la cantidad $+4\pi f$.

En este caso la superficie cerrada es la del paralelepípedo; el sistema es la masa ponderable encerrada en V ; y la masa interior es precisamente la masa que contiene dicho paralelepípedo.

Apliquemos, pues, este teorema al caso de que se trata. La componente de la fuerza que actúa sobre la cara PBC , componente que podemos suponer que es constante, será, por unidad de superficie, la misma que en P ; á saber: $f \frac{dU}{dx}$, suponiendo, como tantas veces hemos explicado, que en la unidad de área se colocase la unidad de masa ponderable como masa de prueba.

Por otra parte, sabemos que el flujo á través de un área

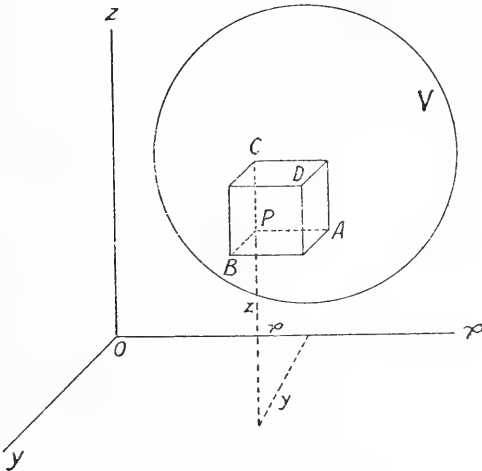


Figura 25

infinitamente pequeña se obtiene multiplicando dicha área por la proyección de la fuerza sobre su normal, y precisamente esta proyección de la fuerza es la componente $\frac{dU}{dx}$.

Tendremos, pues,

$$\text{flujo sobre la cara } PBC \dots \dots f \frac{dU}{dx} \cdot dy dz.$$

Este flujo será de fuera á dentro si la componente es positiva.

Para la cara opuesta AD del paralelepípedo podemos repetir lo dicho; pero la fuerza, ó mejor dicho su componente paralela al eje de las x , no será ya la misma que para el punto P . Será la correspondiente al punto A , que se obtendrá aumentando á la del punto P , la diferencial correspondiente al incremento dx , es decir

$$f \left(\frac{dU}{dx} + \frac{d^2 U}{dx^2} dx \right).$$

Y además, si la fuerza sobre la cara PBC iba de fuera á dentro, esta irá de dentro á fuera y el flujo será negativo respecto al anterior; resultará, pues,

$$\text{Flujo sobre la cara } AD \dots\dots -f \left(\frac{dU}{dx} + \frac{d^2 U}{dx^2} \right) dy dz.$$

Y para las dos caras paralelas perpendiculares al eje de las x , obtendremos un flujo total

$$f \frac{dU}{dx} dy dz - f \left(\frac{dU}{dx} + \frac{d^2 U}{dx^2} dx \right) dy dz$$

y reduciendo

$$-f \frac{d^2 U}{dx^2} dx dy dz.$$

Del mismo modo para las dos caras del paralelepípedo perpendiculares al eje de las y y el flujo será

$$-f \frac{d^2 U}{dy^2} dx dy dz;$$

y para las dos caras perpendiculares al eje de las z ,

$$-f \frac{d^2 U}{dz^2} dx dy dz.$$

Sumando estas tres expresiones obtendremos el flujo tota

de fuera adentro á través de la superficie del paralelepípedo; flujo que será

$$- f \left[\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right] dx dy dz.$$

Esta expresión debe ser igual al producto de $4\pi f$ por la masa encerrada en el paralelepípedo; que si la densidad es ρ , que podemos suponer constante, y siendo $dx \cdot dy \cdot dz$ el volumen, será

$$4\pi f \rho dx dy dz.$$

Así, pues,

$$- f \left[\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right] dx dy dz = 4\pi f \rho dx dy dz$$

y simplificando

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = -4\pi\rho.$$

Esta es la ecuación llamada de Poisson.

A esta ecuación, pues, satisface la potencial de un sistema de masas para todo punto interior de una masa continua.

La ecuación de Laplace es, por lo tanto, un caso particular de la de Poisson; porque en efecto, si en el punto no existe masa ponderable, es decir, si es exterior á éstas, la densidad ρ será nula, el segundo miembro se reduce á cero y la ecuación de Poisson queda reducida á la ecuación de Laplace.

* * *

Hemos demostrado, que en un sistema de masas ponderables las componentes X , Y , Z de la atracción, sobre cualquier punto interior ó exterior á las masas, tienen valores finitos y determinados.

Hemos demostrado, asimismo, que la potencial U existe

para todo el espacio y que tiene valores finitos y determinados; y es claro que para los puntos del infinito se reduce á cero, porque r está en los denominadores y crece sin límite.

Hemos demostrado aún, que la potencial en todo el espacio tiene derivadas primeras finitas y determinadas, como que, salvo la constante f , estas derivadas primeras son X, Y, Z , cuya existencia hemos demostrado.

Hemos demostrado todavía, que las componentes X, Y, Z se obtienen diferenciando la función U , lo cual prueba que es realmente una potencial del sistema.

Hemos demostrado asimismo, que la potencial U tiene derivadas segundas; y, por último, hemos visto que la potencial U no satisface, para los puntos interiores á las masas, á la ecuación de Laplace, pero que satisface á otra ecuación equivalente, que es la de Poisson.

Claro es que esta demostración no hubiera sido legítima, ni nuestros razonamientos tendrían sentido, si previamente no hubiéramos probado la existencia de las derivadas segundas; pues al obtener, por ejemplo, el flujo sobre la cara AD , no tendría sentido la expresión

$$f \left(\frac{dU}{dx} + \frac{d^2 U}{dx^2} dx \right)$$

si la derivada segunda no existiese.

Sólo nos queda un punto que tratar, y es el relativo á la continuidad de estas funciones.

La atracción correspondiente á cualquier punto, y sus componentes X, Y, Z , existen con valores finitos y determinados; y ahora agregamos que son funciones continuas de x, y, z , tanto á lo exterior como en lo interior de masas ponderables.

Esto es evidente, porque estas funciones tienen derivadas finitas en el espacio exterior y en el espacio interior. Por ejemplo, la derivada de X con relación á x salvo el factor f

que es constante, viene expresada por la derivada segunda de la potencial, es decir, por

$$X = f \frac{dU}{dx}$$

y por lo tanto,

$$\frac{dX}{dx} = f \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

Pero la derivada segunda de U hemos demostrado que existe, luego X es continua respecto á x . Esto es evidente: si

$$dX = f \frac{d^2 U}{dx^2} dx, \quad \text{y} \quad \frac{d^2 U}{dx^2}$$

es finita, á valores infinitamente pequeños de dx corresponderán valores infinitamente pequeños de dX , lo que prueba la continuidad de X con relación á x .

Y lo mismo para Y y Z con relación á y y z . Y esto tanto en el interior como en el exterior de las masas ponderables.

En rigor, para demostrar la continuidad de X respecto á x, z ; de Y respecto á x, z ; y Z respecto á x, y , tendríamos que demostrar la existencia de las derivadas segundas de U correspondientes.

Pero esto no admite duda, porque hemos visto que las derivadas primeras de U con relación á x, y, z , pueden ponerse bajo esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= - \int \int_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \alpha d\sigma + \int \int \int_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{da} d\tau \\ \frac{dU}{dy} &= - \int \int_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \beta d\sigma + \int \int \int_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{db} d\tau \\ \frac{dU}{dz} &= - \int \int_{\Sigma} \frac{\rho}{r} \gamma d\sigma + \int \int \int_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dc} d\tau. \end{aligned}$$

Y como los segundos miembros expresan potenciales, ya de una superficie, ya de un volumen, podrán diferenciarse,

no sólo la primera ecuación con relación á x , la segunda con relación á y y la tercera con relación á z , sino con relación á x, y, z , todas ellas, porque estas derivadas expresarán componentes de atracciones cuya existencia hemos demostrado en general.

Podremos, por tanto, obtener de la primera no sólo

$$\frac{d^2 U}{dx^2} \text{ sino } \frac{d^2 U}{dx dy}, \frac{d^2 U}{dx dz}$$

y lo mismo para las demás derivadas.

Que U es continua en todo el espacio se demuestra de una manera análoga.

U tiene derivadas, primeras, finitas y determinadas, puesto que

$$\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$$

que son las derivadas de U , son precisamente, salvo el factor f , las componentes X, Y, Z , que son finitas y determinadas; luego U es una función continua, tanto en el espacio exterior como en el interior de las masas.

Si, por ejemplo,

$$X = \frac{1}{f} \frac{dU}{dx}$$

tendremos.

$$\frac{dU}{dx} = f X$$

y

$$dU = f X dx.$$

Siendo X finita, á valores infinitamente pequeños de dx , corresponden valores infinitamente pequeños de dU .

Mas en cambio, las derivadas segundas de U en las superficies que limitan las masas, experimentan una discontinuidad; porque, en efecto, en un punto exterior infinitamen-

te próximo á la superficie, la suma de las tres derivadas segundas *es igual á cero*, según la ecuación de Laplace, que es

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0,$$

y en un punto interior, infinitamente próximo al precedente, esta suma tiene un valor finito $-4 \pi \rho$, según la ecuación de Poisson.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = -4 \pi \rho;$$

luego si la suma para puntos infinitamente próximos varía

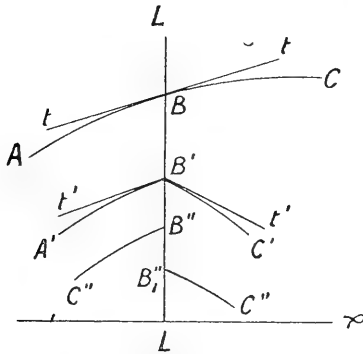


Figura 26

en una cantidad finita, esto supone una discontinuidad de las derivadas segundas.

La figura 26 es una representación esquemática de los diferentes casos que acabamos de indicar.

LL es una superficie de separación. La curva AC es finita y continua en el espacio de la derecha y en el de la izquierda, y en la línea límite LL tiene para el punto B una tangente única, tt .

La línea $A'C'$ es continua en ambos espacios, en el de la derecha y en el de la izquierda; tiene un valor único para el

punto B' ; pero su primera derivada tiene una discontinuidad, toda vez que en el punto B' hay dos tangentes, t' , t'' , una para la rama $A'B'$; otra para la rama $B'C'$. Esto es precisamente lo que les sucede á las tres componentes X , Y , Z .

Por último, la línea $A''C''$ es discontinua en el límite LL , puesto que salta su ordenada de B'' á B_1'' .

Este es el caso de las segundas derivadas de la potencial, en las superficies límites de las masas continuas.

Diremos una vez más, para concluir esta conferencia, lo que ya hemos indicado varias veces: Que todos los resultados obtenidos, con ligeras modificaciones, que no son de fondo, sino, por decirlo así, de interpretación, se aplican al caso en que las masas, en vez de ser ponderables, son eléctricas ó magnéticas, positivas ó negativas.

Todo lo expuesto, por lo tanto, nos servirá de base y nos permitirá marchar con más rapidez, cuando en otros cursos, estudiemos la electrostática clásica y el magnetismo.

Por ahora continuemos preparando el terreno y haciéndolo más llano y seguido, para cuando las ocasiones lleguen de aplicar la teoría de la potencial.

Teoría que, en rigor, por pertenecer á la Mecánica, claro es que pertenece á la Física Matemática.

XXXIII.—Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia novena.

SEÑORES:

Estudiando la potencial newtoniana, que es de aplicación inmediata en muchas teorías de la Física Matemática, demostraremos, entre otras, estas dos proposiciones importantes:

1.^a Que la potencial newtoniana, que representábamos por $U(x, y, z)$, de un sistema continuo ó discontinuo, potencial correspondiente á un punto exterior del mismo, satisfacía á la ecuación llamada de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Y 2.^a Que la potencial del mismo sistema, pero con relación á un punto interior á la masa ponderable, es decir, que se confunde con un elemento de dicha masa, esta potencial ya no satisface á la ecuación de Laplace, sino á la de Poisson

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = -4\pi\rho$$

siendo ρ la densidad de la masa ponderable en el punto que se considera.

Y estas potenciales, hemos explicado ya muchas veces, que en la Física Matemática clásica son en rigor potenciales *posibles*: á saber, que si en el punto que se considera se colocase una masa ponderable de prueba igual á la unidad, el trabajo desarrollado por el sistema para traer á este ideal de masa 1 desde el infinito hasta la posición que ocupa, vendría expresado numéricamente por dicha función potencial, que en la hipótesis de masas ponderables es un trabajo eminentemente positivo.

De estas dos ecuaciones vamos á estudiar por el pronto la primera, que ha dado ocasión en el siglo precedente á grandes trabajos y desarrollos matemáticos, de aplicación importantísima no sólo á la Física Matemática clásica, sino á la moderna. Y más tarde estudiaremos á su vez la ecuación de Poisson.

Porque lo hemos indicado varias veces y hemos de repetirlo una más: inmensos son los trabajos de la Física Matemática moderna; admirables las nuevas teorías de que está en cierto modo cuajada; ingeniosísimas y fecundas las recientes hipótesis; pero esta nueva Física Matemática ni suple en gran parte, ni mucho menos anula la Física Matemática clásica del siglo pasado.

Ambas son grados de una evolución; elementos de un proceso; pero ni representan el principio ni el fin de la indefinida evolución de la Física teórica.

Si se nos permite la imagen, diremos que la Física Matemática moderna es un escalón, ó si se quiere un tramo de una escalinata, que sube cuanto puede subir; y á su vez la Física Matemática clásica, la del siglo XIX, es el escalón ó el tramo precedente: y decimos tramo en lugar de escalón, para no achicar la majestuosa escalinata.

Más para subir por una escalinata no hay que suprimir los escalones inferiores, porque en este caso los superiores quedarían en el aire.

Ni se pueden suprimir en la historia de la ciencia, ni si-

quiera se pueden suprimir en la enseñanza, pues mal llegaría el alumno á comprender las teorías de la Física Matemática actual, si desconociese la que le ha servido de base, de punto de partida y hoy mismo en gran extensión le sirve de punto de apoyo.

Por eso en estas conferencias, en que aspiro á formar *una especie de enciclopedia elemental*, como preparación de teorías más elevadas de la Física Matemática, llevo á la par, en la forma que puedo, esta doble empresa: Hacer primero un resumen de la *Física Matemática clásica*, y después procuraré desarrollar la Física Matemática moderna.

Parece, en ocasiones, que interrumpo mi tarea y que abro paréntesis demasiado extensos; pero ya los iré cerrando á medida que el tiempo y mis fuerzas lo consientan.

Por hoy continuemos la tarea iniciada.

* * *

ECUACIÓN DE LAPLACE. —Presentemos algunas consideraciones generales sobre esta ecuación, célebre en la Física Matemática, y cuya forma es, como hemos dicho,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Hasta aquí hemos considerado á U como una potencial newtoniana. Es decir, como una función de forma bien definida:

$$U = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}$$

ó bien

$$U = \iiint_V \frac{\rho(a, b, c) da db dc}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

que es una función, como decimos, de forma perfectamente determinada de x, y, z ; porque, efectuadas las integraciones con relación á a, b, c , que son las variables de la integral triple, y recorren, por decirlo de este modo, en la triple suma infinita, todos los puntos del volumen V ; efectuada, repetimos, la triple integración, las variables a, b, c desaparecen y no quedan más que las constantes x, y, z , que constantes son respecto á la integral triple.

Y, por de contado, quedan las constantes que definen la forma y la posición de la superficie Σ , que limita el volumen V , y si hay muchas masas, las constantes de todas ellas.

En suma, U es una función de forma perfectamente determinada en x, y, z , para cada sistema ponderable atrayente.

Cada sistema ponderable, y aun pudiéramos decir eléctrico ó magnético, tiene una potencial finita, determinada y continua, y todas estas potenciales U pertenecen, por decirlo así, á una misma familia, la familia de las potenciales newtonianas.

Pues bien: todas ellas, todos los miembros de esta familia satisfacen á la ecuación de Laplace.

Gozan de esta propiedad importantísima, conocida y demostrada hace mucho tiempo, y demostrada con rigor absoluto, como hemos visto, en las obras recientes; aunque algunas obras hay en que no se desciende á los pormenores á que los matemáticos han tenido que descender para dar á la demostración todo el rigor lógico propio de su ciencia.

Así, para nosotros, la ecuación precedente es rigurosamente exacta para las potenciales newtonianas, porque hemos demostrado con todo rigor lo que no es evidente *à priori*, á saber: que para la potencial newtoniana existan las tres derivadas

$$\frac{d^2 U}{dx^2}, \quad \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

Si no existiesen, la ecuación de Laplace carecería de sentido ó estaría sujeta á mayor ó menor número de restricciones, de las que para nosotros ya no queda más que una, á saber: que la densidad ρ sea finita, determinada y continua.

Y esto nos obliga á abrir, digámoslo de esta manera, un nuevo paréntesis; porque la crítica moderna ha hecho surgir multitud de cuestiones que, si en rigor siempre han existido, en estos últimos tiempos se han agudizado, y valga la palabra.

De antemano pedimos perdón por este nuevo paréntesis.

* * *

En dos escuelas pudiéramos afirmar, que se dividen los anchos campos de las ciencias matemáticas, escuelas ó tendencias que se condensan en estas dos palabras: *La intuición y la lógica*.

Hay matemáticos que en sus descubrimientos, en sus teorías y hasta en sus demostraciones, acuden á la *intuición*. Ven ó creen ver la propiedad geométrica ó analítica de que se trate, dibujada en la imaginación. Es algo parecido á la inspiración poética. Es la visión directa de las cosas matemáticas.

En cambio otros sabios, otros creadores de la ciencia desdennan, y á veces hasta condenan el método intuitivo. Para ellos, la ciencia en sus teoremas, desarrollos y demostraciones, es *deductiva*; es puramente *lógica*, no es otra cosa que un encadenamiento de *silogismos*.

No vamos á discutir ampliamente este punto, sobre el cual pueden consultar mis alumnos ó mis lectores varias obras modernas, de verdadero mérito y de interesante lectura; entre ellas y dignas de sus eminentes autores varios libros, memorias ó artículos, de Mr. Poincaré y de Mr. Picard: Por

ejemplo, «La ciencia y la hipótesis», «El valor de la ciencia» y «La ciencia moderna».

Nos contentaremos nosotros por nuestra parte, y en esta rapidísima noticia, con algunas breves observaciones.

Que la *intuición* es procedimiento creador en las ciencias matemáticas, procedimiento fecundo, y, por decirlo así, de gran potencia; procedimiento que jamás se abandonará por completo, que ha prestado á la ciencia inmensos servicios y que seguirá prestándolos, es para nosotros cosa evidente.

Que la intuición tiene sus peligros, sus extravíos, y aun sus descarrilamientos, tampoco puede ponerse en duda.

Por intuición emplearon grandes matemáticos del siglo pasado multitud de series, sin demostrar previamente su convergencia, que era caminar á la ventura; porque si las series no eran convergentes, todo el edificio matemático, que en ellas se fundaba, se arruinaba de una vez como faltase la convergencia.

Por intuición, por visión geométrica pudiéramos agregar, se ha creído durante muchos años, que toda función y , de una variable x , tenía una derivada. Se contemplaba una curva, se *veía* en ella, en cierto modo, la tangente para cada punto, salvo para puntos singulares; y como la tangente trigonométrica de la tangente á la curva en un punto, expresa la relación entre dy y dx , que es la *derivada*, intuitivamente se afirmaba como verdad evidente la existencia de la derivada de cualquier función.

Y, sin embargo, existen series enteras de funciones continuas, que no tienen derivada; y sobre esto algo decíamos en el primer tomo de estas conferencias: sin contar con las memorias especiales, puede estudiarse este punto, entre otras obras modernas, en el cálculo diferencial de Jordán y en el de Goursat. Mas obsérvese, que si se hubiera esperado á dilucidar la cuestión para fundar el cálculo diferencial, este gran descubrimiento se hubiera retrasado más de un siglo; como se hubieran retrasado muchas teorías de astronomía y

de mecánica, si no se hubiera tenido cierta buena fe en la aplicación de las series, aguardando con los brazos cruzados, para aplicarlas, á que se descubriesen y precisasen las reglas de convergencia.

Y á estos dos ejemplos pudiéramos añadir otros muchos, no sólo en el análisis, sino en la geometría.

En suma, la intuición es *elemento creador, fecundo*, pero incierto en ocasiones.

La lógica es más severa, más segura, pero de horizontes más estrechos.

Hay cierto paralelismo entre las hipótesis de la Física Matemática y el método experimental por una parte, y la intuición y la lógica por otra.

No digo identidad, digo cierto modo de paralelismo.

Y así como la hipótesis y la experiencia se completan, así en las matemáticas puras pueden y deben completarse la intuición y la lógica.

Los métodos de la ciencia humana son imperfectos, por perfectos que sean, y es prudente, y aun de sentido común, que unos en otros se apoyen.

Si la intuición puede producir ilusiones y hasta puede conducir al error, la lógica, por alardes y pretensiones de exactitud, puede hacerse irresistible, pedante y estéril, y ejemplos podríamos citar en la ciencia moderna.

Pero de todas maneras no puede negarse, y esto es un adelanto, que las exigencias lógicas de las matemáticas modernas, son hoy mucho más severas, no sólo que en los orígenes históricos de la ciencia, sino de lo que fueron en tiempos bastante modernos.

Todo esto justifica la minuciosidad con que hemos estudiado en la conferencia precedente, los elementos de la potencial newtoniana, que marchando á la gracia de Dios, y con menos escrúpulos, hubiéramos podido condensar en brevísimas páginas.

Y aun así, y en punto á escrúpulos, aún tendríamos que

estudiar las potenciales de líneas y superficies, teorías que si no ofrecen dificultad alguna para los puntos exteriores, todas requieren algunas aclaraciones, que no pondremos en olvido, al hacer aplicación de la potencial á la electrostática y al magnetismo.

Y cerrando este paréntesis, empecemos á ocuparnos en el estudio elemental de la ecuación de Laplace.

*
* *

Por la manera de haber llegado á esta ecuación,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0,$$

es claro, que en el caso que consideramos, la función U , no es una integral cualquiera de la ecuación de Laplace, sino que tiene una significación determinada.

U es la potencial de un sistema de masas ponderables, eléctricas ó magnéticas, continuas ó discontinuas, distribuídas en puntos, líneas, superficies ó volúmenes; pero la potencial para un *punto exterior al sistema*. Es decir, que no se confunde con ningún punto de dicho sistema; y hemos visto, y resulta de lo expuesto, que todas las potenciales de esta clase satisfacen á la ecuación diferencial de segundo orden expresada.

Así como existirán otras magnitudes físicas de otros problemas, que satisfagan á una ecuación diferencial de esta forma.

Es decir, que U puede tener múltiples significaciones físicas, porque muchas funciones de muchos problemas físicos satisfacen á la ecuación de Laplace.

Nosotros vamos á prescindir por completo, por ahora, de todo problema físico; vamos á considerar la ecuación ante-

rior como una ecuación puramente matemática y abstracta; la U ya no será una potencial para nosotros, sino una función de x, y, z , que satisface á la ecuación diferencial de segundo orden, designada con el nombre de ecuación de Laplace.

U podrá ser la solución *más general* de la ecuación expresada, ó podrá ser una solución menos general, comprendiendo, sin embargo, á un grupo ó familia de funciones, que satisfagan á la ecuación mencionada, ó podrá ser una solución particularísima entre todas ellas.

Presentaré algunos ejemplos para mejor inteligencia de mis alumnos ó de mis lectores.

* *
* *

La ecuación de Laplace como ecuación diferencial independientemente de toda teoría Física Matemática, y en que U no representa otra cosa, que una función abstracta de x, y, z , admite multitud de soluciones. Presentemos algunas.

1.^a Es evidente que la función lineal $U = Ax + By + Cz + D$, satisface á dicha ecuación diferencial independientemente de las constantes A, B, C, D , porque los tres coeficientes diferenciales de segundo orden son nulos:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 U}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 U}{dz^2} = 0;$$

y la ecuación se reduce á $0 = 0$.

Mas aun á cualquier solución se le puede agregar una función lineal, y continuará siendo solución de la ecuación de Laplace.

2.^a Una función de segundo grado en x, y, z , puede ser solución de la ecuación de Laplace, determinando convenientemente los coeficientes.

Así,

$$U = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byx + B'xz + B''xy$$

da para los tres coeficientes diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 2A, \quad \frac{d^2 U}{dy^2} = 2A', \quad \frac{d^2 U}{dz^2} = 2A''$$

y la ecuación diferencial se convierte en

$$A + A' + A'' = 0.$$

Todo sistema de valores de A, A', A'' , que satisfaga á esta ecuación, sustituidos en el valor de U , darán una solución de la ecuación de Laplace.

Estos dos ejemplos elementales constituyen soluciones analíticas de la ecuación diferencial propuesta, pero no tienen importancia, y se prescinde de ellas cuando la ecuación diferencial de Laplace se aplica á un fenómeno de Física Matemática; porque cuando x, y, z , crecen sin límite, U tiende hacia ∞ ; y esto de que una magnitud física tome valores infinitos en el ∞ , no se acomoda en general á la naturaleza de los problemas físicos.

3.^a En otro orden de ideas podemos presentar funciones trigonométricas que sean soluciones de la ecuación de Laplace.

Por ejemplo,

$$U = A \cos (ax + by + cz)$$

es una solución; porque, en efecto, tomando las derivadas primeras y segundas, hallaremos

$$\frac{dU}{dx} = -Aa \operatorname{sen} (ax + by + cz)$$

$$\frac{dU}{dy} = -Ab \operatorname{sen} (ax + by + cz)$$

$$\frac{dU}{dz} = -Ac \operatorname{sen} (ax + by + cz)$$

y además,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -Aa^2 \cos(ax + by + cz)$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = -Ab^2 \cos(ax + by + cz)$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = -Ac^2 \cos(ax + by + cz).$$

Y sustituyendo estas últimas en la ecuación de Laplace y dividiendo por A y por $\cos(ax + by + cz)$, que resultan factores comunes, la ecuación diferencial se reduce á

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Basta determinar valores de a , b , c , que satisfagan á esta ecuación, para que el valor de U sea una solución de la ecuación diferencial que consideramos.

Claro es, que los valores de a , b , c , ó por lo menos uno de ellos serán imaginarios; pero esta no es una dificultad, ni para el problema analítico, ni para los problemas físicos; porque tales soluciones imaginarias dan en último resultado soluciones reales, como hemos visto ya varias veces y como repetiremos otras muchas.

Sea, por ejemplo, el caso que estamos considerando.

Despejando a de la última ecuación, tendremos

$$a = \pm \sqrt{-b^2 - c^2} = \pm \sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1}.$$

Tomemos uno de los dos valores y resultará para U la solución imaginaria

$$U = A \cos \left[\sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1} x + by + cz \right]$$

que es una solución, repetimos, aunque imaginaria, de la ecuación de Laplace.

Pero recordemos que todas las líneas trigonométricas de arcos imaginarios tienen la forma ordinaria de las imaginarias; á saber:

$$\varphi + \psi \sqrt{-1}.$$

En efecto, y sirva esto sólo como recuerdo á teorías que ya conocen mis alumnos por el estudio del análisis, se sabe que

$$e^{\alpha \sqrt{-1}} = \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \sqrt{-1}$$

fórmula clásica, que se comprueba desarrollando en serie los dos miembros, y que en rigor no es otra cosa que *la definición* de las exponenciales imaginarias.

Además

$$e^{\alpha \sqrt{-1}} = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \sqrt{-1}$$

y de ambas ecuaciones se deducen para $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \alpha$ los valores:

$$\cos \alpha = \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} + e^{-\alpha \sqrt{-1}}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{e^{\alpha \sqrt{-1}} - e^{-\alpha \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}}.$$

Si en estas expresiones, cuyos segundos miembros no son más que las funciones indicadas en los primeros bajo otra forma, y que por lo tanto subsisten para todos los valores de α , suponemos que esta cantidad es imaginaria, é igual á $\beta \sqrt{-1}$, tendremos

$$\cos \beta \sqrt{-1} = \frac{e^{-\beta} + e^{\beta}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \beta \sqrt{-1} = \frac{e^{-\beta} - e^{\beta}}{2 \sqrt{-1}} = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sqrt{-1}.$$

Establecido esto, volvamos al valor de U

$$U = A \cos \left[\sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1} x + by + cz \right]$$

y como al coseno de una suma, aunque sea imaginaria, sabemos que se aplica la fórmula de los arcos reales, tendremos desarrollando

$$U = A \left\{ \cos \left[\sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1} x \right] \cos (by + cz) - \right. \\ \left. - \operatorname{sen} \left[\sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1} x \right] \operatorname{sen} (by + cz) \right\}$$

en que entran un coseno y un seno de arco imaginario, pero ya los hemos expresado antes en la forma de las imaginarias ordinarias; de suerte que substituyendo por β en

$$\cos \beta \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \beta \sqrt{-1}$$

su valor, que en este caso es

$$x \sqrt{b^2 + c^2},$$

tendremos

$$\cos \left[x \sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1} \right] = \frac{e^{-x \sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x \sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \left[x \sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{-1} \right] = \frac{e^{x \sqrt{b^2 + c^2}} - e^{-x \sqrt{b^2 + c^2}}}{2} \sqrt{-1}$$

y poniendo por fin estos valores en el de U hallaremos

$$U = A \cos (by + cz) \frac{e^{-x \sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x \sqrt{b^2 + c^2}}}{2} - \\ - A \operatorname{sen} (by + cz) \frac{e^{x \sqrt{b^2 + c^2}} - e^{-x \sqrt{b^2 + c^2}}}{2} \sqrt{-1}.$$

El primer término del segundo miembro es una expresión real: no entra en ninguna parte $\sqrt{-1}$ y podremos representarlo por una función real $\varphi(x, y, z)$, es decir,

$$A \cos(by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2+c^2}} + e^{x\sqrt{b^2+c^2}}}{2} = \varphi(x, y, z)$$

en que A, b, c son constantes arbitrarias.

Del mismo modo en el segundo término la cantidad que multiplica á $\sqrt{-1}$ es también una función real, que podremos representar $\psi(x, y, z)$; de modo que

$$-A \sin(by + cz) \frac{e^{x\sqrt{b^2+c^2}} - e^{-x\sqrt{b^2+c^2}}}{2} = \psi(x, y, z);$$

y el valor de U se expresará abreviadamente de este modo, que es la forma ordinaria de las cantidades imaginarias:

$$U = \varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z)\sqrt{-1}$$

siendo φ y ψ funciones reales de x, y, z de formas perfectamente conocidas: las que antes hemos expresado.

Que $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ satisface á la ecuación de Laplace es evidente: ya lo hemos demostrado y no es este valor de U sino una transformación por procedimientos regulares de la expresión primitiva

$$U = A \cos(ax + by + cz)$$

en que determinamos a , de modo que la sustitución de U en dicha ecuación de Laplace la convirtiera en una identidad.

Pero hay más; no sólo

$$\varphi + \psi \sqrt{-1}$$

es una solución de la ecuación de Laplace, sino que las dos partes reales $\varphi(x, y, z)$ y $\psi(x, y, z)$, separadamente, son soluciones, y soluciones reales de la ecuación diferencial propuesta.

Y esto se presenta frecuentemente en los problemas de cálculo integral y en otros muchos problemas.

Una solución imaginaria, que pudiera parecer estéril y, hasta cierto punto inútil, es *fecundísima* porque da *dos soluciones reales*; no una, sino *dos*.

Vamos á demostrarlo en este caso: puesto que

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) \sqrt{-1}$$

es una solución de

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0,$$

sustituyendo aquella expresión en lugar de U , deberá quedar satisfecha la ecuación diferencial, convirtiéndose en $0 = 0$.

Tendremos, pues,

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\varphi + \psi \sqrt{-1})}{dx^2} + \frac{d^2(\varphi + \psi \sqrt{-1})}{dy^2} + \\ + \frac{d^2(\varphi + \psi \sqrt{-1})}{dz^2} = 0, \end{aligned}$$

ó separando las partes reales é imaginarias

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi \sqrt{-1}}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \psi \sqrt{-1}}{dy^2} + \\ + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{d^2 \psi \sqrt{-1}}{dz^2} = 0, \end{aligned}$$

ó bien

$$\left[\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right] + \left[\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \frac{d^2 \psi}{dz^2} \right] \sqrt{-1} = 0.$$

Pero el primer paréntesis y el segundo son expresiones reales, y para que la imaginaria sea igual á 0 es preciso que separadamente se tenga

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \frac{d^2 \psi}{dz^2} = 0,$$

que no son otra cosa que la ecuación de Laplace, en que separadamente se han sustituido en vez de U las funciones φ y ψ .

Luego ya tenemos *estas dos soluciones* reales de la ecuación de Laplace: funciones relativamente complicadas, y que directamente no hubiera sido tan fácil encontrar como soluciones de la ecuación diferencial.

Que lo son ya está demostrado de una manera rigurosa, y la comprobación directa es fácil.

Comprobemos, que haciendo

$$U = A \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{+x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2},$$

esta expresión de U satisface á la ecuación de Laplace.

Para ello obtengamos las tres derivadas segundas de U .

Efectuamos este sencillísimo cálculo con todo detalle para ahorrar el trabajo á nuestros lectores; pero sin nuevas explicaciones, por tratarse de cálculos elementales.

Así,

$$\frac{dU}{dx} = A \cos (by + cz) \frac{-\sqrt{b^2 + c^2} e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + \sqrt{b^2 + c^2} e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = A \cos (by + cz) (b^2 + c^2) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

$$\frac{dU}{dy} = -Ab \operatorname{sen} (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = -Ab^2 \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

$$\frac{dU}{dz} = -Ac \operatorname{sen} (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = -Ac^2 \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

Y sustituyendo

$$\frac{d^2 U}{dx^2}, \quad \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{d^2 U}{dz^2}$$

en la ecuación de Laplace:

$$\begin{aligned} & A \cos (by + cz) (b^2 + c^2) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2} \\ & - Ab^2 \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2} \\ & - Ac^2 \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2} = 0. \end{aligned}$$

Sacando factores comunes, resulta

$$A \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2} [b^2 + c^2 - b^2 - c^2] = 0$$

y como la cantidad que está entre paréntesis es idénticamente nula, resulta que, en efecto, la expresión de U

$$U = A \cos (by + cz) \frac{e^{-x\sqrt{b^2 + c^2}} + e^{+x\sqrt{b^2 + c^2}}}{2}$$

satisface á la ecuación de Laplace.

Lo mismo pudiéramos decir de la expresión que multiplica $\sqrt{-1}$.

Si en vez del coseno hubiéramos empleado el seno, aún hubiéramos encontrado, no sólo una solución imaginaria, sino otras dos soluciones reales para la función U .

De este modo vemos que se obtienen inmediatamente soluciones diversas para la ecuación de Laplace, que directamente no serían tan fáciles de obtener.

Todo esto es elemental en sumo grado; pero si pecamos por pesadez no pecaremos por falta de claridad.

* * *

Podemos aún determinar nuevas integrales particulares. La teoría de las funciones de variables complejas nos permiten, en efecto, obtener una serie indefinida de soluciones. Si se nos tolera la comparación, diremos que es una mina inagotable de ellas, aunque por decirlo de este modo, pertenecen á una misma familia.

La ecuación de Laplace es:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Pues si representamos por $U_1 (y, z)$ una función de y, z que satisfaga á dicha ecuación, tendremos, que sustituyendo, en vez de U , la función U_1 , la derivada segunda con re-

lación á x se anulará, toda vez que x no entra en U_1 , y tendremos:

$$\frac{d^2 U_1}{dy^2} + \frac{d^2 U_1}{dz^2} = 0.$$

De suerte que para que U_1 sea una solución de la ecuación de Laplace, basta que lo sea de la ecuación diferencial de segundo orden anterior, que sólo contiene las dos variables independientes y, z .

Del mismo modo $U_2(x, z)$ será solución de la ecuación de Laplace, sólo con serlo de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2 U_2}{dx^2} + \frac{d^2 U_2}{dz^2} = 0.$$

Y, por último, será una solución particular de la ecuación diferencial de segundo orden con tres términos la expresión $U_3(x, y)$, si satisface á la ecuación diferencial con dos términos:

$$\frac{d^2 U_3}{dx^2} + \frac{d^2 U_3}{dy^2} = 0.$$

De aquí resulta que si obtenemos tres soluciones particulares U_1, U_2, U_3 de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos términos, antes expresadas, que en rigor constituyen una forma única, en que sólo varían los nombres de las cantidades x, y, z , podremos obtener una solución de la ecuación de Laplace con tres términos.

Porque, en efecto, hemos demostrado, que en la ecuación de Laplace la suma de varias soluciones constituye una nueva solución.

Así

$$U = U_1(y, z) + U_2(x, z) + U_3(x, y)$$

será una solución de

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Y, en efecto, la comprobación es inmediata.

Pongamos en esta ecuación, en vez de U , la función $U_1 + U_2 + U_3$, y tendremos sucesivamente:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 [U_1(y, z) + U_2(x, z) + U_3(x, y)]}{dx^2} + \\ & + \frac{d^2 [U_1(y, z) + U_2(x, z) + U_3(x, y)]}{dy^2} + \\ & + \frac{d^2 [U_1(y, z) + U_2(x, z) + U_3(x, y)]}{dz^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U_2(x, z)}{dx^2} + \frac{d^2 U_3(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 U_1(y, z)}{dy^2} + \\ & + \frac{d^2 U_3(x, y)}{dy^2} + \frac{d^2 U_1(y, z)}{dz^2} + \frac{d^2 U_2(x, z)}{dz^2} = 0. \end{aligned}$$

Y ordenando de otro modo,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2 U_1(y, z)}{dy^2} + \frac{d^2 U_1(y, z)}{dz^2} \right] + \left[\frac{d^2 U_2(x, z)}{dx^2} + \right. \\ & \left. + \frac{d^2 U_2(x, z)}{dz^2} \right] + \left[\frac{d^2 U_3(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 U_3(x, y)}{dy^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Pero los tres paréntesis son nulos, puesto que suponemos que U_1 , U_2 , U_3 son soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

Luego la última ecuación se reduce á la identidad $0 = 0$.

Vemos, según esto, que basta obtener soluciones particu-

lares de la ecuación de Laplace reducida á dos términos, para conseguir soluciones de la ecuación general.

Ahora bien, considerando la ecuación diferencial de segundo orden, como tipo,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} = 0,$$

y lo mismo diríamos si las variables fueren x, z ó y, z ; para esta ecuación se pueden obtener soluciones, es decir, expresiones de U , tantas como se quiera, aplicando la teoría de las funciones de variables imaginarias ó complejas.

Y permitan mis alumnos y mis lectores que abra un paréntesis incidental para recordarles la expresada teoría, que es de extraordinaria importancia en la Física Matemática. Si la conocen y la recuerdan, claro es que pueden pasar por alto esta nueva digresión, que sería indisculpable en una obra didáctica; pero que puede disculparse, porque tiene sus ventajas en esta serie de conferencias á las que ningún programa oficial me tiene sujeto.

*
* *

LIGERÍSIMAS NOCIONES SOBRE LAS FUNCIONES DE VARIABLES COMPLEJAS.—El concepto de función debo suponer que es bien conocido de mis alumnos. Conocen las funciones elementales del Algebra: por ejemplo, polinomios, funciones fraccionarias, funciones irracionales, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas.

Debo suponer que también conocen las funciones elípticas; quizás conozcan las abelianas; y desde luego saben que un número ilimitado de funciones está definido por ecuaciones diferenciales. En la Física experimental los cuadros ó los gráficos que enlazan, por ejemplo, dos magnitudes físicas que

pueden medirse, en rigor expresan nuevas funciones. Así, un cuadro de valores numéricos de entrada sencilla, es una función de una variable independiente, desarrollada explícitamente para todos los valores de la tabla, é implícita y aproximadamente para todos los valores de interpolación.

Así mismo, una tabla de doble entrada, ya exprese la ley numérica de un fenómeno físico, y hasta si representa una ley de la estadística, llevará consigo la idea de una función de dos variables independientes.

Aún más en general, y según las ideas modernas: Dos *conjuntos* de valores que se corresponden, despiertan la idea de una función de dos variables.

Pero es claro que aquí no podemos más que apuntar ligeramente estas nociones modernísimas, y que corresponden á nuevos horizontes de la Ciencia matemática.

Volvamos á nuestro asunto; mejor dicho aún, al paréntesis de segundo orden (paréntesis de paréntesis) que hace un momento hemos abierto.

Volvamos, quiero decir, á las funciones de variables complejas, de las cuales voy á dar una ligerísima noción.

*
* *

Todos los ejemplos que hemos presentado antes, y que son el desarrollo del concepto de función: se refieren al caso en que las variables sólo tienen valores reales.

Por ejemplo el esquema,

$$y = f(x)$$

que enlaza las dos variables y , x , y que es símbolo de función, enlaza y pone en correspondencia tan sólo valores reales de x é y : Sean éstas las variables de cualquier problema analítico, sean la abscisa y la ordenada de una curva, sean

los dos números correspondientes de una tabla de entrada sencilla en que se ha expresado la ley de dependencia de dos magnitudes físicas: Sea por último el signo f un signo esquemático ó simbólico, y también pudiéramos decir sintético, en que se expresa como se corresponden uno á uno los números ó valores de dos *conjuntos* (ensambles).

$$\begin{array}{c} \dots\dots y', y'', y''', y^{IV} \dots\dots \\ \dots\dots x', x'', x''', x^{IV} \dots\dots \end{array}$$

siempre la y , y siempre la x , representan cantidades reales.

Pero vamos á generalizar esta noción ó este concepto para las cantidades imaginarias.

Acabamos de recordar, que si tenemos dos series de cantidades, y aún podríamos decir *dos series de cosas*: cantidades, objetos, seres, fenómenos, ó cosas en general

$$\begin{array}{c} A, A', A'' \dots\dots \\ B, B', B'' \dots\dots \end{array}$$

que se corresponden dos á dos, A y B , A' y B' , A'' y B'' , ó que por el pensamiento las enlazamos dos á dos; en esta hipótesis podrá decirse, que dada la una, está determinada la otra, y en este sentido, podemos afirmar, que una es función de la otra; y podemos escribir simbólicamente,

$$A = f(B)$$

empleando el signo f , en el concepto de función; concepto generalizado como queda expuesto.

Antes decíamos esto para cantidades reales. Pues no hay inconveniente en enlazar de ese modo cantidades imaginarias; y si tenemos dos series de las cantidades imaginarias que se estudian en álgebra,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots \\
 x & + y & \sqrt{-1} & \dots\dots & P & + Q & \sqrt{-1} \\
 x' & + y' & \sqrt{-1} & \dots\dots & P' & + Q' & \sqrt{-1} \\
 x'' & + y'' & \sqrt{-1} & \dots\dots & P'' & + Q'' & \sqrt{-1} \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

correspondiéndose las de la primera columna con las de la segunda, cada término de esta última estará determinado por el término correspondiente de la primera columna. Así, $P + Q\sqrt{-1}$ estará determinado por $x + y\sqrt{-1}$: cuando *se piense* en este último, habrá que *pensar* en el primero; por eso decimos que aquél depende de éste, por su enlace lógico, y de existencia pudiéramos decir. Enlace que establecemos por la libertad matemática de creación, que tantos matemáticos ilustres han proclamado.

Y otro tanto podemos decir del término $P' + Q'\sqrt{-1}$ que está determinado, ó depende, ó va enlazado, porque hemos querido que así sea, con el término $x' + y'\sqrt{-1}$ de la primera columna, y así sucesivamente.

Podremos expresar esto de una manera sintética y generalizando los símbolos de las funciones elementales, con escribir

$$P + Q\sqrt{-1} = \text{función}(x + y\sqrt{-1})$$

ó abreviadamente,

$$P + Q\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1}),$$

en que $P + Q\sqrt{-1}$ expresa un término cualquiera de la

segunda columna, y $x + y\sqrt{-1}$ el término correspondiente de la primera.

De esto mismo podemos dar una representación geométrica.

Se sabe por Álgebra elemental, que toda imaginaria $x + y\sqrt{-1}$ puede representarse (fig. 27) por un punto A de un plano x, y .

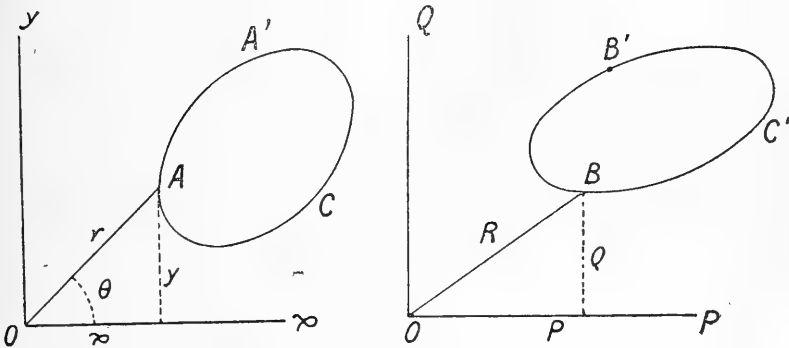


Figura 27.

Y en efecto, todo punto A determina una abscisa x y una ordenada y , que son las dos cantidades reales que entran en la forma compleja ó imaginaria, enlazadas por el signo $\sqrt{-1}$ ó por la clave i , á la cual se sujeta la condición $i^2 = -1$ y á las que de ésta se deducen, según el cálculo algebraico.

También se sabe, que la imaginaria puede representarse por r y θ , unidos en un símbolo exponencial, siendo r la distancia OA , θ el ángulo AOx , y el símbolo $re^{\theta\sqrt{-1}}$.

Todas estas son nociones que damos por conocidas.

De aquí se deduce que un conjunto de puntos A, A', \dots del plano de las xy , distribuido según cierta ley arbitraria, pero precisa, determinan un *complejo* de la imaginaria, $x + y\sqrt{-1}$.

Supongamos asimismo otro sistema de ejes rectangulares P, Q , y sobre este plano otro conjunto de puntos $B, B' \dots$. Cada uno de ellos determinará una imaginaria $P + Q\sqrt{-1}$, y el conjunto de todas estas imaginarias otro conjunto, grupo, complejo ó como se quiera llamar, de imaginarias comprendidas en dicha forma $P + Q\sqrt{-1}$.

Si hacemos corresponder los puntos del plano (P, Q) con los puntos del plano (x, y) , de modo que se correspondan de una manera perfectamente determinada, el punto B con el A, B' con el A' , y así sucesivamente cualquier imaginaria $x + y\sqrt{-1}$ del primer plano determinará una cierta imaginaria $P + Q\sqrt{-1}$ del segundo plano, y podemos escribir, como antes hacíamos simbólicamente

$$P + Q\sqrt{-1} = \text{función } (x + y\sqrt{-1})$$

ó en forma abreviada

$$P + Q\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1})$$

Y así tendremos una generalización del concepto *función* y una representación geométrica de las funciones imaginarias de una variable independiente.

En el Algebra elemental, cuando se trata, por ejemplo, de funciones algebraicas, el símbolo f representa operaciones aritméticas perfectamente conocidas; á saber: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, de modo que dicho signo f significa la serie de operaciones en *número finito* que ha de efectuarse sobre cada valor de x para obtener el valor correspondiente de y .

Por ejemplo, si tenemos

$$y = a + bx^2,$$

el segundo miembro nos da una forma conocida para f y

nos indica que, dado un valor particular de x , hay que elevarlo al cuadrado, multiplicar el resultado por b , agregarle a , y que de este modo obtendremos el valor de y , que corresponde al valor de x .

Cuando la función f está definida y representa un conjunto de operaciones aritméticas aplicadas á x , estos símbolos de funciones algebraicas pueden aplicarse sin dificultad y con rigor matemático á la imaginaria $x + y\sqrt{-1}$, y se obtendrá una imaginaria de la misma forma $P + Q\sqrt{-1}$.

Porque con estas imaginarias se pueden efectuar las operaciones aritméticas, indicadas, según se demuestra en Algebra, sin que resulten jamás contradicciones en una serie lógica rigurosamente exacta.

En una palabra, hay un *convenio* perfectamente sólido y lógico para sumar, restar, multiplicar y dividir, elevar á potencia y extraer raíces de una imaginaria $x + y\sqrt{-1}$ y siempre resulta, y esto es importantísimo, una expresión $P + Q\sqrt{-1}$.

Estas son nociones elementales en que no hemos de insistir.

Nosotros en las definiciones anteriores, por ejemplo, en la definición geométrica, no hemos hablado de *operaciones*, sino de *correspondencias*, y esto es lo que significa el símbolo f entre puntos ó imaginarias de los planos de las x , y , y de las P , Q .

Pero en el análisis y en sus aplicaciones á la Física Matemática, el signo f significa ya operaciones efectuadas sobre la variable independiente imaginaria $x + y\sqrt{-1}$.

Mientras se trata de operaciones aritméticas, ya hemos visto que no hay ninguna dificultad; pero cuando se trata de relaciones transcendentales no sucede lo mismo.

¿Qué significa $(x + y\sqrt{-1})^2$, es decir, el cuadrado de una imaginaria?

Ya lo sabemos por álgebra: significa $x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1}$ expresión de la forma $P + Q\sqrt{-1}$, siendo $P = x^2 - y^2$ y $Q = 2xy$.

Y análogamente para toda operación algebraica.

Y tampoco hay dificultad geoméricamente; no hay más que elevar al cuadrado el módulo r y duplicar el argumento θ , para este caso de elevación al cuadrado.

¿Pero qué significa, por ejemplo,

$$\begin{aligned} & \text{ó} \quad \cos(x + y\sqrt{-1}) \\ & \quad \quad \quad e^{x + y\sqrt{-1}} \\ & \text{ó} \quad \log(x + y\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

ó una función clíptica, ó una abeliana, ó una transcendente cualquiera de la variable compleja $x + y\sqrt{-1}$?

Y claro es que sólo tratamos ahora del caso de una variable independiente.

Estas expresiones, por el pronto nada significan, ni lógicamente ni geoméricamente: ni conocemos ningún fenómeno físico en que aparezcan y en que se determine su realidad.

Estas expresiones, es decir, sus significaciones, dependen de la voluntad del matemático, de lo que el matemático resuelva, del convencionalismo que establezca.

Claro es que no es un convencionalismo arbitrario; tiene un carácter de necesidad lógica; á saber: que no contenga ninguna contradicción.

Y por otra parte, para que estos convencionalismos sean fecundos y filosóficos, es preciso que contengan, como casos particulares, á todos los convencionalismos anteriores. Así, *la imaginaria contiene á la cantidad real* con sólo igualar á cero el coeficiente de $\sqrt{-1}$.

Y de igual suerte las funciones transcendentales de una cantidad imaginaria $x + y\sqrt{-1}$, deben contener á su vez todas las transcendentales análogas de cantidades reales, cuando se anula la cantidad ó coeficiente que multiplica á $\sqrt{-1}$.

Por de contado, y esto que vamos á decir está comprendido en rigor en la condición primera, es preciso que las operaciones transcendentales, que ejecutemos sobre la variable imaginaria, den una expresión de la misma forma $P + Q\sqrt{-1}$; sin que aparezcan nuevos símbolos no definidos.

Del grupo de las imaginarias no se debe salir, ni por operaciones aritméticas, ni por operaciones transcendentales, ni por operaciones geométricas.

Del grupo de las imaginarias decimos y como caso particular de las expresiones reales.

No es un absurdo, por ejemplo, obtener por una serie de cálculos

$$A = f(x + y\sqrt{-1})$$

si el segundo miembro da por resultado,

$$P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1}$$

aunque A sea una cantidad real; porque esta relación analítica queda satisfecha, haciendo que en

$$A = P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1}$$

se verifique

$$\begin{aligned} A &= P(x, y) \\ 0 &= Q(x, y)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

de donde

$$A = P$$

$$Q = o.$$

En rigor, el simbolismo imaginario es un simbolismo sintético, que opera de una vez, por decirlo de este modo, sobre dos cantidades reales, y á resultados reales puede llegarse siempre por el convencionalismo imaginario, ni más ni menos que en la figura geométrica (fig. 27) la correspondencia imaginaria entre (x, y) por una parte y (P, Q) por otra, se refiere á un problema real: el de transformación de figuras.

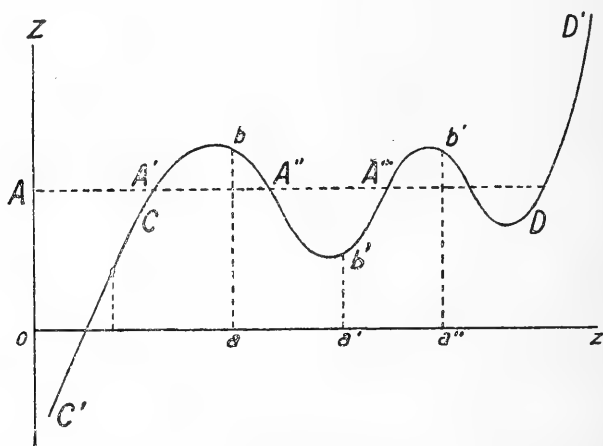


Figura 28.

En efecto, si á cada punto A (fig. 27), corresponde un punto B , á toda curva C , corresponderá una curva D .

Por lo demás, las funciones imaginarias de una variable independiente, pueden ser uniformes.

Y la función recíproca puede serlo ó no serlo.

Asimismo una función imaginaria puede ser multiforme.

Todas estas son nociones, que supongo conocidas por el estudio del cálculo diferencial y el integral.

Nos limitaremos, por ahora, á recordar que si Z es función z , sean reales ó imaginarias ambas variables, Z será uniforme respecto á z , ó en todo el plano, ó en una región, cuando á cada valor de z en el plano ó en la región correspondiese un solo valor perfectamente determinado para Z .

Y Z será función multiforme cuando á cada valor de z correspondan diversos valores para Z .

Las funciones uniformes también se llaman en griego, para mayor claridad, funciones monodromas.

La figura 28 da una idea perfectamente clara de esta clasificación.

La curva $C' D'$ puede representar unas y otras funciones.

Si z es la abscisa y Z la ordenada, Z será uniforme respecto á z , porque á las abscisas oa, oa', oa'', es decir, á cada una de ellas no corresponde más que una ordenada Z , á saber: ab para oa ; $a'b'$ para oa' y así sucesivamente.

En cambio, si considerásemos á z como función de Z , es evidente que z sería multiforme respecto á Z . Por ejemplo, al valor OA de Z , no correspondería un solo valor de z , sino una serie de valores AA', AA'', AA''', porque, como en la figura se ve, la recta que parte de A paralelamente al eje de las z , encuentra á la curva en muchos puntos.

Y esto, además, sólo en una región, porque, por ejemplo, para las ramas C' y D' , la z viene á ser uniforme respecto á la Z .

Todo esto son recuerdos de cosas, que supongo sabidas por mis alumnos y por mis lectores; pero volvamos á la definición convencional de las trascendentes imaginarias.

Sobre cuya definición aun insistiremos en la conferencia inmediata.

XXXIV. — Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Continuación.)

Teoremas sobre el movimiento de una agrupación social.

1.º — TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS Ó DE LA ENERGÍA

Al tratar del movimiento de un individuo, demostramos este *Teorema*, y vimos las principales consecuencias que de él se deducían. Para aplicar el Teorema, no ya al movimiento de un sólo individuo ó elemento, sino al de una agrupación de individuos y elementos sociales, hemos de empezar por definir lo que se entiende por *fuerza viva de la agrupación en un instante*. Se llama así la suma numérica de las fuerzas vivas que, en ese instante, tienen todos los individuos y elementos de la agrupación, y se escribe Σmv^2 . La *energía cinética* de la agrupación, en ese instante, es

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \Sigma \frac{1}{2} mv^2;$$

es la suma de las energías cinéticas de sus individuos y elementos.

Individualizando estos elementos, y aplicando á todos y cada uno de los individuos el *Teorema* para su movimiento elemental, y sumando, podrá enunciarse el resultado de este modo:

La mitad del incremento muy pequeño (positivo, negativo

ó nulo) que experimente la fuerza viva de una agrupación social, es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales efectivos realizados por todas las fuerzas exteriores é interiores que hayan actuado simultáneamente en el movimiento elemental.

O de otro modo:

El incremento muy pequeño (positivo, negativo ó nulo) de la energía cinética de una agrupación social, es igual á la suma algebraica de los trabajos elementales efectivos realizados por todas las fuerzas exteriores é interiores que hayan actuado simultáneamente en el movimiento elemental.

Se comprende que aparezcan en este enunciado los trabajos de las *fuerzas interiores* de enlace; porque para haber considerado *como libres* á todos y cada uno de los individuos y elementos de la agrupación—y aplicarles el Teorema—era preciso antes haber reemplazado la acción de los enlaces por esas fuerzas.

Se deduce del *Teorema*:

1.º Que si en un movimiento elemental de la agrupación predominan los trabajos elementales motores (positivos) de unas fuerzas, sobre los trabajos elementales resistentes (negativos) de otras, la energía cinética de la agrupación aumentará, porque su incremento será positivo.

2.º Que si predominan los trabajos elementales resistentes sobre los motores, la energía cinética de la agrupación disminuirá, porque su incremento será negativo.

3.º Que si hay compensación entre los trabajos elementales motores y los resistentes, de unas y otras fuerzas, la energía cinética de la agrupación no se alterará, porque su incremento será nulo.

Se sabe que en la energía cinética sólo influyen las *masas* y las *magnitudes* de las respectivas velocidades de individuos y elementos constitutivos de la agrupación.

El Teorema se aplicará á un transcurso de tiempo cualquiera, durante el cual hayan estado trabajando todas las fuerzas

exteriores é interiores de un modo continuo, haciendo la integración desde el instante t_0 hasta el instante t_1 .

Si recordamos lo que se llamó *trabajo total* de una fuerza, el resultado de esa integración se enuncia así:

El incremento de la energía cinética de una agrupación social desde un instante t_0 hasta otro posterior t_1 , es igual á la suma algebraica de los trabajos totales (motores y resistentes) realizados en ese transcurso de tiempo por todas las fuerzas exteriores é interiores que hayan estado actuando.

Y así vemos que en el instante t_1 , la energía cinética de la agrupación será mayor, igual ó menor que la que tenía en el instante t_0 , según que el *trabajo total* hecho haya sido positivo, nulo ó negativo. Sólo en el caso especial de que haya *compensación permanente* de trabajos motores y resistentes, habrá *conservación de la energía cinética* de la agrupación *para todo su movimiento*.

En la *Primera parte de la Dinámica*, cuando solamente se trataba de ver las alteraciones de la energía cinética de un individuo en su movimiento de modificación sobre un determinado asunto, era fácil—fundándose simplemente en el Teorema de la energía—deducir reglas para la *mayor eficiencia* de las fuerzas, cuando se quisiera imprimir mayor energía cinética en el asunto al individuo; ó, por el contrario, se quisiera quitarle energía cinética. Pero aquí, en esta *Segunda parte de la Dinámica*, en que se trata de ver las alteraciones de la energía cinética de toda una agrupación social, con los movimientos de modificación (en un asunto cualquiera) de todos sus individuos y elementos á la vez, hay que limitarse á decir esto:

Que si se desea un aumento de energía cinética (en un asunto) para el conjunto de toda la agrupación, debe de procurarse que haya muchas fuerzas exteriores y muchas interiores que den grandes trabajos positivos; y lo contrario, cuando se quiera disminuir la energía cinética en conjunto.

Bien entendido siempre, que aquí—lo mismo que en la

Primera parte—sólo cuentan las fuerzas psíquicas sociales de cualquier género que sean, y tanto exteriores como interiores, que influyan *real y efectivamente* en los movimientos de modificación psíquica de los individuos ó elementos á quienes se apliquen, para que hagan trabajos *efectivos*.— Esto hace comprender la necesidad de conocer, para una *Dinámica social práctica*, no ya tan sólo los temperamentos particulares fisiológicos y psíquicos de los individuos, y el temple ó modo de ser psíquico de cada elemento social, sino además el tono psíquico colectivo de la agrupación particular que se considere, porque este repercute á su vez sobre los individuos y elementos constitutivos.

Se ve la inmensa dificultad de todo esto.

No decimos más ahora acerca del *Teorema de la energía*; reservando para más adelante algunas ampliaciones concernientes á las variadísimas formas en que se presenta la energía en la Naturaleza, y á sus transformaciones mutuas.— Entonces veremos cómo es concebible la *energía universal*, y la extensión y alcance que se podría dar, á mi entender, al principio de la *Conservación de la energía total* en nuestro Mundo.

*
* *

2.º—TEOREMAS DE LAS CANTIDADES DE MOVIMIENTO.

Recordando ante todo las definiciones (que dimos en la Primera parte) de *cantidad de movimiento* de un individuo— ó elemento individualizado— en un instante; y de *impulsión elemental* de una fuerza; téngase presente que una y otra son cantidades vectoriales que se representan por vectores localizados en la posición que el individuo ó elemento tiene en ese instante.

Este simple recuerdo basta para comprender que no se puede adoptar con los *Teoremas de la Primera parte*, que se

referían á las cantidades de movimiento de los individuos y á las impulsiones de las fuerzas aplicadas á él, el mismo procedimiento que se ha empleado con el *Teorema de la energía*, para aplicarlo á una agrupación social; porque no tendría sentido hablar de la cantidad de movimiento de una agrupación de individuos y de elementos en un instante dado, como de una *suma numérica*, toda vez que en el concepto de cantidad de movimiento no entra solamente la noción de magnitud (como ocurría en el concepto de *energía cinética*, que es cantidad escalar) sino también la noción de *dirección y sentido*, por ser cantidad vectorial; y siendo así, es claro que cada individuo ó cada elemento social tiene, en un instante, su cantidad de movimiento definida en *magnitud, dirección y sentido*; y como en una agrupación de individuos y elementos son distintas *en todo* sus cantidades de movimiento respectivas sobre un mismo asunto en el mismo instante, no cabe hablar de suma numérica de esas cantidades de movimiento, como se pudo hablar de suma numérica de energías cinéticas, para definir en un instante la energía cinética de una agrupación social.

Esto que decimos nos lleva á pensar, como en la *Mecánica racional*, que si se trasladaran á un mismo punto (sea individuo ó elemento individualizado, real ó ficticio de la agrupación) todas las cantidades de movimiento de los individuos y elementos sociales con sus propias y respectivas magnitudes, direcciones y sentidos; y se compusieran como concurrentes, por la regla para la composición de velocidades (*), se tendría lo que se llama la *resultante de traslación* (que sería la *suma vectorial*) de las cantidades de movimiento. A esta resultante ó suma vectorial es impropio darle el nombre de cantidad de movimiento de la agrupación en ese

(*) En cada cantidad de movimiento, la magnitud de la velocidad está afectada, según se sabe, de un coeficiente numérico, que es la masa.

instante. Pero si hubiera en la agrupación social que se considere, y para el asunto de que se trate, un individuo ó elemento que por *su posición* (y con respecto á toda la agrupación) pudiera ser mirado en ella en cada instante, como *su centro de masas*, vulgarmente llamado centro de gravedad, ese individuo ó elemento (real ó ficticio), sería el más indicado para hallar en él aquella resultante de traslación ó suma vectorial de todas las cantidades de movimiento en cada instante, porque dicha resultante ó suma nos daría en *magnitud, dirección y sentido* la cantidad de movimiento del Centro de masas.

La dificultad que surge aquí en la *Dinámica social* es ésta: que las masas no están afectas (como en la *Mecánica racional*) á puntos que ocupan en cada instante sus posiciones *geométricas en el espacio*, sino á individuos y elementos sociales que tienen en cada instante sus *posiciones psíquicas en el asunto* que se considere, y al cual se refieren las masas; y parece difícilísimo hallar (por una convención que implique un procedimiento general aplicable á cualquier asunto de carácter social) el individuo ó elemento que pueda asimilarse al centro de masas. Para cada asunto habría que ver si se encontraba ese individuo ó elemento.

Si se piensa, por ejemplo, en el modo de ser político de una Nación, y en ésta se conciben los individuos y los varios elementos sociales constitutivos con sus masas respectivas para lo político, y se ven en un instante dado sus respectivas velocidades definidas en magnitudes, direcciones y sentidos, y en estas mismas direcciones y sentidos las correspondientes cantidades de movimiento, parece que se podría mirar el *Centro de masas políticas* de la Nación personificado en el Jefe del Estado, si éste tuviera efectivamente (como lo concebiremos para el razonamiento) una posición central para lo político á que nos referimos (*). Si se viera así, y se

(*) Claro es que un Jefe de Estado, así concebido, no depende de

le dotara, para esta concepción, de una masa que fuera la suma de las masas en el orden político de todos los individuos y elementos de la Nación, se podría tal vez decir que á ese Centro de masas políticas *debería de corresponderle* en cada instante una cantidad de movimiento político, que fuera en magnitud, dirección y sentido la resultante de traslación de las cantidades de movimiento de todos los individuos y elementos de la Nación, es decir, que fuera la suma vectorial de todas las cantidades de movimiento. Y de aquí se deduciría:

1.º Que la dirección y el sentido de la velocidad en el movimiento de modificación del Jefe del Estado — política-mente hablando — *deberían de ser* los indicados por esa cantidad de movimiento resultante; y

2.º Que la magnitud de su velocidad *debería de ser* la que resultara de dividir la magnitud de la cantidad de movimiento resultante, por la suma de todas las masas políticas nacionales.

Volviendo á la concepción *general* del Centro de masas para un asunto, en una agrupación social, habría de concebirse este Centro como solicitado por una fuerza motriz que fuera en cada instante la resultante de traslación ó suma vectorial de todas las fuerzas que, como vectores, actúan en toda la agrupación. Y así visto, se podría aplicar al movimiento del Centro de masas, todos los Principios y todos los Teoremas de la *Primera parte de la Dinámica*. La aceleración total J de su movimiento en cada instante, se obtendría dividiendo la resultante de traslación de todas las fuerzas *exteriores* aplicadas á la agrupación social por la suma de las masas de todos sus individuos y elementos. Por esto, si la

Constituciones escritas ni de procedimientos electorales. En todo caso dependería de la Constitución íntima de la nación, ó sea del modo de ser político de todos los individuos y de todos los elementos nacionales.

resultante de traslación ó suma vectorial fuera *nula* (por una compensación de las fuerzas que actúan), el Centro de masas no debería tener aceleración alguna, lo cual significa que *permanecería en reposo* si éste era su estado inicial, ó *conservaría la misma velocidad inicial que tuviera*.

El *Teorema general sobre cantidades de movimiento é impulsiones* de fuerzas, podríamos ahora enunciarlo del modo siguiente:

El incremento total muy pequeño que experimente el vector de la cantidad de movimiento del Centro de masas, es igual en magnitud, dirección y sentido, á la impulsión elemental de la resultante de traslación ó suma de todas las fuerzas que actúan sobre la agrupación social.

Se podría repetir aquí todo lo que dijimos en la *Primera parte* acerca de este Teorema; y podríamos reproducir aquellas representaciones gráficas.

Asimismo podríamos enunciar el *Segundo Teorema* sobre cantidades de movimiento, si sólo nos preocupáramos de su magnitud diciendo:

Que el incremento muy pequeño que experimente la magnitud de la cantidad de movimiento del Centro de masas, es igual á la impulsión elemental de la resultante de traslación de todas las fuerzas que actúan sobre la agrupación estimada (esa resultante de traslación ó suma) en la dirección de la velocidad de dicho Centro de masas.

Los dos Teoremas enunciados se aplicarían á un transcurso de tiempo cualquiera por el procedimiento de integración en el tiempo, que tan repetidas veces hemos empleado. No insistiremos.

La consideración del movimiento del Centro de masas de una agrupación, para un asunto social cualquiera, es de grandísimo interés; porque *su posición* en el asunto debería ser *central* en cada instante; *su velocidad* debería indicarnos, en cada instante, por su dirección y sentido, así como por su magnitud, cuál sería en ese instante el *estado de movimiento*

en el asunto en que se encontrara la agrupación *mirada en conjunto* (*).

La aceleración total (debida á la *influencia actual* de todas las fuerzas) debería de darnos idea del cambio que se estuviera operando en ese *movimiento de conjunto* de la agrupación social respecto del asunto.

Conviene advertir, sin embargo, que el movimiento muy complejo de toda una agrupación social en cualquier asunto, no quedaría visto *de un modo completo*, viendo tan sólo ese movimiento del Centro de masas; porque éste serviría meramente para indicarnos el movimiento colectivo *de conjunto*, que debe de ser mirado como un movimiento general de arrastre de que participa toda la agrupación.

