

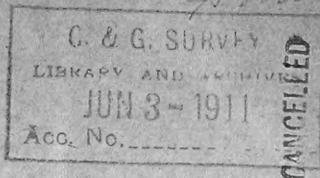




1914

4
REVISTA

DE LA



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID



TOMO IX. - NÚMS. 1, 2 Y 3.

Julio, Agosto y Septiembre
de 1910.

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

REVISTA
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX

271373

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1910

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*

Zurbano, 44.

Excmo. Sr. D. Eduardo Saavedra, *Vicepresidente.*

Fuencarral, 74.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo.

Fuentes, 9.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.

Velázquez, 16.

Excmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*

Orellana, 10.

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*

Valverde, 26.

Excmo. Sr. D. Julián Calleja y Sánchez, *Tesorero.*

Argensola, 6.

Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*

Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.

Carrera de San Jerónimo, 53.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.

Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.

Atocha, 118.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.

Príncipe, 49.

Ilmo. Sr. D. Pedro Palacios.

Monte Esquinza, 9.

Sr. D. Blas Lázaro é Ibiza.

Palafox, 19.

Excmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.

Quintana, 38.

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.

Válgame Dios, 3.

Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario*.

Zurbano, 18.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.

Piamonte, 14.

Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.

Campomanes, 8.

Ilmo. Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.

Génova, 17.

Sr. D. José Gómez Ocaña.

Atocha, 127 dupdo.

Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.

Amnistía, 10.

Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.

Cervantes, 3. — Alcalá de Henares.

Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández y Rodríguez.

Fuencarral, 51.

Ilmo. Sr. D. Vicente de Garcini.

Alarcón, 1.

Sr. D. Miguel Vegas.

Pez, 1.

Ilmo. Sr. D. Juan Fages y Virgili.

San Bernardo, 18.

Sr. D. Blas Cabrera.

Paseo de Martínez Campos, 1.

Sr. D. Enrique Hauser.

Zorrilla, 33.

ACADÉMICOS ELECTOS

Ilmo. Sr. D. Eduardo Mier y Miura.

Serrano, 29.

Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.

Paseo de Martínez Campos, 17.

Ilmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sogaña.

Casa de Oficios. — Moncloa.

Ilmo. Sr. D. Pedro de Ayala y Zumarán.

Travesía de la Ballesta, 8.

Sr. D. Ignacio González Martí.

Hernán Cortés, 7.

Excmo. Sr. D. Manuel Benítez y Parodi.

Plaza de la Lealtad, 4.

Sr. D. Eduardo León y Ortiz.

Fuencarral, 19 y 21.

La Academia está constituida en tres Secciones:

1.^a CIENCIAS EXACTAS.—Sres. Saavedra, *Presidente*; Torres, *Secretario*; Arrillaga, Torroja, Navarro-Reverter, Ventosa, Ugarte, Fernández y Rodríguez, Garcini y Vegas.

2.^a CIENCIAS FÍSICAS.—Sres. Carracido, *Presidente*; Mourelo, *Secretario*; Echegaray, Salvador, Muñoz del Castillo, Madariaga, Marvá, Fages, Cabrera y Hauser.

3.^a CIENCIAS NATURALES.—Sres. Hidalgo, *Presidente*; Gómez Ocaña, *Secretario*; Cortázar, Calleja, Mallada, Cajal, Palacios, Lázaro y Sánchez Lozano.]

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr. D. Andrés Poey. *París*.

Excmo. Sr. D. Silvino Thos y Codina. *Barcelona*.

Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. *Valencia*.

Ilmo. Sr. D. Luis Mariano Vidal. *Barcelona*.

Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. *Madrid*.

Excmo. Sr. D. Rogelio de Inchaurrendieta. *Madrid*.

Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. *Sevilla*.

Excmo. Sr. D. Modesto Domínguez Hervella. *Madrid*.

Sr. D. Salvador Calderón y Arana. *Madrid*.

Ilmo. Sr. D. Ricardo Vázquez-Illá y Martínez. *Valladolid*.

Sr. D. Zoel García de Galdeano. *Zaragoza*.

Sr. D. Eduardo J. Navarro. *Málaga*.

Ilmo. Sr. D. José María Escribano y Pérez. *Murcia*.

Sr. D. Lauro Clariana y Ricart. *Barcelona*.

- Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. *Segovia*.
Excmo. Sr. D. Joaquín María de Castellarnáu y Lleopart.
Segovia.
Excmo. Sr. D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde
de Villamar, Almirante de la Armada.
Excmo. Sr. D. Rafael Pardo de Figueroa. *Puerto Real*.
Sr. D. Juan Vilaró Díaz. *Habana*.
Excmo. Sr. D. Pablo Alzola y Minondo. *Bilbao*.
Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. *Salamanca*.
Excmo. Sr. D. José J. Landerer. *Valencia*.
Sr. D. José Eugenio Ribera. *Madrid*.
Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. *Barcelona*.
Sr. D. Eugenio Mascareñas. *Barcelona*.
Sr. D. Juan J. Durán Loriga. *Coruña*.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

- Anguiano (A.). *Méjico*.
Lemoine (V.). *Reims* (?).
Collignon (E.). *Paris*.
Barrois (Ch.). *Lille*.
Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de). *Río de Janeiro* (?).
Gomes Teixeira (F.). *Porto*.
Príncipe de Mónaco (S. A. el). *Mónaco*.
Choffat (P.). *Lisboa*.
Arata (P. N.). *Buenos Aires*.
Carvallo (M.). *Paris*.
Eneström (G.). *Estocolmo*.
Ferreira da Silva (A. J.). *Porto*.
Pina Vidal (A. A. de). *Lisboa*.
Brocard (H.). *Bar-le-Duc*.
Ocagne (M. d'). *Paris*.
Romiti (G.). *Pisa*.
Wettstein Ritter von Westersheim (R.). *Viena*.
Engler (A.). *Berlin*.
Guedes de Queiróz, Conde de Foz (G.). *Lisboa*.

- Rayleigh (Lord). *Salisbury*.
Arrhenius. (S.). *Estocolmo*.
Ramsay. (G.). *Londres*.
Castanheira das Neves (J.). *Lisboa*.
Pilsbry (E.). *Filadelfia*.
Porter (C. E.). *Santiago de Chile*.
Herrero Ducloux (E.). *La Plata (República Argentina)*.
Chervin (A.). *Paris*.
Urbain (G.). *Paris*.
Moureu (C.). *Paris*.
Sarasin (E.). *Ginebra*.
Guye (F. A.). *Ginebra*.
Academia Mejicana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Méjico*.
-

I.— Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimacuarta.

SEÑORES:

Siguiendo en el estudio de la fórmula de Stokes la misma marcha, que en el que hicimos de la fórmula de Green, hemos explicado el sentido y la significación de aquélla: hemos dado su demostración, escogiendo la que, á nuestro entender, era más sencilla entre todas las que conocíamos; examinamos después varios casos particulares de dicha fórmula, y concluimos la conferencia precedente exponiendo dos de sus aplicaciones analíticas más importantes.

Hoy vamos á continuar aquella marcha que pudiéramos llamar de analogía y paralelismo entre ambas fórmulas, la de Green y la de Stokes, y así como de la primera hicimos una aplicación inmediata muy sencilla, pero muy fundamental, á la electro-estática, hoy vamos á hacer otra aplicación, aún más completa, de la fórmula de Stokes á la electro-dinámica.

Ya lo hemos dicho en diferentes ocasiones: para fijar las ideas, para orientar á mis alumnos, para dar puntos fijos de aplicación, y de ordenación, á su pensamiento, he unido en cierto modo la fórmula de Green á la electro-estática, aunque su aplicación en la Física matemática es más extensa; y vamos á unir la fórmula de Stokes á la electro-dinámica, para

la que pudiéramos decir, que es casi de trascendental aplicación.

Pero la analogía y el paralismo continúan, y de igual suerte que, al hablar de la electro-estática, dividíamos á ésta para el orden y la claridad de las explicaciones en electro-estática clásica y electro-estática moderna, así, al aplicar el teorema de Stokes á la electro-dinámica, haremos de esta última rama de la electricidad una clasificación análoga, diciendo, más bien que explicando, algo muy en compendio de la electro-dinámica clásica y de la electro-dinámica moderna.

*
* *
*

Breves nociones de la electro-dinámica clásica.—Entiéndase que no vamos á hacer una exposición, ni siquiera elemental, de esta rama de la Física.

Vamos á plantear el problema dominante, á indicar en líneas generales el método seguido para su resolución por el ilustre Ampère, y por sus numerosos discípulos, que estudian, transforman y perfeccionan las inolvidables lecciones del maestro, en una buena parte del siglo XIX; y vamos á marcar una vez más los caracteres de esta parte de la Ciencia de la electricidad, que hoy puede considerarse como ciencia clásica.

En rigor, y si exclusivamente tratáramos en las conferencias de este curso de la aplicación á la Física-matemática, de la teoría de los vectores, por una parte, y por otra, de la fórmula de Stokes, hubiéramos suprimido mucho de lo que á continuación vamos á exponer, porque nada tiene relación, al menos directa, con estos problemas de la electro-estática clásica, ni con los métodos empleados por Ampère al estudiar la acción de las corrientes eléctricas entre sí.

Y sin embargo, paguemos una vez más tributo al gran

maestro: Ampère había aplicado en un caso particular del electro-magnetismo, esta fórmula de Stokes que vamos estudiando.

Pero no es esta la razón que nos decide á no pasar por alto la exposición elemental del insigne físico y matemático.

Es, si se quiere, una afición estética la que nos domina en este momento; es un amor á la simetría y á la ordenación de las ideas: y como al hablar de las aplicaciones del teorema de Green á la electro-estática, hemos tratado de la clásica y de la moderna, por respeto y cariño á la simetría, que-remos hacer lo mismo al ocuparnos en las aplicaciones físicas del segundo de los dos problemas, que forman las dos partes simétricas de este curso.

Curso que, después de todo, y aunque se comprendía bajo estas tres rúbricas: teoría de los vectores, fórmula de Green y fórmula de Stokes, es algo así, como una introducción á la Física-matemática moderna, y es señalar á mis alumnos la nueva orientación de las ideas, y hasta cierto punto el enlace histórico de éstas con las dominantes en la pasada centuria.

*
* *

El problema general de la electro-dinámica clásica, el que pudiéramos denominar problema típico de esta Ciencia, es este: acción de una corriente eléctrica, sobre otra.

Este es el ejemplo que yo voy á considerar, siquiera la teoría sea mucho más extensa, y esté consignada en un libro publicado en 1826, cuyo título es el siguiente: «Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience, par André Marie Ampère», libro del cual conservo un ejemplar, que es para mí como una reliquia, porque

en el forro tiene esta dedicatoria, al parecer de letra del gran maestro:

*A Monsieur Angustin Cauchy
son ami A. Ampère*

uniendo de este modo dos nombres gloriosos, para la Ciencia y para la Francia, del pasado siglo XIX.

*
* *

Decía, que el problema típico que voy á estudiar, en breves páginas, siguiendo la marcha de Ampère y de sus discípulos, es éste: Dadas dos corrientes eléctricas cerradas, estudiar la fuerza ó el sistema de fuerzas que ejerce una sobre otra.

Lo hemos indicado con insistencia, porque es notá característica de la época á que nos referimos; en problemas, como el de que se trata, lo fundamental es la determinación de las fuerzas: la fuerza, la que hoy se mide por kilogramos, es el concepto dominante.

Hoy, en estos mismos problemas, el trabajo, ó si se quiere, la energía, fija más la atención de los sabios que el concepto de fuerza.

Es carácter importante, que subsiste en la teoría de Ampère, el siguiente: la fuerza es una acción *á distancia*, análoga á las atracciones astronómicas; hipótesis que hoy rechazan los físicos, transigiendo con ella únicamente por respeto á la Astronomía, por los servicios que presta, y por su comodidad para los cálculos, pero repitiendo mentalmente la fórmula newtoniana, que transformaremos de este modo: las cosas pasan, como si la acción á distancia existiese.

Otro carácter más debemos recordar: en la teoría de Ampère, el espacio continúa pasivo é inerte con su pura esen-

cia geométrica; la corriente eléctrica atrae ó rechaza á la corriente eléctrica, sin que en estas atracciones ó repulsiones, al establecer las fórmulas y al hacer los cálculos, el espacio que á ambas corrientes rodea influya para nada.

El problema, como hemos indicado, estaba reducido en su origen á calcular esfuerzos, es decir, acciones de las corrientes entre sí, entendiendo la palabra acción en el sentido de fuerza.

De suerte, que si teníamos, por ejemplo, dos conductores metálicos en presencia C, C' (fig. 45); circulando por el primer conductor una corriente constante i , y por el segundo conductor otra corriente invariable i' , de suerte que ambas corrientes sean constantes en intensidad y fijas de posición, el problema consistía en calcular la fuerza que sobre cada elemento

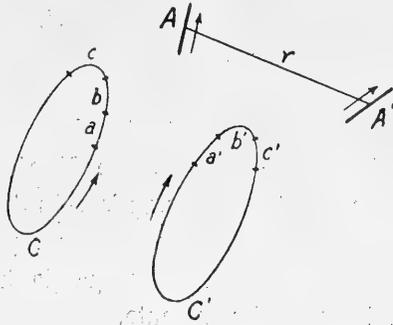


Figura 45.

de la corriente C ejercía la corriente C' , y recíprocamente, el esfuerzo que sobre cada elemento de C' ejercía la corriente C ; y era natural que así se planteara el problema, porque se trataba de un hecho, de una experiencia, de un fenómeno positivo de la Naturaleza.

Si los conductores C y C' estaban en presencia, pero sin que circulase por ellos la corriente eléctrica, inmóviles se quedaban, aunque nada les sujetase; su acción recíproca, si existía, era inapreciable.

Pero, si por el intermedio de pilas ó de cualquier generador eléctrico, se lanzan dos corrientes, iguales ó desiguales, una por cada conductor, éstos se mueven ó tienden á moverse; y como á la causa del movimiento se le llama en Me-

cánica *fuerza*, es evidente que la influencia recíproca de ambas corrientes ha desarrollado esfuerzos sobre uno y otro conductor.

¿Cuáles son estos esfuerzos y cómo se calculan sus magnitudes y posiciones?

Este fué el problema que resolvió Ampère en una serie de admirables trabajos teóricos y experimentales, á cuyo conjunto se dió el nombre de Electro-dinámica, y de la cual vamos á dar una ligerísima idea, dejando su estudio para otro curso.

*
* *

Puesto que se trata del cálculo de fuerzas, claro es que se trata de un problema de Mecánica; pero entiéndase bien, que no se trata de la aplicación de la hipótesis mecánica.

Era el problema demasiado especial, demasiado singular, pudiéramos decir, para que la hipótesis mecánica pudiera aplicársele directamente.

Era, repetimos, un problema singularísimo, no sólo en cuanto al movimiento de la electricidad, sino en cuanto á la acción de las corrientes mismas, suponiéndolas inmóviles y constantes.

Aún para el cálculo de las fuerzas se presentaban singularidades que nunca se habían presentado ó nunca se habían tenido en cuenta en la Mecánica clásica.

Como hemos explicado ya en ocasiones diversas, el esfuerzo entre dos puntos materiales en un momento dado, es independiente de la velocidad de ambos puntos, es decir, de su intensidad y de su orientación; y sin embargo, esto no sucede en las corrientes eléctricas, como veremos en breve.

Así es que Ampère no pensó aplicar la hipótesis mecánica, ni pensó aplicar ninguna otra hipótesis, aunque sin querer las aplicase, como observa Mr. Poincaré.

Pero el insigne maestro sólo pensaba apoyarse en la experiencia, ó en principios evidentes de suyo ante la lógica matemática ó geométrica.

Demos, pués, una idea brevísima del método de Ampère para resolver el problema en cuestión, ó por lo menos de su carácter y su tendencia.

Sean C y C' dos conductores por los que circulan dos corrientes eléctricas i , i' .

Supongamos divididos ambos conductores en elementos sumamente pequeños a , b , $c...$ a' , b' , $c'...$, á que daremos el nombre de elementos de corriente, porque es claro que la corriente, por ellos pasa; y lo que hacemos con la imaginación, es dividir ambas corrientes, ó cortarlas, pudiéramos decir, en elementos muy pequeños.

Ampère supone, considerándolo como evidente, aunque algunos autores no lo creen así, y en este caso no se trata de una especie de axioma, sino de una verdadera hipótesis; supone, repito, que para hallar la acción de un conductor sobre otro, basta estudiar la acción de cada elemento aislado a , b , $c...$ de una de las corrientes sobre todos los elementos a' , b' , $c'...$ de la otra.

En rigor la hipótesis, si es hipótesis, hasta este momento, bien puede aspirar á la evidencia; pero toma el carácter hipotético, cuando Ampère estudia separadamente la acción de cada dos elementos, a , a' considerándolos como separados de las corrientes de que forman parte.

Estudiar la acción de dos corrientes i , i' que circulan en dos conductores C , C' es problema legítimo, si vale la palabra, porque lo plantea un hecho natural perfectamente definido.

Pero estudiar la acción de dos elementos de corriente A , A' aislados y desprendidos de las corrientes de que formaban parte, este es un problema de legitimidad dudosa en el orden físico; porque esta experiencia, ni la ha realizado Ampère, ni la ha realizado nadie, al decir de insignes maestros.

Porque para ello sería preciso admitir corrientes abiertas, y la opinión dominante es que todas las corrientes son cerradas. Cuestión que discutiremos al estudiar metódicamente la Electro-dinámica, y que no podemos estudiar como merece ser estudiada en este avance rapidísimo, que hoy pretendemos presentar ante nuestros alumnos.

Sea como fuere, ya como axioma, ya como hipótesis, para resolver el problema fundamental, Ampère planteó este otro problema: determinar la fuerza que se ejerce entre dos elementos aislados A y A' de corriente, conociendo la intensidad de ambas corrientes i, i' , la longitud ds y ds' de ambos elementos, y las magnitudes geométricas que determinan su posición relativa, á saber: la distancia r entre dos puntos cualesquiera de ambos elementos y los ángulos de orientación de uno y otro.

Resuelto este problema en general, claro es que el problema de los dos conductores queda completamente resuelto, combinando dos á dos los elementos de dichos conductores C y C' y efectuando integraciones, como veremos más adelante en algún ejemplo.

Y ahora trataremos del problema elemental de dos elementos aislados.

*
* *

La teoría de Ampère se funda en varias hipótesis, á pesar de lo que afirma el ilustre autor; en leyes de simetría y de lógica; en resultados experimentales y en todo caso, en algunos teoremas de la teoría clásica del equilibrio.

Todo este conjunto de principios los iremos señalando por su orden, ó cuando de ellos hayamos de hacer uso.

1.º Es en rigor una hipótesis, la de que podamos reducir el problema general á este otro problema de dos elementos aislados: A, A' (fig. 45).

2.º Es evidentemente una hipótesis, aunque no propia sólo de este problema, sino de casi toda la ciencia clásica, el admitir la acción á distancia.

3.º Es asimismo una hipótesis el suponer que la acción de cada dos elementos A, A' , sea central, es decir, que se reduzca á fuerzas que actúen sobre la recta AA' , á saber, sobre una recta que vaya de un elemento á otro.

Y claro es, que siendo los elementos sumamente pequeños, los puntos que sobre ellos se elijan importa poco; pueden ser los puntos medios, ó dos puntos cualesquiera de dichos elementos: las diferencias en estos varios casos serán infinitamente pequeñas de orden superior.

4.º Es resultado experimental, el siguiente: La acción que ejerce el conductor $ACBC'A$ cerrado, por el cual circula una corriente, es nula sobre otras corrientes; y, recíprocamente, es nula la acción de éstas sobre el sistema que indica la figura, cuando el conductor está formado de una parte rectilínea ACB y de una parte sinuosa, $BC'A$, con tal que ésta se halle muy próxima á la recta ACB , y su longitud sea del mismo orden de magnitud que la de dicha recta. En rigor, esta última condición, supone la primera, que por sí, resulta un tanto vaga.

Además, si la corriente $ACBC'A$ produce un efecto nulo, es evidente que la corriente ACB y la corriente sinuosa $BC'A$ producen efectos iguales y contrarios. Pero como el efecto de $BC'A$ es igual y contrario al de $AC'B$, la corriente contraria á la primera, $AC'B$, producirá el mismo efecto que ACB .

Si se le quiere dar una forma analítica, se podrá escribir expresando para abreviar $a.c$ por acción de la corriente,

$$\begin{aligned} a.c(ACBC'A) &= a.c(ACB + BC'A) \\ &= a.c(ACB) + a.c(BC'A) = 0, \end{aligned}$$

y como

$$a.c(BC'A) = -a.c(AC'B),$$

resulta

$$a . c (A C B) - a . c (A C' B) = 0,$$

de donde

$$a . c (A C B) = a . c (A C' B).$$

Es decir, que al estudiar los efectos de un sistema de corrientes, siempre se puede substituir á una corriente rectilínea $A C B$, la corriente sinuosa $A C' B$ que pasa por las extremidades de la primera, y que reúne las condiciones que hemos indicado.



Figura 46.

Es lo que se llama el principio de las corrientes sinuosas, y se considera como resultado experimental, porque *à priori*

no puede aceptarse como exacta por las razones que exponíamos en las conferencias del primer curso.

5.º Es también principio deducido de la experiencia, que la acción de un sistema de corrientes sobre un elemento de corriente conserva el mismo valor numérico, y cambia de sentido si cambia de sentido dicho elemento de corriente. Apliquemos este resultado á dos elementos de corriente A, B (fig. 47) (con las salvedades que hemos hecho respecto á dos elementos aislados): si cuando en

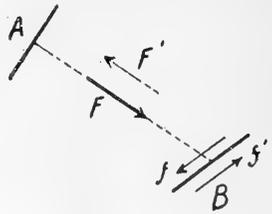


Figura 47.

el elemento B la corriente va en el sentido de la flecha f , la acción está representada por la fuerza F , al cambiar el sentido de la corriente en B , según marca la flecha f' , la acción de los dos elementos A, B cambiará de F en F' . La magnitud de estas fuerzas será la misma, pero el sentido será

opuesto. Si F representa que B atrae á A , significará F' que B rechaza á A . La atracción se ha convertido en repulsión.

6.º En cambio, es un principio *à priori* deducido de la simetría, aunque también del experimento anterior, de suerte que sólo es *à priori*, en parte, el siguiente:

Si dos elementos A , B (fig. 48) ejercen una acción que representaremos por F , y respecto á un plano cualquiera P tomamos la figura simétrica de la anterior,

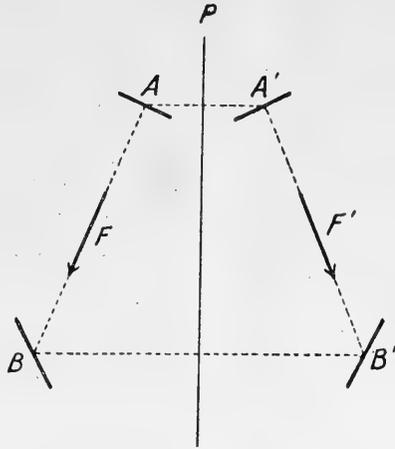


Figura 48.

como si se tratara en cierto modo de un espejo plano, siendo A' y B' las imágenes simétricas de A y B , dado que estas imágenes se realizasen materialmente, la acción F' entre A' y B' sería simétrica respecto á F .

Aplicemos esto al caso de dos elementos de corriente A , B (fig. 49), tales que el uno, A , se encuentra en el plano perpendicular á B en su punto medio.

Consideremos á este plano, como plano de simetría, y tomemos el sistema simétrico de A , B respecto á dicho plano, como habíamos hecho en la fig. 48.

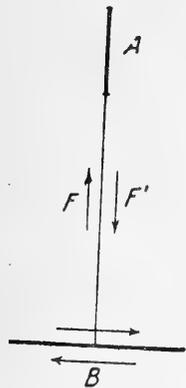


Figura 49.

El elemento simétrico de A será el mismo elemento, puesto que está en el plano de simetría. El elemento simétrico de B será el mismo elemento con la dirección de la corriente invertida, según indican las flechas.

Luego, en virtud del principio establecido, si F era la acción de A sobre B , por ejemplo, para el primer sistema, es decir, antes de invertirse la corriente B , la nueva acción será la simétrica de F , pero su simétrica es ella misma, puesto que está en el plano de simetría, luego F no debe variar.

Sin embargo, esto está en contradicción con el resultado experimental que hemos señalado en la fig. 47; porque si la corriente B se invierte, F debe invertirse convirtiéndose en F' .

De aquí resulta una contradicción: F debe permanecer y debe invertirse. Contradicción que sólo se resuelve suponiendo $F = 0$.

De aquí resulta este principio que pudiera decirse, como antes indicamos, que es en parte experimental, y en parte *a priori*.

Cuando un elemento de corriente está situado en un plano perpendicular á otro elemento en su punto medio, la acción de ambos elementos es nula.

Hemos supuesto que el plano en que está el elemento A es perpendicular á B en su punto medio; pero el principio subsiste con diferencias infinitamente pequeñas de orden superior, que rigurosamente se anulan en las integraciones, aunque dicho plano perpendicular á B pase por otro punto cualquiera del elemento B ; por ejemplo, por uno de los extremos, que es lo que haremos en adelante para simplificar la figura.

Sobre esto podríamos insistir, pero no lo creemos necesario.

Y con estos principios establecidos estudiemos ahora la acción elemental de dos elementos de corriente.

*
* *

Sean dos elementos de corriente $ab, a'b'$ (fig. 50).

Consideremos la recta aa' que une las extremidades de estos elementos a y a' .

Pudiéramos haber considerado la recta que une sus puntos medios; pero en el fondo es lo mismo, y la figura va á resultar más sencilla.

Tomaremos á la recta ax , como eje de las x .

Por esta recta y por el elemento ab haremos pasar un plano xaz , y por az perpendicular á ax trazaremos el plano zay perpendicular á ax .

Por último, por el punto a' trazaremos el plano $z'a'y'$ perpendicular al eje x , y por lo tanto paralelo al zay .

En la acción ó esfuerzo que se ejerce entre el elemento ab

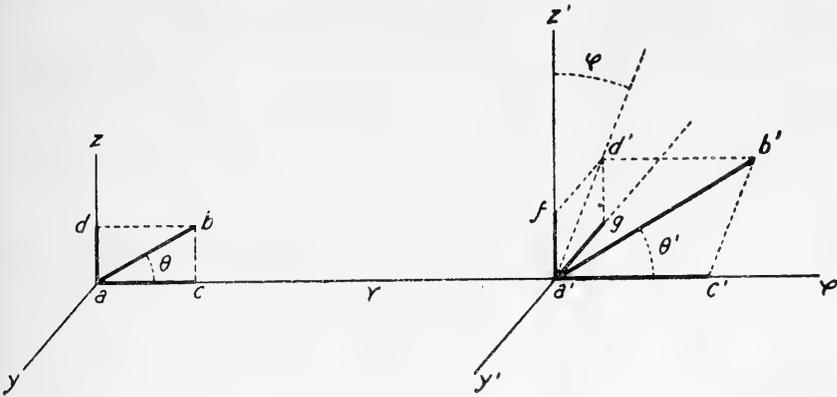


Figura 50.

y $a'b'$ influirán evidentemente las longitudes de los elementos, las corrientes que por ellos pasan, la distancia aa' , y las orientaciones relativas de ambos elementos.

Todas estas cantidades las designaremos del siguiente modo:

$$ab = ds; \text{ corriente por } ab = i; a'b' = ds';$$

$$\text{corriente por } a'b' = i'; aa' = r$$

$$\text{ángulo } bac = \theta; \text{ ángulo } b'a'c' = \theta';$$

$$\text{ángulo de los planos } (xab, xa'b') = \varphi.$$

El esfuerzo de atracción ó repulsión que ejerce $a'b'$ sobre

ab , lo designaremos por F y lo supondremos aplicado en a , según la recta ax .

Y como suponemos que se verifica el principio de la reacción igual y contraria á la acción, el esfuerzo que ab ejerce sobre $a' b'$ también lo representaremos por F , lo supondremos aplicado en a' sobre la recta $a' a' x$ y tendrá el mismo valor numérico que el anterior, pero actuará en sentido contrario.

Dicho esfuerzo F estará numéricamente expresado por una función que dependerá de todas las variables que indicábamos antes, es decir:

$$F = F(ds, ds', i, i', r, \theta, \theta', \varphi)$$

ó sea de todos los elementos que determinan la magnitud y la posición relativa de los dos elementos de corriente.

El problema consiste en conocer la naturaleza de la función F , es decir, bajo qué forma analítica entran en dicha función las cantidades que contiene.

Realmente, la solución hallada por Ampère, aunque hoy nos parezca sencillísima y casi vulgar, aunque se acuda á la hipótesis y á la experiencia, aunque en grado mínimo respecto á una y otra, será siempre una teoría admirable y digna del gran maestro.

En primer lugar se supone que la fuerza F es proporcional á los elementos ds, ds' y á las corrientes que por ellos circulan; y esta proporcionalidad parece cosa bien natural.

No hemos de aquilatar si es más ó menos legítima.

Admitiéndola como buena, podremos escribir el valor de F en esta forma:

$$F = ds \cdot i \cdot ds' \cdot i' \cdot f(r, \theta, \theta', \varphi)$$

y nos queda por determinar la naturaleza de la función f .

Descompongamos (fig. 50) la recta ab en sus dos componentes rectangulares ac, ad .

Que es lo mismo que sustituir la corriente del elemento ab , es decir, $ds \cdot i$, por el contorno ac, cb , representando estas últimas líneas,

$$\begin{aligned} \text{corriente } bc &= bc \cdot i = ab \cdot \text{sen } \theta \cdot i = ids \text{ sen } \theta \\ \text{corriente } ac &= ac \cdot i = ab \cdot \text{cos } \theta \cdot i = ids \text{ cos } \theta; \end{aligned}$$

Según el principio de las corrientes sinuosas, podremos sustituir la acción del elemento ab sobre $a'b'$ por la acción de estos dos elementos:

$$i \cdot ds \text{ cos } \theta; \quad i \cdot ds \cdot \text{sen } \theta. \quad (1)$$

Una descomposición análoga podemos hacer sobre el elemento de corriente $a'b'$.

Para ello, descompondremos $a'b'$, según la línea $a'x$, y según su proyección $a'd'$ sobre el plano de las $z'y'$.

Considerando sólo las longitudes, tendremos desde luego

$$\begin{aligned} a'c' &= a'b' \cdot \text{cos } \theta' = ds' \cdot \text{cos } \theta'; \\ a'd' &= a'b' \text{ sen } \theta' = ds' \cdot \text{sen } \theta'; \end{aligned}$$

y considerando las corrientes, ó mejor dicho los elementos de corriente,

$$\begin{aligned} \text{corriente } a'c' &= i' \cdot ds' \cdot \text{cos } \theta'; \\ \text{corriente } a'd' &= i' ds' \text{ sen } \theta'. \end{aligned}$$

Completaremos la descomposición sustituyendo á $a'd'$ sus dos componentes $a'f$ y $a'g$, según los ejes de las z' y las y' .

Así habremos sustituido á la corriente $a'd'$ dos corrientes que serán:

$$\begin{aligned} \text{corriente } a'f &= \text{corriente } a'd' \cdot \text{cos } \varphi; \\ \text{corriente } a'g &= \text{corriente } a'd' \text{ sen } \varphi \end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned} \text{corriente } a'f &= i' ds' \cdot \text{sen } \theta' \cos \varphi; \\ \text{corriente } a'g &= i' ds' \cdot \text{sen } \theta' \cdot \text{sen } \varphi. \end{aligned}$$

En suma, por el principio de las corrientes sinuosas podemos sustituir en el problema, á la corriente $a'b'$ estas tres componentes, según los tres ejes rectangulares x, y', z' .

$$\left. \begin{aligned} \text{corriente } a'c' &= i' ds' \cos \theta' \\ \text{corriente } a'g &= i' ds' \cdot \text{sen } \theta' \cdot \text{sen } \varphi \\ \text{corriente } a'f &= i' ds' \cdot \text{sen } \theta' \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Hemos transformado, pues el problema, aumentando el número de elementos, pero colocándolos en posiciones relativas mucho más sencillas, porque ó son paralelos ó son perpendiculares.

Así, pués, el problema se reduce á considerar estos dos grupos de elementos, que suprimiendo la palabra *corriente* para abreviar, podremos escribir de este modo:

$$\begin{aligned} \text{primer grupo} & \left\{ \begin{aligned} ac &= i \cdot ds \cdot \cos \theta \\ ad &= i \cdot ds \cdot \text{sen } \theta \end{aligned} \right. \\ \text{segundo grupo} & \left\{ \begin{aligned} a'c' &= i' ds' \cos \theta' \\ a'g &= i' ds' \text{sen } \theta' \text{sen } \varphi \\ a'f &= i' ds' \text{sen } \theta' \cos \varphi \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Tenemos que determinar la acción de los dos elementos del primer grupo, sobre los tres del segundo, lo cual dará seis fuerzas parciales, que, como suponemos que todas actúan según la línea aa' , deberemos sumar con sus signos, es decir, algebráicamente.

Determinemos ahora estas acciones parciales.

1.º Acción de ad sobre $a'f$. Esta acción, como hemos dicho antes, será proporcional á las corrientes, á las longitu-

des de los elementos y á una función, desconocida hasta ahora, de la distancia; porque es el único elemento que queda de todos los que antes habíamos señalado, toda vez que la orientación de los elementos es la misma: son paralelos.

Representando por $f(r)$ la función de la distancia que entra como factor en la expresión de la fuerza que calculamos, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{acción entre } ad \text{ y } a'f &= i.ds.\text{sen}\theta.i'ds'\text{sen}\theta'\cos\varphi.f(r) \\ &= i.i'.ds.ds'\text{sen}\theta\text{sen}\theta'\cos\varphi.f(r) \quad (a) \end{aligned}$$

2.º Acción de ad sobre $a'c'$. Como son dos líneas perpendiculares situadas en el plano de las xz , y la línea ax pasa por un extremo de ad , que es como si pasase por el punto medio, en virtud de uno de los principios que antes demostramos, esta acción será nula.

Así,

$$\text{acción entre } ad \text{ y } a'c' = O$$

3.º Acción entre ad y $a'g$. Son dos elementos perpendiculares, y cada uno de ellos está en un plano perpendicular al otro, trazado por su extremo; luego

$$\text{acción entre } ad \text{ y } a'g = O$$

4.º Acción entre ac y $a'c'$. Su acción dependerá naturalmente de las longitudes de los elementos y de las corrientes; y puesto que la orientación es la misma, ya que están en línea recta, sólo queda como factor una función de la distancia aa' , que representaremos por $f_1(r)$ y que por el pronto supondremos distinta de la anterior, es decir, de la que se refería á los elementos paralelos ad , $a'f$.

Tendremos, pues,

$$\begin{aligned} \text{acción entre } ac \text{ y } a'c' &= ids\cos\theta.i'ds'\cos\theta'.f_1(r) \\ &= ii'dsds'\cos\theta\cos\theta'.f_1(r) \quad (b) \end{aligned}$$

5.º Y 6.º Las acciones de ac sobre $a'g$ y $a'f$ serán también nulas por razón de perpendicularidad.

Ahora, sumando las dos fórmulas (a) y (b), obtendremos para la acción total entre ab y ab'

$$F = ii' ds ds' [f_1(r) \cos \theta \cos \theta' + f(r) \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi].$$

Falta determinar en esta fórmula las dos funciones $f_1(r)$ y $f(r)$ que *à priori* no hay modo de determinar, al menos, dado el método adoptado por Ampère.

Será preciso para ello acudir á la experiencia, y á este fin se han empleado diversos sistemas.

Ampère admitía que las dos funciones $f(r)$ y $f_1(r)$ eran de esta forma: $\frac{A}{r^n}$, $\frac{B}{r^n}$, y experimentalmente determinaba el valor numérico de n y las dos constantes A , B , ó mejor dicho, su relación, por que una de ellas depende del sistema de unidades que se elijan.

Esta hipótesis es natural, y lo era mucho más en la época de Ampère.

Siempre que era posible se calcaban los métodos y las hipótesis de la Física matemática, en los métodos y las hipótesis de la Astronomía. En ésta, las atracciones dependían de la relación inversa del cuadrado de las distancias; pues en los fenómenos de la Física se admitía, por el pronto, la relación inversa de una potencia determinada de dicha distancia.

Esta forma cumplía, por el pronto, con dos condiciones experimentales: siendo n positiva, á medida que la distancia r iba creciendo, las atracciones ó repulsiones tendían á anularse, y, por el contrario, cuando r disminuía hacia 0, las acciones entre los elementos materiales crecían sin límites.

La cuestión, de todas maneras, se ha resuelto con mucha más generalidad.

Citaremos sólo dos métodos: el de Mr. Blanchet en sus

lecciones de la Escuela Normal, y el que consigna Mr. Poincaré en su obra ya citada de electricidad y óptica.

Pero como nosotros sólo vamos indicando un método elemental, adoptaremos el seguido por Mr. Resal en su tratado de Física matemática, que es el método de Ampère; pero dándole alguna más generalidad, porque supondremos que los exponentes de r sean desiguales.

Ampère partía de este hecho: que una corriente indefinida BC (fig. 51), bastante larga para que se la pueda considerar como infinita, ejerce sobre una corriente finita paralela ab una acción que varía en razón inversa de la distancia AB entre las dos corrientes, acción, por lo demás, que es atractiva ó repulsiva, según que las corrientes van en el mismo sentido ó en sentido contrario.

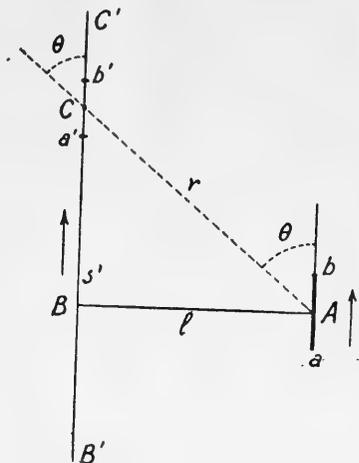


Figura 51.

Apliquemos este resultado experimental á la corriente completa $B'C'$ y á un elemento muy pequeño ab de la segunda corriente, y admitamos que ambas corrientes van en el mismo sentido.

La marcha que ha de seguirse está indicada desde luego. Descomponer $B'C'$ en elementos, como por ejemplo $a'b'$.

Determinar la acción de los elementos $ab, a'b'$.

Obtener la componente según AB de dicha fuerza.

Elegir como variable θ , é integrar todas estas componentes para valores de θ desde 0 á $\frac{\pi}{2}$.

Y por fin duplicar este resultado, porque es evidente que la

acción de BB' sobre ab dará una componente en la dirección AB igual á la que haya dado BC' .

Esto se demuestra con facilidad suma comparando la acción de elementos simétricos respecto á AB de la línea $B'C'$.

Demos forma analítica á lo que acabamos de explicar.

En la fórmula general que hemos determinado hace un momento para la acción entre dos elementos de corriente,

$$F = ii' ds ds' [f_1(r) \cos \theta \cos \theta' + f(r) \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi]$$

debemos sustituir

$$f(r) = \frac{A}{r^n}, \quad f_1(r) = \frac{B}{r^{n'}}$$

y tendremos

$$F = ii' ds ds' \left[\frac{B}{r^{n'}} \cos \theta \cos \theta' + \frac{A}{r^n} \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \right]$$

ó bien

$$F = ii' ds ds' A \left[\frac{B}{A r^{n'}} \cos \theta \cos \theta' + \frac{1}{r^n} \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \right]$$

Y si para simplificar suponemos que se escojan las unidades de tal modo que $A = 1$, y si además escribimos

$\frac{B}{A} = K$, resultará

$$F = ii' ds ds' \left[\frac{K}{r^{n'}} \cos \theta \cos \theta' + \frac{1}{r^n} \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \right].$$

Esta fuerza actúa según AC ; su componente, según AB , será, contando con el elemento simétrico de $a'b'$,

$$2 ii' ds ds' \left[\frac{K}{r^{n'}} \cos \theta \cos \theta' + \frac{1}{r^n} \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \right] \cos CAB,$$

ó bien

$$2 i i' ds ds' \left[\frac{K}{r^{n'}} \cos \theta \cos \theta' + \frac{1}{r^n} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos \varphi \right] \operatorname{sen} \theta;$$

simplifiquemos esta fórmula.

Tenemos $\theta = \theta'$;

$$\varphi = 0, \quad \cos \varphi = 1$$

porque los planos de ab , AC y $a'b'$, AC coinciden.

$2 i i' ds$ que se refiere á ab es constante: la designaremos por D .

$a'b' = ds'$, llamando s' á la distancia variable BC que determina el punto C ; pero tenemos

$$\frac{s'}{l} = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

de donde

$$s' = l \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad \text{y} \quad ds' = l \frac{-\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta.$$

En suma

$$ds' = -l \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Por fin

$$l = r \operatorname{sen} \theta, \quad \text{y} \quad r = \frac{l}{\operatorname{sen} \theta}.$$

Efectuando estas sustituciones resultará: comp.^{te} según AB

$$\begin{aligned} &= -Dl \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \left(\left(\frac{K}{\left(\frac{l}{\operatorname{sen} \theta} \right)^{n'}} \right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{\left(\frac{l}{\operatorname{sen} \theta} \right)^n} \right) \operatorname{sen}^2 \theta \right) \operatorname{sen} \theta \\ &= -D \left(\frac{K}{l^{n'-1}} \operatorname{sen}^{n'-1} \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{l^{n-1}} \operatorname{sen}^{n-1} \theta \operatorname{sen}^2 \theta \right) d\theta. \end{aligned}$$

Hemos determinado en la fórmula anterior la componente según AB del esfuerzo ó acción entre los elementos ab y $a'b'$; ó mejor dicho, la componente de la acción sobre ab del elemento $a'b'$ y del simétrico respecto á la recta AB , puesto que multiplicamos por 2.

Con las componentes perpendiculares á AB , no hay que contar, porque son iguales y contrarias, según se deduce de la figura.

Para calcular la acción total de $B'C'$ sobre ab ó la acción contraria, no hay más que integrar entre $\theta=0$ y $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Tendremos, pues,

$$\begin{aligned} \text{acción entre } B' C' \text{ y } ab &= \frac{1}{l^{n'-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} DK \operatorname{sen}^{n'-1} \theta \cos^2 \theta d\theta + \\ &+ \frac{1}{l^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D \operatorname{sen}^{n-1} \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

y como las dos integrales sólo dependen de la variable θ , las demás cantidades son constantes respecto á la integración, y los límites de θ son cantidades perfectamente fijas, es decir, 0 y $\frac{\pi}{2}$, es evidente que dichas integrales serán dos cantidades constantes; mejor dicho, independientes de l .

Representándolas por M y N la acción que buscamos entre la corriente y el elemento, será de la forma

$$\frac{M}{l^{n'-1}} + \frac{N}{l^{n-1}}.$$

Ahora bien experimentalmente se sabe, que esta acción depende de la relación inversa de l , es decir, que tiene la forma

$$\frac{P}{l}$$

luego la expresión anterior ha de reducirse á esta; es decir, hemos de tener

$$\frac{M}{l^{n'-1}} + \frac{N}{l^{n-1}} = \frac{P}{l}$$

ó bien

$$Ml^n + Nl^{n'} = Pl^{n+n'-2}$$

Como M , N y P no dependen de l , para que la condición anterior se verifique, sea cual fuese l , será preciso que dicha cantidad desaparezca, es decir, que los exponentes sean iguales.

Tendremos, pues,

$$n = n' ; n = n + n' - 2$$

de donde

$$n = n' = 2$$

y queda resuelta esta primera parte del problema, y la acción entre dos elementos; en el caso general, será

$$\frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(K \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \right).$$

Sólo nos queda un punto que resolver, á saber: la determinación de la constante K , para la cual, la fórmula anterior nos demuestra que basta una sola experiencia, como veremos en la conferencia próxima, para terminar la demostración clásica, con pequeñas variantes de procedimiento, de la célebre fórmula de Ampère.

II.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaquinta.

SEÑORES:

Hemos demostrado en la última conferencia la fórmula clásica de Ampère, que determina la acción entre dos elementos de corriente, y que era ésta:

$$F = \frac{ii' ds ds'}{r^2} (K \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi)$$

en la cual i é i' representan las dos corrientes;

ds , ds' las longitudes de los dos elementos;

θ y θ' los ángulos que forman ambos elementos con la recta que une dos puntos cualesquiera de los mismos;

r la longitud de dicha recta entre elemento y elemento;

φ el ángulo que forman dos planos que pasen, por la recta r y el elemento ds uno de ellos, y también por r , y por ds el otro.

Para medir los ángulos θ y θ' hay que dar una dirección á r , que puede ser arbitraria; en cambio, las direcciones ds y ds' serán las de ambas corrientes.

Para determinar por completo la fórmula anterior, y para aplicarla á los diferentes problemas de la electrodinámica,

incluyendo los problemas numéricos, sólo falta determinar el valor constante de K .

Parece á primera vista que esta determinación es muy sencilla, y que basta con una sola experiencia, es decir, con un caso particular, para el cual, midiendo el valor de F , las longitudes ds , ds' de los dos elementos, la distancia r , y los ángulos θ , θ' y φ no habrá más que sustituir estos valores en la fórmula anterior y despejar K en función de todas estas cantidades conocidas, que este es el método que se sigue en todos los problemas análogos para determinar las constantes de una fórmula.

Pero es el caso que, en el problema que nos ocupa, dicho método no tiene aplicación, porque la experiencia que hemos propuesto es ilusoria, en razón á que no pueden aislarse dos elementos de corriente para medir la acción recíproca que ejerce uno sobre otro.

Vamos á aplicar, sí, el método experimental, pero acudiendo á otra experiencia. Es decir, partiendo de este hecho experimental: que la acción de una corriente cerrada sobre un elemento de corriente es normal á dicho elemento.

Esta es, por decirlo así, una experiencia ya hecha, ó si se quiere, un resultado experimental, del que podemos servirnos, como explicaremos en seguida, para determinar la constante K .

Escogeremos el método tal como lo expone en su obra Mr. Resal, y que en rigor es único y es bien sencillo, dado el principio de que se parte.

*
* *

Sea fig. 52 una corriente cerrada C , cuya intensidad representaremos por i' ; y sea un elemento de corriente ab , siendo i la corriente que por él circula.

Calculemos la acción de un elemento $a'b'$ de C sobre ab ,

y tomemos la componente paralela á dicho elemento de esta fuerza.

Hagamos lo mismo para todos los elementos de C , ó de otro modo, integremos la expresión anterior para todo el contorno C .

Tendremos así la componente de la acción de C sobre ab , paralelamente á esta recta.

Si la acción ha de ser normal á ab , claro es que la componente paralela, según ab , ha de ser nula

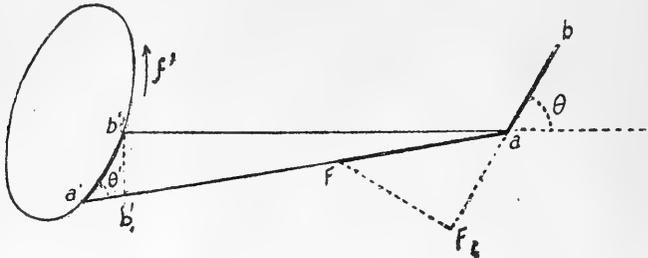


Figura 52.

Estableciendo la expresada condición, de ella podremos deducir el valor de K .

Adoptando las notaciones de siempre, apliquemos á los elementos $a'b'$, ab la fórmula

$$\frac{ii' ds ds'}{r^2} (K \cos \theta \cos \theta' + \text{sen } \theta \text{ sen } \theta' \cos \varphi).$$

La figura nos da desde luego, trazando desde a el arco $b'b_1'$, que se confunde con una perpendicular bajada desde b' á aa' ,

$$a'b_1' = a'b' \cos b'a'b_1'$$

ó bien

$$- dr = ds' \cos \theta';$$

porque $a'b_1'$ es la diferencia entre ab' y aa' , es decir, la di-

ferencial de r . Y si suponemos que la corriente i' va en el sentido de la flecha f' , disminuye r en la figura, y, por lo tanto, dr es negativa, y hay que poner el signo — para que $\cos. \theta'$ en la misma figura resulte positivo.

De aquí se deduce

$$ds' = \frac{-dr}{\cos \theta'}$$

y substituyendo en F

$$F = - \frac{ii' ds}{r^2} \frac{dr}{\cos \theta'} (K \cos \theta \cos \theta' + \text{sen } \theta \text{ sen } \theta' \cos \varphi).$$

Esta fuerza actúa en la dirección de r ; para obtener su componente F_t en la dirección ab , tendremos que multiplicar la expresión anterior por $\cos. \theta$, y resultará

$$F_t = ii' ds \left(-K \cos \theta \frac{dr}{r^2} - \frac{dr}{r^2} \text{sen } \theta \frac{\text{sen } \theta'}{\cos \theta'} \cos \varphi \right) \cos \theta$$

ó bien

$$F_t = ii' ds \left(+K \cos^2 \theta d \frac{1}{r} - \text{sen } \theta \cos \theta \text{ tang } \theta' \cos \varphi \frac{dr}{r^2} \right).$$

Para más claridad de la explicación, pongamos aparte una figura, que es la 53, en que aparezca el elemento $a'b'$, el elemento ab , los planos $aa'b'$ y $aa'b$, que contienen r y los dos elementos, y que forman el ángulo φ ; y construyamos el triedro de las líneas ab, ab', aa' que para dar más relieve á la figura hemos cortado por una esfera cuyo centro está en a , y que determina el triángulo esférico mnp .

El ángulo esférico en p es precisamente el que forman los planos aba' y $ab'a'$, que es el que hemos llamado φ . Una fórmula de trigonometría nos da el ángulo plano man en

función del diedro opuesto en p . Esta fórmula es la siguiente:

$$\cos mn = \cos mp \cdot \cos np + \sin mp \cdot \sin np \cos p;$$

y para venir á las notaciones actuales, tendremos que hacer las siguientes sustituciones:

$$\cos mn = \cos bab'; \cos mp = \cos bap = -\cos \theta;$$

$$\cos np = \cos b'aa'; \cos p = \cos \varphi$$

$$\sin mp = \sin \theta; \sin np = \sin b'aa'.$$

Pero tenemos que determinar en función de las notaciones ordinarias los ángulos bab' y $b'aa'$.

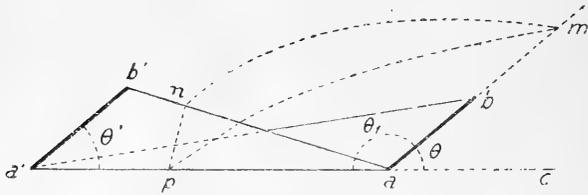


Figura 53.

Observemos que el ángulo que forma $a'a$ con ab es el que hemos designado por θ_1 en la figura 53, como suplemento de θ ; y ab' (figs. 52 y 53) es la posición inmediata de aa' al pasar del punto a' á b' ; luego el ángulo bab' diferirá del anterior en la diferencial de θ_1 , cuando se pasa en la corriente C de a' á b' . Es decir

$$bab' = \theta_1 + d\theta_1$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos mn &= \cos bab' = \cos (\theta_1 + d\theta_1) = \\ &= \cos \theta_1 + d \cos \theta_1 = -\cos \theta - d \cos \theta \end{aligned}$$

porque

$$\theta_1 + \theta = \pi \quad \text{y} \quad \cos \theta_1 = -\cos \theta;$$

de donde

$$d \cos \theta_1 = -d \cos \theta.$$

Determinemos ahora $b'aa'$.

En la fig. 52 este arco está medido por $b'b'_1$; luego

$$b'aa' = \frac{b'b'_1}{ab'_1} = \frac{b'b'_1}{r},$$

pero en el triángulo $ab'b'_1$ tenemos

$$\frac{b'b'_1}{a'b'_1} = \text{tang } \theta'$$

y como

$$a'b'_1 = -dr,$$

resulta

$$b'b'_1 = -dr \text{ tang } \theta'$$

y, por lo tanto (fig. 53),

$$np = b'aa' = -\frac{dr}{r} \text{ tang } \theta'.$$

Mas el ángulo np es infinitamente pequeño; luego,

$$\cos np = 1, \quad \text{sen } np = np = -\frac{dr}{r} \text{ tang } \theta'.$$

Sustituyendo en

$$\cos mn = \cos mp \cdot \cos np + \text{sen } mp \cdot \text{sen } np \cos p$$

los valores obtenidos:

$$\begin{aligned} \cos mn &= -\cos \theta - d \cos \theta; \cos mp = -\cos \theta; \\ \text{sen } mp &= \text{sen } \theta; \cos np = 1; \text{sen } np = \frac{-dr}{r} \text{ tang } \theta'; \cos p = \cos \varphi, \end{aligned}$$

resultará,

$$-\cos \theta - d \cos \theta = -\cos \theta + \text{sen } \theta \cdot \frac{-dr}{r} \text{ tang } \theta' \cos \varphi$$

ó bien

$$d \cos \theta = \frac{dr}{r} \text{ sen } \theta \text{ tang } \theta' \cos \varphi.$$

Introduciendo este valor en F_t hallaremos:

$$\begin{aligned} F_t &= ii' ds \left(K \cos^2 \theta d \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \cos \theta d \cos \theta \right) = \\ &= ii' ds \left(K \cos^2 \theta d \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} d \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Lo que hemos dicho para el elemento $a'b'$ deberemos decir para todos los demás elementos del circuito cerrado C , y después deberemos sumar todos los valores de F_t ; que es como decir, que deberemos integrar la expresión precedente á lo largo de la línea C .

Este resultado

$$\int_C ii' ds \left(K \cos^2 \theta d \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} d \cos^2 \theta \right)$$

será la componente paralela á ab de la acción total de la corriente C sobre el elemento ab . Pero esta componente, según la experiencia demuestra, y antes dijimos, debe ser nula,

porque la acción ó fuerza resultante, es normal al elemento.

De aquí resulta que la ecuación de condición para determinar K , será, sacando fuera de la integral la parte constante,

$$ii' ds \int_c \left(K \cos^2 \theta d \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} d \cos^2 \theta \right) = 0;$$

ó bien prescindiendo del factor constante y descomponiendo en dos integrales

$$\int_c K \cos^2 \theta d \frac{1}{r} - \int_c \frac{1}{2r} d \cos^2 \theta = 0.$$

Integrando la primera por partes, resulta

$$K \left(\cos^2 \theta \frac{1}{r} \right)_c - K \int_c d \cos^2 \theta \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \int_c \frac{1}{r} d \cos^2 \theta = 0,$$

ó por fin

$$K \left(\cos^2 \theta \frac{1}{r} \right)_c - \left(K + \frac{1}{2} \right) \int_c \frac{1}{r} d \cos^2 \theta = 0.$$

Ahora bien

$$\left(\cos^2 \theta \frac{1}{r} \right)_c$$

es una expresión evidentemente nula, porque hay que sustituir los valores de θ y r para los puntos extremos, que como el circuito es cerrado, coinciden en un punto, y θ y r son iguales; por lo tanto, la integral se anula, puesto que las cantidades que han de restarse son idénticas. Y queda para determinar K

$$\left(K + \frac{1}{2} \right) \int_c \frac{1}{r} d \cos^2 \theta = 0,$$

Esta integral, en cambio, no puede ser nula en general, puesto que el contorno es arbitrario, toda vez que el principio experimental es aplicable á toda clase de contornos cerrados.

Y siendo arbitrario C , se ve inmediatamente, ó por consideraciones muy sencillas, que la integral no puede ser nula.

Será, pues, indispensable que se reduzca á O el factor

$$K + \frac{1}{2}, \quad \text{de donde} \quad K = -\frac{1}{2}.$$

Queda, pues, determinada la constante, y queda definitivamente determinada la fórmula clásica de Ampère,

$$F = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta \cos \theta' + \text{sen } \theta \text{ sen } \theta' \cos \varphi \right)$$

que mide la acción de dos elementos *que se suponen aislados* en función de la longitud de estos elementos, de la intensidad de las dos corrientes, de la distancia entre dos puntos cualesquiera de los elementos expresados, y de la situación relativa de ambos, definida por los ángulos θ , θ' y φ .

*
* *

A la fórmula de Ampère se le suele dar otra forma, sustituyendo al ángulo φ el que forman ambos elementos, que llamaremos ϵ .

Esta transformación es sumamente sencilla.

Sean los elementos ab , $a'b'$; aa' la recta que los une.

Tracemos por a , ab_1 paralelo á $a'b'$ y formemos el triedro $amn p$, terminado por un triángulo esférico de la esfera cuyo radio es 1, y en el cual tendremos:

$$mn = \epsilon; \quad \text{ángulo } p = \varphi; \quad mp = \theta, \quad np = \theta'.$$

Se sabe por trigonometría que,

$$\cos mn = \cos mp \cdot \cos np + \text{sen } mp \cdot \text{sen } np \cdot \cos p,$$

ó bien

$$\cos \varepsilon = \cos \theta \cos \theta' + \text{sen } \theta \text{ sen } \theta' \cos \varphi;$$

y sustituyendo el último término del segundo miembro en la fórmula de Ampère,

$$F = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(\frac{-1}{2} \cos \theta \cos \theta' + \cos \varepsilon - \cos \theta \cos \theta' \right),$$

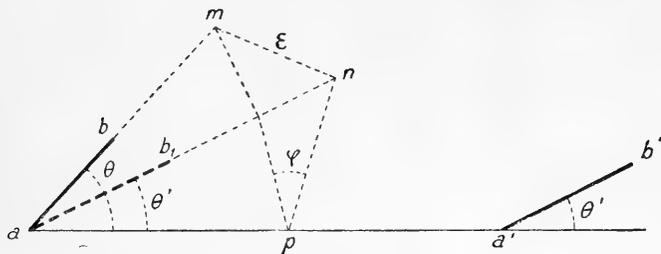


Figura 54.

tendremos

$$F = A \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right)$$

representando por A una constante que dependerá de las unidades que se elijan.

Todavía puede darse otra forma á la expresión anterior, introduciendo la distancia r y sus derivadas, como vamos á explicar.

Sean C, C' (fig. 55) dos corrientes eléctricas, es decir, dos conductores metálicos por los que circulan las corrientes i, i' .

ab y $a'b'$ serán dos elementos, ds, ds' , cuya acción estará representada por la fórmula precedente.

$aa' = r$ es la distancia entre los puntos extremos de ambos elementos.

Elijamos en el conductor C un punto O como origen de longitudes, y es claro que la posición de cualquier punto a estará definida por la longitud $Oa = s$. Es decir, que s es la variable que define el punto a que se elige en el conductor C , ó, si se quiere, la posición del elemento $ab = ds$.

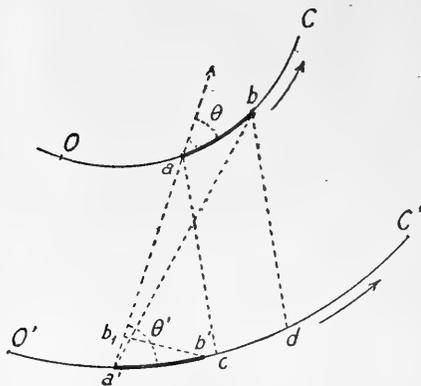


Figura 55.

Del mismo modo, en el conductor C' elegiremos un punto arbitrario de origen O' , y definiremos la posición de cualquier punto a' , ó la del elemento $a'b'$, por la longitud del arco $O'a' = ds'$.

Aquí, como antes, la variable s' es la que define sobre el segundo conductor la posición de cualquier punto ó de cualquier elemento.

Resulta de lo dicho, que cualquier distancia r entre dos puntos a, a' de ambos conductores será una función de las dos variables s y s'

$$r = f(s, s').$$

De donde se deduce, que *a priori* puede afirmarse que, admitiendo, como admitía Ampère, que el cálculo de la acción

de dos elementos aislados es legítima, si la forma y la posición de los conductores está determinada, esta acción se podrá expresar en función de r , s y s' .

La transformación de la fórmula precedente es elemental.

Tracemos las rectas, en la figura 55, aa' que será igual á r , y ba' que será la longitud en que se convierte r por el incremento $ab = ds$ del arco $Oa = s$, es decir,

$$aa' = r; ba' = r + \frac{dr}{ds} ds.$$

Ahora vamos á proyectar la figura $a'ab$ sobre la tangente en a' del conductor C' , ó, si se quiere, sobre el elemento $a'b'$.

Tendremos, suponiendo que $a'cd$ es una recta, á saber, la tangente en a' ;

$$cd = a'd - a'c = a'b \cos ba'd - aa' \cos aa'c.$$

Pero cd , que es la proyección de ab , será igual á $ab = ds$, multiplicada por el cos. del ángulo que forma ab con cd , ó sea con $a'b'$, que está en la misma línea, es decir, por el cos. del ángulo que forman los dos elementos, ángulo que hemos designado por la letra ϵ ; por lo tanto,

$$cd = ds \cdot \cos \epsilon,$$

$a'b$ es el valor de r , como hemos dicho, cuando s recibe el incremento ds ; luego

$$a'b = r + \frac{dr}{ds} ds.$$

Y $\cos ba'd$ será asimismo el valor de θ' al pasar del punto a al punto b , es decir,

$$\cos ba'd = \cos \theta' + d \cos \theta':$$

por fin, ya sabemos que

$$aa' = r; \cos aa'c = \cos \theta'.$$

Sustituyendo todos estos valores en la fórmula que hemos obtenido proyectando el triángulo $a'ab$ sobre la tangente en a' , tendremos:

$$ds \cos \varepsilon = \left(r + \frac{dr}{ds} ds \right) (\cos \theta' + d \cos \theta') - r \cos \theta';$$

y desarrollando, simplificando y despreciando el infinitamente pequeño de segundo orden

$$\frac{dr}{ds} ds d \cos \theta'$$

se hallará

$$ds \cos \varepsilon = \frac{dr}{ds} \cos \theta' ds + r d \cos \theta'.$$

Sustituyendo el valor de

$$\cos \theta' \quad \text{que es} \quad \cos \theta' = -\frac{dr}{ds'},$$

como se deduce del triángulo $a'b'b_1$, observando que al pasar de a' á b' , r disminuye en la figura, y por lo tanto, dr debe ser negativa, para que el cos. del ángulo agudo θ' resulte positivo, tendremos

$$ds \cos \varepsilon = -\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds + rd \left(-\frac{dr}{ds'} \right)$$

ó bien

$$\cos \varepsilon = -\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - r \frac{d \frac{dr}{ds'}}{ds},$$

y por fin,

$$\cos \epsilon = - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - r \frac{d^2 r}{ds ds'}$$

Sustituyendo este valor y los de $\cos. \theta$ $\cos. \theta'$ en la fórmula de Ampère

$$F = A \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(\cos \epsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right)$$

tendremos

$$F = A \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(- \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{3}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right)$$

ó bien

$$F = A \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - r \frac{d^2 r}{ds ds'} \right)$$

Todavía puede simplificarse más la fórmula, y presentarse bajo otra forma, que ofrece grandes ventajas para el cálculo de la potencial, introduciendo dos funciones U y U' de r , como hace Mr. Bertrand, ó bien directamente, como en la teoría mecánica del calor de Mr. Briot; pero no podemos entrar en estos pormenores, al menos por ahora.

Cuando en otro año estudiemos sistemáticamente la electro-estática, si es que llega tal caso, podremos discutir ampliamente estas cuestiones.

*
* *

Con cualquiera de las fórmulas de Ampère que hemos presentado, pueden resolverse los principales problemas de electrodinámica, que se estudiaban al principio del último siglo.

1.º Puede calcularse, siempre para corrientes fijas de dirección y de forma, la acción de una corriente cerrada sobre un elemento de corriente.

2.º La acción de dos corrientes cerradas.

3.º Estos mismos problemas, cuando el circuito que encierra cada corriente es muy pequeño; problema de suma importancia para las relaciones entre el electro-magnetismo y la electro-dinámica.

4.º La acción de un solenoide cerrado ó abierto sobre un elemento de corriente ó sobre una corriente.

5.º Puede deducirse aun, la definición de los polos de un solenoide, y su semejanza con los polos magnéticos; y por fin, para abreviar esta lista de problemas, la acción entre los polos de dos solenoides, ó de un solenoide y un imán.

Teoría admirable por lo ingeniosa y lo sencilla, y que siempre será una gloria muy preciada y muy inquebrantable desde especial punto de vista, sean cuales fueren los progresos de la ciencia, para el eminente sabio francés.

Por ahora, según hemos dicho, no podemos entrar en estas cuestiones, y para el alumno que quiera anticipar sus estudios respecto á tal materia, indicaremos las siguientes obras.

La obra clásica y fundamental de Ampère ya citada.

Una exposición elemental en la Física - matemática de Resal.

Otra, más extensa, en la segunda edición de esta misma obra.

La ya citada de Briot.

La teoría matemática de la electricidad de Bertrand.

Y el gran tratado de electricidad y óptica de Mr. Poincaré.

Como en este momento sólo trato de la electro-dinámica clásica, que en su origen, con Ampère y, en su desarrollo, más tarde, es principalmente labor de los sabios franceses, á éstos me refiero en la anterior lista.

Cuando tratemos de la electro-dinámica moderna, será necesario citar los grandes trabajos de los matemáticos y físicos de otras naciones.

*
* *

Y, antes de pasar adelante, debo llamar la atención de mis oyentes y lectores sobre un punto de que ya he tratado en otras conferencias.

He dicho varias veces, que en la Física matemática de fin del siglo pasado, que es á la que yo, para abreviar, doy el nombre de Física matemática clásica, uno de los elementos fundamentales de la ciencia, uno de los conceptos salientes de los fenómenos naturales, era la fuerza.

El Universo era la fuerza, ó un conjunto de fuerzas, aunque á veces, cuando éstas eran múltiples y no se reducían á una resultante única, se comprendía todo el sistema bajo la palabra acción, palabra que hemos venido empleando en esta conferencia y en la anterior al establecer los fundamentos de la teoría de Ampère.

Pero este concepto de fuerza no era vago é impreciso. La fuerza era la causa del movimiento, y estaba sujeta á medida, y ha venido á encarnar en la vida de las sociedades modernas, y se mide por kilogramos.

El concepto de fuerza será tan impenetrable como se quiera, pero responde á fenómenos perfectamente determinados de la ciencia experimental; y, sobre todo, como antes decíamos, y como hemos dicho tantas veces, la fuerza está sujeta á unidades y puede expresarse por números, y, por consiguiente puede someterse al cálculo numérico ó al cálculo algebraico.

La fuerza era la dominadora de la Mecánica y de la Física.

Verdad es, según hemos explicado ya, que al concepto

fuerza vino á unirse bien pronto, aunque adquiriendo cada vez más importancia, el concepto de *trabajo* ó *energía*, que en su desarrollo llegó á adquirir dos formas:

1.º El trabajo mecánico, producto de una fuerza por un camino.

2.º La fuerza viva, producto de la masa de un móvil por el cuadrado de su velocidad.

Conceptos ambos que se comprendían bajo la denominación genérica de *energía*.

Este concepto de energía se ha generalizado más tarde, dando lugar á una escuela, entre física y filosófica, la escuela de la Energética, de que ya hemos hablado en otras ocasiones.

*
* *
*

Así es que habrán observado mis alumnos, en comprobación de estas ideas, que en la electro-dinámica, tal como la planteaba y la consideraba Ampère, y tal como se consideraba entonces por la mayor parte de los físicos, el concepto dominante era el de fuerza, y el problema fundamental era determinar el esfuerzo que se ejercía, ó si se quiere, la *acción*, pero como fuerza pura, entre dos elementos de corriente ó entre dos corrientes cualesquiera.

En todos los problemas que hemos enumerado hace un momento, la incógnita era la fuerza, ó si el sistema era más complejo y no podía reducirse á una sola acción, por lo menos el sistema de fuerzas en que esta acción consistía; problema que también se plantea de este modo en la estática clásica.

Y no ya en el año 26 del siglo pasado, año en que se reunieron y se publicaron las memorias de Ampère comunicadas á la Real Academia de Ciencias en 4 y 16 de Diciembre de 1820, en 10 de Junio de 1822, en 22 de Diciembre de

1823 y en 12 de Septiembre y 28 de Noviembre de 1825, sino en época muy posterior, en 1884, en que publicó Mr. Resal su tratado de Física matemática, estos son los problemas, es decir, los que antes enumerábamos, que el ilustre autor, miembro del Instituto y profesor de la Escuela Politécnica, comprende y trata en la obra mencionada, sin ocuparse para nada, ni del trabajo, ni de la energía, ni de la potencial; la fuerza y sólo la fuerza es la incógnita fundamental del problema.

Sin embargo, el mismo Mr. Resal, en la 2.^a edición de la obra citada, que es de 1888, al tratar de la inducción eléctrica, y al exponer las fórmulas de Weber, expone ya el problema de la potencial.

Sabido es que Weber había presentado por entonces una nueva teoría de la electro-dinámica: «Electrodynamische Maassbestimmungen».

A medida que avanza la Ciencia, el concepto de la energía adquiere cada vez más importancia, y así, en la obra de Briot antes citada, cuya última edición es de 1883, al estudiar los problemas de la electro-dinámica, se complementa el estudio de la acción entre dos corrientes con el de la potencial de las mismas; y en la obra de Mr. Poincaré, puede decirse que domina el estudio de la energía eléctrica, sobre todo al exponer las nuevas teorías de la electricidad.

Ya lo habíamos anunciado, y sobre esta misma idea volveremos repetidas veces: si el concepto de fuerza es dominante en la Ciencia clásica, en la Ciencia moderna de la electricidad, la hegemonía pertenece al *trabajo*, á la energía, á la potencial; conceptos que se reducen unos á otros.

Si con dos frases quisiéramos condensar estos conceptos, podíamos decir sin pecar de exageración:

Ciencia clásica: la fuerza medida en kilogramos.

Ciencia moderna: la energía medida en kilográmetros.

¿A qué obedece este cambio?

¿Son caprichos de la moda, que, hasta cierto punto, también la moda domina en la región de las Ciencias?

¿Obedece, por el contrario, este cambio á una evolución natural, y hasta pudiéramos decir, á una necesidad del pensamiento moderno?

¿Es una transformación inútil ó provechosa?

Creemos lo último.

Y viniendo al problema en que nos ocupamos, la transformación desde Ampère á Maxwell, Hertz, Lorentz y Lamor, ha sido transcendental y completa.

El que familiarizado con la electrodinámica clásica, abre cualquier libro alemán, inglés ó francés, de los grandes maestros de hoy, al pronto queda desorientado, y ni las notaciones comprende. Es preciso que salte á tierra y se aclimate en las nuevas regiones, que un mar inmenso las separa de las antiguas.

Pero sin penetrar por ahora en estos problemas que para más adelante quedan, y fijándonos tan sólo en la cuestión que antes tratábamos, hemos de repetir una vez más que la importancia que la Física matemática moderna concede al concepto de energía, es natural y lógica; y diremos más, es absolutamente necesaria.

Repitamos ideas que ya hemos apuntado en otras ocasiones.

El concepto de fuerza, de la fuerza que se mide en kilogramos, en suma, de la de la vieja Mecánica, era natural y fecundo cuando se trataba de las masas ponderables, cuando al concepto de masa material iba unido el concepto de inercia.

Entonces, este problema elemental: determinar las ecuaciones, ó la ecuación, en el caso del movimiento de un punto bajo la acción de una fuerza, era de una sencillez extrema, porque dada una fuerza X , actuando sobre una masa m en línea recta, la ecuación del movimiento se expresaba inmediatamente.

Si durante el tiempo dt la fuerza X puede considerarse como constante, por la misma definición de la fuerza, el incremento de velocidad se expresaba desde luego en esta forma:

$$dv = \frac{X}{m} dt.$$

Es decir, que el incremento de velocidad dependía únicamente de la masa, como coeficiente experimental de la Física; que es el verdadero regulador de la velocidad, el que determina en cada momento lo que la velocidad aumenta, el que en cierto modo disciplina la fuerza y la hace entrar en el terreno de lo finito y de lo determinado, sin que una fuerza aplicada á un móvil material le comunique una velocidad arbitraria ó infinita, haciendo imposible el problema, como á primera vista parece que sucede en la Electrodinámica, según hemos explicado en otras ocasiones.

Y así, de la ecuación precedente se deduce desde luego

$$mdv = Xdt$$

y

$$m \frac{dv}{dt} = X$$

ó, por fin, sustituyendo

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

que es, podemos decir, la ecuación fundamental de la Dinámica; ecuación que al pasar al espacio de tres dimensiones, se repite para los tres ejes.

Realmente, hasta aquí no hace falta la teoría energética.

Mas al pasar á la teoría de la electricidad y el magnetismo, los principios, las hipótesis y aun las experiencias que nos han servido para establecer la Mecánica clásica, en gran parte caen en defecto.

Y el problema elemental y más sencillo, ó que debiera ser más sencillo, de esta última Ciencia, presenta dificultades de tal naturaleza, que casi no podemos al principio dar un paso.

Si queremos determinar el movimiento de un punto A , bajo la acción de fuerzas determinadas, en la vieja Mecánica, según acabamos de recordar, nos basta con un solo dato: la masa m del punto A .

Pero, si el punto A es una carga eléctrica sin ningún núcleo ponderable, un electrón puro, pudiéramos decir, ó menos aún, porque el electrón es un sistema de cierta complejidad, una esfera eléctrica y homogénea, de dimensión sumamente pequeña; si se nos piden las ecuaciones del movimiento de dicho punto A , la verdad es que, aun siendo el problema tan elemental como parece ser, toda la Mecánica clásica será impotente para resolverlo.

De la masa m y de su inercia no hay que hablar, porque la esferilla eléctrica, ni tiene inercia, ni tiene masa ponderable.

De la aplicación directa de las fuerzas al punto A , con independencia de los movimientos anteriores de este punto, es decir, de la velocidad y de la dirección con que la masa eléctrica ha llegado á la posición A , tampoco puede hablarse, porque precisamente en la corriente eléctrica han de tenerse en cuenta circunstancias de que antes se prescindía, como son la velocidad y la orientación de cada elemento de la corriente. Y más diremos, aun parece que influye la unión de unos elementos con otros, porque el elemento aislado se considera por muchos físicos como puro idealismo.

Y de aquí resulta que limitándonos al caso más sencillo, al de dos corrientes eléctricas, podremos determinar y hemos

determinado el esfuerzo ó el sistema de fuerzas que ejercen unas sobre otras; pero el cálculo de estos esfuerzos es de todo punto insuficiente para resolver otros problemas más hondos de la electro-dinámica.

Porque el problema general del movimiento del fluido, ó de los átomos eléctricos, ó de los electrones, ó de lo que fuere la electricidad ó se suponga que es, no puede resolverse sólo por el concepto de fuerza, desde el momento en que faltando la inercia de la cosa que se mueve, la fuerza, concepto dominante de la Mecánica clásica, es impotente en el problema de la electricidad y aun del magnetismo: por este motivo ha sido forzoso introducir en esta Ciencia el concepto de trabajo ó de energía.

Problemas que no se resuelven sólo por el concepto de fuerza, se resuelven, ó se está en camino de resolverlos, introduciendo en esta nueva rama de la Física el nuevo concepto, al cual, por ahora, y hasta no deslindar bien los campos, damos muchos nombres: como trabajo mecánico, fuerza viva, energía, energía potencial, energía cinética, y á veces, en los sistemas complejos, el nombre de potencial, sencillamente.

En la Mecánica clásica, bien sabemos lo que quieren decir estas palabras: trabajo mecánico y fuerza viva, y energía y potencial de un sistema. Pero en la electro-estática y en la electro-dinámica todas estas palabras necesitan nuevas definiciones, que daremos con toda amplitud cuando llegue la ocasión oportuna.

* * *

De cómo y por qué, problemas que no pueden resolverse sólo con el concepto de fuerza se resuelven introduciendo el concepto de energía, es cuestión muy importante, y, á nuestro entender, muy honda, y algo indicamos, aunque muy á la ligera, en las conferencias del curso precedente.

En este orden de ideas, y para terminar la conferencia de hoy, me permitiré hacer algunas observaciones, aunque comprendo que por ahora han de ser un tanto vagas.

Una masa eléctrica en movimiento, según las experiencias de Rowland, puede considerarse como una corriente eléctrica; y si la masa eléctrica es e y la velocidad v , se dirá que la intensidad de la corriente es ev .

Si la corriente se altera, si aumenta ó disminuye, si varía con el tiempo, si el punto traza determina curva, hablar de la corriente será hablar de la velocidad v del elemento eléctrico e .

Luego será resolver un problema análogo al que antes indicábamos.

Pero cuando una corriente circula ante un conductor, en éste se desarrolla por la teoría de la inducción otra corriente que se opone á la primera y que la modifica y, en cierto modo, la absorbe, produciendo efectos análogos á la inercia de las masas.

Luego ya tenemos algo semejante á la inercia de las masas ponderables, algo que puede oponerse al aumento indefinido de velocidad, algo que puede asemejarse y fingir una fuerza viva.

Pero todos estos problemas de inducción no se resuelven por el concepto clásico de fuerza, sino por el concepto de energía.

Luego en último análisis, por el concepto de energía se podrá determinar, ó se comprende que podrá determinarse los diversos valores por que pase la velocidad v de la masa eléctrica e .

Todo esto lo estudiaremos con más detenimiento en otra ocasión.

Y con lo dicho termino esta noción sucinta, que he considerado conveniente dar á mis alumnos sobre el problema fundamento de la electro dinámica de Ampère.

Pudiera creerse que este paréntesis ó esta pequeña excursión á ramas ya viejas, y algunos dirían que anticuadas, aunque hay esfuerzos del genio humano que nunca se hacen antiguos, esta excursión, repetimos, estaba fuera de lugar, porque tratábamos de hacer aplicaciones del problema de Stokes, y nada hemos dicho de él en estas últimas conferencias.

Pero ya dijimos, anticipándonos á la objeción, las razones de estética y de simetría, por decirlo de este modo, que nos obligaban á cometer esta pequeña incongruencia.

Y por lo demás, aun desarrollando la teoría de Ampère, nos hubiera sido fácil hablar del teorema de Stokes, como al hablar de dicha teoría modernizada, hablan autores eminentes.

Mas hubiera sido preciso para ello que entráramos á estudiar la potencial de dos corrientes, y esto nos hubiera detenido más tiempo del que podemos disponer, dado que el presente curso está, por decirlo así, terminando.

Además, estas conferencias tienen, aunque modestamente, carácter histórico, y tengo empeño en dar á cada teoría la nota clásica de origen, si vale la palabra.

Pero la teoría de Ampère en su esencia, es ajena á teorías modernas de energías y potenciales.

Después veremos cómo dicha teoría de Ampère se va desarrollando y complicando: y estudiaremos sucesivamente la teoría de sus discípulos; la de Weber, en que se esfuerza, sin conseguirlo, por hacer depender la electro-dinámica de la electro-estática, aunque á decir verdad, hay en ella ciertas anticipaciones y ciertos atisbos de la teoría moderna de Lorentz; y en fin la de Helmholtz; para venir á parar, por una transformación completa, á las teorías de Maxwell, Hertz, Lorentz y Lamor, que por anticipado pueden consultar mis alumnos en la segunda edición de la gran obra de Poincaré.

III.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimasexta.

SEÑORES:

Terminamos en la conferencia anterior el estudio que hicimos, elemental, rapidísimo, más bien que estudio, avance al estudio de la electro-dinámica clásica, que en el fondo viene á constituir la teoría de Ampère; y llegamos al fin de la conferencia sin haber hecho aplicación de la fórmula de Stokes, como era hasta cierto punto nuestra obligación, según el programa que de antemano habíamos trazado.

Pero ya presentamos nuestras excusas por esta inconsecuencia, y aun dijimos que nada nos hubiera sido más fácil que llenar este vacío, habiendo entrado en el estudio de la potencial de dos corrientes; pero esto hubiera sido, hasta cierto punto, repetir por anticipado, y perdónesenos la contradicción, algo de lo que en esta conferencia vamos á exponer.

La teoría de Ampère, que es de las ramas más interesantes y más curiosas de la teoría clásica de la electricidad, constituye una de las dos excepciones, que pueden citarse, en la Física-matemática de la pasada centuria.

Hemos dicho y hemos repetido con insistencia, que en la Física-matemática del siglo XIX se fundaba casi toda ella en la hipótesis mecánica.

En la hipótesis mecánica se fundaba la teoría de la elasticidad, la teoría del sonido, la teoría de la luz, la teoría de la capilaridad y, por de contado, la Astronomía, considerada como gran problema de la Física-matemática del Universo, y en sus comienzos, y en muchas obras importantes, la teoría mecánica del calor.

La masa inmensa de problemas, comprendida en los títulos anteriores, y en algunos más que á ellos pudieran agregarse, como, por ejemplo, la misma teoría de los torbellinos, y el problema general de la hidro-estática y de la hidro-dinámica, todos ellos eran problemas más ó menos complicados de la Mecánica de las masas ponderables y de la acción á distancia.

A esta larga lista de los estudios matemáticos del Universo físico, sólo pueden oponerse dos excepciones: la teoría del calor de Fourier por una parte, y por otra me atreveré á agregar la teoría de Ampère.

Salvo que en ella se habla de fuerzas, bien puede decirse, que esta última rama de la Física, ni se funda en la hipótesis mecánica, ni en la hipótesis mecánica clásica pudiera fundarse, sin gran atrevimiento, cualquier problema que se refiera al movimiento de la electricidad.

Ampère, aún afirma más: afirma que su teoría sólo se funda en la experiencia. Tal afirmación, como dice Mr. Poincaré, es exagerada, porque de algunas hipótesis echa mano el insigne matemático francés.

No puede, sin embargo, negarse, que en la experiencia está fundada casi toda su teoría, y que las hipótesis á que acude, como ya indicamos en la conferencia anterior, ninguna de ellas es la hipótesis mecánica propiamente dicha; son hipótesis parciales, y por decirlo así, características, y pertenecen en cierto modo á la familia de aquellas hipótesis, al menos algunas de ellas, naturales y de buen sentido, á que acude el más severo experimentador.

Mas sobre todo esto ya expusimos algunas ideas en la

conferencia precedente, y no debemos insistir sobre materia que no podríamos agotar en unas cuantas líneas, ni en unas cuantas frases.

Dando, pues, por terminada, por ahora, la teoría de Ampère, pasemos á exponer una última aplicación de la fórmula de Stokes.

*
* * *

Ligeras ideas sobre la naturaleza de los problemas de la electro-dinámica moderna. — En todos los problemas de esta rama de la Física, dígase lo que se quiera, ó domina, ó se insinúa por lo menos la hipótesis mecánica.

No será la hipótesis mecánica de la materia ponderable, será una hipótesis mecánica más amplia; se acudirá acaso á una nueva Mecánica, transformación y ampliación de la antigua; pero el fundamento de las nuevas teorías es la Mecánica; y ¿cómo no había de serlo, tratándose de movimientos, aceleraciones, fuerzas y trabajos mecánicos?

La electro-dinámica de Ampère, es, como antes decíamos, una excepción, gracias á que el problema dinámico está en cierto modo latente y disimulado, y en que las apariencias del problema más bien son de una cuestión de estática; al menos así fué, hasta que surgieron los problemas de la inducción y de la energía.

Para marcar la diferencia entre la electro-dinámica clásica ó de Ampère y la electro-dinámica moderna de Maxwell, Hertz, Lorentz, Lamor y Poincaré, tendríamos que repetir, palabra por palabra, casi cuanto dijimos al señalar las diferencias características, que existen, entre la electro-estática clásica y la electro-estática moderna de Faraday y del mismo Maxwell.

Por de contado, el problema de la electro-dinámica puede presentarse con gran generalidad; queremos decir, que se puede considerar el problema de la electro-dinámica, como

abarcando en sí, á modo de caso particular, el problema de la electro-estática.

No de otro modo en Mecánica racional se considera á la estática como un caso particular de la dinámica.

Consideremos, pues, como tipo ó esquema uno de estos problemas generales.

*
* *

Consideremos en el espacio (fig. 56), un conductor cualquiera A , con carga inicial de electricidad ó sin ella, en comunicación, ó no, con tierra.

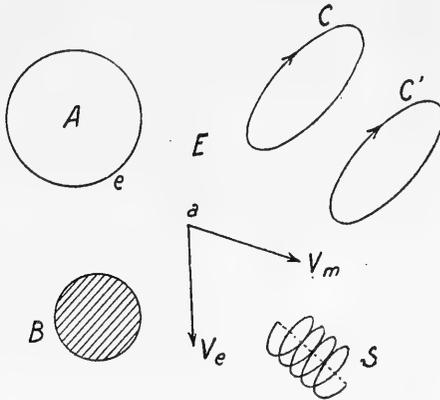


Figura 56.

Y como éste, otros varios, $A' A''$

Consideremos asimismo masas eléctricas fijas B, B'

Consideremos además diferentes conductores C, C' por los cuales circulan corrientes eléctricas engendradas por pilas ó por cualquier clase de generadores.

No consideraremos imanes, porque, á fin de simplificar la explicación, suponemos, admitiendo la hipótesis de Ampère, que todo imán equivale á un solenoide, es decir, á una corriente eléctrica arrollada en forma de hélice.

Pero en cambio, admitiremos una serie de solenoides $S, S'...$ De suerte que supondremos en el espacio diferentes sistemas $A, B, C, S...$ á que podemos dar el nombre de entidades eléctricas.

Pues bien, en la electro dinámica clásica, que suponemos que comprende como caso particular la electro-estática, el problema sólo se refiere á relaciones entre estas diferentes entidades, y en todo caso á los fenómenos que en cada una de ellas se desarrollen, por ejemplo: carga y espesor eléctrico en A ; fuerzas desarrolladas entre C y C' ; acción del solenoide sobre las demás entidades eléctricas, y cuando más, si estos diferentes sistemas cambian con el tiempo, determinación de estos cambios.

Pero el problema no se referirá á ningún punto, a por ejemplo, del espacio E , que entre estos sistemas y alrededor de ellos se extienda.

Podrá hablarse de la acción de $A, B, C, S...$ sobre el punto a ; pero éstas acciones son puramente abstractas, son fórmulas matemáticas afectas, por ejemplo, al punto a , pero que ninguna significación física tienen por sí.

Para que la carga e de A produzca un efecto material en a será preciso que consideremos en este punto colocada una carga eléctrica de prueba igual á la unidad, y no deberemos decir que la carga e ejerce en a dicha fuerza V_e , sino que ejercería esa fuerza si en a colocásemos una carga eléctrica igual á 1 en que la carga de A pudiera, por decirlo así, hacer presa.

Del mismo modo, no podremos decir que la corriente del conductor C ejerce una fuerza magnética V_m sobre el punto a (entendiendo por acción magnética lo mismo la de un imán que la de una corriente, según la hipótesis establecida).

Sino que deberemos decir, que si en el punto a colocásemos un polo magnético de prueba, de intensidad 1 , entonces la corriente C ejercería un esfuerzo medido por V_m .

Pero todo esto es hipotético, ó son, por decirlo así, expe-

riencias imaginarias. En la Física antigua, se supone que todas estas relaciones de fuerza, de distribución eléctrica y de distribución de corrientes, sólo tienen lugar entre sistemas materiales de bulto, si se nos perdona la palabra: en un conductor, en un hilo metálico, en un solenoide, en un imán. Y son acciones á *distancia*, salvando el espacio intermedio, y sin rozarse con él, si podemos expresarnos de este modo.

En resumen, el espacio E no entra para nada en juego; es, cuando más, un aislador.

Para los sistemas ó entidades eléctricas hay problemas y ecuaciones y cálculos; para el espacio ambiente E , ni cálculos ni problemas de efectos materiales.

*
* *

Claro es que en la evolución de la Ciencia, el paso de la electro-dinámica clásica á la electro-dinámica moderna, no ha sido repentino.

El espacio E ha ido poco á poco adquiriendo condiciones físicas, hasta convertirse en lo que es hoy: en campo eléctrico, magnético ó electro magnético, poblado todo él de vectores, que no son, al menos para muchos físicos, puras abstracciones matemáticas, sino representación y símbolo matemático de algo material y positivo.

En primer lugar, el puro espacio geométrico se transformó en dieléctrico, luego en campo magnético, y aun desprovisto de toda materia ponderable y convertido en éter, entró á formar parte importantísima de todos estos problemas de electro-estática y electro-dinámica.

A la vez que el espacio se iba materializando, aparecían nuevos fenómenos, por ejemplo, el de la inducción; y nuevas teorías, la de la energía ó de la potencial, que antes citábamos.

*
* *

Pero vengamos á la electro-dinámica moderna, y la misma figura 56 nos sirve; pero el espacio E ya no es puramente geométrico, ya es un espacio físico, que entra en juego con los elementos $A, B, C, S...$ y tiene tanta importancia como ellos, y aún diremos que tiene más importancia.

Así, la acción de A sobre un punto cualquiera a ya no es puramente abstracta ó hipotética: en rigor no hay que poner en a una carga eléctrica de prueba, en el punto a existe, sea este punto de un dieléctrico, sea de un campo magnético, sea del éter. Es una cantidad eléctrica tan pequeña como se quiera; pero como el espacio está lleno de estas entidades, su conjunto vale tanto ó vale más que la carga eléctrica de A .

Y aquí vendría bien la exposición de la teoría del desplazamiento de Maxwell, del cual ya dimos como una ligerísima noción, incompleta y aun incorrecta, en una de las conferencias anteriores.

Asimismo, la acción de la corriente C sobre el punto a no será tampoco abstracta, ni para hacer que entre en juego será preciso colocar en el punto a un polo de prueba, porque en ese punto a , no sólo existe electricidad latente, sino polos ó corrientes en las que puede hacer presa, empleando la misma palabra que antes, la corriente C ó el solenoide S .

En suma, todo punto del espacio, ya se trate de un dieléctrico, ya del éter, ya en general de un campo magnético, es un elemento complejo, y bien pudiéramos decir misterioso, que en rigor entra en juego por las acciones eléctricas, por las acciones electro-dinámicas y por las acciones magnéticas.

*
* *

De aquí resulta que el principal interés en la nueva electro-dinámica reside en el estudio de los campos eléctricos y magnéticos; y al decir magnéticos, queremos decir también electro-dinámicos.

Y parece que lo primero sería estudiar la estructura, si se permite la palabra, del punto a ó de un elemento infinitamente pequeño del campo.

¿Es un conjunto de partículas eléctricas sujetas á acciones recíprocas, y constituyendo un sistema elástico, como el éter, de la teoría de la luz en la teoría clásica?

¿Es un sistema de celdillas en cuyo interior se mueven elementos eléctricos, experimentando ciertos desplazamientos bajo las acciones exteriores, pero sin poder franquear los límites de la celdilla en cuestión?

¿Es que en esas celdillas existen corrientes eléctricas infinitamente pequeñas y con toda clase de orientaciones, pero prontas á orientarse bajo la acción directriz de corrientes ó imanes exteriores?

¿Es que, además, en algún caso, este campo electro-magnético puede ser un verdadero imán, y pudiéramos aplicar las teorías anteriores á la teoría de la imantación?

¿Es que existirán tal vez, como se supone en la teoría de Lorentz ó en otras análogas, electrones en movimiento constituyendo verdaderas corrientes de convección?

Todas estas son teorías que hemos indicado otras veces, y que estudiaremos en otros cursos á ser posible.

Por ahora, limitémonos á repetir lo que en la electro-estática dijimos.

Las teorías modernas tienen en cuenta todo el campo electro-magnético, sea un campo electro-magnético propiamente dicho, sea un dieléctrico, sea el éter.

A las entidades eléctricas aisladas, como las que hemos representado esquemáticamente en la figura 56, y que designábamos por A, B, C, S , hay que agregar todos los puntos $a \dots$ del campo eléctrico, como elementos activos del problema.

Para fijar las ideas, indiquemos una marcha, que en el problema general pudiera seguirse, ó que se concibe que pudiera seguirse teóricamente.

*
* *

Representemos por (*D*) el sistema de elementos eléctricos que constituyen, por decirlo de este modo, los datos ó sistemas eléctricos que se suponen conocidos. En la figura 56, sería el conductor *A*, la masa *B*, las corrientes *C* y *C'*, y el solenoide *S*.

Pero en general, todos estos elementos, que son los datos del problema, los representamos por la notación indicada (*D*).

Todos estos elementos actuarán sobre cada punto, *a* por ejemplo, del campo (*E*).

Lo que para este punto digamos, repetimos implícitamente para todos los demás puntos de dicho campo.

Como en el sistema (*D*) hay masas eléctricas, fijas ó en cuerpos conductores, por una parte, es decir sistemas eléctricos; y por otra, hay corrientes, solenoides y aun imanes, que por solenoides pueden representarse, estos dos grupos, darán dos clases de acciones, sobre cada punto *a*; 1.º acciones eléctricas, que podremos representar por un vector V_e ó vector eléctrico, que puede designarse también sencillamente por E_0 , así:

$$V_e = E_0.$$

Y 2.º, acciones magnéticas, que vendrán expresadas por un vector magnético V_m al cual otros autores designan en forma abreviada por H_0 .

Es decir, que todo el sistema *D* engendra un doble campo de vectores: vectores eléctricos *E*, y vectores magnéticos *H*, y á cada punto corresponde un vector de cada clase.

Podemos sintéticamente decir:

Sistema (*D*) engendra un { Campo eléctrico de vectores E_0 .
doble campo. { Campo magnético de vectores H_0 .
En cada punto *a* un vector E_0 .
y un vector H_0 .

Y como el sistema *D* es conocido, los dos campos, el eléctrico y el magnético, quedarán perfectamente definidos. Pero no es así; puede decirse que estamos al principio, porque

ocurre preguntar y debe preguntarse: ¿Puesto que el campo no es inerte, en cada punto a , qué efecto producen los dos vectores E_0 y H_0 ?

Para lo cual sería preciso conocer la naturaleza del campo (E), ó hacer hipótesis respecto á su composición eléctrica y á su composición magnética, sin perjuicio de comprobar los resultados experimentalmente.

Supongamos que se adopta una hipótesis, y que, por virtud de esta hipótesis, se puede determinar en cada punto el estado eléctrico y magnético del campo.

Representemos este nuevo estado activo por (E'), comprendiéndose en (E') elementos eléctricos y elementos magnéticos, por ejemplo: masas eléctricas desplazadas, pequeñas corrientes orientadas ó pequeñas masas magnéticas polarizadas.

Y aquí concluye la primera aproximación y empieza la segunda.

El problema se nos plantea de nuevo, pero más en grande; ya no sólo tenemos el sistema (D), sino además el sistema (E').

Pues bien; podemos repetir para (D) y (E') lo que antes dijimos sólo para (D). Y ambos determinarán en cada punto a del campo dos nuevos vectores, distintos de los primeros, que llamaremos, E_1 al vector eléctrico, y H_1 al vector magnético.

Como estos vectores son distintos de los anteriores, producirán nuevas alteraciones en cada elemento del campo, ó digamos, para cada punto.

Y el campo resultará en un nuevo estado electro-magnético, que representaremos por (E'').

Con lo cual termina la segunda aproximación y empieza la tercera.

Porque podemos estudiar la acción de (D) y (E'') sobre el campo primitivo E , acción que se traducirá por un tercer grupo de vectores eléctricos E_2 , y de vectores magnéticos H_2 .

Los que á su vez crearán un nuevo estado (E'''), y así sucesivamente.

Y suponemos que la serie de vectores

$$\begin{aligned} E_0, H_0 \\ E_1, H_1 \\ E_2, H_2 \\ \dots \end{aligned}$$

es, por decirlo así, convergente, aproximándose á un sistema límite

$$E, H$$

de vectores eléctricos y magnéticos para cada punto del campo.

Este sistema, puramente ideal, de aproximaciones, dada una hipótesis bien definida, se sustituye por la resolución de un sistema de ecuaciones, como ya explicaremos quizá en otra serie de conferencias.

*
* *

Mas, para esto, para aplicar un cálculo matemático, por decirlo así, sintético, en vez de aplicar una serie de aproximaciones, es absolutamente preciso establecer hipótesis: sobre la constitución del éter, si del éter se trata; sobre la constitución de cada dieléctrico, si en un dieléctrico está colocado el sistema (D), ó, en general, sobre el campo magnético ó electro magnético E .

Sin esta hipótesis, no podremos pasar de una aproximación á otra, porque no sabremos cómo van á modificar cada elemento del campo los vectores E y H , ni qué fuerzas eléctricas ó magnéticas van á desarrollar.

Y esto mismo podremos decir para en el caso en que se planteen ecuaciones generales, prescindiendo de estas aproximaciones sucesivas, que sólo presentamos á modo de representación simbólica.

Ahora bien; como las hipótesis son muchas, como ninguna salva todas las dificultades ni explica todos los fenómenos, muchos físicos y matemáticos han perdido la fe en las hipótesis; y han renunciado á ellas, renunciando en absoluto á conocer la constitución íntima del eter, de los dieléctricos, y en general, de los campos electro-magnéticos,

Un campo, dicen, está definido, cuando para cada punto del mismo se conocen los dos vectores E y H .

Cabe preguntar si estos vectores han de ser los reales y efectivos E y H de que antes hablábamos, ó los primeros de la serie E_0, H_0 , ó alguno de los intermedios E_n, H_n .

Es de suponer que se referirán á los definitivos, á los que realmente existen, ó mejor dicho, á los que simbolizan hechos existentes y positivos.

Aceptemos, pues, este punto de vista. En un campo eléctrico ó magnético, ó las dos cosas á la vez, sucede algo, se desarrollan fenómenos que nosotros no podemos penetrar.

Las diferentes teorías que de algunos años acá se han desarrollado, pugnan por penetrar el misterio por medio de hipótesis, que en el fondo son hipótesis mecánicas, que luego se traducen por ecuaciones que se supone que representan las leyes matemáticas del fenómeno, y que por fin la experiencia confirmará ó negará de una vez.

En cambio la escuela, que algunos llaman conceptualista, renuncia en absoluto á penetrar el misterio á que nos referíamos, y considera que de un campo magnético, todo lo que puede saberse, es el valor del vector eléctrico E para cada punto, es decir, valor y posición; y el valor del vector magnético, si existe, para ese mismo punto.

Con tal que para cada punto del campo conozcamos E y H , conocemos de dicho campo todo lo que podemos conocer.

Esta opinión, y la escuela á que ha dado origen, pueden discutirse, y merecen discutirse ámpliamente.

Algo hemos dicho sobre esta cuestión en una Memoria que recientemente hemos leído en la Academia de Ciencias,

y aún puede y debe decirse mucho más; pero no insistiremos sobre este punto, porque nos alejaría del objeto de esta conferencia.

Digamos tan sólo, que el mismo Hertz indica dos excepciones, es decir, dos casos en que el conocimiento de los vectores E y H no basta para determinar todas las propiedades del campo magnético, á saber: el caso del magnetismo permanente, y el caso de la dispersión.

Problema éste, de Física-matemática, que tiene íntimas semejanzas y da lugar á las mismas escuelas opuestas que otro problema transcendental de sociología, relativo á las relaciones entre el individuo y la masa social.

* * *

Como no tratamos de estudiar los grandes problemas de la electro-dinámica moderna, sino de dar una idea general del carácter de esta inmensa y modernísima ciencia, y de presentar un ejemplo, y nada más que un ejemplo de aplicación de la fórmula Stokes, admitamos que el problema planteado depende única y exclusivamente de la determinación, para cada punto del campo, de los dos vectores E y H .

Nos proponemos, pues, obtener ambos vectores E y H , ó mejor dicho, sus componentes $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ en función de las coordenadas x, y, z , y en general del tiempo.

Obedeciendo á una *primera intuición*, diremos que deben obtenerse seis ecuaciones, finitas, diferenciales, ó como fueren, que nos permitan deducir los seis valores:

$$E_x = \varphi_1(x, y, z, t)$$

$$E_y = \varphi_2(x, y, z, t)$$

$$E_z = \varphi_3(x, y, z, t)$$

$$H_x = \psi_1(x, y, z, t)$$

$$H_y = \psi_2(x, y, z, t)$$

$$H_z = \psi_3(x, y, z, t)$$

si empleamos ecuaciones ordinarias, es decir, escalares; ó dos ecuaciones tan solo, vectoriales

$$E = \varphi(x, y, z, t),$$
$$H = \psi(x, y, z, t);$$

porque sabemos que cada una de éstas se descompone en otras tres.

El problema es más complicado; hay otras incógnitas que se enlazan con E y H , y otras ecuaciones, á las que hay que aplicar precisamente el teorema de Green; mas por hoy no podemos descender á estos pormenores, nos limitamos á presentar ante nuestros alumnos conceptos generales, y con estas reservas, digamos que hay que buscar dos ecuaciones.

Y en efecto, así en la teoría de Maxwell, como en las que de ella se derivan, de dos ecuaciones vectoriales, ó mejor dicho, de dos grupos de tres ecuaciones cada uno, se parte para la solución del problema, sin perjuicio de las relaciones á que antes nos referíamos; unas que en rigor se refieren á la naturaleza del campo, otras, que es preciso introducir porque se introducen nuevas incógnitas.

Concretémonos definitivamente á estos dos grupos, de tres ecuaciones cada uno.

Maxwell, que es el creador de estas teorías, llegó á ellas por razonamientos y demostraciones que no á todos los matemáticos satisfacen.

Unos afirman que los razonamientos del admirable físico y matemático inglés carecen de rigor; otros afirman que son confusos; y hay algunos que lealmente confiesan que no los entienden.

Y, sin embargo, todos aceptan las ecuaciones finales, ó como definitivas en algunos casos, ó como punto de partida para teorías más completas y rigurosas.

En esta actitud, se coloca el ilustre Hertz, y hasta pudiera decirse que toda la escuela conceptualista.

Admiten como buenas, fecundas, y bajo cierto aspecto, como definitivas, las ecuaciones á que llega Maxwell; pero rechazan el procedimiento de demostración.

Las admiten porque la experiencia las comprueba; mejor aún, porque de la experiencia pueden deducirse, con lo cual, digamos lo cierto: la escuela conceptualista más bien pertenece á la Física experimental, que á la Física matemática con la gloriosa tradición de sus grandes maestros, de su admirable idealismo, y de sus atrevimientos sublimes.

Pero insistiendo en nuestro objeto, digamos: que las ecuaciones que nos hemos propuesto obtener como base de la electro-dinámica moderna, parten de dos hechos experimentales, que responden á dos ideas naturales y sencillas, dada la naturaleza del problema.

El vector E , si el problema de electro-dinámica se reduce á un problema sencillo de electro-estática, y si además no varía con el tiempo, no hará otra cosa que producir un equilibrio, como la fuerza en los problemas de estática; pero si los vectores E no están en equilibrio en el sistema, sus diferencias crearán lo que se llaman potenciales ó fuerzas electro-motrices, y en suma, corrientes eléctricas.

Si encuentran en el campo un hilo metálico formando circuito, engendrarán una corriente eléctrica ordinaria.

Si se trata de un cuerpo conductor de dos ó tres dimensiones, también engendrarán corrientes; el problema será más complicado, pero en la esencia el mismo que antes.

Si ejercitan su acción en un dieléctrico, también engendrarán pequeños movimientos en cada celdilla, corrientes á que en otra conferencia dábamos con Maxwell el nombre de desplazamientos.

Si encuentra electrones, provocará corrientes de convección.

Y aquí nos encontramos con todas las hipótesis antes señaladas.

De todo ello, no retengamos más que esta idea: el vector

E puede engendrar corrientes, y por eso, á veces, en vez de hablar del vector E , hablaremos de la corriente que engendra.

Esto dicho, vamos á señalar dos hechos, cada uno de los que da origen á tres ecuaciones de las seis á que antes nos referíamos, y que se obtienen precisamente por la aplicación del teorema de Stokes, que de este modo penetra, y perdónesenos la frase, en el corazón del problema general de la electro-dinámica.

*
* *

1.º El *primero de los dos hechos* á que nos hemos referido, ó mejor dicho, la primera ley fundamental, pero tomada de la experiencia, puede explicarse de este modo.

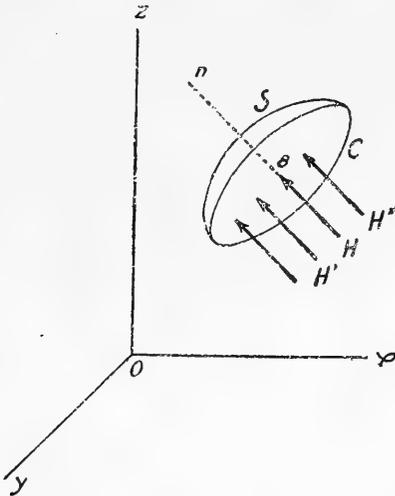


Figura 57.

Sea C (fig. 57) una línea cerrada, que hasta podremos materializar por un alambre ó conductor metálico.

Y supongamos que por el interior de esta línea C pasan multitud de líneas electro-magnéticas de fuerza $H, H', H''...$

Si queremos tener una imagen material del sistema, la tenemos fácilmente en un haz de espigas atado por una cuerda.

Hagamos pasar por C una superficie; cada una de las líneas de fuerza magnética encontrará en un punto á dicha superficie, y su intensidad estará representada por un vector; y en vez de hablar de línea de fuerza magnética, que realmente no hemos definido hasta aquí, podemos hablar de vectores, reproduciendo el caso que estudiábamos al demostrar la fórmula de Stokes.

Aquí, como allí, tenemos una línea cerrada C , una superficie que pasa por dicha línea y un campo de vectores H : el que engendra la parte magnética ó dinámica del sistema de la figura 56.

Según definiciones, que recordarán mis alumnos, el sistema de vectores H , aplicado á los puntos de la superficie S , tendrá un flujo que designaremos φ . Y este flujo será independiente de la superficie S si los vectores cumplen con cierta condición que explicábamos en las conferencias precedentes, condición con la que suponemos que cumplen los vectores H .

Mientras el flujo φ permanezca invariable, el problema será problema de equilibrio ó de tensiones internas de las diferentes partes del sistema; pero si el flujo φ varía, en el conductor C se desarrolla una corriente eléctrica, y la fuerza electromotriz total es proporcional según la experiencia á la variación del flujo, es decir á $\frac{d\varphi}{dt}$.

Esta es una ley que hasta ha descendido á la práctica industrial y que se aplica á las máquinas dinamos. Todos los que estudian electrotecnia recuerdan; que la potencial que se desarrolla en el inducido depende de la velocidad del inductor, ó dicho con más propiedad de la derivada del flujo magnético que pasa por el interior de las espiras.

Allí estas variaciones del flujo magnético dependen de las variaciones en las distancias; nosotros expresamos la ley en general.

Traduzcamos este hecho experimental en fórmula mate-

mática, y ya vemos que hasta aquí no formulamos ninguna hipótesis: á la experiencia nos atenemos tan solo.

Para acomodarnos á la costumbre representemos las tres componentes de la fuerza eléctrica desarrollada en los diferentes puntos de la línea C por P , Q , R . La fuerza electro-motriz de inducción estará representada por

$$\int_C (P dx + Q dy + R dz)$$

que es una integral de línea, precisamente de la línea C .

Y advertiremos, para no confundir á nuestros alumnos, que hemos cambiado de notación, y que hemos llamado P , Q , R á lo que antes llamábamos E_x , E_y , E_z .

Si el vector E , correspondiente á un elemento ds , lo proyectamos sobre dicho elemento y lo multiplicamos por él, y si después sumamos estos productos, tendremos la fuerza electrotriz total; pero esta expresión tiene la forma de un trabajo mecánico en que E representase la fuerza, y como trabajo de la resultante es igual á la suma de los trabajos de las componentes, se ve desde luego que la integral anterior representa la fuerza electro-motriz total; y según la ley experimental antes citada, deberá ser igual á la derivada del flujo, es decir,

$$\int_C (P dx + Q dy + R dz) = \frac{d\varphi}{dt}$$

Pero representando, según una de las notaciones ordinarias, por α , β , γ las componentes del vector magnético H ; por l , m , n los cosenos de los ángulos que forma con los ejes la normal n á la superficie S en cualquier punto a ; y, por último, por $d\omega$ el área de un elemento de superficie, tendremos, según varias veces hemos visto, que el flujo correspondiente á la superficie S tendrá la forma

$$\varphi = \iint_S (l\alpha + m\beta + n\gamma) d\omega$$

extendiéndose la integral doble á la parte de superficie S que comprende la curva C .

La experiencia nos ha permitido, como desea la escuela conceptualista, establecer una primera ecuación que enlaza el vector magnético H que expresa la acción de las corrientes ó de los imanes, ó bien de sus componentes α , β , γ , con el vector eléctrico E y con sus componentes P , Q , R .

Claro es que también hemos variado aquí la notación de los componentes de H : en vez de designarlas por $H_x H_y H_z$, las hemos designado por α , β , γ ,

Y aquí viene la aplicación del teorema de Stokes, que nos permitirá deducir inmediatamente, de la ecuación anterior, tres de las ecuaciones fundamentales de Maxwell.

Pero antes de seguir adelante, advirtamos que, para simplificar, hemos supuesto que el espacio E ó el campo en que están colocadas las entidades eléctricas de la fig. 56, no es un campo magnético, sino que es, por ejemplo, el éter, de suerte que no hay que contar con la inducción magnética, y que el coeficiente μ que suele entrar en estas fórmulas lo suponemos igual á la unidad.

Esto dicho, como el primer miembro de la ecuación anterior es una integral sencilla del tipo que ya hemos estudiado en la fórmula de Stokes, podremos por dicha fórmula transformarla en integral doble, según vimos en la conferencia precedente, y tendremos:

$$\int_C (P dx + Q dy + R dz) = \\ = \int \int_S \left[l \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right) + m \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \right) + n \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \right] d\omega$$

y comparando esta fórmula de transformación con la fórmula experimental antes obtenida, é igualando los primeros miembros, puesto que los segundos son iguales, tendremos:

$$\frac{d}{dt} \int \int_s (l\alpha + m\beta + n\gamma) d\omega = \\ = \int \int_s \left[l \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right) + m \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + n \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \right] d\omega;$$

ó bien

$$\int \int_s \left(l \frac{d\alpha}{dt} + m \frac{d\beta}{dt} + n \frac{d\gamma}{dt} \right) d\omega = \\ = \int \int_s \left[l \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right) + m \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + n \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \right] d\omega.$$

Para que ambas integrales dobles sean iguales, puesto que l, m, n son arbitrarias, toda vez que es arbitraria la superficie C , será preciso que los coeficientes de los tres cosenos l, m, n sean iguales también.

Se pondría esto en evidencia considerando dos superficies S, S' que coincidiesen en toda su extensión, menos en una infinitamente pequeña, para ir de este modo identificando elemento por elemento.

No insistimos sobre este punto, que en el análisis se repite muchas veces, y que es bien conocido de mis alumnos.

Tendremos, pues, identificando ambos miembros:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dy}, \\ \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

Estas son las tres primeras ecuaciones entre los dos vectores E y H , ó sea entre sus componentes $\alpha, \beta, \gamma, P, Q, R$.

Y las hemos demostrado por una aplicación sencillísima de la fórmula de Stokes.

Fórmulas análogas se deducen para el caso de un campo magnético en que entren los componentes del vector de inducción magnética.

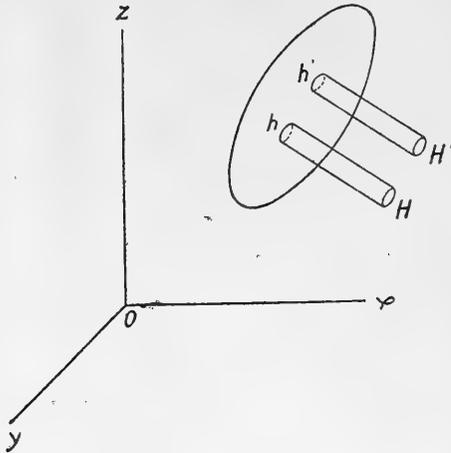


Figura 57 bis.

De este mismo tipo son otras tres que de ella se deducen, introduciendo lo que llama Maxwell el potencial vector; pero no podemos detenernos, ni por estar concluyendo el curso, ni por el objeto determinado de estas conferencias, en el estudio de las cuestiones que acabamos de enumerar.

*
* *

2.º *El segundo de los hechos* á que anteriormente nos referimos y del cual se deduce el segundo grupo de fórmulas que enlazan las componentes de los dos vectores E y H , ó mejor dicho, las compontes de las tres corrientes que pasan por un punto con las del vector magnético; este segundo hecho, repetimos, es tan elemental y tan sencillo como el anterior y tiene, por decirlo así, el mismo carácter, y hasta se representa gráficamente por una figura idéntica á la 57, que es la figura 58.

También en este caso tenemos una línea cerrada M , como allí teníamos una línea cerrada C .

Y como allí pasaban por el interior de C una serie de líneas magnéticas $H, H' \dots$, aquí pasan una serie de corrientes $C, C', C'' \dots$ que serán, análogamente á lo que allí sucedía, algo así como envolvente de vectores.

Allí explicábamos, acudiendo á una imagen, acaso sobrado vulgar, pero clarísima, que la línea C , era como la atadura de un haz $H, H' \dots$.

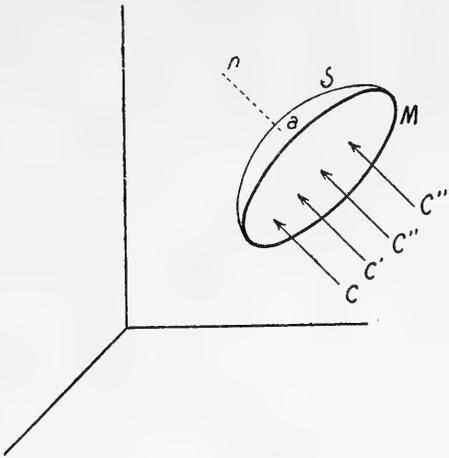


Figura 58.

Aquí, repetimos, que la figura 58 es como otro haz de corrientes en que la ligadura es una línea magnética M ; algo así como un imán en forma de línea, ó, aún con más exactitud, un polo magnético que recorriese la línea M .

Todo ello ya lo explicaremos más detenidamente en otro curso.

Por ahora nos basta con estas ideas generales.

Primer caso: Haz de líneas magnéticas que pasan por el interior de una corriente en forma de anillo.

Segundo caso: Haz de corrientes que pasa por el interior de un anillo magnético.

Esta segunda figura 58 corresponde á otro hecho, á otra experiencia física, pudiéramos decir, que traducida en términos matemáticos, se expresa de este modo, y que en rigor es la segunda ley fundamental de Hertz, y casi nos atreveríamos á decir, de todas estas teorías.

Y es la siguiente:

El trabajo del vector H , cuyas componentes son α, β, γ á

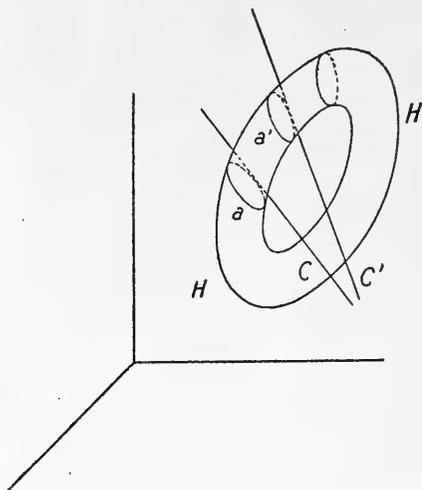


Figura 58 bis.

lo largo de la línea M , es igual, como experimentalmente puede medirse, dando al experimento forma conveniente, á una constante, que es 4π , por el flujo de las corrientes C, C', C'' cuyas componentes representaremos, referidas á la unidad del área que normalmente atraviesan, por u, v, w .

Traducido esto al lenguaje matemático, tendremos:

$$\int_M (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = -4\pi \int \int_S (lu + mv + nw) d\omega$$

l, m, n representan como antes, los cosenos de los ángulos directores de una normal na á la superficie S en cualquier punto de la misma.

Y el procedimiento que hemos de seguir, es el mismo de antes.

El primer miembro es una integral de la línea M , que puede transformarse en integral de superficie, es decir, de la superficie S , por la fórmula de Stokes, y ya no habrá más que identificar las dos integrales de superficie, que han de ser iguales.

Así:

$$\int_M (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \\ = \int \int_S \left[l \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + m \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + n \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] d\omega$$

é igualando los segundos miembros de las dos últimas fórmulas

$$- 4\pi \int \int_S (lu + mv + nw) d\omega = \\ = \int \int_S \left[l \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + m \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) + n \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) \right] d\omega.$$

Y repitiendo, como antes: que para que ambos miembros sean iguales, como la superficie S es arbitraria, y por lo tanto la orientación de cada elemento también lo será, y también la de su normal n , con lo cual, para cada punto del espacio, son arbitrarios los cosenos l, m, n ; que, por consiguiente, si ambos miembros, repetimos, han de ser iguales en todos estos casos, será preciso que también sean iguales los coeficientes de dichos cosenos, tendremos las tres ecuaciones del segundo grupo:

$$- 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ - 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ - 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Claro es que en el primer miembro de estas ecuaciones, en vez de las componentes de la corriente eléctrica u , v , w , podemos introducir las componentes de la fuerza electro-motriz, ó, si se quiere, del vector eléctrico.

Y tendremos de este modo el segundo grupo fuudamental de tres ecuaciones, que experimentalmente nos habíamos propuesto obtener.

Aquí se abre un campo inmenso, el de la electro-dinámica moderna y el de sus grandes teorías y sus numerosas hipótesis; pero no es este el campo que nos hayamos propuesto correr en el presente curso: por ahora, uos limitamos modestamente á estudiar unas cuantas aplicaciones de la fórmula de Stokes. Digamos por fin que la figura 58 bis es, en cierto modo, un esquema de la 58.

Con algunas consideraciones generales sobre esta materia, terminaremos el curso en la conferencia próxima.

11. — Los métodos indirectos de la Química analítica.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

Con relativa frecuencia me comunican químicos, generalmente jóvenes, estudiosos y amantes del progreso de las Ciencias, que han descubierto un método nuevo que permite la determinación cuantitativa de cuerpos mezclados, sin necesidad de las penosas *separaciones* de los métodos ordinarios ó de la medición individual directa de cada componente de la mezcla. También en las *Revistas científicas* de todos los países aparecen á menudo métodos de tal índole, unas veces como completamente nuevos en sus principios, otras como nuevos para determinado problema analítico, pero en uno y otro caso, es poco frecuente que el autor discuta el valor real del método, ó sólo considera su posibilidad práctica y las condiciones de comodidad, prescindiendo de las más importantes, que son las de la exactitud.

En realidad, estos métodos son muy antiguos. Los *métodos indirectos* los aplicaron ya á algunos casos los químicos de la primera mitad del siglo pasado, y según H. Rose (pág. 19 de su *Química Analítica*, cuantit. 1862) el primero que los ideó fué nada menos que Richter. Por esto los tratados de Análisis más acreditados desde aquella época acá ya los citan, si bien es de lamentar que en pocos se hace el debido comentario de ellos, sobre todo general y comparativo, que en muchos aparezcan como diferentes, métodos en su fundamento iguales, y á veces hasta en la expresión matemática de ellos, aparentemente distinta, y que en la mayoría de casos, ó no los juzguen ó se limiten á declarar que dan resultados poco exactos si es muy desigual la proporción de los cuerpos mezclados, sin distinguir unos métodos de otros,

que aprecian por igual y aun sin hacer constar que algunos son de uso frecuentísimo y otros nadie usa.

Crítica tan sobria é insuficiente en unos libros, y completa omisión de crítica y á veces de exposición general de los métodos indirectos en otros, explica que autores ó químicos noveles crean inventar lo que de antiguo es conocido ó juzguen provechosos métodos indirectos que proponen sin analizar en el terreno puramente matemático los errores á que pueden conducir, ni confirmar con experimentación muy repetida, que es el supremo juez, su exactitud. Inversamente, sin detenido examen, rechazan otros todos los métodos indirectos, que consideran igualmente inexactos, tal vez sin darse cuenta que son indirectos muchos métodos que con frecuencia practican, y que está en lo posible, si bien todavía es raro, que un método indirecto iguale ó aventaje á directos regularmente buenos.

Por estas consideraciones he creído que podría ser útil una exposición general y sintética de los métodos indirectos, reducidos á una sola definición y á una única fórmula general que los comprenda todos, seguida de un análisis, también general, que permita comparar fácilmente los métodos ya propuestos, guiar la invención de otros nuevos y aceptables, evitar la de los inadmisibles y rechazar los que sistemáticamente se copian de unos á otros libros sin ventaja práctica alguna.

I

DEFINICIÓN Y OBJETO DE LOS MÉTODOS INDIRECTOS

Analizar cualitativamente un cuerpo es poner en evidencia sus propiedades para de la cualidad de éstas y de las circunstancias en que se han manifestado deducir el nombre del cuerpo que las ha producido.

Analizar cuantitativamente un cuerpo es medir una pro-

propiedad suya que sea función conocida de la masa de aquél; de la magnitud de la propiedad medida se deduce dicha masa (relativa) del cuerpo en el que se ha medido.

El caso general del análisis cuantitativo es medir la proporción en que están los componentes de un complejo químico (combinación ó mezcla). La medición individual de una propiedad conveniente en cada componente, previa ó no separación material de los demás, es la forma habitual de la análisis química cuantitativa actual; son, pues, los métodos más usuales del análisis, *métodos directos* (*). La precisión de éstos, para cada cuerpo, es extraordinariamente variable; pero concuerdan todos casi siempre, en lo lentos y trabajosos para el experimentador, si se quiere alcanzar la máxima precisión analítica actual, en cada caso.

En los *métodos indirectos* se deduce la proporción de cada componente, de las magnitudes colectivas de una serie de propiedades ó variaciones de una misma propiedad fundamental (**), medidas cada una simultáneamente y comunes á todos ó á parte de los componentes. Se obtienen, pues, valores numéricos de conjunto que, cada uno, aisladamente, de nada sirve, pero reunidos permiten formular un sistema de ecuaciones, que si está bien planteado y corresponde á datos experimentales bien elegidos y en número suficiente, permitirá calcular la proporción de los componentes con una

(*) Aunque no se mida *directamente* la propiedad adoptada en el mismo cuerpo, el método es directo; así se mide directamente la dextrosa, ó pesándola pura, ó pesando el anhídrido carbónico que produce por fermentación, ó el carbono que contiene, con tal que estos últimos cuerpos procedan exclusivamente de la dextrosa. Lo característico es, pues, que la magnitud medida corresponde á un sólo cuerpo de los presentes.

(**) Considero variación de propiedad fundamental la de casos como éste: cloruro potásico + cloruro sódico = P gr.; después se transforman estos dos cloruros en sulfatos, cuyo peso total = P' gramos; la propiedad fundamental medida para deducir el K y el Na , es aquí el peso, que *ha variado* al pasar estos metales de la forma de cloruros á la de sulfatos.

precisión que dependerá, no sólo del rigorismo de los valores experimentales, sino de la exactitud de las constantes utilizadas, de las propiedades ó variaciones de propiedad elegidas y de la magnitud de cada una de ellas en cada componente. Esta precisión es, como en los métodos directos, extraordinariamente variable; pero puede afirmarse, con raras excepciones, que es menor, con frecuencia mucho menor para cada componente, que la determinación directa equivalente, practicada cuando es posible. Así la medición de la sacarosa, en presencia de otros cuerpos ópticamente activos, basada en la determinación de la rotación óptica total, antes y después de la inversión de la sacarosa es menos exacta que la misma medición, en ausencia de cuerpos ópticamente activos que permite la determinación directa y aislada de la rotación producida exclusivamente por la sacarosa.

La lentitud y la labor experimental de los métodos indirectos son también extremadamente variables, como las de los directos. En consecuencia, la razón y el objeto de los métodos indirectos en el estado actual de la Ciencia, no es ahorro de tiempo, ni de trabajo, como creen algunos, sino la necesidad, por desconocerse métodos directos apropiados á determinados casos, ó por ser los conocidos muy erróneos. No son, pues, métodos que se eligen, sino que se aceptan *á fortiori*, y que deben desecharse cuando se inventa un método directo, para el caso concreto, suficientemente exacto. Por esta razón podrían suprimirse, de los tratados modernos de análisis, algunos métodos indirectos que tuvieron su razón de ser en pasados años, pero no actualmente.

El natural apego á la brevedad y á la comodidad incita á proponer métodos indirectos de técnica sencilla y corta para casos en que se conocen directos suficientemente exactos. Tales proposiciones revelan desconocimiento del verdadero objeto y actual valor de los métodos indirectos, y pueden rechazarse *á priori* casi todas. Sin embargo, no debe extremarse el mal concepto de los métodos indirectos, afirmando

en redondo que no deben emplearse nunca, disponiendo de directos, considerados preferentes. Este es el criterio racional actualmente, casi en absoluto; pero está en lo posible, y desde luego en lo deseable, el descubrimiento de métodos indirectos que igualen, y acaso aventajen, en exactitud á los directos conocidos y que los superen en condiciones de comodidad, facilidad y brevedad de ejecución.

Importa, pues, conocer los factores que intervienen en los métodos indirectos para deducir su valor relativo, que es muy variable; esmerarse en el descubrimiento de otros nuevos verdaderamente útiles y desdeñar los que sólo tienen realidad teórica y carece de mérito descubrirlos. Nada, en efecto, más difícil hoy, en análisis, que inventar métodos indirectos compatibles con los directos: nada más fácil y elemental que formular sistemas de ecuaciones que resuelvan en el papel la composición de una mezcla.

No es menester en la mayoría de métodos indirectos propuestos, tal vez en todos, hacer un detenido estudio experimental, costoso y largo, aunque siempre útil, para deducir su valor y, en consecuencia, aceptarle ó rechazarle, en todos los casos, ó en determinados. Basta conocer la precisión á que se puede llegar en la medición de los valores experimentales de conjunto en *las circunstancias del método*; estudiar la influencia *puramente matemática* de la expresión algébrica en los errores inevitables y deducir la precisión con que resultará medida cada magnitud individual.

Este estudio, aplicado á los métodos indirectos, actualmente conocidos, es desfavorable á los más de ellos, aunque en grado muy diferente.

II

EXPRESIÓN Y EXPOSICIÓN GENERAL DE LOS MÉTODOS INDIRECTOS

La expresión matemática de todos los métodos indirectos conocidos, es la misma; es este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & x + y + z + \dots = P \\
 [1] \quad & x' + y' + z' + \dots = P', \\
 & x'' + y'' + z'' + \dots = P'' \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

en la que P, P', P'', \dots , son los valores experimentales de las magnitudes colectivas de cada propiedad medida, común á los componentes, ó de las variaciones, determinadas también experimentalmente, de una misma propiedad: x, y, z, \dots la magnitud concreta á cada componente de la primera propiedad medida; x', y', z', \dots la magnitud concreta á cada componente de la segunda propiedad medida, ó de una primera variación experimental de la misma propiedad primera, y análogamente, x'', y'', z'', \dots .

Este sistema no tiene solución, pues exceden las incógnitas á las ecuaciones. Para que la tenga es necesario, por lo menos, que se conozcan las razones:

$$\frac{x'}{x} = K; \quad \frac{y'}{y} = K'; \quad \frac{z'}{z} = K'' \dots$$

las

$$\frac{x''}{x} = Q; \quad \frac{y''}{y} = Q'; \quad \frac{z''}{z} = Q'', \text{ etc.}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 x' &= Kx; & y' &= K'y; & z' &= K''z \dots \\
 x'' &= Qx; & y'' &= Q'y; & z'' &= Q''y \dots
 \end{aligned}$$

que permiten este otro sistema:

$$\begin{aligned}
 [2] \quad & x + y + z + \dots = P \\
 & Kx + K'y + K''z + \dots = P' \\
 & Q + Q'y + Q''z + \dots = P'' \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

que si es determinado permite calcular x, y, z, \dots

Si x, y, z, \dots expresan pesos, desde luego indican cada uno la cantidad del componente correspondiente existente en [la porción de mezcla analizada cuyo peso es P (*)]. Si x, y, z, \dots expresan la magnitud de otra propiedad distinta del peso a, b, c, \dots de cada componente correspondiente, entonces, para deducir estos pesos, es necesario conocer las razones

$$\frac{a}{x} = F; \quad \frac{b}{y} = F'; \quad \frac{c}{z} = F'',$$

que dan

$$a = Fx; \quad b = F'y; \quad c = F''z \dots \dots$$

Estos valores F, F', F'', \dots constantes para cada cuerpo y propiedad medida, son los *factores* ordinarios de los métodos directos; es decir, los mismos que se emplearían si los valores x, y, z, \dots fueran determinados individualmente por métodos directos. En consecuencia, la influencia, casi siempre perjudicial, del método indirecto, llega sólo á los valores x, y, z, \dots : el tránsito de éstos á los definitivos a, b, c, \dots se realiza sin nueva influencia en la exactitud, ó, si acaso, depende exclusivamente de la de los factores F, F', F'', \dots , lo mismo exactamente que en una medición directa.

Por esto es frecuente, en los casos en que x, y, z, \dots no

(*) En análisis, masa y peso son equivalentes, como en otras varias mediciones de otra índole.

expresan pesos, que se introduzcan en el sistema de ecuaciones [2] los factores F, F', F'' , sustituyendo los valores x, y, z, \dots por sus iguales respectivos $\frac{a}{F}, \frac{b}{F'}, \frac{c}{F''}, \dots$.

y considerando á a, b, c, \dots como las incógnitas; sin que ésto, de carácter puramente matemático, varíe la parte experimental, ni modifique la mayor ó menor precisión del método. El sistema, en estas condiciones será, por lo tanto:

$$\frac{a}{F} + \frac{b}{F'} + \frac{c}{F''} + \dots = P$$

[3] $K \frac{a}{F} + K' \frac{b}{F'} + K'' \frac{c}{F''} + \dots = P'$

$$Q \frac{a}{F} + Q' \frac{b}{F'} + Q'' \frac{c}{F''} + \dots = P''.$$

En los casos en que P, P', P'', \dots expresan magnitudes de propiedades diferentes y no variaciones de una misma propiedad, siendo a, b, c, \dots el peso de cada componente, es todavía más frecuente que en cada ecuación se introduzca el factor que relacione directamente la propiedad, cuya medida colectiva expresa aquélla, con el peso de cada componente que la posee, con aparente independendencia de las demás ecuaciones. Entonces, el sistema fundamental [1] tiene la forma:

$$\frac{1}{F} a + \frac{1}{F'} b + \frac{1}{F''} c + \dots = P$$

[4] $\frac{1}{R} a + \frac{1}{R'} b + \frac{1}{R''} c + \dots = P'$

$$\frac{1}{L} a + \frac{1}{L'} b + \frac{1}{L''} c + \dots = P''$$

.....

.....

siendo

$$\frac{a}{x} = F; \quad \frac{b}{y} = F'; \quad \frac{c}{z} = F'' \dots\dots$$

$$\frac{a}{x'} = R; \quad \frac{b}{y'} = R'; \quad \frac{c}{z'} = R'' \dots\dots$$

$$\frac{a}{x''} = L; \quad \frac{b}{y''} = L'; \quad \frac{c}{z''} = L'', \dots\dots$$

ó sean los factores directos referidos.

Este sistema conducirá exactamente al mismo resultado que el sistema general [2], en que los coeficientes expresan la razón entre las magnitudes de dos propiedades distintas del mismo cuerpo. En efecto, para los mismos valores de a, b, c, \dots y las mismas propiedades medidas, P, P', P'', \dots tendrán, respectivamente, en el sistema [2] y [4] los mismos valores, luego

$$x = \frac{1}{F} a; \quad Kx = \frac{1}{R} a; \quad K' x = \frac{1}{L} a \dots\dots$$

y respectivamente los términos en y , en z, \dots con relación á los en b, c, \dots . La diferencia será que con el sistema [4] se deducen inmediatamente los valores a, b, c, \dots , ó sea los pesos de los componentes, y con el [2] los valores de la primera propiedad medida, con los que, usando los factores ordinarios correspondientes de los análisis directos, se calculan a, b, c, \dots .