Pero la velocidad efectiva del movimiento de cada individuo y de cada elemento social, sería una resultante de la velocidad de arrastre que le correspondiera, compuesta con la suya propia, relativamente al movimiento de conjunto de la agrupación, como dijimos en la Cinemática.—Claro es que si en un instante, y para un determinado asunto, los individuos y elementos de una agrupación no tuvieran velocidad alguna propia (relativa), ó la tuvieran con la misma dirección y sentido que la velocidad colectiva (de arrastre), aunque de magnitudes diferentes, todos, todos los individuos y elementos de la agrupación estarían moviéndose en ese instante en una misma dirección y sentido, que podría—en tal caso, con

(*) Quizás la velocidad común ó colectiva á que nos referimos concuerde con lo que ve Durkheim al definir todos los hechos sociales por la difusión que presentan en el interior de una agrupación. Para nosotros la velocidad colectiva se compone cinéticamente con otra, para dar la forma individual á que se refiere Durkheim. Hay que notar, sin embargo, que este distinguido sociólogo define el hecho social para las maneras de pensar, de sentir y de hacer en un instante dado, tales como sean en ese instante; es decir, estáticamente, si nos atenemos al sentido que hemos dado á esta palabra y al sentido en que hablamos siempre de movimiento en estos *Apuntes*.

toda propiedad — ser llamada *dirección y sentido del movimiento de la agrupación* en ese instante.

Volviendo al caso general, se ve que la energía cinética de toda la agrupación social, en un instante dado, podría quizá estimarse — como en la *Macánica racional* — formada por dos sumandos, á saber:

1.º *La energía cinética del Centro de masas, dotado, como hemos dicho, de la masa total de la agrupación, y con la velocidad del Centro en ese instante; y*

2.º *La suma de las energías cinéticas correspondientes á las velocidades relativas de los individuos y elementos sociales con sus masas respectivas.*

Respecto al movimiento de conjunto — ó sea el movimiento del Centro de masas —, diremos, para terminar estas indicaciones, que si los cambios de dirección en su movimiento no se operasen sino á largos intervalos de tiempo, el movimiento total no sería otra cosa que una sucesión de movimientos de dirección constante (representables por movimientos rectilíneos de un punto en el espacio); y cada movimiento parcial de esos, podría estudiarse con la simplificación consiguiente.

*
* *

3.º — TEOREMA DE LA MENOR ACCIÓN.

Este Teorema de la menor acción, que enunciamos en la *Primera parte* al tratar del movimiento de un solo individuo, se podría hacer extensivo también al movimiento de una agrupación social, si las fuerzas sociales fueran conservativas, y como dijimos entonces, asimilables á las de la Naturaleza, para las cuales se formula el Teorema de la menor acción.

Recordando que se llamó cantidad elemental de acción de

un individuo ó elemento social, el producto de su fuerza viva $m \cdot v^2$ en un instante t , por el intervalo θ á partir de ese instante; se llamará *cantidad elemental de acción de una agrupación* el producto de su fuerza viva $\Sigma m v^2$ en un instante, por θ ; y se llamará *cantidad total de acción* de la agrupación, á la integral ó suma de las cantidades elementales.

Para enunciar el Teorema (prescindiendo como siempre del rigorismo infinitesimal), se diría:

Que la cantidad total de acción de una agrupación en su movimiento real y efectivo, desde el instante t_0 (posición A en un asunto), hasta el instante t_1 (posición B en el mismo asunto), es un MÍNIMO; es decir, menor que la que correspondería á cualesquiera otros movimientos de sus individuos y elementos que pudieran haber hecho pasar la agrupación por otras trayectorias de la primera posición A á la última B.

Si fuera aplicable este Teorema, se deduciría—como para un solo individuo—esta consecuencia:

Que si la fuerza viva de una agrupación social se conservara constante en el transcurso de tiempo T que se emplee (desde el t_0 al t_1) en pasar de la posición A á la B, este paso se operaría por el movimiento real y efectivo *en un tiempo mínimo*, puesto que la cantidad total de acción

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Sigma m v^2) dt = \Sigma m v^2 (t_1 - t_0) = \Sigma m v^2 \times T,$$

habría de ser *mínima*, y $\Sigma m v^2$ se supone constante.

En el supuesto dicho, la realidad—con arreglo á las leyes de la Mecánica—daría *economía de tiempo*.

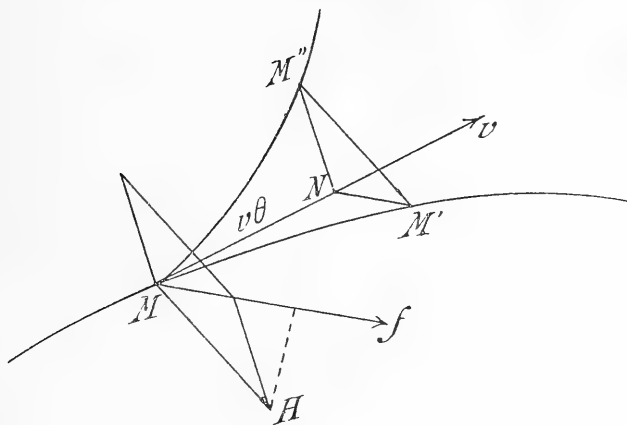
Nosotros tenemos que limitarnos á este simple apunte sobre el *Teorema de la menor acción*, visto para una agrupación social en estado de movimiento. Los desenvolvimientos en que entran algunos sociólogos, salen fuera del cuadro que nos hemos impuesto en estos *Apuntes*, y tienen, á mi entender, un sentido muy vago.

4.º—TEOREMA DEL MENOR ESFUERZO.

Antes de intentar la aplicación á las agrupaciones sociales de este *Teorema*, conocido generalmente bajo la denominación de *Principio de Gauss*, conviene recordar bien su significado en la *Mecánica racional*.

Si se considera el estado en que se encuentra en un instante dado t un sistema de puntos materiales entre los cua-

Fig. 6.^a



les median enlaces, se ve cada punto con su masa m en una cierta posición M , y con una cierta velocidad v (fig. 6.^a) Si se supone que en este instante t quede entregado á sí mismo *el sistema con sus enlaces*, se comprende que cada punto M en el movimiento elemental que realice durante un intervalo muy pequeño de tiempo θ , no seguirá con la velocidad v que tenía en el instante t (como lo haría si fuera libre, es decir, si estuviera desligado absolutamente del resto del sistema), porque *no es libre*, sino que se ve compelido á cam-

biar su estado por la fuerza (f) resultante de todas las acciones *interiores* que ejercen sobre él otros puntos del sistema por intermedio de los enlaces, entorpeciéndole en su movimiento. Recordando la teoría general del movimiento de un punto, se ve, pues, que en vez de recorrer el elemento de recta $MN = v \cdot \theta$ en la dirección y sentido de v , describe un elemento MM' de trayectoria curvilínea tangente á MN ; es decir, que en ese intervalo θ la *desviación* del punto ha sido $NM' = \frac{1}{2} J \cdot \theta^2$ por la influencia, y *en la dirección y sentido* de la fuerza f ; y esto se realizará (así se puede concebir) mediante un cierto *esfuerzo* por parte del punto M ; puesto que ya hemos dicho que la *tendencia natural* del punto por sí solo era ir á N (sin desviarse) y ocupar esta posición en el instante $t + \theta$, en vez de ocupar la posición M' .

Lo dicho del punto M se dice de todos y cada uno de los puntos del sistema. Y conviene fijar la atención en que todas las fuerzas que tienen por resultantes las f para los diversos puntos, son acciones mútuas dos á dos iguales y opuestas, y que se ejercen por medio de los enlaces; por lo cual se puede decir que la suma de los trabajos virtuales de todas ellas es *nula ó negativa*.

Si se considerase que el *esfuerzo elemental* soportado por cada punto, sea *proporcional á f y á NM'* ; como

$$f = m \cdot J = \frac{2}{\theta^2} \cdot m \times NM',$$

se diría que el *esfuerzo elemental* es *proporcional á $m \times \overline{NM'}^2$* . Adoptando esta expresión como *medida del esfuerzo elemental* para cada punto, se tendrá en $\Sigma m \times \overline{NM'}^2$ *el esfuerzo elemental para todo el sistema*.

Pues bien: si se piensa que el punto M *podía* — sin romper los enlaces — haber ido á cualquiera otra posición como la M'' , sufriendo otra desviación NM'' , á la cual corres-

ponderaría otro esfuerzo $m \times \overline{NM''^2}$, se demuestra que el esfuerzo para todo el sistema $\Sigma m \times \overline{NM''^2}$ sería mayor siempre que $\Sigma m \times \overline{NM'^2}$. Ó dicho en otros términos: que este esfuerzo para las desviaciones reales y efectivas de los puntos del sistema es un MÍNIMO, con relación á todas las desviaciones posibles (*).

En esto consiste el *Principio de Gauss*.

Y se ve que ese esfuerzo mínimo $\Sigma m \times \overline{NM''^2}$ lleva consigo el mínimo de $\Sigma f \times NM'$, porque $NM' = \frac{\theta^2}{2} \times \frac{1}{m} \times f$ y, por tanto,

$$m \cdot \overline{NM''^2} = m \cdot \left[\frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{f}{m} \right]^2 = \frac{\theta^2}{2} \left[\frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{f^2}{m} \right] = \frac{\theta^2}{2} \cdot (f \cdot NM').$$

(*) La demostración que se da ordinariamente, consiste en observar que:

$$\overline{NM''^2} = \overline{NM'^2} + \overline{M'M''^2} - 2NM' \times M'M'' \times \cos \overline{NM' \cdot M'M''};$$

multiplicando por cada masa m , y haciendo la suma para todos los puntos del sistema, se tiene:

$$\Sigma m \times \overline{NM''^2} = \Sigma m \times \overline{NM'^2} + \Sigma m \times \overline{M'M''^2} - 2 \Sigma m \times NM' \times M'M'' \times \cos f \cdot \overline{M'M''}.$$

El último término es nulo ó negativo, porque según hemos dicho, la suma de los trabajos virtuales de todas las resultantes f , que se equilibran en el sistema, debe de ser nulo ó negativo, y por tanto

$$\Sigma f \cdot MH \cdot \cos \overline{f \cdot MH} \leq 0;$$

y como

$$MH = M'M'' \quad \text{y} \quad f = m \times NM' \times \frac{2}{\theta^2},$$

se ve que

$$\Sigma m \times NM' \times M'M'' \cos \overline{f \cdot M'M''} \leq 0.$$

Por consiguiente,

$$\Sigma m \times \overline{NM''^2} > \Sigma m \times \overline{NM'^2};$$

es decir, que esta última expresión es el *esfuerzo mínimo*.

Por lo cual el principio de Gauss se podría enunciar diciendo:

Que el trabajo que se desarrollaría en conjunto (por todas las fuerzas de enlace) á consecuencia de las desviaciones, sería un MÍNIMO en el movimiento real.

Recordado todo lo que precede, su aplicación á las agrupaciones sociales consideradas como sistemas de individuos y elementos enlazados entre sí, nos llevaría á pensar: Que si en un instante dado t se dejara una agrupación *entregada á sí misma con sus enlaces*, el movimiento elemental de modificación que tendría en un intervalo muy pequeño de tiempo θ , es decir, *el conjunto de los cambios muy pequeños DE POSICIÓN de los individuos y elementos sociales constitutivos*, sería tal que correspondiera al *mínimo esfuerzo* de la agrupación tomada en conjunto. Entendiendo bien que el *esfuerzo* de cada uno de los individuos y elementos, por sentirse desviado de la posición á que habría llegado si no se le hubiera entorpecido por los enlaces sociales, se estima proporcional á su masa para el asunto que se considere, y al cuadrado de la desviación elemental efectiva que experimente, respecto de la posición que hubiera tenido si hubiera quedado, en el instante t , desligado de toda la agrupación.

O bien se podría pensar:

Que el trabajo que harían todas las fuerzas sociales de enlaces en la agrupación, por virtud de las desviaciones de todos los individuos y elementos sociales sería un MÍNIMO.

Como dijimos respecto del *Teorema* anterior, no podemos apuntar nada más respecto de este *Principio de Gauss*. Los sociólogos suelen tratar de él extensamente, aunque siempre con cierta vaguedad, y fuera del terreno positivo en que nosotros nos hemos colocado.

Termino aquí la exposición detallada, y quizás fatigosa, que he hecho de las leyes del equilibrio y del movimiento de las agrupaciones sociales, bajo la acción de las fuerzas psíquicas y mediante los enlaces de la agrupación. Creo que la luz que esparcen á su alrededor las ideas de la *Mecánica racional* (que sólo se referían á un círculo restringido de la actividad de la Naturaleza), permite penetrar en aquellas regiones oscuras y desconocidas; y por eso yo me he aventurado, pensando en estas hermosas palabras del insigne Maudsley:

«La maravillosa armonía, la unidad y la continuidad que hay en el Todo misterioso que llamamos Naturaleza son tales, que basta formarse idea exacta y clara de un círculo restringido de la actividad de ese Todo, para que esa idea esparza inmediatamente á su alrededor una luz capaz de penetrar en otras regiones oscuras y desconocidas, contribuyendo de esta suerte á establecer y revelar á nuestra conciencia nuevas relaciones armónicas entre ella y el mundo exterior.»

(Continuará.)

XXXV.—La asimetría de los Tripletes de Zeeman.

POR MANUEL MARTÍNEZ-RISCO Y MACÍAS.

(Conclusión.)

IV

RESULTADOS

Aunque nada hemos dicho hasta aquí, además del triplete 5791 *u. A.*, estudiamos el triplete 5770 *u. A.* y el triplete central del nonete 5461 *u. A.* A los tres, que corresponden á rayas del mercurio, se refiere este capítulo.

Triplete 5791 *u. A.*

Este triplete es notable porque en él Zeeman, Gmelin y Jack (*) descubrieron, simultaneamente, el fenómeno de descomposición asimétrica que algunas rayas espectrales presentan. Gmelin fué quien primero dió á conocer la ley del desplazamiento hacia el rojo de la componente mediana de dicho triplete.

Según este físico, la variación de longitud de onda en cuestión es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo. De las últimas investigaciones de Zeeman (**), realizadas con un patrón de Fabry y Perot, y de nuestros experimentos, resulta también que los desplazamientos de la componente mediana siguen, dentro de los errores experimentales, una ley de forma cuadrática.

(*) Véase Voigt.—«Magneto-Optik», p. 178.

(**) P. Zeeman. — Changement de longueur d'onde de la raie médiane d'un triplet dans un champ magnétique, 1909.

Como hemos indicado en la Introducción, Zeeman llegó primeramente, trabajando con una red de Rowland, á una relación lineal entre el desplazamiento y la intensidad del campo actuante; pero, como el mismo Zeeman ha hecho ver, este método experimental tiene grandes causas de error, y puede ser sustituido con ventaja por el que empleó en sus últimos trabajos, que fué seguido luego por nosotros.

He aquí los resultados que obtuvimos:

		<i>H</i>	$\Delta \lambda_0$
		en Gauss.	en u. A.
Primer grupo.....	Experimento 1.º.....	9.770	0,0050
	— 2.º.....	10.300	0,0053
	— 3.º.....	23.500	0,0210
Segundo grupo.....	— 4.º.....	»	0,0230
	— 5.º.....	»	0,0220
	— 6.º.....	»	0,0210
	— 7.º.....	28.740	0,0337
	— 8.º.....	29.220	0,0362
Tercer grupo.....	— 9.º.....	29.320	0,0400
	— 10.º.....	30.250	0,0402
	— 11.º.....	29.560	0,0372

El cuadro siguiente da idea de la precisión lograda en la determinación de desplazamientos:

Número de orden del experimento.	Anillos empleados	Diámetros (en mm).			$x_o^2 - x_m^2$	$\Delta\lambda_o$
		Fotografía 1. ^a	Fotografía 2. ^a	Fotografía 3. ^a		
1.º	1.er anillo	1,799	1,770	1,797	0,100	0,0050
	2.º —	2,639	2,618	2,635	0,100	
2.º	1.er anillo	1,978	1,955	1,985	0,102	0,0053
	2.º —	2,751	2,738	2,765	0,110	
3.º	1.er anillo	4,990	4,722	4,953	2,423	0,0210
	2.º —	6,720	6,547	6,708	2,215	
4.º	1.er anillo	4,979	4,707	4,993	2,705	0,0230
	2.º —	6,742	6,559	6,735	2,394	
5.º	1.er anillo	4,870	4,598	4,863	2,546	0,0220
	2.º —	6,664	6,493	6,660	2,221	
6.º	1.er anillo	4,691	4,420	4,685	2,442	0,0210
	2.º —	6,555	6,371	6,530	2,222	
7.º	1.er anillo	1,507	1,265	1,512	0,677	0,0337
	2.º —	2,423	2,282	2,423	0,663	
8.º	1.er anillo	1,510	1,242	1,499	0,719	0,0362
	2.º —	2,410	2,255	2,410	0,723	
9.º	1.er anillo	1,721	1,941	1,723	0,802	0,0400
	2.º —	2,564	2,710	2,556	0,791	
10.º	1.er anillo	1,970	1,764	1,984	0,797	0,0402
	2.º —	2,726	2,578	2,731	0,801	
11.º	1.er anillo	2,022	1,840	2,032	0,723	0,0372
	2.º —	2,779	2,639	2,779	0,758	

Ya hemos dicho, en el capítulo III, que las fotografías 1.^a y 3.^a de cada serie fueron obtenidas sin campo y la 2.^a cuando actúa el campo. Debe exceptuarse el experimento 9.º, pues en ésta la fotografía 2.^a fué obtenida sin campo y las otras dos fueron hechas mientras el campo actuaba.

Para que sirva de ejemplo, á continuación vamos á calcular el valor de $\Delta\lambda_o$ correspondiente á uno de nuestros experimentos:

Experimento 11.º

($H = 29.560 G$; $f = 12 mm$; Placa núm. 33.)

Los diámetros han sido determinados haciendo cuatro series de lecturas para cada fotografía. Las lecturas *A* han sido hechas cuando la placa se movía en un sentido, y las *B*, cuando se movía en sentido opuesto.

Lecturas en mm.

		A	B	A	B	
Fotografía 1. ^a	$b_1 \dots$	44,140..	44,149..	44,145..	44,149	
	$u_1 \dots$	44,526..	44,526..	44,522..	44,526	
	$H = 0$	$a'_1 \dots$	46,545..	46,549..	46,545..	46,547
		$b'_1 \dots$	46,925..	46,925..	46,924..	46,926
Fotografía 2. ^a	$b_2 \dots$	42,787..	42,779..	42,781..	42,777	
	$H = 29.560 G$	$a_2 \dots$	43,185..	43,181..	43,185	43,183
		$a'_2 \dots$	45,026..	45,021..	45,023..	45,024
		$b'_2 \dots$	45,423..	45,418..	45,422..	45,417
Fotografía 3. ^a	$b_3 \dots$	41,167..	41,171..	41,170..	41,172	
	$H = 0$	$a_3 \dots$	41,544	41,540..	41,543..	41,541
		$a'_3 \dots$	43,577..	43,571..	43,575..	43,572
		$b'_3 \dots$	43,951..	43,952..	43,946..	43,947

Diámetros en mm.

$D_{11} =$	diámetro del 1.º anillo en la fotografía	$1.^a = a'_1 - a_1 = 2,022$
$D_{21} =$	— del 2.º —	$1.^a = b'_1 - b_1 = 2,779$
$D_{12} =$	— del 1.º —	$2.^a = a'_2 - a_2 = 1,840$
$D_{22} =$	— del 2.º —	$2.^a = b'_2 - b_2 = 2,639$
$D_{13} =$	— del 1.º —	$3.^a = a'_3 - a_3 = 2,032$
$D_{23} =$	— del 2.º —	$3.^a = b'_3 - b_3 = 2,779$

Cálculo de $\Delta\lambda_o$.

$$D_{1(13)} = \frac{D_{11} + D_{15}}{2} = 2,027 \dots D_{12} = 1,840$$

$$D_{2(13)} = \frac{D_{21} + D_{25}}{2} = 2,779 \dots D_{22} = 2,639$$

$$D^2_{1(13)} - D^2_{12} = 0,723.$$

$$D^2_{2(13)} - D^2_{22} = 0,758.$$

$$x^2_o - x^2_m = 0,740.$$

$$\Delta\lambda_o = \frac{\lambda_o}{8f^2} (x^2_o - x^2_m) = \frac{5791}{8 \cdot 12^2} 0,740 \text{ u. A} = 0,0372 \text{ u. A}$$

En la figura adjunta hemos señalado con circunferencias los puntos correspondientes á nuestras observaciones.

Los puntos indicados por cruces representan los resultados de las últimas investigaciones de Zeeman. Sus coordenadas se encuentran en el cuadro que sigue:

		<i>H</i> en Gauss.	$\Delta\lambda_o$ en u. A.
Primer grupo.....	Experimento 1.º...	12.890	0,0085
	— 2.º . .	12.890	0,0088
	— 3.º... .	14.160	0,0074
Segundo grupo.....	— 4.º... .	21.010	0,0169
	— 5.º... .	20.910	0,0210
	— 6.º... .	28.670	0,0367
Tercer grupo.	— 7.º... .	28.670	0,0358
	— 8.º... .	28.670	0,0360
	— 9.º... .	29.610	0,0353
	— 10.º... .	30.230	0,0406

Los resultados de Zeeman y los nuestros pueden ligar-

se, dentro de los errores experimentales, por la ecuación

$$\Delta\lambda_o = 0,1042_1 H^2, \quad (33)$$

que tiene la forma indicada por Voigt en la hipótesis de acoplamientos entre electrones de naturaleza distinta.

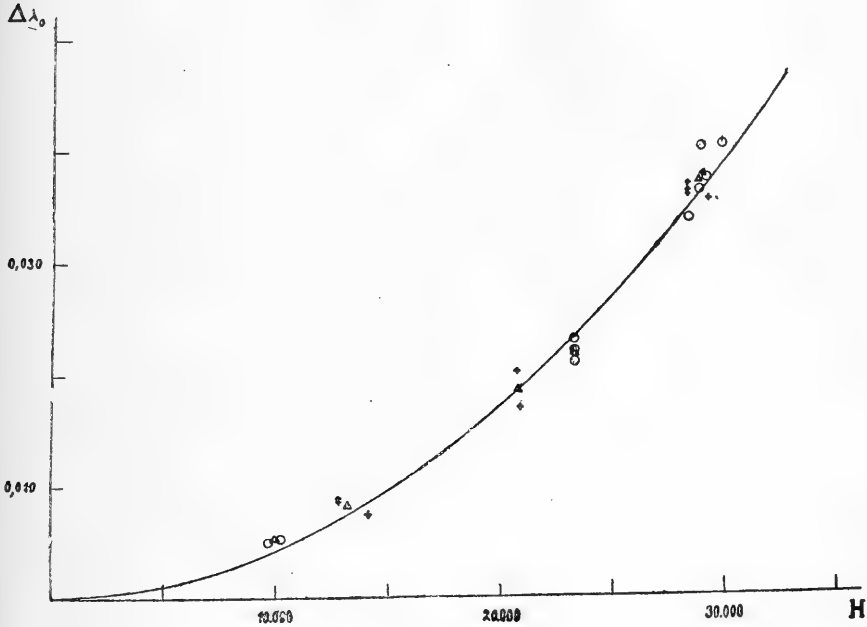


Figura 7.

En la figura 7 indicamos, mediante triángulos, la posición de los puntos que tienen por ordenada la media de las ordenadas, y por abscisa la media de las abscisas de los puntos de cada grupo.

En el cálculo del coeficiente de la ecuación (33) hemos empleado los centros de gravedad, prescindiendo solamente de los correspondientes á los dos primeros grupos de puntos.

La curva que representa la ley de asimetría es, en virtud de lo dicho, una parábola tangente en el origen al eje H .

Determinación de $\frac{e}{m}$

Partiendo de la fórmula $\frac{e}{m} = \frac{4\pi V}{H\lambda^2} \sqrt{\delta\lambda_1 \delta\lambda_2}$,

en que $\delta\lambda_1$ y $\delta\lambda_2$ son las diferencias de longitud de onda entre la componente mediana y las componentes exteriores de un triplete asimétrico producido por un campo de intensidad H , y en que V es la velocidad de la luz en el éter, hemos calculado, con los puntos de los dos terceros grupos, el valor de $\frac{e}{m}$, relación de la carga á la masa del electrón, para la raya 5791 u. A. Hallamos

$$\frac{e}{m} = 1,863 \cdot 10^7.$$

Triplete 5770 u. A.

Zeeman demostró que la componente mediana del triplete 5770 u. A., tiene, dentro de los límites de error, la misma longitud de onda que la raya no modificada.

Nosotros comprobamos este resultado. A continuación damos los números que obtuvimos en la medida de los diámetros de los anillos, en un experimento realizado con un campo fuerte.

Diámetros en mm.

	Sin campo. — (I)	Con campo de 28.740 Gauss. — (II)	Sin campo. — (III)
Primer anillo.	1,702	1,709	1,713
Segundo anillo.	2,533	2,537	2,542

Triplete central del nonete 5461 u. A.

De nuestros experimentos resulta que la componente mediana de este triplete se desplaza, aunque muy poco, hacia el rojo. No nos atrevemos, sin embargo, á afirmarlo de un modo categórico, hasta realizar nuevas medidas.

Comparábamos λ_0 con λ_m haciendo dos fotografías, una sin campo y otra con campo, empleando luz polarizada en un plano perpendicular á las líneas de fuerza. De todos nuestros experimentos resultaba que $\lambda_m > \lambda_0$, como indica el cuadro que sigue:

Diámetros en mm.

		Sin campo.	Con campo.
Experimento 1.º ...	Primer anillo.....	1,241	1,205
	Segundo anillo.....	2,227	2,209
— 2.º ...	Primer anillo... ..	1,986	1,963
	Segundo anillo....	2,717	2,712

Aunque, por tratarse de un efecto que se produce en sentido constante, no puede lógicamente atribuirse la asimetría encontrada á un error debido al cambio de espesor del patrón con la temperatura, creímos conveniente realizar un experimento que acaso pueda estimarse concluyente.

En este hicimos, no dos, sino tres fotografías: la 1.ª y 3.ª con campo, y la 2.ª sin campo. El resultado fué el siguiente:

Diámetro del primer anillo en mm.

Con campo.....	1,741	} $x_0 > x_m$, y, por tanto, $\lambda_m > \lambda_0$
Sin campo.....	1,804	
Con campo... ..	1,742	

Según este experimento, el desplazamiento de la compo-

nente mediana del nonete, tendría por valor, para un campo de 30.000 Gauss, aproximadamente,

$$\Delta\lambda_0 = 0,008 \text{ u. A.}$$

El tiempo empleado para obtener las tres fotografías de la serie era cortísimo, y por tanto, de haber habido un cambio de temperatura, habrá sido muy pequeño. Conviene, además, tener presente que, si actuase sobre el patrón parte del calor que se desarrolla por efecto Joule, al pasar la corriente por el hilo del electroimán, el cambio de diámetro que cada anillo experimentaría sería opuesto al correspondiente al desplazamiento probable de la componente mediana.

V

TEORÍAS DE LAS ASIMETRÍAS DE LOS TRIPLETES

Teoría de Dufour.—Este físico, partiendo de las fórmulas fundamentales de la teoría elemental que Lorentz dió del fenómeno de Zeeman, ha logrado explicar las diversas clases de asimetría que pueden presentar los tripletes. Como se verá, Dufour supone que el campo magnético hace variar las propiedades del átomo, y admite que esta modificación es, en general, anisótropa, aunque compatible con la simetría propia del campo.

De las ecuaciones de la teoría de Lorentz,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -fx + \frac{eH}{c} \frac{dy}{dt} \quad (34)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -fy - \frac{eH}{c} \frac{dx}{dt} \quad (35)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -fz, \quad (36)$$

deducidas en el cap. I (*), resulta que las componentes del triplete normal tienen por frecuencias

(*) Véase la página 459 y siguientes.

$$\begin{aligned}
 n_0 &= \sqrt{\frac{f}{m}} \\
 n_1 &= \sqrt{\frac{f}{m}} + \frac{1}{2} \frac{eH}{mc} \\
 n_2 &= \sqrt{\frac{f}{m}} - \frac{1}{2} \frac{eH}{mc}
 \end{aligned}$$

Admitamos con Dufour, que la presencia del campo hace cambiar el valor del coeficiente elástico, f , y que en el caso más general, es modificado diferentemente, según que corresponda á desplazamientos paralelos ó perpendiculares al campo. Substituyendo f por $f + \varphi_1(H)$ en las ecuaciones (34) y (35), y f por $f + \varphi_2(H)$ en la ecuación (36), resultan para ecuaciones del movimiento del electrón vibrante

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -[f + \varphi_1(H)]x + \frac{eH}{c} \frac{dy}{dt} \\
 m \frac{d^2y}{dt^2} &= -[f + \varphi_1(H)]y - \frac{eH}{c} \frac{dx}{dt} \\
 m \frac{d^2z}{dt^2} &= -[f + \varphi_2(H)]z
 \end{aligned} \right\} (37)$$

Las frecuencias de las componentes del triplete deben, según esto, expresarse así:

$$\begin{aligned}
 n'_0 &= \sqrt{\frac{f + \varphi_2(H)}{m}} \\
 n'_1 &= \sqrt{\frac{f + \varphi_1(H)}{m}} + \frac{1}{2} \frac{eH}{mc} \\
 n'_2 &= \sqrt{\frac{f + \varphi_1(H)}{m}} - \frac{1}{2} \frac{eH}{mc}
 \end{aligned}$$

Tripletes simétricos en posición.

Para explicar la existencia de éstos, basta suponer que

$$\varphi_1(H) = \varphi_2(H) = 0,$$

pues, en tal caso,

$$n'_0 = n_0$$

$$n'_1 = n_1$$

$$n'_2 = n_2$$

Tripletes simétricos, con eje de simetría diferente de la raya espectral original.

Si $\varphi_1(H) = \varphi_2(H) = \varphi(H)$,

$$n'_2 - n'_0 = n'_0 - n'_1 = \frac{n_2 - n_1}{2}$$

$$n'_0 - n_0 = \sqrt{\frac{f + \varphi(H)}{m}} - \sqrt{\frac{f}{m}} \leq 0.$$

El triplete será, pues, simétrico en posición, pero su eje de simetría no coincidirá con la raya inicial. La separación específica del triplete será la misma que si no hubiese experimentado desplazamiento alguno.

Si admitimos que el término $\varphi(H)$ es muy pequeño, comparado con f , podremos escribir:

$$n'_0 - n_0 = \sqrt{\frac{f}{m}} \frac{\varphi(H)}{f},$$

ó también

$$\lambda'_0 - \lambda_0 = K \varphi(H),$$

siendo K una constante cuyo valor depende de la naturaleza del cuerpo y de la raya espectral considerada.

Desarrollando $\varphi(H)$ en serie y prescindiendo de los términos en que H lleve exponente mayor que 2, tendremos:

$$\lambda'_0 - \lambda_0 = K(AH + BH^2).$$

Ahora bien; los coeficientes de las potencias impares de H deben ser cero; porque, en otro caso, al cambiar el sentido del campo, cambiaría también de posición el triplete, circunstancia que no puede admitirse á causa de la simetría propia del campo magnético. Por tanto,

$$\lambda'_0 - \lambda_0 = (KB)H^2.$$

El desplazamiento del triplete varía, pues, en función del campo, según una ley cuadrática.

Tripletes asimétricos en posición, con componentes exteriores equidistantes de la raya inicial.

El desplazamiento de la componente mediana de un triplete se explica con sólo admitir que

$$\varphi_1(H) = 0$$

y que

$$\varphi_2(H) \leq 0,$$

porque entonces

$$n'_1 = n_1, \quad n'_2 = n_2 \quad \text{y} \quad n'_0 \leq n_0.$$

Por un razonamiento completamente análogo al que hemos hecho anteriormente, llegaríamos á la relación

$$\lambda'_0 - \lambda_0 = K'H^2.$$

Esta nos dice que el desplazamiento productor de la asimetría, varía proporcionalmente al cuadrado del campo.

Tripletes asimétricos en posición, con componentes exteriores que ocupan posiciones asimétricas respecto de la raya espectral original.

Cuando

$$\varphi_1(H) \cong \varphi_2(H), \quad \varphi_1(H) \cong 0 \quad \text{y} \quad \varphi_2(H) \cong 0,$$

las ecuaciones (37) dan un triplete cuya componente mediana tiene, respecto de la raya original, un desplazamiento expresable por la fórmula

$$(\Delta\lambda)_1 = \lambda'_0 - \lambda_0 = K\varphi_2(H)$$

mientras que el doblete que forman las componentes exteriores, admite como eje de simetría una línea cuyo desplazamiento, que suponemos también valuado á partir de la raya inicial, es

$$(\Delta\lambda)_2 = K\varphi_1(H).$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en los casos precedentes, se demuestra que

$$(\Delta\lambda)_1 \quad \text{y} \quad (\Delta\lambda)_2$$

son proporcionales al cuadrado del campo.

Asimetrías de intensidad.—La teoría de Dufour permite explicar las asimetrías de intensidad que presentan algunos tripletes. Véase el artículo publicado por Dufour en el *Journal de Physique*, 4.º serie, t. IX, Abril 1910, p. 293.

Teoría de Voigt (*). — Voigt ha explicado, *para el efecto inverso*, las diversas asimetrías encontradas hasta aquí en los tripletes, suponiendo la existencia de acoplamientos entre electrones de clases distintas.

(*) Véase W. Voigt: *Magneto-und Electrooptik*, pág. 258 y siguientes, 1908.

siendo

$$\begin{aligned} f_{jj} &= f, & f_{jk} &= -f_{kj} \\ g_{jj} &= g, & g_{jk} &= +g_{kj}. \end{aligned}$$

Los parámetros f_{jj} son, como los h_{jj} de las (38), constantes de amortiguación, independientes del campo; los f_{kj} , para $k \geq j$, y todos los g_{jk} , deben suponerse funciones lineales de la intensidad del campo. Puede verse fácilmente que los parámetros $g_{jj} = g$ miden la acción directa del campo magnético sobre cada electrón. Voigt denomina acoplamientos de primera clase á los correspondientes á los parámetros f_{jk} , y acoplamientos de segunda clase á los definidos por los g_{jk} .

Concretándose al caso de dos electrones de distinta clase ó de períodos propios diferentes, Voigt hace ver que la presencia de acoplamientos entre las componentes normales de las vibraciones basta para explicar las varias asimetrías que han sido observadas en los tripletes.

Las fórmulas (38) y (39) no comprenden — como ya hemos indicado — el caso en que los electrones vibrantes son de distinta clase; pero pueden ser fácilmente generalizadas. Tratándose, por ejemplo, únicamente de dos electrones, substituiríamos las fórmulas (39) por las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} m x'' + kx + h x' + f_0 \bar{x} + g y' + g_0 \bar{y}' &= eX \\ m \bar{x}'' + \bar{k}\bar{x} + \bar{h} \bar{x}' - f_0 x' + g_0 y' + g \bar{y}' &= eX \\ m y'' + ky + h y' - g x' - g_0 \bar{x}' + f_0 \bar{y}' &= eY \\ m \bar{y}'' + \bar{k}\bar{y} + \bar{h} \bar{y}' - g_0 x' - g \bar{x}' - f_0 y' &= eY \end{aligned} \right\} (40)$$

k y \bar{k} son los parámetros de las fuerzas casi-elásticas; h y \bar{h} los de las fuerzas amortiguadoras; g y f son funciones lineales del campo, y g mide, como antes, la acción directa del campo sobre los electrones móviles.

Partiendo de las ecuaciones (40), Voigt deduce que los acoplamientos de primera y segunda clase de las componen-

tes que vibran normalmente á las líneas de fuerza, que están representados, respectivamente, por los parámetros f_0 y g_0 , dan ya por sí solos motivo á asimetrías de los tripletes de Zeeman.

Para explicar el desplazamiento de la componente mediana, es preciso recurrir á acoplamientos entre las componentes de vibración paralelas á las líneas de fuerza.

Cuando se presentan simultáneamente todos los acoplamientos mencionados, pueden originarse movimientos muy diversos de las rayas del triplete. Las fuertes asimetrías descubiertas por Zeeman (*) y observadas poco después por Gmelin (**), que no encuentran explicación dentro de la hipótesis de electrones no acoplados, pueden así explicarse por la suposición de acoplamientos entre electrones de clases distintas.

La teoría de Voigt es preferible á la de Dufour, por basarse ésta en hipótesis que no responden á hecho experimental alguno.

(*) Verslagen Akademie Amsterdam. Sesión del 29 de Febrero de 1908.

(**) *Physikalische Zeitschrift*, 9, 212, 1.º de Abril de 1908.

BIBLIOGRAFÍA

- P. Zeeman.** — De l'influence d'un champ magnétique sur la lumière émise par un corps. (Traducción de los «Verslagen» de la «Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam». — Octubre y Noviembre, 1896).
- Magnetic influence on light frequency. — *Phil. Mag.* (5) 43, 232, 1897.
 - Sur des doublets et des triplets, produits dans le spectre par des forces magnétiques extérieures. — *C. R.* 124, 1444, 1897. — *Arch. Néerl.* (2) 1, 383, 1898.
 - Appendice à la note: De l'influence d'un champ magnétique sur la lumière émise par un corps. — *Arch. Néerl.* (2) 1, 217, 1897.
 - Measurements concernig radiation-phenomena in the magnetic field (I). — *Phil. Mag.* (5) 45, 197, 1898.
 - Some observations concernig an asymmetrical change of the spectral lines of iron, radiating in a magnetic field. — *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* 2, 298, 1899.
 - Strahlung des Lichtes im magnetischen Felde. — Les prix Nobel en 1902. — *Stockholm.* 1904.
 - Recent progress in magneto-optics. Discourse delivered at the Royal Institution on Friday, March 30. — *Nature* 75, 138, 1906.
 - Magnetic resolution of spectral lines and magnetic force. — *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* 10, 351, 1907.
 - Observation of the magnetic resolution of spectral lines by means of the method of Fabry and Perot. — *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* 10, 440, 1907.
 - The law of shift of the central component of a triplet in a magnetic field. — *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* 11, 473, 1908.
 - New observations concerning asymmetrical triplets. — *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* 10, 566, 1908.
 - Change of wave-length of the middle line of triplets. — *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* 10, 574, 862, 1908.

- P. Zeeman.** — Recherches sur la décomposition magnétique des raies spectrales. — Arch. Néerl. (2) 13, 260, 1908.
- Spektralanalytische Untersuchung der magnetischen Felder auf der Sonne. — Phys. Ztschr. 9, 834, 1908.
- Changement de longueur d'onde de la raie médiane d'un triplet dans un champ magnétique. — Arch. Néerl. (2) 14, 267, 1909.
- Le degré de perfection de la polarisation circulaire des raies décomposées dans un champ magnétique. — Arch. Néerl. (2) 15 179, 1910.
- Le cas général de la décomposition magnétique des raies spectrales et son application en Astrophysique. — Jour. de Phys. Juin, 1911.
- P. Zeeman y B. Winawer.** — The magnetic separation of absorption lines in connexion with un spot spectra. — Proc. Roy. Acad. Amsterdam 12, 584, 1909; 13, 35, 162, 1910.
- H. A. Lorentz.** — Théorie des phénomènes magneto-optiques récemment découverts. — Rapports sur la physique de 1900. Congrès international de physique 3, 1.
- The theory of electrons and ist applications to the phenomena of light and radiant heat, 1909. — (B. G. Teubner-Leipzig).
- W. Voigt.** — Magneto und elektrooptik, 1908 (B. G. Teubner-Leipzig).
- A. Cotton.** — Le phénomène de Zeeman (Scientia: Phys. mathématique, n.º 5, 1899).
- Fabry y Perot.** — Sur un spectroscopie interférentiel. — C. R. 126. 331, 1898.
- Sur une méthode de détermination du numéro d'ordre d'une frange d'ordre élevé. — Sur la détermination des numéros d'ordre de franges d'ordre élevé. — C. R. 126, 1501, 1624, 1898.
- Sur une nouvelle méthode de spectroscopie interférentielle. — C. R. 126, 34, 1898.
- Etude de quelques radiations par la spectroscopie interférentielle. — C. R. 126, 407, 1898.
- Méthode pour la mesure optique de longueurs pouvant atteindre plusieurs décimètres. — C. R. 126, 1779, 1898.
- Théorie et applications d'une nouvelle méthode de spectroscopie interférentielle. — Ann. chim. phys. (7) 16. 115, 1899.
- Méthodes interférentielles pour la mesure des grandes épaisseurs et la comparaison des longueurs d'onde. — Ann. chim. phys. (7) 16, 289, 1899.

- Fabry y Perot.**—On the application of interference phenomena to the solution of various problems of spectroscopy and metrology. — *Astrophys. Journ.* 9, 87, 1899.
- Sur un nouveau modèle d'interféromètre. — *Ann. chim. phys.* (7) 22, 564, 1901.
- Mesures de longueurs d'onde en valeur absolue, spectre solaire et spectre du fer. — *Ann. chim. phys.* (7) 25, 98, 1901.
- Sur la séparation des raies spectrales très voisines à propos d'un travail récent de Mm. Lummer et Gehrcke.—*Journ. de Phys.* (4) 3, 28, 1904.
- Fabry y Buisson.** - Application de la méthode interférentielle à la mesure de très petits déplacements de raies... etc. *Astrophys. Journ.* 31, 97, 1910.
- Macé de Lépinay.** — Franges d'interférence et leurs applications métrologiques (*Scientia: Phys. mathématique, n.º 14, 1902*).
- Gmelin.** — Über die unsymmetrische Zerlegung der gelben Quecksilberlinie 5790 im magnetischen Felde. — *Phys. Ztschr.* 9, 212, 1908.
- Der Zeemaneffekt einiger Quecksilberlinien in schwachen Magnetfeldern Absolut gemessen.—*Ann. d. Phys.* (4) 28, 1079, 1909.
- Dufour.** — Dissymétries dans le phénomène de Zeeman présenté par certaines raies et certaines bandes des spectres d'émission des vapeurs. — *Journ. de Phys.* 9, 227, 1910.
- Michelson.** — Radiation in a magnetic field. — *Phil. Mag.* (5) 44, 109, 1897.
- Lichtwellen und ihre adwendungen, 1911.—(*J. A. Barth-Leipzig*).
- M.me H. B. Bilderbeek-van Meurs.** — La décomposition magnétique des raies du spectre ultraviolet du fer. — *Arch. Néerl* (2) 15, 358, 1911.
- Nagaoka.** — Difference between Longitudinal an Transversal Zeeman Effects in Helium Lines. — *Proc. Tokyo Math. Phys. Soc.* 2) 5, 144, 1909.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
XXXII.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia octava...	675
XXXIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia novena...	705
XXXIV.—Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo</i> y <i>Barceló</i> (continuación).....	736
XXXV.—La asimetría de los tripletes de Zeeman, por <i>Manuel Martínez-Risco</i> y <i>Macías</i> (conclusión).....	752

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID



TOMO X.—NÚM. 10.

Abril de 1912.

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXVI.— Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décima.

SEÑORES:

Con el objeto de buscar nuevas soluciones á la ecuación de Laplace, no porque por el momento hayamos de utilizarlas, aunque en otra ocasión las utilizaremos, habíamos considerado el caso particular en que dicha ecuación se reducía á dos términos; y anunciamos, que para esta última ecuación diferencial, la teoría de las funciones de una variable imaginaria nos podía suministrar un número infinito de soluciones particulares, y á este propósito recordamos las nociones más elementales de esta última teoría, quiero decir de la teoría de las funciones de variables complejas, presentando de paso algunas consideraciones sobre el concepto general de función.

Tal era el punto á que llegábamos al terminar la conferencia precedente.

Permitan mis alumnos que todavía amplíe algo aquellas consideraciones:

* * *

Bien sencillo es el concepto de función cuando se trata de las funciones que reciben el nombre de algebraicas; puesto que dado el caso único que consideramos, para simplificar, de una función de una sola variable independiente, conoci-

das son las operaciones, que sobre x hay que efectuar para obtener y , en la hipótesis, por de contado, de las funciones explícitas. Serán: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, y analíticamente ó mejor dicho, numéricamente, esto no ofrece dificultades de ningún género.

Pero, después de las funciones algebraicas, vienen las funciones trascendentes, que muchas de ellas se estudian en el álgebra elemental, y en que la relación entre la variable independiente y la función se expresa por manera muy distinta, que en las funciones algebraicas.

Presentemos algunos ejemplos:

Tomando sobre una circunferencia á partir de un origen un arco S , el seno de este arco, que llamaremos s , está perfectamente determinado por la construcción geométrica que lo define; de manera que, con perfecto derecho, podemos decir que s es función de S , y podemos escribir también

$$\text{sen} = f(\text{arc } S)$$

ó abreviadamente

$$s = f(S),$$

y f será el símbolo abreviado de una construcción geométrica que da s , conocida S .

Pero ¿qué operaciones hay que efectuar sobre cada valor de S para obtener s ?

¿Á qué sumas, restas, multiplicaciones, etc., en número finito hay que someter cada valor del arco S para obtener el valor correspondiente s del seno?

Pedirnos esto, es pedirnos un imposible, un absurdo, es un atentado, pudiéramos decir, contra la lógica matemática.

No hay operaciones aritméticas en número finito capaces de dar para cada valor de S el valor correspondiente de s .

S , ó mejor dicho, *seno*, ó abreviadamente *sen*, es aquí un

símbolo general de función, que simboliza la construcción geométrica que da el seno conocido el arco; pero no representa en manera alguna un conjunto finito de operaciones aritméticas.

Y es que el seno de un arco es una función *transcendente* bien definida; pero que pertenece, por decirlo de este modo, á una *familia*, á una *especie*, irreducible á las funciones algebraicas.

Y otro tanto podríamos decir de todas las demás líneas trigonométricas; y otro tanto de las exponenciales, y de los logaritmos; y en una elipse el arco es función de la abscisa, dado un origen, mas pertenece á otra familia de funciones, á las funciones elípticas.

Y las integrales en un número infinito de casos, como decíamos en el curso precedente, *definen* nuevas funciones transcendentales, que son nuevas familias ó nuevas especies, empleando términos de Historia Natural.

Y otro tanto podemos repetir aún de las abelianas.

En suma, después de las funciones algebraicas, que es la especie más sencilla, por decirlo así, de las funciones, nos encontramos series infinitas de funciones transcendentales, que, con rigor absoluto, jamás pueden expresarse algebraicamente ni unas por otras.

Recuerdan, y perdóneseme esta comparación, las especies vegetales y las especies zoológicas, según antes se consideraban: separadas eternamente unas de otras, y unas á otras irreducibles, y lo mismo podemos decir de los átomos de los cuerpos simples.

Sólo que en la botánica, en la zoología y en la química, las teorías modernas de la evolución, del transformismo y de la radio-actividad, van quebrantando aquel aislamiento de las especies orgánicas ó inorgánicas; y, en cambio, en matemáticas, jamás una verdadera transcendente de x podrá expresarse por una función algebraica, ni dos transcendentales de familia distinta podrán expresarse una por otra, salvando

desde luego los campos naturales de transición entre unas y otras regiones analíticas.

Así, volviendo al ejemplo primitivo, sería absurdo pretender que se expresase el *seno* de un arco por un *número finito* de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces del arco.

Claro es, que aquí nos referimos á representaciones analíticas rigurosas, y no á métodos de aproximación numérica de los que se emplean en las aplicaciones y en la práctica.

*
* *

Acabamos de afirmar, presentando un ejemplo, que jamás una función transcendente equivale rigurosamente á una función algebraica, y que así el *seno*, en nuestro ejemplo, jamás puede expresarse en función algebraica del *arco*, pero necesitamos hacer una reserva y una aclaración, que ya hemos hecho en esta conferencia.

Varias veces hemos empleado esta frase, que es fundamental: *Número finito* de operaciones aritméticas.

Así hemos afirmado, y seguimos afirmando, que, dado el valor de un arco en general, nunca puede expresarse el valor del seno *por operaciones en número finito*, aplicadas al número que expresa la longitud del arco.

Decimos en *número finito*, porque si el número de operaciones pudiera ser infinito, ó indefinido, entonces el *seno* puede expresarse como límite de un número infinito ó ilimitado de operaciones algebraicas.

En efecto, todos mis alumnos saben que el seno puede desarrollarse en serie convergente del arco x , en esta forma:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

y aquí el segundo miembro es una función algebraica ilimitada.

Para obtener *el seno de x*, las operaciones que se efectúan en el segundo miembro son sumas, restas, elevaciones á potencia y divisiones.

En rigor, el segundo miembro es un polinomio, y parece, según esto, que un seno puede expresarse por un polinomio.

Pero no es un polinomio de un número finito de términos, sino que es una *serie*; serie podemos decir de forma algebraica.

Y esto que hemos dicho del seno de un arco es aplicable á un número infinito de funciones transcendentales.

Por eso, para la misma teoría, para las aplicaciones y para las aproximaciones numéricas, tienen tanta importancia, importancia verdaderamente fundamental, los desarrollos en serie de las funciones transcendentales. Porque es, en cierto modo, y *al amparo del infinito*, convertirlas en funciones algebraicas.

Al *amparo del infinito* hemos dicho, y permóneseme aquí una comparación.

Las especies vegetales y animales en el mundo orgánico y los cuerpos simples en la Química, se afirmaba en la ciencia antigua que eran intransformables. En la ciencia moderna se supone, que con el auxilio del tiempo indefinido, de un pasado de duración enorme, de una sucesión de siglos, y en lenguaje acaso incorrecto, pero expresivo, con el auxilio del *tiempo infinito*, se explica la transformación de unas en otras.

Pues asimismo, en una especie de simbolismo superior, se comprende que mediante las series, es decir, con el auxilio del infinito también, pueden transformarse unas funciones transcendentales en otras ó en funciones algebraicas.

*
* * *

El infinito, ó si el infinito á manera de concepto absoluto no podemos comprenderlo, lo indefinido, ó bien diremos lo ilimitado, las series convergentes, suma algebraica de térmi-

nos que no acaban, y á esta forma pudiéramos agregar otras varias, como por ejemplo las fracciones continuas y las determinantes; el concepto del infinito, volvemos á repetir, y los que con él se enlazan son auxiliares grandemente fecundos en multitud de teorías matemáticas.

A las series ordinarias hemos acudido á propósito de las funciones trascendentes, para darles forma de funciones algebraicas, como otras veces pudiera acudirse á series trigonométricas para expresar por las fórmulas de Fourier multitud de funciones continuas y discontinuas.

Pues á las series vamos á acudir para dar una definición rigurosa y fecunda de las funciones de variables imaginarias.

Fijemos las ideas por medio de un ejemplo:

Si en

$$Z = f(z),$$

siendo

$$Z = X + Y \sqrt{-1},$$

$$z = x + y \sqrt{-1},$$

no tiene significación inmediata, forzosa y necesaria, el símbolo f , cuando expresa una función trascendente; si por ejemplo, el segundo miembro de

$$X + Y \sqrt{-1} = \text{sen} (x + y \sqrt{-1})$$

no tiene interpretación alguna directa, porque directamente, *à priori*, nada quiere decir el seno de un arco imaginario; á dicha expresión, por lo mismo que nada significa por sí, podemos darle una significación cualquiera, que nos conveniga, con tal que los términos de tal definición no conduzcan á contradicciones de ningún género.

Y la definición será esta:

sen $(x + y \sqrt{-1})$ simbolizará abreviadamente una serie de $x + y \sqrt{-1}$ de forma idéntica á la que define el seno de un arco real.

Es decir: que $\text{sen}(x + y\sqrt{-1})$ expresará

$$[x + y\sqrt{-1}] - \frac{(x + y\sqrt{-1})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Y como se demuestra que esta serie es convergente, más aún, absolutamente convergente; porque lo es la serie de los módulos, podremos emplear en el cálculo el símbolo

$$\text{sen}(x + y\sqrt{-1})$$

con una significación perfectamente determinada.

Mas aún, tendrá una forma algebraica, será una especie de polinomio indefinido.

Mas todavía, evidentemente esta serie, desarrollando las potencias se compondrá de una serie real y de otra serie también real como factor de $\sqrt{-1}$. De modo que en la ecuación

$$X + Y\sqrt{-1} = \text{sen}(x + y\sqrt{-1})$$

X é Y serán funciones reales perfectamente determinadas, serán las dos series á que acabamos de referirnos.

Esto se funda en que por razones de convergencia se puedan agrupar los términos en la forma indicada.

Y por último, mediante tal definición y definiciones análogas, para las demás líneas trigonométricas, se demuestra con facilidad suma, y por cálculos elementales, que á las variables imaginarias, ó si se quiere emplear esta otra frase, á los arcos imaginarios, se les puede aplicar todas las fórmulas de la trigonometría ordinaria.

Claro es que, como no escribimos un tratado de análisis y estamos siempre hostigados por el remordimiento, que en nosotros despierta una y otra digresión, no podemos descender á pormenores y hemos de contentarnos con apuntar ideas generales. Y con lo dicho y cerrando uno tras otro los

paréntesis que vamos abriendo, volvemos á aquel punto en que decíamos que, mediante la teoría de las funciones de variables complejas, era posible, casi á voluntad, encontrar una serie de soluciones para la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} = 0.$$

Y quizás lo hemos dicho demasiado pronto; porque aun nos queda por explicar otro concepto importantísimo que á poco que cediéramos á la tentación podría lanzarme á nuevas digresiones.

*
* *

Hemo definido las funciones algebraicas y transcendentales de una variable imaginaria, $x + y\sqrt{-1}$.

Pero es elemento importantísimo en el estudio de las funciones reales la teoría de las derivadas.

La derivada, que en las funciones de una variable independiente es el límite de la relación entre los elementos dy , dx , de las dos variables, marca la ley de variación en cada punto.

Es, en cierto modo, la ley interna de generación de la función misma. Demuestra cómo se forman los valores finitos y , x , creciendo ó decreciendo por elementos diferenciales.

Tan vital es, permítasenos la palabra, el concepto de derivada, que durante mucho tiempo, quizá un siglo, se consideró que toda función real tenía forzosamente una derivada. Esta proposición parecía un axioma, cuando menos un postulado, un resultado evidente del método intuitivo, porque en cada punto de una curva continua, salvo puntos singulares, se veía una tangente.

Y, sin embargo, ya lo hemos dicho varias veces, aquí la intuición caía en falta; hoy se conocen multitud de funciones

continuas que no tienen derivada. En el primer tomo de estas conferencias tratamos este punto.

Pues bien, ocurre plantear, respecto á las funciones de variables complejas, un problema análogo al que acabamos de indicar con relación á las funciones reales.

Para que este concepto de funciones complejas tenga un sentido y sea fecundo, no basta con lo que hemos dicho, es preciso que *definamos las derivadas* en estas funciones, y *que veamos si tienen derivadas*.

La definición de derivada para dichas funciones ha de ser, naturalmente, análoga á la de las funciones de variables reales.

$x + y\sqrt{-1}$ es la variable independiente, su incremento por lo tanto será $dx + dy\sqrt{-1}$

Esto no ofrece duda: en el cálculo de las imaginarias, el símbolo $\sqrt{-1}$ es como una constante cualquiera. Si se representa por $\sqrt{-1}$ por i , lo mismo da escribir $x + y\sqrt{-1}$ que escribir $x + yi$, y en esta función lineal, si x , y varían, la variación de la suma precedente será $dx + dyi$, ó bien $dx + dy\sqrt{-1}$, como antes hacíamos.

Este es el incremento infinitamente pequeño de la variable independiente; el incremento de la función será $dP + dQ\sqrt{-1}$, la relación de ambos incrementos

$$\frac{dP + dQ\sqrt{-1}}{dx + dy\sqrt{-1}}$$

y el límite de esta relación es precisamente lo que llamaremos *la derivada de la función compleja*.

Mas para pasar al límite, necesitamos suponer que dx , dy tienden hacia cero, y como x é y son, según suponemos, variables independientes, con independencia absoluta tenderán hacia cero los dos incrementos dx , dy ; lo cual introduce una indeterminación, que no existía en el caso de una variable

real, puesto que tenemos al mismo tiempo dos leyes de decrecimiento ó anulación independiente la una de la otra: la de dx y la de dy .

Así en la figura 29, en que geoméricamente tenemos en x, y la representación de la variable independiente $x + y\sqrt{-1}$, y en el sistema de los ejes P, Q , la representación de la función

$$P + Q\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1}),$$

si A es el punto representativo del valor $x + y\sqrt{-1}$, al cual suponemos que corresponde el punto A' ; el punto B , infinitamente próximo á A , corresponderá al incremento de la variable independiente $dx + dy\sqrt{-1}$, al cual incremento corresponderá á su vez $dP + dQ\sqrt{-1}$, que define el punto B' determinado por el punto B .

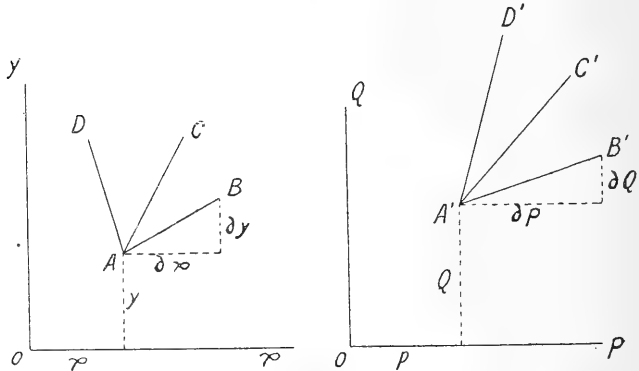


Figura 29.

Al anularse dx y dy , el punto B recorre la línea BA y el punto B' la $B'A'$.

Se comprende que el límite queda en este caso perfectamente determinado, y que para las direcciones $AB, A'B'$, la relación de los incrementos de las variables imaginarias tiende hacia un límite.

Pero es que la dirección AB es arbitraria; podíamos haber tomado AC, AD, \dots , á cuyas direcciones corresponden en el plano de las PQ , la $A'C', A'D', \dots$, y para cada dirección el límite en general será distinto.

Luego no puede decirse que exista para el punto A , es decir, para el valor de la variable imaginaria $x + y\sqrt{-1}$ una derivada única; existirán en A , correspondiente de A' , y alrededor de estos puntos infinitas derivadas, que dependerán de la orientación de AB , ó sea de la relación $\frac{dy}{dx}$ que la determina.

Esto mismo se ve analíticamente, porque hemos dicho que

$$\lim \frac{dP + dQ \sqrt{-1}}{dx + dy \sqrt{-1}}$$

es la derivada en el punto A ; pues bien, desarrollemos la expresión anterior.

El punto A' depende de A , es decir, que sus coordenadas P, Q , ambas, dependen de x, y ; así es que, en rigor, la derivada que buscamos será

$$\lim \frac{dP(x, y) + dQ(x, y) \sqrt{-1}}{dx + dy \sqrt{-1}}$$

Siendo P, Q funciones de las dos variables independientes x, y , tendremos

$$dP(x, y) = \frac{dP}{dx} dx + \frac{dP}{dy} dy$$

$$dQ(x, y) = \frac{dQ}{dx} dx + \frac{dQ}{dy} dy$$

y, por lo tanto,

$$\text{derivada en } A = \lim \frac{\left[\frac{dP}{dx} dx + \frac{dP}{dy} dy \right] + \left[\frac{dQ}{dx} dx + \frac{dQ}{dy} dy \right] \sqrt{-1}}{dx + dy \sqrt{-1}}$$

ó bien dividiendo numerador y denominador por dx

$$\text{derivada en } A = \lim \frac{\left[\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} \frac{dy}{dx} \right] + \left[\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dy} \frac{dy}{dx} \right] \sqrt{-1}}{1 + \frac{dy}{dx} \sqrt{-1}};$$

y por fin

$$\text{derivada en } A = \lim \frac{\left[\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} \right] + \left[\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \sqrt{-1} \right] \frac{dy}{dx}}{1 + \sqrt{-1} \frac{dy}{dx}}$$

En esta expresión se ve evidentemente lo que antes vimos en la figura 29: que la cantidad cuyo límite se busca, y, por lo tanto, dicho límite, dependerá en general de la relación $\frac{dy}{dz}$.

Variando esta relación variará la derivada, y para el punto A ó para otro punto cualquiera no será única y determinada.

Las funciones de variables complejas, en el caso más general no tienen derivada, para lo que podemos llamar cada punto imaginario, definido por $x + y\sqrt{-1}$, $P + Q\sqrt{-1}$.

No son estas las funciones que estamos acostumbrados á estudiar en el análisis, ni las que constituyen la gran masa de sus teorías.

Por eso, prescindiendo de las funciones complejas en general, *sólo vamos á tener en cuenta las que posean una derivada*, y para ello es preciso que $\frac{dy}{dx}$ desaparezca de la ex-

presión anterior, lo cual se consigue inmediatamente, suponiendo que P y Q son de tal naturaleza que

$$\frac{\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1}}{1} = \frac{\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \quad (1)$$

Es decir, que los cuatro coeficientes generales de numerador y denominador, son proporcionales; y entonces, substituyendo el valor de

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \sqrt{-1}$$

deducido de la ecuación precedente en la expresión de la derivada, tendremos

$$\text{derivada en } A = \lim \frac{\left[\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} \right] + \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} \right) \sqrt{-1} \cdot \frac{dy}{dx}}{1 + \sqrt{-1} \frac{dy}{dx}}$$

ó bien

$$\text{derivada en } A = \lim \frac{\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} \right) \left(1 + \sqrt{-1} \frac{dy}{dx} \right)}{1 + \sqrt{-1} \frac{dy}{dx}}$$

expresión de la que desaparece el factor que contiene $\frac{dy}{dz}$, y queda

$$\text{derivada en } A = \lim \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} \right)$$

ó suprimiendo la palabra límite que es inútil si la cantidad entre paréntesis se compone de derivados, que ya son por sí

límites de relaciones, tendremos, llamando Z á la función y z á la variable independiente,

$$\text{derivada en } A = \lim \frac{dZ}{dz} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1}$$

en que el segundo miembro es una cantidad perfectamente determinada si lo son P y Q , y además tienen derivada.

La indeterminación que procedía de $\frac{dy}{dx}$ ha desaparecido y la función Z tiene una derivada de la forma imaginaria ordinaria en que los dos términos dependen de x , y .

Claro es que esta derivada puede tener esta otra forma

$$\frac{dZ}{dz} = \left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \sqrt{-1} \right) \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

ó bien

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} \sqrt{-1}$$

según resulta de la relación (1).

En adelante no consideraremos más funciones imaginarias que las que tienen derivada, para lo cual es necesario y es suficiente que se verifique la relación (1); porque esta relación es necesaria y suficiente para que desaparezca $\frac{dy}{dx}$.

*
* *

Dicha relación (1), como es de forma imaginaria, se descompone en dos ecuaciones reales; en efecto, aquella relación se puede poner bajo esta forma

$$\frac{dP}{dx} \sqrt{-1} - \frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \sqrt{-1},$$

é igualando las partes reales y las partes imaginarias, tendremos las dos condiciones reales siguientes

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}; \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}. \quad (2)$$

Fijemos bien las ideas.

Estas dos condiciones son necesarias para que una función imaginaria

$$Z = P + Q \sqrt{-1} = f(x + y \sqrt{-1})$$

ó bien

$$Z = P(x, y) + Q(x, y) \sqrt{-1}$$

tenga una derivada.

Más claro: como P y Q , son funciones de x, y , las derivadas que entran en las relaciones (2) serán funciones perfectamente conocidas de x, y , tomando las derivadas que se indican, y entonces dichas ecuaciones (2) serán relaciones en x, y , que deberán ser satisfechas para todos los valores de x, y .

En la región en que las condiciones (2), se conviertan en identidades, es decir, para todo punto definido en estas regiones por $x + y \sqrt{-1}$, la función imaginaria Z tendrá una derivada. Si en otra región las condiciones (2), no quedaran satisfechas, no tendría derivada la función Z .

Como no apuramos el problema y nos contentamos tan sólo con dar ideas generales, tenemos que hablar forzosamente con cierta vaguedad.

Pero volvamos á las condiciones expresadas, que son fundamentales, que ya puede decirse que son clásicas, y que nos permitirán encontrar un número infinito de soluciones para la ecuación de Laplace, reducida á dos términos.

Acabamos de ver, que en la expresión imaginaria $P + Q\sqrt{-1}$, en que P, Q son funciones de x, y , estas funciones P y Q no pueden ser arbitrarias si la función $Z = P + Q\sqrt{-1} = f(x, +y\sqrt{-1}) = f(z)$, que de todas estas maneras se puede escribir, ha de tener una derivada.

Es forzoso que P y Q sean tales, que

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx},$$

efectuando las diferenciaciones con relación á P y Q , se convierten en identidades.

Si P y Q han de satisfacer á las condiciones precedentes, es claro que P y Q no pueden ser arbitrarias. Si arbitrariamente las escogiésemos para formar la función imaginaria,

$$P + Q\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1})$$

ésta sería una función imaginaria, pero no de las que generalmente se estudian en el análisis, porque esta función no tendría derivada, según hemos visto.

Y ocurre este problema:

¿Cómo han de escogerse $P(x, y), Q(x, y)$, para que la función imaginaria, que con ellas se forme, sea de las que poseen derivada de la forma imaginaria corriente?

La respuesta es inmediata: escogiendo P y Q de modo que satisfagan á las dos condiciones fundamentales, ó dicho de otro modo, deduciendo de

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}$$

los valores, ó sea las formas de P y Q ; que es como si diéramos integrando estas dos ecuaciones diferenciales en que las variables son x, y , y las funciones P, Q .

Pero hay un procedimiento general inmediato para obtener infinitas soluciones P, Q , que se funda en esta proposición.

Si se tiene

$$Z = f(x + y\sqrt{-1})$$

en que f indica una serie de operaciones analíticas, ya sean operaciones transcendentales, como logaritmos, líneas trigonométicas, exponenciales, funciones elípticas, etc. definidas, por de contado, estas operaciones f por medio de series, como antes explicábamos; esta función f podrá ponerse bajo la forma $P + Q\sqrt{-1}$ y esta P y esta Q satisfarán á las condiciones expresadas.

Que podrán ponerse bajo esta forma, ya lo hemos demostrado, porque no hay más que tomar en las series la parte real y la parte imaginaria, de modo que podremos escribir

$$P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1})$$

que será una identidad dadas *las definiciones establecidas*.

Y ahora, diferenciando con relación á x ambos miembros y observando que $f(x + y\sqrt{-1})$ puede considerarse como una función de función, es decir, f como función de $z + y\sqrt{-1}$, como variable única, y ésta como función de x y de y , tendremos

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1} = \frac{df(x + y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})} \frac{d(x + y\sqrt{-1})}{dx}$$

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\sqrt{-1} = \frac{df(x + y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})} \frac{d(x + y\sqrt{-1})}{dy}$$

ó bien

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1} = \frac{df(x + y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})}$$

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\sqrt{-1} = \frac{df(x + y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})}\sqrt{-1},$$

de donde eliminando la expresión

$$\frac{df(x + y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})},$$

que es única y la misma en ambas ecuaciones, resultará

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\sqrt{-1} = \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1}\right)\sqrt{-1}$$

que se descompone en las dos siguientes, igualando las partes reales y las partes imaginarias:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}$$

Pero estas son precisamente las condiciones para que la función imaginaria f tenga una derivada.

Como podemos escoger arbitrariamente $f(x + y\sqrt{-1})$ podremos obtener de infinitas maneras expresiones de P y Q que cumplan con la condición de que se trata.

De aquí se deduce un procedimiento práctico, sumamente sencillo, para obtener sistemas de valores de P y Q .

Para fijar las ideas presentemos un ejemplo: llamemos z á la variable imaginaria $x + y\sqrt{-1}$, y establezcamos una función de z escogida á voluntad. Sea

$$z^2 \text{ sen } (z)$$

y pudiéramos haber escogido otra cualquiera.

A fin de evitar cálculos enojosos hemos tomado esta.

Para desarrollarla, pongamos en vez de z su expresión imaginaria $x + y\sqrt{-1}$ y tendremos

$$(x + y\sqrt{-1})^2 \text{ sen } (x + y\sqrt{-1}).$$

Todo está reducido á poner esta expresión bajo la forma ordinaria $P + Q\sqrt{-1}$.

El cálculo es elemental y sin explicación lo desarrollamos.