Son, pues, los tres sistemas [2] [3] [4], variantes del [1] é idénticos entre sí en cuanto á los valores á que conducirán para a, b, c, \dots , aun cuando para los mismos valores de P, P', P'', \dots aparezcan constantes numéricas diferentes, en [2] que en [3] y [4] (por ser distintas las incógnitas inmediatas del sistema) y se utilicen para plantear el sistema [3], propiedades relacionadas distintas que en el [4]. Las expre-

siones finales de a, b, c, \dots en los sistemas [3] y [4] para el mismo método experimental deben ser idénticas; si no lo son es prueba de que alguna ó algunas de las constantes $K, \dots, Q, \dots, L, \dots, R, \dots$ son inexactas, ó no son verdaderas constantes experimentales; caso no raro.

Sirva de ejemplo del modo diferente de plantear un mismo método la determinación de una mezcla de hidrógeno (a), formeno (b) y óxido de carbono (c), midiendo experimentalmente la contracción total $= P$, el CO_2 total producido $= P'$ y el O_2 total consumido en la combustión $= P''$.

Los sistemas de ecuaciones serán, según [2]:

$$\begin{aligned}x + y + z &= P \\ \frac{1}{2}y + 2z &= P' \\ \frac{1}{3}x + y + z &= P''.\end{aligned}$$

siendo: $x =$ contracción del H_2 ; $y =$ contracción del CH_4 ;
 $z =$ contracción del CO .

Según [4] será

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}a + 2b + \frac{1}{2}c &= P \\ b + c &= P' \\ \frac{1}{2}a + 2b + \frac{1}{2}c &= P''\end{aligned}$$

siendo $a =$ vol. de hidrógeno (*); $b =$ vol. del formeno;
 $c =$ vol. del óxido de carbono.

Del primer sistema resultan:

(*) En este ejemplo, como en muchos análisis de gases, las incógnitas finales a, b, c, \dots expresan volúmenes y no pesos, como se ha supuesto en la discusión como caso más general.

$$x = \frac{3}{2}P - \frac{3}{2}P''; \quad y = 2P'' - \frac{2}{3}P - \frac{2}{3}P';$$

$$z = \frac{1}{6}P + \frac{2}{3}P' - \frac{1}{2}P''$$

y del segundo:

$$a = P - P''; \quad b = P'' - \frac{1}{3}P - \frac{1}{3}P';$$

$$c = \frac{1}{3}P + \frac{4}{3}P' - P''.$$

pero como

$$a = \frac{2}{3}x; \quad b = \frac{1}{2}y; \quad c = 2z$$

(pues el volumen del hidrógeno es igual á los dos tercios de su contracción, el del formeno á la mitad de la suya y el del óxido de carbono el doble de la correspondiente), serán los valores definitivos según el primer sistema:

$$a = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}P - \frac{3}{2}P'' \right) = P - P'';$$

$$b = \frac{1}{2} \left(2P'' - \frac{2}{3}P - \frac{2}{3}P' \right) = P'' - \frac{1}{3}P - \frac{1}{3}P';$$

$$c = 2z = 2 \left(\frac{1}{6}P + \frac{2}{3}P' - \frac{1}{2}P'' \right) = \frac{1}{3}P + \frac{4}{3}P' - P''$$

idénticos á los obtenidos del segundo sistema.

Vemos, pues, que las diferencias que ofrecen varios métodos indirectos, experimentalmente iguales, son aparentes y dependientes de la forma de plantear cada ecuación, y que los métodos experimentales distintos pueden plantearse en forma algebraica igual, salvo el valor de las constantes pro-

pias de cada método. En consecuencia, se puede adoptar como única expresión de todos los métodos indirectos el sistema de ecuaciones [2], con los significados descritos de los coeficientes en cada caso. Tal es, en efecto, el molde, nada secreto ni maravilloso, con el cual pueden inventarse multitud de métodos indirectos, con la seguridad de que si el sistema de ecuaciones de dicho tipo es determinado en cada uno, serán todos *teóricamente* exactos.

III

CASOS DE APLICACIÓN Á SÓLO DOS CUERPOS

En la práctica actual, casi todos los métodos se refieren á la medición indirecta de sólo uno ó dos componentes, y bastan, por lo tanto, dos ecuaciones. Algunas veces se plantean tres, pero una de ellas corresponde á la medición *directa* de uno de los tres componentes del sistema; por lo tanto, *indirectamente*, sólo se determinan dos.

Podemos, pues, reducir en la práctica los métodos indirectos á lo expresado en este simple sistema:

$$\begin{aligned}x + y &= P \\Kx + K'y &= P':\end{aligned}$$

que conduce para sus incógnitas á estas expresiones.

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{K - K'} P' - \frac{K'}{K - K'} P; \\y &= \frac{K}{K - K'} P - \frac{1}{K - K'} P' .\end{aligned}$$

De este sistema y expresiones generales derivan tres tipos de métodos indirectos.

PRIMER TIPO. *Métodos por diferencia.*—Resulta del supuesto que $K = 0$; $K' = 1$ (*), de donde:

$$x + y = P$$

$$y = P'$$

$$x = P - P',$$

que es la expresión general de los métodos por diferencia.

Si y se refiere á un solo cuerpo, resultará medido directamente: si $y = (a + b + c + \dots)$ se obtendrá su valor total, ó por medición directa colectiva, ó directa individual de cada componente a, b, c, \dots , y la suma calculada de estos valores será y . No es lo mismo para la exactitud de x , medido en todo caso indirectamente, una ú otra forma de determinar y .

Es frecuente no incluir estos métodos entre los indirectos, pero lo son realmente, reconociendo que el grado de inexactitud que como tales les afecta, suele ser menor que en los propiamente indirectos, tanto, que los hay muy comparables, practicamente, á los directos, y en algunos casos, relativamente raros, aventajan los métodos por diferencia á los directos *practicados en las mismas condiciones experimentales*.

Comparables por su exactitud á los métodos directos son las determinaciones por *pérdida de peso* (CO_2 , N_2O_5 , H_2O , cuerpos volátiles, en general, en presencia de otros inalterables por el calor y el aire, etc.), y las tan practicadas volumetrías en que se adiciona un exceso de líquido valorado, que se mide luego con otro. Estos, y otros análogos ejemplos, son los menos indirectos de los métodos por diferencia, pero, indudablemente, afecta á su exactitud lo que tienen de indirectos y hay que atenderlo en la práctica.

(*) La interpretación química de $K = 0$, es que al medir experimentalmente la segunda propiedad ó la variación de la primera, no existe uno de los componentes ó no posee la propiedad que se mide.

Los métodos, por diferencia más típicos, pueden dar el valor indirecto de x , ó tal como expresan las ecuaciones anteriores, ó bien siendo

$$y = (a + b + c + \dots) + n,$$

estas otras:

$$(a + b + c + \dots) + n + x = K$$

$$n + x = P$$

$$n = P'$$

$$x = P - P'.$$

Ejemplo de la primera forma, entre muchísimas, es la determinación del oxígeno total en análisis elemental: el químico carece en tales casos de confirmación, ni aproximada, de la exactitud del análisis, pues siendo

$$y = P' \text{ y } x = P - P',$$

forzosamente será

$$y + P - P' = P$$

aunque P' sea inexacto.

Expresado el resultado del análisis en centésimas, como se suele, la suma de todas éstas será fatalmente ciento, sean los que fueren los errores cometidos en la determinación directa de unos componentes, é indirecta del restante.

En la segunda forma de método por diferencia, lo indirecto empieza al medir P , no K . Es ejemplo de ella, entre muchos, la determinación del sodio en minerales complejos, midiendo directamente todos los componentes, menos el potasio y el sodio, que se miden colectivamente pesando la mezcla supuesta pura é integral de sus cloruros. Midiendo, finalmente, el cloruro potásico (por lo tanto el potasio) de

esta *misma* pesada mezcla, por diferencia se deduce el cloruro sódico y de éste el sodio. Sumadas en este caso las centésimas de todos los componentes, no resultará forzosamente ciento, sino un número más ó menos próximo, que permite juzgar, aunque no con seguridad, la exactitud del análisis. Por esta razón, y por depender la exactitud de x sólo de una determinación directa de un componente y de la suma de dos, esta forma de medición por diferencia suele aventajar á la primera (*).

Es innecesario citar más ejemplos de determinaciones por diferencia, pues se practican á menudo, aun abusivamente, atendiendo á la comodidad tal vez más que á la exactitud, contrariamente á la regla de no usar métodos indirectos, habiéndolos directos. Justo es, sin embargo, consignar que en muchas otras ocasiones son procedentes por necesidad, y á veces hasta preferentes por elección, como ya indiqué antes y justificaré luego.

Segundo tipo: medición colectiva de dos magnitudes diferentes de la misma propiedad fundamental.

En una porción conocida de la mezcla (pura ó impura, según los casos), se mide la propiedad elegida, forzosamente común á los dos componentes, de donde la primera ecuación

$$x + y = P.$$

(*) En realidad la independencia de la exactitud del valor x de la presencia de los otros componentes medidos directamente, menos uno, es ficticia. Si $P = n + x$, es una mezcla primitiva pura, P estará probablemente bien medido, pero si $n + x$, proceden de una mezcla primitiva compleja, P será más ó menos erróneo, muy difícilmente exacto, á causa de la dificultad de aislar puros é íntegros los cuerpos á que se refiere el valor x y el n : en consecuencia $x = P - n$ será inexacto por serlo P y probablemente n . La mayoría de métodos indirectos adolecen de este error de origen: considerar que P expresa el valor colectivo de una mezcla pura é integral, cuando procede generalmente de largas y costosas separaciones que la impurifican ó la merman.

En la *misma* porción utilizada para esta medición, ó en otra, igual ó proporcional conocida, se produce experimentalmente una acción apropiada que modifique la magnitud de la propiedad medida en los dos ó sólo en uno de los componentes, y se repite la medición de la misma propiedad. Inmediatamente, si se operó con la misma ó iguales proporciones de mezcla, ó previo sencillo cálculo, en otro caso, se dispone de la segunda ecuación

$$(x \pm n) + (y \pm n') = P',$$

siendo n y n' el valor de la variación de la propiedad en cada cuerpo.

Si se conocen las razones

$$\frac{x \pm n}{x} = K, \quad \text{y} \quad \frac{y \pm n'}{y} = K'$$

la segunda ecuación se convierte en

$$Kx + K'y = P'$$

que, con la primera forma el sistema general de los métodos indirectos que conduce á las expresiones:

$$x = \frac{1}{K - K'} P' - \frac{K'}{K - K'} P.$$
$$y = \frac{K}{K - K'} P - \frac{1}{K - K'} P'.$$

Cada método tiene sus valores propios de K y K' , y por lo tanto, expresiones propias para x é y , en las que se sustituye P y P' por los valores experimentales de cada problema concreto. Estas expresiones propias de x é y son las que figuran en los libros como fórmulas de determinados métodos, no siendo raro que no se explique su origen ni fundamento, que aparezcan como distintas algunas iguales,

y que no pueda el lector adivinar si están equivocadas, que no es raro, aun en muy buenos libros.

Lo más común es que x é y representen pesos. La primera ecuación supone, generalmente, entonces que la mezcla de los dos componentes es pura; no siempre es necesario que lo sea, aunque muy conveniente, pues permitirá determinar P por *pesada directa*, que dará un valor más exacto que por cualquier otro medio. Si la propiedad medida no es el peso, puede también ser impura la mezcla, pero forzosamente exenta de cuerpos que tengan la misma propiedad que se mide. En una mezcla impura de sacarosa y dextrosa se puede medir la rotación óptica total, que corresponderá exclusivamente á estos dos cuerpos, si no hay otros ópticamente activos en la mezcla. Asimismo, una acción oxidante ó reductora, ó una coloración, ó una contracción de volumen por combustión en gases, etc. Si acompañan cuerpos que poseen la misma propiedad, ó es imposible el problema, ó hay que eliminarlos, ó hay que medirlos directamente para calcular el valor que en ellos tiene la propiedad utilizada, y deducirlo de P . Esto se practica mucho, pero es siempre una perturbación, frecuentemente grave, para la exactitud de x é y . Así, en mezclas de $\text{SO}_4 \text{H}_2$, SO_3 y SO_2 , la medición de este último y cálculo de su equivalente de acidez, conduce á valores más inexactos para los correspondientes al $\text{SO}_4 \text{H}_2$ y al SO_3 preexistentes.

Análogamente en otros casos, incluso cuando la propiedad utilizada es el peso, pues resulta P , probablemente con error.

Generalmente, x é y , son positivos, y , por lo tanto,

$$P > x; P > y$$

y positivo. Las propiedades que admiten dos signos (temperatura, rotación óptica, etc.) permiten que x ó y , ó las dos, sean negativas; y, como consecuencia, que P sea positivo ó negativo, ó cero, y menor que x é y .

La acción experimental que modifica x é y , es la clave de cada método y su característica. Produce casi siempre una transformación química: P' expresa, pues, una magnitud de propiedad igual á la correspondiente á P , pero medida en otros cuerpos producidos con la acción experimental. Una mezcla de cloruro sódico y cloruro potásico ha pesado P : una acción experimental adecuada convierte cada cloruro en sulfato neutro equivalente ó en cloruro argéntico, y el peso colectivo de los nuevos cuerpos es P' . Frecuentemente expresa P' el peso total experimental de un componente común de los dos primeros cuerpos: en este caso la acción experimental es la medición de tal componente, en el que podemos considerar convertido cada cuerpo primitivo. Así, una mezcla de cloruro y bromuro argéntico ha pesado P , eliminando experimentalmente el cloro y el bromo queda sólo plata, que pesa P' , como expresión del resultado de la transformación del cloruro y del bromuro primitivo. También en este ejemplo se puede convertir, experimentalmente, el bromuro argéntico en cloruro argéntico, y pesar todo el cloruro final: la transformación es ahora de uno de los cuerpos, el bromuro, en cloruro, sin variar el otro. Pero pesar cloruro argéntico es lo mismo que pesar cloro, pues sabemos la composición de aquél; podemos, pues, también suponer que la transformación del sistema de cuerpos primitivo ha sido en cloro.

En cada caso ó método se necesita conocer y aplicar como valores de K y K' , las razones entre el nuevo cuerpo y el primero, en función de la propiedad medida (*peso* en los ejemplos anteriores). Requieren, pues, los expuestos, conocer para uno

$$\frac{1/2 \text{SO}_4 \text{Na}_2}{\text{ClNa}} = K \quad \text{y} \quad \frac{1/2 \text{SO}_4 \text{K}_2}{\text{ClK}} = K';$$

para otro

$$\frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl Na}} = K \quad \text{y} \quad \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl K}} = K';$$

y respectivamente en los demás;

$$\frac{\text{Ag}}{\text{Cl Ag}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{Ag}}{\text{Br Ag}}; \quad \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl Ag}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Br Ag}}; \quad \frac{\text{Cl}}{\text{Cl Ag}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{Cl}}{\text{Br Ag}}.$$

Análogamente, una solución de sacarosa y dextrosa da una rotación = P ; la llamada inversión, experimental, convierte la sacarosa en azúcar invertido, y no modifica la dextrosa: K expresará en este caso la razón entre la acción óptica del azúcar invertido y la de una cantidad equivalente (no igual) químicamente de la sacarosa, mientras $K' = 1$ por no haber variado la dextrosa y ser, por lo tanto, su acción óptica la misma, antes y después de la inversión. Así todos los métodos indirectos de este tipo.

Los ejemplos citados enseñan que n y n' (valor de la variación concreta de x é y en cada problema) pueden ser ambos, ó uno solo, positivos ó negativos, y sólo uno de ellos puede ser igual á cero. P' puede ser igual (muy raro), mayor ó menor que P , y de igual ó de distinto signo, si la propiedad admite los dos. Claro es que la acción experimental no debe modificar otros cuerpos presentes, ó si acaso, en forma tal que sus productos no posean la propiedad que se mide.

Ejemplos de métodos indirectos del tipo segundo.—Se han elegido aquellos que mejor sirvan para la discusión de este tipo de métodos indirectos, para la comparación de su valor relativo y de enseñanza para no formular métodos nuevos inútiles.

Por la importancia que tiene en la precisión el sentido (positivo ó negativo) y la magnitud de las variaciones n y n' que experimentan x é y , antes de determinar P' , en todos

los ejemplos siguientes, en lugar de dar á la segunda ecuación del sistema general la forma

$$Kx + K'y = P'$$

se le dará la siguiente, exactamente igual para la práctica;

$$(x \pm n) + (y \pm n') = P',$$

siendo

$$Kx = x \pm n, \text{ y } K'y = y \pm n',$$

y, por lo tanto,

$$K = \frac{x \pm n}{x}, \quad K' = \frac{y \pm n'}{y}.$$

Además de las expresiones finales de x é y , con sus constantes numéricas en cada ejemplo, se indicarán los valores concretos también á cada caso, K , K' y $K - K'$, así como si $P' > P$: datos que interesan para la discusión de los métodos indirectos.

No siempre las constantes numéricas deducidas aquí corresponden rigurosamente á las consignadas en las obras para los mismos métodos. Es debido á errores de cálculo ó de imprenta en éstas, pero sobre todo á los valores K y K' utilizados, variables con los pesos atómicos, poderes rotatorios, etc., adoptados para calcularlos. Los pesos atómicos, adoptados aquí, son los de 1909, y las rotaciones ópticas, las que inspiran mayor confianza: en los gases se ha supuesto igual en todos el volumen molecular, que es lo aceptado generalmente en análisis de gases, aunque no siempre con acierto.

Finalmente, en cada ejemplo, se indicará su precisión,

expresada en error relativo, suponiendo que P haya sido determinado experimentalmente sin error, y P' con un error relativo = 0.002: esta precisión se ha calculado para dos ó más valores de la razón $\frac{x}{y}$ en cada caso.

Algunos ejemplos son puramente teóricos y se indican por lo instructivos.

A. Determinación indirecta de cloruro sódico y cloruro potásico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación experimental en sulfatos neutros respectivos: peso de éstos = P' gr.

$$\begin{array}{c} x \\ \text{(ClNa)} \end{array} + \begin{array}{c} y \\ \text{(ClK)} \end{array} = P$$

$$\begin{array}{c} (x + n) \\ \text{(SO}_4\text{Na}_2) \end{array} + \begin{array}{c} (y + n') \\ \text{(SO}_4\text{K}_2) \end{array} = P'$$

$$K = \frac{1/2 \text{SO}_4\text{Na}_2}{\text{ClNa}} = 1.215; K' = \frac{1/2 \text{SO}_4\text{K}_2}{\text{ClK}} = 1.1686$$

$$K - K' = 0,0464. P' > P. n \text{ y } n' \text{ positivos.}$$

$$x = 21,5517 P' - 25,1853 P.$$

$$y = 26,1853 P - 21,5517 P'.$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClNa}}{\text{ClK}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,116 \\ \text{— — de } y = 0,091 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClNa}}{10 \text{ClK}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,697 \\ \text{— — de } y = 0,046. \end{array} \right.$$

B. Determinación indirecta de cloruro sódico y cloruro potásico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación experimental en fluoruros neutros respectivos: peso de éstos = P' gr.

$$\begin{aligned} \underset{\text{(ClNa)}}{x} + \underset{\text{(ClK)}}{y} &= P \\ \underset{\text{(F1Na)}}{(x - n)} + \underset{\text{(F1K)}}{(y - n')} &= P' \end{aligned}$$

$$K = \frac{\text{F1Na}}{\text{ClNa}} = 0,7188; K' = \frac{\text{F1K}}{\text{ClK}} = 0,7694$$

$$K - K' = -0,0606; P' < P; n \text{ y } n' \text{ negativos.}$$

$$x = \text{ClNa} = 12,8613 P - 16,5115 P'$$

$$y = \text{ClK} = 16,5115 P' - 11,8613 P.$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClNa}}{\text{ClK}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,056 \\ \text{— — de } y = 0,044 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClNa}}{10\text{ClK}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,35 \\ \text{— — de } y = 0,027. \end{array} \right.$$

Observaciones: Sofianopoulos, autor de este método, da para sosa (Na_2O), y para potasa (K_2O) estas expresiones:

$$\text{Na}_2\text{O} = 6,7964 \times \text{cloruros} - 8,965 \times \text{fluoruros.}$$

$$\text{K}_2\text{O} = 10,39 \times \text{fluoruros} - 7,4646 \times \text{cloruros.}$$

C. Determinación indirecta de cloruro sódico y cloruro potásico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación experimental en cloruro argéntico respectivo: peso de éste = P' gr.

$$\begin{aligned} \underset{\text{(ClNa)}}{x} + \underset{\text{(ClK)}}{y} &= P \\ \underset{\text{(ClAg)}}{(x - n)} + \underset{\text{(ClAg)}}{(y + n')} &= P' \end{aligned}$$

$$K = \frac{\text{ClAg}}{\text{ClNa}} = 2,4509; K' = \frac{\text{ClAg}}{\text{ClK}} = 1,9220$$

$K - K' = 0,5289$; $P' > P$; n y n' positivos.

$$x = \text{Cl Na} = 1,8907 P' - 3,6339 P$$

$$y = \text{Cl K} = 4,6339 P - 1,8907 P'$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{Cl Na}}{\text{Cl K}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,018 \\ \text{— — de } y = 0,014 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{Cl Na}}{10 \text{ Cl K}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,102 \\ \text{— — de } y = 0,008. \end{array} \right.$$

D. Determinación indirecta de cloruro sódico y cloruro potásico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Determinación del cloro total: peso de éste = P' gr.

$$\begin{array}{c} x \\ (\text{Cl Na}) \end{array} + \begin{array}{c} y \\ (\text{Cl K}) \end{array} = P$$

$$\begin{array}{c} (x - n) \\ (\text{Cl}) \end{array} + \begin{array}{c} (y - n') \\ (\text{Cl}) \end{array} = P'$$

$$K = \frac{\text{Cl}}{\text{Cl Na}} = 0,6060; K' = \frac{\text{Cl}}{\text{Cl K}} = 0,4752$$

$K - K' = 0,1308$; $P' < P$; n y n' negativos.

$$x = \text{Cl Na} = 7,6452 P' - 3,6330 P$$

$$y = \text{Cl K} = 4,6330 P - 7,6452 P'$$

Errores: son idénticos á los del método **C**, á igualdad de condiciones.

E. Determinación indirecta de sulfato sódico y sulfato potásico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Determinación del SO_4 total: peso de éste = P' gr.

$$\begin{array}{c} x \\ (\text{SO}_4 \text{Na}_2) \end{array} + \begin{array}{c} y \\ (\text{SO}_4 \text{K}_2) \end{array} = P$$

$$\begin{array}{c} (x - n) \\ (\text{SO}_4) \end{array} + \begin{array}{c} (y - n') \\ (\text{SO}_4) \end{array} = P'$$

$$K = \frac{\text{SO}_4}{\text{SO}_4\text{Na}_2} = 0,6758; K' = \frac{\text{SO}_4}{\text{SO}_4\text{K}_2} = 0,551$$

$$K - K' = 0,1248; P' < P; n \text{ y } n' \text{ negativos.}$$

$$x = \text{SO}_4\text{Na}_2 = 8,0128 P' - 4,4102 P$$

$$y = \text{SO}_4\text{K}_2 = 5,4102 P - 8,0128 P'$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{SO}_4\text{Na}_2}{\text{SO}_4\text{K}_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,021 \\ \text{— — de } y = 0,017 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{SO}_4\text{Na}_2}{10 \text{SO}_4\text{K}_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,118 \\ \text{— — de } y = 0,010. \end{array} \right.$$

Observación: Las fórmulas usuales en los libros para este método son:

$$x = 9,61538 P' - 4,41346 P; y = 5,41346 P - 9,61538 P'.$$

Las diferencias en los coeficientes son debidas á que en los libros P' expresa peso total de SO_3 : esto no modifica la cuantía del error. Además, hay diferencia debido á los p. at. adoptados: si fueran los mismos, los coeficientes de P , en las dos expresiones de x serían idénticos, y entre sí en las de y .

F. Determinación indirecta de cloruro de litio y cloruro de potasio en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Determinación del cloro total: peso de éste = P' gr.

$$\begin{array}{c} x \\ \text{(ClLi)} \end{array} + \begin{array}{c} y \\ \text{(ClK)} \end{array} = P$$

$$\begin{array}{c} (x - n) \\ \text{(Cl)} \end{array} + \begin{array}{c} (y - n') \\ \text{(Cl)} \end{array} = P'$$

$$K = \frac{\text{Cl}}{\text{ClLi}} = 0,8345; K' = \frac{\text{Cl}}{\text{ClK}} = 0,4752$$

$$K - K' = 0,3593; P' < P; n \text{ y } n' \text{ negativos.}$$

$$x = \text{ClLi} = 2,7831 P' - 1,3225 P$$

$$y = \text{ClK} = 2,3225 P - 2,7831 P'.$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClLi}}{\text{ClK}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,009 \\ \text{— — de } y = 0,005 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClLi}}{10 \text{ClK}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,051 \\ \text{— — de } y = 0,003 \end{array} \right.$$

$$\text{si } x = y \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,007 \\ \text{— — de } y = 0,007 \end{array} \right.$$

$$\text{si } 10x = y \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,040 \\ \text{— — de } y = 0,004. \end{array} \right.$$

G. — Determinación indirecta de cloruro de litio y cloruro de sodio en mezclas de ambos con cloruro potásico: peso de los tres cloruros = Q . Determinación directa de cloruro potásico: peso de éste = a . Determinación directa de cloro total en Q : peso de éste Q' . Cloro calculado en $a = q$

$$\frac{x}{(\text{ClLi})} + \frac{y}{(\text{ClNa})} = P = Q - \frac{a}{(\text{ClK})}$$

$$\frac{(x - n)}{(\text{Cl})} + \frac{(y - n')}{(\text{Cl})} = P' = Q' - \frac{q}{(\text{Cl})}$$

$$K = \frac{\text{Cl}}{\text{ClLi}} = 0,8345; K' = \frac{\text{Cl}}{\text{ClNa}} = 0,6060$$

$$K - K' = 0,2285; P' < P; n \text{ y } n' \text{ negativos.}$$

$$x = \text{ClLi} = 4,3764 (Q' - q) - 2,6521 (Q - a)$$

$$y = \text{ClNa} = 3,6521 (Q - a) - 4,3764 (Q' - q).$$

Errores:

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{ClLi}}{\text{ClNa}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,021 \\ \text{— — de } y = 0,016 \end{array} \right\} \\ \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{ClLi}}{10 \text{ ClNa}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,087 \\ \text{— — de } y = 0,006 \end{array} \right\} \\ \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{ClLi}}{10 \text{ ClNa}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,140 \\ \text{— — de } y = 0,012 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ supuesto } \frac{x}{a} = \frac{\text{ClLi}}{\text{ClK}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ supuesto } \frac{x}{a} = \frac{\text{ClLi}}{10 \text{ ClK}}$$

H. — Determinación indirecta de óxido magnésico y óxido cálcico en mezclas supuestas puras (de la calcinación de los nitratos respectivos) de ambos: peso de la mezcla = P gr. Transformación de los óxidos en fluoruros: peso de éstos = P' gr.

$$\begin{aligned} x &+ y = P \\ \text{(MgO)} & \quad \quad \quad \text{(CaO)} \\ (x + n) &+ (y + n') = P' \\ \text{(MgF}_2\text{)} & \quad \quad \quad \text{(CaF}_2\text{)} \\ K = \frac{\text{MgF}_2}{\text{MgO}} &= 1,5451; \quad K' = \frac{\text{CaF}_2}{\text{CaO}} = 1,3921 \\ K - K' &= 0,1530; \quad P' > P; \quad n \text{ y } n' \text{ positivos.} \\ x = \text{MgO} &= 6,5359 P' - 9,0986 P \\ y = \text{CaO} &= 10,0986 P - 6,5359 P'. \end{aligned}$$

Errores:

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{MgO}}{\text{CaO}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,045 \\ \text{— — de } y = 0,033 \end{array} \right\} \\ \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{MgO}}{10 \text{ CaO}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,273 \\ \text{— — de } y = 0,014. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Observación: Sofianopoulos, que ha propuesto el método, da, referidas á Mg y á Ca, las expresiones finales:

$$\begin{aligned} \text{Ca} &= 7,20183 \times \text{óxidos} - 4,6594 \times \text{fluoruros} \\ \text{Mg} &= 3,9321 \times \text{fluoruros} - 5,47437 \times \text{óxidos.} \end{aligned}$$

I.—Determinación indirecta de carbonato cálcico y carbonato estróncico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Determinación del CO_2 total que pueden desprender: su peso = P' gr.

$$\frac{x}{(\text{CO}_3\text{Ca})} + \frac{y}{(\text{CO}_3\text{Sr})} = P$$

$$\frac{(x - n)}{(\text{CO}_2)} + \frac{(y - n')}{(\text{CO}_2)} = P'$$

$$K = \frac{\text{CO}_2}{\text{CO}_3\text{Ca}} = 0,4395; K' = \frac{\text{CO}_2}{\text{CO}_3\text{Sr}} = 0,2981$$

$K - K' = 0,1414; P' < P; n$ y n' negativos.

$$x = \text{CO}_3\text{Ca} = 7,0721 P' - 2,1082 P$$

$$y = \text{CO}_3\text{Sr} = 3,1082 P - 7,0721 P'$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{CO}_3\text{Ca}}{\text{CO}_3\text{Sr}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,012 \\ \text{— — de } y = 0,008 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{CO}_3\text{Ca}}{10 \text{CO}_3\text{Sr}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,068 \\ \text{— — de } y = 0,004. \end{array} \right.$$

Observación: Las expresiones que figuran en los libros difieren algo, por valores diferentes de los pesos atómicos adoptados: así, según Blas,

$$\text{CO}_3\text{Ca} = 7,04737 P' - 2,10084 P$$

$$\text{CO}_3\text{Sr} = 3,10082 P - 7,04737 P'$$

I.—Determinación indirecta de óxido férrico y óxido aluminico, en mezclas de ambos, supuestas puras (calcínación de nitratos): peso de la mezcla = P gr. Transformación en fluoruros: peso de éstos = P' gr.

$$\begin{array}{c} x \\ (\text{Al}_2\text{O}_3) \end{array} + \begin{array}{c} y \\ (\text{Fe}_2\text{O}_3) \end{array} = P$$

$$\begin{array}{c} (x + n) \\ (\text{FJ}_2\text{Al}) \end{array} + \begin{array}{c} (y + n') \\ (\text{FJ}_2\text{Fe}) \end{array} = P'$$

$$K = \frac{\text{FJ}_2\text{Al}}{1/2 \text{Al}_2\text{O}_3} = 1,6458; K' = \frac{\text{FJ}_2\text{Fe}}{1/2 \text{Al}_2\text{O}_3} = 1,4130$$

$$K - K' = 0,2328; P' > P; n \text{ y } n' \text{ positivos.}$$

$$x = 4,2955 P' - 6,0695 P$$

$$y = 7,0695 P - 4,2955 P'.$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{Al}_2\text{O}_3}{\text{Fe}_2\text{O}_3} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,033 \\ \text{— — de } y = 0,021 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{Al}_2\text{O}_3}{10\text{Fe}_2\text{O}_3} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,203 \\ \text{— — de } y = 0,013. \end{array} \right.$$

Observación: Las expresiones que da el autor, *Sofianopoulos*, son para Al y Fe:

$$\text{Al} = 2,2808 \times \text{fluoruros} - 3,2234 \times \text{óxidos}$$

$$\text{Fe} = 4,9507 \times \text{óxidos} - 3,0081 \times \text{fluoruros.}$$

K.—Determinación indirecta de cloruro argéntico y bromuro argéntico en mezcla de ambos, supuestas puras: peso de ésta = P gr. Transformación del bromuro argéntico en cloruro: peso de todo el cloruro argéntico final = P' gr.

$$\begin{array}{c} x \\ (\text{ClAg}) \end{array} + \begin{array}{c} y \\ (\text{BrAg}) \end{array} = P$$

$$\begin{array}{c} x \\ (\text{ClAg}) \end{array} + \begin{array}{c} (y - n') \\ (\text{ClAg}) \end{array} = P'$$

$$K = \frac{\text{ClAg}}{\text{ClAg}} = 1; K' = \frac{\text{ClAg}}{\text{BrAg}} = 0,76311$$

$$K - K' = 0,23689; P' < P; n = 0; n' \text{ negativo.}$$

$$x = \text{ClAg} = 4,2213 P' - 3,2213 P$$

$$y = \text{BrAg} = 4,2213 P - 4,2213 P'.$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClAg}}{\text{BrAg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,016 \\ \text{— — de } y = 0,013 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{ClAg}}{10 \text{ BrAg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,088 \\ \text{— — de } y = 0,006. \end{array} \right.$$

Observación: La expresión de y en los libros, p. e. en el de Carnot, es $y = \text{Br Ag} = 4.224 (P - P')$: la diferencia es debida á los pesos atómicos adoptados. El mismo autor da para valor directo de Br

$$y = \text{Br} = 1.798 (P - P').$$

L.—Determinación indirecta de cloruro y yoduro argéntico en mezclas de ambos supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación del yoduro argéntico en cloruro: peso del cloruro argéntico total = P' gr.

$$\underset{(\text{ClAg})}{x} + \underset{(\text{IAg})}{y} = P$$

$$\underset{(\text{ClAg})}{x} + \underset{(\text{ClAg})}{(y - n')} = P'$$

$$K = \frac{\text{ClAg}}{\text{ClAg}} = 1; K' = \frac{\text{ClAg}}{\text{IAg}} = 0,6104$$

$$K - K' = 0,3896; P' < P; n = 0; n' \text{ negativo.}$$

$$x = \text{ClAg} = 2,5667 P' - 1,5667 P$$

$$y = \text{IAg} = 2,5667 P - 2,5667 P'.$$

Errores:

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{ClAg}}{\text{IAg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,010 \\ \text{— — de } y = 0,007 \end{array} \right. \\ \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{ClAg}}{10\text{IAg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,055 \\ \text{— — de } y = 0,003. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Observación: Para obtener directamente el valor de y en I, la fórmula que se indica comúnmente en los libros es

$$y = I = 1.387 (P - P'),$$

algo diferente de la que se puede deducir de la anterior expresión, por serlo los pesos atómicos adoptados.

LI.—Determinación indirecta de bromuro y yoduro argéntico en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación de ambas sales en cloruro argéntico: peso de éste = P' gr.

$$\begin{aligned} x + y &= P \\ \text{(BrAg)} \quad \text{(IAg)} \\ (x - n) + (y - n') &= P' \\ \text{(ClAg)} \quad \text{(ClAg)} \\ K = \frac{\text{ClAg}}{\text{BrAg}} &= 8,76311; K' = \frac{\text{ClAg}}{\text{IAg}} = 0,6104 \\ K - K' &= 0,15271; P' < P; n \text{ y } n' \text{ negativos.} \\ x = \text{BrAg} &= 6,5605 P' - 3,9971 P \\ y = \text{IAg} &= 4,9971 P - 6,5605 P'. \end{aligned}$$

Errores:

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{BrAg}}{\text{IAg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,014 \\ \text{— — de } y = 0,011 \end{array} \right. \\ \text{si } \frac{x}{y} &= \frac{\text{BrAg}}{10\text{IAg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,077 \\ \text{— — de } y = 0,006. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Observación: Si en los métodos **K**, **L**, **LL**, representa P' plata total en lugar de cloruro, como se hace frecuentemente, las expresiones de x é y tendrán en cada método otros coeficientes (mayores), pero el error relativo de x é y , á igualdad de demás condiciones será el mismo, porque el nuevo sistema de ecuaciones de cada método será equivalente con el correspondiente descrito. Si en este método **LL**, P' fuera yoduro de la plata total, sucedería lo mismo: otros (menores) coeficientes de P y P' , equivalencia de ecuaciones é igual precisión en x é y .

M.—Determinación indirecta del ácido y anhídrido sulfúrico en el *ácido de Nordhausen*, conteniendo anhídrido sulfuroso: peso del ácido fumante = Q gr.; determinación directa de SO_2 de Q : su peso = a . Transformación de SO_2 y SO_3 en SO_4H_2 : medición de la acidez total expresada en SO_4H_2 : su peso = Q' : SO_4H_2 calculado en función de $\text{SO}_2 = b$.

$$\frac{x}{(\text{SO}_4\text{H}_2)} + \frac{y}{(\text{SO}_3)} = P = Q - \frac{a}{(\text{SO}_2)}$$

$$\frac{x}{(\text{SO}_4\text{H}_2)} + \frac{(y+n')}{(\text{SO}_4\text{H}_2)} = P' = Q' - \frac{b}{(\text{SO}_4\text{H}_2)}$$

$$K = \frac{\text{SO}_4\text{H}_2}{\text{SO}_4\text{H}_2} = 1; K' = \frac{\text{SO}_4\text{H}_2}{\text{SO}_3} = 1,2250$$

$$K - K' = -0,225; P' > P; n = 0; n' \text{ positivo.}$$

$$x = 5,4444(Q - a) - 4,4444(Q' - b)$$

$$y = 4,4444(Q' - b) - 4,4444(Q - a)$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{SO}_4\text{H}_2}{\text{SO}_3} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,017 \\ \text{— — de } y = 0,022 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{SO}_4\text{H}_2}{10\text{SO}_3} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,093 \\ \text{— — de } y = 0,012. \end{array} \right.$$

N.—Determinación indirecta del ácido y anhídrido acético en mezcla de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación del anhídrido en ácido y medición del total en acético: peso de éste = P' gr.

$$x + y = P$$

(C₄H₆O₃) (C₂H₄O₂)

$$(x + n) + y = P'$$

(C₂H₄O₂) (C₂H₄O₂)

$$K = \frac{2C_2H_4O_2}{C_4H_6O_3} = 1,17655; K' = \frac{C_2H_4O_2}{C_2H_4O_2} = 1$$

$$K - K' = 0,17655; P' > P; n \text{ positivo}; n' = 0.$$

$$x = C_4H_6O_3 = 5,6641 P' - 5,6641 P$$

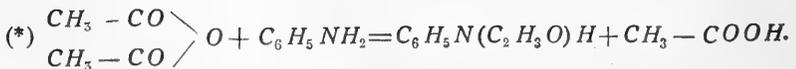
$$y = C_2H_4O_2 = 6,6641 P - 5,6641 P'$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{C_4H_6O_3}{C_2H_4O_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,019 \\ \text{— — de } y = 0,034 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{10C_4H_6O_3}{C_2H_4O_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,013 \\ \text{— — de } y = 0,238. \end{array} \right.$$

N̄.—Determinación indirecta de anhídrido y ácido acético en mezclas de ambos, supuestas puras: peso de la mezcla = P gr. Transformación del anhídrido en ácido acético y acetanilida (*). Medición del ácido acético total: su peso = P' .



Supone este método, debido á *Menschuckin* y *Wasiljeff*, que el ácido acético en frío no forma acetanilida, pero como al reaccionar el anhídrido con la anilina se eleva la temperatura, al practicar el método se pierde algo del ácido acético, y resulta P' inexacto.

$$\frac{x}{(\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2)} + \frac{y}{(\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2)} = P$$

$$\frac{(x-n)}{(\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_3)} + \frac{y}{(\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2)} = P'$$

$$K = \frac{\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2}{\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_3} = 0,58827; K' = \frac{\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2}{\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2} = 1$$

$$K - K' = -0,41173; P > P': n \text{ negativo: } n' = 0$$

$$x = \text{C}_4\text{H}_6\text{O}_3 = 2,4288 P - 2,4288 P'$$

$$y = \text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2 = 2,4288 P' - 1,4288 P$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_3}{\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,006 \\ \text{— — de } y = 0,009 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{10\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_3}{\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{— — de } x = 0,003 \\ \text{— — de } y = 0,049 \end{array} \right.$$

0.—Determinación indirecta de la rotación óptica (en grados sacarimétricos) de la sacarosa y la de otro ú otros cuerpos ópticamente activos en mezclas puras ó impuras exentas de cuerpos cuya acción óptica se modifique en el acto de la inversión de la sacarosa. Rotación óptica total antes de la inversión de la sacarosa = P . Transformación de la sacarosa en azúcar invertido: rotación total después de la inversión = P' . (Se supone la temperatura de 20° en todas las mediciones é igualdad de condiciones antes y después de la inversión.)

$$\frac{x}{\left(\begin{array}{c} \text{rotación} \\ \text{sacarosa} \end{array} \right)} \pm \frac{y}{\left(\begin{array}{c} \text{rotación} \\ \text{otros cuerpos} \end{array} \right)} = P$$

$$\frac{x-n}{\left(\begin{array}{c} \text{rotación} \\ \text{invertido} \end{array} \right)} \pm \frac{y}{\left(\begin{array}{c} \text{rotación} \\ \text{otros cuerpos} \end{array} \right)} = P'$$

$$K = \frac{\text{rotac. invert.}}{\text{rotac. sacar.}} = \frac{-32,66}{100} = -0,3266: K' = \frac{\text{rotac. ?}}{\text{rotac. ?}} = 1$$

$$K - K' = -1,3266: P' \leq P: n \text{ negativo: } n' = 0$$

$$x = \text{rot. sacar.} = 0,7538 P - 0,7538 P'$$

$$y = \text{rot. ?} = 0,2462 P + 0,7538 P'$$

Observaciones: Este método es el antiguo de Clerget. Las fórmulas usuales de x son:

$$x = \frac{200 S}{284,8 - T}: x = \frac{200 S}{288 - T}: x = \frac{100 S}{132,66}: x = \frac{100 (A + A')}{142,6 - \frac{T}{2}} \text{ etc.}$$

Como $S = A + A' = P - P'$, ó coinciden estas fórmulas con la aquí deducida ó varían por el desacuerdo existente respecto al valor K , mudable además con la temperatura y la concentración en sacarosa de la disolución. De aquí el valor T que figura en las fórmulas si no se opera á 20°, y el usar la constante $1,4266 = K - K'$ correspondiente á 0 grados, en lugar de 1,3266, empleada aquí.

Conocida x , con el factor ordinario, variable con los sacarímetros, se calcula la sacarosa de 100 cc. de disolución, de igual modo que si x se hubiese determinado individual y directamente. De igual modo y permitirá calcular el peso del cuerpo activo á que corresponde si es único y se conoce su rotación específica; pero no permitirá tal cálculo si corresponde á la suma algebraica de las rotaciones de *varios* cuerpos presentes, aunque se conozcan cuáles son y sus rotaciones específicas, excepto si acaso el azúcar invertido que para muchos efectos actúa como una especie química única.

P. — Determinación indirecta de la rotación óptica producida por la sacarosa y la producida por la rafinosa en soluciones de ambas, exentas de otros cuerpos ópticamente activos. Rotación total directa = P : transformación de la sacarosa y rafinosa en azúcares reductores activos; rotación total

de éstos = P' (se supone la temperatura de 20° en todas las mediciones é igualdad de condiciones antes y después de la inversión)

$$\begin{array}{ccc} x & + & y & = & P \\ \text{(rot. sacar.)} & & \text{(rot. rafin.)} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (x - n) & + & (y - n') & = & P' \\ \text{(rot. sac. inver.)} & & \text{(rot. raf. Inver.)} & & \end{array}$$

$$K = \frac{\text{rot. invert.}}{\text{rot. sacar.}} = -0,3266; \quad K' = \frac{\text{rot. raf. inver.}}{\text{rot. rafi.}} = \frac{94,9}{185,2} = 0,5124$$

$$K - K' = -0,839. \quad P' < P. \quad n \text{ y } n' \text{ negativos}$$

$$x = \text{rot. sacar.} = 0,6107 P - 1,1919 P'$$

$$y = \text{rot. rafin.} = 0,3893 P - 1,1919 P'.$$

Observaciones: Conocidos x é y , se calculará la sacarosa y la rafinosa equivalente como en los análisis directos é individuales de cada una.

La expresión de x es la usada habitualmente con el nombre de fórmula de la rafinosa de *Creydt*, según unos, ó de *Herzfeld*, según otros. Varía mucho esta fórmula en los libros, parte por los valores de K y K' adoptados en cada uno, parte por equivocaciones, á veces muy graves, de cálculo ó de imprenta. La expresión aquí deducida, coincide rigurosamente con la

$$x = \frac{0,5124 \times P - J}{0,839},$$

que figura en varios libros acreditados, entre ellos el de *Química analítica industrial de Lunge*. En efecto,

$$\frac{0,5124 P}{0,839} = 0,6107 P, \text{ y } \frac{J}{0,839} = 1,1919 J$$

(expresando P lo mismo en las dos fórmulas, y J de ésta lo que P' de la deducida aquí). En cambio, creo un deber ad-

vertir que en el libro tan acreditado de *Post y Neumann*, traducido al francés por autores, tan acreditados también, como *Pellet y Chenu*, está esta fórmula equivocada de diferentes maneras en las distintas páginas que la indica. Compárese, en efecto, las fórmulas anteriores con las de este libro

$$x = \frac{0,5124 \times (P - J)}{0,839} \quad \text{y} \quad x = \frac{(0,5124 \times P) + J}{0,839}$$

que usadas en análisis conducirán á errores grandísimos.

Operando con el peso normal de la sacarosa (26 grs.) disuelto en agua hasta 100 cc. métricos y polarizando á 20° t., con tubos de 20 cm., x , en este método y en el anterior, da inmediatamente el por ciento de sacarosa. Operando con igual peso normal, la rafinosa por ciento será

$$y \frac{26}{185,2} \times \frac{100}{26} = \frac{1}{1,852} y = 0,54 y$$

fórmula que coincide también con la publicada por Lunge:

$$\text{rafinosa} = \frac{P - z}{1,852}$$

pues $z = x, y$, por lo tanto, $P - z = y$.

Q.— Determinación indirecta de la rotación óptica debida á la sacarosa y la debida á la rafinosa, en mezclas de ambas con azúcar invertido, exentas de otros cuerpos activos ó de reductores. Valor de la rotación total = Q . Determinación directa del invertido por reducción = a : y cálculo de la rotación que le corresponde = r . Transformación de la sacarosa y rafinosa en reductores activos: valor de la rotación total después de la transformación = Q' .

$$\begin{array}{rcccl} x & + & y & = P = Q + & r \\ \text{(rot. sacar.)} & & \text{(rot. raf.)} & & \text{(rot. inver.)} \\ (x - n) & + & (x - n') & = P' = Q' + & r \\ \text{(rot. sac. inver.)} & & \text{(rot. raf. trans.)} & & \text{(rot. inver.)} \end{array}$$

$$K = -0,3266; K' = 0,5124$$

$$K - K' = -0,839; P' \leq P; n \text{ y } n' \text{ negativos}$$

$$x = \text{rot. sac.} = 0,6107 (Q + r) - 1,1919 (Q' + r)$$

$$y = \text{rot. raf.} = 0,3893 (Q + r) - 1,1919 (Q' + r).$$

Observaciones.—Aunque las fórmulas finales tienen los mismos coeficientes que en el método anterior, la precisión de éste es mucho menor porque a no se determina con gran rigor: $r = a \times 1.194$, es también poco exacto por no serlo a , ni constante 1.194. Q puede ser también muy erróneo si tiene poco valor absoluto, que es lo general, por ser negativo r y positivos x é y . En la práctica, se resuelve este problema con las complicadas fórmulas de *Baumann*, en que se prescinde de Q , y se corrige, no exactamente, a , con los factores de la tabla de *Herzfeld*. En suma, por un camino ó por otro, no es sencilla ni muy rigurosa la solución de este problema, comparado con los anteriores sacarimétricos, pero no es inferior á muchos de los citados anteriormente á éstos.

R.—Determinación indirecta de la contracción correspondiente al óxido de carbono (x) y la correspondiente al formeno (y) por combustión completa de ambos gases, en mezclas de ambos, puras ó exentas de otros gases combustibles ó absorbibles por la potasa: valor de la contracción total = P . Absorción por la potasa de todo el CO_2 producido: volumen total del $\text{CO}_2 = P'$. ((C) = contracción: $V =$ volumen).

$$\begin{array}{rcccl} x & + & y & = P \\ \text{((C) por CO)} & & \text{((tC) por CH}_4\text{)} & & \\ (x + n) & + & (y - n') & = P' \\ \text{(V. de CO}_2\text{ de CO)} & & \text{(V. de CO}_2\text{ de CH}_4\text{)} & & \end{array}$$

$$K = \frac{V. \text{CO}_2 \text{ de CO}}{V. (C) \text{ de CO}} = \frac{2}{1} = 2; \quad K' = \frac{V. \text{CO}_2 \text{ de CO}_4}{V. (C) \text{ de CH}_4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$K - K' = 1,5; P' \leq P; n$ positivo: n' negativo

$$x = (C) \text{ por CO} = 0,6666 P' - 0,3333 P \left(= \frac{2}{3} P' - \frac{1}{3} P \right)$$

$$y = (C) \text{ por CH}_4 = 1,3333 P - 0,6666 P' \left(= \frac{4}{3} P - \frac{2}{3} P' \right).$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = 1 = \frac{(C) 4 \text{ CO}}{(C) \text{ CH}_4} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,003 \\ \text{— — de } y = 0,003 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{1}{10} = \frac{(C) 4 \text{ CO}}{(C) 10 \text{ CH}_4} \left\{ \begin{array}{l} \text{— — de } x = 0,009 \\ \text{— — de } y = 0,0009 \end{array} \right.$$

Observaciones.—Siendo conocidas las razones:

$$\frac{x}{\text{óxi. de carb.}} = \frac{(C) \text{ por CO}}{V. \text{ de CO}} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{y}{\text{formeno}} = \frac{(C) \text{ por CH}_4}{V. \text{ de CH}_4} = \frac{4}{2} = 2;$$

será:

$$\text{óxido de carbono} = 2x = 1,3333 P' - 0,6666 P \left(= \frac{4}{3} P' - \frac{2}{3} P \right)$$

$$\text{formeno} = \frac{y}{2} = 0,6666 P - 0,3333 P' \left(= \frac{2}{3} P - \frac{1}{3} P' \right)$$

que son las fórmulas ordinarias usadas en análisis de gases que figuran en los libros para este problema.

S.—Determinación indirecta de la contracción correspondiente al hidrógeno (x) y la correspondiente al formeno (y) por combustión completa de los dos gases en mezcla de ambos, puras ó exentas de otros gases combustibles ó absor-

bibles por la potasa: valor de la contracción total = P . Absorción por la potasa de todo el CO_2 producido: volumen total de éste = P' . ((C) = contracción. V = volumen).

$$\begin{aligned} x &+ y = P \\ ((C) \text{ por } \text{H}_2) & \quad ((C) \text{ por } \text{CH}_4) \\ (y - n') &= P' \\ (V. \text{CO}_2 \text{ de } \text{CH}_4) & \end{aligned}$$

$$K = \frac{V. \text{CO}_2 \text{ de } \text{H}_2}{(C) \text{ por } \text{H}_2} = \frac{0}{3} = 0; \quad K' = \frac{V. \text{CO}_2 \text{ de } \text{CH}_4}{(C) \text{ por } \text{CH}_4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$K - K' = -0,5; \quad P' < P; \quad n = 0; \quad n' \text{ negativo}$$

$$x = ((C) \text{ por } \text{H}_2) = P - 2P'$$

$$y = 2P'$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = 1 = \frac{(C) 4 \text{ H}_2}{(C) 3 \text{ CH}_4} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,002 \\ \text{— — de } y = 0,002 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{1}{10} = \frac{(C) 4 \text{ H}_2}{(C) 30 \text{ CH}_4} \left\{ \begin{array}{l} \text{— — de } x = 0,02 \\ \text{— — de } y = 0,002 \end{array} \right.$$

Observaciones: Conocidas las razones

$$\frac{x}{\text{hidrógeno}} = \frac{(C) \text{ por } \text{H}_2}{V. \text{ de } \text{H}_2} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{y}{\text{formeno}} = \frac{(C) \text{ por } \text{CH}_4}{V. \text{ de } \text{CH}_4} = \frac{4}{2} = 2$$

será:

$$\text{hidrógeno} = \frac{2}{3} x = \frac{2}{3} (P - 2P')$$

$$\text{formeno} = \frac{1}{2} y = P',$$

que son las fórmulas ordinarias que resuelven este problema según los libros.

T.—Determinación indirecta de la contracción correspondiente al formeno (x) y la correspondiente al etileno (y), por combustión completa de los dos gases en mezclas de ambos, puras ó exentas de otros gases combustibles ó absorbibles por la potasa: valor de la contracción total = P . Absorción por la potasa del CO_2 producido: volumen de éste = P' . ((C) = contracción: V = volumen).

$$x + y = P$$

((C) por CH_4) ((C) por C_2H_4)

$$(x - n) + y = P'$$

(V. de CO_2) (Vol. de CO_2)

$$K = \frac{\text{V. de } \text{CO}_2 \text{ de } \text{CH}_4}{(C) \text{ por } \text{CH}_4} = \frac{2}{4} = 0,5; \quad K' = \frac{\text{V. de } \text{CO}_2 \text{ de } \text{C}_2\text{H}_4}{(C) \text{ por } \text{C}_2\text{H}_4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$K - K' = -0,5; \quad P' < P; \quad n \text{ negativo}; \quad n' = 0$$

$$x = 2P - 2P'$$

$$y = 2P' - P.$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = 1 = \frac{(C) \text{ de } \text{CH}_4}{(C) \text{ de } \text{C}_2\text{H}_4} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,006 \\ \text{---} \text{---} \text{ de } y = 0,006 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{1}{10} = \frac{(C) \text{ de } \text{CH}_4}{(C) \text{ de } 10 \text{ C}_2\text{H}_4} \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \text{---} \text{ de } x = 0,042 \\ \text{---} \text{---} \text{ de } y = 0,004 \end{array} \right.$$

Observaciones: Conocidas las razones

$$\frac{x}{\text{formeno}} = \frac{(C) \text{ por } \text{CH}_4}{\text{V. de } \text{CH}_4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{y}{\text{etileno}} = \frac{\text{V. de } \text{C}_2\text{H}_4}{(C) \text{ por } \text{C}_2\text{H}_4} = \frac{4}{2} = 2$$

resulta:

$$\text{formeno} = \frac{x}{2} = P - P'$$

$$\text{etileno} = \frac{y}{2} = P' - \frac{1}{2} P$$

que son las fórmulas de los libros para la resolución de este problema.

Tercer tipo: medición sucesiva de dos propiedades distintas comunes á los dos cuerpos.

En el terreno puramente matemático, sólo difieren de los anteriores en la significación de las constantes K y K' de cada método.

Como en el tipo segundo, se parte de un peso (ó volumen, si gáses) conocido de la mezcla, pura ó impura, según los casos, y se mide directa y colectivamente una propiedad, forzosamente común á los dos cuerpos: siendo x é y la parte que corresponde á cada cuerpo del valor colectivo P , tenemos la primera ecuación de siempre

$$x + y = P.$$

En otra porción igual, ó relacionada con la primera, de la mezcla, se mide otra propiedad colectiva, forzosamente común también á los dos cuerpos, y que no posean los otros componentes de la mezcla: sea P' este valor colectivo, y x' é y' la parte de él correspondiente á cada cuerpo: tendremos la segunda ecuación $x' + y' = P'$: pero si conocemos

$$\frac{x'}{x} = K \quad \text{y} \quad \frac{y'}{y} = K'$$

será

$$Kx + K'y = P'$$

ecuación que con la primera da un sistema igual al del tipo segundo, pero representando K y K' las razones entre las magnitudes de dos propiedades diferentes, en lugar de las existentes entre magnitudes diferentes de una misma propiedad. Matemáticamente, aun esta diferencia cualitativa desaparece, considerando que siempre puede ser

$$x' = x \pm n, \quad y' = y \pm n',$$

sea lo que fuere lo que expresen los números x' , y' , x é y . En consecuencia, lo dicho en el tipo segundo de los posibles valores y signos de n , n' , x , y , P , P' , K , K' , es aplicable ahora, excepto que n ó n' puedan ser igual cero, con sus consecuencias (*).

Como se dijo en la exposición general de métodos indirectos, es frecuente en este tipo, si x é y no expresan pesos, formular las ecuaciones con las incógnitas finales a y b que los expresan conociendo las razones

$$\frac{a}{x} = F, \quad \frac{b}{y} = F'; \quad \frac{a}{Kx} = R, \quad \frac{b}{Ky} = R' \quad (\text{pág. 90})$$

siendo F , F' , R y R' los factores ordinarios de transformación de la magnitud de una propiedad determinada, en el peso equivalente del cuerpo que la posea.

De este tipo hay pocos métodos. Las razones fundamentales de tal pobreza son dos: la una, es la dificultad experimental de medir dos propiedades distintas que sólo las posean los dos componentes que se determinan: la otra, es la gran escasez, en el estado actual de la Física y de la Quí-

(*) Si n ó n' igual cero, el método también es posible, pero pasa al tipo 1.º, pues resulta medido directamente uno de los dos cuerpos, y el otro por diferencia en función de la propiedad común que expresa la otra ecuación.

mica, de constantes K, K', F, F' rigurosamente establecidas y verdaderamente constantes.

Ejemplos del tipo tercero de métodos indirectos.

U. Determinación indirecta del azufre del sulfito-ion y el del hiposulfito-ion, en mezclas de estos dos iones exentas de cuerpos reductores y de sulfurados: valor del azufre total = P gr. Medición de la acción reductora total expresada en yodo: su valor = P' gr.

$$\begin{array}{ccc} x & + & y & = & P \\ \text{(S de SO}_2\text{)} & & \text{(S de S}_2\text{O}_4\text{)} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (x + n) & + & (y + n) & = & P' \\ \text{(I por SO}_2\text{)} & & \text{(I por S}_2\text{O}_4\text{)} & & \end{array}$$

$$K = \frac{x + n}{x} = \frac{2I}{S} = 7,9208; K - K' = 5,9406$$

$$K' = \frac{y + n'}{y} = \frac{I}{2S} = 1,9802; P' > P; n \text{ y } n' \text{ positivos.}$$

$$x = (\text{S de S O}_2) = 0,1683 P' - 0,3333 P$$

$$y = (\text{S de S}_2\text{O}_4) = 1,3333 P - 0,1683 P'$$

Errores:

$$\text{si } \frac{x}{y} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,003 \\ \text{— — de } y = 0,003 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \frac{x}{y} = \frac{1}{10} \left\{ \begin{array}{l} \text{error relativo de } x = 0,009 \\ \text{— — de } y = 0,0009. \end{array} \right.$$

V. Determinación indirecta de la glucosa y dextrina en mezclas de ambas exentas de cuerpos orgánicos y de ópticamente activos. Peso colectivo de la glucosa y dextrina = P . Rotación óptica total en grados de círculo (de la di-

solución de P en agua hasta 100 c.c.), con tubo de 2 decímetros de longitud = P' .

$$\begin{array}{ccc} x & + & y = P \\ \text{(dextrosa)} & & \text{(dextrina)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (x + n) & + & (y + n') = P' \\ \text{(rotac. glucosa)} & & \text{(rot. dextri.)} \end{array}$$

$$K = \frac{x + n}{x} = \frac{x \cdot 52^{\circ},5 \times 2}{100 x} = \frac{52^{\circ},5 \times 2}{100} = 1,05;$$

$$K' = \frac{y + n'}{y} = \frac{x \times 195^{\circ} \times 2}{100 x} = \frac{195^{\circ} \times 2}{100} = 3,90$$

$$K - K' = -2,85$$

$$x = \text{dextrosa} = 1,364 P - 0,3508 P'$$

$$y = \text{dextrina} = 0,3508 P' - 0,364 P.$$

Observaciones: En este método, debido á Lindet (B. S. Ch. P.—1901. Enero) y aplicado á la *glucosa Massé* ó al *jarabe cristal* que contiene agua y sustancias minerales, se determina P por análisis elemental orgánico. Conocido el carbono (Lindet determina además, innecesariamente, el hidrógeno) se puede calcular P , pues tanto la dextrosa como la dextrina son hidratos de carbono. Los valores $52^{\circ},5$ y 195° son los poderes rotatorios $[\alpha]_a$ de la dextrosa y dextrina adoptados por Lindet.

(Se continuará.)

III.— Apuntes para la reforma de la Nomenclatura Matemática.

POR MODESTO DOMÍNGUEZ HERVELLA.

Suele presentar inconvenientes el sustituir con otras las palabras que están en uso, porque ese cambio puede contribuir á que sea difícil comprender los libros antiguos, si no se posee un diccionario técnico de aquella época. Sin embargo, hay casos en que, por razones muy poderosas, se impone el desechar algunas palabras; pero antes de hacer la sustitución, hay que tener la seguridad de que la nueva palabra no ha de presentar ningún inconveniente; mientras no se encuentre, es preferible conservar la antigua.

En este caso se encuentra la denominación de *cantidades complejas* en sustitución de *cantidades imaginarias*.

Desde que estas cantidades no pueden considerarse como símbolo de lo imposible, por tener su representación gráfica tan real como las llamadas *reales*, se ha considerado necesario darles otro nombre.

En la prisa de hacer el cambio usaron ya, como admitido, Hoüel y Cassorati el adjetivo *complejas*, en lugar de *imaginarias*. Mejor hubiera sido aplazar el cambio, hasta encontrar adjetivo más conveniente.

Se han introducido en Matemáticas espacios de cualquier número de dimensiones, y como no existen espacios de más de tres, deberán llamarse *espacios reales* los de una, dos ó tres dimensiones, y *espacios imaginarios* los de cuatro ó más, así como *dimensiones reales* las de los espacios reales, é *imaginarias* las de un espacio imaginario.

La denominación de cantidades complejas puede inducir en error, dando á entender que el adjetivo califica á las can-

tidades y no á una forma analítica en que se presentan. Es fácil que una cantidad llamada compleja se considere como inseparable de la forma binomia ó trinomia, y mal se puede ver en ella la expresión más general de cualquier cantidad en sus dos manifestaciones de magnitud y tendencia, ó sea cantidad y dirección, que entran en el campo matemático.

De las palabras «cantidades imaginarias», puede tolerarse el sustantivo, porque la magnitud es considerada como de más importancia que la tendencia ó dirección; de ésta se puede prescindir en algunas ocasiones, pero no del valor absoluto de una entidad; en Cinemática, por ejemplo, no se puede concebir una velocidad sin su intensidad, pero sí sin tener en cuenta su dirección.

De los radios de un círculo, ó de una esfera, una vez elegidos dos opuestos para representar los radios reales, uno positivo y otro negativo, los demás son tan incomplejos como los elegidos, y no está bien llamarlos «radios complejos», aunque haya posibilidad, pero no necesidad, de expresarlos bajo forma binomia ó trinomia.

De varias fuerzas aplicadas á un punto material en distintas direcciones, todas podrán tener expresiones que, provisionalmente, sigo llamando imaginarias, excepto las que se hayan elegido en la dirección que se asigne á las cantidades reales y tampoco se podrán llamar fuerzas complejas las que no tienen dicha dirección.

Indudablemente, hay que reemplazar el nombre de «cantidades imaginarias», y, por consiguiente, el de «cantidades reales». Me parece que no hay inconveniente en llamar á éstas *cantidades principales* conservando los adjetivos *positiva* y *negativa* ó reemplazándolas por *directa* y *opuesta*; las demás direcciones pueden llamarse *indirectas*, y si se quiere distinguir las que son perpendiculares á las principales de las que no lo son, se pueden conservar las palabras *perpendicular* y *oblicua* que están en uso.

Podría seguir llamándose *módulo* al valor absoluto de una

entidad por ser más cómoda una palabra que dos, á no ser que se reemplace por *magnitud*, sobreentendiéndose *absoluta*, que siempre ha de considerarse como positiva.

Lo que debe desaparecer del lenguaje matemático es la palabra «argumento», que nada significa, y se puede reemplazar por lo que es: *factor indirecto*.

¿Composición ó suma de fuerzas?

La adición siempre es la operación por la cual se reúnen varias entidades en una sola que, para el efecto que uno se propone, pueda reemplazar al conjunto de las demás, llamadas sumandos. Tanto éstos como la suma, han de ser de la misma naturaleza, aunque tengan distintas direcciones. De aquí resultan dos clases de suma: la completa ó verdadera suma algebraica en que se tienen en cuenta las magnitudes y tendencias de los sumandos, y la incompleta que sólo tiene en cuenta las magnitudes; ésta será una suma aritmética ó cuantitativa.

Si una persona ha andado varios trayectos en distintas direcciones y se propone saber la magnitud del camino recorrido, hará una suma aritmética de todos los trayectos, sin tener en cuenta sus direcciones, y sabrá cuánto ha andado. Si los trayectos están en una misma dirección, unas veces alejándose y otras acercándose al punto de partida, y se trata de saber á qué distancia positiva ó negativa se encuentra del origen, hará la suma algebraica, sumando los trayectos verificados en un sentido y restando los del opuesto, y tendrá su situación final.

Esta manera de efectuar la suma ya estaba en uso cuando no se conocían en Algebra más cantidades que las positivas y negativas. Ahora que entran en el cálculo matemático las cantidades con diversas tendencias representadas por direcciones, que pueden combinarse con las positivas y negativas, hay que generalizar la definición de la suma algebraica,

sin excluir lo que se ha hecho con las cantidades reales.

Si al sumar gráficamente las cantidades positivas y negativas se hace coincidir el punto inicial de cada sumando con el final del anterior para llevar la magnitud de cada uno en la dirección y sentido que le corresponde, lo mismo se hará cuando en la suma se han de incluir los verdaderos sumandos, que no se limitan á magnitudes, pues la tendencia de cada uno forma parte integrante inseparable de él.

Esta manera de interpretar gráficamente la suma algebraica está admitida con razón; se sabe que en la expresión $a + b\sqrt{-1}$, a se representa por un cateto en dirección real, positiva ó negativa, según el signo de a ; $b\sqrt{-1}$ es el otro cateto, y la suma $a + b\sqrt{-1}$ es la hipotenusa en magnitud y dirección.

Como se ve, con el procedimiento gráfico, la suma algebraica generalizada es el vector que, partiendo del punto inicial del primer sumando, termina en el punto final del último. A este vector llamó Rey Heredia *sumasincategorematika*, considerándola quizá como una suma excepcional, y me parece que no está acertado inventar para ella un adjetivo, porque es la suma verdadera, completa, por tenerse en cuenta las dos principales circunstancias de cada sumando, á saber: magnitud y dirección.

Este mismo procedimiento, disfrazado con paralelogramos sucesivos, se sigue en Mecánica cuando se trata de reunir en una sola varias fuerzas aplicadas á un punto material.

Esta adición es conocida con el nombre de *composición*, y la suma con el de *resultante*. Pero no hay necesidad de estos nombres, porque la llamada *resultante* es una verdadera suma ó resumen que puede reemplazar al conjunto de los sumandos, produciendo el mismo efecto que éstos combinados.

Con la nomenclatura matemática tiene relación la división angular que se proyecta reemplazar por una decimal. Ignoro si algún autor ha puesto en práctica esta reforma, que considero como un retroceso, porque creo que la numeración duodecimal es la que con el tiempo ha de reemplazar á la decimal. Esto tenía su razón de ser cuando sólo se sabía contar por los dedos; pero aunque no se llegue á establecer la de base doce, no se debe modificar la división actual, como no sea para regularizarla, cuidando de que los ángulos de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ de ángulo recto, que tan fácilmente se construyen, sigan expresándose por números exactos sin fracción de grado.

*
* *

Con haberse dado más generalidad á las cantidades que se consideran en Matemáticas, introduciendo en el cálculo la dirección de cada una, además de su magnitud, se hace necesario modificar la Geometría Analítica, prescindiendo del artificio de expresar las líneas y superficies por ecuaciones entre coordenadas.

De la nueva Geometría Analítica me estoy ocupando, y mientras no se adopte oficialmente otra nomenclatura, sigo llamando reales é imaginarias á las cantidades dirigidas.

La primera parte es la representación gráfica de las operaciones analíticas. Mientras en éstas no entra ningún exponente imaginario, todo se hace en un plano. En él se elige un punto como origen de las magnitudes y direcciones y por este punto se tira una recta que llamaremos eje, para tomar sobre él las cantidades reales, las positivas en un sentido y las negativas en el opuesto, sirviendo la parte positiva para origen de los ángulos. Un vector cualquiera, R , de magnitud r , que forma con el eje el ángulo ρ , podrá tener la expresión manomía $r\rho$ en que están comprendidas su magnitud y dirección.

El Análisis y la Geometría no pueden estar en contradicción y tiene que haber una expresión analítica para los vectores que salen del plano elegido.

Las cuatro operaciones fundamentales y las potencias con exponentes reales afectando á las cantidades dirigidas de la forma conocida, esto es, sin exponente imaginario, tienen todas su representación gráfica en un plano, y es evidente que los vectores que salen de ese plano serán el resultado de la elevación de una cantidad imaginaria á potencia imaginaria.

Es cierto que Euler ha demostrado que, si todas las operaciones analíticas con cantidades imaginarias, estan sometidas al mismo cálculo que las cantidades reales, será $\sqrt{-1} V^{-1}$ igual á una cantidad real. No podía en el siglo XVIII, hacer otra cosa, por no conocerse hasta el siglo XIX la significación de las cantidades imaginarias, y mal podían hacerse operaciones de esta clase sin una previa definición del exponente imaginario, pues sólo hay definición del exponente real que es un caso particular, sea positivo, negativo, entero ó fraccionario, y sabido está que lo demostrado para un caso particular no se puede generalizar sin previa demostración.

Sea la que fuere la operación que nos conduce á vectores que no pueden estar en un mismo plano, podemos tener una expresión manomía de todo vector en el espacio.

Tomemos un punto como origen de las magnitudes de cualquier naturaleza representadas por rectas con las direcciones que correspondan. De las rectas que pasan por este punto elijamos una, que llamaremos *eje*, para tomar sobre ella las cantidades reales desde el origen, las positivas en un sentido y las negativas en el opuesto. Llamaremos *meridianos* á los planos que pasan por el eje, y de ellos elegimos uno, que distinguiremos con el nombre de *meridiano principal*, en que estarán todos los vectores que no tienen exponente imaginario, y adoptando coordenadas geográficas, se

llamará *colatitud* el ángulo que un vector forma con la parte positiva del eje, y *longitud* el ángulo diedro de su meridiano con el principal.

Sea ahora R un vector de magnitud r , colatitud ρ y longitud ρ' ; el vector será completamente expresado por $R = r_{\rho/\rho'}$, que se puede leer: r sub- ρ con ρ' , entendiéndose el índice sin acento por la colatitud y el acentuado por la longitud. Esta podría llamarse *longitud angular* para distinguirla de la longitud lineal, pero mejor sería un sustantivo sin adjetivo.

Madrid, Julio de 1910.

IV.— Estudio completo de una clase especial de integrales singulares.

(Continuación.)

POR LAURO CLARIANA

Estudio según Rubini.

Rubini estudia la misma ecuación de Lagrange, pero siguiendo una marcha, podríamos decir, casi contraria á la de Serret.

En efecto, pues, empieza considerando la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$(a) \quad y - xy' + \frac{1}{2}x^2y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0,$$

la cual, debidamente desarrollada, toma la forma

$$(1 + x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(2x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

resultando ser la misma ecuación (5) de Serret.

De la ecuación anterior pasa Rubini á una de sus integrales primeras, tal como

$$(e) \ y - \frac{x}{2} (G + y') - \frac{(G - y')^2}{x^2} - G^2 = 0 = f(x, y, y', G) \quad (*)$$

siendo esta ecuación la integral primera (4) de Serret.

En efecto, se tiene

$$2x^2y - x^3(G + y') - 2(G^2 - 2y'G + y'^2) - 2x^2G^2 = 0,$$

de donde

$$\left[2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x^3 \frac{dy}{dx} - 2x^2y \right] - G \left(4 \frac{dy}{dx} - x^3 \right) + 2G^2(1 + x^2) = 0.$$

(*) Se puede deducir esta integral primera, de (a), suponiendo $y' - xy'' = G$, en el concepto de descomponer la ecuación (a), del modo siguiente:

$$y - \frac{1}{2} xy' - \frac{1}{2} x(y' - xy'') - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0,$$

de donde resulta inmediatamente:

$$y - \frac{x}{2} (G + y') - \frac{(G - y')^2}{x^2} - G^2 = 0.$$

Para justificar que cabe suponer $y' - xy'' = G$, se puede derivar la ecuación (a), resultando:

$$y' - y' - xy'' + xy'' + \frac{1}{2} x^2 y''' - 2(y' - xy'')(y'' - y'' - xy''') - 2y''y''' = 0.$$

Al reducir, se obtiene

$$y''' \left(\frac{1}{2} x^2 + 2(y' - xy'')x - 2y'' \right) = 0.$$

Esta igualdad queda satisfecha, siendo $y''' = 0$, igualdad que puede transformarse en la siguiente por valores finitos de x ; $-xy''' = 0$, cuya integral se resuelve en $y' - xy'' = G$.

Esta ecuación es la misma (4) de Serret, cambiando tan sólo la G en b .

Ahora bien, siendo la ecuación diferencial (e), racional y entera respecto á y , y su derivada, tendremos que considerar, según principios ya expuestos, el sistema

$$f = 0 \quad \text{y} \quad \frac{df}{\partial G} = 0$$

para deducir la integral singular.

Así, pues, resulta:

$$\frac{df}{\partial G} = -\frac{x}{2} - \frac{2(G-y)}{x^2} - 2G = 0,$$

de donde

$$G = \frac{4y' - x^3}{4(1 + x^2)}.$$

Esta expresión, sustituida en (e), después de sencillas reducciones, procura el resultado siguiente:

$$16(1 + x^2)y + x^4 - 8(x^3 + 2x)y' - 16y'^2 = 0,$$

ecuación correspondiente á la (6) de Serret.

Por fin, Rubini deduce aún la integral singular de la ecuación diferencial (a), partiendo de la fórmula general ya indicada $\left(\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}}\right)$ en el supuesto de resolverse en infinito, reduciéndose esta fórmula en el caso que se estudia á $\left(\frac{dy''}{dy'}\right)$.

Así, pues, siendo la ecuación diferencial primitiva

$$(a) \quad y - xy' + \frac{1}{2} x^2 y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0 = \\ = F(x, y, y', y'');$$

al derivarla, considerando y'' función de y' , según la fórmula general

$$\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y''} \frac{\partial y''}{\partial y'} = 0,$$

se deduce

$$\frac{dy''}{dy'} = \frac{x + 2(y' - xy'')}{-\frac{1}{2}x^2 + 2(y' - xy'')x - 2y''}$$

y como este valor debe resolverse en una cantidad infinita, se tiene

$$\frac{1}{2}x^2 - 2y'' + 2x(y' - xy'') = 0,$$

de donde

$$y'' = \frac{x^2 + 4xy'}{4(1 + x^2)}$$

Este valor, sustituido en (a), reproduce la misma integral singular hallada, correspondiente á la ecuación (6) de Serret.

Si fijamos la atención en los métodos seguidos por Serret y Rubini al estudiar la ecuación de Lagrange, observaremos que Serret, para evitar la dificultad que presenta el deducir las integrales singulares de la ecuación diferencial, prefiere empezar su estudio partiendo de la ecuación finita, ó sea de la integral general.

Sin embargo, consideramos ser más lógico empezar por la ecuación diferencial de segundo orden como origen de todas las integrales, tal como lo realiza Rubini, si bien este autor no alcanza la integral general, quizá por las dificultades que encuentra á su paso; echando mano luego del infinito para determinar una de las integrales singulares, lo cual, como se ha manifestado anteriormente, no siempre procura el resultado apetecido.

Así, pues, entendemos que nuestro método, aparte de su uniformidad y sencillez, gana en seguridad respecto á los anteriores, contando siempre con la ecuación diferencial á que se refiere la integral singular.

Escogeremos el mismo ejemplo anterior para que se pueda apreciar mejor la ventaja que presenta este procedimiento, con relación á los ya explicados.

Sea la ecuación

$$f(x, y, y', y'') = y - xy' + \frac{1}{2}x^2y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0. \quad (a)$$

La derivada que hemos de generalizar aquí es y'' ; luego, según la teoría ya explicada para las ecuaciones diferenciales de primer orden, se tendrá

$$f(x, y, y', G) = y - xy' + \frac{1}{2}x^2G - (y' - xG)^2 - G^2 = 0$$

y en virtud de

$$\frac{\partial f}{\partial G} = 0,$$

resulta

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x(y' - xG) - 2G = 0,$$

de donde

$$G = \frac{x^2 + 4xy'}{4(1 + x^2)}.$$

Este valor de (G) , sustituido en (a) , da inmediatamente la ecuación hallada

$$F_1(x, y, y') = 16(1 + x^2)y + x^4 - 8(x^3 + 2x)y' - 16y'^2 = 0, \quad (b)$$

la cual constituye la primera integral singular de (a) .

Del propio modo, con la misma sencillez, podemos deducir de (b) la otra integral singular que corresponde á la ecuación (8) de Serret.

En este concepto tendremos que generalizar ahora la y' de la ecuación (b), procediendo de un modo análogo al caso precedente.

Así, pues, resulta

$$F_1(x, y, G) = 16(1 + x^2)y + x^4 - 8(x^3 + 2x)G - 16G^2 = 0 \quad (b')$$

y en virtud de

$$\frac{\partial F_1}{\partial G} = -8(x^3 + 2x) - 32G = 0,$$

ó sea

$$G = -\frac{1}{4}(x^3 + 2x).$$

Después de sustituir este valor de G en (b'), se obtiene inmediatamente

$$y = -\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{4}.$$

Ecuación igual á la que resultó por el método de Serret como segunda integral singular, siendo ésta ya la última, por cuanto se ha partido de una ecuación diferencial de segundo orden.

A este punto consideramos interesante justificar cómo las integrales singulares que encuentra Serret pueden considerarse como tales, por cuanto las ecuaciones diferenciales que se hallan según nuestro método, y que son las verdaderas á que deben referirse las integrales singulares, se identifican con las de Serret.

Para deducir Serret la integral singular de

$$(1 + x^2) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 - \left(2x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \right) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0. \quad (5)$$

toma una cualquiera de las integrales primeras expresadas por (3) ó (4), buscando la expresión que corresponde á las raíces iguales de a ó b , y así obtiene la integral singular expresada por

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2} \right) \frac{dy}{dx} - (1 + x^2)y - \frac{x^4}{16} = 0. \quad (6)$$

Luego en virtud de las observaciones que preceden, interesa buscar la ecuación diferencial de segundo orden á que hace verdaderamente referencia la ecuación (6) como integral singular, al objeto de ver si puede identificarse con la (5).

Para ello empezaremos generalizando la (5)

$$(A) \quad (1 + x^2) G^2 - \left(2x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \right) G + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Derivando según x , se tiene

$$G^2 - \left(\frac{dy}{dx} \frac{1}{x} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \right) G + \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \right) = 0,$$

de donde

$$(a) \quad G = \frac{\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}}{2} \right]^2 - \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \right)}$$

Desarrollando la cantidad de dentro el radical, resulta:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} - \\ & - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} = \\ & = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \frac{dx}{x} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx}{4x} - \\ & - \frac{1}{4} \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dx}{2x} - \frac{1}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

Sustituído este valor en (a), se halla

$$G = \frac{dx}{2x} + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dx}{2x} - \frac{1}{4} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

De modo que al sustituir, por fin, este valor de G en (A), resulta la misma ecuación (5), lo cual nos manifiesta que la segunda ecuación diferencial, que hemos hallado, se identifica con la (5) de Serret.

Al buscar nuevamente Serret la integral singular de (6),

aplica el principio, según se ha visto, del infinito, para obtener la ecuación

$$y = -\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{4}.$$

Así, pues, al buscar nosotros la verdadera ecuación diferencial que tiene por integral singular la ecuación anterior, tendremos que generalizar la (6), resultando

$$(B) \quad G^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)G - (1 + x^2)y - \frac{x^4}{16} = 0.$$

Derivando según x , se obtiene

$$\left(1 + \frac{3x^2}{2}\right)G - 2xy - (1 + x^2)\frac{dy}{dx} - \frac{x^3}{4} = 0,$$

de donde

$$G = \frac{2xy + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4}}{1 + \frac{3x^2}{2}}.$$

Sustituyendo este valor en (B), se halla

$$(C) \quad \left(\frac{2xy + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4}}{1 + 3\frac{x^2}{2}}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{2xy + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4}}{1 + 3\frac{x^2}{2}} - (1 + x^2)y - \frac{x^4}{16} = 0.$$

Según lo que precede, ésta debe ser la verdadera ecuación diferencial de la integral hallada

$$(D) \quad y = -\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{4},$$

correspondiente á la (8) de Serret.

Empero, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x^3}{4} - \frac{x}{2}, \quad y = \frac{x}{4} \left(-\frac{x^3}{4} - \frac{x}{2} \right) - \\ &-\frac{x^2}{8} = \frac{x}{4} \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{8}. \end{aligned}$$

Luego cabe escribir

$$\begin{aligned} 2xy + (1+x^2) \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4} &= 2x \left[\frac{x}{4} \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{8} \right] + \\ &+ (1+x^2) \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4} = \\ &= \frac{x^2}{2} \frac{dy}{dx} - \frac{x^3}{4} + (1+x^2) \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4} = \left(1 + \frac{3}{2} x^2 \right) \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

De donde el valor de G se transforma en

$$G = \frac{2xy + (1+x^2) \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{4}}{1 + \frac{3x^2}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{3}{2} x^2 \right) \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{3x^2}{2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Así, pues, al sustituir este valor en (B), resulta la misma ecuación diferencial (6), de modo que esto nos indica que en este segundo caso las dos ecuaciones diferenciales (6) y (C) se identifican.

Fácilmente se concibe que este método igualmente podríamos aplicarlo á ecuaciones diferenciales de orden supe-

rior al segundo, pues no habría más que considerar la generalización de las diferentes derivadas de la ecuación diferencial dada, extendiendo dicha generalización sucesivamente desde la de mayor orden hasta la de primero, al objeto de obtener las integrales singulares primeras, segundas, etc., hasta llegar á la ecuación finita que debería alcanzarse después que se hubiese pasado por un número de integrales igual al del orden de la ecuación diferencial primitiva.

(Continuará.)

V.— Sobre un problema de Física. (Segunda parte).

POR JUAN JACOBO DURÁN-LORIGA.

En el artículo anterior (véase el número de Noviembre de 1909 de esta Revista), hemos resuelto por completo el problema físico que nos habíamos propuesto atacar y cuyo enunciado recordaremos ahora:

«Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano de un triángulo equilátero igualmente iluminados por tres focos *de igual intensidad*, colocados en sus vértices, que por otro *de intensidad suma*, situado en su centro.»

Hemos llegado á una *cuártica de clase 12 y género 3*, bitangente á la *recta del infinito* en los *puntos cíclicos*, con 24 *puntos de inflexión* (seis de ellos reales) y 28 *tangentes dobles*, cuatro reales (incluyendo, naturalmente, la *recta del infinito*) y, por consiguiente, 24 imaginarias. Asimismo hemos escrito la ecuación de la curva en coordenadas *cartesianas, polares y baricéntricas*, y valiéndonos de la segunda hemos ideado un procedimiento, en general aproximado, para obtener los diversos puntos de la curva; pues si bien se hubiese podido utilizar la circunstancia de ser la ecuación cartesiana, *bicuada en y*, no resultaba cómodo utilizarla, salvo para la determinación de ciertos puntos especiales.

Por último, hemos encontrado los puntos del espacio que responden á la propiedad enunciada, obteniendo una *superficie de cuarto orden*, en la que hemos hallado diversas propiedades.

Pero si bien el *problema físico* quedó terminado, la naturaleza de la curva, á que la cuestión nos condujo, la hace interesante bajo el punto de vista puramente geométrico. Es

bien sabido que las cuárticas *del género 3*, es decir, *no singulares*, aparecen con poca frecuencia, y que, por consiguiente, cuando en una investigación se presentan, se debe considerar el hecho como un hallazgo interesante. He aquí por qué algunos geómetras han acogido con interés nuestro trabajo y encontrado propiedades que vamos á exponer, con algunas otras á que nosotros mismos hemos llegado también, después de la publicación de la primera parte. Quizás tengamos aun ocasión de volver á insistir sobre este estudio, ya que varios amigos del extranjero se han brindado á darlo á conocer en diversas Revistas, con el fin de provocar nuevas investigaciones. No debe olvidarse que la teoría de las cuárticas dista mucho de estar terminada, á pesar de los admirables trabajos de Hesse, Plücker, Cayley, Brioschi, Clebsch, Zeuthen, Klein, y esa hermosa pléyade de jóvenes matemáticos alemanes, y que el estudio de casos particulares puede conducir á *propiedades generales* de importancia en la ciencia.

Los *Sres. Gomes Teixeira y Retali* han encontrado, independientemente uno de otro, la propiedad verdaderamente curiosa de *que los puntos de inflexión reales están situados sobre la circunferencia circunscripta al triángulo fundamental*; y el segundo de estos dos ilustres geómetras añade la circunstancia de *que las tangentes de inflexión reales tocan al círculo inscripto en el citado triángulo*.

Antes de exponer estos teoremas, debemos observar que *á priori* se ve que la cuártica sólo puede tener *seis* puntos de inflexión *reales*, pues sabido es que, como consecuencia de la consideración de las *bitangentes de Zeuthen*, se deduce inmediatamente que una cuártica tiene *á lo más* ocho puntos de inflexión *reales*; pero en el caso de nuestra cuártica, y en virtud de su *triple simetría*, este número ha de ser forzosamente múltiplo de seis, *es decir, seis*.

1.—Vamos ahora á exponer el procedimiento seguido por el Sr. Gomes Teixeira para demostrar su teorema.

La ecuación de la cuártica en coordenadas polares es (1.ª parte, pág. 6):

$$\rho^4 - 2R\rho^3 \cos 3\omega + R^2\rho^2 - R^4 = 0 \quad (2')$$

y la que de los puntos de inflexión en este sistema de coordenadas;

$$\rho^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2} + 2 \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 = 0.$$

Por la combinación de ambas ecuaciones se obtiene:

$$\rho^8 - 3R^2\rho^6 - 15R^4\rho^4 + 8R^6\rho^2 + 9R^8 = 0$$

haciendo:

$$t = \frac{\rho^2}{R^2}$$

resulta:

$$t^4 - 3t^3 - 15t^2 + 8t + 9 = 0.$$

A las cuatro raíces t_1, t_2, t_3 y t_4 , de esta última ecuación, corresponden cuatro circunferencias, cuyas ecuaciones son:

$$x^2 + y^2 = t_1 R^2, \quad x^2 + y^2 = t_2 R^2, \quad x^2 + y^2 = t_3 R^2, \quad x^2 + y^2 = t_4 R^2,$$

que cortarán á la cuártica en 24 puntos de inflexión, todos situados á distancia finida. Se ve fácilmente que la ecuación en t tiene una sola raíz, entre

$$\left[\frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \right]^2 \quad \text{y} \quad \left[\frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) \right]^2$$

que corresponden á los radios de la corona, en la que se extiende la parte real de la curva, y como esta raíz es preci-

samente la unidad, resulta que los puntos de inflexión *reales* son los seis de intersección de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

es decir, de la circunferencia circunscripta al triángulo fundamental, con la cuártica, según quería demostrarse.

El Sr. Retali llegó también al mismo teorema empleando las coordenadas polares, si bien siguiendo una marcha distinta.

He aquí su procedimiento:

Haciendo

$$u = \frac{1}{\rho}$$

en la conocida expresión del radio de curvatura, se obtiene

$$\rho_0 = \frac{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{u^3 \left(u + \frac{d^2 u}{d\omega^2} \right)}$$

aplicando esta fórmula á la ecuación de la curva, ya citada, se obtiene (tomando el radio R por unidad):

$$\rho_0 = \frac{\rho [(\rho^4 - \rho^2 + 3)^2 + 36 \rho^6 \operatorname{sen}^2 3\omega]^{\frac{3}{2}}}{18\rho^3 (\rho^4 - \rho^2 + 3)^2 \cos 3\omega - 72\rho^6 (3 - \rho^4) \operatorname{sen}^2 3\omega + (\rho^4 - \rho^2 + 3)^3}.$$

Para $\rho = 1$, el denominador de ρ_0 igualado á cero da:

$$16 \cos^2 3\omega + 18 \cos 3\omega - 13 = 0$$

las raíces de esta ecuación son evidentemente

$$\cos 3\omega = \frac{1}{2}, \quad \cos 3\omega = -\frac{13}{8}$$

como la segunda da para ω valores imaginarios, sólo podremos utilizar la primera, que exige que

$$3\omega = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

ó bien:

$$\omega = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, \quad (K = 0, 1, 2).$$

Resulta, por consiguiente, que los puntos reales de curvatura infinita, es decir, los puntos de inflexión reales, corresponden al valor $R = 1$ y á los de ω

$$20^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 220^\circ, 260^\circ, 340^\circ,$$

que son precisamente (según hemos visto en la primera parte de este trabajo), los de intersección de la curva con la circunferencia circunscripta al triángulo.

Veamos ahora cómo llegó el Sr. Retali á su segundo teorema, es decir, al relativo á las tangentes de inflexión:

Sea p la longitud de la perpendicular bajada desde el circuncentro o á la tangente en el punto (ρ, ω) . Se tendrá:

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\omega} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{36\rho^4 \operatorname{sen}^2 3\omega}{(\rho^4 - \rho^2 + 3)^2}.$$

Como en los puntos de inflexión se verifica

$$\rho = 1, \quad \cos 3\omega = \frac{1}{2}$$

resulta:

$$\frac{1}{p^2} = \quad + \frac{27}{9} = 4$$

es decir,

$$p = \frac{1}{2}.$$

Cuyo resultado demuestra claramente *que las tangentes estacionarias* tocan al círculo inscrito en el triángulo fundamental.

Si aplicamos la fórmula que da el valor del radio de curvatura, es decir, la

$$\rho_0 = \frac{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{u^3 \left(u + \frac{d^2 u}{d\omega^2} \right)}$$

á los vértices de la curva, tendremos que hacer $\omega = 0$ y sucesivamente:

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad \text{y} \quad \rho = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

para $\omega = 0$, se obtiene:

$$\rho_0 = \frac{(\rho^4 - \rho^2 + 3)\rho}{18\rho^3 + \rho^4 - \rho^2 + 3}$$

que con el primer valor de ρ , d , α

$$\rho_0 = \frac{20 - 7\sqrt{5}}{31}$$

y con el segundo,

$$\rho_0 = -\frac{20 + 7\sqrt{5}}{31}$$

valores que rectifican los que habíamos dado en la primera parte (pág. 14), porque, en efecto, allí hemos cometido una errata puramente material.

El Sr. Retali ha tenido la feliz idea de referir la cuártica al triángulo formado por tres puntos de inflexión reales, no consecutivos, llegando así á una forma muy elegante para la ecuación de la curva y cuya sencillez le hace apropiada para su estudio. Veamos el procedimiento de cálculo:

Hemos encontrado para la ecuación en coordenadas polares (suponiendo $R = 1$):

$$\rho^4 - 2\rho^3 \cos 3\omega + \rho^2 - 1 = 0.$$

Pasando ahora á *coordenadas circulares*, tomando como triángulo fundamental el *triángulo isótropo* formado por el circuncentro y los puntos *circulares del infinito*, es decir, el triángulo $O I J$, habrá que emplear las fórmulas

$$2\rho \cos \omega = x_1 + x_2$$

$$2\rho \operatorname{sen} \omega = (x_1 - x_2) i$$

de las que se deduce:

$$\rho^2 = x_1 x_2, \quad 2\rho^3 \cos 3\omega = x_1^3 + x_2^3$$

y substituyendo estos valores en la ecuación polar y *homogenizando*, resulta:

$$x_1^2 x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) x_3 + (x_1 x_2 - x_3^2) x_3^2 = 0$$

que presenta á nuestra curva como un caso particular de las cuárticas del *género 3* triplemente homólogo-armónicas.

Para pasar de la última ecuación á la que corresponde al

triángulo equilátero que forman los puntos de inflexión reales, se emplea la transformación lineal

$$x_1 e^{-\frac{\pi i}{9}} = \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + y_3$$

$$x_2 e^{+\frac{\pi i}{9}} = \varepsilon_2 y_1 + \varepsilon_1 y_2 + y_3$$

$$x_3 e^{\quad\quad\quad} = y_1 + y_2 + y_3$$

siendo ε_1 y ε_2 las raíces cúbicas imaginarias de la unidad: efectuando la sustitución, se llega al siguiente resultado para la ecuación de la cuártica:

$$y_1 y_2^3 + y_2 y_3^3 + y_3 y_1^3 + 2(y_1 + y_2 + y_3) y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Los tres primeros sumandos de esta expresión señalan una *cuártica de Klein*, de género 3, como la nuestra y encontrada por primera vez por este eminente geómetra en su estudio *Sobre la transformación de séptimo orden de las funciones elípticas*, y que goza de la propiedad notable de que *toda* tangente en un punto de inflexión encuentra la curva en otro punto de inflexión. La nuestra no tiene esta propiedad *tan en absoluto*; pero está no obstante, ligada á la cuártica de Klein por la analogía, verdaderamente curiosa (y que nos hizo notar el Sr. Retali) de que la misma propiedad se verifica, *pero sólo* para los seis puntos de inflexión reales.

2. Vamos ahora á dar á conocer una propiedad que nos parece interesante, y á la que hemos llegado por una transformación geométrica.

Consideremos, ante todo, la ecuación de nuestra curva en *coordenadas tripolares*, que es evidentemente

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} = \frac{9}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 3R^2}$$

habiendo empleado para escribir el segundo miembro de la ecuación anterior, es decir, la cantidad

$$\frac{3}{MO^2}$$

la *fórmula de Lagrange*

$$d^2 = \frac{\sum \alpha_0 (\lambda_1^2 - \lambda_0^2)}{\sigma_0}$$

en la cual $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ son coordenadas baricéntricas *relativas* y $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ coordenadas tripolares. Haciendo aplicación al caso actual, resulta:

$$\overline{MO^2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 3R^2}{3}$$

de la que se deduce, inmediatamente, la que hemos escrito.

Ahora bien, se sabe que en coordenadas tripolares á cada punto

$$M(\lambda, \mu, \nu)$$

corresponde otro, *pero uno solo*, cuyas coordenadas son proporcionales; estos dos puntos dan una recta pasando por el circuncentro O , y son conjugados respecto á la circunferencia circunscripta al triángulo fundamental. También se puede decir que M' es el transformado de M por *radios vectores recíprocos*, siendo O el *polo de inversión* y la potencia $+R^2$, y aun puede añadirse que *en este caso* se trata de una *transformación de Hirst*, por ser la cónica fundamental un círculo y O su centro.

Entre las coordenadas de M y M' se verifican, por consiguiente, las relaciones

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{R}{MO}$$

deduciéndose fácilmente

$$\lambda^2 = \lambda'^2 \cdot \frac{3R^2}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - 3R^2}$$

y análogamente para μ y ν .

Se tiene, por consiguiente,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 \cdot \frac{3R^2}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - 3R^2}$$

de donde se deduce:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 3R^2 = \frac{9R^4}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - 3R^2}$$

y, por consiguiente, la ecuación de la transformada será, después de suprimir el factor,

$$\frac{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - 3R^2}{R^2}$$

y empleando coordenadas generales

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} = \frac{3}{R^2}$$

La interpretación *física* de esta transformada es bien sencilla, pues claramente se ve *la propiedad de que gozan sus puntos de recibir una cantidad constante de luz de los tres focos A, B, C, é igual á la que reciben los puntos de la circunferencia circumscripta del foco central O (de intensidad suma)*.

En cuando á la *interpretación geométrica*, diremos que la ecuación obtenida para la toansformada, manifiesta: *que*

el cuadrado del radio de la circunferencia circunscripta al triángulo es media armónica de los cuadrados de los vectores dirigidos á los vértices de dicho triángulo.

Si se desea la ecuación de la transformada en coordenadas polares, bastará substituir en la ecuación polar de la cuártica en vez de $\rho \dots \dots \frac{R^2}{\rho}$.

Y resulta:

$$\rho^4 - R^2 \rho^2 + 2 R^3 \rho \cos 3 \omega - R^4 = 0$$

y si lo que se desea es la ecuación cartesiana, empleando los mismos ejes que anteriormente (primera parte) se llega al resultado:

$$(x^2 + y^2)^3 - R^2(x^2 + y^2)^2 + 2R^3x(x^2 - 3y^2) - R^4(x^2 + y^2) = 0$$

habiendo utilizado las siguientes fórmulas de transformación:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos 3 \omega = \frac{4 x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Se trata, pues, de una curva de 6.º grado, y se ve inmediatamente que el origen es un punto doble aislado, como debía suceder.

También se observa que, aparte el punto aislado, toda la curva queda encerrada, lo mismo que la cuártica de que se deriva, en la corona que tiene por radios:

$$\frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) \quad \text{y} \quad \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

que se compone de tres hojas, con triple simetría respecto á las alturas del triángulo, si bien estas hojas son más anchas,

y aparece la transformada respecto á la cuártica, como si á ésta se la hubiese hecho girar un ángulo de 60° alrededor del centro del triángulo, de modo que los vértices de la una son los puntos diametralmente opuestos á los de la otra en las circunferencias que forman la corona que encierra á ambas curvas.

También es fácil obtener la ecuación de la *séxtica* en *coordenadas baricéntricas*. Tomemos como triángulo fundamental el ABC , y recordemos que hemos obtenido para la ecuación en *coordenadas tripolares*

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} = \frac{3}{R^2}$$

Para el paso á baricéntricas utilizaremos las fórmulas clásicas:

$$\lambda^2 = \frac{a^2 [(\beta + \gamma)^2 - \beta \gamma]}{\sigma^2}, \mu^2 = \dots, \nu^2 = \dots$$

y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, resulta la siguiente, en *coordenadas baricéntricas*

$$\frac{1}{(\beta + \gamma)^2 - \beta \gamma} + \frac{1}{(\alpha + \gamma)^2 - \alpha \gamma} + \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha \beta} = \frac{9}{\sigma^2}$$

Para la construcción por puntos de la transformada, se empezará por construir inmediatamente los vértices, prolongando las alturas del triángulo ABC , y después se puede proceder aproximadamente como se hizo con la cuártica; esto es, utilizando la ecuación en coordenadas polares, pues de ello se deduce inmediatamente:

$$R \cos 3 \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{\rho} + \rho - \frac{\rho^3}{R^2} \right)$$

el segundo miembro se puede construir gráficamente, una vez fijado ρ (que ha de estar comprendido entre

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ y } \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1))$$

y se obtendrá un segmento tal como l , reduciéndose la ecuación anterior á

$$R \cos 3 \omega = l$$

siendo ya fácil construir el ángulo 3ω , y, por consiguiente, aproximadamente ω para cada valor de l .

Las propiedades que vamos á exponer á continuación darán aun más facilidad para el trazado de la curva.

Encontremos los puntos de inflexión de la séxtica, utilizando para ello su ecuación en coordenadas polares, esto es:

$$\rho^4 - \rho^2 + 2 \rho \cos 3 \omega - 1 = 0 \quad (6)$$

habiendo tomado el radio R por unidad.

La ecuación que da los puntos de inflexión es:

$$\rho^2 - \rho \frac{d^2 \rho}{d \omega^2} + 2 \left(\frac{d \rho}{d \omega} \right)^2 = 0. \quad (7)$$

Derivando la ecuación (6) respecto á ω resulta:

$$4 \rho^3 \frac{d \rho}{d \omega} - 2 \rho \frac{d \rho}{d \omega} - 6 \rho \sin 3 \omega + 2 \frac{d \rho}{d \omega} \cos 3 \omega = 0$$

de donde se deduce fácilmente, después de eliminar $\cos 3 \omega$

$$\frac{d \rho}{d \omega} = \frac{6 \rho^2 \sin 3 \omega}{3 \rho^4 - \rho^2 + 1} \text{ y } \left(\frac{d \rho}{d \omega} \right)^2 = \frac{9 \rho^2 [4 \rho^2 - (1 + \rho^2 - \rho^4)^2]}{(3 \rho^4 - \rho^2 + 1)^2}$$

Derivando la primera expresión respecto á ω se obtiene:

$$\frac{d^2 \rho}{d \omega^2} = \frac{(3 \rho^4 - \rho^2 + 1) \left[18 \rho^2 \cos 3 \omega + 12 \rho \frac{d \rho}{d \omega} \operatorname{sen} 3 \omega \right] - 6 \rho^2 \operatorname{sen} 3 \omega \left(12 \rho^3 \frac{d \rho}{d \omega} - 2 \rho \frac{d^2 \rho}{d \omega^2} \right)}{(3 \rho^4 - \rho^2 + 1)^2}$$

y teniendo en cuenta el valor encontrado anteriormente para

$$\frac{d \rho}{d \omega}, \text{ resulta, después de algunos cálculos,}$$

$$\frac{d^2 \rho}{d \omega^2} = \frac{9 \rho (3 \rho^4 - \rho^2 + 1)^2 (1 + \rho^2 - \rho^4) + 18 \rho (1 - 3 \rho^4) [4 \rho^2 - (1 + \rho^2 - \rho^4)^2]}{(3 \rho^4 - \rho^2 + 1)^3}$$

Por último, sustituyendo los valores de

$$\frac{d \rho}{d \omega} \text{ y } \frac{d^2 \rho}{d \omega^2}$$

en la ecuación (7), suprimiendo el factor común ρ^2 y haciendo $\rho^2 = t$, se llega al siguiente resultado:

$$9 t^5 + 18 t^4 + 19 t^3 - 21 t^2 + 3 t - 1 = 0 \dots \dots (8)$$

Las raíces de esta ecuación sustituidas en la

$$x^2 + y^2 = t$$

darán *cinco* circunferencias, cuya intersección con la curva marcarán *treinta* puntos de inflexión, entre reales é imaginarios (Recuerden que hemos suprimido la raíz $t = 0$ correspondiente al punto aislado en el origen).

Ahora bien, para que los puntos de inflexión sean reales,

se necesita: 1.º, que el valor de t sea *real y positivo*; 2.º, que esté comprendido entre

$$\left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \right]^2 \text{ y } \left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \right]^2$$

es decir, entre

$$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \text{ y } \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$$

Procede, pues, analizar la ecuación (8) para elegir las raíces que cumplan dichas condiciones.

Se ve por de pronto que la ecuación tiene *una ó tres raíces positivas*, en virtud del *Teorema de Descartes*. Como la sustitución de los valores que antes hemos mencionado da resultados de signos contrarios, entre ellos debe haber *una ó tres raíces comprendidas*; pero si se observa que la función es constantemente creciente en el intervalo que dichos límites señalan, puede asegurarse que sólo existe una raíz, que es la que vamos á determinar.

Desde luego el valor que buscamos será inferior á la unidad, pues para este valor de t la función es positiva y creciente, por otra parte, siendo el valor

$$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$$

igual á 0,3 por defecto, para obtener la raíz *en menos de una décima*, haremos substituciones, con este intervalo, desde 0,3 á 1.

De este modo encontramos que la raíz está entre 0,5 y 0,6.

Vamos á aproximarla ahora por el método de Newton.

Para ello encontramos la segunda derivada, que es:

$$30 t^3 + 36 t^2 + 19 t - 7 = 0$$

y como ésta es positiva para los valores anteriores, partiremos del valor 0,6 que da á la función el mismo signo que á la segunda derivada. Se obtiene así para la primera corrección

$$h = - \frac{f(0,6)}{f'(0,6)} = - 0,064$$

Se tendrá, pues, $t = 0,54$ y, por consiguiente,

$$\rho = 0,73.$$

No seguiremos aproximando más, y tomaremos para ecuación de la circunferencia, cuya intersección con la curva de sexto grado dé los puntos de inflexión reales, la siguiente:

$$x^2 + y^2 = 0,54.$$

Si se desean las coordenadas cartesianas de los puntos de inflexión reales, habrá que encontrar las raíces comunes á las ecuaciones

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^3 - (x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 - 3y^2) - (x^2 + y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 0,54 \end{cases}$$

ó más sencillamente:

$$\begin{aligned} 2x(x^2 - 3y^2) &= H \\ x^2 + y^2 &= 0,54 \end{aligned}$$

llamando H al valor numérico con que pasa al segundo miembro el resultado de substituir el valor de $x^2 + y^2$.

De este modo los puntos de inflexión vienen dados por la intersección de una *cúbica* y una circunferencia.

Substituyendo en la *primera* el valor de y^2 , deducido de la *segunda*, resulta

$$8x^3 - 3,24x - H = 0.$$

Para cada valor de x se obtendrán dos valores de y , y por lo tanto, seis puntos de inflexión reales.

Puede observarse que la *cúbica* que hemos considerado tiene por ecuación en coordenadas polares

$$\rho^3 = \frac{H}{2 \cos 3\omega}$$

que es una curva del tipo de las *espigas* (de que ya hemos hablado en la primera parte), compuesto de tres ramas que se extienden hasta el infinito, teniendo los vértices situados sobre las alturas del triángulo fundamental.

Hemos visto que las tangentes á la *cuártica*, en sus puntos de intersección con la circunferencia circunscripta, *tocan* á la *inscrita* en el triángulo fundamental. Pues bien; esta propiedad se verifica también para la *séxtica*, en los mismos puntos.

Llamemos μ el ángulo que forma la tangente con el radio vector que va al punto de contacto. Se tiene la fórmula clásica

$$\cot \mu = \frac{d\rho}{\rho d\omega}$$

pero hemos encontrado

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{6\rho^2 \operatorname{sen} 3\omega}{3\rho^4 - \rho^2 + 1}$$

Haciendo en esta fórmula

$$\rho = 1 \quad \gg \quad \omega = 20^\circ$$

resulta

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \sqrt{3}$$

y, por consiguiente,

$$\cot \mu = \sqrt{3}$$

y

$$\text{sen } \mu = \frac{1}{2}$$

es decir (tomando el menor valor de μ),

$$\mu = 30^\circ$$

por lo tanto, la perpendicular bajada desde O sobre la tangente será

$$p = R \text{ sen } 30^\circ = \frac{R}{2}$$

lo que demuestra la propiedad enunciada.

Si encontramos el valor de μ para la cuártica en el mismo punto, utilizando el valor

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{-6\rho^4 \text{ sen } 3\omega}{\rho^4 - \rho^2 + 3}$$

se obtendría:

$$\mu = 150^\circ$$

resultando que las tangentes á las dos curvas en sus puntos de encuentro con la circunferencia circunscrita forman con la tangente á esta última ángulos de 60° . Esta propiedad es útil para la construcción de ambas curvas.

Claro está que el hecho de ser estos ángulos iguales era vidente *a priori*, por la propiedad de la inversión de conservar los ángulos, y teniendo en cuenta que la circunferencia circunscrita se transforma en sí misma.

Hemos llegado también á un resultado curioso al tratar de encontrar el *radio y centro de curvatura* de la séxtica en el ya citado punto de intersección con la circunferencia circunscrita.

Tomemos la conocida expresión del radio de curvatura

$$\rho_1 = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2 \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2}}$$

y hagamos en ella $\rho = 1$, recordando los valores que hemos obtenido para

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 \text{ y } \frac{d^2\rho}{d\omega^2}$$

de este modo obtendremos:

$$\rho_1 = 1.$$

Es decir, que el radio de curvatura de la séxtica en sus puntos de encuentro con la circunferencia circunscrita es igual al radio de esta última.

Si observamos ahora que el centro *del círculo osculador* está sobre la normal á la curva, y que dicha normal, en el punto anteriormente citado, forma un ángulo de 30° con la tangente á la circunferencia circunscrita, claro está que la cuerda interceptada por dicha normal en la circunferencia subtendrá un arco de 60° ; es decir, será igual al radio, y, por consiguiente, su extremo será el centro de curvatura; luego:

Los centros de los círculos osculadores á la séxtica, en sus puntos de encuentro con la circunferencia circunscrita, están situados sobre esta última.

Es, por otra parte, evidente que estos círculos osculadores que, en virtud de lo anteriormente dicho, pasan por el centro de inversión, son los transformados de las *tangentes estacionarias* de la cuártica.

Respecto á las *características Pluckerianas* de la curva de $6.^\circ$ grado, observaremos que su obtención es fácil, teniendo en cuenta que la transformación que hemos empleado, es una *transformación racional de segundo orden simétrica*, siendo los *puntos principales* el polo O y los *puntos cíclicos*, y, por consiguiente, si llamamos m el grado de la curva propuesta, p el grado de multiplicidad del polo, q el de los puntos cíclicos y m' , p' , q' los elementos análogos de la transformada, se verificarán las relaciones:

$$m' = 2m - p - 2q, \quad p' = m - 2q, \quad q' = m - p - q$$

y como en el caso actual,

$$p = 0, \quad q = 1, \quad m = 4$$

resulta:

$$m' = 6, p' = 2, q' = 3$$

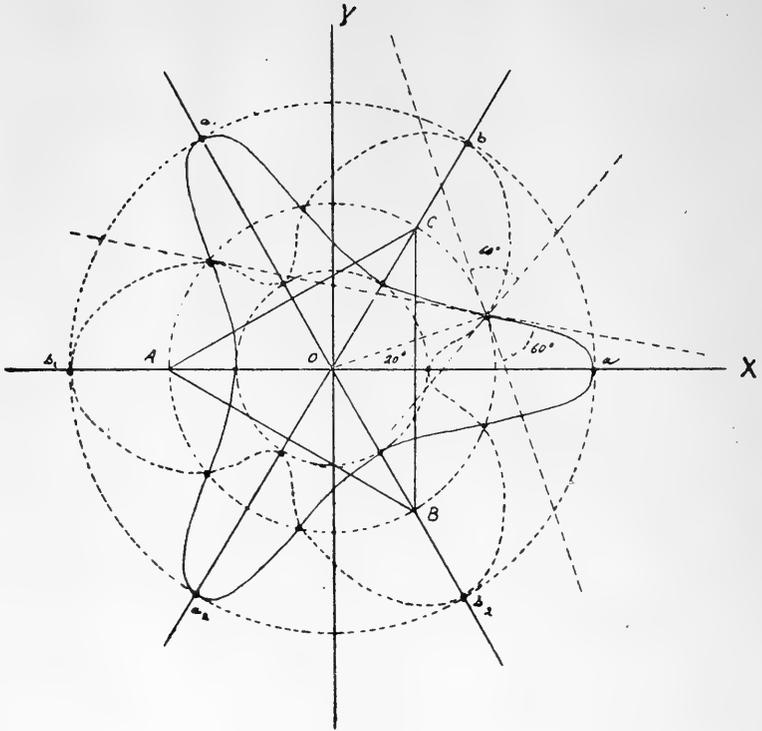
Y, por consiguiente, si hacemos aplicación de las fórmulas de Plücker, teniendo en cuenta que según acabamos de obtener los puntos cíclicos son *puntos triples* y, por consiguiente, equivalen en conjunto á *seis* puntos dobles, que, con el polo, forman un total de *siete*, resultará, llamando c' i' t' , respectivamente: la *clase*, el número de *puntos de inflexión* y el de *tangentes dobles* de la transformada

$$c' = 16, i' = 30, t' = 72.$$

En cuanto al género, sabido es que en esta clase de transformaciones se conserva, y, por lo tanto, valdrá *tres* como en la propuesta, lo cual se ve comprobado porque este número es la diferencia entre *diez*, que es el número máximo de puntos dobles que puede tener una curva de 6.º grado, y *sete* que es el número de puntos dobles, *equivalentes* al de puntosmúltiplos (dos triples y un doble).

Resulta, pues, que la transformada que hemos venido considerando, y que goza de la propiedad física *de recibir todos sus puntos una cantidad constante de luz* de los tres focos A, B y C situados en los vértices de un triángulo equilátero (y de igual intensidad): *es una séxtica, de la clase 16 y género 3, teniendo los puntos cíclicos por puntos triples y el centro O del triángulo por punto doble; tiene 30 puntos de inflexión* (seis de ellos reales, según hemos visto) *y 72 tangentes dobles.*

En la figura siguiente se dibujó la *cuártica* y su *transformada*; la primera se representa en línea seguida, y la segunda, en trazo interrumpido.



En ella se ve, y bien fácilmente puede demostrarse recurriendo á propiedades que hemos citado, que las tangentes de inflexión de la cuártica *tocan*, la transformada, en sus puntos de intersección con la circunferencia circunscripta.

Respecto á una *generación geométrica* de nuestra cuártica, el eminente profesor de Praga, *Sr. M. Lerch*, nos comunicó que la ha conseguido por medio de dos haces *proyectivos*, el uno compuesto de círculos, y el otro de cónicas, teniendo estas últimas sus ejes, sobre las coordenadas.

La Coruña, Septiembre de 1910.

VI.—Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia).

(Conclusión.)

POR JOSÉ GIRAL PEREIRA Y JULIO C. SÁNCHEZ ANGOSO.

Estudio micrográfico y bacteriológico.

Para este estudio se dispusieron 4 tubos ampollas de 25 centímetros cúbicos de cabida y 4 matraces Miquel de 300 centímetros cúbicos. Fueron calentados fuertemente en la llama de una lámpara de esmaltar, y cerrados acto continuo, se les sometió á una completa esterilización en horno de Pasteur. Dos tubos ampollas y dos matraces se introdujeron en el agua del manantial en los sitios mismos de emergencia, rompiendo bajo el agua sus puntas afiladas, y consiguiendo llenarlos hasta su mitad, se cerraron inmediatamente con un soplete. Los otros tubos y matraces se llenaron y cerraron de idéntico modo, recogiendo el agua á la salida del caño del pequeño depósito. Los primeros se marcaron con la letra *A*, y los segundos con la *B*, y todos se transportaron en condiciones convenientes al Laboratorio para proceder á su análisis antes de las veinticuatro horas de hechas las citadas tomas.

Se hizo una siembra de tanteo, colocando una gota de agua de un tubo *A* en placa de Esmarch con gelatina nutritiva, otra de idéntico modo con gelosa, y análogamente otras dos de agua de un tubo *B*.

Las placas de gelatina se dejaron á la temperatura del Laboratorio (16°-21°), y las de gelosa se colocaron en estufa á 34°.

En las placas *A* apenas se desarrollaron colonias; en las *B*

se hacía precisa una previa dilución del agua para poderlas contar con facilidad.

Repetidas las siembras con agua de los tubos *A*, sin diluir, y de los tubos *B*, diluidas al décimo, dieron los siguientes resultados:

- A* — GELATINA.. Tres colonias. — Ningún moho. — Ninguna estreptotrícea. — Ninguna bacteria liquidante.
- A* — GELOSA.... Análogo resultado.
- B* — GELATINA.. Cinco colonias. — Ningún moho. — Ninguna estreptotrícea. — Liquefacción á los cinco días.
- B* — GELOSA.... Ocho colonias. — Ningún moho ni estreptotrícea

La pipeta empleada para la siembras daba 17 gotas por centímetro cúbico; por lo tanto, resulta para el agua *A*-51 colonias por centímetro cúbico, y para el agua *B*-850 en la gelatina y 1.360 en la gelosa. Se puede considerar, con arreglo á la escala de Miquel, como *muy pura* el agua *A*, y *pura* el agua *B*, obedeciendo la diferencia á contaminaciones con el aire y el depósito.

Se practicó el análisis cualitativo de las colonias encontradas, haciendo aislamientos y siembras en gelatina, caldo, agar y medios especiales. Las del agua *A* resultaron estar constituidas exclusivamente por el *Micrococcus aquatilis* (Bolton), bacteria inofensiva en absoluto. Las del agua *B* dieron, además de la anterior, el *Bacillus subtilis* (Ehrenberg), también inofensivo.

Estudio físico-químico.

1.º *Radiactividad.* — Fué determinada á las setenta y tres horas de captada en el manantial, con el fontactoscopio de Engler y Sieveking, acusando una actividad de 1093,9 voltios-hora-litro. Aplicando la fórmula de Curie $I_t = I_c e^{-\lambda t}$, relativa á la desactivación de la emanación producida por las sales de radio en recinto cerrado, tendremos que en setenta y tres horas desaparece un 56,6883 por 100 de la acti-

vidad inicial en el manantial, y, por lo tanto, corresponde á esta agua al manar una radiactividad de 1910,7 voltios-hora-litro.

Los lodos arenáceos recogidos en el mismo manantial fueron analizados en el electroscopio de Elster y Geitel, acusando una actividad de 163,4 voltios-hora-kilogramo. La pequeñez de esta cifra en comparación con la que da el agua, hace presumir que la radiactividad de ésta es debida principalmente á emanaciones disueltas.

2.º *Crioscopia*.—El descenso del punto de congelación del agua analizada con relación al disolvente puro (agua destilada), fué determinado con el termómetro metastático de Beckman, y resultó ser $\Delta = 0,057$ grados centígrados.

Calculando el mismo descenso crioscópico á partir del residuo fijo por litro, y suponiendo que todo él estuviese constituido por cloruro ó bicarbonato sódico, por ser éstas las sales predominantes en el agua analizada, aplicaríamos la fórmula

$$\Delta = \frac{Kxp}{P_m}$$

que en los dos casos sería respectivamente:

$$\Delta = \frac{18,5 \times 0,08352}{58,06} = 0,026$$

$$\text{y } \Delta = \frac{18,5 \times 0,08352}{84,06} = 0,018,$$

cuyos números, comparados con el obtenido experimentalmente, demuestran que la materia disuelta en el agua está en un grado avanzado de ionización.

Calculando el peso molecular crioscópico á partir del dato experimental, tendremos $P_m = 27,1$, lo cual prueba un predominio constante de elementos de escaso peso atómico.

Si deducimos el descenso crioscópico á partir de la concentración molecular total (suma de moliones ya calculada en el análisis cuantitativo), tendremos:

$\Delta = 1,85 \times 0,031260 = 0^{\circ},0578$, cuya cifra, comparada con la encontrada experimentalmente, revela que el 98,61 por 100 de la substancia disuelta está ionizado.

3.º *Ebullioscopia*.—El aumento del punto de ebullición de las aguas analizadas con relación al disolvente puro (agua destilada), fué determinado con el ebulloscopio de Beckman, y resultó ser $= 0^{\circ},032$, cuyo número está en concordancia con el descenso crioscópico, teniendo en cuenta la menor sensibilidad del procedimiento ebuliométrico.

4.º *Conductibilidad eléctrica*.—La resistencia específica de las aguas analizadas fué medida utilizando el puente de Kohlrausch, y resultó $R_e = 666,29$ omíos. El número inverso es la conductibilidad específica, que es, por consiguiente, igual á $C_e = 0,00150086$.

La dilución electrolítica ó volumen molecular es el número inverso de la suma de los moliones, y tiene, por lo tanto, un valor

$$V_m = \frac{1}{0,31260} = 31,989 \text{ litros.}$$

Con este dato puede calcularse la conductibilidad molecular como producto de la específica por el volumen molecular:

$$C_m = C_e \times V_m = 0,048011.$$

Todos estos datos, aun resultando pequeños por la escasa mineralización del agua, prueban la ionización de la materia disuelta en ella.

5.º *Presión osmótica*.—Sabiendo que un descenso crioscópico de $0^{\circ},079$ corresponde á una energía equivalente á

una atmósfera de presión, se calculó ésta aprovechando el dato experimental, y resultó

$$\pi = \frac{0,057}{0,079}$$

siendo el cociente igual á 0,7215 atmósferas.

Utilizando la fórmula de Van't Hoff, $\pi = 12,07 \Delta$, resulta $\pi = 0,688$ atmósferas, número algo menor que el anterior, en atención á que esta fórmula no es totalmente aplicable á los electrolitos.

Una cosa análoga sucede con la cifra deducida de la ecuación de Clapeyron

$$P = \frac{Rt}{v}$$

que en este caso es:

$$P = \pi = \frac{0,0821 \times 273}{31,989} = 0,700 \text{ atmósferas,}$$

aun cuando esta fórmula es más exacta que la de Van't Hoff. La diferencia entre este último número y el encontrado primeramente desaparecería si en lugar de la ecuación de Clapeyron se utilizase la de Van der Wals.

Tomando, pues, como más exacto el primero de los números encontrados y haciendo la corrección de temperatura, se tendrá el valor de la presión osmótica del agua en el manantial, mediante la fórmula

$$\pi_t = \pi_o (t + \alpha t)$$

que en el caso presente será

$$\pi_t = 0,7215 (1 + 0,00367 \times 19,5) = 0,77313$$

atmósferas de presión.

Esta presión equivale á 798,64 gramos por centímetro cuadrado.

6.º *Energía cinética.*—Teniendo en cuenta la absoluta analogía existente entre las disoluciones acuosas de cuerpos sólidos y el estado gaseoso, se puede transformar la cifra correspondiente á la presión osmótica en la energía de movimiento de traslación de las moléculas mediante la fórmula

$$v = \frac{2}{3} E,$$

que en este caso sería

$$798,64 \times 31,989 = \frac{2}{3} E,$$

de donde $E = 374,215$ kilográmetros, cuyo número equivale á 0,883 caloría-kilogramo.

La energía total habría de ser, por lo menos, igual á la de traslación.

7.º *Iontización.*—De la comparación entre el descenso crioscópico hallado experimentalmente y el calculado, se deduce que el grado de iontización del agua analizada es del 98,61 por 100 de la substancia disuelta.

De la ecuación general para disoluciones de electrolitos

$$PV = iRT \quad \text{se deduce} \quad i = \frac{PV}{RT}$$

que en el caso presente es

$$i = \frac{0,7215 \times 31,989}{0,0821 \times 273} = 1,03.$$

Y de la fórmula de Arrhenius:

$$i = 1,1 (K - 1)^\alpha \quad \text{se deduce que} \quad \alpha = \frac{i - 1}{K - 1},$$

y en este caso resulta $\alpha = 0,03$, lo cual nos demuestra que de 0,03126 moléculas-gramo; hay disociadas 0,03, que constituye el 96 por 100 de la substancia disuelta, cuyo número concuerda con el deducido por la crioscopia.

6.º *Termoquímica*.—Las sales disueltas en el agua llevan consigo una energía calorífica equivalente al calor latente de disolución. Esta energía es tal que sería capaz de elevar la temperatura de la sal disuelta 88º en el caso del cloruro sódico, y 303º en el del bicarbonato de la misma base, si se les aplicara directamente el calor absorbido por el hecho de la disolución. El potencial así almacenado tiende a desdoblarse las moléculas primitivas en otras más aptas para nuevas combinaciones (*).

Estudio bioquímico.

1.º *Poder catalítico*.—Fue determinado en comparación con el agua destilada, utilizando la reacción descomponente del bióxido de hidrógeno con el permanganato potásico. Se emplearon 250^{cc} de agua mineral con un centímetro cúbico de bióxido de hidrógeno y 2,5^{cc} de ácido sulfúrico ($D = 1,86$); se añadió solución *N/10* de permanganato potásico, hasta ligera coloración rosada, gastándose 15,2^{cc} de esta solución. Una determinación análoga, remplazando el agua mineral por un volumen igual de destilada, hizo preciso un consumo de 15,3^{cc} de permanganato, cuyo número, muy próximo al anterior, demuestra que en las condiciones citadas el agua mineral no ejerce acción catalítica manifiesta.

Se repitieron las determinaciones en medio alcalino: 200 centímetros cúbicos de agua mineral, adicionados de un centímetro cúbico de bióxido de hidrógeno, fueron alcalinizados por 2,5^{cc} de solución de hidrato sódico (una parte en seis de agua); se agregó solución *N/10* de permanganato potási-

(*) A. Gautier.—*Leçons de Chimie Biologique*.

co, hasta coloración violeta del líquido sobrenadante, gastándose 9,5^{cc} de dicha solución. El agua destilada en idénticas condiciones, consumió solamente 6,2^{cc}. Repetidas varias veces estas observaciones, resultaron números concordantes con los anteriores (*).

Resulta, pues, que con relación al agua destilada en medio alcalino, el poder catalítico del agua mineral es equivalente á 13,2^{cc} por litro de solución *N/10* de permanganato, lo cual corresponde á 0,01056 grs. de oxígeno activo por litro, despreciando, por su gran pequeñez, la causa de error debida á la materia orgánica existente en el agua mineral.

La mezcla directa del agua mineral ó destilada con el bióxido de hidrógeno, en campana graduada para determinar el volumen gaseoso de oxígeno desprendido, no es posible, porque el mercurio descompone de por sí al citado bióxido, y en cuba hidroneumática se diluyen los líquidos reaccionantes en forma no determinable.

Como se ve por las experiencias anteriores, el poder catalítico del agua mineral es de carácter oxidante, puesto que reemplaza en su acción descomponente del permanganato al bióxido de hidrógeno, sin que deje de ser también reductor, puesto que consume el oxígeno disponible de dicha sal.

2.º *Poder hidrolítico.*—Fué determinado comparativamente con el agua destilada, utilizando el desdoblamiento de la sacarosa en azúcares reductores por el líquido de Fehling. Se disolvieron 0,5 grs. de sacarosa pura en 250^{cc} de agua mineral; otro medio gramo de sacarosa se disolvió en 250^{cc} de agua destilada. Los dos matraces, conteniendo las respectivas disoluciones, se colocaron en estufa á temperatura constante de 36° durante unos días. Se hizo una determinación glucosimétrica con líquido Fehling, y resultó que un centímetro cúbico de éste (equivaliendo á 0,00293

(*) El bióxido de hidrógeno empleado tenía 8,48 volúmenes de oxígeno activo.

gramos de glucosa) era reducido por 17,2 centímetros cúbicos de la solución de sacarosa en agua mineral, y por 33,6 de la del mismo cuerpo en agua destilada. La diferencia (16,4^{cc} -) corresponde al poder hidrolítico del agua analizada.

Sabiendo que hay 0,00293 grs. de glucosa en los 17,2^{cc} de la primera solución y en los 33,6 de la segunda, un cálculo sencillo nos prueba que, en las condiciones operatorias consignadas, el agua destilada hidroliza el 0,436 por 100 de sacarosa, es decir, que 100 grs. de sacarosa producen 0,436 gramos de glucosa. En las mismas condiciones el agua mineral analizada hidroliza el 0,852 por 100, cantidad que corresponde á más del doble de la anterior.

La importancia de esta observación es tal que, si se tiene en cuenta el factor tiempo, podría deducirse la velocidad de la reacción y hasta llegarse á expresar numéricamente el coeficiente de afinidad química del agua analizada para cotejarlo con los datos de la conductibilidad eléctrica y deducir, en consecuencia, la constante de energía correspondiente.

3.º *Peso molecular.*—El peso molecular crioscópico de las sustancias disueltas en el agua es igual á 27,1, lo cual pone de manifiesto el predominio entre aquéllas de elementos de escaso peso atómico, engendrados de cuerpos esencialmente cristaloides y, por lo tanto, fácilmente difusibles, susceptibles de soportar grandes cargas de energía y extremadamente favorables al quimismo vital.

4.º *Relación de uniones y cationes.*—El considerable predominio de los aniones sobre los cationes en el agua analizada, según se consigna en el lugar correspondiente, viene avalorado por la escasa valencia de los segundos. Las sales resultantes de su agrupación han de ser, en muy débil grado, precipitantes de coloides, puesto que esta propiedad es función exponencial de la valencia del catión, según estudios de Hardy.

La importancia de este carácter se pone de manifiesto,

teniendo en cuenta que, en último análisis, la vida está ligada á la persistencia de ciertas soluciones coloidales y que los agentes que hacen pasar á aquéllos de *soles* á *geles* ponen fin á la vida. (*). Las aguas minerales han de incorporarse fácilmente á los contenidos celulares, llevándoles sus elementos materiales y energéticos considerables.

5.º *Relación de los cationes alcalinos á los térreos.*—La preponderancia de los primeros sobre los segundos viene establecida por el cociente

$$\frac{Li + Na}{Ca + Mg} = \frac{100}{20}$$

expresando las cantidades respectivas en moliones. Y de la proporción en que dichos cationes existen, hace depender Laeb la actividad de los músculos, de los nervios y de las glándulas, precisando siempre, para su perfecto funcionamiento, un considerable exceso de los metales alcalinos sobre los térreos. Y aun dentro de éstos, el papel inhibitorio de las sales de magnesio (***) queda aquí bien aminorado por la escasa proporción de dicho elemento.

6.º *Relación de los aniones cloro y sulfúrico.*—Expresada en fracciones de molécula-gramo, resulta ser

$$\frac{Cl}{SO_4} = \frac{100}{6,5}$$

cuya relación está comprendida entre las cifras que dan el suero sanguíneo y la orina fisiológica, contribuyendo el exceso del anión cloro á favorecer los efectos diuréticos de las aguas analizadas.

7.º *Acidez y alcalinidad.*—El exceso de ácido carbónico

(*) J. Laeb. La dynamique des phénomènes de la vie.

(**) J. Gómez Ocaña. El peristaltismo intestinal. Primer Congreso de la Asociación Española para el progreso de las Ciencias.

existente en las aguas que estudiamos hace que todos los carbonatos existentes en ella estén al estado de sales ácidas, fácilmente dissociables, para hacer cambiar la débil acidez del líquido en otra no menos débil alcalinidad. Pero como una y otra son debidas á relativas proporciones del mismo anion, asegura esta fácil reversibilidad la reacción del medio más apropiada para las oxidaciones intraorgánicas y para evitar el nocivo aumento de ácidos en los tejidos. Cualquiera que sean las ideas actuales acerca de la reacción más favorable á los actos de la vida, siempre quedará en pie que en las proximidades de una neutralidad, es cuando alcanza su perfecto desarrollo.

8.º *Totalidad de aniones y cationes.*—La variadísima mineralización de las aguas estudiadas se revela por la existencia en ellas de cinco aniones y siete cationes diferentes, los cuales, aparte de ejercer sus específicas acciones, obran en conjunto de modo notable. Donde quiera que haya separación de las dos clases de iones, se produce siempre diferencia de potencial, cuya aparición acompaña á las actividades fisiológicas de los tejidos vivos.

9.º *Especificidad de los iones existentes.*—Puesto en claro en estos últimos tiempos el papel protector de muchos cationes de funcionalismo obscuro antes, resalta desde luego la importancia que bajo este concepto han de tener los iones calcio y sodio, ya mencionada en el núm. 5. Hasta tal extremo llega esta consideración, que algunos biólogos piensan que la necesidad de sales de sodio en el organismo animal es, quizá, el único carácter distintivo de aquél y diferencial de los vegetales. Bien conocida, por otra parte, es la acción que las sales de calcio ejercen en múltiples actos fisiológicos del organismo humano. En lo que al magnesio atañe, su facilidad para entrar en reacción y la multiplicidad de combinaciones órganometálicas que puede formar, le dan importancia grande como elemento biogénico. La acción específica de las sales de litio es bien conocida en el estado pato-

lógico, y en lo referente al fisiológico la marca el escaso peso atómico del metal que las forma, susceptible de acumular cantidades considerables de energía. Las pequeñas cantidades de aluminio y hierro encontradas pudieran dar la clave del poder catalítico de las aguas en cuestión, habida cuenta de la facilidad con que intervienen en la formación de fermentos inorgánicos y aun orgánicos.

Ya queda dicha la importancia de los aniones carbónico, cloro y sulfúrico. El fosfórico y silícico son de importancia grande como complementos de nutrición.

10. *Los gases existentes en disolución.*—Según determinaciones analíticas, consignadas en su correspondiente lugar, por cien volúmenes de gases disueltos hay 2,91 de oxígeno, 48,50 de nitrógeno y 48,59 de anhídrido carbónico.

Considerando el coeficiente de solubilidad del nitrógeno en el agua (29 por 100 de volumen) y la cantidad absoluta que de dicho gas existe en las aguas analizadas, resulta estar aquél en los límites de la saturación; este dato y el de la proporción relativa respecto de los otros gases, hacen considerar á las aguas en cuestión como muy nitrogenadas.

La cantidad de oxígeno existente en ellas equivale á menos de 3^{cc} de aire por litro de agua, y existiendo en dichos 3^{cc} unos 2^{cc} de nitrógeno, queda un excedente de 15^{cc} de este gas para caracterizar el agua como más nitrogenada que muchas de las que son tenidas como tales, alcanzándose con facilidad los efectos terapéuticos que de tal composición se desprenden.

La notable cantidad de ácido carbónico que tienen en disolución viene aumentada con la correspondiente á los bicarbonatos, realizando ambas su fin biológico favorable á las oxidaciones intraorgánicas.