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1}) (\sin x \cdot \cos y \sqrt{-1} + \cos x \sin y \sqrt{-1}) \\ & \left[(x^2 - y^2) + 2xy\sqrt{-1} \right] \left[\sin x \cdot \frac{e^{-y} + e^y}{2} + \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sqrt{-1} \right] \\ & \left[(x^2 - y^2) \sin x \frac{e^{-y} + e^y}{2} - xy \cos x (e^y - e^{-y}) \right] + \\ & + \left[(x^2 - y^2) \cos x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} + xy \sin x (e^y + e^{-y}) \right] \sqrt{-1} \end{aligned}$$

de donde la parte real, que es P , será

$$P = (x^2 - y^2) \sin x \cdot \frac{e^{-y} + e^y}{2} - xy \cos x (e^y - e^{-y})$$

y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ que es Q será asimismo

$$Q = (x^2 - y^2) \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + xy \sin x (e^y + e^{-y}).$$

Lo cual se comprueba inmediatamente viendo que la diferencial de P con relación á x es igual á la de Q con relación á y .

*
* *
*

Ahora bien, y ya llegamos al fin, si hemos encontrado por este procedimiento sencillísimo y eminentemente práctico, expresiones determinadas para $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ podremos demostrar, que estas serán soluciones de la ecuación de Laplace de dos términos

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} = 0.$$

En efecto, P y Q hemos visto que satisfacen á las condiciones

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}.$$

Diferenciamos, con relación á x la primera y con relación á y la segunda ecuación y tendremos

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{d^2 Q}{dx dy}, \quad \frac{d^2 P}{dy^2} = -\frac{d^2 Q}{dx dy}$$

y sumando

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} = 0.$$

Y como venimos operando sobre identidades, esta será también una identidad $0 = 0$.

Luego $P(x, y)$ es una función tal, que sustituida en lugar de V en la ecuación de Laplace de dos términos la satisface, convirtiéndola en la identidad $0 = 0$.

Otro tanto podemos demostrar para Q . Diferenciando la primera ecuación con relación á y , y la segunda con relación á x , obtendremos

$$\frac{d^2 P}{dx dy} = \frac{d^2 Q}{dy^2}, \quad \frac{d^2 P}{dy dx} = -\frac{d^2 Q}{dx^2}$$

y restando

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dy^2} = 0.$$

Luego también es solución de la ecuación reducida de Laplace la función Q .

Queda, pues, demostrada la proposición fundamental, y á la vez queda expuesto un método rapidísimo para obtener

cuantas soluciones se quieran de la ecuación de Laplace de dos términos.

El procedimiento es este, y no puede ser más sencillo; volvamos á repetirlo:

1.º Se escribe una función cualquiera, bien definida de $x + y\sqrt{-1}$

$$f(x + y\sqrt{-1}).$$

2.º Se pone esta expresión, por los procedimientos del álgebra, bajo la forma ordinaria

$$P(x, y) + Q(x, y)\sqrt{-1}$$

3.º P y Q serán soluciones de la ecuación de Laplace, reducida: de modo que tendremos

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} = 0$$

y también

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dy^2} = 0.$$

Una observación para concluir este punto: no hay que confundir el símbolo f , cuando es símbolo de una función Z de z , definida por *dos conjuntos* de valores de z y Z , del caso en que f *representa operaciones* bien determinadas, que si son operaciones de funciones algebraicas serán en número finito, y si son operaciones de funciones transcendentales, por ejemplo de series convergentes, serán en número infinito.

Podemos decir, en general, que para nuestro caso siempre f define operaciones determinadas.

Nuestra demostración, precisamente se funda en esta hipótesis.

* * *

Y ya podemos cerrar este nuevo paréntesis, y recordar que todo lo que acabamos de decir se refiere á este propósito: el de poner en evidencia, que la ecuación diferencial de segundo orden de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

comprende multitud de familias, por decirlo así, de funciones de tres variables: x, y, z ; ó, de otro modo, que dicha ecuación de Laplace tiene infinitas soluciones con multitud de formas.

Hemos citado polinomios de primer grado, polinomios de segundo grado y aun del grado n ; funciones trigonométricas y exponenciales; hemos obtenido, aun por la teoría de las funciones de variables complejas, otra multitud de integrales, y, por último, aun antes de empezar dicha enumeración, habíamos obtenido esta integral

$$\frac{1}{r}$$

ó bien

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

Precisamente por este camino vinimos á encontrar la ecuación de Laplace: por el de la teoría de las potenciales.

Esta función $\frac{1}{r}$ hemos visto que satisface á la ecuación de Laplace, siendo a, b, c , constantes; y lo hemos demostrado prácticamente tomando las derivadas segundas con relación á x, y, z ; sumando y viendo que la ecuación de Laplace se reduce á $0 = 0$.

Y vimos más, todo en la teoría de las potenciales: que la

suma en número finito de muchas expresiones de esta forma $\frac{M}{r}$, á saber:

$$\frac{M}{r} + \frac{M'}{r'} + \frac{M''}{r''} + \dots$$

ó bien

$$\frac{M}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} + \frac{M'}{\sqrt{(a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2}} + \dots$$

también satisface, dicha suma, á la ecuación de Laplace.

Y todavía más: hemos demostrado: Que esta suma puede contener un número infinito de términos continuos ó discontinuos, de modo que puede tomar la forma de una integral. Sólo que en este caso es preciso que nunca las coordenadas a, b, c , puedan confundirse con la x, y, z ; pues en tal hipótesis, á la ecuación de Laplace hay que sustituir la ecuación de Poisson.

En estos ejemplos, y en otros muchos que pudiéramos presentar, hay que considerar dos casos: Que la función que satisface á la ecuación de Laplace, ó sea la integral que se considere, que es decir lo mismo con otras palabras; que dicha función, repetimos, sea uniforme. Es decir, que para cada sistema de valores x, y, z la función sólo tenga un valor bien determinado.

Si no fuera así, si la función pudiera tener diversos valores, entonces tomaría el nombre de función multiforme; y aunque sea invadiendo el campo del análisis puro, de paso y como preparación para ciertas aplicaciones, alguna vez en estas conferencias estudiaremos dicha teoría, íntimamente enlazada con la de las funciones de variables complejas.

Aún es importantísima para la teoría de las potenciales, porque hay que distinguir el caso en que para cada punto del espacio la potencial es *única*, del caso en que puede to-

mar diferentes valores. Es decir, en que sea una función multiforme.

Caso que parecería verdaderamente extraordinario sería éste: que la potencial fuera una *función multiforme*. Es decir, que en cada punto del espacio pudiera tener valores distintos, según el camino que para llegar á dicho punto se siguiera; porque esto haría cosa corriente el movimiento continuo, la creación ó la anulación de la energía, trastornando del todo el mundo que hoy la ciencia concibe: *mundo conservador de la energía*.

Ejemplo singularísimo, repetimos, de como los conceptos más abstractos se enlazan de tal modo con la realidad, que pueden ante la inteligencia humana trastornar el cosmos por completo.

Pero cuestión es esta que hemos de discutir más á fondo, cuando llegue el momento que creamos oportuno.

Por ahora, digamos tan sólo á manera de noticia anticipada, que existen muchas funciones multiformes que satisfacen á la ecuación de Laplace.

Por ejemplo, y no citaremos más que este,

1

$$\sqrt{(x - a - \alpha\sqrt{-1})^2 + (y - b - \beta\sqrt{-1})^2 + (z - c - \gamma\sqrt{-1})^2}$$

Ya explicaremos en otra ocasión cómo y por qué esta función es multiforme. Por lo demás que satisface á la ecuación de Laplace, se comprueba inmediatamente.

* * *

Para terminar esta conferencia, saldremos al encuentro de un error, verdaderamente elemental, en que pudiera caer quien se dejara influir por la intuición no más, y por analogías falsas y superficiales, de que la lógica da buena cuenta inmediatamente.

Pudiera pensarse, instintivamente, que si la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

satisface á la ecuación de Laplace, suprimiendo el término en z , satisfaría

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}$$

á la ecuación diferencial de dos términos

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0.$$

Esta proposición es absolutamente falsa. La analogía ilusoria y sin ninguna fuerza lógica.

Para salir de dudas, no hay más que efectuar las diferenciaciones con relación á x , y , y sustituir en la ecuación de dos términos.

Tendremos, en efecto:

$$d \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} = \frac{-d \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}{dx} = \frac{a-x}{r^3}$$

$$d \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} = \frac{b-y}{r^3}$$

Y tomando las derivadas segundas

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{r} &= \frac{-r^3 - (a-x) \cdot 3r^2 \frac{dr}{dx}}{r^6} = \frac{-r^3 + \frac{(a-x)^2 \cdot 3r^2}{r}}{r^6} \\ &= \frac{-r^3 + (a-x)^2 \cdot 3r}{r^6} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} = \frac{-r^3 + (b-y)^2 \cdot 3r}{r^6}$$

luego

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} = \frac{-2r^3 + 3r[(a-x)^2 + (b-y)^2]}{r^6}$$

y

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} = \frac{r^3}{r^6} = \frac{1}{r^3}$$

en que el segundo miembro no es cero, de modo que en este caso

$$V = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}}$$

no es solución de la ecuación de Laplace de dos términos, sino de una ecuación de esta forma

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = \frac{1}{r^3}$$

y es porque faltaba precisamente el término en z , que convirtiera el término del numerador en $-3r^3$ el cual destruyera el segundo término de dicho numerador.

Por eso lo hemos dicho varias veces: La *intuición* es, en cierto modo, la visión de las totalidades, es para investigar una potencia fecundísima, pero sus afirmaciones hay que comprobarlas.

En la conferencia inmediata entraremos en el estudio elemental de la ecuación diferencial de Laplace, ya que en esta no hemos tenido tiempo para ello.

XXXVII.— Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

Habíamos llegado á la ecuación diferencial de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

por la teoría de las potenciales, como ecuación á que satisfaca la potencial de un sistema de masas, ejerciendo acciones newtonianas sobre un punto exterior al sistema.

Es decir, sobre un punto que no coincide con ninguno de los que constituyen el sistema en cuestión.

Pero agregamos que si la expresión elemental $\frac{1}{r}$ satisfacía á la ecuación de Laplace, existían otras infinitas funciones de x , y , z , que satisfacían á la misma, y en las conferencias anteriores hemos presentado multitud de ejemplos.

En esta variedad de soluciones particulares vamos á considerar únicamente las *funciones uniformes*, y en ellas están comprendidas las potenciales; pero el estudio que hemos de hacer será general.

Claro es que á la ecuación de Laplace satisfacen, no sólo infinitas funciones de la ciencia pura, por decirlo de este modo, sino funciones que corresponden á diferentes ramas de la Física Matemática.

Porque ya lo hemos dicho: La función de Laplace se aplica á la teoría de la atracción, á la electricidad estática y dinámica, al magnetismo, á la propagación del calor, á la hidrodinámica, y por de contado y muy particularmente á la teoría de la potencial newtoniana.

Mas por el pronto estudiaremos la ecuación de Laplace en general, y llamaremos *funciones armónicas* á las que satisfacen á dicha ecuación.

No hace mucho, en una de las últimas conferencias, dijimos que ciertas propiedades generales de las funciones que satisfacen á una ecuación diferencial, pueden conocerse y estudiarse sin pasar por la integración de la ecuación diferencial; se desprenden de esta última, y agregamos que este método es el bello ideal de la teoría de las integrales.

Es evidente, que en estas ecuaciones diferenciales sólo están escritas las propiedades generales de las funciones que representan: las propiedades particulares de cada grupo ó de cada función han de estudiarse de otro modo, y es preciso, ante todo, que estén definidos tales grupos ó funciones particulares.

Podemos decir que lo general sólo lo da lo general.

En resumen, vamos á estudiar ciertas propiedades generales de las armónicas.

*
*
*

En el curso de 1909 á 1910, en la pág. 102, demostramos la fórmula de Green, que era la siguiente:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S [F\alpha + G\beta + H\gamma] d\sigma. \end{aligned}$$

y decíamos que esta es una fórmula de pura transformación.

Es una integral triple transformada en una integral doble, y para dar un sentido material y plástico á la fórmula del insigne matemático, decíamos que el primer miembro representaba *algo* que estaba dentro del volumen; y el segundo miembro, lo que entraba ó salía de este *algo* por la superficie: *una divergencia igual á un flujo*.

Tal es la fórmula general; pero hay un caso muy importante que considerar, y es aquel en que F , G , H , son las derivadas de una función única U , como sucede con las componentes de la fuerza en la atracción newtoniana.

Es decir, que se tiene

$$F = \frac{dU}{dx}, \quad G = \frac{dU}{dy}, \quad H = \frac{dU}{dz}$$

Substituyendo estos valores en la fórmula general, tendremos

$$\begin{aligned} \iiint \left(\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right) dx dy dz = \\ = \iint_s \left(\frac{dU}{dx} \alpha + \frac{dU}{dy} \beta + \frac{dU}{dz} \gamma \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Si V (fig. 30) es el volumen á que se refiere la integral triple y S la superficie, y consideramos un punto A de esta superficie, y trazamos la normal AN , sabemos que α , β , γ , son los cosenos de los ángulos que la normal N forma con los tres ejes.

Tomemos sobre la normal AN un distancia AA' infinitamente pequeña, que designaremos por dn .

Las tres componentes de esta pequeña longitud serán dx , dy , dz , y es evidente que tendremos

$$\alpha = \frac{dx}{dn}, \quad \beta = \frac{dy}{dn}, \quad \gamma = \frac{dz}{dn}$$

y el paréntesis del segundo miembro se convertirá en

$$\frac{dU}{dx} \frac{dx}{dn} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dn} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dn}.$$

Fijemos ahora las ideas.

La armónica U , y si tratáramos de la potencial, diríamos la potencial U , que depende de x, y, z , á saber $U(x, y, z)$, tendrá un valor determinado en cada punto del espacio.

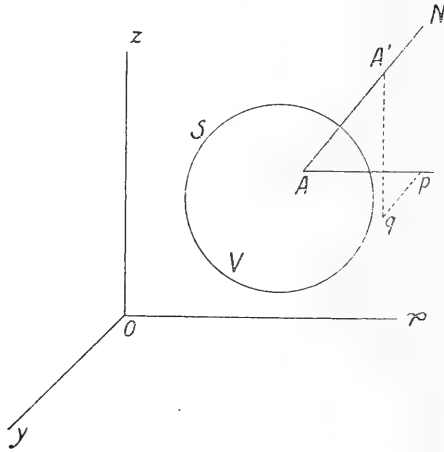


Figura 30.

Tendrá, pues, un valor determinado en A , y otro infinitamente poco diverso del anterior en A' ; de modo que al pasar de A á A' , la armónica U habrá variado en dU , y la relación

$$\frac{dU}{dn}$$

será la derivada de U con relación á n , porque, realmente, cuando sólo se consideran valores de U sobre la nominal, U sólo depende de n .

Así en $U(x, y, z)$, cuando se considera la normal N , las

x, y, z , son funciones de n ; y la derivada de U con relación á n , se obtendrá derivando por la regla de las funciones de funciones, y funciones compuestas, de este modo

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dn} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dn} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dn}.$$

Luego el segundo miembro de la ecuación Green, en este caso particular, podrá escribirse así:

$$\iiint \left(\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right) d\tau = \iint_S \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

Pero si U es una armónica para todos los puntos interiores al volumen V , que limita á la integral triple, para todos los puntos del interior de este volumen, y, por lo tanto, para todos los elementos $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$, el paréntesis será nulo en virtud de la ecuación de Laplace, toda vez que suponemos que U es una armónica.

Luego el primer miembro será igual á cero, y tendremos

$$\iint_V \frac{dU}{dn} d\sigma = 0.$$

Por de contado que este razonamiento es legítimo si existen en todo el interior del volumen, y con valores finitos, las tres derivadas segundas

$$\frac{d^2 U}{dx^2}, \quad \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{d^2 U}{dz^2},$$

lo cual hemos demostrado que sucede para la potencial, y será preciso demostrar que se verifica en cada caso, en que queramos aplicar esta fórmula de Green.

Resulta, por lo tanto, que todas las armónicas que tienen derivadas segundas, si se aplican á una superficie cerrada, darán un flujo nulo; es decir, que tomando en cada punto de

la superficie la derivada con relación á la normal, multiplicándola por el área infinitamente pequeña de superficie, que corresponde á dicho punto, y sumando, dicha suma será nula.

Es una propiedad de las armónicas, que hemos deducido de la ecuación diferencial que las define, sin pasar por la integral; y esta propiedad, como vamos á ver, da lugar á algunas consecuencias muy importantes, sobre todo por sus aplicaciones á la Física Metemática; por ejemplo, á la electricidad estática, que es la que hemos de estudiar quizás en el curso próximo.

Estudiemos algunas de estas consecuencias.

*
* *

1.^a Una función armónica finita y que tiene, como antes decíamos, derivadas primeras y segundas en el interior de un volumen, resulta de la condición precedente, que en el interior de dicho volumen no podrá tener *ni máximo, ni mínimo*.

La demostración es inmediata.

Supongamos que en un punto A , fig. 31, para la función armónica U , existe un *máximum* de esta función.

Desde el punto A como centro con un radio r suficientemente pequeño, tracemos una esfera E . Si en el punto A la función armónica U tiene un *máximum* y el radio de la esfera es suficientemente pequeño, en todos los puntos B de la esfera el valor de U será inferior al valor de A , y, por lo tanto, la variación de U al pasar de A á un punto B de la esfera, es decir, ΔU , será una cantidad negativa; luego para todos los puntos de la esfera, $\frac{dU}{dn}$ será una cantidad negativa. Mas el teorema de Green aplicado al caso particular de las funciones armónicas, que tienen primeras y segundas derivadas

finitas y determinadas; nos da para la esfera E , que es un espacio cerrado

$$\iint_S \frac{dU}{dn} d\sigma = 0$$

en que S representa la superficie de dicha esfera.

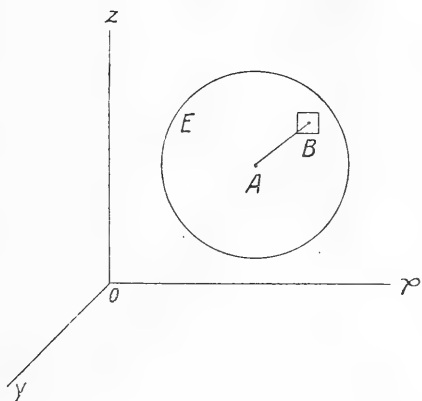


Figura 31.

Por lo tanto, la integral precedente, siendo todos los valores de $\frac{dU}{dn}$ esencialmente negativos, se compondrá de una suma de cantidades negativas y no podrá ser igual á cero. Así la hipótesis de que hemos partido, á saber que U tiene un máximo en A , conduce á un resultado absurdo.

Claro es que no suponemos igual á cero el radio de la esfera, porque entonces la superficie de ésta tendería hacia cero. Sólo suponemos que dicho radio es suficientemente pequeño, aunque finito, para que todas las derivadas $\frac{dU}{dn}$ correspondientes á los distintos puntos de la esfera E sean negativas.

Es decir, que el radio puede ser finito y entonces también lo es la superficie de la esfera y desaparece la dificultad anterior.

Si aún se quiere precisar más el razonamiento llamando M al valor medio de la derivada, el valor de la integral será

$$- M \int \int_s d\sigma = - M \frac{4}{3} \pi r^2 = 0$$

y como M y r son finitas, tendremos una cantidad negativa; y una cantidad negativa, y por de contado finita, no puede ser igual á cero.

Los mismos razonamientos pueden aplicarse al caso en que U adquiriera un mínimo en A .

Trazando una esfera de radio suficientemente pequeño (pero no cero), para que en todos los puntos de la esfera, ΔU sea positiva, para todos estos puntos veremos como antes que la derivada $\frac{dU}{dn}$ es positiva. Positivos serán todos los elementos de la integral, y será imposible, que la suma, es decir, dicha integral, se reduzca á cero.

En resumen, hemos demostrado que la *armónica* U no tiene en su campo ni máximo ni mínimo.

Si la armónica U fuese una potencial newtoniana, esto quería decir que no puede tener ni máximo ni mínimo en puntos exteriores á las masas.

*
* * *

2.º Imaginemos una línea CC' (fig. 32) en el campo de una armónica U , y supongamos que en todos los puntos de esta línea la armónica tiene un valor constante c superior al valor que adquiere en puntos suficientemente próximos á dicha línea.

Es decir, que la línea CC' es una línea de máximo valor de la armónica respecto á los puntos que la rodean, dentro de una distancia e suficientemente pequeña. Y vamos á demostrar que este máximo lineal es imposible.

Tomemos un punto A en la línea y con un radio R suficientemente pequeño, aunque no cero, é inferior á e , trace-

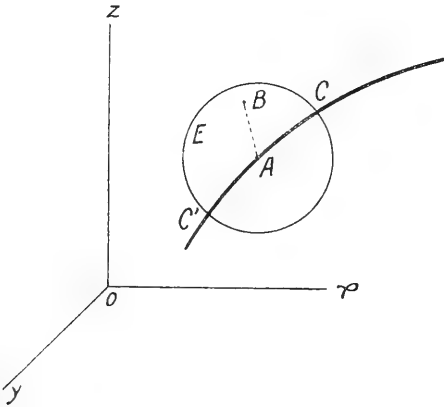


Figura 32.

mos una esfera E , y apliquemos como antes á esta esfera el caso particular del teorema de Green

$$\iint_s \frac{dU}{dn} d\sigma = 0.$$

Nos proponemos demostrar que esto es imposible.

Como para todos los puntos B suficientemente próximos á la línea CC' el valor de la armónica es inferior á su valor constante c sobre la línea, y por lo tanto al valor en A , al pasar de A á B , es decir, sobre la normal á la esfera, la variación ΔU será negativa, porque U en A es un máximo. Luego para todos los puntos de la esfera, exceptuando los

puntos C y C' , en que la línea la corta, $\frac{dU}{dn}$, que es el límite de $\frac{\Delta U}{\Delta n}$, será una cantidad negativa.

Tendremos, pues, en todos los elementos de la esfera, menos en C y C' , cantidades negativas. Para estos dos puntos C y C' , como el valor en C , C' y A es el mismo valor c , porque la línea es de igual armónica, estos dos elementos de la integral serán nulos, pues $\frac{dU}{dn} = 0$; luego la integral se compondrá de suma de elementos negativos y de dos elementos nulos; por lo tanto, no puede ser igual á cero.

Aunque la línea CC' cortase á la esfera en varios puntos, la consecuencia sería la misma. Para dichos puntos los elementos de la integral serían nulos, y para todos los demás negativos.

El mismo razonamiento se aplicaría al caso en que la línea CC' fuera lo que podemos llamar una línea *mínima* armónica; mejor dicho, de mínimo valor para la armónica, respecto á los puntos que rodean á dicha línea á la distancia e , suficientemente pequeña.

En efecto, siendo un mínimo el valor de la armónica en todos los puntos de la línea CC' , en un punto cualquiera de la esfera E , es claro que ΔU será positiva. Las derivadas $\frac{dU}{dn}$, positivas también para todos los puntos de la esfera, menos para los puntos C , C' ó sus análogos en número finito, y como es imposible que una suma de cantidades positivas y de ceros sea cero, la condición anterior del flujo nulo no podrá verificarse.

Abreviadamente podemos decir, que en el campo de una armónica, y aunque no lo especifiquemos, se entiende siempre bajo la condición de que existan las derivadas primeras y segundas, no puede haber una línea de máximo valor constante para dicha armónica.

3.º Lo que hemos dicho para un *punto* y para una *línea*, podemos repetir para una *superficie* de máximo ó mínimo valor de la armónica.

Tampoco este máximo superficial es posible en el campo de una armónica, que cumple con las condiciones indicadas. Es decir, ser finita y tener derivadas primeras y segundas finitas también.

La demostración es la misma que venimos aplicando, á

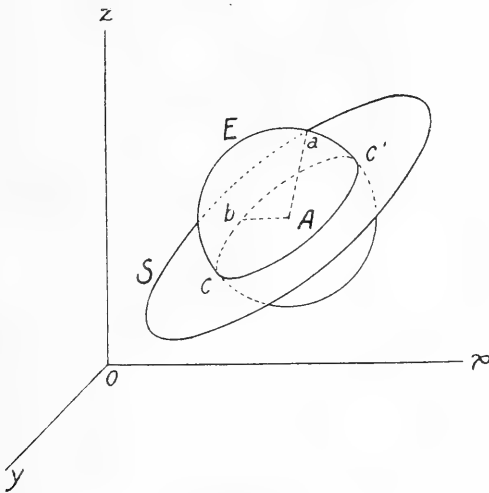


Figura 33.

saber: el empleo de la esfera de radio suficientemente pequeño, y de la fórmula de Green.

Sea S (fig. 33), una superficie en el campo de la armónica, superficie tal que para todos sus puntos el valor de la armónica U es constante é igual, por ejemplo, á c .

Supongamos que este valor c es un máximo ó un mínimo á un lado y otro de la superficie hasta la distancia e .

De modo que c es constantemente mayor ó constantemente menor que el valor de la armónica para todos los puntos que distan de la superficie una cantidad finita menor que e .

Y vamos á demostrar que esta hipótesis es imposible.

Consideremos el caso del máximo. — Desde un punto A tracemos una esfera E con un radio r menor que e : claro es que toda la esfera estará, por decirlo así, dentro de la capa que comprende el máximo superficial.

La superficie S cortará á la esfera E , según una curva CC' , que si r es suficientemente pequeño, casi se confundirá con una circunferencia. Pero esto importa poco.

Como A corresponde á un máximo de U , el valor de la armónica en cualquier punto a' de la esfera será menor que en A ; de modo $\frac{\Delta U}{\Delta n}$ será negativa, puesto que ΔU lo es, y Δn , contado sobre el radio y hacia fuera, por ejemplo, es positiva.

En el límite, $\frac{dU}{dn}$ será negativa también y todos los elementos $\frac{dU}{dn} d\sigma$ de la integral

$$\iint_s \frac{dU}{dn} d\sigma$$

extendida á la esfera, serán negativos.

Decimos todos, pero en rigor debemos exceptuar los elementos de la curva CC' que está sobre la superficie.

Para estos elementos correspondientes á los puntos de dicha curva, por ejemplo, para el del punto b ; como estos puntos b están en la superficie, el valor de la armónica será igual en A que en b ; luego pasando de A á b , tendremos:

$$\Delta U = c - c = 0$$

y por lo tanto,

$$\frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{dU}{dn} = 0.$$

De suerte que los elementos de la integral que corresponden á la curva $C C'$ son nulos.

Para todo el resto de la esfera son negativos; por tanto, la integral de Green, aplicada á la esfera E , tendrá todos sus elementos negativos, exceptuando los de la curva $C C'$, que será cero; la integral será, por consiguiente, negativa, y no podrá verificarse

$$\iint_s \frac{dU}{dn} d\sigma = 0.$$

Queda, pues, demostrada la imposibilidad de la hipótesis.

Podemos repetir para la hipótesis *d d mínimo*, pero abreviando, la misma demostración que acabamos de dar.

Al ir aumentando n desde A , hasta un punto cualquiera a de la esfera, el valor de la armónica U irá aumentando, porque el punto A , como todos los de la superficie, corresponden á un mínimun; luego de A á a será positiva ΔU ; será positiva también la derivada $\frac{dU}{dn}$; todos los elementos de la integral de Green para la esfera, exceptuando los de la esfera $C C'$, serán positivos. Los de esta curva serán iguales á cero. La integral se compondrá de elementos positivos y de elementos nulos correspondientes á la línea $C C'$; luego no podrá ser igual á cero y tampoco la superficie podrá corresponder á un mínimo.

*
* *

4.^a Por último, lo dicho para un punto, una línea y una superficie, se puede extender á un volumen, y la demostración en su esencia es igual á las precedentes.

El teorema es este:

Es imposible que si en el interior de un volumen V el

valor de la armónica U es constante, este valor c sea ni un máximo ni un mínimo respecto al espacio que rodea á dicho volumen V .

Sea (fig. 34) V el volumen que se considera.

En todo él, el valor de la armónica es constante é igual á c .

Tomemos un punto A en la superficie de dicho volumen

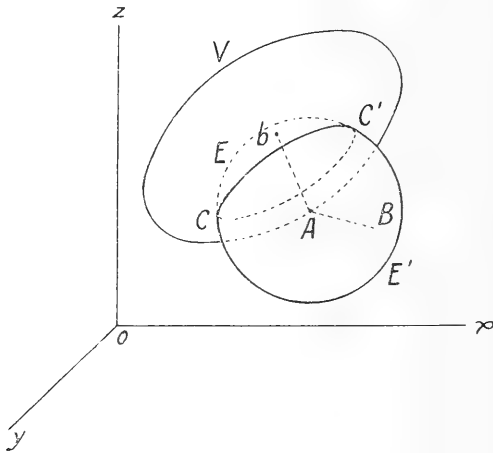


Figura 34.

y desde A como centro, tracemos una esfera E de un radio r tal que toda la esfera quede comprendida según indica la figura, ó en el volumen V ó en el espacio exterior, pero sin pasar la zona en la cual c es un máximo.

La esfera cortará á la superficie del volumen, según la curva $C C'$.

Una parte, $E C C'$, quedará dentro del volumen.

La otra parte, $C C' E$, quedará fuera de dicho volumen.

Consideremos primero el caso del máximo. O sea, que c es un máximo respecto al espacio ambiente; y apliquemos á la superficie de la esfera la fórmula de Green, que siempre hemos aplicado.

Habrá que considerar dos clases de puntos en la superficie de la esfera. Puntos como B , que est n en E' ; es decir, fuera del volumen.

Puntos como b , que est n en E . Es decir, dentro del volumen.

Al pasar de A   B , puesto que A corresponde   un máximo, U disminuye; ΔU será negativa; la derivada $\frac{dU}{dn}$ será negativa también, y todos los elementos $\frac{dU}{dn} d\sigma$ de la integral

$$\iint_s \frac{dU}{dn} d\sigma$$

correspondientes á la porción E' serán negativos.

En cambio, al pasar del punto A al punto b , como toda esta porción E está dentro del volumen, el valor de U será constante   igual   c . Luego al llegar al punto b

$$\Delta U = c - c = 0;$$

la diferencia ΔU será nula; la derivada $\frac{dU}{dn}$ será nula también, y todos los elementos de la integral correspondientes   E serán iguales   cero.

La integral se compondrá, por lo tanto, de elementos negativos y de elementos cero, y no podrá ser igual   cero, toda vez que la porción de esfera en que los elementos son negativos es finita, y por lo tanto, comparable con E' .

La hipótesis correspondiente al máximo es, pues, imposible.

En el caso del mínimo no hay más que repetir el mismo razonamiento.

Al pasar de A   B , U aumenta; la derivada $\frac{dU}{dn}$ es po-

sitiva; luego todos los elementos de E son positivos también.

Al pasa de A á b , el valor de la armónica queda constante, luego su incremento es nulo.

Luego $\frac{dU}{dn}$ es nula también.

En suma, la integral se compóndrá de dos partes: una, la correspondiente á E' , positiva; otra, la correspondiente á E , nula; luego la integral característica, por decirlo así, tendría que ser positiva, admitiendo la proposición, lo cual no puede ser, porque el flujo es nulo.

*
* *

Hemos demostrado, por lo tanto, que en el campo de una armónica U , finita, y agregamos siempre, tácita ó explícitamente *uniforme* para evitar toda duda, y cuyas derivadas primeras y segundas sean también finitas y determinadas, porque sin esta condición, ni la fórmula de Green puede aplicarse, ni la misma ecuación de Laplace tiene sentido; en tales condiciones, repetimos, no pueden existir para dicha función armónica U , ni puntos máximos ó mínimos; ni líneas, superficies ó volúmenes de valor constante para la armónica, y en que este valor sea máximo ó mínimo respecto á los puntos próximos.

Estos teoremas son ya importantes, porque, aunque no determinan el valor de la armónica, establecen varias propiedades respecto á la marcha general de este mismo valor y pueden dar ocasión al conocimiento de otras propiedades importantes.

Y obsérvese una vez más que hemos demostrado esta serie de proposiciones sin haber integrado la ecuación diferencial de la que son soluciones las armónicas.

Sólo de la ecuación diferencial hemos partido; sólo en

ella nos hemos fundado, porque ha sido fundarnos en ella partir de la fórmula de Green; y en este caso particular, como hemos indicado varias veces, el primer miembro de la ecuación de Laplace, en rigor, indica que es nulo el flujo de la armónica para un paralelepípedo infinitamente pequeño; y el segundo miembro de la ecuación de Green, que es el que hemos aplicado en todas las demostraciones precedentes, viene á significar esto mismo respecto á un espacio cerrado cualquiera. De suerte que, con verdad, podemos decir que sólo á la ecuación diferencial de Laplace, que es la ecuación á que han de satisfacer las armónicas como integrales particulares, hemos acudido, para demostrar la ausencia de máximos ó mínimos, en puntos, líneas de armónica constante y superficies ó volúmenes que presenten el mismo carácter.

Podemos todavía demostrar dos teoremas importantes que se deducen inmediatamente de las proposiciones anteriores.

*
* *

Teorema 1.º— Si en el interior de un volumen V una armónica $U(x, y, z)$, es uniforme, finita y bien determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, y además en todos los puntos de la superficie S , que limita el volumen, la armónica U tiene el valor nulo, será forzosamente igual á cero en toda la extensión del volumen.

Esto es evidente casi, porque si dentro del volumen la función tuviera un valor distinto de cero, como hemos dicho que es *finita*, y como en la superficie es cero, forzosamente tendría valores superiores ó inferiores en ciertas regiones á los valores que tuviera en el resto.

De otro modo: en un espacio cerrado una magnitud que siempre se mantiene finita, para anularse en la superficie, tiene que pasar por máximos ó mínimos.

Estos máximos ó mínimos formarán las legiones á que antes nos referíamos y podrán ser puntos aislados, líneas, superficies ó volúmenes. Es decir, que resultaría una contradicción evidente con alguna de las cuatro proposiciones que hemos demostrado; porque ni U puede tener puntos de máximo ó mínimo valor, ni líneas, superficies ó volúmenes de valor máximo ó mínimo y constante respecto á los puntos inmediatos.

La demostración es intuitiva, y aquí la intuición parece legítima.

Se ve, por decirlo de este modo, y valga la imagen, moverse á U , encerrada siempre en un volumen, cayendo alrededor del punto de partida, hacia la superficie, y anulándose en ella; y como no puede dejar de ser finita, se la ve oscilando entre máximos y mínimos.

Como si un aeroplano parte de la superficie del mar, se eleva, describe varias ondulaciones, y á la superficie del mar baja otra vez. Es decir, que parte de la altitud cero y al cero vuelve, y como no ha podido marcharse al infinito, habrá pasado por una máxima altura; y si antes de bajar á cero ha descrito curvas onduladas, también habrá pasado por uno ó varios mínimos y máximos.

En suma, la condición de ser nula en la superficie sujeta á la armónica á ser nula en todo el interior del volumen.

Este teorema puede decirse que es relativo al interior de un volumen.

También es fácil generalizarlo para el exterior, y tendremos el teorema siguiente.

*
* *
*

Teorema 2.º—Sea (fig. 35), una superficie cerrada S , y consideremos el espacio que media entre la superficie S y el infinito.

Ya no será el volumen encerrado por la superficie S , sino el espacio que fuera de ella se extiende sin límites.

Pues también, intuitivamente; es sencillísimo aplicar á este espacio infinito el teorema que antes demostrábamos para el volumen comprendido en una superficie S . Porque, en efecto, podemos imaginar una esfera inmensamente grande, cuya superficie Σ vaya creciendo sin límite, y entonces

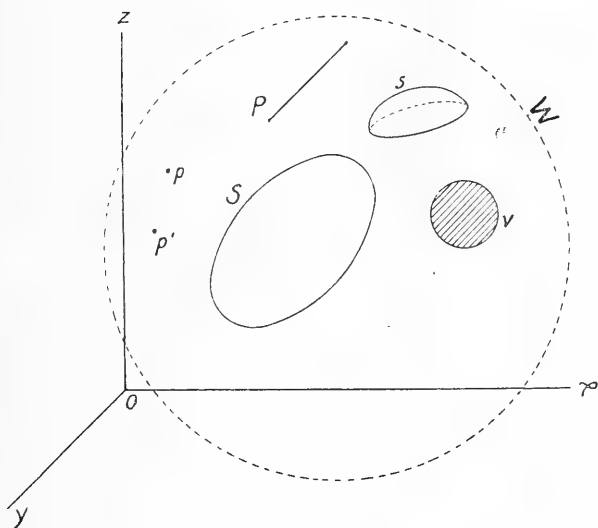


Figura 35.

tendremos un volumen, que será el volumen exterior limitado por dos superficies: la superficie S y la superficie Σ , al cual es legítimo aplicar la demostración y el teorema anterior, que es independiente de la forma del volumen, de que lo limiten una ó varias superficies ó de que sea conexo de cualquier orden, con sólo agregar una condición, la siguiente:

Como Σ es una de las superficies que limitan este volumen, es preciso que en ella la armónica sea nula, como lo es en S , para que lo sea en todos los límites del volumen.

Y tendremos el siguiente teorema:

En el espacio exterior á una superficie S , toda armónica uniforme, finita, bien determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, si tiene un valor nulo en todos los puntos de dicha superficie cerrada S , y, además, se anula en el infinito, que es como decir que es nula en todos los puntos de Σ ; esta armónica, decimos, será nula en todo el espacio exterior á la superficie S .

Y la demostración es exactamente idéntica á la del primer teorema.

Diremos, pues: si la armónica U se anula en S y en Σ , figura 35, si tiene valores finitos en lo interior y no es constante, habrá máximos y mínimos, que se distribuirán en puntos $p, p'...$ ó se agruparán en líneas $P...$, en superficies s ó en volúmenes v , de valor constante, lo cual es imposible, porque hemos demostrado que no pueden existir ni estos máximos ni estos mínimos.

Y fíjense bien mis alumnos: el primer teorema sólo se refiere al volumen interior, y á lo que le pasa, por decirlo así, á la armónica U dentro de ese volumen, sin referirse para nada á los valores que tenga en lo exterior de la superficie S .

En cambio, el segundo teorema sólo se refiere á lo exterior, demostrando que U ha de ser igual á cero en todo él. Pero nada prejuzga á los valores de U en el interior del volumen que limita S .

De estos dos teoremas se deduce una consecuencia importantísima y, por decirlo así, muy honda, en esta teoría de las armónicas: que á veces las propiedades más difíciles de demostrar, al parecer, dependen de observaciones triviales de puro sencillas.

*
* * *

Varias veces hemos recordado que toda ecuación diferencial expresa una propiedad común á varias funciones.

Así la ecuación de Laplace expresa una propiedad común á multitud de funciones U de tres variables independientes, x, y, z , que son las armónicas.

Si á la ecuación diferencial se agregan otras condiciones particulares, á que deban satisfacer las integrales, esto valdrá tanto como determinar entre todas las integrales, ó de otro modo, entre todas las armónicas, una cierta familia ó grupo.

Y hasta pueden ser de tal naturaleza ó en tal número estas condiciones particulares, que determinen una armónica entre todas, distinguiéndola dentro del grupo.

Para que mis alumnos formen idea clara de estos conceptos presentaré un ejemplo sencillísimo y elemental.

Sea la función

$$f(x, y, C) = 0,$$

en que x, y representan dos variables, y en que C es una constante.

Esta ecuación, geoméricamente, representará un grupo de curvas que dependerán del valor de la constante C .

Supongamos que para un valor determinado C , la ecuación precedente representa la curva AB (fig. 36).

Para este valor particular la representación geométrica de la función f es, por lo tanto, la curva AB , inconfundible con otra cualquiera.

Si á la constante C le damos otro valor particular, C' , la función

$$f(x, y, C') = 0$$

representará otra curva, $A'B'$.

La forma analítica de las ecuaciones de ambas curvas será la misma, puesto que la forma f se conserva.

Sólo diferirán por el valor del parámetro C , que en una es C y en otra C' .

Y haciendo variar el valor de C de modo que pase por los valores C'' , C''' tendremos una serie de curvas AB , $A'B'$, $A''B''$ que todas ellas tendrán una ecuación de la misma forma f , y que sólo diferirán por el valor del parámetro C .

Por ejemplo, todas serán elipses en que uno de los ejes, que llamaremos C , será distinto, y cuyas posiciones y magnitudes sólo dependerán de este eje.

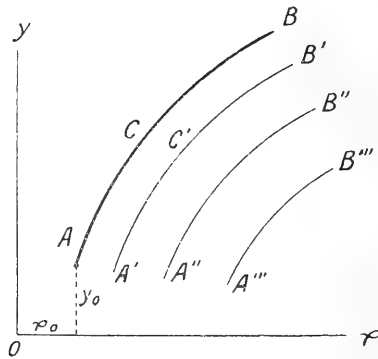


Figura 36.

Será una familia de elipses que cada una en particular estará definida en forma y magnitud sólo con fijar el valor del parámetro C .

Y lo mismo pudiéramos decir de otra curva cualquiera en cuya ecuación entrase un parámetro arbitrario C .

Ahora bien; sabemos por cálculo diferencial que si se diferencia la ecuación

$$f(x, y, C) = 0,$$

y se obtiene

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

en la cual entrarán x, y, C y se elimina esta constante arbitraria entre las dos últimas ecuaciones, se obtendrá una ecuación diferencial

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

que ya no contendrá la constante C y expresará, por lo tanto, en función de las variables y y del coeficiente diferencial, una propiedad analítica con tal ó cual representación geométrica, común á todo el sistema de curvas $AB, A'B' \dots$

Tanta generalidad analítica tiene la función f en que C es arbitraria, como esta ecuación $\varphi = 0$ en que no entra C .

Diferenciando hemos pasado de f á φ , integrando pasaremos de φ á f , y para que la *integral* sea *general*, es decir, para que contenga los mismos sistemas de x, y que la ecuación $\varphi = 0$, será preciso, según vemos, que dicha integral contenga una constante arbitraria C .

Una ecuación finita expresa, por ejemplo, cierta ley geométrica para una serie de puntos; pues una ecuación diferencial, expresa otra ley más amplia, que se aplica no á una serie de puntos, sino á una serie de curvas.

Y estas ideas se van generalizando, y las ecuaciones diferenciales van comprendiendo cada vez sistemas más amplios.

Así

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

se aplica á todas las curvas $AB, A'B' \dots$ y no determina ninguna en particular.

Como la ecuación de Laplace se aplica á todos los ejemplos que citamos en otras conferencias.

Por el pronto, á todas las armónicas uniformes y además á muchas funciones de x, y, z multiformes.

Volviendo á nuestro ejemplo elemental: para que la ecuación

ción $\varphi = 0$ se aplique en particular á la curva AB y no á otra cualquiera del sistema, será preciso agregar á la ecuación diferencial otra condición, por ejemplo, que la curva que buscamos AB pase por un punto determinado A cuyas coordenadas sean x_0, y_0 .

Si queremos abarcar todas las curvas del sistema, la ecuación diferencial basta.

Si queremos particularizar la curva AB , diremos que está definida por la ecuación

$$\varphi \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

y por la condición de pasar por el punto (x_0, y_0) . Es decir, que para el valor x_0 ha de tomar el valor y_0 .

Y en efecto: integrada la ecuación diferencial, tendremos:

$$f(x, y, C) = 0$$

con la constante arbitraria C , y aplicando la segunda condición, ó sea la de que pase por el punto A , es claro que las coordenadas x_0, y_0 , deberán satisfacer á esta última ecuación, y resultará

$$f(x_0, y_0, C) = 0,$$

de donde deduciremos un valor determinado para C , que sustituido en vez de C en la ecuación general la particularizará para la curva AB .

Pues esto mismo podemos repetir en el caso de la ecuación diferencial de Laplace; y para todas las ecuaciones diferenciales de la Física Matemática; y para todas las ecuaciones diferenciales de la ciencia pura.

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

comprende todas las armónicas.

¿Queremos separar un grupo ó separar una? Pues habrá que agregar nuevas condiciones.

Por ejemplo, que tenga ciertos valores para ciertos puntos; y entonces estos subgrupos de armónicas, ó esta armónica única, estarán definidas de este modo.

1.º Por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

2.º Por ciertas condiciones, por ejemplo:

que para $x_0, y_0, z_0 \dots$ tenga el valor U_0
para $x_1, y_1, z_1 \dots$ el valor U_1

y así sucesivamente.

Las consideraciones anteriores, por elementales que sean, son indispensables para que los principiantes se formen idea clara de los teoremas, que hemos de desarrollar bien pronto.

*
* *

Pero á las explicaciones precedentes aún hemos de agregar otra más, que es importantísima.

Cuando se plantea un problema, se parte naturalmente de ciertos datos para determinar ciertas incógnitas, ó ciertas funciones, ó ciertos sistemas: en fin, *algo desconocido*, pero que sabemos *à priori*, ó por lo menos, suponemos, que de aquellos datos depende.

Pero al buscar estas entidades, que, en términos generales llamaremos incógnitas, sean magnitudes, sean funciones, sean sistemas, ocurren dos dudas que, naturalmente, la resolución del problema ha de resolver.

La primera duda, que realmente es una interrogación del problema mismo, es ésta: ¿Existe la incógnita que buscamos ó el problema es imposible por sí?

La segunda duda, ó la segunda interrogación, es la siguiente: ¿La resolución es sencilla ó múltiple; es decir, si se trata, por ejemplo, de cantidades, la incógnita tiene un sólo valor, ó tiene varios en número finito, ó tiene infinitas soluciones enlazadas en una ley?

Todo esto, la resolución del problema ha de darlo, pero á veces, aun antes de resolver el problema, puede averiguarse; y estas especies de soluciones anticipadas facilitan la solución definitiva.

Por ejemplo, una ecuación de primer grado con una incógnita, sólo dará un valor para esta incógnita.

Una ecuación del grado m ordinaria, sabido es que tiene m raíces reales ó imaginarias.

Una ecuación transcendente puede tener infinitas soluciones.

Una ecuación diferencial tiene muchas integrales particulares.

Y á propósito de la ecuación de Laplace, podemos repetir cuanto contienen las observaciones anteriores.

Por lo que se refiere á las condiciones necesarias para fijar entre las infinitas armónicas las que corresponden á cada problema particular, y por lo que se refiere á la solución, única en algunos casos, hemos de entrar en la conferencia próxima en nuevos desarrollos, que completen en cierto modo la teoría elemental de la ecuación de Laplace, que vamos exponiendo, para lo cual nos fundaremos en las proposiciones y teoremas que hemos expuesto en esta conferencia.

XXXVIII. — Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Continuación.)

LA ENERGÍA UNIVERSAL

Hemos hecho la exposición de los Principios y de los Teoremas principales de la Cinemática, la Estática y la Dinámica. Tanteando el camino que recorriamos, hemos ido traduciendo las proposiciones de la *Mecánica racional* para formular las correspondientes á la *Mecánica social*, que constituyen (para los fenómenos sociales) el *modelo mecánico* (Lord Kelvin). Sobre algunas convenciones y algunos supuestos, hubimos de solicitar del lector, en los *Preliminares*, todo aquello que necesitábamos para la exposición; y sobre esa base y esas hipótesis, hemos considerado las leyes abstractas del equilibrio y del movimiento, así de los individuos y elementos sociales como de las agrupaciones (*).

(*) El recordár ahora por última vez la hipótesis del parámetro de n dimensiones psíquicas, que hube de proponer en los *Preliminares* para definir la posición del individuo en un asunto social, me ocurre que esto quizá pueda ser considerado como un ejemplo de la concepción abstracta de algunos matemáticos alemanes—especialmente *Georg. Cantor*—acerca de lo que llaman *número complejo de n números reales*. Estos n distintos valores reales x_1, x_2, \dots, x_n (que se reúnen en el número complejo) son expresados en relación con sus diversas unidades respectivas.

Recordemos que esos matemáticos piensan que cada valor del número complejo define la posición de un punto—así lo llaman—en un *espacio aritmético de n dimensiones*; y los valores x_1, x_2, \dots, x_n , de los cuales depende el número complejo, son las n coordenadas de dicho punto. El espacio aritmético de n dimensiones viene á estar

Hemos visto las fuerzas de naturaleza psíquica, ya equilibrándose (estáticamente), ya influyendo sobre los movimientos por sus impulsiones ó por sus trabajos (dinámicamente); pero no se ha tratado de inquirir nada sobre la esencia ó naturaleza íntima de esas fuerzas, porque— como dijimos en la *Introducción*— no consideramos eso asequible, ni siquiera tiene sentido para nosotros, que pensamos las fuerzas como meras abstracciones.

Vamos á volver ahora á la consideración del trabajo de

constituído por el conjunto de todos los puntos posibles en él, ó sea de todos los valores posibles de los números complejos para todas las combinaciones de todos los valores reales posibles de las coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n en las n dimensiones de ese espacio aritmético. Y esos matemáticos demuestran que si se considerasen las n coordenadas de cada punto como funciones distintas de una sola variable u , resultaría que entre todos los valores reales posibles de esta u (de una sola dimensión) y los sistemas de valores posibles de x_1, x_2, \dots, x_n , podría establecerse correspondencia unívoca y recíproca—punto por punto—, es decir, en último término, que el conjunto de puntos ó posiciones en un espacio de n dimensiones, sería *equivalente* á otro conjunto de una dimensión ó lineal.

Ahora bien; ¿no se podría pensar que un determinado asunto social—tal como yo lo he entendido en estos *Apuntes*—es un ejemplo de espacio aritmético de n dimensiones? Y mirándolo así, la posición de un individuo en ese asunto, ¿no se definiría por un número complejo (que sería el parámetro hipotético nuestro) de n números reales que se reuniesen en él? Y ese número complejo, ¿no determinaría la posición de un punto en ese espacio aritmético de n dimensiones? Y el conjunto de todos los valores bien determinados, ó de todos los puntos posibles en un espacio aritmético de n dimensiones, ¿no es quizá la expresión ideal (en la pura Matemática) del conjunto de todos los valores posibles del parámetro de n notas psíquicas?

Y, finalmente, la correspondencia unívoca y recíproca que establecen esos matemáticos—punto por punto—entre los conjuntos de sistemas de valores reales posibles de x_1, x_2, \dots, x_n , y los valores reales posibles de una variable u de una sola dimensión, que conducen á un conjunto lineal, ¿no se podría aplicar igualmente á nuestro parámetro, según apuntamos en los *Preliminares* (pàg. 50)?.....

Con todo género de reservas hacemos las interrogaciones que preceden, porque acaso las indicaciones que apuntamos podrían contribuir en algo á justificar nuestras hipótesis.

las fuerzas, porque este tema es importantísimo para la *Dinámica*, y acaso sea de gran interés relacionar los conceptos de *trabajo* y *energía* en el juego mecánico de las Sociedades, como lo es en la complejión mecánica de toda la Naturaleza.

Se sabe que en los sistemas materiales que estudia la Mecánica, como ciencia física, se llama *energía* todo lo que, transformándose de cualquier modo, sea capaz de convertirse en *trabajo*. Cualesquiera que sean las formas en que se presenten las energías, ya sean térmicas, eléctricas, químicas, mecánicas, etc., se transforman naturalmente unas en otras; y con ellas, se podrían relacionar (mediante equivalencias) los trabajos correspondientes á movimientos geométricos. Prescindimos aquí de ciertas limitaciones, como, por ejemplo, que la energía calorífica no se transforme directamente en energía química, como tampoco se transforme en química la energía mecánica. En cambio la eléctrica se transforma fácilmente en todas las distintas formas conocidas de energía, y á su vez todas éstas se transforman inversamente en energía eléctrica. Son conocidas muchas de las formas que revisten la *energía cinética* y la *potencial*; y se puede asegurar que algunas son todavía desconocidas para los hombres de ciencia. Las ciencias físicas —dándose la mano con la Mecánica— han formulado algunas leyes cuantitativas para su transformación, y han determinado el *equivalente mecánico* (*).

Respecto de las formas de energía física que sean desconocidas, ó que no hayan podido ser estudiadas todavía com-

(*) Se sabe, por ejemplo, que una *caloría-gramo* (caloría pequeña), es decir, la cantidad de calor necesaria para elevar en un grado centígrado (de 15° á 16°) la temperatura de un gramo de agua, equivale á un trabajo mecánico de 4,17 *julios*, ó sean 417×10^5 *ergios*. Siendo 1 julio=0,102 kilográmetros, se ve que la *caloría-gramo* equivale á $4,17 \times 0,102 = 0,425$ kilográmetros.

El equivalente mecánico de la *caloría grande* es, pues, de 425 kilográmetros.

pletamente, admitiremos que puedan transformarse unas en otras, y en las ya conocidas y estudiadas; y admitiremos también que todas las transformaciones de energías físicas del mundo llamado *inorgánico*, se rijan por leyes cuantitativas, aunque casi todas esas leyes nos sean desconocidas.

* * *

En el mundo llamado *orgánico* (vegetal y animal) se manifiesta la energía en nuevas formas, mucho más desconocidas por las ciencias llamadas naturales (la Fisiología y la Biología) de lo que eran las anteriores formas de energía por las ciencias físicas. Son patentes las energías cinéticas y potenciales que se presentan en el mundo orgánico de modo—al parecer—distinto que en el mundo inorgánico. Así, en cada semilla, en cada huevo existe, sin duda alguna, una complicadísima energía potencial, que después se manifiesta, en cada vegetal ó en cada animal, por un inmenso y variadísimo—casi inextricable—despliegue de energías cinéticas y potenciales por sus reacciones con el medio.

Aquellas incesantes é innumerables transformaciones de energías en todo lo *inorgánico*, se realizaban ante nuestra consideración dentro de moldes de un mismo género, como si dijéramos. Pero al considerar las transformaciones de energías en todo lo llamado *orgánico*, tanto en los individuos aislados (un vegetal ó un animal), como en las colecciones de individuos, sean familias, géneros ó especies, las transformaciones de energías, parecen salir fuera de aquellos moldes. No porque estas energías cinéticas y potenciales nos aparezcan *en sí mismas*, como algo diferente de las energías en el mundo inorgánico. Si nos parece que las transformaciones en el mundo orgánico, son algo distinto de las que se realizan en el inorgánico, es porque aquéllas se concretan y

particularizan de un modo tal en los individuos, y porque aparecen tales caracteres y limitaciones en las transformaciones (dentro de su inmensa riqueza y complejidad), que no acertamos á aplicar á ellas de *idéntico modo*, leyes como las que conocemos para las transformaciones de las energías en el mundo inorgánico, por lo cual muchos las han llamado *energías vitales*. Naturalistas de genio han llegado, después de profundísimos estudios, á formular algunas leyes, como Darwin, la de las variaciones y la selección natural en las especies vegetales ó animales, ó Lamarck la de las transformaciones por adaptación. Es natural pensar que estas leyes, por ejemplo, se cumplen en la Naturaleza mediante transformaciones complicadísimas de energías cinéticas y potenciales, que la ciencia está muy lejos todavía de conocer bien, aunque se avance más y más cada día en su estudio (*).

Las manifestaciones de energías que estudian la Botánica y la Zoología, en el nacimiento, en el crecimiento y en la vida entera de los individuos vegetales y animales, revelan claramente las transformaciones de unas energías en otras dentro de un mismo individuo.

Pero estas energías de que hablamos no parecen ser esencialmente distintas de las que se consideran en el mundo inorgánico. Las ciencias de aplicación como la Agronomía, por ejemplo, fundándose en el conocimiento de aquellas energías, ponen de relieve — mediante la observación y la

(*) *Le Dantec* hace notar que la ley de *la selección natural*, y la de *la persistencia del más apto*, no expresan en el fondo sino la necesaria continuidad en la ascendencia genealógica de todo ser que viva en un instante dado. Ninguna de las variaciones que se han ido operando en un transcurso enorme de siglos, y por las cuales han pasado los ascendientes, ninguna le ha matado; porque allí habría terminado la historia de sus variaciones.

Aunque á nosotros no nos interesen directamente las leyes naturales á que obedezca la propagación de la vida, nos importa sí ver que estos procesos parecen realizarse mediante transformaciones de energías.

experiencia—las transformaciones de las físicas y químicas (cinéticas ó potenciales) en estas otras energías llamadas vitales (cinéticas ó potenciales), dentro de cada individuo vegetal ó animal, y viceversa. Así, por ejemplo: las energías químicas que hay en el agua ó en el aire, las físicas que hay en el calor, en la luz, en la electricidad, etc., se transforman en otras energías internas en los vegetales y animales. Y viceversa: éstas se transforman en calor, en esfuerzos musculares que dan variadísimos trabajos mecánicos, proporcionando energías para el mundo inorgánico, etc.

Dentro del mundo orgánico, son patentes también las transformaciones de energías del reino vegetal en otras del reino animal, y viceversa. Así, por ejemplo: las energías potenciales que hay en la yerba, en un grano de trigo, etc., se transforman, mediante los procesos de la nutrición, en energías internas en el animal. Y viceversa, los residuos de un animal llevan energías que se convierten en otras de los vegetales, etc.

En resumen, todo parece indicar, en una vista rápida, que las transformaciones mutuas de las energías físicas, y químicas y fisiológicas se cumplen igualmente en la Naturaleza viva que en la que se dice muerta, aunque sólo en casos muy contados, sea posible formular hoy leyes cuantitativas de las transformaciones. Se realizan á nuestra vista incesantemente, y todos los seres son tan profundamente penetrados por esas transformaciones en su continuidad, que en ellas está la manera de ser de la Naturaleza con sus movimientos todos y con la vida toda.

Prescindiendo de los detalles, se puede decir, en términos generales, que es siempre alguna manifestación de energía química potencial en el organismo la que provoca inmediatamente cada energía fisiológica, en la cual se transforma aquélla mediante alguna destrucción del material orgánico y la consiguiente pérdida de parte de la energía potencial, que está en las reservas. Inversamente las energías fisiológicas

del animal, al transformarse en físicas, conducen á alguna manifestación de energía térmica (para disiparse) ó á energía mecánica.

Perteneciendo el hombre al reino animal, le son aplicables las brevísimas consideraciones anteriores. Veamos ahora rápidamente algo respecto al mundo *psíquico*.

*
* *

En los animales de las especies superiores — el hombre entre ellos — hay variadísimas *energías psíquicas*, que se relacionan con sensaciones, recuerdos, ideas, sentimientos, emociones, voliciones, etc. Son las que más nos interesan aquí, porque están íntimamente ligadas con lo que hemos llamado fuerzas psíquicas sociales.

Parece que estas energías psíquicas surgen primeramente en el individuo animal, mediante transformaciones internas muy complicadas y oscuras de las energías físicas y químicas por los procesos de la nutrición, la respiración, etc., transformándose en fisiológicas, y luego en *otras correspondientes* energías psíquicas.

Estas últimas transformaciones son más oscuras aún que aquellas de las energías físicas y químicas entre sí, ó de éstas en las energías fisiológicas de un animal.

Se ve que primeramente las energías físicas exteriores llegan como excitaciones de los sentidos, y se transforman en las energías nerviosas interiores al organismo; y éstas vuelven á transformarse en los órganos centrales. Las últimas formas en que la energía se manifiesta en el campo de la conciencia, son las que llamamos energías psíquicas. Aunque no conozcamos bien su naturaleza, la Psicología fisiológica ha adelantado mucho en el estudio de los fenómenos psíquicos, viendo sus procesos en conexión con los procesos

materiales que les son *paralelos*, es decir, con los procesos fisiológicos correspondientes.

Un distinguido escritor, *W. M. Pepperrell Montague*, intenta establecer: «que lo que un individuo (desde su interior psíquico) *llama sus sensaciones*, son ni más ni menos que lo que otro individuo (desde fuera) describiría como las formas de energía potencial en que se transforman las energías cinéticas de las corrientes nerviosas al atravesar el cerebro del primer individuo.»

Dice Ostwald, que los fenómenos psicológicos pueden concebirse como fenómenos energéticos, y ser interpretados como tales, lo mismo que todos los demás fenómenos. En esos fenómenos de la energía llamada nerviosa, se observa que los procesos (en todo el complicado sistema nervioso cerebral) llevan consigo consumo de energía durante la actividad psíquica.

Nuestro compatriota *D. José R. Carracido*, después de establecer en su *Tratado de Química biológica* que «el trabajo específico de los nervios es correspondido en todas sus formas por el consumo de cierta cantidad de potencial químico»; y de afirmar que «es indudable que no se produce acto psíquico alguno sin otro material correspondiente», rechaza (como aventurada) la afirmación hecha por *Gautier* de que el pensamiento no tiene equivalente mecánico ni químico. El ilustre Profesor español dice que no puede darse por demostrada — como pretende Chauveau — la *íntegra conversión* de la energía del trabajo fisiológico en calor sensible; y cree posible, por el contrario, que la actividad psíquica corresponda á un verdadero trabajo que sea siempre una cantidad positiva, y no pueda reducirse á cero.

Pero si los procesos de transformación son muy complicados y oscuros, y hoy se sabe poco de ellos, lo que está á la vista — y todo el mundo reconoce — es la *íntima conexión y correspondencia* que hay entre las energías físicas y químicas, las fisiológicas, y su paralelismo con las psíquicas

en cada individuo; de tal modo, que el estado psíquico de un individuo es en general *función* de todas las variables que constituyen el estado fisiológico, según se ha dicho. Se muestra por multitud de fenómenos de la vida; y no podía menos de ser así, puesto que unas y otras se dan en el *todo* individual, *que es uno*.

Se observan esas conexiones de las energías físicas y fisiológicas y su correspondencia con las psíquicas (*). Se ve, por ejemplo, que un determinado alimento ó bebida; una cierta temperatura; un gran ejercicio corporal, etc., producen ciertos cambios en las energías fisiológicas del individuo, y provocan (ó se transforman) á su vez otras energías psíquicas como la excitación de la imaginación ó del entendimiento, ó el abatimiento y depresión del ánimo, etc., etc.

Inversamente, se observa que ciertos estados psíquicos del individuo provocan (ó se transforman) otros estados fisiológicos correspondientes; y de ello se puede presentar multitud de ejemplos. Un estado prolongado de pena hace más lentas las contracciones del corazón, ó viceversa; una emoción cualquiera altera el pulso, ó viceversa; una brusca impresión penosa provoca náuseas y diarrea; una impresión de miedo influye en la respiración, en la orina y en otras funciones fisiológicas; un esfuerzo de las facultades mentales paraliza ó retrasa la digestión; un sentimiento de ansiedad angustiosa provoca en ciertas circunstancias un despliegue enorme de fuerza muscular, etc., etc.

Respecto de la manera cómo deben de ser entendidas estas transformaciones, dice *Bain* en su libro *El espíritu y el cuerpo* «que si una impresión de miedo paraliza la digestión—por ejemplo—se debe de pensar que la emoción va

(*) No entramos á investigar las causas de estas conexiones y de esa correspondencia. Según advierte Mach, la noción de *causa* es muy metafísica—como hemos dicho en otra ocasión—y no encuentra lugar aquí.

acompañada de un estado de excitación particular del cerebro, y en general del sistema nervioso, y este estado es el que perturba las funciones del estómago». Y que, asimismo, en las transformaciones inversas de energías fisiológicas en psíquicas—por ejemplo—un estimulante material devolviendo la calma al espíritu, se debe de pensar que ese estimulante (alimento, por ejemplo) determina un aumento de afluencia de sangre al cerebro é influye en las corrientes nerviosas, y á este modo particular de acción nervioso-cerebral corresponde el estado moral que se ostenta.

Ribot coincide con *Bain* al concebir que los estados de conciencia (emociones, por ejemplo) no pueden separarse de las condiciones físicas correspondientes, y que lo que objetivamente se expresa por lágrimas, temblor, etc., se expresa al mismo tiempo subjetivamente por tristeza, terror, etc. Y además, observa *Ribot* que en rigor no es una idea ó un sentimiento lo que se transforma en un movimiento ó energía física, sino que el estado fisiológico que acompaña siempre al estado psíquico es lo que se transforma en movimiento muscular, es decir, que un estado fisiológico se transforma en otro fisiológico. Nosotros, hablando de un modo breve, aunque pueda no ser enteramente correcto—decimos que una energía psíquica se transforma en otra fisiológica, y viceversa.

En todas las especies animales en que se muestren claramente las energías psíquicas, se observa que estas transformaciones de energías fisiológicas en psíquicas, así como las inversas, se operan con maravillosa facilidad y rapidez en aquellos individuos en que predominan los fenómenos emocionales (por la constitución—heredada ó adquirida—de su sistema nervioso), y que son, por esto, de temperamento emocional.

El profesor *Ostwald* considera, como ya hemos dicho, que los fenómenos psicológicos entran en el cuadro de la concepción energética, como todos los demás fenómenos; y

que las energías psíquicas pueden quizá ser miradas como transformaciones de las energías químicas que hay en el organismo.

Piensa este ilustre Profesor que si entre el grupo de operaciones fisiológicas y el grupo de operaciones psíquicas no se ve más que *el paralelismo*, y sólo éste se estudia, la separación entre esos grupos subsistirá, y no se podrá llegar á ver nunca la comunicación. Me parece algo arbitrario este pensamiento de Ostwald, porque no es posible presumir *á priori*, sin riesgo de equivocarse, lo que habrá de resultar — para la ciencia en el porvenir — siguiendo atenta y profundamente el estudio del citado paralelismo; y esta actitud de circunspección científica es en cambio garantía de firmeza para los resultados á que se pueda llegar. Ostwald cree que los fenómenos psíquicos no son *simples acompañantes* de las variaciones de energías fisiológicas, sino que pueden identificarse con estas últimas.

El Profesor *Ebbinghaus* piensa que la unidad de la vida psíquica corresponde á la unidad del sistema nervioso; porque éste es — en cierto modo — todo el organismo, en cuanto organismo viviente. Para este psicólogo, las energías fisiológicas son *de un orden diferente*, y se distinguen bien de las psíquicas; pero *no corresponden á realidades distintas*, sino que más bien son manifestaciones diversas de *un solo y único Ser*.

Esta hipótesis de *Ebbinghaus* y de otros eminentes psicólogos (hipótesis de la *identidad*) deja siempre fuera de nuestro alcance lo que sea ese Ser como un único Principio. Decía *Maudsley* que: «No hay dos ciencias, la Psicología y la Fisiología de los centros nerviosos, y entre ellas una ciencia híbrida que sea la Psicología fisiológica. Hay *una sola ciencia*, que es la Fisiología del sistema nervioso, y los fenómenos de éste ofrecen dos aspectos: uno objetivo y otro subjetivo, que deben ser estudiados por la observación externa y por la interna.» Y añadía que, en todo caso, aquella división

artificial se puede admitir como una división científica, no en la naturaleza de las cosas. En otro pasaje dice Maudsley que: «No hay dos Mundos — el de la Naturaleza y el de la conciencia humana — colocados uno encima del otro y en oposición el uno con el otro, sino un solo Mundo que lo comprende todo, y del cual la conciencia humana es una manifestación, un grado de evolución, quizás el último y el más perfecto».

Además de las transformaciones de energías fisiológicas en psíquicas ó viceversa, hay otras mucho más interesantes para nosotros aquí, que son las de energías psíquicas *entre sí*. Se observa que dentro de un mismo individuo, ó de un mismo elemento social cualquiera, una idea, vivamente pensada, provoca (ó se transforma) un sentimiento de alegría ó de tristeza, de entusiasmo ó de terror, etc. Según las circunstancias y según sea el temperamento psíquico del individuo ó del elemento social, el tono sentimental que acompaña á aquella representación es mayor ó menor. Inversamente, un estado sentimental provoca á veces una gran actividad mental, ó un tono superior de la voluntad, etc. Parece indudable que todas las diversas notas psíquicas de un individuo se relacionan entre sí, se acompañan y son susceptibles de transformarse mutuamente (*).

(*) Aunque una *idea* ó un *recuerdo* sea cosa enteramente distinta de una *emoción*, es evidente que lo uno puede provocar lo otro. Poco importa ahora, para nosotros, que una idea se transforme primero en energías fisiológicas, y éstas, después en una emoción; ó bien que (como piensan otros psicólogos), la idea provoque directamente la emoción, y ésta luego se transforme en energías fisiológicas. Lo que nos interesa notar, son esas *sucesiones* y *transformaciones*. Dice el Profesor W. James, que un individuo de temperamento emocional y de riqueza de imaginación, puede *revivir*—provocándola—una *emoción real* de amor ó de cólera, mediante el *recuerdo (ideal)*; y esto se comprueba por la observación y la experiencia.

Lo que aparece en estos casos, es que un cierto estado de conciencia despierta ó promueve, como dice Ribot, otro estado de conciencia diferente, por asociación ó de cualquier modo. Puede pensarse que

Es asimismo un hecho de observación, la comunicación de energías psíquicas de un individuo ó elemento social á otro. Estas transformaciones de energías psíquicas son las que revisten carácter *predominantemente social*. Las fuerzas psíquicas — que actuando como fuerzas exteriores — hemos admitido en estos *Apuntes*, ejercen sus acciones para realizar, *mediante sus trabajos*, las transformaciones de energías á que nos referimos ahora.

Se debe de observar — sobre las transformaciones de energías fisiológicas entre sí, fisiológicas en psíquicas ó viceversa, y psíquicas entre sí, — que parece haber en cada individuo una particular y determinada *capacidad suya* para cada especial transformación de energía; y parece, por consiguiente, difícilísimo llegar á descubrir leyes cuantitativas á que obedezcan las equivalencias, y que sean aplicables por igual á todos los individuos (suponiendo que se pudieran medir unas y otras energías).

El día en que se pudiera eso intentar habría que determinar — á mí parecer — un coeficiente particular para cada individuo en cada género de transformación de energías; y aun este coeficiente individual no sería *constante*, sino variable con el estado particular en que se encuentre en un instante dado el individuo á quien corresponda. Es decir, que el coeficiente individual debería de ser afectado de un subcoeficiente, función del estado fisiológico y psíquico. Se comprende la inmensa dificultad de estas determinaciones.

Habremos de tratar más adelante de la conservación de la energía en su estricto sentido científico. Pero como observación vulgar, es atinadísima la de *Bain*, al decir que si consumimos mucha energía en una función — ejercicio muscular, digestión, pensamiento, sentimiento, etc. — las otras funciones deben de permanecer momentáneamente en una

haya en el fondo transformación de alguna energía fisiológica en otra también fisiológica.

relativa inacción. Para satisfacer la demanda, exagerada en un sentido, es necesario, dice, suministrar menos energía á las otras funciones; y así, por ejemplo, el que emplea mucha de la energía nerviosa de que dispone en especulaciones científicas, no puede al mismo tiempo consumir muchas energías nerviosas en actos genésicos, so pena de un rápido agotamiento del organismo nervioso cerebral.

Pero sea lo que fuere de todo esto, lo que sí puede afirmarse—desde el punto de vista mecánico—es que las energías psíquicas del individuo encuentran limitaciones en las energías del mundo físico á que el individuo natural pertenece. El cuerpo de éste, con todos sus órganos y elementos materiales, constituye un sistema sometido á las leyes de la Mecánica física. Por esto no puede sustraerse — aunque el individuo lo quisiera — á las leyes de la gravedad ni á ninguna otra ley mecánica física.

A propósito de esto, se puede recordar que en todos los libros de Dinámica —al hacer la exposición del *Teorema del movimiento del centro de gravedad de un sistema material* (ó del Teorema llamado de las *áreas*), y al demostrar que las fuerzas *interiores* no pueden influir (por lo cual se formula el principio de la conservación)—se llama la atención sobre las limitaciones que encontraría un hombre, ó un animal cualquiera, si se le pudiera concebir aislado y en el vacío, para sustraerlo á todas las fuerzas exteriores. Si se imaginara que el animal (mediante fuerzas psíquicas de voluntad) desarrollase entonces esfuerzos interiores musculares, y moviera diversas partes de su cuerpo, se podría asegurar que, en el supuesto dicho—por ley mecánica ineludible de su propio cuerpo—, no podría mover las diversas partes *á su capricho*; porque no podría, por ejemplo, modificar el estado del centro de gravedad de su cuerpo. Si el estado inicial de este centro de masas de su cuerpo fuera de reposo, en reposo habría de permanecer, conservando la misma posición que ocupaba en el espacio; y aunque el hombre (ó animal) psi-

quico—valga la expresión—quisiera alterarla, le sería tan imposible, como le sería, por ejemplo, dejar de pesar. Recuerdo este ejemplo y lo cito, porque en él se ve, de modo muy patente, aquella conexión íntima de que hablábamos entre las energías psíquicas y las físicas musculares. Aquí la conexión aparece claramente regulada por *una ley de la Mecánica física*.

* * *

Dejando ya estas cuestiones acerca de las relaciones que hay entre unas y otras energías en el mundo llamado *inorgánico*, en el *orgánico* y en el *psíquico*, para encerrarnos en el terreno propio de la *Mecánica racional*, recordemos primeramente — siguiendo la costumbre adoptada desde el principio en estos *Apuntes* — lo que ocurre con un punto material libre colocado *en un campo de fuerza*.

En la Dinámica de los *puntos materiales* se distingue:

1.º La energía actual ó *de movimiento* — llamada *cinética* — que dependiendo de la masa m del punto y de la *magnitud* v de su velocidad en el instante que se considera, se mide en este instante por $\frac{1}{2} m v^2$. Puede transformarse en una cantidad equivalente de *trabajo*.

2.º La energía *de posición en el campo* — llamada *energía potencial* — que, dependiendo de la masa m del punto y de su posición en el instante que se considera, así como de la naturaleza ó constitución del *campo de fuerza* — se mide en ese instante por *todo el trabajo positivo* que podría desarrollar la fuerza del campo sobre el punto, cambiando su posición en la región de que se trata. Se sabe que *la fuerza* del campo es el producto de la *masa* del punto por la *aceleración* correspondiente á cada posición. Esta aceleración es lo que se llama *la intensidad del campo* en esa posición. Mien-

tras pueda actuar la fuerza del campo, y pueda el cambio de posición del punto permitir á esa fuerza *dar algún trabajo positivo*, hay energía potencial en el punto material dentro del campo (*). Refiriéndonos á la *unidad de masa*, esta energía potencial es lo que se llama EL POTENCIAL correspondiente á cada posición. Es claro que la energía potencial (ó el potencial) es *esencialmente numérica* (escalar), como lo es la energía cinética. Lo es también la energía *total* del punto en el campo en que se encuentra, si se llama así la suma numérica de las energías cinética y potencial correspondientes á un mismo instante.

Se sabe que, en general, las posiciones de los puntos á las cuales corresponde el mismo potencial en un campo de fuerza, pertenecen á una misma *superficie de nivel*, que se llama *equipotencial*, y que cuando la intensidad del campo (actuando sobre un punto de masa unidad) hace trabajo positivo, el punto pierde de su potencial una parte exactamente igual á ese trabajo, y pasa á estar colocado en un menor *nivel potencial*. Por esto el potencial que tiene el punto en una posición en el campo, *mide* (ó da la medida de) *todo el trabajo positivo* que las fuerzas del campo harían si lo llevaran hasta el límite del campo, agotando todo su potencial.

En general, si el movimiento del punto en el campo se pudiera mirar como una sucesión de movimientos *elementales*, cada uno de los cuales se iniciara *sin velocidad*, la línea formada por las *trayectorias elementales* sería una *línea de*

(*) Decimos *dentro del campo*, para que se recuerde bien que la energía potencial está en el conjunto del sistema á que pertenece el punto, aunque la refiramos á éste. El Profesor Ostwald (en su libro sobre la energía) ha presentado algunos reparos á la distinción hecha por Rankine entre la energía actual y la potencial. Ya se ha aceptado por todos la denominación de *cinética*, que no puede originar confusión. Se ha conservado la de *potencial*, que no equivale á *posible* como contrapuesto á lo real y efectivo. La energía potencial en un campo de fuerza, es tan real y efectiva como la cinética.

fuerza. Sólo en el caso de ser ésta una línea recta, sería ella misma la *verdadera trayectoria finita* que seguiría un punto que se dejara *libre y sin velocidad* en el campo.

Después de estas ideas generales, recordemos el ejemplo sencillo del *campo uniforme* de la gravedad terrestre, en que, la intensidad del campo es g (constante); y la dirección y el sentido del campo es la vertical hacia abajo (constante) (*).

Si un punto material de masa m se dejara libre en el vacío en una posición cualquiera o , en la cual tuviera una velocidad v_o , que forme (por su dirección y sentido) un ángulo agudo α , con la vertical hacia arriba, se sabe que en el movimiento parabólico del punto se cumple el *Teorema de la energía*, que dice así:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 = - m g \times y;$$

y que nos enseña: que al elevarse el proyectil—ó alcanzar mayor *nivel potencial*—la y positiva corresponde—para cada posición—á un trabajo negativo (segundo miembro de la ecuación), hecho por la fuerza del campo, por haber *augmentado la energía potencial* del punto en ese valor del *trabajo hecho*, que es exactamente igual á la *disminución de energía cinética* (primer miembro de la ecuación), desde su estado inicial $\frac{1}{2} m v_o^2$.

(*) Nos referimos á una región suficientemente pequeña para que las aceleraciones de todos los puntos en sus movimientos de caída, se puedan considerar—sin error sensible—como iguales, y para que análogamente las verticales puedan ser miradas como paralelas

En las leyes que vamos á recordar, se prescinde de la resistencia del medio. No se tratará, pues, de las leyes del fenómeno *natural*, sino de leyes *abstractas y aproximadas*, que sería preciso corregir después. Se sabe que éste es el modo ordinario de proceder, dada la inmensa dificultad de formular las leyes de los fenómenos, tales como éstos se presentan en la Naturaleza.

Puede notarse (como hecho interesante en este ejemplo) que, en cualquier instante, la energía cinética $\frac{1}{2} m v^2$, es compuesta de dos sumandos

$$\frac{1}{2} m v_x^2, + \frac{1}{2} m v_y^2; \quad (*)$$

y como el primer sumando no puede aumentar ni disminuir (porque el movimiento en proyección horizontal es necesariamente uniforme, puesto que la dirección del campo es normal á la dirección horizontal ox), y ese primer sumando tiene el valor constante $\frac{1}{2} m v_o^2 \text{sen}^2 \alpha$; se ve que al disminuir — como decíamos — la energía cinética, ésta no puede agotarse por completo y convertirse ó transformarse toda ella en potencial. Sólo podrá agotarse — y se agotará — el segundo sumando *inicial* $\frac{1}{2} m v_o^2 \text{cos}^2 \alpha$, cuando por el trabajo negativo de la fuerza del campo la energía cinética del punto llegue al valor mínimo $\frac{1}{2} m v_o^2 \text{sen}^2 \alpha$, correspondiente necesariamente á la posición de *máximo potencial*. Se ve: que en la rama descendente de la parábola — á partir de la posición de máximo potencial, las disminuciones del potencial serán compensadas (mediante los trabajos positivos que vaya haciendo la fuerza del campo) — por los aumentos de la energía cinética desde su mínimo. La exacta igualdad entre este aumento (primer miembro) y aquella disminución (segundo miembro) demuestra que hay *conservación de energía total en el campo*.

Este problema es aún más sencillo, si se supone que la velocidad inicial v_o es *vertical*. Entonces se vé: 1.º, que si su

(*) Adoptando el eje ox horizontal y el eje oy vertical.

sentido es el mismo del campo ($\alpha = \pi$), el movimiento del punto es rectilíneo uniformemente acelerado en la dirección y en el sentido mismos de la *línea de fuerza*; 2.º, que si el sentido de v_o es contrario al del campo ($\alpha = o$), el movimiento es uniformemente retardado en la dirección de la línea de fuerza, y en sentido contrario y *toda* la energía cinética inicial $\frac{1}{2} m v_o^2$ se agotará, transformándose en potencial, correspondiendo el mínimo *cero* de aquélla al máximo de ésta.

En el caso de que el punto tenga enlaces que le sujeten á recorrer una determinada trayectoria fija, que sea una curva cualquiera con sinuosidades de máximos y mínimos de altura, y siempre moviéndose en el campo uniforme de la gravedad, se aplica idénticamente el *Teorema de la energía*, y conduce á idénticos resultados, puesto que la reacción normal de la curva fija da constantemente *trabajo nulo*, y siendo la única fuerza que trabaja la del campo — que es $m g$ — la ecuación es idéntica.

Entonces no está obligada á conservarse constante ninguna parte de la energía *cinética inicial*, y toda ella se agotará hasta alcanzar el máximo posible de potencial, que corresponderá al mínimo *cero* de la cinética.

Nada nuevo hay que decir; y se ve siempre la *conservación de la energía total* en el campo.

Nos hemos detenido demasiado en los recuerdos en la *Mecánica racional* sobre un simple punto material colocado en un campo de fuerza.

Vengamos ya á la *Mecánica social*, para tratar de las fuerzas psíquicas, y verlas actuando sobre los individuos y elementos de una agrupación social que estén en movimiento en un asunto; es decir, haciendo *trabajos sociales*, y proporcionando *energías psíquicas*.

Fijemos la atención en un solo individuo. — Dijimos que en cada individuo y para cada asunto, hay en cada instante un conjunto psíquico compuesto de ideas, sentimientos, voliciones, etc., que define para nosotros *la posición* del individuo en el asunto en ese instante. — Y dijimos también: que del *estado físico-fisiológico* del propio organismo corporal, emanan influencias que al actuar sobre el *ente psíquico simple*, que llamamos *el individuo*, constituyen verdaderas fuerzas psíquicas; así como del *estado general psíquico* del propio individuo, brotan fuerzas que pueden actuar sobre el individuo mismo, é influir para cambiar *su posición en el asunto* que se considera. — Tanto las que emanen del estado físico-fisiológico, como las que vengan del estado psíquico en general, tendrán en cada instante, direcciones y sentidos determinados, con intensidades también determinadas, en correspondencia unas y otras con el temperamento físico — por decirlo así — del individuo en que brotan (*).

El *ente individual abstracto y simple*, con su posición en un asunto, se halla realmente colocado en medio de algo que — mirado en conjunto — constituye un *campo de fuerza*, como se dice en Mecánica. Este campo ó región en que él se halla, lo vemos constituido, en un instante dado, como sigue:

1.º Por todo lo físico y psíquico que — fuera del espacio que ocupa del cuerpo del individuo natural — rodea, por decirlo así, á éste; y alcanza hasta donde sea sensible la acción que pueda ejercer sobre el individuo que consideramos;

2.º Por todo lo físico y fisiológico de su propio organismo corporal;

(*) Creemos conveniente hacer esa separación para mayor claridad de lo que vamos á exponer; pero sin querer con ella significar que el estado psíquico sea algo *esencialmente* distinto del físico-fisiológico, porque éste es asunto ajeno á nuestras especulaciones.

3.º Por todo lo psíquico general *sujo*, que pueda influir sobre él para modificar su posición en el asunto de que se trate (*).

Este complejo campo de fuerza debe de ser mirado (para el individuo *abstracto* y *simple*) como un verdadero *medio ambiente natural* externo é interno, tanto físico y fisiológico como psíquico. El individuo, en cada instante, como libre, se mueve—es decir, se modifica—con una determinada *aceleración* en el asunto, para cada posición del individuo, y *según sea el campo en ese instante*. Si concibiéramos un individuo con la *unidad de masa* para el asunto, diríamos que su aceleración; por su *magnitud*, da la medida de *la intensidad del campo*; y por su *dirección* y *sentido*, da *la dirección y el sentido del campo* en ese instante, para la posición que tenga (en el asunto) ese individuo. Se debe de advertir que lo que hemos llamado *campo de fuerza*, constituido, como acabamos de decir, para ver en él un movimiento elemental de modificación del individuo, es algo diferente del campo de fuerza que considera la *Mecánica racional*, para ver en él el movimiento de un solo punto material; porque los centros de fuerzas psíquicas—así externos como internos (respecto del individuo natural)—no son *centros fijos y de poder mecánico constante*, sino que cambian de un instante á otro física y psíquicamente, por lo cual el poder mecánico-psíquico, como si dijéramos, de esos centros de fuerzas es esencialmente variable. Por esto, al hablar aquí de la intensidad, dirección y sentido del campo para una posición dada del individuo, hemos cuidado de añadir *según sea el campo del individuo en el instante de que se trata*. Ya se comprende que la consideración del individuo en su campo para la *Mecánica social*, sea más difícil que la del punto material en la *Mecánica racional*; y que para formular las proposiciones

(*) Lo 1.º es lo que llama Mach *exterior al límite U*; lo 2.º y lo 3.º es denominado por Mach *interior al límite U*.

respecto á las energías psíquicas de un individuo, haya que adoptar ciertas precauciones.

El *campo psíquico* de que hablamos—por su modo de ser—no será en general *uniforme*; es decir, que la intensidad, dirección y sentido del campo no serán las mismas para todos los individuos, en todas sus posiciones y en todos los instantes. Si se piensa en diversos individuos, se ve que el medio ambiente externo que los rodea, es en general diferente de uno á otro; y aunque fuera igual, serían diferentes lo fisiológico y lo psíquico del ambiente interno en unos y otros individuos. Si se piensa en las diferentes posiciones que tenga un mismo individuo, en dos instantes cualesquiera de su movimiento, también se comprende que, aunque el medio ambiente externo subsistiera el mismo para ese individuo, cada *cambio de posición en el asunto* que se operara en el individuo abstracto y simple en un cierto transcurso de tiempo, sería simultáneo con otros cambios en lo orgánico-fisiológico del cuerpo del individuo y en lo psíquico suyo, es decir, en todo el ambiente interno. Se concibe la enorme complejidad que todo esto lleva consigo (*). Se ve, en definitiva, que el campo de fuerzas psíquicas no será en general *uniforme*.

En la Mecánica racional, *cuando se trata de un solo punto*

(*) Se sabe que el *hábito* de ejecutar los actos todos de la vida influye de tal modo en lo que hemos llamado ambiente interno de cada individuo, que las fuerzas fisiológicas, solamente estimuladas por las simples sensaciones, bastan para realizar nuevamente aquellos actos una vez iniciados. Como ya se realizan *automáticamente*, no hay fuerzas psíquicas—propriadamente dichas—que intervengan. No habiendo de cambiarse el modo de hacer, no ha de intervenir fuerza psíquica como causa de modificación, quedando entregado el individuo—para esos actos—al solo juego fisiológico inconsciente.

Esto no obstante, por otra parte, según se sabe, hay renovación continua fisiológica que se realiza en el cuerpo de cada individuo natural; y así el medio ambiente interno de que hemos hablado, es esencialmente variable con el tiempo.

material, todo lo que ejerce acción sobre éste, se concibe como algo *fijo y constante*, aunque rigurosamente no lo sea, y se supone que cambian sólo la posición y la velocidad del punto que está en movimiento en el campo sobre una trayectoria cualquiera; mientras que en la *Mecánica social* (acabamos de verlo) todo el campo que ejerce acción sobre un individuo es cambiante de un instante á otro, á la vez que se modifican la posición y la velocidad del individuo que consideramos.

Pues bien: mirando el campo de fuerzas psíquicas, tal como sea para un individuo libre en un instante dado, se ve determinada su aceleración en el asunto en ese instante, que es en magnitud la *intensidad* del campo; la fuerza motriz para ese individuo, es (como en la Mecánica racional) el producto de su masa por esta intensidad.

Si se considerase con esa generalidad cambiante ya explicada, la noción del campo psíquico no podría ser de ninguna utilidad para lo que perseguimos ahora, toda vez que dos *posiciones* diferentes del individuo, así como todas las intermedias, para pasar de la primera á la segunda, no podrían ser vistas *en un campo* que fuera *algo* definido y concreto. Por esto nos referiremos solamente (en lo que vamos á decir) al caso particular en que la *dirección y el sentido de campo* sean constantes para cada individuo; es decir, al caso en que la *línea de fuerza* sea simbolizada por *una línea recta*. Entonces se puede hablar de un campo psíquico en el cual el individuo esté sometido, en cada instante y en cada posición suya, á una fuerza para la cual se conciba una sola ley de variación *de su intensidad*. El campo—para el individuo considerado—sería entonces *como si hubiera* un centro único de fuerza situado en esa línea de acción, y del cual proviniera la fuerza que, en cada instante, fuera la resultante de las acciones de todo el campo. Conviene advertir, además, para evitar confusiones y contradicciones, que vamos á poner la atención en un solo individuo, y que el campo

particular que decimos será el *suyo*, y no el de otro individuo cualquiera. Para otro cualquiera, su campo tendrá *otra dirección y sentido*, también *constante* para él, y como si la resultante de todas las acciones que sobre este otro individuo se ejerzan, viniera de otro centro de fuerza y con su ley de variación de *intensidad*.

Considerando, pues, un solo individuo de masa unidad, se debe de pensar que, aun en el caso particular dicho, el campo en que le veamos á él moverse (es decir, modificarse) no sería uniforme, sino en el caso muy particular de que la *intensidad* del campo fuera también *constante*, es decir, que la resultante de todas las acciones que se ejercieran sobre ese individuo de masa unidad—emanando de todo el ambiente interno y externo, físico-fisiológico y psíquico—tuviera, no solamente dirección y sentido constantes, sino también la misma magnitud en todos los instantes. Es evidente que en este caso muy particular el movimiento de modificación del individuo en la dirección y en el sentido de la línea de fuerza sería uniformemente acelerado.

En el curso de estos *Apuntes*, al tratar del movimiento de modificación de un solo individuo ó elemento social, hemos dicho desde la Cinemática, que prácticamente y de ordinario, realiza en su vida los cambios de posición en cada asunto, por una sucesión de movimientos parciales de *dirección constante*, cada uno de los cuales es de larga duración relativa. Cada uno de estos movimientos parciales está en el caso particular que hemos considerado, y podemos aplicarle lo que digamos sobre la *energía psíquica potencial en su campo* en cada instante. Bien entendido, que se supondrá conocida la ley de variación de la intensidad de su campo, en función de la posición que tenga en el asunto en cada instante, porque esta ley es la que *definirá* verdaderamente el campo en el movimiento parcial que consideremos.

(Continuará)

**XXXIX. — Algunas observaciones sobre
los xantogenatos.**

POR J. FERRER.

En el curso de trabajos anteriores efectuados en colaboración con el Sr. del Campo, tuve que preparar algunos xantogenatos alcalinos correspondientes á los primeros términos de la serie de los alcoholes; como para nuestro objeto lo que necesitábamos era el ion xantogenato, los cationes de las sales preparadas fueron el sodio y el potásio. En ellos observé ciertas diferencias en sus formas cristalinas, y siguiendo mis investigaciones en este sentido, presento en este trabajo los resultados obtenidos y al mismo tiempo varias observaciones respecto á ciertas propiedades de otros xantogenatos y algunas aplicaciones analíticas de los mismos.

*
* *

La mayor parte de los xantogenatos preparados fueron sales potásicas y todos se presentan cristalizadas en pequeñas agujas; el isoamilxantogenato fué el sódico, y observé que sus cristales son completamente diferentes, afectando la forma tabular. Al principio, atribuí el hecho á la influencia del catión; pero, habiendo preparado para su comprobación la sal potásica correspondiente, encontré que ésta se presentaba también en forma de escamas análogas á las de la sal sódica. La influencia del anión está manifiesta y en su diferente composición hay que buscar la causa de la variación en la forma cristalina. Los diferentes xantogenatos sólo se

diferencian en los radicales alquílicos que entran en su molécula, y como las propiedades de todos ellos son idénticas, no es probable que la forma tabular que el isoamilo parece imprimir á sus sulfo-tio-carbonatos, sea propiedad peculiar de dicho grupo, y sospeché si sería debido al diferente peso de los radicales alquílicos, es decir, si se trataba de un caso de *morfortropia*, como los varios ya estudiados.

La fórmula general de los xantogenatos es



en ella podemos considerar el grupo central CS, y unidos á él OR' y SM', variables al pasar de unos xantogenatos á otros.

La posición de equilibrio de la molécula dependerá principalmente de la relación en que se encuentran OR' y SM', y fácil es ver que según sea el que predomine, el sistema atómico se inclinará á uno ú otro lado del plano que pasa por el grupo CS central; estas variaciones de posición influirán seguramente en las propiedades que dependen de la orientación de las moléculas y, por lo tanto, en la forma cristalina de estas substancias.

Así, si comparamos los valores que toma OR' en los xantogenatos estudiados,

	<u>CH₃</u>	<u>C₂H₅</u>	<u>C₃H₇</u>	<u>C₄H₉</u>	<u>C₅H₁₁</u>
OR'	31	45	59	73	87,

con los que toma el grupo

	<u>Li</u>	<u>Na</u>	<u>K</u>
SM'	39	55	71,

y con las formas cristalinas de los xantogenatos,

	Li	Na	K
Metil xantogenato....	Agujas.....	Agujas.....	Agujas.
Etil —	Tablas	Agujas.....	Agujas.
Propil —	»	Tablas.....	Prismas.
Isobutil —	»	Tablas.....	Prismas.
Isoamil —	»	Tablas.....	Tablas.

se observa que en los tres casos la variación de forma cristalina coincide con el cambio de signo de la relación OR: SM; que las formas prismáticas se presentan cuando la parte mineral (SM) de la molécula predomina, mientras las formas tabulares aparecen en el caso de predominar la parte orgánica (OR').

La influencia morfotrópica es bien manifiesta; un estudio cristalográfico de los xantogenatos, sería muy interesante para determinar si hay cambio de sistema cristalino, y sobre todo para poder seguir cuantitativamente las variaciones de los ángulos, aunque en los casos estudiados aquéllos presentan valores próximos, y de las relaciones axicas, pues como se puede observar, el aumento de peso del grupo OR' determina un aumento á lo menos en una de las direcciones del cristal, si bien esta variación aparentemente no sigue la misma marcha que el de las variaciones de OR', pues los cristales más finos son los que corresponden al derivado etílico y no al metílico, como podía esperarse.

Los cristales de los metil y etil sulfo-tio-carbonatos potásicos son finas agujas, más delgadas y flexibles en el etílico que en el metílico; los del derivado propílico pueden presentarse en forma también de agujas bastante gruesas ó de prismas ya definidos, y esta última forma se presenta franca-

mente en el isobutílico. El isoamilxantogenato es tabular. El isopropilxantogenato potásico, que no he encontrado todavía descrito, se presenta en forma análoga al derivado propílico y su procedimiento de preparación es el general para toda esta clase de compuestos.

Por el cuadro que precede se ve que la única excepción que hay á la relación establecida, es la que ofrece el isobutilxantogenato potásico, que se presenta en forma prismática en vez de hacerlo en la tabular que le corresponde; esto podría atribuirse á que el peso de OR' y de SM en este caso difieren tan poco, que aun la influencia de la parte mineral se manifiesta, ó bien que tratándose, no de carburos normales como los primeros, sino de radicales *iso*, que la variación en el modo de estar distribuidas las masas en el radical hidrocarbonado fuera la causa de la anomalía observada. Sin embargo, presumo que la causa es otra y que la aparente anomalía no existe; dejando el isobuilxantogenato potásico, cristalizado en agujas de su disolución acetónica, abandonado durante algunos días al aire libre he observado en algunos casos su transformación total ó parcial en la forma tabular; este dimorfismo lo presentan otros xantogenatos, y lo he observado perfectamente en aquellos términos próximos á los que en la serie presentan valores de OR' y SM que tienden á igualarse, así son también dimorfos el etilxantogenato sódico y el metilxantogenato litico (?).

El dimorfismo del etilxantogenato sódico ya lo señala Berzelius, é indica, aunque no de una manera muy precisa, las condiciones en que se obtiene una ú otra forma; así aconseja para obtener la forma tabular la evaporación en el vacío sobre cloruro cálcico; yo he obtenido esta forma dejando evaporar la disolución de xantogenato sin tomar precaución alguna á temperaturas bastante variadas, obteniendo á veces, sin cambio aparente de condiciones, la forma prismática. No he podido encontrar todavía las causas que influyen en que la cristalización se verifique de un modo ó

de otro, aunque por los datos que tengo parece que una evaporación rápida determina la formación de cristales aciculares y una cristalización lenta la de cristales tabulares; además, espontáneamente y con más rapidez que en el caso del isobutilxantogenato, los primeros se transforman en los segundos. En estos casos de dimorfismo, la forma acicular debe considerarse como la *metaestable* y la tabular como la *estable*.

Los xantogenatos de litio son muy delicuescentes, así es que al sacarlos del desecador se transforman rápidamente en una masa líquida, siendo difícil su observación; sin embargo, creo haber notado alguna vez en el metilxantogenato la presencia de cristales tabulares. Estos xantogenatos se descomponen por el calor con más facilidad que los sódicos y potásicos. La delicuescencia de los xantogenatos alcalinos aumenta á medida que disminuye el peso molecular; son delicuescentes además de los de litio, los metil, etil y propil sódicos y el metil potásico, este último solamente en atmósfera fuertemente húmeda.

Por las observaciones que van expuestas, parece que se trata de un caso análogo al hallado por Arzruni en su estudio de los cloroplatinatos amínicos, y que según Vant' Hoff (*) la acción morfotrópica en este caso determina variaciones en la estabilidad de las formas que estos cuerpos dimorfos ó trimorfos pueden presentar. En el caso de los xantogenatos la acción morfotrópica seguramente determina iguales variaciones, y en la mayor parte de los casos la inestabilidad de una de las formas será tan grande, que ésta no se presenta, mientras que en los casos de transición la estabilidad de las mismas tenderá á igualarse, y en éstos el xantogenato se presenta en las dos formas estable y metaestable.

*
* *

(*) *Leçons de Chimie Physique*, trad. Corvisy, 2^a partie.

El estudio de la preparación de las sales de los ácidos xantogénicos y de metales pesados, ó, mejor, la precipitación de cationes correspondientes á dichos metales por los aniones xantogenato, me han conducido á ciertos resultados, que aunque sólo tengan valores relativos y aproximados, creo interesante consignar.

La solubilidad de los xantogenatos no sigue en todos ellos la misma ley, pues mientras en unos (Cu y Co), aumenta con el número de átomos de carbono que entran en la molécula, en otros (Mn, Fe y Cr) sufre una variación inversa, siendo más solubles los metílicos y etílicos y disminuyendo su solubilidad al pasar al propílico, butílico y amílico. En el caso de los xantogenatos de Cu, se observa una mayor insolubilidad en los normales que en los *iso*, y de éstos, conforme á lo indicado, el menos soluble es el correspondiente al primer término.

En dos casos he observado ciertas excepciones á la marcha de solubilidades indicada, que, como se ve, es la que siguen las series homólogas. Estas irregularidades las presentan el Zn, y de un modo más pronunciado el Ni.

Las soluciones de Zn precipitan por los xantogenatos un cuerpo blanco, amorfo, que despúes de algún tiempo se aglomera en granos. Operando con soluciones cada vez más diluídas se observa un minimum de solubilidad en el tercer término para los normales y en el cuarto para los *iso*, aumentando de nuevo al pasar al butílico en el primer caso, y al *iso* amílico en el segundo. En todos los casos el aspecto del precipitado es el mismo, y no se distinguen entre sí más que en su mayor ó menor solubilidad.

En el caso de los xantogenatos de Ni la serie presenta variaciones más profundas y completamente definidas. Un minimum de solubilidad se presenta también de un modo franco en el tercer término, ya se trate del propílico, ya del iso-propílico; en el mismo se manifiesta un cambio de coloración y de estado de agrupación en los precipitados, que se

observan perfectamente operando con soluciones de Ni suficientemente diluidas.

El metil xantogenato de Ni se presenta como un cuerpo amarillo de oro, formado por pequeñísimos granos sueltos, que se depositan con bastante facilidad, y que observados al microscopio tienen la forma de pequeñas esferas sueltas ó agrupadas en corto número; el líquido presenta una coloración rosácea bastante marcada. El etílico es también amarillo y presenta caracteres análogos al anterior; la coloración rojiza del líquido es tan intensa, que el todo tiene el aspecto de un precipitado rosáceo bastante abundante; esta coloración es impedida ya, por un 5 por 100 de alcohol amílico. Los siguientes xantogenatos desde el propílico hasta el amílico son de color amarillo verdoso, tardando en depositarse, y su aspecto es homogéneo; vistos al microscopio tienen aspecto parecido á los anteriores, de los que se diferencian por una agrupación mayor de las esferitas que lo forman; sólo el propílico y el butílico al cabo de cierto tiempo presentan vistas por refracción una débil coloración rosácea. Contrariamente á lo que antes creíamos, todos estos xantogenatos deben ser de naturaleza coloidal, y sobre este extremo voy á seguir una serie de investigaciones.

Este cambio de ciertas propiedades de los xantogenatos de Ni, que de un modo menos manifiesto se presenta en los de Zn y que desaparece por completo en los demás que se han estudiado, no parece ser propiedad general de los mismos, sino propia de los casos indicados. Sin embargo, no dejaré de poner de manifiesto que el cambio de propiedades coincide con un cambio en la molécula; así, si en la fórmula de los xantogenatos de Ni y Zn, observamos que el peso de $\text{SNi} = 61$ y el de $\text{SZn} = 64$ va pasando de ser mayor á ser menor que los pesos de OR, notaremos que cuando dichos pesos se igualan, se presenta el mínimum de solubilidad, y que en el curso de las sales de níquel, cuando la parte mineral de la molécula predomina, se forman cuerpos

de color amarillo, formados por granos sueltos y el líquido toma la coloración rojiza indicada, y cuando la parte orgánica es mayor, entonces se presentan los xantogenatos del aspecto homogéneo, va desapareciendo la coloración rojiza y el tono verdoso de los mismos se va cada vez acentuando.

* * *

La precipitación de las sales de cobre por el etilxantogenato es de antiguo conocida, lo mismo que las fases por que pasa; se sabe que primeramente se forma la sal cúprica, parda, y que ésta pasa con mayor ó menor rapidez á sal cuprosa amarilla con formación simultánea de *dixantilo*. En la precipitación de las sales de cobre por los otros xantogenatos se observan análogos fenómenos; sin embargo, entre la acción del metilxantogenato y los restantes hay cierta diferencia en la velocidad con que se verifica el paso de la sal cúprica á cuprosa; esta velocidad es bastante menor para el derivado metílico, y su xantogenato cúprico aparece como más estable. Esto se observa fácilmente precipitando soluciones de sulfato de cobre muy diluidas por los xantogenatos, operando en todos los casos en las mismas condiciones; el metilxantogenato da siempre el precipitado pardo de sal cúprica que pasa lentamente á cuprosa, mientras que en estas condiciones los otros xantogenatos si dan sal cúprica se transforma rápidamente en cuprosa, pero lo más frecuente es que la transformación sea tan rápida que se forma inmediatamente precipitado amarillo.

* * *

Los xantogenatos de cadmio no sé que hayan sido preparados, ó á lo menos no he encontrado ninguna indicación referente á ellos. Se forman por precipitación de una sal de cadmio por un xantogenato alcalino; son cuerpos blancos, insolubles en agua, alcohol, éter, acetona, sulfuro de carbo-

no, benceno y éter de petróleo; por la acción del calor se descomponen, dejando un residuo anaranjado, y hervidos en suspensión en el agua se transforman en sulfuros. Los etil, propil, isobutil e isoamil-xantogenatos se precipitan amorfos, transformándose muy lentamente en cristalinos, y entonces se presentan en forma de diminutos cristales agrupados en forma generalmente radial bastante confusa.

El metilxantogenato de cadmio es por lo menos dimorfo, dependiendo la forma cristalina que adopta de su modo de preparación. Si se añade una solución de metilxantogenato potásico a una solución de ioduro de cadmio de modo que la sal de cadmio esté en exceso, se forma un precipitado blanco amorfo, que sin perder aparentemente este aspecto se transforma rápidamente en cristalino, afectando la forma de agujas sueltas o poco agrupadas; más lentamente toma el precipitado aspecto cristalino por el crecimiento de los cristales primitivamente formados.

Si la precipitación se verifica adicionando la sal de cadmio de modo que el xantogenato alcalino esté en exceso, se observa al añadir las primeras porciones la formación de un precipitado blanco amorfo de aspecto análogo al anterior, que se disuelve inmediatamente, y continuado la precipitación se deposita después el xantogenato de cadmio en forma cristalina, brillante y de aspecto sedoso. Estos cristales tienen la forma característica que indican las figuras 6.^a y 7.^a a.

Al principio creí que la forma acicular era una sal doble, pero la investigación del iodo ha dado resultados negativos; además, las cantidades de metilxantogenato de cadmio que se obtienen operando de una u otra manera son sensiblemente iguales, y las propiedades generales de las dos formas son idénticas.

Las dos son bastante solubles en piridina, y de esta disolución se pueden obtener cristalizadas en cristales bastante grandes cuya forma recuerda la de los cristales de yeso, y hasta en algunos casos se han observado muchas con cierto

parecido á las del yeso en flecha. Estos cristales deben tener ciertas relaciones con las de la forma ahorquillada.

La variedad amorfa que se deposita primero se transforma, pues, según la composición del líquido en que se encuentra en una ú otra modificación cristalina. He intentado averiguar si éstas son á su vez transformables una en otra, y para ello he puesto los cristales aciculares en contacto de una disolución de metilxantogenato potásico y la ahorquillada en una de ioduro cádmico. Al cabo de varios días no se había logrado una transformación franca, sin embargo. Los cristales primitivos han sufrido ciertas modificaciones; los aciculares se presentan agrupados en haces paralelos y los ahorquillados un aspecto particular, desfilachado, como si estuvieran al principio formados por prismas maclados y que en contacto de la disolución de ioduro de cadmio se hubiesen separado. Este resultado, aunque no muy concluyente, parece indicar que la forma más estable es la acicular, contrariamente de lo que se deduce de un modo más concluyente de la evaporación de su solución piridínica.

APLICACIÓN DE LOS XANTOGENATOS Ó LA CARACTERIZACIÓN É INVESTIGACIÓN DE LOS ALCOHOLES

La forma cristalina de algunos xantogenatos potásicos es bastante diferente, y la agrupación de los cristales en otros suficientemente característica, para intentar un ensayo sobre la caracterización é investigación microquímica de los alcoholes metílico, etílico, propílico, isobutílico é isoamílico. Los xantogenatos metílico y etílico, por presentar forma y agrupación cristalina bastante semejante, no permiten fácilmente la diferenciación de los mismos; pero en este caso, podemos emplear los respectivos xantogenatos de Cd que presentan diferencias bien manifiestas.

Para caracterizar á los alcoholes se puede operar del modo siguiente: á un centímetro cúbico del líquido á ensayar se añaden dos ó tres gotas de una disolución de potasa cáustica al 40 por 100 y la misma cantidad de S_2C ; se agita, é inmediatamente en los cuatro primeros términos, y más lentamente en el caso de que se trate de alcohol amílico, el líquido toma coloración amarilla debida á la formación del xantogenato correspondiente. Una gota del líquido se deja evaporar y se observa el depósito cristalino al microscopio; el aspecto

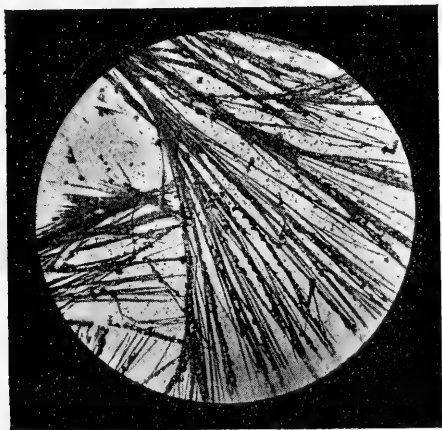


Figura 1.^a

de los cristales formados permite de una manera franca dividir á los alcoholes en los tres grupos siguientes: metílico ó etílico, propílico ó isabutílico é isoamílico.

Los metil y etilxantogenatos (fig. 1), si bien presentan algunas diferencias en su forma cristalina, no son suficientes para su distinción; pero para su diferenciación se pueden utilizar los xantogenatos de cadmio. Añadiendo al depósito cristalino obtenido, como se ha indicado, una gota de solución de ioduro de cadmio al 1 por 1.000, se forma un precipitado blanco, amorfo, si el alcohol de que se ha partido es el etili-

co, y blanco cristalino si es el metílico; operando como se ha indicado, los cristales se presentan de la forma de la figura 5.^a El alcohol metílico se puede reconocer de un modo más sencillo por el aspecto característico del precipitado; para ello se añade al metilxantogenato formado del modo ya descrito la solución de ioduro de cadmio gota á gota y agitando hasta que se forme precipitado persistente; este es cristalino y de brillo sedoso característico.

Los alcoholes propílico é isobutílico son de difícil distin-

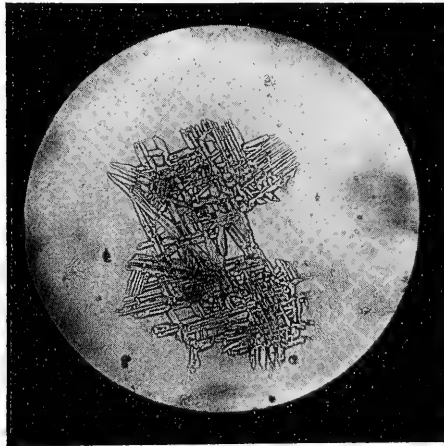


Figura 2.^a

ción, pues aunque el isobutilxantogenato (fig. 3) suele presentarse en cristales más sueltos, su agrupación es análoga á los del propilxantogenato (fig. 2) y, en general, se confunden bastante con los de éste; sólo en casos raros se presentan en cristales que permiten distinguirlos. Como carácter que también puede servir para su diferenciación, es la forma arborescente dentrítica que amenudo suele afectar el xantogenato isobutílico. Lo característico en estos dos xantogenatos es la agrupación casi perpendicular de sus cristales, en general bastante gruesos; si alguna vez se presentan

en forma radial, se distinguen bastante de los cristales de los xantogenatos menos ricos en carbono, y basta recristalizarlos en alcohol ó acetona para que tomen la forma característica.

El amilxantogenato se presenta en forma de cristales tabulares romboidales, en general mal definidos, sobre todo si se trata de alcoholes amílicos comerciales que llevan mayor ó menor cantidad de alcohol isobutilico; mejor es cristalizar el xantogenato en alcohol etílico, y entonces se presenta en

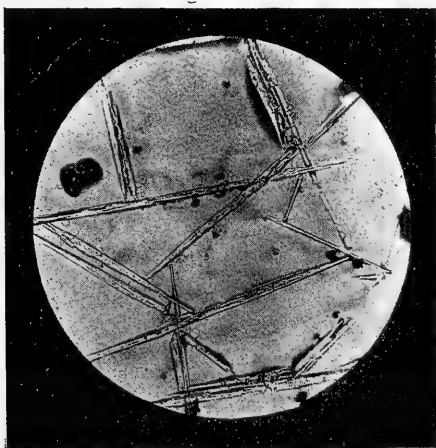


Figura 3.^a

agrupaciones cristalinas aisladas (fig. 4) muy transparentes, por lo que conviene observarlas con poca luz, ó mejor, iluminadas por reflexión. No recristalizando el depósito cristalino primeramente obtenido, se caracterizan perfectamente los alcoholes inferiores que el isoamílico puede contener.

Operando en las condiciones indicadas se pueden reconocer los alcoholes metílico y etílico en líquidos que contengan 2 por 1.000, si bien su diferenciación por la sal de cadmio, no es posible por debajo de 4 por 1.000. Para estas diluciones extremas conviene calentar suavemente la

mezcla de alcohol, potasa y sulfuro de carbono para acelerar la formación del xantogenato.

Por medio de otras reacciones se puede llegar á poner de manifiesto el xantogenato formado, y por lo tanto la existencia de alcohol en el líquido ensayado; así pueden emplearse sales de cobre, de níquel, y la reacción de Dragendorff (molibdato amónico y ácido sulfúrico); pero todas ellas son propias de todos los xantogenatos, y solamente por medio de las sales de níquel se pueden llegar á distinguir los me-

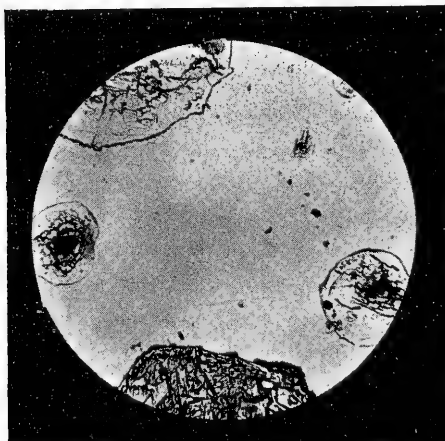


Figura 4.^a

il ó etilxantogenatos de los restantes, como ya se ha indicado anteriormente.

*
* *

He tratado de investigar también si estas reacciones microquímicas podrían servir para investigar mezclas de diferentes alcoholes, y he obtenido los siguientes resultados, no muy buenos en unos casos y verdaderamente satisfactorios en otros.

El alcohol metílico se puede investigar en el alcohol etílico siguiendo la marcha indicada, pero empleando solución de ioduro de cadmio más concentrada (1 por 100) á fin de precipitar todo el xantogenato formado; inmediatamente ó al cabo de poco tiempo se observan los cristales del metilxantogenato de cadmio (fig. 7 b). Esta reacción, que es sumamente característica, tiene el inconveniente de su escasa sensibilidad, pues sólo le dan mezclas que contengan más de 15 por 100 de alcohol metílico, y con más dificultad

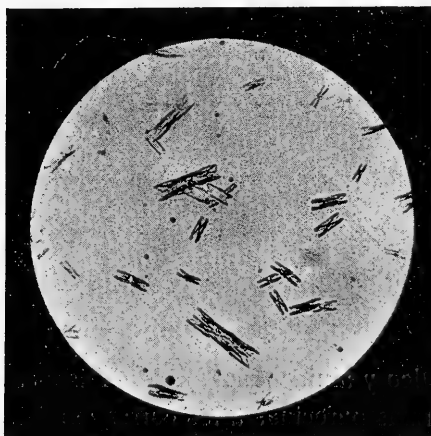


Figura 5.^a

aquellas en que éste no está en proporción inferior al 10 por 100.

Este procedimiento sirve también para reconocer el alcohol metílico en la acetona, siendo reacción en este caso bastante sensible.

La investigación de alcoholes superiores en el alcohol etílico por medio de los xantogenatos, es sumamente sensible; observando la forma cristalina de los xantogenatos formados se observa sin confusión, al lado de las formas aciculares agrupadas en haces radiales del etilxantogenato potá-

sico, los cristales prismáticos propios de los otros alcoholes (fig. 6.^a). Los cristales tabulares del isoamilxantogenato no se distinguen, debido á que al cristalizar mezclas de xan-



Figura 6.^a

togenatos etílico y amílico se forman cristales mixtos que presentan formas parecidas á los correspondientes de tres y cuatro átomos de carbono.

*
*
*

Estas reacciones microquímicas de los xantogenatos, y por lo tanto de los alcoholes, no creo hayan sido propuestas; pues aunque los xantogenatos correspondientes á los alcoholes citados ya han sido descritos, están poco estudiados, y el más conocido, y al que se refieren en general todos los trabajos, es al etílico. Aunque el ácido etilxantogénico da con facilidad cuerpos bien cristalizados, la única reacción microquímica que de él conozco, es la formación

de su sal de plomo (*). De los otros xantogenatos no sé que se hayan indicado reacciones microquímicas.

* * *

Así como el cadmio-ión puede servir para caracterizar al metilxantogenato-ión, éste también puede servir para inves-

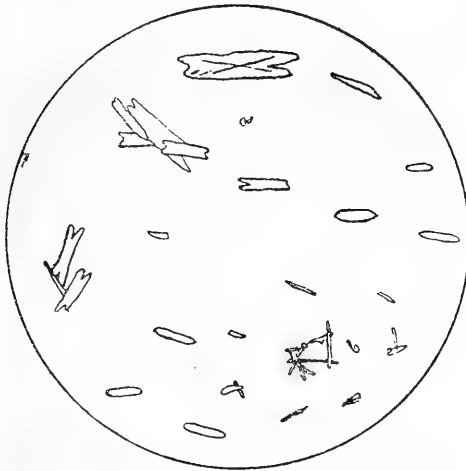


Figura 7.^a

tigar aquél. Añadiendo á una disolución de sal de cadmio unas gotas de solución concentrada de metilxantogenato potásico, se forma el precipitado característico de metilxantogenato de cadmio, que siempre es conveniente observar al microscopio; la reacción puede efectuarse sin dificultad en el mismo porta-objetos, empleando gotas de los líquidos que han de reaccionar.

Por este procedimiento se puede reconocer el cadmio-ión

(*) Emich: Lehrbuch der Mikrochemie, 1911.

en líquido, que sólo contenga 1 parte en 30.000 de agua; en los casos de disoluciones extremas conviene operar en tubo de ensayo, pues el precipitado tarda en aparecer. El cinc no impide la reacción siempre que la concentración en cadmio-ión no baje de 1×3.000 .

(Laboratorio de Química Orgánica de la Facultad de Ciencias de Madrid.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>págs.</u>
XXXVI. — Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décima.....	771
XXXVII. — Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia undécima	797
XXXVIII. — Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i> (continuación).....	823
XXXIX. — Algunas observaciones sobre los xantogenatos, por <i>J. Ferrer</i>	847

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

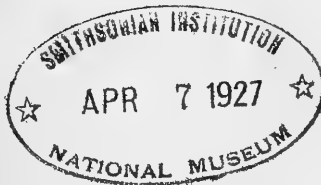
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X.—NÚM. 11.

Mayo de 1912.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 3.

1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XL. — Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia duodécima.

SEÑORES:

Con dos observaciones generales á propósito de la ecuación diferencial de Laplace y de la teoría de las armónicas, terminábamos la conferencia precedente.

Decíamos, en primer lugar, que una ecuación diferencial comprendía en sí, por decirlo de este modo, multitud de integrales, expresando, pues suponemos que sólo se trata de una ecuación diferencial, una propiedad común á todas estas integrales particulares.

Para definir ó particularizar cada una de ellas necesitábamos agregar ciertas condiciones particulares también, y por eso, dicho sea de paso, la integral general, la equivalente en cierto modo á la ecuación diferencial, contiene, según sea el caso, constantes ó funciones arbitrarias, que permiten á la integral general acomodarse á todas las integrales que representa.

Por eso, y citábamos este ejemplo, la ecuación diferencial de primer orden

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0$$

que comprende multitud de curvas, no basta para definir cada una de ellas en particular; pero queda definida cada una de éstas, si se agrega la condición de que pase por un punto determinado (x_0, y_0) .

Y ocurre, viniendo ya al problema que nos ocupa, esta cuestión:

La ecuación Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

comprende multitud de armónicas; ¿pues cómo se podrá particularizar una de ellas? ¿Bastará decir, según el ejemplo elemental que hemos presentado, que la armónica U ha de tener un valor particular U_0 en el punto definida por las tres coordenadas x_0, y_0, z_0 ?

Claro es que, agregando dicha condición, ya U no tiene la generalidad que antes tenía. En el grupo general de las armónicas habremos particularizado un subgrupo, por decirlo de este modo: un subgrupo, pero no *una*, como veremos más adelante.

¿Bastará que á la ecuación general de Laplace agreguemos la condición de que, para un número finito de puntos n , definidos por sus coordenadas, la armónica ha de tomar valores determinados para cada uno de éstos?

$$\begin{array}{l} U_0 \text{ para } (x_0, y_0, z_0) \\ U_1 \text{ para } (x_1, y_1, z_1) \\ \dots\dots\dots \\ U_n \text{ para } (x_n, y_n, z_n)? \end{array}$$

Es evidente que todavía se particulariza más en el grupo general de armónicas un subgrupo en aquél comprendido; pero volvemos á repetirlo: no se particulariza de este modo *una sola armónica*; es preciso, como vamos á ver, que el número n sea infinito, y aquí se nos presenta el célebre problema, llamado en la Física Matemática problema de Dirichlet, de que luego hablaremos, y en el que casi han agotado sus fuerzas grandes matemáticos.

* * *

Y vengamos á la segunda observación, que hicimos al final de la conferencia precedente.

Supongamos, que dimos al fin con una condición, que agregada á la ecuación diferencial de Laplace, define una armónica ó *un número finito* de armónicas, á la manera que una ecuación ordinaria del grado m determina, no una raíz, sino m raíces.

En este caso ocurre el problema que ya enunciábamos: averiguar si para dicho problema, que en breve trataremos, la solución es *única* ó existen *varias soluciones*.

Respecto á este punto y á este aspecto de la cuestión, podemos dar explicaciones claras y concretas, al menos en gran parte, y esta salvedad ya la explicaremos luego.

Imaginemos (fig. 37) una superficie cerrada S . Sobre dicha superficie podremos fijar infinitos puntos a_0, a_1, a_2, \dots

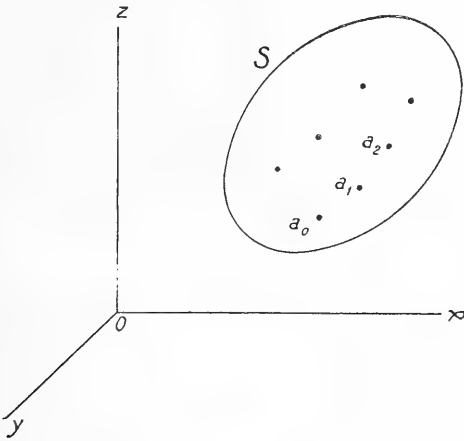


Figura 37.

Los particularizamos para la explicación, pero nos referimos á todos los puntos de la superficie y planteamos, como antes decíamos, *el problema de Dirichlet* de este modo.

Determinar una armónica U , que satisfaga á la ecuación

diferencial de Laplace, y que en cada punto de la superficie tenga un valor determinado: U_0 para a_0 ; U_1 para a_1 ,..... en general U para a .

Cuando hablamos de armónicas satisfaciendo á la ecuación de Laplace, ya se entiende que nos referimos á funciones *uniformes, finitas, bien determinadas, y que tengan derivadas primeras y segundas bien determinadas también.*

Pero antes hicimos una salvedad que conviene explicar ahora.

El problema, tal como está planteado, *no se refiere á todo el espacio.*

Claro es, que esto sería lo más general, lo que estaría más conforme con las explicaciones que preceden, pero no depende de nuestra voluntad plantear á nuestro capricho problemas históricos, que tienen en la ciencia un sentido perfectamente definido.

Decíamos antes: nos proponemos buscar una armónica que tome sobre los puntos de una superficie, valores determinados, y ahora agregamos, finitos y continuos. Pero agregamos ahora otra circunstancia, á saber: Que no busquemos esta función armónica para todo el espacio, ni decimos que haya de ser función armónica en todo él, sino *sólo en una parte del mismo*: en el resto será ó no será función armónica.

Con lo cual el problema de Dirichlet se divide en dos:

1.º Problema de Dirichlet para el interior de un volumen.

2.º Problema de Dirichlet para el espacio infinito exterior á dicho volumen.

Precisemos aún más la cuestión, porque para el principiante, como hemos repetido hasta la saciedad, ninguna explicación es ociosa; y como hemos repetido también infinitas veces, estas conferencias tienen por objeto la propaganda de la ciencia superior, allanando sus dificultades para los alumnos y esforzándonos, hasta donde nuestras fuerzas permiten,

en hacerles llano lo que pudiera parecerles escabroso, y hacerles claro lo que pudiera parecerles obscuro.

El problema de Dirichlet *interior*, que así se dice, puede precisarse de este modo:

Hallar una armónica, que sea armónica para *el interior de un volumen* (fuera, no sabemos lo que será), y que, en los puntos de la superficie que termina dicho volumen, adquiera valores determinados, variando por la ley de continuidad.

En forma análoga puede definirse el problema *exterior* de Dirichlet.

Dada una superficie, que limite un volumen, y que deje un espacio exterior, determinar una armónica (y excusamos decir, como siempre, que uniforme y finita y con derivadas primeras y segundas) en dicho espacio exterior; pero no decimos que haya de ser armónica en lo interior del volumen, en el que será la que fuere, no lo prejugamos. Y además, que tome valores determinados y continuos sobre la superficie; y agregamos, para este problema de lo exterior, que en el infinito se anule.

Es limitar en cierto modo el problema general que concebimos y que se refiere á todo el espacio. Pero esta limitación procede de que el célebre problema, si se nos permite expresarnos de este modo, no se ha creado para la ciencia dura, para el problema general de la integración, sino para ciertos problemas de la Física Matemática, como veremos en su día.

*
* *

Cuando en las Matemáticas se empieza á estudiar el cálculo integral, como todo no se puede explicar de una vez, las teorías se explican en la forma más general y más sencilla, sin abrumar al alumno con dificultades que más adelante han de presentarse.

En este primer estudio, integrar una ecuación diferencial es obtener una función á la cual no se ponen límites. Quiero decir, para precisar las ideas, que si

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

es la integral general de la ecuación diferencial

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

y determinamos la constante C de modo, que la curva definida por la ecuación $\varphi = 0$ pase por el punto A (fig. 38), y es dicha curva $a a'$, toda ella, en toda su extensión, finita,

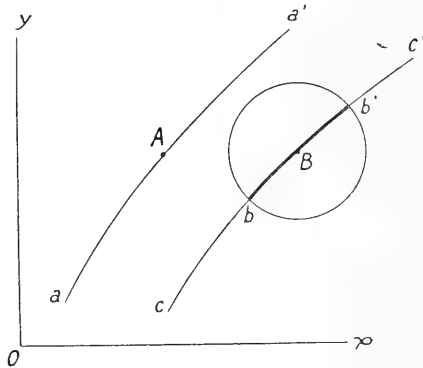


Figura 38.

si es finita, hasta valores infinitos de x , y , si hasta el infinito se extiende, deberá satisfacer á la ecuación diferencial $f = 0$. Deduciendo de $\varphi = 0$ la derivada $\frac{dy}{dx}$ y sustituyéndola en $f = 0$, la ecuación deberá quedar satisfecha y convertida en una identidad para todos los valores de x , y , correspondientes á todos los puntos de la curva $a a'$.

En cambio, le causaría al alumno profunda extrañeza si se le dijera lo siguiente:

La función $\varphi = 0$, que representa una curva cc' , satisface á la ecuación diferencial $f = 0$; pero no en toda su extensión, sino en una extensión limitada. Es decir, que si tomamos en esta curva el punto B , y trazamos, con un radio r , la circunferencia bb' , la curva sólo satisface á la ecuación diferencial en la parte $b B b'$.

Esta *falta de continuidad*, esta interrupción en una propiedad de la curva, es algo extraño y anómalo que casi ha de causar asombro á los principiantes.

Y, sin embargo, casos análogos á éste se presentan en el problema de la integración; y, sin ir más lejos, una cosa parecida sucede en los métodos de integración de Cauchy y de otros autores: cuestiones en que no podemos entrar, porque sería traspasar los límites de esta asignatura; pero cuestiones que he creído conveniente recordar, para que no cause extrañeza excesiva la forma en que se presenta el teorema de Dirichlet. En el que, si se trata del problema interior, la armónica sólo satisface á la ecuación diferencial de Laplace en el interior de un volumen, y si se trata del problema exterior, sólo queda satisfecha la ecuación diferencial en la parte exterior á dicho volumen, sin prejuzgar nada respecto al volumen mismo.

Todo esto se enlaza *con la teoría de la discontinuidad y de las funciones discontinuas*, problemas que no hago más que apuntar sin poder detenerme en ellos.

*
* *

Ya hemos planteado el problema de Dirichlet bajo sus dos formas, y para cada una de ellas hay dos puntos que considerar:

1.º El que se denomina ó puede denominarse de *existencia de la armónica*, que adquiera valores determinados y continuos en una superficie, y que satisfaga á la ecuación de

Laplace, ya en el interior, ya en el exterior de un volumen.

Y 2.º Este otro: ¿existirá una solución ó existirán varias? Es decir, ¿habrá una armonía que cumpla con estas condiciones, ó habrá más de una?

Vamos á empezar por el segundo problema; vamos á demostrar que siempre *existe una armónica* que satisface al problema de Dirichlet, y que nunca podrá existir más que *una*, fundándonos para ello en las proposiciones que demostramos en la conferencia precedente.

Empecemos por el problema *interior*.

Supongamos que existe una armónica $U_1(x, y, z)$ que satisface á la ecuación de Laplace en el interior del volumen, que es uniforme y finita, que posee derivadas primeras y segundas, y que en cada punto de la superficie que limita el volumen adquiere un valor determinado, por ejemplo, para el punto a el valor U_a .

Y supongamos á la vez que existe otra armónica U_2 distinta de la precedente U_1 , que cumple con las mismas condiciones. Es decir, que satisface á la ecuación de Laplace dentro del volumen, y que en todos los puntos de la superficie S que limita dicho volumen, adquiere los mismos valores ya establecidos, y que adquirirá la función anterior. Por ejemplo, U_a para el punto a .

Vamos á demostrar que esta hipótesis es imposible, que la segunda armónica tiene que ser igual á la primera. Es decir, que no hay más que una.

La demostración es sencillísima.

Si existe la armónica U_2 , es decir, si satisface á la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 U_2}{dx^2} + \frac{d^2 U_2}{dy^2} + \frac{d^2 U_2}{dz^2} = 0$$

también satisfará á esta ecuación y también será armónica la ecuación

$$- U_2(x, y, z),$$

porque, en efecto, basta cambiar el signo á la ecuación precedente, y tendremos

$$\frac{d^2(-U_2)}{dx^2} + \frac{d^2(-U_2)}{dy^2} + \frac{d^2(-U_2)}{dz^2} = 0$$

la cual demuestra que $-U_2$ es una solución.

Pero si U_1 es una solución de la ecuación de Laplace, y es otra solución $-U_2$, será una solución $U_1 - U_2$, porque hemos probado que la suma de soluciones particulares de la ecuación de Laplace es una nueva solución; y además esto es evidente, porque sustituyendo en vez de U en la ecuación de Laplace $U_1 - U_2$, tendremos

$$\frac{d^2(U_1 - U_2)}{dx^2} + \frac{d^2(U_1 - U_2)}{dy^2} + \frac{d^2(U_1 - U_2)}{dz^2} = 0$$

ó bien

$$\left[\frac{d^2 U_1}{dx^2} + \frac{d^2 U_1}{dy^2} + \frac{d^2 U_1}{dz^2} \right] - \left[\frac{d^2 U_2}{dx^2} + \frac{d^2 U_2}{dy^2} + \frac{d^2 U_2}{dz^2} \right] = 0$$

y ambos grupos son separadamente iguales á cero, según hemos dicho.

Tenemos, pues, que $U_1 - U_2$ satisface á la ecuación de Laplace dentro del volumen. Veamos lo que resulta para la superficie. Por ejemplo, para el punto a , y lo que de él digamos, pudiéramos repetir para todos los demás.

U_1 en el punto a , toma el valor U_a .

Del mismo modo U_2 en dicho punto a toma por hipótesis el mismo valor U_a . Luego $-U_2$ tomará el valor $-U_a$.

De aquí se deduce que la función $U_1 - U_2$ tomará el valor $U_a - U_a = 0$.

De donde se deduce también que la armónica $U_1 - U_2$ que satisface á todos los puntos del interior del volumen, es igual á cero para todos los puntos de la superficie.

Pero hemos demostrado en una de las proposiciones de la conferencia precedente, que si una armónica es igual á cero para todos los puntos de una superficie cerrada, será igual á cero para todos los puntos del interior del volumen. Luego en el interior del volumen tendremos $U_1 - U_2 = 0$, y, por lo tanto, idénticamente $U_1 = U_2$. De suerte que son U_1 y U_2 dos funciones idénticas en el interior del volumen.

Lo cual significa que no hay más que una solución, suponiendo que esta solución exista.

Por el pronto sólo podemos afirmar, que *ó no existe ninguna ó es una sola*.

*
* *

Lo que hemos demostrado para el volumen interior, podemos repetir para el espacio exterior, en las condiciones ya explicadas tantas veces, y recordando que las armónicas han de ser nulas en el infinito.

Diremos, pues, si existen dos armónicas U_1 y U_2 para el espacio exterior á un volumen, y que adquieran los mismos valores continuos en la superficie de dicho volumen $U_1 - U_2$, también será armónica.

Como cada una de ellas toma sobre la superficie el mismo valor U_a , su diferencia tomará el valor cero, y por otra proposición demostrada en la conferencia última, la armónica $U_1 - U_2$ que es nula en la superficie y que es nula en el infinito, será nula en todo el espacio exterior. Así, $U_1 - U_2 = 0$. De donde

$$U_1(x_1 y_1 z) = U_2(x_1 y_1 z).$$

Luego no existen dos armónicas. En todo caso existirá una sola.

Y ahora se plantea el problema de Dirichlet, tanto interior como exterior.

¿Existirá una solución para la ecuación diferencial de Laplace en las condiciones expresadas, á saber: una armónica finita, uniforme y con derivadas primeras y segundas en el interior de un volumen, y tal que para los diferentes puntos de la superficie S , que limita este volumen, adquiera valores determinados y continuos?

La demostración que generalmente se da en rigor es una demostración *indirecta*, porque en vez de suponer que la armónica conserva su pureza abstracta se supone que representa *la temperatura* de los diferentes puntos de un cuerpo.

Es decir, se funda la demostración de un problema analítico en un hecho puramente experimental, como vamos á ver.

A las matemáticas puras se substituye la teoría del calor.

Precisemos las ideas, y para ello supongamos que el sólido en cuestión, que hasta ahora es puramente geométrico, se rellena con materia, constituyendo un sistema físico continuo, conductor é isótropo, de modo que el calor se transmite de igual suerte en todos sentidos.

Para este problema físico se busca la expresión matemática, y vamos á ver inmediatamente que la ecuación de equilibrio de temperaturas en el sólido continuo é isótropo es precisamente la ecuación de Laplace.

Esta demostración es sencillísima y, en rigor, ya la hemos dado en otras ocasiones.

El problema de la transmisión del calor dió origen á la obra inmortal del eminente físico y matemático Fourier.

Pueden, además, consultar mis alumnos multitud de obras y de demostraciones del teorema en cuestión. Por ejemplo, para no citar más que algunas, ya clásicas y extensas, ya elementales, y aun demostraciones aisladas, citemos la obra de Lamé, la Física Matemática de Mathieu, una demostración, por decirlo así, incidental, en el tratado de electricidad y óptica de Poincaré, y detengamos aquí la lista, que sería interminable.

Nosotros condensaremos en términos brevísimos y casi esquemáticos todas estas demostraciones.

*
* *

Supongamos, como tantas veces, dividido el sólido en cuestión por una serie de planos paralelos á los tres ejes coordenados, con lo cual dicho sólido quedará dividido en paralelepípedos infinitamente pequeños, cuyas aristas tendrán las dimensiones dx , dy , dz .

El movimiento del calor en este caso y en este cuerpo, mejor dicho, la temperatura de cada punto estará determinada en cada instante y en cada paralelepípedo por la temperatura en el instante anterior y por la cantidad de calor que entra y sale por las seis caras del paralelepípedo.

Según la capacidad calorífica del cuerpo, esta variación de calor del paralelepípedo determinará la variación de temperatura.

Vamos á aplicar la fórmula vulgarísima, que se repite en un gran número de problemas de la Física Matemática, que da origen á la fórmula de Green y á la fórmula de Laplace y que puede expresarse en estos términos de sentido común.

La cantidad de *algo*, contenido en un espacio cerrado, depende de lo que entra y sale de este *algo* por la superficie que cierra el espacio. Es decir, del flujo que se determina en la superficie.

Este algo podrá ser calórico; y bien pudiéramos decir movimiento vibratorio de la materia, mejor aún, *fuerza viva*. Podrá ser electricidad; podrá ser magnetismo; podrá ser un vector cualquiera; la fórmula siempre será la misma.

Lo más sublime de la Física Matemática, lo que para muchos es algo recóndito y cabalístico no es, en el fondo, más que la traducción, por medio de signos, de una fórmula, lo hemos dicho, de sentido común. La cantidad de una

cosa en determinado lugar, depende de lo que había, de lo que penetra y de lo que sale al exterior.

Sólo que, en este caso, lo que entra ó lo que sale en el volumen que se considera es *flujo de calor*, el cual determina en todos los puntos del volumen, según la capacidad calorífica del cuerpo, temperaturas determinadas.

Y dicho esto, demos la demostración de la fórmula en la forma más breve posible.

Consideremos la cara del paralelepípedo más próximo al plano de las yz . Su área será $dy_1 dz_1$.

Se sabe y se demuestra experimentalmente, que el flujo de calor entre dos puntos depende de la diferencia de la temperatura de ambos puntos, mejor dicho, de la caída de temperaturas que, llamando T á la temperatura en general, será $\frac{dT}{dx}$, suponiendo que las temperaturas van disminuyendo, en el sentido de las x .

Como el flujo de calor es proporcional á la superficie, á la caída de temperaturas de un lado de la cara del paralelepípedo á otro y por unidad de longitud, representando por C una constante y representando por c la capacidad calorífica, ó si se quiere el aumento de temperatura por cada unidad de calor, tendremos: flujo de calor que entra por la 1.^a cara $dy_1 dz_1$.

$$C dy_1 dz_1 \frac{dT}{dx}.$$

Y el aumento de temperatura que produce dicho calor según la capacidad c

$$C c dy_1 dz_1 \frac{dT}{dx}.$$

Esto en el tiempo dt .

Para la cara más lejana del plano de las yz podemos

repetir esto mismo, sólo que, si bien se conservan C, c, dy_1, dx_1 la caída de temperatura será distinta, será

$$\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{dT}{dx} dx_1:$$

á saber, la que era antes con el aumento que corresponda á la distancia de dx_1 de ambas caras.

Pero en la hipótesis establecida, no será flujo de calor que entra, sino de calor que sale, con el descenso de temperatura correspondiente.