11. *Factores energéticos.*—Si grandemente interesantes son las aguas que estudiamos desde el punto de vista de la materia, lo son aún mucho más si se atiende á la energía que acompaña á aquélla. De la clase de las *oligometálicas*

(de las cuales son tipos bien curiosos las de Gastein, en Prusia, y Fiuggi, en Italia), no pueden atribuirse sus notables acciones fisiológicas y terapéuticas exclusivamente á la materia que llevan disuelta, que, aun siendo importantísima por lo variada, es pequeña en su conjunto. El estudio físico-químico nos ha puesto de manifiesto, por muy diversos medios, la considerable potencia energética que dichas aguas poseen. Su radiactividad es notabilísima, su punto crioscópico es inferior al del suero sanguíneo, haciéndolas hipotónicas, y, por lo tanto, fácilmente difusibles á través de las paredes celulares para ejercer pronta y seguramente, en la intimidad del protoplasma, su acción depurativa de los procesos catabólicos. De su conductibilidad eléctrica y de su presión osmótica se deduce su gran energía cinética y su enorme grado de ionización, de cuya propiedad depende única y exclusivamente la facultad de una subsistencia para intervenir en una reacción química y cuya potencia es directamente proporcional al número de iones libres. De tal modo sucede esto, que la actividad de un cuerpo viene dada por el número de iones disociados electrolíticamente (*).

12. *Acción complementaria de la nutrición.* — Las aguas minerales de escasa mineralización pueden suplir á veces con ventaja á las genuinamente potables, si los caracteres organolépticos coadyuvan á esta sustitución. Utilizadas como agua de mesa ó como medicinales, habrán siempre de complementar la nutrición, suministrando al organismo la materia y la energía de que están dotadas, sin que haya, desde este punto de vista, ningún factor despreciable de todos los que la integran.

Cumpliendo la ley del mínimo, como elementos de compensación, favoreciendo las oxidaciones, interviniendo directamente como cuerpos histogénicos ó coadyuvando al funcionamiento celular, las substancias disueltas en las

(*) Ostwald. — *Abregé de Chimie generale.*

aguas que estudiamos han de ejercer su específica acción, complementando las de los alimentos como reparadores de las pérdidas que nuestro organismo tiene en materia y en energía; siendo dignos de hacer notar entre los cuerpos que tienen en disolución los fosfatos y el hierro, por el papel biológico interesante que desempeñan.

13. *Variantes en las relaciones urológicas.*— Con objeto de apreciar las modificaciones que la composición de la orina experimentaba por la ingestión de las aguas estudiadas, sometimos á observación á un individuo artrítico de treinta años de edad y 67 kilogramos de peso. Analizada su orina antes del tratamiento, dió la composición siguiente:

Reacción ácida: Densidad, 1,020. — Volumen en veinticuatro horas, 1335^{cc}. — Caracteres organolépticos y sedimento normales.

Partes fijas á + 100: 44,61 gramos por litro. — 48 55 en veinticuatro horas. — 0,725 gramos por kilogramo de materia viva.

Nitrógeno ureico: 9,33 gramos por litro. — 12,46 en veinticuatro horas. — 0,186 por kilogramo de materia viva.

Urea: 20,00 gramos por litro. — 26,70 en veinticuatro horas. — 0,399 por kilogramo de materia viva.

Ácido úrico: 0,77 gramos por litro. — 1,04 en veinticuatro horas. — 0,015 por kilogramo de materia viva.

Acidez (en $SO_4 H_2$): 1,83 gramos por litro. — 2,44 en veinticuatro horas. — 0,037 por kilogramo de materia viva.

Anhídrido fosfórico: 1,79 gramos por litro. — 2,38 en veinticuatro horas. — 0,035 por kilogramo de materia viva.

Cloro: 8,40 gramos por litro. — 11,21 en veinticuatro horas. — 0,167 por kilogramo de materia viva.

Cloruro sódico: 13,92 gramos por litro. — 18,58 en veinticuatro horas. — 0,277 por kilogramo de materia viva.

Nitrógeno total: 10,54 gramos por litro. — 14,10 en veinticuatro horas. — 0,210 por kilogramo de materia viva.

$$\text{Relación } \frac{\text{Nitrógeno ureico}}{\text{Nitrógeno total}} = 88,36 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Cloruro sódico}}{\text{Nitrógeno total}} = 132 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Urea}}{\text{Extracto}} = 55 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Cloruro sódico}}{\text{Urea}} = 69,6 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Ácido fosfórico}}{\text{Nitrógeno total}} = 16,87 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Ácido fosfórico}}{\text{Urea}} = 8,91 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Acido úrico}}{\text{Urea}} = 3,89 \text{ por } 100.$$

Analizada la orina del mismo individuo después de ocho días de un tratamiento, consistente en sustituir los 750^{cc} de agua potable empleada en bebida durante veinticuatro horas por igual volumen del agua mineral en estudio, resultó la composición siguiente:

Reacción ácida: Volumen en veinticuatro horas, 2200^{cc}. - Densidad, 1,022. — Caracteres organolépticos y sedimento normales.

	Gramos por litro.	Gramos en 24 horas.	Por kilogramo de materia viva.
Partes fijas á 100° . . .	49,06	107,93	1,610
Urea	20,01	44,02	0,657
Nitrógeno ureico	9,33	20,53	0,306
Ácido úrico	0,672	1,48	0,022
Acidez (en SO_4H_2)	1,61	3,74	0,055
Anhídrido fosfórico	0,98	2,16	0,032
Cloro	8,40	18,48	0,275
Cloruro sódico	13,92	30,62	0,457
Nitrógeno total.	10,38	22,83	0,340

$$\text{Relación } \frac{\text{Nitrógeno ureico}}{\text{Nitrógeno total}} = 89,92 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Cloruro sódico}}{\text{Nitrógeno total}} = 149 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Urea}}{\text{Extracto}} = 40,78 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Cloruro sódico}}{\text{Urea}} = 69,56 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Ácido fosfórico}}{\text{Nitrógeno total}} = 10,51 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Ácido fosfórico}}{\text{Urea}} = 4,90 \text{ por } 100.$$

$$\text{Relación } \frac{\text{Ácido úrico}}{\text{Urea}} = 3,36 \text{ por } 100.$$

Del cotejo de los datos que ambos análisis nos suministran pueden deducirse importantes consideraciones, que la Clínica habría de aprovechar. Aparte del considerable aumento que se observa en el volumen de la orina eliminada en veinticuatro horas, es digno de notarse el acrecentamiento en la cantidad de urea, debido al arrastre de los residuos nitrogenados detenidos en la intimidad de los tejidos y expulsados ahora por la acción estimulante de los cambios intracelulares que las aguas ejercen (*). La mayor eliminación de cloruros es de fácil explicación, teniendo en cuenta la composición química del agua ingerida, así como el aumento en la cantidad de ácido úrico, hecho más soluble ahora por la presencia de compuestos litínicos.

Pero donde las variaciones son más científicamente comparables es en las llamadas relaciones urológicas. De las siete determinadas en los análisis consignados, sólo una permanece constante (la del cloruro sódico á la urea), aumentando dos (la del nitrógeno de la urea al total y la del cloruro sódico á dicho nitrógeno total) y disminuyendo las cuatro restantes (ácido fosfórico á urea y á nitrógeno total, ácido úrico á urea y urea á extracto). Entre todas ellas resalta el llamado coeficiente de oxidación orgánica, el cual experimenta el aumento notable de 1,56 por 100, probando con ello la beneficiosa acción que estas aguas ejercen en todos los casos de retardo de nutrición, viniendo, en cierto modo, complementado el aumento de dicho coeficiente con

(*) J. R. Carracido. Estudio físico-químico y biológico de las aguas de Carlsbad.

la disminución que experimenta la relación del ácido úrico á la urea.

El descenso en las relaciones fosfóricas hace suponer una más intensa fijación de este elemento en los tejidos, con el relativo valor que los compuestos fosforados tienen en las orinas, frente á las demás vías de eliminación de dichos cuerpos.

Resumen general, conclusiones y clasificación.

Temperatura del manantial: 19, 5° centígrados.
Altitud: 315 metros.
Aforo: 14,400 litros en 24 horas.
Densidad: 0,99943 á 22° centígrados.
Residuo fijo á + 100°: 0,8352 gramos por litro.
Bacterias inofensivas: 51 colonias por centímetro cúbico.
Materia orgánica: 0,00064 gramos de oxígeno en medio alcalino.
Radiactividad: 1910,7 voltios — hora — litro.
Descenso crioscópico: 0,057 grados centígrados.
Aumento ebulioscópico: 0,32 idem id.
Conductibilidad eléctrica específica: 0,00150086.
Presión osmótica: 0,7215 atmósferas.
Grado de ionización: 98 por 100.
Poder catalítico: 0,01056 grados de oxígeno activo por litro.
Poder hidrolítico: 0,852 por 100 (hidrolisis de la sacarosa).
Grado hidrotimétrico total: 19,5
Peso molecular crioscópico: 27,1
Relación de cationes alcalinos á terreos: 5
Relación del anion cloro al sulfúrico: 15,5.

Iones miligramos contenidos en un litro de agua.

331	iones de cloro.
63	» sulfúricos.
257	» hidrocarbónicos.
1	» fosfórico.
52	» silícicos.
67	» calcio.
9	» magnesio.
1	» ferroso.
0,3	» aluminico.
3,0	» litio.
220	» sodio.
4	» hidrógeno.

Gases libres en un litro de agua.

	Centímetros cúbicos.	Gramos	Por 100 del total de gases.
Anhidrido carbónico.....	16,89	0,0334	48,6
Oxígeno.....	1,01	0,0014	2,9
Nitrógeno.....	16,86	0,0212	48,5

De todo cuanto antecede pueden clasificarse las aguas de Valdezura (Plasencia), como *oligometálicas, bicarbonatadas alcalinas, litónicas, clorurado sódicas, nitrogenadas, muy radiactivas y muy ionizadas y bacteriológicamente muy puras.*

Salamanca, Septiembre de 1909.

**VII.— Nota sobre un insecto «Scutellista cyanea»,
beneficioso para la agricultura.**

POR RICARDO GARCÍA MERCET.

Convencido de la eficacia con que puede utilizar el hombre, en su lucha contra las plagas del campo, el auxilio de los insectos entomófagos, me propongo, en una serie de breves notas, llamar la atención sobre las especies cuyo concurso sería posible buscar en nuestro país para combatir los artrópodos perjudiciales á la agricultura.

Poco ó nada se ha hecho en España en este sentido, porque entre nosotros es opinión corriente la de que bastan los insecticidas bien aplicados para contener el desarrollo de una especie perjudicial, allí donde aparezca ésta; olvidando que las preparaciones y las mezclas y los productos que matan á los insectos no han servido en ninguna parte del mundo para detener las grandes invasiones de artrópodos, y que, inversamente, el método natural de la lucha del insecto contra el insecto ha producido, allí donde pudo aplicarse, éxitos por encima de toda ponderación.

Claro es que entre un procedimiento y otro hay una diferencia enorme, pues mientras el empleo de los insecticidas apenas requiere estudio ni conocimiento alguno particular, y puede llevarse á la práctica por el intermedio de personas indoctas, el método de utilización de unos insectos contra otros necesita del concurso de los verdaderos entomólogos, y exige para ser aplicado una preparación especial. Estas notables diferencias, que bien aquilatadas ofrecen más valor del que á primera vista representan, y que no dejan de prestarse á comentarios, explican de un modo suficiente lo

que entre nosotros ocurre y el olvido en que vienen teniendo las conquistas y los descubrimientos de la entomología actual.

Por ello mismo hemos de procurar que se difunda entre nosotros el conocimiento de los insectos útiles y que se aprecie debidamente el beneficio que estos auxiliares nos podrían prestar si supiéramos ponerlos á nuestro servicio cuando las circunstancias lo exigieren. Para emprender este trabajo de divulgación, nada me ha parecido más oportuno que describir las principales especies útiles que viven en la Península.

Una de ellas es el Himenóptero calcídido *Scutellista cyanea*, descrito por Motschulsky el año 1859 y denominado después, por A. Costa, *Aspidocoris cyaneus* (1). Los ejemplares que sirvieron á Motschulsky para la descripción de la especie procedían de la isla de Ceilán y habían sido obtenidos como parásitos del quermes del cafeto (*Lecanium Coffeæ*). Costa, en 1863, la encontró bajo el escudo de una de las cochinillas del naranjo, probablemente el *Lecanium hesperidum* ó el *Lecanium Oleæ*, y creyéndola nueva le dió el nombre que ya hemos indicado. Además de vivir á expensas de estos Lecánidos, la *Scutellista* es parásita del piojo de la higuera (*Ceroplastes rusci*) y verosímilmente de otras cochinillas (2). En España vive sobre el *Lecanium Oleæ* y sobre el *Ceroplastes*. De este último, en hojas de higuera recogidas por mí en la provincia de Alicante, hemos obtenido durante el otoño actual un buen número de ♂♂ y ♀♀ de *Scutellis-*

(1) HOWARD.—*Rivista di patologia vegetale*.—Vol V, pág 81.—Firenze, 1897.

(2) Al describir Costa su *Aspidocoris cyaneus* (*Bull. dell'Accademia degli aspiranti naturalisti*, Nápoli, 1863), dice que, según testimonio del distinguido entomólogo Mr. Haliday, otro insecto genéricamente idéntico al *Aspidocoris* había sido hallado también en Italia, sobre otra cochinilla, el *Aspidiotus Mirty*. Pero no hay que olvidar que el *Aspidocoris* de Costa, ó sea la *Scutellista cyanea*, es la única especie hasta ahora conocida del género.

ta (1). También la hemos encontrado, aunque poco abundante, sobre ramas de olivo invadidas por el *Lecanium Oleæ*, que ha hecho traer á Madrid desde sus posesiones de Ambel, en la provincia de Zaragoza, el distinguido himenopterólogo D. José María Dusmet. Se ve, pues, por la somera indicación de los fitófagos que este insecto persigue, que se trata de una especie esencialmente destructora de cochinillas ó piojillos de vegetales, de los que vive unas veces como parásito endófono (*Ceroplastes*), y otras como parásito exófono (*Lecanium*) (2).

La utilidad que reporta este insecto á la agricultura es, por tanto, bien manifiesta, puesto que destruye una de las plagas que más perjuicio causan á la riqueza olivarera y puede perseguir y ser enemigo de otros Cócidos. La cantidad de *Lecanium* atacados por la *Scutellista* suele llegar

(1) De la *Scutellista cyanea* y de su presencia en la Península he hablado incidentalmente en la comunicación que presenté al primer Congreso de la *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, Zaragoza, Octubre, 1908.

(2) Se entiende por parásito endófono ó parásito interno el que se aloja dentro del cuerpo de su víctima y la devora poco á poco, respetando los órganos esenciales para la vida de ésta, hasta el momento de desarrollo en que de la víctima no ha de necesitar. La madre del parásito depone el huevo dentro ó fuera de su presa, pero en el interior de ésta vivirá la larva que del huevecillo haya de nacer. El desarrollo del huésped y el de la especie que lo soporta son concomitantes. La endofagia es el parasitismo general en los icneumonidos y braconidos y de muchos proctotrípidos y calcídidos.

El parásito exófono ó ectoparásito no se aloja dentro de lo que le ha de sustentar, sino que lo devora desde fuera. La *Scutellista cyanea*, con relación al *Lecanium oleæ*, se encuentra en este caso, pues aunque su larva vive bajo el escudo ovífero de la hembra del *Lecanium*, devora los huevecillos que aquél protege sin hospedarse en ellos; de modo que el desarrollo del parásito no es concomitante con el de la víctima. Se diferencia el parasitismo exofágico de la simple entomofagia en que aquél exige la convivencia de la víctima con el insecto que la devora, y la segunda no. El entomófago es un verdadero cazador, que ha de ir en busca de su presa. El parásito se encuentra con ésta desde su nacimiento, pues sobre ella ó en el mismo albergue de ella deposita el huevecillo la madre de aquél.

hasta el 98-99 por 100 de los individuos de la tercera generación (1), y aunque sobre la primera y la segunda actúa menos intensamente, también sobre ellas se dejan sentir los beneficiosos efectos de este parásito. Su acción sobre el *Ceroplastes* (piojo de la higuera) no es menos eficaz. Yo acabo de obtener más de 30 ejemplares de la *Scutellista* de unas hojas sobre las que había unos 60 escudos del cóccido. Para ver si este calcídido es susceptible de parasitizar otras cochinitillas estoy actualmente practicando algunas experiencias en el Laboratorio de Entomología del Museo de Ciencias Naturales, y de ellas daré cuenta en tiempo oportuno.

Entre tanto, y como complemento de la presente nota, describiré la *Scutellista cyanea* (ya que en España es muy poco conocida esta especie), valiéndome de los ejemplares que acabo de obtener. Terminaré dando nombre á una subespecie nueva; consignando algunas referencias sobre otro Calcídido del *Ceroplastes* encontrado por mí, y haciendo ligeras consideraciones acerca de la acción de los hiperparásitos sobre los parásitos primarios.

Scutellista cyanea Motsch.

LARVA.—Apoda, fusiforme, encorvada, de color blanco en los anillos extremos, y blanco rosáceo ó blanco obscuro sobre los 7 anillos centrales. Consta de cabeza y 13 segmentos á continuación.

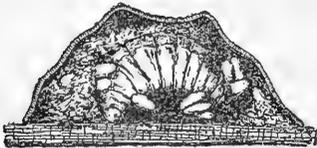


Figura 1.^a—Larva de *Scutellista* bajo el escudo ovífero del *Lecanium*.

NINFA.—De color azul intenso, mate, sin reflejos metálicos; cuerpo finamente punteado; cabeza triangular con un surco en el centro y repliegues laterales; mandíbulas cortas y robustas; pronoto y mesonoto con repliegues transversos; escudete como en

to y mesonoto con repliegues transversos; escudete como en

(1) *Studi della R. Stazione di Entomologia Agraria. Materiali per la Storia di alcuni insetti dell'olivo.*—Firenze, 1907.

el adulto, pero con arrugas ó pequeñas protuberancias en el centro, cerca de la base; alas rudimentarias, bajo el escudete; anillos abdominales con un grueso reborde apical; vientre recorrido á lo largo por una quilla. Estos caracteres son variables, según el estado de desarrollo de la ninfa.

ADULTO.— Insecto pequeño, grueso y ancho, fuertemente punteado sobre la cabeza y tórax, de color azul intenso poco brillante en la región dorsal, con reflejos metálicos sobre las metapleuras, el vientre y los fémures; antenas, extremo de los fémures, tibias posteriores, tibias anteriores é intermedias en gran parte de su extensión y todos los tarsos de color terroso; dorso y mesopleuras con ligera pubescencia blanca. Cabeza ancha, triangular, vista de frente; ojos grandes, globosos, semiesféricos, pestañosos, muy distantes del clipeo; mandíbulas bidentadas en el ápice; estemas dispuestos en triángulo, los posteriores sobre el mismo borde superior de la cabeza y más separados entre sí que del estema central; cavidad facial poco profunda, finamente reticulada; antenas insertas en medio de la cara, compuestas de 10 artejos (♀) ó de 9 (♂) y de distinta conformación en uno y otro sexo. Pronoto transversal, muy corto, punteado como el mesonoto, con el borde anterior agudo; mesonoto cuatro veces más largo que el pronoto, con dos surcos oblicuos que separan el lóbulo central de los laterales; escudete desarrollado en amplia lámina convexa, redondeada en el ápice, que se extiende por encima del metanoto y cubre casi por completo el primer segmento del abdomen, presentando un ligero reborde lateral; mesopleuras punteadas; metapleuras estriadas transversalmente. Alas casi hialinas, cortas, que asoman durante el reposo por debajo del escudete y cubren el abdomen hasta el último segmento. Patas normales; ápice de las tibias con una espinita corta y un espolón; tarsos compuestos de 5 artejos. Abdomen liso, impunteado, brillante, con una serie de pelitos blancos sobre el dorso de los cuatro últimos segmentos. Long. 2 — 2'5 m. m.

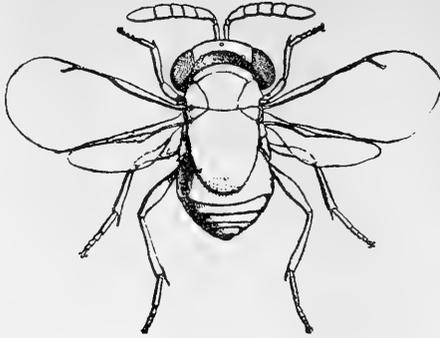


Figura 2.^a — *Scutellista cyanea* ♂, muy aumentada.

♀ Escapo, largo y fino; funículo engrosado hacia el ápice, cubierto en toda su extensión de pubescencia blanquecina; escapo testáceo, pedicelo azulado obscuro con reflejos metálicos, tres veces más largo que ancho, los siguientes artejos ó sean el 2.º, 3.º, 4.º y 5.º del funículo de color pardo claro y ensanchando de la base al ápice; el 6.º más ancho que largo; el último, que constituye la llamada maza, más largo que los dos anteriores reunidos, pero en realidad compuesto de tres artejos soldados ó casi soldados, de los cuales el 1.º tiene la longitud que el precedente del funículo, el 2.º es un poco más corto, y el 3.º, de menor longitud aún, se aguza hacia el ápice. Fémures posteriores un poco engrosados.

♂ Escapo fino; funículo cubierto de pubescencia blanquecina, con todos sus artejos de igual grosor; pedicelo obscurecido, muy corto, casi esférico; el segundo artejo algo más largo que los que siguen; los que se hallan á continuación casi de igual longitud y no aumentando de anchura de uno á otro, el último (la maza, formada como en la ♀, pero menos gruesa) tan largo como los dos artejos anteriores reunidos. Fémures posteriores menos engrosados que en el otro sexo.

La forma adulta que acabo de describir ha sido obtenida

como parásito del *Ceroplastes rusci* ó piojo de la higuera. El cóccido se recogió en un huerto de los alrededores de Alicante.

Scutellista cyanea var. nigra, nov. var.

Difiere del tipo por el color del cuerpo, completamente negro, con reflejos bronceos sobre la cabeza, el pronoto y mesonoto; las antenas, negras; los fémures y tibias, negros también; los tarsos, negros, excepto la base del primero, que es testácea.

La pubescencia del dorso como en el tipo; la puntuación más regular y esparcida; el espolón de las tibias más desarrollado; las antenas, en conjunto, más finas y gráciles; las alas anteriores con una mancha oscura debajo del pterostigma. ♂ y ♀.

Esta variedad (¿tal vez especie nueva?) ha sido obtenida del *Lecanium oleæ*, sobre ramas de olivo recogidas en un monte que el Sr. D. José María Dusmet posee en el término de Ambel (Zaragoza). Puede considerarse como un caso de mimetismo, pues los árboles de que se obtuvo el parásito están infestados por el hongo *Sphaeria oleae* D. C., llamado vulgarmente *negrilla*.

Sobre las ramas de olivo, completamente ennegrecidas por el hongo, la *Scutellista*, de color negro también, pasa completamente inadvertida y se confunde con las manchas de la criptógama, pudiendo escapar mejor de este modo á la persecución de sus enemigos. Entre éstos creo se halla otro calcídido que he podido recoger no bajo los escudos del *Lecanium*, sino sobre el *Ceroplastes* de la higuera. El estudio de este parásito, que pertenece al género *Tetrastichus*, no he podido hacerlo todavía, pues se trata de un insecto que acabo en estos días de obtener y que pertenece á un grupo de muy difícil diferenciación. Este calcídido podría ser el freno que pone límite á la acción de la *Scutellista* sobre los cóccidos que le sirven de alimento.

El beneficio que la *Scutellista* presta á los agricultores estará, como se ve, contenido por la intervención natural de los hiperparásitos del *Ceroplastes*, ó sea de los parásitos de aquélla. Por fortuna, estos insectos no se han encontrado todavía en el piojo del olivo parasitado por la *Scutellista*, lo que parece indicar que la propagación de ésta en los olivares donde ha aparecido no hallará, por lo pronto, el obstáculo que le opondría su insecto perseguidor. Esta es una circunstancia que debe aprovecharse para procurar el incremento de la *Scutellista* en las regiones olivareras invadidas por el *Lecanium*, ya que se trata de una especie de cuya eficacia no se puede dudar. En efecto: la *Scutellista cyanea*, transportada intencionalmente á la América del Norte y aclimatada y propagada artificialmente en algunos departamentos de los Estados Unidos, se considera allí como un poderoso auxiliar en la lucha del agricultor contra las plagas de los *Lecanium* y *Ceroplastes*, y ha prestado importantes servicios á la riqueza agrícola del país.

Ya hemos dicho, además, que en Europa según testimonio de la Estación de Entomología Agraria de Florencia— llega á parasitizar el 98 por 100 del *Lecanium oleæ* en su tercera generación. Para formarse idea aproximada de lo que esto supone hay que haber visto plantaciones de olivo invadidas por el *Lecanium* y haber examinado en el laboratorio el contenido de los escudos de la hembra adulta de este cóccido. Cada uno de ellos puede decirse que alberga un enjambre de larvitas y el total de los escudos un número tan grande de descendientes que sólo por cálculo sería posible contarlos. El que esta descendencia, y su multiplicación ulterior, sea casi aniquilada y contenida por otro insecto, da á la obra de este unas proporciones que difícilmente pueden concebirse. De aquí el que no hayamos creído ocioso dedicar una nota á este pequeño calcídido, cuyo conocimiento es útil difundir y acerca del cual se ha escrito bien poco, ciertamente.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

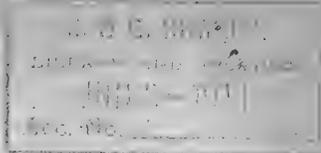
	PÁGS.
Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1910.	5
I. — Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimacuarta.....	11
Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimaquinta.....	34
Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimasexta.....	58
II. — Los métodos indirectos de la Química analítica, por <i>Juan Fages Virgili</i>	83
III. — Apuntes para la reforma de la Nomenclatura matemática, por <i>Modesto Dominguez Hervella</i>	127
IV. — Estudio completo de una clase especial de integrales singulares (continuación), por <i>Lauro Clariana</i> .	134
V. — Sobre un problema de Física (segunda parte), por <i>Juan Jacobo Durán Loriga</i>	145
VI. — Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia), conclusión, por <i>José Giral Pereira y Julio C. Sánchez Angoso</i>	167
VII. — Notas sobre un insecto «Scutellista Cyánea», beneficioso para la Agricultura, por <i>Ricardo García Mercet</i>	185

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX.—NÚM. 4

Octubre de 1910.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

VIII.— Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaséptima.

SEÑORES:

La materia que me había propuesto tratar en el presente curso queda terminada, y en cierto modo completa con la conferencia precedente.

Siempre empleo la palabra conferencia, y nunca la de lección, porque un curso compuesto de lecciones me impondría un método, un programa y un orden severo de que me veo libre dando á estos trabajos la denominación de conferencias.

Por ser conferencias, puedo decir que el programa del presente curso queda en cierto modo completo; de ser lecciones las pronunciadas en esta clase, no podría hacer á conciencia igual afirmación, porque enumeré, al empezar, multitud de cuestiones de análisis, y de ellas, sólo en el estudio de tres me he ocupado, que han sido tres teorías fundamentales para la Física Matemática moderna, ó mejor dijera una teoría y dos fórmulas, á saber: la teoría de los vectores, la fórmula de Green y la fórmula de Stokes; varias aplicaciones analíticas de dichas fórmulas; y, por último, la aplicación de la fórmula de Green á la electro-estática, y la de la fórmula de Stokes á la electro-dinámica.

Estas teorías, con lo que de la teoría de los vectores

hemos dicho, constituyen la parte más importante del curso que hoy termina.

Es como un avance y una preparación á la Física Matemática moderna, que deseamos y nos proponemos ir explicando en los cursos próximos.

Respecto á las demás cuestiones de análisis que enumeramos, y no hemos estudiado en esta quinta serie de conferencias, ocasión tendremos en otros cursos de subsanar tales involuntarias omisiones, de las que el tiempo es el único responsable.

*
* *

De suerte que el presente curso ha terminado, y sin embargo, algo me queda por decir: no exposición de nuevas teorías, no análisis de nuevas hipótesis, nada, en suma, que pueda considerarse como una exposición regular de los grandes problemas que la Física Matemática abarca en su dilatadísimo horizonte.

Por algo insisto en dar el nombre de conferencias á estos trabajos, que casi pudiera llamar conversaciones con mis alumnos, ilustradas por medio del cálculo; como hay conferencias que se ilustran empleando el aparato de proyección.

Lo poco que voy á exponer en esta última conferencia, son impresiones mías respecto á los últimos problemas que hemos tratado, imágenes, comparaciones, á las que no pretendo dar ningún rigor científico, antes bien, al rigor científico faltaré alguna vez de propósito para no encerrar en moldes excesivamente rígidos, en fórmulas totalmente severas ó en un dogmatismo intransigente, ideas de suyo vagas, que siembro á capricho en mis oyentes de la cátedra, ó en mis lectores del libro, sin más pretensiones que la de sugerir con mis impresiones otras impresiones, y de dar cierta movilidad, que acaso puede ser fecunda, á los rígidos principios

que se encuentran en las obras didácticas de esta materia.

En lo que sigue, procuraré explicar con más precisión lo que precede.

*
* *

Al examinar los conceptos, y al demostrar las fórmulas de las conferencias anteriores, por fuerza irresistible de mi manera de pensar, ó por caprichos de mi propia imaginación, yo represento esos conceptos y esas fórmulas por ciertas imágenes, que no pretendo dar, ni como nuevas hipótesis, ni como fundamentos de nuevas teorías, ni siquiera como representación gráfica de los fenómenos físicos que las teorías modernas someten á fórmulas matemáticas.

Y voy á concretar estas ideas generales con algunos ejemplos.

Siempre que encuentro en mis cálculos, ó en cualquier obra, un vector eléctrico E (fig. 59), yo imagino una fuerza, que en el campo en que actúa, encuentra una masa eléctrica e y la mueve ó tiende á ponerla en movimiento, y para medir esta fuerza eléctrica, yo imagino también que pongo en contacto con ella, lo que se llama un plano de prueba e_1 que va á servir en cierto modo de unidad.

Y asimismo, una línea de fuerzas ab la considero descompuesta, ó si se quiere, la considero como la envolvente de una serie de vectores eléctricos E' , E'' , E''' .

Un concepto análogo al que, desde los trabajos de Faraday, se da el nombre en electro-estática de tubos de fuerza ó de cordones elásticos.

Pero yo reservo en estas representaciones los tubos eléctricos para mayores empresas, si puedo expresarme de este modo.

Siempre el vector eléctrico, para mí, está representado por una línea, con su flecha correspondiente, y actúa sobre simples átomos eléctricos, y las pruebas experimentales siem-

pre suponen un pequeño plano de prueba electrizado; ó si se quiere, una pequeña masa eléctrica.

En un campo eléctrico yo no imagino más que elementos eléctricos y fuerzas eléctricas que los ponen en movimiento, y ellos caminan libremente si se trata de un conductor; sujetos á ciertos enlaces, si se trata de los diferentes dieléctricos; y en estos enlaces reside la naturaleza de las varias hipótesis.

*
* *

A su vez, cuando los autores me hablan de fuerzas magnéticas, ó las encuentro en mis trabajos, ó las nombro en mis explicaciones, me sugiere la imaginación representaciones gráficas completamente distintas de las precedentes.

En primer lugar, así como antes la fuerza eléctrica E imaginaba yo que procedía de masas eléctricas, por ejemplo M_e , así, cuando se trata de una fuerza magnética H , yo supongo que procede de una de tres cosas, ó de todas ellas combinadas: ó de corrientes eléctricas en circuito C , ó de solenoides S , ó de imanes I ; porque todas éstas son, digámoslo de este modo, entidades del mismo orden. Y la fuerza H , que de ellas emana, aunque se representa por un vector como la fuerza eléctrica E y así entra en los cálculos y en las representaciones gráficas, yo nunca la imagino como una recta f , sino como un tubo de fuerza, tan ténue, tan delgado como se quiera; pero es una recta, si vale la palabra, más complicada que la de la fuerza eléctrica E .

Por eso habrán observado mis alumnos, que aun cuando la represente por una recta, como la fuerza eléctrica, designo la primera por una línea delgada, la segunda por una línea mucho más gruesa, como puede verse en las figuras 57 y 58.

En la fig. 59 ya empleo para designar al vector magnéti-

co H la forma cilíndrica. Y esta representación no es enteramente caprichosa.

Voy á explicar su fundamento, porque hasta las imaginaciones han de tener su base; y estas imaginaciones mías son algo así como una síntesis gráfica de muchas de las hipóte-

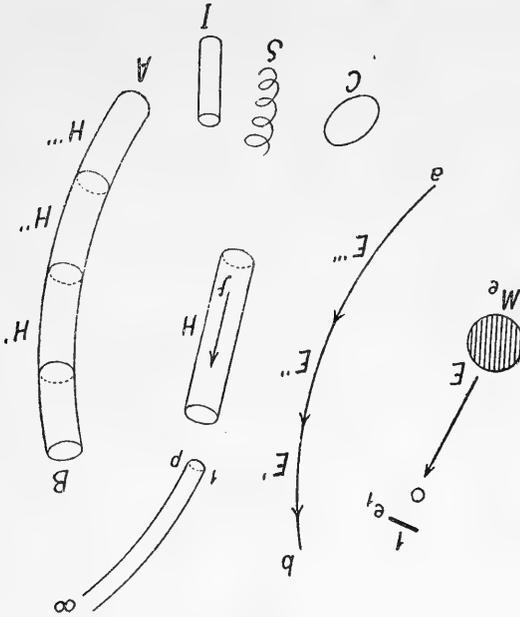


Figura 59.

sis que sirven de base á las teorías modernas de la Física Matemática.

Así como todo vector eléctrico me figuro, como antes decía, que pone en movimiento una masa eléctrica, así me figuro también que todo vector magnético actúa, por decirlo de este modo, en su extremidad, no sobre una masa eléctrica, sino sobre una pequeña corriente circular, que procurará orientar normalmente á su dirección, según la hipótesis de Ampère relativa á los imanes, convirtiendo cada elemento de imán en un pequeño solenoide.

Y suponiendo que el vector magnético actúa en un medio

en que los elementos son pequeñas corrientes ó pequeños imanes, que por corrientes pueden substituirse, á medida que el vector avanza en el campo en el cual actúa, me figuro que su traza es algo así como el tubo H .

No una recta f , sino un cilindro de sección infinitamente pequeña.

Y en su extremo para medir su intensidad, no habría que colocar un plano de prueba como e_1 , sino un polo positivo p , que supondré también igual á la unidad; lo cual siempre puede suponerse, al menos en el campo de la imaginación, porque basta concebir un imán en que el polo positivo esté en p , y el polo negativo en el infinito.

De este modo se comprende que no es absurdo suponer un polo de prueba aislado, como antes suponíamos un plano de prueba, aislado también.

Y en el camino de estas imágenes, una línea de fuerza AB envolvente de vectores magnéticos, no es una línea como ab , sino un tubo AB , una especie de solenoide.

De este modo, los campos eléctricos los veo compuestos de líneas de fuerza, y los campos magnéticos de tubos magnéticos de fuerza; y un campo electro magnético, es una combinación de estas líneas y de estos tubos.

De esta suerte, las fórmulas más abstractas y al parecer más áridas de la electro-dinámica moderna, toman á mis ojos formas plásticas, que no tengo la pretensión de suponer que representen la realidad, pero que considero que son símbolos generales que, modificados en este ó aquel sentido, atribuyen á cada hipótesis de las que han forjado los maestros, una representación adecuada y algo así como un sostén gráfico de las fórmulas abstractas.

*
* *
*

Así, por ejemplo, las dos fórmulas que en la conferencia anterior demostramos, como aplicación del teorema de Sto-

kes, tienen para mi uso particular, pudiera decir, y sin darles otro valor, una significación material ó plástica, que se desprende naturalmente de las teorías demostradas.

1.º Dijimos que, cuando por el interior de una línea cerrada, que puede materializarse por un alambre, atraviesa un sistema de vectores magnéticos, determinando un flujo de fuerza magnética á través de una superficie cualquiera que pase por la línea, la variación del flujo determinaba una corriente en el hilo conductor.

Pues esto lo veo yo materialmente, y será visión caprichosa ó símbolo más ó menos aproximado, ó será lo que fuere, pero este principio matemático y abstracto, toma á mis ojos apariencias físicas, que, por lo menos, me sirven de procedimiento nemotécnico.

En efecto, sea la línea cerrada L , que podemos materializar por un alambre, y supongamos que por el interior de este alambre, á manera de anillo, pasa un haz de líneas de fuerzas magnéticas, ó de vectores magnéticos H, H', H'' (figura 60).

Por la línea L hagamos pasar una superficie cualquiera para medir el flujo; y puede ser cualquiera, según la proposición que demostramos en una de las conferencias anteriores, aplicando esta proposición á los vectores H .

Como estos vectores no son, á mis ojos, líneas, sino tubos de fuerza, compuestos de corrientes sumamente pequeñas, es decir, solenoides, estos tubos agujerearán, si se me permite este modo prosaico de expresarme, la superficie

S (fig. 60 bis), marcando en ella, ó dejando en ella, como secciones de su forma cilíndrica, las pequeñas corrientes h, h', h'': unas en el interior, y otras á lo largo de la línea L , todas en el mismo sentido, y que se

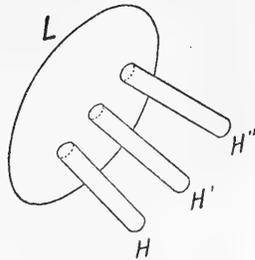


Figura 60.

resolverán, por decirlo de este modo, en una corriente única C á lo largo de la línea L .

Y de este modo no me extraña, y antes me parece que es un hecho físico que veo, que el flujo de los vectores magnéticos se convierta en corriente en el conductor L que los envuelve.



Figura 60 bis.

De suerte que la fórmula, conservando todo su rigor matemático, y hasta, si se quiere, alejándose desdeñosa de toda hipótesis, toma para mí una significación material y entra como representación ó simbolo en el campo de los hechos vulgares.

La integral del primer miembro es la corriente total, suma de las corrientes parciales $h, h' \dots$

Mientras el conjunto de vectores magnéticos H permanece constante, en el conductor ó hilo metálico L , y acaso á su alrededor, no hay más que una tensión eléctrica, y el sistema conserva cierto equilibrio.

Pero desde que el flujo varía, esta variación se hace sentir en el conductor L , varía la tensión, nace la fuerza eléctrica, y la corriente inducida, porque es una verdadera corriente de inducción, aparece en la línea metálica L .

Serán estas imaginaciones verdaderas ó falsas, aproximadas ó lejanas, legítimas ó infantiles, como diría algún conceptista severo; pero después de todo, no creo que perjudiquen á las fórmulas matemáticas, que pretenden expresar con rigor científico las leyes del fenómeno que estudiamos.

Pero aun hay más, y aun llevo más lejos, y quizá con más atrevimiento, estas imágenes y representaciones.

De la fórmula experimental

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \frac{d \iint (a l + \beta m + \gamma n) d\omega}{dt}$$

dedujimos, aplicando la fórmula de Stokes, estas otras tres:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}, \end{aligned} \tag{1}$$

que todavía pueden transformarse en otras tres, introduciendo lo que se llama *vector potencial*, que es un vector cuyas componentes, que designaremos por F, G, H , gozan de esta propiedad: que, diferenciándolas con relación al tiempo, dan las tres componentes P, Q, R , es decir, que satisfacen á las relaciones

$$P = \frac{dF}{dt}, \quad Q = \frac{dG}{dt}, \quad R = \frac{dH}{dt}.$$

Substituyendo dichos valores en las tres ecuaciones anteriores, toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d}{dy} \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dz} \frac{dG}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{d}{dz} \frac{dF}{dt} - \frac{d}{dx} \frac{dH}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d}{dx} \frac{dG}{dt} - \frac{d}{dy} \frac{dF}{dt} \end{aligned}$$

é integrando con relación á t , y observando que la constante puede suponerse igual á 0 , hallaremos estas tres fórmulas, que también puede decirse que son ya clásicas, si no por los años, por el uso constante que de ellas se hace:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\end{aligned}\tag{2}$$

Pudiéramos seguir más adelante, determinando la forma de F, G, H , cantidades que se expresan en forma potencial de u, v, w , con lo cual las fórmulas (2) y (1) vienen á expresar relaciones entre $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$; y puestas las dos bajo la forma indicada, hasta pudiéramos decir que eran el resultado de despejar α, β, γ del segundo grupo de tres ecuaciones que obtuvimos en la conferencia precedente

$$\begin{aligned}4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.\end{aligned}$$

Pero todo esto necesitaría mayores explicaciones, que por ahora suprimo; pues sólo me he propuesto insinuar, no me atrevo á emplear otra palabra, un símbolo, ó representación material, ó si se quiere aun menos, una regla nemotécnica plástica aplicable á los grupos (1) (2) ú otro equivalente.

A la figura 60 sustituyamos la figura 61, en que el contorno L está sustituido por el rectángulo $ABCD$ y los vectores magnéticos H por el círculo H de dicha figura 61, que es como haber tomado una espira del solenoide ideal é infinitamente estrecho, que puede simbolizaren cierto modo el vector H .

De suerte que, en rigor, la figura 61 es como un elemen-

to de la figura 60; tanto, que algunos autores, en vez de aplicarla fórmula de Stokes á la fórmula experimental, cuya representación gráfica es la figura 60, aplican directamente la figura 61 para cada plano coordenado y el eje perpendicular al mismo.

Pues bien, esta figura 61, para mí, es como un rodillo H entre cuatro cremalleras ideales y diferenciales: AB ; CD constituyen el primer par; y BD , AC constituyen el segundo.

Marchan en el mismo sentido las de cada par, pero con diferente cantidad de movimiento; y de la diferencia de estos movimientos resulta un movimiento de giro del rodillo H .

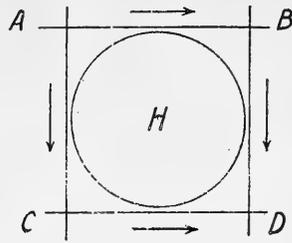


Figura 61.

Más bien que cremalleras son líneas que rozan con H .

Así, en la fórmula (2), el primer miembro α simboliza el rodillo, el solenoide, el tubo, que todos estos nombres le he dado; y en el segundo miembro, cada término representa el efecto final de cada dos cremalleras diferenciales; así, una de ellas será $\left(H + \frac{dH}{dy} dy\right) dx$; la otra Hdx , y la diferencia $\frac{dH}{dy} dx dy$, ó prescindiendo del factor $dx dy$ para referirnos á la unidad de área $\frac{dH}{dy}$. Consideraciones análogas podríamos hacer para los demás términos.

Todo esto es como un boceto de algo que bien pudiera precisarse en otros términos, pero que no vale la pena de ocupar por más tiempo la atención de mis alumnos, puesto que todas estas teorías hemos de estudiarlas más adelante en forma rigurosa, ó tan rigurosa como la ciencia actual permita.

Concluyo este primer punto, y lo condenso diciendo, que

para recordar este primer grupo de ecuaciones clásicas de la moderna Electro-dinámica, yo empleo estas fórmulas nemotécnicas, que hasta podrán parecer extrañas, pero que yo las he encontrado útiles, porque dan cierto símbolo material del fenómeno que representan.

Y así, yo digo: en la primera fórmula, una corriente eléctrica envuelve un haz de vectores magnéticos.

Y en el primer grupo de estas fórmulas fundamentales, cada una de ellas es, para mí, la fórmula de un rodillo entre cuatro cremalleras ideales.

Pasemos á repetir algo análogo á lo dicho para el segundo principio fundamental, aunque ya seremos más breves en la explicación de estos simbolismos, que soy el primero en reconocer que tienen mucho de caprichosos.

*
* *

2.º Recordarán mis alumnos, que en el segundo principio que explicamos en las conferencias anteriores, considerábamos (figura 62), una línea magnética H que envolvía á una serie de corrientes C, C', C''

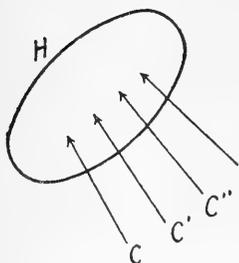


Figura 62.

Pues bien, yo á esta figura le doy con la imaginación relieve material de este modo (fig. 62 bis).

La línea H yo supongo que es algo así como un imán, interpretado según la hipótesis de Ampère, ó mejor dicho, un solenoide H , com-

puesto de infinitas corrientes h, h', h'', que, si se quiere, pueden ser ruedecillas dispuestas para girar.

A la vez me figuro que las corrientes C, C', C'' , ó los vectores que las representan, son como cremalleras de dientes infinitamente pequeños, que pasan por el interior del

anillo H rozando con las ruedecillas $h, h', h'' \dots$, que es como si dijéramos: ó que las cremalleras $C \dots$ engranan con las ruedecillas $h \dots$; ó de otro modo todavía: que las corrientes $C \dots$ engendran las corrientes h .

Otra fórmula aún puedo emplear: que el manajo de corrientes C engendra á su alrededor un campo electromagnético compuesto de anillos, de los que uno es el que hemos representado por H .

Y así como por la fórmula de Stokes transformamos la fórmula, general representada en la figura 62, fórmula que era

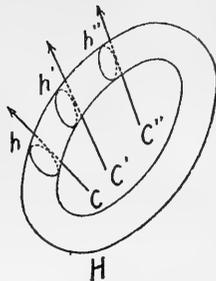


Figura 62 bis.

$$\int_L (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = -4\pi \int \int_S (ul + vm + wu) d\omega$$

en este grupo

$$\begin{aligned} -4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ -4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \\ -4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}$$

así podemos transformar las figuras 62 y 62 bis en la 63, que bien pudiera decirse que es un elemento de la figura 62 bis, y aun muchos autores, según antes decíamos, deducen directamente el último grupo de ecuaciones, tomando un rectángulo para cada plano coordenado.

Veamos qué interpretación le doy á la figura 63.

Como para el primer principio pasaba de la figura 60 á la 61, considerando, en esta última, cuatro cremalleras idea-

les que podían formar un cuadrado, y un rodillo en el centro, así paso de la figura 62 á la 63, imaginando cuatro rodillos ideales H, H' constituyendo un par diferencial, y H_1, H'_1 constituyendo, á su vez, otro segundo par, y en contacto con estos cuatro rodillos una barra C que simboliza una corriente central de sección cuadrada.

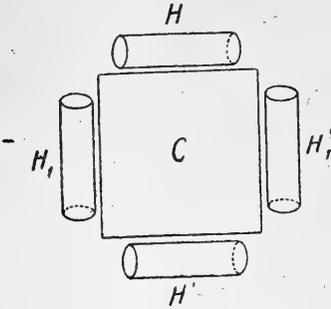


Figura 63.

Como los cuatro rodillos y la barra C supongo que están en contacto, los movimientos se transmiten, y los rodillos representan, en cierto modo, vectores magnéticos; aquellos tubos ó aquellos solenoides de que hablaba antes, cuya rotación finge el

movimiento de la electricidad en las corrientes h, h'

Al mismo tiempo, el avance de la barra C representa la corriente eléctrica, una de las C, C', C'' de la figura 62 bis.

Y así se comprende, ó mejor dijera, se ve, ó diré en términos más modestos, la imaginación cree ver, cómo el movimiento de los rodillos se corresponde con la corriente, y cómo están en relación el magnetismo y la electricidad: en la relación matemática que determinan las tres ecuaciones del segundo grupo. De suerte que siguiendo el mismo sistema de antes, yo designo en forma abreviada y simbólica cada una de dichas tres ecuaciones, ó aun mejor, la ecuación vectorial que la sustituye, de este modo extraño, pero gráfico: la fórmula de los cuatro rodillos ó de los dos laminadores diferenciales y de la barra central.

*
* *
*

Y no insistiré más sobre esta relación de imágenes puramente personales, y casi pudiera decir, de síntesis imagina-

tiva, mediante la cual, sin embargo, reduzco los dos tipos de ecuaciones fundamentales de la dinámica moderna á estas dos expresiones, que para mí, á fuerza de ser prosáicas y groseras, tienen relieve y aun claridad de máquina industrial.

Un rodillo entre cuatro cremalleras; las cremalleras representan corrientes, ó potenciales, ó vectores potenciales, todo esto no lo preciso, al menos en esta ocasión.

El rodillo central representa un vector magnético.

Esto en cuanto al primer principio.

En cuanto al segundo, una barra entre cuatro rodillos diferenciales.

Estos cuatro rodillos representan cuatro vectores magnéticos, y la barra una corriente de sección cuadrada.

*
* *
*

Estos símbolos, imágenes y representaciones gráficas, ó reglas geométricas, nemotécnicas, no tienen valor científico positivo, aunque, precisándolas de una ú otra manera, pudieran convertirse en una ú otra de las diversas hipótesis hoy más en boga de la ciencia moderna.

En el fondo no tengo la pretensión de dar como nuevas estas ideas; realmente están latiendo en todas las teorías, y aun dibujándose en ellas, ya en forma vaga, ya algunas veces en forma más precisa.

He dicho en muchas ocasiones que la escuela inglesa es aficionada, no sólo á estas representaciones geométricas, con cierto grado de simbolismo, sino á otras representaciones aún más materiales, de ruedas, cremalleras y engranajes, tomadas de la maquinaria industrial; y yo las creo racionales y convenientes, dándoles la significación que deben tener, porque nadie que esté en su cabal juicio ha de suponer en el éter, ó en un campo magnético, ó en un vector magnético ó eléctrico, esas ruedas ni esas cremalleras, que la imaginación finge, y que en una figura se representan.

Después de todo, los fenómenos del mundo material en el espacio y en el tiempo se desarrollan, y no es cosa tan desatinada el dar formas geométricas á tales fenómenos físicos.

Si la combinación de fórmulas abstractas puede conducir ó poner en camino de descubrimientos importantísimos, no ha de parecer extraño que las representaciones geométricas, por más singulares que á veces puedan parecer, conduzcan ó puedan poner en camino, ó sugerir la idea de fenómenos antes nunca observados.

Si expusiéramos aquí la teoría general del simbolismo desarrollando la que en otra ocasión hemos indicado, acaso demostraríamos plenamente, *à priori* y aun *à posteriori*, la exactitud indiscutible de la afirmación que precede.

Y es ya tiempo de concluir esta conferencia; porque hemos llegado al fin de este curso, cuyo resumen, según costumbre, me propongo hacer en el curso próximo.

Y voy á concluir modestamente, para que no me quede ningún escrúpulo de conciencia, con dos observaciones de detalle.

Es la primera, que en las últimas ecuaciones que hemos escrito, si se comparan con las de algunos autores, aparecen los signos cambiados. Pero esto depende únicamente de elegir en las demostraciones de las fórmulas uno ú otro sentido para la rotación directa.

La segunda observación tiene más importancia:

Hemos dicho que las ecuaciones de la Electro-dinámica moderna tienen como fundamento dos grupos de tres ecuaciones cada uno.

Y es evidente, según hemos explicado varias veces, que cada grupo de tres ecuaciones se puede sustituir por *una sola ecuación vectorial*.

De manera que dos ecuaciones vectoriales son las fundamentales, ó el tipo de las fundamentales en la Electro-dinámica moderna.

Pero, además, advertimos que había otras ecuaciones,

porque se introducían otras cantidades, y había que escribir las ecuaciones de las corrientes y las del vector potencial, por ejemplo.

Pero éstas eran nuevas ecuaciones, porque se introducían nuevas magnitudes; y aun sin contar con esto, á las dos ecuaciones que hemos llamado fundamentales, en rigor se agregan otras dos que representan la divergencia del vector eléctrico y la divergencia del vector magnético; más sobre este punto no podemos insistir.

Digamos, pues, para terminar, que la electro-dinámica moderna representa una inmensa labor, en la que ejercitan su genio grandes matemáticos y grandes físicos; y á la vez que éstos, con experiencias admirables, inesperadas y sorprendentes, pretenden penetrar en los misterios de la Naturaleza, aquéllos, á su vez, procuran crear nuevos, y en ocasiones extraños simbolismos matemáticos, que en más de una ocasión rivalizan en novedad y en ingenio, con el ingenio y la novedad de que la moderna experimentación hace alarde.

IX.—La nomenclatura de los instrumentos de observación.

POR E. SAAVEDRA.

Por su singular facilidad para formar palabras compuestas, sonoras y significativas, la lengua griega es fuente copiosa de donde se han derivado las muchas nuevas que ha exigido el creciente progreso de las ciencias. Nuestros antecesores, que no por ser sabios se creían autorizados para tener la cultura clásica abandonada, procedían con singular esmero en la elección y en el ajuste de los elementos helénicos, y además tenían buen cuidado de latinizar el nuevo vocablo antes de pasarlo á cualquier lengua vulgar. Mas en los tiempos modernos, no pocos escritores españoles han encontrado más cómodo entrar á saco en el vocabulario francés, sin levantar la vista un poco más arriba, y han embrollado sin reflexión la nomenclatura científica.

La ya muy variada y extensa de los instrumentos de observación es lo que hoy me da pie para estas indicaciones. De tiempo inmemorial se ha dicho, y se sigue diciendo, en España *microscopio* y *telescopio*, y cuando parecía obvio que sólo con acomodarse á este tipo tradicional se hubieran denominado los nuevos instrumentos *electroscopio*, *estereoscopio*, *estetoscopio*, etc., he aquí que por aulas y libros se difunde el empleo de las formas viciosas *electróscopo*, *estereóscopo*, *estetóscopo* y demás congéneres copiadas servilmente del francés.

Los que así han procedido no han tenido presente que esa lengua posee dos maneras de recta incorporación de las palabras latinas ó latinizadas. Es la una conservar al voca-

blo su rigurosa forma original, como sucede en *eucaliptus*, *evonymus*, *sodium*, *radium*; y la otra, verdadero patrón de la formación histórica del idioma, consiste en reemplazar con una sílaba muda todas las que siguen á la vocal tónica. Así, de la misma manera que de *Aristóteles* se ha hecho *Aristote*; de *microseopium*, se ha sacado *microscope* y *electroscope* de *electroscopium*; pero en español no hay más que una sola manera de efectuar la adaptación de tales voces, que es cambiar sencillamente en *o* el *us* ó *um* de la terminación. Por eso decimos *eucalinto*, *evónimo*, *sodio* y *radio*, y debemos decir *microscopio*, *electroscopio*, etc.

Engáñanse los que aducen el ejemplo de la castiza voz *horóscopo*, porque con ella no se designa un instrumento, sino una observación. Los griegos aplicaban la terminación *scopos* para nombrar la persona que observa, ó alguna vez, como en la presente, el resultado de la observación misma, y expresaban el medio ó instrumento propios para observar con la terminación *scopion* ó *scopeion*. Así, *horóscopos* significaba el astrólogo que observaba el estado del cielo á hora determinada y el aspecto del cielo á esa misma hora, al paso que llamaban *horoscopeion* al reloj que señalaba la hora. Decían *hydróscopos* al zahorí que investiga las aguas subterráneas é *hydroscopion* al instrumento propio para la investigación. *Teléscopos* se llamaba el que observa de lejos, y rectamente han forjado los modernos la palabra *telescopion*, en latín, *telescopium*, y en castellano, *telescopio*; por todo lo cual se ve que si fuera necesario dar un nombre al físico que estudia la electricidad se le llamaría *electróscopo*, y al médico que ausculta á un enfermo *estetóscopo*; pero nunca cabría aplicar tales nombres á los instrumentos de su uso respectivo.

X.—Perfeccionamiento de la alimentación albuminoidea.

POR JOSÉ R. CARRACIDO.

La digestión de los albuminoides es un proceso hidrolítico que se desarrolla en extensa serie de términos de sucesiva simplificación molecular, llegando en la digestión pancreática hasta la disgregación de los amino-ácidos.

El fin de esta proteolisis es proporcionar á la obra de la asimilación el medio de convertir los albuminoides de los alimentos en los albuminoides específicos, y quizá en los individuales del organismo que con ellos ha de nutrirse. Efectúase la conversión recombinando polipéptidos y amino-ácidos de las moléculas albuminoideas previamente disgregadas, pero no en la misma proporción en que están en las materias alimenticias, sino en la correspondiente á la de los albuminoides del organismo, cuyas pérdidas no pueden ser reparadas si no precede esta obra de asimilación.

Las investigaciones histológicas y fisiológicas, y el estudio de los cambios materiales en el período de ayuno, patentizaron la pequeña proporción en que se efectúan el desgaste y el reemplazo de los elementos organizados y, por consiguiente, de los principios albuminoideos. Ante estos datos de la observación biológica, unidos á los de la procedencia del caudal energético suministrado por la alimentación, aparece inexplicable que el organismo humano necesite diariamente, además de grasas y de carbohidratos, 110 gramos de materia albuminoidea.

¿Cuál será la causa de esta necesidad?

Para formar los mosaicos de las moléculas albuminoideas

peculiares al organismo humano, no pueden ser aprovechables todas las piezas de las moléculas de los albuminoides alimenticios, y las de éstos, que forzosamente tienen que ser desechadas explican la superfluidad á que antes se hace referencia.

Un caso concreto pondrá de manifiesto hasta dónde puede llegar la proporción de la parte desechable.

El ácido glutámico, según las investigaciones de Abderhalden, forma el 37,5 por 100 de la materia albuminoidea del trigo, pero sólo está contenido en la proporción de 8,9 por 100 en la mezcla de los tres albuminoides del plasma sanguíneo, de lo cual se infiere que en la reparación de la materia cedida por la sangre á los órganos, forzosamente habrá de ser desechado el 28,6 por 100 de la materia nitrogenada, ácido glutámico, correspondiente al pan ingerido.

La *ley del minimum*, cuya importancia se reconoció primero en agronomía, se consideró después extensiva á todo linaje de organismos, habiendo observado que la nutrición sólo es perfectamente normal en el caso de recibir todos los componentes de la materia que los constituye, aunque su proporción sea tan mínima como la del manganeso en los vegetales y la del fluor en los animales. Esta ley, como ya indicó M. Lambling, debe cumplirse también en el suministro de todos los amino-ácidos formadores de los albuminoides del cuerpo humano, y en multitud de casos su cumplimiento exigirá desechar enormes proporciones de materia nitrogenada para recoger la pequeñísima de un especial amino-ácido necesario para la formación de ciertos elementos organizados.

La conclusión que de las precedentes consideraciones se infiere, es: que de las materias albuminoideas que entran en la alimentación ordinaria del hombre, éste necesita la cantidad que haya de suministrarle la de todos los amino-ácidos indispensables para la formación de sus propios albuminoides, y la realización de este fin puede explicar la aparente

superfluidad de la materia nitrogenada ingerida respecto á la asimilada.

De todo lo precedente también se infiere, que la ración alimenticia nitrogenada puede ser tanto menor, cuanto más semejantes sean en su constitución química los albuminoides ingeridos á los del organismo que con ellos ha de nutrirse, llegando lógicamente á la brutal conclusión de que la alimentación nitrogenada más económica para el hombre, desde el punto de vista fisiológico, es la antropofagia, y la verdaderamente ideal la autofagia, como lo patentiza la gran disminución del nitrógeno excretado en período de inanimación.

El organismo que se alimenta con albuminoides muy desemejantes á los suyos, no sólo tiene la molestia de la superfluidad antes indicada, sino el peligro de una autointoxicación mayor ó menor, según la cantidad y la calidad de los amino-ácidos disgregados, y de las condiciones del organismo para preparar su eliminación, oxidándolos previamente.

¿Cómo se evitan estos daños, obteniendo al mismo tiempo la economía máxima en la alimentación albuminoidea?

La completa y exacta disección de las moléculas de los alimentos proteicos, está todavía muy atrasada para fijar la proporción de cada uno de los amino-ácidos que constituyen los albuminoides del organismo, y la formación artificial de los polipéptidos está aún más atrasada para poder fabricar los que sin exceso ni defecto hubiesen de satisfacer las exigencias de la nutrición; y es muy probable, por no decir seguro, que por mucho que adelante la industria de los polipéptidos nunca podrá llegar á producir los alimenticios en condiciones económicas aceptables.

Desechada por irrealizable la alimentación con polipéptidos de formación artificial, sólo conceptúo racional y práctico el siguiente procedimiento:

Mezclar diferentes albuminoides naturales, ó las materias alimenticias que los contienen, de modo que las proporciones

totales de sus amino-ácidos sean las mismas que las que integran los albuminoides del organismo.

Para aplicar este procedimiento al caso de la alimentación humana, creo que puede considerarse como denominador común de la constitución albuminoidea del organismo la de los tres albuminoides del plasma sanguíneo, seroalbúmina, seroglobulina y fibrinógeno.

La constitución media de éstos, según resulta de los datos de Abderhalden, es la siguiente, expresada en proporciones centesimales:

Glicocola.....	2,16
Alanina.....	2,80
Leucina.....	17,90
α -Prolina.....	2,50
Fenilalanina.....	3,10
Acido glutámico.....	8,90
Idem aspártico.....	2,50
Cistina.....	1,50
Serina.....	0,70
Tirosina.....	2,70
	<hr/>
	44,76

Como se ve, resta todavía por determinar el 55,24 por 100 de los factores integrantes de las proteínas del plasma sanguíneo humano; pero poniendo en cotejo lo conocido con lo igualmente conocido de varios albuminoides alimenticios (de todos los hasta hoy disecados por el escalpelo de las acciones hidrolíticas), aparecen muy notables diferencias cuantitativas de composición reveladas por el citado Abderhalden en el cuadro siguiente:

	Clara de huevo.	Gliadina.	Zeina.	Legúmina.
Glicocola.....	0	0,9	»	1,0
Alanina.....	8,1	2,7	0,5	2,8
Leucina.....	7,1	6,0	11,2	8,2
α -Prolina.....	2,25	2,4	1,5	2,3
Fenilalanina.....	4,4	2,6	7,0	2,0

	Clara de huevo.	Glutina.	Zelna.	Legúmina.
Acido glutámico.	8,0	37,5	11,8	16,3
Idem aspártico.	1,5	1,3	1,0	4,0
Cistina.	0,2	»	»	»
Serina.	»	0,12	»	»
Tirosina.	1,1	2,4	10,1	2,8

Y aun en el caso de ser uno mismo el albuminoide, y sólo diferente la procedencia, es también muy apreciable la diferencia de composición, como se ve en las dos caseínas siguientes:

	CASEINA de leche de vacas.	CASEINA de leche de cabras.
Glicocola.	0	0
Alanina.	0,9	1,5
Leucina.	10,5	7,4
α-Prolina.	3,1	4,6
Fenilalanina.	3,2	2,75
Acido glutámico.	11,0	12,00
Idem aspártico.	1,2	1,2
Cistina.	0,065	»
Serina.	0,23	»
Tirosina.	4,50	4,95

Resulta de los datos precedentes que un individuo, cuya alimentación albuminoidea, fuese exclusivamente la clara de huevo, recibiría un exceso de alanina y carecería en absoluto de glicocola para la reparación de su plasma sanguíneo. El sometido á régimen lácteo, tampoco recibe glicocola, pero ingiere proporciones excesivas de ácido glutámico y de tirosina.

Una materia albuminoidea que por su constitución difiere considerablemente de la generalidad de las contenidas en las materias alimenticias es la gelatina, la cual, por la gran proporción de glicocola y la carencia de tirosina puede ser utilizada para compensar deficiencias y excesos de las anteriores

de dichos amino-ácidos. Su constitución, según Abderhal-
den, es la siguiente:

	Gela- tina.
Glicocola	16,5
Alanina	0,8
Leucina	2,1
α . Prolina	5,2
Fenilalanina	0,4
Ácido glutámico	0,88
Idem aspártico	0,56
Cistina	»
Serina	0,4
Tirosina	0,0

Podrá decirse, que siendo la glicocola el más sencillo de los amino-ácidos, no es necesario que como factor preformado la contengan los alimentos, porque el organismo podrá producirla por la simplificación de los amino-ácidos más complejos; pero precisamente el problema propuesto, y cuya solución se persigue, es reducir al mínimum el trabajo digestivo de la transformación de los albuminoides alimenticios, y ante este propósito, los albuminoides requeridos deben ser los que contengan preformados todos los amino-ácidos necesarios para la nutrición, formando con su conjunto una suma constituida cualitativa y cuantitativamente por los mismos sumandos que integran las proteínas del plasma sanguíneo.

De lo precedentemente expuesto se deduce la posibilidad de formar multitud de asociaciones de materias alimenticias cuyos albuminoides, en conjunto, contengan sin exceso ni defecto, todos los amino-ácidos necesarios para la perfecta nutrición del organismo, nutrición exenta del daño de la autointoxicación producida por la dificultad de eliminar la parte superflua de los alimentos nitrogenados cuya constitución es desemejante de la materia con que el plasma sanguíneo ha de contribuir á la reparación de los órganos.

Cuando sea perfectamente conocida la estructura química

de todas las materias protéicas capaces de ser utilizadas como alimentos, podrán formarse, variando sus mezclas, innumerables *menús* que satisfagan juntamente las exigencias del paladar y las de la economía fisiológica, dando al organismo sólo lo necesario para su nutrición y liberándolo del *surmenage* de transformar en urea la proporción excesiva de los amino-ácidos que hoy ingerimos en nuestra alimentación. Es probable que la mayor facilidad con que se digiere y asimila una comida variada que la constituida por una sola materia alimenticia, tenga por causa la aproximación resultante de la mezcla á la constitución química de las proteínas del organismo.

Conclusiones:

1.^a Debe excitarse á los cultivadores de la Química biológica, á que amplien y completen el estudio de la constitución química de las materias albuminoideas capaces de ser utilizadas como alimentos, é igualmente el de las materias albuminoideas del organismo.

2.^a Debe empezarse, y ser continuada con la mayor variedad posible, la formación de grupos de materias albuminoideas, de tal modo, que las proporciones de los amino-ácidos en cada uno de ellos, sean aproximadamente iguales á las de las proteínas del plasma sanguíneo.

XI.—Los métodos indirectos de la Química analítica.

POR JUAN FAGES VIRGILI.

(Continuación) (*).

IV

DISCUSIÓN GENERAL Y COMPARATIVA DE LOS MÉTODOS INDIRECTOS

La determinación experimental de P y P' , en cada método, se practica esencialmente de igual manera que si fuera uno sólo el cuerpo que posee la propiedad medida. Lo mismo se opera la medición de la rotación óptica, que produce una solución de sacarosa, exenta de otros cuerpos ópticamente activos, que si además tiene dextrosa. Lo mismo, esencialmente, se hace para aislar y pesar el cloruro sódico ó el cloruro potásico de una disolución compleja, que para aislar y pesar simultáneamente ambos cloruros; lo mismo se miden la contracción y el CO_2 resultantes de la combustión de una mezcla de formeno y de óxido de carbono, que las de uno sólo de estos dos gases.

Esta igualdad experimental de los métodos directos y los indirectos equivalentes, explica, tal vez, los nullos ó escasos comentarios á los últimos, ó ser referentes, solamente, á su parte experimental.

Concibe un autor un nuevo método indirecto, y si su fundamento teórico es exacto, si dispone de constantes K y K' conocidas y si es posible, experimentalmente, determinar en

(*) Véase esta REVISTA, pág. 83.

cada caso P y P' con la exactitud que en los métodos directos, se da por satisfecho, pues, sin más consideraciones, publica el método como útil y, acaso, como más ventajoso que los métodos directos propuestos para el mismo problema. La estructura matemática de las fórmulas que le permiten deducir á x é y de los valores P y P' , no le impresiona, le basta que exista fórmula, sin notar lo que modifica, casi siempre perjudicialmente, el error experimental de P y P' al transportarlo á x é y (*).

Difieren precisamente los métodos directos de los indirectos, en que el error experimental de aquéllos *sin modificación*, es el error definitivo del método; en éstos, el error experimental se *modifica* necesariamente por el cálculo que conduce á la deducción de x é y . Esta modificación es muy variable, con frecuencia aumentativa, acaso en gran proporción, y el valor de la modificación es lo que distingue los distintos métodos indirectos respecto á su utilidad.

Las expresiones finales de x é y , en todos los métodos indirectos, hemos visto que eran:

$$x = \frac{1}{K - K'} P' - \frac{K'}{K - K'} P$$
$$y = \frac{K}{K - K'} P - \frac{1}{K - K'} P'$$

(*) Entre otros ejemplos posibles cito, por ser reciente, la Nota del Dr. Ath. J. Sofianopoulos, de Atenas, (Ann. de Chi. Analy. 1909-405) proponiendo varios métodos indirectos, que supone nuevos. El autor plantea bien las ecuaciones, deduce las fórmulas para cada método, discute matemáticamente la posible indeterminación del sistema, se preocupa de la exactitud experimental de P y P' , pero no comenta, ni los valores constantes K y K' , ni los absolutos P y P' , ni distingue comparativamente sus propios métodos, que juzga iguales, ni deduce los grandes errores de x é y , á poco inexactos que sean P y P' .

Es indiscutible que si P y P' son *rigurosamente* exactos, lo serán x é y ; pero el químico no debe confiar en tal posibilidad eventual, ni considerar *matemáticamente* exactos valores de P y P' , aunque analíticamente sean muy aceptables en los métodos directos.

Supuestos inexactos P y P' , sean Q y Q' , los valores verdaderos correspondientes, y será

$$P = Q \pm p \quad P' = Q' \pm p',$$

siendo p y p' el error concreto de P y P' , (*). Los valores verdaderos de x é y , serían

$$x' = \frac{1}{K-K'} Q' - \frac{K'}{K-K'} Q;$$

$$y' = \frac{K}{K-K'} Q - \frac{1}{K-K'} Q'.$$

Restando miembro á miembro cada una de estas igualdades de su correspondiente anterior, y sustituyendo en éstas P y P' por sus valores, será:

$$x - x' = \frac{1}{K-K'} (\pm p') - \frac{K'}{K-K'} (\pm p)$$

$$y - y' = \frac{K}{K-K'} (\pm p) - \frac{1}{K-K'} (\pm p') \quad [1]$$

(*) Siendo muy variable el modo de expresar los errores analíticos, se advierte que en este escrito se llamará *error concreto* á la diferencia $P - Q$, positiva ó negativa, entre la magnitud encontrada experimentalmente y la verdadera, expresada en unidades de la misma naturaleza que P y Q ; y *error relativo* á la razón abstracta $\frac{p}{Q}$ entre el error concreto y el valor verdadero de la magnitud. Así, el peso verdadero, Q , de un cuerpo, es 0,200 gr., si experimentalmente se ha encontrado 0,201 gr. el *error concreto*, será $p = 0,201$ gr. — 0,200 gr. = 0,001 gr., y el *error relativo* $\frac{p}{Q} = \frac{0,001}{0,200} = 0,005$.

ó sea el error concreto de cada incógnita.

$$\text{Si } \frac{1}{K-K'} p' = \frac{K'}{K-K'} p, \text{ en valor y signo, } x - x'$$

$= 0$, y, por lo tanto, $x = x'$: será, pues, exacto x , é inexacto y , pues

$$y = P - x' = Q \pm p - x' = (Q - x') \pm p = y' \pm p.$$

$$\text{Inversamente, puede, por ser } \frac{K}{K-K'} p = \frac{1}{K-K'} p',$$

en valor y signo, resultar exacto y é inexacto x . A tal exactitud de una de las incógnitas, y relativa exactitud de la otra, puede llegarse en la práctica, pero también casualmente, y, por lo tanto, el químico obrará prudentemente no confiando en tan precisa compensación, tanto más cuanto, también la casualidad, puede conducirlo á la misma igualdad de valores, pero con signo contrario, y entonces los errores concretos de P y P' , multiplicados cada uno por su coeficiente, y sumados después, constituyen el error concreto de x ó y , posiblemente muy grande.

Si $\frac{1}{K-K'} p' > \frac{K'}{K-K'} p$, siendo p y p' del mismo signo, habrá una compensación parcial del error de cada valor experimental, y el de x será tanto menor cuanto mayor sea esta compensación. En estas compensaciones parciales puede confiar el químico para motivarlas, pero con suma discreción. Así, hay mediciones analíticas experimentales, en las que se sabe *à priori*, que hay error y su signo, á igual cuidado del analista: pues bien, estas mediciones no deben utilizarse para métodos indirectos, pues el valor del error no se conoce, ó solo aproximadamente, y aunque haya compensación parcial, es muy probable que el error restante se haga muy grande con el cálculo. En cambio, los métodos acreditados por lo exactos, son preferibles, aunque se

ignore el sentido del error, que si bien puede ser positivo ó negativo, es siempre muy pequeño trabajando bien.

Careciendo de base experimental para discutir matemáticamente la compensación de errores, es preferible para la discusión de los métodos indirectos y deducir su valor comparativo, el convencionalismo de suponer que el valor P se ha determinado experimentalmente en todos ellos, con rigurosa exactitud, y erróneamente el P' , supuesto que representa con bastante aproximación el término medio de las contingencias de la práctica; pues si con él se prescinde del favorable caso de las compensaciones, también se prescinde del caso de acumulación de errores.

Aceptada esta hipótesis, el error concreto de x é y lo dan las expresiones:

$$[1] \quad x - x' = \pm \frac{1}{K - K'} p'; \quad y - y' = \mp \frac{1}{K - K'} p',$$

que sólo difieren en el signo.

No siendo $p' = 0$, x é y serán más ó menos erróneos: para que lo sean poco, importa que los dos factores de este producto sean pequeños. Consideremos primero el

Coficiente. — Supongamos constante, por ahora, á p' : será condición de exactitud que $\frac{1}{K - K'}$ sea pequeño: en consecuencia, *en los métodos indirectos, la exactitud á igualdad de otras condiciones, está en razón inversa del coeficiente del valor experimental P' .* Si dicho coeficiente es igual á la unidad, el error experimental p' , afecta, sin variación, pero íntegro, á x é y : si es mayor, les afecta crecido; si menor que uno, disminuído. Cabe concluir que *los métodos indirectos en que el coeficiente de P' es mayor que la unidad son inadmisibles*, por ser siempre ó en determinados casos muy erróneos. La inversa no es siempre cierta. Dedúcese que la mayoría de ejemplos de métodos indirectos indicados son inaceptables.

Para que sea pequeño el coeficiente, es condición que $K - K'$ sea grande. Pero

$$K - K' = \frac{x \pm n}{x} - \frac{y \pm n'}{y} = \frac{\pm n}{x} - \frac{\pm n'}{y};$$

luego la condición será que para $x = y$, $n - n'$, sea lo más grande posible: n y n' expresan las diferencias entre las dos magnitudes medidas de cada cuerpo, dependientes de la transformación experimental determinada en la primera magnitud de cada uno, ó de las dos propiedades elegidas para la medición colectiva. En consecuencia: *la exactitud será mayor, á igualdad de demás condiciones, cuando la acción experimental del método, que precede á la medición de P' , afecte de un modo cuantitativo más desigual en los dos cuerpos, ó cuando sean más desiguales las diferencias de las dos propiedades medidas.*

Por esta conclusión, el método **A** es peor que el **B** y ambos que el **C**, correspondientes los tres al mismo problema (pág. 103). En efecto, supuesto en los tres $x = y = 1$: resulta:

$$\text{en } \mathbf{A}, n - n' = (1,215 - 1) - (1,1686 - 1) = 0,0464$$

$$\text{en } \mathbf{B}, n - n' = (0,7188 - 1) - (0,7794 - 1) = -0,0606$$

$$\text{en } \mathbf{C}, n - n' = 0,5289.$$

El método **N** (pág. 114), á primera vista, parece mejor que el $\tilde{\mathbf{N}}$, pues la transformación experimental en **N** conduce á dos moléculas de ácido acético, y sólo á una en $\tilde{\mathbf{N}}$, por cada molécula de anhídrido presente, siendo nula en ambos métodos la variación del ácido acético primitivo (y). Pero no es así; lo real es que en **N**, n , es positivo y en $\tilde{\mathbf{N}}$, n es negativo y resulta

$$0,17655 - 0 < 0,41173 - 0:$$

$\begin{matrix} +n & & n' & & -n & & n' \end{matrix}$

por esto, *teóricamente*, es mejor método $\tilde{\mathbf{N}}$ que **N**, si bien

en la práctica es lo contrario, porque el valor P' experimental es mucho más exacto en **N** que en $\tilde{\mathbf{N}}$.

En el método **O**, (pág. 115) $n - n'$ es tan grande que motiva que $K - K' > 1$, y, por lo tanto, el coeficiente de $P' < 1$. Por este solo hecho, aventaja este método á todos los anteriores, siendo uno de los pocos métodos indirectos aceptables, y muy en uso. El método **P** es todavía tolerable, pero no tanto como el **O**, por ser algo mayor que la unidad el coeficiente de P' . El método **Q**, es teóricamente igual al **P**, pero en la práctica es muy inferior por ser más erróneos los valores experimentales.

El método **R**, (pág. 119) juzgado por el coeficiente de P' es muy aceptable: en la práctica no lo es tanto, como todos los de análisis de gases, por la mayor dificultad para obtener valores suficientemente exactos de P y P' . Los métodos **S** y **T** son peores, por ser mayores los coeficientes respectivos.

En el método **U**, (pág. 125) el gran valor de $n - n'$ origina un coeficiente de P' muy pequeño. La práctica no corresponde á tan favorable condición, pues además de otros factores, el valor experimental P , que en la discusión supongo exacto, suele ser muy erróneo, por dificultades técnicas y por acompañar casi siempre sulfato al sulfito.

El método **V** tiene también el coeficiente de P' muy aceptable; pero como en el método anterior, es muy difícil tener un valor medianamente exacto de P , por la posible y aun probable presencia de materias orgánicas extrañas á las incógnitas.

Los tres métodos **D**, **F**, y **G** (pág. 105), son iguales por el procedimiento químico, pero diferentes por los cuerpos á que se aplica. En los tres, n y n' expresan la diferencia entre el cloro y un cloruro; así en **D**

$$n - n' = (\text{Cl Na} - \text{Cl}) - (\text{Cl K} - \text{Cl}) = \text{Na} - \text{K}.$$

En consecuencia, $n - n'$ será mayor cuando más difieran los pesos atómicos de los metales en los dos cloruros; por esto es mejor procedimiento el **F** que los otros dos. Por

igual razón el método **I** es más exacto aplicado á mezclas de carbonato cálcico y carbonato bórico, porque $Ba - Ca > Sr - Ca$. Asimismo, el método **K** es inferior al **L**, porque $I - Cl > Br - Cl$. Estos hechos son generalizables, no sólo á estos métodos, químicamente análogos, sino á todos los que se fundan en el cambio ó sustitución de unos iones por otros, ó en relaciones dependientes de las combinaciones iónicas. Así, pues, *son tanto más exactos los métodos indirectos de esta clase cuanto más difieran los pesos atómicos ó moleculares de los dos cuerpos á que se aplican.*

En los gases, supuesto que se base el método en la contracción y en la medición del CO_2 , puede extenderse el principio aceptando, que *la exactitud es mayor cuanto más difieran en átomos de carbono los dos gases á igual contracción.*

Es frecuente en la práctica que resulte $n - n'$ mayor si n ó $n' = 0$, ó si son los dos valores de diferente signo. Se han dado varios ejemplos de lo primero; de lo segundo, que es muy raro, sólo el método **R**. Esto explica que el método **LI** sea inferior á **K** á pesar de que $I - Br > Br - Cl$. Puede, pues, decirse, que *es probable que la exactitud será mayor en los métodos en que la acción experimental que precede á la medición de P' sólo afecte á uno de los dos cuerpos ó á los dos, pero en sentido opuesto.*

Como es más fácil que $n - n'$ sea grande, siéndolo separadamente n y n' , es natural suponer que una acción experimental que modifique mucho á x é y , conduzca á valores más exactos que otra acción que modifique menos. La suposición puede resultar cierta, pero conviene indicar los graves errores á que también puede conducir.

Compárense los métodos **C** y **D**, que parten de cuerpos iguales y llegan á cloruro argéntico el **C** y á cloro el **D**. Como el cloruro argéntico pesará más que el cloro (para los mismos valores de x é y), cabe pensar que en **C** sea $n - n'$ mayor que en **D**, para el caso de $x = y$, y en consecuencia me-

nores los coeficientes y mayor la exactitud en **C** que en **D**.
Sea $m = x = y$, la cantidad de cada cloruro alcalino de que se parte en los dos métodos.

En el método **C**, será (*):

$$\frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl Na}} m + \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl K}} m = P_c' \text{ gr. de cloruro argéntico obtenido;}$$

$$n = \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl Na}} m - m; \quad n' = \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl K}} m - m;$$

$$n - n' = \left(\frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl Na}} - \frac{\text{Cl Ag}}{\text{Cl K}} \right) m = \left(\frac{\text{Cl}}{\text{Cl Na}} - \frac{\text{Cl}}{\text{Cl K}} \right) m + \left(\frac{\text{Ag}}{\text{Cl Na}} - \frac{\text{Ag}}{\text{Cl K}} \right) m.$$

En el método **D**, será:

$$\frac{\text{Cl}}{\text{Cl Na}} m + \frac{\text{Cl}}{\text{Cl K}} m = P_d' \text{ gr. de cloro;}$$

$$n = \frac{\text{Cl}}{\text{Cl Na}} m - m; \quad n' = \frac{\text{Cl}}{\text{Cl K}} m - m;$$

$$n - n' = \left(\frac{\text{Cl}}{\text{Cl Na}} - \frac{\text{Cl}}{\text{Cl K}} \right) m.$$

Resulta, en efecto, que $n - n'$ es menor en **D** que en **C**, y según la discusión de su significación debe ser el coeficiente de P' menor en **C**, y así es. Sin embargo, he afirmado en **D**, que su precisión, á igualdad de condiciones, era idéntica á la del método **C**. Esta contradicción, con lo antes afirmado, se explica notando que los dos métodos tienen una ecuación común que da el mismo valor P en cada caso, y otra ecuación químicamente diferente en **C** que en **D**, pero matemáticamente equivalentes. Multiplicando todos los términos de

(*) Entiéndase en esta sencilla discusión, que las fórmulas químicas tienen el valor numérico que corresponde á los pesos atómicos de los símbolos que comprendan.

la segunda ecuación de **D** por la razón conocida $\frac{\text{Cl} + \text{Ag}}{\text{Cl}}$ se obtiene la segunda ecuación de **C**.

$$\left(\frac{\text{Cl}}{\text{ClNa}} m + \frac{\text{Cl}}{\text{ClK}} m \right) \frac{\text{Cl} + \text{Ag}}{\text{Cl}} = \frac{\text{ClAg}}{\text{ClNa}} m + \frac{\text{ClAg}}{\text{ClK}} m = P'_c$$

no sólo en el supuesto de $x = y = m$, sino para todos los valores posibles de x é y .

No es, pues, necesario determinar experimentalmente una de las P' , conociendo la otra: basta calcularla, y como, según la ley de los equivalentes químicos, podemos pasar, por el cálculo, del peso de un cuerpo al de otro, cuyo peso molecular conocido puede ser todo lo grande que queramos, sin necesidad de hacer la transformación experimentalmente, ni aun fijarnos en si en la práctica es posible, podríamos, puestos en esta pendiente en los casos en que P' represente un sólo cuerpo, hasta inventar el cuerpo de peso molecular grande, p. e. mil veces ó más, mayor que el del pesado, y con sólo en las expresiones de x é y correr la coma tres ó más lugares á la izquierda en el coeficiente, y otros tantos á la derecha, en el valor P' , sin alterar P ni su coeficiente (*), podríamos, digo, lograr expresiones de las incógnitas con coeficientes todo lo pequeños que nos conviniera para P' , aumentando indefinidamente la exactitud de un método.

Claramente, la conclusión es absurda, matemáticamente, pues x é y , resultarán siempre con idénticos valores. El químico, sin embargo, tiene derecho á preguntar: ¿ocurrirá lo mismo si en lugar de *calcularlas* se miden *experimentalmente* las P' , correspondientes á cuerpos distintos, de valor numérico creciente según estas razones conocidas que permitan

(*) Esta constancia del coeficiente de P permite conocer si dos métodos, químicamente diferentes, con la primera ecuación igual, son iguales: el método **C** tiene para P , el mismo coeficiente que el **D**. Las pequeñas diferencias son de aproximación en los cálculos.

calcularlas en conociendo la primera? Es decir, que si así como en la expresión $Q' \pm p' = P'$ al multiplicarla por m es cierto que Q' , p' , y, por lo tanto, P' quedarán multiplicadas por m , puede, por el contrario, ocurrir experimentalmente que al hacer á Q' m veces mayor, no se modifique el error p' y resulte $mQ' + p' = m'P'$, siendo $m > m'$, ó al menos que p' se multiplique por un factor menor que m , en cuyos casos era segura la ventaja de que P' fuera grande. También se puede preguntar si de dos métodos, como **A** y **B**, no equivalentes matemáticamente, pero con la primera ecuación igual, será más exacto el de valor mayor de P' determinado experimentalmente, ya que no es posible por el cálculo.

Se contesta á la primera pregunta, que á igualdad de precisión en la determinación de P' en diferentes métodos, será indiferente adoptar uno ú otro, por mucho que difiera la magnitud de P' en ellos. Si la precisión experimental directa supera en uno á la de otro método matemáticamente equivalente, aquél será el preferible, aunque conduzca á coeficientes mayores. Esta es la aplicación práctica de la existencia de métodos químicamente diferentes y algebraicamente equivalentes: permitir elegir el experimentalmente más exacto, lo mismo que en los métodos directos.

Se contesta á la segunda pregunta que la exactitud de x é y depende, en todo caso, no sólo de las magnitudes del coeficiente, sino de la de P' , y, por lo tanto, de dos métodos, será el mejor el que para el mismo valor de x é y á igual precisión experimental origine un producto $\frac{1}{K-K'} P'$, menor, porque en las expresiones del error

$$x - x' = \pm \frac{1}{K-K'} p', \quad y - y' = \mp \frac{1}{K-K'} p',$$

p' es función de P' .

Valores experimentales.—La causa de las contestaciones que preceden es un principio ó regla que no tiene, ni remotamente, la significación de una ley, pues es sólo aproximado y no abarca todos los casos; pero es necesario admitirle en análisis, como se admite en otras mediciones experimentales. *La exactitud de la medición analítica es independiente, dentro de ciertos límites, del valor absoluto de la magnitud medida.* Si se mide la proporción de yodo-ion de una disolución pesando yoduro argéntico, se obtiene la misma precisión, ó igual *error relativo*, si la operación conduce á pesar un gramo de yoduro argéntico, que á dos gramos, ó que á dos decigramos ó á uno.

La necesidad de aceptar este principio en análisis es evidente; de lo contrario, los resultados de varios análisis del mismo cuerpo no serían comparables, ni podrían confirmarse sino repitiéndolos con idéntica porción, ni deducir cuál era el exacto de dos resultados correspondientes á porciones diferentes del problema.

Admitimos, pues, en principio que $\frac{p}{Q} = C$, siendo p , el error concreto cometido al medir la magnitud Q , y C la constante de precisión ó el error relativo del análisis. Aunque á C la llamo *constante*, es lo cierto que no lo es sino muy relativamente, aun dentro de los *ciertos límites* que en la regla se dijo. Por el atraso del análisis varía mucho con los cuerpos que se miden y con los métodos ideados para medirlos; pero aun así, hay que admitir la constancia, en especial en los métodos indirectos, pues las mediciones experimentales en que C supere al valor corriente ó sea de invencible inconstancia, no pueden emplearse para tal clase de métodos, pues darían resultados muy erróneos y muy variables. Debe, pues, aceptarse el principio sentado, no sólo para magnitudes distintas correspondientes á un mismo cuerpo y método, sino para métodos distintos, aceptables, de medición del mismo cuerpo, no siendo de técnica fundamentalmente diferente.

Si dentro de los *ciertos límites* debe admitirse la constancia de C , fuera de ellos sería grave error aceptarla. En las mediciones analíticas, el error relativo es la resultante de numerosísimos errores concretos, de existencia conocida unos, ignorada otros, y de valor individual casi siempre desconocido. De ellos varían unos proporcionalmente con la magnitud medida, otros son constantes: aquéllos tienden á dar el valor $\frac{p}{Q} = \text{constante}$; éstos á modificarlo, y lo modifican de hecho, acentuándose la modificación cuando la magnitud medida disminuye, pues ésta decrece más rápidamente que la resultante de los errores concretos, aumentando por tanto el error relativo cada vez más y más rápidamente, y pudiendo llegar á un valor muy grande, aun en métodos en los que, dentro de los *ciertos límites*, los errores son despreciables.

Claro es que los tales límites tan citados, no son fronteras definidas ni invariables. El analista debe conocerlos con aproximación en cada método, pues de éste, más que del cuerpo á que se aplican, dependen. Así, en los métodos gravimétricos se llega bastante pronto al límite inferior: en los colorimétricos suelen ser límites superiores los inferiores de la gravimetría. Por esto las colorimetrías, cuando son posibles, son preciosos métodos continuadores de los gravimétricos al rebasar éstos sus límites de precisión constante.

De la admisión de la constancia de la razón $\frac{p'}{Q'} = C$, resulta que $p' = Q' C$, y sustituyendo este valor de p' , en las expresiones del error concreto que afecta á x ó y [1], será

$$x - x' = \frac{1}{K - K'} Q' C, \quad y - y' = \frac{1}{K - K'} Q' C$$

que nos dice que el *error teórico concreto á cada incógnita es proporcional á la magnitud colectiva medida experimental-*

*mente. Así se explica la inutilidad de aumentar la diferencia $n - n'$, para conseguir coeficientes pequeños, si es á costa de un aumento proporcional de P' , y que, supuesto que no exista esta proporcionalidad, ni aun el aumento, resulte que el error concreto de x é *y* es función del producto de P' por su coeficiente, y no del coeficiente sólo, como se cree frecuentemente.*

Para que P' sea pequeño, ya que importa que lo sea, es menester que, en la segunda ecuación de todo método,

$$(x \pm n) + (y \pm n') = P'$$

sean n y n' negativos y grandes, ó de ser positivos, al menos que sean pequeños, ó uno igual cero.

Conviene evitar dos errores á que este criterio puede conducir. El primero, igual y recíproco del señalado al discutir el coeficiente, es la posibilidad de que la transformación experimental elegida para que P' sea pequeño, conduzca á una diferencia $n - n'$ pequeña que aumente el coeficiente en la misma proporción que disminuye P' . El otro es que se exagere demasiado la pequeñez de P' , sacándola de los límites de constancia del error relativo, y lo que se gane por ser pequeño el dato experimental, se pierda por agrandarse su inexactitud. En el método **O**, puede resultar un valor $\pm P'$ muy pequeño, y aun cero, si acompañan á la sacarosa cuerpos dextrogiros; ó muy pequeño, y aun cero, el valor $-P$, si hay proporción suficiente de levogiros. En ambos casos se salen P y P' de los límites tolerables al principio de la constancia del error, y siendo probablemente muy grande éste, resultan, á pesar de ser pequeños P' y su coeficiente, valores muy inexactos para x . Por esta razón debe ser que *Baumann*, prescinde en el método **O** (mezcla de sacarosa, rafinosa y azúcar invertido) de la medición de la rotación directa.

Efecto de ser el error concreto de x proporcional á la mag-

nitid P' , son los métodos por diferencia francamente indirectos y están expuestos como tales á los errores de éstos, á pesar de ser la unidad el coeficiente de P' , y en grado variable, según este valor. Si P' es grande, $x = P - P'$ podrá ser muy erróneo; por esto no pueden merecer confianza los métodos por diferencia cuando se aplican á valores pequeños de x , si se deducen de una diferencia $P - P'$ en que P y P' son grandes y no es la principal causa del error grande el que x sea pequeño, sino el que no lo sean simultáneamente los valores experimentales de donde se deduce (*). En cambio, si x es grande, por serlo la diferencia $P - P'$, que supone forzosamente pequeño á P' , puede ser x , no solo muy aceptable, sino que en el supuesto de estar P rigurosamente determinado, puede ser x más exacto que determinado directamente, aun siendo P' muy inexacto. Este interesante caso, en aparente contradicción con la escasa precisión de las mediciones indirectas, se presenta muy á menudo y no siempre se aconseja bien su resolución.

Sea, en efecto, una especie química, N , con 0,5 por 100 de impurezas. Supuesto que por pesada directa se mida una porción, P , de tal especie impura y se determine *directamente* el contenido real en ella de N , no será gran inexactitud, para muchos casos, el cometer un error experimental relativo = + 0,005; en consecuencia aparecerá que dicha especie química es purísima, pues referido el análisis á 100 partes resultará con 100 de dicha especie. Midamos en cambio, *directamente*, toda la impureza, así sea con el enorme error experimental relativo = + 0,20; referido el análisis á 100 partes, resultará con 0,60 por 100 de impurezas, y, *por diferencia*, con $100 - 0,60 = 99,4$ por 100 de la especie química, valor mucho más exacto que el obtenido por método di-

(*) Por esto en las tan practicadas volumetrías por diferencia conviene que sea pequeño el exceso de reactivo añadido, cuya medición directa (P') se hace luego.

recto. Este método por diferencia debe preferirse en casos como el citado, siempre que se pueda medir P por pesada directa y que P' (las impurezas) sea determinable colectivamente, ó de exigir mediciones individuales, que sean en número poco crecido y por procedimientos sencillos y reconocidamente exactos. Claro es que á medida que aumente el valor P' , va siendo menos aplicable el método por diferencia como preferente.

En los métodos indirectos **A**, **B**, **C**, la relación de los coeficientes de P' es próximamente 11,3 : 8,6 : 1. No es, sin embargo, la relación inversa de ésta la de la precisión de cada método, pues para el mismo valor de P , la relación respectiva de los valores de P' (en el caso más desfavorable) es 1,49 : 1 : 2,4. La medida aproximada de la precisión relativa de los tres métodos, la dará la razón inversa entre los productos de cada coeficiente por su P' respectivo, que es, aproximadamente, como 7,0 : 3,6 : 1. Es, pues, teóricamente, el más exacto el **C**, é inferiores los otros dos, aunque no tanto como aparece, de la exclusiva consideración de los coeficientes.

El método **I** tiene el coeficiente de P' mayor que el **J**: sin embargo, el error teórico de éste es mayor. La razón es que en **I**, son negativos n y n' , y en **J** positivos, y, por lo tanto, á igual valor de P , es P' menor en **I**.

El método **L**, es relativamente exacto, porque $n = 0$ y n' negativo: lo primero, facilita que el coeficiente sea pequeño, y ambos hechos, el que $P' < P$, y, por tanto, menor el error concreto p' , de P' .

Los métodos polarimétricos requieren una técnica, en parte, tan distinta de las gravimetrías, que siendo en ambos la misma la expresión matemática que permite calcular á x é y , no pueden compararse los dos grupos de métodos por el error teórico de cada uno. Aumenta esta imposibilidad el hecho de poder ser positivo ó negativo, lo mismo el valor P , que el P' , en los métodos polarimétricos, que per-

mite que sean aquellos muy pequeños, aun siendo crecidos los valores de x é y , si son de signo contrario, y que pequeñas variaciones ó errores de los valores experimentales correspondan á variaciones ó errores muy grandes de x é y . A pesar de ello, los métodos polarimétricos aventajan mucho á los gravimétricos, también indirectos, en la generalidad de casos, siquiera por ser inferiores á la unidad los coeficientes de varios de ellos. Prácticamente se confirma esta superioridad, en especial cuando P y P' no tienen valores pequeños, y sería mayor si tuvieran los poderes rotatorios la fijeza y constancia de los pesos atómicos, en lugar de la inseguridad de los actuales, y de su variación con la temperatura y concentración de la disolución. Por aquella innegable superioridad, son tan usados algunos métodos polarimétricos indirectos, como los directos; pero por los defectos citados, no pueden generalizarse á ciegas, proponiendo nuevos métodos sin estar bien seguros de que los datos experimentales serán exactos, en las condiciones usuales de trabajo, y de que los valores K y K' utilizados, y otros accidentales del método, están rigurosamente establecidos.

Ya se dijo que el método **U** no responde en la práctica á lo que hace esperar la pequeñez del coeficiente. Aquí se puede añadir, además, que disminuye mucho la ventaja de tan pequeño coeficiente el ser demasiado grande P' .

Valor relativo de las dos incógnitas.—De todo lo anterior se deduce que el error concreto con que se obtiene á x é y es igual al error concreto de P' multiplicado por el coeficiente. Falta discutir el error relativo de aquellos valores, ó sea $\frac{mp'}{x'}$ y $\frac{mp'}{y'}$, siendo m el coeficiente de P' , p' el error concreto de P' y x' é y' , los verdaderos valores de las incógnitas. Como hay que admitir la constancia de la relación $\frac{p'}{Q'} = C$, resulta $p' = Q' C$, y substituyendo p' por este valor en la anterior expresión del error relativo de x é y , tene-

mos que la fórmula que sintetiza el error relativo de estas incógnitas será

$$E = \frac{mQ'C}{x'}; \quad E' = \frac{mQ'C}{y'}$$

que expresa que *dicho error relativo es proporcional á la magnitud colectiva experimentalmente medida, Q', al error relativo con que se ha medido C, y al coeficiente, m, constante en cada método, que tiene esta magnitud experimental en la expresión de las incógnitas; é inversamente proporcional al verdadero valor de la incógnita correspondiente.*

La aspiración del químico es que $E = E' = 0$, pero puede contentarse, por ahora, con que $E = E' = C$, es decir que el error en los métodos indirectos sea igual que en los directos correspondientes. Para esto es necesario que

$$mQ' = x'; \quad mQ' = y',$$

que teóricamente no puede suceder simultáneamente, sino siendo $x' = y'$. Supuesta esta condición, supongamos $m = 1$: entonces se necesita, además, que $Q' = x' = y'$. Esto se realiza en los métodos por diferencia en el caso particular de que la incógnita, determinada indirectamente, sea de valor igual á la determinada directamente. Si en el mismo supuesto de $m = 1$, $x' > y'$, ó sea $x' > Q'$, pues en los métodos por diferencia $y' = Q'$, será

$$E = \frac{Q'C}{x'} < E' = \frac{Q'C}{y'} = C.$$

De donde se concluye que *en los métodos por diferencia el error relativo del valor determinado indirectamente (x) es igual al del determinado directamente (y), si ambos valores son iguales, menor si el indirecto es mayor que el directo y mayor en el caso contrario.* En el primer caso, pues, los métodos por diferencia igualan en precisión á los directos,

les aventajan en el segundo, y les son inferiores en el tercero.

Si siendo $x' = y'$, $m \gtrless 1$, tenemos los métodos indirectos propiamente dichos. Si $m > 1$, para que $m Q' = x' = y'$, será menester que $Q' < x'$ y que y' . Esta es una de las condiciones más difíciles de realizar experimentalmente; imposible si x', y', n y n' , son positivos: posible, pero en muy pocos métodos, si x' é y' son positivos y n, n' , negativos: fácil si x' ó y' , es negativo, pero en este caso y el anterior, de ventaja indiscutible, se corre el riesgo de que tan pequeño sea Q' , que C aumente, y como se multiplica por m , que resulten valores de E y E' que no realicen, ni remotamente, la aspiración $E = E' = C$, que perseguimos. En conclusión: si $m > 1$, hay muchas dificultades para evitar grandes errores en los métodos indirectos, aun en el caso favorable de $x' = y'$, y pueden ser grandísimos si $Q' > x' = y'$, ó m muy grande, ó ambas cosas, que es lo ordinario; pero, teóricamente, existe la posibilidad de que un método indirecto con coeficiente superior á la unidad, pueda conducir á errores relativos iguales á los de un método directo; lo difícil es descubrir tan favorables métodos: los actuales no realizan esta condición.

Si $m < 1$, puede ser $Q' > x' é y'$, circunstancia que beneficia mucho, pero sin olvidar que si la razón $\frac{Q'}{x'}$ es muy grande, aun siendo $m < 1$, puede no realizarse que

$$m Q' = x' = y'.$$

Como es muy fácil que Q' sea mucho mayor que $x' é y'$, es difícil, prácticamente, hallar un método con coeficiente tan pequeño que compense un excesivo valor relativo de Q' . Los mejores métodos indirectos actuales, el **0**, p. e. no realizan siempre esta compensación, pero es innegable la posibilidad teórica de inventar un método que la realice, y, sin llegar á

ello, que es una gran ventaja para un método indirecto, que sus coeficientes sean menores que la unidad.

Si en los métodos indirectos propiamente dichos $x' \leq y'$, se deduce de todo lo anterior que $E \geq E'$, y que se aproximará más á C , á igualdad de las demás circunstancias, el error E ó E' que corresponda al mayor de los valores de las dos incógnitas, alejándose, y rápidamente, el otro, á medida que disminuye, para un valor Q' constante. Aun los métodos actuales mejores, con coeficientes menores á la unidad y valores de Q' pequeños para la misma suma $x' + y'$, fracasan por completo si uno de los componentes es escaso con relación al otro; pero sobre todo son disparatados los resultados si no existen tan favorables condiciones. Compréndese que así sea viendo que en la fórmula del error relativo

$$E = \frac{mQ'C}{x'}$$

el numerador, supuesto constante Q' , es invariable y disminuye progresivamente el denominador. Está, pues, justificada la, ya antigua, opinión de que los métodos indirectos dan mal resultado si es $\frac{x'}{y'} < 1$: pero importa advertir, lo que

no suele decirse, y es, que dan mal resultado en este caso, para el cuerpo más escaso, pues el abundante resulta beneficiado, y como ocurre muchas veces en la práctica que sólo interesa uno de los dos componentes, procederá ó no, teóricamente, determinarle indirectamente, según sea el abundante ó el escaso. Además, como el error depende tanto del valor absoluto Q' , y éste nace de la variación experimental que sufren x' é y' , que no es igual, para dos proporciones iguales, pero inversas, de x' é y' , podrán resultar errores diferentes para cada componente á igual proporción. *Será más exacto, de los escasos, el que resulte de un valor Q' menor;*

es decir, el que en la transformación experimental varíe más si la variación es positiva, ó varíe menos si es negativa. Así, en el método **K**, será menos inexacto medir poco cloruro en mucho bromuro que poco bromuro en mucho cloruro. En realidad serán muy inexactos ambos valores y generalizando, hay que concluir con lo antes afirmado: *no deben emplearse los métodos indirectos para determinar el componente que está en poca proporción con relación al otro.*

Resultados experimentales.—Deducidas las conclusiones de la discusión teórica de los métodos indirectos, aunque incidentalmente se haya aludido á la parte experimental de algunos, puede preguntarse, cuáles son las conclusiones que resultan del estudio puramente experimental de los mismos métodos.

La excesiva extensión que va adquiriendo este trabajo no consiente la exposición de muchos datos experimentales. Elegiré sólo un método, de los más antiguos, y que por describirse todavía en los libros más modernos de análisis para la resolución de un problema, *que se resuelve también por método directo*, puede inducir lógicamente á la creencia de que es uno de los mejores ó, al menos, de los aceptables: es el método **C**. Las expresiones en él de x é y son:

$$x = 1,8907 P' - 3,6339 P$$

$$y = 4,6339 P - 1,8907 P'.$$

Operando *Treadwell*, con una mezcla inicial, preparada por el mismo, de 0,4966 gr. de cloruro sódico, y 0,0514 gr. de cloruro potásico, ambos purísimos, ha encontrado 0,4969 gramos de cloruro sódico y 0,0511 gr. de cloruro potásico.

Operando *Koch* (*Zeit. f. Angew. Chem.* 1909, p. 1442) con disoluciones complejas (análogas á aguas minerales), ha separado de ellas, en la forma usual, el hierro, el aluminio, la cal, la magnesia, etc., y aislando el potasio y el sodio al estado de cloruros, cuya mezcla ha pesado, ha aplicado luego

el método C. He aquí el *error relativo* del cloruro sódico en diferentes casos.

$$\text{Si } \text{ClK} \times \text{ClNa} \dots\dots = 0,30.$$

$$\text{Si } 3 \text{ClK} \times 10 \text{ClNa} \dots\dots = 0,15 \text{ á } 0,20.$$

$$\text{Si } 10 \text{ClK} \times 3 \text{ClNa} \dots\dots = 0,05.$$

Estos resultados, ni concuerdan con los de *Treadwell*, ni, aparentemente, con la discusión teórica. Los obtenidos por *Treadwell* tal vez superen en bondad á lo teórico; la razón es, que haciéndose la determinación de *P* por pesada *directa* de una mezcla *purísima*, el convencionalismo, adoptado en la discusión, de ser *P* exacto, puede considerarse realizado; el supuesto de estar determinado *P'* con un error de 0,002, no sólo debió realizarlo *Treadwell*, pues sabe operar bien, sino que pudo hacerlo con mayor precisión, pues la medición del cloro-ion es una de las gravimetrías ó volumetrías más exactas; concuerda, pues, rigurosamente el resultado obtenido por *Treadwell* con la discusión, no sólo en ésto, sino en ser mucha menor la precisión en el cuerpo menos abundante.

Las determinaciones de *Koch* están hechas en consonancia con la realidad de la práctica. Para poder discutir con bases fijas se ha adoptado aquí el convencionalismo de que *P* era exacto, pero en la práctica es muy excepcional que sea así; lo ordinario en todos los métodos indirectos es que la mezcla inicial no sea purísima con relación á los cuerpos ó á la propiedad que se mide, y, por lo tanto, puede admitirse como caso general que *P* es erróneo, como lo sería el determinado por *Koch*. Siéndolo *P*, puede asegurarse también la inexactitud de *P'*, y en el caso de *Koch* el error relativo de ambos superaría á 0,002 probablemente. Admitido el doble error, supongamos que siendo de 0,002 en los dos valores *P* y *P'*, es del mismo signo en uno, de dos ensayos sucesivos de idéntico problema, y en el otro, uno positivo y

otro negativo. Este supuesto está conforme con la práctica, pues en un problema de las condiciones del actual, y con tanta ó mayor razón en otros análogos, no puede responder el químico de mayor precisión, y, sobre todo, de si aquel error será positivo ó negativo, porque el mismo operador, con igual problema y método, podrá tenerle indistintamente de uno y otro sentido. Pues bien; las consecuencias de estos hechos al aplicarse al método indirecto **C**, serán:

Error relativo del cloruro sódico hallado:

Caso de	$\frac{ClNa}{ClK}$	}	si error de P y P' , son del mismo signo	= 0,002
			— — son de signo contrario	= 0,035
Caso de	$\frac{ClNa}{10 ClK}$	}	— — son del mismo signo	= 0,002
			— — son de signo contrario	= 0,201.

Es decir, que basta una variación en el signo de un error, imposible de evitar, ni de prever, para que la determinación resulte muy aceptable ó muy errónea: el químico está á merced del acaso, y como en tales condiciones operó *Kösch*, sus resultados no confirman ni niegan el detalle de la discusión teórica anterior, sino que prueban experimentalmente, la resultante final de toda ella, ó sea que métodos indirectos de esta índole son absolutamente inaceptables. Si ésta es la conclusión referente al método **C**, que experimentalmente es de los considerados aceptables, dedúzcase la confianza que se puede tener en los otros de coeficientes mayores y de técnica experimental más inexacta, que son los más. Sería, á mi ver, de gran cordura, que los libros de Análisis se abstuvieran, en absoluto, de publicar estos métodos, debiendo, en cambio, discutirlos más, de un modo general, con los datos demostrativos de los grandes errores á que conducen, y luego en concreto, no publicar sino los poquísimos aceptables, ó los que, como el **M** y el **N**, resuelvan, aunque muy erróneamente, un problema que hasta ahora no tiene solución por los métodos directos.

V

CASO DE TRES Ó MÁS INCÓGNITAS

En todos los ejemplos y en la discusión anteriores, han sido sólo dos los cuerpos determinados indirectamente. Se ha discutido, pues, el caso más sencillo posible, experimental y matemáticamente. Sin embargo, las conclusiones han sido tan poco favorables á esta clase de métodos, que podría excusar el discutir, casi el mentar tan sólo, métodos indirectos que requieren tres ó más ecuaciones. Se prevé, en efecto, la enorme dificultad de inventar métodos indirectos, regularmente buenos, para la medición de tres ó más cuerpos. Los valores finales se deducen de fórmulas, para los efectos del error, tan complejas, en general, que pensar en una exactitud aceptable, es desconocer su significación y desconocer la técnica analítica. Apesar de ello, en libros antiguos y modernos, sobre todo de análisis de gases y de azúcares, figuran métodos de esta índole, casi todos inaceptables.

Además de la gran variación que los errores experimentales sufren por la estructura matemática de las fórmulas finales, que pueden motivar errores variadísimos en las incógnitas en una serie de ensayos del mismo problema, dificultan la creación de métodos indirectos, las actuales deficiencias químicas independientes de la técnica de cada método. El analista, aun para métodos directos, dispone de muy pocas propiedades de los cuerpos de posible y exacta medición; para los métodos indirectos, no encuentra propiedades, en número proporcionado al de incógnitas, para hacer mediciones colectivas que comprendan á los cuerpos que interesan y no afecten á los otros posiblemente presentes; ni dispone tampoco de transformaciones experimentales de una misma propiedad que no modifiquen simultáneamente estos otros cuerpos; ni, finalmente, dispone la Ciencia actual de constantes físicas ó químicas en número suficiente que relacionen rigurosemente las propiedades medidas con

el peso y que sean verdaderamente constantes, independientes de la temperatura, presión, concentración, presencia de otros cuerpos, etc. A pesar de su escasa exactitud, los valores más aceptables para el analista son los pesos atómicos, y los menos influidos por los accidentes experimentales; los demás, más numerosos, son de menor exactitud y constancia, tal vez aceptables en métodos directos, pero no en los indirectos, donde por la influencia de la fórmula matemática, cualquier variación ó error puede adquirir abrumadora magnitud.

Disponiendo casi exclusivamente de los pesos atómicos, debemos movernos en círculo tan limitado de transformaciones químicas que, ó no es posible plantear un método indirecto, aplicable á tres ó más incógnitas, ó no tiene realidad experimental, ó, basado en la ley de los equivalentes, no supone condiciones verdaderamente independientes, y con suma facilidad es matemáticamente indeterminado (*). Así,

(*) Ejemplo de estos sistemas indeterminados son los siguientes:

1.º Sea una mezcla de varias sales con el anion común, y sea P el peso total de éste; sustituyendo experimentalmente tal anion único por otro también único y conocido, se hace la medición del nuevo, cuyo peso total sea P' : repitiendo la sustitución por un tercer anion y midiéndole, se tiene un tercer valor experimental P'' , y siguiendo así hasta tener tantos datos experimentales, como metales tiene la mezcla, se puede formular este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & x + y + z + \dots = P \\ [1] \quad & Kx + K'y + K''z + \dots = P' \\ & Qx + Q'y + Q''z + \dots = P'' \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

siendo x, y, z, \dots la cantidad del primer anion de cada sal, K, K', K'', \dots las razones entre el segundo anion y el primero; Q, Q', Q'', \dots las razones entre el tercer anion y el primero, etc. Como por hipótesis en cada determinación experimental hay un sólo anion, será $K = K' = K'' = \dots$; $Q = Q' = Q'' = \dots$; y, por lo tanto, forzosamente $P' = KP$; $P'' = QP, \dots$, ó sea, cada ecuación es igual al resultado de multiplicar los dos miembros de la primera por el mismo factor.

pues, las consideraciones de carácter experimental, como las de índole matemática, conducen á la conclusión de que en el estado de la Ciencia actual, la creación de métodos in-

2.º La mezcla primitiva es lo mismo que en el ejemplo anterior y así también la sucesiva sustitución del anion común por otro; pero $P, P', P'' \dots$ son el peso total de la mezcla primera y de cada una de las siguientes. El número de ecuaciones tendrá que ser igual al de sales presentes; $x, y, z \dots$ expresan la cantidad de cada sal en la primera mezcla. El sistema de ecuaciones será el mismo que en 1.º, pero $K, K', K'' \dots Q, Q', Q'' \dots$ son las razones entre cada nueva sal formada y la primera correspondiente. Así:

$$K = \frac{b+m}{a+m}; \quad K' = \frac{b+m'}{a+m'}; \quad K'' = \frac{b+m''}{a+m''} \dots Q = \frac{c+m}{a+m};$$

$$Q' = \frac{c+m'}{a+m'}; \quad Q'' = \frac{c+m''}{a+m''} \dots,$$

siendo $a, b, c \dots$ el peso atómico ó molecular del primero, segundo, tercero, anion, y $m, m', m'' \dots$ el peso atómico de cada metal. Sustituyendo, pues, en el sistema [1] los coeficientes por sus valores, será:

$$\begin{aligned} x + y + z + \dots &= P \\ \frac{b+m}{a+m}x + \frac{b+m'}{a+m'}y + \frac{b+m''}{a+m''}z + \dots &= P' \\ \frac{c+m}{a+m}x + \frac{c+m'}{a+m'}y + \frac{c+m''}{a+m''}z + \dots &= P'' \\ \dots\dots\dots & \end{aligned}$$

Multiplicando los dos miembros de la primera ecuación por $\frac{c-b}{a-b}$ y los de la segunda por $\frac{a-c}{a-b}$ y sumando miembro á miembro, resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{c-b}{a-b} + \frac{a-c}{a-b} \times \frac{b+m}{a+m} \right) x + \left(\frac{c-b}{a-b} + \frac{a-c}{a-b} \times \frac{b+m'}{a+m'} \right) y + \\ + \left(\frac{c-b}{a-b} + \frac{a-c}{a-b} \times \frac{b+m''}{a+m''} \right) z + \dots = \\ = \frac{c-b}{a-b} P + \frac{a-c}{a-b} P' \end{aligned}$$

y efectuando operaciones:

$$\frac{c+m}{a+m}x + \frac{c+m'}{a+m'}y + \frac{c+m''}{a+m''}z + \dots = \frac{c-b}{a-b}P + \frac{a-c}{a-b}P'$$

El primer miembro de esta ecuación es idéntico al primero de la ecuación tercera de [2], luego:

$$P'' = \frac{c-b}{a-b}P + \frac{a-c}{a-b}P'$$

directos que resuelvan con regular precisión la determinación analítica de dos cuerpos es muy difícil, y la de tres ó más, poco menos que imposible. Necesitamos para resolver

Lo que nos dice que es innecesario determinar P'' experimentalmente, pues conocidos P y P' se le puede calcular, y análogamente todos los valores siguientes P''' , P'''' Pero, además, lo que se deduce es que la ecuación tercera no es distinta, sino resultado de sumar las dos primeras, después de multiplicar cada una por un factor conocido. Lo mismo sería la cuarta, quinta..... ecuación: es, pues, indeterminado el sistema para tres ó más ecuaciones y sólo utilizable en el caso de dos, como se ha hecho repetidas veces, y de ello hay varios casos en los ejemplos de métodos indirectos precedentes.

La interpretación química de la indeterminación general de este método y la determinación en el caso particular de dos cuerpos, está en la ley de los equivalentes: el mismo peso de un anión forma sales con pesos diferentes de cada metal, y recíprocamente; $P, P' P''$ representan los pesos de un número constante de moléculas salinas que contienen un peso total constante de metales y un anión común, constante, en cuanto al número de moléculas á que equivale en todas las ecuaciones, y de peso variable en cada ecuación porque cambia de naturaleza. No hay, pues, más que dos condiciones en realidad. Habiendo tres ó más metales, el peso total de éstos puede ser en todas las ecuaciones el resultado de infinitos valores de cada uno, sin que deje de cumplirse la otra condición de ser constante el número de moléculas, pues permite estas compensaciones la variedad de pesos atómicos para cantidad constante del anión. No así si sólo hay dos metales: variando el peso de uno de ellos varía también el de su anión, y no puede una variación del otro equilibrar la del primero para que P no varíe.

Ejemplos de sistemas determinados con tres ecuaciones.—En este caso particular, deducido del general [1], las fórmulas que expresan el valor de las incógnitas son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(K' Q'' - K'' Q') P - (Q'' - Q') P' + (K'' - K') P''}{(K'' - K') Q - (K'' - K) Q' + (K' - K) Q''} \\ y &= \frac{(K'' Q - Q' K) P - (Q'' + Q) P' + (K - K'') P''}{(K'' - K') Q - (K'' - K) Q' + (K' - K) Q''} \\ z &= \frac{(K' Q' - K' Q) P - (Q' - Q) P' + (K' - K) P''}{(K'' - K') Q - (K'' - K) Q' + (K' - K) Q''} \end{aligned}$$

Primer ejemplo: Determinación indirecta de la contracción por combustión correspondiente: al hidrógeno = x , al formeno = y , al etileno = z , en mezclas puras de estos tres gases ó exentas de gases combustibles ó absorbibles por la potasa, determinando: la contracción total = P , el CO_2 total producido = P' y el O_2 total consumido = P'' .

los problemas analíticos en tan ventajosas condiciones, disponer de recursos experimentales mucho más perfectos que los actuales. La labor de los investigadores no debe, pues,

En este caso serán:

$$K = \frac{\text{CO}_2 \text{ de combn. de H}_2}{\text{Contrac. de combn. de H}_2} = \frac{0}{3} = 0. \quad Q = \frac{\text{O}_2 \text{ de combn. de H}_2}{\text{Contrac. de combn. de H}_2} = \frac{1}{3}.$$

$$K' = \frac{\text{CO}_2 \text{ de combn. de CH}_4}{\text{Contrac. de combn. de CH}_4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad Q' = \frac{\text{O}_2 \text{ de combn. de C}_2\text{H}_4}{\text{Contrac. de combn. de CH}_4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$K'' = \frac{\text{CO}_2 \text{ de combn. de C}_2\text{H}_4}{\text{Contrac. de combn. de C}_2\text{H}_4} = \frac{4}{4} = 1. \quad Q'' = \frac{\text{O}_2 \text{ de combn. de C}_2\text{H}_4}{\text{Contrac. de combn. de C}_2\text{H}_4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

de donde:

$$x = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - 1}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P - \frac{\frac{3}{2} - 1}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P' +$$

$$+ \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P''$$

$$y = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P' - \frac{\frac{1}{3} - \frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P' +$$

$$+ \frac{-1}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P''$$

$$z = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P - \frac{1 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P' +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)} P''$$

ó sea

$$x = 3P + 6P' - 6P''.$$

$$y = 12P' - 14P' - 4P.$$

$$z = 2P + 8P' - 6P''.$$

Como:

$$V. \text{ de H}_2 = \frac{2}{3} \text{ de su contracción.}$$

$$V. \text{ de CH}_4 = \frac{1}{2} \text{ de su contracción.}$$

$$V. \text{ de C}_2\text{H}_4 = \frac{1}{2} \text{ de su contracción.}$$

será

$$V. \text{ de H}_2 = \frac{2}{3} x = 2P + 4P' - 4P''.$$

$$V. \text{ de CH}_4 = \frac{1}{2} y = 6P' - 7P' - 2P.$$

$$V. \text{ de C}_2\text{H}_4 = \frac{1}{2} z = P + 4P' - 3P''.$$

encaminarse á la invención de nuevos métodos indirectos, sino de aquellos nuevos recursos ó grandes perfeccionamientos de los ahora utilizados, que, una vez logrados, ganarán

Para juzgar la confianza que puede inspirar este método, recuérdese que en el método **C** con dos incógnitas y con un error relativo = 0,002 en los valores experimentales P y P' , bastaba un cambio de signo en este error para que el resultado fuera muy aceptable en un caso y de 0,20 en otro, para uno de los componentes. Ahora son tres los datos experimentales (en la técnica muchos más), que no pueden ser tan exactos como en **C**; son todos mayores en valor numérico que x , y y z , y son todos los coeficientes mucho mayores que en el método **C**. En consecuencia, es inevitable que una serie de ensayos hechos por el mismo operador, con el mismo problema, sean muy discordantes, probablemente muy erróneos todos, y, á algo escasa que sea la proporción de uno de los componentes, que resulte con valor negativo. Sin embargo, este método suele figurar en los libros de análisis de gases, á pesar además de que C_2H_4 puede medirse por método directo, que es lo que procede hacer, reservando sólo á la mezcla $H_2 + CH_4$, si acaso, la aplicación de un método indirecto, que ya es mucho menos inexacto.

El cuadro siguiente prueba con números lo acabado de decir. Como es muy difícil en la técnica de gases lograr un error relativo sólo de 0,002 en los valores P , P' y P'' , se supone también el caso en que dicho error relativo sea 0,005, que es menos difícil de alcanzar sin llegar á fácil. Dedúzcase lo que será con mayores errores experimentales, que son muy posibles.

Vol. relativo de $H_2 - CH_4 - C_2H_4$ y de su contracción.	Error experít. de $P, P', P'' = 0,002$.			Error experít. de $P, P', P'' = 0,005$.			Signo del error de P, P', P'' .
	ERROR RESULTANTE PARA			ERROR RESULTANTE PARA			
	H_2	CH_4	C_2H_4	H_2	CH_4	C_2H_4	
Volumen: $H_2 = 4; CH_4 = 3; C_2H_4 = 3$							El mismo los tres.
Contracción: $x = y = z$	0,07	0,134	0,07	0,175	0,365	1,175	
Idem id.....	0,001	0,066	0,001	0,0025	0,165	0,0025	El de P y P' contrario al de P'' .
Volumen: $H_2 = 1,2; CH_4 = 3; C_2H_4 = 3$							El mismo los tres.
Contracción: $10x = y + z; y = z$	0,21	0,123	0,064	0,53	0,307	0,160	
Idem id.....	0,002	0,002	0,002	0,005	0,005	0,005	El de P y P' contrario al de P'' .
Volumen: $H_2 = 1; CH_4 = 10; C_2H_4 = 10$							El mismo los tres.
Contracción: $26,6x = y + z; y = z$	0,81	0,119	0,062	0,025	0,2975	0,155	
Idem id.....	0,002	0,002	0,002	0,005	0,005	0,005	El de P y P' contrario al de P'' .

mucho los métodos directos, y los indirectos vendrán por sí solos y podrán llegar á ser los únicos métodos del porvenir.

Segundo ejemplo: Determinación indirecta de la rotación óptica correspondiente á la sacarosa = x ; la correspondiente á la dextrina = y y la correspondiente á la dextrosa = z , en soluciones de estos tres cuerpos exentos de otros ópticamente activos. Rotación directa total = P ; rotación total después de inversión de la sacarosa con ácido clorhídrico (todo lo más de 10 %) = P' ; rotación total después de la inversión de la sacarosa y desdoblamiento simultáneo de la dextrina en dextrosa, mediante ácido sulfúrico de 5 % = P'' . Las ecuaciones, las constantes y las expresiones finales serán ahora:

$$\begin{aligned}x + y + z &= P. \\Kx + y + z &= P'. \\Qx + Q'y + z &= P''. \\K = Q &= \frac{\text{rotación invertido}}{\text{rotación sacarosa}} = \frac{-32,66}{100,00} = -0,3266 \\Q' &= \frac{\text{rotac. dextrosa de dextrina}}{\text{rotación dextrina}} = \frac{30,022}{100} = 0,30022 \\x &= \frac{1}{1-K} P - \frac{1}{1-K} P' = 0,7538 P - 0,7538 P', \\y &= \frac{1}{Q'-1} P'' - \frac{1}{Q'-1} P' = 1,4289 P' - 1,4289 P'', \\z &= \frac{Q'-K}{(1-K)(Q'-1)} P' - \frac{K}{1-K} P - \frac{1}{Q'-1} P'' = 0,2462 P - 0,6752 P' + 1,4289 P''.\end{aligned}$$

Este método, teóricamente, es mucho más exacto que el anterior, siquiera por ser mucho menores los coeficientes sin ser grandes los valores P' y P'' que pueden ser menores que x , y y z , y aun negativos. El peligro está precisamente en la posibilidad de que sean demasiado pequeños, y, por lo tanto, muy erróneos. Además, el valor Q' es dudoso, y difícil de invertir la sacarosa sin alterar nada la dextrina.

XII.— Estudio completo de una clase especial de integrales singulares.

POR LAURO CLARIANA

(Continuación.)

IV

MÉTODO ESPECIAL PARA OBTENER CIERTA CLASE DE INTEGRALES SINGULARES REFERENTES Á ECUACIONES ENTRE DERIVADAS PARCIALES

En las ecuaciones entre derivadas parciales cabe hacer extensivo también el procedimiento especial que venimos desarrollando para cierta clase de integrales singulares; sin embargo, creemos prudente anteponer antes algunos principios generales para mayor inteligencia de lo que expondremos luego.

Si suponemos la ecuación

$$(1) \quad F(x, y, u, v, \dots, z; G, G_2, \dots, c_n) = 0,$$

siendo el número de constantes igual al de variables independientes, la eliminación de dichas constantes se obtiene por medio del sistema siguiente:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

De suerte que entre (1) y (2) resulta una relación única entre n derivadas parciales de primer orden:

$$f(x, y, u, v \dots z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} \dots) = 0. \quad (3)$$

Recíprocamente, dada una ecuación entre derivadas parciales de primer orden con n variables independientes, tal como (3), debe referirse ésta á una función (1), que es la integral completa de (3).

Las integrales singulares en esta clase de ecuaciones diferenciales pueden deducirse de la integral completa, de un modo análogo al método expuesto ya al tratar de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Supondremos las constantes en su mayor grado de generalidad, siendo funciones de las variables, á fin de dar mayor latitud al problema, procurando luego que las funciones derivadas que se obtengan se correspondan con las del sistema (2).

En este concepto, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 & F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} + F'_{G_1} \left[\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \\
 & + F'_{G_2} \left[\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \dots + F'_{G_n} \left[\frac{\partial G_n}{\partial x} + \frac{\partial G_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = 0 \\
 & \dots \\
 & F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} + F'_{G_1} \left[\frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \\
 & + F'_{G_2} \left[\frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \dots + F'_{G_n} \left[\frac{\partial G_n}{\partial y} + \frac{\partial G_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] = 0 \\
 & \dots \\
 & \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

El sistema (4) se identifica con (2), al cumplirse las condiciones que á continuación se expresan:

$$\left\{ \begin{aligned} &F'_{G_1} \left[\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + F'_{G_2} \left[\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \\ &\quad + \dots + F'_{G_n} \left[\frac{\partial G_n}{\partial x} + \frac{\partial G_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = 0 \\ &F'_{G_1} \left[\frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial G_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + F'_{G_2} \left[\frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \\ &\quad + \dots + F'_{G_n} \left[\frac{\partial G_n}{\partial y} + \frac{\partial G_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

Empero este sistema queda satisfecho, siendo

$$F'_G = 0, \quad F'_{G_2} = 0, \quad \dots \quad F'_{G_n} = 0.$$

De suerte que al hallar los valores de G, G_2, \dots, G_n de estas funciones y sustituirlos en (1), debe resultar una función sin constantes, y sólo dependiente de las variables: esta ecuación constituye la integral singular de la ecuación (1).

Sin embargo, pueden suponerse las constantes funciones unas de otras, por ejemplo, las constantes G, G_2, \dots, G_{n-2} funciones de las dos últimas G_{n-1} y G_n , de modo que se tenga.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1 &= \psi_1(G_{n-1}, G_n), \\ G_2 &= \psi_2(G_{n-1}, G_n), \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ C_{n-2} &= \psi_{n-2}(G_{n-1}, G_n), \end{aligned} \right.$$

siendo las funciones ψ , arbitrarias.

En este concepto, el sistema (4) toma la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 & F_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} + \left(F'_{c_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial c_{n-1}} + F'_{c_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial c_{n-1}} + \dots + \right. \\
 & \left. + F'_{c_{n-2}} \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial c_{n-1}} + F'_{c_{n-1}} \right) \left(\frac{\partial c_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial c_{n-1}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \\
 & + \left(F'_{c_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial c_n} + F'_{c_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial c_n} + \dots + F'_{c_{n-2}} \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial c_n} + F'_{c_n} \right) \times \\
 & \quad \left(\frac{\partial c_n}{\partial x} + \frac{\partial c_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 \\
 & F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} + \left(F'_{c_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial c_{n-1}} + F'_{c_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial c_{n-1}} + \dots + \right. \\
 & \left. + F'_{c_{n-1}} \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial c_{n-1}} + F'_{c_{n-1}} \right) \left(\frac{\partial c_{n-1}}{\partial y} + \frac{\partial c_{n-1}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \\
 & + \left(F'_{c_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial c_n} + F'_{c_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial c_n} + \dots + F'_{c_{n-2}} \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial c_n} + F'_{c_n} \right) \times \\
 & \quad \left(\frac{\partial c_n}{\partial y} + \frac{\partial c_n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots$$

Este sistema se reduce al (2), con tal que se verifique

$$\begin{aligned}
 F'_{c_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial c_{n-1}} + F'_{c_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial c_{n-1}} + \dots + F'_{c_{n-2}} \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial c_{n-1}} + F'_{c_{n-1}} &= 0 \\
 F'_{c_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial c_n} + F'_{c_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial c_n} + \dots + F'_{c_{n-2}} \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial c_n} + F'_{c_n} &= 0.
 \end{aligned}$$

Entre estas dos ecuaciones y el sistema (5), se obtienen los valores de las n constantes, resultando las $n-2$ primeras funciones arbitrarias de las dos últimas.

Así, pues, al sustituir estos valores en (1), se obtiene una solución de dicha función, tomando el nombre de integral general, cuando una sola constante es función de las $n-1$ restantes.

Notable es el ejemplo siguiente que presentan algunos autores para apreciar la multiplicidad de soluciones que una misma ecuación puede ofrecer.

Sea la ecuación

$$F(x, y, z, G_1, G_2) = (x - G_1)^2 + (y - G_2)^2 + z^2 - r^2 = 0, (1)$$

representante de varias esferas de radio r , cuyo centro se halla en el plano xy , y que pueden variar de posición según sean los valores de las constantes G_1 y G_2 , siendo el radio el mismo para todas las esferas.

La ecuación entre derivadas parciales que corresponde á (1), se hallará tomando sus derivados según x é y ; de donde resulta

$$(2) \quad x - G_1 + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad y - G_2 + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Así, pues, al sustituir en (1) los valores de G_1 y G_2 de (2), se tiene

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 1 \right] z^2 - r^2 = 0,$$

ó bajo otra forma más reducida, y admitida por el uso,

$$(p^2 + q^2 + 1) z^2 - r^2 = 0. (3)$$

Si suponemos ahora en (1), como integral completa de (3),

$$\frac{\partial F}{\partial G_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial G_2} = 0,$$

ó sea

$$x - G_1 = 0, \quad y - G_2 = 0,$$

resulta inmediatamente la integral singular.

$$z^2 = r^2,$$

de donde

$$z = \pm r. \quad (4)$$

Este resultado, interpretado geoméricamente, nos dice que se trata de dos planos paralelos al plano xy , trazados á las distancias $\pm r$ desde el origen de coordenadas, constituyendo dichos planos la envolvente de todas las esferas imaginables de radio r .

Además, fácilmente se demuestra que la función (4) es integral singular de (3), puesto que la satisface.

En efecto, de (4), se deduce:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

y al sustituir estos valores en (3), resulta la misma función (4):

$$z^2 - r^2 = 0.$$

Por último, si se tuviera $G_2 = \psi(G_1)$, esto supondría que los centros de las esferas seguirían una cierta línea en el plano xy , determinada por la función ψ , y al buscar la envolvente correspondiente de estas esferas, según el procedimiento general, ya explicado, respecto á la eliminación de constantes, obtendríamos una superficie llamada de canal, pudiendo obtener varias de estas superficies, conforme fuese variando la función ψ , dando el conjunto de estas superficies la integral general de (3), mientras que la solución singular es la envolvente general de todas las esferas, prescindiendo de las superficies de canal.

Estos son los procedimientos que se conocen para deducir integrales singulares de la integral completa ó general de una ecuación entre derivadas parciales; empero á este punto hemos de manifestar que el procedimiento particular que estudiamos permite deducir, de un modo análogo á los ante-

riores; las integrales singulares, refiriéndose directamente á la ecuación diferencial, siendo preciso determinar, siempre, la segunda ecuación diferencial á la cual se refieren esta clase de integrales singulares, bien que en algunos casos particulares pueden serlo también de la primera, y éste siempre y cuando la segunda ecuación diferencial se identifique con la primera, condición que será ya más difícil de realizar ahora, en vista de que las ecuaciones entre derivadas parciales son más complicadas que las ordinarias.

El primer ejemplo que vamos á presentar, se refiere á una ecuación entre derivadas parciales de primer orden y de segundo grado.

Sea

$$xp^2 + yq^2 + 2x^2p + 2y^2q + z^2 = 0. \quad (1)$$

Al generalizar esta ecuación, consideraremos como si hubiesen dos constantes arbitrarias, que expresen p y q ; en este concepto se tiene

$$F(x, y, z, G, G') = xG^2 + yG'^2 + 2x^2G + 2y^2G' + z^2 = 0. \quad (2)$$

Luego al aplicar las fórmulas generales

$$\frac{\partial F}{\partial G} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial G'} = 0,$$

se obtiene

$$2Gx + 2x^2 = 0, \quad 2G'y + 2y^2 = 0;$$

de donde

$$G = -x, \quad G' = -y.$$

Al sustituir estos valores en (2), resulta

$$x^3 + y^3 - 2x^3 - 2y^3 + z^2 = 0,$$

ó sea

$$z^2 = x^3 + y^3. \quad (3)$$

La verdadera ecuación diferencial, á que se refiere (3), como integral singular, se hallará derivando (2), según x é y , por ser éstas las variables independientes.

Así, pues, resulta

$$G^2 + 4xG + 2zp = 0$$

$$G'^2 + 4yG' + 2zq = 0,$$

Al determinar G y G' , se tiene

$$G = -2x + \sqrt{4x^2 - 2zp}, \quad G_1 = -2y + \sqrt{4y^2 - 2zq};$$

de donde sustituyendo estos valores en (2), se obtiene

$$x(8x^2 - 2zp - 4x\sqrt{4x^2 - 2zp}) + y(8y^2 - 2zq - 4y\sqrt{4y^2 - 2zq}) + 2x^2(-2x + \sqrt{4x^2 - 2zp}) + 2y^2(-2y + \sqrt{4y^2 - 2zq}) + z^2 = 0.$$

Después de algunas sencillas reducciones, se halla

$$4x^3 + 4y^3 - 2xzp - 2yzq - 2x^2\sqrt{4x^2 - 2zp} - 2y^2\sqrt{4y^2 - 2zq} + z^2 = 0. \quad (4)$$

Ahora, según (3), al derivar, según x ó y , se obtiene

$$2zp = 3x^2, \quad 2zq = 3y^2;$$

luego, al tomar los radicales de (4), se deduce

$$\sqrt{4x^2 - 2zp} = \sqrt{4x^2 - 3x^2} = x$$

$$\sqrt{4y^2 - 2zq} = \sqrt{4y^2 - 3y^2} = y,$$

y por fin, al sustituir estos valores en (4), da:

$$4x^3 + 4y^3 - 2xzp - 2yzq - 2x^3 - 2y^3 + z^2 = 0,$$

de donde

$$(5) \quad x^3 + y^3 - zxp - yzq + \frac{z^2}{2} = 0.$$

Esta es la verdadera ecuación diferencial de la integral singular (3), puesto que queda satisfecha por ella.

En efecto, de (3), se deduce

$$p = \frac{3}{2} \frac{x^2}{z}, \quad q = \frac{3}{2} \frac{y^2}{z},$$

al sustituir estos valores en (5), se obtiene

$$x^3 + y^3 - \frac{3}{2} x^3 - \frac{3}{2} y^3 + \frac{z^2}{2} = 0,$$

y, según (3),

$$\frac{3}{2} z^2 - \frac{3}{2} z^2 = 0.$$

Igualdad que se convierte en una identidad.

Fácilmente se concibe que el valor (3), y el de sus derivadas, por ser todos positivos, al sustituir en (1), cuyos términos son también positivos, no podrán convertir la igualdad en una identidad, razón por la cual cabe afirmar que la función (3), es integral singular de (5), pero no de (1).

Pasemos ahora al estudio de una ecuación entre derivadas parciales de orden superior al primero.

Sea, por ejemplo,

$$(1) \quad xp^2r^2 + yq^2s^2 + zpq^2t^2 + 2x^2r + 2y^2s + 2z^2t = 0$$

en el supuesto, según el uso, que r, s, t representen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Al generalizar esta ecuación, resulta

$$(1') \quad xp^2G^2 + yq^2G'^2 + zpqG''^2 + 2x^2G + 2y^2G' + 2z^2G'' = 0.$$

Al derivar, según G , G' y G'' , se obtiene

$$\begin{aligned} 2xp^2G + 2x^2 &= 0, & 2yq^2G' + 2y^2 &= 0 \\ 2zpqG'' + 2z^2 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$G = -\frac{x}{p^2}, \quad G' = -\frac{y}{q^2}, \quad G'' = -\frac{z}{pq}.$$

Sustituyendo estos valores en (1'), se obtiene

$$\frac{x^3}{p^2} + \frac{y^3}{q^2} + \frac{z^3}{pq} - 2\frac{x^3}{p^2} - 2\frac{y^3}{q^2} - \frac{2z^3}{pq} = 0;$$

ó sea

$$(3) \quad x^3q^2 + y^3p^2 + z^3pq = 0.$$

Esta ecuación constituye la primera integral singular.

Interesa determinar, como en los casos anteriores, la ecuación diferencial á que hace referencia (3) como integral singular.

Comencemos, pues, por derivar (1') considerando p y q como funciones de x é y .

$$\begin{aligned} p^2G^2 + 2xprG^2 + 2yqsG'^2 + \\ + (p^2q + zrq + zps)G''^2 + 4xG + 4zqG'' &= 0. \\ 2xpsG^2 + q^2G'^2 + y2qtG'^2 + \\ + (pq^2 + zsq + zpt)G''^2 + 4yG' + 4zqG'' &= 0. \end{aligned}$$

Estas dos igualdades, cabe expresarlas por las tres siguientes:

$$[p^2 + 2xp(r + s)]G^2 + 4xG = 0,$$

$$[q^2 + 2yq(s + t)]G'^2 + 4yG' = 0,$$

$$[pq(p + q) + zq(r + s) + zp(s + t)]G''^2 + 4z(p + q)G'' = 0.$$

de donde

$$G = -\frac{4x}{p[p+2x(r+s)]}, \quad G' = -\frac{4y}{q[q+2y(s+t)]},$$

$$G'' = -\frac{4z(p+q)}{pq(p+q) + z\{q(r+s) + p(s+t)\}}.$$

Al sustituir estos valores en (1'), se tendrá la verdadera ecuación diferencial, á la cual se refiere (3), como integral singular:

$$(A) \quad xp^2 \left[\frac{4x}{p\{p+2x(r+s)\}} \right]^2 + yq^2 \left[\frac{4y}{q\{q+2y(s+t)\}} \right]^2 +$$

$$+ zpq \left[\frac{4z(p+q)}{pq(p+q) + z\{q(r+s) + p(s+t)\}} \right]^2 -$$

$$- 2x^2 \frac{4x}{p[p+2x(r+s)]} - 2y^2 \frac{4y}{q[q+2y(s+t)]} -$$

$$- 2z^2 \frac{4z(p+q)}{pq(p+q) + z\{q(r+s) + p(s+t)\}} = 0.$$

Si derivamos ahora (3), según x é y , resulta

$$3x^2q^2 + x^32qs + y^32pr + z^3rq + z^3ps + 3z^2p^2q = 0$$

$$x^32qt + 3y^2p^2 + y^32ps + z^3sq + z^3pt + 3z^2pq^2 = 0.$$

Al sumar estas dos igualdades, se tiene

$$3x^2q^2 + 3y^2p^2 + 2x^3q(s+t) + 2y^3p(r+s) + z^3q(r+s) +$$

$$+ z^3p(s+t) + 3z^2pq(p+q) = 0.$$

Empero, si deriváramos (3), considerando sólo z función de x é y tendríamos

$$3x^2q^2 + 3z^2p^2q = 0, \quad 3y^2p^2 + 3z^2pq^2 = 0.$$

Luego la ecuación anterior, se reduce á

$$(2x^3q + z^3p)(s+t) + (2y^3p + z^3q)(r+s) = 0.$$

Igualdad que queda satisfecha, siendo

$$s + t = r + s = 0.$$

En este concepto los valores de G , G' , G'' hallados anteriormente, se reducen á

$$G = -\frac{4x}{p^2}, \quad G' = -\frac{4y}{q^2}, \quad G'' = -\frac{4z}{pq},$$

los cuales, sustituidos en (1'), dan

$$\frac{16x^3}{p^2} + \frac{16y^3}{q^2} + \frac{16z^3}{pq} - \frac{8x^3}{p^2} - \frac{8y^3}{q^2} - \frac{8z^3}{pq} = 0.$$

Y después de toda reducción

$$x^3q^2 + y^3p^2 + z^3pq = 0.$$

Ecuación igual á (3); luego se puede asegurar que esta última igualdad es la integral singular de la ecuación diferencial (A), puesto que la satisface.

Si pasamos ahora á la segunda integral singular, ó sea á la que resulta de (3), tendremos al generalizar

$$(3') \quad x^3G'^2 + y^3G^2 + z^3GG' = 0.$$

Derivando, según las constantes, é igualando los resultados á cero, se tiene

$$2x^3G' + z^3G = 0, \quad 2y^3G + z^3G' = 0,$$

de donde

$$(4) \quad G' = -\frac{z^3G}{2x^3}, \quad G = -\frac{z^3G'}{2y^3} \quad (5)$$

Si en (3') sustituimos el valor (4), resulta

$$x^3 \frac{z^6 G^2}{4x^6} + y^3 G^2 - z^3 G \frac{z^3 G}{2x^3} = 0,$$

luego

$$4x^3y^3 - z^6 = 0.$$

Si en cambio, sustituimos en (3') el valor (5), se tiene

$$x^3G'^2 + y^3 \frac{z^6G'^2}{4y^6} - z^3G' \frac{z^3G'}{2y^3} = 0,$$

de donde

$$4x^3y^3 - z^6 = 0. \quad (6)$$

Resultando la misma ecuación anterior, la cual constituye la segunda integral singular de la ecuación primitiva, y si bien (6) no satisface á (3), por las mismas razones que hemos deducido en el caso anterior, con seguridad debe satisfacer á las ecuaciones que resulten de derivar á (3') según x é y después de eliminar las constantes. En efecto, de (3'), se obtiene

$$\left. \begin{aligned} 3x^2G'^2 + 3z^2pGG' &= 0 \\ 3y^2G'^2 + 3z^2qGG' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

de donde

$$G' = -\frac{z^2pG}{x^2}, \quad G = -\frac{z^2q}{y^2}G'.$$

Sustituyendo, respectivamente, estos valores en (3'), resulta

$$z^4xp^2 + y^3x^2 - z^5p = 0 \dots \quad (7)$$

$$z^4yq^2 + y^2x^3 - z^5q = 0 \dots \quad (8)$$

Estas dos ecuaciones deben quedar satisfechas por (6).

En efecto, de (6) se deduce

$$z = 4^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}; \quad d = 4^{\frac{1}{6}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Sustituyendo estos valores en (7), se tiene

$$4^{\frac{2}{3}} x^2 y^2 x \cdot 4^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \frac{y}{x} + y^3 x^2 - 4^{\frac{5}{6}} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}} 4^{\frac{1}{6}} \frac{1}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

$$x^3 y^3 + y^3 x^2 - 2x^2 y^3 = 0$$

luego

$$0 = 0.$$

Si consideramos (8), también quedará satisfecho por los valores de (6)

$$4^{\frac{2}{3}} x^2 y^2 y \cdot 4^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \frac{x}{y} + y^2 x^3 - 4^{\frac{5}{6}} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}} 4^{\frac{1}{6}} \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

$$x^3 y^2 + y^2 x^3 - 2x^3 y^2 = 0,$$

de donde

$$0 = 0.$$

Así, pues, cabe afirmar que si (6) no es integral singular de (3), lo es de (7) y (8).

De un modo análogo podríamos continuar haciendo el estudio de ecuaciones más complicadas que las anteriores; pero consideramos por demás aumentar el número de ejemplos, puesto que el procedimiento sería el mismo siempre, sólo teniendo presente que al generalizar las ecuaciones diferenciales hay que derivar según x, y, z, p, r, \dots , etc., extendiendo el círculo de acción á medida que aumenta el número de constantes.

(Continuará.)

XIII.—El Congreso científico internacional de Buenos Aires (10 á 25 de Julio de 1910).

POR E. HERRERO DUCLOUX.

Si se quisiera caracterizar el movimiento científico de nuestra época, buscando aquello que más lo distingue de la ciencia del pasado, no serían sus tendencias utilitarias ni su orientación marcada hacia la especialización, lo que permitiría establecer su carácter propio: á través de los siglos, el espíritu de investigación ha oscilado entre la ciencia pura y la ciencia utilitaria, entre el enciclopedismo y la especialización, entre la verdad y el error.

Lo que distingue al movimiento científico de nuestros días es el sentimiento de solidaridad universal que domina como nunca á los hombres de estudio: la obra de los solitarios es hoy completamente estéril. Nuestro siglo edifica su grandeza maravillosa, preparando el porvenir, como los hormigueros y los enjambres; se han borrado las fronteras, se han aumentado las distancias y los hombres consagrados á una misma ciencia trabajan en conjunto, de común y tácito acuerdo, buscando hasta una lengua internacional para que su unión sea más estrecha y su comunidad de ideas más intensa y más honda.

Es por esta razón que la celebración de un Congreso científico, asamblea de hombres de estudio, sin distinción de nacionalidad ó de raza, es un hecho casi vulgar, ordinario, periódico para muchos ramos del saber. El gran público poco ó nada se preocupa ya de estas reuniones, habituado á verlas sucederse con frecuencia y no alcanzando á pene-

trar en sus resultados: la organización lenta de la clase intelectual, de ese ejército silencioso y pacífico, incansable y desinteresado, que persigue bajo mil aspectos y formas diferentes, á través de innumerables senderos, al parecer divergentes, el ideal de los espíritus selectos que como Berthelot y Pasteur sintieron hondamente el sufrimiento de la humanidad: el mejoramiento de nuestra especie.

Pero que ese Congreso científico se celebre con carácter internacional en una ciudad de la América española, que sólo hace treinta años que vive una vida normal, aunque cuenta con 1.300.000 habitantes, es un verdadero acontecimiento. Y si á esto se agrega que á la invitación del Gobierno argentino han acudido con numerosos representantes 20 naciones diferentes, 28 Facultades é Institutos universitarios, 13 Asociaciones científicas y 46 Corporaciones de todos los países civilizados del mundo, el acontecimiento reviste los caracteres de lo increíble, de lo insospechado, porque revela la existencia de un foco de actividad intelectual desconocido hasta ayer, de un centro de fuerzas cuya potencia de atracción se ha puesto de manifiesto en un momento histórico, cuando se celebraba el primer centenario de la República Argentina, hermana mayor de las repúblicas de origen español, nación que se levanta con asombrosas energías, tierra privilegiada cuya producción desbarata los cálculos más optimistas de los hombres de Estado, y cuyo desarrollo parece quebrar las leyes de la evolución de los pueblos, como si el reloj de la eternidad para ella se hubiese enloquecido é hiciese de las décadas años, y meses de los años.

Origen del Congreso.

El Congreso científico internacional de Buenos Aires no ha sido de iniciativa oficial; su origen, poco conocido, hay que buscarlo en una reunión de Profesores universitarios y

de naturalistas celebrada en el Museo Nacional de Buenos Aires, para significar al Dr. Francisco P. Moreno la satisfacción con que amigos y admiradores habían visto la consagración de sus largos años de labor científica hecha por la Royal Society de Londres, al discernirle la Medalla de Guillermo IV. En esa ocasión el Dr. Moreno, con un patriotismo digno del mayor elogio, manifestó sus deseos de que aquella reunión, convocada en honor suyo, fuese base para constituir un núcleo que honrará á la República, realizando distintas iniciativas, y entre ellas una por él propuesta, y que consistía en llamar á los hombres de ciencia del extranjero, durante las fiestas del Centenario de la Revolución de Mayo, para que visitasen el país, y al mismo tiempo que admiraban sus bellezas naturales pudiesen estudiar sus riquezas, su potencia productora, su actividad comercial, sus nacientes industrias y la vida de sus instituciones científicas.

El pensamiento de este hombre de ciencia halló eco favorable en nuestro ambiente y decidido apoyo en el Gobierno Nacional, y el hecho de ocupar el Dr. Moreno la presidencia de la Sociedad Científica Argentina (*), fué circunstancia favorable para que el proyecto se realizase bajo la dirección de esta prestigiosa institución, agrandado y transformado en Congreso internacional.

En Diciembre de 1908 y Enero de 1909 se celebró en Santiago de Chile el IV Congreso científico latino-americano

(*) La Sociedad Científica Argentina representa en el país un centro de estudios de verdadera importancia; fundada en 1872, á ella se deben iniciativas de interés nacional, exposiciones industriales, expediciones científicas á regiones desiertas, estudios de hidrología y certámenes destinados á estimular el cultivo de la ciencia pura; los 69 volúmenes de sus Anales constituyen una valiosa colección de Memorias que reflejan la ciencia argentina: como el «Instituto Geográfico» y la «Sociedad Médica», se debe al esfuerzo del naciente grupo intelectual del país.

(primero Panamericano) (*), y en él se volcó la producción científica de la República, consagrando los esfuerzos de muchos años ante un núcleo numeroso y selecto de hombres de ciencia convocados en Asamblea por primera vez. Este Congreso, que había sido para nuestro país un triunfo indiscutible, tan próximo al proyectado, nos hacía dudar del éxito de éste último; y no trepido en confesar mis dudas, compartidas por muchos de mis colegas, porque al afirmar que nos habíamos equivocado, se pone de relieve el valor de la voluntad y del entusiasmo, y la intensidad real y creciente de nuestra actividad científica.

Ni la circunstancia de reunirse en Buenos Aires, durante el mes de Mayo, los Congresos de Americanistas y de Medicina é Higiene con una concurrencia notable de especialistas nacionales y extranjeros, fué obstáculo para que el Congreso científico se resintiese en sus trabajos y en sus resultados. A pesar de todas estas coincidencias, al parecer desfavorables, las once secciones comprendidas en el Congreso científico han debido celebrar sesiones diarias, durante más de ocho días, para considerar las Memorias, Monografías y Notas presentadas por los centenares de adherentes, entre los cuales los argentinos ocupaban uno de los primeros puestos.

Los trabajos de organización, presididos por el ingeniero Luis A. Huergo, fueron realizados por un grupo de hombres de estudio, entre los cuales citaré á los doctores Francisco

(*) Los Congresos científicos Latino-Panamericanos se deben á la «Sociedad Científica Argentina». En 1898 se celebró el primero en Buenos Aires por iniciativa del profesor Dr. Angel Gallardo, entonces presidente de la institución citada; la Asamblea se reunió después en Montevideo (1901) y en Río Janeiro (1905), adquiriendo en Santiago de Chile (1908-1909) el carácter de Panamericano, con la representación de los Estados Unidos, en la cual figuraban los profesores Michelson, Shepherds, Smith, Rowe, Curtis, Messes, Derby, Hall y Holmes, entre otros.

P. Moreno, Florentino Ameghino, Pedro N. Arata, Estanislao S. Zeballos, Eduardo Aguirre, Angel Gallardo, Horacio G. Piñero, general Pablo Ricchieri, contraalmirante García Mansilla, é ingenieros Vicente Castro y Marcial B. Candiotti, secundados por jóvenes universitarios entusiastas, colaboradores preciosos de la nueva generación, en la cual ciframos tan grandes esperanzas.

Trabajos del Congreso.

Las once secciones del Congreso, divididas en cincuenta y ocho subsecciones, para poder seguir la ramificación incesante de las ciencias bajo la influencia de la especialización, quizá exagerada, de nuestra época, han tomado en consideración un número tal de trabajos, que imposible sería aun el citarlos en una simple enumeración, sin salir del marco, tal vez demasiado amplio, señalado por mí á estas páginas.

Mis honorables colegas de la Real Academia de Ciencias tendrán ocasión de apreciarlos en su conjunto y detalles en breve plazo, pues la Sociedad Científica ha iniciado ya su impresión, para la cual cuenta con 30.000 pesos (70.000 pesetas próximamente), votados con este fin por el Gobierno Nacional.

Pero, aun á riesgo de cometer inevitables injusticias, dejando olvidados muchos estudios de verdadero mérito, por los límites que me he marcado, no resisto á la tentación de presentar algunos de los temas que más resonancia han tenido, dentro de los grupos de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que la Real Academia abraza.

No citaré las Memorias que sobre problemas especiales de Matemáticas presentaron los profesores Frank, Kundsén, Ferrari, Rebuelto, Dassen, Volterra, Doello Jurado y Mayer, que demuestran el interés que comienza á merecer entre nosotros el análisis superior, ni haré mención de los triun-

fos alcanzados por mi ilustre colega D. Leonardo Torres Quevedo, pues que sus altos méritos ya han sido valorados en el seno de esa Corporación; pero merecen recordarse los proyectos destinados á establecer para los países americanos la numeración de la hora conocida con el nombre de «husos horarios», á constituir una Comisión internacional sismológica subandina y á fijar las condiciones en que debía realizarse la triangulación de nuestro país (*). Las tareas de investigación que nuestros observatorios astronómicos de Córdoba y La Plata han llevado á cabo bajo la dirección de Goul, Thome y Boeuf, fueron apreciadas debidamente por las exposiciones del profesor Perrine, que hoy dirige el primero de estos institutos, como lo habían sido en Chile por los trabajos del doctor Porro, á cuyo cargo se halla el Observatorio platense, ampliado hoy con la Estación de Latitudes de Oncativo (provincia de Córdoba).

Las aplicaciones de las ciencias exactas, en las distintas ramas de la ingeniería, al poner en discusión cuestiones de verdadero interés nacional, demostraron á un mismo tiempo el desarrollo de estos estudios en nuestras escuelas superiores técnicas, comparables á los institutos similares europeos, y la tendencia utilitaria de la ciencia argentina, actualmente arrastrada y solicitada por la corriente de progreso maravilloso que envuelve el país entero, obligando á los hombres de estudio á buscar solución en problemas innumerables que comprometen intereses valiosos, propuestos por el Gobierno nacional ó por los capitales extranjeros.

Los ferrocarriles, que hoy representan más de treinta mil kilómetros de vías de distinto ancho en la República; los canales de riego y de navegación, que pueden transformar

(*) Estos proyectos habían sido estudiados en el Congreso de Santiago de Chile, pero exigían un nuevo estudio de acuerdo con la obra realizada desde entonces para llevarlos á la práctica. (Ver «La Universidad de La Plata en el IV Congreso científico, 1.º Panamericano.» La Plata, 1910).

en corto plazo regiones hoy casi desiertas; los diques de embalse, cuyo valor se aprecia hoy en Córdoba, Tucumán, San Juan y San Luis; las construcciones portuarias que en Bahía Blanca, Concordia, Rosario, Santa Fe y San Nicolás, han comprometido centenares de millones de pesos oro, impuestos á seguro interés, sin contar los capitales absorbidos por el puerto de Buenos Aires, y las proyectadas en Quequén, Uruguay y otras ciudades sobre el Atlántico; la utilización de la hulla blanca y de la hulla verde, que en las provincias andinas y mediterráneas es promesa de riquezas; los caminos y puentes, que el aumento de la población y el comercio interior exigen; en una palabra, todas las necesidades ineludibles que trae aparejadas el crecimiento inesperado de la riqueza nacional, han sido estudiadas en Monografías, Memorias y libros de nuestros técnicos, entre los cuales descuellan Romero, Mercan, Wanters, Soldano, Lange, Segovia, Genta, Selva, Amespil, Durrien y Castro.

Las ciencias geológicas, que en la Argentina han tenido desde larga fecha cultivadores tan eminentes como Darwin D'Orbigny, Heuser y Claraz, Burmeister, Brackebusch, Steinmann, Hauthall, Valentín, Delachaux y Burkhardt, entre los ausentes, han dado nombre á los que todavía se hallan en plena labor, como Ameghino, Roth, Moreno, Doering, Bodenbender, Keidel, Hermitte y Aguirre, y han sido las sesiones de este Congreso ocasión oportunísima para demostrar lo que se hace, y la obra inmensa á realizar en este campo de investigación. Las valiosas contribuciones de la Oficina técnica que dirige el Dr. Moreno para construir el mapa hidrológico de la provincia de Buenos Aires, la más extensa y rica del país; los estudios del Dr. Davis sobre climatología argentina con su red de centenares de oficinas meteorológicas sembradas en nuestro territorio, funcionando en correlación con los puestos de observación de Paraguay, Uruguay y Brasil meridional; los trabajos de Lange y Wolf, sobre hidrometría, fundados en observaciones de varios

años efectuadas en las Estaciones hidrométricas, muy numerosas, establecidas desde 1900; y, en fin, las monografías de especialistas que han estudiado algunos de nuestros ventisqueros, fracciones de la cordillera andina, regiones limitadas de las costas patagónicas, puntos señalados en la mesopotamia argentina ó productos naturales como el petróleo, los lignitos y los minerales de metales nobles y raros, forman un conjunto digno de figurar como jalones de mérito en esos mil senderos recién abiertos, donde hay tanta gloria para los hombres, y tantas riquezas para el Estado.

No ocupan un lugar menos señalado las ciencias biológicas. Las huellas de Azara, Hieronymus, Lorentz, Kurtz, Lynch, Berg y Spegazzini, seguidas por Holmberg, Gallardo, Lahille, Hickey, Lillo, Bertoni, Bruch, Fernández, Brethes y Scala, entre los que podrían citarse, nos han llevado á poder contar en la actualidad con una bibliografía valiosa en estas materias, que se halla repartida en el *Boletín de la Academia Nacional de Ciencias*, en Córdoba, en los *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*, en la *Revista y Anales del Museo de la Plata*, en los *Anales del Ministerio de Agricultura* y en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*.

La sección correspondiente á las ciencias antropológicas fué, sin duda alguna, la que más sobresalió por la profusión de trabajos presentados por argentinos y extranjeros. Los temas, que tan de cerca tocan los enigmas del universo, dieron á las sesiones un carácter particular: el problema del origen y de la antigüedad del hombre en América bastaba por sí sólo para absorber la atención de los miembros del Congreso, al considerar los trabajos de Ameghino, Roth, Sevet y Bertoni, eruditos, de proyecciones vastísimas y hasta si se quiere revolucionarios. Las razas indígenas extinguidas, ó casi desaparecidas, que Lehmann, Nistche, Ten Kate, Ontes y Ambrosetti han estudiado en libros y Memorias de indiscutible valor, merecieron por parte de Lahille, Marelli, Torres y Debenedetti, entre otros, una atención especial,

debiendo mencionarse las contribuciones originales de Larre Quevedo, Spegazzini, Bertoni y Wehler al conocimiento de las lenguas que se hablaron en la parte meridional de la América del Sur.

No concluiré esta revista, incompleta y rápida (*), sin citar los trabajos de una Sección que se incorporó al Congreso, después de haberse redactado el programa oficial del mismo. Me refiero á la Sección de Ciencias Agrarias, tan íntimamente ligada á los vitales intereses del país y que ya cuentan con dos institutos de enseñanza superior entre nosotros, sin contar los establecimientos de enseñanza agrícola de carácter secundario que funcionan en Santa Catalina (provincia de Buenos Aires), dependientes de la Universidad Nacional de La Plata, y en Córdoba, Villa Casilda (Santa Fe), Mendoza, San Juan, Tucumán, Las Delicias (Entre Ríos) y otras más dependientes del Ministerio de Agricultura. Los ingenieros agrónomos argentinos Girola, Nelson, Gil, Amadeo, Raña, Huergo, Pagés, como los veterinarios Griffin, Agote, Sívori, Rivas, Zanolli y muchos más de ambas carreras que trabajan y estudian, forman ya un núcleo que ha organizado la investigación científica sobre una base sólida, adelantándose en muchas ocasiones á estados europeos por la perfección de los servicios técnicos establecidos como reparticiones oficiales ó empresas particulares (**).

(*) Los trabajos de la Sección de Ciencias químicas, en el Congreso de Medicina é Higiene de Mayo del corriente año, fueron tan intensos y extensos á un tiempo, que quitaron brillo á la misma Sección en este Congreso, sin que esto signifique que estas ciencias no hayan alcanzado un estado de gran perfeccionamiento en la República, como veremos en el capítulo siguiente.

(**) La Exposición internacional de Agricultura, celebrada en Buenos Aires en los meses de Julio, Agosto y Septiembre, ha puesto de manifiesto el estado de adelanto de los institutos de enseñanza superior y secundaria, dedicadas á esas disciplinas, de las oficinas nacionales y de la Sociedad Rural Argentina.

Resultados del Congreso.

El éxito de un Congreso, cualquiera que sea su naturaleza, no se juzga por la duración de sus sesiones, ni por el número de los temas discutidos, ni siquiera por la profusión de las conclusiones adoptadas: de estos tres puntos de vista, el Congreso científico internacional de Buenos Aires podría valorarse muy ventajosamente y, sin embargo, no es este el aspecto que permite apreciar justamente el éxito alcanzado.

El pensamiento del Dr. Francisco P. Moreno se ha realizado, y esto representa un triunfo para la asamblea; un grupo numeroso y selecto de hombres de ciencia extranjeros han venido á Buenos Aires, han vivido entre nosotros, han visitado las ciudades y centros de producción que particularmente les interesaban, han estudiado nuestro ambiente, han entrado en relación estrecha con nuestros hombres de estudio y de trabajo, y como prueba de estima, han honrado las Cátedras de nuestras Facultades y Corporaciones científicas con sus conferencias originales.

Además, el Congreso científico ha permitido demostrar ante esos ilustres extranjeros, que una *clase intelectual* comienza á destacarse en el país, como consecuencia de la vida intensa que han alcanzado nuestras Universidades, cuyos estudios dirigen centenares de Profesores titulares, suplentes y extraordinarios, y cuyas aulas frecuentan millares de estudiantes. Es verdad que todavía nos falta mucho camino hasta que podamos enorgullecernos de nuestro Profesorado universitario con los títulos de las viejas naciones europeas; las condiciones especialísimas de nuestro medio se oponen á que el tipo del *Profesor*, que vive en los laboratorios de Charlottenburg, Zurich, Jena, París, Ginebra y Bonn, ó enseña en las Cátedras de Madrid, Barcelona, Salamanca, Oxford, Oviedo, Toulouse ó Gante, se generalice hasta formar una *clase*; y del mismo modo, nuestro estudiante no es el tipo que frecuenta el Barrio Latino ó las ca-

lles seculares de Gotinga. Pero conviene no olvidar que si nuestras instituciones universitarias poseen hoy gabinetes, laboratorios y bibliotecas, dotados convenientemente para permitir la experimentación y la investigación, todos datan de ayer, y en este terreno nada puede improvisarse (*).

La ciencia desinteresada no atrae, no puede atraer, á un gran número de hombres, profesionales ó estudiantes, en un medio que exige de los primeros un esfuerzo extraordinario, intenso y múltiple, ofreciendo á los segundos rumbos seguros hacia el bienestar y aun hacia la riqueza. Poco á poco se irá produciendo la sedimentación en este torbellino, y nuestros Profesores universitarios no serán otra cosa que Profesores, abandonando sus tareas de Ingeniero, Médico, Químico ó Jurisconsulto, para vivir de la enseñanza y para la enseñanza, haciendo investigación científica fuera del aula, siguiendo los Profesores del ramo de su predilección y contribuyendo á ese progreso; y del mismo modo, entre el grupo estudiantil, irá aumentando ese grupo, hoy escaso, de los que con su labor paciente, metódica, concienzuda, con iniciativas propias, hacen del estudio la ocupación exclusiva de su vida, completando, perfeccionando y aumentando la enseñanza recibida en el aula ó en el laboratorio, porque buscan en una carrera el desarrollo de sus aptitudes,

(*) Para conocer la importancia actual de nuestras Universidades de Córdoba, Buenos Aires y La Plata, así como su origen y desenvolvimiento, pueden consultarse las publicaciones siguientes:

Fr. Zenón Bustos, *Anales de la Universidad de Córdoba*, I, 1901; II, 1902; III, 1910

N. Piñero y E. L. Bidau, *Historia de la Universidad de Buenos Aires*, en *Anales de la Universidad*, III, 189. Buenos Aires, 1889.

Rectorado de la Universidad, *La Universidad de Buenos Aires (1821-1910)*. Buenos Aires, 1910.

Joaquín V. González, *La Universidad de La Plata*. Buenos Aires, año 1905.

E. Herrero Ducloux, *La enseñanza de la Química en la Universidad de la Plata*. Buenos Aires, 1909.

la adquisición de medios para la lucha, y no solamente el diploma, patente de lucro, espadón inútil si se ignoran los secretos de la esgrima.

No insistiré en una enumeración de los votos formulados por el Congreso; pero sí recordaré, por lo que á España corresponde, dos hechos transcendentales que considero resultado directo de aquél, por iniciativa de nuestro ilustre colega D. Leonardo Torres Quevedo.

Me refiero á la constitución de una Unión Internacional Hispanoamericana de Bibliografía y Tecnología científicas y á la creación de una Academia de Ciencias en Buenos Aires, obras las dos que acercarán las naciones americanas á la antigua Metrópoli y contribuirán, sobre todo la primera, á acrecentar el prestigio de nuestra lengua.

Representa la primera una protesta enérgica contra el estado actual de la producción científica publicada en español enfrente de los idiomas extranjeros y un esfuerzo para alcanzar la colaboración internacional, la unión de los pueblos hispanoamericanos, que si representan hoy 60.000.000 de habitantes, dentro de cincuenta años constituirán una fracción considerable de la humanidad.

Como decían el Sr. Torres Quevedo y el ingeniero Santiago E. Barabino al presentar el proyecto, hay que depurar, perfeccionar, unificar y enriquecer nuestro lenguaje tecnológico, teniendo en cuenta las necesidades científicas, las exigencias de nuestra Gramática y la mayor ó menor difusión de los neologismos ya admitidos; hay que hacer un inventario de nuestra producción científica, ya que—aun siendo escasa—, por el poco aprecio en que la hemos tenido y por el alejamiento en que hemos vivido unos de otros, apenas ya nos conocemos; y hay que completarla, llenando ciertas lagunas de importancia, de tal suerte, que baste saber castellano para enterarse de todo lo más importante, de todo lo fundamental que se haya escrito sobre una disciplina científica cualquiera.

Y estos pensamientos, que no pueden ser realizados por un hombre ó por una nación, lo serán por los medios que concierte la Junta Internacional que residirá en Madrid y las Juntas Nacionales de los Estados que se adhieran á la Unión. Desde luego ya se establecen como funciones de la primera, formada por delegados de los países adherentes, los trabajos siguientes:

a) La reunión y clasificación de los materiales preparados por las Juntas Nacionales, cuya labor dirigirá y unificará.

b) La formación del catálogo de las obras de índole científica publicadas en lengua castellana y la creación y dirección de una revista bibliográfica destinada á completar y continuar dicho catálogo.

c) La redacción y publicación de un Diccionario tecnológico de la lengua castellana, restableciendo en él todas las voces castizas cuando fuese posible, aceptando y definiendo los neologismos que considere convenientes y proponiendo otros, siempre que se estimare necesario.

d) Completar la literatura científica y técnica de la lengua castellana, haciendo traducir las obras más importantes de otros idiomas y todas las que pueden considerarse fundamentales en los distintos ramos del saber, editando aquellas obras que, aunque escritas en español, no interesen sino á reducido público y no permitan su publicación económica por sus autores.

e) Gestionar ante los Gobiernos que constituyen la Unión la eficaz garantía de la propiedad literaria.

f) Realizar gestiones para que se admita el castellano en las reuniones científicas de carácter internacional.

g) Fomentar, por todos los medios posibles, las relaciones intelectuales entre los países de habla castellana.

h) Redactar y someter á la aprobación de los Gobiernos interesados el presupuesto de gastos necesarios para el cumplimiento de sus fines, administrando los fondos votados

por las naciones adherentes ó donados por particulares.

El proyecto se halla perfectamente encaminado y al prestigio de su iniciador se ha sumado el voto unánime del Congreso en su sección de Ingeniería, el aplauso de la asamblea de clausura y el apoyo del Congreso Panamericano de carácter político que celebraba sus sesiones en Buenos Aires en esta misma época.

La creación de una Academia de Ciencias en Buenos Aires parece á primera vista de poca importancia, porque se piensa en una corporación formada por nombres y no por hombres: nada tan distante de la realidad. El núcleo que se ha constituido es de hombres de estudio, profesores universitarios ó sabios que han alcanzado renombre más allá de nuestras fronteras, decididos á llamar para llenar los claros, los puestos vacantes hasta el número de treinta y seis, á aquéllos de nuestros estudiosos que se distinguen en los distintos grupos de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

La Academia de Ciencias de Buenos Aires—que en breve será reconocida por el Poder ejecutivo como Academia Nacional—establece en su acta de fundación, que será correspondiente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid (*), debiendo entenderse por tal correspondencia, relaciones íntimas de colaboración en una obra común entre los hombres que hablan una misma lengua.

La nueva institución no es un rodaje inútil que se introduce en la vida del país—y si en tal se transformase prefe-

(*) Una de las dos actas labradas el día de la fundación (25 de Julio de 1910) por resolución de la asamblea ha sido entregada al Sr. Torres Quevedo, que también firmó dichos documentos. Los Académicos fundadores son los doctores Florentino Ameghino, Pedro N. Arata, Angel Gallardo, Francisco P. Moreno, Claro C. Dassen, Atanasio Quiroga, Manuel B. Bahía, Francisco P. Lavalle, Cristóbal M. Hickeu, Ing. Otto Krause, y doctor E. Herrero Ducloux, habiéndose elegido como Presidente al doctor Arata, y como Secretario al último de los nombrados.

rible sería su supresión;—es un cuerpo cuyas funciones están señaladas de antemano; es una comisión permanente de consulta á disposición del Gobierno Nacional; es un grupo que puede dirigir y estimular el movimiento científico del país; es una corporación que debe representar á la República en el extranjero; es un centro de publicaciones que dispondrá de recursos como ninguna sociedad posee; y, además, constituye un estímulo para los que entre nosotros estudian, poco apreciados y considerados por este simple título, como lo hacía notar en enérgicas frases el Dr. Gallardo en ocasión solemne (*), y lo repitió como un eco nuestra prensa diaria.

Hacia el porvenir.

He ahí algunas notas que reflejan la importancia del Congreso científico internacional de Buenos Aires de 1910; en su misma incorrección, suficientes las juzgara si en ella hubiese logrado traducir mi entusiasmo por el progreso de la República, tierra bendita donde reina el trabajo alegre y la alegría trabajadora soñados por el gran Echegaray, y donde, como anhela Zozaya, no se pregunta á un hombre de qué tierra viene ni cuál es la patria de su nacimiento, sino dónde sembró beneficio.

Vamos hacia el mañana con un horizonte amplísimo, modelando un pueblo fuerte, sano, culto, en medio del bienestar general, con el ramo de olivo en nuestras fronteras y la tranquilidad interior al amparo de instituciones consolidadas. Asimilase el extranjero en corto plazo á la tierra, y son sus hijos raíces poderosas para él y ramas llenas de promesas para la patria nueva, formada por todos los hombres que,

(*) ANGEL GALLARDO, *Discurso en la colación de grados*, en la *Revista de la Universidad de Buenos Aires*. Buenos Aires, 1909.

reunidos por el dolor, se redimen y levantan por el trabajo (**).

En ningún país como en la Argentina puede decirse que no es la patria solamente la tierra donde se nace, pues que el nacer no es obra de la voluntad; patria es el surco donde el sembrador cae después de la jornada, es el yunque sobre el cual se desploma el forjador tras el trabajo rudo. Nuestro río Paraná, motivo de justo orgullo, extranjero sería por su origen lejano, en tierras inundadas de sol, y sin embargo, argentino es cuando uniéndose al Uruguay forma el inmenso Plata, porque al atravesar el territorio de la República ha fecundado su suelo y ha derramado con su onda la vida y la riqueza sobre los pueblos.

Entramos en el segundo siglo de vida libre á la cabeza de las naciones hispano-americanas; hagamos votos porque el año 2010 sorprenda á la República, poblada por cien millones de habitantes que entonen sus himnos á la vida, en la paz y en el trabajo, en la sonora, rica y hermosa lengua de Cervantes.

Agosto de 1910.

(**) Alma fuerte define así, en una de las estrofas del himno que cantan nuestros hijos en las escuelas, la reunión de los pobladores que los vientos todos de la rosa traen á nuestras playas.

XIV. — Contribución al estudio de las esencias españolas.

Esencia de mejorana silvestre.

POR BERNABÉ DORRONSORO.

Diferentes plantas han recibido la denominación vulgar de *mejorana*: la verdadera, ó sea el *Origanum Majorana* L; la *mejorana silvestre*, que es el *Thymus Mastichina* L; y por fin, la *mejorana dulce*, como se llama impropriamente á la *Calamintha Nepeta*, Hoffm., en la región mediterránea de Francia.

Acerca de la esencia extraída de la primera planta se han publicado algunos trabajos por Murder, Beilstein y Wigaud (*); pero su conocimiento es todavía muy imperfecto. Respecto de la tercera, sólo tenemos noticia de los realizados por Genvresse y Chablay (**), que son incompletos. En cuanto á la procedente del *Thymus Mastichina* nada he visto que se haya hecho, no obstante ser una esencia que en España se produce en proporciones considerables, y que se exporta en cantidades algo notables (***) .

(*) Ber. D. chem G. 15-2854.

(**) Chem. Zeit. 26 (1902), p. 501.

(***) Este fenómeno se repite con la mayor parte de las esencias españolas, en particular con las procedentes del Centro y del Sur, y se debe en gran parte á que el comercio español de esencias remite al extranjero, ordinariamente, mezclas muy variables y no los productos puros. El hecho, que ha originado en poco tiempo el descrédito de nuestras esencias, sumándose á otras circunstancias del comercio mundial, ha arruinado en plazo breve esta industria tan flo-

Destílese en abundancia en el Sur y el Centro de España (no sólo en la región granadina, sino en las limítrofes de Málaga y Almería, y hasta en la de Cuenca), y se aumentaría la producción si hubiese mayor demanda que hiciese los precios más remuneradores. Entiendo puede acontecer tal cosa para esta esencia, conocida su composición, pues se ve que es susceptible de nuevas aplicaciones.

He analizado esencias de mejorana, que bien puede llamarse *española*, de años distintos y de diversas procedencias (*), de origen auténtico, y he hallado en todas ellas gran constancia en la composición cualitativa, variando la cuantitativa dentro de ciertos límites; y aunque mis investigaciones sean al presente incompletas, y me proponga continuarlas y extenderlas á otras esencias españolas, creo que los resultados ya obtenidos debo publicarlos, porque ofrecen algo de particular.

Caracteres de la esencia de mejorana española.—Es de color amarillo claro, que con el tiempo obscurece algo; á veces ligeramente verdosa, limpia ó apenas turbia, de olor canforáceo que, á la par, recuerda el del tomillo.

reciente al principio, pues proporcionó, y podría seguir proporcionando, emprendiendo otros derroteros, pingües rendimientos. El afán insaciable de lucro de unos pocos, y nuestra incultura general, han agotado este venero apenas comenzada su explotación, secando una fuente de riqueza muy importante para algunas regiones españolas en que abundan los terrenos cuyo único fruto son las plantas aromáticas. ¡Cómo contrasta tal conducta con la seguida en Sicilia y Calabria, donde, estimando en su verdadero valor la fabricación y comercio de las esencias que se producen en su suelo, y que constituyen una de sus mayores riquezas, han establecido un Sindicato que vela con todo rigor por la pureza de los productos y la seriedad de las transacciones comerciales, manteniendo así cada vez más floreciente este ramo de su producción!

(*) Las esencias que hemos utilizado nos han sido generosamente donadas por los Sres. D. Rafael Sánchez y D. José González, de esta ciudad, á los que me complazco en expresar aquí mi gratitud. Una esencia de 1898, que también me ha servido, la poseía hace tiempo, desde que inicié estos trabajos.

Las constantes físicas de las esencias examinadas, son las siguientes:

	ESENCIAS DE				
	1898	1902	1908	1. ^a de 1909	2. ^a de 1909
	Densidad — D_{15}^{20}	0,945	0,921	0,908	0,9155
Indice de refracción n_D^{23}	1,4653	1,4645	1,4640	1,4630	1,4654
Rotación en tubo de 2 decímetros.....	$a_D^{25} - 1^{\circ}40'$	$a_D^{15} + 5^{\circ}40'$	$+ 9^{\circ}20'$	$a_D^{25} + 3^{\circ}38'$	$+ 9^{\circ}$

Solubilidad.—Apenas si se disuelve algo en el agua; es soluble en el alcohol de 94° en todas proporciones y en el éter. La solubilidad en el alcohol más débil, es la siguiente:

	ESENCIAS DE			
	1898	1902	1908 y 1909—2. ^a	1909—1. ^a
Alcohol de 90°	1 vol. en 1 vol.	1 vol. en 0,5 vol.....	1 vol. en 0,5 vol.	1 vol. en 0,5 vol.
— de 80°	1 vol. en 2 vol.	1 vol. en 3,7 vol.....	1 vol. en 2 vol.	1 vol. en 2 vol.
— de 70°	1 vol. en 5 vol.	1 vol. en 20 — 30 vol.	1 vol. en más de 30 vol.	1 vol. en 12— 15 vol.

Punto de ebullición.—La esencia comienza á hervir á la temperatura de 85° á la presión de 710 m. m. con grandes sobresaltos; pronto se eleva la temperatura á 160°, haciéndose la ebullición regular. Sometida á la destilación fraccionada á esta presión, se han obtenido los resultados siguientes, con la esencia de la campaña de 1909:

FRACCIONAMIENTOS		Tanto por 100 de producto destilado.
P = 710mm	Entre 85° - 110°...	3,10
	— 110° 160°.....	3,65
	— 160° - 170°.....	23,10
	— 170° - 180°.....	36,90
	— 180° - 195° (*).	7,40
	Residuo.....	25,93

Destilada la misma esencia á presión reducida (98—100 mm.), los resultados son distintos; se consignan en el cuadro siguiente, con el índice de refracción y la rotación de cada uno de los fraccionamientos (esencia de 1909).

(P = 98 — 100 mm.) — Temperaturas.	Tanto por 100 de producto destilado.	n_D^{22}	Rotación a_D^{20} para 1 decim.
Hasta 100° (**).	2,65	1,4600	+ 3°41'
Entre 100° y 110°.	43,00	1,4602	+ 4°
— 110° y 120°.	28,53	1,4605	+ 1°58'
— 120° y 125°.....	6,25	1,4617	cero
— 125° y 145°.....	10,25	1,4657	— 3°
— 145° y 160°... . .	3,75	1,4718	— 4°10'
— 160° y 175°.	3,05	1,4784	— 1°55'
Residuo.....	2,50	»	»

(*) Pasada esta temperatura, el residuo se oscurece mucho y se nota descomposición de la materia.

(**) Este fraccionamiento se separó en dos capas; una acuosa ácida, y la otra oleosa; los datos n y a se refieren á ésta.

Estudio químico.—Se comenzó por determinar el índice de saponificación y el de acetilación de la esencia, obteniéndose los siguientes resultados:

	ESENCIAS DE				
	1898	1902	1908	1909-1. ^a	1909-2. ^a
Índice de saponificación IS	18,5	14,3	16,3	12,7	17,00
Eter % de esencia calculado en acetato de linalilo (C ¹⁰ H ¹⁷ O.CO.CH ³).	6,47	5,00	5,70	4,44	6,09
Índice de acetilación IA (ó sea el de saponificación después de acetilación).....	42,4	38,0	49,3	29,2	45,6
Alcohol % de esencia calculado en C ¹⁰ H ¹⁸ O libre.....	12,05	10,75	14,09	8,20	13,00

Conocidos estos datos, se procedió, después de numerosos ensayos y tanteos parciales, según el método siguiente, para la investigación de los diferentes cuerpos que constituyen la esencia.

Cinco kilogramos de ella se agitaron sucesivamente con distintos volúmenes de solución de carbonato sódico al 10 por 100. Reunidos los líquidos alcalinos y lavados con éter, se destinaron á investigar los *ácidos libres* de la esencia.

Lavada ésta con agua, se la agotó por diferentes porciones de lejía de sosa al 5 por 100 primero, y luego al 10-12 por 100, decantando bien en cada caso el líquido alcalino: reunidos éstos y agitados con éter para privarles del olor de esencia, se reservaron para la investigación de los *fenoles*.

La esencia privada de estos cuerpos y bien lavada con agua para quitar el álcali, se agitó con solución saturada de bisulfito sódico, por dos veces, para separar *aldehidos* y *ce-tonas*.

La parte oleosa restante se saponificó con solución alcohólica de sosa al 20 por 100, operando en baño de María con

refrigerante á reflujó y á la ebullición por una hora: el líquido frío se vertió sobre 5 litros de agua y se decantó la capa acuosa, en la que se buscarán los *ácidos de los éteres* de la esencia, y la capa oleosa sometida á un arrastre por el vapor de agua, se desecó sobre sulfato sódico anhidro y se sometió á la destilación fraccionaria para investigar en las distintas porciones los *terpanos, óxidos, alcoholes*, etc.

Investigación de los ácidos libres.—La solución de carbonato sódico en que habían de encontrarse, se neutralizó incompletamente por ácido sulfúrico y se evaporó hasta la mitad de su volumen. Este líquido se dividió en dos partes: una de ellas se llevó á sequedad, y el residuo se agotó por alcohol de 96°; los líquidos alcohólicos destilados dejaron un nuevo residuo de sales sódicas de los ácidos orgánicos, poco abundante, en el cual se caracterizaron bien: el *ácido acético* por la reacción con el cloruro férrico, y por el olor y el punto de ebullición de su *éter etílico*; y el *ácido isovalérico* por el olor y el punto de ebullición del *éter isoamilvalérico*. Existe, además, *otro ácido* que precipita por las sales argénticas y plúmbicas en blanco, y en rojo pardo por el cloruro férrico: pero su corta proporción ha impedido hacer su estudio, que nos reservamos para más adelante, cuando podamos poseerle en cantidad mayor.

La otra porción de la solución alcalina, al acidularla francamente por el ácido sulfúrico, se enturbió, desprendiendo olor valerianico y á la vez aromático; sometida á la destilación produjo un líquido ácido aromático (con olor á limón), que no dió coloración alguna con el reactivo bisulfito-fuschina, y el que, saturado por carbonato sódico y evaporado, permitió caracterizar de nuevo los ácidos acético y valérico. El residuo del matraz contenía un depósito pardo, poco soluble en el alcohol, soluble en el éter, y esta solución evaporada deja corta cantidad de un cuerpo sólido, blando, pardo ácido, que falta por estudiar.

Investigación de los fenoles.—Las soluciones alcalinas en

que éstos deben encontrarse, se agitaron con éter repetidas veces hasta quitarles la esencia interpuesta. El éter evaporado dejó un residuo líquido de olor canforáceo. A la solución sódica se agregó, poco á poco, ácido clorhídrico, hasta acidez franca: el líquido se puso turbio y adquirió olor fenólico. Se la agotó repetidas veces con éter, decantando siempre con cuidado, y los líquidos etéreos reunidos se destilaron, quedando un residuo viscoso, pardo, trasparente, de olor fenólico especial, distinto del propio del timol, y que no se puede referir á ninguno de los fenoles conocidos.

Es digno de anotar que, á pesar de tratarse de la esencia de un *Thymus*, de la que debía esperarse produjera una cantidad de fenol considerable, sólo se obtuvo un residuo fenólico que pesaba poco más de cinco gramos. Repetidas operaciones sobre nuevas cantidades de esencia, procediendo con el mayor cuidado, no han superado aquel rendimiento.

Este líquido pardo es casi insoluble en el agua, poco soluble en el alcohol y en el benzeno. La solución acuosa no da coloración con el cloruro férrico, ni la alcohólica verde con el mismo reactivo. El punto de ebullición que se determina mal por la escasa proporción de materia y sus impurezas, se halla entre 230 y 240°. Estos caracteres parecen corresponder al *timol*; pero el olor diferente y la dificultad grande observada para la cristalización (*), así como el no producir la coloración roja con el cloroformo y la potasa, no autorizan una afirmación terminante, si es este fenol ó una mezcla con otro distinto. Se ha intentado también producir con tal cuerpo, después de repetidas soluciones y evaporaciones en el benzeno y el alcohol, el *nitroso timol* y el *ácido o-timótico*, derivados característicos del timol; pero las im-

(*) Después de cuatro meses y aun introduciendo en la masa siruposa un fragmento de timol, sólo se han conseguido muy pocos cristales pequeñísimos, imposibles de separar de la masa.

purezas existentes en el cuerpo de que se trata han impedido obtener compuestos bien cristalizados y de caracteres precisos. Nos proponemos seguir este estudio, procediendo sobre cantidades mayores.

Aldehidos y cetonas. — La solución bisulfitica en que podían hallarse, lavada repetidamente con éter para eliminar la esencia que la impregnaba, se alcalinizó después con lejía de sosa, originándose un enturbiamiento y desarrollo de *olor vinoso*. Se agitó con éter por tres veces, y éste se tiñó ligeramente de amarillo, y destilado, quedó un residuo líquido, amarillo, de olor fuerte, como á hierba machacada. Este residuo pardea pronto al aire.

Tratándole por el alcohol, se disolvió. Una parte de la solución alcohólica se destinó á la reacción de Doebner, para identificar los aldehidos (formación de los ácidos β -nafcincinónicos α alcoholados por la acción del ácido piruvico y la β -naftilamina), sin que se produjera cuerpo alguno cristalizado. Tampoco produce la solución alcohólica la reacción de aldehido con la fuschsina-bisulfitada, ni reduce el reactivo Tollens. Todas estas reacciones indican que no se trata de un aldehido.

Para investigar si se trataba de una cetona, se intentó preparar la cetoxima correspondiente por el método de Crismer (*), sin resultado alguno; ni tampoco hidrazona cristalizada por el método de E. Fischer (**); ni semicarbazona por el procedimiento recomendado por Zelinski (***). La corta cantidad de substancia de que se disponía impidió continuar estas investigaciones, examinando si se habían producido compuestos oleosos, cual sucede con diversas cetonas, que por este hecho resultan más difíciles de caracterizar.

(*) Bull. Soc. chim, París-(3)-314 (1890).

(**) Ber. D. chem. G. **16**, 661 (1883); **17**, 572 (1884), **22**, 90 (1889).

(***) Ber. D. chem. G. - **30**, 1541 (1895).

Como por otra parte la cetona podía ser de las que forman mal el compuesto de adición con el bisulfito sódico, se repitieron los intentos de producir la oxima, la semicarbazona y las hidrazonas sustituidas correspondientes sobre la esencia natural y sobre aquellos fraccionamientos en los que se suponía que podría hallarse, sin lograr resultados positivos.

Investigación de los ácidos de los éteres de la esencia.—El líquido acuoso alcalino procedente de verter en agua el producto de saponificar la esencia privada de los principios anteriores, se destiló para eliminar el alcohol; al líquido alcalino acuoso restante se agregó ácido sulfúrico diluido hasta neutralización exacta, y se evaporó á sequedad. Por el alcohol absoluto, se extrajeron del residuo salino las sales sódicas de ácidos orgánicos, y se las obtuvo por destilación, coloreadas en pardo. Disueltas en agua, tratadas por carbón animal y nuevamente evaporadas, se demostró en ellas, de manera análoga á la que sirvió para examinar los ácidos libres, la existencia de proporción notable de *ácido acético*, otra menor de *ácido isovalérico* y una mucho más pequeña de un *ácido sólido* que probablemente es el mismo hallado libre y que, como antes se dijo, quedó incompleto su conocimiento.

Investigación de los terpenos, óxidos y alcoholes.—La parte oleosa ya saponificada y separada del líquido alcalino, se sometió á un arrastre por el vapor de agua, con fraccionamientos sucesivos, y éstos, después de desecados por el sulfato sódico anhidro, á una destilación fraccionada á la presión ordinaria, investigando en cada porción los cuerpos que pudieran hallarse, teniendo en cuenta su punto de ebullición.

Pineno.—Se le buscó en las porciones hirvientes por bajo de 168° ($P = 710$ m. m.), que eran las más dextrogyras. Al tratar de obtener el clorhidrato por la acción del gas clorhídrico seco sobre la porción de esencia enfriada á -15° en una mezcla de sal común y hielo, se produjo una abundante cristalización de un cuerpo blanco amarillento que solidificaba

toda la masa; cuando se trató de recoger estos cristales enjugándolos por la trompa, se convertían en un líquido pardo, desapareciendo por completo á la temperatura ordinaria. Este fenómeno no podía ofrecerlo el mono-clorhidrato de pineno que había de producirse en las condiciones del experimento; más bien podía ser motivado por la presencia abundante del *cineol*, lo que se confirmó luego por otras reacciones.

En su vista se trató de preparar el *nitrosocloruro* empleando el método de Wallach (*) con buen éxito, sobre todo mediante el nitrito de etilo. Los cristales sedosos obtenidos purificados por disolución en el cloroformo y precipitación por el alcohol metílico, eran sedosos, blanco rosados, nacarados, su punto de fusión 103°, y disueltos en cloroformo daban un líquido sin actividad óptica.

Para confirmar que se trataba del nitrosilcloruro de pineno se le transformó en *pinenonitrol piperidina* (**), cuyo punto de fusión se vió era 118-119° y otra parte en *pinenonitrolbencilamina* (***) que después de cristalizada en una mezcla de alcohol y éter, fundía á 122-123°. Quedó con esto bien demostrada la presencia del *pineno*, y dada su rotación, se trata del δ *pineno*.

Limoneno.—No ha podido demostrarse su existencia en la esencia objeto de este trabajo. Se intentó preparar con la porción hirviente entre 170° y 180°, disuelta en el ácido acético cristalizable, el tetrabromuro sólido (****) fusible á 104-105°, sin éxito.

(*) *O. Wallach*.—Ann. der Chem. 245 (1889), 241 (Bull. Soc. Ch. 1889-1-761) y Ann. der Chem. 253 (1889) 249 (Bull. Soc. Ch. 1890-757).

(**) *O. Wallach*.—Ann. der Chem. 245 (1889), 241.

(***) *O. Wallach y Conrady*.—Ann. der Chem. 227, 278 (Bull. Soc. Ch. (1886) 1.728).

(****) *O. Wallach*.—Ann. der Chem.—252, 130 y 268, 220 (Bull. Soc. Ch. (1890) 1.630 y (1893) 2.447).

Dipenteno.—Tampoco he podido probar su existencia por formación del tetrabromuro, empleando el método de Baeyer y Williger, que es la reacción más característica (*).

Felandreno, sabineno, terpineno canfeno.—Ninguno de estos terpenos se ha podido demostrar en la esencia de mejorana española, no obstante haber empleado los métodos recomendados como más seguros para su identificación, tales como: la formación del nitrito para el felandreno (**), del diclorhidrato (***) y del nitrosito (****) para el terpineo; del ácido sabinénico (*****) para el sabineno, y la del canfeno por su hidratación para convertirlo en isoborneol (*****).

Cineol ó Eucaliptol.—La presencia de este cuerpo en la esencia del *Thymus Mastichina* en proporción tan considerable como poco esperada, tratándose de una planta de este género, me había inducido á errores al principio de estas investigaciones, porque el olor fuertemente canforáceo de ella me hizo suponer existía una gran cantidad de alcanfor (*****).

(*) Bull. Schimmel. Oct. 1903.

(**) Wallach y Beschke.—Ann. der Chem. 336, 9 (1904). Bull. Soc. Ch (1905) 2, 1.522.

(***) Wallach.—Ann. der Chem. 350, 141 (1906).—Bull. Soc. Ch. (1903) 2, 709.

(****) Wallach.—Ann. der Chem. 239, 35 (1887).—Bull. Soc. Ch. (1888) 1.545.

(*****) Wallach.—Ann. der Chem. 357, 77 (1908).—Bull. Soc. Ch. (1909) 2.187. La formación del ácido sabinénico como producto de oxidación de la esencia de mejorana silvestre tenía para este estudio un interés particular, porque Wallach dice haberlo hallado oxidando con permanganato la porción 165-167° de la esencia de mejorana verdadera, así como la de Cardamomo de Ceilán, y esta última contiene cantidad notable de cineol, como sucede con la de mejorana silvestre.

(***** Bertram y Walbaum.—J. prakt. chem. (2) 49-3.—Bull. Soc. Ch. (1894) 2.731. Bull. Schim. Oct. 1897, p. 68.

(***** Había intentado varias veces obtenerlo por congelación de la esencia y de los fraccionamientos en que suponía habría de hallarse, sin resultado alguno. Tampoco había podido obtener la óxima.

La formación del compuesto sólido, tan abundante y delicuescente, por el ácido clorhídrico, y el que se originó al tratar la porción de la esencia hirviente entre 170° y 180°, disuelta en el éter de petróleo y enfriada la solución en mezcla de hielo y sal, por el ácido bromhídrico seco, en forma de un precipitado amarillento, me hizo sospechar que se trataba del *cineol* ó *eucaliptol* que se encontraba en abundancia.

La producción de los cristales verdosos por el iodol, característicos, según Hirschsohn, para el cineol, resultó poco convincente, acaso por defecto del reactivo; pero, en cambio, se produjo muy fácilmente la combinación con el ácido fosfórico, y sobre todo el producto de adición del cineol con la resorcina, descubierto por Baeyer y Villiger (*), que lo caracteriza perfectamente y del que se fué fácil extraer aquél con sus caracteres propios.

He empleado el método recomendado por los químicos de la casa Schimmel (***) para la determinación cuantitativa del cineol en las esencias de eucalipto al objeto de averiguar la proporción que contienen las diversas esencias de mejorana silvestre ó española de que disponía, y los resultados han sido muy notables: estas diferentes esencias han mostrado una riqueza en eucaliptol que se halla entre 64 y 72 por 100, comparable con la de las buenas esencias de eucalipto.

El fundamento del método, estimable por su sencillez y precisión, consiste en lo siguiente: si se agita una esencia que contenga *cineol* con una solución acuosa, más ó menos concentrada, de resorcina, se produce la combinación de ambos cuerpos en forma de cristales prismáticos afilados que se funden á 80°, son muy solubles en el alcohol, éter y benceno, y muy poco en el éter de petróleo. Estos cristales, recogidos y calentados con una lejía de sosa,

(*) Berichte der D. Chem G., t. 35 (1902), p. 129.

(**) Bull. Schim. Octubre 1907, p. 50 y Abril 1908, p. 58.

dejan libre el eucaliptol que puede destilarse con el agua. Si en vez de una solución cualquiera de resorcina se emplea una muy concentrada, hecha con 50 partes de ésta y 50 partes de agua, y de modo que desde el primer momento se halle en gran exceso, la combinación cineol-resorcina queda disuelta en el líquido, mientras que aparecen como insolubles los demás constituyentes de la esencia, los cuales, por reposo, se separan en forma de capa oleosa sobre la solución acuosa.

Siguiendo este principio, se ponen en un matraz de 100^{cc}, cuyo cuello tiene una graduación que comprende 10^{cc}, divididos en 100 partes iguales (*), 10^{cc} de la esencia, se agregan unos 70^{cc} de la solución de resorcina al 50 por 100, se agita vigorosamente la mezcla por cinco minutos, y se añade líquido resorcínico hasta que la parte de esencia no disuelta llega á la porción graduada del cuello. Medido el volumen oleoso, cuando se ha reunido bien, en décimas de c. c., y restando de las 100 décimas puestas, se tiene por diferencia el tanto por ciento de eucaliptol contenido en la esencia.

Si ésta es muy rica en cineol, como ocurre con las que teníamos en ensayo, conviene diluirla previamente en su volumen de esencia de trementina, y duplicar el resultado así hallado.

Aunque no sea absolutamente exacto, tiene la precisión suficiente, según han comprobado repetidos ensayos de los autores del método, y su sencillez y exactitud lo hace preferible al del bromhidrato y al del ácido fosfórico.

Alcoholes terpénicos.—El índice de acetilación de las esen-

(*) Careciendo de un matraz especial (*matraz de cassia* que llaman los autores del método) he utilizado uno de los empleados para el ensayo polarimétrico de los azúcares, con cuello bien cilíndrico, y en el que el espacio comprendido entre 100^{cc} y 110^{cc}, lo he dividido en 100 partes iguales, cuidadosamente, señalando la escala en una tira de papel pegada al cuello del vaso.

cias ensayadas había mostrado que contenían cantidades de estos alcoholes libres, oscilando entre 8 y 14 por 100; además, había que agregar á ellos los que estaban como éteres saponificables por la sosa.

Todos estos alcoholes tienen un punto de ebullición superior á los terpenos y al cineol, y han de buscarse, por tanto, en las porciones de la esencia que hierven por encima de 185°, á la presión ordinaria.

Los fraccionamientos obtenidos á estas temperaturas de nuestra esencia poseían todos poder levogiro, siendo la porción hirviente entre 185°-195° la de mayor actividad óptica.

Sometida esta porción al enfriamiento causado por una mezcla de hielo y cloruro sódico, no produjo cristales, como tampoco las fracciones de punto de ebullición más elevado; esto hacía presumir la ausencia del borneol, isoborneol y mentol.

La investigación del terpineol mediante el ácido iodhídrico en solución acuosa concentrada, tampoco dió los cristales fusibles á 77-78°. Quedaban, por tanto, como más probables el *geraniol* y el *linalol*, aquél que es inactivo y éste dotado de poder rotatorio como las fracciones de nuestra esencia.

Ambos alcoholes, tratados por la mezcla crómica ácida, dan citral; y en efecto, la porción 185-195° sometida en frío á esta oxidación en la forma recomendada por Semmler (*), arrastrado por el vapor de agua el producto resultante, aislado del líquido destilado, que tenía marcado olor á limón, el citral formado por su combinación bisulfítica, se obtuvo, con mal rendimiento, un cuerpo líquido, que disuelto en el alcohol produjo por el método de Doebner cristales del ácido citral β naftocinconínico fusibles á 197°.

Esto, unido al poder rotatorio levogiro del fraccionamiento 185-195°, hace admitir la presencia del *linalol*; además,

(*) Ber. der. D. chem. G. 23, 2965 y 24, 201.

operando con el anhídrido ptálico no ha sido posible preparar el geranilptalato de plata. No me fué dado obtener el fenil uretano de geraniol por medio del isocianato de fenilo en condiciones de pureza para determinar bien su punto de fusión, ni á pesar de seguir las indicaciones de Erdmann y Huth (*).

Composición de la esencia de mejorana española.—Como resumen de las determinaciones anteriores, se puede establecer que esta esencia se halla formada de δ pineno, cineol, un compuesto fenólico (timol?), una cetona, éteres acético é isovalérico, de un alcohol terpénico, probablemente el linalol, y este mismo alcohol libre.

En cuanto á las proporciones en que entran estos diversos principios, se ha visto que la del fenol y de la cetona son muy pequeñas, menos del 0,1 por 100, y, en cambio, muy grande la del cineol, conteniendo también cantidad bastante de éteres y alcohol libre. Respecto del pineno no hay métodos de determinación aceptables; pero teniendo en cuenta que en la porción de esencia que puede separarse por destilación fraccionada y que se halla dotada de poder dextrogiro, no se ha encontrado más cuerpo que éste dotado de actividad óptica, y puesto que el cineol que le acompaña es inactivo, se puede calcular la proporción en que aquél existe de un modo aproximado y admitir que la proporción de δ pineneno es de 7 á 8 por 100.

Por lo tanto, la composición de la esencia de mejorana española aparece así:

δ Pineno.....	7	á	8	por 100.
Cineol ó eucaliptol.....	64	á	72	—
Fenoles.....	menos de	0,1		—
Cetona?.....	menos de	0,1		—
Eteres (acetato de linalilo).....	4,44	á	6,47	—
Alcoholes libres (linalol).....	8,2	á	14,1	—

(*) Erdmann y Huth.—J. prakt Chem. (2) 56, 8 (Bull. Soc. Ch. (1897) 2, 1350).

Conclusiones.—Consecuencia natural de lo precedentemente expuesto es la anomalía extraordinaria de que un tomillo produzca una cantidad grande de cineol, con exclusión casi absoluta de timol, que á esto equivale el excesivo tanto por ciento obtenido. No deja de ser extraño este hecho, porque no se trata de las variedades de productos elaborados por una misma familia botánica, sino por un mismo género de plantas constantemente generadoras de un fenol; y es aun más extraño que habiendo alcanzado el proceso evolutivo del vegetal á formar cineol, se haya detenido en su marcha sin transformarse este anhidrol en *ácido cineólico* y *metilheptenona*, obligadas materias de oxidación que tienen en el cineol su origen.

Nada de particular tendría este fenómeno suponiendo que el *Thymus Mastichina* contenga como producto del desmoronamiento de sus albuminoides *timol*, que por acciones reductoras se convierta en su derivado tetrahidrogenado, y éste, por isomerización, en cineol. Llegados á tal punto de la hipótesis, nada tan sencillo como admitir que no se genere metilheptenona por oxidación del anhidrol, porque habiendo en las plantas formadoras de esencias predominio de las acciones reductoras sobre las oxidantes, quedan éstas invalidadas, y, por consecuencia, la proporción de cineol, resultante de los dos primeros procesos, se estaciona por no darse condiciones adecuadas para su conversión en la dicha acetona.

Otra consecuencia derivada del estudio de esta esencia, es la posibilidad de que pueda administrarse como medicamento en las verminosis, por darse en ella la condición de poseer una gran cantidad de cineol, cuerpo que contiene un oxígeno susceptible de pasar á tetravalente, carácter asignado á los vermífugos, y por coexistir con ese anhidrol un terpeno, el pineno, que refuerza la acción anestésica, ó semejante á ella, que el cineol ejerce sobre los gusanos intestinales.

Y, por último, que esta esencia indígena, que puede producirse en grandes cantidades en nuestro país, permitirá fácilmente la obtención industrial del eucaliptol, sin acudir á las esencias de eucalipto, origen hoy de este medicamento de bastante uso, eximiéndonos de la importación de productos exóticos á los que podrán substituir en gran parte, sino en todas sus aplicaciones.

(Laboratorio de Análisis de la Facultad de Farmacia de la Universidad de Granada.)

XV. — Estudio acerca de los ácidos cromopolisulfúricos.

POR PABLO MARTÍNEZ STRONG.

I

Concepto de las sales complejas.

Reconócese en los átomos que integran las moléculas, aun cuando sus afinidades aparezcan satisfechas, cierta capacidad, en cuya virtud ejercen atracciones sobre otras, para formar las llamadas combinaciones moleculares, siendo de notar entre ellas por sus especiales caracteres, y porque su número aumenta á diario y su importancia crece sin cesar, las denominadas sales dobles ó complejas.

Muchos metales, además de formar varias clases de iones elementales, dotados de propiedades y valencias diferentes, constituyen con otros elementos y también consigo mismos iones complejos, provistos de singulares caracteres. Su gran variedad y lo poco estudiados que están todavía dificultan sobremanera una razonada exposición del conjunto de tales combinaciones, y no consienten tampoco establecer reglas generales, por lo que hay que referirse de continuo á cada metal en particular.

Pueden formarse las sales complejas mediante la unión de dos simples, presentando su solución reacciones nuevas, que demuestran haberse formado nuevas substancias. Lo más característico y especial de ellas son los componentes llamados disimulados, porque no se dan á conocer con los reactivos que les son peculiares, y en caso de manifestarse, al cabo de cierto tiempo ó mediante otra causa modificante, la crioscopia de tales soluciones prueba que el complejo se ha disociado en sus componentes simples. En la actualidad,

y merced á los nuevos descubrimientos realizados respecto de los líquidos coloides, podría admitirse que las combinaciones de que se trata pertenecen á semejante categoría, y que el estado disimulado de algunos de sus constituyentes es debido á la estructura granular de las soluciones coloides. Tal estructura parece indicar que los componentes de los gránulos hállanse como encerrados en ellos, y además protegidos por cargas eléctricas, constituyendo entonces las micelas. Así, pues, no es de extrañar que al agregar un reactivo de uno de los componentes, como para que éste precipite, ó mejor dicho, coagule el cuerpo complejo, tiene que neutralizar la carga eléctrica á expensas de la de sus iones, no se perciban ni manifiesten las reacciones características de los iones simples á que estamos acostumbrados, sino que aparezcan otras nuevas, capaces de ponernos en confusión, y que dificultan las investigaciones analíticas. Trátase en el presente trabajo de las nuevas propiedades reconocidas y estudiadas en los derivados del sulfato violeta de cromo.

Quizá es sólo parcial la disociación de las sales complejas, en cuanto sus soluciones ofrecen propiedades no conformes con el hecho general de que los caracteres de las soluciones de las sales simples difieren poco de las que se representan haciendo la suma de las de los iones constitutivos.

Agrúpanse las sales complejas, atendiendo á su constitución, en tres clases principales:

- 1.^a *Sales complejas, por las bases.*
- 2.^a *Sales complejas, por los ácidos.*
- 3.^a *Sales complejas, mixtas.*

Corresponden á las primeras los compuestos de amonio y cobalto, formados por la acción del amoníaco seco sobre las sales anhidras de cobalto, que fijan seis moléculas de NH_3 , produciendo sales complejas. Sus soluciones absorben oxígeno, convirtiéndose en otras combinaciones coloreadas, llamadas cobaltiolas; así, el cloruro cobaltoso amoniá-

cal $Co.Cl_2 + 6NH_3$ se transforma en cloruro luteocobáltico: $Co_2Cl_6 + 12NH_3$, pasando por los grados intermedios de cloruro roseocobáltico $Co_2Cl_6 + 10NH_3 + 2H_2O$ y cloruro purpúreo cobáltico: $Co_2Cl_6 + 10NH_3$. Igualmente forma el níquel compuestos complejos amoniacaes, y en tales combinaciones ya se nota que los aniones respectivos no dan las reacciones que les son propias, demostrándose con ello que se encuentran en estado de anión complejo.

Forma también el platino combinaciones con el amoniaco, denominadas ya de tiempo atrás, bases platínicas bastante conocidas y estudiadas por muchos investigadores; las hay de dos clases, á saber: las platosamínas, de la fórmula general PtR_2, xNH_3 , en la cual R_2 puede ser igual á Cl_2 , Br_2 , I_2 , SO_4 , $(NO_3)_2$, $(OH)_2$, y x varía de 1 á 4, y las platinaminas, cuya fórmula es PtR_4, xNH_3 , en la que R_2 significa lo mismo que en la anterior, y x varía de 1 á 6.

Es el cromo el metal que forma mayor número de combinaciones con el amoniaco, en cuanto se conocen las series de sales roseocrómicas, purpureocrómicas, xantocrómicas, rodocrómicas, eritrocrómicas, ródosocrómicas y luteocrómicas, derivadas unas de otras mediante diversas manipulaciones, cuya exposición no pertenece á este lugar.

Bastante reciente es la obtención de un compuesto cuproso amoniacoal, el sulfato cuprosamónico de la fórmula $SO_4Cu_2, 4NH_3$, interesante por contener una sal cuprosa de ácido oxigenado, que hasta ahora no han sido aisladas, pero cuyos derivados amoniacaes parecen más estables que ellas, tanto que el sulfato permanece inalterable á la temperatura de 100° centígrados (*).

Deben citarse entre las sales complejas por los ácidos los iridosulfatos amoniacaes, obtenidos mediante la directa acción del ácido sulfúrico sobre la solución de cloriidito, di

(*) Bouzat. *Bulletin de la Societé Chimique de France*, 4.º serie, tom. V-VI, n.º 8, 1909, pag. 355.

ó triamónico. Son sales dotadas de color verde, y corresponden á los ácidos iridosulfúricos, cuyas fórmulas son:



Ofrecen un ejemplo bien notable del tercer grupo, en el que se incluyen las sales complejas mixtas, los cuerpos de que se trata en el presente estudio.

II

Resumen del trabajo del profesor Recoura.

Trata el trabajo de este notable químico, que fué punto de partida de mi labor, de las modificaciones que experimenta el sulfato violeta de cromo mediante determinadas acciones, cuyos cambios tienen su manifestación exterior en las variantes de coloraciones á ellas ligadas de manera íntima. Eligió como base constante de sus originales experimentos el sulfato violeta ya citado $(SO_4)_3 Cr_2$, estudiando primeramente la acción del calor sobre sus disoluciones, punto que no trataré por estar ya bien dilucidado, debiendo ocuparme de preferencia cuanto atañe á las transformaciones isoméricas del sulfato violeta de cromo, cuya fórmula empírica es: $(SO_4)_3 Cr_2 + 18 H_2O$. Puesto en la estufa á la temperatura de 90° , sostenida hasta que no experimente pérdida de peso, adquiere la constitución representada en la fórmula $(SO_4)_3 Cr_2 + 8 H_2O$, que es un cuerpo completamente soluble en el agua al cabo de pocos minutos, dando un líquido de intenso y obscuro color verde, y cuyas propiedades son, en absoluto, diferentes de las características

(*) Dèlepine. *Bulletin de la Société Chimique de France*, 4.ª serie, tom. V-VI, n.º 8, 1909, pag. 359.

del sulfato violeta originario, en cuanto no da las reacciones de los sulfatos, ni las peculiares de las sales de cromo. Así, la nueva substancia ó sulfato verde, *en solución reciente*, no precipita con otra de cloruro de bario, ni tampoco con otra de fosfato de sodio, como si no hubiese ácido sulfúrico ni cromo.

Júzgase debida la ausencia del precipitado con el cloruro de bario á que el sulfato verde no es apropiado para la doble descomposición, cuyo hecho demostró Recoura mezclando en el calorímetro disoluciones equivalentes de cloruro de bario y sulfato de cromo, y notando que no hay desprendimiento de calor, de lo cual deduce que en el dicho sulfato verde está disimulada la totalidad del ácido sulfúrico. Además, tratando la disolución de sulfato verde por la cantidad equivalente de Na, OH se forma precipitado de hidrato de cromo, que no puede fijar de nuevo más de dos moléculas de ácido sulfúrico y no las tres que fija el procedente de otras sales de cromo por igual sistema. Semejante hecho demuestra que en este sulfato verde no se halla el cromo de la misma manera que en las otras sales del metal, sino formando parte de un grupo ó radical dotado de relativa estabilidad, tan efímera que basta abandonar la solución verde durante algunos días para que cambie su tono en color violeta, convirtiéndose en sulfato normal.

Cuando se precipita con la sosa el sulfato verde de cromo, á primera vista creyérase estar en presencia de un hecho en abierta contradicción con lo apuntado respecto de que este cuerpo no manifiesta los caracteres de una verdadera sal de cromo; pero es sólo una apariencia, explicable mediante la peculiar inestabilidad del sulfato verde. Téngase en cuenta, primeramente, cómo la solución, que siendo reciente no precipita con el cloruro bárico, lo hace al cabo de media hora, y al instante, si antes ha sido hervida. En segundo lugar, si la solución no está muy diluída, el radical crómico se destruye, y entonces producen en ella precipitados el cloruro de ba-

rio y el fosfato de sodio. Y en último término, requiéresè que los reactivos empleados no sean muy enérgicos, para que no destruyan el radical, conforme acontece en el caso de la sosa, que precipita hidrato crómico de la fórmula $Cr_2O(OH)_4$; en resumen, el sulfato verde de cromo, considerado en estado sólido $Cr_2(SO_4)_3 + 8H_2O$, es completamente estable; disuelto pierde algo de su estabilidad y no resiste la acción de los reactivos.

Se ha de notar, antes de nada, cómo este compuesto verde, isómero del que tiene color violeta, es completamente distinto del que se obtiene hirviendo las disoluciones del último, y se incluye en la serie de las sales verdes de cromo, originando no pocas confusiones, pues las verdaderas sales verdes de cromo son el resultado de las acciones del calor sobre el sulfato violeta sólido. Conviene el nombre de sulfato verde modificado al que proviene de calentar la disolución del sulfato violeta.

Hállase dotado el citado sulfato verde de una actividad de combinación singular, en cuya virtud genera interesantes derivados complejos. En tal respecto es susceptible de unirse con una, dos ó tres moléculas de ácido sulfúrico ó de un sulfato metálico cualquiera, para originar unos compuestos especiales llamados ácidos cromosulfúricos y cromosulfatos, hallándose en los últimos disimulado todo el ácido sulfúrico, pudiendo en cambio reconocerse el metal del sulfato combinado; parecen ser sales de radical complejo, y se conocen tres:

El ácido cromosulfúrico bibásico = $[Cr_2, 4SO_4]H_2$.

El ácido cromosulfúrico tetrabásico = $[Cr_2, 5SO_4]H_4$.

El ácido cromosulfúrico hexabásico = $[Cr_2, 6SO_4]H_6$.

Muy semejante es el modo de preparar los tres compuestos. Se evapora en el baño de María una solución que contenga para cada molécula de sulfato verde, una, dos ó tres

moléculas de ácido sulfúrico; la masa verde resultante se calienta en la estufa á la temperatura de 110 á 120 grados, y queda una substancia, de color verde obscuro, cuyo grado de hidratación depende del tiempo que haya durado la acción del calor; por término medio contiene cinco moléculas de agua; los tres ácidos, que tienen color verde obscuro, son solubles en todas proporciones en este cuerpo, dando líquidos verdes; su inestabilidad es análoga á la del sulfato verde de cromo; calentados hasta 170°, conservan todo el ácido sulfúrico que éste había fijado; son ácidos sobremanera enérgicos, más todavía que el propio ácido sulfúrico; pero su energía decrece conforme aumenta la proporción de este último. De modo análogo que los ácidos correspondientes se obtienen los cromosulfatos, evaporando al calor del baño de María una solución que contenga una molécula de sulfato de cromo, y una, dos ó tres moléculas de un sulfato metálico cualquiera, y los compuestos verdes resultantes se hallan dotados de los mismos caracteres distintivos de los ácidos originarios. Obsérvase que los cromosulfatos alcalinos son isómeros con los alumbres de cromo, y para transformarlos en ellos es suficiente deshidratarlos calentándolos, durante algunas horas, á 90°, con lo cual ya pierden 12 moléculas de agua; siguiendo la acción del calor hasta 110°, sin que fundan, sólo conservan cuatro moléculas de agua, y se ha llegado al cromosulfato, cosa demostrable con suma facilidad, porque sus disoluciones no precipitan con las de cloruro de bario.

Entrando ahora de lleno en el estudio de los cuerpos á los cuales se refiere principalmente el presente trabajo, y que tienen la singularidad de que todas sus sales, incluso las alcalinas, son insolubles, conviene, ante todo, fijar sus relaciones con el sulfato verde de cromo. Combinándolo con el ácido sulfúrico en cantidad superior de tres moléculas, resultan «compuestos nuevos que tienen propiedades en absoluto diferentes de las reconocidas en los tres ácidos cromo-

sulfúricos, y caracteres que no han sido notados en ninguna sal de cromo», empleando las mismas palabras del profesor Recoura, que los ha descubierto (*). Son tres cuerpos, denominados ácidos cromopolisulfúricos, referibles al llamado hidrato sulfocrómico de la fórmula



y su preparación será luego indicada, bastando saber, por el momento, que en su composición entran cuatro, cinco ó seis moléculas de ácido sulfúrico; poseen todos color verde bo-

(*) Recoura. *Annales de Chimie et de Physique*, 7.^e serie, tom. IV, 1895, pag. 494.

Colson. *Annales de Chimie et de Physique*, 8.^e serie, tom. XII, pag. 433, 1907.

Wyrouboff. *Bulletin de la Société Chimique de Paris*, 3.^e serie, tom. XXVII, 1902.

Demuestra la importancia de los trabajos de Recoura el que la Academia de Ciencias de París les ha otorgado en el pasado año de 1909 uno de sus más importantes premios, y á continuación se inserta íntegro el informe acerca de sus estudios relativos á los compuestos complejos del cromo:

«*Prix La Caze* (Commissaires: MM. Troost, Gautier, Lemoine, Haller, Jungfleisch, Schlœsing, Carnot, Maquenne; Le Chatelier, rapporteur). Les travaux de M. Recoura se prêtent difficilement á une analyse sommaire car ils portent sur des points très délicats de l'histoire des sels. Ils sont en contradiction avec quelques-uns des anciennes idées classiques de la Chimie minérale et présentent une originalité d'un grand intérêt.»

«En étudiant les composés du chrome, M. Recoura a reconnu parmi des combinaisons, classées sans aucune hésitation dans la famille des sels, l'existence de corps complexes possédant des fonctions toutes spéciales. On avait depuis longtemps observé dans les différentes combinaisons du chrome l'existence de deux variétés distinctes, l'une violette et souvent cristallisable, l'autre verte. Malgré de nombreuses recherches, la raison de ces différences n'avait pas été reconnue; M. Recoura a été assez heureux pour résoudre complètement le problème et jeter ainsi des lumières très vives sur la constitution de composés minéraux restés jusque-là indechiffrés.»

«Le sulfate de chrome violet dissous dans l'eau, puis chauffé, se

tella, se disuelven muy bien en el agua, dando líquidos opalinos con ligero tono verde amarillento, en tanto que las disoluciones de los ácidos cromosulfúricos resultan, conforme queda antes indicado, transparentes y de color verde obscuro. Enumera el citado químico de la manera siguiente las curiosas propiedades de la solución opalina:

- 1.^a El aspecto de ella y su escasa coloración.
- 2.^a Abandonada á sí misma, conviértese en una gelatina transparente al cabo de ocho días.
- 3.^a Hirviendo una disolución reciente, se coagula llenándose de copos verdes.

dédouble en acide sulfurique libre et en un sulfate basique vert,



de composition constante, retrouvé depuis par de nombreux expérimentateurs au moyen de méthodes d'observations différentes. Ce corps n'es pas un sel basique ordinaire, mais le sulfate d'une base complexe, l'hydrate de sulfochromyle; il renferme encore de l'acide sulfurique, mais de l'acide dissimulé aux réactifs usuels de ce corps. Cette base complexe est décomposée par la potasse et donne un nouvel oxide de chrome basique dont le sulfate ne renferme que deux molécules d'acide au lieu de trois dans le sulfate ordinaire.»

«M. Recoura á également découvert l'existence d'un isomère vert du sulfate neutre violet, présentant la même composition que ce dernier, mais dans lequel tout l'acide sulfurique est dissimulé. Ce corps, sans aucune analogie antérieurement connue dans le Chimie minérales possède la propriété remarquable de se combiner aux sulfates métalliques en donnat de véritables sels, dans lesquels le nouveau métal garde ses propriétés ordinaires, tandis que la totalité de l'acide sulfurique est dissimulé. Ce sont les sels d'un nouvel acide complexe,



l'acide chromosulfurique. Les sels des bases alcalines formés par cet acide sont les isomères des aluns ordinaires; ces derniers se transforment très facilement sous l'action de la chaleur en chromosulfates».

«Il existe, en fin, un isomère de l'acide sulfochromique qui est également un acide complexe, mais qui ne manifeste aucune des propriétés de l'acide sulfurique, ni de l'oxide de chrome; il ne present pas la coloration très intense de tous les composés du chrome, ses solutions sont á peu prés incolores. Il possède, en fin, la propriété très curieu-

4.^a Los ácidos concentrados determinan también la coagulación.

5.^a Precipita las sales metálicas, incluso las soluciones salinas de potasio, sodio y amonio.

Como, en definitiva, aparecen iguales las características de los tres ácidos, sólo se estudiará uno de ellos, el ácido cromotetrasulfúrico, por ejemplo, cuya fórmula, sin prejuzgar de momento su constitución, es: $Cr_2(SO_4)_3 + 4SO_4H_2$ y bastará exponer la acción que sobre el mismo tienen las sales metálicas, originaria de las sales del hidrato sulfocrómico.

Vertiendo en la solución del ácido cromotetrasulfúrico otra de cualquiera sal metálica, se obtiene precipitado coposo de

se de precipiter de leurs dissolutions tous les sels métalliques, même les sels alcalins».

«Ce sont là des résultats extrêmement importants. M. Recoura a de couvert ainsi de nouvelles familles de sels métalliques, absolument différents des combinaisons formées par les acides simples. Ces observations ont été le point de départ de nombreuses recherches, tant en France qu'à l'étranger.»

«Des études analogues sur les chlorures et les oxydes de chrome lui ont permis de préciser pour ces combinaisons l'existence de plusieurs variétés isomériques, dont quelques-unes n'étaient même pas soupçonnées. Par exemple, le chlorure de chrome $Cr^2Cl^6, 12H_2O$, en dehors le variété verte cristallisée bien connue, présente un isomère gris nettement séparé du précédent non seulement par sa coloration, mais encore par la grandeur de ses constantes termochimiques. Il n'existe d'ailleurs aucune corrélation entre le chlorure et le sulfate vert, malgré l'identité de leur coloration.»

«L'étude des hydrates chromiques lui a donné une série de bases différentes, obtenues par l'ébullition prolongée de l'hydrate normal et présentant des capacités de saturation pour les acides progressivement décroissantes, on arrive graduellement à une variété d'hydrate chromique dont une molécule ne peut fixer qu'une seule molécule d'acide monobasique. Au delà de cette limite, l'hydrate chromique devient insoluble dans les acides étendus.»

«L'étude des sels ferriques, entreprise en s'inspirant des résultats obtenus sur le chrome, a permis à M. Recoura de préparer un grand nombre d'isomères parfaitement définis du sulfate ferrique anhydre ou hydraté, ainsi qu'un acide ferrisulfurique correspondant à l'acide chromosulfurique; il a pu en obtenir les éthers, mais non les sels trop facilement décomposables par l'eau.»

color blanco verdoso, el cual contiene todo el cromo, todo el ácido sulfúrico y todo el metal disueltos, y, según Recoura, todos los metales producen igual fenómeno, excepto el mercurio en estado de bicloruro: más adelante se examina el caso con pormenores experimentales. Si á la disolución que contenga una molécula de ácido cromotetrasulfúrico, se agrega otra que contenga una molécula de cloruro cúprico ó mayor cantidad todavía, prodúcese un precipitado blanco verdoso que contiene todo el cromo, es decir, una molécula de Cr_2O_3 , cuatro moléculas de SO_4H_2 y un átomo de cobre, conforme se deduce de los minuciosos análisis de Recoura. Parece que tal precipitado debiera tener la compo-

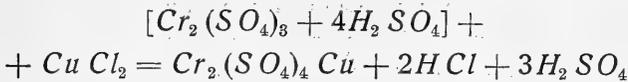
«En dehors de ces découvertes capitales, M. Recoura a poursuivi un grand nombre de recherches dans les directions plus variées, études sur la chaleur de combustion des matières organiques faites en collaboration avec M. Berthelot; loi des tensions de vapeur des dissolutions, connue sous le non de *loi de Raoult et Recoura*, établie en commun avec M. Raoult; recherches sur le sulfate cuivreux, le chlorure chromeux, le sulfate de baryum colloïdal, etc. Dans tous ces travaux, il a fait un usage très heureux des méthodes thermochimiques, avec lesquelles il s'était familiarisé dans le laboratoire de Berthelot.»

«Le principal titre de M. Recoura á la distinction que l'Académie des Sciences lui confère aujourd'hui, est l'ensemble de ses études sur les composés du chrome, par les quelles il a ouvert des voies nouvelles á la Chimie minérale. On connaissait bien le polymorphisme de nombreux corps cristallisés, mais les corps découverts par M. Recoura ne se distinguent pas seulement les uns des autres par des différences dans leurs propriétés physiques, ils se distinguent nettement par leurs propriétés chimiques, ce sont de véritables métamères analogues aux exemples déjà si nombreux fournis par la Chimie organique. Dans toutes ces recherches, M. Recoura a fait preuve d'un talent d'expérimentateur de premier ordre et d'une remarquable perspicacité scientifique. Il a découvert des propriétés nouvelles et inattendues dans des corps qui, depuis long temps, paraissaient bien connus et il a étayé ses affirmations impévues sur des preuves nombreuses et assez variées pour les rendre absolument inattaquables.»

L'Académie adopte les conclusions de ce Rapport.

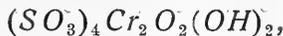
Comptes rendus, tom. CXLIX. n. 25, pag. 1.219 (20 Décembre 1909).

sición $Cr_2(SO_4)_3 + SO_4 Cu$, correspondiente á un cromosulfato de cobre, pero no sucede así; porque aparte de que, según queda dicho, el cromosulfato de cobre es soluble, hirviendo el precipitado con ocho moléculas de $NaOH$, se producen cuatro moléculas de SO_4Na_2 y queda un cuerpo verde insoluble, exento de ácido sulfúrico y que contiene combinados la totalidad de los óxidos de cromo y de cobre; es el cromito de cobre $Cr_2O_4 Cu$; lo cual prueba que en el precipitado primitivo todo el óxido de cobre estaba combinado con el óxido de cromo y no con el ácido sulfúrico, como se creía á primera vista, pues de ser así, el óxido de cobre, desalojado por la sosa, se hubiera ennegrecido al hervir el líquido; la reacción es la siguiente:

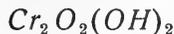


y por lo tanto, el ácido cromotetrasulfúrico deja en el líquido tres moléculas de ácido sulfúrico.

Siguen igual mecanismo las reacciones con los ácidos penta y hexasulfúricos, los cuales dejan libres cuatro y cinco moléculas de ácido sulfúrico, respectivamente. Conviene hacer notar cómo todos los precipitados formados, según queda dicho, incluso los correspondientes á las sales alcalinas, son por completo insolubles, y atendiendo á su constitución especial deben ser considerados cromitos de radical complejo, y con propiedad les llama Recoura *sulfocromitos*; de modo que, siendo los cromitos sales del hidrato crómico incompleto $Cr_2O_4H_2$, ó mejor, $Cr_2O_2(OH)_2$, se puede admitir que los sulfocromitos sean las sales del hidrato



que es un ácido bibásico de radical complejo; el hidrato sulfocromico, referible al hidrato crómico de la forma



que, lejos de ser hipotético, se prepara calentando de 140 á 150 grados cualquiera de los ácidos cromopolisulfúricos, que entonces pierden cuanto ácido sulfúrico fijaron, menos una molécula, quedando así

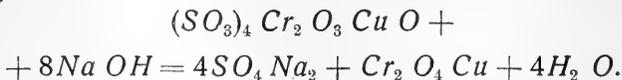


Este hidrato sulfocrómico es soluble en el agua, y su solución opalina, de color verde amarillento, precipita todas las soluciones metálicas, originando los sulfocromitos de la fórmula general $(SO_3)_4 Cr_2 O_3 M'' O$, y en el líquido queda una cantidad de ácido libre, equivalente á $M'' O$. La presencia del radical $(SO_3)_4$ en el hidrato sulfocrómico es causa del considerable aumento de sus propiedades ácidas, y las medidas efectuadas con semejante intento demuestran que su calor de neutralización, por la sosa, excede cinco calorías del determinado para el ácido sulfúrico.

Comparando la fórmula del hidrato sulfocrómico



con la del ácido cromosulfúrico $[Cr_2(SO)_4] H_2$ adviértese que los dos cuerpos son isómeros, y se distinguen por ser insolubles los sulfocromitos y muy solubles los cromosulfatos. Hirviendo la emulsión de un sulfocromito es enteramente descompuesta; el ácido sulfúrico, puesto en libertad, disuelve el óxido metálico y el cromo, y es de manera que evaporando hasta sequedad y á temperatura no muy elevada la mezcla de los dos sulfatos, se obtiene el cromosulfato, soluble en el agua, y cuya solución no precipita mezclándola con otra de cloruro de bario. Empleando en lugar de agua sosa cáustica, el sulfocromito se transforma en un cromito



(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
VIII. — Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimaséptima.....	193
IX. — La nomenclatura de los instrumentos de observación, por <i>E. Saavedra</i>	210
X. — Perfeccionamiento de la alimentación albuminoidea, por <i>José R. Carracido</i>	212
XI. — Los métodos indirectos de la Química analítica (continuación), por <i>Juan Fages Virgili</i>	219
XII. — Estudio completo de una clase especial de integrales singulares (continuación), por <i>Lauro Clariana</i>	249
XIII. — El Congreso científico internacional de Buenos Aires (10 á 25 de Julio de 1910), por <i>E. Herrero Ducloux</i>	263
XIV. — Contribución al estudio de las esencias españolas. Esencia de mejorana silvestre, por <i>Bernabé Dorransoro</i>	279
XV. — Estudio acerca de los ácidos cromopolisulfúricos, por <i>Pabló Martínez Strong</i>	296

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaria de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

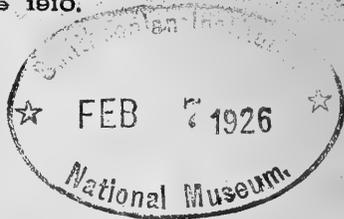
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX.-NUM. 5.

Noviembre de 1910.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XVI.— Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia primera.

SEÑORES:

Una vez más ocupo este puesto, y empiezo con un nuevo curso la 6.^a serie de conferencias sobre Física matemática, que desde el año 1905 vengo dando en la Universidad Central.

Y una vez más, al dar comienzo á mis trabajos, debo poner de relieve mi pensamiento, del cual se deriva en cierto modo el programa que á cada curso corresponde.

En el orden científico procuro realizar aquí, y fuera de aquí, una doble empresa.

En primer lugar, popularizar la Ciencia, exponer teorías, descubrimientos, invenciones, año por año, y pudiera decir, que mes por mes, desde cuarenta años á esta fecha.

Tal labor la realizo por medio de artículos en diferentes periódicos: sólo en *El Diario de la Marina*, de la Habana, llevo publicados, según mis cuentas, más de 800 artículos, que constituyen en cierto modo los anales, muy modestos, porque son de carácter popular, pero anales en suma, de varias ciencias positivas, en que dominan la Física y la Química, y que constituyen el resumen de las invenciones y descubrimientos, que en el campo de una y otra, se han realizado desde mediados del siglo anterior.

De mis artículos en otros periódicos, la mayor parte de

España, se han coleccionado algunos en dos épocas distintas y con dos títulos diversos.

Con el título de *Teorías modernas de la Física*, una primera colección, y con el de *Ciencia popular*, dos gruesos tomos que editaron mis compañeros los Ingenieros de Caminos.

Hasta aquí *la primera* de las dos empresas á que antes me refería: la de popularizar la Ciencia y sus aplicaciones, haciéndola accesible á toda persona de mediana cultura.

La segunda parte, ó la segunda empresa, según antes dije, es mucho más difícil, y voy realizándola precisamente en esta clase, que hace seis años que desempeño.

También es obra de propaganda, pero ya no tiene el carácter popular.

Es propaganda de las altas teorías de la Física matemática; requiere en el oyente, ó en el lector, y digo el lector, porque estas conferencias las publica la Academia de Ciencias de Madrid; requiere, repito, ciertos conocimientos matemáticos, y aun de Física y de Química, para poder seguir mi labor con algún aprovechamiento.

Por eso he manifestado que me esfuerzo en esta clase, y en esta repetida serie de conferencias, en poner las teorías más elevadas de la Física matemática moderna, no al alcance del elemento popular, porque esto no sería posible, pero sí de los que tengan cierta educación científica, sobre todo en ciencia matemática.

* * *

He dado en otra ocasión, y en esta misma clase, una forma más concreta á mi pensamiento para explicar el carácter y la extensión de estas conferencias.

He dicho que el objeto final de mis tareas era publicar una *Enciclopedia de Física matemática*, que abarcase: 1.º, las principales teorías de la Física matemática clásica, las

de Cauchy, Poisson, Fourier, Lamé, Ampère, Helmholtz, Gauss, Weber, Fresnel, y para no hacer interminable esta lista, la de todos los grandes maestros que á la creación de la Física matemática dedicaron sus esfuerzos en los dos primeros tercios del siglo XIX; y 2.º, las principales teorías modernas y modernísimas de esta misma ciencia, es decir, de la Física matemática, que es á la que yo debo consagrar mis trabajos en esta clase que desempeño.

Las teorías modernas y modernísimas, repito, las que han creado Maxwell, Hertz, Poincaré, Duhem, Lorentz, Larmor, Heaveside, Lord Kelvin, J. J. Thomson, Carnot, Gibbs, y aquí también la lista es interminable, y cito nombres ilustres á saltos y á la casualidad.

Toda un enciclopedia.

¡Una enciclopedia de Física matemática clásica y moderna!

Yo mismo me asombro y casi me espanto al pronunciar estas palabras.

Bien lo reconozco, y lo he confesado humildemente en las conferencias del año anterior; tal empeño á primera vista parece insensato: empeño insentato, ambición desatentada.

¿Hay nadie, y mucho menos yo, que pueda acometer tal empresa?

Pero es que yo le pongo límites muy modestos, y sólo queda lo orgulloso del título.

Quiero, ó querría, y hasta donde pueda llegaré, publicar una *Enciclopedia de Física matemática*; pero no con la pretensión de agotar la Ciencia, que hoy es inmensa, sino de ir exponiendo las principales teorías, de ir despejando el camino y haciendo posible ó, por lo menos, más fácil á mis alumnos el estudio de las memorias originales, ó de las grandes obras de los maestros.

Esto que yo llamo *Enciclopedia*, dándole nombre sobrado ambicioso, no pasa de ser un trabajo de propaganda, ó si se quiere, de preparación, para ir extendiendo en España, en la

medida de mis fuerzas, el estudio y la afición al estudio de las altas cuestiones de una de las ciencias más admirables que haya podido crear el ingenio humano.

Y bien se ve, que la que llamo segunda empresa es complementaria de la primera.

Propaganda popular de la Ciencia.

Propaganda de la alta Ciencia, no ya entre los que nada saben, porque eso sería imposible, pero sí entre los que saben algo, para que puedan elevarse al estudio de las últimas teorías y de las más elevadas.

*
* *
*

No voy á enseñar, ó si acaso muy poco, nada nuevo; sino á hacer accesibles las grandes creaciones de los maestros á inteligencias débilmente ejercitadas en la gimnasia matemática.

Nada nuevo voy á enseñarles, repito, ó si algo nuevo pudiera haber en mis conferencias, reconozco de antemano, que será cosa tan modesta, que no vale la pena de que yo la señalé como original á la atención de mis oyentes.

Recojo los trabajos de los grandes creadores de la Ciencia y los explico tal como los comprendo, procurando hacerlos claros y sencillos, humanizándolos, si se me permite la palabra.

Pero al mismo tiempo no puedo menos de ir juzgando, desde mi punto de vista, la Ciencia que explico; de suerte que estas conferencias tienen este doble carácter: el expositivo y el crítico.

Que, á decir verdad, la evolución que está realizando la Física matemática brinda á cada momento á la reflexión y á la crítica; sin que esto aminore el respeto y la admiración, que debe sentir toda inteligencia honrada é imparcial, ante los esfuerzos prodigiosos, aunque á veces atrevidos, de maestros incomparables.

He dado un nombre acaso impropio, pero no se me ocurre otro más comprensivo, el nombre de *enciclopedia elemental* al conjunto de materias, que he expuesto y me propongo seguir exponiendo en las conferencias de estos diversos cursos y en la serie de volúmenes, que como extracto de dichas conferencias, publico.

Es en cierto modo el programa de mis lecciones de Física matemática.

Pero esta enciclopedia, ó este programa, ó lo que sea, tiene hasta ahora contornos muy vagos, que voy á precisar enumerando las principales materias á que he de consagrar mi enseñanza, ó, mejor dicho, mi propaganda de la Física matemática, entre los aficionados á esta materia y los alumnos de esta clase.

He aquí una lista de materias, las principales, que han formado, y que me propongo que sigan formando, el contenido de mis conferencias:

I. El estudio, ilustrado con ejemplos, de los caracteres propios de la Física experimental y de la Física matemática.

II. La Teoría de la Elasticidad, considerada desde tres puntos de vista diversos, ó, mejor dicho, según tres métodos.

1.º El de Cauchy.

2.º El de Lamé.

3.º El de Poincaré.

III. Aplicación de la Teoría de la Elasticidad á las vibraciones sonoras.

IV. Teoría de la luz, expuesta según tres métodos.

1.º El que sintetizaré con los nombres de Verdet y Mascart.

2.º Según el método de Cauchy, en el que pueden seguir de guía, ya la *Introducción á la alta óptica*, del doctor Beer, profesor de la Universidad de Bonn; ya el *Ensayo sobre la teoría matemática de la luz*, de Briot.

3.º Según el método de Poincaré en su *Théorie mathématique de la Lumière*.

Y bien se observa, que en la exposición de la Teoría de la luz nos proponemos seguir una marcha, por decirlo así paralela, á la que hemos seguido en la Teoría de la Elasticidad.

V. *Teoría matemática del calor*, ó sea de su movimiento como flúido, tomando por modelo las tres obras fundamentales de Lamé y por decontado la de Fourier.

VI. Teoría del calor como energía, ó si quiere, exposición de la *Termodinámica*.

VII. Y como complemento deberán consagrarse algunas conferencias al estudio de la obra de Mr. Bousinesq, titulada *Teoría analítica del calor, puesta en relación con la Termodinámica y con la teoría moderna de la luz*.

VIII. Aplicaciones de la Termodinámica á la Química y Análisis de los principales trabajos de Gibbs, Duhén, Poincaré, etc.

IX. *Teoría de la capilaridad*.

X. Teoría de los torbellinos.

XI. Diversas teorías de la Gravitación; y para alguna de ellas y para el estudio de los trabajos de Maxwell convenirá exponer previamente la teoría de los cuaternios.

XII. Electroestática clásica. Teorema de Dirichlet y Neuman. Métodos de Poincaré y Fredholm.

XIII. Electrodinámica clásica y trabajos de Ampère.

XIV. Electroestática moderna. Teoría de Maxwell.

XV. Magnetismo. Teoría de Ampère.

XVI. Los dieléctricos. Teoría de Poisson. Estudio de Poincaré.

XVII. Electrodinámica moderna. Teoría de Maxwell.

XVIII. Teoría de la inducción.

XIX. Teoría electrodinámica de Weber.

XX. Teoría de Helmholtz. Conservación de la energía.

XXI. Teorías de Hertz.

XXII. Teoría de Lorentz. Constitución de la materia.

Para estas últimas, el trabajo del profesor está hecho de antemano, al menos en sus líneas generales, con sólo acudir

á la gran obra de Mr. Poincaré titulada *Electricité et Optique* (2.^a edición).

XXIII. Teoría de Larmor; sobre todo, la exposición que hace en su obra *Aether and Matter*.

XXIV. Teoría electromagnética de la luz.

XXV. Teoría de los electrones, según la obra de Mr. Lorentz titulada *The Theory of Electrons*, y estudio de la Memoria de Max Abraham sobre los principios de la dinámica del electrón.

XXVI. Ondas Hertzianas, tomando por guía la obra de Mr. Poincaré, del mismo título.

XXVII. Teorías modernas sobre los iones, rayos catódicos, rayos X y radioactividad.

Esto, sin contar estudios complementarios de los anteriores, como son, por ejemplo, los trabajos sobre elasticidad de Duhamel, Volterra y Cosserat.

La teoría girostática de la luz.

Y como estudio general aplicable á las teorías anteriores, un curso sobre la potencial newtoniana.

Sin contar, por último, porque alguna vez he de concluir esta desordenada é improvisada lista, varias teorías matemáticas de gran uso en la Física, como son:

La teoría fundamental de los vectores y, como ampliación, la de los tensores.

La teoría y notaciones de Grassman.

La teoría de las funciones complejas ó imaginarias.

Los cuaternios ya citados, y su ampliación á cantidades complejas de muchas claves.

Las funciones armónicas: funciones esféricas.

La integración, por fórmulas simbólicas: de la que encontramos ejemplos notables en la obra ya citada de Briot, y en las Memorias de Heaviside; véase, por ejemplo, el *Philosophical Magazine*, 1889.

El fundamental teorema de Fourier, y la serie trigonométrica.

Las funciones de Bessel, etc.

Todas estas teorías deben constituir, á mi entender, en el estado actual de la ciencia, lo indispensable de una enciclopedia de Física matemática, que, sin tener las pretensiones de agotar la materia, sirva de preparación y punto de partida para todos los que aspiren á estudiar las obras de los maestros, y á seguir á esta gran rama de la ciencia Físico-matemática en su constante y prodigioso desarrollo.

*
* *

Si el programa anterior pudiera convertirse todo él en conferencias, como las que he dado en cursos anteriores, resultarían seguramente veintitantos volúmenes de igual extensión, que los cinco que ha editado, como queda dicho, la Academia de Ciencias, distinción que agradezco muy de veras.

Pero tener á mis años, que ya rozan los ochenta, la pretensión de realizar empresa tan enorme, y permítaseme que así la llame, bien se me alcanza que pudiera calificarse, no ya de ilusión, ni siquiera de insensatez, sino más bien de algo parecido á debilidad senil.

Y como todo esto lo comprendo y lo siento, he consignado la lista anterior de teorías y obras, no como una labor que esté al alcance de mis fuerzas y de mis años, sino como un programa, ó como intento de programa, que ofrezco á mis sucesores para que lo completen y lo realicen.

Tal programa, aunque en mínima parte, he podido empezar á cumplirlo, puesto que en el curso de 1905 á 1906 desarrollé esta tesis: carácter de la Física matemática en comparación con la Física experimental.

En el curso de 1906 á 1907 expliqué la teoría de la elasticidad, según el método de Cauchy.

En el de 1907 á 1908 el de dicha teoría, según el método de Lamé.

En el de 1908 á 1909 todavía expuse la misma teoría, siguiendo el método de Poincaré.

En el curso anterior, es decir, el de 1908 á 1909, desarrollé la teoría de los vectores, los teoremas de Green y Stokes y su aplicación á la electrostática y á la electrodinámica.

Por fin, en este curso que empieza, me propongo exponer la teoría de los torbellinos.

Todas estas son materias comprendidas en el anterior programa.

Basta recorrerlo, aun sin recordar que es incompleto, para comprender cuánta razón me asistía cuando al empezar uno de los cursos anteriores, dije, que era imposible, absolutamente imposible abarcar en un curso, aun cuando fuera de lección diaria, esta inmensa disciplina científica, que se llama Física matemática.

Muchos años requiere la realización de tal empeño, y esto sin pasar en cada curso y en cada materia de la parte más elemental, de algo así como una preparación para el estudio de las obras especiales.

*
* *

Pasó ya el tiempo y no está muy lejano, aunque parece estarlo, en que Mr. Resal podía publicar una obra en dos volúmenes con el título de *Traité de Physique Mathématique*, comprendiendo la materias siguientes:

Capilaridad, elasticidad, luz, calor, termodinámica, electrostática, corrientes eléctricas, electrodinámica, magnetismo estático, movimiento de imanes y corrientes.

Y con esto se comprendía un tratado bastante completo de Física matemática.

Esta segunda edición de la obra de Mr. Resal se publicaba en 1888.

Desde tal fecha sólo han transcurrido veintidós años, y bien puede decirse, que si la Física clásica, que en cierto

modo es la que comprende la enumeración anterior, subsiste y es fundamento inquebrantable para todos los desarrollos y transformaciones posteriores; bien puede decirse, repetimos, que en el espacio, relativamente breve, de estos veintidós años, se ha transformado la Física matemática por completo; y sólo para tratar con alguna amplitud la teoría de los campos eléctricos y magnéticos, ese cuarto estado, pudiéramos decir, de la Física, con arreglo á los trabajos de físicos y matemáticos, alemanes, franceses é ingleses, italianos y americanos, no serían bastante dos volúmenes como los ya citados del eminente profesor Resal, en que la Física matemática de aquella época estaba compendiada.

Yo no niego, como no he negado en otras ocasiones, que recogiendo lo más fundamental de las teorías, y haciendo una exposición escueta de ellas, y una exposición sintética de las fórmulas fundamentales, no se pueda explicar en un curso y condensar en un libro la Física matemática moderna.

Por ejemplo: citaré una obra muy digna de elogio, y que representa un gran esfuerzo de condensación, la titulada: *Précis D'Electricité*, por Paul Niewenglowski; pero á pesar de su mérito no tiene aplicación dicha obra, ni sus análogos, en esta clase que me he encargado de explicar.

Son obras dignas de elogio, cuyo valor y utilidad yo reconozco, pero áridas y excesivamente condensadas para la enseñanza.

Sirven para el que ya conoce la materia, como una *ayuda memoria*, pero no dan la nota indispensable para la mayor parte de los alumnos.

En toda ciencia, y sobre todo en la Física matemática moderna, el comentario, la interpretación, la explicación, y también pudiéramos decir que la crítica, han de acompañar constantemente á los cálculos puramente matemáticos.

Y todo esto comprueba y justifica una vez más el método que me he propuesto seguir en esta Cátedra.

En todos los cursos explico, pues, una materia distinta; pero enlazándola hasta donde me sea posible, con las anteriores: iré avanzando de este modo hasta donde llegue en el amplio programa, y con ser tan amplio, todavía insuficiente, que he presentado al principio de esta conferencia. Lo cual no impide que al empezar cada curso, procure hacer un resumen rapidísimo de los asuntos tratados en los cursos precedentes.

Este resumen es algo así como el lazo de unión, ó una serie de lazos de unión, entre los diferentes cursos de nuestra asignatura.

*
* *

En el primer curso, que como dije antes fué el de 1905 á 1906, expuse ampliamente la diferencia fundamental que existe entre la Física experimental y la Física matemática.

Todo lo que allí consigné, pudiera repetir hoy con igual convencimiento, con igual exactitud histórica y con igual solidez lógica que entonces; y pudiera, además de los ejemplos que entonces presenté, y que en cierto modo daban alguna idea de lo que son las diferentes ramas de la Física matemática, pudiera presentar, repito, otros muchos en comprobación de la idea fundamental.

La Física experimental estudia los fenómenos del mundo físico, ya en la Naturaleza, ya en su reproducción en el gabinete; los clasifica en cada grupo, marca algunos parámetros de los que entre ciertos límites dependen las apariencias y los accidentes, los cambios y las relaciones del grupo de fenómenos que se considera.

Entre estos parámetros distingue los que son independientes de los que no lo son, y por medio de la experiencia, y acudiendo en todo caso á hipótesis muy elementales, busca las relaciones analíticas entre dichos parámetros; y estas fórmulas son las que expresan las leyes cuantitativas y experimentales del fenómeno en cuestión.

La Física matemática sigue otro procedimiento distinto, hoy muy combatido, á mi entender, sin razón.

Empieza, naturalmente, por estudiar los fenómenos, y recogiendo al contacto de la realidad cierta inspiración idealista, y me atrevo á llamarla idealista, aunque muchas veces conduzca á un materialismo radical, establece una hipótesis; á esa hipótesis que en todo el siglo pasado ha sido la hipótesis mecánica, le aplica el cálculo matemático, que si se parte de tal hipótesis será el cálculo de las ecuaciones del movimiento tomadas de la Mecánica clásica. Pero en rigor, la hipótesis pudiera tener otro carácter, y siempre se cita á este propósito la teoría analítica del calor de Fourier, y yo me he atrevido á citar la electrodinámica de Ampère, aunque parezca extraño que la coloque fuera de la hipótesis mecánica, cuando el problema se reduce á la determinación de fuerzas. Y sin embargo, por las razones que el año anterior expuse, no considero que esta creación del gran matemático francés se funde en la hipótesis mecánica.

Una vez obtenidas las fórmulas finales, éstas expresarán también la ley del fenómeno, aunque habrán sido obtenidas de distinta manera, que las fórmulas de la Física experimental de que antes hablábamos; y es claro que será un *desideratum* supremo la concordancia y la armonía de una y otra forma.

De todas maneras, las fórmulas de la Física matemática siempre estarán sujetas á la experiencia ó para su comprobación ó para la determinación de las constantes que contengan.

Ya en el primer curso hicimos resaltar el diferente carácter de una y otra ciencia, la ciencia experimental y la Física matemática; según resulta de las anteriores explicaciones.

La primera estudia los hechos; materialmente está siempre en contacto con la realidad; no aventura ninguna hipótesis, ó si se ve obligada á ello, procura que tales hipótesis sean sencillas, naturales y en el menor número posible: re-

nunciar á todas ellas es el bello ideal de un físico de laboratorio.

Y sobre todo huye de las *grandes hipótesis de conjunto* en cuanto le es posible.

La Física matemática, por el contrario, parte de una ó varias hipótesis generales, comprensivas, totales pudiéramos decir, que basten á explicar los fenómenos con sólo aplicar á ellas el cálculo matemático, como ha sucedido con la hipótesis mecánica.

La ciencia experimental, apoyándose en terreno firme, es fundamentalmente sólida; sus errores son parciales; los errores de una experiencia con otra y otra experiencia se corrigen, y como está constantemente consultando á la realidad, es la ciencia investigadora por excelencia; y creadora pudiéramos decir también, de nuevos fenómenos, porque el físico los hace brotar en su gabinete.

En cambio carece de la grandeza y de la elevación de la Física matemática, no satisface por completo los anhelos de la inteligencia, y no explica ni aun se aproxima á la esencia íntima de los fenómenos: ni siquiera lo intenta, ya que realizarlo sea imposible.

La Física matemática tiene más grandeza, más elevación, y aun nos atreveríamos á decir más poesía.

En vez de sujetarse á la experiencia, parece que la dirige y aun la domina, aplicando á ella los conceptos de *cantidad*, de *orden*, de *sucesión*, que son conceptos eminentemente matemáticos. Porque las matemáticas, *a priori*, ó porque así sea, ó porque así lo imaginamos; *a priori*, repito, determina las leyes de la *cantidad*, del *orden*, de la *sucesión* en sí y en la aplicación á la realidad material.

Por lo menos las determina sin la esclavitud de la experiencia inmediata.

En cambio, no ha de desconocerse, que el método *a priori* es peligroso, que son peligrosas las hipótesis, porque fácilmente puede descarrilar la razón, si me es permitido ex-

presarme de este modo, ó puede tomar un mal camino que le conduzca á la región de las ilusiones y de los absurdos.

Sea como fuere, esta doble tendencia del espíritu humano, la tendencia realista, y la tendencia idealista, si marchan en buena armonía pueden conseguir y han conseguido en el siglo precedente triunfos admirables y verdaderamente gloriosos.

La Física experimental ha descubierto maravillas; y cuando menos, símbolos maravillosos de todos los fenómenos de la Física y de la Química ha creado la Física matemática.

* * *

Sin embargo, repitiendo lo que ya varias veces he dicho en años anteriores, he de hacer constar que la hipótesis mecánica encuentra grandes contradictores; y que, á decir verdad, la hipótesis mecánica de las masas ponderables y la vieja mecánica que la sirve de fundamento, parecen impotentes por sí solas para explicar todos los fenómenos de la electricidad y el magnetismo, algunos fenómenos de la luz y los fenómenos misteriosos de la Química.

Y digo misteriosos, refiriéndome tan sólo á su profunda complicación.

Esto, por una parte.

Más aún; no puede negarse tampoco, que á veces la ciencia experimental por ambiciones de dominio, que así son propias de las cosas como de los hombres, tiende á invadir el terreno de la Física matemática, desdeña sus hipótesis, renuncia á penetrar en la esencia de los fenómenos y aspira á que dominen en absoluto sus métodos y sus principios.

Renuncia, decimos, á saber lo que son las cosas en su esencia, y se contenta con averiguar el cómo son en sus manifestaciones externas.

Recuérdese que en el año precedente, al estudiar, ó aun mejor, al preparar el estudio para años sucesivos, de los campos eléctricos y magnéticos, decíamos que toda una escuela, y en ella muchos físicos y muy respetables, y algunos eminentes, renunciaban en absoluto á toda hipótesis sobre la constitución íntima del campo eléctrico, del campo magnético, de los dieléctricos y del éter, y se contentaban con determinar para cada punto de dichos campos dos vectores: el vector eléctrico V_e y el vector magnético V_m .

Y todo campo, según la escuela conceptualista, que es á la que me refiero, queda definido en su total extensión y pueden estudiarse todas sus propiedades, conociendo estos dos vectores, el vector eléctrico y el vector magnético.

¿Y cómo se conocen experimentalmente?

Colocando ó imaginando que se coloca en el punto que se considera un plano eléctrico de prueba, con una carga igual á la *unidad*, y midiendo la fuerza eléctrica que resulta.

Esta fuerza será el vector V_e .

Colocando después en ese mismo punto (ó suponiendo que se coloca) un polo magnético igual á la *unidad*, y midiendo á su vez la fuerza resultante, que será el vector V_m .

Estos dos parámetros, conocidos que sean para todos los puntos del campo, lo definen, lo determinan de una manera fija y exacta, con independencia de toda hipótesis y de toda teoría; pero como esto no basta ni aun para la ciencia experimental, porque de este modo la ciencia experimental no sería más que un conjunto inacabable de hechos sin enlace entre sí, no la realidad, sino polvo disperso de la realidad desmenuzada, aquí no pueden detenerse ni la ciencia experimental ni la escuela conceptualista.

Es preciso buscar relaciones entre estos dos parámetros que definen el campo: es decir, entre el vector V_e y el vector V_m .

Mas las relaciones entre los dos vectores no han de buscarse partiendo de ninguna hipótesis, sino de resultados experimentales.

Son leyes que se determinan experimentalmente, y esto es lo que hicimos en las últimas conferencias del curso anterior, partiendo de dos experiencias fundamentales: la de la corriente en un circuito, ó mejor dicho, la fuerza electromotriz determinada por el flujo del vector magnético; y la del trabajo magnético, también en un circuito cerrado, partiendo del flujo de las corrientes, que pasan por dentro del dicho circuito.

*
* *

Però si bien se considera, esta es la marcha general, no de la Física matemática, sino de la Física experimental.

No otra cosa hace este método: definir los sistemas ó los fenómenos por parámetros y buscar experimentalmente las relaciones matemáticas entre éstos.

No otra cosa hacíamos en el primer curso de esta asignatura, cuando para explicar el carácter de la ciencia experimental tomábamos el ejemplo de un gas y definíamos dicho sistema por la presión, el volumen y la temperatura; y luego experimentalmente buscábamos la relación entre el *volumen* y la *temperatura* que es ley experimental de Gay Lusac; y entre el *volumen* y la *presión* resultado práctico, que en la ciencia experimental tenía dos nombres, á saber: la ley de Mariote ó de Boyle.

Pues si bien se considera, lo que pretende la escuela conceptualista, al determinar las fórmulas de los campos eléctricos y magnéticos, es exactamente esto mismo.

Lo que en el ejemplo del gas eran los tres parámetros p , v , t , ó sean presión, volumen y temperatura, es en los campos electromagnéticos el conjunto de estos dos parámetros, que hemos designado con los nombres de vector eléctrico y vector magnético, ó sean V_e y V_m .

Lo que en el ejemplo del gas eran las leyes experimentales de Mariote y de Gay Lusac, son las dos leyes experimentales del flujo de fuerzas y del flujo de corrientes.

Pero todo esto, lo repetimos, constituye el método experimental; no es el método propio de la Física matemática.

No afirmo en estos momentos cuál de los dos métodos es preferible, y antes bien he afirmado que los dos son necesarios.

Lo que sí digo es, que las tendencias de la escuela conceptualista muestran el propósito firme de anular la Física matemática.

Afortunadamente esto es imposible, porque esto sería anular las aspiraciones más nobles del espíritu humano; pero si lo fuera sería un gran retroceso que quedaría tristemente señalado en la Historia de la Ciencia.

*
* *

Ciertos autores, entre los más ilustres, en odio á las hipótesis, van todavía más lejos, y alguno hay para el que ni existe la electricidad como fluído, ni el magnetismo tampoco, sustituyendo á estas dos venerables substancias, y perdónesele el adjetivo, fórmulas matemáticas, conceptos abstractos de la ciencia de la cantidad.

Este es otro aspecto de la cuestión enlazado con el precedente, pero en el que no podemos detenernos por ahora.

*
* *

Al hacer el resumen del primer curso, ó sea el de 1905 á 1906, hemos ampliado con nuevos puntos de vista y nuevos ejemplos los que en aquella ocasión expusimos.

Al ejemplo de los gases, hemos podido agregar en orden perfectamente lógico, el ejemplo de los campos electromagnéticos, diciendo algo, que más adelante ampliaremos, sobre

la escuela conceptualista; y agreguemos, para terminar, que aquí se presentan cuatro tendencias del espíritu científico, que corresponden:

La primera: á la ciencia físico-matemática con sus hipótesis, sus fórmulas y sus apelaciones á los teoremas de la mecánica, ya de la mecánica clásica, ya de otra mecánica más amplia.

La segunda orientación, corresponde á la Física experimental con sus parámetros, que definen los fenómenos, y con sus relaciones experimentales, que determinan fórmulas matemáticas entre dichos parámetros.

La tercera orientación, ó el tercer método, es el que corresponde á la escuela conceptualista que casi se confunde con la Física experimental, según acabamos de ver.

Y todavía hay una cuarta orientación, un cuarto punto de vista; y casi nos atreveríamos á decir, el gérmen de otra nueva Ciencia, que á la Física matemática y á las hipótesis mecánicas pretende sustituirse. Y es esta nueva ciencia la *Energética* defendida y propagada por el ilustre Ostwald: pero esta es materia que no puede ser tratada de paso.

Hubiera querido en mi primera conferencia haber hecho el resumen de los cinco cursos anteriores; mas como no ha sido posible, en la conferencia próxima continuaremos, y, á ser posible, daremos fin á dicha tarea, para empezar desde luego el estudio propio de este nuevo curso que, como dijimos al principio, será el de la teoría de los torbellinos y de la Hidrodinámica.

XVII.— Conferencias sobre Física matemática
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia segunda.

SEÑORES:

Comenzamos el resumen de las conferencias dadas en esta clase en los cinco primeros cursos, al final de la conferencia anterior, exponiendo la materia en que nos habíamos ocupados durante el curso del 1905 al 1906; que no fué otra que el análisis de los caracteres fundamentales de la Física experimental y de la Física matemática, y de las diferencias que estos caracteres establecen entre una y otra.

Pero no tuvimos tiempo para completar el resumen de las conferencias siguientes, y este va á ser el objeto de la conferencia de hoy.

* * *

En los cursos de 1906 al 1907, del 1907 al 1908 y del 1908 al 1909, expusimos la teoría matemática de la elasticidad; y habiendo dedicado á esta teoría nada menos que tres cursos, y, por lo tanto, tres volúmenes de la colección de estas conferencias, que va editando la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, pudiera creerse que ha-

bíamos hecho un estudio completo de dicha teoría; y, sin embargo, no es así. Hemos establecido las bases de esta rama de la Física; hemos llegado á las fórmulas fundamentales, y hemos ilustrado la teoría con algunos ejemplos, y de ahí no hemos pasado.

Una teoría elemental, y no otra cosa, hemos expuesto en estas tres series de conferencias.

Y la explicación es bien sencilla: hemos estudiado tres veces la teoría de la elasticidad *por tres métodos distintos*; porque estos tres métodos son fundamentales en la Física matemática.

No es conveniente, ni era posible prescindir de ninguno de ellos, pues marcan, por decirlo así, *tres tendencias*; y, por otra parte, como he afirmado veces repetidas, no puedo agotar ninguna de las materias que abordo, pero aspiro á tratar el mayor número posible de problemas. Y así dediqué todo un curso, que fué el segundo de esta serie, á la teoría de la elasticidad, según el método de Cauchy; el siguiente, á esta misma teoría, según Lamé; y el último de los tres, á la exposición del método de Poincaré, para la solución de los mismos problemas antes estudiados.

Pero son tres puntos de vista distintos; todos ellos tienen dilatados horizontes en la Física matemática, y aun llevan tres nombres ilustres: Cauchy, Lamé, Poincaré.

Y en rigor, aun hubiera podido exponer un cuarto método; pero de él prescindí por el pronto, con la esperanza de que le llegue más adelante un turno en estas conferencias.

El por qué empecé mis estudios en esta cátedra por la teoría de la elasticidad, ya lo he explicado ampliamente en algunas de las lecciones inaugurales de los primeros cursos; hoy sólo diré que, á mi juicio, el problema de la elasticidad, considerado en toda su extensión, es el problema general de la Física matemática, aun cuando pueda tomar aspectos diversos, y hasta cierto punto es la base, sobre todo partiendo de la hipótesis mecánica, de la mayor

parte de las teorías que explican ó pretenden explicar los fenómenos del mundo inorgánico.

Es problema el de la elasticidad, que tiene excepcional importancia por sí; por su relación con otros problemas, y porque los métodos analíticos, que á él se aplican, son el tipo de otros métodos generales, que hemos de ir encontrando en el estudio de la Física matemática, sobre todo mientras apliquemos en todo ó en parte la hipótesis mecánica tantas veces citada.

Hagamos ahora el resumen de los tres métodos que hemos aplicado al estudio de la elasticidad.

*
* *

El primero es, como antes hemos indicado, el método de Cauchy, que es, en cierto modo, el tipo y el modelo para la resolución de muchos problemas de la Física matemática en la pasada centuria.

Es el que más francamente acepta la hipótesis mecánica, es el más sencillo, el más natural, y casi me atreveré á decir que el más atrevido. Es en el que más se marcan los caracteres de la Física matemática y de sus diferencias con la Física experimental.

Considera á todo cuerpo dividido en elementos, ó más bien que dividido, compuesto de partículas materiales aisladas, y entre estas particillas imagina fuerzas, que las enlazan dos á dos y que están representadas por el producto de las masas de ambos puntos y de una función de las distancias, á saber:

$$mm'f(r).$$

Con lo cual el problema de la elasticidad se convierte en un problema de mecánica racional, idéntico en el fondo,

aunque más complicado teóricamente, que el problema general de la Astronomía.

Porque el problema se reduce á lo siguiente: dadas las masas de diferentes puntos, que en nuestro caso son en número enorme, porque son tantos como partículas tiene el cuerpo; dada la ley de las fuerzas interiores que los enlazan, y en todo caso, dadas las fuerzas exteriores, determinar el equilibrio y el movimiento del sistema, que constituyén todos estos puntos.

Claro es que si se trata de un problema de movimiento, á los datos anteriores habrá que agregar las condiciones iniciales del sistema.

El problema está planteado como una imitación del problema astronómico, parte de la hipótesis mecánica, y establece sus ecuaciones fundamentales, tomando para cada punto (x, y, z) las ecuaciones generales de la dinámica:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Claro es que si n representa el número de puntos, que en nuestro caso es inmenso, tendremos n grupos de tres ecuaciones como las precedentes.

Por lo demás, el problema estático está comprendido también en las tres ecuaciones anteriores, igualando las componentes X, Y, Z á cero.

Y en rigor, la solución matemática del problema de la elasticidad está escrito en las tres ecuaciones precedentes, si se conoce la ley de las atracciones y repulsiones de los diferentes puntos (x, y, z) ; puesto que en este caso, las com-

ponentes X, Y, Z serán funciones conocidas de las coordenadas, y tendremos, multiplicando $mm'f(r)$ por los tres cosenos de los ángulos que forma la recta r con los tres ejes:

$$X = \Sigma mm'f(r) \frac{x-x'}{r}; \quad Y = \Sigma mm'f(r) \frac{y-y'}{r}; \quad Z = \Sigma mm'f(r) \frac{z-z'}{r}.$$

Claro es que la solución que hemos dado, como decíamos al tratar este asunto por primera vez, es practicamente ilusoria, porque el número n equivale á muchos millones de millones y tendríamos una enormidad de ecuaciones que resolver.

Pero esta dificultad se salva, como ya explicamos, sustituyendo á las $3n$ ecuaciones precedentes, un sólo grupo de tres ecuaciones; para lo cual basta pasar de las ecuaciones diferenciales simultáneas con tres funciones x, y, z y una variable independiente t , á un sólo grupo de tres ecuaciones en diferenciales parciales: las funciones desconocidas serán las tres componentes u, v, w del desplazamiento de cada punto, y las variables independientes serán x, y, z, t .

De esta suerte, la solución del problema será difícil, pero es posible.

Otra simplificación fundamental consiste en contar tan sólo para cada punto con la acción de los inmediatos, es decir, con los que disten de cada punto una longitud inferior al radio de actividad molecular.

Con estas dos simplificaciones fundamentales, y *desarrollando en serie* los segundos números de las tres ecuaciones, sólo queda para resolver el problema, integrar dicho sistema de ecuaciones.