Tendremos, pues, flujo de calor que sale por la 2.^a cara

$$dy_1 dz_1 \dots - C dy_1 dz_1 \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx_1 \right);$$

y disminución de temperatura que produce según la capacidad c

$$- Cc dy_1 dz_1 \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx_1 \right).$$

Luego la variación de temperatura en el interior del paralelepípedo producido por los flujos de calor positivo y negativo á través de las dos caras paralelas al través de las $y_1 z_1$ será evidentemente

$$Cc dy_1 dz_1 \frac{dT}{dx} - Cc dy_1 dz_1 \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx_1 \right)$$

ó bien

$$- Cc dy_1 dz_1 dx_1 \frac{d^2 T}{dx^2}.$$

Si la caída de temperaturas por unidad de longitud va aumentando en el sentido de las x positivas, es claro que

$\frac{d^2 T}{dx^2}$ será positiva la expresión anterior negativa, y por este concepto la temperatura sufriría una disminución.

Aplicando este razonamiento á las dos caras perpendiculares al eje de las y y la variación de temperatura sería

$$- Cc dx_1 dz_1 dy_1 \frac{d^2 T}{dy^2}.$$

Y del mismo modo la variación de temperatura por el flujo de las dos caras perpendiculares al eje de las z tendría por expresión

$$- Cc dx_1 dy_1 dz_1 \frac{d^2 T}{dz^2}.$$

Luego la variación total de temperatura, teniendo en cuenta el flujo de calor á través de las seis caras del paralelepípedo sería igual á

$$- Cc dx_1 dy_1 dz_1 \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right).$$

Si, como suponemos, el medio es isótropo y ha llegado á un equilibrio de temperaturas en cada elemento, la *variación de temperatura será nula*, luego nula será la expresión anterior, y suprimiendo el factor común $- C, c, dy_1, dx_1, dz_1$ tendremos

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} = 0.$$

Claro es, que si el estado de temperatura no fuera estacionario y variase con el tiempo, en vez de escribir 0 en el segundo miembro, tendríamos que escribir en general

$$K \frac{dT}{dt}.$$

Es decir, una constante por la derivada de la temperatura con relación al tiempo.

Mas por ahora no vamos á ocuparnos en este problema.

Sólo consideramos el caso en que el sólido, mejor dicho, el campo de temperaturas en cuestión es independiente del tiempo t , y este caso está definido por la ecuación precedente, que expresa una propiedad común á todos los ejemplos de equilibrios de temperaturas que pudieran presentarse. En todo cuerpo ó campo isótropo homogéneo, en que por lo tanto el transporte de calórico sea idéntico en todos sentidos para la misma caída de temperaturas, la temperatura podrá ser variable de un punto á otro, podrá ser una función de x, y, z , ó sea $T(x, y, z)$; pero las tres derivadas segundas, con relación á x, y, z deberán satisfacer á la ecuación anterior.

La potencial U en un campo de potenciales satisface á la ecuación de Laplace; pues la temperatura en un campo de temperaturas, independiente del tiempo, á la ecuación de Laplace satisface también.

Para las potenciales U

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0;$$

y para las temperaturas T se tendrá análogamente en el caso particular del movimiento de calórico que estamos considerando

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} = 0.$$

Siempre la ecuación de Laplace, y ya hemos dicho que esta misma ecuación se presenta en otros muchos problemas de la Física Matemática.

Por ahora atengámonos á los dos ejemplos anteriores: potenciales y temperaturas.

Comparando las dos ecuaciones precedentes, vemos que las funciones U y T , tomadas en toda su generalidad, son idénticas. Es decir, satisfacen las dos á la ecuación de Laplace.

ce, de donde resulta cierta especie de simbolismo cuantitativo. Cierta armónica puede representar una potencial ó puede representar una temperatura variable en determinado espacio.

De suerte que las temperaturas pueden ser símbolos de las potenciales y las potenciales de las temperaturas.

Resuelto un problema para las funciones potenciales, quedará resuelto un problema análogo para las temperaturas; y recíprocamente, resuelto un problema para las temperaturas, quedará resuelto un problema análogo para las potenciales, sin más que cambiar los nombres.

En la Física Matemática, analogías de esta clase entre unas y otras magnitudes de fenómenos distintos se presentan frecuentemente; y así en un alto simbolismo, que está inspirado en la tendencia á la unidad, unos fenómenos pueden estar simbolizados por otros hasta en sus accidentes, y, sobre todo, por el paralelismo y á veces por la identidad entre las cantidades, ó si se quiere, en los valores numéricos de los parámetros físicos que á unos y á otros fenómenos corresponden.

*
* *
*

Pero hay más: si fenómenos físicos de distintos órdenes pueden simbolizarse unos por otros, pueden ponerse también en relación las funciones abstractas de las Matemáticas puras con ciertos fenómenos físicos representados por las mismas funciones.

Más claro todavía.

Una potencial U satisface á la función de Laplace.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} = 0.$$

en un campo definido.

Una temperatura T variable en el espacio, mejor dicho,

en un campo material homogéneo é isótropo determinado, satisface á una ecuación de la misma forma

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d^2 H}{dy^2} + \frac{d^2 H}{dz^2} = 0$$

Y en las Matemáticas puras, ajenas por completo á los fenómenos de la Física, una armónica H satisface todavía á la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

en el campo de ambas.

Pues muchas veces las propiedades de la función abstracta H tienen símbolo material en las propiedades físicas de la temperatura T y en las propiedades físicas también de la potencial U .

Y por una generalización más ó menos atrevida, por un *acto de fe* en una armonía ineludible entre los fenómenos físicos, que al fin y al cabo contienen el parámetro cantidad, y las fórmulas matemáticas, que expresan leyes y propiedades de la cantidad también, se supone que los fenómenos físicos deben expresar leyes matemáticas y se busca la demostración de una propiedad matemática en la existencia material de un fenómeno físico.

Es como si se demostrase las fórmulas matemáticas por el método experimental.

Todas estas ideas, que acaso parezcan un poco vagas ó sobradamente abstractas, se aclararán en la aplicación que vamos á hacer de ellas á la demostración que pudiéramos llamar experimental del teorema de Dirichlet.

Por la teoría del calor vamos á demostrar este principio en vez de emplear una demostración matemática.

El problema es de Matemáticas puras, y subsistiría aunque no existiera ni la física, ni la química, ni ningún fenómeno material; ó al menos esto debe decir en su justa arrogancia la ciencia matemática.

A saber: Demostrar, que dado un volumen cerrado, y en su superficie una serie continua de valores numéricos, en el interior del volumen existe siempre una función armónica para todos los puntos de este volumen, y que para todos los puntos de la superficie toma el valor que á ese punto está asignado de antemano.

Pues á este valor abstracto U , sustituyamos el parámetro T de la teoría del calor, que se llama temperatura. Y recordemos este hecho físico, que *à priori* no puede demostrarse; pero que en la Física experimentalmente se demuestra, y aun dijéramos mejor, se comprueba.

Cuando se mantiene la superficie de un sólido á una temperatura constante para cada punto, es decir, en el punto a_0 la temperatura T_0 , en el punto a_1 la temperatura T_1 , en el punto a_2 la temperatura T_2 , y así sucesivamente, decimos que en el interior del cuerpo se establece una temperatura fija también para cada punto. Es decir, un estado normal y permanente de temperaturas.

Y como la temperatura T en la hipótesis de que se trata es una armónica de la ecuación de Laplace, resulta que el problema de Dirichlet tiene una solución y una sola.

Es evidente, que esta es una demostración especialísima; lleva, por decirlo de este modo, el convencimiento práctico. A un estado fijo de temperaturas en la superficie, corresponde un estado ó una distribución de temperaturas fijas en el interior del cuerpo, y, por lo tanto, una función determinada prácticamente $T(x, y, z)$.

Y como por la ley de la distribución de temperaturas, hemos demostrado que esta función T , satisface á la ecuación de Laplace, claro es que tenemos que admitir lo que lógicamente resulta, á menos que neguemos la armonía y la corres-

pondencia entre las fórmulas matemáticas y las leyes del mundo físico.

Por lo demás, y no hay para qué insistir en ello, es obvio que para el problema exterior puede aplicarse sin modificación alguna el razonamiento precedente.

Puede cerrarse el espacio por una esfera cuyo radio crezca sin límites, y en cuya superficie, cuando el radio es suficientemente grande, la temperatura sea infinitamente pequeña tendiendo hacia cero.

Pues á pesar de todo esto, hay que reconocer que la ciencia matemática no puede darse por satisfecha con una demostración, que en el fondo es del orden experimental, y que además es una demostración prestada de la Física.

Así es que, muchos matemáticos, prescindiendo de la demostración física y simbólica, han buscado la verdadera demostración analítica.

Véase una extensa noticia sobre el problema de Dirichlet en la obra de Mecánica racional de Mr. Appell.

El mismo Dirichlet dió una demostración analítica de su teorema.

Pero Mr. Weierstrass puso en evidencia que tal demostración no era enteramente correcta.

Otros matemáticos se han ocupado en el problema de que se trata.

Y por último, Mr. Poincaré, en el *American Journal*, tomo XII, 1890, ha expuesto un método al cual da el nombre de *méthode du balayage*, y que acaso reproduciremos, si tenemos tiempo para ello, en nuestras conferencias.

*
* *

Para terminar ésta, presentaremos el siguiente teorema, que es una consecuencia inmediata de las proposiciones ya demostradas, y *que es fundamental*.

Teorema.—Sea una función armónica, uniforme, finita y determinada, así como sus derivadas primeras y segundas, en todos los puntos del espacio, á distancia finita ó infinita; pues afirmamos que dicha función armónica es una constante.

Como toda esta serie de proposiciones, que vamos dando de las funciones armónicas, son, por su forma, algo parecidas entre sí, y pueden confundir á los principiantes, conviene marcar en cada una la nota, por decirlo así, dominante y característica.

En la proposición que acabamos de enunciar, lo característico de la armónica no es que sea uniforme, ni que para cada punto sea finita y determinada; esto lo suponemos siempre; si no el problema sería de otra índole.

No es tampoco lo característico y dominante, que esta armónica haya de tener primeras y segundas derivadas, también uniformes, también finitas y determinadas también.

Estas son condiciones indispensables para que se pueda aplicar la ecuación diferencial de Laplace. La ecuación carece de sentido, aplicada á funciones que no cumplan con las condiciones indicadas.

Lo característico del enunciado del teorema es, no sólo que en el espacio finito tenga valores finitos y determinados la armónica, sino que tomando un punto cualquiera (x y z), y alejándose este punto, según una ley cualquiera, hacia el infinito, la armónica $U(x, y, z)$, para $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$ ha de tomar un *valor finito*, por ejemplo $U_x(\infty, \infty, \infty) = A$ siendo A finita y determinada. Y como la función es *uniforme*, este valor ha de ser único.

La armónica, U en todo el espacio finito, conserva siempre valores finitos y cae hacia el infinito aproximándose á un valor finito único, luego tendrá forzosamente máximos y mínimos.

Así como, si la imagen vale, una cordillera de montañas, encerrada en un perímetro grande, ó pequeño, ó inmenso, tendrá, forzosamente, cúspides y hondonadas, porque ni

puede subir al espacio infinito, ni puede bajar al abismo infinito negativo, de modo que sus ondulaciones son finitas y pasarán por máximos y mínimos, si no es una planicie.

Pero si encerramos cualquier región del espacio, que comprenda uno ó varios de estos máximos ó mínimos, pondremos en evidencia una contradicción patente, con una de las proposiciones de la conferencia anterior.

Tendremos máximos ó mínimos aislados, ó en líneas, ó en superficies ó en volúmenes respecto al espacio ambiente, lo cual hemos hecho ver que es imposible.

Y esto se aplica, no sólo al espacio cerrado que acabamos de considerar, y en que la armónica satisface á la ecuación de Laplace, sino á todo el espacio finito, porque en todo él, U satisface á la ecuación de Laplace, y por lo tanto, no admite ni máximos ni mínimos.

¿Cómo se salva esta dificultad?

Suponiendo que en todo el espacio finito, U no presenta ni máximos ni mínimos, sino que tiene un valor constante A , que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Y, sin embargo, la demostración no es completa. En todas estas demostraciones, en que entra en juego el concepto de lo infinito, hay que estar muy sobre aviso, andar, como vulgarmente se dice, con pies de plomo, y aplicar implacablemente la lógica.

En estos casos, la intuición es peligrosa.

Porque á la demostración precedente puede oponerse el siguiente reparo:

Las proposiciones relativas á máximos y mínimos de U en puntos aislados, líneas, superficies ó volúmenes, *se refieren siempre al espacio finito.*

Luego la demostración precedente no sería completa, porque no abarca el espacio infinito; ó, de otro modo, porque nada se dice en tales proposiciones de lo que pudiéramos llamar, acaso con cierto atrevimiento, *máximos y mínimos en el infinito.*

Fijemos las ideas por una figura puramente esquemática, porque vamos á referir al espacio de dos dimensiones lo que en realidad pertenece al espacio de cuatro dimensiones, á saber, las x, y, z, U .

Sea una curva MN (fig. 39) que tenga por asíntota la recta AP , paralela al eje de las x .

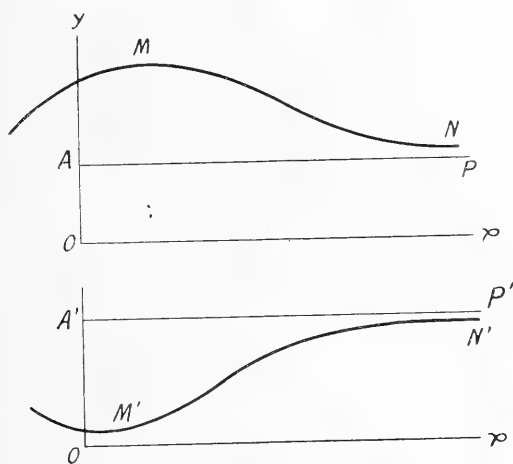


Figura 39.

Pues podremos decir que dicha curva MN tiene un *mínimo en el infinito* N , y que ese mínimo es precisamente la magnitud A , representando por A la distancia OA .

Análogamente podremos afirmar que la curva $M'N'$ tiene un *máximo en el infinito*, si tiene por asíntota la recta $A'P'$, paralela al eje de las x , á la distancia A'

Pero lo que no puede admitirse, porque implicaría contradicción con las hipótesis que establecimos, es que en el infinito tengamos á la vez un máximo y un mínimo.

Esto podría en todo caso imaginarse, aunque no lo discutimos, si la curva fuera *multiforme*.

De aquí se deduce que si U tiene un mínimo en el infinito correspondiente al valor A tendrá, forzosamente, uno ó más máximos, como la misma figura esquemática indica en M .

Y para estos máximos en el espacio finito, sean máximos de punto, de línea, de superficie ó de volumen, la demostración será correcta.

La contradicción con las proposiciones demostradas es patente, y patente también la consecuencia; que no hay otro modo de salvar tales contradicciones, que suponer que U es constante en todo el espacio é igual á A , lo mismo en el infinito que en el espacio finito.

Este razonamiento se repite palabra por palabra para el caso que simbólicamente representa la curva $M' N'$.

Hay un máximo en el punto N' del infinito y á él no se puede aplicar ninguna de las proposiciones demostradas en la última conferencia; pero el máximo en el infinito supone forzosamente uno ó varios mínimos, como M' , agrupados de cualquier modo, y en estos mínimos aparece en forma indiscutible la contradicción, que sólo se salva suponiendo en todo el espacio que U es constante

$$U = OA'$$

porque entonces no hay ni máximos ni mínimos alrededor de ningún punto á que aplicar la fórmula del flujo.

Queda, pues, demostrada por completo la proposición que anunciamos.

En la conferencia próxima seguiremos estudiando propiedades de las armónica, deducida, no de la integral, que la integral general de la ecuación diferencial de Laplace no la conocemos, sino de la misma ecuación diferencial, ó si se quiere, de la fórmula de Green aplicable al caso $\Delta = 0$.

Aunque respecto al problema de Dirichlet *algunas observaciones hemos de hacer por cuenta propia*, por el pronto y para exponer teoremas y problemas que ya son clásicos en la Física Matemática, tomaremos por guía la Mecánica de Mr. Appell, obra de gran mérito por el rigor y la claridad de la exposición y de las demostraciones.

XLI. — Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimatercia.

SEÑORES:

El problema de Dirichlet es, según hemos dicho, teorema importantísimo para varias cuestiones de la Física Matemática. Se demuestra su posibilidad experimentalmente y pudiéramos agregar: substituyendo al concepto abstracto de la armónica, concepto de puro análisis matemático, el concepto concreto y experimental de *temperatura*. Se parte, como explicábamos en la conferencia precedente, de este hecho: que en un cuerpo sólido homogéneo é isótropo en el cual se conservan los diferentes puntos de la superficie á temperaturas fijas, determinadas y continuas, se establece para cada punto del interior una temperatura fija, determinada y única; y como esta temperatura, según la ecuación de Laplace, que es la que rige la distribución de temperaturas en los cuerpos sólidos, representa una armónica, la solución es única y existe en la teoría de las temperaturas y existirá, por lo tanto, en el problema de análisis.

Pero esto, y con razón, no satisface á los matemáticos.

Para la inteligencia humana los hechos se imponen como hechos: son porque son; pero en la mayor parte de los casos, *aunque dejen de ser*, no por eso se desquiciaría la razón humana.

Claro es, que allá en el fondo de las cosas, un espíritu filosófico acaso sostenga, que lo que es no puede ser de otro modo, y que los hechos no sólo son, sino que es necesario

que sean, y que si la inteligencia del hombre no percibe esta necesidad como percibe la necesidad de las verdades matemáticas, es, por deficiencia de la razón humana.

Por ejemplo, antes de demostrar que la suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos, la razón humana no se hubiera desquiciado, si una experiencia más ó menos imperfecta le demostrase que valen dos rectos y una fracción. Pero sea de ello lo que fuere, dejando aparte discusiones entre la filosofía de la voluntad libre y la filosofía de un determinismo absoluto, considerando las ciencias experimentales y la ciencia matemática tales como hoy existen, volvernos á repetirlo, es natural que el matemático para un problema de cálculo integral no se contente con una demostración tomada de la distribución del calórico en la física experimental. Experiencia, dicho sea entre paréntesis, de la cual no tenemos noticia. Es decir, que no creemos que jamás se halla realizado determinadamente y sistemáticamente con el objeto directo de demostrar el problema de Dirichlet.

*
* *

El problema, como problema de análisis, es difícil, delicado y sutil.

Y sucede, en Matemáticas como en todas las ciencias, lo que en la guerra sucede al querer asaltar una fortaleza que parece inexpugnable. Los ingenieros militares hacen trabajos alrededor de las murallas, buscan los puntos débiles y dirigen contra estos puntos débiles sus baterías y sus asaltos.

Así, y perdóneseme la comparación, los matemáticos han extremado sus esfuerzos alrededor del célebre problema, ya como problema *interior*, ya como problema *exterior*, y en la conferencia precedente explicábamos el sentido de ambas denominaciones.

Así, varios de los teoremas que vamos á explicar son, en cierto modo, exploraciones alrededor del problema principal: son trabajos de *aproxches*.

Y esto hay que tenerlo presente, porque considerados en sí mismos tales teoremas, el principiante no comprende en un primer estudio ni su importancia ni su objeto.

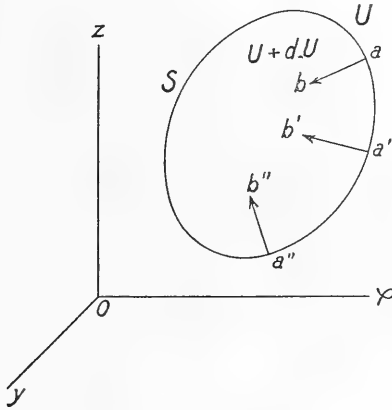


Figura 40.

Empecemos por un teorema en que se trata de demostrar, que, si sobre una superficie cerrada, una función armónica U uniforme y finita, así como sus derivadas primeras y segundas, en el volumen V , limitado por esta superficie, es tal, que $\frac{dU}{dn}$ es nula para todos los puntos de dicha superficie cerrada S , entonces U será una constante en el interior del volumen.

Fijemos bien las ideas para comprender el enunciado del problema.

Sea S (fig. 40) una superficie que envuelve un volumen V .

U es una armónica en el interior del volumen V : fuera no sabemos lo que será, ni el teorema se ocupa en ello; de modo que U satisface á la ecuación de Laplace, pero esto sólo se establece para el interior de la superficie S .

Se supone, además, que la armónica tiene para todos los puntos de la superficie, a, a', a'' un incremento nulo sobre las normales hacia el interior del volumen. De suerte que si en todos los puntos de la superficie trazamos las normales $ab, a'b', a''b''$, tomando en estas normales el incremento infinitamente pequeño dn , la derivada $\frac{dU}{dn}$ será constantemente nula.

Es una armónica que arranca de la superficie en direcciones normales, si vale la palabra, con incrementos nulos. Es decir, permaneciendo constante.

Pues esta *constancia inicial* determina su constancia en todo el volumen.

Y esto á primera vista choca y debe chocarle al principiante, porque buscando analogías, piensa en una curva, que arrancase de un punto del eje de la x tangencialmente, y que sólo por este hecho hubiera de confundirse constantemente con dicho eje.

Esto prueba, en primer lugar, que no hay que fiarse de un modo absoluto en las analogías; y prueba que este último caso es distinto en absoluto del que estamos estudiando.

En una superficie cerrada, los valores de la armónica, á partir de la superficie hacia el interior, se han de encontrar en el interior del volumen y han de coincidir, porque la armónica es uniforme, y para un punto no puede tener dos valores distintos, y esto sujeta y determina, en cierto modo, el valor y la ley de la función armónica.

En cambio, en el caso de la curva ni ella ni ninguna causa extraña, sino su propia ecuación determina los valores de la ordenada.

Sobre estas ideas volveremos á hacer, en otras conferencias, observaciones propias, y que acaso no estén desprovistas de interés, al tratar del problema de Dirichlet.

Por ahora demos la demostración del teorema enunciado, que pudiera abreviadamente expresarse de este modo.

Teorema.— Si $\frac{dU}{n n}$ es constantemente nula sobre una superficie cerrada S , la armónica U es constante en todo el interior del volumen.

La demostración se funda en la aplicación de la fórmula de Green, ó mejor dicho, de uno de sus casos particulares.

En el curso de 1909 á 1910, desde la página 123 á la 133, y aun en las páginas inmediatas, explicamos este célebre teorema á que ya hemos acudido en otras conferencias de este curso.

Claro es que no vamos á reproducir aquí lo que en aquella ocasión expusimos.

La fórmula de Green era ésta:

$$\iiint_V \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) d\tau = \iint_S (F\alpha + G\beta + H\gamma) d\sigma.$$

En su esencia es una fórmula de pura transformación. El segundo miembro es el primero puesto bajo otra forma. Es una integral triple, en que, de cierto modo, y desde cierto punto de vista, se ha hecho una integración, convirtiéndola en integral doble; por eso se dice generalmente, que la fórmula de Green convierte una integral triple en integral doble, así como vimos en otro curso que la fórmula de Stokes convierte una integral doble en integral lineal de curva cerrada ó recíprocamente.

En dicha fórmula de Green F, G, H , son funciones de x, y, z , uniformes, continuas, en suma, con las restricciones necesarias para que la fórmula sea aplicable, según se dijo en ocasión oportuna; $d\tau$ es el elemento de volumen de V , y el primer miembro á todo este volumen se extiende.

En el segundo miembro de la igualdad, que es, como hemos dicho, el primero transformado, S representa la superficie que limita el volumen V .

F, G y H tienen la misma significación que en el primer

miembro, pero aplicadas estas funciones de x, y, z á los diferentes puntos de la superficie S .

$d\sigma$ es un elemento infinitamente pequeño de esta superficie.

Y, por último, α, β, γ representan los cosenos de los ángulos que forma con los ejes coordenados la normal á S en el punto de la misma superficie á que corresponde $d\sigma$.

Al estudiar esta fórmula de Green dijimos que había que considerar tres casos particulares.

Primero. Cuando F, G, H eran generales é independientes, en cuyo caso se aplica la fórmula de Green tal como la hemos escrito.

Segundo. Cuando la expresión

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

era una diferencial exacta, en cuya hipótesis se tenía forzosamente

$$F = \frac{d\varphi}{dx}, \quad G = \frac{d\varphi}{dy}, \quad H = \frac{d\varphi}{dz},$$

representando por φ la integral.

Para este caso, el primer miembro de la fórmula anterior se convierte en

$$\iiint_V \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) d\tau$$

ó bien empleando el símbolo Δ , que ya hemos aplicado varias veces,

$$\iiint_V \Delta\varphi d\tau.$$

En cuanto al segundo miembro, ya sabemos que representa el flujo del vector W , cuyas componentes son F, G, H ,

y toma la forma, como explicamos en la página 133 del tomo citado,

$$\int \int_s \frac{d\varphi}{dn} d\sigma.$$

La fórmula que resulta para este caso,

$$\int \int \int_v \Delta \varphi d\tau = \int \int_s \frac{d\varphi}{dn} d\sigma$$

ya la hemos aplicado en otras conferencias de este curso.

Y tercero. Si la expresión

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

no es una diferencial exacta, pero puede llegar á serlo, porque tiene un factor de integrabilidad, que pusimos bajo la forma $\frac{1}{\psi}$; con lo cual la expresión precedente se convierte en una diferencial exacta de una función $\varphi(x, y, z)$, se tendrá

$$\frac{1}{\psi} (Fdx + Gdy + Hdz) = d\varphi(x, y, z).$$

En este último caso la fórmula general de Creen, eliminando F, G, H en función de φ y ψ , tomará la forma siguiente (pág. 126 del tomo citado):

$$\begin{aligned} \int \int \int_v \left[\psi \Delta \varphi + \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d\varphi}{dz} \right] d\tau = \\ = \int \int_s \left(\frac{d\varphi}{dx} \alpha + \frac{d\varphi}{dy} \beta + \frac{d\varphi}{dz} \gamma \right) \psi d\sigma. \end{aligned}$$

y recordando que el paréntesis del segundo miembro es

igual (pág. 127 del mismo tomo) á $\frac{d\varphi}{dn}$, tendremos también

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\psi \Delta \varphi + \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau = \\ = \iint_S \frac{d\varphi}{dn} \psi d\sigma. \end{aligned}$$

Si en esta última fórmula hacemos $\varphi = \psi$ se convertirá en la siguiente, que es una transformación de la fórmula general de Green y que tiene aplicación á varios problemas de la Física Matemática:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\varphi \Delta \varphi + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau = \\ = \iint_S \frac{d\varphi}{dn} \varphi d\sigma. \end{aligned}$$

Y aquí puede ocurrir al principiante una duda que por elemental que sea debemos desvanecer.

Hemos dicho, como si fuese cosa evidente, que íbamos á suponer $\varphi = \psi$; pero, en buena lógica, esta condición no debe admitirse como evidente, porque al fin y al cabo φ y ψ no son funciones arbitrarias é independientes una de otra; al menos no debemos creerlo *á priori* y sin comprobación. Ambas funciones están, en cierto modo, ligadas, porque ψ es la inversa del factor de integrabilidad, y φ es la integral que resulta.

Por lo demás, la condición es legítima, porque equivale á establecer

$$\frac{1}{\varphi} (Fdx + Gdy + Hdz) = d\varphi$$

que queda satisfecha haciendo

$$\frac{1}{\varphi} F = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{1}{\varphi} G = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{1}{\varphi} H = \frac{d\varphi}{dz}$$

y de estas ecuaciones se deducen inmediatamente sea cual fuere φ los valores de F, G, H :

$$F = \varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad G = \varphi \frac{d\varphi}{dy}, \quad H = \varphi \frac{d\varphi}{dz}.$$

Luego, determinando F, G, H de este modo, y sustituyendo en la fórmula primitiva de Green, se obtiene inmediatamente la fórmula á que antes habíamos llegado.

Más aún; la función φ es completamente arbitraria dentro, naturalmente, de las condiciones establecidas para que sea legítima la transformación de Green.

Puesto que en la fórmula

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\varphi \Delta \varphi + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] d\tau = \\ = \iint_S \frac{d\varphi}{dn} \varphi d\sigma \end{aligned}$$

la función φ es arbitraria, podemos sustituir en su lugar una armónica cualquiera U continua, finita, uniforme y con derivadas primeras y segundas, como siempre decimos; de modo que la fórmula de Laplace tendrá un sentido, y la fórmula de Green también lo tendrá. Es decir, ambas serán aplicables á la armónica U , de lo cual resulta que U satisface á la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[U \Delta U + \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] d\tau = \\ = \iint_S \frac{dU}{dn} U d\sigma. \end{aligned}$$

Y ahora volvamos al teorema que nos habíamos propuesto demostrar, y cuyo enunciado repetimos, por si en este recuerdo de fórmulas y transformaciones, lo han olvidado ya mis oyentes ó mis lectores.

Hemos dicho hace poco que U es una armónica que dentro del volumen V satisface á la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0;$$

luego en la ecuación precedente podremos escribir

$$\Delta U = 0$$

que es la misma ecuación de Laplace, según el símbolo adoptado.

Hemos dicho, además, que en todos los puntos de la superficie S (fig.40), la derivada de U , con relación á la normal, es nula; luego para todos los puntos de S , es decir, para toda la integral doble del segundo miembro

$$\frac{dU}{dn} = 0.$$

Introduciendo estas dos condiciones en la ecuación general, ésta se reducirá á la siguiente:

$$\iiint_V \left[\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

Pero el paréntesis de esta integral triple es esencialmente positivo, puesto que es la suma de tres cuadrados, y además $d\tau$ es esencialmente positiva también.

Luego la integral triple es una suma de términos todos positivos y de valor determinado cada uno; no podrá, por lo tanto, reducirse á cero si no son nulos todos ellos separadamente.

De aquí resulta, que para todos los puntos del volumen, incluso los de la superficie, debe tenerse

$$\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 = 0$$

y separadamente

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0.$$

Si las derivadas de la función U , con relación á x, y, z son nulas, esto prueba que U es independiente de x, y, z , que es como decir *que U es constante*.

Precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

*
* * *

Continuando el estudio de la ecuación de Laplace, y rodeando, si se me permite esta palabra, el problema de Dirichlet, *afirmamos que podemos resolver dicho problema*, si además de conocer U para todos los puntos de la superficie S , conocemos para estos puntos y en toda la extensión de S la derivada de U , con relación á n , ó sea

$$\frac{dU}{dn}.$$

En rigor, es conocer *más de lo necesario* para resolver el problema, porque la armónica U hemos visto en la demostración física, y veremos más adelante, que es única y que queda perfectamente determinada con sólo conocer los valores de U para los diferentes puntos de la superficie S .

La última condición $\frac{dU}{dn}$ es una condición *que sobra*, una *condición superflua*; tanto es así, que no se puede escoger arbitrariamente, como tampoco U , fijando la forma de $\frac{dU}{dn}$. Ambas expresiones son dependientes una de otra, porque si fueran arbitrarias, fijando una y variando la otra, tendríamos diversas soluciones para U , lo cual es contradic-

torio, porque sabemos que el problema de Dirichlet sólo tiene una solución.

Por eso, y para evitar estas contradicciones, hay que fijarse en el sentido del nuevo problema que vamos á resolver.

Se dice esto: Si sobre una superficie S , y para todos sus puntos, se conoce la función U , que será función de x , y , z , pero en que sólo dos de estas variables son arbitrarias, pues la tercera se expresa mediante la ecuación de la superficie; y si además por un medio cualquiera, ó por un artificio especial, ó por tratarse de un caso relativamente sencillo, se conociera, para todos los puntos de la superficie, la expresión de $\frac{dU}{dn}$, el problema de Dirichlet podría resolverse.

Es decir, podríamos determinar una función armónica U , que en el interior del volumen V satisficiera á la ecuación de Laplace, y que, además, en los puntos de la superficie tomara los valores correspondientes á estos puntos.

Además, para estos mismos puntos tomaría los valores dados para $\frac{dU}{dn}$.

Es, en cierto modo, fijar para U los valores correspondientes á la superficie y á una capa infinitamente próxima á esta superficie.

Pero como la superficie basta, dicha segunda capa es una condición que, conocida, facilita el problema, pero que es preciso que esté en armonía con la primera condición.

Claro es que lo dicho para el problema interior puede repetirse palabra por palabra para el problema exterior:

* * *

Presentemos un ejemplo que explique el carácter propio del que estamos explicando.

Supongamos que se nos dijera: Resolver estas dos ecuaciones con dos incógnitas x, y

$$A x + B y + \alpha(x, y) + C = 0$$

$$A' x + B' y + \beta(x, y) + C' = 0.$$

En que A, B, C, A', B', C' , son constantes conocidas, y en que α y β son funciones trascendentes de forma conocida también.

La determinación de x, y , podrá ser enormemente difícil; pero si en algún caso particular, por ejemplo, para valores particulares de las otras constantes, pudiéramos conocer directamente los valores de α y β , el problema se simplificaría y podría resolverse; porque siendo α y β números conocidos, las dos ecuaciones se reducen á dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Claro es que estos valores de α y β son condiciones en exceso; pero que si no son contradictorias con los verdaderos valores de x é y , pueden facilitarnos la solución del problema.

Este es precisamente el caso del problema de Dirichlet que consideramos, análogo al ejemplo sencillísimo que acabamos de presentar.

Y pasemos ya á la solución del problema, que generalmente se enuncia en esta forma abreviada:

Determinación de una función armónica U en el interior de un volumen V cuando se conoce U y $\frac{dU}{dn}$ sobre la superficie S que limita dicho volumen.

Se trata, pues, del problema interior de Dirichlet.

Necesitamos acudir, como siempre en estas cuestiones, al teorema de Green ó á sus casos particulares.

Hemos recordado, en esta misma conferencia, que cuando

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

puede integrarse, multiplicando dicha expresión por una función, que ponemos bajo la forma $\frac{1}{\psi}$, la de Green puede escribirse de este modo

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\psi \Delta \varphi + \frac{d\psi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} \frac{d\varphi}{dz} \right) d\tau &= \\ &= \int \int_s \frac{d\varphi}{dn} \psi d\sigma. \end{aligned}$$

Y demostramos en las páginas antes citadas de las conferencias del año 1909 á 1910 que era legítimo invertir las funciones φ y ψ de modo que el factor de la integral fuese $\frac{1}{\varphi}$ y la integral ψ .

Efectuando esta inversión tendremos esta otra fórmula

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\varphi \Delta \psi + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dz} \right) d\tau &= \\ &= \int \int_s \frac{d\psi}{dn} \varphi d\sigma \end{aligned}$$

y restando dicha fórmula de la anterior resultaría

$$\iiint_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d\tau = \int \int_s \left(\frac{d\varphi}{dn} \psi - \frac{d\psi}{dn} \varphi \right) d\sigma.$$

Si antes dijimos que φ y ψ podían invertirse, ahora decimos más: y es, que son funciones arbitrarias é independientes, salvo las condiciones de continuidad y uniformidad que hacen posible la aplicación de la fórmula de Green.

Esto se demuestra con sólo observar que los valores que se deducen de la condición antes establecida

$$\frac{1}{\psi} (Fdx + Gdy + Hdz) = d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz,$$

á saber

$$\frac{F}{\psi} = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{G}{\psi} = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{H}{\psi} = \frac{d\varphi}{dz},$$

ó bien

$$F = \psi \frac{d\varphi}{dx}, \quad G = \psi \frac{d\varphi}{dy}, \quad H = \psi \frac{d\varphi}{dz},$$

quedan perfectamente determinados sin contradicción ni ambigüedad; cuando se fija en los segundos miembros arbitrariamente las funciones φ y ψ .

Puesto que, en la fórmula anterior, φ y ψ , acabamos de decir que pueden ser arbitrarias, salvo las condiciones de continuidad, podemos suponer sin inconveniente ninguno, que representan dos armónicas U , U' del interior del volumen V , que estamos considerando, con lo cual la fórmula precedente tomará esta forma

$$\iiint_V (U' \Delta U - U \Delta U') d\tau = \iint_S \left(\frac{dU}{dn} U' - \frac{dU'}{dn} U \right) d\sigma.$$

Pero si U y U' son armónicas en el interior del volumen, claro es, que para todos los puntos de este volumen tendremos,

$$\Delta U = 0, \quad \Delta U' = 0,$$

y en la fórmula precedente se anula la integral triple del primer miembro: queda la integral doble de superficie del segundo y resulta

$$\iint_S \left(\frac{dU}{dn} U' - \frac{dU'}{dn} U \right) d\sigma = 0. \quad [A]$$

El resto de la demostración ya no puede adivinarlo fácilmente un principiante. Como sucede en la mayor parte de

los casos, es preciso que se resigne á darse cuenta y á comprender, que la demostración es rigurosa.

Precisamente para llegar á estas demostraciones sirve con frecuencia el método intuitivo. Se ve en conjunto, y como en visión profética, si vale la palabra, la marcha que hay que seguir, con lo cual unas veces se llega á la demostración y otras no.

En todos estos casos el método lógico es el verdadero tribunal sentenciador.

En nuestro caso se ve que, desde luego, los datos del problema entran en esta fórmula, porque si la integral que se busca es U , entran ya U y $\frac{dU}{dn}$ y solo referidos á la superficie, que es donde únicamente se conocen sus valores.

Se ve, además, que entra una armónica U' , de la cual podemos disponer, y recordando lo que sucede en otros problemas análogos, por ejemplo, en la demostración de la fórmula de Poisson, ocurre substituir á dicha función arbitraria U una función que pueda ser infinita dentro del volumen á *ver lo que resulta*.

Que en matemáticas, como en ciencias experimentales, se hacen á veces hipótesis y transformaciones á *ver lo que resulta*.

No enteramente, ni en uno ni en otro caso, entregándose á la casualidad, sino dejándose llevar por cierta *idea conductora*.

Toda vez que U' es arbitraria, supongamos que está representada por $\frac{1}{r}$, es decir

$$U' = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Ya hemos visto que esta expresión $\frac{1}{r}$, es, en efecto, una

armónica que satisface á la ecuación de Laplace, exceptuando en el caso en que el denominador es igual á cero. Es decir, cuando las coordenadas variables x, y, z coinciden con a, b, c .

Estas coordenadas a, b, c son las de un punto A del interior del volumen V .

Realmente, si U' fuese igual á $\frac{1}{r}$ y aplicásemos la fórmula á todo el volumen V , no podríamos hacer lo que he-

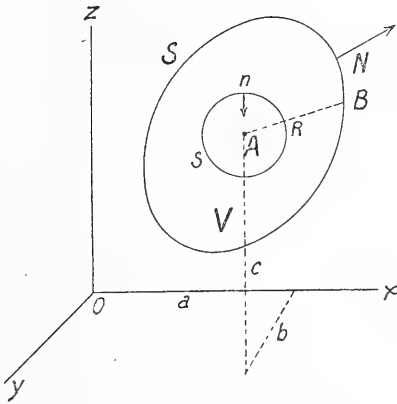


Figura 41.

mos hecho, ni sería legítima la fórmula, porque no sería cierto que tuviéramos para el punto A del volumen $\Delta U' = 0$.

Y por eso vamos á repetir lo que ya hemos realizado otras veces: Dejar fuera, por decirlo así, de la integral, tanto en el primer miembro primitivo como en el segundo, el punto de excepción A (fig. 41).

A este fin, desde A , con un radio r , trazaremos una esfera s tan pequeña como se quiera, y aplicaremos la fórmula de Green, no á todo el espacio V , sino al espacio comprendido entre la superficie S y la superficie s de la esfera.

Para este espacio la fórmula precedente es legítima, por-

que ni U ni U' , es decir, ni U ni $\frac{1}{r}$, ni tampoco sus derivadas, tomarán valores infinitos.

Así, pues, las dos funciones U, U' que hemos sustituido á φ y ψ , en el espacio que consideramos son uniformes, finitas, continuas, y tienen derivadas finitas y continuas para todos los puntos del espacio comprendidos entre S y s ,

Podremos, pues, escribir la fórmula (A), sustituyendo á U' la armónica $\frac{1}{r}$, de este modo:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma = 0;$$

pero esta fórmula no está escrita de una manera correcta, porque la integral doble se refiere á la superficie, que limita el volumen al cual se aplica la fórmula, y en este caso la superficie se compone de dos partes: una que limita el volumen en lo exterior, que es la S ; otra, que limita el volumen en lo interior, que es la superficie s de la esfera.

Luego hay que expresar estas dos partes de la integral de superficie, para lo cual las separaremos, escribiendo S como límite de la integral para la superficie exterior y s , ó sea la superficie de la esfera para la segunda integral doble. Es decir, que estará escrita correctamente de este modo:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma + \iint_s \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma = 0.$$

Y fíjense bien mis alumnos en que, si bien las expresiones que están bajo ambos signos integrales parecen idénticas, no lo son. Se construyen del mismo modo con $U, \frac{1}{r}$ y las derivadas de estas funciones respecto á n ; pero la ex-

presión de la primera parte se aplica á puntos de la superficie S , y si se conociese todo el paréntesis en función de x, y, z , para cada elemento de la integral habría que poner, en vez de x, y, z , las coordenadas de los puntos de la superficie S .

Y en la segunda parte habría que poner á su vez las coordenadas de los puntos de la superficie de la esfera de radio r .

Más aún; para obtener $\frac{dU}{dn}$ en la primera integral doble hay que diferenciar, según la normal N de la figura, y en la segunda hay que diferenciar según la normal n , ó de otro modo, según el radio de la esfera y hacia lo interior de la misma, que va, como N , hacia lo exterior del volumen que se considera.

Todas estas son minuciosidades que sólo tienen disculpa en mis conferencias, recordando que su objeto es la *vulgarización de estas teorías*, y además que me dirijo á principiantes, y prefiero ser pesado y aun enojoso á ser obscuro.

Y continuemos analizando la ecuación precedente.

De la primera integral doble

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d}{dn} \frac{1}{r} U \right) d\sigma$$

nada tenemos que decir, porque no ofrece dificultad alguna.

Es aplicable á la superficie S ; y la U es perfectamente conocida para esta superficie en toda su extensión; es uno de los *datos*, es una función determinada de las dos variables que se escojan para determinar cada punto de la superficie S ; ó si se quiere, es función de x, y, z , estando determinada z por la ecuación de la superficie, con lo cual no quedan más que dos variables independientes: x é y .

Otro tanto podemos decir de $\frac{dU}{dn}$; también es un dato del

problema, porque ha de recordarse que su enunciado decía: *determinación de U en el interior del volumen conociendo en la superficie U y $\frac{dU}{dn}$.*

Por último, $\frac{1}{r}$ y $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ son dos funciones de forma determinada, porque hemos dicho que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

De manera que $\frac{1}{r}$, y su derivada en el sentido de la normal N son, volvemos á repetirlo, funciones de forma determinada.

Y además, nunca r podrá ser 0 , porque como la integral se refiere á puntos de la superficie S , y sólo á esta superficie, la distancia $r = AB$, que en la figura es R , nunca podrá anularse, como que el punto $A(a, b, c)$, no está en la superficie.

Toda esta primera integral doble es perfectamente conocida, puede integrarse, y después de la integración desaparecerán la x, y, z , y sólo quedarán las constantes de las diferentes funciones, y entre ellas, a, b, c . En suma, esta primera integral doble será una función de forma definida F de a, b, c .

Podremos, pues, escribir

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) = F(a, b, c)$$

en que, no lo olvidemos, a, b, c son las coordenadas de un punto cualquiera A del interior del volumen.

Tendremos, pues, sustituyendo en la fórmula anterior

$$\iint_s \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma + \iint_s \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma = 0,$$

en vez de la primera parte, la función F de a, b, c , que hemos obtenido para su valor, la expresión:

$$F(a, b, c) + \iint_s \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma = 0$$

ó bien

$$\iint_s \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U \right) d\sigma = -F(a, b, c)$$

en que la primera integral es una integral de superficie, que sólo se extiende á la superficie s de radio r , tan pequeño como se quiera, que hemos trazado alrededor del punto A para aislarlo. De modo que como antes decíamos; todas las cantidades que entran bajo el signo integral se refieren á dicha superficie. Así r es siempre un radio de la superficie esférica; U toma los valores que corresponden á los puntos

de s , y $\frac{dU}{dn}$ y $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ se refieren á la normal n , que en este caso coincide con el radio.

En el primer miembro de la ecuación, consideremos separadamente las dos integrales dobles en que se descompone:

$$\iint_s \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma - \iint_s \frac{d\frac{1}{r}}{dn} U d\sigma.$$

La primera integral

$$\int \int_s \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma = \frac{1}{r} \int \int_s \frac{dU}{dn} d\sigma$$

en que hemos sacado fuera de la integral $\frac{1}{r}$ por ser r constante é igual al radio de la esfera; esta integral, repetimos, para cualquier valor del radio *se reduce á cero*, porque hemos demostrado que el flujo de la armónina V para una superficie cerrada es igual á cero. Así

$$\int \int \frac{dU}{dn} d\sigma = 0:$$

esto independientemente del valor de r sea grande ó sea pequeño, y por lo tanto en el límite para $r = 0$.

La fórmula principal queda, pues, reducida á esta otra

$$\int \int_s \frac{d \frac{1}{r}}{dn} U d\sigma = F(a, b, c).$$

Veamos á lo que equivale el primer miembro cuando la esfera tiende á anularse en el punto A .

Ante todo,

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dn}$$

como n y r coinciden en dirección, y un incremento de n hacia el interior de la esfera, que es hacia el exterior del volumen, coincide con una disminución de r , y como por lo tanto se tiene $dn = -dr$, se transformará así:

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dn} = - \frac{d \frac{1}{r}}{dr} = \frac{1}{r^2}.$$

Resulta, pues,

$$\iint_S \frac{1}{r^2} U d\sigma = F(a, b, c).$$

Parece á primera vista, que el primer miembro es una integral excepcional, no ya en un punto, sino en todos los puntos de la esfera, porque cuando r tiende hacia cero, el coeficiente diferencial tiende hacia infinito.

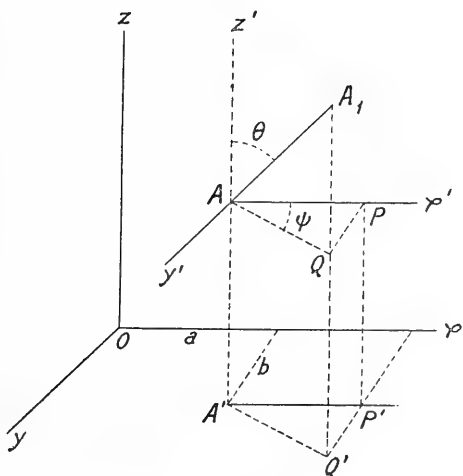


Figura 42.

Pero, desde luego, se observa que esta forma infinita es ilusoria, porque en el numerador entra $d\sigma$, ó sea un elemento de superficie de la esfera, que como vamos á ver contiene al factor r^2 , que se anula con el factor idéntico del denominador y da valores infinitamente pequeños de segundo orden para todos los elementos de la integral.

Para poner esto en evidencia acudamos á las coordenadas polares según hemos hecho otras veces.

La figura 42 expresa desde luego las coordenadas x, y, z de cualquier punto A_1 en función de las coordenadas pola-

res θ y ψ que son, como sabemos, θ el ángulo que forma AA_1 con Az' paralela al eje de las z , que es lo que se llama la distancia polar, y el acimut ó longitud ψ que es el ángulo PAQ que forma con el plano de las $z'x'$ el plano que pasa por z' y por la recta AA_1 .

La tercera coordenada polar será $\rho = AA_1$ si A_1 pertenece á esfera s . Y podremos escribir, sin más explicaciones, porque ya las hemos dado otras veces y porque el problema es elemental,

$$\begin{aligned} x &= a + AP = a + AQ \cos \psi = a + AA_1 \sin \theta \cos \psi \\ y &= b + QP' = b + PQ = b + AQ \sin \psi = b + AA_1 \sin \theta \sin \psi \\ z &= c + A_1Q = c + AA_1 \cos \theta \end{aligned}$$

Y en la misma figura se ve desde luego, y lo hemos demostrado en conferencias del año anterior, que el elemento diferencial $d\sigma$ es igual á una diferencial de arco de paralelo, que será $\rho \sin \theta$, que es el radio, por $d\psi$, que es el arco de radio unidad, es decir: $\rho \sin \theta \cdot d\psi$; multiplicada dicha diferencial por la diferencial del meridiano, ó sea $\rho d\theta$, de suerte que

$$d\sigma = \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi$$

donde vemos que aparece el factor ρ^2 como antes decíamos. Lo que en la fórmula general es r , para la superficie de la esfera es aquí ρ .

Efectuemos estas sustituciones en la fórmula precedente, recordando que U es una función de x, y, z . Es decir, que la fórmula en que vamos á sustituir los valores precedentes es esta en que ponemos desde luego ρ en vez de r , porque todas las r son radios de la esfera

$$\iint_s \frac{1}{\rho^2} U(x, y, z) d\sigma = F(a, b, c).$$

Hecha la sustitución resultará,

$$\iint_S \frac{1}{\rho^2} U(a + \rho \operatorname{sen} \theta \cos \psi, b + \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi, c + \rho \cos \theta) \rho^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\psi = F(a, b, c).$$

Y suprimiendo ρ^2 , queda

$$\iint_S U(a + \rho \operatorname{sen} \theta \cos \psi, b + \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi, c + \rho \cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta d\psi = F(a, b, c).$$

Si ahora suponemos que ρ tiende hacia cero, podría demostrarse fácilmente que basta igualar á cero ρ para obtener el límite de la integral del primer miembro que aparece como función de ρ . Pero aun esta demostración es inútil por sencilla que fuese; porque basta observar que en el segundo miembro no entra ρ , porque ya hicimos notar al obtener el valor de F , que la variable r se refería siempre á puntos de la superficie S sin que ρ apareciese para nada, y n tampoco entra en el segundo miembro, de modo que no puede entrar ρ en el primero y no se alterará éste haciendo $\rho = 0$.

Tendremos, por fin

$$\iint_S U(a, b, c) \operatorname{sen} \theta d\theta d\psi = F(a, b, c).$$

Y como $U(a, b, c)$, en que a, b, c , son las coordenadas del centro de la esfera, es constante respecto á ψ y θ , podremos sacarla fuera del signo integral, y tendremos

$$U(a, b, c) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta = F(a, b, c).$$

La integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta$ da

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta = (-\cos \theta)_0^\pi = 2,$$

y queda

$$2 \int_0^{2\pi} d\psi = 4\pi,$$

por lo tanto,

$$4\pi U(a, b, c) = F(a, b, c),$$

de donde

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} F(a, b, c).$$

Pero a, b, c , son las coordenadas de un punto cualquiera del interior del volumen; lo mismo da llamarlas a, b, c , que x, y, z , sólo que, para no confundirlas con las variables de la integración, las hemos designado por estas letras a, b, c .

Luego $U(a, b, c)$ es el valor de la armónica que buscamos para un punto cualquiera del interior del volumen, y este valor es precisamente $\frac{1}{4\pi} F(a, b, c)$, en que F es una función perfectamente conocida, porque, como dijimos antes, es el resultado de efectuar las siguientes integraciones:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Las cuales siempre pueden efectuarse, al menos teóricamente, siendo U y $\frac{dU}{dn}$ conocidas, como se supone, porque este es el problema. Para todos los puntos de la superficie S , conocidas son, en función de las dos variables que determinen cada punto de dicha superficie S .

Recordando, pues, lo que significa F , podemos asegurar que la fórmula

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma$$

ó si se quiere,

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \frac{dU(x, y, z)}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right] d\sigma$$

resuelve completamente el problema de Dirichlet para el volumen interior S , porque expresa U en función de los datos U y $\frac{dU}{dn}$, mediante operaciones conocidas, que se reducen á dos integraciones.

Claro es que la dn en rigor es dN , porque se refiere á normales á S .

Dicho está, que las variables de las dos integraciones pueden ser x, y , recordando que z es función de ésta por la ecuación de la superficie

$$S(x, y, z) = 0.$$

Pero hemos advertido siempre, que en estos problemas en que *late*, si se nos permite esta palabra, cierta discontinuidad á través de la superficie S , el problema es doble.

Acabamos de estudiar el caso del *volumen interior*; pasemos al del *volumen exterior*.

* * *

Determinación de la armónica U para todo el espacio, hasta el infinito, exterior á una superficie S , conociendo los valores de $U(x, y, z)$ y de $\frac{dU(x, y, z)}{dn}$ para todos los

puntos de dicha superficie S , y verificándose ciertas condiciones para el infinito. Nótese, ante todo, que esta última parte del enunciado no existía en el *problema interior*.

Pero cuando se consideran regiones más y más distantes de la superficie S , entran en las fórmulas cantidades que tienden hacia infinito, y en todos estos casos hay que precisar la ley de todas las cantidades que se consideren, cuando los puntos del sistema se alejan indefinidamente; porque atreviéndonos á emplear una frase vulgar, diremos que *con el infinito no se juega*, y si se le quiere manejar como á las cantidades finitas, se puede caer en grandes contradicciones y en grandes errores.

Ante todo, precisemos las condiciones de la nueva demostración.

Sea (fig. 43) S la superficie de que se trata, y sólo vamos á considerar, al contrario de lo que antes hacíamos, el espacio indefinido exterior á dicha superficie.

Para aplicar los resultados de la primera parte de la demostración, ó sea del *problema interior*, necesitamos limitar un volumen, y á este fin, desde un punto cualquiera I como centro, tracemos una esfera S_i , tan grande como sea preciso para que comprenda á la superficie S , esfera cuyo radio R irá creciendo sin límite.

Antes aplicábamos los razonamientos ya expuestos al volumen V del interior de la superficie S (fig. 41). Ahora, vamos á aplicar aquellos mismos razonamientos al volumen (fig. 43) comprendido entre la superficie S y la esfera S_i , porque este espacio, creciendo R , puede extenderse hasta el infinito y se aplicará al problema exterior de Dirichlet.

A este espacio, digo, vamos á aplicar todos los razonamientos de la primera parte.

Y así, tomaremos un punto A en dicho espacio, como tomábamos un punto A en la figura 41, y trazaremos la esfera infinitamente pequeña s (fig. 43). Y repitiendo aquellos razonamientos, llegaremos á la misma fórmula para el nuevo

espacio cerrado, obteniendo para la armónica que buscamos la expresión

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma$$

con lo cual el problema aparece también resuelto; pero no lo

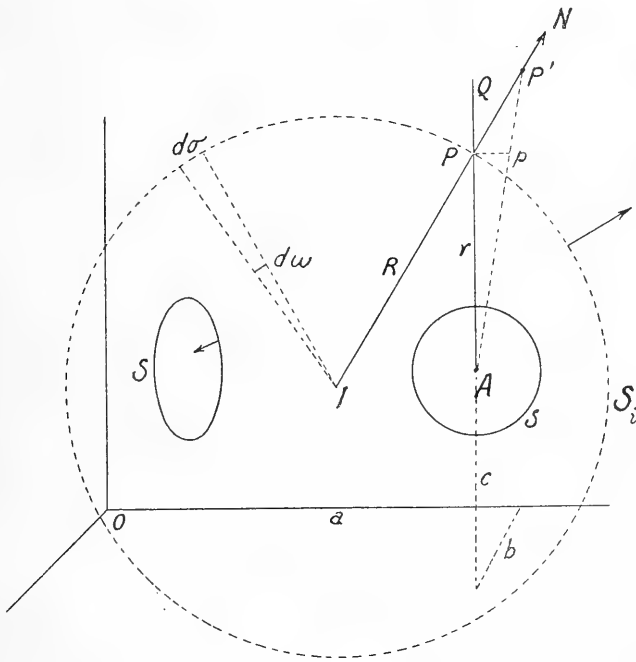


Figura 43.

está, y en lo que acabamos de decir hay cierta precipitación, y la fórmula que hemos copiado no es correcta, al menos en las notaciones.

Porque hemos puesto como subíndice á la integral doble la letra S , y, en efecto, para el problema interior en que sólo tal superficie limitaba el volumen finito, esto era exacto; pero

ahora el volumen está limitado por dos superficies: interiormente por S , pero exteriormente por la esfera S_i .

De suerte que la integral doble del primer caso, aquí es la suma de dos integrales dobles. Una para S , la otra para la esfera S_i .

La verdadera fórmula, á la cual se aplican los razonamientos que ya empleamos, será, pues, ésta:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma.$$

Y con esto parece que la dificultad está resuelta y que está resuelto el problema; pero, todavía falta algo.

La primera integral doble del segundo miembro no ofrece dificultad ninguna, porque U y $\frac{dU}{dn}$ son funciones perfectamente conocidas; son los datos del problema, y las integraciones pueden efectuarse, como en el caso anterior, sin más que una observación, que luego haremos, sobre el sentido de la normal n .

Pero la segunda integral, la que se refiere á la esfera de radio R , la que tiene por superficie de integración S_i , ésta debemos estudiarla más detenidamente, porque lo relativo á la superficie S_i no se encuentra en el mismo caso que lo relativo á la superficie S .

El problema de Dirichlet supone que se conocen U y $\frac{dU}{dn}$ para todos los puntos de la superficie que limitan el volumen V .

Para S conocemos estas funciones; pero nada hemos dicho

de los valores de U y $\frac{dU}{dn}$ en los diferentes puntos de la superficie S_i .

De suerte que los datos del problema son incompletos.

Para aplicar con plena lógica las fórmulas de la primera parte, necesitamos conocerlos para todos los puntos límites del cuerpo, y aquí son dos superficies S y S_i .

Con la circunstancia de que S_i es variable y creciente sin límite.

Hay, pues, que precisar las condiciones del problema y no dejarse llevar ligeramente de una primera impresión ni de analogías y semejanzas.

*
* *

En rigor, algo suponemos implícitamente sobre los valores de U y $\frac{dU}{dn}$ en la superficie de la esfera S_i .

Suponemos que á medida que se alejan hacia el infinito U y $\frac{dU}{dn}$, tienden hacia cero, porque de lo contrario las fórmulas no tendrían sentido si las aplicásemos á regiones cada vez más lejanas.

Pero esto no basta. Cierto es, que en la segunda integral doble de la fórmula, es decir, en

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma$$

si U y $\frac{dU}{dn}$ tienden hacia cero: como

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

á medida que el punto x, y, z se aleja, crece sin límites, y como sólo entra en el denominador, parece que el coeficiente diferencial tenderá hacia cero.

Conviene, sin embargo, precisar las ideas:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

ha de aplicarse á puntos de la superficie S_i ; es decir, que en la figura, r es la distancia AP , desde el punto A , cuyas coordenadas son a, b, c , hasta el punto P de la gran esfera, cuyas coordenadas son x, y, z ; pero la expresión anterior puede ponerse bajo esta forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{a}{x}\right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{b}{y}\right)^2 + z^2 \left(1 - \frac{c}{z}\right)^2}}$$

y como a, b, c son finitas y x, y, z crecen sin límite, los quebrados $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$ tienden hacia cero, y el valor $\frac{1}{r}$ tiende hacia

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

que á su vez tiende hacia cero á medida que crecen x, y, z , ó de otro modo, á medida que tomamos esferas S_i cada vez mayores.

Una cosa análoga podemos indicar respecto á

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dn} = \frac{-\frac{dr}{dn}}{r^2}.$$

Aquí entra en el denominador r^2 . Es decir, que la expresión

es un infinitamente pequeño de segundo orden, toda vez que el numerador es una cantidad finita, lo cual se ve desde luego. Porque si P es el punto de la esfera que se considera, AP será el valor de r para este punto P ; y si sobre la normal á la esfera, que es su radio IP prolongado en PN , tomamos una distancia $PP' = dn$, el nuevo valor de r será AP' . Trazando el arco Pp , que equivale á una perpendicular á AP' , también tendremos $P'p = dr$, y por lo tanto

$$\frac{dr}{dn} = \frac{P'p}{PP'} = \cos PP'p = \cos NPQ,$$

que es el coseno del ángulo que forma exteriormente r con la normal, toda vez que las rectas AP y AP' pueden considerarse paralelas.

Resulta comprobado lo que hemos dicho

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{r} = \frac{-\cos NPQ}{r^2} = \text{cantidad que tiende hacia cero.}$$

En suma, todos los coeficientes de términos de la integral doble, que consideramos, tienden hacia cero á medida que crece el radio de la esfera.

Pero esto no basta, porque $d\sigma$, que es un elemento de área de la esfera S_i , crece como el cuadrado del radio de la esfera S_i , para una abertura infinitamente pequeña $d\omega$ del cono que determina $d\sigma$, y cuyo vértice está en I .

De suerte que, expresando esta circunstancia en la integral doble, tendremos

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} + \frac{U \cos NPQ}{r^2} \right) R^2 d\omega.$$

Donde aparece una cantidad infinitamente grande de segundo orden, que no sabemos si compensa ó no la cantidad

infinitamente pequeña que representa el coeficiente diferencial.

Nos sucede aquí lo contrario de lo que nos sucedía con la esfera infinitamente pequeña s . Allí, en el denominador entraba el radio ρ de la esfera, que era infinitamente pequeña; pero en cambio, $d\tau$ contenía ρ^2 y era también infinitamente pequeña.

Aquí, comparamos á la inversa, cantidades infinitamente grandes que dependen de R .

Introduciendo R^2 en el paréntesis del coeficiente diferencial, tendremos

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{s_i} \left(\frac{1}{r} R^2 \frac{dU}{dn} + R^2 \frac{U \cos NPQ}{r^2} \right) d\omega,$$

que dividiendo fuera de la integral y multiplicando dentro por R , nos da la forma definitiva

$$\frac{1}{4\pi R} \iint_{s_i} \frac{R}{r} \left(R^2 \frac{dU}{dn} + \frac{R}{r} R U \cos NPQ \right) d\omega:$$

y aquí se comprenden las condiciones que anunciábamos y que van á ser necesarias.

1.º La relación $\frac{R}{r}$, que es la de las rectas IP y AP , tiende hacia la unidad, á medida que el punto P se aleja hacia el infinito.

2.º Sabemos que

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dU}{dx} \alpha + \frac{dU}{dy} \beta + \frac{dU}{dz} \gamma,$$

siendo α, β, γ los cosenos de los ángulos, que la normal N forma con los ejes; porque como $U(x, y, z)$ depende de x, y, z , que son las coordenadas de P , y al dar á n el incremento dn , el punto P pasa á P' , las nuevas x, y, z , que se-

rán las de P' dependerán de la única variable n , y la regla de la diferenciación da

$$\frac{dU(x, y, z)}{dn} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dn} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dn} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dn}.$$

Pero evidentemente los tres coeficientes

$$\frac{dx}{dn}, \quad \frac{dy}{dn}, \quad \frac{dz}{dn},$$

son los cosenos de los ángulos que forma la normal con los ejes, porque son las diferencias de las coordenadas de los extremos P y P' divididos por la longitud PP' .

De aquí resulta la condición que vamos á establecer, porque tendremos

$$R^2 \frac{dU}{dn} = R^2 \frac{dU}{dx} \alpha + R^2 \frac{dU}{dy} \beta + R^2 \frac{dU}{dz} \gamma.$$

Luego para que esta cantidad sea finita, será preciso que que se verifiquen estas condiciones: que

$$R^2 \frac{dU}{dx}, \quad R^2 \frac{dU}{dy}, \quad R^2 \frac{dU}{dz},$$

queden finitas á medida que x, y, z crezcan. Es decir, á medida que el punto P se aleja hacia el infinito, compensándose, por decirlo así, lo que crece R con lo que disminuyen los coeficientes diferenciales.

3.º Es preciso, por último, que el producto $R U$ también tienda hacia una cantidad finita.

Cumplíendose estas condiciones, toda la cantidad que está dentro del paréntesis, tiende hacia un valor finito para todos los elementos de la integral, y $d\omega$ es infinitamente pequeña, porque es la abertura de un cono medido en la esfera de radio 1.

Luego la integral será una integral finita, y como fuera existe el factor $\frac{1}{R}$, claro es que á medida que R crezca, todo el resultado tenderá hacia cero, con lo cual la fórmula de Dirichlet para el espacio exterior queda reducida á la primera integral doble. Es decir

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma. \quad [1]$$

Sólo nos queda por advertir, que al aplicar la fórmula, debe cuidarse de marcar el sentido de las normales.

El sentido de las normales está marcado en la figura por las dos flechas hacia lo exterior del volumen.

En el caso contrario habría que cambiar el signo al segundo miembro de la fórmula.

En la conferencia próxima todavía insistiremos en esta fórmula que acabamos de obtener.

XLII. — Apuntes sobre Mecánica social.

POR ANTONIO PORTUONDO Y BARCELÓ.

(Conclusión.)

En vista de todo lo dicho, procedamos ya á distinguir también para la *Mecánica social* las dos clases de energía de un individuo en su campo, á saber:

1.^a La energía actual ó *de movimiento* del individuo en el asunto (la llamaremos *energía cinética*), que dependiendo de su masa m para el asunto, y de la *magnitud* de su velocidad v en el instante que se considere, se mide en este instante por $\frac{1}{2} m v^2$, y se puede transformar en *trabajo social*.

Esta energía cinética de un individuo en un asunto, en nada difiere de la de un punto material en la Mecánica racional. Intervienen en ella idénticamente los dos factores *masa* y *magnitud de la velocidad*, y ésta elevada al cuadrado, con la misma influencia preponderante que en la Mecánica racional.

2.^a La *energía potencial* que dependiendo de la masa m del individuo para el asunto, y de su posición en el instante que se considere, así como de la naturaleza ó constitución de su campo de fuerza, se mide en ese instante por *todo el trabajo positivo* que podría desarrollar la fuerza del campo mediante cambios de posición del individuo en el asunto (*).

(*) Se sobrentiende que esta energía potencial— aunque referida al individuo — está en todo el conjunto.

Este trabajo *total* habría de apreciarse como integral de trabajos elementales, cada uno de los cuales es (mediante el factor m) el producto de la *intensidad del campo* (variable) en cada posición, por el camino elemental recorrido y estimado en su sentido á partir de ella. El recorrido elemental se apreciaría por el incremento muy pequeño del parámetro definidor de su posición en el asunto.

Se ve que este potencial del individuo en cada posición vale y representa energía *en potencia*, dentro del campo, para el asunto que se considera.—Y existe esta energía mientras el campo pueda ejercer sobre el individuo abstracto y simple, alguna *acción real y efectiva*, y pueda *él* cambiar su posición en el asunto (es decir, modificarse), de modo que permita á la intensidad del campo hacer *trabajo positivo*.—El potencial en cada posición expresa, pues, mecánicamente, todo lo que puede *dar de sí* todavía el individuo por movimiento de modificación en el asunto; y es, por consiguiente, *energía almacenada*, no desplegada todavía, pero que puede desplegarse, contando con todo lo interno y externo que se simboliza—por decirlo así, para el caso particular que consideramos—en la ley de variación de la intensidad del campo.

Si el individuo de masa unidad pasa de una posición inicial en la cual su potencial sea π_0 á otra en que su potencial sea π (menor que π_0) por un movimiento cualquiera en la línea de fuerza (que es el caso particular de que tratamos), se ve que la disminución $\pi_0 - \pi$ del potencial, mide el trabajo positivo hecho efectivamente por todas las fuerzas del campo actuando sobre el individuo.

Distinguidas así las dos energías psíquicas *cinética y potencial* del individuo en su campo, apliquemos el *Teorema de la energía* al individuo *de masa unidad*; y se escribirá:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \pi_0 - \pi;$$

lo cual nos dice que:

El incremento de la energía cinética es igual á la disminución de la potencial.

Y si se llama *energía total*, en un instante, la suma de las cinética y potencial en ese instante; la proposición anterior equivale á esta otra:

$$\frac{1}{2} v^2 + \pi = \frac{1}{2} v_0^2 + \pi_0;$$

La energía total del individuo en su campo, se conserva constante á través de todas sus modificaciones.

Para darnos cuenta de la ley que acabamos de formular, pensemos que cada individuo al nacer tenga—como si dijéramos—una posición inicial *de parámetro cero*, en el asunto que se considera; y que se encuentre, á partir de ese instante, y para un primer trascurso de tiempo de su vida, en medio de un *campo de fuerzas*, constituido:

1.º Por todo lo que haya en su organismo fisiológico, heredado de sus dos padres directamente, con todas las predisposiciones psíquicas también heredadas (y que parecen como ligadas á la misma constitución fisiológica) que trae el individuo consigo para su vida después del nacimiento. Todas esas disposiciones fisiológicas, con predisposiciones psíquicas, habrán de desenvolverse física y psíquicamente.