Este método es general; no sólo se aplica á la teoría de la elasticidad, sino á la acústica y á la óptica, y constituye uno de los mayores triunfos de la Física matemática en el siglo anterior.

En las breves líneas que preceden, creemos haber hecho

un resumen bastante completo, del método de Cauchy, que expusimos con mayor amplitud en el segundo curso de esta asignatura; y sólo agregaremos á lo dicho, que el método del gran maestro es la aplicación más fiel, más general, más sencilla y más armónica de la hipótesis mecánica.

El método de Cauchy supone además que todas las fuerzas *son centrales* y admite la *acción á distancia*; supone todavía que *la acción es igual y contraria á la reacción*, y conforme con los principios de la mecánica clásica da como evidente, que en cada momento las *acciones entre cada dos puntos no dependen* en manera alguna *de la velocidad de estos puntos*.

Llamamos la atención sobre todas estas condiciones, porque son propias, no sólo del método de Cauchy, sino de los métodos generales, que prevalecían en la Física matemática clásica.

Ya veremos, y en rigor ya hemos visto, que la Física matemática moderna casi niega, ó repugna, y en muchos casos no acepta dichas condiciones.

Se niega, repetimos, la acción á distancia; se rechazan las fuerzas centrales; varios problemas eléctricos hay, en que el principio de la igualdad entre la acción y la reacción se pone en duda, como, por ejemplo, en la teoría de Lorentz; y, por fin, en la teoría del electrón hay que contar con las velocidades de los elementos eléctricos, y hasta con toda la *historia del sistema*, si vale la palabra, al calcular los esfuerzos en cada instante.

Otra restricción: aun admitiendo provisionalmente la inercia de las masas clásicas, á la par de ellas se admite la inercia eléctrica.

*
* *

Después de exponer el método de Cauchy para el problema de la elasticidad, expusimos, en el curso de 1907 á 1908,

a teoría de la elasticidad también, pero según el método de Navier, Lamé, Clebsch y otros autores.

Como hemos hecho el resumen del primer método, vamos á hacer el resumen del segundo, que será hacer el resumen del último curso citado.

En rigor, el método de Lamé no aplica la hipótesis mecánica en toda su pureza, como el de Cauchy.

Es una especie de término medio entre la hipótesis mecánica, y cierta tendencia al método experimental, aunque el ilustre autor acude á la mecánica racional con todas las condiciones antes señaladas.

No divide el cuerpo elástico en puntos materiales de masa determinada m, m', \dots , ni establece las ecuaciones de equilibrio de estos diferentes puntos como hace Cauchy.

Toma como elemento un paralelepípedo infinitamente pequeño en el interior del cuerpo elástico.

Hace constar, que la experiencia demuestra, que sobre las caras de este paralelepípedo actúan determinadas fuerzas elásticas, reacciones de todo el sólido sobre el paralelepípedo elemental expresado.

De modo, que así como Cauchy establecía las ecuaciones de equilibrio para *cada punto*, y tres ecuaciones eran bastantes, Lamé tiene que establecer las ecuaciones de equilibrio del sólido elemental sometido á las reacciones sobre sus seis caras y á la fuerza exterior, que actúe en su centro de gravedad, y que será un dato, al paso que las anteriores reacciones serán verdaderas incógnitas del problema; puesque hasta ahora no sabemos cómo se distribuyen las tensiones elásticas en el interior del sólido.

Las ecuaciones de equilibrio ya no serán tres, sino seis, porque no se trata de *un punto*, sino de *un sólido*, por más que se le suponga absolutamente rígido.

Tres ecuaciones para las componentes y tres para los pares.

Estas tres últimas desaparecen introduciendo en las tres

primeras las condiciones, que dichas ecuaciones de los pares establecen, y que se reducen á la igualdad entre ciertas componentes de las tensiones superficiales.

Tal es la primera parte de la solución.

La segunda consiste en expresar las componentes u , v , w de los desplazamientos ó deformaciones, en función de las fuerzas elásticas; porque *la experiencia* enseña que las deformaciones dependen de las fuerzas deformantes.

Como en la primera parte hemos obtenido relaciones entre las fuerzas elásticas, y en la segunda hemos expresado éstas en función de las deformaciones, sustituyendo en aquéllas los últimos valores de dichas fuerzas elásticas, tendremos un sistema de ecuaciones, que nos determinarán u , v , w , es decir, las componentes de las deformaciones ó desplazamiento de cada punto.

Claro es, que en este método, como en el anterior, se aplican dos simplificaciones: siguiendo la primera llegamos á tres ecuaciones en diferenciales parciales; siguiendo la segunda se limitan las integrales para cada punto á las acciones de los puntos comprendidos en la esfera de actividad molecular.

Por el método de Cauchy y por el método de Lamé se llega á las mismas ecuaciones, que siempre son ecuaciones diferenciales de las tres funciones u , v , w en diferenciales parciales, respecto á las variables independientes

$$x, y, z, t.$$

Los resultados son idénticos, salvo una pequeña diferencia, que explicamos en el tercer curso de esta asignatura al tratar del método de Lamé, y entonces llamamos la atención sobre dicha circunstancia.

En el método de Cauchy, las fuerzas entre las cuales se busca el equilibrio, ó que se tienen en cuenta si el problema es de dinámica, son única y exclusivamente las que se

desarrollan entre cada dos puntos, las que hemos representado por $f(r)$.

Si queremos obtener las tensiones, que, según la experiencia prueba, se desarrollan en el interior de todo cuerpo elástico, el problema se resuelve sin dificultad, aunque los cálculos sean un poco pesados; y en el segundo curso obtuvimos, al explicar el método de Cauchy, dichas tensiones (presiones ó tracciones); pero no entran en juego para la solución del problema, se obtienen *à posteriori*.

Por el contrario, en el método de Lamé, de las tensiones se parte, para la solución del problema, puesto que estas tensiones son precisamente las que han de establecer el equilibrio del paralelepípedo elemental, en unión con las fuerzas exteriores aplicadas al centro del mismo y de las fuerzas de inercia, si el problema es de dinámica.

Tal diferencia se explica por lo que antes dijimos; porque Cauchy admite la hipótesis mecánica en toda su pureza; el cuerpo elástico es ni más ni menos que un pequeño cielo astronómico, cada punto es un astro en miniatura, y no hay que tener en cuenta más que *posiciones*, *masas* y *esfuerzos*.

En el método de Lamé entra ya el elemento práctico y experimental: de la experiencia se toma el concepto de *tensión ó de fuerza elástica*.

*
* *

En el curso siguiente, es decir, en el de 1908 á 1909, desarrollé ante mis alumnos el método de Poincaré para resolver el problema de la elasticidad, método distinto de los dos anteriores; que, á decir verdad, más se aproxima al método de Cauchy que al de Lamé, y que tiene cierta tendencia hacia la Física matemática moderna, en el sentido de prescindir de algunas de las condiciones, que antes señalábamos y que son dominantes en la hipótesis mecánica.

La principal diferencia entre el método de Poincaré y el de Cauchy, es que el primero de estos dos matemáticos, prescinde de la restricción, que establece la hipótesis de las fuerzas centrales.

Cauchy suponía que las fuerzas que se desarrollaban en el interior de un cuerpo elástico eran *centrales*.

Mr. Poincaré resuelve el problema más en general, puesto que lo resuelve sean ó no sean centrales dichas fuerzas, y aun marca cierta tendencia á prescindir de la acción á distancia.

Del mismo modo que Cauchy, establece para cada punto del sistema elástico las tres ecuaciones fundamentales del equilibrio ó del movimiento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z,$$

pero determina las tres fuerzas X , Y , Z de distinto modo que aquél.

Las define por una condición más general que la de las fuerzas centrales.

En suma, supone que todas las fuerzas que actúan en el interior del cuerpo elástico *tienen una potencial*, ó dicho de otro modo, que existe una función F de las coordenadas de los puntos del sistema, tal, que para cada punto las componentes de las fuerzas, que sobre él actúan, se obtienen tomando las derivadas con relación á x , y , z de dicha función potencial, ó si se quiere función de fuerzas; pues ya sabemos que ambas funciones tienen el mismo valor numérico y son de signos contrarios,

En términos aún más precisos: del tipo de las tres ecuaciones anteriores parten ambos insignes maestros, pero Cauchy determina las componentes x , y , z de la fuerza, que actúa sobre cada punto, por medio de la función de la distancia $f(r)$; y Poincaré, tomando como base de la función de fuerzas $U(x, y, z, \dots)$.

Es decir, según Cauchy

$$X = \Sigma m m' f(r) \frac{x - x'}{r}, \quad Z = \Sigma m m' f(r) \frac{y - y'}{r}, \quad Y = \Sigma m m' f(r) \frac{z - z'}{r},$$

y según Poincaré

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}$$

De suerte, que ambos autores parten de una función desconocida f ó V ; y en ambos, en su esencia, el artificio analítico es el mismo: sustituir á ambas funciones sus desarrollos en serie, no tomando más que cierto número de términos.

En rigor, esto equivale á tomar, en vez de la función desconocida, una de forma algebraica, cuyos constantes, dicho sea en términos generales, se determinarán prácticamente por cierto número de experiencias.

Otro tanto hace la Física experimental: hacer pasar una función, que ha de determinar cierta ley, por muchos puntos; sustituir á funciones desconocidas, funciones que á ellas se aproximen más ó menos.

En el fondo, la Física matemática y la Física experimental son como afluentes á un solo río, y no es imposible encontrar una unidad matemática que los comprenda á los dos.

Pero estas consideraciones nos llevarían demasiado lejos.

Hemos hecho el resumen de los tres cursos empleados en el estudio de la teoría de la elasticidad; sólo nos queda, para este resumen general, que digamos algo del curso anterior.

El título general que le dimos era éste: «Cuestiones de Análisis y sus aplicaciones á la Física matemática».

Hemos dicho, y hemos repetido bajo diversas formas, que en todo problema de Física matemática hay, por decirlo así, tres momentos que considerar.

1.º Se formulan ciertas hipótesis fundamentales, que claro es que no son arbitrarias, sino que, por el contrario, están inspiradas por la observación de los fenómenos naturales, que pretendemos explicar, y cuyas leyes nos proponemos establecer.

Lo que hay es que las hipótesis pueden ser muchas: como cada poeta se inspira de distinto modo ante la Naturaleza, así el matemático ó el físico se inspiran de distinta manera ante el mundo inorgánico.

De aquí, repetimos, que las hipótesis puedan ser diversas, y á medida que los fenómenos son más complejos, el número de hipótesis puede ser mayor.

Buena prueba de ello son las hipótesis modernas en la teoría de la electricidad.

Ya en la conferencia anterior citamos los nombres de muchos autores, á cada uno de los que corresponde una hipótesis distinta; y aún sin acudir á la electricidad, que es el fenómeno más misterioso y relativamente más moderno, entre todos los que asaltan el organismo del ser humano, y penetran por sus sentidos despertando sensaciones diferentes; viniendo á lo más elemental y conocido, tomando por ejemplo el fenómeno luminoso, encontramos tres hipótesis distintas: la hipótesis de la emisión, debida á Newton; la hipótesis de las vibraciones etéreas, ó sea del movimiento ondulatorio, hipótesis desarrollada en fórmula matemática por Fresnel, por Cauchy, para no citar más que dos de los prin-

cipales; y la teoría moderna electromagnética, que va unida al nombre ilustre de Maxwell.

En suma, este primer momento se caracteriza por el establecimiento de ciertas hipótesis.

2.º Establecida la hipótesis, á ella se aplica el cálculo matemático para obtener las ecuaciones fundamentales.

Y si la hipótesis es la designada con el nombre de *hipótesis mecánica*, la mecánica da desde luego las ecuaciones fundamentales, como hemos visto al estudiar la teoría de la elasticidad.

3.º Al llegar á este tercer momento, puede decirse que ha terminado el problema de Física matemática, y que aquel problema se ha convertido en un problema ó en una serie de problemas de matemáticas puras.

Generalmente, las ecuaciones en que está planteado el problema son ecuaciones diferenciales, y es preciso integrarlas para obtener relaciones entre cantidades finitas: por ejemplo, obtener las coordenadas de varios puntos en función finita del tiempo y de los datos del problema.

Mas por lo regular, estos problemas de matemáticas puras son inmensamente difíciles, y en ellos han ejercitado su genio los grandes matemáticos del pasado siglo, y prosiguen esta soberana labor en nuestros días los sucesores ilustres de los grandes maestros.

Mas volvemos á repetirlo: al llegar á este punto ya no es la Física la que impera, como no sea para introducir simplificaciones por medio de nuevas hipótesis.

Domina casi en absoluto la ciencia pura.

El físico le propone al matemático una serie de problemas abstractos, generalmente nuevos, y le pide soluciones analíticas.

Deber del matemático es responder á la demanda, como es obligación de una fábrica de máquinas, construir la máquina que determinada industria le pida.

Y estas consideraciones nos obligan á repetir algo, que en

otra ocasión hemos dicho, sobre una doble tendencia de la ciencia moderna, y sobre ciertas invasiones, contra derecho, de la Física en el campo prodigioso de la ciencia abstracta, quiero decir, de las matemáticas puras.

Claro es, que la Física ha sugerido á las matemáticas puras multitud de problemas y de teorías.

La Física ha sido *la ocasión* de grandes estudios matemáticos, que acaso sin tal estímulo no se hubieran presentado, ó se hubieran presentado bajo otra forma.

Los fenómenos del mundo inorgánico, en cuanto son susceptibles de peso y medida, y de aplicación de las fórmulas matemáticas, han sido el estímulo, la ocasión, repetimos, ó si se quiere la causa determinante de gran número de problemas de análisis.

Esto hay que reconocerlo sin vacilación, y el eminente matemático Mr. Picard ha desarrollado recientemente ideas análogas en un notabilísimo trabajo, de que hemos hablado en otro sitio.

Pero de reconocer realmente esta influencia de la ciencia aplicada en la ciencia pura, á admitir que todo el contenido de las matemáticas, ó por lo menos la mayor y la mejor parte, sea debido al influjo de las ciencias físicas, media un abismo: el abismo que se extiende entre lo verdadero y lo falso.

La ciencia matemática tiene una *autonomía propia, un territorio infinito que le pertenece*, y no es, ni puede ser, colonia, explotable cuando más, y subordinada en todo caso, de las ciencias físicas.

Los caracteres de las ciencias matemáticas, su campo propio, y en cierto modo su facultad creadora, les dan carácter de independencia, que en buen derecho no se les puede negar; y basta por ahora sobre este punto, que no será la última vez que discutamos.

Decíamos, para terminar el resumen de los cursos anteriores de esta asignatura, y para hacer el resumen del curso precedente, que en él habíamos explicado: la *teoría de los vectores*; la *fórmula de Greem*; la *fórmula de Stokes*, y que de haber tenido tiempo hubiéramos explicado algunas otras teorías y algunas otras fórmulas, como, por ejemplo, la fórmula de Fourier y el problema de Dirichlet, para no citar más que estas dos entre otras, que anunciamos al empezar el curso último, y que no pudimos explicar bien á pesar nuestro.

Y á propósito de estas teorías matemáticas aplicables á problemas de la Física, hubiéramos podido seguir dos caminos: 1.^o ó haber emprendido desde luego el estudio de diferentes ramas de la Física, *interrumpiéndolo* de cuando en cuando, á medida que necesitáramos del auxilio de alguna cuestión analítica; por ejemplo, en la teoría de la luz, según Cauchy, abriendo un paréntesis para la fórmula de Fourier; en la electrostática clásica, abriendo otro paréntesis para explicar la teoría de la potencial y el problema de Dirichlet; en la electrostática y en la electrodinámica modernas, interrumpiendo una vez más su exposición, para demostrar las fórmulas de Greem y de Stokes; en algunas teorías de Maxwell, suspendiéndolas todavía para presentar el método de los cuaternios; en las teorías del electrón, cortándolas varias veces para explicar notaciones modernas; ó interrumpiendo á la mitad algunas memorias de Heaviside, para dar cuenta de la integración simbólica; en suma, mezclando, á medida que la necesidad se presentase, la física matemática con las teorías del análisis á que acude aquélla como á poderosos é ineludibles auxiliares.

Esta mezcla de la Física matemática y de las teorías matemáticas tiene graves inconvenientes en la enseñanza; porque el alumno pierde de vista el problema para él fundamental, que es el problema físico, para engolfarse en las dificultades y sutilezas del análisis.

La Física matemática pierde su unidad, y el carácter principal que debe tener en su propio terreno; que así como antes rechazábamos la absorción de las matemáticas puras por la física, así ahora, y en prueba de neutralidad, rechazamos con igual energía la tendencia opuesta.

Así es que no creemos conveniente que la Física matemática, renunciando á sus condiciones propias, se anegue en un mar de cálculos, de fórmulas, de transformaciones y de teorías puramente abstractas.

2.º O también hubiéramos podido seguir otro sistema.

Haber reunido todas estas cuestiones de análisis, á que hemos de ir acudiendo, en una *Introducción general*.

Pero entonces habríamos pasado uno ó más cursos sin hablar más que de Matemáticas puras, siendo esta clase de Física matemática y no de Análisis.

Cada cosa en su punto.

A cada cual lo suyo; y esto explica nuestro programa del curso anterior y el programa de algún otro curso que más adelante tenemos que explicar, si llegamos á explicarlo, á modo de complemento del de 1909 á 1910.

*
* *

Pero, al fin y al cabo, la Cátedra que tengo la honra de ocupar es Cátedra de Física matemática, no es Cátedra de matemáticas puras, y yo no podía pasar un curso entero explicando teorías matemáticas abstractas sin hablar de ningún problema de física.

Por eso, y para tranquilidad de mi conciencia, á los teoremas abstractos acompañé sus aplicaciones más inmediatas á la ciencia en que me ocupo, y esto me permitió dar algunas ideas de la electroestática y la electrodinámica, y presentar en las últimas conferencias algo así como una introducción

á la Física matemática moderna y á los modernísimos problemas de los campos eléctricos y magnéticos.

Y aquí termino el resumen que me había propuesto hacer, y en la conferencia próxima entraremos probablemente en la materia propia del curso que ahora empieza, y que será ó podrá tener por título la Hidrodinámica y la teoría de los torbellinos; ó si se quiere, *La teoría de los torbellinos* tan sólo.

XVIII.—Estudio completo de una clase especial de integrales singulares.

POR LAURO CLARIANA

(Conclusión.)

V

ESTUDIO DE UNA CIERTA CLASE DE INTEGRALES SINGULARES
PARA CUANDO LAS VARIABLES SON IMAGINARIAS

Las integrales singulares referidas á variables imaginarias, á la par como en la cantidad real, se pueden deducir de la integral general, así como de la ecuación diferencial correspondiente.

En el primer caso se presenta otra vez el estudio de las involutas y envolventes, si bien bajo un punto de vista más general que el correspondiente á la cantidad real.

Supondremos un caso particular para aclarar ideas.

Sea el movimiento de la variable independiente z en su propio plano, describiendo circunferencias correspondientes á la ecuación

$$(x - G)^2 + y^2 = r^2, \quad (1)$$

siendo o el polo y ox el eje polar.

El valor del radio vector oa , por ejemplo, puede obtenerse mediante el paso de coordenadas cartesianas á polares. Así, la ecuación (1) se transforma en

$$(\rho \cos \theta - G)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = r^2,$$

de donde

$$\rho = G \cos \theta + \sqrt{r^2 - G^2 \sin^2 \theta}.$$

Esta expresión podía obtenerse directamente de la figura, pues

$$oa = ob + ba = G \cos \theta + \sqrt{r^2 - G^2 \sin^2 \theta} = \rho.$$

Luego la fórmula de la variable independiente es

$$z = \rho e^{\theta \sqrt{-1}} = [G \cos \theta + \sqrt{r^2 - G^2 \sin^2 \theta}] e^{\theta \sqrt{-1}} \quad (2)$$

Si la función ω se enlaza con z , bajo la forma $\omega = z^2$ resulta:

$$\omega = [G \cos \theta + \sqrt{r^2 - G^2 \sin^2 \theta}]^2 e^{2\theta \sqrt{-1}}. \quad (3)$$

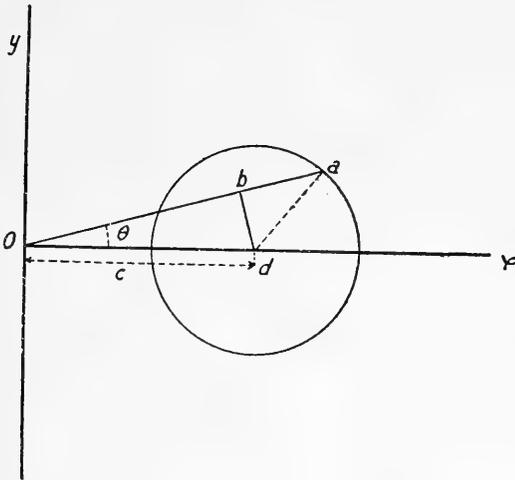


Figura 10.

Ahora bien, se comprende que suponiendo la variable z que describa diferentes circunferencias de radio r , teniendo todos los centros en puntos del eje x , ó del eje polar, según la ecuación dada (1), estas circunferencias darán lugar á una envolvente en el plano de la variable independiente, así como tendremos otra envolvente en el plano de la función, producida por la serie de líneas pertenecientes á la ecuación (3), y que guardarán relación con las de la ecuación (2).

Para tener la envolvente en el plano de la variable independiente, derivaremos (2), según la constante G , é igualando á cero el resultado, esto es,

$$\cos \theta - \frac{G \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{r^2 - G^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = 0,$$

de donde

$$G = r \cot \theta.$$

Este valor, sustituido en (2), da los puntos que corresponden á la envolvente de los diferentes círculos de radio r , esto es,

$$z = \left(r \cot \theta \cos \theta + \sqrt{r^2 - r^2 \cot^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta} \right) e^{\theta \sqrt{-1}} = \frac{r}{\operatorname{sen} \theta} e^{\theta \sqrt{-1}}$$

Luego, para que el módulo de z sea $\frac{r}{\operatorname{sen} \theta}$, es preciso

que $ob = r$ sea perpendicular á oa , porque sólo en este caso, se tiene

$$r = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Así, pues, al variar la constante G de la ecuación (1), resultan diferentes círculos cuya envolvente será la línea que une los diferentes puntos b, b', \dots , ó sea una recta paralela al eje polar á la distancia r ; y para valores negativos de θ , otra recta envolvente de las circunferencias por la parte inferior á distancia $-r$ del eje x , ó eje polar; estos resultados, se armonizan completamente con los obtenidos para cuando la variable era real.

Si pasamos ahora á la función $\omega = z^2$, por cumplirse las condiciones, no sólo de monogenidad, sino todas las demás que se requieren para que la función pueda considerarse holomorfa, cabrá suponer otra envolvente en el plano de la función, conforme á las diferentes involutas originadas por las del plano de la variable independiente.

Así se tiene que para cada valor particular atribuido á G ,

resultará una línea en el plano de la función, según la fórmula (3).

De suerte, que según el procedimiento general explicado para encontrar la envolvente de todas estas líneas en el plano de la función ω , basta derivar (3), según G , igualando el

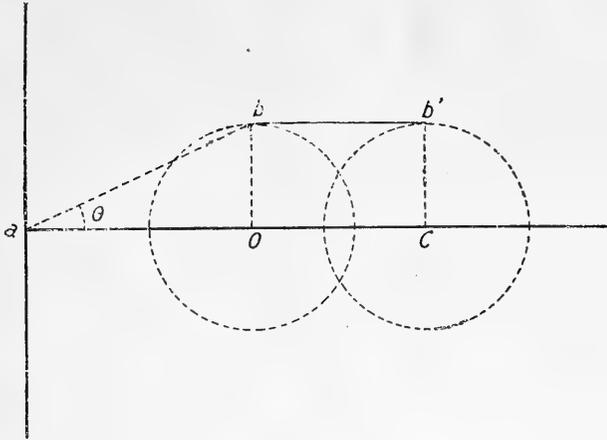


Figura 11.

resultado á cero, eliminando luego la constante G entre esta última ecuación y (3).

Así resulta

$$2 \left(G \cos \theta + \sqrt{r^2 - G^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right) \left(\cos \theta - \frac{G \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{r^2 - G^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right) e^{2\theta\sqrt{-1}} = 0,$$

y para que se verifique esta igualdad, se tiene

$$\cos \theta - \frac{G \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{r^2 - G^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = 0.$$

Igual condición que para la variable independiente; de modo que al sustituir en (3) el valor

$$G = \frac{r}{\operatorname{sen} \theta},$$

se obtiene

$$\omega = \left(\frac{r}{\text{sen } \theta} \right)^2 e^{2\theta\sqrt{-1}}.$$

Esta es la ecuación de la envolvente en el plano de la función.

La figura siguiente manifiesta cómo puede construirse dicha envolvente, determinando las involutas en el plano de la función, correspondientes á las del plano de la variable independiente, para lo cual no hay más que escoger la unidad lineal, y luego, por medio de terceras proporcionales, determinar los cuadrados de los módulos de la variable independiente, cuyos cuadrados serán los módulos respectivos de la función, los cuales deberán colocarse en argumentos dobles de los que corresponden á la variable independiente.

* * *

Después de estas breves consideraciones acerca de la relación íntima que existe entre la función y la variable independiente, para cuando las variables son imaginarias, vamos á deducir integrales singulares de la integral general, ó de la ecuación diferencial.

El primer caso no ofrece dificultad alguna.

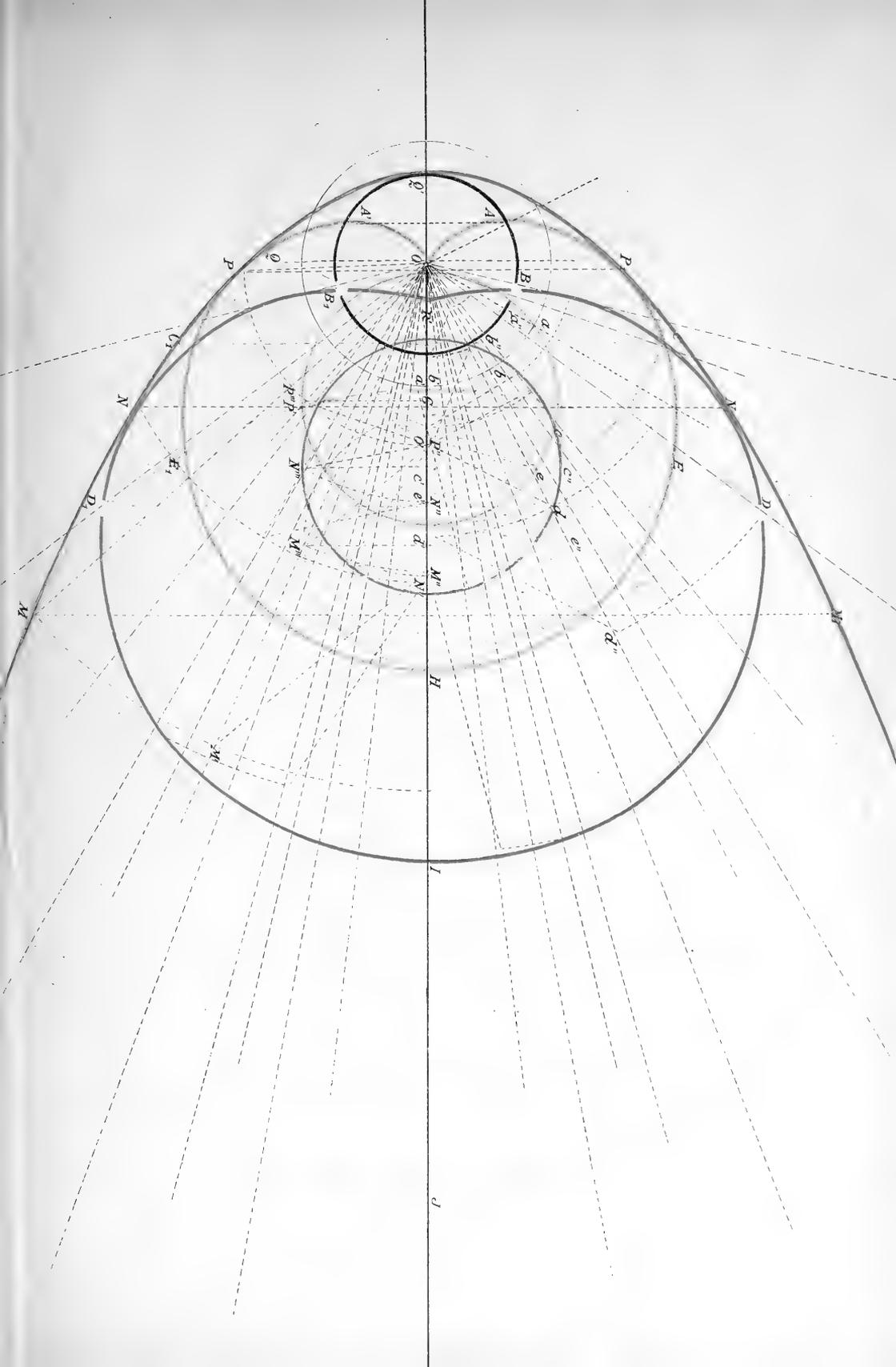
Sea, por ejemplo,

$$\omega - z^3 G + z^4 G^2 = 0 = F(z, \omega, G), \quad (1)$$

como integral general de cierta ecuación diferencial.

Según los principios que preceden, para determinar la integral singular de (1), se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial G} = -z^3 + 2z^4 G = 0,$$



de donde

$$G = \frac{1}{2z}. \quad (2)$$

Al sustituir este valor en (1), se obtiene,

$$(3) \quad \omega = \frac{1}{4} z^2.$$

Esta ecuación constituye la integral singular de la ecuación diferencial correspondiente á (1). Si se quisiera obtener dicha ecuación diferencial, deberíamos derivar (1), según la variable independiente z , de donde

$$\omega' = 3z^2 G - 4z^3 G^2; \quad (4)$$

el valor G de esta igualdad es

$$G = \frac{3}{8z} + \sqrt{\frac{9}{64z^2} - \frac{\omega'}{4z^3}}, \quad (5)$$

luego al sustituirlo en (1), se tendrá inmediatamente la ecuación diferencial pedida, dependiente de ω' .

Digno de mención es, según la teoría general explicada ya para cuando las variables eran reales, que la ω' de la ecuación diferencial, y de la integral singular, deben corresponderse; ó que si se sustituye en la ecuación diferencial el valor ω' , que corresponde á la integral singular, debe transformarse la ecuación diferencial en la integral singular.

Aplicando este segundo procedimiento en el caso presente, tendremos que la derivada de (3) es

$$\omega' = \frac{1}{2} z;$$

valor que, sustituido en (5), da

$$G = \frac{3}{8z} + \frac{1}{8z} = \frac{1}{2z}.$$

Y como quiera que esta expresión es igual á (2), naturalmente se comprende que sustituido otra vez en (1), reproduzca la misma integral singular (3), lo cual nos justifica la igualdad admitida entre las derivadas ω' de las dos ecuaciones anteriormente supuestas.

Consideremos ahora el caso más interesante: deducir la integral singular de la ecuación diferencial, aplicando de un modo análogo el mismo procedimiento que hemos empleado al tratar de variables reales.

Nos concretaremos á presentar tan solo dos casos:

1.º Considerando una ecuación diferencial de primer orden; y

2.º Siendo la ecuación diferencial de orden superior al primero.

1.º Sea la ecuación

$$z^2 \omega'^2 + 2z\omega' + \omega^2 + z^2 = 0. \quad (1)$$

Al generalizarla, según ω' se obtiene

$$(1') \quad z^2 G^2 + 2zG + \omega^2 + z^2 = 0 = F(z, \omega, G).$$

Según la fórmula $\frac{\partial F}{\partial G} = 0$, resulta:

$$2z^2 G + 2z = 0,$$

de donde

$$G = -\frac{1}{z}. \quad (a)$$

Al sustituir este valor en (1'), se halla

$$\omega^2 + z^2 = 1. \quad (2)$$

Esta ecuación constituye la integral singular de cierta ecuación diferencial que podrá corresponder con (1), según se identifique ó no con ella.

Conforme al método que venimos desarrollando para encontrar esta segunda ecuación diferencial, de la cual (2) es su verdadera integral singular, bastará derivar (1'), como siempre, según la variable independiente, que aquí es z ; luego

$$2zG^2 - 2G + 2\omega\omega' + 2z = 0,$$

de donde

$$(3) \quad G = -\frac{1}{2z} \pm \sqrt{\frac{1}{4z^2} - \frac{4\omega\omega'z + 4z^2}{4z^2}}.$$

Al sustituir este valor G en (1'), tendremos su ecuación diferencial.

Ahora bien, según el ejemplo precedente, la derivada ω' de la ecuación diferencial segunda, y la de la integral singular, deben ser iguales, de modo que al sustituir el valor ω' de la integral singular, ó sea $\omega' = -\frac{z}{\omega}$ en (3), correspondiente á la ecuación diferencial, debe aparecer el mismo valor para G , que nos ha conducido á la integral singular.

En efecto, de (3) resulta

$$G = -\frac{1}{2z} \pm \sqrt{\frac{1}{4z^2} - \frac{4\omega \times -\frac{z}{\omega}z + 4z^2}{4z^2}} = -\frac{1}{2z} \pm \frac{1}{2z}.$$

Se comprende que no se puede utilizar el primer valor, quedando tan sólo el segundo, que es $G = -\frac{1}{z}$, siendo este

exactamente igual á (a), conforme nos habíamos propuesto demostrar.

Fácilmente se alcanza que la primera ecuación diferencial no queda satisfecha por (2), pues al sustituir en (1) el valor $\omega' = -\frac{z}{\omega}$, deducido de (2), se obtiene

$$\frac{z^4}{\omega^2} - \frac{2z^2}{\omega} + \omega^2 + z^2 = 0,$$

expresión que siendo $\omega^2 + z^2 = 1$, no puede reducirse á una identidad.

2.º Ejemplo.

Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1) \quad z^2 \omega''^2 + 2z\omega\omega'' + \omega'^2 + z^2 \omega' = 0.$$

Al generalizarla, según ω' , se obtiene

$$(1') \quad z^2 G^2 + 2z\omega G + \omega'^2 + z^2 \omega' = 0 = F(z, \omega, \omega', G).$$

Para obtener la integral singular, como siempre, consideraremos

$$\frac{\partial F}{\partial G} = 0,$$

de donde

$$2z^2 G + 2z\omega = 0, \quad \text{ó sea} \quad G = -\frac{\omega}{z}. \quad (a)$$

Sustituyendo en (1')

$$z^2 \frac{\omega^2}{z^2} - 2z \frac{\omega^2}{z} + \omega'^2 + z^2 \omega' = 0.$$

Simplificando, $-\omega^2 + \omega'^2 + z^2 \omega' = 0$. (2)

Esta es la integral singular.

Al derivar, según z , para obtener la ecuación diferencial de (1'), se tiene

$$2zG^2 + 2(\omega + z\omega')G + 2\omega'\omega'' + 2z\omega' + z^2\omega'' = 0,$$

de donde

$$(3) \quad G = -\frac{\omega + z\omega'}{2z} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega + z\omega'}{2z}\right)^2 - \frac{\left(\omega'\omega'' + z\omega' + \frac{z^2\omega''}{2}\right)}{4z^2}} \quad 4z.$$

Sustituyendo esta valor G en (1'), se tendrá la verdadera ecuación diferencial, de la cual es integral singular (2). Y para demostrarlo bastará ver, como en el ejemplo anterior, que este valor de G , que se acaba de obtener corresponde con el de (a), en el supuesto de que ω'' sea el mismo para (3) y (2).

En efecto, al derivar (2), resulta

$$-2\omega\omega' + 2\omega'\omega'' + 2z\omega' + z^2\omega'' = 0,$$

ó sea

$$\omega'\omega'' + z\omega' + \frac{z^2\omega''}{2} = \omega\omega'.$$

De modo que, según (3), se deduce

$$G = -\frac{\omega + z\omega'}{2z} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 + 2\omega z\omega' + z^2\omega'^2 - 4z\omega\omega'}{4z^2}}.$$

Deduciendo y tomando el signo inferior, se ve cómo este valor G puede corresponder con (a), resultando $G = -\frac{\omega}{z}$; todo lo cual nos confirma que (2) es la integral singular de la segunda ecuación diferencial.

Podíamos haber determinado la integral singular (2), re-

solviendo la ecuación (1), según ω'' y en el concepto de que las dos raíces que se encuentran fuesen iguales

$$\omega'' = -\frac{\omega}{z} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{z^2} - \frac{\omega'^2 + z^2 \omega'}{z^2}};$$

de donde

$$-\omega^2 + \omega'^2 + z^2 \omega = 0 \quad \gg \quad \omega'' = -\frac{\omega}{z} = G,$$

ecuaciones iguales á las halladas (2) y (a).

Estos resultados nos demuestran, por ser $\omega'' = G$, que la integral singular lo es también de (1).

Por fin, aun cabe determinar una segunda integral singular, generalizando (2).

En efecto, se tendrá

$$(1'') \quad -\omega^2 + G^2 + z^2 G = 0 = F(z, \omega, G).$$

Luego, según lo que precede,

$$\frac{\partial F}{\partial G} = 0 = 2G + z^2,$$

de donde

$$G = -\frac{z^2}{2}.$$

Al substituir este valor en (1''), se obtiene

$$-\omega^2 + \frac{z^4}{4} - \frac{z^4}{2} = 0,$$

ó sea

$$\omega^2 = -\frac{z^4}{4}. \quad (2')$$

Esta ecuación forma la segunda integral singular.

Para hallar la ecuación diferencial correspondiente á (1''),

de la cual (2') es su verdadera integral singular, empezaremos derivando (1'') según z

$$-2\omega\omega' + 2zG = 0,$$

sustituyendo el valor G en (1''), se tendrá la ecuación diferencial

$$-\omega^2 + \frac{\omega^2\omega'^2}{z^2} + z\omega\omega' = 0,$$

la cual se puede expresar por

$$\omega^2\omega'^2 + z^3\omega\omega' - \omega^2z^2 = 0, \quad (b)$$

Esta ecuación se corresponde con (2'), pues al derivar ésta da

$$\omega' = -\frac{z^3}{2\omega},$$

cuyo valor, sustituido en (b), atendiendo á (2'), se obtiene

$$\frac{z^6}{4} - \frac{z^6}{2} + \frac{z^6}{4} = 0,$$

ó sea

$$0 = 0.$$

Identidad que nos dice que (2') es la integral singular de (b), así como fácilmente se concibe que no lo es de la ecuación (2), pues al sustituir en ella los correspondientes valores de (2'), no la pueden transformar en identidad.

Después de lo expuesto, damos aquí fin al estudio de las integrales singulares, tomadas en el sentido de que su derivada corresponda con la de una cierta ecuación diferencial, principio que seguramente podría aplicarse en otros casos que no se manifiestan en la presente Memoria.

XIX.—Sobre la investigación de los aceites minerales mezclados á las oleínas de grasa de lana de procedencia no alemana (*).

POR WERNER MECKLENBURG Y GEORG WINTERFELD.

Para investigar los aceites minerales, agregados con el fin de adulterar las oleínas de grasa de lana, I. Marcusson (**), había propuesto mezclar la oleína-problema con su volumen de alcohol etílico de 96 por 100; en el caso de contener tales aceites minerales, la mezcla se enturbia más ó menos, y es posible descubrir así hasta el 20 por 100 de aceite mineral pesado. Los experimentos descriptos á continuación, fueron practicados con el objeto de encontrar un método apropiado para investigarlo en menores cantidades.

Aumentando la proporción de alcohol etílico añadido á la oleína-problema, la reacción se sensibiliza bastante; así, en una oleína de grasa de lana que contenía 10 por 100 de aceite mineral y que con su volumen del alcohol no producía enturbiamiento, se observó la reacción muy clara después de mezclarla con vez y media su volumen de alcohol. Aumentando todavía más la cantidad relativa de éste, aumenta también la sensibilidad de la reacción, pero también se enturbian francamente otras oleínas de grasa de lana de indudable pureza, añadiéndolos el doble de su volumen de alcohol.

(*) Publicado en lengua alemana en las «Mitteilungen aus dem Königl. Materialprüfungsamt zu Grosslichterfelde - West bei Berlin», año 1910, pág. 471-474.

(**) «Mitteilungen», año 1910, pág. 469.

Por esta causa, en los ensayos que se describen, se ha empleado de continuo un volumen y medio de alcohol etílico de 96 por 100, y siempre se ha procedido del modo siguiente:

Diez centímetros cúbicos de la oleína-problema ó en otros casos de la oleína mezclada con aceite mineral — naturalmente después de bien agitada la mezcla — colocados en una probeta de 25 centímetros cúbicos de cabida se cubren cuidadosamente con 15 centímetros cúbicos de alcohol etílico de 96 por 100, se calienta á la temperatura exacta de 20 centígrados, y enseguida se agita bastante para mezclar los componentes íntimamente.

Como se había observado que, pasado cierto tiempo, en el caso de tratarse de oleínas falsificadas con aceites minerales, se depositaba en el fondo del cilindro un aceite claro, siempre se ha determinado su cantidad al cabo de una hora de reposo y á la temperatura constante de 20 centígrados, para ver si era posible deducir de la cantidad del aceite depositado la del aceite mineral adulterante.

No pareciendo imposible que la viscosidad de éste tuviese influencia en la sensibilidad, se han empleado en los análisis aceites minerales de diferentes viscosidades.

Los resultados experimentales, resumidos en el cuadro I y que se refieren á por cientos en volumen, demuestran que en la casi totalidad de los casos se pueden investigar del modo descrito el 10 por 100 y hasta 5 por 100 de aceite mineral en las oleínas. También se reconocen ciertas relaciones entre la cantidad del aceite depositado al cabo de una hora y la adicionada de aceite mineral.

Los experimentos siguientes se realizaron asimismo tendiendo á establecer una variante del método de Marcusson apropiada para investigar hasta 5 por 100 de aceites minerales contenidos en las oleínas de grasa de lana.

El alcohol etílico más diluído (de 80 por 100) y el alcohol metílico puro, al comienzo ensayados, no resultaron apropia-

dos al caso; producían también enturbiamientos con oleínas puras, y el alcohol amílico ó mezclas de alcohol etílico y cloroformo disolvían asimismo las oleínas adulteradas con aceites minerales.

Se lograban mejores resultados empleando mezclas de los alcoholes metílico y etílico, y era la mejor y la más apropiada la hecha con 90 volúmenes de alcohol metílico y 10 de etílico, que disuelve completamente las oleínas de grasa de lana puras. Tratando la oleína-problema con su volumen de esta mezcla alcohólica, en todos los casos se han investigado 10 por 100 y en la mayoría también 5 por 100 de aceites minerales, á causa de enturbiarse la mezcla y depositarse una capa de aceite.

Los análisis se han realizado del modo ya indicado; y los resultados se han consignado en el cuadro II.

Resulta de estos experimentos que las oleínas de grasa de lana agitadas con su volumen de una mezcla de 90 volúmenes de alcohol metílico y 10 volúmenes de alcohol etílico y que, después de dejadas una hora en reposo á 20 centígrados, no depositan un aceite, pueden considerarse exentos de cierta cantidad de aceites minerales. En el caso de reacción positiva, hay que investigar con más detenimiento la naturaleza de los componentes no saponificables de la oleína en cuestión, estudiando, según las prescripciones de Marcusson (*) su poder rotatorio y su número de iodo.

Una muestra de oleína de grasa de lana importada de Inglaterra y en la que por el método de Marcusson no se ha podido establecer la existencia de sustancias adulteradas, empleando el método alcohólico descrito, ha producido un enturbiamiento muy fuerte; y al cabo de una hora se había depositado una mezcla de aceite con gran cantidad de componentes sólidos; pero en el caso de falsificaciones de acei-

* «Mitteilungen», año 1904, pág. 96.

tes minerales en las mismas condiciones se deposita un aceite claro. Esta reacción, muy diferente de las respectivas reacciones de las otras oleínas, se puede explicar por la existencia, en la oleína inglesa en cuestión, de grandes cantidades de sustancias sólidas y no saponificables. Otra oleína de grasa de lana inglesa, en la que tampoco se ha podido establecer la existencia de sustancias extrañas, en la prueba alcohólica también ha producido enturbiamiento y se ha depositado un aceite. La causa de tal divergencia todavía no se ha podido aclarar, pero hay que decir como estas investigaciones han tropezado con la dificultad extraordinaria de obtener oleínas de grasa de lana inglesas y puras. Y según se ha podido averiguar por los informes de casas importadoras de oleínas de grasa de lana en grande, en la industria alemana, cuando menos, rara vez se aprovechan las oleínas inglesas porque tienen el gran inconveniente de no prestarse al completo lavado de las telas y paños.

CUADRO PRIMERO

Investigación de las oleínas de grasa de lana puras y falsificadas con aceites minerales, mezclándolas á 20 centígrados, con vez y media su volumen de alcohol etílico de 96 por 100.

Núm.	OLEÍNA DE GRASA DE LANA		ACEITE MINERAL ADULTERANTE			Enturbiamiento.	Dejadas las mezclas á una hora en reposo y á 20 centígrados, se han depositado.		
	Procedencia.	Apariencia exterior.	Núm.	Viscosidad á 20 centígrados determinada con el viscosímetro de Engler.	Cantidad añadida á la oleína por litro de volumen.				
1	Francia.	De mediocre tenacidad, pardo claro, transparente, débil fluorescencia verde y del olor característico de las oleínas de grasa de lana	—	—	0	Nada.	0 ccm.		
			1	22,0	40	Muy fuerte . . .	6,7 —		
					3J			Muy fuerte . . .	5,9 —
					20			Muy fuerte . . .	4,7 —
					10			Fuerte	3,1 —
		5			Nada.	0 —			
2	Francia.	Idem.	—	—	40	Muy fuerte . . .	6,7 —		
			3	12,3	30	Muy fuerte . . .	5,4 —		
					20	Muy fuerte . . .	4,0 —		
					10	Fuerte	1,9 —		
					5	Débil	1,8 —		
3	Francia.	Idem.	—	—	0	Nada.	0 —		
4	Francia.	Idem.	—	—	15	Fuerte.	4,0 —		

3	Francia.....	Ídem, pero de color pardo-amarillo..	—	0	Nada.....	0
4	Francia.....	Ídem, pero de débil fluorescencia verdosa.....	—	0	Nada.....	0
			1	22,0	Fuerte.....	3,3
			2	4,3	Nada.....	0
			3	12,3	Nada.....	0
					Nada.....	0
5	Francia.....	Ídem.....	—	0	Nada.....	0
			3	12,3	Fuerte.....	2,0
			5	26,7	Fuerte.....	2,5
				5	Fuerte.....	3,0
6	Francia.....	Ídem, pero de muy débil fluorescencia verdosa.....	—	0	Nada.....	0
			3	12,3	Fuerte.....	2,4
7	Francia.....	Ídem, pero de color rojo-pardo.....	—	0	Nada.....	0
			3	12,3	Débil.....	1,2
			5	26,7	Débil.....	0,8 (?)
				5	Débil.....	2,0

CUADRO PRIMERO

Investigación de las oleínas de grasa de lana puras y falsificadas con aceites minerales, mezclándolas á 20 centigrados, con vez y media su volumen de alcohol etílico de 96 por 100.

Núm.	OLEÍNA DE GRASA DE LANA		ACEITE MINERAL ADULTERANTE			Enturbiamiento.	Dejadas las mezclas á una hora en reposo y á 20 centigrados, se han depositado.
	Procedencia.	Apariencia exterior.	Núm.	Viscosidad á 20 centigrados determinada con el viscosímetro de Engler.	Cantidad añadida á la oleína por 100 de volumen.		
1	Francia ..	De mediotre tenacidad, pardo claro, débil fluorescente, débil fluorescencia verde y débil olor característico de las oleínas de grasa de lana	1	22,0	0 40 30 20 10 5	Nada. Muy fuerte Muy fuerte Muy fuerte Fuerte Nada	0 ccm. 6,7 5,9 4,7 3,1 0
2	Francia.....	Idem	3 4	12,3 17,4	0 15 5	Nada. Fuerte	0 4,0 2,3
3	Francia.....	Idem, pero de color pardo-amarillo ..	—	—	0	Nada.	0
4	Francia.....	Idem, pero de débil fluorescencia verdosa.....	1 2 3	22,0 4,3 12,3	0 10 10 5 10 5	Nada Fuerte Nada Nada Nada	0 3,3 0 0 0 0
5	Francia.....	Idem.....	3 5	12,3 26,7	0 10 10 5	Nada Fuerte Fuerte Fuerte	0 2,0 2,5 3,0
6	Francia.....	Idem, pero de muy débil fluorescencia verdosa.....	3 5	12,3 26,7	0 10 10 5	Nada Fuerte	0 2,4
7	Francia.....	Idem, pero de color rojo-pardo.....	3 5	12,3 26,7	0 10 10 5	Nada Débil Débil	0 1,2 0,8 (?) 2,0

CUADRO SEGUNDO

Investigación de las oleínas de grasa de lana puras y falsificadas con aceites minerales, agregándoles una mezcla de 90 volúmenes de alcohol metílico con 10 volúmenes de alcohol etílico de 96 por 100.

Núm.	OLEÍNA DE GRASA DE LANA		ACEITE MINERAL ADULTERANTE			Enturbiamiento.	Dejadas las mezclas por una hora en reposo y á 20 centígrados, se han depositado.
	Procedencia.	Apariencia exterior.	Núm.	Viscosidad á 20 centígrados determinada por el viscosímetro de Engler.	Cantidad añadida á la oleína por 100 de volumen.		
1	Francia.....	De mediocre tenacidad, pardo claro, transparente, de débil fluorescencia verde, del olor característico de la grasa de lana.	—	—	0	Nada.....	0 ccm.
			1	17,4	40	Muy fuerte.....	7,8 —
			2	12,3	10	Muy fuerte.....	6,8 —
			3	21,6	5	Muy fuerte.....	5,0 —
2	Francia.....	Ídem.....	—	—	0	Nada.....	0 —
			4	13,6	20	Muy fuerte.....	6,6 —
			5	26,7	20	Muy fuerte.....	6,7 —
			4	13,6	10	Muy fuerte.....	5,6 —
			6	4,3	8	Muy fuerte.....	4,6 —
1	17,4	5	Muy distinto ..	5,1 —			
3	Francia.....	Ídem, pero de color pardo amarillo...	—	—	0	Nada.....	0 —
			3	21,6	27	Muy fuerte.....	6,7 —
			6	4,3	20	Muy fuerte.....	6,7 —
			2	12,3	10	Muy fuerte.....	4,5 —
			6	4,3	10	Muy fuerte.....	5,7 —
5	26,7	10	Muy fuerte.....	4,8 —			

4	Francia.....	Ídem.....	4	—	13,6	0	Nada.....	0
						20	Muy fuerte.....	7,2
			3	21,6	15	10	Muy fuerte ..	6,0
			4	13,6	5		Fuerte	5,3
								4,5
5	Francia.....	{ Ídem, pero de débil fluorescencia ver- dosa.....	1	—	17,4	0	Nada	0
			6	4,3	20	10	Muy fuerte	6,2
			2	12,3	5		Muy fuerte ..	3,5
							Muy fuerte.....	3,8
6	Francia.....	{ Ídem, pero de muy débil fluorescen- cia verdosa.....	1	17,4	10	10	Nada	0
			6	4,3	5		Muy fuerte....	2,1
			5	26,7	5		Muy fuerte.....	3,8
							Apenas sensible.	0
							Muy débil....	0
7	Francia.....	{ Ídem, pero de color rojo-pardo.	5	—	26,7	0	Nada	0
			1	17,4	20	10	Muy fuerte	6,0
			7	22,0	5		Muy fuerte. .	4,2
							Muy fuerte....	3,9
8	Francia.....	{ Ídem, pero de color pardo.....	—	—	0		Distinto.....	0

CUADRO SEGUNDO

Investigación de las oleinas de grasa de lana puras y falsificadas con aceites minerales, agregándoles una mezcla de 90 volúmenes de alcohol metílico con 10 volúmenes de alcohol etílico de 96 por 100.

Núm.	OLEINA DE GRASA DE LANA		ACEITE MINERAL ADULTERANTE			Enturbiamiento.	Dejadas las mezclas en reposo y á 20 centígrados, se han depositado.
	Procedencia.	Apariencia exterior.	Núm.	Viscosidad á 20 centígrados determinada por el viscosímetro de Engler.	Cantidad añadida á la oleína por 100 de volúmen.		
1	Francia.....	Demiedioce tenacidad, pardo claro, transparente, débil fluorescencia verde, del olor característico de la grasa de lana.	—	—	0	Nada.....	0 ccm.
			1	17,4	40	Muy fuerte....	7,8 —
			2	12,3	20	Muy fuerte....	6,8 —
2	Francia.....	Ídem.....	3	21,6	5	Fuerte.....	5,0 —
			4	—	0	Nada.....	0 —
			5	13,6	20	Muy fuerte....	6,6 —
			6	26,7	20	Muy fuerte....	6,7 —
3	Francia.....	Ídem, pero de color pardo amarillo....	4	13,6	10	Muy fuerte....	5,6 —
			6	4,3	8	Muy fuerte....	4,6 —
			1	17,4	5	Muy distinto...	5,1 —
			3	—	0	Nada.....	0 —
			6	21,6	27	Muy fuerte....	6,7 —
4	Francia.....	Ídem.....	2	4,3	20	Muy fuerte....	6,7 —
			3	12,3	10	Muy fuerte....	4,5 —
			6	4,3	10	Muy fuerte....	5,7 —
			5	26,7	10	Fuerte.....	4,8 —
			4	—	5	—	4,0 —

4	Francia.....	Ídem.....	—	—	0	Nada.....	0 —
			4	13,6	20	Muy fuerte....	7,2 —
			3	21,6	15	Muy fuerte....	6,0 —
			4	—	10	Muy fuerte....	5,3 —
5	Francia.....	Ídem, pero de débil fluorescencia verdosa.....	2	13,6	5	Fuerte.....	4,5 —
			1	—	0	Nada.....	0 —
			6	17,4	20	Muy fuerte....	6,2 —
6	Francia.....	Ídem, pero de muy débil fluorescencia verdosa.....	1	—	10	Muy fuerte....	3,5 —
			6	4,3	5	Apenas sensible.	0 —
			5	26,7	5	Muy débil....	0 —
7	Francia.....	Ídem, pero de color rojo-pardo.....	—	—	0	Nada.....	0 —
			5	26,7	10	Muy fuerte....	2,1 —
			1	17,4	10	Muy fuerte....	3,8 —
			7	22,0	5	Muy fuerte....	4,2 —
8	Francia.....	Ídem, pero de color pardo.....	—	—	0	Distinto.....	0 —
			5	—	20	Muy fuerte....	6,0 —
			1	—	10	Muy fuerte....	4,2 —
			7	—	5	Muy fuerte....	3,9 —

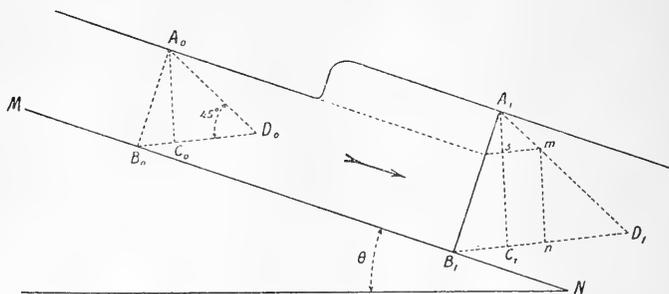
XX. — Estudio analítico del Resalto superficial.

POR JUAN FLOREZ POSADA

Las consideraciones que vamos á exponer á continuación, tienden á modificar la expresión generalmente adoptada para valor de la pérdida de carga originada en un canal, cuando, por circunstancias especiales, aparece en la superficie libre del líquido que por él discurre, un resalto.

De la inclinación del lecho del canal, depende la importancia del resalto, y por tanto, su influencia en las condiciones dinámicas del derrame del líquido.

Sea, como indica la figura, un lecho MN que forme un



ángulo θ con el horizonte, y supongamos que aparece en la masa líquida un resalto como el dibujado en la figura citada.

Formando dos secciones, una anterior y posterior la otra, al resalto, tales como la $A_0 B_0$ y la $A_1 B_1$; suponiendo, además, que están entre sí muy próximas, y aplicando á la masa líquida en movimiento, comprendida entre ambas sec-

ciones, la ecuación de las cantidades de movimiento, tendremos, como primer miembro de dicha ecuación

$$\frac{\pi}{g} Q (U_1 - U_0)$$

siendo π el peso específico del líquido, Q el volumen que pasa por las secciones en la unidad de tiempo, y U_0 y U_1 las velocidades medias en las secciones $A_0 B_0$ y $A_1 B_1$, respectivamente.

El segundo miembro de la ecuación, será la suma de las proyecciones sobre un eje tal como el MN de las impulsiones que actúan en la masa. Estas fuerzas serán debidas á tres causas: 1.^a, á las presiones sobre las secciones $A_0 B_0$ y $A_1 B_1$, ya que las que se ejercen sobre el resto de la masa, son normales al eje MN ; 2.^a, el peso de la masa líquida contenida entre ambas secciones; y 3.^a, el rozamiento de los filetes líquidos entre sí, y de éstos con las paredes y lecho del canal. Estos dos últimos sumandos se desprecian en la práctica: el primero, porque siendo la fuerza vertical, su proyección sobre MN , cuyo ángulo θ con la horizontal es siempre muy pequeño, es también muy pequeña. Y el segundo, porque estando las secciones consideradas muy próximas, los esfuerzos que entre ambas, se producen debidos al rozamiento de los filetes, son despreciables.

Quedan, por tanto, como fuerzas que hemos de proyectar sobre MN las presiones en $A_0 B_0$ y en $A_1 B_1$. Sean las áreas de estas secciones w_0 y w_1 , y supongamos que es l el ancho del cauce.

La presión, que supondremos positiva, ejercida sobre el área w_0 , valdrá

$$\pi \times l \times \text{área } (A_0 C_0 D_0),$$

en la cual, $A_0 C_0$ es vertical, y $A_0 D_0$ una recta que forma con la anterior un ángulo de 45° .

Por iguales razones, la presión ejercida sobre el área w_1 será

$$- \pi \times l \times \text{área } (A_1 C_1 D_1).$$

Y estas presiones, como son normales á las secciones sobre que se ejercen, se proyectarán en todo su valor sobre MN .

La suma de esos dos valores nos da

$$\pi \times l [\text{área } (A_0 C_0 D_0) - \text{área } (A_1 C_1 D_1)].$$

Por las construcciones de la figura vemos que

$$\text{área } (A_0 C_0 D_0) - \text{área } (A_1 C_1 D_1) = \text{área } (A_1 C_1 nm)$$

y que

$$\text{área } (A_1 C_1 nm) = \frac{1}{2} A_1 s \times sm + sl_1 \times sm.$$

Y como por otra parte, $\text{área } (A_0 C_0 D_0) < \text{área } (A_1 C_1 D_1)$, tendremos, como valor de la suma algébrica,

$$- \pi \times l \left[\frac{1}{2} A_1 s \times sm + s C_1 sm \right]. \quad (1)$$

Haciendo $A_0 C_0 = h_0$ y $A_1 C_1 = h_1$, y viendo que

$$h_0 \times l = w_0 \cos \theta; \quad h_1 \times l = w_1 \cos \theta \quad \text{y} \quad A_1 s = sm = h_1 - h_0$$

y, por tanto, que

$$h_1 - h_0 = \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta$$

podremos escribir la expresión (1) en la forma

$$- \pi \times l \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_0) \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta + (h_1 - h_0) \frac{w_0}{l} \cos \theta \right]$$

y simplificando,

$$- \pi \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_0) (w_1 - w_0) (h_1 - h_0) w_0 \right] \cos \theta$$

y haciendo operaciones, y recordando que

$$h_1 - h_0 = \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta,$$

$$- \frac{1}{2} \pi (w_1 + w_0) (h_1 - h_0) \cos \theta = - \frac{1}{2} \pi \frac{w_1^2 - w_0^2}{l} \cos^2 \theta$$

Por tanto, la ecuación de las cantidades de movimiento será

$$\frac{\pi}{g} Q (U_1 - U_0) = - \frac{1}{2} \pi \frac{w_1^2 - w_0^2}{l} \cos^2 \theta \quad (2)$$

ó bien cambiando de signo, simplificando y viendo que

$$U_1 = \frac{Q}{w_1} \quad \text{y} \quad U_2 = \frac{Q}{w_2} \frac{Q^2 l}{g \cos^2 \theta} (w_1 - w_0) = w_1 w_0 \frac{w_1^2 - w_0^2}{2}$$

de la cual se deduce, dividiendo por $w_1 - w_0$, la ecuación de segundo grado

$$w_0 w_1^2 + w_0^2 w_1 - \frac{2 Q^2 l}{g \cos^2 \theta} = 0. \quad (3)$$

Del estudio de las raíces de esta ecuación, se deduce la clasificación que, según Mr. Flamant, puede hacerse de las corrientes de agua en *tranquilas* y *torrenciales*.

Pero no es lo general encontrar la ecuación (3) expresada en la forma en que la hemos deducido. Por consideraciones desconocidas, suele aparecer el factor $\cos \theta$ elevado á la primera potencia, siendo así que, si al deducir la ecuación, se

supone para θ un valor apreciable, debe aparecer dicha ecuación tal como expresa la (3). Y si θ es despreciable, la ecuación deberá tener la forma

$$w_0 w_1^2 + w_0^2 w_1 - \frac{2 Q l}{g} = 0.$$

Por iguales causas debiera modificarse la expresión de la pérdida de carga originada por un resalto. En efecto, calculemos la pérdida de carga experimentada por una molécula líquida al pasar de la sección $A_0 B_0$ con la velocidad U_0 , á la sección $A_1 B_1$ con la velocidad U_1 . La carga á que está sometida dicha molécula cuando pasa por $A_0 B_0$ será $\frac{M_0^2}{2g}$, y cuando pasa por $A_1 B_1$ será $\frac{U_1^2}{2g}$. Pero la molécula líquida, en virtud del resalto, se ha elevado en una cantidad

$$h_1 - h_0 = \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta;$$

luego la pérdida de carga experimentada no será $\frac{U_0^2 - U_1^2}{2g}$ sino

$$P = \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g} - \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta,$$

ó bien

$$P = \frac{1}{2g} (U_0 - U_1)(U_0 + U_1) - \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta$$

y como de la expresión (2) se deduce que

$$U_0 - U_1 = \frac{g}{2 Q l} (w_1^2 - w_0^2) \cos^2 \theta,$$

y además

$$U_1 + U_0 = Q \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_0} \right)$$

sustituyendo estos valores en el de P tendremos

$$P = \frac{1}{2g} \frac{g}{2Ql} (w_1^2 - w_0^2) \cos^2 \theta Q \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_0} \right) - \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta$$

ó bien

$$P = \frac{w_1 - w_0}{l} \cos \theta \left[\frac{(w_1 + w_0)^2}{4 w_1 w_0} \cos \theta - 1 \right]$$

cuyo valor de P , si el de θ es apreciable, puede tomar la forma

$$P = (h_1 - h_0) \left(\frac{(w_1 + w_0)^2}{4 w_1 w_0} \cos \theta - 1 \right)$$

ó bien

$$P = (h_1 - h_0) \left[\frac{w_1 + w_0}{4 w_1 w_0} (h_1 + h_0) l - 1 \right].$$

Si el ángulo θ es muy pequeño y su coseno podemos suponerle igual á la unidad, tendremos la relación

$$h_1 - h_0 = \frac{w_1 - w_0}{l}$$

y el valor de la pérdida de carga será

$$P = (h_1 - h_0) \left[\frac{(w_1 + w_0)^2}{4 w_1 w_0} - 1 \right]$$

ó bien

$$P = \frac{(w_1 - w_0)^3}{4 l w_1 w_0}$$

y siguiendo en la hipótesis de $\cos \theta = 1$.

$$P = \frac{l^3 (h_1 - h_0)^3}{4 l^3 h_1 h_0} = \frac{(h_1 - h_0)^3}{4 h_1 h_0}.$$

Esta es la fórmula generalmente usada para valorar la pérdida de carga producida por un resalto, sin embargo de lo cual, la verdaderamente exacta es la primeramente obtenida, cuando suponíamos á θ un valor distinto de cero.

Y lógico es hacer esta hipótesis cierta, ya que con ella hemos llegado á deducir el equilibrio dinámico de la masa líquida en donde aparece el resalto.

Y lo que nunca es admisible, aunque frecuente en los libros de Hidráulica, es suponer, dentro de una misma deducción, unas veces $\cos \theta = 1$, y otros distinto de la unidad.

Será éste un sistema que hace llegar á resultados elegantes por la sencillez de sus fórmulas, y si se quiere, tampoco es de consideración grande el error que se comete al hacer tal hipótesis absurda. Pero no tiene duda que por tal camino se llega á deducciones de fórmulas que no son ciertas.

XXI. — Estudio acerca de los ácidos cromopolisulfúricos.

POR PABLO MARTÍNEZ STRONG.

(Conclusión).

III

Obtención de los ácidos cromopolisulfúricos.

Era obligado el empleo de los métodos explicados en la Memoria del Profesor Recoura, porque su eficacia estaba acreditada en los resultados obtenidos y de mi parte los había logrado excelentes en los primeros ensayos y sólo hube de modificar algunos pormenores en la práctica operatoria, á causa de las circunstancias en que el presente trabajo fué llevado á cabo y que en nada esencial afectan á los procedimientos, antes al contrario, hasta pudieran ser modos de comprobar sus excelencias. De otra parte, trátase al cabo de bien sencillas operaciones, reducidas, en lo fundamental, á introducir, de una manera directa y auxiliándose del calor, varias moléculas de ácido sulfúrico en la molécula del sulfato de cromo y constituir, de esta manera, complejos químicos de orden bastante elevado, de función ácida sumamente enérgica y dotados de caracteres tan singulares, que pueden ponerse como tipo y modelo de los compuestos llamados disimulados, y al propio tiempo su conjunto forma un caso notabilísimo de isomeria en cuerpos minerales, de lo cual proviene el interés que su estudio ha despertado.

Fueron materias primeras en la obtención de los ácidos cromopolisulfúricos, el sulfato verde de cromo muy puro, en escamas brillantes, de color uniforme, transparentes, perfectamente seco y ácido sulfúrico puro de 1.84 de densidad.

Siendo anhidro de sulfato de cromo, y necesitando en cada caso un número determinado de moléculas de ácido sulfúrico real SO_4H_2 , me vi precisado á hacer el cálculo de las proporciones que había menester trabajando con un cuerpo cuya riqueza en SO_4H_2 sólo alcanzaba á ser 94,80 por 100, y se omiten los cálculos por ser elementales. Con el fin de dar al trabajo cierta unidad, se emplearon de continuo 10 grs. de sulfato verde de cromo y el tratamiento fué realizado en idénticas condiciones, cambiando sólo la proporción del ácido sulfúrico, según el cuerpo que deseaba obtener, y operando así, he conseguido resultados excelentes, guiándome siempre por el trabajo de Recoura, que ha premiado la Academia de Ciencias de París.

a) *Acido cromotetrasulfúrico*, $Cr_2(SO_4)_3 + 4SO_4H_2$.
En una cápsula de porcelana, de fondo plano y bastante capacidad puse 10 gramos del sulfato verde de cromo antes citado, añadiendo agua suficiente para su disolución completa, y mezclando luego 5^{cc} de ácido sulfúrico puro ($D = 1.84$). Se evapora el líquido en el baño de María hasta que adquiere consistencia siruposa, y estando todavía caliente se pone en la estufa, manteniéndolo á una temperatura comprendida entre 115° y 120°, y al cabo de dos días se solidifica. Nótese en el aspecto del cuerpo algunas variaciones: tiene el líquido siempre color verde oscuro bien definido, que en el transcurso de la operación pasa al verde botella, y el cuerpo sólido resultante presenta marcado aspecto vítreo; hállese dotado de brillo y formando laminillas delgadas, que se rompen con facilidad suma. Cuatro moléculas de ácido sulfúrico se han unido por tan sencillo artificio con una molécula de sulfato verde de cromo, originando así un nuevo cuerpo, dotado de función ácida, en el cual no es posible reconocer por sus peculiares reactivos, ni el cromo, ni el ácido sulfúrico, determinando precisamente este carácter su individualidad química y su condición de agregado complejo.

Se procede de la misma manera tratándose de los otros dos

ácidos cromopolisulfúricos, con la sola diferencia de emplear, según el caso de que se trate, cinco ó seis moléculas de ácido sulfúrico, sin otras variantes en los métodos operatorios.

b) *Acido cromopentrasulfúrico*, $Cr_2(SO_4)_3 + 5 SO_4 H_2$. Para los 10 gramos de sulfato verde de cromo se emplearon 6^{cc} de ácido sulfúrico puro ($D = 1.84$), que es un ligero exceso, porque el cálculo da 5.23^{cc}, equivalentes á 9.14 gramos de $SO_4 H_2$. A primera vista y mirando sólo á su aspecto, en nada se distingue este nuevo producto del anterior, ni en las fases de la reacción hay tampoco diferencia. Se pasa por el mismo líquido siempre de color verde obscuro, y se logra al cabo una masa de aspecto vítreo constituida por escamas verdes muy frágiles y transparentes, y no obstante, el segundo cuerpo es de mayor complejidad en su composición y estructura, aun cuando no lo diferencian sus reacciones más notorias, ni siquiera de momento quepa todavía establecer las características que la imprime al contener una molécula más de ácido sulfúrico.

c) *Acido cromohexasulfúrico* $Cr_2(SO_4)_3 + 6 SO_4 H_2$. Aquí, para los repetidos 10 gramos de sulfato verde de cromo se emplearon 7^{cc} de ácido sulfúrico ($D = 1.84$), que es un exceso sobre la proporción obtenida por el cálculo, equivalente á 11.57 gramos de $SO_4 H_2$. Procediendo en la forma que anteriormente se dijo, y en las mismas condiciones de temperatura y tiempo, se llega sin dificultad á este nuevo ácido, cuyo aspecto es igual al de los anteriores y análogas propiedades sirven para caracterizarlo, aunque de necesidad su constitución no haya de ser idéntica y en ella deba indagarse su individualidad química.

Demuestra bien cumplidamente la obtención de los tres ácidos cromopolisulfúricos la singular propiedad del sulfato verde de cromo y su aptitud para absorber moléculas de ácido sulfúrico, originando de tal suerte singulares cuerpos complejos de funciones ácidas.

Observaciones generales.—Resulta el cuerpo verde—obli-

gado intermediario en cuantas operaciones quedan indicadas—soluble en el agua con facilidad extremada y de manera completa, y es facilísimo preparar el susodicho líquido, porque la concentración máxima, operando en el baño de María, se consigue al cabo de poco tiempo. No acontece lo mismo con la operación subsiguiente, de la que debe resultar el producto buscado, modificando el primer cuerpo mediante el calor, poniéndolo en la estufa á la temperatura de 115 á 120 grados. Ha de favorecerse la transformación, abreviando el tiempo, con el empleo de cápsulas de porcelana, de fondo plano y bastante superficie para que el líquido forme en ellas capas de muy poco espesor, que sólo apelando á semejante artificio se consigue la completa solidificación de la masa, y eso al cabo de dos días, por lo menos. Es otra dificultad, y no de poca monta, la avidez que para el agua tienen los ácidos cromopolisulfúricos, los tres con igual intensidad, y en virtud de ello absorben con extraordinaria rapidez la humedad atmosférica. Basta dejarlos durante la noche en la estufa fría para ver las masas mucho más fluidas al día siguiente, perdiéndose entonces el trabajo del anterior; por eso es buena práctica cuando haya de haber interrupción en las operaciones, como ha sucedido en las mías, guardar las cápsulas en desecadores que contengan ácido sulfúrico, conservándolas así en atmósferas muy secas hasta el momento de volverlas á la estufa. Teniendo cuidado de estas precauciones, se puede obtener cualquiera de los tres ácidos cromopolisulfúricos en dos ó tres días, á lo sumo. Conforme va indicado, todos presentan el mismo aspecto vítreo, y hállanse dotados del mismo color verde botella, que resulta característico suyo.

Debo hacer notar cómo las propiedades generales indicadas no las tiene nunca el líquido verde, de consistencia siruposa, que es resultado de evaporar en el baño de María una mezcla de sulfato verde de cromo disuelto en agua y ácido sulfúrico. Sólo se consigue el tránsito del estado líqui-

quido al sólido con el cuerpo pastoso intermedio, operando á la temperatura comprendida entre 115 y 120°, sostenida durante bastante tiempo, y no de otra manera; aumentándola, adviértese al punto sensible pérdida de ácido sulfúrico, denotada por el cambio del aspecto de las masas en la forma que se dirá.

d) *Obtención del hidrato sulfocrómico.*—Queda ya apuntado anteriormente que este cuerpo se deriva de cualquiera de los tres ácidos cromopolisulfúricos cuando pierden, mediante la acción del calor, todo el ácido sulfúrico que para constituirse habían fijado, á excepción de una molécula, resultando entonces un cuerpo de la fórmula



Prácticamente se consigue el cambio de modo bien sencillo: basta calentar en la estufa los ácidos cromopolisulfúricos á la temperatura de 140 á 150°, hasta que no pierdan de peso, notándose, mientras prodúcese la transformación, abundante desprendimiento de humos blancos de ácido sulfúrico, cuya eliminación se favorece pulverizando la materia originaria, que aun en el transcurso de las operaciones absorbe la humedad atmosférica, y por ello, si han de interrumpirse algún tiempo, es menester conservarla en un buen desecador de ácido sulfúrico.

Cualquiera que sea el ácido cromopolisulfúrico de que se haya partido, resulta siempre, sin excepción, un sólo cuerpo; el hidrato sulfocrómico $[(SO_3)_4 Cr_2 O_2] (OH)_2$, sólido, pulverulento y de color gris; es soluble en el agua, dando un líquido opalino de color verde amarillento, que, según sabemos, tiene la propiedad de precipitar con todas las soluciones de sales metálicas. A causa de absorber con muchísima rapidez la humedad, tornándose de color verde claro, resulta incómoda la preparación del hidrato sulfocrómico, y es de suerte que se necesita calentarlo para que tome el color gris que le es propio.

e) *Obtención del sulfato violeta de cromo.*—Tengo observado repetidas veces que las disoluciones de sulfato verde de cromo, adicionadas de ácido sulfúrico y abandonadas después de haberlas calentado al baño de María, depositan, al cabo de dos días, gran cantidad de cristales, que son perfectos y bien formados octaedros de sulfato violeta de cromo. Para obtenerlo he empleado siempre las mismas disoluciones utilizadas en los casos de los ácidos cromopolisulfúricos, tantas veces citadas, ó sea líquidos que contenían para una molécula de sulfato verde de cromo, cuatro, cinco ó seis moléculas de ácido sulfúrico. Quedan los cristales de sulfato violeta bañados con un líquido más ó menos espeso y de obscuro color verde, dotado de una particularidad bastante notable: separado del sólido cristalizado y calentándolo en la estufa á la temperatura de 115 á 120°, sostenida durante algún tiempo, da un ácido sulfocrómico; sin que al parecer la pérdida del sulfato crómico que ha experimentado influya cosa alguna en sus propiedades, que continúan siendo las mismas, con iguales circunstancias que las características de los ácidos cromopolisulfúricos directamente preparados.

Según Colson (*), el sulfato verde de cromo en estado sólido de la fórmula $Cr_2(SO_4)_3 + 6H_2O$, obtenido calentando en la estufa á 90° el sulfato violeta, parece ser un polímero de la molécula normal $Cr_2(SO_4)_3(HO)^n$, que sólo existe en disolución. Pudiera suceder algo parecido en el caso presente; por el hecho de la disolución el sulfato verde adquiriría la estructura molecular del sulfato violeta, cristalizando éste al ser eliminado el disolvente, sin intervenir para nada el ácido sulfúrico agregado; mas repitiendo varias veces el experimento con el sulfato verde de cromo, simplemente disuelto en agua, sin adición de ácido, calentándolo luego en

(*) Véanse sus trabajos, antes citados, acerca del sulfato verde de cromo.

idénticas condiciones, nunca se ha producido el fenómeno, lográndose sólo escamas verdes, idénticas á las que habían sido disueltas, y nunca los octaedros peculiares del sulfato violeta de cromo. Hay, pues, que rechazar la hipótesis de la despolimerización del sulfato verde al disolverlo en agua como causa del fenómeno apuntado, y acaso se esté más en lo cierto atribuyendo la formación de los cristales del sulfato violeta á influencias catalíticas ó aun deshidratantes del ácido sulfúrico añadido, que en tal forma contribuiría á esta particular transformación isomérica.

IV

Reacciones de los ácidos cromopolisulfúricos.

Viene ahora el tratar de la más notable y singular propiedad de estos cuerpos, consistente en precipitar sus disoluciones todas las de los compuestos metálicos, sin exceptuar ninguno de ellos, dando compuestos insolubles denominados sulfocromitos. Exceptúa el profesor Recoura el bicloruro de mercurio en calidad de precipitante y no sólo he comprobado su observación, sino que la he demostrado, respecto de otras sales que sólo precipitan á la larga.

a) *Reacciones del ácido cromohexasulfúrico,*



He operado con soluciones acuosas diluidas que, según queda indicado, son opalinas, de color amarillo verdoso y hállanse dotadas de reacción ácida muy intensa.

Por la ebullición se coagulan, dando abundantes copos verdes, cuyo aspecto es idéntico del que ofrecen los obtenidos mediante precipitación.

El ácido clorhídrico concentrado también precipita dichas soluciones, y el cuerpo entonces formado es el hidrato sulfocromico.

El ácido nítrico actúa lo mismo que el anterior.

El ácido sulfúrico ejerce también idénticas acciones.

El amoníaco no precipita.

La lejía concentrada de sosa da precipitado, porque en este caso es destruido por entero el complejo molecular.

Con las soluciones metálicas obtuve los efectos siguientes:

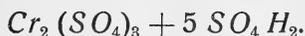
Cloruro de potasio	Precipitado verde coposo.
Cloruro de sodio	Idem íd.
Cloruro amónico	Idem íd.
Cloruro de bario	Idem íd., advirtiéndose la presencia de ácido sulfúrico libre por el precipitado de sulfato de bario.
Cloruro de calcio	Lo mismo que el anterior, siendo menos abundante el precipitado de sulfato de calcio.
Cloruro de estroncio	Precipitado verde coposo.
Sulfato de magnesio	Idem íd.
Cloruro de hierro	Idem íd.
Sulfato de aluminio	Idem íd.
Sulfato de cinc	Idem íd.
Sulfato de manganeso	Idem íd.
Cloruro de níquel	Idem íd.
Nitrato de cobalto	Idem íd.
Nitrato de plata	No precipita inmediatamente, pero sí al cabo de dos días.
Nitrato de mercurio	Precipitado verde coposo.
Nitrato de plomo	Idem íd.
Cloruro de mercurio	No precipita.
Sulfato de cobre	Precipitado verde coposo.
Nitrato de bismuto	Idem íd.
Nitrato de cadmio	Idem íd.
Cloruro de estaño (proto)	Idem íd.
Cloruro de estaño (bi)	No precipita sino al cabo de cuatro ó cinco días.
Cloruro de oro	Igual que el anterior.
Cloruro de platino	Idem íd.

Basta agregar una sola gota de la solución metálica para que se formen los precipitados, siendo de notar su aspecto uniforme en todos los casos.

Indica el hecho de producirse conjuntamente los dos precipitados, el verde y otro blanco pesado de sulfato de bario, cuando se emplea el cloruro de este metal, la presen-

cia de ácido sulfúrico libre en el líquido; mas no me aventuraré á decir ahora si las cinco moléculas que existen en la solución y que lo originan débense á las acciones de la sal metálica ó si estaban ya libres en su masa antes de agregarla, por haber escindido el disolvente la molécula compleja en ácido sulfúrico y otro cuerpo que originan los precipitados.

b) *Reacciones del ácido cromopentasulfúrico*



Como en el caso anterior, he operado con disoluciones diluidas, que también son opalinas, de color verde amarillento y marcada reacción ácida.

Por la ebullición se coagulan, siendo el aspecto de los coágulos y el de los precipitados obtenidos con las sales metálicas idénticos á los de los ácidos cromohexa y cromotetrasulfúricos.

El ácido clorhídrico concentrado da precipitado de hidrato sulfocrómico.

Acido nítrico, lo mismo.

Acido sulfúrico, lo mismo.

Amoníaco: no da precipitado.

Sosa concentrada: precipitado verde, por destrucción de la molécula compleja.

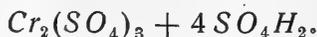
Acción de las sales metálicas.

Cloruro de potasio.....	Precipitado verde coposo.
Cloruro de sodio.....	Idem íd.
Cloruro amónico.....	Idem íd.
Cloruro de bario.....	Idem íd., en el que se advierte la presencia del sulfato de bario.
Cloruro de calcio.....	Lo mismo que el anterior, aunque con menos cantidad de precipitado de sulfato de calcio.
Cloruro de estroncio.....	Precipitado verde coposo.
Sulfato de magnesio.....	Idem íd.
Cloruro de hierro.....	Idem íd.

Sulfato de aluminio	Precipitado verde coposo.
Sulfato de cinc	Idem id.
Sulfato de manganeso	Idem id.
Cloruro de níquel	Idem id.
Nitrato de cobalto	Idem id.
Nitrato de mercurio	Idem id.
Nitrato de plomo	Idem id.
Sulfato de cobre	Idem id.
Sulfato de cadmio	Idem id.
Nitrato de bismuto	Idem id.
Cloruro de estaño (proto)	Idem id.
Nitrato de plata	Precipita al cabo de cuatro ó cinco días
Cloruro de estaño (bi)	Idem id.
Cloruro de mercurio	No precipita.
Cloruro de oro	Precipita al cabo de cuatro ó cinco días
Cloruro de platino	Idem id.

Respecto de la aparición del precipitado de sulfato de bario, ténganse por repetidas las observaciones hechas anteriormente al tratar del ácido cromohexasulfúrico, añadiendo sólo que ahora quedan libres cuatro moléculas de ácido sulfúrico.

c) *Reacciones del ácido cromotetrasulfúrico*



Su disolución tiene el mismo aspecto que las de los ácidos anteriores. Es opalina, de color verde amarillento, y de reacción ácida enérgica.

Por la ebullición se coagula.

El ácido clorhídrico concentrado precipita hidrato sulfocrómico gelatinoso.

Los ácidos nítrico y sulfúrico obran de la misma manera.

El amoníaco no precipita.

La sosa en lejía concentrada destruye la integridad de la molécula con precipitado verde.

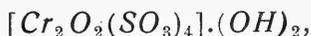
Acción de las soluciones metálicas.

Cloruro de potasio	Precipitado verde coposo.
Cloruro de sodio	Idem id.
Cloruro amónico	Idem id.

Cloruro de bario.....	Precipitado verde coposo en el que se advierte la presencia del sulfato de bario.
Cloruro de calcio.....	Idem íd., en el que se nota la presencia del sulfato de calcio.
Cloruro de estroncio.....	Precipitado verde coposo.
Sulfato de magnesio.....	Idem íd.
Cloruro de hierro.....	Idem íd.
Sulfato de aluminio.....	Idem íd.
Sulfato de cinc.....	Idem íd.
Sulfato de manganeso....	Idem íd.
Cloruro de níquel.....	Idem íd.
Nitrato de cobalto.....	Idem íd.
Nitrato de mercurio.....	Idem íd.
Nitrato de plomo.....	Idem íd.
Sulfato de cobre.....	Idem íd.
Nitrato de bismuto.....	Idem íd.
Nitrato de cadmio.....	Idem íd.
Cloruro de estaño (proto).	Idem íd.
Cloruro de estaño (bi)...	No precipita inmediatamente, pero sí al cabo de algún tiempo.
Nitrato de plata.....	Lo mismo que el anterior.
Cloruro de mercurio.....	No precipita.
Cloruro de oro.....	Precipita pasado algún tiempo.
Cloruro de platino.....	Idem íd.

Este ácido deja libres en su disolución tres moléculas de ácido sulfúrico y pueden hacerse las mismas observaciones de los casos anteriores.

d) *Reacciones del hidrato sulfocrómico gris*



obtenido á la temperatura de 140 á 150°. — Su disolución opalina tiene muy ligero color verde amarillento y es de marcada reacción ácida.

El ácido clorhídrico concentrado, precipita hidrato sulfo-crómico gelatinoso, con un ligero tono verdoso. Los ácidos nítrico y sulfúrico actúan de la misma manera.

El amoníaco no da precipitado. La sosa y la potasa destruyen la integridad de la molécula con formación de precipitados blancos, ligeramente verdosos.

Acción de las soluciones metálicas.

Cloruro de potasio.....	Precipitado blanco verdoso coposo.
Cloruro de sodio.....	Idem id.
Cloruro amónico.....	Idem id.
Cloruro de bario.....	Idem id., advirtiéndose también la presencia del ácido sulfúrico.
Cloruro de calcio.....	Lo mismo que el anterior.
Cloruro de estroncio.....	Precipitado blanco verdoso coposo.
Sulfato de magnesio.....	Idem id.
Cloruro de hierro.....	Idem id.
Sulfato de aluminio.....	Idem id.
Sulfato de cinc.....	Idem id.
Sulfato de manganeso....	Idem id.
Cloruro de níquel.....	Idem id.
Nitrato de cobalto.....	Idem id.
Nitrato de mercurio.....	Idem id.
Nitrato de plomo.....	Idem id.
Sulfato de cobre.....	Idem id.
Nitrato de bismuto.....	Idem id.
Sulfato de cadmio.....	Idem id.
Cloruro de estaño (proto).	Idem id.
Nitrato de plata.....	Precipita al cabo de algún tiempo.
Cloruro de estaño (bi)...	Idem id.
Cloruro de oro.....	Idem id.
Cloruro de platino.....	Idem id.
Cloruro de mercurio.....	No precipita.

Todos estos precipitados son de color verde mucho más claro que los obtenidos en las mismas circunstancias con los ácidos cromopolisulfúricos.

V

Consecuencias.

Al examinar detenidamente los precipitados obtenidos por la acción de los ácidos y de las soluciones metálicas sobre los ácidos cromopolisulfúricos y sobre el hidrato sulfocrómico, llama la atención la uniformidad de su aspecto, porque todos son gelatinosos, de color verde, y se producen en

las mismas circunstancias. Teniendo esto presente, y recordando cómo las soluciones de los ácidos cromopolisulfúricos se coagulan hirviéndolas, cabe pensar si nos hallamos en presencia de un coloide, y que, por lo tanto, no sean los precipitantes los ácidos cromopolisulfúricos, sino mejor los precipitados mediante los reactivos antes mencionados, y vale la pena el tratar el asunto desde este punto de vista, con el fin de comprobar si los cuatro cuerpos examinados dan soluciones que son líquidos coloides. Desde luego presentan los caracteres corrientes á ellos asignados; son coagulables por el calor, por los ácidos y por las soluciones metálicas.

Sin embargo, para tener mayores seguridades, había que recurrir á otros medios de investigación, y entre ellos, como más expeditivo, el examen ultramicroscópico, para lo cual me he valido del aparato y de la técnica de Cotton y Mouton (*), empleando soluciones de contracciones variables de los ácidos cromopolisulfúricos, y he observado en ellas con toda claridad la presencia de las partículas brillantes, animadas de movimientos brownianos, que son características de las soluciones coloides, y considerando tales á los cuerpos objeto del presente estudio, se trató de fijar su signo.

Basándose en el fenómeno del transporte eléctrico, consistente en el desplazamiento que experimentan los coloides en el campo creado por dos electrodos, se han dividido los líquidos coloidales en dos categorías: pertenecen á la primera los líquidos negativos, aquellos cuyas partículas son transportadas hacia el ánodo, y á la segunda los líquidos cuyas partículas son transportadas hacia el cátodo. Esto indica cómo, en principio, es menester acudir á experimentos de transporte eléctrico para fijar el signo de un coloide; pero también puede hacerse con comodidad apelando á las reglas

(*) Cotton et Mouton.—*Les ultraminoscopes et les objets ultramicroscopiques*,

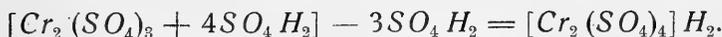
de Perrin, que fué el método empleado en el presente caso. Conforme á tales reglas, los ácidos cuyos iones activos son los $H+$ coagulan los líquidos negativos, y las bases de iones activos $OH-$ coagulan los líquidos positivos. Además, de la misma manera que unos iones coagulan á ciertos coloides, otros los estabilizan, y la regla de semejante fenómeno es ésta; la presencia de iones $H+$ estabiliza los coloides positivos, y la presencia de iones HO estabiliza la presencia de coloides negativos.

Vimos antes que los ácidos cromopolisulfúricos son coagulables por los ácidos y no por las bases; así, pues, les asigno la condición de coloides negativos á sus soluciones acuosas, y esto lo confirma el hecho de no ser coagulados, sino estabilizados por el amoníaco. Cuanto á la acción coagulante de las sales, sabemos que en éstas los iones que la producen tienen signo contrario al del coloide y como, según los análisis del profesor Recoura, los productos de la coagulación de los ácidos cromopolisulfúricos por las soluciones metálicas, á los que llamó sulfocromitos, contienen el metal de la solución metálica agregada, confirman de nuevo el carácter negativo de las soluciones coloides de los ácidos cromopolisulfúricos.

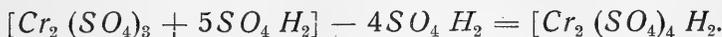
Se infiere de los experimentos de J. Duclaux, que los coloides preparados químicamente no son estables mientras el líquido intermicelar no contenga iones relacionados químicamente con los radicales constitutivos del gránulo. En el caso presente, sábase, por Recoura, que después de coagular las soluciones de los ácidos cromopolisulfúricos con otras metálicas, quedan en el líquido tres, cuatro ó cinco moléculas de ácido sulfúrico, según el ácido que haya sido punto de partida: mas aquel químico no se decide á declarar si este ácido sulfúrico ha quedado libre al añadir la sal metálica ó si ya lo estaba por el sólo hecho de la disolución del ácido cromopolisulfúrico, y el punto conviene aclararlo. Teniendo presente la anterior conclusión de J. Duclaux acerca de las

relaciones entre la composición del líquido intermicelar y la del gránulo, me inclino á creer que las tres, cuatro ó cinco moléculas de ácido sulfúrico se ponen en libertad en el acto mismo de la disolución, y siendo así, el líquido intermicelar contendría el ácido sulfúrico, y el gránulo estaría formado por un cuerpo coagulable de la fórmula $[Cr_2(SO_4)_4]H_2$, común á los tres ácidos cromopolisulfúricos, conforme á las ecuaciones siguientes:

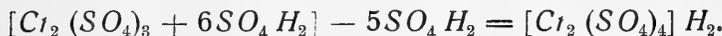
Acido cromotetrasulfúrico



Acido cromopentasulfúrico



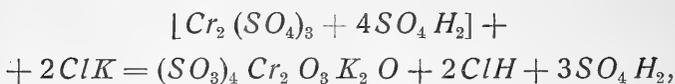
Acido cromohexasulfúrico



Fácilmente se nota que el cuerpo constitutivo del gránulo sería el mismo en todos los casos $[Cr_2(SO_4)_4]H_2$ que puede escribirse también $[Cr_2(SO_3)_4](OH)_2$, fórmula del hidrato sulfocrómico, obtenido calentando de 140 á 150 grados los ácidos cromotetra, cromopenta y cromohexasulfúricos, que en tales condiciones pierden tres, cuatro ó cinco moléculas de ácido sulfúrico, respectivamente, de igual manera que por el sólo hecho de la disolución pónense en libertad tres, cuatro ó cinco moléculas de ácido sulfúrico, quedando en ambos casos como producto activo final el complejo $[Cr_2O_2(SO_3)_4](OH)_2$ llamado hidrato sulfocrómico, cuerpo fundamental insoluble que, conforme se dijo, constituye el gránulo (*).

(*) Queriendo fortalecer mis opiniones con la de mayores autoridades en la materia, he consultado la del profesr Recoura, y á su amabilidad debo las siguientes palabras de una carta fechada en Grenoble á 20 de Marzo de este año:

Ha observado J. Duclaux que durante la coagulación reaccionan las micelas con el reactivo agregado, y entonces puede deducirse la composición del coágulo por la del líquido que lo baña, el cual contiene parte del radical del precipitante empleado, de signo opuesto al que tiene el coloide, como si hubiese substituído á un radical del mismo signo que formara parte de la micela. Por ejemplo, el mismo Duclaux precipitó el ferrocianuro de cobre coloide por una sal de bario y encontró que el coágulo había absorbido bario y había cedido potasio en proporción equivalente. En el caso de las soluciones que aquí se consideran, sábese por Recoura que el coágulo contiene el metal del precipitante añadido, y así, precipitando la solución del ácido cromotetrasulfúrico por el cloruro de potasio, obtendremos un cuerpo cuya composición, según aquel autor, corresponde á la de un sulfocromito, conforme á esta ecuación,



en la que el coágulo contiene todo el cromo y dos moléculas

«J'ai lu avec beaucoup d'intérêt le résumé du travail que vous avez consacré aux acides chromopolysulfuriques. Je partage votre avis sur leur décomposition pour l'eau et leur nature colloïdale, et j'estime qu'il est probable qu'ils n'existent pas en dissolution. Je n'ai pas cherché à éclairir cette question m'étant attaché uniquement á l'étude de l'hydrate sulfochromique. Ou pourrait d'ailleurs probablement la résoudre, d'une façon certaine, par la mesure de la chaleur de neutralisation des acides chromopolysulfuriques.»

«Mr Wyrouboff qui, après moi, a consacré une étude très importante á ces composés (*Bulletin de la Société Chimique de Paris, 1902, 3.^a série t. 27*) va meme plus loin; il admet, si j'ai bien compris, que dans les composés solides, l'acide sulfurique est déjà séparé de l'hydrate sulfochromique.»

«Mais cette question est si complexe et mes souvenirs sont déjà si lointains, que je ne puis discuter cette opinion.»

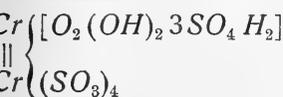
«Quoi qu'il soit, je trouve vos résultats très intéressants et je suis très heureux que vous ayez entrepris ce travail.»

de potasio para una de ácido cromotetrasulfúrico, quedando libres tres moléculas de ácido sulfúrico. De acuerdo con la anterior idea tocante al cambio de radicales, es lícito pensar si aquí se realizará de la propia manera, es decir, si restara cromo en proporción equivalente á los átomos de potasio en el líquido que baña al coágulo. Lo he comprobado con los ácidos, coagulándolos por el cloruro de potasio, filtrando é investigando el cromo en el líquido filtrado, empleando el fosfato de sodio ó provocando la formación de cromato de plomo hirviendo con sosa y ácido plúmbico y acidificando con ácido acético. Pensando que el cromo así aparecido pudiera ser debido á una transformación incompleta del sulfato verde de cromo en la obtención del ácido cromopolisulfúrico, se operó precipitando directamente este ácido con el fosfato de sodio, filtrando y añadiendo al líquido filtrado más fosfato de sodio, y calentando apareció en seguida el precipitado de fosfato de cromo de color verde claro. Conviene advertir que después de añadir un coagulante á la solución del ácido cromopolisulfúrico, queda completamente transparente el líquido que baña al coágulo, y nueva adición del reactivo ni produce el menor enturbiamiento ni alteración de ningún género.

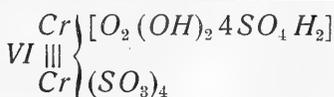
A la vista de cuanto queda expuesto, parece que no puede haber duda acerca del carácter coloide de los ácidos cromopolisulfúricos y de la existencia de un cuerpo activo coagulable, común á los tres, de la fórmula $[Cr_2O_2(SO_3)_4](OH)_2$, que es el mismo designado por el profesor Recoura con el nombre de hidrato sulfocrómico.

Respecto de la constitución de los ácidos cromopolisulfúricos, acaso podría ser con ventaja representada en estos símbolos:

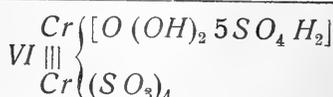
Acido cromotetrasulfúrico.



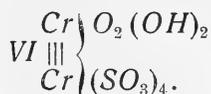
Acido cromopentasulfúrico.



Acido cromohexasulfúrico.



Las cuatro moléculas de ácido sulfúrico que están disimuladas las considero como ligadas directamente al cromo; y las tres, cuatro ó cinco, según el ácido, que se disocian al disolver los compuestos de que se trata en el agua, pueden suponerse también unidas al cromo, mas por el intermedio del grupo $[O(OH)_2]$. No hay inconveniente en admitir la hexavalencia del cromo, conforme parece resultar de la clasificación de Mendeleeff y de la fórmula del anhídrido CrO_3 ; de esta suerte, los grupos hexavalentes $(Cr \equiv Cr)^{VI}$ resultarían los generadores de estos compuestos insolubles y condensados del cromo. Consideraciones análogas tocante al hidrato sulfocrómico, permiten representar así su constitución (*).



Cuanto queda expuesto en este trabajo no tiene carácter absoluto, antes bien, hállase sujeto á enmiendas y rectificaciones. Mi propósito ha sido llevar una modestísima contribución al esclarecimiento del problema de la constitución de las sales complejas, cuyo estudio y conocimiento son harto deficientes, y las conclusiones á que por el camino de los experimentos he llegado, no pasan de la categoría de hipótesis.

Madrid, 1909-1910.

(*) Véase mi Nota presentada á la Academia de Ciencias de París, y publicada en sus *Comptes Rendus*, correspondientes á la sesión del 9 de Mayo de este año de 1910.

XXII.—Sobre la composición química de la Blenda de Picos de Europa.

POR RAMÓN LLORD Y GAMBOA

En la sesión celebrada el 26 de Octubre de 1908 por la Sección de Ciencias naturales del primer Congreso de la Asociación española para el progreso de las Ciencias, efectuado en Zaragoza, leí una comunicación titulada: *Minerales cincíferos de Picos de Europa*. El primero de los estudiados fué la blenda, en cuyas curiosas propiedades luminescentes me ocupé con algún detenimiento, fijando con cuidado las circunstancias en que se manifiestan y bosquejando una explicación racional, conforme á los hechos observados.

La composición química de la blenda fué también señalada en lo más esencial, y el objeto de esta Nota es completar lo dicho en aquel primer trabajo. (*)

Posteriormente, con motivo de investigaciones espectroscópicas acerca de varias blendas y en particular las de Picos de Europa, los Sres. G. Urbain, A. del Campo y Clair Scal, ejecutaron otro trabajo en el laboratorio de Química mineral de la Sorbona (París). (**)

El método espectral de arco voltaico proporcionó á los señores citados, espectrogramas muy delicados, de los que pudieron deducir la existencia en la blenda de Picos de Euro-

(*) Publicado en los Anales de la Sociedad esp. de Física y Química.—Mayo 1909.

(**) Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Tomo VIII, 1909; números 1, 2, 3.

pa, del *indio*: (muy escaso), del *gálio*: (relativamente abundante), y del *germano*: (próximamente una millonésima.)

La determinación espectral de los tres metales señalados, entre los raros posibles, ha completado lo que se sabía acerca de punto tan difícil de la composición química de la blenda y debemos felicitarnos por el esclarecimiento de semejantes hechos.

De los estudios nuevamente realizados respecto de las blendas, procedentes de distintos yacimientos de Picos de Europa, resulta manifiesta su desigual composición, pues mientras en unas son reconocibles vestigios de plomo, en otras es imposible reconocerlo, y si ciertas muestras contienen indicios de manganeso, varias no lo manifiestan. En algunas he hallado *potasio y litio*.

En todas las blendas () existen: el hierro, el calcio y el sodio; en todas también existen cloro y materia orgánica, que sospechaba en mis primeros trabajos, y cuya demostración es uno de los resultados más interesantes desde el punto de vista de la génesis y estructura de la masa cristalina de la blenda.*

No he citado el *cadmio*, también constante, porque es metal facilísimo de reconocer, y el más abundante después del cinc.

Para proceder con orden, me ocuparé por separado en cada uno de los elementos hallados:

HIERRO.—No falta nunca en la blenda de Picos de Europa y es muy sencilla su demostración.

La blenda de Picos de Europa no constituye excepción respecto de todas las demás, en punto á ello; y demostrado por mis observaciones que los colores amarillos y rojos de sangre de los cristales no son debidos á la materia orgánica, porque persisten íntegros después de enrojecidos al fuego

(*) Me refiero sólo á las de Picos de Europa.

los cristales, me inclino mucho á creer sea el sulfuro de hierro, más ó menos alterado, la causa de las coloraciones, lo cual está conforme con lo sabido desde mucho tiempo atrás acerca de las blendas pardas, pardo-negras y negras á las que se aplican fórmulas y nombres diferentes, y todas ellas contienen hasta 12 y 20 por 100 de hierro y también con mucha frecuencia *manganeso*.

Es, pues, muy verosímil que á medida que la cantidad de sulfuro de hierro desciende en el mineral, la coloración disminuya hasta desaparecer del todo, conforme sucede en el caso de la blenda incolora, sumamente rara, de Franklín, en Nueva Jersey, y alguna otra, cuya masa cristalina hállase desprovista de aquel cuerpo.

Observando numerosas láminas y trozos de cristales de blenda, puede observarse con facilidad, por transparencia, la desigual distribución de la materia cromógena de los cristales. En trozos del tamaño de una avellana, y todavía menores, he visto siempre zonas cristalinas rojas, amarillas é incoloras, cuyos límites de separación se aprecian muy bien á simple vista, y mejor todavía valiéndose de una lente.

En el microscopio, con luz natural, y aumento de 50 ó 60 diámetros, se ve lo mismo que á simple vista, pero más marcado todavía el tránsito brusco de una faja ó zona coloreada á otra incolora. En unas y otras, es decir, en toda la masa cristalina, se perciben, al propio tiempo, numerosos cuerpecillos irregulares, de formas diversas, opacos, diseminados por todas partes, respecto de cuya naturaleza nada puedo decir, por no haber continuado el estudio microscópico de la blenda, ni disponer hasta hoy de lo necesario para proseguirlo.

De la desigual distribución de la materia cromógena en los cristales pudiera depender la no aparición del espectro del hierro en los espectrogramas de los Sres. Urbain, del Campo y Scal, porque si una de las partículas sometidas á la acción del arco voltaico pertenece á cualquiera de las nu-

meras zonas cristalinas incoloras, necesariamente ha de faltar el hierro, ausente de ellas.

El procedimiento más sencillo y rápido para demostrar el hierro consiste en tomar dos gramos de blenda pulverizada en mortero de porcelana, habiendo tenido la precaución de exfoliar antes de pulverizar el cristal ó cristales escogidos, con el fin de separar completamente la ganga que pudiera acompañar al mineral.

Tratándose de la blenda cristalizada y limpia, tal como aparece en Picos de Europa, no se necesita poner gran cuidado de separar la ganga; ésta no existe generalmente en las masas cristalinas muy diáfanas, por completo limpias de materia extraña. Estas masas se dividen en trocitos pequeños, se pulverizan y pasan por tamiz de seda finísimo.

Bastan dos gramos de polvo para descubrir el hierro. Se trata con ácido nítrico puro, se evapora á sequedad, se vierte un poco de ácido clorhídrico, se elimina parcialmente el nítrico, se diluye en poca agua, se filtra en caso necesario, se neutraliza con amoníaco, se disuelve en este reactivo el precipitado de $Zn(OH)_2$, muy abundante al neutralizar la disolución, y queda una porción insoluble en el amoníaco que es en casi totalidad $Fe_2(OH)_6$, ya fácil de reconocer por su aspecto de copos rojizos. Dejando simplemente depositar el precipitado, decantando, añadiendo agua y una cantidad de clorhídrico precisa para disolverlo, puede reconocerse el hierro empleando el sulfocianato amónico ó potásico, que darán la coloración roja de sangre característica. Todas las muestras de blendas de Picos de Europa han dado fuerte coloración; en realidad, no era muy necesaria la demostración, porque el precipitado férrico se ve muy bien al neutralizar con el amoníaco.

En la marcha analítica general, el hierro ha sido precipitado en estado de sulfuro y reconocido siempre, teniendo necesidad de separarlo para proceder con más facilidad á la dosificación volumétrica del cinc,

Si no se quiere tratar previamente con ácido nítrico el mineral, pueden colocarse trocitos de cristales limpios, como se ha dicho, en un crisolito de porcelana y enrojecer fuertemente durante tres ó cuatro horas, sin tapar el crisol, hasta convertir en óxidos la casi totalidad de la materia.

Se trata por clorhídrico, que disuelve rápidamente todo lo soluble, se filtra, si es necesario, después de diluir, y se neutraliza, etc. Igual resultado he obtenido con este segundo procedimiento.

Aun cuando tengo el convencimiento de la desigual distribución del hierro en la blenda y atribuyo la acción cromógena á este metal, único capaz de dar coloraciones por su cantidad y condición, he querido dosificarlo en uno de los análisis, y el resultado, seguramente variable en distintas muestras, ha sido el siguiente:

En 10 gramos de blenda, se han pesado, 0,006 de $Fe_2 O_3$ que corresponde á 0,0042 de Fe_2 , á 0,0054 de $2 Fe O$ y á 0,0066 de $Fe S$. El mineral contiene, según éste análisis, 0,066 por 100 de sulfuro ferroso, suponiendo á éste integralmente constituido. Debo advertir que los cristales analizados eran de colores muy claros, escogidos así para dosificar las menores cantidades posibles de hierro. En la marcha del análisis se pudieron reconocer copitos muy pequeños de $Al_2 (OH)_6$ ya observados en anteriores análisis.

No hay duda alguna posible, en vista de lo que antecede, acerca de la existencia del hierro en la blenda de Picos de Europa. Cuantos químicos repitan lo que en esta Nota se consigna, hallarán iguales resultados, y ello demuestra que un sólo método, por bueno que sea, no basta para afirmar en absoluto la existencia ó ausencia de todos los cuerpos posibles en una materia dada.

En las blendas de colores claros no ha sido posible encontrar *manganeso*; tampoco se halló *plomo*, reconocido en otras muestras, datos demostrativos de la desigual composición de esta especie en zonas distintas de Picos de Europa.

El hierro es verosímilmente contemporáneo del cinc, del cadmio y demás metales generadores de la blenda en la época de su formación. No se trata, á mi juicio, de mezcla isomorfa perfecta, y si lo fué en su principio, dejó de serlo posteriormente. El caso de las blendas, en general, es frecuentísimo en el mundo inorgánico; puede decirse que es el caso corriente de las disoluciones sólidas, y entre éstas, el caso, corriente también, en las masas cristalinas naturales, de disoluciones sólidas de cuerpos cristalizados, no isomorfos, estudiadas por Van t'Hoff (*).

En realidad, es probable que la blenda deba ser comprendida como otras muchísimas especies á la vez en dos grupos, y son: el de las mezclas isomorfas y el de las disoluciones sólidas irregulares, *turbias*, si se permite la palabra. La miscibilidad imperfecta de las últimas relativamente á las primeras, distingue ambos grupos de soluciones sólidas, á cual más interesante y digno de estudio. Claro es que el concepto de *isomorfismo* ha tenido que modificarse bastante, y en este, como en tantos otros asuntos científicos, los moldes primeros tuvieron que romperse y los patrones fijos re-hacerse con límites variables.

CALCIO, POTASIO, SODIO Y LITIO.—*Materia orgánica*.—En mis primeros trabajos tocante á la blenda de Picos de Europa, hallé constantemente *calcio* y *sodio* en cuantos líquidos procedían del mineral, eliminando toda causa posible de error. En las nuevas investigaciones realizadas se han visto el *potasio* y el *litio*, además de los anteriores, que siguen siendo constantes. Dos procedimientos se emplearon para esta determinación, y de ellos daré cuenta brevemente.

Primer procedimiento.—Dispuesto el espectroscopio para la observación, con la llama incolora del mechero de Bunsen,

(*) Véase Van t'Hoff.—Leçons de Chimie physique.—El artículo *Isomorphisme* del 2.º suppl. del Dic. de Chimie de Wurtz y *solubilité*, (solutions solides) en el mismo suplemento.

se cogieron con las pinzas pequeños trozos de blenda, previamente lavados y limpios, y se expusieron á la referida llama en su borde, delante de la hendidura del colimador. Á los pocos instantes tomó la llama color amarillo y la raya del sodio se reforzó considerablemente; el cristal estalla enseguida, y en el momento de la explosión la llama se cubre de intenso color amarillo y la raya del sodio es deslumbrante. Simultáneamente aparecen, en el acto de la explosión, las dos hermosas bandas roja y verde del calcio, intensas y fugaces, desapareciendo pronto. Una nueva explosión repite iguales fenómenos, continuando bastante tiempo sin desaparecer por completo el matiz amarillo procedente del trozo de mineral enrojado.

Por este procedimiento sólo es apreciable la constancia del calcio y del sodio, más abundante el último.

Demuéstrase así la existencia de los dichos metales, difundidos en la masa cristalina ó contenidos en microscópicas inclusiones, señaladas ha tiempo por varios mineralogistas, y además que se hallan en estado de *cloruros* porque el calcio en particular da el espectro mejor y más brillante cuando está combinado con el cloro. Veremos enseguida la demostración del cloro.

El mineral pulverizado finamente y sometido á la llama del mechero de Bunsen, origina espectros más débiles, acaso por destrucción parcial de las inclusiones. No hay que olvidar la formación de $H_2 S$ en el acto de la pulverización, según se explicó en mi Memoria anterior.

Segundo procedimiento.—Declaro no haberseme ocurrido en los primeros estudios acerca de la blenda observar el resultado del tratamiento con agua del polvo finísimo del mineral, quedando sorprendido del resultado, á primera vista sin importancia.

Tratando cantidades comprendidas entre 20 y 100 gramos de polvo por agua pura, recién destilada y ensayada, hirviendo un poco y filtrando dos veces, se han obtenido líquidos

acuosos perfectamente transparentes é incoloros. Se apuró todo lo soluble de la blenda con nuevos tratamientos por agua sobre el filtro conteniendo el polvo y después de lavado éste con agua hirviendo, hasta que lo filtrado era agua pura, se concentró en cápsula de platino y evaporó y secó en la estufa á 120° C., hasta peso constante. Durante la evaporación del filtrado el olor del vapor acuoso es algo *resinoso*; recuerda el peculiar de las *trementinas*. El resultado de la evaporación es una pequeña masa blanco-amarillenta, que se ennegrece por completo al calentar gradualmente la cápsula y queda blanca pura después de eliminado el carbón de la *materia orgánica* así demostrada. El olor de descomposición no denota á los comienzos ni acidez, ni alcalinidad, ni alguna otra condición marcada en las substancias orgánicas descompuestas por el calor; parece una substancia de origen vegetal ó hidrocarburado más bien, atendiendo al olor de la evaporación, ya mencionado.

En una de estas determinaciones se ha pesado la materia orgánica procedente de 100 gramos de mineral, hallando, por pérdida de peso de la cápsula de platino, 0,007 gramos, correspondientes á 0,007 por 100 de materia orgánica. Esta dosificación es sólo provisional y hecha con el único objeto de tener una primera idea del contenido de aquella materia en el mineral. En estudio posterior me propongo dosificarla en muchas y diferentes muestras de blendas por otros procedimientos, además del de pérdida de peso consiguiente á la destrucción de la materia orgánica por el calor.

El residuo blanco restante de la calcinación (á calor muy moderado) del primer producto de evaporación, se trata por unas gotas de agua y una gota de ácido nítrico y se examina al espectroscopio, observándose los espectros constantes del *sodio* y del *calcio*, este más intenso y permanente que en las explosiones de los cristales; el sodio, intensísimo. Además, se han observado los espectros del *litio* y del *potasio*, no constantes sino variables en las muestras ensa-

yadas, pues en unas se ha visto el litio y en otras el potasio.

En 100 gramos de blenda se hallaron 0,123 de materia mineral en estado parcial de *cloruros*, pues la cal queda medio insoluble en el agua por su reducción al estado cáustico y hay que disolver con la gota de ácido nítrico para observar el hermoso espectro del calcio. El ácido nítrico es necesario para disolver, sin introducir cloro, que hay que reconocer después.

Determinación del cloro.—Cuando se trata por nitrato argéntico y ácido nítrico la disolución concentrada de blenda, obtenida como se ha indicado en el párrafo anterior, se obtiene siempre fuerte enturbiamiento y precipitado posterior, de color *gris-claro* y aspecto pulverulento, cuyo color tarda mucho en obscurecerse por la acción de la luz directa del sol y nunca toma el conocido color violáceo del cloruro argéntico puro. Sospechando la precipitación de la materia orgánica, en unión del cloruro mencionado, procedí á eliminar aquélla del modo descrito y disuelto el residuo blanco restante con agua y una gota de nítrico, se pudo precipitar el *Ag Cl* con todos sus caracteres bien conocidos, incluso el de la acción de la luz. Todavía quise determinar el cloro del *Ag Cl*, utilizando la acción de los hidratos de potasio ó de sodio sobre este cloruro en caliente. Después de lavar el precipitado, se trató por un exceso de *K O H* en disolución caliente. Rápidamente se formó *Ag O*, que se depositó en polvo negro, quedando en disolución el *K Cl* con el *H₂ O* formada, cuyo cloro, después de acidular con nítrico, fué nuevamente precipitado por el nitrato argéntico.

La determinación del cloro demuestra, de modo indiscutible, la existencia de los cloruros sospechados por el análisis espectral y confirma la presencia de inclusiones microscópicas, diseminadas en las masas cristalinas de la blenda.

Cuando se expone al mechero del espectroscopio el polvo de blenda tratado por agua y lavado completamente, *no hay*

señales de K, Na, Li ni Ca, hecho que demuestra el paso total de los cloruros solubles al agua.

Este mismo polvo, desprovisto de cloruros y de materia orgánica soluble en el agua (*) proyectado sobre la placa caliente entre 300 y 400° C., tal como se indicaba en mi primera Memoria, *sigue manifestando el importante fenómeno irreversible de la termoluminiscencia*, lo cual demuestra que no intervienen ni la materia orgánica soluble, ni los cloruros en la emisión de luz por la acción brusca del calor, debiendo buscar la causa del fenómeno en los rápidos equilibrios más estables efectuados entre mezclas inestables, con desprendimiento de energía luminosa, á la manera de diminutas mezclas explosivas, según se manifestó en la Memoria anterior.

Resumiendo lo expuesto en la presente, consigno las siguientes conclusiones:

1.^a La blenda de Picos de Europa es una disolución sólida mixta, constituida en parte por mezcla isomorfa y en parte por mezcla no isomorfa, irregularmente distribuida en la masa cristalina, de modo análogo á las disoluciones turbias, siendo visible y evidente esa desigual distribución para la materia cromógena de los cristales, de naturaleza probablemente ferrososférica.

2.^a En masas cristalinas de algún tamaño, son constantes siempre el hierro, el cloro, el calcio, el sodio y la materia orgánica (aparte el cinc y cadmio) y variables, faltando en algunas muestras, el manganeso, el plomo, el aluminio, el potasio y el litio.

3.^a El método espectral fotográfico por arco voltáico, sirve muy bien para la investigación de elementos escasos ó

(*) Falta saber si otros disolventes, alcohol, éter, sulfuro de carbono y benzol, pueden extraer alguna materia orgánica, insoluble en agua contenida en la blenda.

raros, cuyo dato positivo es imposible obtener empleando otros métodos.

4.^a Los resultados distintos hallados por los Sres. Urbain, del Campo y Scal y por el autor de esta Nota, relativamente á la existencia de ciertos cuerpos en la blenda de Picos de Europa, ponen bien de manifiesto la necesidad de recurrir á todos los métodos necesarios para el conocimiento de la composición exacta de los cuerpos, sin que deban excluirse unos á otros.

(Laboratorio particular del autor.)

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación,)

- Gallas Novás (D. Gonzalo).**—Consideraciones sobre reacciones de Difenoles. Memoria presentada por..., para aspirar al grado de Doctor en Ciencias. Sección de Químicas.—Salamanca, 1908.—1 foll.
- García de Galdeano (Dr. D. Zoel).**—Boletín de Crítica, Enseñanza y Bibliografía matemática, publicado por...—N.º 2.—Zaragoza, 1909.
- García Romero (D. Julio).**—Inmanencia y trascendencia de los elementos simples ó compuestos y de la Naturaleza, por...—Cáceres.—1 foll.
- Gavaldá (D. José María).**—Del poder naval y de su necesidad para España, por...—Madrid, 1909.
- González Alvarez (Dr. D. Baldomero).**—Discurso leído en la solemne sesión inaugural del año de 1909, celebrada el 31 de Enero de dicho año en la Real Academia de Medicina, por...—Madrid, 1909.
- González (Eloy G.).**—La ración del Boa.—Caracas, 1908.—1 vol. 8.º, rústica.
- Gonzalez (Eloy G.).**—Al margen de la epopeya.—2.ª edición.—Caracas, 1906.
- González (Eloy G.).**—Dentro de la Cosiata.—Caracas, 1907.—1 vol. 8.º, rústica.
- Guedea y Calvo (D. Luis).**—Discursos leídos ante la Real Academia de Medicina, en la recepción pública del académico electo..., el día 27 de Diciembre de 1908.—Madrid, 1908.
- Hernández Fajarnés (Excmo. Sr. D. Antonio).**—Discursos leídos ante la Real Academia Española, en la recepción pública del..., el día 17 de Enero de 1909.—Madrid, 1909.
- Ihering (Dres. Von Hermann é Rodolpho).**—Catalogos da fauna brazileira editados pelo Museu Paulista, S. Paulo (Brazil).—Vol. I.—São Paulo, 1907.
- Instituto general y técnico de Teruel.**—Memoria correspondiente al Curso de 1907-908, redactada por el secretario D. Manuel Hernández y Marín. Teruel, 1908.
- Instituto general y técnico de Navarra.**—Memoria acerca del estado del Instituto..., durante el Curso académico de 1907 á 1908, leída en la solemne apertura del Curso de 1908 á 1909 por D. Fernando Romero González, Catedrático y Secretario del mismo Instituto.—Pamplona, 1908.

(Continuará.)



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	Págs.
XVI. — Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia primera.....	309
XVII. — Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia segunda.....	327
XVIII. — Estudio completo de una clase especial de integrales singulares (conclusión), por <i>Lauro Clariana</i> ...	344
XIX. — Sobre la investigación de los aceites minerales mezclados á las oleínas de grasa de lana de procedencia no alemana, por <i>Werner Mecklenburg</i> y <i>Georg Winterfeld</i>	356
XX. — Estudio analítico del Resalto superficial, por <i>Juan Florez Posada</i>	364
XXI. — Estudio acerca de los ácidos cromopolisulfúricos (conclusión), por <i>Pablo Martínez Strong</i>	371
XXII. — Sobre la composición química de la Blenda de Picos de Europa por <i>Ramón Lord</i> y <i>Gamboa</i>	389
Publicaciones recibidas	400

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA



DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

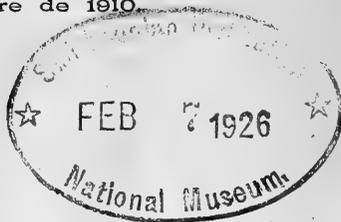
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX. - NUM. 6.

Diciembre de 1910.



MADRID

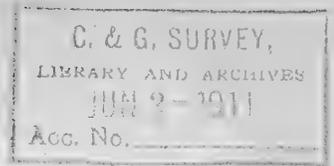
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.



**XXIII.— Conferencias sobre Física matemática.
Teoría de los torbellinos.**

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia tercera.

SEÑORES:

Anunciamos desde la primera conferencia del curso, que la materia en que íbamos á ocuparnos podía llevar este título: «Teoría de los torbellinos». Y, en rigor, también podía llevar este otro, que es una ampliación ó una explicación de aquél: «Hidrodinámica y teoría de los torbellinos».

El por qué de esta ampliación, que no es arbitraria, la daremos más adelante.

Ni la elección que he hecho de materia para el presente curso, al proponerme explicar en él la expresada teoría, es arbitraria tampoco.

Tal asignatura es de Física matemática, pero además la teoría de los torbellinos tiene relaciones importantes con los fenómenos de la electricidad y del magnetismo; y, en efecto, entre las ecuaciones que definen los movimientos de los torbellinos y las ecuaciones de la electrodinámica hay analogías de forma, verdaderamente notables.

Y así, muchos fenómenos electrodinámicos pueden estar simbolizados por los torbellinos de un fluido perfecto, y recíprocamente los movimientos de los torbellinos, y los torbellinos mismos, pueden tener por símbolos fenómenos electromagnéticos.

De aquí resulta, que ambas teorías pueden prestarse ayuda recíproca y fecunda, y las soluciones de cada una de ellas, en muchos casos, pueden convertirse en soluciones de problemas relativos á la otra.

Más aún, la razón humana tiene una doble tendencia.

Tiene la *tendencia analítica*, que la impulsa á desmenuzar las cosas y los fenómenos, y así, en esta serie de desmenuzamientos, pasa de los cuerpos á los átomos, y de los átomos á los electrones, y aun quisiera ir, y con el tiempo irá, más allá; porque lo probable es que en la evolución de las ciencias corra el electrón la misma suerte que hoy está corriendo el átomo inquebrantable de la Química.

Pero á la par de la tendencia analítica, en competencia con ella, y sirviéndola de complemento para la constitución de la ciencia humana, la razón tiene la *tendencia sintética*: quiere componer lo que ha descompuesto, reunir lo que ha desmenuzado, sintetizar lo que antes analizó.

Primero, hacer trizas el gran organismo de la Naturaleza: cuando puede materialmente, en sus gabinetes y laboratorios; cuando no puede, con su pensamiento al menos, y así llega, como antes decíamos, al átomo de la materia ponderable y al electrón, novísimo átomo del flúido eléctrico, ó del éter, ó de lo que fuere.

Y después, reunir todos los añicos del cosmos, lañar, por decirlo así, los trozos dispersos de la máquina mundial; lo cual, consigue ó se esfuerza por conseguir, mediante una serie de hipótesis ó de conceptos, tomados más ó menos directamente de la experiencia.

Así reconstruye unidades parciales, que luego se afana por condensar en unidades superiores, aspirando siempre, sin llegar á ella nunca, á la unidad suprema.

Y así, volviendo á lo que antes decíamos, cuando entre las teorías de dos fenómenos encuentra semejanzas, por tendencia invencible y por estímulos de esas semejanzas en las

teorías, cae en la tentación de fundir también los fenómenos que ambas teorías explican.

Es una especie de postulado de la razón, que la razón formula, no siempre en forma afirmativa, pero en forma interrogativa por lo menos. Expliquémonos con más claridad.

La unidad de teoría entre dos fenómenos ¿supone unidad de los fenómenos mismos?

Problema es éste de carácter filosófico, que no podemos tratar, porque es ajeno á esta clase; pero que, á no dudarlo, constituye algo así como una tentación para la inteligencia humana, y que de todas maneras es un *síntoma*, ya que no se quiera ir más allá, de la unidad que domina todos los fenómenos del cosmos.

*
*
*

Y estas relaciones, aplicaciones y representaciones, que todas estas palabras podemos emplear, de la teoría de los torbellinos con las teorías de la electricidad dinámica, justifican hasta cierto punto el estudio de los torbellinos en una clase de Física matemática.

Pero como las nuevas teorías de la electricidad, tomadas en toda su extensión, y según el flamante modernismo, son muchas, y son difíciles, y á veces aparecen empañadas, ya que no obscurecidas, por un lujo espléndido de nuevas notaciones, campo es este de la electrodinámica en el que, como he indicado otras veces, debemos entrar armados de todas armas, y valga la imagen guerrera.

¿Y qué armas son éstas?

Citaremos algunas:

1.º Por una parte, todas las teorías clásicas; por ejemplo, la elasticidad, según los antiguos métodos.

2.º La electro-estática y la electro-dinámica, según los procedimientos clásicos, y en que los grandes problemas de

los campos eléctricos y magnéticos apenas empiezan á dibujarse.

3.º La teoría de la potencial newtoniana, y en suma, la hipótesis mecánica en toda su pureza.

4.º Además, multitud de cuestiones de análisis, que ya hemos comenzado á enumerar varias veces, y que son verdaderamente armas poderosas de que se valen los matemáticos para sujetar los fenómenos de la Naturaleza á las leyes generales de la cantidad y del orden, es decir, á las leyes de la ciencia matemática.

5.º Ciertos problemas, como el de los torbellinos, en los que aparecen semejanzas y analogías con los problemas eléctricos y magnéticos.

En resumen, para abreviar estas consideraciones, antes de abordar el estudio de la ciencia moderna hay que conocer la ciencia clásica; que por obra y gracia de las teorías modernas no va á desaparecer en un día, ni á transformarse por completo la inmensa labor de todo un siglo y los trabajos prodigiosos de tantos hombres inmortales en la región de las ciencias.

En la Física matemática, como en todas las disciplinas científicas, la evolución no procede por saltos, ni por destrucciones y creaciones consecutivas; como en otro tiempo se suponía, que en la serie de las épocas geológicas desaparecía, de pronto, una flora y una fauna, y otra fauna y otra flora brotaban de repente, haciendo, en cierto modo, explosión por fuerzas sobrenaturales.

No; en el mundo geológico, la evolución es continua; podrá ser más ó menos rápida, pero aunque á veces la rapidez imite una nueva creación, la ley de continuidad es la que domina. Pues lo mismo sucede en la ciencia.

No hay, por lo tanto, que arrojar por inútil toda la Física matemática clásica; por el contrario, en la gran evolución, de ella hay que partir para nuevos desarrollos y transformaciones sucesivas.

De los cimientos no puede prescindirse al ir elevando el edificio, y los trabajos del siglo anterior son cimientos de la ciencia moderna.

Precisamente por esta razón, unida á las que antes indiqué, voy á ocuparme durante éste curso en estudiar la teoría de los torbellinos. Pero, además, por otro nuevo orden de consideraciones que voy á indicar, procurando condensar las ideas.

Es esta de los torbellinos una de tantas teorías de transición entre lo clásico y lo moderno, al menos desde mi punto de vista.

*
* *

Creada por Helmholtz, es, como dice Mr. Appell, uno de los mayores progresos que se han realizado en hidro-dinámica, desde las investigaciones de Euler, Lagrange y Cauchy.

Marca, pues, un gran progreso de una de las partes constituyentes de la mecánica clásica; y la mecánica clásica, aunque no tenga carácter absoluto de certeza, como no lo tiene ninguna creación de la inteligencia humana, es algo y es mucho en sus límites propios, y para el problema de equilibrio y movimiento de masas ponderables, sometidas á fuerzas y á condiciones bien definidas, es, en cierto modo, repetimos, una ciencia definitiva y que subsistirá siempre, al menos como primera aproximación, en una buena parte de los fenómenos de la Naturaleza.

Pero hay más: en la transformación de la ciencia clásica á la ciencia moderna existe un problema en que la teoría de los torbellinos, y aun toda la hidro-dinámica, representan un papel de suma importancia.

Me explicaré:

La Mecánica clásica en su aplicación á la Física parte

de la hipótesis newtoniana; es decir, de la *acción á distancia*.

La materia atrae á la materia, según la ley de Newton, salvando la distancia entre ambas masas, sin apoyarse en el intervalo en nada material.

Un átomo atrae á otro átomo de materia, aunque estén á millones y millones de kilómetros, aunque casi les separe el infinito.

Estas fuerzas que se transmiten por el espacio vacío, y decimos mal al emplear la palabra *transmitirse*, que más bien saltan de un cuerpo á otro, como si la distancia no existiese, parece que tienen condiciones espirituales ó metafísicas.

Y por eso la ciencia moderna, que es positivista á todo trance, rechaza la acción á distancia, y de mala gana conserva en el espacio celeste las fuerzas de la gravitación universal, respetándolas por lo fecundas, como símbolo matemático, pero sin creer en ellas como realidades.

Pues bien; la teoría de los torbellinos, que ha dado origen á los numerosos é importantes trabajos de Kirchhoff, de lord Rayleigh, de J. Thomson y de lord Kelvin, se presta al estudio del problema antes enunciado y á la sustitución de la acción á distancia por las acciones, primero de contacto y luego *transmitidas*.

Así el ilustre lord Kelvin ha buscado en los movimientos de los torbellinos una explicación mecánica del Universo.

El Universo está lleno, según opinión de muchos sabios, por una materia continua, y lo que nosotros llamamos *materia*, materia propiamente dicha, no es más que un conjunto de torbellinos: *átomos-torbellinos* les llama el ilustre autor, átomos que, según Helmholtz, son indestructibles y eternos.

Verdad es, que según los descubrimientos de la radio-actividad, el átomo puede destruirse y se destruye de hecho; pero en todo caso no hay más que correr la escala y suponer que es el electrón, ese átomo-torbellino cuya existencia civil había usurpado el átomo de la Química.

Y aun de la hidro-dinámica en general podemos repetir algo de lo que acabamos de observar respecto á la admirable creación de Helmholtz.

Limitémonos por el pronto á citar dos nombres y dos obras.

La obra de V. Bjerkues, titulada *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte*, y la de A. Korn, cuyo título es *Eine Theorie der Gravitation und der electrischen Erscheinungen et Eine mechanische Theorie der Reibung*.

Las observaciones que preceden justifican y explican la elección que hemos hecho de la hidro-dinámica y de la teoría de los torbellinos como materia para el presente curso.

El asunto es interesante por sí mismo, que, si bien se considera, comprende problemas propios de la Física matemática, al mismo tiempo que de la mecánica racional.

Adquiere aun más importancia por sus relaciones con la electro-dinámica, relaciones por lo menos de forma y de representación, que son á veces el camino para realizar grandes síntesis y para llegar á grandes unidades, aunque en un principio estas relaciones sean, por decirlo así, puramente externas y no pasen de ser meras analogías.

Por último, la teoría en cuestión, es decir, la de los torbellinos, y otros problemas de la hidro-dinámica, vienen á dar soluciones al gusto moderno respecto á la manera de interpretar la gravitación universal al negar la acción á distancia, y hay que reconocer que todo esto constituye materia propia de la Física matemática.

*
* * *

Hemos afirmado, que la hipótesis mecánica, y por lo tanto, la mecánica racional, no parece ni justo ni conveniente que desaparezcan de la ciencia moderna, al menos como primeras

soluciones de los fenómenos físicos y químicos, y por de contado astronómicos; pero esto no es desconocer ni la importancia de las críticas que contra la ciencia clásica se dirigen, ni es limitar la gran renovación que la ciencia moderna prepara.

Pero como ésta no aparece de pronto, como por generación espontánea, sino que de la ciencia clásica parte como origen histórico y lógico, aunque de ella se aleje por des-envolvimientos y transformaciones naturales y fecundas, yo, en lo posible, en estas conferencias procuro ir señalando grados y líneas de transformación. Ahora bien, varios son los puntos y los principios de la Física matemática clásica, ó si se quiere, de la mecánica racional, de los que es preciso estudiar las modificaciones, al ir caminando, desde la Física matemática del siglo anterior hasta la nueva Física matemática, que para el porvenir se prepara.

Fijemos una vez más los puntos, hipótesis, conceptos, principios, y aun si se quiere postulados, que en la ciencia clásica encontrábamos, y que la Física matemática moderna ó rechaza ó modifica.

En rigor tal lista, ó alguna parte de ella, ya ha sido objeto de nuestro estudio en conferencias anteriores; pero bueno será reunir y completar aquéllas enumeraciones.

La Física matemática del siglo precedente, y la mecánica racional que la servía de base, comprendían las hipótesis ó conceptos siguientes:

1.º *La acción á distancia.*—A distancia se suponía, como hemos dicho, que actuaban las fuerzas en las regiones astronómicas, y por extensión dentro de cada cuerpo celeste, y por extensión aun más atrevida entre molécula y molécula y entre átomo y átomo.

La Física y aun la Química eran remedos de la Astronomía: cada cuerpo un conjunto de cielos en miniatura.