Puede decirse con entera verdad que ese ambiente interno del niño al nacer, viene de *toda su ascendencia*.

2.º Por todo lo físico y psíquico del ambiente externo, en medio del cual se encuentre colocado el individuo desde el instante en que nace (*).

Por esto se comprende que el ser todo de cada individuo,

(*) La duración del primer trascurso de tiempo que vamos á considerar $\frac{1}{2}$ variará mucho de unos individuos á otros, y dependerá de circunstancias ó accidentes particulares para cada individuo.

tanto por lo hereditario que trae al nacer, como por lo que en él influye el medio ambiente físico y social, está íntima y profundamente penetrado por el pasado y el presente de la Sociedad á que pertenece (*).

Y se ve, como ya habíamos dicho, que todo lo que constituye su campo es esencialmente variable en el tiempo. De hecho, el organismo del niño irá creciendo y modificándose por procesos fisiológicos y biológicos del particular modo que corresponda á *la relación en que se encuentre* con todo

(*) Esto que decimos concuerda perfectamente (aunque el aspecto *mecánico* se distinga bien del *biológico*) con la fórmula biológica de *Mr. Le Dantec*.— Según éste, interviniendo conjuntamente en todo acto vital dos factores esenciales:

- 1.º El contenido del cuerpo del ser vivo A ;
- 2.º El medio que envuelve al ser B ;

es claro que en un instante cualquiera el funcionamiento vital puede expresarse por la fórmula $A \times B$.

Y así el paso de la forma A_{n-1} del ser (en el instante t), á la forma A_n (en el instante $t + dt$), se expresa — para *Mr. Le Dantec* — por la fórmula simbólica:

$$A_{n-1} + (A_{n-1} \times B_{n-1}) = A_n.$$

Se sobreentiende que el signo \times no tiene el significado que en Aritmética, para la operación de multiplicar.—Se refiere aquí ese signo al conjunto de actividades de todo género, que (mediante las relaciones entre un cuerpo vivo A y el medio que le rodea B) se opera por acciones y reacciones, á partir de cada instante, y durante cada intervalo infinitamente pequeño dt , de tiempo.

Si con el símbolo general $A \times B$ se expresara la magnitud finita en un instante cualquiera de la actividad total entre el ser vivo A y su medio B , el lenguaje simbólico de *Mr. Le Dantec* permitiría quizá escribir la fórmula general

$$A_n = A_o + \int_{t_o}^{t_n} (A \times B) dt$$

si de A_o (instante t_o) se pasa á A_n (instante t_n).

el medio ambiente externo; y este medio ambiente (comprendiendo en él todo lo exterior que pueda ejercer alguna influencia de cualquier género sobre el niño íntegramente considerado) cambia de hecho también de un instante al siguiente, al mismo tiempo que cambia lo que hemos llamado el ambiente interno (*).

Pues bien; si suponemos que durante un cierto trascurso de tiempo, desde el nacimiento, la acción de *todo el campo*—aunque variable—sea tal que el individuo simple y abstracto *se mueva*—respecto de un asunto—en una determinada dirección y sentido, y que esta dirección y sentido se conserve constante en todo ese trascurso de tiempo, podríamos decir que el individuo *tenía* al nacer un determinado *potencial para el asunto*, potencial que depende de todo lo que constituye su campo con el modo de ser de éste. El movimiento de modificación que vaya haciendo pasar sucesivamente al individuo de modo continuo por las diferentes *posiciones en el asunto* que él vaya teniendo, será tal que á medida que aumente su energía *cinética*, irá consumiéndose su *potencial*. — Según dijimos, cada disminución de éste, será equivalente al trabajo positivo (ó será medido por el trabajo positivo) que hagan las fuerzas del campo, para acelerar el movimiento de modificación en el asunto. Se ve así la transformación parcial y sucesiva de energía potencial en otra equivalente, durante ese período de tiempo;—ó sea la *conservación de la energía total*.

Si no ocurriera la muerte del individuo en ese primer período, llegará ordinariamente un instante en el cual — tenien-

(*) Vimos anteriormente que el crecimiento y las modificaciones sucesivas y continuas de la estructura del animal, se realiza mediante transformaciones de energías que estaban en el medio ambiente externo, y pasan por asimilación á estar en el medio interno. El proceso de crecimiento dura naturalmente hasta llegar el animal (ó la planta) á la plenitud, por decirlo así, de su tamaño y de su estructura, según la especie á que pertenece.

do el individuo una cierta *posición en el asunto* — el campo de fuerzas experimente grandes alteraciones, y que á éstas corresponda una *nueva dirección y sentido* en que el individuo se mueva ó se modifique (*). Si en este segundo período, llamémosle así, el nuevo campo (aunque siempre variable), permitiera conocer, juntamente con su dirección y sentido, su intensidad en función de las futuras posiciones, podríamos aplicar todo lo dicho anteriormente para el primer período, viendo el potencial que (en relación con el nuevo campo), pueda corresponder al individuo en el instante inicial del segundo período; y así sucesivamente.

En todo lo dicho hemos considerado la *intensidad* del campo haciendo trabajo *positivo* para aumentar la energía cinética del individuo á expensas de su potencial. Pero en las vicisitudes de la vida del individuo puede haber, y habrá, períodos en los cuales se mueva el individuo (en el asunto que se considere), en sentido opuesto al *sentido del campo* en ese período. Si, por ejemplo, un individuo se encuentra en un instante dado (que consideramos como inicial), animado de cierta velocidad debida á causas anteriores, y se ve colocado en ese instante, y para los transcurros sucesivos del tiempo, en medio de un campo que, por su constitución y naturaleza, tenga la misma dirección de la velocidad del individuo, pero *sentido opuesto*, es evidente que el movimien-

(*) Si se mira bien, ese cambio en el campo de fuerza — que suponemos rápido —, no se presentaría sino en casos especiales ó en períodos *críticos* (por ejemplo, el de la pubertad); pero admitimos esa discontinuidad tan sólo para dar más relieve á nuestro pensamiento.

En la realidad de la vida, el proceso de variación del campo de fuerzas, se opera según ley de continuidad; y en rigor se debe de ver al individuo con su potencial en el campo de fuerzas, moviéndose (ó desenvolviéndose), de modo continuo, á la vez que su campo se transforma continuamente. — Nosotros nos limitamos á ver lo que ocurriría en un punto, por virtud de un cambio finito en el campo de fuerzas.

to del individuo en ese período será *retardado*; es decir, que su *energía cinética* irá disminuyendo por el trabajo *negativo* que irá haciendo la fuerza del campo; pero su *potencial en el campo* irá aumentando, puesto que á las posiciones que vaya teniendo, irá correspondiendo mayor cantidad *posible de trabajo positivo que hacer á la intensidad del campo*.

Cuando á ese individuo se le agote la energía cinética que tenía en el instante inicial, porque se haya transformado toda ella en potencial, éste será un *máximo*, cuando la cinética sea *nula*; y á partir de ese instante, el trabajo positivo irá aumentando la energía cinética, á partir de *cero*, y responderá á un movimiento en el *sentido mismo* del campo, que irá acompañado de la correspondiente disminución de potencial. Siempre se cumplirá, por el *Teorema de la energía*, la ley de la *conservación de la energía total*; y habrá un *instante* en que *toda la energía* (mirando sólo un individuo), estará en potencial, que es aquel en que la cinética sea *nula*.

*
* *

Todo lo expuesto anteriormente respecto á las energías cinética y potencial de un sólo individuo moviéndose en su campo, podría aplicarse á lo que llamábamos *un elemento de una agrupación social*, si se individualizara. Para ello sería preciso:

1.º Concebir el *elemento* como simbolizado por un punto central, al cual se atribuyera una masa para el asunto que fuera la de todo el elemento social, y al cual se atribuyera también una velocidad de modificación en cada instante; y así visto, ó individualizado, el elemento social, su energía cinética se mediría por $\frac{1}{2} m v^2$.

2.º Concebir que ese punto central, ó elemento indivi-

dualizado, estuviera en un campo de fuerzas psíquicas constituido: por una parte, por todos los individuos de la colección, que ejerciendo sus acciones sobre el centro, formarían el *medio ambiente interno*; y por otra parte, por toda la agrupación social, y por todo lo exterior á ésta, hasta donde fuera sensible la acción que pudiera ejercer sobre el elemento que se considera, lo cual formaría el *medio ambiente externo*, para el elemento. Aplicando á este campo para el elemento social, las consideraciones hechas al tratar de un sólo individuo, se debería de mirar cada período del movimiento en que fuera conocida y constante la *dirección y el sentido del campo*, y en que se pudiera conocer *su intensidad*. Ya sea esta intensidad constante ó variable, se podría concebir la *energía potencial* del elemento (en cada posición que tenga en su campo) como el producto de *su masa* por *el potencial* en esa posición (para la unidad de masa).

Podría repetirse después de esta concepción todo lo dicho respecto de un sólo individuo, y aplicar el *Teorema de la energía*; y quedaría establecido también el principio de la *Conservación de la energía total*.

Se ve en definitiva que (tanto para un individuo como para un elemento social) el porvenir, es decir *lo que será* por efecto del movimiento elemental de modificación en el tiempo, depende *del presente*, en el cual está ya el pasado, naturalmente. Pero entendiendo bien, que *el presente* no se refiere tan sólo al estado del individuo ó del elemento social en posición y velocidad en el instante que se considere, sino al estado (en este mismo instante) de todo lo que ha de influir en el individuo ó elemento social, que es su *campo de fuerzas*, constituido por todo lo físico y psíquico interno y externo de donde emanan fuerzas que actúan sobre él. Todo esto es también *presente*, como correspondiente al instante de que se trata. En el presente está, pues, *toda la energía* del individuo ó del elemento social en las dos formas cinética y potencial.

Y es muy de notar que mediante el despliegue y las transformaciones de las energías totales de los individuos y elementos de una agrupación, estos influyen á su vez, muy marcadamente, sobre el medio ambiente físico externo, y lo modifican, ayudándose de todos los conocimientos adquiridos por las ciencias físicas, químicas y naturales. Con la ayuda de las ciencias psíquicas y sociales — si éstas progresaran bastante — se influiría muy marcadamente también sobre el ambiente psíquico interno y externo. En definitiva se ve, que, por repercusión, se ván modificando las fuerzas de los campos en que se van encontrando sucesivamente los individuos y elementos sociales. Así se realiza la evolución total del ambiente físico y psíquico para los individuos y elementos de toda una Sociedad.

A la Sociología corresponde examinar atentamente y de un modo profundo y detallado, todo lo que acabamos de indicar para ver si con los progresos de la Psicología experimental, es posible algún día emprender la constitución científica de la Mecánica social aplicada.

ENERGIA DE LAS AGRUPACIONES

Para ver la energía de una agrupación social, empecemos — como siempre — por recordar lo que sabemos por la Mecánica de los sistemas materiales.

Cuando un sistema de puntos de masas $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$, se halla en movimiento en el espacio, y se miran estas masas como ejerciendo acciones dinámicas *unas sobre otras* (y nada más), el campo de fuerzas, para cada una de ellas, en un instante dado, está constituido por el conjunto de todas las demás. Así, si en un instante dado

el punto de masa m_1 tiene la posición M_1 en el espacio;

— — m_2 — — — M_2 —
— — m_3 — — — M_3 —

.....
.....

la energía potencial de la masa m_1 [en la posición M_1] será el producto de m_1 por el potencial V_1 que corresponda á la posición M_1 en su campo. Y repitiendo lo mismo, para todos y cada uno de los puntos del sistema, la energía potencial de éste sería

$$W = \Sigma m V;$$

ó sea la suma ds todos los productos de las masas por sus respectivos potenciales: pero para no tomar dos veces cada combinación de dos puntos, se debe de escribir

$$W = \frac{1}{2} \Sigma m V.$$

Y como cada $m V$, mide *todo el trabajo positivo* que podrían hacer las fuerzas del campo—que son *las fuerzas interiores* del sistema—sobre cada punto, se suele decir que cada $m V$ es, como si fuera, un trabajo almacenado en la posición M que ocupa ese punto. Así miradas las cosas, se puede decir—como es costumbre—que: *la energía potencial W del sistema, es la mitad del trabajo almacenado para tener os puntos en sus respectivas posiciones simultáneas $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ en el instante que se considera.*

Sabemos que si se considera la posición que ocupa el sistema de puntos en un instante inicial t_0 y la llamamos A ; y vemos pasar dicho sistema á otra posición B que corresponda á otro instante t_1 ; y se ha movido sólo bajo las acciones de las fuerzas *interiores* de que hemos hablado; y se supone que estas fuerzas sólo dependan de las distancias, es decir que sean de las que admiten una función de fuerza, se curriculará el Principio de la *Conservación de la energía total*; (*) es decir, que en todos y cada uno de los instantes

(*) Si el Principio de la *Conservación de la energía* ha de hacerse independiente de toda hipótesis sobre las fuerzas interiores de que

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 + W = \text{constante.}$$

Conviene recordar también que, según el *Teorema de Hamilton*, el paso de la posición *A* (instante t_0) á la posición *B* (instante t_1), habrá de realizarse por *tales* cambios sucesivos y continuos de *las posiciones* de los puntos, y *tales* cambios sucesivos y continuos de *las velocidades*, que debiendo de ser *nula* la variación de la integral definida

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \Sigma m v^2 - W \right] dt,$$

esta integral definida (de límites invariables) será *mínima* en el movimiento *real* del sistema, con respecto á los valores que tendría en todos los movimientos virtuales posibles, por los cuales el sistema pudiera pasar en el mismo tiempo de la posición *A* á la posición *B*.

Si se tomara el *valor medio* de los valores porque pasa

$$\left[\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - W \right]$$

desde el instante t_0 al instante t_1 ; y se representara ese valor medio por *H*, el valor de esa integral definida es igual á $H(t_1 - t_0)$; y siendo constante el factor $(t_1 - t_0)$, se ve que el Teorema de Hamilton nos lleva á decir, como dice Poincaré: *que la media H de las diferencias entre la energía cinética y la potencial de cada instante, cuando un sistema pasa de una posición A (t_0) á otra B (t_1) es la menor posible en el movimiento real y efectivo del sistema.*

*
* *

estamos hablando, hay que admitir el Principio como un hecho demostrado experimentalmente, porque la demostración teórica podría fallar por su base, como dice Poincaré.

Recordado lo que precede, vengamos á la *Mecánica social*, y pensemos en una agrupación social *vista en sí misma*, y constituida por individuos y elementos sociales (individualizados) con sus respectivas masas m_1, m_2, m_3, \dots para un mismo asunto, teniendo sus determinadas posiciones respectivas M_1, M_2, M_3, \dots en el asunto, en un instante t .

Considerando á cada uno de los individuos y elementos — para el asunto de que se trate — sólo por su relación con el conjunto de la agrupación, se podría decir: que la energía potencial de la agrupación, vista en sí misma, en el instante t , se apreciaría por la mitad de todo el trabajo almacenado para tener á los individuos y elementos de la agrupación en sus respectivas *posiciones simultáneas* en el asunto, en el instante que se considera.

Hay, pues, en cada *posición* de una agrupación social un depósito de energía (para todos los asuntos sociales) que está en potencia (*).

Concebida esta energía potencial de que se disponga, para cada asunto, en un instante t , y haciendo aplicación á una agrupación nacional, por ejemplo, se debe de pensar que el fin de la educación de un pueblo — tomando la palabra educación en su más amplio sentido —, debe de consistir fundamentalmente en que las fuerzas interiores en conjunto hagan *efectivamente* trabajos *positivos* en todos y cada uno de los asuntos de carácter social, por los cambios de posición de los individuos y elementos, para desenvolver así, en la mayor escala posible, la energía potencial que haya en la agrupación social.

Veamos ahora como se escribiría el *Teorema de la energía*

(*) Ward observa que las estructuras en las cuales hay esas energías son producto de una lucha, y por eso este escritor modifica la frase de Darwin «*lucha por la existencia*» para el mundo orgánico — y dice que el orden reinante en cada instante en el mundo inorgánico en el orgánico y en el social, debe de ser mirado como el producto de una *lucha por estructura*.

con toda generalidad. — Para esto recordemos que además de las fuerzas interiores, á que acabamos de referirnos, actuarán en general, sobre los individuos y elementos de la agrupación, *fuerzas exteriores* F , que vienen de fuera de la agrupación (*). Aplicando el *Teorema* desde un instante t_0 , en que las diversas velocidades de los individuos y elementos se representen por v_0 , hasta otro instante posterior t_1 , en que esos mismos individuos y elementos tengan las velocidades v ; si se representan por F las fuerzas exteriores que hayan actuado en ese transcurso de tiempo $t_1 - t_0$, y por f las interiores, la ecuación se puede escribir así:

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma T. F + \Sigma T. f;$$

lo cual dice: que el incremento de la energía cinética de la agrupación, desde el instante t_0 al t_1 es igual á la suma de los trabajos hechos, mediante los cambios de posición realizados en todos los individuos y elementos, por todas las fuerzas exteriores F é interiores f , que hayan actuado.

Pero se dijo anteriormente: que la energía potencial de la agrupación en el instante t_0 , se apreciaba por todo el trabajo positivo que podrían hacer las fuerzas interiores f ; y que dependía de las posiciones, en el asunto, que tuvieran en este instante t_0 los individuos y elementos. Si este potencial de la agrupación para el asunto se representa por Π_0 , y el correspondiente al instante t se representa por Π , según sean las nuevas posiciones en el asunto; se sabe que el trabajo he-

(*) Ya se sabe que si una agrupación social, como un Municipio, por ejemplo, está dentro de otra ú otras más comprensivas, como la Región y la Nación á que pertenece, las fuerzas que, emanando de individuos ó elementos de éstas, ejerzan acción sobre aquel Municipio, son *para éste* fuerzas *exteriores*; pero estas mismas fuerzas de que hablamos, serían fuerzas *interiores* si se tratara de estudiar el movimiento de la agrupación Regional ó Nacional.

cho en ese transcurso de tiempo por todas las fuerzas *interiores*, es decir, $\Sigma T \cdot f$ vale $\Pi_0 - \Pi$, que es la disminución que haya experimentado el potencial de la agrupación para el asunto.

En vista de esto, el *Teorema de la energía* se puede escribir así:

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 + \Pi = \left(\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 + \Pi_0 \right) + \Sigma T \cdot F;$$

y enunciarse del siguiente modo:

La energía total de una agrupación social, respecto de un asunto, en un instante cualquiera t_1 , es igual á la total que tenía en un instante inicial t_0 , aumentada en la suma de los trabajos que hayan hecho en ese transcurso ($t_1 - t_0$) de tiempo, todas las fuerzas exteriores á la agrupación, actuando sobre individuos ó elementos de ésta.

Este enunciado hace ver claramente que si las fuerzas psíquicas sociales que vengan *de fuera* de una agrupación hacen efectivamente *trabajo positivo* al actuar sobre individuos y elementos de la agrupación, este trabajo es aprovechado, porque constituye un verdadero *aumento de energía total* en la agrupación que se considera.

Y de aquí se deduce: que si una agrupación cualquiera viviese durante algún tiempo absolutamente sustraída á toda influencia exterior á ella, respecto de un asunto, el último término de la ecuación de la energía sería *nulo*, y habría, por consiguiente, *Conservación de energía total en la agrupación*. Por consiguiente, si se aumentara la energía cinética social

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 > \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2,$$

se podría asegurar, en el supuesto dicho, que —*por virtud de los cambios de posición realizados por todos los indivi-*

duos y elementos — se habría *consumido* una parte del *potencial social* de que se disponía para el asunto; y que este consumo es exactamente igual á aquel aumento de energía cinética. — E inversamente: no podría haber un aumento en la energía potencial de la agrupación *por las nuevas posiciones* en el asunto de individuos y elementos, sino á expensas — siempre en el supuesto del aislamiento — de una disminución en su energía cinética, exactamente igual á aquel aumento.

Si el Teorema de *Hamilton* fuera aplicable á las fuerzas sociales, se podría decir respecto del movimiento real y efectivo de modificación de una agrupación que pasara de la posición *A* en el instante t_0 á otra posición *B* (en el mismo asunto) en el instante t_1 , que:

Si se comparase el movimiento real con los infinitos virtuales que se podrían concebir (respetando los enlaces) para lograr el mismo cambio de posición en el mismo tiempo; y en cualquiera de los movimientos se viesen los valores por los cuales pasa, en el tiempo, la diferencia entre las dos energías cinética y potencial; y se tomara la media de esas diferencias:

La media en el movimiento real sería la menor posible.

Ninguna agrupación social, en el mundo civilizado, vive hoy completamente aislada en ningún asunto, ni está por consiguiente enteramente sustraída á la acción de fuerzas exteriores, que hacen trabajos sociales, é influyen por estos trabajos en la energía total de la agrupación.

Si para terminar este Capítulo sobre la energía, recordamos lo dicho al empezar, respecto á las transformaciones mutuas de las energías físico-químicas, y á sus cambios directos é inversos en energías fisiológicas; así como también

las varias transformaciones mutuas de éstas, y sus cambios directos é inversos en energías psíquicas; y finalmente, si recordamos que las diversas formas de energías psíquicas se cambian entre sí; quizá se pueda decir: Que todas las energías físicas y químicas, fisiológicas y psíquicas—así cinéticas como potenciales — [que están en tan íntimas relaciones]— son manifestaciones diversas de una sola *Energía Universal*.

Y si se admitiera que el Mundo constituido por nuestro Sol con los Planetas y sus Satélites etc., sea un sistema aislado (aunque esto no sea realmente admisible de modo riguroso), se debería de pensar que las fuerzas de todo género que actúan en este nuestro Mundo, son fuerzas *interiores*; y si todas ellas son conservativas, debe de cumplirse en él la ley mecánica de *la Conservación de la energía universal total*. Bien entendido que en esa suma de las energías cinéticas y potenciales, habrían de ser incluídas: todas las energías físicas y químicas del mundo llamado inorgánico; todas las fisiológicas del mundo orgánico; y todas las energías del mundo psíquico. Y esto en todos los Planetas, Satélites etcétera, y en nuestro Sol. Aceptada esta conclusión, ya no cabría admitir la posibilidad de la creación ni de la destrucción de parte alguna de energía ni física, ni fisiológica ni psíquica en cuerpo alguno, ni en organismo alguno.

De la cantidad invariable de Energía Universal, sólo tendrá *valor humano* — en cada instante — aquella parte que el hombre sepa y pueda aprovechar para sus fines de cualesquiera géneros que éstos sean. La parte *utilizada* por el hombre (*) ha sido hasta ahora una fracción pequeñísima de la energía total; y la aspiración suprema será siempre alcanzar— para los individuos y las agrupaciones humanas— mediante las transformaciones convenientes—el mayor aprove-

(*) Observa Mr. Le Dantec que lo utilizable es muy relativo, porque lo que no pueda ser aprovechado para algunos usos, podría quizá serlo para otros usos.

chamiento posible de *toda la Energía* que se logre descubrir.

Pensando primeramente en las energías físicas, conviene recordar que en los procesos de sus transformaciones mutuas, una parte considerable se *disipa*, es decir, que se esparce en formas tales, que al hombre no le es posible, en general, alcanzarla y recogerla, ni menos almacenarla. Por esto es muy difícil, y á veces imposible, al parecer, que esa energía disipada sea utilizable por el hombre; y es muy contraria al interés humano esa «*tendencia á la disipación de la energía mecánica en la Naturaleza*», que decía lord Kervin. Muchos físicos eminentes estiman que la forma calorífica de la energía es de *grado* ó de calidad *inferior* á la energía mecánica; y piensan que la transformación más *natural* es la que — conservando la cantidad — cambia una forma en otra de grado inferior (por ejemplo, energía mecánica en calor). Esto es lo que se significa al hablar de la *degradación natural* de la energía; porque se piensa que las transformaciones inversas — por ejemplo de calor en energía mecánica — son *artificiales*, es decir, obtenidas por la intervención del hombre, y con gran disipación.

Se sabe que toda energía está medida por el producto de dos factores; y que para ver así la térmica, ha habido que recurrir á la noción de la *entropía*, como factor *cuantitativo*, que se multiplicara por la *temperatura* (con relación al cero absoluto) como factor *intensivo*.

La relación de magnitudes en que estén los dos factores (de una cantidad dada de energía) es muy interesante cuando se trata de aprovecharla *con un fin determinado*. — Así, por ejemplo, si se trata de la hincada de un pilote por medio del martinete, conviene que predomine el factor *cuantitativo* (*masa*), en la energía cinética de una masa *m* caída desde una altura *h*; y si se trata del proyectil disparado por un fusil, conviene que en la energía cinética predomine, por el contrario, el factor *intensivo* (*velocidad*).

Una cantidad dada de energía térmica es tanto más apro-

vechable (hablando en términos generales y para los usos corrientes) cuanto más, elevado sea el factor *intensivo* (*temperatura*); y así el solo hecho del descenso de este factor — con el aumento consiguiente de *entropía* — hace que ya esa cantidad de energía sea menos utilizable en general, ó, como también se dice, esté *degradada*, aun conservando su magnitud. — Además, la energía térmica es muy propensa á la *disipación*; y por esto los físicos consideran la energía térmica como de calidad inferior, según hemos dicho, con respecto á la mecánica, á la eléctrica, ó á la química.

En el caso *ideal* de que la entropía se conservara constante, la parte $(Q_1 - Q_2)$ de una energía térmica Q_1 , que se podría transformar en trabajo mecánico, correspondería al coeficiente de transformación $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, que sería exactamente igual á $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$ según el principio de *Carnot* (*). — Pero en las operaciones de la realidad, la entropía *aumenta*, siempre que hay conducción de calor, porque sus incrementos diferenciales son todos positivos (**).

(*) Se sabe que estas temperaturas han de ser medidas con relación al cero absoluto, es decir, que al número de grados centígrados hay que añadir los 273°; y por esto el aprovechamiento posible de una energía térmica que haya de transformarse en mecánica en una máquina de fuego, es tan pequeño según el principio de Carnot.

(**) En el libro de Ostwald sobre la Energía se da la siguiente demostración:

Si en un cuerpo hay energía térmica á la temperatura T_1 , y en otro la hay á una temperatura inferior T_2 , habrá conducción de calor del 1.º al 2.º, si $T_1 > T_2$, hasta que ambos lleguen, después de cierto tiempo, á la temperatura común $T_m < \frac{T_1 + T_2}{2}$. — En un instante cualquiera t de ese intervalo de tiempo, cuando el primer cuerpo esté á una temperatura T'_1 , y el segundo cuerpo á otra temperatura T'_2 ($T'_1 > T'_2$), se ve que el primer cuerpo *perderá* en el trascurso de tiempo infinitamente pequeño dt , una cantidad de calor dQ , que corresponde á la entropía $dS'_1 = \frac{dQ}{T'_1}$, y el segundo cuerpo *ganará* en ese mismo dt , igual cantidad dQ que corresponderá á la entropía

Aplicando esta conclusión al Universo — en el cual la energía se conserva — se vería un proceso de aumento continuado de la entropía, con *disminución en las diferencias de temperatura*, lo cual al fin conduciría á la famosa conclusión de lord Kelvin.

Contra la clasificación de las diversas formas de energía física por grados ó categorías, y de las transformaciones en naturales y artificiales protesta como filósofo *Le Dantec*, por estimar que carecen de fundamento real; puesto que los agentes físicos operan también á veces las transformaciones inversas, sin la intervención del hombre, es decir, *naturalmente*, como dicen los físicos. Y este modo de hablar es además indebido, á juicio del citado biólogo, porque la intervención del hombre es tan *natural* como la de los agentes físicos (*).

Sea de ello lo que fuere, á las ciencias físicas y naturales corresponde (basándose en las leyes descubiertas) proceder á la investigación de los medios de aumentar más y más la parte del caudal de energía física y fisiológica *aprovechable para los fines humanos*; ó sea, disminuir más y más la energía disipada, no utilizada por el hombre.

Algo análogo podría decirse quizá respecto á las energías psíquicas que conjuntamente con las físicas y fisiológicas, integran—á mi modo de ver—nuestro caudal de *energía*

$dS'_2 = \frac{dQ}{T'_2}$: y siendo $T'_1 > T'_2$, se tendrá $dS'_1 < dS'_2$; y, por consiguiente (para el sistema de los dos cuerpos), habrá *un incremento diferencial de entropía que será positivo*.

Hecha la integración desde el instante inicial hasta el instante en que la temperatura común sea T_m , resulta un *aumento finito de entropía*.

(*) Siendo la energía ó capacidad de trabajo independiente de los medios de que disponga el hombre para utilizarla, observa *Le Dantec* que la degradación de que hablan los físicos no puede referirse á la energía total matemática en un sistema aislado (porque esta no admite disminución) sino á algo que tiene una definición *puramente humana*.

universal.— Se podría, tal vez, decir que no sólo hay disipación de energía en los procesos de transformación de las energías físicas, sino que también la hay en las transformaciones de las fisiológicas entre sí, ó de las psíquicas entre sí; y que hay también disipación en los cambios de energías físicas en fisiológicas ó viceversa, lo mismo que en los de energías fisiológicas en psíquicas ó viceversa.

Pero así como á las ciencias físicas y naturales toca el estudio teórico y práctico concerniente á las energías físicas y fisiológicas disipadas; á la Psicología y á las ciencias sociales debería de corresponder primeramente la distinción— si fuere posible hacerla —entre los trabajos psíquico-sociales *útiles* para el desenvolvimiento racional y harmónico de los individuos ó de las Sociedades, y aquella otra parte de energía que *se disipa*, y es consumida en trabajos inútiles ó tal vez nocivos para los individuos y las agrupaciones sociales. ¿Podrá llegarse á esa distinción que habría de ser fundamental para la Sociología?

Aunque quisiéramos usar el lenguaje de los físicos á que aludíamos antes, no se podría hablar de transformaciones *naturales* de unas energías psíquicas en otras de grado ó calidad inferior, puesto que en todas estas transformaciones aparecería siempre la intervención del hombre, y esto les daría el carácter de *artificiales*, si se hablara aquel lenguaje. Pero todo lo expuesto en estos APUNTES muestra (ya que no demuestre) cuán *naturales* son las transformaciones de energías psíquicas en la vida de los individuos y de los elementos sociales; y parece, por tanto, que no se debe de pensar en semejante clasificación para las transformaciones de las energías psíquicas.

Ya que no hablemos de transformaciones naturales ni artificiales, ni hagamos siquiera referencia á las degradaciones de energías, digamos solamente: que á la humanidad le importa muy mucho la mayor utilización racional que sea posible de las energías, así físicas como fisiológicas y psíquicas.

cas, por el hombre y para el hombre. — Consagrándose las ciencias (todas las ciencias) al descubrimiento de las leyes, y á la investigación de los procedimientos adecuados para alcanzar la mayor utilización posible [disminuyendo para ello más y más la energía disipada, es decir, haciendo que los coeficientes de transformación sean los mayores posibles], contribuirán hasta donde ellas alcancen á la economía de la *Energía Universal*.

XLIII.—Distribución del calor de vaporización.

POR CARLOS BARUTELL Y POWER

Conocido el fenómeno del retardo del punto de ebullición á expensas de la mayor presión y la llamada *economía* de las grandes presiones de las calderas de vapor, conviene puntualizar algunas de las cifras que miden, ó expresan, la repartición del calor invertido en el desarrollo del proceso de la vaporización. De ese modo, se determinan con exactitud su desenvolvimiento, anotándose la influencia numérica que ejerce la presión, poniéndose de relieve el verdadero sentido del llamado calor del líquido ó sensible, bajo la influencia de la dilatación del agua y señalándose, á la vez, el valor de la temperatura en relación con el posterior trabajo de gases y vapores.

Datos son todos ellos que parecen muy conocidos, por referirse á un fenómeno elemental. Sin embargo de esto, tratadistas notables como *Boulvin* y otros, al interpretar matemáticamente el proceso de la vaporización, según las ecuaciones del primer principio ó de *Clausius*, no llevan la interpretación del modo riguroso que conviene al *deslinde de inversión de energías*, unas, transformadas en acumulaciones internas y otras en trabajos exteriores realizados. Esta separación, esta división, en relación con las presiones, es el objeto principal de las presentes líneas.

De punto de partida nos han de servir los datos siguientes que aparecen en casi todos textos de *Física superior*.

Presión. — Atmósferas.	Temperatura de vaporización	Calor del líquido q	Calor de vaporización r	Calor total. $U = q + r$	Peso específico Kg.	Volumen específico m^3
1	100,00	100,50	536,50	637,00	0,605	1,653
5	152,20	153,72	499,20	652,92	2,750	0,364
10	180,40	182,81	478,70	661,41	5 276	0,189

En el calor del líquido se comprende el invertido en el transporte hasta el punto de iniciarse la ebullición tumultuosa. El simple examen del cuadro, basta para observar que el valor de aquel parámetro es poco diferente de las calorías precisas que señala la relación $q = t$, á las temperaturas inferiores; pero esa diferencia se hace ostensible, como ha sido determinada por *Regnault* á medida que la presión crece.

La razón estriba en que en el valor de q se engloba el calor sensible ó de aumento de trabajo íntimo, de incremento de energía intermolecular y el de una positiva dilatación del agua, sobre cuya determinación hemos de insistir. Para medir, ó mejor dicho para tener en cuenta esa dilatación, recurriremos á la fórmula de *Mendeleeff*, llevando el cálculo en la siguiente forma:

En virtud de dicha fórmula, que mide la densidad en función de la temperatura, entre $-10^{\circ} C$ y $200^{\circ} C$ se puede determinar t ; y conocida ésta, el incremento de volumen, ó lo que es lo mismo la dilatación, se puede deducir de

$$t = \frac{P}{V_t} \quad V_t = \frac{P}{t}$$

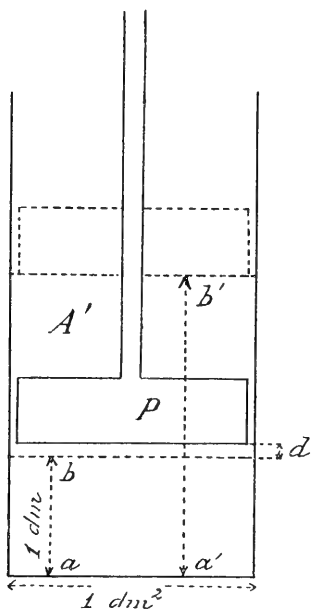
La fórmula es la siguiente:

$$t = 1 - \frac{(t - 4)^2}{A \cdot (B + t)(C - t)}$$

$$\text{en la cual } \left[\begin{array}{l} A = 1,9 \\ B = 94,1 \\ C = 703,5. \end{array} \right. \quad (*)$$

Sustituyendo en ella, en vez de t los diferentes valores 100,0, 152,2, y 180,4° C, aparecen para t las siguientes cifras 0,961; 0,914; 0,897.

Dicho esto, sea un cilindro A con su émbolo correspondiente, cuya área en la base circular sea de 1 dm.², y cuya altura a sea 1 dm.



La capacidad A es de un litro, y llena de agua en las condiciones sabidas, su peso será el kilogramo; vaporizada á presión constante, a b adquiere alturas crecientes, y en el término de la vaporización la altura total $a' b'$ corresponde á la de la capacidad A' , correspondiente al *volumen específico* del kilogramo de vapor seco, cifra que es inversa del peso específico.

Así, si 1 m³ pesa 0,605 kilogramos (**), el kilogramo ocupará 1.652,9 litros, ó sea que $H = a' b' = 1.652,9$ decímetros.

Totalizado el fenómeno, el calor total invertido aparece descompuesto en tres sumandos, y se puede establecer la ecuación siguiente:

(*) Chwolson: *Traite de Physique*.—Tomo III, Fascícula 1.^a

(**) Zenner: *Étude des vapeurs saturées*.

**Calor total de vaporización = Calor sensible.
+ Calor externo. + Calor latente**

Calor sensible es el termométrico, el del líquido, el preciso para el transporte al punto de vaporización que se invierte en incrementos de fuerza repulsiva interior, y, por tanto, por reacción, en incrementos de energías íntimas, y como decimos al principio, en acumulaciones internas.

Calor externo, que se invierte en el trabajo mecánico de dilatación del émbolo.

Calor latente, por completo incorporado á la energía íntima del vapor, al sumando de U de la ecuación de *Clausius*, energía latente para la posterior evolución del trabajo mecánico, y que debe considerarse como análoga por su índole á la fracción que proviene del calor sensible.

Boulvin, al especificar los valores de q , expresa que el calor para comunicar al líquido depende en realidad, como para cualquier otro cuerpo del trabajo, que se efectúe para vencer la presión del exterior; pero del trabajo de dilatación del líquido considera que se puede hacer abstracción y suponer que el calor q se invierte íntegro en aumento del calor interno. Sin embargo, esa dilatación debe ser tenida en cuenta, y aunque imprecisa y variable entre límites diversos, la citada fórmula de *Mendeleeff* permite calcularla con cierta aproximación.

Para sucesivas presiones de 1, 5 y 10 atmósferas, resultarían, como veremos, dilataciones lineales (alturas correspondientes del émbolo) de 0'004, y 0'0094 y 0'0116 m.

Debe, á nuestro juicio, restarse el equivalente calorífico del trabajo de dilatación del líquido, del calor llamado del *líquido*, formándose la fracción *sensible* al termómetro; dada la pequeñez de aquel equivalente, esta fracción es casi igual al primitivo valor designado por q ; por su efecto termométrico la distinguiremos por *sensible* ó *apreciable*, y restado el equivalente de la dilatación que debe sumarse

con el calor *externo* ó de trabajo exterior, resultará el calor total distribuído matemáticamente.

Dicho esto, se puede establecer designando por

}	C_t calor total
	C_s — sensible
	C_e — externo
	C_l — latente

$$C_t = C_s + C_e + C_l$$

cuya variación es la siguiente, y que señala la manera de formular el fenómeno en definitiva.

Vapor á 1 atmósfera. $t = 100^\circ C$.

Trabajo ex- terno	}	$P \times dm^2 \dots = 103,33 \text{ kg.}$	}	$P. H. =$
		Altura final.. = 165,390 m.		
		— inicial. = 0,104		
		<hr style="width: 100%;"/>		
		$H.. = 165,186$		$\leq 40,10 \text{ calorías}$

Dilatación calculada $h_1 = 0,004$

— $P h_1 = 0,4132 \text{ kgm} \leq 0,001$

$P(H + h_1) = 17070,11 \text{ kgm} \leq 40,101 \text{ calorías.}$

Calor del líquido = 100,500

— Equivalente dilatación = 0,001

$C_s = \text{Calor sensible} \dots = 100,499$

Calor total $C_t = 637,000$

Externo — $C_e = 40,101 \dots$	}	— 140,600
Sensible — $C_s = 100,499 \dots$		

Latente $C_l = 596,400$

Vapor á 5 atmósferas. — $t = 152,20$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trabajo exter-} \\ \text{no.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P \times dm^2 = 5 \times 103,3 = 516,6 \quad \text{kg} \\ \text{Altura final.} = 364 \quad \text{dm} \\ \text{— inicial.} = 1,094 \\ \hline H. = 36,2906 \text{ m} \end{array} \left. \begin{array}{l} P. H. = \\ = 18752,58 \text{ kgm} \\ \leq 44,12 \text{ calorías} \end{array} \right\}$$

Dilatación calculada $h_1 = 0,0094$

$$— \quad P h_1 = 4,8551 \text{ kgm} \leq 0,011 \text{ caloría,}$$

$$P(H + h_1) = 18757,43 \text{ kgm} \leq 44,13 \text{ calorías.}$$

$$\text{Calor del líquido.} — 153,73$$

$$— \text{Equivalente dilatación} — 0,011$$

$$C_s. = 153,719$$

$$\text{Calor total.} C_t = 652,92$$

$$\text{Externo.} C_e = 44,13 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} — 197,84$$

$$\text{Sensible.} C_s = 153,71 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\text{Latente.} C_l = 455,08$$

Vapor á 10 atmósferas. — $t = 180^{\circ}40$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trabajo exter-} \\ \text{no.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P \times dm^2 \dots = 1033,3 \quad \text{kg.} \\ \text{Altura final.} = 189,30 \quad \text{dm.} \\ \text{— inieial} = 1,11 \\ \hline H.. = 18,819 \text{ m.} \end{array} \left. \begin{array}{l} P. H. = 19529,17 \text{ kgm} \\ \leq 45,95 \text{ calorías.} \end{array} \right\}$$

Dilatación calculada $h_1 = 0,0116$

$$— \quad P_1 h_1 = 11,9 \quad \text{kgm} \leq 0,028 \text{ calorías.}$$

$$P(H + h_1) = 19541,07 \leq 45,97 \text{ calorías.}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Calor del líquido} \dots\dots - 152,81 \\
 - \text{Equivalente dilatación} - 0,028 \} C_s = 182,78 \\
 \text{Calor total} \dots\dots C_t = 661,40 \\
 \text{Externo} \dots\dots C_e = 45,97 \\
 \text{Sensible} \dots\dots C_s = 182,78 \} - 228,75 \\
 \text{Latente} \dots\dots C_l = \quad \quad \quad 432,65
 \end{array}$$

valores que reunimos en el cuadro adjunto:

PRESIÓN	Temperatura 0° C.	Calor sensible.	Calor externo.	Calor latente.	Calor total.	Dilatación por litro.
1 atmósfera...	100,00	100,499	40,101	496,400	634,000	0,004
5 —	152,20	153,710	44,130	455,080	652,920	0,0094
10 —	180,40	182,780	45,970	436,650	661,400	0,0116

Zeuner expone para el valor del calor latente, la fórmula

$$\rho = 575,40 - 0,791 (*).$$

Comparados los resultados con los obtenidos anteriormente, resultan las siguientes diferencias en favor del incremento de ρ , como en realidad ocurre

ρ calorías.

t	ρ (<i>Zeuner</i>).	Diferencia.
100,00	496,30	+ 0,10
152,20	455,01	+ 0,07
180,40	432,40	+ 0,25

(*) *Boulvin*. Cours de mecanique applique aux machines. T 3

Por otra parte, la ecuación que interpreta analíticamente la vaporización como cambio de estado es la siguiente:

$$A = u + A \cdot p V_1$$

en la que

$$\begin{cases} U = U_t - U_o \\ V_1 = V_t - V_o \end{cases}$$

correspondiendo los valores de los subíndices t y o á las temperaturas respectivas t de vaporización y $0^\circ C$ de origen. U y v designan los calores internos (suma de los que distinguimos como sensible y latente), y específicos del vapor y del líquido inicial. Es decir,

que $\begin{cases} V_t, & \text{volumen específico del kg de vapor á } t^\circ. \\ V_o, & \text{— — — del líquido generador á } 0^\circ C. \end{cases}$

Zeuner establece como datos de cálculo los valores siguientes de U ; obtiene directamente 1, y $A p v$, y deduce, por sustracción, los de U (*).

t'	V_1	$A p V_1$
100	1,650	40,20
150	0,384	44,08
180	0,190	46,01

Con arreglo á los datos obtenidos que citamos antes, y englobando los dos sumandos sensible y latente, como *calor interno*, ó sea como absorbido en efectos de energía íntima,

(*) A. Witz. Thermo dynamique á l'usage des ingénieurs.

se obtiene la descomposición de calores internos y externos, del calor total.

$$U_1 = 637,00 - 40,10 = 596,89$$

$$U_5 = 652,92 - 44,13 = 608,71$$

$$U_{10} = 661,40 - 45,97 = 615,42$$

La presión influye retardando el paso del líquido á vapor, es decir, que eleva el punto de saturación. En efecto; la vaporización es continua, á partir del comienzo de la aplicación del calor; el aire contenido en el espacio libre del vaso ó de la caldera, se carga de vapor; llega un momento en que su tensión es igual á la de la molécula líquida en contacto con la llama, y en ese momento comienza la ebullición tumultuosa.

La presión, por tanto, ya que no comunique mayor capacidad al líquido generador (inadmisibile por su incompresibilidad), sin embargo, su efecto es análogo á una especie de resistencia al cambio de estado, á una impermeabilidad al paso del calor.

Pero una vez iniciado el cambio, la influencia de la presión se hace menos patente en la diferencia que expresa los calores latentes; pues esa diferencia, que á los 100° es 496 calorías almacenadas, á 180° que es temperatura $\frac{4}{5}$ superior, con presión diez veces mayor, sólo se eleva á 432'79, acusándose, por consiguiente (en calor almacenado), un notorio descenso. Parece, por tanto, como si el kilogramo de vapor tuviese menos energía, menos capacidad para el trabajo posterior, menos forma latente. A pesar de ello, ese vapor es ventajoso, porque tiene más presión inicial, y puede llevarse más lejos su expansión, ó llevarse, mejor dicho, entre límites mayores.

El trabajo producido en una expansión adiabática, se demuestra, que para los gases permanentes, es función de su

temperatura que varía directamente con la presión, $T = \frac{p \cdot v}{R}$.

Dicho trabajo se formula del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{R \cdot T}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] = \frac{R \cdot T}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{\frac{0,41}{1,41}} \right] = \\ &= \frac{R \cdot T}{\gamma - 1} \left[1 - \sqrt[141]{\left(\frac{p}{p_o} \right)^{41}} \right] \end{aligned}$$

en la cual, p_o es el dato inicial.

Como $\frac{p}{p_o} < 1$, el valor de τ tiende hacia el del primer factor, ya que el sustraendo se aproxima á cero

$$\gamma = 1 + \frac{A \cdot R}{C_v}, \quad R = \frac{\gamma - 1}{A} \cdot C_v$$

y por tanto,

$$\tau = \frac{1}{A} \cdot C_v \cdot T$$

en la que se pone más de relieve la influencia de $T = 273 + t$.

La función designada por «entropía» aclara todavía la cuestión. Todos los caballos de fuerza son susceptibles de análoga distribución; pero calorías tomadas á $20^\circ C$, por ejemplo, son distintas de otras tomadas á 200° , pues en pocos gramos de agua dotada de esta energía se hierven ó disuelven cuerpos que con toneladas del mismo agente, dotadas de aquella energía, ni se hierven ni se disuelven. El verdadero valor cinético de una caloría depende de la temperatura, y esa relación $\int \frac{da}{T}$, es la que se llama entropía del

sistema, integrada entre los límites de temperatura de la evolución del ciclo realizado. Una entropía grande equivale á una caloría poco energética; la entropía mínima equivale á la máxima. En el cero absoluto, la entropía infinita correspondería á una caloría de imperceptible efecto.

La fórmula que mide la entropía de una mezcla de vapor y líquido es

$$E = E_o + C_p \frac{\text{Log } T}{\text{Log } T_o} + \frac{r x}{T}$$

en la cual T_o es la temperatura del líquido generador y T la de vaporización; para el kilogramo convertido en vapor, $x = 1$ y el tercer sumando se convierte en $\frac{r}{T}$. A medida que T se eleva, el segundo término permanece casi constante, y en cambio, r disminuye, y el denominador, al aumentar, hace cada vez menor el valor de E .

La fórmula del trabajo adiabático de los vapores es la aplicable en la generalidad de los casos, y también denota la influencia de la temperatura en la vaporización, si bien exige detenerse en el examen de sus términos.

El trabajo realizado es la diferencia de calores internos, anteriores y posteriores á la evolución, y por tanto,

$$\tau = J(U - U') = J [C_p(T - T') + (r - Apv_1)x - (r' - Ap'v_1')x']$$

Aplicada la fórmula que se cita para las caídas térmicas, (5 — 1) y (10 — 1) atmósferas se observa para T_1 y T_2 , una diferencia grande en los primeros sumandos

$$C_p(180,40 - 100,00) \quad \text{y} \quad C_p(152,20 - 100,00);$$

los sustraendos de las diferencias, segundos términos, pueden considerarse iguales, llevada la expansión al mismo límite. En las diferencias aparece alguna duda, $r - A p v$ es la diferencia entre el llamado calor de vaporización y el equivalente al trabajo de dilatación volumétrica, diferencia que nosotros hemos designado por calor latente; para $150^{\circ}C$, vemos que $r - A p v = 455,02$, y para $172^{\circ}C$, $432,65$.

Aparentemente, el minuendo es menor; pero hay que tener en cuenta que aquellos valores vienen multiplicados por x , por el título; y como á mayor temperatura el vapor es más seco (recalentado), si en un caso $x = 0,7$, en otro $x = 0,8$ ó $0,9$; suponiendo $x = 0,7$ y $x' = 0,8$, los términos toman los valores $318,55$ y $346,12$, este último para $t = 150^{\circ}$, lo que también demuestra la diferencia favorable de los minuendos, y por consiguiente, la influencia definida de t , y por tanto, de T .

Como resumen de todo lo expuesto, se puede establecer:

1.º El calor *total* de vaporización se puede considerar distribuído en tres efectos, en tres sumandos, cuya nomenclatura puede ser respectivamente *sensible*, *latente* y *externo*.

2.º Que al hacer la distribución de valores, hay que restar del termométrico el equivalente á la dilatación del líquido, formándose así el *sensible* y, por adición, el *externo*.

3.º Que el calor total se puede descomponer en dos sumandos solamente, englobando el *sensible* y el *latente*, como de análogo efecto, en calor *interno*, quedando como otro término de descomposición el *externo*.

4.º Que no hay relación directa entre las cifras correspondientes de la presión, de la temperatura y de la distribución de calores; es decir, que á una presión diez veces mayor no corresponde una temperatura diez veces superior, como tampoco corresponde un calor total diez veces superior, siendo esta desproporción tan grande el fundamento de la llamada economía de las grandes presiones.

5.º Que la presión actúa como si retardase el tránsito ó

cambio de estado; pero, iniciado este de una vez, la presión influye en que la atracción de energía de forma íntima sea menor en relación que la necesaria para el cambio.

6.º Que, en definitiva, la presión es el medio para elevar la temperatura, y esa elevación es la útil para la disminución de la *entropía* del sistema, que forma la mezcla de agua y vapor, que se designa como vapor saturado.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
XL.— Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia duodécima...	865
XLI.— Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimatercia...	889
XLII.— Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo</i> y <i>Barceló</i> (conclusión).....	925
XLIII.— Distribución del calor de vaporización, por <i>Carlos Barutell</i> y <i>Power</i>	946

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO X.—NÚM. 12.

Junio de 1912.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 3.

1912

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XLIV.— Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia decimacuarta.

SEÑORES:

Estudiando en la conferencia precedente el célebre problema de Dirichlet, tanto para el espacio interior á una superficie cerrada S , como para el espacio exterior, llegábamos á esta fórmula

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma: \quad [1]$$

que para fijar las ideas supondremos, que se aplica al espacio ó volumen encerrado en la superficie S .

Por lo demás, y dicho sea entre paréntesis, basta con estudiar uno de estos dos problemas, el interior, por ejemplo; porque como veremos más adelante, si hay tiempo, un problema se reduce á otro por la transformación de Thomson.

La fórmula que hemos copiado, expresa en el primer miembro la armónica que se busca, y el segundo miembro indica operaciones perfectamente definidas, sobre expresiones perfectamente determinadas; como que son los datos del problema los valores que en ellas entran, á saber: Los valores que toma U en todos los puntos de la superficie S ;

los valores que toma $\frac{dU}{dn}$ para estos mismos puntos; la expresión r , que es

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

$d\sigma$, que es un elemento de área de la superficie S , y sabemos, por último, que la diferenciación de U con relación á n debe efectuarse para las normales á la superficie dada S .

Claro es, por lo demás, que todos los elementos se refieren única y exclusivamente á dicha superficie S . Por ejemplo, r nunca será nula, porque es la distancia del punto (a, b, c) al punto x, y, z de la superficie.

F viene, pues, expresada en función de los datos U y $\frac{dU}{dn}$ y de operaciones definidas del análisis.

Sólo que debemos recordar á nuestros alumnos, que los datos son más de los necesarios para definir F ; por eso *no son arbitrarios*, no es uno de ellos independiente del otro. Se supone que por un procedimiento cualquiera se ha podido obtener $\frac{dU}{dn}$. Es como si en varias ecuaciones con varias incógnitas nos dieran desde luego el valor de una de ellas: el problema se simplificaría.

Pero debemos hacer aquí una observación relativa á la esencia del problema, por decirlo así, y á la fórmula que lo define en este caso particular.

Porque decimos, y creemos estar en lo cierto, que en rigor ésta no es una fórmula particular, sino una fórmula general, que define $U(a, b, c)$, siendo a, c, b , las coordenadas de un punto cualquiera del volumen, en función de los datos suficientes, pero no excesivos, que son: la superficie y el valor de U para diferentes puntos de la misma.

Y en efecto, consideremos el problema en general; no el

caso particular que hemos examinado hasta aquí. Supongamos que no se conoce más que $U(x, y, z)$ para la superficie y la ecuación de ésta. Yo digo que $U(a, b, c)$, está perfectamente determinada, sin necesidad de conocer $\frac{dU}{dn}$.

O si se quiere estaría perfectamente determinada, si el análisis estuviera bastante adelantado, para despejar U de la ecuación [1].

¿Qué importa que no se conozca $\frac{dU}{dn}$ si se expresa en función de U ?

Claro es que la ecuación [1] no es de las que el matemático está acostumbrado á resolver.

No es una ecuación ordinaria en que la incógnita es U .

No es tampoco una ecuación que contiene U y sus derivadas. Pero es una ecuación que contiene la función desconocida U y una derivada especial de U con relación á n dentro de una integral doble.

Esto complica enormemente el problema, pero no cambia la índole del problema.

Si fuera cosa corriente en el análisis la resolución de estas ecuaciones, que también pudiéramos llamar funciones integrales, la función [1] resolvería el problema general de Dirichlet, y no se diría que resuelve el caso particular en que además de conocer U para la superficie, se conoce $\frac{dU}{dn}$, para

la misma superficie.

Ni hace falta esto último, pues el problema estaría determinado con lo primero en un análisis perfecto de esta clase de problemas matemáticos.

No sé si se habrá comprendido mi pensamiento, y mediante algunos ejemplos, voy á aclararlo aún más.

1.º Supongamos que se quiere determinar una función $U(x, y)$ que satisfaga á esta ecuación, escogida á capricho y de lo más elemental que puede presentarse:

$$U(x, y) \cdot x^2 - U(x, y) x y - (x^2 + y^2) = 0.$$

Aquí el problema no ofrece dificultad, ni aun para el principiante más inexperto.

Se tiene evidentemente

$$U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - x y}.$$

Esta es la función U de x, y que buscábamos: sustituida en la ecuación, la convierte en una identidad. Es decir, la satisface para todos los valores de x, y . Así resulta:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - x y} \cdot x - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - x y} x y - (x^2 + y^2) = 0$$

ó bien

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - x y} (x - x y) - (x^2 + y^2) = 0$$

que es la identidad

$$x^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 0.$$

No ha habido dificultad para determinar U , porque la ecuación que había que resolver era de primer grado.

2.º Supongamos que se busca una función $U(x, y)$ que satisfaga á la ecuación diferencial

$$\frac{dU}{dx} x^2 - \frac{dU}{dy} y^2 + U(x, y)(x^3 + y^3) - 3(x^4 + y^4) - (x^6 - y^6) = 0.$$

El problema ya es más difícil que el anterior; pero tampoco es muy difícil, porque se sabe integrar esta clase de ecuaciones, sin necesidad de que, por procedimientos particulares, conozcamos de antemano las derivadas

$$\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}.$$

Claro es que si se conociesen, esto simplificaría el problema, porque lo reduciría á nuestro primer ejemplo. Convertiría la ecuación diferencial en una ecuación de primer grado de U , pues los dos primeros términos se reducirían á una función de x , y , conocida, y no habría más que despejar U .

Pero el problema puede resolverse en toda su generalidad, y encontraremos fácilmente que la solución es

$$U(x, y) = x^3 - y^3.$$

3.º Supongamos este tercer problema, que se va aproximando á la familia de problemas á que pertenece el de Dirichlet.

Determinar una función $U(x, y)$ que satisfaga, es decir, que convierta en una identidad á la siguiente ecuación:

$$U(x, y)x^2 - U(x, y)y^2 + U(x, b)y - b^2y^2 = 0.$$

¿Esta ecuación es una de las ecuaciones ordinarias del Álgebra? No.

Porque entra, no sólo $U(x, y)$, sino el valor que toma esta función U cuando en ella se pone en vez de y la cantidad b .

No basta, pues, despejar $U(x, y)$, porque vendría en función de $U(x, b)$.

Qué es algo de lo que sucede en el problema de Dirichlet.

La armónica del volumen no entra en la ecuación [1], sino que entran los valores de esa armónica para puntos de la superficie.

Con más, la complicación de contener derivadas bajo el signo *integral*.

Claro es que el problema que hemos presentado es tan elemental, que se resuelve desde luego.

En efecto, si conociésemos $U(x, y)$, sustituyendo su valor en la ecuación, debería convertirla en una identidad. Es decir, con independencia de los valores de x, y .

Luego en la ecuación dada podemos sustituir sin que deje de verificarse $y = b$, y tendremos

$$U(x, b) x^2 - U(x, b) b^2 + U(x, b) b - b^4 = 0$$

donde, por decirlo así, sólo aparece una incógnita $U(x, b)$.

Despejándola, obtendremos esta función de x , que en la ecuación primitiva era desconocida, porque no conocíamos la forma de U .

Hallaremos, pues,

$$U(x, b) = \frac{b^4}{x^2 - b^2 + b}$$

y sustituyéndola en la ecuación general, se convertirá ésta en

$$U(x, y) x^2 - U(x, y) y^2 + \frac{b^4}{x^2 - b^2 + b} y - b^2 y^2 = 0$$

que sólo contiene la función que buscamos $U(x, y)$.

Hallaremos, pues,

$$U(x, y) = - \frac{b^4 y}{(x^2 - b^2 + b)(x^2 - y^2)} + \frac{b^2 y^2}{x^2 - y^2}$$

con lo cual queda resuelto el problema.

Y como los problemas, por sencillos que sean, conviene apurarlos hasta lo último, haremos la comprobación definitiva, sustituyendo el valor de $U(x, y)$ en la ecuación propuesta, lo cual dará,

$$\left(\frac{-b^4 y}{(x^2 - b^2 + b)(x^2 - y^2)} + \frac{b^2 y^2}{x^2 - y^2} \right) (x^2 - y^2) + \left(\frac{-b^5}{(x^2 - b^2 + b)(x^2 - b^2)} + \frac{b^4}{x^2 - b^2} \right) y - b^2 y^2 = 0,$$

ó bien

$$\left(\frac{-b^4 y}{x^2 - b^2 + b} + b^2 y^2 \right) + \left(\frac{-b^5}{x^2 - b^2 + b} + b^4 \right) \frac{y}{x^2 - b^2} - b^2 y^2 = 0:$$

y reduciendo

$$\frac{-b^4 y}{x^2 - b^2 + b} + \frac{x^2 b^4 - b^6 + b^5 - b^5}{x^2 - b^2 + b} \cdot \frac{y}{x^2 - b^2} = 0$$

que por fin se convierte en la identidad

$$-\frac{b^5 y}{x^2 - b^2 + b} + \frac{b^4 y}{x^2 - b^2 + b} = 0.$$

Por elemental, por trivial, pudiéramos decir, y hemos dicho, que sea este ejemplo y por elevada y difícil que sea la resolución completa del problema de Dirichlet, persistimos en afirmar que son de familias análogas; cuando no de la misma familia.

* * *

Continuemos señalando propiedades de las armónicas que nos han de servir más adelante, cuando estudiemos, por ejemplo, la electrostática.

Una propiedad muy sencilla y pudiéramos agregar muy curiosa, es la que sigue:

Supongamos que $U(x, y, z)$ representa una armónica de las que venimos estudiando. Es decir, una solución de la ecuación de Laplace, uniforme, continua, finita en el espacio finito, con primeras y segundas derivadas, y anulándose en el infinito.

Hemos visto que en este caso la fórmula de Green, aplicada á las armónicas, por reducirse á 0 el primer miembro, en razón á que $\Delta = 0$, da para el flujo en una superficie cerrada

$$\iint_S \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

Pues supongamos en el campo de la armónica una esfera s (fig. 44) trazada desde un punto cualquiera A , con cualquier radio, y cuyo centro sea el punto (a, b, c) , y apliquemos á esta esfera la fórmula

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{du} - U \frac{d\frac{1}{r}}{du} \right) d\sigma.$$

Más claro: expresemos el valor de la armónica en el interior de la esfera eligiendo su centro como punto para el cual queremos hallar el valor de la armónica en función de la integral doble, que se refiere á su superficie, y que contiene U y $\frac{dU}{dn}$.

De las dos integrales dobles en que se puede descomponer el segundo miembro, la primera es

$$\iint_S \frac{1}{r} \frac{dU}{du} d\sigma$$

y como r es el radio de la esfera, y es constante, podemos sacarlo fuera de la integral, y resultará

$$\frac{1}{r} \iint \frac{dU}{du} d\sigma,$$

que es el flujo á través de la esfera, flujo que como acaba-

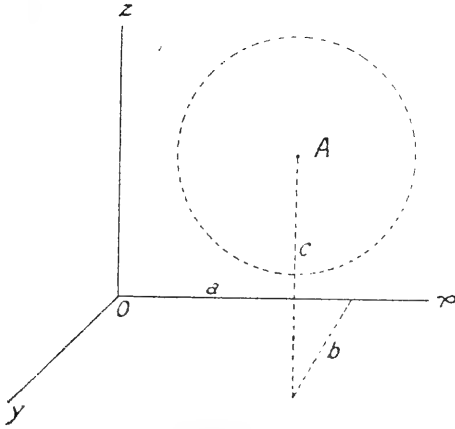


Figura 44.

mos de ver es nulo. Luego el valor de la armónica para el centro de la esfera se reducirá á

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S -U \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

Como es el problema interior de Dirichlet, las normales se cuentan hacia lo exterior, y como la dirección de r coincide con la dirección de n , y r crece con n , resulta $dr = dn$.

Y tendremos

$$\frac{-d \frac{1}{r}}{dn} = -\frac{d \frac{1}{r}}{dr} = \frac{1}{r^2}$$

luego

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int \int_s \frac{U}{r^2} d\sigma,$$

ó bien

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi r^2} \int \int_s U d\sigma,$$

que puede escribirse con más claridad para nuestro caso:

$$U(a, b, c) = \frac{\iint_s U d\sigma}{4\pi r^2}.$$

Pero el numerador significa, que en cada punto de la superficie de la esfera s hay que multiplicar el valor que le corresponde de U por su área y hay que sumar todas estas cantidades positivas. Después la suma hay que dividirla por el área total de la esfera; y esto es hallar *el valor medio de la armónica sobre la misma esfera*. De modo que la ecuación nos dice, que este valor medio sobre la esfera arbitraria que hemos trazado es el valor de la función armónica $U(a, b, c)$ en el centro de la esfera.

Como el punto A es arbitrario y es arbitraria la esfera, tenemos esta proposición, que es general, que puede ser útil, y que de todas maneras es curiosa. El valor medio de una armónica sobre una esfera arbitraria trazada en su campo es igual al valor de dicha armónica en el centro de la esfera.

Y nótese una vez más, que vamos obteniendo una serie de propiedades importantes de las armónicas, ó sea de ciertas integrales de la ecuación de Laplace, *sin necesidad de haberla integrado*.

Verdad es que nos fundamos en el conocimiento de una integral particular $\frac{1}{r}$, al menos para la demostración de ciertas propiedades.

Pasemos ahora á la exposición de un teorema, que al pronto parece pura abstracción matemática, sin utilidad práctica, y que, sin embargo, es de importancia capital en las aplicaciones de esta teoría de las armónicas y de las potenciales á la electrostática, como veremos, á ser posible, en el curso próximo.

*
* * *

No vamos á hablar ahora de armónicas en general, sino de potenciales, que son también armónicas, puesto que hemos demostrado que satisfacen á la ecuación de Laplace.

Porque hemos llamado en general funciones armónicas á las que satisfacen á la ecuación

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \quad \text{ó bien} \quad \Delta U = 0.$$

De modo que son para nosotros funciones armónicas todas las integrales particulares, ó más ó menos generales, de la ecuación de Laplace.

Entre éstas, hemos escogido para nuestro estudio únicamente las que son *funciones uniformes*; pues ya sabemos que hay soluciones para dicha ecuación, que *no son uniformes*, y hasta citamos un ejemplo de estas últimas.

Todavía hemos circunscripto más el campo de nuestra atención, toda vez que las armónicas que hemos considerado han de tener derivadas primeras y segundas bien definidas.

Y por último, en este teorema que vamos á explicar, entre todas las armónicas escogemos las *potenciales*, sin juzgar ahora la cuestión de si todas las armónicas son potenciales, lo cual anticipamos que evidentemente no es cierto; y aun admitimos, que las potenciales propiamente dichas,

no son más que una subclase de las armónicas que antes considerábamos.

Es punto sobre el cual algo indicaremos más adelante.

Por el pronto, el teorema de que vamos á tratar, sólo hace referencia á las potenciales.

Consideremos diversas masas ponderables A, B, C (figura 45).

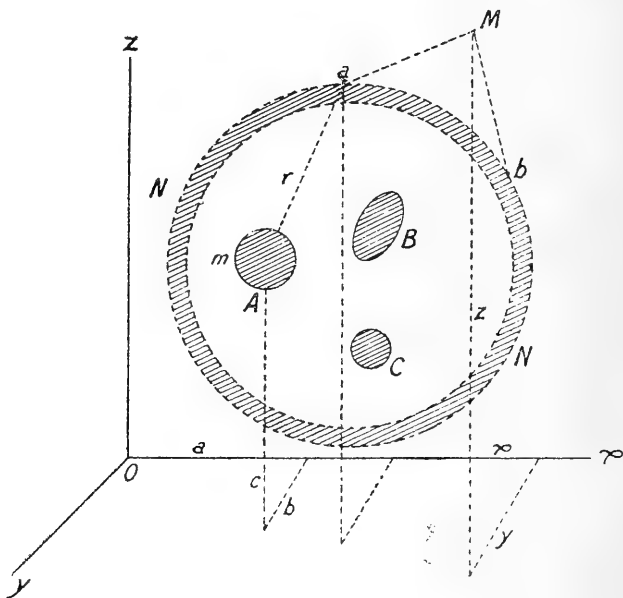


Figura 45.

Estas masas tendrán en todo el espacio exterior á las mismas una potencial U , perfectamente determinada. Es decir, que para cualquier punto a del espacio, U tendrá un valor determinado también y *un valor único*.

Claro es, y lo recordarán mis alumnos, que el valor de la potencial se obtiene dividiendo la masa de cada elemento de A, B, C, \dots por la distancia al punto a , si es el escogido, y sumando ó integrando cantidades análogas para todas las masas continuas ó discontinuas.

Por ejemplo: si $d m$ es la masa del punto que escogemos en A , el valor de la potencial en a será $\frac{d m}{r}$.

Y para todas las masas elementales, que en general llamaremos m , la suma de expresiones análogas extendida á todos los cuerpos A, B, C , podremos expresarla abreviadamente de este modo:

$$U = \sum_A \frac{m}{r} + \sum_B \frac{m}{r} + \sum_C \frac{m}{r} + \dots$$

en que los subíndices indican que hay que extender la suma al cuerpo A , al cuerpo B , y así sucesivamente; y por lo demás, si son masas continuas, la suma de cantidades discretas se convertirá en integral y la m en $d m$.

Efectuada esta suma, el segundo miembro será una función de x, y, z , que son las coordenadas del punto a , y de las constantes que determinen el sistema A, B, C ...

En resumen, la potencial será, como sabemos, $U(x y z)$. Es decir, una función de las coordenadas x, y, z . Así lo hemos explicado muchas veces: sea ésta una más.

Y es evidente, porque en las sumas no entran más que las masas que son datos, las coordenadas de estas masas m , que son a, b, c ..., que son datos también, y las distancias r que dependen de dichos datos y de las coordenadas del punto a , á saber: x, y, z .

Casi es inútil recordar, que esta expresión analítica de la potencial, para tener significación física en el punto a , para el cual se quiere determinar su valor, exige que se coloque en a una masa igual á la unidad y de dimensiones infinitamente pequeñas.

Todo esto lo hemos explicado minuciosamente en otras conferencias; pero nunca está demás refrescar las ideas.

Hemos dicho que U es una función de x, y, z . Y puede suponerse que x, y, z , á partir del punto a , varían de modo que la potencial se conserva constante. Es decir, que las coordenadas variables x, y, z , satisfacen á la ecuación

$$U(x, y, z) = C,$$

siendo C una constante determinada, que expresará el valor de la potencial en a , punto de partida.

Es claro que la expresión anterior de tres variables representará una superficie que hemos figurado en NN .

Esta superficie se llama superficie *equipotencial*, ó sea de *igual potencial* en todos sus puntos; ó también se llama *superficie de nivel*.

Claro es que por cada punto del espacio pasa una de estas superficies de nivel, que corresponderá á un valor distinto de la constante C .

Basta para definir cada superficie de nivel, ó dar el valor de la constante C , ó dar un punto por el cual la superficie ha de pasar, en cuyo caso el valor de la constante queda inmediatamente determinado.

Si ha de pasar por el punto (x_1, y_1, z_1) , estas coordenadas han de satisfacer á la potencial, y tendremos

$$U(x_1, y_1, z_1) = C,$$

ecuación que determina C , porque la forma analítica de U es perfectamente conocida en x, y, z ; es la que resulta de la suma de las $\frac{m}{r}$; y, además, las coordenadas (x_1, y_1, z_1) son otro dato; de modo que tendremos un valor determinado para C : por ejemplo, C_1 , y la potencial que pase por dicho punto tendrá por ecuación, que no se podrá confundir con ninguna otra,

$$U(x, y, z) = C_1.$$

Y ya no nos queda más que una observación que hacer para que se comprenda perfectamente el enunciado del teorema, que vamos á explicar.

El número de superficies de nivel es infinito; se extiende por la ley de continuidad desde el espacio finito al infinito, y si las masas ponderables atrayentes A, B, C , existen sólo en el espacio finito, es claro y se pone en evidencia sin dificultad, que podemos determinar una superficie de nivel NN que comprenda en su interior dichas masas atrayentes A, B, C

Si así no fuera, si NN no abarcara todas las masas A, B, C ..., no habría más que *ir más lejos*, y perdonesenos esta manera de expresarnos, y al fin encontraríamos una superficie de nivel que cumpliera con la condición establecida.

Y comprendido esto, el teorema se enuncia sin dificultad.

Siempre puede extenderse sobre la superficie de nivel elegida NN , una capa de materia ponderable ficticia é infinitamente estrecha tal, que para cualquier punto M exterior á ella, su potencial en dicho punto sea exactamente igual á la potencial de las masas interiores A, B, C

Y que su atracción en un punto interior sea nula.

Hasta ahora no hemos dicho cuál es la ley de distribución de materia sobre la superficie de nivel elegida NN : este es el problema.

Recordemos que la potencial es una función que simplifica el cálculo de las atracciones, porque goza de esta propiedad: que para cada punto, las componentes de la atracción que un sistema ponderable ejerce sobre dicho punto, se obtienen tomando las derivadas de la potencial del sistema con relación á x, y, z .

De suerte que el sistema tiene una potencial U , y las componentes de su atracción en un punto (x, y, z) , ó mejor dicho, en una masa igual á la unidad colocada en dicho pun-

to, demostramos al principio de estas conferencias, que estaban representadas por

$$X = f \frac{dU(x, y, z)}{dx}, \quad Y = f \frac{dU(x, y, z)}{dy}, \quad Z = f \frac{dU(x, y, z)}{dz}.$$

Así, decíamos al comenzar este curso, el problema de las atracciones se simplifica: en vez de determinar tres integrales basta determinar una sola, que es la potencial U .

Una vez obtenida, para determinar las componentes de la atracción, basta diferenciar la potencial con relación á x , á y , y á z .

De aquí se deduce que si dos sistemas de materia ponderable tienen la misma potencial, salvo una constante, para cada punto de una región determinada, en esa región la atracción que ejercen ambos sistemas para estos puntos será la misma; porque siendo la misma U , idénticas serán sus derivadas.

Materialicemos esta idea.

Si dos sistemas A y B (fig. 46) són tales que en una región ó dominio D tienen la misma potencial, la atracción en todo punto a de este dominio será la misma para el sistema A que para el sistema B .

Siendo U única, únicas son sus derivadas: lo repetimos una vez más.

Esta fig. 46, que para masas ponderables es un imposible, y que no es más que una forma esquemática para fijar las ideas, se convierte en una realidad para la fig. 45, á la cual volvemos ahora.

El problema, pues, consiste en aplicar sobre la superficie NN una capa de materia ponderable, de densidad tal en sus diferentes puntos, densidad que designaremos por μ , que ejerza sobre un punto cualquiera M , exterior á la superficie, una atracción igual á la que ejercen las masas dadas A, B, C . De otro modo: que suprimiendo estas masas y dejando la

capa NN , las atracciones en todos los puntos del espacio exterior á S no se alteran.

Tanto dan las masas A , B , C , como la capa NN .

Y el problema ó el teorema consiste.

1.º En demostrar que esto es posible.

2.º En determinar la masa desconocida de densidad μ , de modo que se verifique dicha condición.

De lo expuesto anteriormante resulta, que tanto da decir

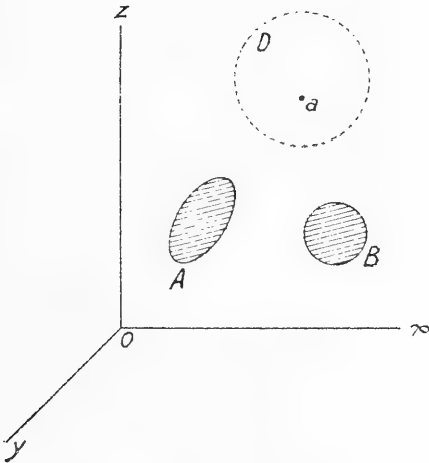


Figura 46.

que la capa ficticia, cuya densidad en cada punto hemos designado por μ , ha de ejercer una atracción sobre un punto cualquiera M del exterior de la superficie igual á la que ejercen las masas A , B , C ,....., que decir que ambos sistemas han de tener para cada punto exterior á S la misma potencial.

Y claro es que este último modo de plantear el problema es mucho más fácil.

Deberemos, pues, buscar una capa NN de densidad μ (variable ó constante, no sabemos todavía) que tenga en

cualquier punto M la misma potencial $U(x, y, z)$ que las masas A, B, C .

Expresemos, pues, la potencia, de la capa NN y la potencial de las masas A, B, C é igualémoslas.

La potencial de las masas A, B, C la hemos designado por $U(x, y, z)$; pero podemos expresarla en función de datos que se refieran á una superficie cerrada cualquiera S .

Hemos visto, en efecto, al resolver el problema de Dirichlet para el caso particular en que se conocen U y $\frac{dU}{dn}$ en todos los puntos de una superficie, que en lo exterior de la misma se puede expresar U de este modo:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S^{(i)} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

y se pone el índice (i) para indicar, que en las derivaciones hay que considerar la normal hacia el interior de la superficie S .

Si para comodidad del cálculo y para comparar esta potencial con la de la capa, tomamos las derivaciones respecto á n hacia lo exterior, no habrá más que cambiar el signo á la integral, porque bajo la integral existe la suma de dos términos, y en cada uno de ellos hay como factor una derivada, la de U y la de $\frac{1}{r}$, ambas con relación á n .

Sustituyendo en el índice superior, para mayor claridad, al símbolo (i) el símbolo (e) , que expresa que las normales han de tomarse hacia lo exterior, resulta que la potencial de las masas dadas A, B, C para todo punto M exterior á la superficie S , y prescindamos de lo que suceda dentro, podrá escribirse, con absoluto rigor, de este modo:

$$U(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \iint_S^{(e)} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma,$$

ó descomponiendo en dos integrales dobles

$$U(x, y, z) = - \frac{1}{4 \pi} \int \int_S^{(e)} \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma + \frac{1}{4 \pi} \int \int_S^{(e)} U \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma.$$

Pero la segunda integral doble es evidentemente nula; porque observemos, que la superficie S no es una superficie arbitraria, sino una superficie equipotencial ó de nivel, de suerte que para todos sus puntos U tiene el mismo valor, y siendo constante, podemos sacarla fuera de la integral y resultará

$$\frac{1}{4 \pi} \int \int_S^{(e)} U \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = \frac{1}{4 \pi} U \int \int_S^{(e)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma.$$

Pero la integral doble

$$\int \int_S^{(e)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

es evidentemente nula, como lo hemos demostrado; porque después de todo $\frac{1}{r}$ es una armónica, y dicha integral expresa el flujo armónico á través de una superficie cerrada, y hemos dicho muchas veces que este flujo es nulo.

Y si se quiere, aun se puede precisar más este concepto.

r representa la distancia de M á cualquier punto b de la superficie S ; luego $\frac{1}{r}$ representará la potencial de M sobre b , y la integral doble el flujo de la fuerza del punto M , de masa 1, sobre todos los puntos de la capa NN , que cuando la superficie es cerrada es un flujo nulo, suponiendo por de contado para hacer aplicación del teorema, que la densidad superficial de la capa fuese la unidad.

En suma, la integral precedente es nula y la potencial U de las masas a, b, c en puntos exteriores á la superficie S , se simplifica y queda reducida al primer término de la fórmula anterior,

$$U(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \int \int_S^{(e)} \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

Veamos ahora cuál es la potencial de la capa NN en el punto exterior M .

Se obtiene por la fórmula elemental que hemos empleado tantas veces.

Si por ejemplo se toma el punto a , y la densidad en este punto es μ , que todavía desconocemos, y la superficie elemental que corresponde al punto a es $d\sigma$, su masa será $\mu d\sigma$ y su potencial en el punto M será á su vez $\frac{\mu d\sigma}{r}$ siendo r la distancia aM .

Para obtener la potencial sobre M de toda la capa no habrá más que integrar en toda la extensión de la superficie S , y si llamamos U' á la potencial de la capa sobre cualquier punto M exterior, tendremos

$$U'(x, y, z) = \int \int_S^{(e)} \frac{\mu}{r} d\sigma.$$

Sólo resta, para expresar las condiciones del problema, igualar los valores de U y de U' , que son, y volvemos á repetirlo,

$$U(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \int \int_S^{(c)} \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma$$

$$U'(x, y, z) = \int \int_S^{(e)} \frac{\mu}{r} d\sigma.$$

Igualándolos, pues,

$$\iint_S^{(e)} \frac{\mu}{r} = - \frac{1}{4\pi} \iint_S^{(e)} \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

Pero esta expresión queda completamente satisfecha sea cual fuese el M , es decir, sean cuales fuesen los valores de x, y, z que entran en r , igualando los valores diferenciales.

Tendremos, pues,

$$\mu = - \frac{1}{4\pi} \frac{dU}{dn}.$$

Así, pues, sea cual fuere la superficie equipotencial S , distribuyendo sobre ella una capa ficticia de materia cuya densidad en cada punto de la superficie esté expresada por el valor de μ , esta capa tendrá sobre cualquier punto exterior de la superficie la misma potencial, que las masas dadas A, B, C .

Y si tiene la misma potencial en todo el espacio exterior, ejercerá la misma atracción en todos los puntos: por manera que, PARA EL ESPACIO EXTERIOR, la capa NN de densidad μ *suple y equivale al sistema A, B, C .*

Podría suprimirse éste en absoluto, y estableciendo la capa NN , un físico que en el espacio exterior midiera potenciales ó atracciones, no conocería la supresión del sistema A, B, C .

Esto en lo exterior de S ; respecto á lo interior, vamos á completar el problema.

Y se completa de este modo.

*
* *

La potencial de la capa NN de densidad μ , determinada como queda dicho, en el espacio interior de la superficie equipotencial S , tiene una potencial constante, y como la deriva-

da de una constante es cero, ejerce una atracción nula; no introduce, pues, ninguna modificación nueva en dicho espacio.

En efecto; la potencial de la capa NN , en lo exterior, es la misma que la del sistema A, B, C . Luego en puntos exteriores, pero infinitamente próximos á la superficie S , dicha capa tendrá la misma potencial que el sistema $A B C$; pero la potencial del sistema A, B, C es constante, porque la superficie es equipotencial; luego, en el límite, podemos decir que la potencial U' de la capa NN es constante sobre la superficie S , é igual á la del sistema A, B, C .

Si representamos esta potencial constante por C , tendremos

$$U' (x, y, z) = C,$$

y por lo tanto, para toda la superficie S ,

$$U' - C = 0 \quad (C)$$

Consideremos, pues, la función armónica

$$U' - C.$$

Y no hay que confundir esta expresión con la precedente. Esta (es decir, la precedente) se refiere á la superficie S , y $U' - C$ á todo el interior del volumen.

Ahora bien: U' , que es la potencial de la capa NN , es una armónica para todo el espacio, lo mismo para fuera de la superficie que para dentro, sin que ningún punto fuera de la capa sea excepcional.

Además, C , que es una constante, es también una armónica, la más sencilla; luego $U' - C$ será en todo lo interior del volumen una armónica uniforme, finita, continua y con derivadas primeras y segundas; pero su valor en la superficie es nulo, según nos dice la ecuación (C), y en virtud de

uno de los teoremas que hemos demostrado en otra conferencia, será nula en todo el volumen.

Y, en definitiva, si en todo el volumen es nula, tendremos constantemente para todo el interior de la superficie S

$$U' - C = 0$$

ó bien

$$U' = C.$$

Resulta, por lo tanto, que la capa ficticia NN tiene una potencial constante en todo el interior del volumen, y su atracción será nula en todo este volumen, que era precisamente el enunciado del teorema.

*
* *

El teorema anterior tiene extraordinaria importancia, muy principalmente en la teoría de la electricidad estática.

Tal como lo hemos explicado, es un teorema de ciencia pura, que expresa propiedades, más ó menos curiosas, de la ecuación diferencial de Laplace, y ayuda á su integración.

Pero yo no sé si los matemáticos, y entre ellos el eminente Green, hubieran establecido esta teoría sin el estímulo de los problemas de Física Matemática á que nos hemos referido.

En este concepto, las cuestiones que tratamos vienen en apoyo de los que afirman, que una gran parte de las matemáticas puras han sido creadas por el estímulo, y en cierto modo, para las necesidades de la Física

Recordarán mis oyentes que nunca hemos negado esta afirmación. Lo que hemos dicho, y afirmamos una vez más, es que existen grandes regiones, regiones ilimitadas en las matemáticas puras, que se han poblado de teorías por puro

amor á la ciencia y sin fin alguno utilitario; aunque es para mí evidente que llegará un día en que serán útiles, *materialmente útiles*, no sólo para la Física, sino para la Industria. Por lo demás, hoy mismo son útiles, en el sentido de que vienen á satisfacer grandes necesidades del espíritu humano.

De todas maneras, y en los problemas que hoy estudiamos, en las teorías de las armónicas y en el problema de Dirichlet, no cabe negar la influencia de la ciencia práctica y experimental, como provocadora y estimulante de tales cuestiones.

¿Quién que haya estudiado cualquier libro de Física experimental, no recuerda problemas que son la representación material de los que últimamente acabamos de demostrar?

¿Quién no recuerda, que si varios cuerpos electrizados se rodean y cierran por una hoja metálica, en ésta se establecen capas eléctricas iguales y de signos contrarios, cada una de las cuales viene á ser, en cierto modo, la capa ficticia de que antes hemos hablado?

¿Quién no ha oído que es muy importante la teoría de las *pantallas eléctricas*, y á veces de aplicación necesaria?

Pues todos estos hechos *tienen su teoría* y su demostración matemática en estos teoremas de Green, de Dirichlet y en otros que iremos estudiando.

Estamos, pues, realmente dentro de las teorías de la Física Matemática. Y cuando en años sucesivos, á ser posible, estudiemos la electricidad estática, tendremos que recordar todos estos problemas abstractos que hoy tratamos, generalizándolos antes, lo cual es muy fácil, para las masas eléctricas positivas y negativas.

Porque no han de olvidar mis alumnos, que por ahora, y realmente en todo este curso, tratamos de la potencial relativa á *masas ponderables*, que es, como si dijéramos, á masas positivas, aun cuando á cada momento advertimos que los problemas, los teoremas, las fórmulas que vamos obte-

niendo, pueden generalizarse para el caso del fluido eléctrico, ó mejor dicho, de los fluidos eléctricos, considerando masas positivas y negativas.

Verdad es, que en este último caso hay ciertos puntos, que convendrá ampliar y ciertas observaciones que no serán inútiles.

Quizá en este mismo curso se nos presente ocasión, si en él podemos explicar el método de M. Poincaré, para resolución del célebre problema de Dirichlet.

Precisamente este último teorema de la capa ficticia tiene nombre y da nombre por extensión al método del insigne maestro.

Cuando se sustituye la acción en el espacio exterior de una serie de masas A, B, C (fig. 45) por una capa ficticia NN , extendida sobre una superficie equipotencial, parece como si materialmente á estas masas A, B, C se las empujara desde el interior hacia lo exterior, obligándolas á extenderse en la superficie NN .

Es en cierto modo, y perdónese lo vulgar de la palabra, como un barrido, en el volumen interior, de masas ponderables, hasta que tropiezan con la pantalla NN .

Este es precisamente el *nombre* que da M. Poincaré á su método de demostración: el de *balayage*. Claro es que aquí sólo nos referimos al *nombre*.

Y esta sustitución de una capa ficticia equipotencial á masas distribuida de cualquier modo en lo interior, sirve de base á la explicación clarísima y sugestiva de los principales problemas de la electricidad estática, como puede verse, entre otras obras del extranjero, en la gran obra, que ya es clásica, de Mascart y Joubert.

En el problema de la capa ficticia nos queda todavía un punto sobre el que hemos de hacer algunas observaciones, porque tiene importancia en la teoría, é importancia capital en las aplicaciones eléctricas entre otras, y aun diremos que se refieren á un problema que se presenta constantemente.

Hemos dicho: Considerando una superficie equipotencial NN , que envuelva un sistema de masas, el efecto de estas masas sobre el espacio exterior, ya como potencial, ya como atracciones, puede sustituirse por el efecto que produciría una capa ficticia (convertida por de contado en capa real si ha de producir efectos reales) extendida sobre la expresada superficie de nivel NN .

Pero esta capa ha de tener en cada punto una densidad ó carga de materia por unidad de superficie, cuyo valor general será éste:

$$\mu = \frac{-1}{4\pi} \frac{dU}{dn};$$

y en esta expresión, $\frac{dU}{dn}$ representa la derivada de la potencial producida en dicho punto, ó que corresponde á dicho punto, de las masas $A, B, C \dots$ del sistema, tomada dicha derivada sobre la normal exterior.

Pues esta fórmula es capital, es clásica, ya la hemos demostrado con perfecto rigor; pero una cosa es demostrar que esta *debe ser* la densidad en cada punto, para que el barrido, y valga la palabra anterior, esté bien hecho, y otra cosa es buscar la significación íntima, por decirlo así, de la fórmula en cuestión.

Este será el objeto de la conferencia próxima.

XVL.—Conferencias sobre Física matemática.
Teorías diversas.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaquinta.

SEÑORES:

Estudiábamos en nuestra última conferencia la sustitución de una serie de masas ponderables comprendidas en un espacio finito, por *una capa de materia ponderable superficial extendida sobre una superficie de nivel*, que comprendiese las expresadas masas, y tal que sobre el espacio exterior á dicha superficie de nivel tuviera la capa ponderable en cualquier punto la misma potencial, y, por lo tanto, la misma atracción que las masas primitivas.

Y demostramos, que el problema era posible, y determinamos además la densidad de la masa ficticia μ en cualquier punto de la superficie de nivel.

Vimos que esta densidad superficial μ tenía por expresión

$$\mu = \frac{-1}{4\pi} \frac{dU}{dn}$$

siendo U la potencial de las masas dadas en el punto de la superficie de nivel á que se refiere μ , y tomando la derivada con relación á n con relación al punto en cuestión.

De modo que, fijense bien mis oyentes, $\frac{dU}{dn}$ no es la de-

rivada para cualquier punto, sino precisamente para el punto de la superficie de nivel á que corresponde la densidad superficial μ .

Esta fórmula, decíamos, resuelve el problema y está perfectamente definida y está perfectamente determinada, puesto que conocemos la potencial U de las masas que constituyen el sistema dado.

Y si conocemos U en general, conoceremos su variación

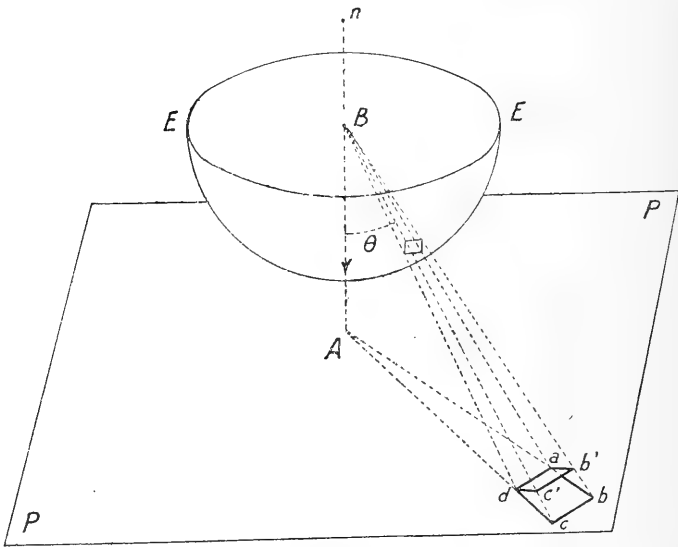


Figura 47.

en cualquier punto y en dirección cualquiera; por ejemplo, en dirección á la normal N de la superficie equipotencial, que pasa por el punto expresado.

Pero agregábamos que esta fórmula no solamente resuelve el problema de la capa ficticia de nivel, sino que tiene importancia particular en muchas cuestiones de Física Matemática, y debemos, antes de pasar adelante, aclarar este punto.

Para ello resolvamos el siguiente problema.

Imaginemos un plano PP (fig. 47) que se extiende hasta

el infinito, cargado de una capa uniforme de materia ponderable y de densidad superficial μ .

Imaginemos un punto B á la distancia AB del plano, y vamos á calcular la atracción de la capa PP sobre el punto B .

Para nuestro objeto vamos á suponer, que la distancia AB es muy pequeña, por ejemplo, la diferencial de la normal An , que tomaremos como eje de las n positivas.

Dicha atracción, como todo *es simétrico* alrededor del eje An , porque la densidad μ del plano PP es constante, es claro que tendrá la dirección de esta línea; de suerte que la *atracción* que buscamos actuará sobre la línea An , y además en dirección negativa.

Representemos su valor por F .

Para obtener este valor, el método general es bien sencillo: descomponer el plano en elementos infinitamente pequeños $d\omega$, calcular la atracción de cada elemento ponderable sobre el punto B ; determinar su componente en la dirección BA , puesto que la resultante ha de tener esta dirección, é integrar la expresión que resulte para toda la extensión del plano.

No hay más que ir ejecutando estas operaciones, que son operaciones elementales de análisis.

Tomemos en el plano el elemento $abcd$ de área que llamaremos $d\omega$, y para fijar las ideas, no porque sea necesario, supongamos que este pequeño cuadrilátero está formado por dos radios infinitamente próximos Aa , Ad y por dos arcos de círculo trazados desde A , á saber: ad y bc .

La masa de materia ponderable que comprende este cuadrilátero será igual á su área $d\omega$ por la densidad uniforme μ . Es decir,

$$\mu d\omega.$$

La acción de esta masa ponderable sobre una masa igual á 1, colocada en B , y suponiendo, para simplificar, que la

constante de la atracción f es igual á la unidad, será evidentemente

$$\frac{\mu d\omega}{Ba^2},$$

puesto que Ba puede tomarse como la distancia media de B al elemento superficial, con errores infinitamente pequeños de orden superior.

Representando la distancia Ba por r , la atracción del elemento en cuestión sobre el punto B será, pues,

$$\frac{\mu d\omega}{r^2}.$$

Esta fuerza tenemos que proyectarla sobre BA , y llamando θ al ángulo ABa , resultará: componente de la atracción del elemento según BA

$$\frac{\mu d\omega}{r^2} \cos \theta.$$

Ahora bien, si trazamos desde B , con el radio r una esfera, ésta cortará á la pirámide infinitamente estrecha $Babcd$, según un cuadrilátero $ab'c'd$, que puede considerarse evidentemente como la proyección sobre esta esfera del cuadrilátero $abcd$, porque las aristas de la pirámide son casi paralelas en la proximidad de a .

Representando $d\omega'$ el área de dicho cuadrilátero $ab'c'd$, tendremos evidentemente

$$d\omega' = d\omega \times \cos b'ab.$$

Pero $b'ab$ es igual á θ , por tener sus lados perpendiculares; luego

$$d\omega' = d\omega \cos \theta$$

y sustituyendo este valor en el de la componente antes obtenida, resultará:

$$\mu \frac{d\omega'}{r^2}.$$

Ahora bien, $d\omega'$ dividida por r^2 , es la medida, que llamaremos $d\omega''$, del ángulo sólido de la pirámide, y, en general, pudiéramos decir del cono, si el área $d\omega'$ tuviera otra forma cualquiera: siempre será $d\omega''$ el cuadrilátero ó área que determine en la esfera de radio 1 la expresada pirámide ó cono en cuestión.

En suma, la componente según Ba de la atracción que ejerce sobre B un elemento cualquiera del plano, será

$$\mu d\omega''$$

siendo $d\omega''$ la abertura cónica de este elemento visto desde B .

Sólo falta integrar para toda la extensión del plano; pero desde el punto B se ve el plano, según la semiesfera EE : luego componente ó atracción de PP sobre B

$$\int_E \mu d\omega'' = \mu \int_E d\omega'' = 2\pi \mu$$

puesto que el área de la semiesfera es 2π .

De aquí se deduce

$$F = 2\pi \mu;$$

y, por lo tanto,

$$\mu = \frac{F}{2\pi}.$$

Pero la fuerza F en este caso puede expresarse por la potencial, pues sabemos que siendo el plano una superficie de

nivel que pasa por A , y siendo U' su potencial, la potencial en B será $U' + dU'$, y la fuerza será asimismo $\frac{dU'}{dn}$.

Así

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{dU'}{dn}.$$

Como la potencial va disminuyendo á partir del plano hacia la parte superior, dU' será negativa; y si queremos el valor de la fuerza prescindiendo del signo, deberemos poner signo negativo al segundo miembro, y tendremos el valor absoluto de la atracción $\frac{dU'}{dn}$ y

$$\mu = - \frac{1}{2\pi} \frac{dU'}{dn}.$$

Resulta esta densidad, diversa al parecer, de la densidad que antes habíamos determinado, lo cual á primera vista choca; aunque aquél y éste son problemas distintos: de todas maneras se justifica perfectamente esta circunstancia, como vamos á explicar, siquiera sea de paso y abriendo otro nuevo paréntesis en nuestro trabajo.

Por el pronto, en rigor, el signo — es necesario, porque $\frac{dU'}{dn}$ es negativa, y la densidad μ es esencialmente positiva; de lo contrario, un miembro sería positivo y otro negativo.

*
* *

Sea ABb (fig. 48) la capa ficticia de nivel, que antes establecíamos y que sustituye en lo exterior á la acción de las masas interiores.

Consideremos esta capa dividida en dos partes: el ele-

mento AB , que coincidirá con el plano tangente á la superficie tt , y el resto de la superficie AbB , que será en cierto modo una superficie *abierta*, si se prescinde del elemento AB .

La atracción en el punto C se compondrá de dos partes:
Atracción de AB sobre C .

Y atracción de la superficie abierta AbB , también sobre C .

Representemos por T la primera y por T' la segunda.

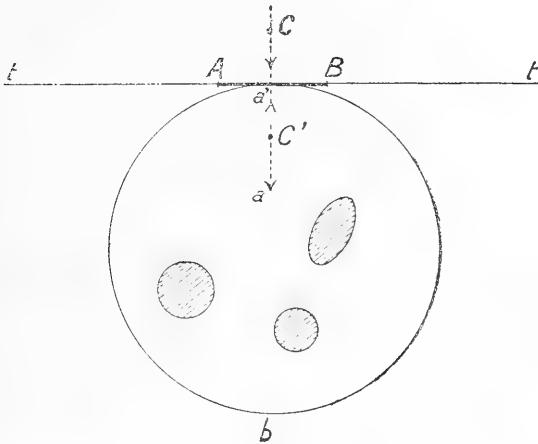


Figura 48.

La atracción de toda la capa cerrada sobre C será, por tanto,

$$T + T'.$$

Tomemos el punto C' en el interior, simétrico de C respecto á AB .

La atracción de la superficie cerrada sobre este punto C' hemos demostrado que es nula; pero la atracción sobre C' se compondrá, análogamente, á lo que decíamos para C :

De la atracción de AB sobre C' .

Y de la atracción de AbB también sobre C' .

Puesto que la atracción sobre C' es nula, según acabamos de decir, tendremos

atracción de AB sobre $C' =$ atracción AbB sobre C' .

Ahora bien, la atracción de AB sobre C' , por razón de simetría, será la misma que sobre C , y simétrica, como indica la flecha de la figura.

Luego

atracción de AB sobre $C' =$ atracción de AB sobre $C = T$

y la ecuación anterior da, por lo tanto,

$$\text{atracción } AbB \text{ sobre } C' = T.$$

Por fin, es evidente que como AbB es una superficie abierta, y, por lo tanto, su atracción en todos los puntos del espacio, exceptuando sobre dicha superficie, es continua, la atracción en el punto C' infinitamente próximo á C sólo diferirá de ésta en un infinitamente pequeño; pero la atracción en C' hemos demostrado que es T y en la dirección que marca la flecha a' , y la atracción en C la designábamos antes por T' , cantidades ambas finitas, y sin error en el límite, podemos escribir

$$T' = T.$$

Luego la atracción de la capa total en C , que era

$$T + T',$$

se convertirá en

$$2T.$$

En resumen, la atracción de toda la capa sobre un punto C infinitamente próximo á AB , es decir, á la superficie, es el doble de la atracción de este elemento.

Ahora bien, si prolongamos el elemento en todo su plano tangente tt y lo recubrimos de una capa ficticia ponderable, cuya densidad superficial constante sea μ , que es la del elemento AB , la atracción de toda la *capa plana* tenderá á ser la del elemento AB á medida que el punto C se aproxime á AB .

Porque, en efecto, de tomar todo el plano PP (fig. 49)

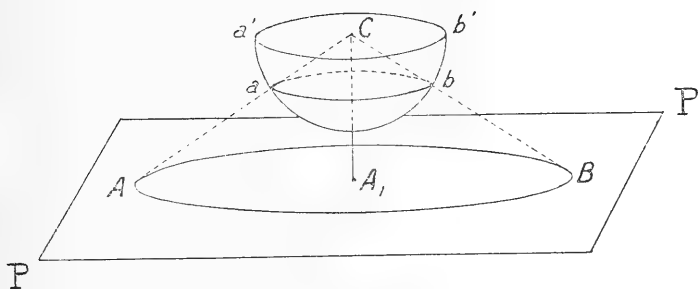


Figura 49.

á no tomar más que una parte, la que determina el cono ACB , la diferencia está medida en la esfera de centro C y radio 1 por la zona $ab a'b'$, que tiende á 0 á medida que C se aproxima á A .

Así, pues, la atracción de toda la capa de nivel sobre un punto C (fig. 48), que tiende á aproximarse al punto A_1 de su superficie, es el doble, es decir, $2T$, de la atracción del elemento AB sobre C .

Pero á ésta hemos visto que puede sustituirse la del plano, y la del plano demostramos que era

$$2\pi\mu;$$

luego la de toda la superficie será

$$-\frac{dU}{dn} = 4\pi\mu$$

de donde

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} \frac{dU}{dn}$$

que es precisamente la que habíamos obtenido para que la capa de nivel sustituyera en lo exterior á las masas interiores.

Y esta es realmente otra forma de demostración para la región inmediata á la capa de nivel.

En esta capa de nivel, la masa de densidad μ desarrolla sobre los puntos próximos, como es natural, la misma fuerza que las masas interiores.

Aparte de la comprobación, para este caso, del teorema que demostramos, la fórmula precedente tiene una aplicación importante y muy general, puesto que determina la atracción de un elemento superficial de densidad μ sobre un punto infinitamente próximo.

A ella acudiremos más de una vez.

Pero éste es punto que merece tratarse detenidamente.

* * *

Continuemos el estudio del problema de Dirichlet, explicando á este propósito la llamada *función de Green*.

Hemos visto, que cuando para una superficie cerrada se conocen en todos los puntos de dicha superficie el valor de la *armónica* U y de su *derivada* en el sentido de la normal exterior, la función armónica queda determinada, perfectamente, para el interior del volumen, y su expresión desig-

nando por a, b, c , las variables de un punto también del interior es ésta:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Ahora bien, si $\frac{dU}{dn}$ es conocida, la expresión anterior determina de una manera inmediata, por una serie de ope-

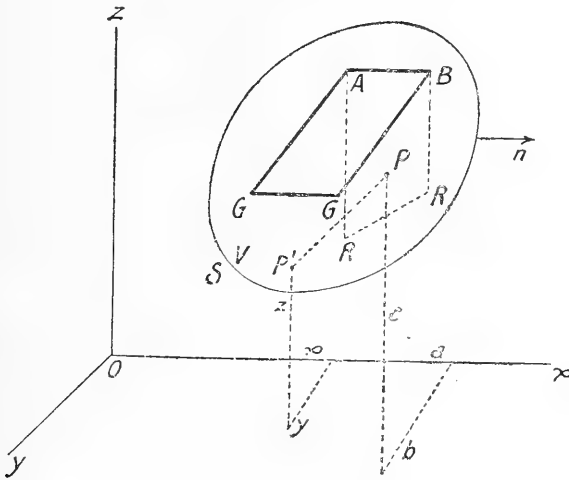


Figura 50

raciones analíticas, la armónica U , que constituye, por decirlo así, la incógnita del problema de Dirichlet.

Pero existe una función que es, según acabamos de decir, la designada con el nombre de Green; función que una vez conocida resuelve, en general, aunque no se conozca $\frac{dU}{dn}$, el *problema interior*, y como veremos después, resuelve también el *problema exterior*.

Empecemos por definir esta función.

La función de Green ha de ser una armónica en el volumen que limita la superficie S (fig. 50).

Ha de ser finita, así como sus derivadas primeras y segundas.

Por último, y esta es condición característica, ha de tomar sobre la superficie S los mismos valores que la función

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Podremos, pues, representar esta función, por la inicial del matemático que la introdujo en el cálculo: digamos

$$\text{función de Green} = G(x, y, z, a, b, c).$$

Que la función existe es evidente, porque hemos demostrado la existencia, y existencia única, de una armónica interior á todo volumen, y que tome sobre la superficie valores continuos.

En este caso dichos valores continuos están perfectamente determinados: son los que toma la función

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

cuando x, y, z , correspondan á S .

Y aquí puede asaltar una duda al principiante, duda que por elemental que pueda ser, conviene aclarar.

Acaso piense el que por primera vez estudia estas materias, con la vaguedad y la falta de precisión que hay siempre en un primer estudio, que si la función $\frac{1}{r}$ es una armónica, como hemos demostrado, que satisface por lo tanto á la ecuación de Laplace; y si además sobre la superficie S toma los valores que naturalmente ella determina, ella misma será la función de Green.

Lo cual sería un error enorme.

Porque la función de Green no sólo ha de ser armónica, sino finita en toda la extensión del volumen, con derivadas primeras y segundas, finitas también, de modo que ha de ser finita en el punto (a, b, c) , fig. 50.

Pero la función $\frac{1}{r}$ en el punto (a, b, c) se hace infinita, porque cuando x, y, z se confunden con (a, b, c) , resulta $\frac{1}{r} = \infty$.

Construyamos una figura esquemática para dar forma material á nuestro pensamiento.

Sea (fig. 50) un volumen cerrado por la superficie S .

Tomemos un punto P en el interior de la superficie, cuyas coordenadas sean a, b, c , y formemos la función $\frac{1}{r}$ siendo r la distancia del punto P á cualquier punto del volumen. Por ejemplo, PP' , en que P' tiene las coordenadas variables x, y, z , y en que (a, b, c) son como parámetros de la función $\frac{1}{r}$.

Esta función llena, por decirlo así, todo el volumen, porque es una función de tres variables, como por ejemplo la temperatura en los diferentes puntos de un sólido, como todas las armónicas que son funciones de tres variables también, á saber: *tres* variables independientes, y la *función*, ó sean cuatro variables.

Y por ser cuatro las variables, no hay manera de representar materialmente la función, de suerte que hable á los sentidos; sería preciso que tuviéramos una representación sensible del espacio de cuatro dimensiones.

Pero podemos, si no representarla, designarla, tomando los valores que se suceden en una superficie, por ejemplo, $ABRR$, como limitamos líneas de nivel ó superficies equipotenciales, ó bien otra superficie cualquiera.

En suma, cuando digamos que la figura $ABRR$ es la función $\frac{1}{r}$, no queremos decir que lo sea propiamente, sino que *forma parte de ella*.

Asimismo, la línea AB simbolizará una sucesión de valores de la función $\frac{1}{r}$ en la superficie S .

Será en cierto modo la intersección de $ABRR$, con dicha superficie S , y, por consiguiente, representarán una parte de los valores á que ha de sujetarse la función Green en la superficie S : una línea de valores en la superficie.

Y los mismos valores que toma la función $\frac{1}{r}$ en la línea AB , ha de tomar la función de Green.

Por eso hemos representado, también simbólicamente, la función de Green, por $ABGG$, para que se vea de este modo, que es distinta de la función $\frac{1}{r}$, pero que en la superficie coincide con ella: si vale este modo de expresarnos, en la superficie se cortan ambas funciones, que es como cortarse dos volúmenes.

Ambas llenan el volumen que comprende S ; pero en cada punto de él hay dos valores: uno para la función $\frac{1}{r}$; otro para la función G .

Así, en el punto P , la función $\frac{1}{r}$, representada simbólicamente por $ABRR$ es infinita, y en cambio, en este mismo punto, la función G es finita.

Por fin, en todo el volumen se presentan las dos, como en un mismo volumen cada punto puede tener su temperatura, función de tres variables, y ese mismo punto tendrá su densidad, función de tres variables también, y podrá tener su potencial eléctrica, todas ellas para el mismo punto.

Y no tenemos más recurso que concebirlas confundidas,

porque no poseemos el sentido de la cuarta dimensión, dado que exista realmente, que esto no es del problema.

Comprendido lo dicho, pasemos ya á la aplicación de la función de Green.

* * *

La función de Green nos va á servir para eliminar de la fórmula anterior, de la que da $U(a, b, c)$: 1.º, en función de U , que es conocida para todos los puntos de la superficie, porque es un dato del problema, el único necesario y suficiente; y 2.º, de $\frac{dU}{dn}$, que en general no será conocida;

para eliminar, repetimos, la derivada $\frac{dU}{dn}$.

La función U , aunque desconocida, sabemos que es una armónica que cumple con las condiciones indicadas tantas veces, y G es otra armónica conocida ó desconocida, nos importa poco, que también cumple con las mismas condiciones; luego ambas satisfarán á una de las transformadas de la fórmula de Green, que explicamos en una conferencia del curso de 1909 á 1910, pág. 128, y que era ésta:

$$\iiint_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d\tau = \iint_S \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) d\sigma.$$

ψ y φ son funciones finitas, continuas y con derivadas primeras y segundas en todo el volumen y en la superficie, y, salvo estas condiciones, en lo demás eran arbitrarias.

Luego podemos suponer que son G y U , y tendremos

$$\iiint_V (G \Delta U - U \Delta G) d\tau = \iint_S \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) d\sigma.$$

Pero en este caso particular, que estamos considerando, G y U son armónicas: que en general no era preciso que lo fuesen φ, ψ ,

Y si aquéllas son armónicas satisfarán á la ecuación de Laplace, y tendremos

$$\Delta U = 0, \quad \Delta G = 0,$$

para todos los puntos del interior del volumen, con lo cual el primer miembro se reduce á 0 y queda:

$$\iint_S \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) d\sigma = 0. \quad [1]$$

Recordando que la ecuación fundamental era

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma \quad [2]$$

ocurre, desde luego, que de esta última puede eliminarse $\frac{dU}{dn}$ por medio de la primera.

Más aún: las dos integrales dobles de ambas ecuaciones [1] y [2] contienen dos términos iguales. A saber:

$$\iint_S G \frac{dU}{dn} d\sigma, \quad [1]$$

y

$$\iint_S \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} d\sigma. \quad [2]$$

Y decimos que son iguales, porque ambas integrales dobles se refieren á la misma superficie S , y aunque G y $\frac{1}{r}$

son distintas en general, es decir, en el interior del volumen, en la superficie son iguales. Podemos decir que simbólicamente en AB ; y en toda la intersección (fig. 50), es decir, para todos los puntos de esta superficie se tiene

$$G = \frac{1}{r};$$

ó mejor

$$(G)_s = \left(\frac{1}{r} \right)_s.$$

De suerte que la segunda de las dos ecuaciones generales podrá escribirse de este modo:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int \int_s \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma.$$

Deduciendo de la primera,

$$\int \int_s G \frac{dU}{dn} d\sigma = \int \int_s U \frac{dG}{dn} d\sigma,$$

y sustituyendo,

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int \int_s U \left(\frac{dG}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma:$$

expresión que nos da la función armónica que buscábamos $U(a, b, c)$ en todo el interior del volumen, en valores de U sobre la superficie S .

Porque observen mis oyentes, que la integral doble del segundo miembro está perfectamente determinada. Pues U (bajo la integral) es una *función conocida* en valores de las

dos variables que determinan cada punto de la superficie S . G es la función de Green que también suponemos que se conoce para este caso. Y $\frac{1}{r}$ es una función de forma perfectamente determinada, puesto que es

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Por último, $d\sigma$ es un elemento de la superficie S y se expresa en función de las dos variables, que fijan cada punto sobre dicha superficie.

Por fin, todas las operaciones quedan definidas, porque las derivadas con relación á n se sabe que han de tomarse hacia lo exterior de la superficie.

Advirtamos, en fin, que a, b, c , entran, desde luego, en r y además en G , porque recordarán mis oyentes que la función de Green, G , se determina para el punto (a, b, c) ; de modo que estas variables entran en G y en $\frac{dG}{dn}$.

En suma, y para dar forma precisa á nuestra explicación, si llamamos α, β las dos variables que determinan cada punto de la superficie, la expresión que está bajo el signo de integral doble, podrá expresarse de este modo:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\alpha, \beta, a, b, c) d\alpha d\beta.$$

Efectuadas las integraciones, las variables α, β desaparecen y sólo quedarán las constantes de la ecuación de la superficie S y las tres coordenadas (a, b, c) , que en esta doble integración son constantes también.

Luego todo el segundo miembro será una función de (a, b, c) , que será precisamente la que determine la forma de la función armónica U desconocida, del primer miembro.

Y como el punto (a, b, c) es arbitrario dentro del volumen, la función U quedará determinada para todos los puntos de este espacio, ó, como dicen otros autores, para todo el *dominio* que comprende S .

Así, pues, cuando se puede determinar la función de Green, el problema de Dirichlet está resuelto.

Obsérvese, para terminar esta segunda parte, que la función de Green es distinta para cada superficie S , y en cada superficie S su forma será la misma, pero dependerá del punto (a, b, c) que se escoja; por eso la hemos definido de este modo

$$G(x, y, z, a, b, c).$$

Para cada superficie de S , volvemos á repetirlo, hay una forma G de la función de Green. Si la superficie cambia, la función de Green es distinta.

Pero conocida la función de Green para una superficie S todos los problemas de Dirichlet para esta superficie, están resueltos como hemos visto. Es decir, que la misma función de Green sirve, sea cual fuese la distribución de la armónica U sobre la expresada superficie S .

Esto se ve en la fórmula general que hemos dado. En efecto, bajo la integral entra G , que se refiere á la superficie S .

Pasemos ahora al segundo problema de Dirichlet, *al problema exterior*.

* * *

Resolución del problema exterior de Dirichlet por medio de la función de Green. — Basta repetir, casi palabra por palabra, todo lo que hemos dicho en *el problema interior*.

Para todo el espacio exterior á una superficie S , se puede

determinar teóricamente una función de Green relativa á un punto exterior a, b, c . Al decir *se puede determinar*, queremos decir, *existe*.

Para fijar bien las ideas presentamos una figura esquemática (fig. 51), análoga á la figura 50.

En dicha figura 50, S representa una superficie cerrada que limita un volumen V .

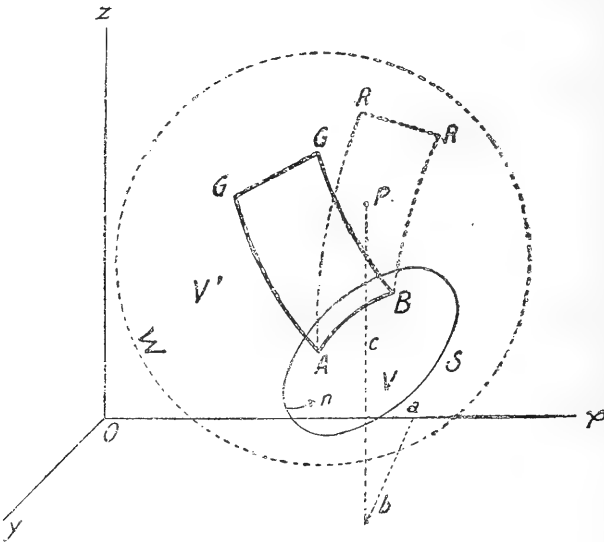


Figura 51.

Fuera de esta superficie hemos tomado un punto P , cuyas coordenadas son (a, b, c) (fig. 51).

A este punto corresponderá una armónica

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

ó sea $\frac{1}{r}$, que hemos representado simbólicamente por $ABRR$.

Esta armónica $\frac{1}{r}$ determinará sobre la superficie S una serie de valores, uno para cada punto de la superficie S , que también simbólicamente representamos por AB .

Y con esto podemos definir *la función de Green exterior*, correspondiente al punto P y á la superficie S .

Será una armónica, es decir, una solución de la ecuación de Laplace, finita, uniforme y determinada, con derivadas primeras y segundas, también determinadas y finitas, y que sobre la superficie S tomará los mismos valores que ya ha determinado en ella la función $\frac{1}{r}$; lo cual expresamos haciendo pasar el símbolo $ABGG$ de la función de Green por AB determinada por la función $ABRR$.

Y volvemos á repetirlo. Esta representación es puramente simbólica y *abreviada*, porque la función de Green y la armónica $\frac{1}{r}$ no coinciden sólo en una línea de la superficie, sino *en toda la superficie*.

Ni $\frac{1}{r}$ ocupa sólo $ABRR$, sino todo el espacio exterior é ilimitado. Y esto mismo podemos repetir de la función de Green.

Conocida esta función tal como acabamos de definirla, cualquier problema de Dirichlet para cualquier distribución sobre la superficie S , puede resolverse sin dificultad ninguna.

Y lo que queda de la demostración, es idéntico á lo que ya dijimos al tratar del problema interior.

Hay que repetir las dos ecuaciones

$$\iint_S \left(G \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) d\sigma = 0$$

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma$$

aplicadas al espacio exterior, y en que las diferenciaciones con relación á n se verifican hacia el interior del volumen V , que es exterior al espacio indefinido V' .

Todo queda reducido á eliminar de la segunda, como antes efectuamos, por medio de la primera, $\frac{dU}{dn}$.

Una sola observación debemos hacer, pero es importante, y por ser importante la hemos dejado para lo último.

Para aplicar al espacio exterior las consideraciones desarrolladas respecto al espacio interior, tenemos que hacer que aquél, siquiera sea transitoriamente, se ofrezca como limitado, según hemos hecho otras veces.

Es decir, debemos imaginar una esfera Σ de radio creciente, que envuelva á la superficie S y al punto P .

Y como entonces el volumen estara limitado por la superficie S y por la esfera Σ , debemos fijar las condiciones para ésta.

Estas condiciones son que el valor de G en dicha esfera tienda hacia 0 á medida que su radio crezca, y este radio, si el centro de la esfera está en el espacio finito, tenderá á ser igual á

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

á medida que x, y, z tiendan hacia infinito.

Con esto la función Green queda definida en la superficie que envuelve, si así puede decirse, el espacio exterior.

Sobre S toma los mismos valores que $\frac{1}{r}$ y sobre la superficie de la esfera, es decir, en el infinito, se anula.

No queda para este segundo caso nada más que observar.

Vemos, por lo expuesto, que para toda superficie determinada, el problema de Dirichlet podrá resolverse, tanto interior como exteriormente, sólo con resolverlo para un caso particular; para el caso particular, repetimos, en que los valores de la armónica buscada G , sobre la superficie S , sean precisamente los que corresponden á la armónica $\frac{1}{r}$.

Pero aun en este caso particular es muy difícil y sólo podemos resolverlo, al menos, por los procedimientos ordina-

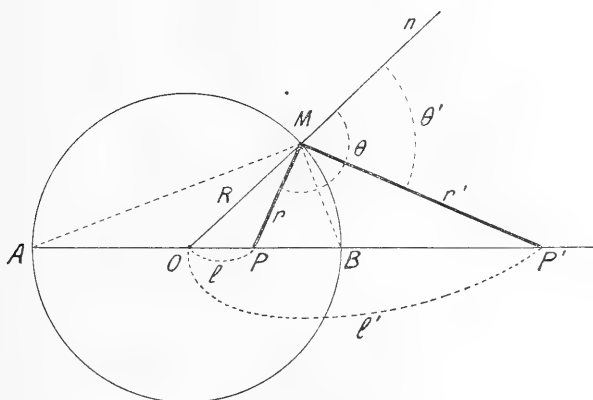


Figura 52.

rios para determinadas superficies; por ejemplo, para la superficie esférica.

Vamos á presentar este ejemplo; pero antes, con el objeto de que no quede, por decirlo así, en el aire nada de lo que hayan podido olvidar mis alumnos, voy á recordar una propiedad geométrica verdaderamente elemental de la circunferencia, ó si se quiere, de la esfera.

Sea (fig. 52) AMB una esfera cuyo centro es O y cuyo radio representamos por R .

Sea AB uno de sus diámetros, y el círculo de la figura será la intersección del plano de la misma, que pasa por el diámetro AB , con la esfera en cuestión.

Se sabe por geometría, que si se toma sobre el diámetro un punto cualquiera P en el interior, existirá otro punto correspondiente P' en lo exterior, y que ambos puntos, que se llaman conjúgados ó armónicos, gozan de la siguiente propiedad, cuando están convenientemente determinados.

Si se considera un punto cualquiera M en la esfera, las distancias $MP=r$, $MP'=r'$ tienen la misma relación que los segmentos PB , $P'B$. Es decir.

$$\frac{r}{r'} = \frac{PB}{P'B}.$$

Esto para todos los puntos de la circunferencia, y, por lo tanto, para todos los puntos de la esfera.

Mas para ello es preciso, según decimos, que los puntos P y P' estén convenientemente determinados.

Uno de ellos P puede ser arbitrario; pero á él corresponde uno, y uno sólo, P' , en el exterior, ó recíprocamente.

La relación que enlaza los puntos P y P' para determinar uno cuando el otro es dado, será la siguiente:

$$\frac{BP}{BP'} = \frac{AP}{AP'}$$

que es la llamada relación armónica.

Que por esta relación los puntos se determinan mutuamente es evidente desde luego.

Para abreviar, hagamos $OP=l$, $OP'=l'$ y resulta evidentemente en la figura

$$\begin{aligned} BP &= R - l, & BP' &= l' - R, \\ AP &= R + l, & AP' &= l' + R, \end{aligned}$$

de suerte que la relación anterior será

$$\frac{R - l}{l' - R} = \frac{R + l}{l' + R}$$

ó bien

$$Rl' - ll' + R^2 - lR = l'R - R^2 + ll' - Rl$$

y simplificando

$$2ll' - 2R^2 = 0$$

de donde

$$ll' = R^2.$$

Una construcción elemental y sencillísima da l' cuando se conoce l y recíprocamente.

Es decir, da el conjugado de cualquier punto, que se fije dentro ó fuera de la esfera.

Ahora falta demostrar, que se verifica para todos los puntos de la circunferencia generatriz y de la esfera la relación indicada

$$\frac{r}{r'} = \frac{PB}{P'B}.$$

Basta para ello observar en la figura, que los triángulos OMP y OMP' son semejantes, y esto es evidente. Porque el ángulo MOP es común á los dos, y de la relación que hemos obtenido entre l y l' á saber

$$ll' = R^2$$

se deduce

$$\frac{l}{R} = \frac{R}{l'}$$

lo cual prueba que los lados OP y OM que forman el ángulo común son proporcionales á OM , OP' que forman también dicho ángulo. Resulta, pues, que en efecto son se-

mejantes ambos triángulos; é introduciendo los otros dos lados tendremos

$$\frac{r}{r'} = \frac{OP}{OM}$$

ó bien

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{R}.$$

Ahora bien, sea cual fuere el punto M que escojamos sobre la circunferencia ó sobre la esfera, el segundo miembro de la ecuación será constante, porque R y l lo son, de modo que podemos escribir

$$\frac{r}{r'} = \frac{r_1}{r'_1} = \frac{r_2}{r'_2} \dots = \frac{l}{R}.$$

La propiedad que hemos indicado queda, pues, demostrada.

Pero lo que nos interesa es la relación

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{R} \quad \text{de donde} \quad \frac{R}{l} \cdot \frac{1}{r'} = \frac{1}{r};$$

porque esta relación, con ser tan sencilla, nos determina inmediatamente la función de Green para la esfera, pues aparece $\frac{1}{r}$. Así, representando por (a, b, c) las coordenadas del punto P de la esfera (fig. 53) referida á tres ejes coordenados, la función de Green para el punto p será precisamente

$$G(x, y, z, a, b, c) = \frac{R}{l} \cdot \frac{1}{r'}.$$

Pero esto requiere algunas explicaciones para la mejor inteligencia de mis alumnos.

En primer lugar, representando $\frac{R}{l}$ para más sencillez por una constante A , el segundo miembro será $\frac{A}{r'}$.

En esta expresión, representando ahora r' la distancia del punto P' á un punto cualquiera N del interior de la esfera,

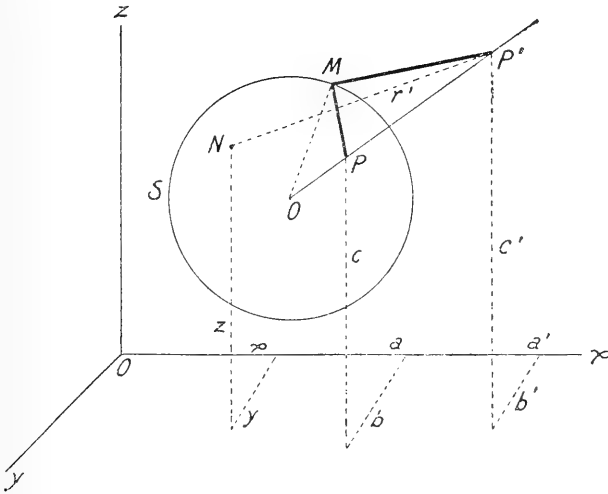


Figura 53.

y designando por x, y, z las coordenadas de este punto N , y por a', b', c' las de P' , de modo que será

$$r' = \sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2};$$

dicha expresión $\frac{A}{r'}$, será evidentemente una función de x, y, z .

Claro es que, dejando x, y, z indeterminadas, la expresión de que se trata puede aplicarse á todo el espacio; pero

nosotros establecemos taxativamente, que sólo vamos á considerar aplicable la expresión

$$\frac{A}{\sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2}} \quad [1'$$

al interior de la esfera.

Para el interior de la esfera, como para otro punto cualquiera, pero de los puntos exteriores prescindimos, $\frac{A}{r'}$ es una armónica, como hemos demostrado tantas veces, es decir, que la ecuación [1] satisface á la ecuación de Laplace; además, sus primeras y segundas derivadas son finitas, porque ninguno de los puntos N coincide con el punto P' : este último es exterior á la esfera y los demás son interiores.

Pero no basta que $\frac{A}{r'}$ sea una armónica en el interior de la esfera para que represente una función de Green.

Es preciso que $\frac{A}{r'}$ tome sobre la esfera los mismos valores que la armónica $\frac{1}{r}$, siendo r la distancia de un punto interior de la esfera á la superficie de la misma. Mas si escogemos el punto P como conjugado del punto P' , para cualquier punto M de la esfera, esta última armónica será

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}.$$

Ahora bien, si en la expresión $\frac{A}{r'}$ esta distancia r' no representa ya distancias al interior de la esfera, sino á su superficie, por ejemplo, $P' M$ para el punto M , tendremos evidentemente que las dos armónicas

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad \frac{A}{P' M} = \frac{A}{r'} = \frac{R}{l} \frac{1}{r'}$$

serán iguales por la relación antes demostrada

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{l} \frac{1}{r'};$$

y esto para todos los puntos de la superficie de la esfera. Resulta, pues, que la expresión $\frac{A}{r'}$ es, en efecto, una armónica de Green.

En resumen, para cualquier punto interior de esfera, P , se determina la armónica de Green de este modo:

1.º Se traza el radio OP y sobre este radio en lo exterior se determina el punto P' por la relación $l' = \frac{R^2}{l}$.

2.º Con la constante $\frac{R}{l}$ se forma la función de x, y, z .

$$\frac{\frac{R}{l}}{\sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2}}$$

en que a', b', c' son las coordenadas del punto P' , que serán funciones perfectamente determinadas, por unas cuantas proporciones elementales de a, b, c , partiendo de $l' = \frac{R}{l}$.

3.º Podrá, por lo tanto, escribirse

$$G(x, y, z, a, b, c) = \frac{\frac{R}{l}}{\sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2}}.$$

Determinada para la esfera la función Green queda resuelto también para la esfera el problema de Dirichlet.

Porque, en efecto, este problema ha sido resuelto para todas las superficies, siempre que para las mismas se determine la función de Green.

La armónica interior á una superficie (ya que del problema interior tratamos) está dada en función de G , según antes vimos por la siguiente fórmula:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_s U \left(\frac{dG}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma.$$

Cuando se trata de una esfera no habrá más que sustituir en vez de G el valor antes obtenido

$$G(x, y, z, a, b, c) = \frac{R}{l} \frac{1}{r'}$$

y tendremos

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_s U \left(\frac{d\frac{R}{l} \cdot \frac{1}{r'}}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma$$

de donde resulta

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_s U \left(\frac{R}{l} \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\sigma.$$

Vamos á determinar ahora las dos derivadas que contiene el segundo miembro.

Sea (fig. 54) AB la esfera en cuestión; P el punto cuyas coordenadas son a, b, c .

P' el conjugado de P y M el punto de la esfera al cual se refieren las dos armónicas G y U .

Prolongando el radio OM , es claro que MN será la normal exterior. Demos un incremento á n , que suponemos que sea MM' . Tirando por M' una perpendicular á MP' , perpendicular que puede considerarse como un arco trazado desde P' , es evidente que la distancia $MP' = r'$ se con-

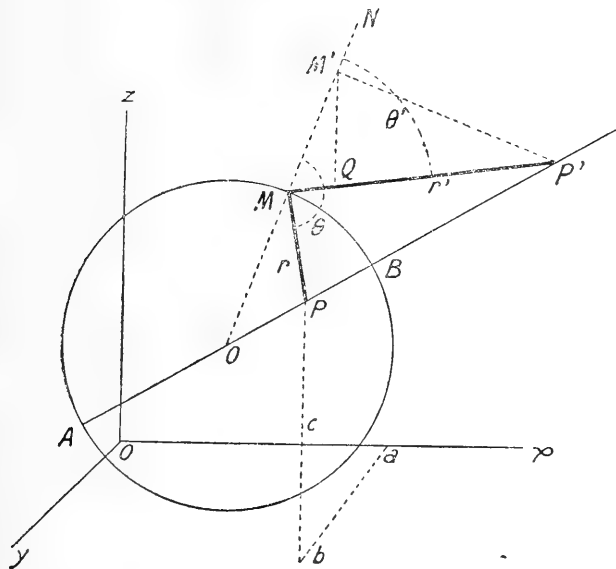


Figura 54.

vierte en $M'P'$, por el incremento de la normal $MM' = dn$. De modo que

$$MQ = -dr'$$

y como

$$MQ = MM' \cos NMP',$$

llamando θ' á este ángulo, tendremos que la última ecuación será

$$-dr' = dn \cos \theta'$$

de donde

$$\frac{d r'}{d n} = - \cos \theta'$$

luego

$$\frac{d \frac{1}{r'}}{d n} = \frac{- \frac{d r'}{d n}}{r'^2} = \frac{\cos \theta'}{r'^2}.$$

Del mismo modo se demostraría para $MP = r$, haciendo $\theta = NMP$,

$$\frac{d \frac{1}{r}}{d n} = \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Y sustituyendo en el valor de U los valores de estas dos derivadas

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4 \pi} \int \int_s U \left(\frac{R}{l} \frac{\cos \theta'}{r'^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \right) d \sigma.$$

En esta ecuación hay cantidades que son independientes y hay otras que dependen de las primeras, por ejemplo r' , que depende de r ; l' , que depende de l y los ángulos θ y θ' , que también dependen uno de otro.

Por medio de las ecuaciones que las enlazan vamos á eliminar las segundas en función de las primeras.

En el triángulo MOP tenemos

$$l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos OMP$$

y como

$$\cos OMP = - \cos \theta$$

resultará

$$l^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos \theta.$$

Asimismo en el triángulo MOP' se tiene

$$l'^2 = R^2 + r'^2 + 2Rr' \cos \theta'.$$

Pero hemos visto que l y l' , r y r' están enlazados por estas relaciones

$$ll' = R^2, \quad r' = \frac{R}{l}r;$$

y sustituyendo en la ecuación anterior los valores de l' y r' , resultará

$$\frac{R^4}{l^2} = R^2 + \frac{R^2}{l^2}r^2 + 2R \cdot \frac{R}{l}r \cos \theta'$$

y simplificando

$$R^2 = l^2 + r^2 + 2lr \cos \theta'.$$

Restando esta ecuación de la que da el valor de l^2 resulta

$$l^2 - R^2 = R^2 - l^2 + 2r(R \cos \theta - l \cos \theta')$$

ó bien sucesivamente:

$$l^2 - R^2 = r(R \cos \theta - l \cos \theta')$$

$$\frac{R^2 - l^2}{r} = l \cos \theta' - R \cos \theta$$

$$\frac{R^2 - l^2}{r^3} = \frac{l}{r^2} \cos \theta' - \frac{R}{r^2} \cos \theta$$

$$\frac{R^2 - l^2}{Rr^3} = \frac{l}{R} \frac{\cos \theta'}{r^2} - \frac{\cos \theta}{r^2}$$

y como

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{l} \frac{1}{r'}$$

y también

$$\frac{1}{r^2} = \frac{R^2}{l^2} \frac{1}{r'^2}$$

resultará

$$\frac{R^2 - l^2}{Rr^3} = \frac{R}{l} \frac{\cos \theta'}{r'^2} - \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Precisamente esta expresión es la que entra bajo la integral en la fórmula

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S U \left(\frac{R}{l} \frac{\cos \theta'}{r'^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \right) d\sigma.$$

Sustituyendo, pues, su valor resultará

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S U \frac{R^2 - l^2}{Rr^3} d\sigma$$

con lo cual queda resuelto el problema de Dirichlet para la esfera.

Y en efecto, repitiendo lo que ya tantas veces hemos dicho, observaremos que el segundo miembro representa operaciones determinadas.

La integral doble se refiere á la superficie dada S .

U es el valor de la armónica que buscamos, sobre la superficie S , para la cual es conocida: constituye un dato del problema. Por eso no hay que confundir la U , que está bajo la integral doble con la U que está en el primer miembro. Esta última es la *armónica que buscamos* para el volumen que comprende S y es una función de *tres variables*, que son las coordenadas de cualquier punto de dicho volumen;

en suma: es la incógnita. En cambio, la U que está bajo el signo de integración es una función de *dos variables*, las que determinan cada punto de la superficie S . Si se quiere, es la del primer miembro; pero cuando a, b, c corresponden á un punto de la superficie S . De todas maneras, como hemos dicho, es una función perfectamente determinada, porque es *un dato* del problema de Dirichlet.

R es una cantidad conocida: el radio de la esfera.

l es la distancia del punto P al centro, que dependerá de las coordenadas en este centro, las cuales son conocidas; y si la esfera está referida á su centro, serán iguales á 0; y dependerá l , además, de las coordenadas a, b, c del punto P . En este caso, l tendría la forma $l^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

r es una función también de forma conocida, que depende de las variables de la integración y de a, b, c , puesto que es la distancia del punto P á cualquier punto de la superficie de la esfera: así

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

Por último, $d\sigma$ se expresará en función de las variables que determinan la posición de cualquier punto de la esfera en cuestión.

Efectuando la integral doble desaparecerán estas variables, y quedarán tan sólo a, b, c , que para la integración son como constantes, y que como hemos dicho, entran en r y en l .

El resultado de la integración será, por lo tanto, una función de forma perfectamente definida en a, b, c , que será precisamente la función desconocida que buscábamos y que representa el valor del primer miembro.

Si, por ejemplo, el resultado de la doble integración fuese $F(a, b, c)$, tendríamos

$$U = F(a, b, c).$$

Así, como decíamos, el problema de Dirichlet queda completamente resuelto para el interior de una esfera.

El problema exterior se resolvería del mismo modo, con sólo cambiar, por decirlo así, los puntos conjugados P y P' .

r es en este caso lo que r' en el anterior y recíprocamente.

En la conferencia próxima aún seguiremos el estudio del problema de Dirichlet, que es fundamental para la ecuación de Laplace y para la teoría de las armónicas.



**XLVI.—Conferencia sobre Física Matemática.
Teorías diversas.**

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimasexta.

SEÑORES:

En las primeras conferencias de este curso anuncié como programa del mismo las siguientes materias.

1.º El estudio de las atracciones newtonianas, el de la teoría de la potencial (*ó el potencial*, sustantivos que discutiremos otra vez) y de la ecuación de Laplace.

2.º El estudio de la integración de las ecuaciones diferenciales de la Mecánica, sobre todo en la forma canónica de Hamilton.

Todas estas teorías debían constituir la introducción del presente curso. En el que, como aplicación de algunas de aquellas teorías, acabaría la exposición de la de los torbellinos, interrumpida, por decirlo de este modo, por un escrúpulo sobre el empleo de ciertas fórmulas de Matemáticas puras, que yo sospechaba que mis alumnos no habían de conocer ó recordar.

Pero el curso avanza, y más que la duda, tengo la evidencia de que me será imposible cumplir del todo aquel programa.

Es más: aun temo no poder terminar la teoría de las potenciales, que es extensa, que es importantísima, y que es, si se me permite la palabra, delicada de exponer cuando se trata de principiantes.

No porque sea difícil, sino porque hay en ella sutilezas, y perdóneseme esta otra palabra, que yo quisiera poner en perfecta claridad ante mis oyentes; y para ello he necesitado largas explicaciones, que á mí mismo me parecen enojosas, pero que la práctica en la enseñanza me ha convencido de que son necesarias.

Sea como fuere, las materias que voy explicando en este curso, aunque al parecer son puramente matemáticas, en el fondo á la Física Matemática pertenecen.

Y al explicarlas, explico sin decirlo un curso de electricidad electrostática; y cuando le llegue el turno á esta ciencia, si es que le llega, encontraremos el terreno matemático limpio y despejado, y sin deternernos en desarrollos de puro cálculo, podremos marchar de frente por el campo propio de los equilibrios eléctricos.

No es, pues, tiempo perdido para el objeto principal de esta asignatura, sobre todo para la Física Matemática clásica, el que voy empleando en el estudio de las atracciones, de la ecuación de Laplace, de las armónicas y de las potenciales.

Ya iremos comprobando más adelante estos conceptos.

Y por ahora continuemos con el problema de Dirichlet.

*
* *

Pero antes recordemos algunas de las ideas que expusimos al comenzar el estudio de la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0.$$

Decíamos, que existen un número enorme de integrales particulares para dicha ecuación, y no faltaríamos á la verdad diciendo que un número infinito.

Todas las funciones que satisfacen á dicha ecuación, decíamos que se llaman *armónicas*.

Y citábamos muchos ejemplos particulares, y sin grandes esfuerzos hubiéramos podido citar muchos más.

Toda esta serie de integrales particulares pueden dividirse en grupos, y en familias, y entre estos grupos están las potenciales.

Y después de la clasificación, si se hubiera hecho, que no se ha hecho todavía que yo sepa, al menos de una manera completa, vendría el estudio de las relaciones entre todas estas funciones.

Y podría preguntarse, por ejemplo, si tal ó cual armónica es función de otras varias, y por el pronto tendríamos un teorema elemental, en el que se demuestra, que la suma de varias armónicas es una nueva armónica, cuando el número de sumandos es finito; porque cuando no lo es, el problema toma otro aspecto y la suma se convierte en serie; y, por último, entre otros problemas y teoremas aparecería el importante teorema de Harnac.

Y cito á capricho y desordenadamente teorías y nombres que al volar de la imaginación me ocurren.