Pues bien: la ciencia moderna, y casi todos los sabios de esta época, en hostilidad contra la metafísica y contra todo

idealismo, rechazan tal concepto, quiero decir, el de la acción á distancia, y entre ellos se distingue el ilustre Maxwell.

Se rechazó, repito, la acción á distancia y la mayor parte sólo admiten la acción por contacto que, á decir verdad, no es tan fácil de comprender ni de explicar como se imagina. Y precisamente en la hidro-dinámica, y en la teoría de los torbellinos, es donde se ofrecen soluciones, si no satisfactorias, por lo menos ingeniosísimas, para explicar esta transformación ó sustitución de uno de los conceptos fundamentales de la Física matemática clásica. Esta es ya una razón para que hayamos escogido dicho tema como materia del presente curso.

2.º *El concepto de masa y el de inercia.*—Ambos conceptos eran fundamentales en la Mecánica racional, y el concepto de *masa* parecía indestructible. Así se proclamaba el gran principio de la *conservación de la materia*.

La crítica moderna se esmera en combatir ambos conceptos de la antigua Física.

Combaten algunos la *masa*, porque este concepto sirve de base, según afirman, á un materialismo invasor, al constituirse la masa como única expresión de la realidad.

Combaten, además, el dualismo de la *masa* y la *fuerza* como dualismo incomprensible é innecesario; es algo así, dicen, como el carruaje y la caballería á él enganchada y que de él tira.

Y al combatir la masa, claro es que combaten la *inercia*.

Es más, á la inercia de la materia ponderable se opone en la Física moderna la *inercia eléctrica* como enlazada con el fenómeno de la inducción.

Y por este camino, haciendo retroceder, ante la lógica, á la masa con su inercia, se llega hasta anular á las dos.

Por fin la masa clásica se convierte en un conjunto de electrones.

Y del átomo de la Química, última expresión, y expresión

inalterable de la materia, según las viejas teorías, se hace un sistema complejo de electrones positivos y negativos; y á este propósito debo citar la admirable memoria de J. J. Thomson, sobre la *estructura de los átomos*, y las curiosísimas coincidencias que resultan al aplicar dicha teoría á la ley periódica de Mendeléeff.

De todas maneras, vemos aquí otra línea ó corriente de transformación, entre la física clásica y la física moderna.

Pero sobre todas estas cuestiones, ya hemos dicho algo en los cursos anteriores, siempre con el objeto de ir pasando de la Física matemática, de hace cincuenta años, á la Física moderna, ó si se quiere, á la que hoy se está elaborando.

3.º *Fuerza y energía*.— Este punto lo hemos explicado minuciosamente y ahora nos limitamos á recordarlo. La hegemonía en la ciencia clásica perteneció á *la fuerza*.

Este concepto dominaba toda la mecánica racional.

En la evolución de la Física, y de la Física matemática, aunque el concepto de fuerza, ni desaparece, ni creo yo que pueda desaparecer, hay que confesar que otro concepto más moderno, el de *energía*, se le va adelantando hasta colocarse, en cierto modo, en primera línea.

De tal suerte que una nueva ciencia, *la Energética*, propalada y defendida con gran saber y gran entusiasmo por el ilustre Ostawal, pretende substituirse en absoluto á la Física matemática de la hipótesis mecánica.

También sobre este tema, aunque sin agotarlo, ni mucho menos, hemos disertado en las conferencias de otros años, y ahora no hago más que recordarlo, porque es una de tantas fronteras de la ciencia clásica, que se transforman y se dilatan hacia regiones pobladas de nuevos problemas.

Y como punto muy esencial de la crítica, que hoy se dirige contra la fuerza de la vieja mecánica, debo recordar, pero sin insistir en ello, lo que hemos dicho respecto á las fuerzas centrales, que eran las que dominaban en los anti-

guos problemas, con la acción á distancia, la masa y la inercia, y de las que hoy se prescinde, pasando de este caso particular á otro más general, según se ha visto al estudiar el método de Poincaré para la teoría de la elasticidad.

4.º *Influencia en cada instante, en el movimiento de un sistema, de los movimientos anteriores.*—Este carácter á que ahora nos referimos, era fundamental en la ciencia clásica, y simplificaba de manera extraordinaria todos los problemas de mecánica.

También se ha tratado de esta cuestión en las conferencias de otros cursos, si bien iniciándola tan sólo, y en cierto modo de pasada.

Las acciones que entre sí ejercen diversos puntos materiales, se decía antes, sólo dependen en cada momento de la posición de dichos puntos, y son independientes de la *historia dinámica*, y valga la palabra, de los puntos del sistema.

Las acciones son las mismas para posiciones determinadas, ya estén todos ó algunos de los puntos materiales inmóviles, ya lleguen á su posición con unas ú otras orientaciones, ya traigan velocidades mayores ó menores.

Este es carácter de la vieja mecánica: en la mecánica moderna de la electricidad y el magnetismo, tal hipótesis es de todo punto inaceptable, y aquí aparece tal vez el problema fundamental de la dinámica del flúido eléctrico.

Aún sobre este problema, que considero de transcendental importancia, hemos dicho algo en las cinco series de conferencias anteriores.

5.º *Teoría matemática de los campos eléctricos y magnéticos.*—He aquí otra nota dominante de la ciencia moderna.

La ciencia clásica, así en la mecánica racional, como en la teoría de la electricidad y el magnetismo, y principalmente en esta última, puede afirmarse que es eminentemente *individualista*, y permóneseme el empleo de esta palabra.

Así en la Astronomía, como en las masas ponderables en cierto modo individuales, como en los conductores eléctricos, como en las corrientes, casi todos los problemas se referían á entidades aisladas, puestas en relación unas con otras á través del espacio por fuerzas que ejercían *acciones á distancia*.

Y el matemático y el físico atendían exclusivamente á tales entidades, á tales individuos del mundo inorgánico, pudiéramos decir, prescindiendo por completo del espacio intermedio, ó cuando más, como en la teoría newtoniana de la luz, en el calor radiante, y en los dieléctricos, concediéndoles una atención secundaria.

El espacio es puro espacio geométrico, no es un campo de vectores como hoy sucede.

Y si se atiende al *espacio físico* y se buscan sus ecuaciones, es, casi como excepción, en la teoría vibratoria de la luz.

El movimiento del flúido calórico se estudia en cuerpos perfectamente limitados.

El individuo domina.

En electricidad estática se estudian conductores, condensadores, cuerpos limitados también. Se estudian en sí ó en la acción que ejercen unos sobre otros á través del espacio geométrico. En la electro-dinámica se estudian conductores de la corriente eléctrica y la acción que entre sí ejercen unos sobre otros á través ó salvando metafísicamente, y valga este advervio, el espacio puro en que están colocados las entidades eléctricas que se consideran.

Si se analiza lo que pasa en el interior de estas entidades, y las relaciones de unas con otras, se prescinde siempre de todo intermediario.

Se estudia cómo se distribuye el calor en los cuerpos; cómo se distribuye la electricidad en ellos; cómo circula la corriente; cómo se reparte el magnetismo en el individuo magnético; cómo se mueve, y según qué leyes, cada astro;

cómo se mueven, y según qué leyes, las partículas de un cuerpo elástico; pero no se atiende ó se atiende por excepción, volvemos á repetirlo, al espacio geométrico en que están esparcidas estas entidades del mundo físico, estos *individuos* inorgánicos, me atrevería á decir.

Por eso empecé afirmando, que la nota dominante y característica de la Física matemática clásica era la nota individualista; ni más ni menos que en las sociedades humanas del siglo pasado.

En la ciencia moderna domina la nota contraria, la nota colectiva, que viene expresada en la Física matemática, hoy dominante, por los campos eléctricos y magnéticos.

El espacio entre las entidades físicas se anima, se rellena, por decirlo así, se sustituye á la acción á distancia; y hace entrar en juego, por el éter, por los campos eléctricos y magnéticos y por los dieléctricos, una muchedumbre inmensa de energías dispersas, con las cuales antes no se contaba.

Precisamente sobre este punto versaron una buena parte de las conferencias del curso anterior; y aquí, como en todos los problemas precedentes, estudié y preparé la transición, en cierto modo, de la ciencia clásica á la ciencia moderna, señalando la corriente de la evolución entre uno y otro momento histórico de la Física.

* * *

Aunque pudiéramos seguir tratando del mismo asunto, y otros que con él se relacionan, extensamente, basta con lo dicho para que se comprenda mi pensamiento.

Todos los expresados antes, son caracteres de la evolución, cuyo resumen puede hacerse de este modo en breves palabras.

La acción á distancia tiende á transformarse en *acción*

transmitida por el espacio, relleno de energías, con determinada velocidad.

Las fuerzas centrales tienden á ser sustituidas por fuerzas más generales:

Al concepto de fuerza, de la fuerza clásica, que se mide por kilogramos, se antepone la energía que se mide por kilográmetros.

La energética pretende sustituirse á la ciencia mecánica tomando por tipo la termo-dinámica.

A la inercia de las masas ponderables se agrega, y aun pretende absorberla, la inercia eléctrica fundada en cierto modo en la inducción.

Las masas ponderables sufren asaltos de destrucción, y á la materia, á la materia clásica de la masa, la inercia, y la atracción newtoniana, se sustituyen electrones positivos y negativos.

Las acciones entre puntos distantes no son ya instantáneas, sino transmitidas; más aún, no dependen exclusivamente del momento que se considera, sino de momentos anteriores. La fuerza entre dos masas depende en cada instante de las velocidades de estas masas.

Y en fin, á las entidades aisladas, ó individuos del mundo físico, se agregan y puede decirse que los absorben los campos eléctricos y magnéticos: el cuarto estado del mundo inorgánico, la muchedumbre dinámica.

Me atreveré á decir, y ya lo he dicho en otra ocasión, que es el socialismo de la ciencia Física anegando en su inmensidad el individualismo clásico.

*
* *
*

De todos estos problemas ya hemos hablado en los cursos anteriores, y para completar precisamente lo que en otra

ocasión indicamos respecto á la acción á distancia y de los problemas que con éste se relacionan, me he propuesto estudiar en este curso *el problema de los torbellinos* y algunas otras cuestiones de hidro-dinámica, que ya resueltamente y sin más digresiones, empezaremos á estudiar en la conferencia inmediata.

XXIV.— Conferencias sobre Física matemática
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia cuarta.

SEÑORES:

Una doble hipótesis domina y se extiende sobre toda la Física matemática y todas sus teorías; y casi me atrevería á decir, que aunque en forma á veces inconsciente, sobre la misma Física experimental, tan enemiga de todo supuesto hipotético.

A saber:

- 1.º La hipótesis de *la discontinuidad*.
- 2.º La hipótesis de *la continuidad* absoluta.

* * *

La discontinuidad supone, que la materia está agrupada en centros ó aglomeraciones continuas separadas unas de otras por el vacío absoluto.

Un vacío, por decirlo así, geométrico, en que no exista ni materia, ni energía, ni flúido, ni substancia alguna.

El puro espacio: ni siquiera el éter.

Pero entonces, ¿cómo se da unidad al Universo? ¿Cómo

se ponen en relación las diversas aglomeraciones de materia continua?

¿Qué es lo que une y traba el cuerpo A y el cuerpo B y el cuerpo C; los astros entre sí; las moléculas en los cuerpos; los átomos en las moléculas, y, empleando el lenguaje moderno, pudiéramos agregar los electrones en los átomos?

La razón humana y la experiencia más elemental repugnan este aislamiento y esta incomunicación de todos los individuos aislados del Universo.

Y, sin embargo, por mucho que esto repugne, toda una escuela filosófico-científica admite tal aislamiento material, y establece la comunicación entre uno y otro elemento, suponiendo que estos elementos vagan por el espacio, y que sólo se comunican por el choque.

Es aplicar al Universo entero la hipótesis cinética de los gases; es reproducir, basándose tan sólo en las leyes del choque, la hipótesis del filósofo griego; y aun aquél, para dar cierta trabazón al Universo, imaginaba átomos *ganchudos*, que por ganchos se trababan, como en un rebaño se traban las cabras por sus cuernos; que á veces, en la ciencia, lo más sublime suele andar mezclado y enganchado con lo más vulgar y con lo más tosco.

Para esta escuela filosófico-científica todo el Universo se explica por la siguiente fórmula: *materia y movimiento*, y en todo caso choques de unos elementos con otros.

Como yo no discuto estas hipótesis, que han llegado con Lesage hasta querer explicar de este modo la gravitación universal, nada agregaré, al menos por ahora, á lo dicho.

Sólo una palabra para concluir este punto.

Para cada elemento el problema se plantea como al principio.

Los átomos, los elementos, las partecillas ¿son *cada una* continua ó discontinua?

Y para cada parte del elemento el mismo problema.

Y así hasta lo infinito de la subdivisión.

Un problema que se reproduce sin término.

Pero siguiendo en la hipótesis de la discontinuidad, ó sea de la distribución discreta de la materia en el espacio, debo recordar, que se ha procurado dar unidad á los elementos dispersos por el concepto de *la fuerza clásica*, es decir, de la acción á distancia.

La fuerza es, en tal hipótesis, como lazo semiespiritual, que enlaza dos á dos todos los elementos discontinuos del Cosmos.

El elemento *A* y el elemento *B* ya no están aislados, sin más comunicación, como antes decíamos, que la comunicación eventual del choque por virtud del movimiento.

No; entre dos elementos cualesquiera del Cosmos, *A* y *B*, según esta hipótesis, existe una fuerza que los enlaza: muy débil cuando están lejanos, muy grande cuando están muy próximos.

Y entonces el Universo aparece como *una red* de cordones semiespirituales cuyos nudos están constituídos por las masas ponderables.

Digo semiespirituales, aunque la palabra no sea propia, porque no sé qué otro nombre dar á la fuerza de la Mecánica clásica.

La fuerza es real, está trabajando en todo el Universo entre cada dos puntos; no la vemos, pero sentimos sus efectos, y, sin embargo, no es como la materia ponderable; los hilos de la red, en tal hipótesis, son de distinta naturaleza que los *nudos*.

El dualismo de materia y fuerza en esta hipótesis, que voy discutiendo es inevitable; ¿pero en qué hipótesis se evita el dualismo?

Si la fuerza fuera algo material, que uniese las partículas del Universo dos á dos, ya no sería la fuerza ideal, abstracta, metafísica, semiespiritual, que tiene realidad y no es la materia de la Mecánica racional.

Por eso digo y repito, que no sé qué nombre darle.

Es una realidad que no es materia; pero que es tan realidad, como la materia misma; que se siente, y se calcula, y se mide, y á la cual se aplica el concepto de cantidad; que por eso, precisamente, se les aplica á las fuerzas el cálculo matemático.

No otra cosa son las fuerzas de la acción á distancia, las de la teoría de la gravitación universal, las de cohesión y afinidad.

Tan cómodas, tan fecundas, tan sencillas, tan intuitivas y tan naturales, pudiéramos decir, á pesar de su naturaleza misteriosa é incomprensible, que con ellas se ha forjado una de las ciencias más perfectas que existen, digan lo que quieran sus impugnadores: la vieja y venerable mecánica.

Si la fuerza clásica no existe, hay que confesar, que las cosas pasan como si existiese, según la fórmula de Newton.

Si hay que rechazar la fuerza, porque ni se comprende, ni se explica, hay que rechazar el Universo entero.

Después de todo existe la conciencia, y no hay filósofo; ni teoría, ni escuela que la explique, ni con humildades, ni con arrogancias. Ignoro, ignoramos: esta es la fórmula honrada y leal.

*
* *

Y la fuerza, volvemos á repetirlo, dentro de esta hipótesis que venimos examinando, no puede ser nada material; es decir, nada de la misma naturaleza, que eso que solemos llamar materia; porque si la fuerza que une á A y B es material, esto es ir rellenando el espacio entre A , B , C y es ir pasando por grados de la hipótesis de la discontinuidad á la hipótesis de la continuidad.

Convengamos, pues, en que la fuerza, este concepto que ha brotado de la experiencia, que se nos impone en todos

nuestros actos fisiológicos, que da vida á toda la industria humana, y que es uno de los ejes, por decirlo así, de la ciencia clásica, reúne en sí estos dos caracteres contradictorios: es *algo* eminentemente *real*, y es completamente distinto de la realidad que reconocemos en la *materia*.

Se nos impone como una necesidad, y, sin embargo, no comprendemos su esencia.

Pero á decir verdad, como esto nos sucede con todos los conceptos, con todos los seres y con todos los fenómenos del Universo, ni deben causarnos sorpresa tales contradicciones, ni deben asombrarnos tales obscuridades.

En estos tiempos modernos se pretende sustituir á *la fuerza*, *la energía*, y tal pretensión para muchos problemas es legítima y fecunda, y en rigor no anula el concepto experimental de fuerza; pero las mismas dificultades veremos más adelante, que nos ofrece la energía, que la fuerza.

Ni con la energía se explica lo que antes no se explicaba, ni como pretende un químico eminente, y un ilustre escritor, con la energía se explican los misterios de la conciencia y del pensamiento. ¡Palabras y palabras estará repitiendo con Shakespeare la Humanidad eternamente!

Mas, volvamos á nuestro objeto.

Decíamos, que la primera hipótesis general era la de la discontinuidad de la materia, de la cual nacía la necesidad de la fuerza actuando á distancia, y que mediante estos dos principios, ó estas dos hipótesis, mejor dicho: *masas* discontinuas de materia y *fuerzas* actuando entre ellas, desarrollaba la hipótesis mecánica su admirable construcción geométrica y dinámica.

Admirable entre sus límites naturales; deficiente, no como algunos suponen al pasar del mundo astronómico al mundo terrestre, sino al pasar de la materia *ponderable é inerte* al éter y á los flúidos imponderables.

Este es el verdadero límite práctico de la hipótesis mecánica; estas son sus fronteras; aquí empieza su transformación,

y aquí aparece la necesidad de una nueva mecánica, que también podrá ser á su vez continua ó discontinua, porque la doble hipótesis de continuidad ó discontinuidad es general, y nace del concepto de espacio. Y como los fenómenos se desarrollan en el espacio, este dualismo de lo continuo ó de lo discontinuo, podrá aplicarse á otras regiones, si vale la palabra, pero al espacio se aplica indefectiblemente.

En las mismas matemáticas puras aparece un problema análogo, y en tiempos recientes ha tomado gran desarrollo con la teoría que se llama de *los conjuntos*.

Y pasemos ya á la segunda hipótesis.

*
* *

2.º *Hipótesis de la continuidad*.—Con la teoría de la discontinuidad cometen algunos físicos ó matemáticos, á mi entender al menos, y claro es que yo puedo equivocarme, una enorme, una inconcebible inconsecuencia.

Rechazan la acción á distancia para las distancias grandes, por ejemplo, para la astronomía, negando toda realidad á las atracciones astronómicas á través del espacio, y sin transmisión efectiva de unos cuerpos á otros.

Y en cambio no les extraña, y admiten sin dificultad, aunque pudiera creerse que lo admiten de una manera inconsciente, la acción á distancia en espacios moleculares, y aun las acciones y repulsiones de los átomos en los fenómenos de la Química.

Se niega la acción á distancia cuando ésta es de cien millones de kilómetros, pongo por caso, y se admite cuando es una cienmillonésima de milímetro.

Declaro lealmente que en el terreno de la lógica y aun del sentido común no lo comprendo.

En absoluto nada es grande ni nada es pequeño; tan gran-

des son las cienmilésimas de milímetro en comparación con otras cantidades, millones y millones de veces más pequeñas, como pequeña es la distancia de cien millones de kilómetros comparada con otras enormes distancias astronómicas.

Si la dificultad está en salvar el espacio por un salto sin apoyo material, en buena ley todo espacio es un abismo: el de los espacios intermoleculares ó interatómicos, como el de los espacios astronómicos.

Hay que apurar el argumento y apurándolo en oposición á la discontinuidad hay que admitir la continuidad absoluta; no puede admitirse un punto del espacio sin que en él exista una materia ó un flúido ó una substancia.

Y no pueden admitirse acciones á distancia, sino única y exclusivamente *acciones de contacto*.

Estos son los caracteres de ambas hipótesis.

Discontinuidad y acciones á distancia.

Continuidad y acciones de contacto.

Mas ha de confesarse, que la hipótesis de la fuerza de contacto en la continuidad absoluta, no deja de presentar sus dificultades, y en rigor se viene á caer otra vez en la acción á distancia.

Fijemos las ideas.

Imagínense en el seno de la masa continua un plano AB . (fig. 1.^a).

Este plano dividirá á la masa, al menos en la región á que se extiende, en dos partes D, D' y la acción de éstas á lo largo del plano,

estará representada por dos fuerzas iguales y opuestas f, f' ; porque se admite el principio de que la reacción es igual y contraria á la acción.

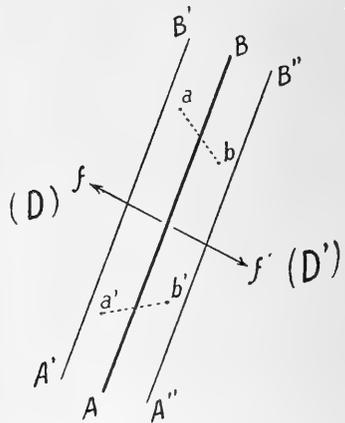


Figura 1.^a

Por ejemplo, la acción de D' sobre D á lo largo del plano AB será f , y la acción de D sobre D' á lo largo del mismo plano será f' ; pero la verdad es que no nos procuramos idea clara de cómo se forman estas dos fuerzas.

La explicación que generalmente se da, aun por muchos adversarios de la acción á distancia, es la siguiente, que me parece natural admitiendo la acción á distancia, pero que me parece una enorme inconsecuencia si se rechaza dicha hipótesis.

La explicación es esta, vuelvo á repetir.

Imaginemos á un lado y á otro de AB dos fajas sumamente estrechas: la primera, $AB A'B'$; la segunda, $AB A''B''$.

Y admitamos que los elementos materiales de ambas fajas se atraen, ó se rechazan, dos á dos, por ejemplo a y b , a' y b' .

En esta hipótesis, las fuerza f , f' no son más que las resultantes de estas acciones parciales á lo largo de AB .

Esto parece natural, y en la antigua física matemática, y aun hoy mismo, se admite como cosa corriente; pero si se rechaza en absoluto la acción á distancia, este supuesto es de todo punto inadmisibile.

Por pequeñas que sean las distancias ab , $a'b'$, no puede admitirse que la masa a ejerza su acción sobre b , ni b sobre a , y asimismo, para los demás pares de puntos.

Pues si desaparecen los componentes, ¿cómo han de existir las resultantes f , f' ?

Poco importa que la región D no ejerza influencia sobre la D' , y recíprocamente. Como exista la acción de las dos fajas, está aceptado el principio de la acción á distancia.

Admitir la acción á distancia hasta cierta fracción de milímetro, y rechazarla para distancias mayores, prácticamente es natural y siempre se ha hecho en la Física matemática clásica, como en la moderna; pero declarar absurda la acción á distancia en un caso y en otro no, es un procedimiento inadmisibile y una inconsecuencia lógica más inadmisibile todavía.

En la vieja Mecánica, imitando, por decirlo así, la teoría newtoniana, se decía: La acción entre dos elementos materiales m y m' es de la forma

$$mm'f(r),$$

siendo m y m' las masas, r la distancia entre ambas, y $f(r)$ una función de la cual, en rigor, dependían todos los fenómenos moleculares y aun los químicos.

Muchos autores suponían que $mm'f(r)$ era la resultante

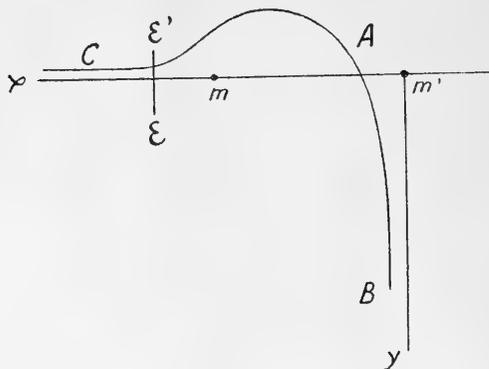


Figura 2.^a

1.º, de las atracciones ponderables entre m y m' ; 2.º, de las repulsiones de las cargas eléctricas; 3.º, de las atracciones entre las masas y las cargas, como ya explicaremos en otra ocasión.

Así es que la función f , era negativa (fig. 2), es decir, representaba una repulsión, cuando m y m' se aproximaban extraordinariamente, y cuando r crecía la función $f(r)$ se convertía en atracción, llegaba á un máximum y luego decrecía asintóticamente á la línea mm' hasta anularse en el infinito, como se ve en la figura.

En esta figura vemos la curva BAC , cuyas ordenadas representan los valores de $f(r)$.

No repugna, pues, que á partir de cierto límite E , puedan despreciarse las acciones de dos masas m, m' .

La distancia $m'E$ es precisamente el ancho de las fajas de la figura 1.^a

Pero esto no es rechazar la acción á distancia, es despreciarla más allá de cierto límite; y esto es lo que hemos hecho constantemente al explicar la teoría de la elasticidad.

*
* *

La experiencia confirma este procedimiento racional, y ya en otras conferencias de otro curso, tomando la cita de la Mecánica racional de Mr. Appell, decíamos:

El orden de magnitud del radio de actividad molecular puede deducirse de las experiencias de Quincke sobre los fenómenos capilares. Si se estudian los fenómenos de la capilaridad en el agua con un tubo de cristal, recubierto interiormente de una capa sumamente ténue de plata, se observa que estos fenómenos son idénticos á los que se obtienen con un tubo de plata del mismo diámetro interior, cuando la capa de plata tiene un espesor de 0,000054 milímetros, es decir, de cincuenta y cuatro millonésimas de milímetro.

Es decir, que el mismo efecto produce todo el tubo de plata que un tubo de dicho espesor envuelto en uno de cristal.

O de otro modo, del tubo no entra en juego prácticamente más que el espesor indicado; el resto produce efectos despreciables en la práctica, puesto que no pueden medirse.

Estas cincuenta y cuatro millonésimas de milímetro representarían en este caso la anchura de la figura 1.^a ó la distancia Em' de la figura 2.^a: la ordenada EE' y todas las de la izquierda podrían suponerse iguales á cero.

Claro es, que por un procedimiento matemático, puramen-

te ideal, puede admitirse que las fajas de la figura 1.^a tienden á cero y tienden, por lo tanto, á confundirse con el plano *AB*; pero estas son lucubraciones abstractas en que no podemos detenernos.

Digamos, para concluir esta digresión, que por el pronto prescindimos del problema de la acción á distancia, y aun admitiremos dicha acción tácita ó explícitamente al exponer la teoría de los torbellinos. Sin perjuicio de que más adelante, terminada que sea la teoría de los torbellinos, veamos qué partido puede sacarse de dicha teoría y de otras de la hidrodinámica, para explicar el problema de la atracción universal, ya de grandes, ya de pequeñas masas, sin necesidad de acudir á la hipótesis de la acción á distancia.

*
* *

La teoría de los torbellinos no es más que una teoría particular del problema general de la hidrodinámica; y en rigor, al hablar de la hidrodinámica, no empleamos la palabra propio, debiéramos decir: la teoría de los flúidos perfectos, pues realmente se trata de un problema particular de la mecánica racional. Por lo tanto, hemos de empezar por definir el flúido perfecto.

Un flúido es una substancia material, que se extiende sin discontinuidad de ningún género en una extensión limitada ó infinita.

Su carácter es la continuidad. No existe ningún punto del espacio en que el flúido se extiende sin que en él exista el flúido en cuestión.

Este flúido puede ser materia ponderable, es decir, lo que llamamos por tradición *materia*; pero en rigor puede no estar sujeto, ni á la gravedad, ni á ninguna fuerza exterior; si bien considerando el problema en toda su generalidad, podemos suponer que todos sus puntos estén sujetos á fuerzas exte-

riores, que actuarán sobre cada elemento m del fluido proporcionalmente á la masa de este elemento.

Si m es la masa de un elemento sumamente pequeño del fluido y F es la fuerza exterior por unidad de masa, la acción sobre el elemento de que se trata será,

$$mF$$

y para cada punto del fluido podemos decir otro tanto.

Todas estas fuerzas F son generales, si bien en algunos casos podamos suponer, que obedecen á ciertas condiciones, por ejemplo, que para dichas fuerzas F exista lo que se llama una *función de fuerzas*.

Podrá suceder también como caso aun más particular, que entre estas fuerzas esté la gravedad, como puede también suponerse que todas ellas sean nulas.

Si el fluido continuo se extiende hasta el infinito, nada tenemos que agregar á lo dicho, respecto á las fuerzas, porque su ley de distribución en la masa ya la tendremos en cuenta en cada caso particular.

Pero si el fluido tiene una superficie límite, en toda esta superficie podrán existir presiones ó tensiones, que suponemos como datos del problema, ó que resultan de la acción de un medio ambiente material en cuyo centro esté colocado el fluido de que tratamos.

Implícitamente hemos supuesto, que para cada punto del fluido hay una densidad determinada que se puede definir, según costumbre en estos casos, de la siguiente manera:

Definamos la densidad del fluido S en un punto a .

Imaginemos alrededor del punto a una superficie s , de pequeñísimas dimensiones en todos sentidos, y encerrando, por consiguiente, un volumen sumamente pequeño que representaremos por Δv , es decir, *diferencia de volumen*.

Supongamos, además, que dentro de este volumen está

comprendida una masa del flúido, que será también muy pequeña y que designaremos por Δm .

Pues bien: la relación

$$\frac{\Delta m}{\Delta v}$$

expresará una densidad media para todo el espacio comprendido en s .

Y si suponemos que la superficie s disminuye, tendiendo á anularse en el punto a , es evidente que la masa Δm y el volumen Δv tenderán hacia cero; pero si admitimos, y este será el caso general, que la relación anterior tiende hacia un límite ρ , dicho límite será la densidad para el punto a , que podrá expresarse, según la notación del cálculo diferencial, de este modo:

$$\rho = \frac{dm}{dv} .$$

Admitimos, pues, que la continuidad del flúido es tal, que para todos los puntos del mismo, la relación precedente tiene un valor finito, el cual será, según hemos dicho, la densidad del flúido en cada punto a .

No negamos que esta definición del flúido perfecto tiene cierta vaguedad, y aun tiene algo de metafísica, y por muy clara que al principio nos parezca, en sí encierra problemas que, hablando con lealtad, son innaccesible para la inteligencia humana.

¿Qué es un flúido?

¿Qué es una substancia?

¿Qué es la materia?

Nombres que se han inventado en correspondencia con ciertas sensaciones: nada más.

Para nosotros, la *materia* por excelencia es la materia sólida, maciza, resistente, pesada.

Ampliando la extensión de esta palabra, llamamos *materia* también á los líquidos. Haciendo un esfuerzo, y sustituyendo unas sensaciones por otras, llamamos materia á los gases. Por una nueva extensión creamos la palabra *flúido*, que imaginamos como una especie de gas muy ténue y continuo.

Así suponemos que debe ser el flúido eléctrico y como último término de esta escala, en que vamos generalizando, y ampliando, y empalmando, por decirlo de este modo, la realidad sensible con la hipótesis, llegamos al éter.

*
* *

El sistema material, al que vamos á aplicar la teoría de los torbellinos, lo designamos, como queda dicho, con el nombre de *flúido perfecto*.

Sus caracteres, que son los que constituyen su definición, son los siguientes:

1.º Es un sistema material, y no es decir mucho, puesto que no hay manera, como acabamos de indicar, de caracterizar la materia de una forma indiscutible.

El carácter que por mucho tiempo se ha creído fundamental era el del *peso*, y por tal razón se le daba el nombre á la materia vulgar, de materia ponderable.

Pero precisamente, aun dentro de la ciencia clásica fué necesario dar categoría y puesto á los flúidos imponderables.

Así, nuestro flúido perfecto podrá ser ponderable ó no serlo, lo cual dependerá de que en sus diferentes elementos actúen fuerzas exteriores.

De modo que podremos suponer que sobre él no actúa la gravedad.

O podremos suponer que actúa la gravedad y además otras fuerzas exteriores.

Todos estos serán datos del problema, que en cada caso habrá que puntualizar, pero que también podrán ser iguales á cero.

En resumen, nuestro fluido perfecto será una realidad material ocupando el espacio de una manera continua.

2.º Supondremos que sus diferentes elementos, grandes ó pequeños, están dotados de inercia, de modo que al aplicarles las ecuaciones del equilibrio y del movimiento, éstas serán las ecuaciones de la mecánica clásica.

3.º En cada punto del fluido consideraremos una densidad determinada, que será, por decirlo de este modo, la intensidad del fluido en aquel punto.

Es el concepto constante de cantidad, pero aplicado, no á la *cantidad espacial*, sino á la *cantidad intensa*.

Bien conocemos que la definición es oscura é imperfecta, pero no hay manera á mi alcance de hacerla más clara y más precisa.

El modo matemático de definir esta cantidad ya lo hemos explicado en la figura 3.ª. Pero ¿qué quiere decir intensidad en un punto?

No sabemos explicarlo.

Cuando más, podremos ofrecer á nuestros alumnos una imagen tomada de la teoría del espacio de muchas dimensiones.

Y acudamos á un ejemplo.

Supongamos que el mundo que habitamos no tuviera más que una dimensión accesible á nuestros sentidos.

Que todos, por decirlo así, fuéramos seres lineales, deslizando sobre la recta AB que constituyera nuestro Universo (fig. 4.ª).

Si estuviéramos dotados de razón, una especie de razón lineal, y perdónesenos lo atrevido y fantástico de la hipóte-

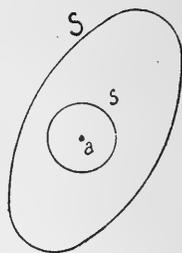


Figura 3.ª

sis, por mucho que discurriéramos y por mucho que apurásemos nuestras sensaciones, no comprenderíamos que existiesen las otras dos dimensiones del espacio en que hoy vivimos.

Podríamos hablar del espacio de tres, cuatro ó cinco dimensiones, pero sin conseguir una representación sensible.

El espacio de tres dimensiones sería para nosotros puramente verbal.

Pues bien; si dijéramos que el elemento $a a'$ de nuestro espacio tenía una *intensidad* C , éste sería para nosotros un concepto verbal sin representación física.

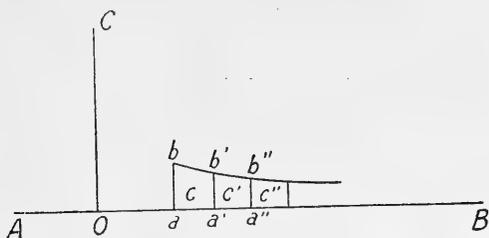


Figura 4.^a

Y, sin embargo, fuera de la línea AB , en las dos dimensiones OB , OC , podría existir un área $aa'bb'$, que representase la parte *intensa* del elemento aa' ; así como para otro elemento $a'a''$ la intensidad C' podría ser distinta de la anterior, y así sucesivamente.

En suma; á cada elemento aa' , $a'a''$..., puede corresponder una *cantidad intensiva distinta*, aunque nosotros, desconociendo la segunda dimensión, no podamos concebir una representación sensible para estas intensidades.

Claro es que pasando al límite para cada uno de los cuadriláteros C , C' ... podremos definir la densidad que corresponde á cada punto a , a' de una manera análoga á la empleada en la figura 3.^a.

Y generalizando, preguntaremos: por fantástica que sea

nuestra hipótesis, ¿quién puede negarnos, con negación absoluta, que las densidades variables para cada punto del fluido de que tratamos no tienen representación adecuada en un espacio de cuatro dimensiones?

En suma, nosotros supondremos que á cada punto del fluido corresponde una densidad.

4.º Por fin, y este es carácter importantísimo, supondremos que en el fluido perfecto, la acción sobre una superficie cualquiera $A B$ es normal á dicha superficie.

Dichas acciones no dan ninguna componente paralela á la misma superficie.

El fluido perfecto no tiene viscosidad de ningún género.

Las acciones que ejerce sobre una superficie son siempre normales á ella.

Queda, pues, definido el fluido perfecto con tanta claridad como nos ha sido posible, y en la conferencia próxima podremos ya empezar el estudio de su equilibrio y su movimiento.

XXV.—Mezclas fosforescentes

POR JOSÉ RODRÍGUEZ MOURELO.

Antes de ocuparme en el estudio detenido de la fecunda ley llamada del óptimo, ó de la eficacia máxima respecto de la luminescencia, he de tratar de las mezclas fosforescentes, en particular en lo referente á los diluyentes y á los sistemas más heterogéneos que las constituyen, volviendo de tal suerte á estudios y experimentos, de ya larga data, obligado fundamento y punto de partida de los presentes. Y aún han de concretarse á términos de la mayor sencillez, muy precisos y determinados, en cuanto trataré, por junto, de la excitabilidad de tales sistemas complejos y de las alteraciones que tanto ella misma como los demás accidentes del fenómeno de la fotoluminescencia experimentan mediante la influencia de otros sistemas que contribuyen á aumentar, de maneras variadísimas, la complejidad del primitivo ó fundamental, siendo constantes el mecanismo de su formación y la temperatura á que han sido constituidos.

Bien se comprende que ahora, como en otras muchas ocasiones, son obligado antecedente de mis experimentos los ya clásicos de Lecoq de Boisbaudran, quien procedía —y su método fué generalmente adoptado—calcinando masas relativamente considerables de materias calificadas como inertes, por punto general sulfato de calcio, en las que difundía mínimas proporciones de fosforógenos ó cuerpos activos, que eran compuestos metálicos á veces del grupo de las tierras raras. Después de la calcinación, más ó menos prolongada, sometía los sistemas resultantes á la influencia de las descargas eléctricas en tubos de vidrio donde había hecho el vacío hasta el límite que permiten los medios actuales, observando la coloración y la intensidad de la fosforescencia de tal modo producida y que es siempre fenómeno invertible. Trátase, en

definitiva, de un caso particular de catodoluminescencia, conforme ahora se diría, de sistemas complejos heterogéneos, la cual se determina en condiciones especiales, aún siendo constante el hecho primordial de la producción de luz mediante las acciones eléctricas, operando en atmósferas gaseosas de máximo enrarecimiento.

Consideraba Lecoq, y á ellos refirió sus experimentos acerca del particular en que me ocupo, tres sistemas de disoluciones sólidas, cuyos componentes variaba en extremo. Estaba compuesto el primero de un disolvente sólido y dos materias activas, en proporciones no superiores del 1 por 100, con la particularidad de que cada una de ellas, individualmente, difundida en la masa del disolvente, constituye ya un sistema binario fosforescente. Formaba el segundo también un solo disolvente sólido y dos substancias de las calificadas de activas; pero han de ser tales, que sólo una de ellas pueda constituir con el dicho disolvente la masa impresionable y luminescente y de ninguna manera la otra; los sistemas sulfato de calcio, sulfato de manganeso y sulfato de bismuto y el constituido con los dos últimos y el sulfato de estroncio, pertenecen á semejante categoría. Y en el tercero incluía las masas compuestas por dos diluyentes y un solo fosforógeno, á condición de que éste sea capaz de formar, unido á cada uno de los primeros y sin otra mezcla, disoluciones sólidas luminescentes en las mismas condiciones y excitadas en igual forma que tratándose de los sistemas complejos objeto de aquellos famosos experimentos que originaron memorable y fecunda controversia.

Mucho sirvieron los trabajos á que me refiero para establecer la constitución de los cuerpos fosforescentes, y merced á la recta interpretación de sus resultados se esclarecieron problemas singulares relativos al mecanismo de la producción de luminosidad, más ó menos persistente, provocada por la electricidad, actuando directamente sobre sistemas sólidos complejos en medios gaseosos sumamente en-

rarecidos, y nótese que la fosforescencia persiste durante tiempo determinado, después de haber cesado de accionar la energía eléctrica que la provocara, y Lecoq de Bisbaudran lo advirtió muy particularmente cuando experimentaba con el sistema binario sulfato de calcio diluyente y sulfato de manganeso fosforógeno.

De estos antecedentes había partido en mis primeros experimentos con mezclas fosforescentes, y ellos me guiaron también en los nuevos estudios de aquel fenómeno, provocado por la luz directa del día, sin insolación, en sistemas complejos, constituídos por alguno de los sulfatos de bario, estroncio ó calcio ejerciendo de disolventes, y los sulfuros de los propios metales haciendo de fosforógenos. Obtenía las mezclas empleando el siguiente procedimiento: á cincuenta gramos de cualesquiera de los sulfatos mencionados agregaba cinco ó seis gramos del correspondiente carbonato ó de la mezcla de varios, según los casos, el azufre necesario y una ó dos gotas de una disolución de nitrato de bismuto al décimo, triturándolo todo en un mortero de porcelana; la masa, puesta en un buen crisol de barro tapado, era calentada por tres horas á lo menos, sosteniendo la temperatura al rojo vivo, siguiéndose lento enfriamiento, y al cabo resulta una materia de aspecto homogéneo y uniforme color agrisado claro, bastante más estable y resistente á las acciones oxidantes del aire que aquellas otras en las cuales son diluyentes los sulfuros alcalino terrosos. También los he empleado como tales en el caso presente, agregando á las materias de cuya reacción debían originarse dos ó más fosforógenos, y de ordinario conseguía materias más excitables, y he demostrado que la pluralidad de aquéllos modifica el color de la fosforescencia.

No citaré más que un ejemplo. A la continúa, el sistema sulfuro de bario, subnitrato de bismuto, con ligerísimas proporciones de carbonato de sodio, es muy excitable y presenta fosforescencia amarilla dorada muy intensa ó amarilla ver-

dosa, y agregando al carbonato de bario, empleado como primera materia, tan sólo dos centigramos de nitrato de cobre, disuelto en agua, para 100 gr. CO_3Ba , siendo iguales las demás condiciones y operando como de ordinario, la sensibilidad para la luz del producto resultante no ha disminuído; pero su luminescencia es de bien marcado color rojo. He observado que el hecho no es constante respecto de todos los sulfuros fosforescentes, ni todas las materias calificadas de fosforógenos hállanse dotadas de igual capacidad respecto de los cambios de color de la fotoluminescencia; puede, sin embargo, añadirse á la eficacia del nitrato de cobre, para los cambios de coloración, la del óxido de antimonio.

Expondré ahora, con la mayor brevedad posible, los resultados principales de las series de experimentos que he practicado tocante á las mezclas fosforescentes, preparadas en la forma que dejo dicha y cuyas variantes, nunca esenciales, se indicarán en cada caso particular, y de momento sólo resta agregar que la difusión de unos cuerpos en otros y la unión de los componentes del sistema de la disolución sólida, sea éste el que quiera, no puede realizarse por medios mecánicos, aun los más perfectos y es indispensable el empleo del calor y la temperatura del rojo vivo largo tiempo sostenido, en la forma y por los grados que ya es dicho.

A. SISTEMA DE UN SOLO DILUYENTE Y DOS FOSFORÓGENOS.—Partía de un sulfato de estroncio artificial y precipitado, que contenía el 2 por 100 de materias alcalinas (cloruro y carbonato de sodio), con el cual mezclaba, lo más íntimamente posible, y operando con 50 gramos, cinco gramos de carbonato de estroncio, dos gramos de flor de azufre y cinco centigramos de subnitrato de bismuto, sustituído en algunos ensayos con igual proporción de carbonato de manganeso ó de óxido amarillo de uranio. Después de haber mantenido la mezcla al rojo vivo, durante tres horas sostenido, siguiéndose lento enfriamiento, recogía un cuerpo blanco poco agrisado, el cual, sometido á las acciones directas de la luz,

sólo al cabo de un cuarto de hora presenta en la obscuridad cierta luminescencia blanquecina, con matiz verdoso definido. A la vista de este primer resultado, preparé nuevas diluciones de los fosforógenos que he citado con la misma cantidad de sulfato de estroncio por disolvente, haciendo de continuo que el sulfuro se forme en su masa y llegué á conseguir materias en absoluto inertes para la luz, aun sometiéndolas á sus influencias por muchas horas seguidas, y este nuevo efecto hace pensar en un mínimo de eficacia de la acción del fosforógeno, en cuanto á su cantidad, y ello es de manera que, operando en la forma descripta, cuando en los 50 gramos de sulfato de estroncio hay solo 50 miligramos de sulfuro é indicios nada más de cualquiera de las otras materias que he empleado, en ningún caso resultan masas fotoluminescentes y ni la prolongada y reiterada insolación directa es parte á vencer su inercia.

Fuera aventurado establecer, siquiera haya observado numerosos hechos, ninguna hipótesis ó ley, que se llamaría del mínimo, ó de la menor eficacia, en contraposición á la ley del óptimo; pero, no obstante, importa dejar consignado cómo existe una dilución á la que corresponde lo que pudiera denominarse fotoluminescencia inicial, partiendo de cuyo límite, y relacionada con las crecientes proporciones del fosforógeno, la intensidad del fenómeno aumenta y el color de la fosforencencia se determina, conforme á la naturaleza química de aquel, hasta llegar á la cantidad óptima, en cuyo punto coinciden la máxima excitabilidad del cuerpo, la máxima intensidad de la fosforencencia, y la máxima duración. Iguales efectos he conseguido al emplear como diluyentes los sulfatos de calcio y de bario con las dos materias activas, de las cuales era constante el sulfuro de estroncio. Provocando, mediante la adición de dos ó tres gramos de negro de humo, el comienzo de la reducción á sulfuro de una masa de 100 gramos de sulfato de bario, al que previamente se habían agregado sólo dos centigramos de nitrato de bismuto ó de

sulfato de manganeso, mediante impregnación, á beneficio de sus respectivas disoluciones y calentando y dejando enfriar las mezclas de la manera que es dicha, resulta una masa poco excitable por la luz, en cuanto ha menestar estar sometida á sus influencias directas á lo menos veinte minutos, para presentar luego, en la obscuridad, débil fosforescencia de tonos blanquecinos dotados de cierto tinte amarillento.

Obsérvase que si son materias activas en las diluciones los sulfuros de bario y estroncio ó de estroncio y calcio, formados en la masa del diluyente sulfato de estroncio, de bario ó de calcio, siempre empleando el procedimiento antes indicado, el tono de la fosforescencia es el verdoso, peculiar del sulfuro de estroncio con el subnitrato de bismuto por materia activa, aunque sus proporciones sean menores que las del otro fosforógeno, y ésto, en realidad, es singular y acaso dependiente de la temperatura á que se ha constituido la mezcla. Es de todos modos evidente la degradación de la fotoluminescencia, mediante las diluciones que he ensayado; bien es cierto que ninguno de los fosforógenos empleados es susceptible de formar con el diluyente un sistema excitable y por sí mismo fosforescente; al contrario, en este respecto su inercia mutua es completa.

Ganoso de alcanzar nuevos resultados, traté de preparar otros sistemas que eran mezclas de los sulfuros alcalino terrosos, generados partiendo de los correspondientes carbonatos, impurificados por contener cloruros y carbonatos alcalinos y de la flor de azufre, agregando cualquiera de los fosforógenos, subnitrato de bismuto, carbonato de manganeso, nitrato de uranio ó nitrato de cobre; los primeros, aun siendo de suyo fosforescentes, servían en el caso presente á modo de disolventes, con los cuales las materias activas de por sí forman sistemas excitables á la luz. No fueron, en verdad, concluyentes los resultados; pero he advertido la influencia de la coloración de la fosforescencia de un sulfuro

en el otro, como si se penetrasen, predominando el tono característico del que estaba en mayores proporciones.

B. SISTEMAS COMPLEJOS Y HETEROGÉNEOS.—Llamo de esta suerte á los agregados que contienen uno ó dos diluyentes, un fosforógeno ya constituido y otro de la misma naturaleza que se forme al someter la mezcla á las prolongadas acciones de la temperatura correspondiente al rojo vivo; ejemplo de ello es el sistema inicial $\text{SO}_4 \text{Sr}$ (diluyente)— $\text{CO}_3 \text{Sr}$ — S — SBa , que al final resulta una disolución de los sulfuros de estroncio y de bario, ejerciendo de materias activas, en el disolvente homogéneo sulfato de estroncio, y pueden agregarse, para dotarlo de mayor actividad, los fosforógenos de bismuto, manganeso, uranio ó cobre que empleaba en mis experimentos. Otro tipo de las mezclas de que trato es el siguiente: $\text{SO}_4 \text{Sr}$ y $\text{SO}_4 \text{Ba}$ en partes iguales, diluyentes, $\text{CO}_3 \text{Sr}$ y S para formar el fosforógeno SSr (ya de suyo fotoluminescente) y $\text{SO}_4 \text{Mn}$ (sólo algunos miligramos); y un sistema ya bastante más complejo es estotro: diluyente, partes iguales de $\text{SO}_4 \text{Ba}$ — $\text{SO}_4 \text{Sr}$ y $\text{SO}_4 \text{Ca}$ —fosforógeno ya constituido $(\text{NO}_3)_2 \text{Cu}$ (0,005 gramos por 100), y además $\text{CO}_3 \text{Sr}$ y S para formar, al calentar la masa, el sulfuro de estroncio. Por último, se puede partir de una mezcla de los sulfatos de estroncio y bario (25 gramos de cada uno) impregnados con una disolución de 0,05 gramos de $\text{SO}_4 \text{Mn}$, desecando y agregando 6 gramos de negro de humo, que al rojo es causa de una reducción parcial.

He de hacer notar cómo en los casos apuntados cada uno de los fosforógenos es indiferente respecto de los sulfatos que constituyen el diluyente y no es posible en ningún caso la formación de sistemas binarios fosforescentes. Nunca me fué dado advertir cambios ó variantes de monta en el fenómeno, y únicamente cuando las proporciones del sulfuro que ejercía de fosforógeno casi igualaban á las del diluyente, podrían notarse sus influencias mutuas en la intensidad y en el color de la fosforescencia.

Puede acaso admitirse, de modo general, tratándose de sistemas complejos, sometidos á enérgicas y prolongadas calcinaciones, que las masas resultantes no son como las mezclas ordinarias de sólidos, ya que la difusión no se lleva á cabo mediante solas acciones mecánicas, que no producen efectos de ninguna clase, y si las del calor son indispensables, de necesidad han de establecer relaciones de orden químico entre los diversos componentes de las disoluciones sólidas. Una prueba de ello es la influencia de la individualidad de aquéllos en las propiedades del sistema cuyo efecto mínimo, respecto de la fotoluminescencia, depende de la naturaleza del fosforógeno tanto acaso como de sus proporciones, existiendo siempre para éstas un límite á partir del cual comienzan á manifestarse sus actividades, que van en progresivo aumento, hasta alcanzar las mayores con las cantidades dichas óptimas, y se comprende que entre tales términos ha de haber cuantas variantes se quiera y ser posibles considerables modificaciones de los sistemas.

Indicaré cómo en los llamados complejos pueden hacerse mezclas combinando las cantidades y la naturaleza de las materias que los forman. En el caso sencillo de un solo fosforógeno para dos diluyentes puede ocurrir que estos sean inertes respecto de aquel (sulfatos de bario y estroncio), ó que posean actividad respecto de la luz (sulfuros de bario y de estroncio, que se generan en el acto de formar el sistema, partiendo de los correspondientes carbonatos y la flor de azufre); no me ha sido dable establecer regla alguna tocante á la distribución del fosforógeno en la materia de los dos disolventes; pero he notado que, en las condiciones de mis experimentos y para los efectos de la luz directa, las materias activas en grado sumo, tratando de formar simples sulfuros fosforescentes, que son al cabo disoluciones sólidas más ó menos complejas, permanecen inertes cuando en las mismas proporciones de su mayor eficacia son mezcladas y calcinadas con los sulfatos de bario, estroncio ó cal-

cio, á no ser si ejercen de reductores ó se les agrega un reductor que determina la formación de corta cantidad de sulfuro. Por lo menos los resultados han sido negativos, experimentando por separado y en proporciones variables, con los nitratos de bismuto, de calcio, de níquel, de manganeso, de cobalto y de uranio, cuya eficacia, en calidad de materias activas, tratándose de los sulfuros ordinarios, está bien demostrada ya empleados solos, ó en diversas proporciones mezclados algunos.

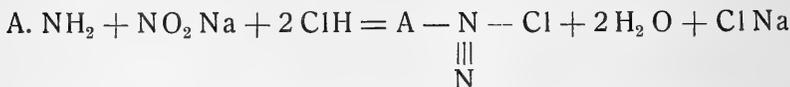
Quizá en otras condiciones experimentales estos sistemas que califico de inertes, cuando después de sometidos á intensa y prolongada iluminación directa no fosforecen en la obscuridad, sean activos y muy luminescentes. Recuérdese que en los experimentos de Lecoq de Boisbaudran era disolvente á la continua el sulfato de calcio calcinado, aunque en realidad se trataba de un género de fosforescencia distinto del que yo he estudiado, y considerando que la luminosidad desaparece ó persiste durante brevísimo tiempo, luego que cesa de actuar la energía eléctrica excitadora del fenómeno, parece justificado que el autor lo califique de fluorescencia. Tratándose de la verdadera fotoluminescencia, como es el caso presente, juzgo indispensable la presencia, siquiera sea en mínimas proporciones, de sulfuros alcalinos terrosos en las materias activas ó en los diluyentes, ya que ellos mismos son, en definitiva, verdaderos y á veces bien singulares sistemas complejos.

Contribución al estudio de los derivados halogenados del antraquinón.

POR JOSÉ PRATS AYMERICH.

Los métodos generales de obtención de los derivados halogenados de los compuestos de la serie aromática, aplicables al antraquinón, son:

a) *Reacción de Sandmeyer* (*). Si se diazota una amina aromática:



y se deja caer la solución del cloruro ó bromuro del diazo obtenido en una solución de cloruro cuproso (al 10 por 100) en ácido clorhídrico ó de bromuro cuproso, (al 10 por 100) en ácido bromhídrico (según se trate del cloruro ó del bromuro del diazo, respectivamente), se forma una sal doble con arreglo (**) á la fórmula:

(*) *Sandmeyer*. Berichte der Deutsch. chemisch. Gesellschaft. t. 17. Págs. 1639, 2650; t. 18. — Pág. 1492.

(**) El cloruro cuproso, puede prepararse hirviendo una mezcla de:

{	Sulfato de cobre.....	25 partes.
	Cloruro sódico.....	12 —
	Agua.....	50 —

se añade:

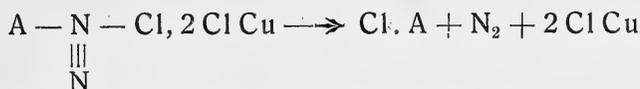
{	ácido clorhídrico concentrado.....	100 partes.
	torneaduras de cobre.....	13 —

y se mantiene la temperatura hasta que la mezcla pierde su color. Se decanta y añade ácido clorhídrico concentrado hasta formar 203,6 partes.

(Feitler.—Zeitschrift für Physikalische Chemie.—1889-4-68).



Calentando á la ebullición se desprende el nitrógeno y destilando la masa con vapor de agua se obtiene el derivado halogenado:



Gatterman (*) ha demostrado que la adición de cobre finamente dividido (precipitado con cinc de una solución de sulfato de cobre) á la solución del cloruro del diazo en ácido clorhídrico, efectúa la reacción de Sandmeyer á la temperatura ordinaria.

b) *Por substitución directa de los átomos de hidrógeno.* Esta substitución se realiza en presencia de ciertas *substancias de contacto* como iodo, triclورو de antimonio, tricloruro de aluminio, cloruro férrico (**), ó á la temperatura de ebullición ó bajo la acción directa de los rayos solares (***), sin empleo de agente catalítico.

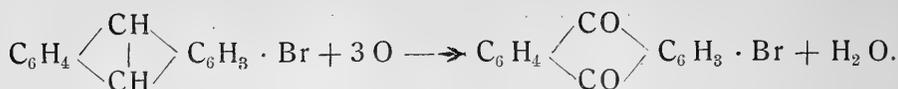
Pero además de estos métodos generales, hay otros particulares para los derivados que nos ocupan, á saber:

c) *Oxidación de los derivados halogenados antracénicos.* Esta oxidación se efectúa por mezclas oxidantes (dicromato y ácido sulfúrico) ó por electrolisis:

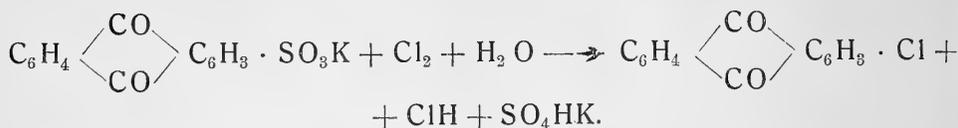
(*) *Berichte.*—23-1218; 25-1091.

(**) *Cohen.* Journal of the Chemical Society.—75.893.—*Edinger.* *Berichte.*—33.2875.

(***) *Schram.* Monatsheft f. Chem.—8.299.



d) *Por sustitución del grupo sulfónico en los derivados sulfonados.*—Daremos detalles de este método en la obtención de los alfa-derivados, fundada en la reacción:



e) *De los ácidos cloro ó bromo-benzoilbenzoicos*—Es procedimiento aplicado á la preparación de los beta-derivados, de gran porvenir industrial, y se funda en la reacción:



que se detallará en su lugar correspondiente.

II

No se conocen, ni mucho menos, los 75 derivados clorados del antraquinón, así como tampoco los bromados; pero sí algunos, entre los cuales los hay perfectamente determinados y otros de fórmula no bien definida todavía. Los más importantes, por sus grandes aplicaciones á la fabricación de colorantes *tina*, son los monohalogenados, y de ellos se tratará principalmente. No se conocen los derivados de sustitución del hidrógeno del núcleo antraquinónico por iodo, fluor ó cianógeno.

α —Clorantraquinón.

OBTENCIÓN. a) En un matraz de vidrio de 3 litros de capacidad se colocan:

- { 25 gramos de antraquinón— α —sulfonato potásico.
- { 75 gramos de ácido clorhídrico de 20° Bé.
- { 1875 cm³ de agua.

El matraz se enlaza con un refrigerante de Liebig ascendente, y á él se hace llegar cloro bien seco, procedente de un cilindro donde se tenga comprimido, pero pasando por una probeta desecadora con ácido sulfúrico. El cloro no absorbido es recogido por una solución de sosa cáustica al 3 por 100, contenida en un vaso enlazado con el matraz.

Se calienta la mezcla á la ebullición, y todo se disuelve tomando el líquido color amarillo claro; se hace ahora pasar lentamente la corriente de cloro y se continúa calentando unas seis horas. Aparece un precipitado amarillo cristalino de α —clorantraquinón; se filtra en embudo de porcelana, lava con agua caliente (con la fría no filtra bien), y se deseca en la estufa.

Cantidad obtenida	12,5	gramos.
— — — — — teórica.....	18,5	—
	<hr/>	
Rendimiento.....	= 65 %	

He logrado obtener grandes cantidades con muy buenos rendimientos, sutituyendo el matraz por una caldera ó perol de hierro esmaltado, tapado herméticamente, sujeto con tornillos y cubiertas las junturas con yeso.

Las cantidades empleadas son:

- { 107 gramos antraquinón— α —sulfonato potásico.
- { 8 litros agua.
- { 320 gramos ácido clorhídrico.

Para conocer, al cabo de veinte horas de calentar y pasar la corriente de cloro, si ha terminado la reacción, tomo un poco del líquido por el conducto del termómetro (colocado en la cubierta del perol), se filtra, se neutraliza con solución de sosa cáustica, se añade hidrosulfito en polvo, y se calienta: si queda aún α -antraquinón sulfonato, toma color pardo rojizo.

Hay que cuidar que la temperatura no pase de 102-103° C., pues en caso contrario se produce una ebullición violenta con proyecciones, y el tubo del refrigerante de Liebig se llena de vapores rojos que se condensan en un líquido rojizo de consistencia oleaginosa.

He notado, además, que el color del producto obtenido es algo más rojizo, y los cristales menos perfectos cuando la temperatura es demasiado elevada.

b) En una cápsula de porcelana se deslién 50 gramos de α -amido antraquinón en 500 gramos de ácido clorhídrico, de 15.°Bé, hasta formar pasta fina, y se diazotan con 31,25 gramos de nitrito, disueltos en poca agua. Se filtra el diazo obtenido; se agita con ácido clorhídrico diluido y se deja caer lentamente, *en frío*, en una solución de 18,75 gramos de cloruro cuproso en 750 gramos de ácido clorhídrico de 18°Bé. A medida que se va agitando aparece el α -clorantraquinón en polvo, algo más rojizo que el obtenido por el anterior procedimiento.

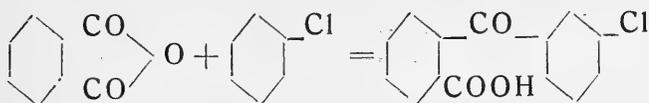
Cantidad obtenida.....	32	gramos.
— teórica	54	—
	—————	
Rendimiento.....	= 65 %	

PURIFICACIÓN.—Por cristalización de su disolución en tolueno.

PROPIEDADES.—Cristales amarillos; P. F.=158°, soluble en ácido sulfúrico con color pardo amarillento; soluble en nitrobencina y ácido acético glacial; difícilmente soluble en alcohol.

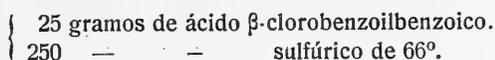
β - Clorantraquinón:

OBTENCIÓN.—Se comienza por preparar el ácido clorobenzoilbenzoico (*P.F* = 147 — 158°) disolviendo 100 gramos de anhídrido ftálico en un kilogramo de bencina monoclorada; se calienta en un matraz, provisto de agitador mecánico, y se va añadiendo tricloruro de aluminio en pequeñas porciones hasta que no se desprenda ácido clorhídrico, lo cual requiere bastantes horas. Se vierte el producto resultante en agua, se trata por sosa para precipitar el aluminio, se filtra y se precipita en el líquido filtrado con SO_4H_2 , que desaloja el ácido clorobenzoilbenzoico.

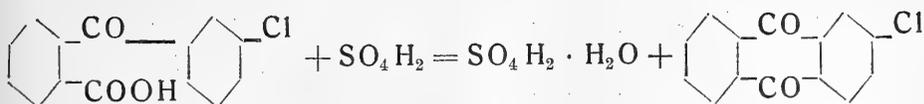


Por extracción con agua caliente se separa del ácido ftálico (soluble en agua), y luego se purifica por disolución en bencina ó tolueno calientes.

Conversión en β -clorantraquinón.—En un matraz de vidrio, provisto de agitador, se colocan



Se calienta en baño de aceite á 130-140° C., hasta que se efectue integralmente la reacción:



lo cual exige varias horas, y se conoce el término de ella tomando un poco en un tubo de ensayo, añadiendo unas gotas de solución de sosa cáustica para neutralizar el

ácido y disolver el ácido β -clorobenzoilbenzoico (si lo hay), calentando, filtrando y añadiendo ácido sulfúrico al líquido: si hay aún ácido β -clorobenzoilbenzoico, aparece precipitado blanco. Se demuestra que el primer precipitado recogido en el filtro es de β -clorantraquinón, porque añadiendo solución de sosa cáustica, hidrosulfito y calentando, aparece la coloración roja.

Terminada la reacción, se deja enfriar, se echa en dos litros de agua, se calienta, filtra, lava con agua (hasta reacción neutra), y, si es preciso, con solución diluída de sosa y de nuevo con agua; por último se seca.

Se purifica por disolución en bencina caliente y precipitación con alcohol.

Cantidad obtenida.....	20	gramos.
— teórica.....	23,3	—
Rendimiento	$= 86\%$	

PROPIEDADES.—Polvo brillante cristalino de color blanco, insoluble en agua y en alcohol, soluble en la bencina P. F—204° C.

α — Bromantraquinón

OBTENCIÓN. A.—Es aplicable la reacción de Sandmeyer vista al tratar del α -clorantraquinón. Diazótense 50 g. de α -amido antraquinón, disueltos en 500 g. de ácido sulfúrico de 66° Bé, con 31,25 g. de nitrito; se deja en reposo dos horas, se filtra, añaden 500 g. de ácido bromhídrico de 15° Bé y se deja caer, agitando, en una solución de 18,25 g. de bromuro cuproso en 500 g. de ácido bromhidrico de 15° Bé. El α -bromantraquinón se precipita (*)

B.—Con objeto de simplificar el procedimiento anterior,

(*) D. R. P. núm 131.538.

he buscado el modo de aplicar al bromantraquinón el procedimiento A empleado en la obtención del α -clorantraquinón.

Al efecto, en el mismo aparato allí descrito, pero cubriendo todos los corchos con amianto, calentando con precaución ó en baño de agua, y poniendo además un depósito con llave conteniendo el bromo, para que vaya cayendo lentamente, he colocado:

{ 40 g. de α -antraquinón sulfonato K
3 litros de agua
120 grs. de ácido clorhídrico de 20° Bé,

calentando lentamente á 100° y dejando caer con precaución y gota á gota el bromo, llega á obtenerse una pequeña cantidad de α -bromantraquinón, que mejora con ácido bromhídrico, pero el procedimiento no es industrial, pues resulta con grandes peligros de explosión del aparato.

Antraquinones polihalogenados.

Diclorantraquinón 1.5. — Se obtiene del diamidoantraquinón 1.5, disolviendo 50 gramos del mismo en 500 gramos de ácido clorhídrico de 15° Bé, diazotando con 45 gramos de nitrito sódico y dejando caer la solución del diazo resultante, lentamente y con fuerte agitación, en otra solución de 25 gramos de cloruro cuproso en 750 gramos de ácido clorhídrico.

El diclorantraquinón 1.5 funde á 232°, se disuelve en ácido sulfúrico, con color rojo-amarillento y en nitrobencina, y es difícilmente soluble en alcohol (*).

Diclorantraquinón 1.8.— 50 gramos de diamidoantraquinón 1.8 se disuelven en 750 gramos de ácido clorhídrico de

(*) D. R. P., núm. 131.538.

15° Bé, se diazotan con 45 gramos de nitrito á 30-40° C. y calentando 1^h á 100° C., aparece el 1.8 diclorantraquinón.

Es soluble en ácido sulfúrico (color amarillo) y en nitrobenzina (1).

Polibromantraquinón.— Se disuelven 50 gramos de antraquinón en 1 kilogramo de ácido sulfúrico fumante, con 30 % de SO₃, se coloca en un matraz calentado en baño de María y se dejará caer en él lentamente, á la temperatura de 20°, 150 gramos de bromo, se mantiene durante tres horas á 40-50° C., se diluye con ácido sulfúrico monohidratado, se vierte en hielo, filtra, lava y seca. El producto aparece en copos blanco-rosados.

Se extrae con acetona para purificarlo, y el residuo insoluble se trata por 10 p. de nitrobenzina hirviendo y se filtra; por enfriamiento aparecen cristales de un *tetrabromantraquinón*, que funden á 295°, solubles en anilina, con color rojo-pardo, que cambia en violeta-rojizo por ebullición.

El residuo insoluble en nitrobenzina contiene un *eptabromantraquinón* difícilmente soluble en todos los disolventes y que cristaliza con mucha nitrobenzina (*).

(*) D. R. P., números 5.087 y 107.721.

XXVII. — Un caso más de ionización de gases de origen químico.

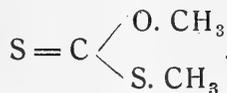
POR ANGEL DEL CAMPO Y JAIME FERRER.

Conócense hace tiempo algunas reacciones químicas que, efectuadas en condiciones apropiadas, originan la descarga de un electroscopio previamente electrizado.

G. Le Bon, que ha sido uno de los primeros investigadores en este sentido, ha demostrado que la mayoría de las reacciones que presentan la propiedad citada, son ni más ni menos que procesos de hidratación ó de oxidación, siendo sobre todo los primeros los que originan mayor actividad.

Constituyen ejemplos típicos de los fenómenos aludidos la hidratación del sulfato de quinina y la oxidación lenta del fósforo en el aire ligeramente húmedo, origen ambos hechos, además, de una viva y muy conocida luminescencia.

Nosotros debemos añadir un caso más á la lista de los hasta hoy conocidos, y es la acción, todavía no bien estudiada, del aire ligeramente húmedo sobre los ésteres luminescentes, hace bien poco dados á conocer por Mr. Delepigne (*), y á los que sirve de tipo el sulfo-tio-carbonato-dimetílico.



*
* *

El notable químico citado, cuyos estudios tanto interesan

(*) *Bull. de la Soc. Chim. de France*, 1910, págs. 404 y 722, Mayo y Julio.

siempre y de modo especialísimo en la presente ocasión, es quien primeramente ha observado la propiedad singular que poseen ciertos ésteres sulfotiocarbónicos y sulfocarbámicos, algunos conocidos ya de antiguo, de emitir espontáneamente en la obscuridad intensa luminescencia, á la vez que producen espesa nube de blancos humos y fuerte y desagradable olor que recuerda algo el peculiar del ozono y más aún el de ciertas sustancias orgánicas fosforadas.

Atribuye dicho señor estos fenómenos á una oxidación espontánea tan intensa como supone la formación del ácido sulfúrico, que cree haber encontrado en los referidos y opacos humos blancos que en contacto del aire se producen.

Supuso primero el autor que esta oxidación se efectuaba con producción de fosforescencia en aquellos cuerpos cuya molécula contenía la agrupación atómica

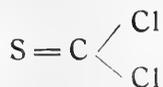


toda vez que no presentaban tal propiedad los ésteres tiocarbónicos, tiocarbámicos é imido-tiocarbónicos que contienen en su molécula los grupos



isómeros del anterior.

Sin embargo, el hecho de ser fosforescentes algunos cuerpos como el

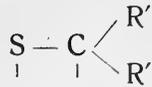


que no contienen la agrupación indicada, y de no serlo, en

cambio, otros que la poseen, como los que responden á las fórmulas



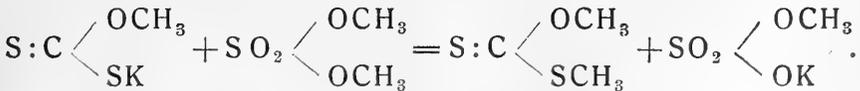
conduce al cabo á Mr. Delepine á suponer que en los ésteres fosforescentes por él descubiertos existe el grupo



particularmente apto para fijar el oxígeno, siempre que los radicales R' no sean capaces por sí de utilizar las dos valencias libres que resultan, inutilizándolas, por consiguiente, para los efectos de la oxidación.

*
* *

Con objeto de dar todos los detalles que puedan ser útiles para el mejor conocimiento de las curiosas propiedades de estos cuerpos, no vacilamos en explicar la preparación del más fosforescente de los mismos, que es el mencionado al principio, si bien desde el punto de vista puramente químico no tiene, por demasiado sencilla, nada interesante; puede expresarse, en efecto, por la siguiente ecuación:



Obtiénese primeramente el sulfotiocarbonato metil-potásico (metil-xantogenato potásico), y una vez que el sulfuro

de carbono empleado en las proporciones teóricas, se ha disuelto completamente en el alcoholato alcalino, se añade al líquido homogéneo resultante la cantidad de sulfato de metilo, que también indique la teoría, en tanto que se agita constantemente y se enfría por una corriente de agua; en este último período de la operación, aparecen por vez primera los humos blancos de que antes hemos hecho referencia.

El sulfato metilpotásico se deposita en forma de precipitado blanco cristalino que se disuelve fácilmente en agua, y al añadir ésta, se separa en el fondo de la vasija un líquido oleaginoso, amarillento, que es el éster en cuestión.

Se destila en corriente de vapor de agua (produciéndose abundantísimos humos al empezar la operación), se separa del agua por un embudo de llave, se rectifica en presencia del cloruro cálcico, y se conserva en contacto con dicha substancia en un frasco bien tapado.

Obtiénese por el procedimiento descrito, un rendimiento casi teórico.

El sulfo-fío-carbonato dimetilico es un líquido oleaginoso, amarillo, más denso que el agua, no miscible con ella á la temperatura ordinaria, de sabor dulce, de olor desagradable y cuyo punto de ebullición es en Madrid de unos 165° C.

Para el mejor conocimiento de sus propiedades hemos efectuado con él algunos experimentos que á continuación exponemos:

1.º *¿Es espontáneamente humeante y fosforescente?* En cuanto á la primera parte de la pregunta, podemos contestar evidentemente que no: obtenido el cuerpo en los días más secos del verano próximo pasado, no produjo humos visibles de ningún género, aun abandonado á la acción del aire en atmósfera seca.

Colocando unas gotas del éster en que nos ocupamos en dos vidrios de reloj bajo dos campanas de cristal, de tal modo que la una cubra además una vasija con agua, de gran superficie, se observa en esta última, de modo bien

patente, la presencia de los humos blancos, en tanto que no se percibe fenómeno alguno en aquella donde falta la humedad.

Si se vierte una gota del cuerpo en cuestión sobre una mesa y se extiende con un paño seco, no se percibe, aparte del olor, fenómeno alguno; pero si entonces se pasa una esponja ligeramente humedecida por el sitio en que el éster ha impregnado la superficie, entonces se advierten perfectamente los humos que se desprenden de la región humedecida.

Parece, pues, evidente la influencia de la humedad.

En cuanto á la fosforescencia, hemos podido comprobar que estos humos blancos carecen en absoluto de ella, y deben ser, por consiguiente, posteriores al fenómeno químico que da origen al fenómeno físico á que hacemos referencia; por otra parte, el cuerpo puro y seco colocado en una cápsula plana y observado en la obscuridad, pero en *completo reposo*, ó no luce, ó produce una luminosidad escasísima, que no parece ser, ni con mucho, la intensa que Mr. Delepine afirma que se produce espontáneamente.

2.º *¿Es un caso de triboluminescencia?* Si á la cápsula plana antes citada, sostenida en la palma de la mano, se le imprime rápido movimiento de traslación, aumenta la fosforescencia como si el roce con el aire favoreciera el fenómeno.

Frotado entre las manos el cuerpo, produce fosforescencia intensísima.

Frotado contra las paredes de un mortero, con el pistilo, la luminescencia se manifiesta aumentada; este efecto se produce también con otra porción de ésteres, como el sulfato de metilo, formiato y acetato de etilo, etc., en los que se atribuye á saponificación incipiente.

Si se coloca el cuerpo fosforescente en un tubo de ensayo, se cierra éste con un tapón atravesado por dos tubos de pequeño diámetro convenientemente acodados, uno de los cuales llegue hasta cerca del fondo, y se inyecta por él una co-

rriente de aire por medio de una pera de caucho, se observa, entre otras cosas, que el chorro de aire y vapor que sale por el extremo del otro tubo produce á cierta distancia del orificio de salida una intensa fosforescencia; esta distancia va progresivamente aumentando, llegando á ser de un metro como máximo y produciendo el mismo efecto que si la luminosidad se originara al chocar el vapor con el aire; pero si en cualquier punto del trayecto recorrido por la columna gaseosa se interpone un cuerpo con el que antes pueda chocar, como la mano, un papel, un objeto cualquiera, entonces el fenómeno adquiere gran intensidad, pudiendo producirse á voluntad la fosforescencia, variando el punto donde se realiza el encuentro.

Como se ve por lo expuesto, hay muchos indicios para creer que el fenómeno estudiado es un caso de triboluminiscencia.

3.º *El aire es indispensable para que la fosforescencia aparezca*; este extremo, ya demostrado por Delepine, es evidente, pues los mismos experimentos anteriores, efectuados en atmósferas de CO_2 , H, etc., no originan luminiscencia alguna; sin embargo, un exceso de oxígeno no favorece el aumento del fenómeno, como se prueba haciendo llegar á un gran matraz, de una parte, los vapores del cuerpo, y de otra, *oxígeno puro*; en el interior del matraz se observa una fosforescencia *intermitente*, á modo de relámpagos, que se producen de igual suerte con una corriente de aire en vez del oxígeno.

4.º *El aire no basta para producir el fenómeno*. En efecto, en el experimento antes citado de la insuflación en tubo de ensayo, no se produce la fosforescencia en el acto, sino que siempre necesita cierto tiempo como de *cebamiento*, que á veces es de quince minutos para que la luminosidad aparezca.

Si el chorro de vapor, á que antes nos hemos referido, después de atravesar el aire, se recibe sobre agua, la lumi-

nosidad aumenta considerablemente; si se recibe sobre alcohol, la luminosidad se atenúa; si se recibe sobre petróleo, benceno etc., la luminosidad desaparece.

La influencia de la humedad se hace, pues, notar de nuevo.

5.º *¿Influye la presión?* Así parece, puesto que dentro del tubo de ensayo, dispuesto como se ha dicho anteriormente, se produce una viva fosforescencia en el momento de aumentar la presión interior; medida ésta con un pequeño manómetro, resulta ser próximamente de unos 3,5 centímetros de mercurio, como valor máximo, sobre la presión atmosférica.

6.º *¿Se produce ácido sulfúrico en este fenómeno?* Así lo afirma Delepine; pero nosotros no hemos podido comprobarlo; es verdad, que los humos blancos tantas veces citados, que son insolubles en el agua, pero solubles en el alcohol, producen con el cloruro bórico, previamente acidulado, un precipitado blanco, pero este precipitado es soluble en caliente y reaparece por enfriamiento. Lo mismo hace la solución alcohólica del éster puro con el ácido clorhídrico solo, y además, las soluciones alcohólicas del éster y de los humos blancos por él producidos, reducen el nitrato argéntico doblemente alcalino, sin más diferencia que la velocidad en la reducción como corresponde naturalmente á la desigualdad de masa.

*
* *

Dedúcese de lo expuesto que el fenómeno estudiado no es sólo de *oxidación*, sino que también parece ser de *hidratación*, y tiene además todo el aspecto de un caso de *triboluminescencia*; también parece dependiente de la *presión*, y esto puede explicar que en París, con superior presión y más humedad que en Madrid, el cuerpo aparezca espontáneamente con una fosforescencia que para ser obtenida aquí

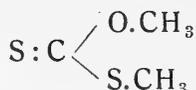
en grado igual se necesita provocarla mediante la presión ó el frotamiento.

*
* *
*

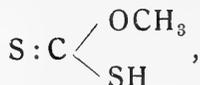
Ahora bien, los cuerpos de la serie grasa no suelen ser fosforescentes si no contienen alguna impureza, sobre todo si son incoloros, y aunque éste es ligeramente coloreado, pudiera ocurrir que estuviera comprendido en la regla general.

Por otra parte, la triboluminiscencia de los otros ésteres que hemos mencionado se atribuye á una lenta saponificación, lo cual, unido á la bien manifiesta influencia de la humedad en este caso, hace pensar en algo análogo para el éster que nos ocupa.

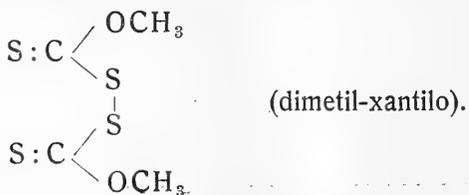
De consiguiente, no parece que estaría desprovisto de todo fundamento el suponer que el éster



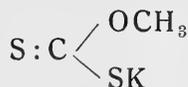
experimenta un principio de saponificación, quedando libre acaso pequeñas porciones del ácido



cuerpo sumamente oxidable, pues origina con gran facilidad el

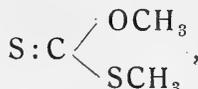


Este proceso podía encontrar algún fundamento en el hecho, por nosotros observado, de que una oxidación violenta con permanganato potásico, perborato sódico, etc., en líquido ácido del

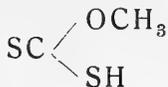


no destruye su molécula, sino que separa el átomo de K para formar una sal con el ácido libre, uniéndose por el S dos residuos moleculares ó aniones para constituir el cuerpo antes formulado; es decir, que esta reacción es muy parecida á la acción del iodo sobre el hiposulfito sódico, originaria del ioduro alcalino y del tetracionato.

Si suponemos, por tanto, que el enlace S—R' es el más débil de la molécula, parece natural que suceda algo análogo á lo expuesto con el



y una oxidación suave sobre el mismo ó sobre el



que debe ser uno de los productos de la previa supuesta hidratación.

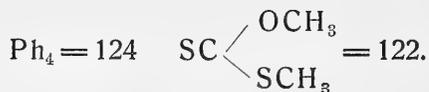
Si esto ó algo parecido acontece, una pequenísimas cantidad de tales cuerpos podría actuar de *fosforógeno*, siendo el *diluyente* el exceso de vapor del cuerpo no alterado: nuestros experimentos, prueban, en efecto, que los *humos* blancos poseen, aunque algo atenuadas, las mismas propiedades que el éster puro.

Admitiendo la hipótesis, se explicarían algunos de los fenómenos observados, como el que antes llamamos de *ce-*

bamiento, puesto que las cantidades de fosforógeno y diluyente necesitan, como es sabido, una proporción *óptima* para que la fosforescencia alcance su grado máximo

*
* *

Sea de ello lo que quiera, que bien merece más detenida atención, lo que resulta evidente y muy interesante es la analogía tan grande que existe entre la fosforescencia del fósforo y la del cuerpo que hemos estudiado; en efecto, en el caso del fósforo (*) está comprobada la influencia de la humedad y de la presión; prodúcense en él la misma intermitencia de luminosidad que hemos observado en algunos de nuestros experimentos; el olor del éster es muy parecido y la influencia del petróleo, benzol etc., análoga; por ser análogos hasta tienen casi el mismo peso molecular:



Ahora bien, es sabido que en la oxidación del fósforo se *iontiza* el aire haciéndose conductor, pues análogo fenómeno se produce en la oxidación ó hidratación del éster que nos ocupa; en prueba de ello, publicamos á continuación los siguientes datos que como media de varias observaciones concordantes, hechas con el electroscopio de Curie, nos ha suministrado nuestro compañero Sr. Díaz de Rada quien las ha efectuado:

(*) «La luminescencia del fósforo». Nota alemana de Física por el Señor Werner Mecklenburg. An. de la Soc. Esp. de F. y Q. número 56. Octubre 1908, pág. 445.

Marcha del electroscopio de Curie en el aire.

TIEMPOS	Divisiones del micrómetro.
0 minutos.....	140
5 »	136
10 »	131,5
15 »	128
20 »	124
25 »	120,5
30 »	116,5
35 »	113,5

**Marcha del electroscopio en presencia de unos
20 cc. de la substancia.**

TIEMPOS	Divisiones del micrómetro.
0 minutos	143
5 »	131
10 »	120
15 »	112
20 »	101
25 »	90
30 »	79,5

Como quiera que la propiedad de iontizar los gases ha de tener su origen en radiaciones ultravioletadas ó en aquellas otras que son capaces de impresionar las placas fotográficas á través de los cuerpos opacos, tratamos de poner de manifiesto, por vía fotográfica, estas radiaciones; á cuyo efecto practicáronse los experimentos siguientes:

1.º Una placa fotográfica sobre cuya cara sensible colocamos láminas planas de vidrio, cuarzo, fluorina, etc..., fué sometida á la acción de las supuestas radiaciones; al cabo de quince minutos de exposición, el revelado (con para-amido-fenol) acusa una impresión casi idéntica á través del

vidrio que á través del cuarzo para un mismo espesor, acaso un poco mayor á través del último, pero difícilmente apreciable la diferencia, á no ser á la vista de la misma placa impresionada.

2.º Una placa fotográfica envuelta en papel negro grueso se colocó á cosa de 20 cm. de una cápsula plana que contenía algunos cc. de la substancia; entre la cara sensible de la placa que da frente, como es natural, á la cápsula y el papel, colocamos una lámina irregular de aluminio, en la que hicimos previamente con las tijeras varias figuras, como cruces, rectángulos, diversas hendiduras, etc...; cubrimos el todo con una caja de madera ennegrecida, y abandonamos el conjunto durante tres días en habitación oscura. Al cabo de este tiempo revelamos, y no percibimos sobre la placa huella alguna.

3.º Repetimos el anterior experimento en idénticas condiciones, pero apoyando la placa sobre los bordes de la cápsula plana, quedando, por tanto, á unos dos centímetros de la substancia y cuidando solamente de no obfurar la cápsula totalmente para no impedir el acceso del poco aire que dentro de la caja de madera podría entrar por su parte inferior. Al cabo de diez y siete días, revelando, como en el caso anterior, obtuvimos una impresión débil, pero en la que se distingue perfectamente, sobre todo por reflexión, la imagen de la lámina de aluminio con todos sus detalles y los bordes de la cápsula que separan la porción de la placa que había quedado fuera, y que, por lo tanto, no había sido impresionada.

En resumen: aun cuando para confirmar muchos puntos que quedan iniciados solo y para ampliar otros de los que dejamos transcritos continuaremos posiblemente nuestras investigaciones, lo que sí parece indudable hoy por hoy es la legitimidad del título con que encabezamos esta Nota.

(Laboratorios de Análisis, Química general y Química orgánica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central.)

XXVIII.—Viaje de estudio á la Guinea española.

Observaciones acerca del «*Trypanosoma gambiense*» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales.

(Continuación.)

POR GUSTAVO PITTALUGA.

III

Ninguno de los trabajos hasta ahora citados resuelve de una manera definitiva y certera el problema de la supuesta evolución sexuada del parásito (*Trypanosoma gambiense*), en el huésped invertebrado.

Por otra parte, el estudio de las formas de *Trypanosomas* halladas en las moscas del género *Glossina*, llevado á cabo con serias observaciones por FREDERIK NOVY (1), ha conducido á sentar conclusiones muy alejadas de las que hubieran podido esperarse. Las formas descritas por NOVY no parecen tener nada de común con el *Trypanosoma gambiense*, y sí constituir una especie nueva: *Trypanosoma grayi*, huésped frecuente, y al parecer inofensivo, del tubo intestinal de las *Glossinas*, en particular de la *Glossina palpalis*; del mismo modo que los flagelados del género *Herpetomonas*, se encuentran en el tubo intestinal de otros muscudos; del mismo modo, también, como la *Crithidia melophagi* se hospeda en gran número en la cavidad intestinal del *Melophagus ovinus*, y otros parásitos del mismo género (*Crithidia*), en otros dípteros y en los mismos mosquitos.

Las razones que aduce NOVY son de gran peso. Ante todo,

(1) The Trypanosomes of tsé-tsé Flies.—(*The Journal of Infectious Diseases*, Mayo, 1906, pág. 394-411.)

con las formas encontradas en las *Glossinas* examinadas en condiciones naturales, no se ha logrado transmitir la infección á los animales de experimentación. En segundo lugar, no se ha logrado tampoco determinar con claridad un proceso de reproducción—ya sexual, ya agámica—de los *Trypanosomas* patógenos ó no, en las moscas del género *Glossina*, alimentadas con sangre de animales infectados. Por fin, el tamaño, el aspecto, las analogías de las formas de *Trypanosomas* observados en las *Glossinas* por GRAY y NOVY, demuestran que éstas no tienen nada de común con el *Trypanosoma gambiense*.

Claro es que semejantes conclusiones se hallan profundamente quebrantadas por el hecho indudable, averiguado en fecha más reciente (KLEINE, BRUCE, etc.), de la transmisión efectiva del *Trypanosoma* por medio de las *Glossinas*, desde un animal enfermo á un animal sano, y de la existencia de un largo período de virulencia de dichos insectos.

Sin embargo, hoy por hoy desconocemos los pormenores morfológicos del proceso evolutivo del parásito, su localización en el huésped invertebrado, y los caracteres y las condiciones en que se desarrolla.

Las cuestiones formuladas en los comienzos de este estudio merecen, por lo tanto, toda nuestra atención. ¿Existe acaso una reproducción sexuada de los *Trypanosomas* en el mismo medio hemático, en el huésped vertebrado? ¿Se forman en la sangre del vertebrado los gametos destinados luego á la producción de un cigote en el huésped invertebrado? ¿En cuáles circunstancias, en qué momento esto acontece?

En los animales de experimentación—monos, perros, conejos, cobayas—varía extraordinariamente el modo de presentarse del *Trypanosoma gambiense* en la sangre periférica: varía en la cantidad, esto es, en el número, y en la cualidad, esto es, en la forma; y varía entre límites extremos, en realidad sorprendentes.

Las láminas I y II, que acompañan al presente fascículo de la REVISTA, revelan bien á las claras las diferencias del tamaño y del aspecto de los *Trypanosomas* observados en nuestras preparaciones, todas ellas procedentes de sangre de animales inoculados con *Trypanosoma gambiense*.

Quizás sea el perro — contrariamente á lo que han dicho algunos autores— el animal en que puede estudiarse con mayor oportunidad la marcha de la enfermedad experimental y al propio tiempo la variación en el aspecto y en el número de los parásitos en la sangre periférica.

A los ocho ó diez días de haber practicado la inoculación por vía subcutánea con 1 c. c. del virus (*Trypanosoma gambiense*) procedente del hombre ó de otro animal (mono) hemos observado constantemente la presencia, en la sangre periférica del perro, de las formas comunes de *Trypanosoma gambiense*, correspondientes al tipo representado en la figura dada en la pag. 559 (tomo VIII) de esta REVISTA. Sólo más tarde el aspecto de las formas hemáticas del parásito se modifica. A las tres ó cuatro semanas, por lo general, después de la inoculación, empiezan á aparecer las dos formas que el lector hallará representadas, respectivamente, en las figuras 5-8-19 de la lámina II, y 6-16-20 de la misma lámina. Y no se crea que las figuras citadas reproduzcan tan sólo los tipos extremos, y por tanto excepcionales, de estas dos formas, de tan distinto aspecto, del parásito: al contrario, en nuestras preparaciones abundan las del uno y las del otro tipo, correspondiendo en todo (dimensiones, estructura), á las reproducciones gráficas que acompañan al presente trabajo.

Coinciden á veces en los mismos campos, á la observación microscópica, una forma larga, de 30 á 40 μ , delgada, de 2 μ , 2 1/2 μ de ancho, con trofonúcleo alargado, ovoideo, intensamente teñido, con blefaroplasto más ó menos alejado de la extremidad anterior (posterior, según LAVERAN y MESNIL), con largo flagelo libre (fig. 10, 12 de la lámina I;

figura 6, 16, 20 de la lám. II); y una forma gruesa, corta (de 12 á 20 μ), sin flagelo libre, con blefaroplasto situado muy cerca de la extremidad, y núcleo esférico, menos intensamente teñido, de tal suerte, que permite á veces discernir el número de cromosomas y los detalles de la estructura nuclear (fig. 8 de la lám. I, fig. 5, 7, 8, 9, 19, de la lám. II.)

Si se observan con detenimiento estas formas en preparaciones directas, en fresco, se aprecian nuevos caracteres diferenciales que merecen ponerse de relieve. Ante todo, las formas delgadas con flagelo libre, aparecen dotadas de extraordinaria movilidad y agilidad. Las ondulaciones de la membrana y las vibraciones del flagelo son vivas, rápidas, frecuentes: deslízanse estas formas en el campo, con gran vivacidad. En cambio, los movimientos de las formas del tipo corto y grueso son más lentos, más torpes: la membrana ondulante no ofrece los múltiples repliegues que se aprecian en las formas delgadas. Si persistimos más tiempo en la observación, ó volvemos á observar unas horas más tarde la misma preparación directa, quedaremos sorprendidos por el hecho siguiente: las formas delgadas, ágiles, movilísimas antes, habrán perdido en gran parte su vivacidad; en cambio, las formas gruesas y cortas, conservarán casi del todo sus caracteres, y así por más largo tiempo. En otras palabras: las formas del tipo delgado y móvil sufren precozmente la influencia del cambio de ambiente (¿temperatura?), y pierden ciertos caracteres biológicos que les son propios: las formas gruesas y cortas varían menos, mantienen con mayor uniformidad y persistencia su aspecto y sus propiedades biológicas.

Al propio tiempo que se presentan en la sangre de los animales inoculados estas formas diferenciadas del parásito, persisten las formas comunes y corrientes, y que, de acuerdo con DOFLEIN, con MINCHIN, con PROWAZECK, con CASTELLANI, podríamos llamar «indiferentes», del *Trypanosoma gambiense*.

Por un criterio de analogía, por un argumento de semejanza morfológica y biológica con lo que ocurre en otros parásitos, los observadores que han determinado la presencia de estas dos formas tan distintas de la misma especie en el huésped vertebrado — sobre todos BREINL — han pensado hace tiempo, que pudiera tratarse de formas sexualmente diferenciadas: esto es, de «formas masculinas» y de «formas femeninas».

En otros Tripanosomas de los mamíferos — *Tr. Lewisi*, por ejemplo —, han sido descritas, como ya se ha dicho, las fases de un verdadero proceso de conjugación en el huésped invertebrado (*Haematopinus*); y en la unión de las dos células parece corresponder, en estos casos, á la forma delgada y ágil el papel de agente fecundador, de «Kineto-gameto» ó gameto masculino; y al otro el de «trofo-gameto» ó gameto femenino. Teóricamente, esta opinión puede aceptarse. DOFLEIN en su reciente Tratado (*Lehrbuch der Protozoenkunde*), acepta también para el *Trypanosoma gambiense* la nomenclatura y la doctrina de PROWAZECK, adoptada por este investigador á propósito del *Tr. lewisi*. Sin embargo, el proceso de reproducción esporogónica ó sexual no ha sido sorprendido hasta ahora en ninguno de sus momentos.

OTTOLENGHI ha descrito en los *Archiv. für Protistenkunde* una conjugación de formas masculinas y femeninas de *Tr. gambiense* y de *Tr. brucei* en el huésped vertebrado (mamífero).

Yo también he observado, en algunas preparaciones, figuras de tripanosomas al parecer acoplados, unidos por las extremidades anteriores, con aparente fusión de su citoplasma y del blefaroplasto. Y, sin embargo, no creo de ningún modo que sea lícito sentar conclusiones de tal interés biológico con el solo dato de la morfología. Bien analizadas, esas figuras pueden corresponder á los momentos finales del proceso de división directa.

KOCH, en su *Informe* sobre el viaje al Victoria Nyianza (1), sostiene que, entre los *Trypanosomas* hallados en las Glosinas de la especie *palpalis*—la mayor parte de los cuales corresponde exactamente á las formas descritas por Novy (1906) (*Trypanosoma Grayi*) (2)—, una forma, que indica con el nombre de Tipo IV, parece tener íntimas relaciones morfológicas con el *Trypanosoma gambiense*. De este tipo IV, describe KOCH las formas femeninas («Weibliche Formen») y las masculinas («mannliche Formen»). Estas últimas no corresponden en nada á las que en nuestro entender deben considerarse como formas masculinas y que yo indico con el nombre de *Kineto-gametos* (3), tales cuales se hallan en la sangre de los animales inoculados, en las circunstancias indicadas. La forma masculina de KOCH es de dimensiones reducidas, algo más corta que la supuesta forma femenina, con citoplasma pálido, núcleo esférico, blefaroplasto puntiforme situado muy cerca de la extremidad anterior, membrana ondulante poco manifiesta.

En suma, la forma descrita por KOCH corresponde casi exactamente á la de nuestra figura 5 de la lámina II.

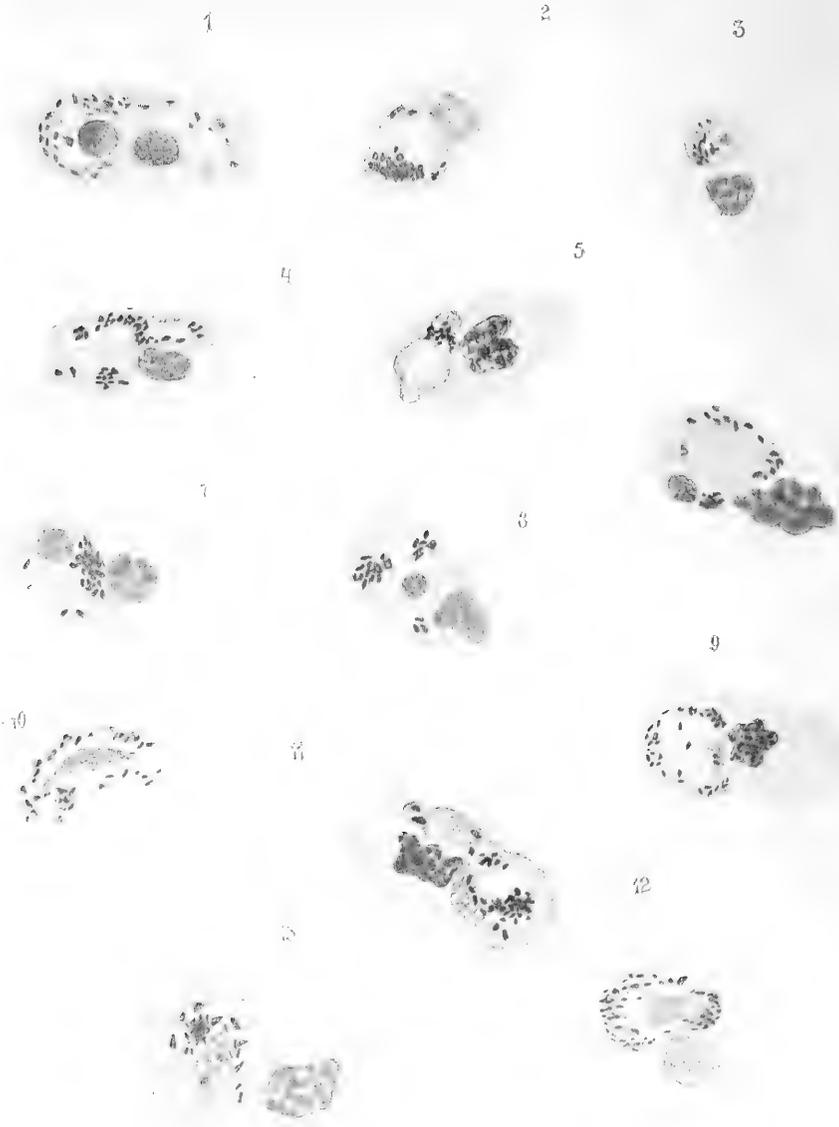
Cuáles hayan sido las razones que hayan movido á KOCH para interpretar á estas formas como masculinas, no se en-

(1) Bericht über Tätigkeit d. f. Erforsch. d. Schlafkrank. etcétera; Berlin, Julius Springer, 1909. (Véase pág. 25).

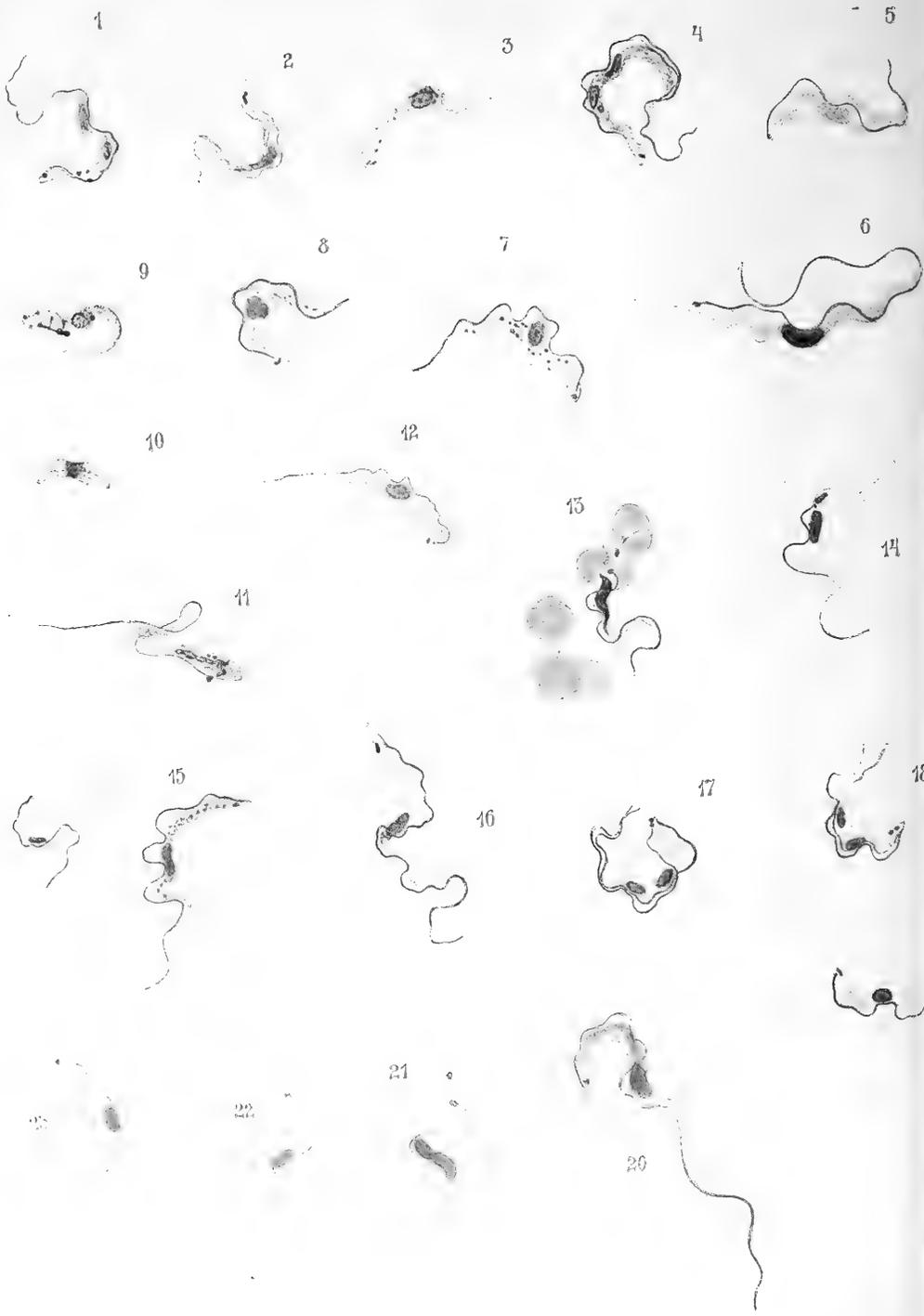
(2) Tipos I, II y III de KOCH. (Véanse las figuras dadas por KOCH en las láminas III y IV de su Memoria.)

(3) No podemos adoptar en este caso la denominación de *Microgametos*, puesto que las formas masculinas de *Tr. gambiense* no son pequeñas en comparación con las femeninas (*Macrogametos* en el caso de los Esporozoos, etc.) Por otra parte, tampoco sabemos con exactitud si se trata de formas homólogas á los microgametos propiamente dichos, ó bien á los *Microgametocitos*, de los cuales proceden los verdaderos elementos destinados á la cópula. En esta incertidumbre, parécenos lógico y conveniente adoptar la denominación de *Kineto-gametos* para estas formas, y de *Trofogametos* para los diferenciados en sentido contrario

21

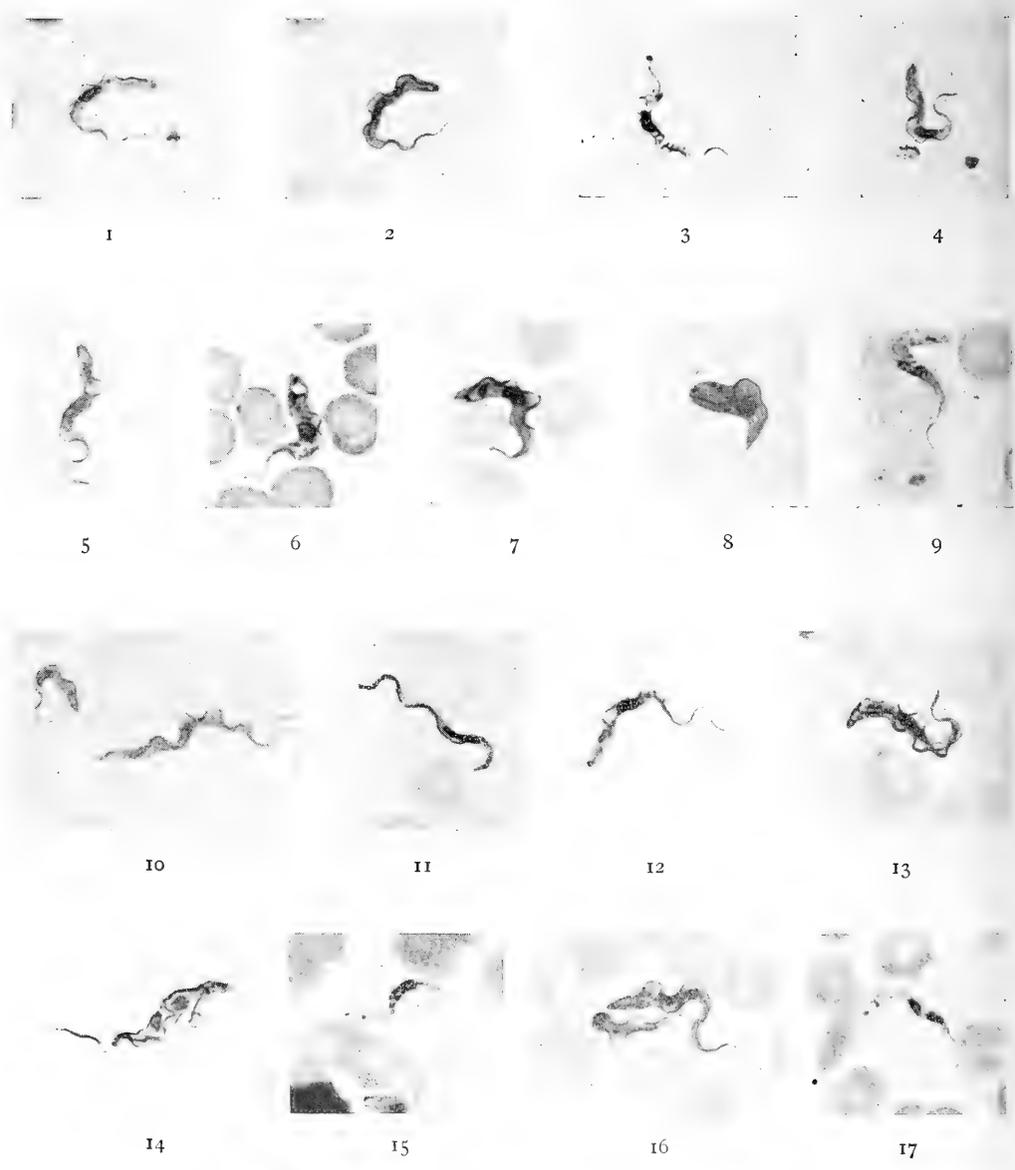


G. PITTALUGA *ad naturam delineavit.*



15. PITALUGA ad naturam delineavit.





Microfotografías del Dr. Rodríguez Illera.

tiende claramente; tanto menos, si se considera que las formas masculinas del *Trypanosoma brucei* (representadas en la propia lámina III del «Bericht» de KOCH (fig. 2), corresponden exactamente á las descritas por nosotros como formas masculinas (*Kineto-gametos*) del *Trypanosoma gambiense* en la sangre del huésped vertebrado (mamífero).

(Se continuará.)

(Laboratorio de Parasitología del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII, en Madrid.)

EXPLICACIÓN DE LAS LÁMINAS

Lámina I.

Todas las figuras proceden de Microfotografías hechas en el Laboratorio de Histología y Anatomía patológica de la Facultad de Medicina de Madrid, con microscopio Zeiss, sistema óptico ob. inm. hom. 2 mm., ap. núm. 1'30, ocul. 4, Preparaciones de sangre de perro, mono y cobaya, teñidas con Giemsa ó Leishmann.

Fig. 1-5. Relaciones entre el núcleo (trofo-núcleo) y el blefaroplasto (*Kineto-núcleo*), por medio de filamentos y granulaciones cromáticas especiales.

Fig. 6. Forma corta, relativamente ancha, de *Trypanosoma gambiense*, con vacuola considerable, inmediatamente posterior al blefaroplasto.

Fig. 7. Forma con corto flagelo libre; visibles estrías longitudinales del periplasto en la parte posterior.

Fig. 8. Forma sin flagelo libre, corta, chata, con grueso núcleo esférico, en que se aprecian los cromosomas distintamente.

Fig. 9. Comienzos de la división del blefaroplasto.

Fig. 10. Aspecto y dimensiones de dos diferentes formas en un mismo campo. A la derecha, una de las grandes formas alargadas, relativamente delgadas, dotadas de extremada movilidad, con blefaroplasto bastante alejado de la extremidad anterior.

Fig. 11. Forma de *Trypanosoma gambiense* con aspecto de *Spirochaete*.

Fig. 12. Aspecto típico de las formas alargadas, móviles, delgadas.

Fig. 13. Comienzos de la partición; desdoblamiento de la membrana.

Fig. 14. Proceso de partición: se aprecian los dos núcleos, y las relaciones de los blefaroplastos con los bordes de las dos membranas ondulantes de los blefaroplastos.

Fig. 15-17 Fases y aspectos diferentes del proceso de división de *Trypanosoma gambiense*.

Lámina II.

Todas las figuras son reproducciones directas de formas observadas en preparaciones teñidas con Leishmann ó Giemsa, con el sistema óptico que á continuación se indica:

Fig. 1-2. (Objet. inm. hom. $\frac{1}{12}$ Zeiss., oc. comp. 12, aum. 1.560 diam.)—Preparaciones de sangre del perro, del día 4 de Marzo.

Fig. 3. (Id. id. id.)—Leishmann.—Mono núm. I (inoculado en Elo-bey, Agosto, 1909). No existe vestigio de la membrana ondulante. Entre el núcleo y el blefaroplasto se aprecia una serie de pequeñas granulaciones cromáticas.

Fig. 4. (Objet. aprocom. inm. hom. 1,5; ocul. comp. 12; aum. 2.000 diam.)—Leishmann—Perro núm II.—Proceso de división de *Trypanosoma gambiense*. La separación nuclear es completa; en cambio, el blefaroplasto es único, y el borde de la membrana ondulante en parte indiviso.

Fig. 5. (Obj. 1, 5 apocrom., oc. comp. 12; aum. 2000 diam.)—Leishmann.—Perro núm. I, 29 Abril 1910. Forma corta y ancha, con pequeño blefaroplasto en directa conexión al parecer con el borde de la membrana ondulante.

Fig. 6. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación.—Forma larga y delgada, con núcleo alargado, blefaroplasto alejado de la extremidad anterior (Kinetogameto).

Fig. 7. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación.—Citoplasma con numerosas granulaciones cromáticas. Núcleo casi esférico; vacuola.

Fig. 8. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación.—Citoplasma granuloso; núcleo esférico con cromosomas separados, visibles; blefaroplasto dispuesto transversalmente, aislado, sin conexión directa con el borde de la membrana.

Fig. 9. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación —Forma singular; no se aprecia la membrana ondulante; el núcleo, constituido por cariosomas distintos y nucleolo, es esférico. Entre el núcleo y el blefaroplasto se aprecia una serie de granulaciones reunidas por filamentos.

Fig. 10. (Obj. 1, 5 apocrom., oc. comp. 12; aum. 2000 diam.)—Procede de la misma preparación. Forma singular; pequeña, corta, sin flagelo libre, con blefaroplasto muy pequeño, puntiforme. Se aprecian á lo largo del citoplasma cuatro estrias ó filamentos longitudinales. No se aprecia membrana ondulante.

Fig. 11. (Id. id. id. id.)—Perro 10 Mayo 1910.—La masa nuclear (trofonúcleo) se halla situada muy anteriormente, en las inmediaciones del blefaroplasto, que aparece como un grueso corpúsculo cromático en continuación con el borde revuelto de la membrana ondulante.

Fig. 12. (Id. id. id. id.)—Perro 29 Abril 1910.—En esta forma se aprecia claramente, entre el límite del filamento que constituye el borde de la membrana ondulante y el blefaroplasto, un corpúsculo cromático basilar independiente al parecer del blefaroplasto.

Fig. 13. (Obj. semi-apoc. Koristka, $\frac{1}{15}$ oc. comp. 12, aum. 1.800 diam.)—Perro 4 Marzo 1910. El blefaroplasto aparece muy acercado al trofonúcleo, y en continuación directa con el borde de la membrana. El trofonúcleo es alargado, de dimensiones muy considerables.

Fig. 14. (Obj. apocrom. Zeiss, 2 mm., ocul. com. 12; aum. 1.500 diam.)—Giemsa—Preparac. de cobaya inoc. el 23 Febrero 1910.—El blefaroplasto aparece igualmente muy acercado al trofonúcleo; pero no en continuación inmediata con el borde de la membrana ondulante. Existe un corpúsculo cromático basilar en el límite del borde de la membrana, en el espacio que le separa del blefaroplasto.

Fig. 15. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación.—Dos formas muy diferentes por su tamaño, aspecto y estructura, en el mismo campo.

Fig. 16. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación.—Forma grande, muy larga, relativamente delgada; el borde de la membrana no parece tener relaciones con el blefaroplasto.

Fig. 17-18 (Id. id. id. id.)—Proceden de la misma preparación.—Relaciones diferentes entre los bordes de las membranas y los blefaroplastos, durante el proceso de división de *Trypanosoma gambiense*.

Fig. 19. (Id. id. id. id.)—Procede de la misma preparación.—Forma corta, ancha, sin flagelo libre, con pequeña bola terminal en la extremidad posterior (anterior de LAVERAN y MESNIL), blefaroplasto grande, aislado, sin conexión directa con el borde de la membrana.

Fig. 20. (Objet. apocrom. Zeiss 1,5; oc. com. 12; aum. 2.000 diam.)—Cobaya inocul. 9 Febrero; preparación del 12 Julio 1910.—Giemsa.

Fig. 21. (Objet. apoc. Zeiss 2 mm.; oc. comp. 8; aum. 1.000 diam.)—Perro, 4 Mayo; Giemsa. Proceso de división; blefaroplastos separados: núcleos en vía de partición; membrana ondulante todavía única, con borde escasamente teñido.

Fig. 22-23. (Objet. apocr. Zeiss 2 mm.; oc. comp. 8; aum. 1.000 diam.) — Proceden de la misma preparación. — En la fig. 23 no se aprecia membrana ondulante.

Lámina III.

Todas las figuras son reproducción directa de imágenes microscópicas observadas en preparaciones de sangre de tortugas del género *Clemmys* (*Clemmys africana*). Fig. 1-5: objet. apocr. Zeiss inm. hom. 2 mm., oc. comp. 12, aumento 1.500 diámetros — Fig. 6-13: Objet. apocr. Zeiss inm. hom. 1,5 mm. oc comp. 12, aumento. 2.000 diam.— Coloración con los met. de Giemsa y de Leishmann.

Formas de evolución endo-globular de un parásito (*Plasmodium*) de los hematies de *Clemmys africana*.

XXIX. — **Crisópidos nuevos ó poco conocidos.**

POR EL R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

1. **Chrysopa Peterseni** sp. nov.

Viridis, mediocris. Similis *vulgari* Schn.

Caput flavum, immaculatum (*); antennis flavis, ala anteriore parum brevioribus; palpis flavis.

Prothorax latior quam longior, superne viridis, vitta longitudinali media flava. Meso-et metanotum flava, ad latera virescentia.

Abdomen viride, pallide pilosum.

Pedes virides, pallidi, tarsi flavescentibus.

Alæ hyalinæ, irideæ, elongatæ, apice anticæ subacutæ, posticæ acutæ, reticulatione viridi, stigmate viride pallido.

Ala anterior venulis costalibus, 6 ultimis radialibus, 2 primis intermediis seu inter sectorem radii et procubitum, gradatis 4/7, cubitalibus totis, reliquis fere omnibus imitio vel fine vel utrobique nigris. Cellula procubitalis typica viridis, apice rami procubiti nigro et cum 1.^a venula intermedia continuato. Sector radii basi niger.

Ala posterior venulis costalibus et gradatis (3/7) secundæ seriei nigris, reliquis viridibus.

Longit. corp.....	9	mm.
— al. anter.....	13,5	»
— — poster.....	12,5	»

(*) El mal estado de conservación del ejemplar que tengo á la vista no permite decidir,

Patria. Parnaso (Grecia.) Un ejemplar comunicado por el Dr. Petersen, de Silkeborg (Dinamarca), á cuyo obsequio dedico la especie.

En su forma general, color y tamaño se parece mucho á la *vulgaris* Schn. A ella también se avecina en la figura de la celdilla procubital típica, cuyo extremo se continúa con la venilla primera intermedia, como sucede con la variedad *æquata* Nav. de la *vulgaris*.

Difiere mucho empero por el color de la malla de las alas, ó de sus venillas, por el escaso número de las gradiformes de la serie interna. Item las alas son proporcionalmente más largas y más estrechas, el protórax más corto y ancho, etc.

2. *Chrysopa nympha* sp. nov.

Mediocris, lutea.

Caput puncto inter antennas et stria ad clypei latera nigris; genis rufis; palpis fusco annulatis; antennis flavidis, apicem versus fuscescentibus; vertice depresso.

Prothorax latior quam longior, disco duobus punctis fuscis elongatis, obliquis; marginibus lateralibus 3 punctis fuscis notatis. Meso-et metanotum immaculata.

Abdomen immaculatum, luteum, superne obscurius.

Pedes flavo-virides, tarsi flavescentibus.

Alæ mediocres, hyalinæ, irideæ, stigmatibus flavo-viridi, venis omnibus viridibus, pallidis; costa ad basim puncto fusco notata.

Ala anterior apice subacuta, venulis subcostalibus, quatuor ultimis radialibus, duabus primis intermediis et cubitalibus, gradatis $4/5$ totis, reliquis plerisque initio et fine nigris. Venulæ aliquot fuscae leviter fusco limbatae, tres radiales, gradatae, marginales externae ad originem juxta sectorem radii. Vena procubitalis ante cellulam procubitalem typicam et intra cellulam fuscata; ejus ramus dividens fuscus.

Cellula procubitalis ovalis, ultra primam venulam intermediam pertingens.

Ala posterior apice acuta, nullis venulis limbatis, cubitalibus, prima radiali, duabus primis procubitalibus, cubitalibus et postcubitalibus totis, marginalibus externis et posterioribus initio tantum fuscis; gradatis $\frac{3}{5}$ viridibus.

Longit. corp.....	8 mm.
— al. anter.....	11 »
— — poster....	10 »

Patria. Tesalia (Grecia). Comunicada por el Dr. Petersen.

A primera vista se parece bastante á la *Ch. prasina* Burm., pero amarilleada. Tiene de particular el que estén estrecha y tenuamente orilladas de pardo algunas venillas del ala anterior, en lo cual se distingue de todas las especies europeas que se han descrito.

3. *Chrysopa nymphula* sp. nov.

Minor, flava, fusco picta.

Caput flavum, stria ante oculos et ad clypei latera, puncto inter antennis, palpis subtotis fuscis; antennis flavis, ala anteriore brevioribus, primo articulo crasso, subcylindrico, stria laterali externa fusca; vertice deplanato, carina transversa postice limitato; occipite fascia fusca ab oculis in fascias prothoracis continuata.

Prothorax latior quam longior, parte anteriore distincte angustata; disco flavo, fascia laterali fusca. Meso-et metanotum flava, fascia laterali fusca in duas longitudinales divisa.

Abdomen flavum?, fusco fasciatum? (*)

(*) Así parece, mas la mala conservación ha alterado los colores.

Pedes straminei, graciles, femoribus intermediis et posticis ante apicem macula dorsali fusca notatis; unguibus basi dilatatis.

Alæ hyalinæ, angustæ, apice subacutæ, membrana fortiter iridea, stigmate albido, parum distincto, elongato; venulis omnibus fuscis; venis pallidis, ad insertionem venularum fuscatis.

Venulæ gradatæ in utraque alâ 4/3.

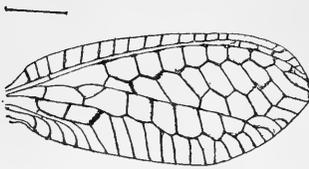


Figura 1.^a
Chrysopa nymphula Nav.
Ala anterior derecha.

Ala anterior (fig. 1) sectore radii subtoto fusco, quasi in venulas scalares fracto, 2.^a et 3.^a venula fusco limbatis, pariterque limbatis 2.^a intermedia (inter sectorem et procubitum), ultima cubitali et aliquot procubitalibus ad originem, sive ad procubitum. Cel-

lula procubitalis typica ovalis, vix ultra venulam 1.^{am} intermediam procedens.

Long. corp.....	6 mm.
— al. ant.....	8,2 »
— — post.....	7,4 »

Patria. Atica (Grecia.) Un ejemplar comunicado por el Dr. Petersen.

Esta especie en su aspecto exterior parece mucho á la *Genei* Ramb., mas una inspección algo atenta la distingue al momento por su color y estructura de las alas.

Tiene de particular esta especie que la serie interna de venillas gradiformes es más numerosa que la externa, contra lo que suele acontecer; ítem el estar orilladas de pardo algunas venillas, y más visiblemente la última cubital.

4. *Chrysopa læva* sp. nov.

Flavo-viridis, mediocris, antennis alis longioribus.

Caput immaculatum, oculis æneis, antennis ala anteriore multo longioribus, apicem versus fusciscentibus.

Prothorax longior quam latior, antice multo angustior quam postice, subtriangularis, immaculatus. Meso-et metanotum immaculata.

Abdomen linea laterali fuscescente.

Pedes pallidi, tenues.

Alæ angustæ, longæ, apice acutæ, venis omnibus flavo-viridibus, stigmatibus flavescente.

Ala anterior (fig. 2) venulis costalibus, prima intermedia, duabus primis procubitalibus et gradatis internis totis fuscis; aliquot radialibus in medio, ramis marginalibus inter series gradatas, et furculis marginalibus totis fuscis; item margine ipso ad apicem alæ fusco. Sector radii initio fuscus. Cellula procubitalis typica elongata, ramo divisorio apice cum prima venula intermedia continuato. Venulæ gradatæ 8/10.

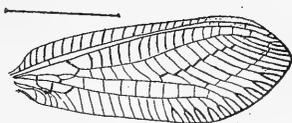


Figura 2.^a
Chrysopa læva Nav.
Ala anterior derecha.

Ala posterior reticulatione flavida, furculis marginalibus externis aliquot fuscatis; venulis gradatis 7/8, internis fuscatis.

Long. corp.	9 mm.
— al. anter.	15 »
— — poster.	13 »

Patria. Loja (Ecuador), A. Poujade, 1909. Un ejemplar comunicado por el Museo de París.

5. *Chrysopa Poujadei* sp. nov.

Flavescens, similis *lævæ* Nav.

Caput oculis æneis, antennis ala anteriore longioribus, apicem versus fuscescentibus.

Prothorax latior quam longior, antice angustatus, trapezoidalis. Meso-et metanotum immaculata.

Abdomen flavescens, lateraliter obscurius.

Pedes graciles, pallidi, tarsis fuscescentibus.

Alæ angustæ, hyalinæ, irideæ, apice acutæ, stigmatate flavido, parum distincto, venis omnibus flavidis.

Ala anterior venulis costalibus, gradatis 6/8, duabus primis intermediis, ultima cubitali et furculis externis totis, reliquis plerisque venulis initio saltem fusco-ferrugineis. Sector radii initio fusco-ferrugineus. Cellula procubitalis typica ovalis elongata, ultra venulam primam intermediam distincte protensa, hac in ultimum 4 mm. cellulæ finiente.

Ala posterior similiter picta, venulis gradatis 5/6.

Long. corp.....	8	mm.
— al. anter.....	13	»
— — poters.....	11,5	»

Patria. Loja (Ecuador). A. Poujade, 1909 (Museo de París).

Por su aspecto y localidad, fácilmente se reduciría á la anterior; pero la diferente estructura de la celdilla procubital típica, notablemente más avanzada que la venilla que le cae encima, la distinta forma del protórax y otras particularidades, me han obligado á separarla. Es menor, el tinte obscuro de las alas es menos pronunciado, siendo más bien rojo de orín que pardo; ambas series de venillas gradiformes están igualmente teñidas y no sola la interna, como en la *læva*.

6. *Cacarulla* gen. nov. (fig. 3.)

Similis *Allochryse* Banks

Antennæ alis longiores.

Ala anterior sectore radii duplici, altero normali, primario, ut in aliis Chysopidis, altero rudimentario, interiore, cum sectore primario et cum procubito venulis conjuncto, cellulas duas pentagonalem et trapezoidalem formante; in area adiali inter radium et sectorem primarium serie venularum grada-

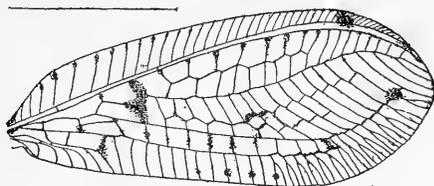


Figura 3.^a
Cacarulla maculipennis Banks.
Ala anterior derecha.

tarum, quasi sectorem accessorium simulante; venulis gradatis in tres series distributis, quarum interior longa, veluti ex duabus formata, altera normali sectori subparallela, altera accessoria interiore cum illa continuata, subparallela procubito.

Ala posterior venulis gradatis in duas series dispositis, quarum interna similis internæ alæ anterioris.

Tomo por tipo de este género la especie *Cacarulla maculipennis* (fig. 3), recientemente descrita por Banks. (Proc. Ent. Soc. Washington, 1910, p. 150), en el género *Allochrysa* sobre ejemplares de Colombia y Perú. El que tengo á la vista pertenece al Museo de París, y procede de Loja, en el Ecuador, A. Poujade, 1909.

Por consiguiente, el género *Cacarulla*, así constituido, di-

fiere del *Allochysa* en la mayor complicación de la malla de las alas. En la posterior se ven vestigios de la serie de venillas entre el radio y su sector. Las dos celdillas en que está dividida la 3.^a procubital, son sensiblemente desiguales, menor la anterior; y por efecto de la atracción ejercida por las venillas 1.^a intermedia y 3.^a cubital, en vez de ser trapezoidales como en la *Allochrysa*, tienen tendencia á la forma pentagonal.

El género *Allochrysa* Banks (p. d.), comprenderá las especies que poseen solamente dos series de venillas gradiformes en ambas alas y carezcan de sector del radio accesorio y de la serie de venillas transversas en el campo intrarradial.

Zaragoza, Diciembre de 1910.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
!XXIII. — Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia tercera.....	401
XXIV. — Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia cuarta.....	416
XXV. — Mezclas fosforescentes, por <i>José Rodríguez Moureló</i>	433
XXVI. — Contribución al estudio de los derivados halogenados del antraquinón, por <i>José Prats Aymerich</i> ...	442
XXVII. — Un caso más de ionización de gases de origen químico, por <i>Angel del Campo</i> y <i>Jaime Ferrer</i>	451
XXVIII. — Viaje de estudio á la Guinea española. — Observaciones acerca del « <i>Trypanosoma gambiense</i> » y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por <i>Gustavo Pittaluga</i> . (Continuación.).....	463
XXIX. — Crisópidos nuevos ó poco conocidos, por el <i>R. P. Longinos Navás, S. J.</i>	473

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX.—NUM. 7.

Enero de 1911.



MADRID: Imprenta de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXX.— Conferencias sobre Física matemática
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

Anuncié, que íbamos á estudiar en este curso el equilibrio y el movimiento de los flúidos perfectos, y principalmente este último, pues del equilibrio no haremos más que recordar las ecuaciones fundamentales; y en aquel problema, es decir, en el del movimiento, nos fijaremos casi exclusivamente, al menos por ahora; estudiando movimientos especiales que han dado origen á la *teoría de los torbellinos*.

Ya en la conferencia precedente procurábamos definir lo que entendíamos bajo esta denominación: *flúido perfecto*.

Difíciles son las definiciones y más en este caso; de suerte que más bien que dar una definición, marcábamos algunos caracteres del sistema material, cuyos movimientos nos proponíamos convertir en fórmulas matemáticas.

Decíamos, que para nosotros el flúido perfecto era una substancia ó materia, ó, mejor dicho, una realidad física que se extienda sin discontinuidad por el espacio, dotada de masa y, por lo tanto, de densidad, la cual procurábamos definir con todo rigor.

Esta densidad podía variar de un punto á otro, y para cada punto, en cada momento, estaba representada por un número que definíamos matemáticamente como valor límite de una derivada.

Si cada punto tiene una densidad, cada porción del fluido tendrá una masa, que supondremos dotada de inercia, y á cuyo movimiento se podrán aplicar las fórmulas de la dinámica clásica.

Sobre el fluido podrán actuar ó no fuerzas exteriores.

Por último, el fluido carece de viscosidad, de suerte que las presiones sobre una superficie cualquiera, interior ó exterior, han de ser normales á dicha superficie.

Todo esto lo expusimos, con la extensión posible en la última conferencia.

Y aun haremos todavía tres nuevas observaciones para completar estas ideas generales.

Hemos definido la densidad, y ahora diremos que, por regla general, esta densidad será continua; mas podrá suceder en algún caso, que debamos considerar dos fluidos distintos con una superficie de separación determinada, y es evidente que en esta hipótesis la densidad del sistema total experimentará una discontinuidad en los puntos de la superficie de separación al pasar de uno á otro fluido.

He aquí la primera observación.

Es la segunda, que, por regla general, la densidad de cada punto dependerá de las presiones en este punto.

Podremos decir que la densidad es función de la presión.

Y aquí para la representación material del problema ocurre una dificultad, que no puede ocurrir en los sistemas discontinuos.

Por ejemplo, en un conjunto de moléculas con espacios intermedios, veremos perfectamente con la imaginación, como la densidad de este conjunto de moléculas puede ser mayor ó menor. Si las oprimimos y las aproximamos, lo cual es posible, puesto que es posible reducir los espacios intermedios, la densidad aumentará, toda vez que habrá más moléculas, es decir, más materia en menos volumen.

Por el contrario, si las moléculas se separan y aumentan los huecos, disminuirá la densidad en razón á que la misma

suma de moléculas ó masa material ocupa mayor volumen.

Pero si el sistema es continuo y la materia, según la fórmula clásica, es impenetrable, ¿cómo puede aumentar la densidad, ni cómo puede disminuir si el fluido no se disgrega y no se forman huecos en su interior?

Se dirá, que no hay que confundir los fluidos compresibles con los no compresibles; pero esto no es resolver la dificultad, es distribuirla en dos palabras: lo compresible y lo incompresible.

Acudiendo á los espacios de varias dimensiones podíamos dar hasta cierto punto *una representación* de este problema.

Por ejemplo, sea el espacio de una dimensión AB (figura 5); fuera de dicho espacio lineal puede haber dos rectángulos C y C' que nosotros, seres lineales, no vemos, porque fuera de la recta AB , ni vemos nada ni nos representamos otra dimensión.

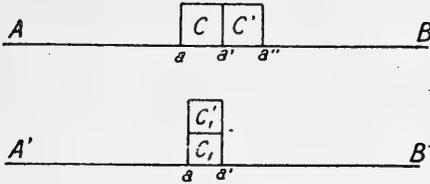


Figura 5.^a

Estos rectángulos C y C' afectarán á los dos elementos aa' , $a'a''$ á los que atribuiremos cierta *intensidad*.

Y se comprende que pueden acumularse ambos rectángulos como en $C_1 C_1'$ en el espacio lineal $A' B'$, en cuya hipótesis la intensidad de aa' , y, por lo tanto, su densidad, habrá aumentado.

La materia era impenetrable en el espacio lineal, pero era en cierto modo penetrable contando con una dimensión más.

El fluido que era continuo en el espacio lineal, tenía por

huecos disponibles todas las dimensiones restantes de los espacios de orden superior.

Claro es que doy esta explicación sin pretender con ella penetrar en la realidad.

Y aquí termina la segunda observación que es importante.

Agreguemos á lo dicho algo sobre la influencia de la temperatura en los flúidos.

* * *

Al definir los caracteres del flúido perfecto, decíamos, que podían considerarse dos casos.

Primero. Que el flúido fuese incompresible, y en esta hipótesis la densidad para cada punto sería invariable y aún como caso más particular podíamos suponer que fuera constante para toda la extensión del flúido.

Segundo: Que la densidad de cada punto pudiera variar con la presión y en este caso representando la densidad por ρ y por p la presión, tendríamos

$$\rho = f(p)$$

y la función f sería un dato del problema; de modo que para definir el flúido debería ser una función perfectamente conocida en su forma analítica.

Pero hay otro caso aún más general, y es aquél en que la densidad en cada punto sea función no sólo de la presión p , sino de la temperatura t .

Y así para definir la naturaleza del flúido, debe ser conocida esta relación

$$\rho = f(p, t),$$

que nos da la densidad en función de las dos variables p y t .