En resumen: la materia es riquísima en desarrollos, que mis alumnos pueden estudiar, como ya hemos citado otras veces, en el libro de Mr. Poincaré sobre el potencial newtoniana (para los franceses el potencial es masculino) y también en la Mecánica de Appell.

Nosotros no podemos evidentemente agotar la materia, ni aun darle la extensión que desearíamos, y hemos de contentarnos con exponer lo fundamental, ó sea el conjunto de bases necesarias para abordar las Memorias y obras de los maestros.

Pero entre todas las funciones armónicas, para nuestro objeto tiene importancia especial el estudio de las potenciales, que va resultando la materia casi exclusiva de este curso.

La función potencial ya la hemos definido; pero aun esta función comprende muchos casos particulares, y necesitamos definir las *condiciones necesarias y suficientes* para que una función armónica sea función potencial.

Tomando por guía en este punto á Mr. Appell, estableceremos concretamente, que las propiedades características de la potencial U de un sistema de masas continuas son éstas:

1.º La función continua U es finita, así como sus derivadas primeras y segundas, en todo el espacio.

2.º La función U que consideramos, debe anularse en el infinito.

3.º Dicha función satisface á la ecuación de Laplace $\Delta U = 0$, en todo el espacio exterior á las masas atractivas, y á la ecuación de Poisson $\Delta U = -4\pi\rho$, en el interior de tales masas.

En rigor, no todas las potenciales están comprendidas en el grupo anterior. Por ejemplo, no lo están las potenciales de puntos discontinuos, que representen masas finitas; porque

$$U = \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right)$$

es una potencial, pero no en todos los puntos del espacio es finita. Así, en la figura 55, cuando se considera un punto a'' , distinto de los puntos a, b, c, \dots , en que están las masas m_1, m_2, m_3, \dots , la potencial es evidentemente finita, porque son finitas las m y las r .

Pero si el punto en que hemos de colocar la masa de prueba $m = 1$ se aproxima á cualquiera de los puntos del sistema, por ejemplo al a , de modo que a' está muy próximo á a , el sumando $\frac{m_1}{aa_1}$ será muy grande, y cuando

$a a'$ se anule, uno de los sumandos de U , á saber, $\frac{m_1}{r_1}$

será infinito, y la potencial también será infinita; luego, aun prescindiendo de las derivadas, no cumplirá con la primera condición, que es la de ser *función finita*.

Cumplirá con la segunda, porque para todos los puntos exteriores que se alejen hacia el infinito, las r serán infinitas

también, y siendo infinitos los dominadores y suponiendo que el número de masas es finito, el segundo miembro de U será una suma de ceros, y cero por lo tanto.

De modo que U se anula en el infinito.

Verifica aún este valor de U la primera parte de la condición tercera, puesto que U satisface, como hemos demos-

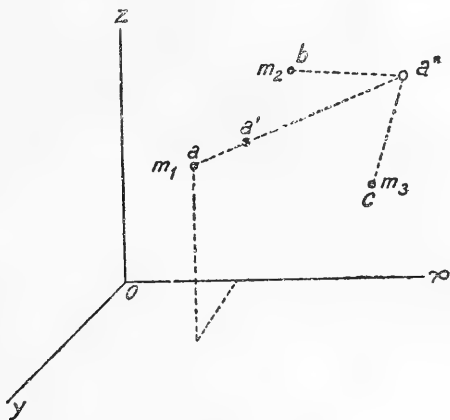


Figura 55.

trado, á la ecuación de Laplace; pero no tiene sentido la última parte de dicha condición.

Es decir, no satisface á la ecuación de Poisson, porque no hay masa en cuyo interior colocar la masa de prueba 1.

En sumá, estas potenciales están excluidas de las tres condiciones que antes hemos establecido.

En cambio están comprendidas, como la definición lo dice, todas las potenciales de sistemas compuestos de masas atractivas continuas M, M', M'' (fig. 56).

Tales sistemas cumplen con las tres condiciones.

En todo el espacio, así en los puntos A exteriores á las masas M , como en los puntos interiores, por ejemplo el B , la función es finita, y para tales sistemas ya lo hemos demostrado al principio de estas conferencias.

Cumple también la función del sistema con la segunda

condición, porque, por ejemplo, si se toma un punto en el infinito, las distancias de todos los puntos B de cualquiera de las masas, M por ejemplo, serán infinitas y podrán salir fuera de la integral, resultando

$$\iiint \frac{d\mu}{r} = \frac{1}{R} \iiint d\mu = \frac{M}{R};$$

y como M es finita, $\frac{M}{R}$ será 0 cuando R sea infinita.

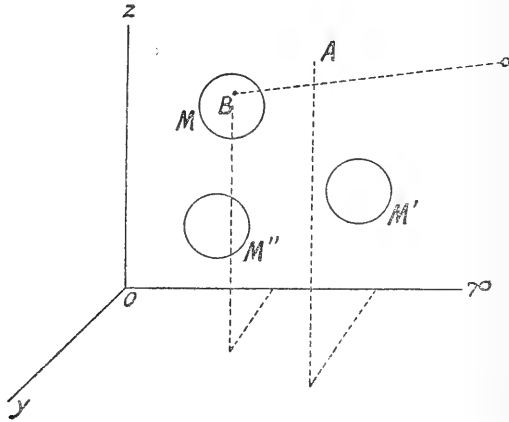


Figura 56.

Y otro tanto podemos decir para todas las demás masas.

Por último, cumple con la tercera condición, pues en estos sistemas de atracción newtoniana hemos demostrado, que la potencial U , para puntos A exteriores á las masas, satisface á la ecuación de Laplace

$$\Delta U = 0$$

y que para puntos interiores como B satisface á la ecuación de Poisson, siendo ρ la densidad de la masa M en el punto B ; así

$$\Delta U = - 4 \pi \rho.$$

Estas son, en efecto, las potenciales que hemos estudiado al tratar de las *masas continuas*.

De modo que tales condiciones *son necesarias* para que una función sea la potencial de un sistema de masas continuas.

Pero ahora vamos á ir más allá demostrando, no sólo que son condiciones necesarias, sino que *son suficientes*; es decir, que si se encuentra por cualquier procedimiento, ó más en general si se da, ó como dicen ciertos filósofos, si se *pone* una función $U_1(x, y, z)$, que cumpla con las tres condiciones indicadas, es decir, que sea finita, así como sus derivadas primeras y segundas, en todo el espacio; que se anule en el infinito; que verifique á la ecuación de Laplace fuera de las masas atractivas, y á la ecuación de Poisson en dichas masas; esta función U_1 puede afirmarse que será una potencial U que cumpla con las mismas condiciones.

En efecto; puesto que U_1 y U son finitas, su diferencia $U_1 - U$ será finita también.

Puesto que las derivadas primeras y segundas de ambas funciones son finitas según las hipótesis establecidas, las derivadas primeras y segundas de $U_1 - U$, ó sean

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dx} - \frac{dU}{dx} &= \frac{d(U_1 - U)}{dx}; \dots \frac{d^2 U_1}{dx^2} - \frac{d^2 U}{dx^2} = \\ &= \frac{d^2(U_1 - U)}{dx^2} \dots \end{aligned}$$

también serán finitas en todo el espacio.

Además, en todo el espacio exterior á las masas por hipótesis, ambas funciones aisladamente satisfacen á la ecuación de Laplace, es decir,

$$\Delta U_1 - \Delta U = 0;$$

luego

$$\Delta(U_1 - U) = 0$$

y, por lo tanto, resulta que esta función $U_1 - U$ satisface á la ecuación de Laplace en todo el espacio exterior á las masas.

Por fin, en el interior de las masas, aisladamente satisfacen á la ecuación de Poisson, ó sea, escogiendo las densidades ρ de U iguales á las constantes ρ de U_1

$$\Delta U_1 = -4\pi\rho, \quad \Delta U = -4\pi\rho$$

y, por lo tanto,

$$\Delta (U_1 - U) = -4\pi\rho + 4\pi\rho = 0.$$

Luego también la misma función $U_1 - U$ satisface á la ecuación de Laplace aun en el interior de las masas atractivas, y por lo tanto, en todo el espacio.

Pero hemos demostrado en una conferencia anterior, que toda función uniforme y finita, así como sus derivadas primera y segunda, que en todo el espacio satisface á la ecuación de Laplace, es decir, *que en todo el espacio es armónica*, y cuando se dice, que en todo el espacio es finita, y que en todo el espacio es armónica, así nos referimos al espacio finito como al infinito; toda función, repetimos, que cumple con estas condiciones, es *una constante*.

Ahora bien, la función $U_1 - U$, que desde luego suponemos que es uniforme, porque de no especificar lo contrario ésta es la hipótesis general, cumple con todas las condiciones anteriores; luego es una constante, es decir,

$$U_1 - U = \text{constante.}$$

Pero por hipótesis U_1 , U , y, por lo tanto, $U_1 - U$, son 0 en el infinito; luego la constante anterior es nula, y tendremos

$$U_1 = U.$$

De modo que U_1 se confunde con U y la función U es una potencial.

* *

Hemos dicho varias veces, que en la clasificación de las armónicas entraban las potenciales, y el teorema que acabamos de demostrar se funda en esto mismo; pero es indispensable que mis alumnos se fijen en una circunstancia importante, á saber: que las potenciales no son armónicas en todo el espacio; son armónicas en ciertas regiones y en otras no.

Una potencial es una función perfectamente definida en todo el espacio; pero sólo en una parte de él puede ser armónica, y habrá puntos ó regiones en que no lo sea, porque podrá presentar, ó puntos singulares por adquirir valores infinitos, ó regiones en que deje de satisfacer á la ecuación de Laplace.

En el teorema que acabamos de demostrar, y á que corresponde la figura 56, las masas M , M' , M'' , tienen una función potencial en todo el espacio, lo mismo fuera que dentro de las masas mismas; pero en el espacio exterior son armónicas y dentro de las masas no lo son, puesto que ya no satisfacen á la ecuación de Laplace, sino á la ecuación de Poisson.

Tenemos, por lo tanto, funciones que gozan de esta propiedad, verdaderamente extraña á primera vista; que sólo en una región ó dominio del espacio satisfacen á cierta ecuación diferencial determinada, y en otra región no satisfacen á esta ecuación diferencial.

Y es que la función es discontinua, con cierto grado de discontinuidad.

En el problema físico la discontinuidad *no es extraña*; porque existan ó no en el mundo inorgánico estas discontinuidades, nosotros hemos supuesto, que existen en la figu-

ra 56, en la que hay *un salto brusco*, desde el espacio exterior á las masas que, según la hipótesis de la Física clásica, está vacío, hasta el interior de las masas mismas, en el que está relleno de materia. La superficie que termina cada masa, determina, como veremos, cierta discontinuidad, si no en la función misma, en sus derivadas.

Estas discontinuidades en los fenómenos y sistemas del mundo material han ido filtrándose, por decirlo así, en las Matemáticas puras, y hoy se estudia con gran empeño, en Memorias muy dignas de consideración, la teoría de las funciones discontinuas.

* * *

Ya hace mucho tiempo, el célebre teorema de Fourier, que hemos de estudiar, con la atención que merece, en alguno de nuestros cursos, presentaba ejemplos notabilísimos y llevados á un grado sumo en esta teoría de la discontinuidad. Series comprende que, entre ciertos valores de la variable independiente, representan *una curva*; y entre otros valores *otra curva* completamente distinta, y la serie determina una línea formada por pedazos y nada más que por pedazos de curvas, que el alumno, en el estudio de las Matemáticas elementales considera completas, definidas por su ecuación propia en toda su extensión, y sin que puedan designar ninguna otra línea.

Así como, en el ejemplo físico que acabamos de presentar, un trozo, y valga la palabra, de la potencial es función armónica, es decir, satisface á la ecuación de Laplace, y otro pedazo ó trozo de la potencial misma no es armónica, y en vez de satisfacer á la ecuación de Laplace satisface á la ecuación de Poisson.

Que es lo mismo que si dijéramos: un trozo de una función satisface á una ecuación diferencial y el trozo ó los trozos restantes á otra ecuación diferencial distinta.

Por eso ha sido preciso ir modificando, á medida que la ciencia se desarrollaba, la definición de *las funciones*, que empezaron por ser las que expresaban modestamente sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, y han llegado á ser funciones, á veces desconcertantes y perdónese el adjetivo, que se llaman funciones discontinuas, sin contar con otras ampliaciones de la definición primitiva aun más atrevidas, pero que no son de este momento.

De todas maneras estas circunstancias, que acabamos de poner en relieve, obligan á gran precisión en la definición de los teoremas ó de las propiedades analíticas, que se van estudiando.

Por eso se especifica en cada propiedad *la región*, la parte del espacio, el *dominio*, como ahora se dice, en que tal ó cual propiedad existe. Por ejemplo, se dice que la función U es armónica en el dominio T , sin prejuzgar lo que será fuera: y se restringen, por lo tanto, los razonamientos y las conclusiones á dicho dominio T .

En este rigor lógico, y en estas definiciones precisas, es digna de estudio la obra tantas veces citada de Mr. Poincaré, á saber: la titulada «Potencial newtoniano».

Las demostraciones á veces parecen pesadas y lentas, pero es indispensable que lo sean para que sean rigurosas.

En cambio cuando se da una demostración *grosso modo* se corre el peligro de dar una demostración falsa, y fecunda, por lo tanto, en falsas consecuencias.

*
* *

Y, sin embargo, á pesar de lo que acabamos de afirmar, que es de suyo evidente, y que está comprobado por la historia de las ciencias matemáticas, las cuales, á pesar de su fama de exactas, fama merecida, sobre todo si se comparan con las demás ciencias, han empleado algunas veces demostraciones incorrectas, vamos á someter á nuestros lectores

algunas ideas propias sobre el teorema de Dirichlet, que son intuiciones, puntos de vista, orientaciones, pudiéramos decir, desprovistas de rigor lógico; pero téngase en cuenta que solo como intuiciones las consideramos aun cuando no es imposible, que puedan conducir y conducen á mi entender, á demostraciones rigurosas.

Supongamos que la superficie S , que marca un dominio en el teorema de Dirichlet, es precisamente la superficie lateral de un cubo ABC (fig. 57).

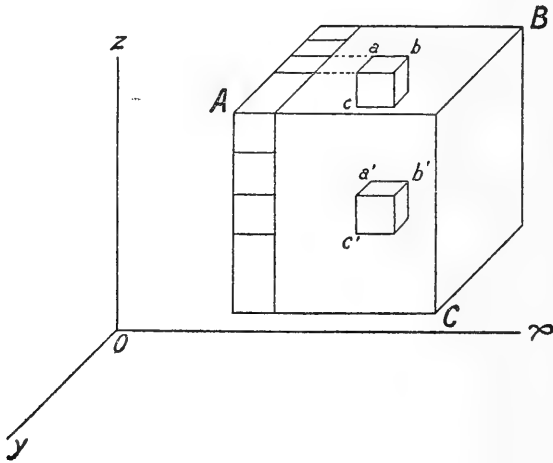


Figura 57.

Dividamos este cubo por planos paralelos á los planos coordenados, á los cuales son también paralelas las caras de dicho cuerpo.

El número de planos paralelos á cada plano coordenado, suponemos que sea $n - 1$, con lo cual cada arista quedaría dividida en n partes y el cubo ABC en n^3 cubos elementales.

Supondremos que n es un número entero muy grande, y que puede crecer indefinidamente, con lo cual los paralelepípedos elementales serán infinitamente pequeños, serán verdaderos elementos diferenciales del volumen V , que com-

prende la superficie S . Es decir, serán elementos diferenciales del *dominio*.

El volumen de cada cubo elemental será $dx \cdot dy \cdot dz$, siendo sus aristas las diferenciales de las coordenadas x, y, z .

Y aunque no es necesario para nuestra explicación, ni para las consideraciones que vamos á presentar, y nótese que, ni por costumbre empleamos la palabra *demonstración*; aunque no es necesario, repetimos, que sean iguales estos elementos diferenciales, para más sencillez todavía, como hemos supuesto, que el volumen es un *cubo* pudiendo ser un paralelepípedo cualquiera, supondremos, ya que las x, y, z son independientes

$$dx = dy = dz,$$

con lo cual el volumen del cubo elemental será

$$dx^3.$$

Para abreviar la explicación, cada uno de estos cubos elementales, ó celdillas del sistema, lo representaremos por la letra c con ciertos subíndices para distinguir unas celdillas de otras.

El teorema, ó problema de Dirichlet, consiste en fijar para cada punto de la superficie S un valor determinado, siendo todos ellos finitos, y variando por la ley de continuidad; y en hallar una función uniforme, finita, continúa, $U(x, y, z)$, que en el interior del *dominio* V limitado por S , dominio que, en nuestro caso, será todo el volumen del cubo; sea: 1.º, una función armónica, es decir, que satisfaga á la ecuación de Laplace; y 2.º, que en cada punto de la superficie S tenga el valor que de antemano se ha fijado.

Si para el dominio, que aquí es un cubo ABC , se hubiera resuelto el problema, claro es que conoceríamos la función $U(x, y, z)$ cumpliendo con las condiciones indicadas, y esta

función U tendría un valor determinado para el centro de cada cubo c en que ha quedado dividido el cubo total.

Si cada cubo elemental lo designamos por un número de orden, tendremos que U tomará para los cubos elementales

$$c_1, c_2, c_3 \dots \dots \dots c_{n^3}$$

un valor perfectamente determinado, que lo podremos indicar por los mismos subíndices de la serie de cubos c .

Corresponderán, pues, á los centros de los cubos

c_1	los valores de la armónica U	U_1
c_2	U_2
c_3	U_3
\vdots		\vdots
c_{n^3}	U_{n^3}

La columna de las U será la columna de las incógnitas: en cada centro de cada cubo elemental podemos imaginar, que existe un número, que será el valor correspondiente á dicho elemento cúbico, de la armónica U .

El problema consistirá, pues, en determinar todas las incógnitas U_1, U_2, \dots, U_{n^3} .

Será, por lo tanto, este problema, un problema con n^3 incógnitas y como en el límite n es infinito, en el límite sería un problema en que el número de incógnitas se convertiría en ∞^3 .

Parece que por este camino no hemos de llegar á ningún resultado práctico, y sin embargo yo creo que por este camino se obtienen *indicaciones útiles* y no me atrevo por hoy á decir fecundas, pero que en todo caso fortalecen intuiciones directas del problema y dan algo así como la *visión* de que el teorema es exacto y es posible, y quién sabe si orientan

hacia una solución del mismo orden y de la misma familia que las soluciones de Fredholm.

* * *

Supongamos, por el pronto, que al problema analítico en toda su pureza, en que U es continua, sustituímos otro problema con un número enorme, pero discontinuo, de valores de U ; que es sustituir al *conjunto* continuo que representa la función U el conjunto discontinuo que representan todos los valores de U para los centros de los cubos elementales.

En este caso, y mientras n sea finito, aun cuando sea muy grande, podemos demostrar que este problema de Dirichlet que no nos atrevemos á decir aproximado, aunque en el fondo esto pensamos, se puede resolver y tiene una solución única y en rigor depende de la solución de ecuaciones de primer grado.

Lo malo es que estas ecuaciones son en número inmenso y prácticamente no son más que una solución ilusoria.

Los matemáticos saben resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, tres ecuaciones con tres incógnitas, diez ecuaciones con diez incógnitas; pero aunque los métodos sean generales no puede resolverse un millón de ecuaciones de primer grado con un millón de incógnitas, como no puedan agruparse de cierto modo conduciendo á operaciones finitas y prácticas.

Sería preciso, que se demostrara, que las determinantes, á que la solución elemental conduce, eran convergentes y que se pudiera descubrir la ley de convergencia, ó se lograra convertir las expresiones obtenidas, en series ó integrales determinadas. En suma, que estos infinitos pudieran condensarse trayéndolos á términos finitos, que son los únicos accesibles para la inteligencia humana.

Con todas estas salvedades repetimos lo que antes aventuramos: El problema de Dirichlet, aplicado al cubo de ele-

mentos discontinuos, es un problema perfectamente determinado, en que el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones y en que la solución es *única*.

*
* * *

Los cubos elementales en que se ha descompuesto el cubo principal, pueden tener dos posiciones:

1.^a O son cubos interiores, como $a'b'c'$ figura 57.

2.^a O son cubos que pertenecen á la capa exterior, y entonces una de sus caras coincidirá con una de la caras del cubo principal, por ejemplo, el abc , cuya cara superior ab coincide con la cara AB . O tendrán *dos caras* comunes con la superficie exterior, como sucede con los de las aristas. O por fin, otros *cubos* tendrán *tres caras* comunes con la capa exterior: á saber, los de los vértices.

A los elementos de volumen de la capa exterior, que vendrán á constituir las seis caras del cubo dado, ó mejor dicho, á apoyarse sobre ellas, los designamos por c_e .

Y á los cubos del interior, que serán todos menos los de la capa exterior, los designaremos por c_i .

En el centro de cada cubo c_e la función armónica U tendrá un valor determinado U_e y estos valores serán los datos del problema, serán los valores á que ha de satisfacer la función armónica U que buscamos para todo el volumen.

Cuando el número n de planos aumenta, los volúmenes elementales c disminuyen y los valores U_e que corresponden á los centros de c_e se aproximan indefinidamente á las superficies del volumen ó dominio, como antes decíamos, que constituyen el cubo.

En el límite son los valores á que ha de satisfacer la armónica U en la superficie S . Es decir, en las seis caras del cuerpo de que se trata.

Claro es, que en este caso particular, ó si se quiere, esquema, del problema de Dirichlet, se observa que la su-

perficie S no es continua, se compone de seis planos y tiene puntos y líneas singulares de discontinuidad, como son las vértices y las aristas. Mas, para nuestro objeto, que no es el de dar una demostración nueva y rigurosa del célebre problema, sino el de apuntar algunas ideas con la esperanza de que sean sugestivas, esto importa poco.

Si los valores U_e de la capa exterior son los datos del problema, los valores U_i de los centros de los cubos interiores $a' b' c'$ serán en cambio las *incógnitas*, y el conjunto de estos valores U_i , el complejo, pudierámos decir, que forman, constituirá la función armónica del interior.

En la figura 58, por el sistema de la geometría descriptiva ordinaria, y siendo $o x$ la línea de tierra, hemos presentado las proyecciones de un cubo interior c_0 y de los cubos inmediatos en el sentido de los tres ejes.

Así, pues, la figura está formada por un cubo central c_0 .

Por dos cubos, el de un lado y otro en el sentido del eje de las x , que designaremos por c_{x1} c_{x2} .

En dicha figura 58, están representados en proyección horizontal y vertical y están designados por las mismas letras, á saber, por c , inicial de cubo; además por un primer subíndice x , para indicar que los centros de los tres cubos sucesivos están en una paralela al eje de la x , como se ve en ab , $a' b'$; y por los subíndices 1 y 2.

Constituyen además dicha figura otros dos cubos c_{y1} y c_{y2} , cuyos centros con el de c_0 están en una línea paralela al eje de las y , que se proyecta horizontalmente en fg , y verticalmente en c_0 .

La notación es análoga á la anterior. El subíndice y , indica, como acabamos de decir, que los centros de estos dos cubos y del cubo central están en una línea paralela al eje de las y , y los segundos subíndices 1, 2, distinguen al primero del segundo.

Por último, aparecen en la figura otros dos cubos elementales c_{z1} , c_{z2} , cuyos centros con el c_0 están en una línea he ,

paralela al eje de las z , como se ve en la proyección vertical.

Horizontalmente se proyectará en c_0

Es, pues, un conjunto de siete cubos elementales.

$$c_0, c_{x1}, c_{x2}, c_{y1}, c_{y2}, c_{z1}, c_{z2},$$

Uno central y otros seis apoyándose en sus seis caras.

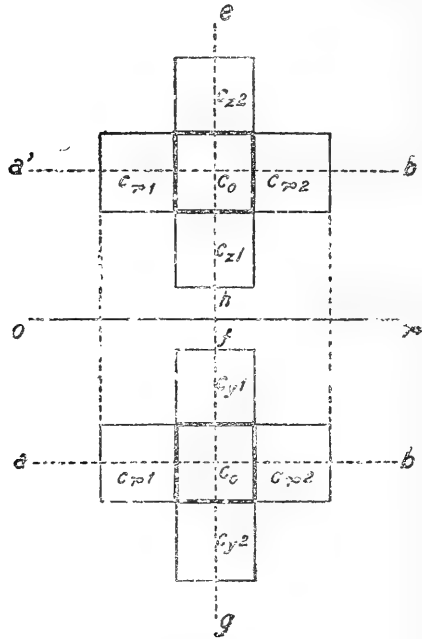


Figura 58.

Podrá extrañarles á mis alumnos ó á mis lectores la elección de esta figura y la elección de las notaciones, pero bien pronto comprenderán su objeto.

Nuestra idea es muy sencilla, aunque para explicarla con claridad necesitemos emplear muchas palabras.

Por fin, para terminar este punto, al centro de cada uno de estos cubos corresponderá, y suponemos que en él existe,

un valor de la función armónica U ; función, repetimos, de las tres coordenadas x, y, z , que definen el centro de cada elemento de volumen, ó si se quiere un valor del complejo U_i que en el sistema discontinuo sustituye á la función continua U .

Claro es que á estos valores de la función armónica, para cada centro les aplicaremos las mismas notaciones que á los cubos.

Y así á los centros de los siete elementos de volumen

$$c_0, c_{x1}, c_{x2}, c_{y1}, c_{y2}, c_{z1}, c_{z2},$$

corresponden los siete valores

$$U_0, U_{x1}, U_{x2}, U_{y1}, U_{y2}, U_{z1}, U_{z2}.$$

Como hemos dado, y permítasenos que empleemos esta palabra, un esquema del problema, vamos á dar un esquema de la resolución.

*
* *

Buscamos una función armónica U_i , que tenga en la superficie los valores U_e , y, por lo tanto, como U_e son cantidades conocidas, el total de incógnitas será únicamente U_i .

En suma: todos los valores U_e de la superficie son los datos, como ya hemos dicho.

Los valores U_i son las incógnitas.

Los primeros son conocidos; á ellos ha de sujetarse U .

Para conocer los segundos tenemos la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

á la cual han de satisfacer.

Este es el problema; buscar un complejo de valores de U_i que satisfagan á la ecuación de Laplace y que en la superficie tomen los valores U_e .

Pero las armónicas pertenecen á las funciones continuas, y el complejo U_i es un sistema discontinuo, mientras n no sea infinito. Es decir, mientras no se pase al límite.

Luego á la ecuación de Laplace debemos sustituir la ecuación discontinua, que le corresponde en el sistema discreto, que estamos considerando; y esto es bien sencillo.

Consideremos, una por una, las tres derivadas segundas de la ecuación de Laplace.

Empecemos por $\frac{d^2 U}{dx^2}$.

Dicha derivada segunda es la derivada con relación á x de la derivada primera, ó sea

$$\frac{d \frac{d U}{d x}}{d x}.$$

Y la derivada primera resulta de tomar la diferencia entre dos valores consecutivos de U sobre el eje de las x , y después hay que dividir por dx .

Y análogamente, para hallar la derivada segunda, habrá que tomar la diferencia de dos derivadas primeras consecutivas y volver á dividir por dx .

Con esto, empezaremos á darnos cuenta de la significación que tiene para nuestro problema la figura 58, y el porqué hemos considerado tres cubos consecutivos en la dirección de los tres ejes coordenados, y, por consiguiente, tres valores consecutivos de la armónica U .

Los tres valores consecutivos de la armónica U , paralelamente al eje de las x , en los tres cubos elementales,

$$c_{x1}, \quad c_0, \quad c_{x2},$$

serán, como hemos visto,

$$U_{x_1}, \quad U_0, \quad U_{x_2},$$

que determinarán como equivalentes á dos derivadas primeras consecutivas, las dos expresiones

$$\frac{U_{x_2} - U_0}{dx}, \quad \frac{U_0 - U_{x_1}}{dx};$$

y como equivalente á la derivada segunda la siguiente expresión,

$$\frac{\frac{U_{x_2} - U_0}{dx} - \frac{U_0 - U_{x_1}}{dx}}{dx}$$

ó bien

$$\frac{U_{x_2} - 2U_0 + U_{x_1}}{dx^2}. \quad [1]$$

Repitiendo los mismos razonamientos para los tres cubos que corresponden á la dirección del eje de las y , y que tienen el mismo cubo central, podremos decir, que en el sistema discontinuo corresponde á la segunda derivada con relación á y , ó sea á $\frac{d^2 U}{dy^2}$ la expresión

$$\frac{U_{y_2} - 2U_0 + U_{y_1}}{dy^2}. \quad [2]$$

Y por último, obtendremos en la dirección de las z , como equivalente á la segunda derivada $\frac{d^2 z}{dx^2}$, esta expresión análoga á las precedentes:

$$\frac{U_{z_2} - 2U_0 + U_{z_1}}{dz^2} \quad [3]$$

Y substituyendo los tres valores [1], [2], [3] en la ecuación de Laplace, tendremos, si así puede expresarse, la ecuación equivalente á la de Laplace, á que en el sistema discontinuo han de satisfacer todos los valores de U interiores al cubo principal, á saber:

$$\frac{U_{x_2} - 2U_0 - U_{x_1}}{dx^2} + \frac{U_{y_2} - 2U_0 + U_{y_1}}{dy^2} + \frac{U_{z_2} - 2U_0 - U_{z_1}}{dz^2} = 0.$$

Pero hemos dicho, que por ser independientes x , y , z y para simplificar, suponemos que los volúmenes elementales son cúbicos, es decir, que se tiene $dx = dy = dz$.

Pues quitando los denominadores y simplificando la ecuación general á que deben satisfacer todos los valores de U en el interior del volumen, quedará reducida á esta ecuación sencillísima de primer grado: á ella deberán satisfacer todos los valores interiores y aún exteriores de U ,

$$U_{x_2} + U_{x_1} + U_{y_2} + U_{y_1} + U_{z_2} + U_{z_1} - 6U_0 = 0. \quad [A]$$

Tal es la fórmula general para todos los cubos interiores y exteriores; pero pudiera suceder que en la figura 58 el cubo, por ejemplo, c_{x_2} (y lo mismo podríamos decir del opuesto) sea uno de los de la capa exterior.

Y en este caso la fórmula [A] subsiste; pero el valor U_{x_2} no sería una incógnita, sino que por pertenecer á la capa exterior del volumen, que es como si dijéramos á la superficie S , será un dato. Es decir, una cantidad conocida U_e , en

cuya hipótesis la ecuación [A] ya no tendrá siete incógnitas, sino seis, y tomará esta forma:

$$U_e + U_{x_1} + U_{y_2} + U_{y_1} + U_{z_2} + U_{z_1} - 6 U_0 = 0. \quad [B]$$

El primer término es, en efecto, una cantidad conocida. Y otro tanto podríamos repetir para cada uno de los cubos que rodean á c_0 si están en la superficie.

También puede ocurrir otro caso: que dos de los cubos exteriores, por ejemplo, c_{x_2} , c_{y_2} correspondiesen á dos caras exteriores del cubo principal, en cuyo caso no serían incógnitas, sino datos, U_e , $U_{e'}$, y la ecuación [A] no contendría siete incógnitas, sino cinco, y sería de esta forma:

$$U_e + U_{x_1} + U_{e'} + U_{y_1} + U_{z_2} + U_{z_1} - 6 U_0 = 0. \quad [C]$$

Por fin hay otro tercer caso: que tres cubos de la fig. 58 correspondan á tres caras exteriores del volumen total.

Si esto sucede, la ecuación fundamental [A] sólo tiene cuatro incógnitas, y en cambio U_{x_2} , U_{y_2} , U_{z_2} , por ejemplo, no serán incógnitas, sino que serán datos del problema, y, por tanto, cantidades conocidas U_e , $U_{e'}$, $U_{e''}$, con lo cual la ecuación [A] tomará esta forma:

$$U_e + U_{x_1} + U_{e'} + U_{y_1} + U_{e''} + U_{z_1} - 6 U_0 = 0. \quad [D]$$

Por último, dado este sistema discontinuo se observa, que los volúmenes infinitamente pequeños c que corresponden á las aristas y á los vértices del cubo principal no pueden aparecer en estas fórmulas que sustituyen á la ecuación de Laplace, tal como hemos formado las expresiones, que sustituyen á las derivadas.

Pero esto importa poco, porque en primer lugar corres-

ponden á la capa exterior, y tienden á desaparecer á medida que n aumenta, pues los cubos elementales son cada vez más pequeños. Además, son cantidades conocidas por el mismo enunciado del problema.

Aún podríamos apurar más este punto; pero como no nos proponemos dar una demostración exacta, sino apuntar algunas ideas de forma intuitiva, no insistiremos más sobre él.

Vemos, en resumen, que todos los cubos interiores satisfacen á ecuaciones de la forma $[A] [B] [C] [D]$: que todas son ecuaciones de *primer grado*, la mayor parte con siete incógnitas, y las que corresponden á una cara, á dos, ó á tres con seis, cinco ó cuatro incógnitas; y que los demás términos son cantidades conocidas, porque son valores de U para la capa exterior, ó si se quiere, para la superficie S .

*
* *

Y con esto podemos terminar rápidamente el ejemplo que hemos presentado.

El número de valores de la armónica que buscamos es igual al número de cubos elementales; de modo que

$$\text{número de valores de } U \dots\dots\dots n^3.$$

De éstos, todos los que corresponden á los cubos de la capa exterior, son datos: determinemos su número.

En la capa superior (fig. 58 bis) (N), siendo $n - 1$ el número de planos, el número de cuadrados, ó sea el número de cubos elementales será n^2 .

Y como para la capa de la base podemos decir otro tanto, entre la capa superior y la inferior, resultarán $2n^2$ cubos y otros tantos valores conocidos de U .

Pasemos á las capas que forman las caras laterales.

La anterior, por ejemplo (N'), contendrá evidentemente $n(n-2)$ cubos, descontando las filas superior é inferior, que ya están contados en las capas, también inferior y superior.

Y como de la capa posterior podemos decir otro tanto, resultan entre ambas $2n(n-2)$, y tendremos igual número de valores U_e conocidos.

Quedan otras dos caras (N'') del paralelepípedo; pero cada una de ellas ha perdido una fila superior y otra inferior, y además otras dos filas laterales, es decir, que contendrá cada una $(n-2)^2$ cubos, y las dos juntas $2(n-2)^2$ luego tendremos por este concepto $2(n-2)^2$ incógnitas menos, porque todos los valores U_e de las capas exteriores son conocidos.

Las consideraciones que preceden están representadas gráficamente en la figura 58 bis.

El cuadrado N con sus divisiones indica la capa superior y la inferior del cubo.

El cuadrado N' representa la capa anterior y la posterior.

Y el cuadrado N'' las dos capas laterales.

Sumando los tres números obtenidos, vemos que hay que restar del número de incógnitas, por tratarse de cantidades conocidas, el siguiente

$$2n^2 + 2n(n-2) + 2(n-2)^2 = 6n^2 - 12n + 8$$

y así

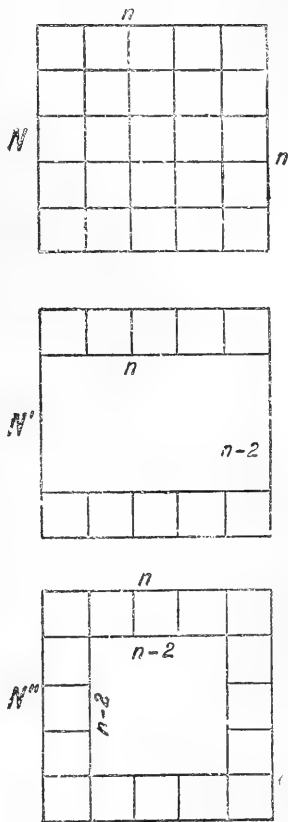


Figura 58 bis.

número de cantidades conocidas $6n^2 - 12n + 8$.

Restando del número total de valores de U que dijimos que era n^3 el anterior, obtendremos el número de incógnitas ó cantidades desconocidas.

Resulta, pues,

$$\begin{aligned} \text{número de incógnitas } n^3 - (6n^2 - 12n + 8) &= \\ &= n^3 - 6n^2 + 12n - 8. \end{aligned}$$

Estas incógnitas habrá que determinarlas por las ecuaciones $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ que es donde entran los valores de U_i .

Su número es precisamente el de cubos interiores. Pero el cubo total tenía de lado n divisiones, el cubo interior tiene $n - 2$ y contendrá $(n - 2)^3$, ó desarrollando $n^3 - 6n^2 + 12n - 8$.

Mas á cada cubo corresponde una ecuación de las $[A]$ $[B]$ $[C]$ $[D]$, luego

$$\text{número de ecuaciones } n^3 - 6n^2 + 12n - 8.$$

que es exactamente igual al número de incógnitas.

Así, pues, en este sistema artificial, que hemos creado á semejanza de los sistemas continuos, que supone el problema de Dirichlet, el problema está resuelto y resuelta *una solución única* y bien *determinada* para valores finitos de n .

Ahora bien; para resolver rigurosamente el verdadero problema de Dirichlet, aún tendríamos que recorrer mucho camino; porque, en efecto, el número de ecuaciones de primer grado, es, por decirlo así, triplemente infinita y la determinante total del denominador y las determinantes menores que entrarían en los numeradores, son determinantes de forma infinita también, y todas ellas y sus relaciones requieren un estudio especial, en el que no podríamos detenernos, aun teniendo la seguridad del resultado.

Para nuestro objeto, y por si las ideas que preceden pudieran contener algún gérmen fecundo, basta con lo dicho.

XLVII.—Fototropia y fotoluminescencia.

ESTUDIO PRELIMINAR POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Al ocuparme, tiempo atrás, en el estudio particular de la fotoluminescencia en los sulfuros de calcio, con ánimo de determinar sus condiciones y en especial las de impresionabilidad de algunos de ellos respecto de la luz, hube de observar un cambio notable en la coloración, blanca más ó menos agrisada, de ciertos cuerpos en los cuales era el dicho sulfuro de calcio disolvente sólido, apenas eran sometidos á intensa iluminación, pero sin que los excitasen los rayos solares. Tornábanse entonces de marcado color rojizo, más ó menos violáceo, y recobraban el primitivo al cesar la intensa acción luminosa y recibir de nuevo la luz difusa; y al cabo de bastantes años conservan, sin disminución alguna, semejante propiedad, sin haber variado en nada, como cosa inherente á su misma constitución, á juzgar por aquellas condiciones de persistencia y de reversibilidad, ya señaladas, antes de ahora, por características particulares del curioso fenómeno observado.

Muy al contrario de ser general, sólo determinados sulfuros de calcio lo presentaban y no parecía tener relaciones con los métodos de obtención, ni siquiera con la misma fosforescencia. Era el caso que muchos, dotados de ella en su grado máximo, no cambiaban de color, y otros lo mudaban en la forma expresada; varios no fosforescían y su coloración variaba; los había poco fosforecentes y muy sensibles para volverse rojizo violados, y los obtenidos mediante las acciones del vapor de azufre sobre la cal viva en fragmentos á la temperatura del rojo muy vivo, presentaban el cambio

de color de una manera bien particular: algunos trozos, apenas sometidos á intensa iluminación, volvíanse de marcado color rojizo violado, los otros permanecían blancos, y llevado el cuerpo á la obscuridad, se advertía cómo sólo estos últimos eran fosforescentes y con mucha intensidad la mayoría de las veces. Lo cual parecía demostrar, muy á las claras, cierta independencia de los fenómenos examinados.

Bien se comprende lo particular del hecho, conforme de primera intención había sido notado. Dijérase privativo de los sulfuros de calcio fotoluminescentes, y eso no de todos cuantos en mis experimentos había obtenido, y son en gran número; pues ninguno de los sulfuros de bario y de estroncio, que hasta entonces había preparado, cambiaban de color en la manera que es dicha. Parecía no relacionarse el hecho ni depender del fosforógeno ó materia activa, por cuanto era distinta la contenida en las masas que lo presentaban. Tampoco era dable atribuirlo á la temperatura ni á la manera de preparar los sulfuros, porque desde el principio observé cómo tales circunstancias para nada influían en el fenómeno; el cual creyéralo fortuito, de no haber notado repetidas veces cómo ciertos sulfuros, y precisamente de calcio, expuestos al aire cierto tiempo, para provocar una oxidación superficial, suelen cambiar un poco de color, aunque entonces la variación es permanente é implica un cambio químico y parcial de la naturaleza del disolvente ó diluyente de la substancia activa.

No era, pues, dable establecer, de buenas á primeras, ni siquiera una regla para conseguir á voluntad sulfuros de calcio susceptibles de cambiar de color mediante las acciones de una intensa iluminación en las condiciones en las cuales tal hecho fuera notado, ni menos todavía determinar su generalidad ó explicar sus causas. Sólo podía, conforme lo hice, examinar detenidamente las condiciones de su producción, estudiarlas por menudo y atribuirlo, apoyado en buenas razones, á una acción fotoquímica reversible, sin

que hasta la fecha de los primeros estudios hubiesen llegado á mi conocimiento trabajos ó investigaciones anteriores referentes al caso, en verdad bien curioso y digno de ser estudiado con la debida atención que he procurado prestarle, de mi parte, cuanto ha sido posible, creyendo haber llegado á ciertas conclusiones interesantes, las cuales trataré de exponer y razonar en la presente Memoria, que servirá de preliminar á una serie de trabajos de pormenor y de investigaciones originales relativas á los fenómenos de la fotoluminiscencia.

Conviene recordar, á modo de punto de partida, las analogías y semejanzas del fenómeno por mí observado con otros hechos, tampoco frecuentes, pero bien estudiados y conocidos. Me refiero á los cambios de color de ciertos cuerpos mediante la sola y directa acción de la luz, que constituyen lo que Marckwald llamó *fototropia*, y á la cual es menester añadir los del sulfuro de calcio objeto de mis investigaciones. Datan de 1903 los primeros trabajos que acerca del particular se han publicado (*), completados más tarde con nuevos datos y observaciones (**), y trato de aumentarlos con otros varios experimentales y ciertas consideraciones teóricas por ellos sugeridas, y repetiré, al comenzar estos preliminares, lo dicho en anteriores ocasiones, es á saber: que no ha llegado á mi noticia, ni mi diligencia ha podido dar con ningún trabajo ni estudio referente á la fototropia de los sulfuros alcalino-terrosos foto luminescentes, siquiera tal fenómeno haya sido bien estudiado con relación á ciertas substancias orgánicas.

Ocurre el caso del cambio de color en algunos minerales

(*) *Anales de la Sociedad Española de Física y Química* I, página 346 (1903),

(**) *Ibidem*, III, pág. 40 (1905). *Archives des Sciences Physiques et Naturelles* quatrième periode, t. XXV, pág. 15, Genève, 1908. *Asociación española para el progreso de las Ciencias*. Congreso de Zaragoza, 1908, *Rev. R. Acad. Ciencias*, Febrero, 1909.

harto conocidos, y se puede citar á tal propósito la llamada *pedra careta*, de procedencia española, constituida por compuestos manganosos hidratados. De color pardo oscuro, casi negro en el exterior, es en la fractura reciente blanco rosado; mas al aire pronto cambia; pero no ha de confundirse esta oxidación, debida al oxígeno atmosférico, con la fototropía, por más que en ciertos casos de irreversibilidad la luz actúa á modo de catalizador para determinar oxidaciones bastante completas. En punto á ello vale citar, á guisa de ejemplos, los fenómenos de oxidación observados por Stobbe en los complicados cuerpos, casi siempre ferúlicos, llamados fúlgidos, muy sensibles á las acciones de la luz.

Demuestran los hechos hasta el presente observados, cómo los fenómenos de fototropía son, en general, acciones químicas producidas mediante influencias directas de las radiaciones luminosas ó de las ultravioladas, pudiendo obrar como energías aceleradoras de los cambios moleculares, aun en los casos de catálisis fotoquímica, y esto lo mismo tratándose de fototropías reversibles que de las irreversibles ó de las pseudoreversibles, cuyas dos últimas categorías corresponden á reacciones completas y la primera á estados de equilibrio inestable de los sistemas fototrópicos. Asimilables, en gran parte, los constituidos por los sulfuros alcalino-terrosos á los fúlgidos de Stobbe (*) en cuanto á la manera de ser impresionados por la luz, difieren notablemente de ellos respecto del mecanismo del hecho y de los cambios experimentados por las masas susceptibles de cambiar de color, y á mi entender, tratarse de un caso particular de fenómenos fotoquímicos.

Por creerlo así y tener por bastante más sencillo el caso

(*) Liebig: *Annalen*, 359, 1 (190-).

Zeitschr. f. Elektrochem., 14, 473 (1908).

Discurso en la Bunsengesellschaft. Reunión de Viena (Mayo de 1908).

examinado, en cuanto no presenta, á lo menos en apariencia, aquellos estados intermedios característicos de los fúlgidos, ó no son observables á causa de la velocidad del cambio de color, se escribe el presente estudio preliminar, y desde luego me aventuro á decir que la fototropía de los sulfuros alcalino-terrosos es un cambio químico directo, rectilíneo, reversible, y no un fenómeno de los calificados de fotocatalíticos, sino rápida transformación química reversible que ha menester para ser llevada á cabo la presencia de ciertas radiaciones del orden de las de menor longitud de onda. Sin aventurar, desde el principio, ningún género de hipótesis, puede asegurarse la especificidad del hecho, demostrada, conforme veremos, al estudiar el pormenor de sus apariencias y sus relaciones con la constitución particular de todos los agregados en los cuales ha sido bien observado.

En punto á ello hay ya que hacer una primera ampliación, y consiste en afirmar cómo no es el cambio de color sólo privativo de los sistemas en los que hace oficios de diluyente el sulfuro de calcio, porque ha sido advertido, con notable intensidad, en otros, exentos de sulfuro de calcio en absoluto, que tenían por diluyentes sulfuros de estroncio y de bario, si bien con el último las alteraciones de la coloración de la masa no son uniformes. Semejante cosa no se halla en contradicción con lo expuesto en anteriores trabajos; antes bien, los confirma y apoya, y ha servido para emprender otros más detenidos, de cuyos resultados se dará cuenta en sazón, sirviéndoles á manera de prólogo la presente Nota, en la cual expongo en compendio lo hasta el presente hecho, con el debido comentario.

*
* *

Quería yo volver á mis antiguas investigaciones respecto de los sulfuros alcalinos terrosos fotoluminescentes, con intento de examinar, muy por menudo, algunas de sus pro-

iedades, cuyo conocimiento es, á la hora presente, bastante incompleto, y ayudado de la eficacísima y nunca bastante agradecida colaboración de mi buen amigo D. Modesto Maestre, hube de emprender la nueva tarea, comenzando por preparar tres series de cuerpos fotoluminescentes, de cinco ejemplares cada una y cuyos diluyentes fueron respectivamente los sulfuros de bario, estroncio y calcio. Tenía capital interés para los ulteriores experimentos el proceder exactamente de la misma manera en la obtención de los productos fosforescentes, partiendo de primeras materias análogas y sometiénolas á idénticas operaciones, y dióse en tal punto la preferencia á aquellos antiguos métodos que Becquerel empleara con excelente resultado en sus clásicos experimentos de la fosforescencia, si bien modificándolos algún tanto, conforme pedíanlo las mismas necesidades de los nuevos experimentos. Era indispensable, para realizarlos con acierto, que los sistemas de los diluyentes fuesen en absoluto blancos y transparentes, lo cual quiere indicar que su color no absorbiese luz y que el fosforógeno, empleado en proporciones mínimas, se difundiese en la masa de los dichos diluyentes de la manera más uniforme posible.

Fué adoptado como método exclusivo de obtención la acción del azufre en flor, bien puro, sobre los carbonatos de bario, de calcio y de estroncio, impregnados de los fosforógenos ó materias activas que luego se dirán y de las precisas y siempre exiguas cantidades de cloruro y de carbonato de sodio. Se operó á temperatura elevada, de 900 á 1.000°C sostenida de tres á cinco horas, según los casos, y seguida de muy lento enfriamiento. Como aun los carbonatos reputados de purísimos no dieron en su examen analítico resultados todo lo satisfactorios precisos, porque siempre fué acusada la presencia del hierro, siquiera en mínimas proporciones, se han preparado en el laboratorio, y acerca del particular debo consignar aquí ciertas observaciones que juzgo interesantes.

Requíerese, como condición indispensable para la fotoluminiscencia que el diluyente sea blanco ó de color agrisado muy claro; si su masa está teñida por un sulfuro de tono pardo obscuro ó negro difundido en su masa, el sistema resulta inerte y en ningún caso es impresionado por la luz, y lo propio acontece si se han formado polisulfuros de color verde aceituna ó verde amarillento obscuro. En particular, el sulfuro de hierro tiene cualidades extremadas en punto á anular la impresionabilidad para la luz y la fotoluminiscencia á ella inherente, y tengo observado repetidamente cómo bastan algunas milésimas de sulfuro de hierro agregado á los correspondientes carbonatos para que luego de actuar sobre ellos el azufre, á temperatura elevada, resulten masas parduzcas del todo insensibles á las acciones de la luz. Con el sulfuro de bario el hecho es singular y bastan indicios de hierro para que se produzcan grandes perturbaciones en su luminiscencia, caso de presentarla, que no es frecuente. También resulta nociva la presencia de la materia orgánica, procedente de los carbonatos—y la contienen siempre los comerciales—porque actúa como reductor, á temperatura elevada, sobre la materia del fosforógeno, llegando á anular su actividad; y esto téngolo notado mezclando de intento ó agregando substancias orgánicas ricas de carbono en cantidades menores del 1 por 100. En cambio, da buenos resultados el cubrir las mezclas puestas en los crisoles con una ligera capa de polvo de almidón.

Guiado por los resultados de anteriores experimentos, tratamos de obtener en el laboratorio los carbonatos purísimos de bario y de estroncio, en absoluto exentos de hierro y libres de materia orgánica, partiendo de los mismos productos comerciales y el carbonato de calcio, empleando las cáscaras de huevo, sometiénolas antes á prolongada calcinación á la temperatura del rojo vivo. Procedíase disolviendo en ácido clorhídrico puro, y llamó nuestra atención la enorme cantidad de hierro y de manganeso contenidos en

las cáscaras de huevo empleadas, tanto como su pobreza de compuestos minerales de otros géneros; su análisis completo será publicado más tarde.

Se evaporaban hasta sequedad las disoluciones clorhídricas, y el residuo, á su vez disuelto en agua, era tratado hirviendo con sulfhidrato amónico, y luego de filtrado el líquido era de nuevo evaporado hasta sequedad y calentado el residuo sólido durante largo tiempo en baño de María, repitiendo las disoluciones, precipitaciones, filtraciones, evaporaciones y calentamientos hasta que por ningún medio era posible demostrar la presencia del hierro. Llegado este término, los cloruros anhidros, de singular blancura, eran al punto disueltos en agua destilada, obteniendo disoluciones de concentración media, de las cuales se precipitaban los correspondientes carbonatos, empleando—conforme aconsejaba antaño Becquerel—disoluciones concentradas y recientes de carbonato amónico sin el menor indicio de hierro. Durante la precipitación manteníanse en movimiento el líquido, merced á un agitador mecánico de paletas de vidrio y con el reposo el precipitado, de singular finura, depositábase en el fondo de las vasijas al cabo de doce horas, en condiciones de poder ser fácilmente recogido y lavado; debe emplearse siempre bastante exceso de disolución de carbonato amónico. Ha de lavarse primero por contacto y decantación y luego en filtro con agua hirviendo hasta el completo agotamiento de todas las materias solubles y total desaparición del olor amoniacal, y sólo cuando esto se ha conseguido hay seguridad de tener una buena primera materia adecuada para preparar los sistemas fotoluminescentes empleados en los nuevos experimentos.

Hubimos de emplear, en calidad de fosforógenos, los cloruros de manganeso, de bismuto, de antimonio y de cobre y sulfato de cinc en proporciones tales que resultaba 0,001 gramo de cada metal por 100 gramos de cada uno de los carbonatos empleados como disolventes, y habiendo demos-

trado antiguas prácticas la eficacia de la presencia de leves proporciones de materias alcalinas, se agregaron 1 por 100 de carbonato de sodio y 0,5 por 100 de cloruro de sodio, confirmando antes su absoluta pureza. Demuestra la insistencia en todos estos pormenores su necesidad para el buen resultado de las operaciones ulteriores.

Teniéndolos en cuenta, se procedía á incorporar á la masa de los carbonatos las sustancias destinadas á hacer de fosforógenos; empleamos el método de impregnación en la forma siguiente: los precipitados, todavía húmedos, pero ya completamente lavados, eran colocados en cápsulas de porcelana, y con agua se formaba una pasta clara, á la cual se agregaba, disuelta, la materia activa, empleando la cantidad estrictamente necesaria de ácido clorhídrico cuando aquélla es de las que se fraccionan en el agua. Luego, y también disueltos, se añaden el cloruro y el carbonato de sodio, y sin dejar de agitar la mezcla se evapora hasta completa sequedad en el baño de María, y ha de resultar homogénea, de perfecta blancura y enteramente exenta de olor amoniacal. Entonces puede ser mezclada con el azufre en flor, empleando cosa de 5 por 100 más de la cantidad calculada, usando mortero de porcelana barnizada y triturando é incorporando las dos sustancias hasta lograr una masa lo más homogénea posible y de color uniforme, la cual ha de ser puesta en buenos crisoles de barro, que, tapados de manera conveniente, han de ser calentados en un horno á temperatura muy elevada, sostenida durante el tiempo arriba dicho. Así procedimos en los nuevos experimentos, y sus resultados, en lo tocante á la fotoluminescencia, serán objeto de otro trabajo y comienzo de mayores investigaciones; de presente interesa especialmente cuanto atañe á los fenómenos de fototropía advertidos, con intensidad variable, en algunos de los productos obtenidos conforme es dicho.

Insistiré todavía en lo que á la obtención se refiere para notar un hecho, frecuente por desgracia y harto perturba-

dor, observado en el sulfuro de bario, y se reduce á esto: en los crisoles, después de fríos, debe quedar una masa blanca, á lo sumo ligeramente agrisada, de aspecto más ó menos uniforme y con marcada estructura granugienta, nunca adherida á las paredes del crisol ni dura en demasía; pues bien, al recoger los cinco productos de la serie del sulfuro de bario, vimos en los crisoles masas fundidas cristalinas á ellos muy unidas, de color pardo claro ó gris ceniciento obscuro y de una absoluta inercia respecto de la luz. Contienen sulfuro de bario; pero también mucho silicato del propio metal, cuya presencia se explica porque, habiéndose elevado mucho y muy de prisa la temperatura, el carbonato de bario se ha descompuesto, y la bárta cáustica resultante, antes de poder ser transformada en sulfuro, atacó al crisol y constituyó el silicato, en el cual fué asimismio advertida la presencia del hierro. Sólo elevando poco á poco la temperatura puede evitarse la contingencia apuntada.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

	Págs.
<i>Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1911:</i>	
Académicos de número.....	5
Académicos electos.....	6
Académicos corresponsales nacionales.....	7
Académicos corresponsales extranjeros.....	8
Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> (Conferencias 15. ^a á 20. ^a)	11, 31, 52, 76, 187 y 211
Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> (Conferencias 1. ^a á 16. ^a)	283, 301, 379, 403, 475, 503, 575, 655, 674, 771, 797, 865, 889, 959, 985 y 1021
El profesor D. Juan Fages, por <i>José Rodríguez Mourelo</i>	100
Apuntes sobre Mecánica social, por <i>Antonio Portuondo y Barceló</i>	119, 258, 333, 433, 544, 619, 823 y 925
Estudio acerca de la dunita platinífera de los Urales, por <i>S. Piña de Rúbies</i>	151
La copelación, según antiguas recetas, por <i>José Rodríguez Mourelo</i>	235 y 323
Sobre el electrómetro de cuadrantes, por <i>E. Terradas</i>	246
Cráneos araucanos del Museo Antropológico Nacional, por <i>Luis de Hoyos Sáinz</i>	369
La asimetría de los tripletes de Zeeman, por <i>Manuel Martínez-Risco y Macías</i>	456
Nota escrita con motivo de la venida á Madrid del Príncipe Alberto I de Mónaco, por <i>Joaquín González Hidalgo</i>	432
Programa de premios para el concurso del año 1913.....	571
Relaciones entre la fórmula estereoquímica de los «Carburos acíclicos» y su calor de combustión, por <i>Ruperto Lobo Gómez</i>	641

	Págs.
El astigmatismo de los resaltos cóncavos esféricos, por <i>P. Carrasco</i>	651
Mirmeleónido (Ins. Neur.) nuevo de Canarias, por el <i>R. P. Longinos Navás, S. J.</i>	672
Sismógrafo analizador, por <i>Eduardo Mier y Miura</i>	697
Nuevo método de obtención de aminas, empleando la reacción de Grignard, por <i>Benito Buyla</i>	718
Algunas observaciones sobre los xantogenatos, por <i>J. Ferrer</i>	847
Distribución del calor de vaporización, por <i>Carlos Barutell y Power</i>	946
Fototropía y fotoluminescencia, por <i>José Rodríguez Moureló</i>	1047

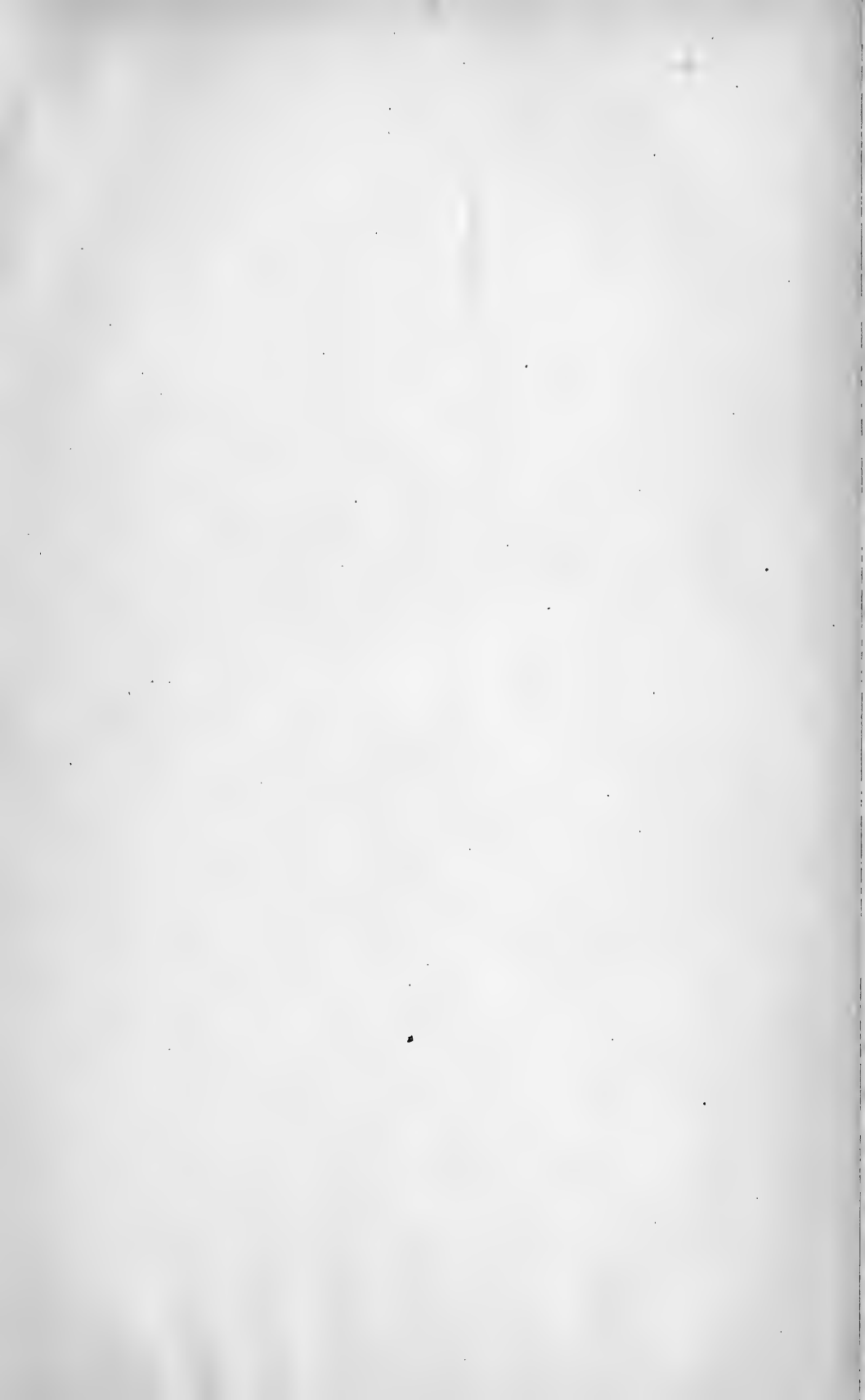
INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NUMERO

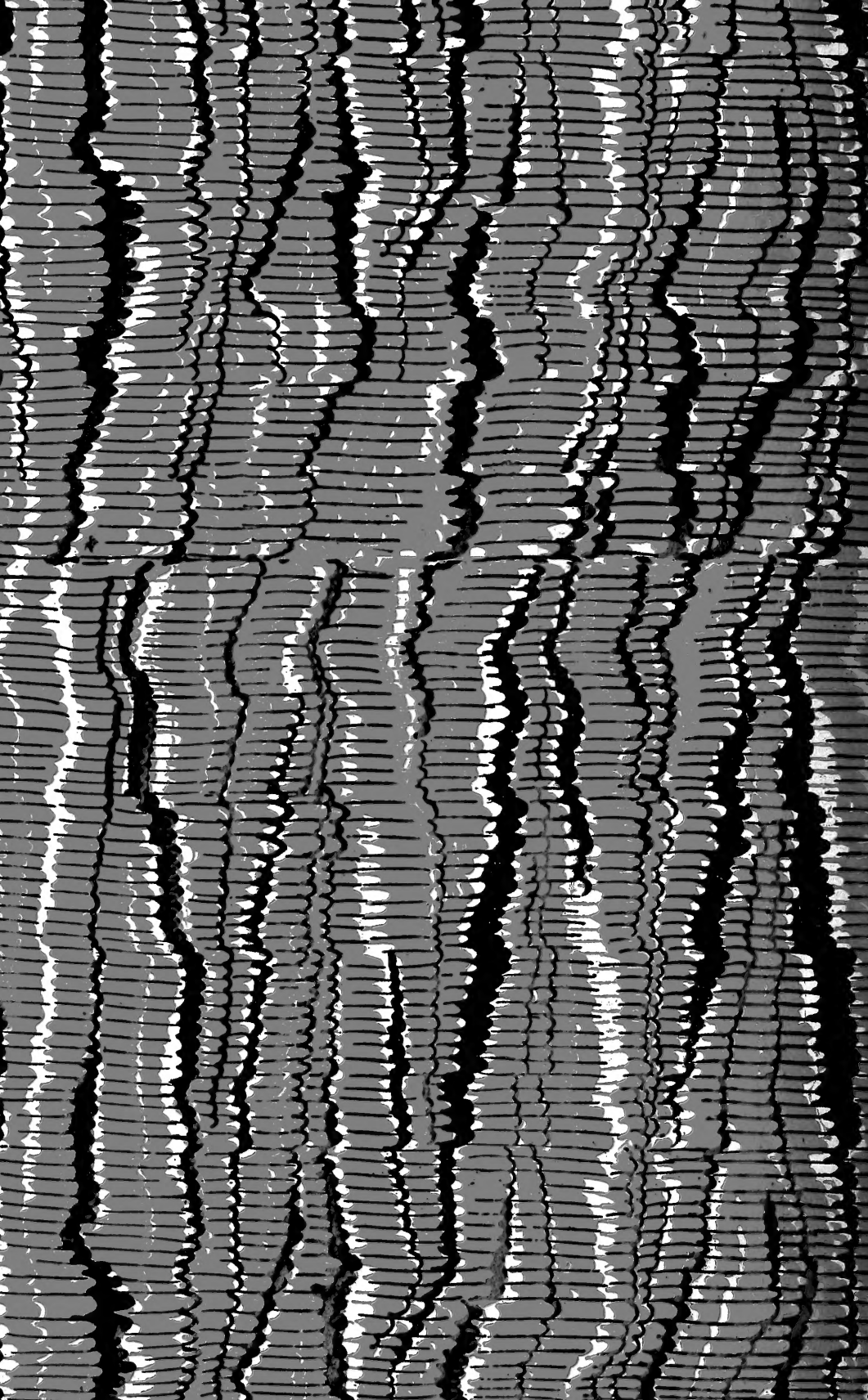
	<u>PÁGS.</u>
XLIV. — Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimacuarta.....	959
XLV. — Conferencias sobre Física matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimaquinta .	985
XLVI. — Conferencia sobre Física Matemática. Teorías diversas, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimasexta	1021
XLVII. — Fototropía y fotoluminiscencia, por <i>José Rodríguez Mourelo</i>	1047

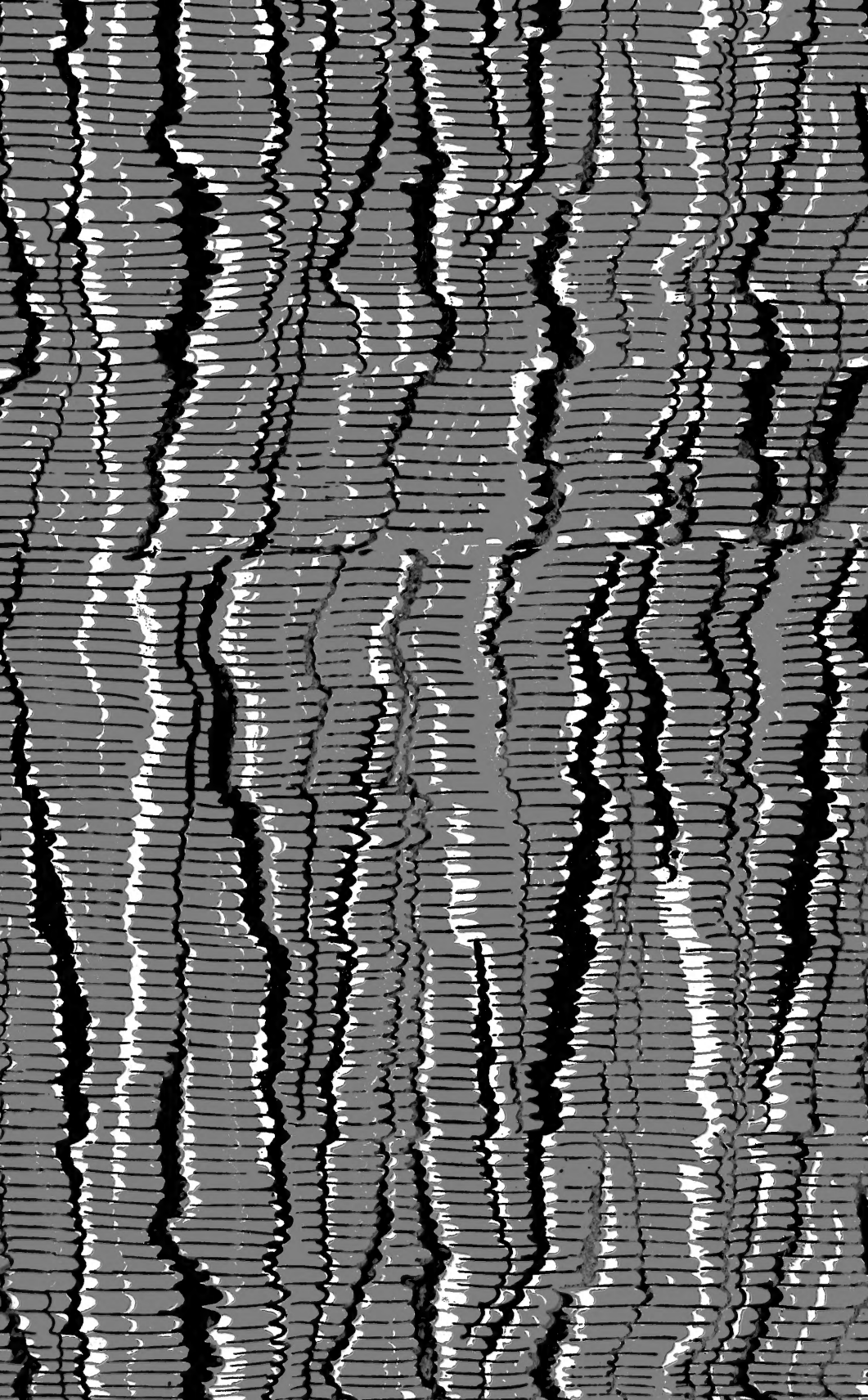
La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**









SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01224 1592