En el primer curso de esta asignatura, al establecer las

diferencias entre la física experimental y la física matemática, decíamos que los gases estaban caracterizados por tres variables, volumen, presión y temperatura, en que dos podían considerarse como variables independientes, y la tercera era función de estas dos; por ejemplo

$$v = \varphi(p, t)$$

siendo v el volumen de una masa ó peso determinado de gas, sea un kilogramo.

Esta relación equivale á la precedente porque podemos escribir

$$1 = v \cdot \rho$$

toda vez que un kilogramo es igual al volumen por la densidad, y despejando el volumen y sustituyéndolo en la ecuación anterior, tendremos

$$\frac{1}{\rho} = \varphi(p, t)$$

de donde

$$\rho = \frac{1}{\varphi(p, t)}$$

y $\frac{1}{\varphi(p, t)}$ es la función que antes llamábamos $f(p, t)$.

En adelante, y mientras no advirtamos lo contrario, prescindiremos de la temperatura ó la consideraremos constante; de suerte que la densidad sólo dependerá de la presión.

* * *

Con lo que precede, tenemos definido el fluido perfecto, cuyo equilibrio y movimiento nos proponemos estudiar, y,

sobre todo, ciertos movimientos especiales á que se da el nombre de *torbellinos*, ó también podríamos decir, *vórtices*.

Empecemos por el problema del equilibrio, suponiendo limitada la masa de fluido; es decir, que admitimos que dicha masa tiene una superficie límite, y, en este caso, el problema se planteará de la siguiente manera.

Una masa de fluido M limitado por una superficie S está sometido al siguiente sistema de fuerzas:

1.º Fuerzas exteriores, es decir, que vienen de alrededor de la masa M , actuando sobre los diferentes puntos de ésta.

Por ejemplo, para el punto de coordenadas x, y, z actuará una fuerza cuyas componentes designaremos por X, Y, Z distintas, en general, para cada punto de la expresada masa M .

Así pues,

$$X = X(x, y, z),$$

$$Y = Y(x, y, z),$$

$$Z = Z(x, y, z),$$

que significan lo que acabamos de decir, á saber: que X, Y, Z son funciones de x, y, z ; sólo que en vez de escoger nuevas letras para representar estas funciones, y á fin de simplificar la notación general, empleamos las mismas letras X, Y, Z .

2.º Fuerzas exteriores actuando, no en el interior del cuerpo, sino en la superficie.

Designaremos una de ellas por T y sus componentes por T_x, T_y, T_z que también serán funciones de las coordenadas del punto de la superficie que se considere.

Para el caso del equilibrio, como el fluido perfecto no es viscoso, ni puede destruir fuerzas tangenciales, la fuerza T deberá ser normal á la superficie S ; si no el equilibrio sería imposible, habría resbalamiento.

La figura 6 representa esto que acabamos de explicar.

El fluido M está limitado por la superficie S .

Para cada punto A del fluido tendremos una fuerza F por

unidad de masa, de modo que si en el punto A consideramos una masa infinitamente pequeña m , sobre m actuará una fuerza $m F$, cuyas componentes serán $m X$, $m Y$, $m Z$.

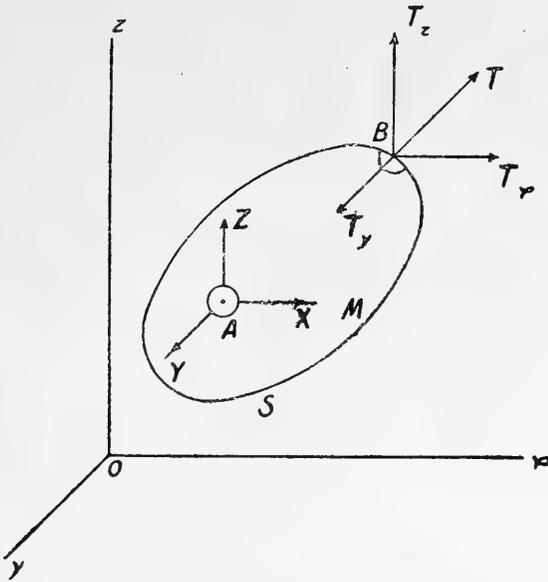


Figura 6.

Sobre la superficie S , está representada la fuerza exterior T , referida á la unidad de superficie, y si suponemos en el punto B un área infinitamente pequeña s , tendremos para dicho punto B una fuerza Ts , cuyas componentes serán $T_x s$, $T_y s$, $T_z s$.

Queda, por lo tanto, completamente definido el sistema; pero no estarán de más dos aclaraciones.

¿La fuerza F y la T son fuerzas que resultan de la acción á distancia, ó son fuerzas transmitidas por algún flúido muy sutil, por ejemplo, por el éter?

Que desde cualquier punto del espacio el éter transmita las fuerzas F y T hasta la superficie del flúido se comprende sin dificultad, y al decir que se comprende, queremos de-

cir, que de esta transmisión podemos tener una representación material y geométrica.

Pero, ¿cómo se transmite por el interior del fluido, si el fluido *no tiene huecos*, sino que por su continuidad rellena todo el espacio comprendido en S ?

¿Qué es, qué se ha hecho, como antes decimos, de la impenetrabilidad de la materia?

Cuestiones son estas en las que no hemos de detenernos por el momento.

Admitimos, que puedan existir las fuerzas F actuando sobre cada punto del fluido, y nos contentamos con llamar la atención sobre esta circunstancia curiosa: huyendo de la acción á distancia acudíamos al estudio de los fluidos continuos, y al dar el primer paso nos encontramos con la misma dificultad bajo distinta forma, mejor dijéramos bajo la forma opuesta.

Aunque, por otra parte, no podemos negar que el fluido perfecto, que tenemos en estudio, es una creación puramente ideal, á la que se llega con más ó menos aproximación en la práctica, pero entre otras muchas complicaciones.

Dejemos en suspenso estos problemas, hasta que llegue el caso de estudiar la constitución de la materia con arreglo á las teorías de la Física moderna, y de estudiar, entre otras obras importantes, las de uno y otro Thomson, y las de Lorentz y Larmor.

*
* *

Planteemos de una vez las ecuaciones de equilibrio de un fluido perfecto, en cuyo caso tienen aplicación plena los principios de la Mecánica clásica.

Si el sistema fuera discontinuo, si el fluido estuviera compuesto de átomos, moléculas ó partecillas, á *distancia* unas de otras, el método que deberíamos seguir sería el método clásico de la Mecánica racional, el que hemos explicado en el segundo curso de esta asignatura; en suma, el método fundamental de Cauchy.

A saber: estableceríamos para cada punto material las tres componentes de todas las fuerzas internas y externas que sobre él actuasen, é igualaríamos estas tres componentes á cero.

Tendríamos tres ecuaciones para cada punto en particular, ó si se quiere, tres ecuaciones generales con las variables x , y , z , que deberían verificarse para todos los puntos del sistema y para todos los puntos de la superficie límite.

En suma, repetiríamos, palabra por palabra, todo lo que expusimos en el segundo curso de esta asignatura, al estudiar el problema de la elasticidad, como hemos dicho, por el método de Cauchy.

Pero no es este el caso, porque estamos en la segunda de las dos hipótesis, que establecimos en una de las dos primeras conferencias, á saber; en la hipótesis de la *continuidad*, y aquí no puede aplicarse *de una manera natural* el mismo método que para el caso de flúidos discontinuos.

Toda porción del flúido, por pequeña que sea, es continua por definición, y no cabe considerarla como un átomo aislado de una agrupación discreta; podría hacerse, pero esta sería una nueva hipótesis.

Como masa continua debemos considerar todo elemento del flúido, y en este concepto debemos establecer sus ecuaciones de equilibrio.

Precisamente tal fué el método que expusimos al estudiar, en el tercer curso de esta asignatura, la teoría de la elasticidad por el método de Lamé.

Ya lo dijimos entonces y ahora lo recordamos.

En el método de Cauchy se estudia el equilibrio de *un punto aislado*.

En el método de Lamé se estudia el equilibrio de un *paralelepípedo elemental*.

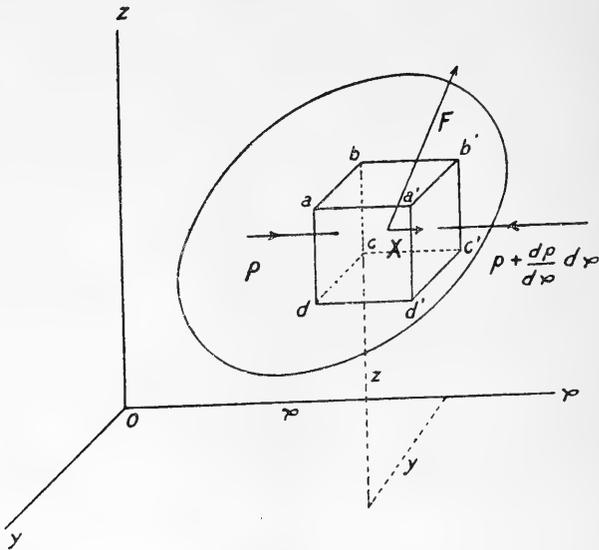
Ya sé yo que en la exposición de estas teorías y de estos métodos, hay cierta vaguedad y ciertas transiciones de uno á otro y ciertos términos medios; pero en mi concepto para

clasificar debidamente las grandes teorías conviene marcar el carácter propio, exclusivo, de cada una de ellas, y por eso digo y repito: el método clásico de Cauchy está caracterizado por el *equilibrio de un punto*, el método de lo que pudiéramos llamar, para entendernos, la escuela de Lamé, por el *equilibrio del paralelepípedo elemental*, por más que Cauchy haya empleado también el paralelepípedo y el tetraedro.

Establezcamos, pues, las ecuaciones de equilibrio de un paralelepípedo elemental cualquiera en el interior del fluido perfecto.

*
**

Sea M , figura 7.^a, la masa flúida en cuestión limitada por la superficie S .



Figur 7.^a

Y sean x, y, z , tres ejes trirectangulares á los que vamo á referir el sistema.

Dividamos el volumen M por planos paralelos á los tres planos coordenados é infinitamente próximos; el volumen M quedará dividido en paralelepípedos infinitamente pequeños $abcd a' b' c' d'$, que serán los elementos infinitesimales del sistema, y que al pasar al límite tenderán á confundirse con *su centro*, que será un punto del flúido.

Si establecemos las ecuaciones de equilibrio de este paralelepípedo en términos generales, es decir, para cualquier punto del flúido, es claro que el flúido completo estará en equilibrio; porque el conjunto de sistemas que estén en equilibrio aisladamente, estará en equilibrio también.

Para establecer el de dicho paralelepípedo no tenemos más que repetir lo que ya dijimos al estudiar la teoría de la elasticidad por el método de Lamé.

Consideraremos á este elemento infinitamente pequeño de volumen, como un cuerpo sólido, y supondremos que está sometido:

- 1.º A seis presiones sobre las seis caras, presiones transmitidas por el flúido que rodea á dicho elemento.
- 2.º Por la fuerza exterior F , si existe, cuyas componentes son X, Y, Z .

En rigor, las ecuaciones son en número de seis: tres que expresan, que las componentes paralelas á los tres ejes de las fuerzas indicadas, son nulas.

Y tres que resultan de igualar los pares á cero.

En la teoría de la elasticidad examinamos el caso general; en el problema actual se ve desde luego, que los pares son nulos, puesto que en el flúido perfecto las componentes tangenciales son nulas.

Lo que allí llamábamos T_1, T_2, T_3 , serán cero en este caso.

Y las componentes N_1, N_2, N_3 , serán las presiones por unidad de superficie sobre las tres caras del triedro c y todas pasarán por el centro del paralelepípedo: sus momentos serán, pues, nulos.

Podíamos acudir, por lo tanto, para establecer las ecuaciones de equilibrio, á las ecuaciones de la teoría de la elasticidad; pero es tan sencillo el problema, que podemos escribirlas desde luego.

Si llamamos x, y, z á las tres coordenadas del punto c , todas las presiones sobre las caras del paralelepípedo serán funciones de x, y, z .

Y es claro que, como escogemos el punto c , pudiéramos escoger otro punto cualquiera del paralelepípedo elemental con diferencias de orden superior.

Establezcamos ahora el equilibrio en las tres direcciones x, y, z .

Las componentes paralelas al eje de las x serán:

1.º La presión sobre la cara $a b c d$, que actuará en el centro o de dicha cara, de izquierda á derecha; y si representamos por p_x su valor, referido á la unidad de área, dará lugar á una fuerza total sobre la cara $a b c d$

$$p_x \text{ área } (abcd)$$

ó bien

$$p_x dy dz,$$

representando por dy, dz las longitudes cb, cd .

2.º La presión ejercida sobre la cara $a' b' c' d'$. Actuará de derecha á izquierda, y deberá llevar el signo negativo, suponiendo que p_x se considera siempre como positiva.

Su valor por unidad de área será el mismo que en la cara $a b c d$, aumentado en el incremento diferencial, con relación á x , que le corresponde al pasar de la primera á la segunda cara; y como la extensión de ésta es la misma que la de la anterior, tendremos

$$-\left(p_x + \frac{dp_x}{dx} dx\right) dy dz.$$

3.º Por último, actuará en el centro del paralelepípedo la componente X de la fuerza exterior F , por unidad de masa, que hemos designado por X , y que supondremos que lleva su signo propio: la designaremos, pues, por $+X$ y multiplicándola por la densidad ρ del paralelepípedo y por el volumen de éste, tendremos la fuerza paralela al eje de las x que actúa sobre el elemento de fluido:

$$+ X \rho dx dy dz.$$

En la figura hemos supuesto que X es positiva y que por lo tanto actúa de izquierda á derecha; pero la expresión es general dándole á X el signo que le corresponda.

Así, pues, para el equilibrio, paralelamente al eje de las x , obtendremos como primera ecuación la que resulta de igualar á cero suma de las tres tuerzas anteriores, y tendremos

$$p_x dy dz - \left(p_x + \frac{dp_x}{dx} dx \right) dy dz + X \rho dx dy dz = 0$$

ó bien

$$p_x dy dz - p_x dy dz - \frac{dp_x}{dx} dx dy dz + X \rho dx dy dz = 0$$

y simplificando

$$\frac{dp_x}{dx} = X \rho \quad (1)$$

Del mismo modo y repitiendo los mismos razonamientos tendremos para el equilibrio paralelamente á los otros dos ejes estas dos ecuaciones

$$\frac{dp_y}{dy} = \rho Y; \quad \frac{dp_z}{dz} = \rho Z \quad (2)$$

Las tres ecuaciones (1) y (2) expresarán el equilibrio del paralelepípedo, mejor dicho, el equilibrio de una región cualquiera y, por consiguiente, de todo el fluido.

Unicamente al llegar á la superficie, será preciso sustituir al paralelepípedo elemental, el tetraedro que se llama de Cauchy.

Pero en las ecuaciones (1) y (2), por tratarse de un fluido perfecto, podemos introducir una simplificación importantísima, á saber:

$$p_x = p_y = p_z.$$

O de otro modo, que las presiones sobre las tres caras del triedro c son iguales.

Podíamos deducir esto de las fórmulas obtenidas al estudiar la teoría de la elasticidad por Lamé; mas de tal suerte es sencilla la cuestión, que preferimos demostrar directamente las igualdades anteriores.

Sea O , figura 8.^a, un punto cualquiera de la masa fluida y

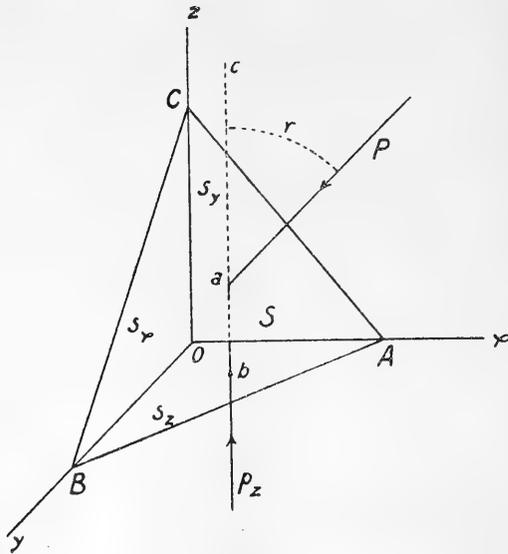


Figura 8.

consideremos tres ejes trirrectangulares Ox , Oy , Oz , que pasen por O .

Cortemos el triedro $Oxyz$ por un plano cualquiera ABC , y establezcamos las ecuaciones de equilibrio de este tetraedro $OABC$.

Representemos como antes la presión sobre la cara OBC por..... p_x .

La presión sobre la cara OAC por..... p_y .

La presión sobre la cara OAB por..... p_z .

Y, por fin, la presión sobre la cara ABC por..... P .

Todas estas presiones serán normales á las caras correspondientes, por que esta es una de las propiedades del flúido perfecto que estamos considerando.

Designemos por α , β , γ los cosenos de los ángulos que forma la presión P con los ejes, y estos mismos serán los cosenos de los ángulos que forma la cara ABC con los planos coordenados.

Por último, la fuerza exterior actuará en el centro del tetraedro, y sus componentes serán X , Y , Z por unidad de masa.

Considerando las componentes paralelas al eje de las Z y representando por s la superficie ABC , por v el volumen y por ρ la densidad en el punto O , que podemos suponer que es la del tetraedro, tendremos la siguiente ecuación de equilibrio, toda vez que $\text{àrea } ABC = s$

$$-Ps\gamma + p_zs\gamma + \rho v X = 0$$

ó bien

$$(-P + p_z)\gamma + \rho \frac{v}{s} X = 0.$$

Pero á medida que el plano ABC se aproxima al punto O , la relación $\frac{v}{s}$ tiende hacia cero, porque el área s es infinita-

mente pequeña de segundo orden, y el volumen v es de tercero; luego en el límite,

$$(-P + p_z)\gamma = 0,$$

ó bien

$$P = p_z.$$

Por consiguiente, la presión de un plano cualquiera que pase por O , por unidad de superficie, es igual á la presión sobre la cara xy en dicho punto O .

Y como puede repetirse este razonamiento para las tres caras del triedro, tendremos

$$P = p_x, P = p_y, P = p_z$$

de modo que

$$p_x = p_y = p_z = P.$$

En suma, para cualquier plano que pase por O en el caso del flúido perfecto la presión será la misma.

La presión es característica para cada punto, y alrededor del punto puede suponerse que es invariable en todas las orientaciones.

La representamos por p , y p será una función de x , y , z .

Mediante esta simplificación, que es fundamental para los flúidos perfectos, según los hemos definido, las ecuaciones de equilibrio relativas á cualquier punto de la masa flúida, tomarán esta forma sencillísima y que, por decirlo así, es clásica:

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \frac{dp}{dy} = \rho Y, \frac{dp}{dz} = \rho Z$$

Tales ecuaciones del equilibrio de un fluido perfecto, se aplican en hidrostática á cualquier líquido que aproximadamente se puede considerar como un fluido perfecto, y á cuyo equilibrio se pueden aplicar también, aproximadamente, los razonamientos anteriores.

Otro tanto podemos decir del equilibrio de los gases.

Pero en rigor, la teoría es irreprochable para los fluidos perfectos; sólo es aproximada en hidrostática y sólo es aproximada en las masas gaseosas.

Por ejemplo: los líquidos tienen cierta viscosidad y aún pueden sufrir esfuerzos de tensión, que en el gas perfecto suponemos que son nulos.

Hemos dicho que las ecuaciones de equilibrio para un punto cualquiera del fluido eran:

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \frac{dp}{dy} = \rho Y, \frac{dp}{dz} = \rho Z$$

en las que ρ representaba la densidad en cada punto, y que ρ y p son funciones, á su vez, de x, y, z .

Mas aun, ρ debe ser una función de p , ó sea

$$\rho = f(p).$$

Más claro: se nos debe decir, para completar la definición del fluido, cómo varía en él la densidad en función de la presión.

Conociendo f las tres ecuaciones que definen el equilibrio, serán las siguientes, que se obtendrán, sustituyendo en las anteriores, la expresion de ρ en función de p :

$$\frac{dp}{dx} = f(p) X, \frac{dp}{dy} = f(p) Y, \frac{dp}{dz} = f(p) Z.$$

Estas son las tres ecuaciones del problema, y todo está reducido á buscar para p , es decir, para la presión, una fun-

ción de x, y, z que satisfaga á las tres ecuaciones precedentes.

A saber, una función φ tal

$$p = \varphi(x, y, z)$$

que diferenciada con relación á x en la primera ecuación y poniendo en vez de p , su valor en el segundo miembro, dé un resultado idéntico en x, y, z á la expresión $f(\varphi)X$.

Que diferenciada con relación á y , convierta asimismo la segunda ecuación en una identidad.

Y que convierta, por fin, en otra identidad á la tercera ecuación.

Queda, pues, reducido el problema á integrar estas tres ecuaciones diferenciales.

XXXI. — Los *Phragmidium* de España.

POR BLAS LAZARO É IBIZA.

No es pequeña labor la que queda por realizar para que se pueda decir con algún fundamento que nuestra flora criptogámica está medianamente conocida. Aunque en los últimos años se han efectuado observaciones interesantes referentes á determinados grupos, observaciones que constituyen un progreso positivo en este orden de conocimientos, estos adelantos no bastan para hacernos ganar de un golpe todo el terreno que, por insuficiencia de cultivadores y por la pobreza de nuestros medios, nos falta recorrer para llegar hasta donde al buen nombre de nuestros naturalistas conviene.

Durante más de medio siglo apenas si los botánicos españoles y los extranjeros que han consagrado sus esfuerzos al estudio de la flora española han prestado atención á las plantas inferiores. Sea por las mayores probabilidades de descubrir algunas formas nuevas con sólo el trabajo de explorar las comarcas menos conocidas de nuestro accidentado territorio, sin necesitar luego penosos estudios de cultivo y de laboratorio, como con las criptógamas ocurre; sea por la convicción, entonces reinante y que hoy no puede sostenerse, de que nuestra flora criptogámica había de ser muy pobre, es lo cierto que casi todos los trabajos fitográficos que respecto á España han aparecido en esa época y aun la mayoría de los de nuestros tiempos se han referido exclusivamente á las plantas fanerógamas, resultando de esta tendencia exclusivista y mal inspirada que hoy se nos impone una labor ruda, intensa y de urgente realización para no continuar rezagados respecto de otros países.

Y como el estudio de las criptógamas exige la observación más minuciosa y detenida del terreno y la asociación y compenetración continuada entre ésta y los trabajos de laboratorio, condiciones con que no puede contar el extranjero que hace una incursión siempre rápida por alguna de nuestras comarcas, llevando pocos medios consigo y pasando de prisa por todas partes, esta cooperación de los botánicos de fuera no puede ser tan eficaz como lo fué en los estudios fanerogámicos, y debemos acometerla por nuestro propio esfuerzo, ya que nosotros somos los únicos que podemos estar en contacto frecuente con esta parte menos vistosa y llamativa de nuestra flora.

Asusta pensar en las dificultades que pueden oponerse al cumplimiento de este honroso deber, aquí donde para conseguir dotar de algunos medios un modestísimo embrión de laboratorio se necesita más constancia y más gestiones que para llegar á la gobernación del Estado; pero así y todo, con estas malas condiciones por hoy, en espera de que el porvenir nos procure otras más fáciles y prósperas, habremos de realizar las observaciones que podamos y seguir esta orientación en nuestros trabajos.

Tales consideraciones disculpan la publicación de unas notas de trabajo, modestísimas é incompletas, sin duda, pero que pueden contribuir al conocimiento de las formas que representan en nuestra flora un curioso género de hongos microscópicos del grupo de los uredináceos.

Es este el género *Phragmidium*, al que corresponden las especies parásitas que constituyen las enfermedades llamadas royas de los rosales, así como también las de las zarzas, frambuesas y otras rosáceas, plagas que tan frecuentes son sobre las diversas especies de rosales, tanto de los cultivados como de los espontáneos ó silvestres, hongos acerca de los cuales no se ha efectuado en nuestro país ningún trabajo de conjunto, ni ningún estudio comparativo, reduciéndose lo conocido hasta hoy á unas cuantas observaciones fragmentarias.

No existiendo colecciones abundantes de plantas criptógamas, la base principal de este trabajo ha sido el examen de los ejemplares existentes en mi colección y en el herbario español por mí formado en la Facultad de Farmacia, ambos regularmente surtidos de plantas criptógamas. Los ejemplares de *Phragmidium* en ellos existentes proceden casi todos de mis herborizaciones durante los últimos años, y algunos me han sido sometidos para su estudio por los Sres. Estébanez y Mazón, activo é inteligente recolector, por el Sr. Rodríguez y López Neyra y alguno por el señor González Fragoso.

Como medio de evitar que las denominaciones con que hemos de designar las diferentes fases que constituyen el ciclo biológico de estos hongos tengan el defecto de falta de precisión en sus conceptos hemos de declarar que, siguiendo la nomenclatura hoy corriente, para designar las fases de estos hongos con arreglo á las esporas que los caracterizan, llamaremos fase urédica y fase teleutospórica á las que respectivamente presentan las esporas que de antiguo se llamaron de *Uredo* y las que caracterizan la fase adulta del género actualmente conocido con el nombre de *Phragmidium*. Como las esporas, tanto las urédicas como las teleutoesporas no aparecen aisladas, sino reunidas en grupos numerosos perceptibles á simple vista y mejor con un pequeño aumento, pues hay grupos que no llegan á medio milímetro de diámetro, se necesita en las descripciones una palabra para designar estas agrupaciones, según la clase de esporas que los caracterizan. Atentos á no crear palabras nuevas sino en caso de que sea inevitable hacerlo, pues hartas novedades exige el tecnicismo descriptivo de las criptógamas, hemos creído que podría usarse el nombre de soros, corriente ya para designar agrupaciones semejantes de órganos reproductores existentes en los helechos y en ciertas algas marinas macroscópicas, y así llamamos *soros urédicos*, *soros teleutospóricos* y *soros ecídicos*, respectivamente, á los que

denuncian la presencia de los *Phragmidium* con esporas urédicas, teleutospóricas y ecídicas respectivamente en las hojas de las rosáceas.

Respecto de la tercera fase que frecuentemente se observa en las especies de este género, y que en las primitivas observaciones de estos hongos fue designada con el nombre de *Cæoma*, no la llamaremos fase ceomática, sino que, prefiriendo seguir una nomenclatura uniforme para todos los hongos uredináceos, de igual modo que llamamos *fase teleutospórica* á la adulta de todos los hongos de esta familia, independientemente de los nombres de los géneros hoy aceptados, y llamamos *fase urédica* á la que antecede á la adulta, llamaremos *fase ecídica* á la forma alternante con éstas, independientemente de que la nomenclatura antigua llamase á sus gérmenes característicos *Æcidium*, *Ræstelia*, *Cæoma*, etcétera, é independientemente de que todas estas fases constituyan un ciclo biológico homóico, como en las especies de que ahora nos ocupamos, ó un ciclo biológico heteróico, como sucede en tantos otros uredináceos. Así, pues, los grupos de esporas correspondientes á esta fase los llamaremos *soros ecídicos*.

En los hongos uredináceos todas las características se basan exclusivamente en la comparación de estas diferentes clases de esporas y de los soros que éstas constituyen, así como en las plantas sobre las que ejercen su parasitismo, porque los micelios ó aparatos de nutrición de estas especies no parecen ofrecer distinciones utilizables para su diferenciación, al menos en el estado presente de nuestros conocimientos respecto de los hongos de este grupo.

Y aun las diferentes esporas no nos sirven todas en igual grado para la caracterización de las especies, pues ni las uredoesporas, ni las ecidioesporas, ni los parafisos, que las acompañan en las diferentes especies que estudiamos, ofrecen entre sí diferencias tan marcadas, que, aun afinando la observación, nos permitan por sí solas distinguir bien las

diferentes especies. Son las teleutoesporas las que, bien observadas, suministran mayor número de datos diferenciales, y por eso fundamos en ellas las características específicas y las claves diferenciales. Tratándose de especies homóicas, como los *Phragmidium* que estudiamos, las plantas sobre que viven nos suministran menos datos que en el caso de otros uredináceos cuyas fases ecídicas se desarrollan sobre plantas muy diversas de las que sostienen las fases urédica y teleutospórica; pero sí puede afirmarse que todos estos *Phragmidium* son parásitos de plantas rosáceas, cada uno de una especie de estas ó de varias especies de un mismo género (*Rosa*, *Rubus*, *Potentilla*, *Poterium*, etc.).

La distinción de las tres clases de esporas que se observan en los *Phragmidium* no es difícil de observar. Las uredoesporas aparecen como células solitarias, más ó menos elipsoideas y sostenidas por un corto pedicelo; las teleutoesporas están constituidas por unas cuantas células fértiles cuyo conjunto forma una especie de maza, sostenida por un pedicelo, y las ecidioesporas aparecen seriadas, formando filamentos cortos, generalmente de dos ó tres células redondeadas, por lo que estos filamentos se ven en el campo del microscopio como pequeñas porciones de rosario perpendiculares á la superficie de la hoja en que se halle situado el soro respectivo.

Hemos creído útil que á las descripciones y notas de cada especie procedan algunas claves de determinación, y para este uso hemos ideado y proponemos dos: una basada en los caracteres de los pedicelos que sostienen las teleutoesporas, y otra fundada en las diferencias que suministran las porciones propiamente fértiles de las teleutoesporas.

Para estas últimas usamos de caracteres tales como la forma total de la teleutoespora, la proporción de sus dimensiones, el número de celdas que la constituyen y la forma de su terminación en el extremo superior, ó sea el opuesto á su inserción sobre el pedicelo. Para precisar bien el sentido de

las frases con las cuales expresamos este último carácter, debemos de declarar que cuando decimos que el ápice es calloso ó engrosado, queremos indicar que la pared de la célula superior presenta un grosor sensiblemente mayor que el del resto de la membrana de la misma célula, pero sin presentar al exterior ningún saliente ni relieve que modifique la curvatura de esta parte de la cubierta celular; cuando decimos que en el ápice existe una papila obtusa, nos referimos á que la cubierta de la célula superior presenta en su ápice un relieve saliente hemisférico ó mamilar más prolongado, pero nunca terminado en punta aguzada; cuando, por último, decimos que hay un mucrón terminal aguzado, nos referimos á que la celda terminal presenta en su ápice una papila cónica, alargada, que en el campo del microscopio simula un mucrón ó espinita situada en el ápice de la célula terminal de la teleutoespora.

Clave para la determinacion de los PHRAGMIDIUM por los caracteres suministrados por los pedicelos de las teleutoesporas.

A. *Pedicelo ensanchado en su porción inferior.*

a) *Pedicelo más corto ó tan largo como la maza de la teleutoespora.*

- Parte ensanchada, triple más ancha que el resto del pedicelo; éste hueco en su mitad superior..... PHRAGMIDIUM SUBCORTICIUM.
Parte ensanchada, triple más ancha que el resto del pedicelo; éste macizo en su mitad superior.... PHRAGMIDIUM VIOLACEUM.
Parte ensanchada, doble más ancha que el resto del pedicelo; éste hueco sólo en la base. PHRAGMIDIUM RUBI.
Parte ensanchada, doble más ancha que el resto del pedicelo; este hueco en toda su longitud..... PHRAGMIDIUM TUBERCULATUM.

a') *Pedicelo más largo que la maza de la teleutoespora.*

PHRAGMIDIUM RUBI IDÆI.

B. *Pedicelo no ensanchado en su porción inferior.*

b) *Pedicelo tres veces más corto que la porción esporífera.*

- Pedicelo algo ensanchado en su
mitad ó en su base..... PHRAGMIDIUM SANGUISORBÆ.
Pedicelo algo adelgazado en su
parte inferior..... PHRAGMIDIUM FRAGARIASTRUM.

b') *Pedicelo igual, ó aproximado en longitud, á la porción esporífera.*

- Pedicelo algo adelgazado en su por-
ción inferior..... PHRAGMIDIUM POTENTILLÆ.
Pedicelo no adelgazado en su por-
ción inferior..... PHRAGMIDIUM TORMENTILLÆ.

*
* *

Clave para la determinación de los PHRAGMIDIUM por los caracteres suministrados por las teleutoesporas.

A. *Teleutoespora no mazuda.*

PHRAGMIDIUM TORMENTILLÆ.

B. *Celdas de la teleutoespora constituyendo una maza.*

a) *Con el ápice redondeado y sin engrosamiento perceptible.*

PHRAGMIDIUM FRAGARIASTRUM.

b) *Con el ápice calloso ó engrosado.*

PHRAGMIDIUM POTENTILLÆ.

c) *Con el ápice provisto de una papila obtusa.*

- Teleutoespora compuesta de 6-8
celdas, cada una con 2-3 poros
germinativos..... PHRAGMIDIUM SUBCORTICIUM.
Teleutoespora compuesta de 2-4
celdas con la membrana delgada. PHRAGMIDIUM SANGUISORBÆ.

- Teleutoespora compuesta de 3-5 celdas con la membrana gruesa. PHRAGMIDIUM VIOLACEUM.
 Teleutoespora compuesta de 6 á 10 celdas, cada una con 1-2 poros germinativos. PHRAGMIDIUM RUBI-IDÆI.

d) *Con mucron terminal aguzado.*

- Mucrón de 10 á 16 μ de largo. PHRAGMIDIUM RUBI.
 Mucrón de 20 á 25 μ de largo. PHRAGMIDIUM TUBERCULATUM.

La comparación de las dimensiones de las esporas urédicas y ecídicas de las diferentes especies arroja los siguientes resultados:

Cuadro comparativo de las esporas urédicas y ecídicas de las especies estudiadas, medidas en micras.

	ESPORAS URÉDICAS		ESPORAS ECÍDICAS	
	Longitud.	Diámetro.	Longitud.	Diámetro.
<i>Phragmidium Tormentillæ</i>	20-24	18-22	20-22	13-15
— <i>Fragariastris</i>	20-25	18-22	16-30	13-19
— <i>Potentillæ</i>	20-25	17-20	16-28	14-20
— <i>subcorticium</i>	20-24	15-20	25-30	18-22
— <i>Sanguisorbæ</i>	17-24	18-22	18-22	16-20
— <i>violaceum</i>	26-32	20-24	18-28	18-23
— <i>Rubi-Idæi</i>	20-22	17-19	20-24	17-19
— <i>Rubi</i>	20-27	14-22	30-34	22-24
— <i>tuberculatum</i>	24-28	17-22	22-30	20-24

La comparación de las dimensiones de las teleutoesporas puede referirse á su longitud total, es decir, á la longitud de la porción fértil sumada con la del pedicelo, á las longitudes de la porción fértil sin inclusión del pedicelo, á la anchura media de las células que constituyen esta porción fértil, y á

la longitud de la parte estéril ó pedicelo de la teleutoespora, según puede verse en el siguiente cuadro:

Cuadro comparativo de las dimensiones de las teleutoesporas de las especies estudiadas, medidas en micras.

	Longitud total.	Longitud de la porción fértil.	Diámetro de las células fértiles.	Longitud del pedicelo.
<i>Phragmidium Tormentillæ</i>	102-238	40-158 *	18-24	50-100
— <i>Fragaviastri</i>	65-90	50-70	21-27	15-20
— <i>Potentillæ</i>	88-154	44-78	24-30	44-76
— <i>subcorticium</i>	98-162	70-120	28-44	28-42
— <i>Sanguisorbæ</i>	74-97	54-70	20-24	20-27
— <i>violaceum</i>	172-218	84-106	30-34	88-112
— <i>Rubi Idæi</i>	170-270	80-130	26-33	90-140
— <i>Rubi</i>	142-226	70-112	27-30	72-114
— <i>tuberculatum</i>	170-216	86-110	30-34	84-106

(*) Debe advertirse que en las teleutoesporas de esta especie, siendo muy variable el número de celdas fértiles, al medir la longitud total de la porción fértil se obtienen resultados muy diferentes, según los casos. Hemos realizado medidas de teleutoesporas con dos celdas, las cuales tenían una longitud total comprendida entre 40 y 51 micras; en las de tres celdas hemos hallado longitudes totales de 47 á 69; en las de cuatro, oscilaban entre 65 y 92; las de cinco, entre 88 y 105; las de seis, variaban de 110 á 138, y las de siete, entre 132 y 158. Observación semejante puede hacerse para las teleutoesporas de otras especies, como el *Phr. Rubi-Idæi* y el *Phr. Potentillæ*, cuyo número de celdas fértiles presenta, en algunos ejemplares, bastantes variaciones.

Cuadro comparativo de las teleutoesporas por el número de celdas fértiles que pueden presentar y por el número de poros germinativos observados en cada célula.

	Números más frecuentes.	Números hallados alguna vez.	Número de poros germinativos.
<i>Phragmidium Tormentillæ</i>	4-5	2-7	1
— <i>Fragariastris</i>	4	2-3-5	3
— <i>Potentillæ</i>	3-6	1-2	2-3
— <i>subcorticium</i>	6-8	5-9	2-3
— <i>Sanguisorbæ</i>	4	2-3-5	1-2
— <i>violaceum</i>	4	3-5	2-3
— <i>Rubi Idæi</i>	7-8	6-10	3
— <i>Rubi</i>	6	4-7	1-2
— <i>tuberculatum</i>	4-5	6	2-3

Del examen de este último cuadro se deduce que el número de celdas fértiles existentes en cada teleutoespora ofrece bastantes variaciones, y que su fijeza sólo tiene valor entre ciertos límites. Dicho número, al que se había querido reconocer un gran valor para la distinción de las diversas especies de *Phragmidium*, no tiene la constancia que fuera de desear, pero sí la tienen los que se representan en el cuadro que antecede, y mediante él se pueden fijar los límites de la variabilidad entre los números que resultan frecuentes para cada especie, números que podríamos llamar normales, y los que limitan las variaciones, que aparecen más rara vez; estos números representarán caracteres específicos muy valiosos. El número de poros germinativos existentes en cada celda es mucho menos variable; pero tememos que aquellas especies en que aparece representada por una sola cifra, ésta resulte al fin modificada por observaciones ulteriores.

Al pasar al estudio descriptivo de cada una de las especies, debemos advertir que, aun cuando éste ha sido un hecho casi exclusivamente con ejemplares procedentes de mis recolecciones por las diversas comarcas de España, por lo cual estimo que ha de distar mucho de ser un trabajo definitivo y acabado, he tenido en cuenta cuanto he podido tener como utilizable para allegar nuevos datos, los debidos á recolecciones de algunas otras personas. Respecto de las observaciones realizadas por autores antiguos mencionando algunos *Phragmidium*, sólo he incluido aquellos en que me ha sido posible interpretar la cita, refiriéndola con alguna probabilidad á las especies admitidas hoy en este género. En todos los casos en que utilizo datos ajenos, aunque la determinación sea mía, menciono la persona á quien se debe el dato. En todas las que no lleven esta indicación debe entenderse que es debida á mi propia labor.

PHRAGMIDIUM TORMENTILLÆ (Strauss) Fuck. (*Phragmidium obtusum*, Winter; *Aregma obtusatum* Fr., *Puccinia Potentillæ* Grev. *Ureda Potentillarum* D. C.).

Soros urédicos pequeños que aparecen en el envés de los limbos foliares conteniendo uredoesporas y rodeando al grupo de éstas algunos parafisos bastante desarrollados y cuyas terminaciones alcanzan unas ocho micras de diámetro. Las uredoesporas varían en su forma desde casi esféricas hasta ovoideas, y sus dimensiones son de veinte á veinticuatro micras en el sentido de su mayor dimensión ó largo, por diez y ocho á veintidós de diámetro. La cubierta de estas esporas urédicas es delgada y abundantemente provistas de papilas espiniformes bastante finas y medianamente espaciadas.

Los soros teleutospóricos están también situados en el envés de las hojas, y son pequeños, desnudos y de color pardo claro.

Las teleutoesporas (lámi. I, fig. 1) alcanzan longitudes totales, pedicelo incluido, de ciento dos micras como mínimo, hasta doscientas treinta y ocho como máximo; y su parte fértil es fusiforme, sin la maza terminal que presentan la mayor parte de las especies de este género, pues las diversas esporas forman un filamento irregular, cuyas celdas inferiores se aproximan gradualmente á las del pedicelo, siendo la terminal la que aparece más claramente diferenciada por tener la cubierta bastante engrosada en su ápice. El número de células fértiles que constituyen cada uno de estos filamentos teleutospóricos es generalmente de cuatro ó cinco; pero puede reducirse á menor número, hasta dos en algún caso, y también se puede observar algún caso en que llegan á siete. Las más inferiores son, con frecuencia, más largas y angostas, oscilando sus diámetros entre diez y ocho y veinticuatro micras; su longitud media oscila entre diez y ocho y veinticuatro micras. La membrana es lisa, delgada en todas ellas y se acusan al exterior por angostamientos; la situación de los tabiques que separan las células unas de otras; la coloración de la membrana celular varía desde incolora á pardo-amari-llenta, acentuándose la coloración desde la base al ápice, así como el engruesamiento, que llega á su máximo en la terminación de la celda, donde forma una especie de callo, perforado por su único poro germinativo. Cuando la celda terminal se desprende, adquiere la siguiente igual engruesamiento apical. El contenido de las celdas fértiles es de color anaranjado; el pedicelo es robusto, de longitud mediana, de cincuenta á cien micras, y está constituido por una célula cilindroidea de pared delgada.

Soros ecídicos que aparecen en el envés de las hojas, ova-les, alargados, esparcidos, anaranjados ó rojizos, circundados por una zona de parafisos mazudos. Esporas ecídicas de forma elipsoidea ó poliédrica de veinte á veintidós micras de longitud por trece á quince de diámetro, con la membrana incolora, de cerca de dos micras de grueso, y la superficie pro-

vista de papilas verrugosas pequeñas esparcidas; el contenido es anaranjado ó rojizo, y los poros germinativos difícilmente perceptibles.

Hállase esta especie sobre las hojas de la *Potentilla Tormentilla*. Sólo la he visto en ejemplares hallados en el Norte y Noroeste. Como localidades concretas puedo citar San Vicente de la Barquera (Santander), Covadonga y San Miguel de Quiloño (Asturias), y cercanías del Ferrol (Coruña). La época de mis recolecciones varía de Julio á Septiembre. No se había mencionado antes de ahora como existente en España de un modo seguro, pues aunque el Sr. Colmeiro, en su *Enumeración y Revisión de las Plantas de la Peninsula Hispano-Lusitana é Islas Baleares* (tomo V, pág. 645), menciona, con el nombre de *Phragmidium obtusum*, Wint., una especie que vive sobre la tormentilla, declara que él no la vió y no cita nombre alguno de persona que la hubiese visto ni localidad ninguna en que se hubiese comprobado su existencia de un modo positivo.

PHRAGMIDIUM FRAGARIASTRI (D. C.) Schroeder (*Phr. Fragariæ* Wint.; *Phr. acuminatum* Fr., *Aregma acuminatum* Fr; *Puccinia Fragariastris* D. C. *Uredo Fragariæ* Purton, *Uredo Potentillæ* Grev. *Uredo Potentillæ* D. C. *Epitea Fragariæ* Rabenhorst, *Epitea Potentillarum* D. C.).

Soros urédicos insertos en el envés de las hojas, desnudos al principio, en los que las esporas urédicas están rodeadas por parafisos. Estos, terminados en su ápice por un inflamamiento más ó menos esferoídeo, cuyo diámetro oscila entre diez y veinte micras, y tienen la membrana débilmente engrosada en la parte superior.

Uredoesporas esferoídeas ú ovoídeas de unas veinte á veinticinco micras en su eje mayor, por unas diez y ocho á veintidós de diámetro transversal; su cubierta es poco gruesa y la superficie aparece sembrada de papilas de mediano tama-

ño, menos altas que el grueso de la membrana; los poros germinativos son confusamente visibles.

Soros teleutospóricos más pequeños que los urédicos, situados también en el envés de las hojas, de color pardo-oscuro, casi negruzco en algunos de ellos, cuando llegan las teleutoesporas á la completa madurez, con la superficie pulverulenta, de nudos desde su origen.

Teleutoesporas (lám. I, fig. 2) con la porción fértil mazuda ó casi cilíndrica, redondeadas en su base y ápice, alcanzando en su totalidad, incluso el pedicelo, una longitud que varía desde sesenta y cinco á noventa micras. La parte fértil ó maza mide de cincuenta á setenta micras de longitud, y su diámetro varía de veintiuna á veintisiete micras; consta en la mayoría de los casos de cuatro celdas, de las que la basilar y la apical suelen ser más altas que las intermedias; pero he hallado algunos casos de dos, tres y cinco células fértiles; los tabiques que separan estas celdas son de mediano grosor, y se acusan al exterior por ligeros angostamientos. La membrana de las teleutoesporas es toda de igual grueso, de color pardo amarillento, lisa ó con verruguitas medianas, incoloras, á veces más marcadas en la celda apical, y presenta, generalmente, tres poros germinativos en cada celda, rara vez dos; el interior es pardo rojizo. El pedicelo es mucho más corto que la teleutoespora, no ensanchado en la base, y presenta una longitud de quince á veinte micras.

Los soros ecídicos son más frecuentes en el envés de las hojas, pero algunas veces aparecen algunos en el haz; afectan la forma oval alargada, están muy esparcidos y su color es anaranjado rojizo. En ellos aparecen las ecidioesporas mezcladas con picnidios y rodeadas por parafisos mazudos.

Esporas ecídicas ovoideas, elipsoideas ó algo poliédricas de diez y seis á treinta micras de longitud y trece á diez y nueve de diámetro. Su membrana es incolora, de unas dos micras de grueso, sembrada de verruguitas de mediano tamaño, menor siempre que el grueso de la membrana y á ve-

ces reunidas en grupos que aparecen como verrugas más gruesas; su contenido es anaranjado, rojizo; los poros germinativos se perciben con dificultad.

Tampoco esta especie ha sido mencionada anteriormente en la península. Los ejemplares que he tenido ocasión de estudiar procedían de Salinas de Avilés (Asturias), fases teleutospórica y ecidiospórica sobre *Potentilla Fragariastrum*; de Guadarrama (Madrid), fase teleutospórica sobre *Potentilla verna*; de Covadonga (Asturias) sobre *Potentilla rupestris*; y de Soncillo (Burgos), fase teleutospórica, sobre *Potentilla splendens*. Observadas siempre en verano.

PHRAGMIDIUM POTENTILLÆ (Pers). *Winter* (*Puccinia Potentillae* Pers.; *Phragmidium obtusatum* Fr.; *Uredo obtusata* Strauss; *Uredo Potentillarum* DE.)

Soros urédicos en el envés de las hojas, cubiertos al principio por la epidermis hinchada, pardo anaranjados, con esporas urédicas, ceñidas por una corona de parafisos. El diámetro de estos parafisos oscila entre nueve y veinte micras.

Uredoesporas variando de la forma ovoídea á la elipsoidal, de veinte á veinticinco micras de largo, por diez y siete á veinte de ancho. Su membrana es bastante delgada y está sembrada de verruguitas finas y espaciadas.

Soros teleutospóricos, más redondos que los urédicos, negruzcos, desnudos desde su origen y situados en el envés de las hojas.

Teleutoesporas (lám. I, fig. 3) de ochenta y ocho á ciento cincuenta y cuatro micras de longitud total, incluyendo la porción pedicelar, con la porción fértil cilíndrica ó algo mazuda, con la base redondeada y ancha en su unión con el pedicelo y el extremo superior redondeado ó terminado en una papila bastante obtusa. Esta porción mazuda consta generalmente de tres á seis celdas, rara vez de una ó dos, y tiene una longitud que varía desde cuarenta y cuatro á setenta y

ocho micras de largo, y su diámetro mide de veinticuatro á treinta micras; los tabiques intercelulares son débiles, poco ó nada engrosados en su porción central, las células son próximamente de igual altura, excepto la apical, que es frecuentemente algo más alta; su cubierta es lisa y de color variable del pardo amarillento al pardo turbio y sensiblemente engrosada en el ápice de la celda terminal para formar la papila indicada; cada celda presenta dos ó tres poros germinativos en la mitad superior de su cubierta; el contenido es pardo rojizo. El pedicelo es tan largo ó más que la porción fértil ó esporífera, todo él medianamente grueso (doce á catorce micras), apenas flexuoso y sin ensanchamiento sensible en la base.

Soros ecídicos sobre el envés y algunos sobre el haz de las hojas formando grupos redondeados ú ovales alargados, anaranjado-rojizos y bastante distanciados unos de otros y circundados por una corona de parafisos mazudos.

Esporas ecídicas ovoídeas ó elipsoídeas de diez y seis á ventiocho micras de longitud por catorce á veinte de diámetro, con la membrana incolora y bastante gruesa (unas dos micras) y la superficie sembrada de verruguitas abundantes de mediano tamaño; los poros germinativos no se perciben con claridad; el contenido es de color anaranjado, bastante rojizo.

Especie que tampoco se ha mencionado en España antes de ahora, siendo los datos que aquí consigno los primeros que de un modo positivo comprueban la existencia de este hongo en nuestra flora. Los ejemplares que he podido estudiar fueron recogidos por mí en Junio y Julio en Guadarrama, fase teleutospórica sobre *Potentilla argentea*, y en Mayo, en Cercedilla, la misma fase sobre *Potentilla verna*. Sobre los *Potentilla reptans*, *hirta* y *caulescens* he hallado la misma especie (fase ecídica) en ejemplares que de Soncillo (Burgos) me envió D. José Estébanez y Mazón. Posteriormente la he hallado en fase teleutospórica sobre *Potentilla hirta* en Ma-

drid y en igual fase en junio sobre *P. splendens* en Salinas de Aviles.

PHRAGMIDIUM SUBCORTICIUM (Schrank) Winter, (*Lycoperdon subcortiatum* Schrank; *Uredo effusa* Strauss; *Uredo aurea* Purton; *Uredo Rosæ* DC.; *Puccinia Rosæ* Grev.; *Coleosporium pingue* Lev.; *Coleosporium miniatum* Pers., *Lecythea Rosæ* Lev.; *Aregma mucronatum* Fr.; *Phragmidium mucronatum* Fr.; *Phragmidium bullatum* West.).

Soros urédicos, pequeños y redondos, esparcidos en el envés de las hojas, de color anaranjado pálido, conteniendo uredoesporas, á las cuales circunda una zona de parafisos cuyo diámetro varía de cinco á diez y ocho micras.

Uredoesporas ovoideas ó elipsoideas, cuyo eje mayor mide de veinte á veintiocho micras, por quince á veinte de diámetro, y con la membrana provista de papilas espinositas no muy apretadas.

Soros teleutospóricos, formando grupos pequeños, próximamente iguales en tamaño á los soros de uredoesporas, pero casi negros, situados sobre el haz de las hojas.

Teleutoesporas, (lám. I, fig. 4) más bien fusiformes que cilíndricas, con el ápice y la base algo adelgazados, este último adornado por una papila, más ó menos larga, inserta en la cubierta de su célula terminal; su longitud, incluyendo el pedicelo, varía de noventa y ocho á ciento cincuenta y dos micras. La porción fértil, casi opaca en la madurez, consta generalmente de seis á ocho celdas, muy fuertemente coloreadas, pero puede tener alguna vez cinco ó nueve, siendo su longitud de setenta á ciento veinte micras, y su diámetro de veintiocho á cuarenta y cuatro; las celdillas tienen próximamente igual longitud, excepto la basilar y la apical, que son algo más altas; la membrana celular es muy gruesa (hasta unas siete micras), presenta una coloración parda y su superficie es verrugosa; el contenido es pardo rojizo oscuro,

casí negro; cada celda fértil presenta dos ó tres poros germinativos. El pedicelo es robusto, macizo (?), incoloro, largo, de unas veintiocho á cuarenta y dos micras, y sensiblemente ensanchado en la base.

Soros ecídicos sobre las ramillas, peciolos y nerviaciones de las hojas, y aun sobre los cálices fructíferos, irregularmente esparcidos y algunas veces confluentes, formando grupos alargados y relativamente grandes y otros grupos menores puntiformes; los soros más pequeños se hallan rodeados por una corona de parafisos mazudos, más delgados que las ecidioesporas.

Las ecidioesporas, dispuestas en cadenitas cortas, de tres ó cuatro celdas, son elipsoideas y alguna vez obtusamente poliédricas; su eje mayor mide de veinticinco á treinta micras, por diez y ocho á veintidós de diámetro; su membrana es incolora, delgada, y la superficie aparece sembrada de verrugitas bastante espaciadas.

El *Phragmidium subcorticium*, es la especie de que mayor número de datos conocidos existen en nuestro país. Citada ya en Cataluña por Texidor y Cos, en Peñarroya por Loscos y Pardo, y en Castelseras por Loscos, localidades ambas de la provincia de Teruel; en Vertizarana (Navarra), por Lacoizqueta; en San Fernando y en Ribas, localidades de la provincia de Madrid, por el célebre botánico D. Mariano Lagasca; y en Sevilla y en Marchena, por González Fragoso. La casi totalidad de estas menciones se refieren á los rosales cultivados y, especialmente, á la *Rosa centifolia*. Aunque no aparece en esta mención Madrid, bien debiera aparecer, pues no son pocos los rosales del propio Jardín Botánico de Madrid que están plagados de este parásito, cuya existencia he comprobado también en los que existieron en el jardín de la Facultad de Farmacia y en los que tengo en el de mi vivienda. Igualmente lo he visto en abundancia sobre los rosales de *Rosa centifolia*, cultivados en los jardines de Vigo, Coruña, Salinas de Avilés, Gijón, San Vicente de la Barque-

ra, Santander y San Sebastián, lo que me permite afirmar que esta especie es común en toda España, al menos sobre los rosales cultivados. En Portugal también ha sido observado en varias localidades; en Cintra, yo mismo he visto muchos rosales cultivados que poseían esta enfermedad. Una vez he hallado este hongo sobre la *Rosa muscosa*.¹

Respecto de los rosales silvestres, esta plaga es, sin duda, mucho menos frecuente; la he comprobado sobre la *Rosa canina*, en Naranco, San Cristóbal, Artedo y otros puntos de Asturias, y sobre la *Rosa rubiginosa*, en Infiesto y Covadonga, en la misma provincia y en San Vicente de la Barquera (Santander).

La época de recoger estos hongos se extiende á casi todo el año, pero los ejemplares recolectados en primavera suelen presentar solamente las fases ecídica y urédica; los de verano, la urédica y la teleutospórica, y en los de otoño, predomina esta última fase.

PHRAGMIDIUM SANGUISORBÆ (DC), *Schroet.* (*Phragmidium Poteri*, Schl.; *Cœoma Poteri*, Schl.; *Puccinia Sanguisorbæ*, D. C.)

Soros urédicos pequeños (rara vez exceden de un cuarto de milímetro), desnudos desde su origen, rojizo-anaranjados, pálidos, provistos después de una corona de parafisos mazudos de diez á diez y siete micras de diámetro, rodeando la masa de las uredoesporas.

Estas son esferoideas y aun ovoideas, de diez y ocho á veinticuatro micras de longitud, por diez y siete á veintidós de diámetro; su membrana es delgada, ligeramente coloreada y con la superficie sembrada de hoyitos y espinitas; los poros germinativos se observan con dificultad, pero en algunos casos he creído contar hasta cuatro.

Soros teleutospóricos pequeños y de regular tamaño (desde un cuarto de milímetro hasta un milímetro de diámetro me-

dio), rara vez redondos, mezclados sin orden en el envés de los segmentos foliares, de color pardo oscuro y aun negruzcos.

Teleutoesporas de una longitud total, incluso el pedicelo, (lám. I, fig. 5) variable entre setenta y cuatro y noventa y siete micras, con la porción fértil mazuda ó cilíndrica, cuya base es redondeada, algo angostada en su unión con el pedicelo, y el ápice redondo alguna vez; pero más generalmente terminado por una papila ó mucrón, cuya punta es obtusa; la porción fértil consta generalmente de cuatro celdas, alguna vez de dos, tres ó cinco, y sus dimensiones varían entre cincuenta y cuatro á setenta micras de longitud y veinte á veinticuatro de diámetro medio, aunque no es raro que en éste se manifieste una ligera disminución gradual, según se asciende desde la celda basilar á la apical; las alturas de las células fértiles no se diferencian de un modo sensible, aun la apical, que sólo algunas veces excede ligeramente á las otras; la membrana es pardo amarillenta, toda de igual grueso, y los tabiques medianeros son delgados; sólo he encontrado algunas papilas medianas, incoloras y escasas, en la cubierta de la celda apical; el contenido es pardo amoratado; cada celda fértil presenta, generalmente, tres poros germinativos; pero en algunas no he podido observar más que dos. El pedicelo mide de veinte á veintisiete micras de longitud, y es incoloro y delgado.

Los soros ecídicos aparecen sobre el haz y el envés de las hojas, á veces sobre las nerviaciones, formando rodalitos oblongos, conteniendo mezclados en la circunferencia con de ecideosporas, gérmenes conídicos parafisos encorvados hacia dentro.

Las ecidioesporas son esferoideas ó poliédricas, midiendo su eje de diez y ocho á veintidós micras, y su diámetro de diez y seis á veinte; su membrana celular es algo gruesa, y regularmente provista de verruguitas (del grueso de una micra, próximamente), ni muy esparcidas ni aglomeradas; en ella no se perciben los poros germinativos.

Citado ya por Loscos y Pardo en Peñarroya y Castelse-
ras (Teruel) sobre *Poterium*, sin referir concretamente sobre
cuál le hallaron. Se halla algunas veces sobre los *Poterium*
dictyocarpum, *Magnolii* y *muricatum*. Sobre el *P. muricatum*
le he hallado frecuentemente en el Norte, en Salinas de Avi-
lés, San Vicente de la Barquera, Guecho (Vizcaya), Guetaria
y Fuenterrabía. Sobre la misma especie, en Madrid, y sobre
el *P. dictyocarpum*, en Guadarrama y el Escorial. En Otero
le ha hallado también el Sr. Rodríguez y López Neira, sobre
la primera de estas especies. En la casa de campo, la hallé
sobre el *P. Magnolii*, en el que también ha sido observado
en la Moncloa por el citado señor, que me ha entregado
ejemplares para este estudio. Todas estas observaciones se
refieren á ejemplares recogidos desde Abril hasta fines de
Octubre, pero el citado Sr. Rodríguez me ha presentado
ejemplares de *Poterium Mauritanicum*, que sustentaban
Phragmidium de esta especie, en fase urédica y habían sido
recogidos en la Moncloa en el mes de Diciembre. Sobre la
Sanguisorba ofifcinalis nunca he hallado *Phragmidium* sin
que esto signifique nada en contra de su posible y aun pro-
bable existencia en España.

PHRAGMIDIUM VIOLACEUM (Schultz) Winter. (*Puccinia vioiá-
cea* Schultz; *Lecythea Ruborum* Lev.)

Soros urédicos redondeados y con frecuencia confluentes,
pequeños, uniformes, pardo-rosados, situados en el envés de
las foliolas.

Esporas urédicas elipsoideas ú ovoideas, de veintiséis á
treinta y dos micras de longitud en su eje mayor y veinte á
veinticuatro de diámetro, con la membrana incolora, grue-
sa (de unas tres micras), cubierta de verruguitas, relativa-
mente grandes y muy espaciadas, de color morado neguzco
y muy bien definidos.

Soros teleutospóricos situados también en el envés de las

foliolas, redondeados y generalmente bastante salientes y mayores que los soros urédicos, hasta de un milímetro de diámetro y algunos algo más.

Teleutesporas (lám. II, fig. 6) con una longitud total, incluyendo el pedicelo, de ciento setenta y dos á doscientos diez y ocho micras, con la porción fértil cilíndrica, con el ápice redondeado y terminado por una papila obtusa y amarillenta, que falta alguna vez, y la base redondeada. Consta generalmente de cuatro celdas, rara vez tres ó cinco, cuyos tabiques divisorios se acusan al exterior por angostamientos ligeramente indicados. La longitud de la porción fértil mide de ochenta y cuatro á ciento seis micras, y su diámetro varía de treinta á treinta y cuatro micras; las cuatro celdas son próximamente de igual altura, la membrana celular es gruesa, de color pardusco, con verruguitas incoloras y medianamente espaciadas: dos poros germinativos en cada celda; contenido violáceo obscuro. El pedicelo suele ser más largo que la porción fértil y es incoloro y bastante ensanchado en la mitad inferior, su longitud es de ciento á ciento treinta micras.

Soros ecídicos redondeados ú ovals, formando á veces círculos irregulares ó grupos elipsoídeos desiguales; contienen, además de las esporas ecídicas, dispuestas en filamentos cortos que constan de tres ó cuatro esporas, en su zona periférica algunos, aunque escasos, parafisos mazudos y á veces encorvados hacia el interior del soro.

Ecidioesporas redondeadas ó elipsoídeas, cuyo eje mayor mide de ochenta y ocho á ciento doce micras y su diámetro oscila entre diez y siete á veinticuatro micras; la cubierta es incolora, delgada y está erizada de verruguitas espinitormes.

Citado ya de antiguo por Texidor en las inmediaciones de Gerona, por Lacoizqueta en el valle de Vertizarana (Navarra), por Willkomm en las cercanías de Irún y por mí en los alrededores de Madrid, en la fase teleutospórica, sobre el *Rubus discolor*. A estas observaciones, ya publicadas, puedo agregar otras más recientes: sobre el *Rubus corylifolius*, en

la misma fase, en Guadarrama, en Julio y Agosto; sobre el *R. bicolor*, en Cercedilla, casi todo el año; sobre los *Rubus thyrsoideus* y *amoenus* en las fases urédica y teleutospórica en Asturias (Salinas de Avilés, Santa María del Mar, Villaviciosa, Rivadesella, Covadonga); en la zarza primeramente citada en primavera, verano y otoño y sobre el *Rubus amoenus* desde Julio á Septiembre. De Soncillo (Burgos), me ha enviado el Sr. Estebáñez ejemplares para estudiar, los cuales han resultado pertenecer á los *Rubus sylvaticus*, *discolor* y *corylifolius* y contener fases ecídica, urédica y teleutospórica del *Phragmidium violaceum*.

PHRAGMIDIUM RUBI IDÆI (DC) Krast. (*Uredo Rubi-Idæi* Pers; *Uredo gyrosa* Reb.; *Lecythea gyrosa* Berk; *Puccinia gracilis* Grev.; *Aregma gracile*, Grev.; *Phragmidium gracile*, Berk.)

Soros urédicos, situados en el envés de las hojas, redondeados, pequeños, esparcidos y con mediano relieve; contienen, además de las esporas ecídicas, una corona de parásitos mazudos, semejantes á los de otras especies y encorvados hacia las uredoesporas.

Uredoesporas elipsoideas, de veinte á veintidós micras en su eje mayor, por diez y siete á diez y nueve de diámetro, cuya membrana celular alcanza un grosor de dos á tres micras, y la superficie está sembrada de verruguitas gruesas y muy esparcidas.

Soros teleutospóricos pardo-rojizos, espaciados en el envés de las foliolas y conteniendo esporas urédicas y mezclados con ellas algunos parásitos mazudos.

Teleutoesporas (lám. II, fig. 7) cuya longitud total, incluso el pedicelo, alcanza de ciento setenta á doscientos setenta micras; la porción fértil forma una maza cilíndrica, con la base redondeada y el ápice también redondeado, que se adelgaza en su extremo para prolongarse en una papila ó

mucron de punta obtusa; esta porción fértil consta generalmente de siete ú ocho celdas, pero en algunas teleutoesporas existen sólo seis ó llegan á ser nueve ó diez; la longitud de esta porción varía desde ochenta á ciento treinta micras, y su diámetro se halla comprendido entre veintiséis y treinta y tres; las celdas son generalmente de igual altura, ó alguna vez la terminal excede ligeramente á las otras; la membrana celular es gruesa y de color pardo, y el contenido rojizo bastante obscuro; cada celda fértil presenta tres poros germinativos. Pedicelo más largo que la porción fértil incoloro y gradualmente ensanchado en su mitad inferior, sin llegar á doblar la anchura de su mitad superior.

Soros ecídicos, situados en el haz de las hojas, pequeños, pardo anaranjados, pálidos, dispuestos á veces en círculos ó anillos y conteniendo una corona de parafisos curvos que circunda la masa de las esporas ecídicas.

Ecidioesporas elipsoideas ú ovoideas, de treinta á treinta y cuatro micras en su eje mayor, por ventidós á venticuatro de diámetro, con la membrana tan gruesa como la de las uredoesporas (dos á tres micras) y con la superfie sembrada de verruguitas robustas y muy espaciadas (distancias de cuatro micras y aun más).

No se ha citado esta especie en España por ningún autor anterior, que yo sepa, pero hace bastantes años hallé ejemplares de las fases urédica y teleutospórica de este hongo, con alguna abundancia en los meses de Julio y Agosto, sobre las frambuesas, que tanto abundan en Benasque (Huesca), allí conocidas con el nombre de *chordon*. Aunque he revisado con detención los ejemplares recogidos en el Moncayo, donde también abunda el *Rubus Idæus*, no he hallado en ellos ninguna fase de *Phragmidium*. En cambio le he encontrado sobre ejemplares de frambuesa recogidos en las cercanías del puerto de Arvás (divisoria de León y Asturias) á principios de Julio, en los que aparecen las fases urédica y teleutospórica del *Phragmidium Rubi-Idæi*. Esto es todo lo

que puedo mencionar de esta especie, cuya área es probablemente mucho más extensa de lo que de tan escasos datos parece resultar.

PHRAGMIDIUM RUBI (Pers.) Winter. (*Puccinia mucronata* var. *Rubi* Pers.; *Puccinia Rubi* Sow.; *Puccinia Ruborum* DC., *Lecythea Ruborum* Lev.; *Phragmidium bulbosum* Fr.; *Aregma bulbosum* Fr.).

Soros urédicos, en grupitos diseminados en el envés de las foliolas, de color anaranjado, redondeados ó más generalmente alargados.

Uredoesporas ovoídeas ó elisoídeas, de veinte á veintisiete micras de longitud por catorce á veintidós de diámetro, con la membrana medianamente gruesa (una á dos micras) y con la superficie sembrada de verruguitas menores que el grueso de la membrana, bastante espaciadas y algunas veces distribuídas con bastante irregularidad.

Soros teleutoespóricos pequeños (de un medio milímetro de diámetro próximamente), de color pardo oscuro, casi negro, desnudos desde que se inicia su aparición.

Teleutoesporas (lám. II, fig. 8) de una longitud total, incluído el pedicelo, variable entre ciento cuarenta y dos y doscientas veintiséis micras, con la porción fértil redondeada en la base y en el ápice, éste terminado por un mucrón ó papila alesnada é incolora; la porción fértil mide de setenta á ciento doce micras y su diámetro varía de veintisiete á treinta, estando compuesta generalmente de seis celdas, pero existiendo casos excepcionales desde cuatro hasta siete celdillas; éstas son casi de igual altura, excepto la terminal, que suele ser algo mayor, y los tabiques que las separan son delgados y no se acusan al exterior por angostamientos visibles; su membrana celular es gruesa y pardusca, presentando en la superficie numerosas papilas incoloras; el contenido aparece de color pardo-rojizo y cada célula presenta uno ó

dos poros germinativos. El pedicelo mide de setenta y dos á ciento catorce micras de largo, por lo que su longitud es, en la mayoría de los casos, próximamente igual á la de la porción fértil de la misma teleutoespora.

Soros ecídicos, preponderantes en el envés de las hojas, formando á veces sobre las nerviaciones grupos redondeados, frecuentemente algo alargados, en los que las esporas ecídicas suelen ir acompañadas de una zona periférica de parafisos mazudos.

Ecidioesporas de forma elipsoídea ú ovoídea, cuyo eje mayor varía de treinta á treinta y cuatro micras, y su diámetro de veintidós á veinticuatro; la membrana es medianamente gruesa (una ó dos micras), generalmente con verruguitas pequeñas y esparcidas, pero algunas veces muy desiguales, por hallarse mezcladas con las pequeñas otras mayores, de forma marcadamente irregular.

Las menciones anteriores á este trabajo son las de Texidor, en las cercanías de Gerona, Loscos y Pardo, en las cercanías de Castelseras, Lacoizqueta, en el valle de Vertizarana (Navarra), Colmeiro, en Castilla la Nueva, sin determinar localidades, y González Fragoso, en Dos Hermanas (Sevilla). Todos estos autores se refieren á las zarzas comunes (*Rubus discolor* y *thysoideus*), aun cuando no lo especifican con claridad. Por mi parte puedo apreciar que sobre el *Rubus discolor* le he hallado en San Martín de Laspra (Asturias), en San Vicente de la Barquera y en Guetaria (fases urédica y teleutospórica) en los meses de Julio, Agosto y Septiembre; sobre el *Rubus cæsius*, en Aranda de Moncayo, en los mismos meses (fases urédica y teleutospórica), y sobre esta misma zarza y sobre el *Rubus saxatilis*, en los meses de Julio y Agosto en Benasque (Huesca), representado por sus tres fases ecídica, urédica y teleutospórica.

PHRAGMYDIUM TUBERCULATUM J. Muller (*Physonema minutum* Pers.)

Soros urédicos muy pequeños, pardo-anaranjados, esparcidos por el haz de las foliolas y rara vez abundantes.

Uredoesporas elipsoideas, de veinticuatro á veintiocho micras de longitud por diez y siete á veintidós de diámetro, de contenido amarillo pálido y la membrana delgada y provista de papilas espinositas.

Soros teleutospóricos pequeños, redondeados, puntiformes, pardo rojizos, diseminados en el haz de las foliolas.

Teleutoesporas, (lám. II, fig. 9) cuya longitud total, incluso el pedicelo, mide de ciento setenta á doscientas diez y seis micras, con la porción fértil ó esporífera, cilíndrica ó elipsoidea, con la base redondeada ó hemisférica, igualmente que el ápice, pero éste provisto en su terminación de un largo mucron (hasta de veinticinco micras); la porción fértil mide de ochenta y seis á ciento diez micras por treinta á treinta y cuatro de diámetro, y consta, generalmente, de cuatro ó cinco celdas, rara vez de seis, separadas por tabiques delgados y que rara vez se acusan en la superficie, todas ellas de longitud próximamente igual ó con frecuencia la terminal algo más larga; membrana gruesa de coloración parda, algo verrugosa, con dos ó tres poros germinativos en cada celda; contenido pardo-rojizo. El pedicelo mide de ochenta y cuatro á ciento seis micras de longitud, ó sea próximamente tan largo como la región fértil y es robusto, incoloro y ensanchado en la base.

Soros ecídicos sobre el envés de las foliolas, y no pocas veces sobre los tallos y peciolo, formando rodalitos redondeados y oblongos que, hacia el final del otoño, se marcan en el haz de las hojas con manchas purpurescentes; contienen, además de las esporas ecídicas, una corona de parafisos erguidos, semejantes en su forma á los de otras especies congéneres.

Ecidioesporas desde elipsoideas hasta poliédricas obtusas,

de veintidós á treinta micras en su eje mayor, y veinte á veinticuatro en su diámetro, con la membrana sembrada, en su superficie, de verruguitas cúbicas ó prismáticas bastante abundantes.

Esta especie no se había mencionado hasta hoy como propia de España, donde, sin embargo, existe, pues me ha sido dado comprobarlo, así sobre la *Rosa canina*, en Naranco (Oviedo), en las fases urédica y teleutospórica, y sobre la *Rosa arvensis*, en Benasque (Huesca), en las tres fases: ecídica, urédica y teleutospórica.

Como resumen de estos datos se puede hacer el siguiente cuadro de distribución de los datos contenidos en este trabajo, con respecto á las especies españolas hasta hoy conocidas como portadoras de los parásitos correspondientes al género *Phragmidium*.

A. *Especies que viven sobre rosales.*

PHRAGMIDIUM SUBCORTICIUM.—Sobre *Rosa centifolia*, *muscosa*, *canina* y *rubiginosa*.

PHRAGMIDIUM TUBERCULATUM.—Sobre *Rosa canina* y *arvensis*.

B. *Especies que viven sobre Rubus.*

PHRAGMIDIUM VIOLACEUM.—Sobre *Rubus thyrsoideus*, *discolor*, *amoenus*, *corylifolius* y *sylvaticus*.

PHRAGMIDIUM RUBI.—Sobre *Rubus discolor*, *cæsius* y *saxatilis*.

PHRAGMIDIUM RUBI-IDÆI.—Sobre *Rubus Idæus*.

C. *Especies que viven sobre Pantentilla.*

PHRAGMIDIUM FRAGARIASTRUM.—Sobre *Potentilla Fragariastrum*, *verua*, *rupestris* y *splendens*.

PHRAGMIDIUM POTENTILLÆ.—Sobre *Potentilla argentea*, *verua*, *hirta*, *caulescens* y *splendens*.

PHRAGMIDIUM TORMENTILLÆ.—Sobre *Potentilla Tormentilla*.

D. *Especies que viven sobre Poterium.*

PHRAGMIDIUM SANGUISORBÆ.—Sobre *Poterium muricatum*, *Mauritanicum*, *dictyocarpum* y *Magnolii*.

Como los datos que figuran en este trabajo, aun siendo completos hasta la fecha de su publicación no representan mas que un avance en el conocimiento de estos hongos y de ningún modo puede aspirarse por hoy á realizar de ellos un estudio definitivo, debe esperarse que nuevas observaciones aportarán complementos, adiciones y aun, acaso, rectificaciones, complementos necesarios, aumentando el número de las especies sobre las cuales hoy conocemos el parasitismo de cada *Phragmidium*; adiciones muy probables de otras especies de este género que aun no son conocidas en nuestra flora, pero cuya existencia es muy probable; adiciones aun más numerosas respecto de las localidades en que cada especie sea encontrada en lo porvenir; localidades que han de ser muy numerosas para poder suponer las áreas que cada especie corresponden en nuestro suelo, cosa que con los datos de hoy sería aventurado imaginar; rectificaciones, acaso en alguna de las citas hechas, sobre todo de las publicadas antiguamente, vagas en cuanto á la especie de rosácea que las soporta; más vagas en cuanto á su localización geográfica, y publicadas algunas de ellas por personas no especializadas en el estudio de los hongos microscópicos y cuando el conocimiento de los *Phragmidium* era todavía muy incompleto.

Con todas estas deficiencias, inevitables en un avance sobre las formas de este género, tan mal conocido aún en nuestro país, creemos que este modesto trabajo puede ser de alguna utilidad, precisamente para que los complementos que esperamos puedan allegarse más fácilmente partiendo de los datos aquí reunidos y de la forma en que los exponemos, facilitando su comparación y la determinación de las especies, que tal es, en suma, el proceso determinante de los progresos en toda labor descriptiva.

Lo expuesto basta para conocer las razones que nos han determinado á publicar estas observaciones.

Lámina primera.

- 1 *Phragmidium Tormentillæ*. Teleutósporas vistas con un aumento de 480 diámetros.
- 2 *Phragmidium Fragariastris*. Teleutósporas vistas con un aumento de 300 diámetros.
- 3 *Phragmidium Potentillæ*. Teleutósporas vistas con un aumento de 480 diámetros.
- 4 *Phragmidium subcorticium*. Teleutósporas vistas con un aumento de 510 diámetros.
- 5 *Phragmidium Sanguisorbæ*. Teleutósporas vistas con un aumento de 510 diámetros.

Lámina segunda.

- 6 *Phragmidium violaceum*. Teleutósporas vistas con un aumento de 410 diámetros.
- 7 *Phragmidium Rubi-Idæi*. Teleutósporas vistas con un aumento de 380 diámetros.
- 8 *Phragmidium Rubi*. Teleutósporas vistas con un aumento de 380 diámetros.
- 9 *Phragmidium tuberculatum*. Teleutósporas vistas con un aumento de 480 diámetros.

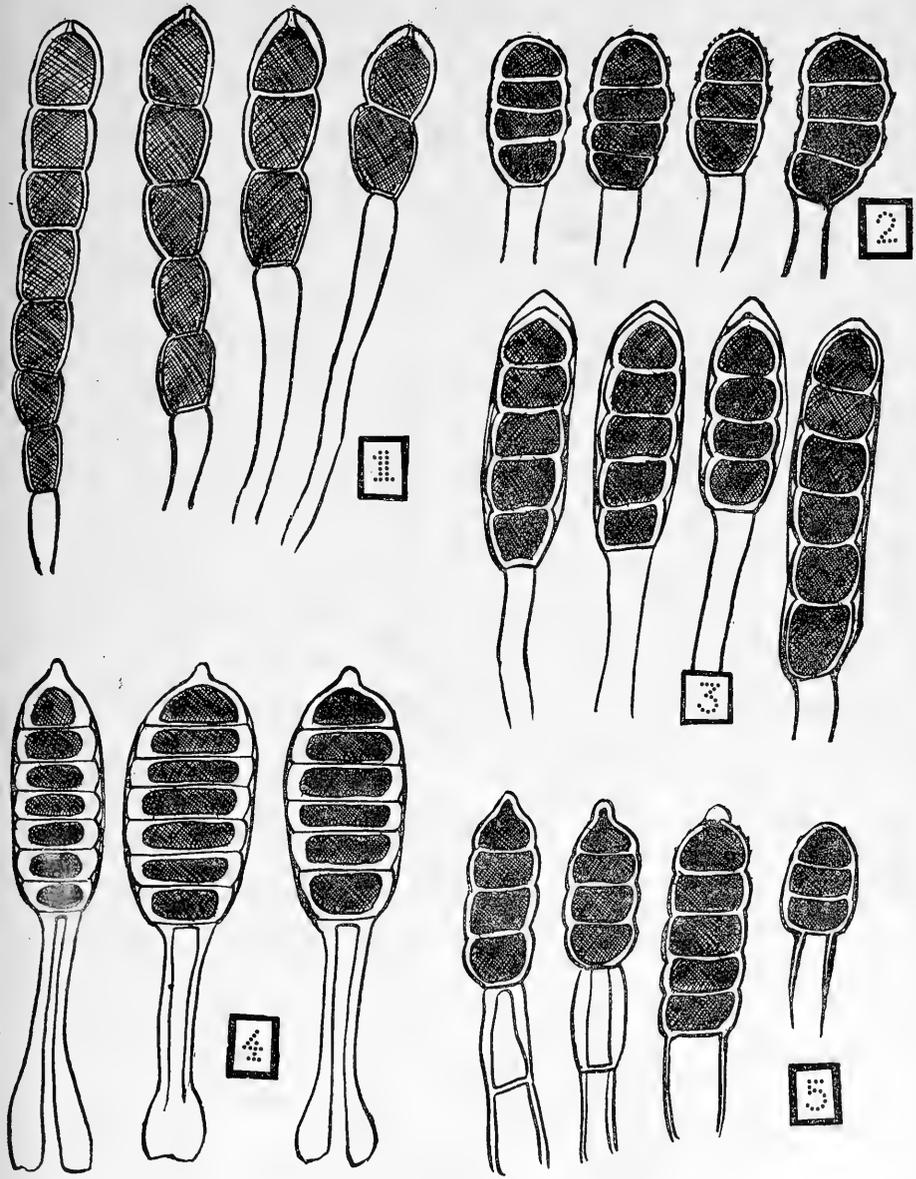


LÁMINA PRIMERA

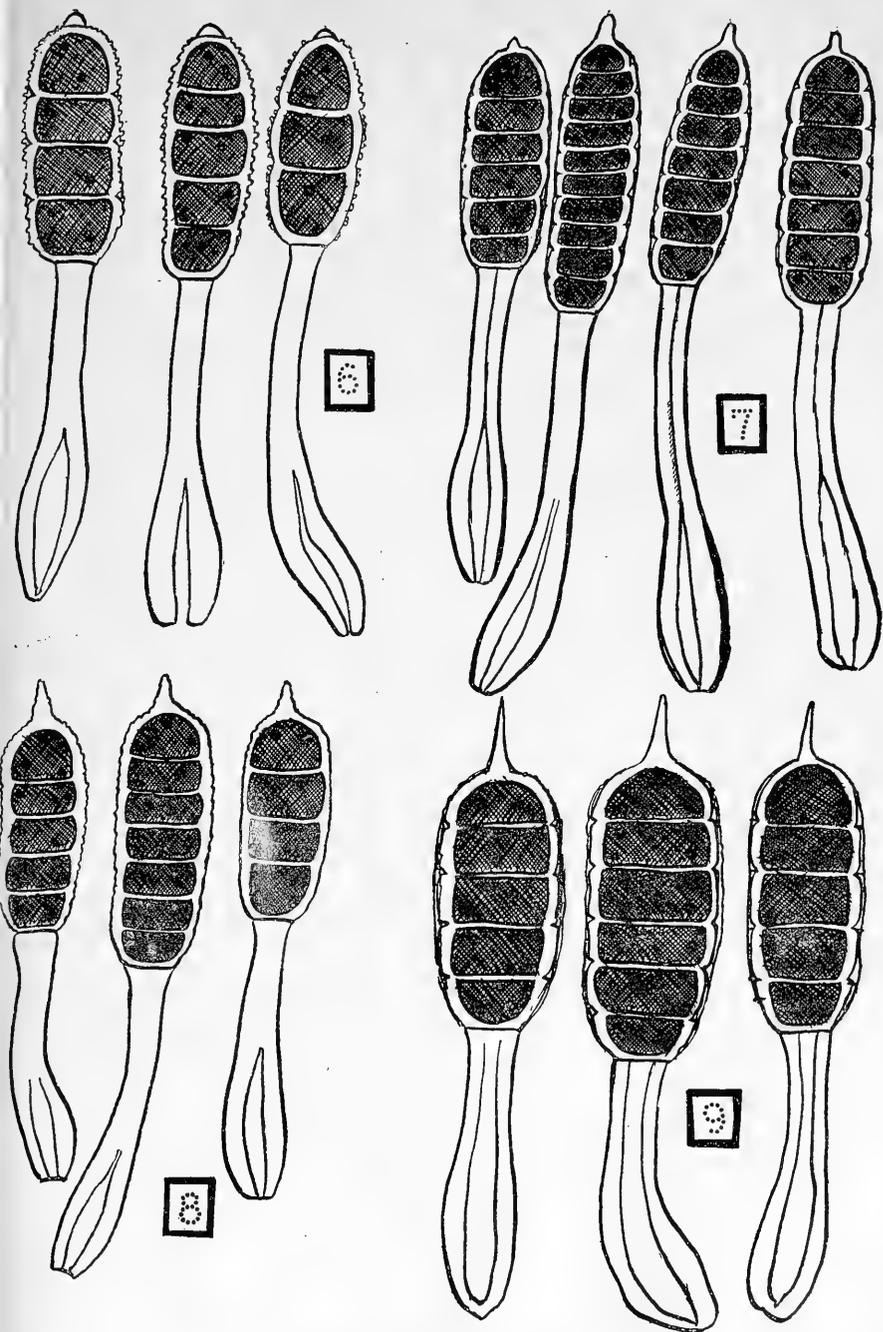
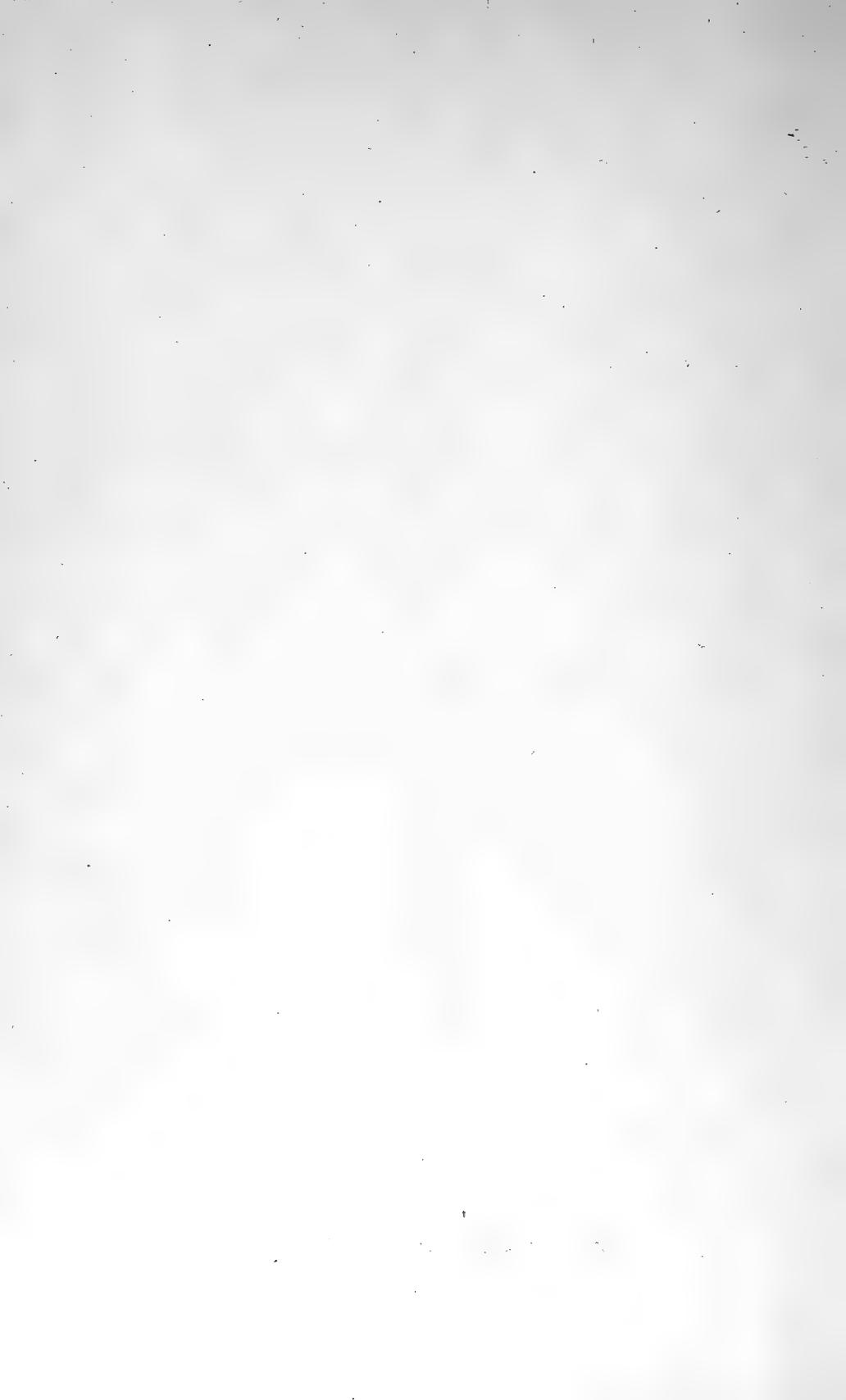


LÁMINA SEGUNDA



XXXII. — Cráneo Foguino del Museo Antropológico de Madrid.

POR LUIS DE HOYOS SÁINZ.

A una indicación del erudito naturalista, miembro que fué de la Real Academia de Ciencias, el Profesor Sr. Jiménez de la Espada, débese el que ya hace años practicara el estudio métrico del cráneo procedente de la Tierra del Fuego, que se conserva en las colecciones del Museo Antropológico; pero la falta de datos bibliográficos acerca de la craniología de aquellas razas, ha demorado, hasta el presente, la publicación de aquellos estudios, comprobados ahora y ampliados con las fotografías obtenidas por el tecnógrafo de las Facultades de Medicina y Ciencias, Sr. Padró.

Es además labor obligada de los que en España cultivan la Antropología el estudio de los pueblos americanos, para terminar ó completar, con los actuales métodos de la ciencia, la enorme obra etnográfica de nuestros conquistadores y escritores de Indias; pues en esta misma raza de Fogueños ó Fuegianos antepónense á todos sus estudiosos los nombres de García de Loisa, 1525; Simón de la Alcazaba en 1534; Alonso de Camargo, y principalmente Pedro Sarmiento de Gamboa (navegante, no fraile como le consideran autores extranjeros), al que se deben las primeras noticias claras de aquellos habitantes, en el manuscrito que se conserva en la Biblioteca Nacional «*Relación y derrotero del Viaje del Estrecho de la Madre de Dios, antes llamado de Magallanes*», que se publicó en Madrid en 1778 con el título de «*Viaje al Estrecho de Magallanes en los años de 1579 y 1580*», y fundador de la primera colonia europea que, pirateada por los ingleses; fué el llamado Puerto del Hambre.

Para un estudio etnográfico abundan las publicaciones de viajeros y exploradores, siendo de notar las del viaje del «Beagle», por Darwin; las de Rochas, en 1859; los datos de nuestra expedición al Pacífico de 1862 al 1866; los de Pigioli un año después, y principal y concretamente los de Marguin (*) y los de la *Mision du Cap Horn* presentados por Hyades y Deniker, completados y corregidos por los detallados estudios de Lista (**), Popper, Darapski y Bridges (***) en las publicaciones argentinas y en algunas otras de Chile.

A distinta orientación hay que acudir, sin embargo, para los problemas propiamente antropológicos que plantea la crania americana del extremo sud; en ella el primer trabajo es el de J. Saint Hilaire en 1851, y los datos craneológicos contenidos en las clásicas obras generales de Quatrefages y Hamy, Virchow y Brinton (****). Pero la generalidad ó imprecisión al descubrir como formando una totalidad étnica á los habitantes de la Tierra del Fuego, hace que sea preciso acudir á las monografías que dan á conocer la variedad de tipos etnogénicos que en aquel grupo terminal de los habitantes de América se presentan, y que pueden descifrar el enigma de la población del Nuevo Continente. De esta clase de trabajos, que permiten hacer las comparaciones descriptivas y métricas, para el estudio y la clasificación de nuestro ejemplar, el primero, por ser completo, es el de Garsón, y casi al propio tiempo los de Sergi, Mantegazza y Regalía, así como algunas notas de Tenkate; pero hechos todos sobre calaveras sin filiación personal, son inferiores á los rea-

(*) Marguin: *La Terre du Feu*. Bull. Soc. de Geographie de Paris, 1875, y *La Terre du Feu et ses habitants* en el Journal des Missions evangeliques, 1876. Auot.

(**) Lista: *Viaje al Pais de los Onas*; Bol. del Inst. Geog. Argentino, II.

(***) Bridges: *La Tierra del Fuego y sus habitantes*, Bol. del Inst. Geog. Argentino, 1886.

(****) Brinton: *Races and Peoples* y en *The American Races*.

lizados sobre los infelices indígenas del estrecho de Magallanes, que se exhibieron en la Exposición de París de 1880, y que fueron estudiados por Manouvrier en los *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris*, por Virchow (*), Bischof, Martín y Seitz, autores estos dos últimos de los trabajos sobre los restos de los desgraciados Foguinos muertos en Europa.

*
* *

Este notable cráneo perteneció á un hombre adulto y es de apariencia grande, alargado y mejor proftánico que prognato, por ser el carácter más típico el alargamiento anterior de toda la región maxilar superior, continuado por la oblicuidad de los dientes todos.

La factura general es dolicoide, pero inmediatamente recuerda la variedad *ovoide lophocephalus* creada por Sergi (**), para los cráneos melanesios y confirmada por el mismo, para los procedentes de la Tierra del Fuego, que forman la colección del Museo de Roma, presentando todos la cresta ó quilla que les da una cierta facies símia, señalada por Dubois en sus *Pithecanthropus erectus*, si bien éste inicia la transición á los cráneos llamados esfenoides en la variedad *cristatus* ó *lophoides*, representados típicamente por los Kurganes de Rusia.

Su *Índice cefálico* de 73,7, permite considerarle como uno de los tipos de la raza Ona, representación de la gran rama paleamericana con los esquimales y botocudos, ya que la dolicocefalia americana á ellos es debida (***) y que los va-

(*) Virchow: *Die Fuerländer*. Verhan. der Berliner Gesellschaf f. Anth., 1881.

Bischof: *Die Fuerländer in Europa*, 1882.

(**) Sergi: G.—*Specie é Varietà humane*. Torino, 1900.

(***) Hoyos Sáinz. L. de—*Origen y emigraciones de los Americanos*. Memoria premiada por la Sociedad Colombina Onubense, 1892.

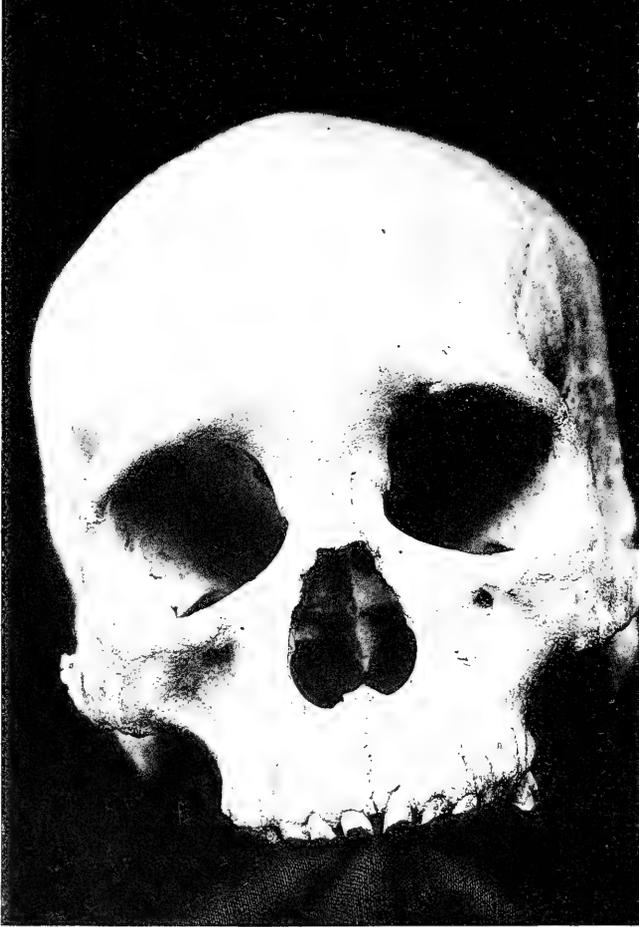
lores altos del índice cefálico se atribuyen á cruzamientos con patagones y puelches del extremo sud del continente. Por este fundamental carácter, nuestro cráneo es incomparablemente más representativo de la raza dolicocefala, que los de las series de Deniker y Hyades (*) y que los varios descritos por diversos autores de trabajos de craniología foguina y que concretamente se han definido como procedentes de la tribu de los Onas, como los ejemplares del Museo de París por Hultkrantz (**), cuyo índice es de 74,6, afirmando, contra la opinión corriente pero sin bases, la mayor dolicocefalia de éstos que de las otras tribus de Yaganes y Alakalufos, que con un valor mínimo superior al citado, llegan á 79,6, coincidiendo en esta determinación el Profesor Martín, que da los valores de 75,2, y 76,9 respectivamente; Sergi que anota la cifra media de 79,3 y una individual de 81 en el descrito por él, en 1888 y Mantegazza y Regalía que sintetizando la proporcionalidad en las varias series, señalan 9 como braquicefalos, 27 mesaticefalos y 11 dolicocefalos, en los Foguinos en general. Solamente Garsón baja á 74,8 el valor medio de los Yaganes por él descritos.

Por el *índice vertical* es ortocefalo, con 73,2, como los Onas estudiados por Hultkranz, separándose de los restantes foguinos que este mismo antropólogo y Sergi señalan como camecefalos de un modo general, aunque sea menos característico este valor que el del *índice vertico-transversal* que sube á 99,2 contrastando con el valor medio de los Yaganes que señala Garsón en 93,3 y que determina la gran estrechez y altura que morfológicamente se comprueba en

(*) *Mission scientifique du Cap Horn*. Vol. VII, 1882 á 1891.—
Tour du Monde 1892: Deniker. *Sur les Fuegiens*. Cong. inter. des
Americanistes. 1890.

(**) Hultkranz J. V: *Zur Osteologie der Ona und Yahgan-Indianer des Feuerlandes*. *Svenska Expeditionen till Magellanslänsderna*, tomo I, núm. 5 Stockholm, 1900.





III.—Norma facial



inferior



II.—Norma lateral



la NORMA OCCIPITAL, de figura pentagonal y bóveda alta y aquillada, exagerando esta apariencia los parietales deprimidos por el medio, que permiten ver la región ténporo-orbitaria. Completan esta norma una base curva, quebrada por las líneas curvas superiores muy arqueadas y convergentes en un ínio rugoso y una escama bien redondeada en su parte media.

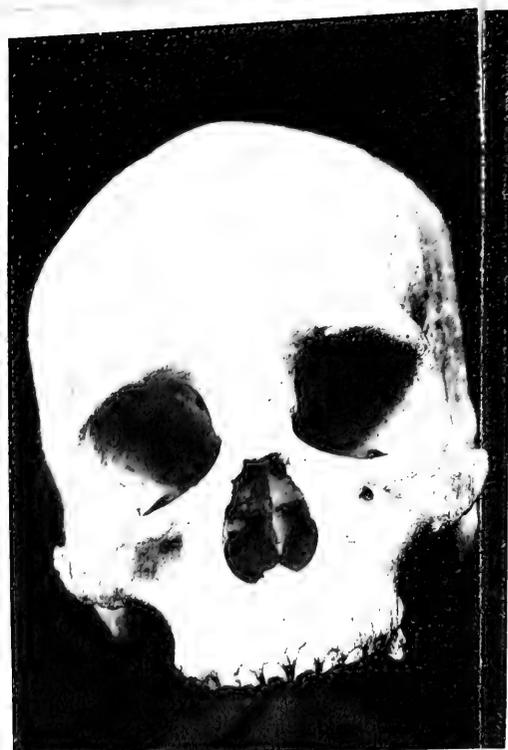
El *índice basilar*, ó relación entre las proyecciones total del cráneo y anterior, completa el carácter dolicoide, pues no pasa de 49, siendo las medidas absolutas de 208 y 102 mm., con una posterior de 106; y á igual correlación de caracteres obedece el índice del *agujero occipital* que está en el extremo más inferior que se cita con 75,6, que contrasta con los valores de 86 á 90, dados por Garsón y Sergi.

La estrechez de las regiones anteriores del cráneo, es manifiesta, como puede apreciarse en la fotografía núm. 1 y en el valor del *índice frontal* (*) (83,2) y más aún en el *fronto-parietal* de 66, que es, como la relación anterior, una cifra límite en las series normales.

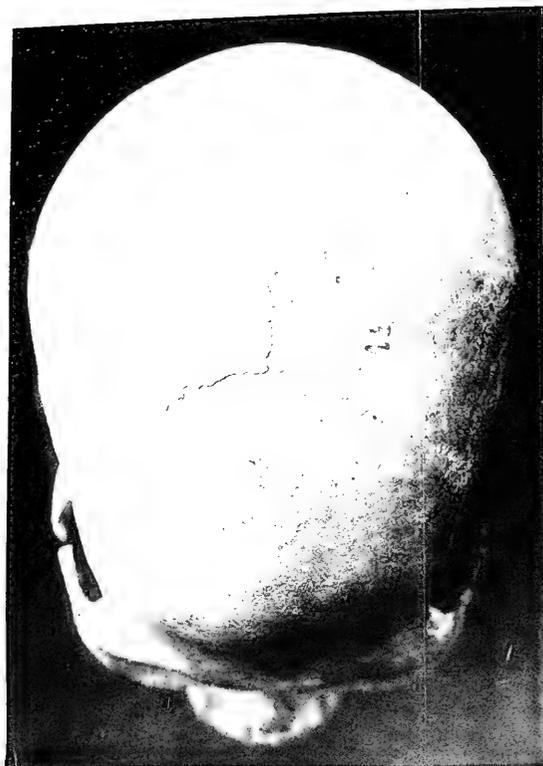
El VOLUMEN de esta calavera es, por un criterio meramente impresionista, bastante grande; pero el análisis métrico reduce á su verdadero valor la apreciación morfológica, porque siendo de 150 el módulo de los tres diámetros, resulta una capacidad para el volumen externo, aplicando el método de Schmith, de 1793 c. m³., comprendida en el término de la submicrocrania en la nomenclatura del autor alemán.

Corresponden á estas medidas absolutas del volumen craneal, una *curva horizontal* total de 508 mm., que es inferior á las halladas en el sexo y raza por todos los autores, salvo el valor límite estudiado por Sergi, una *curva transversal* de

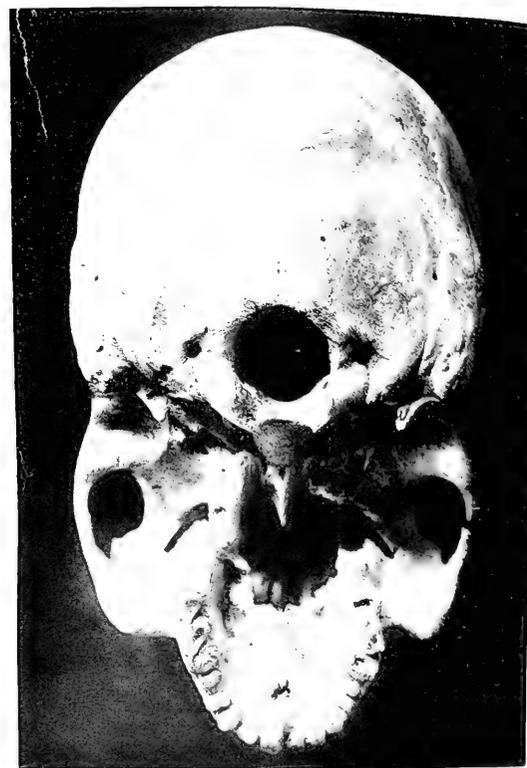
(*) Para la nomenclatura y valores de los índices y demás medidas, seguimos los métodos descritos en nuestra *Técnica antropológica y Antropología física*. 2.^a edición.—Madrid, 1899



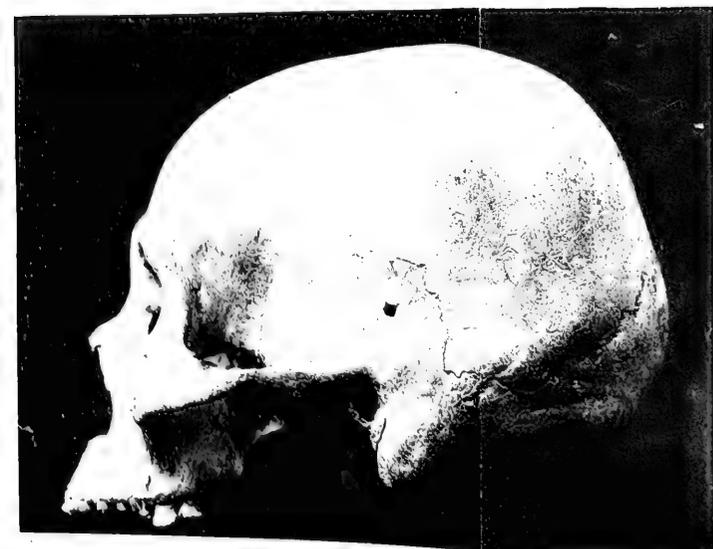
III. Norma facial



I.—Norma superior

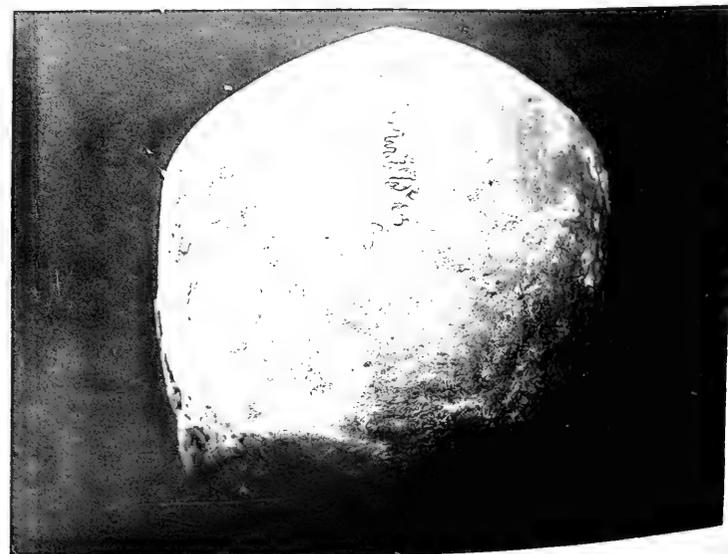


IV. Norma inferior



II. Norma lateral

CRÁNEO FOGUINO
DEL MUSEO
ANTROPOLÓGICO
DE MADRID



V.—Norma posterior

426, y una *vertical* nasio-opística de 380 que coincide casi con las medidas establecidas por Martín y otros antropólogos.

Determinando la *capacidad* por el método de Broca, se ve que llega á 1457 c. m.³, que sigue colocándole en el grupo de los pequeños de la nomenclatura francesa, y de los medios en las alemanas, con cifras análogas á las obtenidas por Hultkranz y Garsón, pero muy separadas de las de Martín, sin duda alguna por la diferencia de los métodos, si bien de todos modos la jerarquía cefálica es más elevada en esta degradada y misérrima raza de lo que á la social corresponde, coincidiendo en esto con las afirmaciones de Seitz (*), que por el peso del cerebro y la morfología cerebral, dice que se asemeja al tipo del europeo medio.

Como típico de esta raza, se anuncia la depresión de la raíz de la nariz ó nasio, y así es en efecto corta la línea naso-basilar, que no excede de 94 mm., á pesar del tamaño, el alargamiento y predominio de la región anterior y facial de esta curiosa calavera.

Descubre la NORMA LATERAL, figura 2, un gran prognatismo maxilar, exagerado con la oblicuidad de los incisivos, que continúan unos escurridos y acanalados bordes nasales, sobre los que apenas se destaca la espina nasal, y apareciendo todo, como en las descripciones de Sergi, proyectado adelante y de modo igual á como puede verse, comparando las fotografías, al cráneo descrito por Mantegazza y Regalía (**), y figurado en su trabajo como el 3117 de la colección.

La curva frontal iníciase en una glabela que debe su aparición á la depresión ofrítica, que determina una frente angulosa y que parece otro carácter digno de señalarse en todos los ejemplares de esta raza; continúa después una

(*) Seitz. *Zwei Fuerlander-Gehirne*. Zeits. für Ethnologie, XVIII. 1886.

(**) Mantegazza y Regalía. *Studio sopra una serie di crani di Fuggini*, — Archivio per la Antropologia é la Etnologia. XVI, 1886, p. 463.

curva bien desarrollada; aunque baja, como lo indica la relación con la cuerda, llegando al vértice, que es muy posterior, y continuándose por un occipital abultado, truncando la curva en su desarrollo un *inio* del núm. 2, y terminando en una porción cerebelosa abombada y marcadísima, como en la norma posterior, que mide 120 mm. de arco y 104 de cuerda, siendo de 111 el diámetro occipital máximo, que es el único desarrollado en el sentido transversal en esta calavera.

Es la CARA, alta, trapezoidal y de pómulos salientes y gruesos, pues llegan á 24 mm. de altura, con grandes maxilares y la fosa canina del lado derecho que contrasta notablemente con la del izquierdo, muy poco profunda; la región superior termina en una frente apiramidada, cuya estrechez general se hace notar por el bajo índice frontacigomático, muy inferior á las cifras dadas por Garsón y Martín para los otros habitantes de la Tierra del Fuego, los Yaganes y Alakalufos.

La altura *ofrio-alveolar* de la cara es de 98 mm., que relacionada con los 129 de latitud bicigomática dan un índice de Broca de 75,9, revelador de una leptoprosopia muy atenuada, que las cifras del índice llamado *facial superior*, ó sea el deducido con la altura naso-alveolar confirman, puesto que sube á 56,6, distanciándose de los valores casi homogéneos dados por Sergi (*), Garsón y Mantegazza, como deducidos de una anchura bicigomática, que varía de 140 á 152 mm. Por último, el *índice naso-malar* ó de Virchow es de 114,2, más alto que el dado por Hultkranz, como corresponde á toda la arquitectura facial que venimos describiendo.

Armónica con la estructura de la cara es la de la *nariz* ósea, que en el vivo está indudablemente contrarrestada por la anchura de las alas, ya que el índice es aquí de 49, casi en el principio de la mesorrinia, y la anchura de los nasales no pasa de 8 mm., siendo éstos algo acaballados; notemos,

(*) Sergi: *Antropologia fisica della Fueguia*. Atti de la R. A: medica di Roma, XIII, 1886-87, 2.^a serie.

por ser de interés, que las cifras del índice nasal dadas por todos los autores que han descrito estas razas, son las menos fijas de todos los valores craneométricos que valen para su caracterización, y que hay, en cambio, un carácter morfológico, que es la ausencia ó extrema pequeñez de la espina nasal, que los da homogeneidad y que aquí se presenta como en los descritos por los craniólogos italianos (*) como un signo de las razas inferiores y de los caracteres antropoideos, según ya hizo notar el Profesor Hamy en su clásico trabajo acerca de esta particularidad nasal.

La *órbita* es grande y redondeada, con fuertes bordes, caída hacia afuera y abultada en la región del dacrio; tiene un índice de 87,1 intermedio del de los cráneos de igual raza del Museo de Estocolmo y superior, por tanto, al de las otras tribus fogninas que en la morfología de esta facción coinciden en su parecido con la de los Esquimales, y que está coronada por unos arcos superciliares curvos y bastante salientes, que en la NORMA SUPERIOR sirven de arranque á unas apófisis orbitarias muy róbustas, que sostienen los cigomas totalmente visibles, como se nota en la fotografía, cuyo plano vertical es el de sustentación alveolo-occipital inferior, formando un primer borde anterior, al que envuelve el constituido por el cerco pomular, suelo orbitario y base de la nariz, que á su vez está precedido de una gran parte de los maxilares y el borde alveolar incisivo, que son totalmente visibles, como elementos constitutivos del prognatismo típico de la raza.

Este último carácter hácese también notar en el *ángulo facial* ofrio-espinal, cuyo valor es de 72°; pero analíticamente es más ostensible en el ángulo alveolar, que baja á 58 $\frac{1}{3}$ °, siendo el único valor comparable el que da Garsón (**), al

(*) Belsanti M. di P.: *Su alcuni caratteri regressivi del cranio umano*. Arch. ital per la antropología, XV-1884, pág. 184.

(**) Garsón: *On the Inhabitants of Tierra del Fuego*. Jour. of Athropological Institute, tomo XV, 188, pág. 141.

que, además, puede asimilarse por tal carácter, á pesar del dibujo deficiente que publica este autor.

Otro ángulo indicador del plano de orientación del cráneo es el de Daubenton, y aunque extraordinariamente variable, va elevándose en las razas inferiores, con valores positivos cada vez más altos, y es en este cráneo de 11°; la orientación natural ó plano de apoyo, según la cual están hechas las fotografías, excepto la cuarta, es alveolar-occipital en la porción inferior, pues las apófisis mastoideas quedan altas por su pequeñez, y los condilos occipitales tampoco apoyan, salvo utilizando el cranioforo de Topinard, en cuyo caso el cráneo inclínase del lado derecho por ser su condilo menos alto que el izquierdo, coincidiendo en un todo, por analogía, que debe marcarse, con la descripción hecha por Martín (*) para los cráneos de los Foguinos muertos en Zurich y que se exhibieron en la Exposición Universal de París, donde fueron estudiados por Manouvrier y posteriormente por Virchow, de igual modo que con la de Sergi (**) para distintos ejemplares.

Como indicio seguro de la estirpe dolicoidea de la raza, muéstranse los caracteres todos de detalle en la NORMA INFERIOR, ó basal, como la forma elíptica y romboidal, por el basio, del agujero occipital, de más bajo índice que las cifras de los otros autores, y que por la particular inclinación dada al plano auditivo-alveolar, al colocarle en el trapecio para la fotografía núm. 4, no se aprecia, y aún parece más ancho que largo.

Tiene el *paladar* una forma regularmente parabólica en el desarrollo de su arcada dentaria, que es más ancha de lo que al tipo general del cráneo corresponde, pues mide 43 milímetros de latitud, y tiene un desarrollo en su curva total

(*) Martín R.: *Zur physischen Anthropologie der Fuerländer*. Archiv. für Anthropologie, XXIII, 1894, pág. 155.

(**) Sergi: *Antropologia fisica della Fuegia. Nuovi osservazioni*. Archivio per la Antropologia e la Etiologia, XVIII, 1888, pág. 25.

enorme, dando lugar á la presencia del diastema interalveolar y aun posterior al molar del juicio, que así como los incisivos, queda elevado del plano de sustentación por ser convexo el borde dentario y apoyar sólo en los premolares; el conducto anterior palatino es muy grande y se presta en el declive que rebaja la bóveda por la parte anterior á formar el prognatismo alveolo dental.

Completan la notable organización dentaria del sujeto, unos dientes absolutamente sanos, sin caries ni oquedades de ningún género, usados de un modo extraordinario y hasta el núm. 4 de la escala de Broca, los del lado derecho, y sólo hasta el 2 los del izquierdo, según una dirección oblicua hacia el lado opuesto, como es típico en los rumiantes, y afirmando tal forma de masticación un pronunciado bisel en los incisivos. También estas particularidades de los planos de masticación han sido descritas por el Dr. Hultkranz.

Completan la somera descripción de esta calavera, la complicación de las suturas en orden posterior, pues siguiendo la escala francesa, son del núm. 2 en la frontal, del 3 en la parietal, y del 4 en la labdoidea, no estando iniciada la sinostosis, más que en la fronto-parieto-temporal. El pterio es realmente en forma de N, y la línea yugal presenta un ángulo obtuso muy marcado.

* * *

Establécese claramente del análisis bibliográfico que hemos utilizado la existencia de tres grupos, que corresponden tal vez á dos razas en las islas del Archipiélago Magallánico. Un grupo y raza á que pertenece este cráneo, de los *Onas*, llamados también Wna, Jacana y Kunny, habitantes del N. y O. de la isla mayor, por esto llamada Onisin, de tipo decididamente dolicocefalo, y por ello distinto de los otros grupos, tal vez de una misma raza, que son los *Alakalufos*, *Alakoulof* ó *Alikolip*, que habitan al S. E., y los *Yaganes*

Yahgans, Yapos ó Yekenika al S. bien conocidos desde la exploración del «Romanche» y que han sido seguramente por error considerados como los verdaderos Foguinos, de tipo, como los anteriores, mesaticefalo y braquicefalo.

Parécenos que la raza dolicoide, ortocefala, de cráneo estrecho y pentagonoide, con fuertes arcos superciliares que corresponde á los primitivos americanos del Dr. Deniker, representados por Botocudos y Guaranis y la raza de Lagoa Santa, es la que corresponde á los Onas, en los que se extinguen estos preamericanos, que son los mismos Prepatarones dolicocefalos descritos por nuestro maestro el Dr. Verneau y admitidos en su clasificación por el Profesor D. Manuel Antón, coincidiendo en esta opinión con el Dr. Hülkranz y el Profesor de Zurich, Martín, que también estiman á estos Onas como los más puros y á los Yaganes y Alakalufos como influidos por los tipos pampeanos y patagones más braquicefalos.

Esta raza, pues, ha de ser la de los gigantes de cabeza larga de que habla Magallanes, y no las otras pobladoras de la Tierra del Fuego, que por consideraciones etnográficas se venían considerando como las aborígenes, defendiendo esta opinión Ehrenreich al afirmar que los Onas representan los Patagones primitivos retirados á la Tierra del Fuego, propia de los Yaganes y Alakalufos pescadores. Posible es que los últimos restos vivientes de los paleamericanos haya que buscarlos, extinguidos los Onas, en los Chonos que viven entre el cabo de Peñas y el Estrecho de Magallanes, y que algunos modernos americanistas consideran como mestizos de españoles é indios de estirpe foguina; cosa no extraña, ya que no hay raza ni subraza americana que no haya recibido sangre española.

XXXIII.—Caracteres de las formas cuadráticas definidas, con aplicación á varias cuestiones.

POR JULIO REY PASTOR.

En los cursos de Análisis Matemático que actualmente se explican en nuestras Universidades, se tropieza con dificultades de orden didáctico al exponer algunas teorías que exigen conocimientos de otras anteriores, omitidas por la brevedad del curso, la excesiva extensión que se da á otras de no tan inmediata aplicación, ó por otras causas que aquí no hemos de analizar. Así, por ejemplo, en la teoría de máximos y mínimos de funciones de varias variables independientes, es preciso conocer los caracteres distintivos de los polinomios de 2.º grado que se conservan constantemente positivos ó negativos, los cuales no son conocidos por los alumnos más que en el caso de variable única.

De parecido modo, en Geometría Analítica, se hace preciso obtener directamente las condiciones para que una cónica ó cuádrlica sea imaginaria, cuestión equivalente á la primera.

En uno y otro caso se repiten casi idénticas consideraciones, que aparecen allí como fuera de su verdadero lugar, siendo por esta causa perjudiciales en alto grado al alumno, que, obligado con frecuencia á parecidas digresiones, separa su atención del objeto principal á que éstas se aplican.

Y lo peor de todo es que después de repetido en uno y otro lugar el mismo cálculo, como en los dos tiene objeto distinto, al presentarse una tercera cuestión de la misma naturaleza analítica que aquéllas, ya no es aplicable; siendo

precisa una nueva repetición adaptada al nuevo objeto, tantas veces como éste se presente.

Reportaría, á nuestro juicio, una gran economía de tiempo y de trabajo, el obtener dichos caracteres analíticos en su verdadero lugar, esto es, en el Algebra, del mismo modo que se hace en el caso de una variable; estando así las conclusiones obtenidas, en disposición de ser aplicadas cuantas veces sea preciso, en toda cuestión que lo requiera, sin prolijas digresiones.

Del defecto que señalamos, agravado con la poca ó ninguna generalidad propia de las exposiciones incidentales; adolecen tratados de Análisis tan acreditados como los de Sturm, Gilbert, Villafañe, Comberouse, etc.; mas, en realidad, es disculpable por no figurar expuestas en los tratados de Algebra las condiciones citadas. Y aun aquellos libros en que esta cuestión se trata, como los notabilísimos de Cesaro (*) y Capelli (**), lo hacen fundándose en las propiedades de las formas canónicas, la realidad de las raíces de la ecuación secular y otras cuestiones realmente fundamentales y no más difíciles que otras muchas exigidas en nuestros programas, pero que no han tomado en ellos todavía carta de naturaleza.

Así, pues, nos proponemos en esta nota dar una demostración lo más elemental posible y con toda la apetecible generalidad, de la cuestión antes citada, fundándonos en una sencillísima propiedad de las determinantes, que podría tener cabida al lado de las análogas de determinantes recíprocas, expuestas en los cursos de Facultad.

Es, al mismo tiempo, nuestro objeto hacer alguna otra aplicación (además de las mencionadas, á la teoría de máximos y mínimos, y la condición para que una cuádrica sea

(*) Corso de Analisi Algebraica. Torino, 1894.

(**) Istituzioni di Analisi Algebraica. 4.^a ed. Napoli, 1909.

imaginaria), como es hallar las condiciones de realidad de las raíces de una ecuación, sin utilizar el teorema de Sturm, ni la expresión de los polinomios en él empleados, en función de las raíces. Haremos, por comodidad, uso de la nomenclatura propia de la teoría de las formas; mas puede sin inconveniente quitársele este carácter, empleando sólo los términos del Algebra más elemental.

1.—TEOREMA.—*Si en una matriz de orden n se sustituye cada elemento por el menor de segundo orden que resulta de suprimir las n—1 restantes filas y columnas en la matriz obtenida orlando la primera con una fila y columna de elementos arbitrarios, el nuevo determinante es igual á éste multiplicado por la potencia n—1 del elemento común á las líneas agregadas.*

Sea $\Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$ el determinante dado y

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

El determinante de la matriz formada del modo dicho, es

$$\Delta' = \Sigma \pm A_{1,1} A_{2,2} \dots A_{n,n} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{0,0} a_{1,1} - a_{1,0} a_{0,1} & a_{0,0} a_{1,2} - a_{1,0} a_{0,2} & \dots & a_{0,0} a_{1,n} - a_{1,0} a_{0,n} \\ a_{0,0} a_{2,1} - a_{2,0} a_{0,1} & a_{0,0} a_{2,2} - a_{2,0} a_{0,2} & \dots & a_{0,0} a_{2,n} - a_{2,0} a_{0,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0,0} a_{n,1} - a_{n,0} a_{0,1} & a_{0,0} a_{n,2} - a_{n,0} a_{0,2} & \dots & a_{0,0} a_{n,n} - a_{n,0} a_{0,n} \end{vmatrix}$$

descomponiéndolo por columnas en suma de determinan-

tes, y designando por $\alpha_{0,i}$ el complemento algébrico de $a_{0,i}$, en Δ , será

$$\Delta' = a_{0,0}^n \alpha_{0,0} + a_{0,0}^{n-1} a_{0,1} \alpha_{0,1} + \dots + a_{0,0}^{n-1} a_{0,n} \alpha_{0,n} = \\ = a_{0,0}^{n-1} (a_{0,0} \alpha_{0,0} + a_{0,1} \alpha_{0,1} + \dots + a_{0,n} \alpha_{0,n}) = a_{0,0}^{n-1} \Delta,$$

que es la expresión analítica del teorema (*).

*
* *

*Condiciones de invariabilidad del signo de una forma cuadrática de coeficientes reales, cualesquiera que sean los valores reales, no todos nulos, dados á sus variables (**).*

2.—En el caso más sencillo posible de una sola variable, la condición para que $y_1 = a_{0,0} x_0^2$ sea constantemente positiva ó negativa, lo cual expresaremos simbólicamente por $y_1 = \epsilon$, siendo ϵ el signo $+$ ó $-$, es evidente,

$$a_{0,0} = \epsilon.$$

Si la forma es binaria, la condición

$$y_2 = a_{0,0} x_0^2 + 2 a_{0,1} x_0 x_1 + a_{1,1} x_1^2 = \epsilon,$$

equivale, como es bien sabido, á las dos siguientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{vmatrix} = \epsilon^2, \quad a_{0,0} = \epsilon.$$

(*) Esta propiedad puede también considerarse como caso particular del llamado teorema de Sylvester, suponiendo $r = 1$. Véase el notable tratado de Algebra superior de H. Weber. Trad. de Griess. París.

(**) Una forma que tiene esta propiedad se llama *definida*.

Para observar la ley que siguen estas igualdades, reduzcamos al anterior el caso de la forma ternaria, escribiendo:

$$y_3 = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j =$$

$$= a_{0,0} x_0^2 + 2(a_{0,1} x_1 + a_{0,2} x_2) x_0 + (a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2).$$

Las condiciones para que sea siempre $y_3 = \epsilon$, equivalen á estas otras:

$$a_{0,0} (a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2) - (a_{0,1} x_1 + a_{0,2} x_2)^2 = \epsilon^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{0,0} = \epsilon \end{array} \right.$$

La primera es igual á esta:

$$(a_{0,0} a_{1,1} - a_{0,1}^2) x_1^2 + 2(a_{0,0} a_{1,2} - a_{0,1} a_{0,2}) x_1 x_2 +$$

$$+ (a_{0,0} a_{2,2} - a_{0,2}^2) x_2^2 = \epsilon^2$$

y abreviadamente,

$$A_{1,1} x_1^2 + 2A_{1,2} x_1 x_2 + A_{2,2} x_2^2 = \epsilon^2,$$

designando como en el teorema fundamental (1) por $A_{i,j}$ los menores de segundo orden del discriminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix};$$

luego, según el párrafo anterior, las condiciones buscadas son:

$$a_{0,0} = \epsilon, \quad A_{1,1} = \epsilon^2, \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} = \epsilon^4;$$

y por el teorema (1), designando por $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ los meno-

res principales del discriminante que contienen $a_{0,0}$, equivalen á

$$a_{0,0} = \epsilon, \quad \Delta_1 = \epsilon^2, \quad a_{0,0} \Delta_2 = \epsilon^4;$$

y en resumen:

$$\Delta_0 = \epsilon, \quad \Delta_1 = \epsilon^2, \quad \Delta_2 = \epsilon^3.$$

3. — Observada ya la ley que siguen estas igualdades, y suponiendo demostrado que éstas para la forma de n variables son:

$$\Delta_0 = \epsilon, \quad \Delta_1 = \epsilon^2, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} = \epsilon^n, \quad (I)$$

consideremos la forma $(n + 1)$ -aria

$$y_{n+1} = \sum_0^n a_{i,j} x_i x_j$$

sujeta á la igualdad,

$$y_{n+1} a_0 = a_{0,0} x_0^2 + 2(a_{0,1} x_1 + \dots + a_{0,n} x_n) x_0 + \quad (II)$$

$$+ a_{1,1} x_1^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + \dots + a_{n,n} x_n^2 = \epsilon.$$

Para esto, la condición necesaria y suficiente es que se verifiquen idénticamente las relaciones

$$a_{0,0} (a_{1,1} x_1^2 + \dots + a_{n,n} x_n^2) - (a_{0,1} x_1 + \dots + a_{0,n} x_n)^2 = \epsilon^2 \quad \left. \vphantom{a_{0,0} (a_{1,1} x_1^2 + \dots + a_{n,n} x_n^2)} \right\}$$

$$a_{0,0} = \epsilon \quad \left. \vphantom{a_{0,0} = \epsilon} \right\}$$

ó lo que es igual,

$$A_{1,1} x_1^2 + 2 A_{1,2} x_1 x_2 + \dots + A_{n,n} x_n^2 = \epsilon^2, \quad \left. \vphantom{A_{1,1} x_1^2 + 2 A_{1,2} x_1 x_2 + \dots + A_{n,n} x_n^2} \right\}$$

$$a_{0,0} = \epsilon \quad \left. \vphantom{a_{0,0} = \epsilon} \right\}$$

siendo

$$A_{h,k} = a_{0,0} a_{h,k} - a_{0,h} a_{k,0}.$$

Esto equivale, según suponemos demostrado, á

$$a_{0,0} = \varepsilon, \quad \delta_1 = \varepsilon^2, \quad \delta_2 = \varepsilon^4, \quad \dots, \quad \delta_n = \varepsilon^{2n},$$

siendo las δ los menores principales del discriminante de esta última forma. Más, por el teorema (1),

$$\delta_1 = \Delta_1, \quad \delta_2 = a_{0,0} \Delta_2, \quad \dots, \quad \delta_n = a_{0,0}^{n-1} \Delta_n$$

luego las condiciones equivalentes á (II), son:

$$\Delta_0 = \varepsilon, \quad \Delta_1 = \varepsilon^2, \quad \dots, \quad \Delta_n = \varepsilon^{n+1}. \quad (\text{III})$$

4. Consecuencia inmediata de lo que antecede, es la siguiente importante propiedad:

La condición necesaria y suficiente para que y_n conserve el mismo signo independiente de los valores atribuidos á las n variables, es que los números

$$\Delta_1, \quad a_{0,0} \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad a_{0,0} \Delta_4, \quad \dots \quad (\text{IV})$$

sean positivos.

Y obsérvese que $a_{0,0}$ puede ser el coeficiente de cualquier término cuadrado, con tal que las Δ se refieran al discriminante ordenado de modo que tal coeficiente figure en primer término.

*
* *

Condiciones para que una ecuación represente en un espacio de n dimensiones una cuádrica imaginaria.

5. La condición necesaria y suficiente para que la ecuación cuadrática $f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$, no represente ningún

punto real, es que la función f conserve constantemente el mismo signo para un sistema de valores cualesquiera reales de las variables, excepto el $(o, o, \dots o)$ que no corresponde á ningún punto.

Pues si esto se verifica, no se anulará para ningún sistema de valores distinto del citado; luego es condición suficiente.

Es también necesaria; pues si la ecuación no representa punto alguno real, dos sistemas de valores que tengan $n - 1$ comunes, no pueden dar á f signos contrarios, ya que estos mismos comunes, y uno de la variable restante, intermedio entre aquéllos, la anularía; y como de un sistema á otro cualquiera se puede pasar cambiando de uno en uno los valores de las n variables, resulta que siempre adopta f el mismo signo.

Así, pues, la ecuación

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Fyz + 2Gxz + Cz^2 = 0$$

referida á un triángulo ó triedro fundamental, representa una línea, haz, ó superficie cónica imaginaria, si

$$AB - H^2 > 0 \quad \text{y} \quad A\Delta > 0 \quad (*)$$

La ecuación

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Fyz + 2Gxz + Cz^2 + 2Lxt + 2Myt + Dt^2 = 0$$

referida á un tetraedro, representa una superficie ó radiación de planos imaginaria, si

$$AB - H^2 > 0, \quad Ad > 0, \quad \Delta > 0 \quad (**).$$

(*) Vegas. Tratado de Geometría Analítica. 2.^a ed., t. I, p. 229. Madrid, 1906.

(**) Idem t. II, pág. 137.

Basta, en efecto, aplicar las condiciones (IV) á los discriminantes respectivos.

* * *

Máximos y mínimos de las funciones explícitas de dos ó más variables.

6. Para investigar las condiciones á fin de que la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tenga un valor máximo ó mínimo en el punto (a_1, a_2, \dots, a_n) , es decir, para que

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \leq f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

respectivamente, al tender h_1, \dots, h_n á cero, siendo sus signos cualesquiera, se acostumbra á poner $h_i = t \cdot k_i$, con lo cual dicha función se transforma en

$$\varphi(t) = f(x_1 + k_1 t, \dots, x_n + k_n t),$$

y las condiciones buscadas se resumen en la

$$\varphi'(0) = 0 \quad \varphi''(0) \leq 0,$$

independientemente de los valores de h_i , lo cual equivale á las condiciones simultáneas

$$f'_{x_1} = 0, \quad f'_{x_2} = 0, \quad \dots, \quad f'_{x_n} = 0.$$

Resuelto este sistema y hallada la solución $(a_1 \dots a_n)$, si esta no anula á $\varphi''(0)$, para que efectivamente corresponda á un máximo ó mínimo, es preciso que tome un valor negativo ó positivo, respectivamente, con independencia de los valores que puedan tomar las k , es decir:

$$(k_1 D_{x_1} + k_2 D_{x_2} + \dots + k_n D_{x_n})^2 f(a_1 \dots a_n) = \epsilon,$$

siendo ϵ el símbolo que representa una cantidad negativa ó positiva, según se trate de máximo ó mínimo.

Según lo antes expuesto, si se forma la hesiana,

$$H = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''_{x_n^2} \end{vmatrix},$$

las condiciones necesarias y suficientes son:

$$\Delta_1 = \epsilon, \quad \Delta_2 = \epsilon^2, \quad \dots, \quad \Delta_n = H = \epsilon^n,$$

donde las Δ tienen igual significado que en el artículo anterior.

Si el sistema $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ anula á la hesiana, debe anular también, para que corresponda á un máximo ó mínimo, á todas las derivadas de tercer orden, haciendo negativa ó positiva, respectivamente, con independencia de los valores de K_i á la forma bicuadrática análoga á la anterior; mas el hallar las condiciones para que tal suceda, es problema de índole mucho más elevada.

*
* *

Condiciones de realidad de las raíces de una ecuación algebraica.

7. En el estudio de la ecuación

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m = 0 \quad (I)$$

es de gran importancia la consideración de su discriminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \dots & a_m^{m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} \quad (\text{II})$$

donde a_i son las raíces y s_h la función simétrica simple de las mismas, de grado h .

Formemos la cuádrlica que tiene igual discriminante que la ecuación (I).

$$y = s_0 x_0^2 + 2s_1 x_0 x_1 + 2s_2 x_0 x_2 + \dots + 2s_{m-1} x_0 x_{m-1} \\ + s_2 x_1^2 + 2s_3 x_1 x_2 + \dots + 2s_m x_1 x_{m-1} \quad (\text{III}) \\ + \dots \\ + s_{2m-2} x_{m-1}^2$$

y sustituyendo

$$s_i = a_1^i + a_2^i + \dots + a_{m-1}^i, \\ y = \sum_1^m \left[a_i^0 x_0^2 + 2a_i^1 x_0 x_1 + \dots + 2a_i^{m-1} x_0 x_{m-1} \right. \\ \left. + a_i^2 x_1^2 + \dots + 2a_i^m x_1 x_{m-1} \right. \\ \left. + \dots \right. \\ \left. + a_i^{2m-2} x_{m-1}^2 \right] = \\ = \sum_1^m \left(a_i^0 x_0 + a_i^1 x_1 + \dots + a_i^{m-1} x_{m-1} \right)^2 = \sum_1^m y_i^2 \quad (\text{IV})$$

De donde se deduce:

1.º Si las raíces a_1, a_2, \dots, a_m son reales y distintas, cualquier sistema de valores reales de x_0, x_1, \dots, x_{m-1} distinto del $(0, 0, \dots, 0)$ hace positiva á y .

Pues tal sistema no puede anular simultáneamente á todas as y_i , ya que su resultante Δ es distinto de cero, por la hipótesis de ser distintas las a_i , y al menos un cuadrado y_i^2 toma un valor positivo.

2.º Si hay algún par de raíces imaginarias,

$$a_h = \alpha + i\beta, \quad a_k = \alpha - i\beta,$$

las formas lineales y_i correspondientes son

$$y_h = a_h^0 x_0 + a_h^1 x_1 + \dots + a_h^{m-1} x_{m-1} = A + B\sqrt{-1}$$

$$y_k = a_k^0 x_0 + a_k^1 x_1 + \dots + a_k^{m-1} x_{m-1} = A - B\sqrt{-1}$$

y por tanto,

$$y_h^2 + y_k^2 = 2(A^2 - B^2).$$

La forma y queda, por consiguiente, reducida á

$$y = \sum_1^v 2(A_i^2 - B_i^2) + \sum_{v+1}^{m-v} A_i^2 \quad (\text{V})$$

siendo v el número de pares de raíces imaginarias.

Dando ahora á x_0, x_1, \dots, x_{m-1} un sistema cualquiera de valores no todos nulos, que hagan

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots, \quad A_{m-v} = 0,$$

lo cual es posible, según el teorema de Rouché, por ser $m - v < m$, el valor que toma y es

$$y = -2(B_1^2 + \dots + B_v^2) \leq 0.$$

Luego en resumen: *La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (I) tenga todas sus raíces reales y distintas, es que la forma cuadrática que tiene igual discriminante, se*

conserve constantemente positiva para valores cualesquiera reales, no todos nulos, de x_1, x_2, \dots, x_{m-1} .

Teniendo en cuenta lo demostrado en (3), esto equivale á que sean positivos los números

$$\Delta_1 = s_0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Delta. \quad (VI)$$

Nota. — Haciendo uso de las propiedades primeras de las formas canónicas, y de la ley de inercia de las formas cuadráticas, puede establecerse todo lo expuesto en esta última aplicación como corolario de este teorema: *El número de pares de raíces imaginarias de la ecuación (I), es igual al número de variaciones que presenta la serie (VI).*

Pueden seguirse dos caminos:

La expresión de las funciones de Sturm de la ecuación (I), según el teorema de Sylvester (*), es, prescindiendo de coeficientes positivos,

$$f_1(x) = \sum_1^m \frac{f(x)}{x - a_i} \Delta_1, f_2(x) = \sum_1^m \frac{f(x)}{(x - a_i)(x - a_j)} \Delta_2, \dots$$

$$\dots, f_n(x) = \Delta_n = \Delta;$$

siendo, por tanto, los coeficientes de las potencias más elevadas de x , los números (VI). Aplicando el teorema de Sturm, resulta inmediatamente que el número de pares de raíces imaginarias, es igual al número de variaciones de la serie (V); y la condición necesaria y suficiente para que todas

(*) *Philosophical Magazine*, 1839, y *Journal de Liouville*, 1862. Puede verse la demostración completa en el *Cours d'Algèbre Supérieure*, de Serret, 4.ª edit. t. I., y en las *Leçons d'Algèbre Supérieure*, de G. Salmon. Trad. de Chemin, París, 1890, pág. 73.

sean reales, es que todas las Δ_i sean positivas, puesto que lo es la primera.

El segundo método, más elegante, seguido por Cesaro (*), consiste en demostrar que el número de términos negativos en toda forma canónica de una cuadrática, número constante por la ley de inercia, es igual al número de variaciones de la serie de primeros menores principales de su discriminante; y aplicado esto á la forma (III), resulta de (VI) que cada par de raíces imaginarias da un cuadrado positivo y otro negativo, y cada raíz real uno positivo; luego el número de aquellos pares es igual al número de cuadrados negativos, é igual al número de variaciones de la serie (VI).

Mas siendo nuestro objeto, como al principio indicamos, hacer aplicación de las condiciones de invariabilidad de signo de una forma cuadrática obtenidas de un modo muy elemental, á las cuestiones arriba expuestas, apoyándonos exclusivamente en los conocimientos que exigen nuestros vigentes programas de Análisis, hemos prescindido en absoluto de toda consideración extraña á ellos, procurando alcanzar, sin embargo, el mayor grado posible de generalidad.

Madrid, Diciembre 1909.

(*) Loc. cit., p. 408. El método fué dado á conocer por Borchardt en el *Journal de Liouville*, 1847.

XXXIV.— Viaje de estudio á la Guinea española.

Observaciones acerca del «*Trypanosoma gambiense*» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales.

POR GUSTAVO PITTALUGA.

(Continuación.)

III

Algunos detalles de estructura que se aprecian en las formas del parásito halladas en nuestras preparaciones, merecen más detenida descripción.

Ya se ha dicho (pág. 673 de esta REVISTA) que las formas descritas por algunos autores, y particularmente estudiadas por WERBITZKI (*Centralblatt für Bakteriologie*, Febrero 1910), como «Tripanosomas sin blefaroplasto» (*Blepharoplastlöse*), deben interpretarse probablemente como formas que atraviesan un período evolutivo, durante el cual el *kinetonucleo* se funde con el *trofonucleo*, verificándose un proceso de autogamia, ó, por lo menos, fenómenos que corresponden á los que constituyen el proceso de autogamia en otros protozoos, particularmente en los Amébios.

Ahora bien; las fases intermedias de este proceso, sobre todo la aproximación del blefaroplasto al núcleo y los momentos que preceden á la fusión de las dos masas cromáticas, requieren, para ser sorprendidas y estudiadas, un examen detenido de numerosísimas preparaciones.

Nosotros hemos llegado á convencernos de que tales fenómenos nucleares no acontecen necesariamente en todas las particiones esquizogónicas de los tripanosomas hemáticos, sino que, de cuando en cuando, entre generaciones que

proceden de divisiones directas, se intercalan generaciones en que la esquizogonia en el huésped vertebrado se acompaña de tales fenómenos de autogamia.

Para obtener buenas preparaciones de tales aspectos de división de los tripanosomas, es preferible emplear el procedimiento de fijación con los vapores de ácido ósmico. Las figuras 11, 13 y 14 de la lámina 2.^a, representan distintas fases del proceso indicado. La fig. 11 ofrece singular interés por la particularidad de presentar la masa del trofonúcleo, de forma y disposición atípicas, enteramente desplazada hacia la extremidad anterior (posterior de LAVERAN y MESNIL) del tripanosoma y el blefaroplasto ectópico en el borde inferior del cuerpo citoplásmico. Entre el trofonúcleo alargado y el borde superior del citoplasma existen dos pequeños corpúsculos cromáticos, de igual tamaño y simétricamente dispuestos. Si se examina con detenimiento el resto del citoplasma de esta forma de tripanosoma, y se compara, además, con las formas corrientes, representadas, por ejemplo, en las figuras 7 y 15, se advierte claramente el fenómeno de la «concentración de la cromatina» en un punto solo del cuerpo del protozoo. Todas las masas y los corpúsculos cromáticos se reúnen, se acercan, se concentran, y en este caso se polarizan hacia uno de los extremos del cuerpo del protozoo.

La fig. 13 reproduce un aspecto distinto. La forma parasitaria, representada en la fig. 13, ofrece en gran parte los caracteres de una forma diferenciada, de las que nosotros hemos indicado con el nombre de *kinetogametos*.

En tal caso deberíamos preguntarnos si acontece acaso una partenogénesis—interpretando como tal la división esquizogónica de los gametos—en estas formas parasitarias; y en este caso especial propiamente una partenogamia, en el sentido que HARTMANN ha dado á esta palabra. Así en la figura 13 como en la figura 14 el trofonúcleo permanece en su situación normal en el citoplasma; en cambio, el

kinetonúcleo aparece desplazado considerablemente hacia el centro, en las inmediaciones del trofonúcleo. Toda la porción anterior (posterior, según LAVERAN y MESNIL), esto es casi la mitad del cuerpo del protozoo, carece, por tanto, de membrana ondulante. Pero se aprecia con claridad una diferencia digna de relieve entre la figura 13 y la representada en la figura 14; esta diferencia consiste en que el borde de la membrana ondulante en el primero de estos tripanosomas acaba directamente, sin interrupción, en el blefaroplasto, mientras en el segundo existe un corpúsculo basilar, muy reducido, pero evidente, en el punto terminal del borde de la membrana ondulante, y entre esta terminación el blefaroplasto propiamente dicho. La forma del blefaroplasto es además totalmente distinta; en el primero es esférico, como una pequeña bola; en el segundo, en cambio, es alargado en sentido longitudinal, como un bastoncillo bastante recio dispuesto en la misma dirección del eje del cuerpo del protozoo.

Semejantes particularidades acerca de la forma y disposición del kinetonúcleo no dejan de tener interés desde el punto de vista citológico.

Podemos reducir á tres tipos fundamentales los diferentes aspectos de los blefaroplastos observados en múltiples formas del *Trypanosoma gambiense*: a) tipo esférico; b) tipo alargado longitudinalmente; c) tipo transversal, esto es alargado y colocado transversalmente, ó con el eje perpendicular al eje del cuerpo del tripanosoma. En las formas comunes del tripanosoma, del tipo intermedio ó indiferenciado, el blefaroplasto es generalmente esférico. En estos casos también aparece más frecuente y más clara la continuación, sin interrupciones, del blefaroplasto en el borde mismo de la membrana ondulante. A veces un blefaroplasto alargado, bastonciforme, aparece claramente en las grandes formas de parásitos largos, móviles correspondientes, por ejemplo, á la representada en la figura 16 de la lámina II. Sin embargo, en estas formas es también de hallazgo corriente el blefaroplasto esférico,

tal como se aprecia en las figuras 1 y 3 de la lámina I y en las figuras 6 y 20, por ejemplo, de la lámina 11. En nuestro entender, el aspecto alargado, baciliforme del blefaroplasto y su disposición longitudinal coinciden con las fases que preceden á la fusión de las dos masas del trofo y del kintonúcleo, ó sencillamente indican la próxima división ó participación de la membrana ondulante en el proceso de esquizogonia. Hemos observado, en efecto, en las numerosas preparaciones examinadas y reiteradamente recorridas con el auxilio y la cooperación de nuestro ayudante y querido amigo el Dr. Rodríguez Illera, todas las fases intermedias entre el blefaroplasto alargado longitudinalmente y colocado en proximidad de la extremidad anterior (posterior de LAVERAN y MESNIL) del tripanosoma, y los dos corpúsculos neoformados por división del blefaroplasto mismo. Con toda evidencia se aprecia el aspecto de que hacemos mención en la figura 9 de la lámina I, y más acentuado en las figuras 17 y 18 de lámina II. Por último, la disposición transversal del blefaroplasto, con una superficie anterior convexa y la posterior plana ó ligeramente cóncava, por lo general totalmente separado del borde de la membrana ondulante, suele en contrarse con frecuencia en las formas gordas y cortas del tripanosomas, que hemos indicado en otro lugar con el nombre de *trofogametos*, y de los cuales son claro ejemplo las figuras 8 y 19 de la lámina II.



Tipo de trofogameto.

Entre el trofonúcleo y el blefaroplasto (kintonúcleo) se perciben con gran frecuencia una serie de corpúsculos cromáticos, á veces dispuestos en cadena ó formando singulares agrupaciones que han llamado nuestra atención. El tripanosoma representado en la fig. 1.^a de la lámina 1.^a, por ejemplo, presenta un filamento que, tomando punto de partida un corpúsculo cromático, situado en las inmediaciones del nú-

cleo, anteriormente á este último, llega hacia la extremidad del cuerpo del parásito á confundirse con el borde de la membrana ondulante y con el blefaroplasto. Este filamento no adquiere exactamente la coloración de la cromatina, pero se impregna intesamente con tonos rojizos; en nuestro entender, debe tratarse de una formación homóloga al rhizoplasto de otros flagelados. En la fig. 2 de la misma lámina 1.^a, la disposición de este filamento en sus relaciones con el kinetonúcleo es distinta. Aquí el filamento termina con un recio corpúsculo cromático antes de llegar á fundirse con el blefaroplasto, y permanece, por tanto, separado de este último; en cambio, aparece como en comunicación directa con la masa nuclear (esto es, con el trofonúcleo). En la fig. 3 de la lámina 1.^a se aprecia con toda evidencia la existencia de un grueso gránulo cromático intermedio entre el trofonúcleo y el kinetonúcleo. En el tripanosoma fotografiado en la fig. 5.^a existen dos verdaderas masas nucleares, ó por lo menos, entre el trofonúcleo propiamente dicho y el kinetonúcleo se aprecia con evidencia una masa cromática suplementaria, la cual parece, además, en relación con el kinetonúcleo por un tenue y delgado filamento apenas perceptible. El kinetonúcleo alargado quizás indique un comienzo de proceso esquizogónico, por el cual se explicará además la reunión ó concentración de las masas cromáticas. En la fig. 9.^a de la lámina 2.^a se halla reproducida una forma de tripanosoma sumamente interesante por apreciarse en ella todo un sistema de gránulos y filamentos cromáticos, verdadera trabazón de de formaciones cromidiales que ocupa el protoplasma en la parte anterior al núcleo, el cual á su vez se presenta con una corona evidente de cromosomas diferenciados. De los corpúsculos cromáticos que se hallan distribuídos en la porción anterior del cuerpo del tripanosoma, en el caso que estamos examinando, dos aparecen como derivados de un desdoblamiento del blefaroplasto, reunidos todavía por un imperceptible filamento. Esta forma carece de membrana ondulante,

fenómeno que acontece con alguna frecuencia, sobre todo en los tripanosoma del tipo de los que hemos indicado como *trofogametos*. Así, por ejemplo, en la forma representada en la fig. 3 de la lámina 2.^a De gran interés es igualmente la forma representada en la figura núm. 10 de la misma lámina; trátase de una forma enana, que no alcanza los 10 micron de largo, y en la cual no existe ni membrana ondulante ni flagelo; el blefaroplasto puntiforme se halla colocado en el extremo límite del cuerpo citoplásmico, y es apenas perceptible; el tronúcleo, grande, ocupa el centro del cuerpo, y el periplasto constituye una serie de fibrillas longitudinales claramente apreciables, en número de tres á cuatro, á lo largo de toda la masa citoplásmica. Recias fibras del pleriplasto se aprecian también en otras formas, así del tipo intermedio ó indiferente como del tipo corto y gordo (*trofogametos*), ó del alargado y delgado (*kinetogametos*). La fig. 7.^a de la lámina 1.^a reproduce, por ejemplo, el aspecto de un tripanosoma en que se notan con claridad suficiente las fibras longitudinales en la porción posterior del cuerpo, entre el núcleo y el flagelo libre.

Con el método al nitrato de plata estas disposiciones del periplasto se ponen de relieve quizás con mayor evidencia. Muy raras veces exceden del número de cuatro las fibras longitudinales. Por lo general se limitan á tres. El método al nitrato de plata revela también algunas otras particularidades de estructura. Ya en otra ocasión hemos hablado de los resultados que se obtienen con este procedimiento en lo tocante á la terminación del borde de la membrana ondulante en el corpúsculo basilar y sus relaciones con el blefaroplasto. Recordaremos aquí solamente que con el procedimiento al nitrato de plata se advierte en casi todas las formas de tripanosomas, especialmente en aquellas que corresponden al tipo del *kinetogameto*, una terminación característica del flagelo, ya en bola, ya en estrella, de dimensiones reducidas, pero claramente apreciable. No es posible, por ahora, resol-

ver la cuestión de si estos aspectos responden efectivamente á una disposición normal de los materiales protoplásmicos del flagelo libre; si se trata de fenómenos pre-agónicos de los tripanosomas, ó si, finalmente, se trata tan sólo de un aspecto artificial debido á impregnación argéntica.

IV

La observación de algunos casos de disentería amibiana en los pueblos indígenas de las riberas del río Utamboni (Guinea continental española), nos proporcionó la ocasión de estudiar la morfología de la *Entamaeba histolytica*, SCHAUDINN, encontrada en gran número en las deposiciones de los enfermos.

Cuatro son las especies de Rizópodos Amebinos hasta ahora descritas como parásitos del intestino del hombre, esto es: *Entamaeba coli* (Loesch), *Entamaeba histolytica* (Schaudinn), *Ent. tetragena* (Viereck y Hartmann; —sinónimo—, *Ent. africana*) y *Ent. minuta*, recientemente estudiada por ELMASSIAN (1).

Aparte la especie clásica *Entamaeba coli*, con la cual la forma hallada por nosotros en las deposiciones de los en-

(1) Sur une nouvelle espèce amibienne chez l'homme, *Entamaeba minuta* n. sp. Morphologie-Evolution-Pathogenie, par M. ELMASSIAN.—(*Contralbl. f. Bakter.* Bd. 52, H. 3, 19 Nov. 1909, pág. 335, con dos láminas.)

Véanse también los trabajos fundamentales de:

SCHAUDINN.—Untersuchungen über die Fortpflanzung einiger Rhizopoden, &. (*Arb. a. d. Kaisertl. Gesndheits.* Bd. 19, H 3)

HARTMANN.—Eine neue Dysenterieamöbe. (*Arch. f. Schiffs-und Tropen-Hyg.* Bd. 12, 1908.)

NAGLER.—Entwicklungsgeschichtliche Studien über Amöben. (*Arch. f. Protistenk.* Bd. 14, 1909.)

VIERECK.—Studien über die in den Tropen erworbene Dysenterie. (*Arch. f. Schiffs-und Tropen-Hygiene*, 1907, núm. 1.)

fermos de Wermakogy y Asobla presenta evidentes diferencias, las otras tres especies merecen más detenido estudio.

En 1907, VIERECK, en dos casos de disentería tropical, observados juntos con otros numerosos debidos á *Entamaeba histolytica*, SCHAUDINN, describió una forma que en un principio identificó con la A. Coli, pero que luego le pareció muy acertadamente ofrecer caracteres diferenciales suficientes para crear la nueva especie *Ent. tetragena*, sobre todo por la presencia constante, así en las formas enquistadas como en las formas esquizogónicas libres, de cuatro núcleos.

En 1908, HARTMANN, estudiando algunos enfermos procedentes de las posesiones alemanas del Africa occidental, descubrió igualmente numerosas formas de una Ameba que en un principio llamó *Ent. africana*, pero posteriormente identificó en absoluto con la forma precedentemente descrita por VIERECK.

Trátase de una Ameba de 20-30 micras de diámetro, esférica, sin ectoplasma muy claramente diferenciado en estado de reposo, con pseudópodos ectoplásmicos escasos, protoplasma alveolar, núcleo visible en fresco (como acontece con *Ent. coli*, y al contrario de lo que es característico de *Ent. histolytica*, en la que el núcleo no se aprecia en fresco). HARTMANN, en posteriores descripciones, pone de relieve la existencia de un ectoplasma, también en reposo, bien diferenciado, homogéneo, refringente, y que destaca con claridad alrededor del entoplasma granuloso y alveolar. Pero los caracteres del núcleo, claramente visible en preparaciones directas en fresco, rodeado de espesa membrana nuclear, cuádruple en todas las formas enquistadas, son suficientes para el diagnóstico de la especie.

La especie descrita por ELMASSIAN es pequeña. Sus dimensiones varían entre 12 y 14 micrón; raramente alcanzan los 16-18 micrón. Por eso fué designada con el nombre de *Entamaeba minuta*. El protoplasma es netamente alveolar y con alveolos de grandes dimensiones ($1\frac{1}{2}$ -2 m.), con pare-

des espesas; no se logra diferenciar el ectoplasma. El núcleo es absolutamente invisible en fresco, lo cual constituye un carácter de importancia para diferenciar esta forma de la *Entamaeba tetragena*. Y en preparaciones teñidas, la estructura del núcleo la hace aparecer como tipo intermedio entre el de *Ent. histolytica* y el de *Ent. coli*, puesto que, como el primero presenta la cromatina acumulada en la periferia, aunque con gránulos menos gruesos y evidentes y en menor cantidad que en *Ent. histolytica*, tal como aparece en las clásicas descripciones y reproducciones de SCHAUDINN, y en la reciente y definitiva monografía de HARTMAN (Untersuchungen über parasitische Amöben—I. *Ent. histolytica*— en *Archiv für Protistenkunde*, 1909, XVIII, B., 2H., pág. 207, con lámina); y como el segundo (*Ent. coli*) posee una espesa y sólida membrana, si bien ésta aparece como sencilla, constituida por un solo borde, mientras en *Ent. coli* y en *Entamaeba tetragena* se aprecia como doble, constituida de dos capas concéntricas. En *Ent. histolytica* no existe traza alguna de membrana nuclear (1).

(1) ELMASSIAN escribe á este propósito (pág. 340, loc. cit.): «Pour mettre celle-ci—(la membrana nuclear)—en évidence il suffit pousser fortement la différenciation pendant une coloration à l'hématoxyline ferrique, et on la trouve alors à peine teintée en gris. En outre de gros grains de chromatine formant un élégant chapelet circulaire tranchent sur elle par leur couleur noire. Ce contraste rend la membrane plus manifeste. La méthode de Giemsa donne des indications très utiles sur la nature des membranes nucléaires chez les Amibes. Elle colore en rouge vif celle du noyau de l'*Ent. coli*, avec deux lignes limitants en violet, l'intérieur étant plus foncée; elle teinte au contraire en violet uniforme celle du noyau de notre espèce qui est plus épaisse.»

Y HARTMANN, en la Monografía ya recordada (pág. 213, loc. cit., *Arch. f. Protist.*, 1909): «Ausserst charakteristisch ist der Kern der vegetativen *Ent. histolytica*, wie schon SCHAUDINN hervorgehoben hat. Im Gegensatz zu *Ent. coli* (SCHAUDINN, 1904) und *Ent. tetragena* (HARTMANN, 1908) besitzt der Kern keine doppelt konturierte achromatische Membran, die bei den beiden anderen Arten ziemlich derb ist.»

ELMASSIAN ha podido sorprender en las numerosas preparaciones observadas las fases sucesivas de la evolución del parásito, y describe detenidamente los fenómenos de autogamia, con formación de las enormes masas cromáticas, que se aprecian claramente en algunas de las formas por nosotros encontradas y dibujadas en las preparaciones procedentes del enfermo de Wermakogo.

Los fenómenos de Autogamia se verifican probablemente en todas las especies de Amebas intestinales según un mismo plán, que se reduce en suma al observado y descrito magistralmente por SCHAUDINN.

ELMASSIAN ha observado fenómenos parecidos en *Ent. minuta*, como antes HARTMANN en *Ent. tetragena*.

En la especie hallada por nosotros en los enfermos de Wermakogo y de Asobla, particularmente en el primero, se aprecian claramente algunas formas con grueso núcleo y con masas cromidiales considerables, extranucleares, excéntricas, características al parecer de las fases que preceden el enquistamiento.

Sin embargo, la formación de una red cromidial propiamente dicha, antes del desdoblamiento del núcleo para dar lugar á los nuevos núcleos destinados á la cópula cariogámica previa reducción, no es un fenómeno constante; ni la separación de las masas cromidiales que se encuentran siempre—más ó menos desarrolladas—en los quistes, acontece en el mismo momento en todas las formas.

En la *Ent. coli* estos fenómenos, especialmente la formación de las masas cromidiales, son menos intensos. Muy raramente se encuentran en los ejemplares de la *Ent. coli* las enormes masas cromidiales presentes en los quistes de *Ent. tetragena* y de *Ent. minuta*, como también en los de *Ent. histolytica*.

Estas masas de cromatina proceden desde luego del núcleo primitivo. A medida que va formándose la cromatina en el núcleo engrosado y por decirlo así hiperplástico en los

períodos que preceden los fenómenos de autogamia, se acumula en gruesas y recias granulaciones, luego en verdaderos bloques en la periferia del núcleo mismo, y por fin le abandona, emigrando en el citoplasma y fundiéndose, reunida en masas compactas que alcanzan á veces las dimensiones mismas del núcleo y aún las superan, hallándose á la vez dos, tres y más de estos grupos de cromatina en el protoplasma. Su papel es, probablemente, el de proporcionar nuevamente substancia cromática á los núcleos neoformados. Constituyen por consiguiente especies de reservas de cromatina, que en efecto desaparecen poco á poco en los últimos períodos de la evolución del proceso de autogamia intraquística.

Es difícil inducir por estos datos si el proceso de kariokinesis que da lugar á los nuevos núcleos, se cumple por tanto exclusivamente á cargo de las sustancias acromáticas de la masa nuclear primitiva, como han afirmado algunos de los más recientes observadores, ó bien si durante la formación de los husos de división una cantidad residual de cromatina suficiente participa de los fenómenos de la anafase y de la telefase. Nosotros hemos visto algunas formas con enormes masas cromidiales en el citoplasma, dispuestas á la periferia del cuerpo del protozoo, y sin embargo, el núcleo conservaba, con una clara diferenciación de cromosomas si bien reducidos y pequeños, las afinidades tintóreas y la reacción característica de la cromatina nuclear.

Nuestros conocimientos acerca de las fases sucesivas de desarrollo de las *Amaebas* han dado un paso muy importante después de la publicación de los estudios de KURT NAGLER, particularmente de su memoria fundamental «Entwicklungsgeschichtliche Studien über Amöben» (1), que ha visto la luz el año pasado en los *Archiv f. Protistenkunde*, y que comprende una serie de observaciones morfológicas y

(1) V. *Archiv für Protistenkunde*, XV Bd. 1-2, pág. 1-53, con VI láminas.

biológicas, llevadas á cabo y expuestas con gran método, acerca de las especies: *Amaeba froschi*, *A. spinifera*, *A. laertae*, *A. lacustris*, *A. horticola*, *A. albida*, *A. diploidea*.

Sigue á la exposición de los datos de observación una interesante discusión teórica acerca de la cuestión del Centrosoma y de la duplicidad del núcleo. Tales detalles citológicos no interesan sólo desde un punto de vista estrictamente científico, sino también desde un punto de vista práctico y por dos razones: en primer lugar, por la posibilidad de alcanzar un medio seguro de diagnóstico diferencial microscópico entre las diferentes especies de Amebas intestinales, que poseen muy distinta acción patógena; en segundo lugar, por la conveniencia de averiguar la formación y persistencia de las formas resistentes ó enquistadas de estos parásitos, formas difíciles de atacar con los medicamentos y que en realidad constituyen los elementos difusivos de la enfermedad.

Por los caracteres que las amebas halladas en el Muni en los enfermos de disentería presentaban, creemos que debe identificarse del todo la especie encontrada con la *Eutamaeba histolytica* SCHAUDINN.

V

En algunos ejemplares de tortugas del género *Clemmys* (*Clemmys africana*), capturadas en el interior del bosque en la cuenca del río Campo, en el mes de Septiembre de 1909, encontramos un parásito de los hematíes que llamó nuestra atención y que en sus diferentes aspectos se halla reproducido en nuestra lámina III.

Tratáse de un parásito productor de pigmento. La presencia de la *melanina* ó *hemozoina* (Sambon, 1907), no es frecuente en los hemoparásito de los reptiles en general y de los quelonios en particular. En estos vertebrados se han

descrito, en efecto, en estos últimos años, un gran número de hemogregarinas (telosporidios caracterizados por la ausencia de pigmento en los esquizontes endocelulares), pero en cambio, muy raras é inciertas especies de parásitos pigmentíferos.

DOFLEIN en su clásico y reciente *Lehrbuch der Protozoenkunde* (edición de Jena, 1909), no recuerda ninguna de estas formas ni en el género *Plasmodium* ni en el género *Haemoproteus* como descritas en la sangre de reptiles. En cambio, cita el género *Haemocystidium* CASTELLANI y WILLEY, descrito en los hematies de una tortuga de India (*Chitra indica*) con caracteres que, aceptando la clasificación reciente de SAMBÓN y HARTMANN, adoptada universalmente para la distribución de los parásitos hemáticos de la clase *Protozoa*, coinciden en realidad con los del género *Plasmodium*. Así lo entiende en efecto el mismo CASTELLANI, quien en su Tratado de Medicina tropical, publicado en colaboración con CHALMERS á fines del pasado año de 1910, (pág. 299) reúne la especie por él descrita *Haemocystidium simondi* en el género *Plasmodium* haciéndola sinónimo de *Plasmodium simondi*. Por fin, SIMOND describió con el nombre de *Haema-maeba metschnikovi* un hemoparásito de las tortugas del género *Trionyx* (*Trionyx indicus*), que por sus caracteres morfológicos debe hacer parte del género *Haemopróteus*, y considerarse por tanto como sinónimo de la especie actual *Haemopróteus metchnikovi*.

El parásito de los hematies de las tortugas del género *Clemmys* por nosotros encontrados en la Guinea española y por primera vez descrito, pertenece en nuestro entender por los caracteres morfológicos de los esquizontes y de los esporontes presentes en la sangre periférica del huésped vertebrado al género *Haemopróteus*, según el alcance y la significación dados á este género en la clasificación de SAMBÓN y HARTMANN; pero la especie es totalmente nueva, y nosotros nos permitimos llamarla con el nombre específico de

Haemoproteus cajali, dedicándola al ilustre investigador español.

Los comunes esquizontes del *Haemopróteus cajali* presentan el aspecto típico que se aprecia en la fig. 1 de la lám. III. El cuerpo protoplasmático del parásito, ocupa una gran parte del estroma del glóbulo rojo, rodeando al núcleo, disponiéndose en la forma característica de los *Haemoproteus* en general, y en él se aprecia una masa nuclear bastante considerable. Los gránulos de hemozoina se hallan esparcidos á la periferia del citoplasma del parásito.

El citoplasma aparece como finamente granuloso ó alveolar; en muchas formas de esquizontes maduros la estructura alveolar se hace manifiesta, se aprecia con absoluta claridad, tal como la representan las figuras 4, 8, 11, 13 de la lámina III. Observando con algún detenimiento buen número de preparaciones, se sorprenden fácilmente las fases de desarrollo de los esquizontes en el interior de los hematíes. Formas pequeñas, apenas apreciables en fresco, dotadas de escasa afinidad basiófila y apenas teñidas en preparaciones hechas con los comunes métodos de coloración, se encuentran en gran número de glóbulos rojos. Estas formas aumentan de volumen y adquieren el aspecto representado en la fig. 3 de la lámina III. Constituyen, pues, cuerpos citoplásmicos casi redondeados, generalmente dispuestos en uno de los polos del hematíe, en el interior de los cuales se aprecia una ó dos pequeñas masas cromáticas, y algunos pequeños gránulos de pigmento melánico. Las dimensiones de estos esquizontes van aumentando, y poco á poco el aspecto redondeado se convierte en el de huso alargado, tal como se aprecia en la fig. 5 y en la fig. 2 de la misma lámina. Una especie de pseudópodo del parásito bordeando el núcleo se extiende entre éste y el margen del citoplasma ó estroma del hematíe, constituyéndose así la forma típica del esquizonte maduro ya descrito y representado en las figuras 4, 11 y 1 y de la antedicha lámina. Al propio tiempo

se aprecian en algunos hematíes formas distintas de las descritas, y que debemos interpretar por sus caracteres estructurales como esporontes ó generadores de gametos. Pertenecen á este grupo las representadas en las figuras 6, 9, 10, 12 y 13. Particularmente la disposición y el aspecto de las masas cromáticas nucleares varían en estas formas, entre las cuales sería arriesgado determinar por ahora, con los solos indicios morfológicos que poseemos, los caracteres de una evidente diferenciación sexual, aun siendo muy suficientes semejantes datos para afirmar que nos encontramos en presencias de esporontes. En algunas de estas formas se aprecian distintamente en el interior de la masa nuclear los distintos cromosomas.

La proporción de hematíes parasitíferos en las tortugas examinadas era muy considerable. Por ahora, desconocemos del todo el modo de transmisión y el huesped invertebrado de este parásito. Nunca hemos sorprendido, en el examen de preparaciones directas en fresco, la formación de flagelos (microgametos) en la sangre periférica. En alguna de las formas parasitarias observadas la movilidad era grande, y los gránulos del pigmento aparecían arrastradas en vorticoso movimiento en el citoplasma del parásito. En la sangre de las tortugas parasitíferas no se apreció nunca ninguna forma parasitaria libre en el plasma. Creemos, por tanto, que sólo en ciertos períodos los esquizontes y los esporontes de esta especie atraviesan un período de vida libre, y esto quizás en el plasma de órganos internos. Si realmente esta especie no atravesara jamás un período evolutivo extraglobular, deberíamos incluirla en el género *plasmidium*. Pero el aspecto reniforme de los esquizontes y el dimorfismo evidente entre los esquizontes (alargados, rodeando al núcleo del hematíe) y los esporontes (esféricos), me inducen á creer que se trata efectivamente de un *Haemopróteus*.

Programa de premios para el concurso del año 1912.

Artículo 1.º La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.º «*Estudio geométrico de la polaridad en las figuras planas y radiadas de orden superior al segundo.*»

En el desarrollo del tema no deben admitirse más postulados que los fundamentales de la Geometría; y habrá de añadirse un apéndice en el que, por procedimientos algébricos, se comprueben las cuestiones tratadas en el cuerpo del trabajo presentado.

2.º «*Estudio acerca de la disociación electrolítica y agentes modificadores de ésta (disolventes y elementos disueltos, temperatura, radiactividad, etc.).*»

El trabajo comprenderá las acciones de estos agentes modificadores en general, pudiendo referirse preferentemente á alguno de ellos. En todo caso presentarán los autores pruebas de sus trabajos personales.

3.º «*Flora descriptiva de las algas de una parte del litoral de España.*»

La Memoria citará las localidades en que el autor haya encontrado cada una de las especies mencionadas, y contendrá las noticias y juicios críticos que el autor estime necesarios para relacionar los datos que aquélla suministre con los anteriormente publicados. El trabajo irá acompañado de ejemplares clasificados y convenientemente preparados de las especies recogidas.

Art. 2.º Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres cla-

ses: *premio* propiamente dicho, *accésit* y *mención honorífica*.

Art. 3.º El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación, una medalla de oro de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

Art. 4.º El *premio* se adjudicará á las Memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias y redacción bastante esmerada para que desde luego pueda procederse á su publicación.

Art. 5.º El *accésit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo, y en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

Art. 6.º El *accésit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas, ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reúnan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención del premio.

Art. 7.º La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accésit*, que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado ó á persona que le represente.

Art. 8.º La *mención honorífica* se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicación por cuenta y bajo la

responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accésit*.

Art. 9.º El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid*, y cerrado en 31 de Diciembre de 1912, á las diez y siete horas; plazo hasta el cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, cuantas Memorias se presenten.

Art. 10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó extranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

Art. 11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

Art. 12. Las Memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

Art. 13. De las Memorias y pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, á las personas que los presenten y entreguen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

Art. 14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accésit* se abrirán en la sesión en que se acuerde ó decida otorgar á sus autores una ú otra distinción ó recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

Art. 15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abri-

rán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas, y en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

Art. 16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accésit*, ni con *mención honorífica*, se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiere declarado. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

Art. 17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que por acuerdo especial de la Corporación podrá devolverseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado, como modelos de construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las Memorias que respectivamente les correspondan.

Madrid, 31 de Diciembre de 1910.

1917

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

5. ...

6. ...

7. ...

8. ...

9. ...

10. ...

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
XXX.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia quinta.....	481
XXXI.— Los «Phragmidium» de España, por <i>Blas Lázaro é Ibiza</i>	499
XXXII.— Cráneo Foguino del Museo Antropológico de Madrid, por <i>Luis de Hoyos Sáinz</i>	529
XXXIII.— Caracteres de las formas cuadráticas definidas, con aplicación á varias cuestiones, por <i>Julio Rey Pastor</i>	540
XXXIV.— Viaje de estudio á la Guinea española. — Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por <i>Gustavo Pittaluga</i> . (Continuación.).....	554
Programa de premios para el Concurso del año 1912	569

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX. - NUM. 8.

Febrero de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXV.— Conferencias sobre Física matemática
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia sexta.

SEÑORES:

Estudiando las condiciones mecánicas de lo que llamamos un fluido perfecto, establecimos las ecuaciones generales de equilibrio para cualquier punto del mismo fluido, y por lo tanto, para todo él.

Estas ecuaciones eran las siguientes:

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

en las que X , Y , Z representaban las componentes de la fuerza que actuaba en cada punto del fluido; funciones continuas de x , y , z y constituyendo los datos principales del problema. Porque el problema es este: dadas las fuerzas que actúan sobre el sistema, determinar sus condiciones de equilibrio.

ρ representa la densidad en cada punto y es también una función de x , y , z .

Por último, p , que es la verdadera incógnita del problema, será también una función de x , y , z ; pero todavía no la conocemos: precisamente lo que buscamos es la presión que

en cada punto determinan las fuerzas exteriores cuando se ha establecido el equilibrio.

Hemos dicho que ρ representa la densidad en cada punto, más dos casos pueden presentarse: que la densidad en cada punto del fluido sea siempre la misma, aunque varíe de un punto á otro.

O puede suceder que la densidad en cada punto dependa de otras condiciones, por ejemplo, de la presión y de la temperatura, que será el caso general; ó aun suponiendo que la temperatura sea constante, podrá suceder que ρ sea una función de p , á saber:

$$\rho = f(p)$$

En este caso hay otra incógnita más, porque ρ dependerá del estado de equilibrio y de la presión que en dicho estado se desarrolla en cada punto.

En rigor, en este caso las incógnitas serán dos: p y ρ .

Pero si tenemos una incógnita más, también tenemos otra ecuación más que es la precedente.

*
*
*

El problema analítico que ha de dar solución para el problema mecánico del equilibrio, está reducido á integrar las tres ecuaciones fundamentales; es decir, á determinar para p una función tal de x , y , z que derivada con relación á x , dé ρX ; que derivada con relación á y dé ρY ; y que derivada con relación á z dé ρZ .

Pero estas tres ecuaciones, en rigor, equivalen á una ecuación única

$$dp = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz,$$

ó bien

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

toda vez que esta ecuación expresa lo mismo exactamente que las tres anteriores, á saber: que la diferencial total de p está expresada por el segundo miembro de dicha ecuación, ó lo que es equivalente, que sus derivadas parciales con relación á x, y, z son $\rho X, \rho Y, \rho Z$.

Podemos, pues, enunciar la solución del problema analítico de esta manera.

Integrar la ecuación anterior.

Y advertimos de paso, que suponemos que las funciones que entran en el problema son continuas y uniformes, es decir, que para cada sistema de valores de x, y, z cada función tiene un valor único.

Como nuestro objeto no es estudiar por completo estos problemas y estas teorías, que en rigor pertenecen á otra asignatura, sino recordar lo puramente preciso para nuestro objeto, nos limitaremos á las consideraciones que vamos apuntando.

Hemos dicho que el problema analítico se reduce á integrar la ecuación

$$dp = \rho Xdx + \rho Ydy + \rho Zdz;$$

pero esta ecuación no siempre es integrable; para serlo debe cumplir con cierta condición, es decir, que considerando el trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$ deberá existir una función de x, y, z , la cual hemos designado por ρ , que multiplicada por dicho trinomio lo convierta en una diferencial exacta de las tres variables x, y, z .

Esta función es la que se llama *factor integrante*, y vemos que el factor integrante, es decir, el que hace integrable la ecuación, representa en este caso una función que da la densidad del flúido en cada punto.

De otro modo, que siendo el primer miembro dp una diferencia exacta, debe serlo el segundo

$$\rho X dx + Y dy + \rho Z dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz),$$

y por lo tanto ρ debe ser una función tal que multiplicándola por $X dx + Y dy + Z dz$ resulte una diferencial exacta de x, y, z .

Pero hemos dicho que esto no sucederá en general, y ya lo vimos en el curso anterior: si X, Y, Z son arbitrarias, el factor de integrabilidad ρ no existe.

Es preciso que X, Y, Z cumplan con una condición que vamos á determinar.

Si existe una función de x, y, z , que es la que hemos representado por ρ , y es tal que multiplicándola por

$$X dx + Y dy + Z dz$$

la expresión

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz$$

es una diferencial exacta de x, y, z , es claro que deberán verificarse, según se demuestra en análisis, estas tres condiciones

$$\frac{d\rho X}{dy} = \frac{d\rho Y}{dx}; \quad \frac{d\rho X}{dz} = \frac{d\rho Z}{dx}; \quad \frac{d\rho Y}{dz} = \frac{d\rho Z}{dy};$$

y desarrollando,

$$X \frac{d\rho}{dy} + \rho \frac{dX}{dy} = Y \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{dY}{dx},$$

$$X \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dX}{dz} = Z \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{dZ}{dx},$$

$$Y \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dY}{dz} = Z \frac{d\rho}{dy} + \rho \frac{dZ}{dy};$$

y multiplicando estas tres ecuaciones por Z , $-Y$, X , sucesivamente, y sumando, tendremos

$$\begin{aligned} & XZ \frac{d\rho}{dy} + \rho Z \frac{dX}{dy} - YZ \frac{d\rho}{dx} - \rho Z \frac{dY}{dx} \\ & - XY \frac{d\rho}{dz} - \rho Y \frac{dX}{dz} + ZY \frac{d\rho}{dx} + \rho Y \frac{dZ}{dx} \\ & YX \frac{d\rho}{dz} + \rho X \frac{dY}{dz} - ZX \frac{d\rho}{dy} - \rho X \frac{dZ}{dy} = 0, \end{aligned}$$

y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} & \rho Z \frac{dX}{dy} - \rho Z \frac{dY}{dx} - \rho Y \frac{dX}{dz} + \\ & + \rho Y \frac{dZ}{dx} + \rho X \frac{dY}{dz} - \rho X \frac{dZ}{dy} = 0 \end{aligned}$$

Dividiendo ahora por ρ , y agrupando los términos convenientemente, tendremos

$$\begin{aligned} & X \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) + \\ & + Z \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) = 0. \end{aligned}$$

Esta es la condición de integrabilidad.

Es decir, que X , Y , Z no pueden ser arbitrarias, deben cumplir con la condición precedente, para que el segundo miembro de la ecuación de equilibrio sea una diferencial exacta de x , y , z como lo es el primer miembro que está expresado por $d\rho$.

Tomando arbitrariamente X , Y , Z , el equilibrio no es posible, lo cual por otra parte es evidente; si sobre cualquier sis-

tema actúan fuerzas arbitrarias lo pondrán en movimiento y el problema será de dinámica, pero no de estática.

En cálculo integral se demuestra, que si se verifica la condición anterior, existirá el factor ρ , y el problema podrá resolverse, es decir, que podrá integrarse la ecuación de equilibrio determinando la presión p en cada punto.

Como este problema es puramente de análisis y pueden estudiarlo mis alumnos en multitud de obras, por ejemplo, para no citar más que dos muy modernas, en la de Mr. Humbert, y en la de Mr. Goursat no entraremos en nuevos desarrollos.

*
* *

Diremos, sin embargo, que si la densidad ρ es función de la presión p , y prescindimos de la temperatura, suponiéndola constante; es decir, si

$$\rho = f(p)$$

la ecuación de equilibrio

$$dp = \rho (Xdz + Ydz + Zdz)$$

se convertirá en

$$dp = f(p) (Xdx + Ydy + Zdz)$$

ó bien

$$\frac{dp}{f(p)} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

El primer miembro es evidentemente una diferencial exacta, cuya integral se obtiene por una cuadratura; luego el se-

gundo miembro debe ser también una diferencial exacta de x, y, z , para lo cual deberán verificarse estas condiciones

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}; \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}; \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$$

las cuales satisfacen evidentemente á la condición general que antes hemos obtenido, puesto que reducen á cero los tres paréntesis.

Integrando, pues, ambos miembros y llamando φ y ψ á las dos funciones de la integración resultará

$$\varphi(p) = \psi(x, y, z) + C$$

siendo C una constante arbitraria, que se determinará por otras condiciones del problema, en cuyo estudio no podemos entrar.

Si tuviéramos en cuenta la temperatura, el problema sería mucho más complicado, y se enlazaría, nada menos, que con toda la termodinámica, que deseo y espero explicar en otro curso.

Con tanto más motivo, cuanto que es una de las ramas principales de la Física Matemática y alrededor de ella se riñe la gran batalla contra la hipótesis mecánica.

Hay en este problema mucho que estudiar, y mucho que criticar, y creo que se exagera la nota, como vulgarmente se dice, al negar que los múltiples problemas, que la termodinámica comprende, queden fuera por completo de la hipótesis mecánica.

Diremos, sin embargo, antes de concluir esta pequeña digresión, que realmente la termodinámica en el problema de equilibrio, que estamos estudiando, no es propiamente problema de estática, sino de dinámica; pero con un carácter especial porque se refiere á movimientos medios y periódicos del sistema: ideas son estas que no puedo por ahora esplanar.

Sólo advertiré, para concluir, que este fué el punto de vista en que se colocó Mr. Briot en un tratado muy breve, muy elemental, pero á mi entender con excelente orientación.

* * *

Si en la masa del flúido, cuyo equilibrio estudiamos, elegimos un punto en el que la presión tenga un valor determinado p , y partiendo de este punto vamos determinando

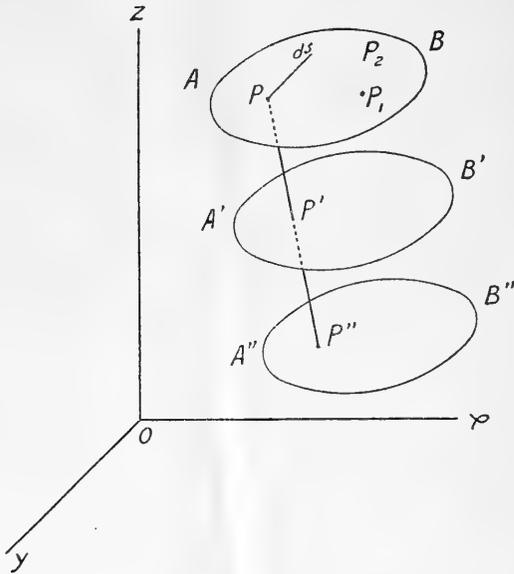


Figura 9.^a

por ley de continuidad todos los demás puntos de la masa en que la presión tenga el mismo valor, formaremos una superficie AB (figura 9) en la que todos los puntos P, P_1, P_2 sufrirán la misma presión p .

Repitiendo esta operación, siempre con sujeción á la

ley de continuidad, trazaremos en la masa flúida una serie de superficies, que recibirán el nombre de *superficies de igualdad de presión*: algo así como líneas de nivel de la presión.

La ecuación diferencial de estas superficies, se deducirá desde luego, de la ecuación general de equilibrio

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz)$$

haciendo p constante, y por lo tanto $dp = 0$.

Dicha ecuación diferencial de las superficies de nivel, ó de igual presión, será por lo tanto,

$$\rho (Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Pero se sabe, por analítica, que esta es la condición para que una línea, cuyas componentes tengan por valor ρX , ρY , ρZ sea perpendicular á una superficie en un punto x , y , z á cualquier elemento ds de componentes dx , dy , dz . Supongamos, para simplificar, el flúido incompresible y ρ constante.

Pues la proposición anterior se demuestra desde luego, dividiendo por

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

oda vez que resulta

$$\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = 0,$$

ecuación que nos dice que la suma de los productos de los cosenos de los ángulos, que forman ambos vectores con los ejes coordenados, es igual á cero; ó que el ángulo que forma

la resultante de X, Y, Z , que es la fuerza, con el elemento ds , es igual á 90° .

En suma, las líneas de fuerza (X, Y, Z), son normales á la superficie de nivel.

Todo esto es elemental y nos contentamos con recordarlo rápidamente.

*
* *

En rigor, hemos resuelto, en general, el problema del equilibrio, ó, por lo menos, una de las dos partes en que este problema se divide.

Porque este problema, y pudiéramos decir casi todos los problemas de la Física matemática, tienen *dos partes*.

Todos ellos están calcados en el mismo patrón, que conviene recordar, para ir poniendo de relieve la unidad de la ciencia.

En los principales problemas de la Física matemática, hay que distinguir, como decimos, dos partes.

1.^a La que se refiere á la generalidad del sistema: al campo del sistema.

2.^a La que se refiere á los límites.

Presentemos en prueba de ello algunos ejemplos.

*
* *

En la teoría de la elasticidad hemos encontrado estas dos partes á que nos referimos.

En la primera hemos hallado las ecuaciones de equilibrio para cada punto ó para cada elemento infinitamente pequeño de la masa.

Y dijimos: obtenidas las integrales, es preciso que estas

integrales tengan tal generalidad, que satisfagan al equilibrio de la superficie, que es la segunda parte del problema, y esta segunda parte es casi siempre la más difícil.

Lo dicho se refiere al problema estático; mas para el problema de dinámica tendríamos que repetir lo que acabamos de exponer, aunque con alguna más complicación.

Tendríamos que obtener las ecuaciones del movimiento de un punto, ó de un paralelepípedo elemental, y obtenerlas con la generalidad suficiente para que satisficiera al movimiento de la superficie límite y además á las condiciones del instante inicial; de modo, que aquí el problema de los límites es doble; problema de límites *en el espacio* y problema de límites *en el tiempo*.

*
* *

Otro ejemplo: Movimiento del calórico en un cuerpo conductor, ó si se quiere, equilibrio de temperatura.

Pues el problema se divide también en dos partes: una relativa al interior del cuerpo, utilizando como siempre el paralelepípedo clásico: otro relativa á la superficie, en la que podrá haber una distribución determinada de temperaturas, á cuya distribución deberán satisfacer las integrales que hemos obtenido en la primera parte del problema.

*
* *

Otro ejemplo más, y será el último, porque con lo dicho creo que se habrá comprendido bien mi pensamiento.

En cualquiera de los problemas modernos de la electrodinámica aparecen los mismos dos casos que venimos señalando.

Uno el que se refiere á los campos electromagnéticos, de cuyas ecuaciones ya dimos una muestra, por decirlo así, en las últimas conferencias del curso precedente.

Otro el relativo á los límites del sistema, aunque sobre éste no se ha fijado la atención de los creadores de la nueva doctrina, tanto como la resolución completa del problema requiere; ni es tampoco este el momento oportuno para plantearlo en toda su extensión.

*
* *

Diremos, para concluir, como antes indicábamos, que en el problema general del equilibrio de un fluido elástico, aparecen los mismos dos problemas que venimos planteando en los varios ejemplos precedentes.

Pero se presenta aquí un nuevo problema, que es, no el del equilibrio absoluto, sino el de un equilibrio relativo compatible con determinados movimientos.

Anticipándonos á estudios posteriores, podremos decir que á este problema se refiere la obra de Mr. Poincaré, titulada «Figures D'Equilibre d'une masse fluidé». Y con esto daremos por terminado el brevísimo resumen que en estas últimas conferencias hemos hecho de las fórmulas de equilibrio de un fluido perfecto.

*
* *

Pasemos á las fórmulas de la *hidrodinámica*, ó mejor dicho, del movimiento de un fluido sujeto á las condiciones indicadas.

Hacemos esta salvedad, porque la palabra hidrodinámica no es la propia, dado su origen etimológico; no se trata del

agua, ni de ningún líquido, ni tampoco de cuerpos gaseosos, sino de masas flúidas: en suma, del *flúido perfecto*, tal como lo hemos definido.

Al agua, á los líquidos y á los gases, podrán aplicarse las teorías establecidas ó que vamos á establecer, pero sólo de una manera aproximada.

Las teorías de estos últimos sistemas materiales son mucho más complicadas, que las teorías que se establezcan para un flúido ideal, absolutamente continuo, en que la viscosidad es nula, y que es incapaz de resistir á tensiones, sin que la discontinuidad aparezca inmediatamente.

Este es nuestro caso y la materia de nuestro estudio.

Lo demás serán aplicaciones prácticas con mayor ó menor grado de aproximación.

Pasemos, pues, á estudiar el movimiento del flúido perfecto.

*
* *
*

La *Mecánica clásica*; la que se llamaba *mecánica nacional*; la que ha resuelto problemas admirables en la Astronomía; la que ha creado, por más que la aplicación fuera atrevida, la admirable ciencia que se llamó en particular teoría matemática de la luz; la que dominaba casi en absoluto para todos los problemas de la Física, mientras conservó su imperio la *hipótesis mecánica*, hoy se ve grandemente combatida.

Y aunque es legítimo señalar sus deficiencias, y aún su impotencia pudiéramos decir, para resolver los hondos problemas de la electricidad y el magnetismo, se peca de exageración evidente, y de injusticia notoria, al querer desecharla en absoluto, como instrumento viejo y gastado, y que ningún servicio puede prestar ya en el estudio de los fenómenos naturales.

No; la mecánica subsiste y subsistirá tal como llegó á crearse en el siglo XIX al completar su evolución y su desarrollo.

No explica todos los fenómenos, lo hemos dicho muchas veces, más para una primera solución de los problemas, hasta ahora parece insustituible.

De todas maneras, y dentro de la imperfección de las cosas humanas, y en sus límites naturales, no existe ciencia más perfecta.

Que en sus fundamentos hay ciertas nebulosidades; ¿y en qué organismo científico no se encuentran?

¿Es todo luz, sin un punto de sombra, en las matemáticas puras?

¿No palpitan en el fondo de los problemas matemáticos ciertas nebulosidades de orden metafísico que nadie ha podido aclarar hasta ahora?

¿Son tan llanos los problemas del infinito y aún la misma teoría de los límites?

¿Es todo luz, volvemos á repetir, en la teoría de la *continuidad*; y en la modernísima teoría de los *complejos* han llegado á la conformidad todos los matemáticos?

Pues dejando aparte todas estas sombras, que son y parece que serán siempre sombras, propias de la razón humana, que acaso ella proyecta sobre sí misma, yo sostengo mi anterior afirmación, y digo que por su estructura, por su sencillez y por su claridad relativa, la vieja Mecánica es un modelo de perfección.

Por cada deficiencia que en ella se encuentre, se encuentran millares y millones en las demás ciencias de la Naturaleza.

Por cada punto de sombra, hay en las demás disciplinas científicas nubarrones de negrura; y la sencillez y la armonía de los métodos de la mecánica racional, únicamente se ven superados por los métodos de las matemáticas puras.

Siempre se ha creído que la perfección de una ciencia de-

pende en gran parte de *su unidad* y del menor número de principios en que se apoya.

Si una ciencia se puede reducir, por ejemplo, á *veinte* principios, y permitaseme que materialice mi pensamiento, y lo exprese por números, y otra ciencia se apoya en *cinco* principios, que la condensan en cinco unidades, esta última se considerará siempre como más perfecta que la primera que necesita á cada paso buscar puntos de apoyo.

Pues bien; la estática de la Mecánica clásica, es decir, la teoría del equilibrio de cualquier sistema ponderable, se condensa en un sólo principio: *el de las velocidades virtuales*.

En esta gran unidad están comprendidos *casi todos* los problemas de la estática, y no decimos todos por temor á las afirmaciones absolutas.

Y por otra parte los problemas de la dinámica, gracias al teorema de D'Alambert, se reducen á problemas de equilibrio.

Basta agregar á las fuerzas que actúan en el sistema las fuerzas de inercia, y aplicar al conjunto de unas y otras el principio de las velocidades virtuales.

En suma, toda la Mecánica clásica se reduce al principio de las velocidades virtuales y al teorema de D'Alambert; y por éste la Mecánica entera se condensa en el primero: el principio de las velocidades ó trabajos virtuales.

Mayor sencillez, más admirable unidad, no se ha conseguido en ninguna ciencia.

Tan admirable es la unidad á que nos referimos, y de la cual se deducen las ecuaciones clásicas de Lagrange, que aun de estas ecuaciones se saca partido para los problemas de la electricidad y el magnetismo, y en Maxwell y en Poincaré encontraríamos y encontraremos cuando llegue el caso multitud de ejemplos.

Y eso que la aplicación de las ecuaciones de Lagrange á los problemas de la electricidad y el magnetismo es de dudosa legitimidad.

Sólo puede fundarse su aplicación en analogías, y su justificación depende del éxito.

Verdad es que cada aplicación de estas fórmulas es un triunfo para las mismas y aun para la Mecánica clásica, de donde se derivan.

* * *

Lo hemos recordado hace un momento: todo problema de movimiento, tratándose de la materia ponderable, puede reducirse á un problema de equilibrio, aplicando el principio de D'alambert.

Hemos establecido el equilibrio de los flúidos perfectos y de las fórmulas que lo expresan; podemos deducir inmediatamente las fórmulas de la hidrodinámica.

Las fórmulas del equilibrio eran estas

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = Z$$

y además

$$\rho = f(p),$$

suponiendo la temperatura constante.

Pues estas serán las ecuaciones del movimiento, considerando que para cada punto del flúido se agrega á las fuerzas cuyas componentes son X , Y , Z , como si se tratara de nuevas fuerzas efectivas, las fuerzas de inercia, ó, mejor dicho, los componentes de dichas fuerzas.

Representando por m la masa de un punto, los componentes de la fuerza de inercia serán

$$-m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Es decir, fuerzas iguales y contrarias á las que, si el punto

m estuviera libre, le comunicaría una aceleración cuyas componentes fuésen

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Y esto, dicho sea entre paréntesis, es la demostración inmediata del teorema de D'Alambert; porque la fuerza que comunica á cada punto, el movimiento que realmente adquiere, es, en cierto modo, la acción efectiva y útil de todo el sistema sobre dicho punto; luego, si en él se aplicase una fuerza igual y contraria á dicha acción, el punto no podría moverse, y repitiendo para todos los demás puntos esto mismo, es evidente que el sistema quedaría en equilibrio.

Y continuemos nuestro análisis.

Las fuerzas X , Y , Z se refieren á la unidad de masa: para la masa del volumen $dx \cdot dy \cdot dz$, resulta $\rho \, dx \cdot dy \cdot dz$, siendo la densidad ρ ; y por eso después de dividir por dx , dy , dz , entran en las ecuaciones del equilibrio ρX , ρY , ρZ .

A estas componentes debemos agregar las componentes de la fuerza de inercia; sustituyendo en ellas á m la densidad ρ .

En suma: las ecuaciones de equilibrio que hemos obtenido nos servirán para el movimiento del sistema poniendo en vez de

$$\rho X, \rho Y, \rho Z$$

las expresiones

$$\rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right), \quad \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

y tendremos

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right), \quad \frac{dp}{dy} = \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad \frac{dp}{dz} = \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

que serán las ecuaciones del movimiento del fluido.

Si como hacen algunos autores, se quieren escribir bajo forma más abreviada, representando por J la aceleración y por J_x, J_y, J_z , las componentes de ésta, es decir, sustituyendo

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

por

$$J_x, J_y, J_z$$

tendremos para las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{dp}{dx} = \rho (X - J_x), \quad \frac{dp}{dy} = \rho (Y - J_y), \quad \frac{dp}{dz} = \rho (Z - J_z)$$

Claro es que á estas ecuaciones hay que agregar

$$\rho = f(p)$$

suponiendo la temperatura constante.

De estas ecuaciones vamos á partir al exponer la teoría de los torbellinos; y hemos creído oportuno recordar los principios elementales de la hidrostática y de la hidrodinámica para que los alumnos marchen desde el principio sobre terreno conocido.

XXXVI.— Antagonismo entre el magnesio, el calcio y el bario.

POR J. GÓMEZ OCAÑA

S. J. Meltzer y J. Auer (1) y R. Joseph y S. J. Meltzer (2), demostraron, respectivamente, el antagonismo entre las sales de calcio y magnesio, y entre las de este último metal y las de bario.

Los dos primeros investigadores citados experimentaron en los conejos la rapidez con que las sales de Ca, administradas en inyección intravenosa, disipan los síntomas de inhibición, de anestesia y de parálisis, que en dichos animales producen las sales de magnesio, inyectadas á dosis suficientes bajo la piel ó en los músculos.

He aquí el argumento experimental en el que Joseph y Meltzer fundan el antagonismo entre las sales de magnesio y bario: Un conejo, *A*, recibe una dosis mortal de $MgSO_4$ en inyección intramuscular y muere á los pocos minutos.

Otro conejo, *B*, sufre dos inyecciones contemporáneas: de una dosis mortal de $MgSO_4$ por los músculos, y otra intravenosa y también mortal de $BaCl_2$; este conejo triunfa de las dos intoxicaciones y vive.

El tercer conejo, *C*, sucumbe á una dosis de $BaCl_2$, igual á la que impidió que el conejo *B* muriese envenenado por el $MgSO_4$.

Los autores hacen notar que, en tanto que los síntomas de la intoxicación magnesiana son totalmente abolidos por el calcio, el Ba impide únicamente que mueran de parálisis respiratoria los conejos intoxicados por las sales de magnesio, dejando, por lo tanto, vigentes los demás efectos que se deben á las dichas sales. Pero como el conejo *C* sucumbe á una dosis de $BaCl_2$, igual á la que se inyectó al

conejo *B* superviviente, es lógico suponer que el Mg á su vez contrarresta ó anula los efectos fatales del Ba.

El calcio, el bario y el magnesio, son metales bivalentes muy afines entre sí, especialmente los dos primeros; el bario es extraño á los organismos, y tiene justa reputación de venenoso; el calcio y el magnesio, por el contrario, gozan consideración de elementos biogénicos, ingresan con nuestros alimentos y entran en la constitución de los tejidos y humores. El calcio y el magnesio figuran juntos en la química viviente, en mayores proporciones aquél que éste, y han sido precisas las investigaciones modernas para descubrir en ellos las poderosas funciones que después analizaremos; al calcio se le consideraba como cuerpo mineralizador para dar consistencia á los tejidos equeléticos, y del magnesio se barruntaba, pero no se precisaba, alguna acción nociva para las plantas.

Las sagaces observaciones de los sabios, en estos últimos años, sobre la supervivencia de los animales marinos en soluciones salinas ó manteniendo la vida y función de los órganos musculosos aislados (corazón, intestinos, matriz, etc.) con líquidos nutritivos de varia composición (sueros naturales ó artificiales, soluciones fisiológicas de Na Cl, líquidos de Ringer, Locke, Hédon-Fleig, etc.), han enseñado mucho acerca de las necesidades nutritivas de los organismos y de los tejidos. La vida normal sólo es posible, según Osborne, y en esta opinión le acompaño, cuando en el líquido ambiente se encuentran todos los elementos metálicos que entran en la estructura del protoplasma, es decir, cuando el líquido intercelular es, no sólo *isotónico*, sino también *isofisiológico* con el líquido celular. La falta ó el exceso de alguno de los elementos constituyentes entraña grave alteración de la estructura y funciones de la célula, que aparece como víctima de una intoxicación; pero en ésta se destaca la acción propia ó específica del cuerpo que por su exceso la determinó.

Conviene, pues, antes de entrar en el juicio de antagonismo entre los tres metales, calcio, magnesio y bario, pasar revista, aunque sea muy rápida, á sus respectivas acciones fisiológicas.

II

Acción fisiológica é intoxicación por las sales de magnesio.

Las primeras noticias sobre la acción tóxica de las sales de magnesio las dieron Jolyet y Cahours en 1869, y les atribuyeron una acción paralizante, análoga á la que ejerce el curare sobre los nervios motores. Esta acción paralítica curarizante de las sales de magnesio ha sido después mantenida por Binet (3), Wiki (4) y Bardier (5), y últimamente por Guthrie y Ryan (6).

Todos estos autores convienen en la acción de las sales de magnesio sobre los nervios motores, dejando indemnes los músculos y los nervios sensitivos; las pruebas aducidas en pro de esta acción curarizante han sido muy variables, pero todas giran alrededor del método empleado por Cl. Bernard para discernir la función tóxica local del veneno de las flechas, mediante el aislamiento de un miembro á la circulación. Semejante aislamiento de la circulación y del veneno lo consiguió Binet en las ranas, con el procedimiento de Cl. Bernard, Guthrie y Ryan, en los mismos animales, por ligadura de los vasos femorales, y Wiki, en los conejos, mediante la nutrición de un miembro con la sangre de otro animal de la misma especie, que se había hecho incoagulable por la inyección de un extracto de sanguijuelas. Se empalmaban la arteria y vena yugular de este conejo con los vasos femorales de otro que había de ser intoxicado con el $MgSO_4$, y de esta suerte el veneno extendía su acción tóxica á todo el cuerpo, excepto el miembro regado con la sangre extraña. Con estos distintos métodos creen haber probado los inves-

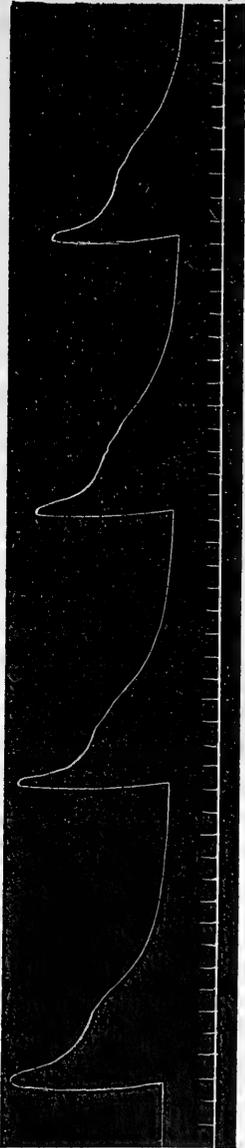


Figura 1.

Miograma por excitación farádica fuerte del nervio ciático de una rana intoxicada con el $MgCl_2$.

tigadores que antes se citan, la acción electiva del magnesio sobre los nervios motores, y aun más precisamente sobre el aparato neuro-muscular ó las placas motoras.

Por lo que hace á la descripción de los síntomas de los animales intoxicados por el magnesio, son bastante expresivos los cuadros descritos por los autores, y el que menciona Binet refiriéndose á los conejos se recomienda por su exactitud. Es notable, en efecto, la situación de estos roedores envenenados por las sales de magnesio; echados á la larga, incapaces de moverse, como muertos, y sin embargo respirando tranquilamente. Y es que se manifiesta muy tardía la parálisis de los músculos respiratorios; pero los animales, al cabo dejan de respirar y mueren por asfixia, cuando aun late el corazón. La supervivencia de las contracciones cardiacas es otra analogía entre la intoxicación magnesiana y la del veneno de las flechas.

Opuesta á la opinión de los repetidos autores que consideran como venenos curarizantes á las sales de magnesio, es la de los sabios americanos Meltzer y Auer (7) quienes deducen de sus experimentos las funciones anestésicas de las mismas. Las sales de magnesio gozan, según Meltzer y Auer, de enérgica acción anestésica y

así se explica la respiración tranquila y la calma en que sucumben estos animales á la intoxicación magnésica: en ningún caso, dicen en otro lugar, producen irritación local las sales de magnesio, ni aunque se apliquen en solución concentrada; pero sí determinan la interrupción de la conductibilidad nerviosa, más precoz en los nervios sensitivos que en los motores. Contestando en otro trabajo á la objeción que les hacen Guthrie y Ryan, los cuales tratan de explicar la anestesia por la asfixia, Meltzer y Auer niegan este supuesto, pues la insensibilidad es completa cuando aún se mantiene casi normal la respiración y además la tranquilidad con que mueren los conejos intoxicados por el magnesio se diferencia mucho de los fenómenos tumultuosos de la asfixia. Sin embargo, aunque los animales cuando se establece la parálisis y la anestesia aparecen por causa de ellas, completamente tranquilos, calma que se acentúa por la regularidad de los movimientos respiratorios, es igualmente cierto que cuando se inyecta una dosis mortal de $MgCl_2$ por el peritoneo, la acción tóxica se inaugura muchas veces con convulsiones acompañadas de emisión de orina y deposición de heces fecales. Estas convulsiones también se notan cuando la dosis tóxica se administra por inyección intravenosa.

La anulación de los nervios motores inutiliza prácticamente á los sensitivos, pues aun cuando el animal sienta, ni por acto reflejo, ni por reacción voluntaria y consciente puede expresar con movimientos su sensación: por razón contraria, aunque análoga, la pérdida completa de la sensibilidad entraña la parálisis ya que los nervios motores ninguna orden refleja, tienen que llevar á los músculos; pero así y todo, el examen imparcial de las funciones de los mamíferos intoxicados por las sales de magnesio, sustrae al observador de los exclusivismos experimentales antes apuntados.

La anulación-completa de las funciones del cerebro en los conejos intoxicados con el magnesio, hace pensar en su acción depresora sobre los centros nerviosos; la baja de la pre-

sión arterial y la debilidad del corazón, en un efecto también deprimente sobre los nervios que le gobiernan; la suspensión del peristaltismo, en una influencia inhibitoria sobre el intestino;

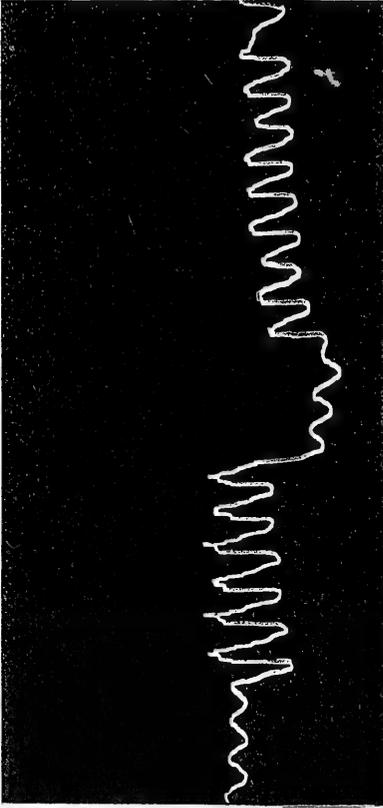


Figura 2.

Cardiograma con los efectos inhibitorios de la excitación del cabo periférico del vago derecho en un conejo después de la inyección intravenosa de 0,4 gramos de $MgCl_2$.

la falta de reacción á las excitaciones más enérgicas, en animales que respiran tranquilamente y conservan los reflejos nasal y parpebral, en la anestesia; y por último, no es posible prescindir de la parálisis en animales tendidos á la larga, sin moción ni reacción posibles. Por todo ello, han aparecido en la historia del magnesio, puntos de vista especiales y distintos de los que importan una acción curarizante ó anestésica exclusiva: Loeb considera al Mg y al Ca, más aquél que éste, como iones inhibitorios, que determinan una disminución de la excitabilidad, análoga á la que se produce en la región anódica de un nervio por el paso de la corriente continua (8). Jolyet (9) atribuye á las sa-

les de magnesio, la acción inhibitoria que ejerce sobre el corazón el agua marina usada como líquido para la circulación artificial. Meltzer y Auer (10) señalan una acción inhibitoria sobre el intestino á las sales de magnesio administradas en

inyecciones subcutáneas ó intravenosas. Cristaux (11) apunta en la acción fisiológica de las dichas sales, su acción deprimente sobre los centros y los nervios, más precoz en éstos que en aquéllos; nosotros (12) observamos la inhibición del peristaltismo por la aplicación local del $MgSO_4$ al intestino aislado del conejo; Macnider y Matthews (13) indican por su parte, la depresión que causan las sales de magnesio en el mecanismo nervioso del corazón; Lillie (14) notó la nociva influencia de las soluciones magnesianas sobre la contractilidad de las larvas de la arenicola; y Delhaye (15) afirma la acción paralítica y anestésica de las sales de magnesio. Por nuestra parte (16) las declaramos deprimentes de todo el sistema nervioso, periférico y central, motor y sensitivo. En la figura 1 ofrecemos un miograma obtenido en los gemelos de una rana intoxicada con el $MgCl_2$ por excitación farádica del nervio ciático: dicho miograma nos parece un tétanos frustrado por la acción depresora del veneno.

¿Cómo matan las sales de magnesio? Meltzer y Auer creen que por asfixia; y en efecto, nótase la persistencia de los latidos cardiacos en los conejos que ya han dejado de respirar por la parálisis magnesia. Nosotros hemos observado muchas veces la supervivencia de los latidos cardiacos cuando ya se habían apagado los movimientos respiratorios; y la figura 3 representa un cardiograma de un conejo de 2.030 gramos (conejo núm. 37), muerto por la doble y consecutiva inyección de 0,4 y 0,5 gramos de $MgCl_2$; en junto, 0,9 gramos de sal magnesia. Es de notar que dicho cardiograma se obtuvo cuando ya el animal no respiraba, y en él se marcan los efectos de la excitación farádica del cabo periférico del vago derecho, fenómeno digno de mención, pues expresa la resistencia de la excitabilidad del dicho nervio cardiaco á la acción deprimente del magnesio.

Este hecho es tanto más notable cuanto contrasta con otros observados por Melzer y Auer y por Macnider y Matthews,

favorables á la depresión del vago cardiaco y del mecanismo inhibitorio del corazón, por obra de las sales de magnesio. Nosotros hemos encontrado excitable el vago en los conejos intoxicados por el cloruro de magnesio; pero en el animal cuyo cardiograma aparece en la figura 3, nos pareció menos excitable que otras veces, y era lógico que así sucediese, puesto que la gráfica se obtuvo algunos minutos antes de la muerte y cuando ya la parálisis había invadido todos los músculos, incluso los respiratorios.

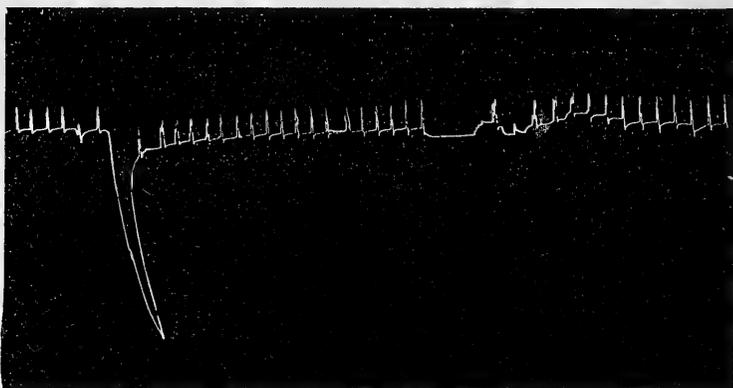


Figura 3.

Cardiograma de un conejo que ya no respiraba á consecuencia de la inyección intravenosa de una dosis mortal de $MgCl_2$. Nótase la caída del tono y la suspensión de los latidos por excitación del cabo periférico del vago derecho.

Y sin embargo, nosotros no podemos asentir á que sea la asfixia la causa única de la muerte de los animales intoxicados por el magnesio, ó al menos negamos que la parálisis respiratoria sea el único factor en la intoxicación fatal por el $MgCl_2$. He aquí, entre otros muchos, cuatro experimentos que garantizan nuestra opinión.

Previa traqueotomía, inyectamos en el peritoneo de un conejo de 905 gramos (conejo núm. 34) 10 cent. cúb. de la disolución molecular de $MgCl_2$; presentáronse, como de ordinario, los síntomas de anestesia y de parálisis, precedidos de

algunos fenómenos convulsivos, y cuando dejó de respirar, practicamos la respiración artificial: á los pocos minutos recobró la respiración espontánea; pero por poco tiempo, porque dejó de respirar, y después cesó de latir el corazón, sin que con la respiración artificial lográramos evitar la muerte.

Tampoco pudimos volver á la vida, con la respiración artificial, á otro conejo de 1.520 gramos (conejo núm. 32), muerto por la inyección de 1 gramo de $MgCl_2$, por la vena auricular. Creemos, por tanto, que alguna otra causa, además de la parálisis de los músculos respiratorios, influye en la muerte de los animales envenenados con las sales de magnesio; y los que como nosotros hemos presenciado las crisis mortales que sufre el corazón en el dicho envenenamiento, no pueden menos de sospechar que otra parálisis mortal, la del corazón, acecha á los animales intoxicados por las sales de magnesio. En otro lugar (loc. cit.) hemos publicado la caída fatal de la presión sanguínea en un perro á consecuencia de la inyección intravascular del $MgCl_2$, y en la figura 4 representamos un cardiograma que representa la crisis mortal de un conejo (conejo núm. 35) de 935 gramos á consecuencia de la inyección intravenosa de 0,4 gramos de $MgCl_2$: la gráfica muestra grandes oscilaciones en el tono y ritmo del corazón, y nótese que al iniciarse la crisis decaen el tono y la frecuencia, en forma que recuerda la inhibición por el vago.

En otros experimentos, abrimos el pecho á los animales cuando, á pesar de la respiración artificial, se apagaron los latidos cardíacos hasta el punto de no percibirse al tacto ni denunciarlos un alfiler clavado en el corazón á través de la pared torácica. Muchas veces encontramos latiendo débil, con lentitud y rareza al corazón que nos pareció muerto por inspección exterior; pero en estos corazones murientes pudimos certificarnos de la acción paralítica del $MgCl_2$ inyectado directamente en las cavidades cardíacas. He aquí dos experimentos muy demostrativos:

Tratábase de un conejo de 920 gramos (conejo núm. 41); previa traqueotomía se le inyectó por el peritoneo 1,5 gramos de $MgCl_2$. A los cinco minutos de la inyección la respiración es profunda, rara y se verifica como á sacudidas; á

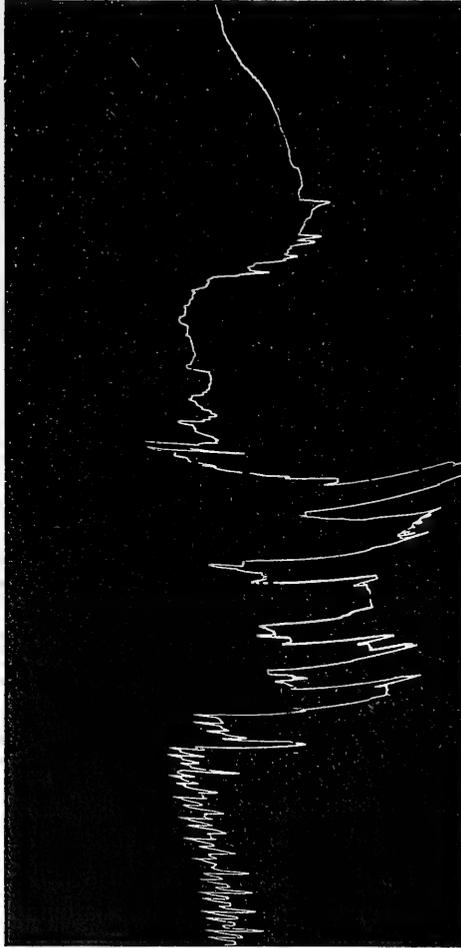


Figura 4.

Cardiograma que representa la crisis mortal de un conejo á consecuencia de la inyección intravenosa d. 0,4 gramos de $MgCl_2$.

los diez minutos se torna superficial y casi intermitente: el corazón late con buen ritmo. Cuando tememos que cese la respiración espontánea, practicamos la artificial; á los diez y ocho minutos la suspendemos y nos certificamos que el

animal no respira naturalmente. A los veintidós minutos ya no se notan los latidos cardíacos: abrimos el tórax y vemos que, aunque débilmente, continúa latiendo el corazón. Se persevera en la respiración artificial, con la que no se evita la parálisis mortal del corazón, que ocurrió á los pocos minutos.

A otro conejo de 790 gramos (conejo núm. 42), también traqueotomizado, se le inyecta por el peritoneo un gramo de $MgCl_2$. A los ocho minutos está el animal anestesiado y paralítico, y á los quince deja de respirar. Se le practica la respiración artificial; á los cuarenta y cinco minutos no se perciben los latidos cardíacos por palpación y á los cincuenta ni aun con el alfiler; entonces se abre el pecho y se encuentra inmóvil el corazón; se le excita mecánicamente y vuelve á latir débilmente, con lentitud, que permite seguir con la vista la onda contractil, y aloritmia (dos pulsacioness de la aurícula por una del ventrículo). Se inyectan en la aurícula unas gotas de la disolución concentrada de $MgCl_2$ y muere el corazón.

Antes afirmamos, de acuerdo con Meltzer y Auer, que no es la anestesia consecuencia de la asfixia; ahora debemos añadir que la última contribuye algo á la muerte del corazón. Corazones que habían dejado de latir por causa del magnesio, han vuelto á contraerse rítmicamente merced á la respiración artificial, pero por poco tiempo. Al cabo se ha impuesto la intoxicación magnesiana, que acaba primero con los movimientos respiratorios y después con los cardíacos.

III

Acción fisiológica de las sales de calcio.

El Ca, que sigue en el organismo una carrera paralela al Mg, le acompaña también en su acción fisiológica. El calcio es considerado por Loeb, al par del magnesio, como elemento moderador que enfrena la acción excitante del sodio y del

potasio, y permite el reposo ó diástole de los músculos: éstos, sin el estímulo del Na y del K, degenerarían en la inacción; pero también se consumirían en un trabajo excesivo si no fuera por la moderación que á su contratilidad imponen el calcio y el magnesio. Son estos últimos iones anabólicos de funciones análogas á las de los nervios inhibitorios, el vago cardíaco, por ejemplo; en tanto que el Na y el K son elementos catabólicos que aguijonean la función de los músculos, como lo hacen los nervios motores. Según Loeb, la contracción rítmica de los músculos se mantiene por la relación cuantitativa entre el Na y K de una parte y el Ca y el Mg de otra.

La función moderadora que el Ca en cantidades mínimas ejerce sobre la actividad celular, fué conocida de Sabbatani (17), y en otro lugar el mismo autor (18) añadió que cierta concentración del *Ca-ion* es indispensable á la vida de los protoplasmas; por esta razón, las inyecciones intravenosas de sales decalcificantes (fluoruros, oxalatos, metafosfatos y citratos) provocan en los animales graves fenómenos de excitación, seguidos de parálisis y terminados por la muerte. La excitación primitiva sería efecto de la pérdida del Ca que enfrena la actividad de los tejidos: la parálisis ulterior es la consecuencia de la resta del *Ca-ion*, indispensable á la vida del protoplasma. La acción tóxica de las citadas sales decalcificantes es relativa á la energía con que se apoderan y retienen el Ca, ó sea á la baja de la concentración del *Ca-ion* en el protoplasma y en los líquidos del organismo.

Howell y Duke (19), en un primer trabajo reconocieron al Ca, en cierta concentración, el poder de aumentar la energía y amplitud de las contracciones cardíacas: una concentración de CaCl_2 entre 0,006 y 0,092 p. c. en el líquido que mantiene la circulación artificial, determina aumento en la fuerza de los latidos sin que sean constantes los efectos sobre el ritmo: mayor concentración del CaCl_2 (entre 0,023 á 0,069) produce más enérgicas, pero más lentas contraccio-

nes. Más tarde, en 1908, los mismos autores, á propósito de la excitación del vago cardiaco, contribuyeron con nuevos datos á la función inhibitoria del Ca, ó al menos á confirmar su antagonismo con el K; este elemento era, en efecto, eliminado por el miocardio en el líquido de Locke, con el que se mantenía la circulación artificial en corazones de conejos y de gatos, y siempre la eliminación de potasio fué relativa á las excitaciones del nervio inhibitorio del corazón.

La participación directa del Ca en la inhibición cardiaca fué investigada por Busquet y Pachon (20), los cuales demostraron que no se da este fenómeno sin la intervención del *Ca-ion*. Ultimamente, nuestros compatriotas Pi-Suñer y Bellido (21) han logrado la misma demostración por otro método. Nuestros compañeros de Barcelona, observaron que el CaCl_2 inyectado por las venas ó directamente en el corazón de los perros, determina fenómenos mecánicos análogos, aunque mucho más intensos, á los que se consiguen por la excitación de los nervios vagos. Por efecto del Ca, nótese cierta pérdida en la negatividad de los ventrículos, y si entonces se estimula el vago, se acentúan los fenómenos en proporciones superiores á la intensidad del estado positivo que se obtiene por la simple excitación del dicho nervio. El electrocardiograma, bajo la influencia del calcio, confirma al que se obtiene por la excitación de los vagos.

No terminaré esta reseña sin advertir una diferencia de grado que muchos autores notaron entre la acción moderadora del calcio y del magnesio; la de este último es mucho más enérgica, según se demuestra en las gráficas representadas en la figura 5; puede verse en ellas (la superior corresponde al MgCl_2 y la inferior al CaCl_2) cómo se pronuncia más la fatiga por el magnesio; el calcio á dosis pequeñas me ha parecido dotado de propiedades tónicas que tal vez sean la consecuencia de su función anabólica, pues impuesto el diástole ó reposo, mientras dura, economizan los músculos sus propios materiales.

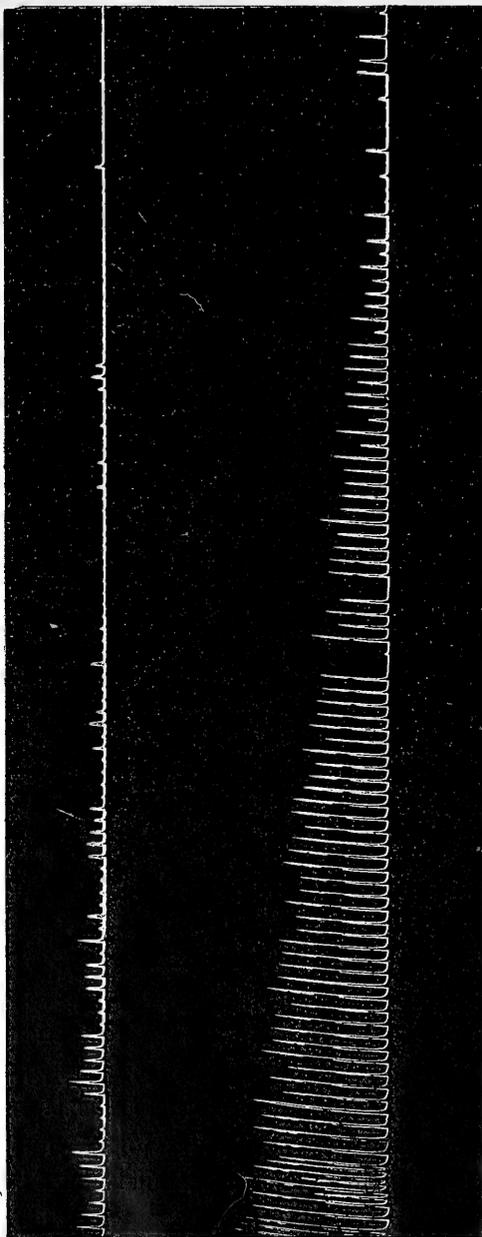


Figura 5.

Curvas paralelas de la fatiga de los gemelos de la misma rana, bajo la influencia local del $MgCl_2$ y $CaCl_2$, respectivamente.

Por mi parte, estoy dispuesto á compartir la opinión de la mayoría de los autores que, como queda dicho, se pronuncian en favor de la acción anabólica y moderadora del calcio; pero con una excepción que ya consta en mi comunicación al último Congreso de fisiólogos, en Viena. (22). Creo que la acción depende de la dosis, y cuando las sales de calcio se emplean en cantidades muy pequeñas, son manifiestos sus efectos tónicos y excitantes. Actualmente me ocupo del antagonismo local (en el corazón) entre los cloruros de calcio y de magnesio, y pronto publicaré sus resultados, hasta el presente favorables á una acción excitante del primero que contrasta con la paralítica del de magnesio.

IV

Acción fisiológica y efectos tóxicos del cloruro de bario.

El cloruro de bario, que es la sal por nosotros empleada en nuestros experimentos, es un veneno cardio-muscular que actúa directamente sobre la fibra del miocardio (23); en opinión de Arkavine (24) la acción tóxica del $BaCl_2$ sobre el corazón se acompaña de contracción de los vasos y del intestino; por el contrario, deprime la excitabilidad de los nervios y de los músculos. Filippi (25) coincide con los anteriores en afirmar que el $BaCl_2$ es un veneno que actúa sobre la fibra muscular del corazón y produce arritmia, espasmos y parálisis, en sístole, en los animales inferiores. Wallis y Roth (26) deducen de sus experimentos en las aves, que los efectos del $BaCl_2$, á diferencia de los del curare y la nicotina, se determinan directamente sobre la substancia muscular; y Vejeux Thyrode (27) confirma el aumento de tono y la excitación del intestino por obra de la misma sal de bario. Ringer y Lœb (28) observaron que las sales de bario provocan contracciones rítmicas de los músculos aislados de la rana, que cesan pronto por la gran toxicidad de aquéllas.

Nuestras personales investigaciones, en ranas y conejos, no discrepan mucho en lo fundamental de los citados autores; pero hemos observado fenómenos que nos permiten concluir que el BaCl_2 es un veneno que en los animales de sangre caliente, tras de un período de excitación acompañado de convulsiones tónicas, determina parálisis, con depresión de la excitabilidad de los nervios y conservación de los reflejos hasta poco antes de la muerte. Hemos observado, además, en las ranas una hinchazón, notable sobre todo en el vientre, que no sólo se hace apreciable á la vista, sino que se denuncia por el aumento de peso del cuerpo.

Cuando se inyecta en el saco dorsal de una rana la dosis de un centímetro cúbico de la disolución $\frac{m}{10}$ de BaCl_2 ,

al principio no se nota de particular más que una ligera excitación; pero pasadas algunas horas, de ocho á veinte, aparece el animal casi paralítico, flotando algunas veces, vientre arriba, incapaz de volverse, cuando se coloca sobre el dorso, torpe de movimientos, y sin embargo, aunque deprimidos y tardíos, conserva los reflejos. Uno de los más curiosos se despierta por el estiramiento de un miembro; después de un período latente bastante largo se nota la reacción motora en el miembro

estirado, después en el congénere y luego en los demás.

Las ranas, en esta situación, son sensibles al dolor y dan

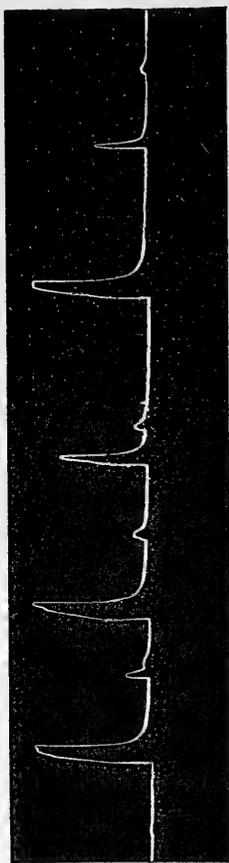


Figura 6

Mlograma de los gemelos de la rana con las contracciones de cierre y abertura á las 20 horas de la inyección de un centímetro cúbico de la disolución

$$\frac{m}{10} \text{ de } \text{BaCl}_2.$$

muestras de afectarse por él cuando se deposita una gota de ácido clorhídrico sobre la piel: reaccionan entonces al dolor de la quemadura, pero con poca viveza, y no se limpian la gota de ácido como lo hacen las ranas normales y aun las decapitadas.

Valga de ejemplo de lo expuesto lo sucedido en el experimento practicado en una rana de 65 gramos, á la que se inyectó en el saco dorsal un centímetro cúbico de la disolución

$\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$. A las vein-

te horas de la inyección la encontramos hinchada, parésica y pesa 90 gramos; cuando se la excita, puede andar, aunque torpemente, uno ó dos pasos; siente la quemadura por el ácido clorhídrico; pero no se limpia la gota depositada en su piel. Por excitación del ciático se obtiene el miograma representado en la figura 6; pero en seguida se agota la excitabilidad del nervio. Pónese á prueba dicha ex-

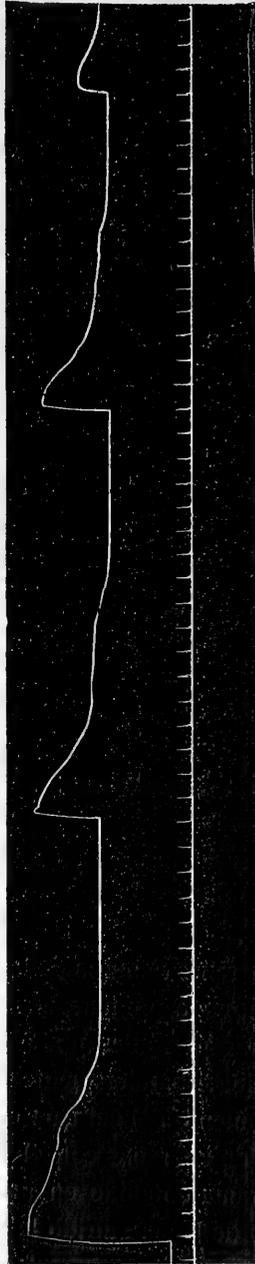


Figura 7.

Contracciones tetánicas por excitación farádica energética del ciático de una rana á los 45 minutos de la inyección de un centímetro cúbico de la disolución molecular de $BaCl_2$.

citabilidad con la corriente farádica fuerte y se logran contracciones tetánicas cuya meseta decae en seguida, como ocurrió también con otras ranas, cuyos ciáticos se sometieron también á la excitación tetanizante.

El miograma representado en la figura 7 corresponde á la excitación farádica enérgica del ciático de una rana á los cuarenta y cinco minutos de la inyección de un centímetro cúbico de la disolución m de $BaCl_2$. Recuerda este miograma al de la figura 1, que expresaba la acción tóxica del Mg; pero nótese como diferencia que en el del Ba la curva tiende á ser tetánica y la meseta se mantiene algo, sobre todo en la primera contracción.

El experimento realizado con la rana á la cual pertenece la gráfica representada en la figura 7 merece conocerse en detalle, porque es ejemplo de intoxicación aguda por el cloruro de bario. Pesaba esta rana 48 gramos y se la inyectó en el saco dorsal un centímetro cúbico de la disolución molecular de $BaCl_2$. A los seis minutos de la inyección, se volvía en el agua y respondía con movimientos generales y convulsivos á la excitación del ácido clorhídrico aplicado sobre la piel. A los veinte minutos ya no podía volverse en el agua cuando se la colocaba vientre arriba; pero aún reaccionaba enérgicamente al ácido clorhídrico, realizaba movimientos espontáneos y encogía los miembros cuando se los estiraban.

A los cuarenta minutos de la inyección pesaba 51 gramos, y aun se movía espontáneamente; el ciático no era excitable á la corriente galvánica y sí á la farádica fuerte, con la bobina inducida, completamente incluida en la inductora.

El decaimiento del corazón es síntoma constante de la intoxicación de las ranas con el $BaCl_2$, y la figura 8 muestra el cardiograma obtenido en una de 58 gramos á las diez y ocho horas de haber sufrido la inyección en el saco dorsal de un centímetro cúbico de la disolución $\frac{m}{10}$ de la dicha sal.

La debilidad y rareza de los latidos que figuran en el cardiograma de la figura 8, llamaron la atención de cuantos observamos la robustez del corazón de aquel animal. El nervio ciático del mismo era inexcitable á la corriente galvánica y á la farádica, y el cuerpo apareció hinchado como de ordinario; la rana había ganado cinco gramos de peso.

La hinchazón y el aumento de peso los hemos observado constantemente en las ranas, y no puede atribuirse á la adición del líquido inyectado, porque excede, con mucho, al valor de éste; tampoco lo podemos achacar al efecto hipertónico, pues falta ó se mantiene en términos modestos, cuando se inyectan soluciones moleculares y decimoleculares de otros cloruros ó de azúcar de caña al 10 por 100. Con las di-

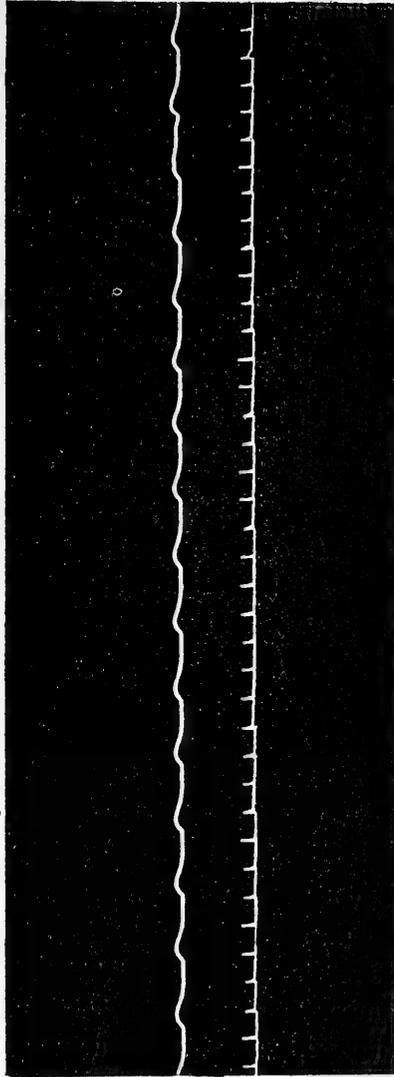


Figura 8.

Cardiograma de una rana á las 18 horas de la inyección de un centímetro cúbico de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$. La curva cronográfica al pie mide segundos.

losuciones hipertónicas en el saco dorsal hemos notado un ligero aumento de peso é hidropesía del saco dorsal, pero no la hinchazón y el exceso de peso observado en las ranas que han sufrido la inyección de un cent. cúb. de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$. Calculando el aumento de peso en 12

ranas, en relación al de sus cuerpos, hemos obtenido una proporción media centesimal de un 17 por 100 próximamente. No tenemos noticias que ningún autor, antes que nosotros, haya señalado este curioso síntoma de la intoxicación por el $BaCl_2$, y lo explicamos por la parálisis, pues faltos de tono los músculos, decaída la circulación y deprimido también el tono de los tejidos, éstos se dejan hinchar por el agua.

Algunas veces hemos observado, también en las ranas, á consecuencia de la inyección de fuertes dosis de $BaCl_2$, la aparición de un estado tetaniforme, que mantenía tieso al animal, hasta el punto de poderle sostener en posición horizontal, asido por la extremidad de un anca.

He observado muchas veces los síntomas de la intoxicación por el $BaCl_2$, administrado en inyecciones intraperitoneales á los conejos. Inmediatamente después de la inyección se echan sobre el vientre, como si le dolieran las tripas, extienden los miembros, orinan y defecan. Después vienen convulsiones tónicas, opistótonos, gritos, temblores, y por último, paresia y parálisis. Es de notar la conservación de los reflejos y de la sensibilidad. Los autores dicen que mueren por asfixia los animales intoxicados por el $BaCl_2$; por mi parte, puedo añadir que no se evita la muerte de los conejos, aunque previamente se les haya preparado con la traqueotomía y se practique la respiración artificial apenas se inicie la parálisis. Si la asfixia mata, no debe ser por la parálisis de los movimientos respiratorios, sino más bien por la del corazón.

He aquí ahora, como ejemplo, lo que ocurrió á un conejo

de 1.765 gramos de peso (conejo núm. 11), á consecuencia de la inyección intraperitoneal de cinco cent. cúb. de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$. Diez minutos después de la inyección, estira los miembros y se apoya sobre el vientre; á los cuarenta minutos dió un grito, saltó y cayó de costado, tieso y paralítico. Reacciona á las excitaciones, como los envenenados con la estricnina; siguió envarado, con la cabeza y los miembros en extensión; algunas veces gritaba, conservó el reflejo parpebral, la pupila aparecía dilatada y reaccionaba torpemente á la luz. La respiración era irregular, padecía de vez en cuando movimientos convulsivos y temblor muy notable en la cabeza.

Este conejo se recobró algo de la parálisis, especialmente de la de los miembros izquierdos, y en esta situación parecía hemipléjico. Al ver su alivio, abrigamos esperanzas de conservarle; pero al siguiente día le encontramos muerto.

V

Dosis tóxicas de los cloruros de magnesio y de bario.

Para juzgar de los fenómenos de antagonismo que en seguida vamos á exponer, conviene echar por delante algunos datos sobre las dosis tóxicas respectivas del calcio, del magnesio y del bario. Los hemos nombrado en orden creciente de función venenosa, pues el menos tóxico es el calcio, sigue el magnesio y es el más venenoso el bario.

Richet (29) ha estudiado recientemente la acción tóxica de los cuerpos simples, y para descartar toda acción específica sobre los músculos ó los nervios, la ha referido á un organismo elemental, el fermento láctico, cuya actividad es al mismo tiempo muy fácil de medir por un sencillo procedimiento de acidimetría. El profesor de París calculó la toxí-

cidad media para el BaCl_2 en 450, y comparada con ésta, resultan muy inferiores las acciones venenosas del MgSO_4 , igual á 2.600, y las del calcio, equivalente á 2.000.

Las dosis de cloruros de calcio, magnesio y bario, necesarias para matar un kilogramo de animal vivo, varía según la especie del animal, la vía de introducción y la rapidez con que se absorba. Para Macwilliam (30) en inyección intravenosa, el MgSO_4 es mortal para los perros y los gatos á la dosis de 0,08 á 0,1 gramos por kilogramo de animal próximamente. Joseph y Meltzer (31) calculan las dosis tóxicas de los cloruros de calcio y de magnesio en el perro y administradas en inyecciones intravasculares lentas en las proporciones siguientes: $\text{MgCl}_2 = 0,223$, $\text{CaCl}_2 = 0,444$: las dosis corresponden á las disoluciones moleculares de los dos cloruros y se calculan en relación al kilogramo de peso del animal. En el conejo, Meltzer y Auer, estiman que es dosis mortal la de 1,75 gramos de MgCl_2 por kilogramo de peso animal.

Por lo que hace al cloruro de magnesio, administrado á los conejos en inyecciones intraperitoneales, nuestras investigaciones nos han enseñado que no puede precisarse la dosis, porque varía mucho la rapidez de la absorción en los diversos animales: seis conejos que sucumbieron todos menos uno, á los pocos minutos de la inyección, nos dan una dosis tóxica media de 1,5 gramos por kilogramo, próximamente. Hemos visto morir rápidamente á un conejo de 935 gramos de peso por la inyección intravenosa (vena auricular) de 0,4 gramos de MgCl_2 , y á otro de 2.030 gramos por dos inyecciones intravenosas consecutivas de MgCl_2 , en junto 0,9 gramos.

También deducimos de nuestros experimentos en los conejos, que la dosis mortal para el cloruro de bario, administrado en inyecciones intraperitoneales, se aproxima á un gramo por kilogramo de peso vivo.

VI

Antagonismo entre el cloruro de calcio y el de magnesio.

A partir de los estudios de Meltzer y Auer, he aquí el fruto de mis experimentos en ranas y conejos, por lo que hace al antagonismo entre los cloruros de calcio y de magnesio. En las ranas no aparece tan claro como en los conejos, y



Figura 9.

Conejo que se salva por el CaCl_2 de la intoxicación por el MgCl_2 . Muéstralo la fotografía, manteniendo la postura normal en estos roedores, cuando otros, con dosis menores, cayeron paralíticos y anestesiados.

sin embargo, se marcan bien las diferencias, como lo demuestra el relato paralelo de dos de estos anfibios inyectados contemporáneamente; el uno, que señalamos con la letra A, pesa 70 gramos, y recibe en el saco dorsal un centímetro cúbico de la disolución *m* de MgCl_2 : el otro C de 51

gramos, un centímetro cúbico de la disolución al décimo de cloruro de magnesio y un centímetro

cúbico de la $\frac{m}{10}$ de CaCl_2 .

Esta segunda rana reacciona vivamente á la excitación por el ácido clorhídrico, pasadas tres horas de la inyección. La rana A, á pesar de haber recibido menos dosis, se muestra mucho más abatida y con torpe reacción.

En los conejos es evidente el antagonismo entre el calcio y el magnesio.

El CaCl_2 administrado con bastante anticipación por la vía intraperitoneal ó poco antes de la introducción del cloruro de magnesio, si se le inyecta por las venas, atenúa los síntomas de la intoxicación magnesiana y evita la muerte por ella. Son interesantes, en este punto, los relatos sucintos de los siguientes experimentos:

Refiérese el primero á un conejo de 1.070 gramos (conejo núm. 2) que aparece retratado en la figura 9; se le inyectó un centímetro

cúbico de la disolución $\frac{m}{10}$ de

CaCl_2 por la vena auricular é inmediatamente dos gramos de MgCl_2 por el peritoneo. A los

pocos minutos de la doble inyección queda este conejo anestesiado y paralítico; pero sin alteración respiratoria,

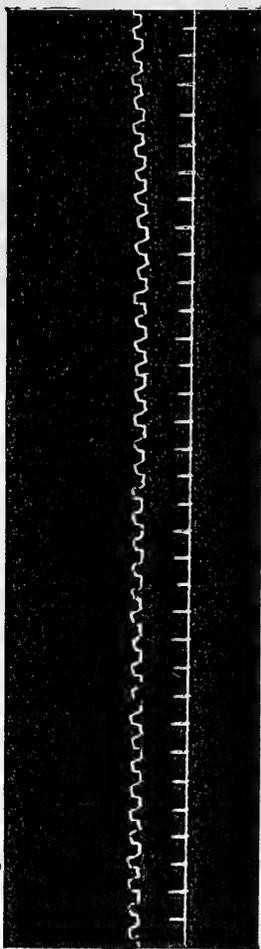


Figura 10.

Gráfica de la respiración nasal del conejo representado en la figura anterior: el tiempo va medido en segundos.

como lo demuestra el trazado de la respiración nasal representado en la figura 10.

Este conejo, por la virtud del cloruro de calcio, conservó la vida, á pesar de haber recibido la inyección de una dosis mortal de cloruro de magnesio; pero la dosis de cloruro de calcio no fué suficiente para contrarrestar por completo los efectos anestésicos y paralíticos del magnesio; por esto le pusimos una hora después de la inyección magnesiana, otra

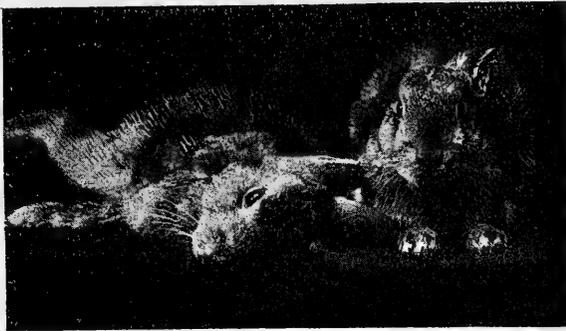


Figura 11.

Muestra dos conejos que contemporáneamente sufrieron la intoxicación por el $MgCl_2$; pero el de la derecha escapó á sus estragos por haber recibido con anticipación una dosis protectora de $CaCl_2$.

también intraperitoneal de seis centímetros cúbicos de la disolución decimolecular de cloruro de calcio. Apenas falta decir que, después de esta segunda inyección cálcica, el conejo se restableció completamente.

Los efectos tóxicos de las altas dosis de $MgCl_2$ inyectado en el peritoneo, son rápidos y fatales; de otra parte, la absorción del $CaCl_2$ debe ser lenta, y por todo ello no se evita la muerte de los animales por la inyección intraperitoneal de la sal magnésica, aunque pocos minutos después se acuda en auxilio del animal con otra de cloruro cálcico, hecha por la misma vía. Véase, en prueba de estas afirmacio-

nes, lo ocurrido en un conejo de 1.135 gramos (conejo número 3): le inyectamos en el peritoneo 25 centímetros cúbicos de la disolución molecular de $MgCl_2$, é inmediatamente se inicia la intoxicación con síntomas convulsivos; practicamos, sin pérdida de tiempo, una inyección intraperitoneal de seis centímetros cúbicos de la disolución decimolecular de $CaCl_2$, sin que ella logremos evitar la muerte inmediata del animal.

La más torpe absorción del $CaCl_2$ respecto al $MgCl_2$, se demostró en otro conejo de 1.120 gramos (conejo núm. 5), á quien inyectamos por el peritoneo cinco centímetros cúbicos de la disolución $\frac{m}{10}$ de $CaCl_2$, é inmediatamente después le inyectamos por la misma vía dos gramos de $MgCl_2$. También murió este conejo en seis minutos con síntomas convulsivos, y pudimos comprobar que latía el corazón cuando ya habían cesado los movimientos respiratorios.

Cuando se inyecta el cloruro de calcio en dosis suficientes por la vía venosa, ó por la peritoneal con la suficiente anticipación para que sea absorbido antes de que el cloruro de magnesio produzca sus estragos, no sólo se salva á los animales de la muerte, sino que se evitan completa y absolutamente los fenómenos paralíticos y anestésicos que producen las sales magnesianas. En este punto, estamos de acuerdo con las conclusiones de Meltzer y Auer, y como testimonio ofrecemos los siguientes experimentos hechos en días sucesivos en un conejo de 1.075 gramos (conejo núm. 7).

Para graduar su susceptibilidad á la sal de magnesio, le inyectamos por el peritoneo 7 1/2 cent. cúb. de la disolución m de $MgCl_2$; á los diez minutos quedó paralítico y anestesiado tan profundamente, que se podía tocar la córnea sin que el animal cerrase el párpado. Tendido á la larga, hubiera parecido muerto si no se notaran los movimientos respiratorios. Al cuarto de hora comenzó á reponerse, y ya á los veinte minutos mantenía levantada la cabeza, aunque no podía soste-

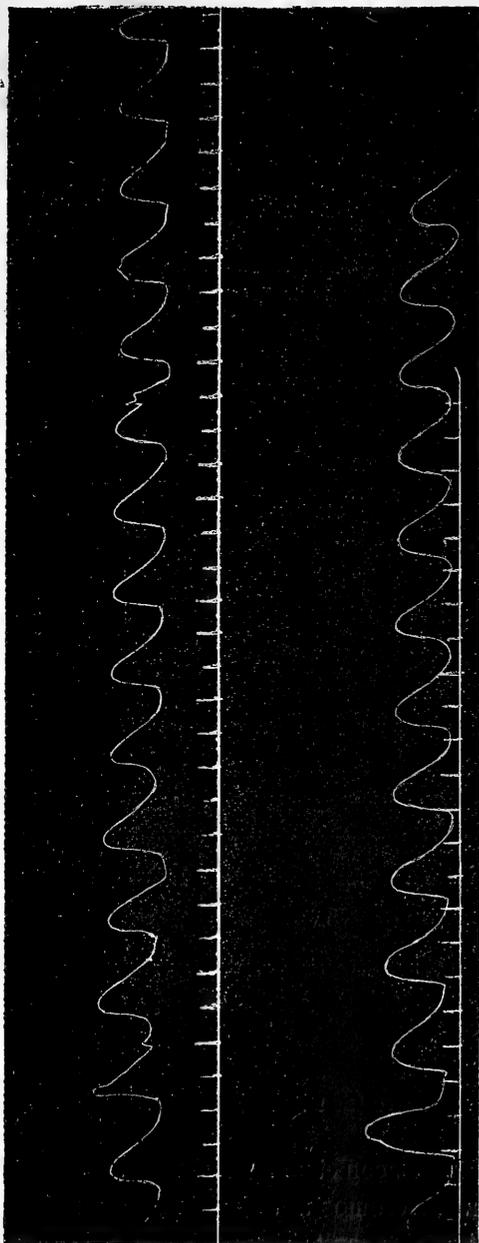


Figura 12.

Cardiograma de una rana veinte horas después de la inyección de un centímetro cúbico de la disolución m de $MgCl_2$ y otro centímetro cúbico de la $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$.

nerse sobre sus patas. Hora y media después de la inyección este conejo estaba completamente restablecido.

Al día siguiente se le inyectan por el peritoneo 2 cent. cúb. de la disolución $\frac{m}{10}$ de CaCl_2 sin que se manifieste síntoma alguno apreciable. Cuarenta y cinco minutos después de la inyección cálcica se le pone otra, también intraperitoneal, de 10 cent. cúb. de la disolución molecular de MgCl_2 . El conejo resistió esta segunda inyección sin manifestar molestia alguna, y eso que la dosis de la sal de magnesio era superior á la que en el día anterior le produjo la intoxicación característica: luego veremos que una dosis semejante le causó la muerte cuando no le protegía el CaCl_2 .

Al día siguiente se repite el experimento, en el mismo animal y con iguales dosis de los dos cloruros inyectados por el peritoneo, sólo que entre la inyección del CaCl_2 y la de los 10 cent. cúb. de la disolución molecular del MgCl_2 mediaron cuarenta y seis minutos: como en el experimento del día anterior, este conejo no se resintió lo más mínimo por la inyección magnesiana.

Al día siguiente, sin previa dosis de calcio, se le inyectan por el peritoneo á este animal la misma dosis de 10 cent. cúb. de la disolución molecular de MgCl_2 , que ya había tolerado dos veces, merced á una inyección preliminar de CaCl_2 . Los terribles efectos del magnesio no se hicieron esperar y dieron de través con la vida de este conejo en poco más de diez minutos.

VII

Antagonismo entre las sales de magnesio y bario.

Ocurre en las ranas, con el antagonismo entre el magnesio y el bario, lo que advertimos al tratar de la oposición entre el magnesio y el calcio; es decir, que sin ser tan manifiesta

cómo en los conejos, márcase lo bastante para poder apoyar en estos anfibios la acción antitóxica que entre sí ejercen los cloruros de bario y magnesio. Júzguese, al efecto, de lo que pasó con tres ranas cuyos experimentos pasamos á referir.

La rana *A*, con 67 gramos, sufre una inyección por el saco dorsal de 1 cent. cúb. de una disolución 1/5 de $MgCl_2$. La rana *B*, de 48 gramos, es inyectada contemporáneamente con un 1 cent. cúb. de la disolución *m* de $BaCl_2$; y á la rana *C*, de 70 gramos, se la inyectan 1 cent. cúb. de la disolución 1/5 de $MgCl_2$ y otro cent. cúb. de la *m* de $BaCl_2$.

A los veinte minutos, la rana *A*, bajo la influencia del cloruro de magnesio, parece paralítica, insensible y mortecina; colocada vientre arriba, no puede volverse; no siente al ácido clorhídrico depositado en la piel; el ciático es inexcitable á la corriente galvánica, y á la farádica fuerte reacciona con el miograma particular representado en la figura 1.

A los veinte minutos, la rana *B*, intoxicada con el cloruro de bario, realiza movimientos espontáneos en el agua, encoje las ancas cuando se le estiran, siente con mucha viveza la irritación del ácido clorhídrico depositado en su piel, y tiende, sin conseguirlo, á volverse en el agua. A los cuarenta minutos aun realiza esta rana movimientos espontáneos; sin embargo, el ciático no es excitable á la corriente galvánica y responde á la farádica fuerte con el miograma representado en la figura 7, parecido, aunque no igual, al de la 1, que corresponde á la rana *A* intoxicada con el cloruro de magnesio.

La rana *C*, que contemporáneamente sufrió la doble inyección de los cloruros de magnesio y de bario, veinticinco minutos después conservaba íntegras la sensibilidad y el movimiento; podía volverse, saltar y trataba de escaparse del baño en que se la mantenía. El ciático de esta rana era excitable por la corriente galvánica, y produjo en los músculos gemelos contracciones de cierre y abertura, como de ordinario: las contracciones tetánicas fueron, sin embargo, de análoga forma á las que produjeron las ranas *A* y *B* antes citadas.

Cuando se inyectan, uno después de otro, los cloruros de bario y de magnesio en los conejos, se observan síntomas

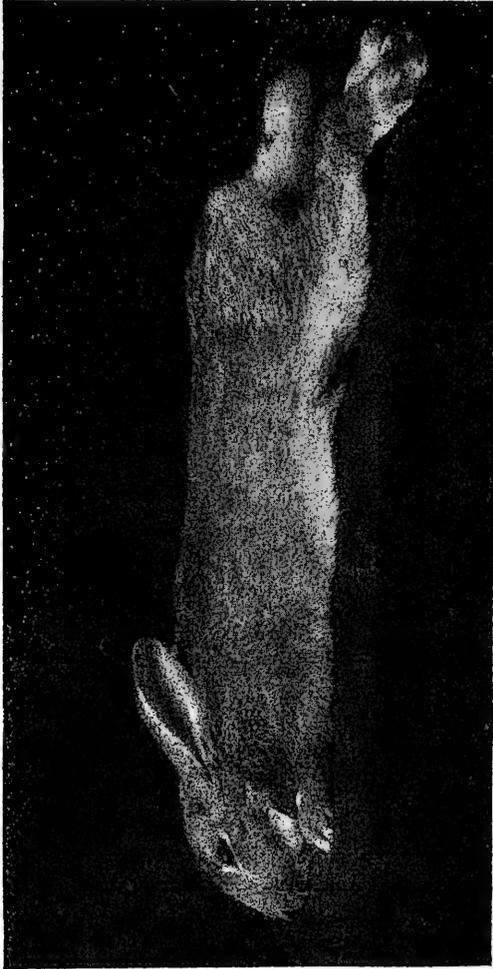


Figura 13.

Muestra á un conejo bajo la influencia de la intoxicación magnésica, atenuada por una inyección protectora de $BaCl_2$.

que corresponden á la doble intoxicación, aunque en el síndrome dominan los del bario; pero es lo cierto que el cloruro de este último metal impide la muerte de los animales in-

toxicados con el cloruro de magnesio, y les conserva la sensibilidad, los movimientos reflejos y los respiratorios.

El lector juzgará de las afirmaciones antes escritas, por los experimentos que vamos á describir.

A un conejo de 1.150 gramos (conejo núm. 9) le inyectamos en el peritoneo 2 centímetros cúbicos de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$. Después de la inyección muéstrase el animal inquieto, tiene convulsiones tónicas, envaramiento y como si le doliera el vientre, prefiere estar echado sobre él, con los miembros en extensión. El conejo, sin embargo, puede andar y conserva la sensibilidad y los reflejos.

Cuarenta minutos después de la inyección del cloruro de bario, se le pone otra también por el peritoneo, con 10 centímetros cúbicos de la disolución molecular de cloruro de magnesio, y pasados cinco minutos, el conejo dobla las patas, apoya el hocico en tierra, vacila incapaz de sostenerse y cae á la larga, como lo hacen los conejos intoxicados con el magnesio. Pero nótese, en el que motiva esta historia, que no está paralítico, porque de vez en cuando realiza espontáneamente algunos movimientos; tampoco parece insensible, porque mueve las orejas cuando á ellas se aproxima una cerilla encendida, y conserva, además, los reflejos nasal y parpebral. Hay un momento, á los catorce minutos de la inyección magnesiana, que no reacciona este animal á la quemadura de la oreja; pero nunca perdió los reflejos, y en cuanto á los movimientos respiratorios, eran regulares y muy frecuentes. A las tres horas, el animal nos pareció muy mejorado y al día siguiente le encontramos completamente restablecido.

Pero no siempre se neutralizan los efectos fatales de la intoxicación magnesiana y á ella acaban por sucumbir los animales, á pesar de la acción antitóxica encomendada al cloruro de bario. Así ocurrió en un conejo de 2.012 gramos (conejo núm. 10), que se preparó con una inyección intraperito-

neal de 3 centímetros cúbicos de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$, para cuarenta minutos después, sufrir otra de 14 centímetros cúbicos de la m de $MgCl_2$.

Esta dosis, suficiente para anestesiarle y rendirle paráliti-

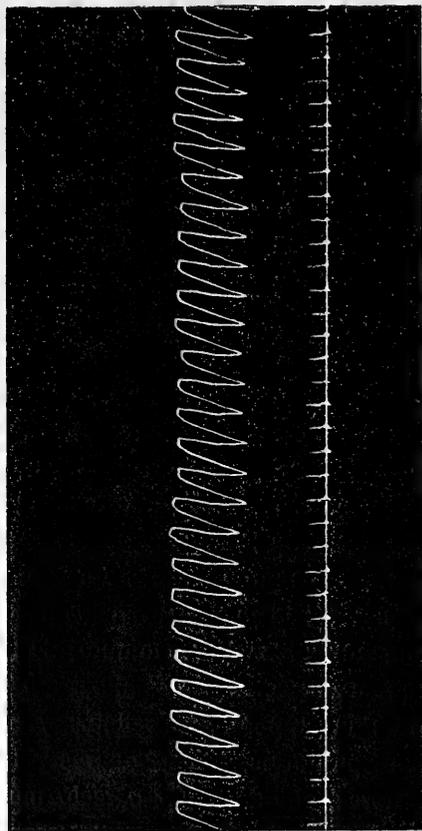


Figura 14.

Trazado respiratorio correspondiente al conejo representado en la figura 13.
El tiempo va medido en segundos.

co, no debía ser mortal, y sin embargo, el conejo sucumbió á ella tardíamente, á las seis horas de la inyección. No puede imputarse la terminación fatal á la no absorción del cloruro de bario, porque á los diez minutos de practicada, el conejo se echó sobre el vientre con las patas extendidas, tuvo

temblores, orinó, defecó, padeció de aceleración respiratoria y en general de todos los síntomas que se deben al bario. También padeció, aunque más tardíos que de ordinario, los síntomas de anestesia y parálisis que corresponden al cloruro de magnesio; á los catorce minutos de la inyección lo muestra la figura 13 con las patas extendidas, pero con la cabeza levantada; compárese este conejo con los que aparecen completamente relajados por el magnesio (figuras 11 y 16) y se apreciará perfectamente la diferencia. Después se acentuaron más la parálisis y la anestesia; pero es de notar, que en este conejo, que parecía muerto y que acabó por morir, se ofrecían enérgicos y frecuentes los latidos cardiacos y tranquilos y profundos los movimientos respiratorios.

Lo ocurrido con el conejo que acabamos de describir es excepcional; lo ordinario es que se presenten primero, los síntomas del bario, después, los del magnesio; atenuados, y al cabo el animal

triumfa de esta última intoxicación. Véase lo ocurrido con otro conejo de 1.765 gramos (conejo número 11). Se le inyectan por el peritoneo 2 centímetros cúbicos de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$ y después de presentar algunos de los



Figura 15.

Parálisis magnesiana atenuada por una inyección protectora de cloruro de bario.

síntomas indicadores de la absorción de la sal de bario, á los 45 minutos se le inyectan 12 centímetros cúbicos de la disolución *m* de $MgCl_2$. A consecuencia de esta segunda



.. Figura 16.

Conejo completamente anestesiado y paralítico á consecuencia de una inyección intraperitoneal de $MgCl_2$, á pesar de haber recibido cuarenta minutos antes otra inyección protectora de $BaCl_2$.

inyección se presentan los síntomas ordinarios de anestesia; esta vez con pérdida de los reflejos nasal y parpebral, y de parálisis. No fué, sin embargo, tan completa como otras veces, pues como lo muestra la fotografía (fig. 15) hecha á los cuarenta y cinco minutos de la inyección magnesiana, aunque apoyado el hocico, podía mantener la posición de su cabeza. Este conejo se restableció por completo á las tres horas y cuarto de la última inyección.

Parecido al experimento anterior es el que se refiere á otro conejo de 1.165 gramos (conejo núm. 12). Sufrió en el peritoneo una inyección de 2 centímetros cúbicos de la disolución

$\frac{m}{10}$ de cloruro de bario,

y cuarenta minutos después otra de 11 centíme-

tros cúbicos de la disolución *m* de cloruro de magnesio. A los diez minutos de esta segunda inyección está el animal completamente anestesiado y paralítico, según lo muestra

la fotografía (fig. 16) tomada diez minutos después de la inyección magnesiana.

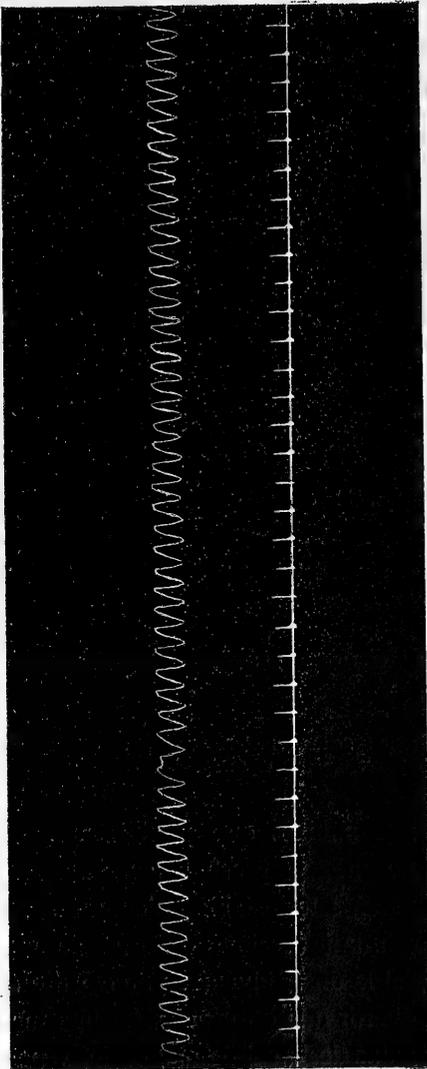


Figura 17.

Trazado respiratorio que se refiere al conejo representado en la figura 16, y al período de la intoxicación por el cloruro de magnesio. La curva cronográfica marca segundos.

Este animal, no obstante su profunda anestesia, conservó el reflejo parpebral y mantuvo regular su respiración, como

lo muestra el trazado de la figura 17, que se obtuvo media hora después de haberle inyectado el cloruro de magnesio. A la hora y media de la inyección, este animal se encontraba perfectamente, como si nada le hubiera sucedido, y antes de volverle á la conejera se le volvió á fotografiar. La fotografía le muestra en la figura 18 en su postura natural, completamente restablecido de la intoxicación magnesiana: cuesta

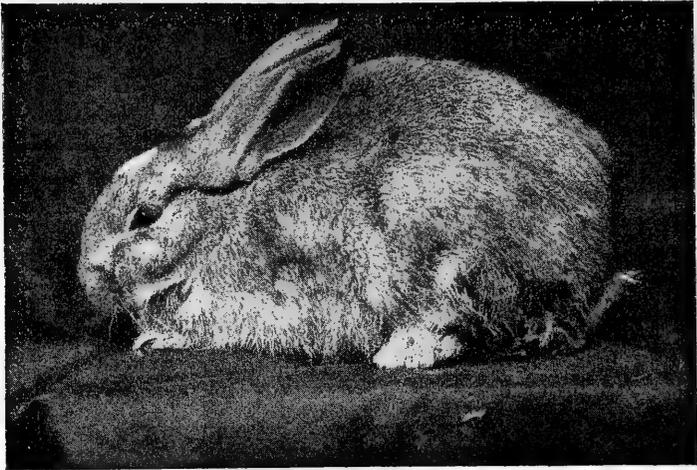


Figura 18.

Muestra restablecido de la intoxicación magnesiana el conejo que afectado por ella aparece en la figura 16.

trabajo creer que este animal, que aparece completamente normal, sea el mismo que lo representa como muerto la figura 16. Podrá objetarse á este restablecimiento, que lo mismo se hubiera logrado sin la inyección previa de cloruro de bario, por no ser mortal la dosis inyectada de cloruro de magnesio; pero es de advertir que otros animales han sucumbido por cantidades análogas de la sal de magnesio, y poseemos, además, mejores pruebas del antagonismo entre el magnesio y el bario.

A un conejo de 2.005 gramos (conejo núm. 14) se le in-

yectan dos centímetros cúbicos de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$, y cincuenta minutos después 14 cent. cúb. de la m de $MgCl_2$, también por el peritoneo. A los diez minutos de esta última inyección se manifiestan atenuados los síntomas de anestesia y de parálisis magnesiana, y la fotografía (figura 19) muestra al animal echado sobre el vientre, con el hocico apoyado, pero con la cabeza erguida.

La intoxicación magnesiana, no sólo se ofreció atenuada, sino también pasajera, pues á la hora de la inyección este conejo estaba como si nada le hubiera sucedido.

Pero si aun se puede argumentar en contra del experimento referido la cortedad de la dosis de cloruro de magnesio (14 cent. cúb. de la disolución m del cloruro) en relación al peso del conejo (2.005 gramos), no cabe la misma objeción para otro experimento que sufrió otro conejo de 1.995 gramos (conejo núm. 15).

A este conejo se le inyectaron por el peritoneo, una después de otra, dos dosis fatales: una de 10 cent. cúb. de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$, y otra de 18 cent. cúb. de la m



Figura 19.

Conejo en el que, merced al $BaCl_2$, se manifestaron atenuados los efectos de la intoxicación por el $MgCl_2$.

de $MgCl_2$. Este conejo no padeció síntoma alguno imputable al bario ni al magnesio, y á la hora de la doble inyección lo muestra la fotografía (fig. 20) completamente normal. Es de advertir que á la hora en que se fotografiaba el conejo representado en la figura 20, ya había muerto otro conejo de 1.775 gramos, á quien contemporáneamente se le había inyectado nueve cent. cúb. de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$ y cuatro cent. cúb. de la $\frac{m}{10}$ de la de $CaCl_2$. Este experimento comparativo indica que no existe contradicción entre



Figura 20.

Representa un conejo que no padeció síntoma alguno á pesar de haber sufrido dos inyecciones consecutivas de dosis mortales de los cloruros de bario y de magnesio.

los efectos del bario y del calcio; pero sobre este tema hemos de seguir experimentando para, en otro trabajo, publicar el resultado de nuestras investigaciones.

Pero con las inyecciones subcutáneas é intraperitoneales queda la duda sobre la rapidez de la absorción, y precisa confirmar los resultados de los experimentos hechos por este método con otros en los que los materiales tóxicos se

introduzcan directamente en la circulación á favor de las inyecciones intravenosas. Estas las hemos practicado siempre por las venas auriculares.

Por la vena de un conejo de 1.430 gramos (conejo número 33) se inyecta un centímetro cúbico de la disolución

$\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$; inmediatamente después se observan con-

vulsiones tónicas con opistótonos, pereza de la reacción pupilar á la luz, y ligera paresia de los miembros, que dobla el animal. A los diez minutos de la inyección intravenosa del bario se inyecta por el peritoneo la dosis fatal de tres gramos de cloruro de magnesio. Salvo una ligera acentuación de la paresia, este animal libró de la intoxicación magnesiana y conservó íntegra la sensibilidad.

En otro experimento, los dos cloruros, el de bario y el de magnesio, se introdujeron directamente en la circulación por la vena auricular. Tratábase de un conejo de 905 gramos (conejo núm. 34), al que se le inyectó casi un centímetro cúbico de la disolución $\frac{m}{10}$ de $BaCl_2$; como consecuencia de

esta inyección tuvo síntomas de bario, convulsiones ligeras, opistótonos y paresia de los miembros posteriores. Cuarenta minutos después de la inyección bárica se le pone otra por la misma vena de 0,5 gramos de $MgCl_2$; se acentúa un poco más la paresia del tronco posterior; pero ningún síntoma más, pues el animal conserva íntegra la sensibilidad y los reflejos. Próximamente á las dos horas de las inyecciones se encuentra este conejo completamente bien, y nadie, al verlo, hubiera sospechado que había circulado por su sangre un veneno mortal; la figura 21 lo representa en actitud normal. Y, por si pudiera creerse que la dosis de cloruro de magnesio que se le inyectó no era suficiente para matarle, al día siguiente se le inyectó otra cantidad idéntica, de la misma sal, por la vena marginal de la oreja, y murió á los pocos minutos.

Según Meltzer y Lucas (32), las sales de magnesio se eli-

minan principalmente por los riñones, y, en su defecto, por algunas otras vías supletorias: en la misma opinión coinciden Maurel (33) y Lafayette, Mendel y Benedict (34), y deducen que es insignificante la cantidad que se excreta por el intestino: lo contrario ocurre, según Meyer (35), con el bario, que se elimina en su mayor proporción por el intestino, y sólo en

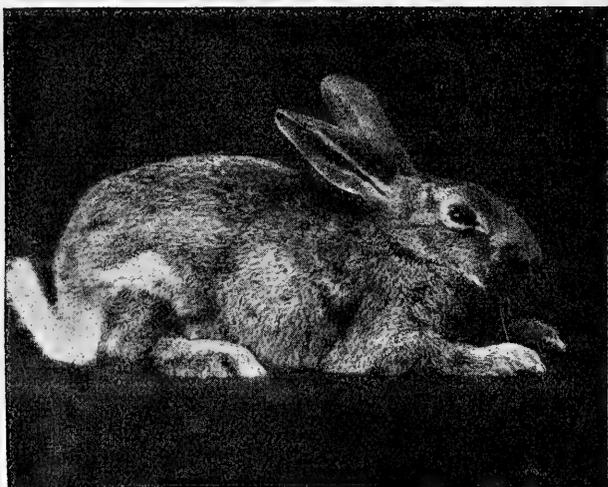


Figura 21.

Conejo á los diez y seis minutos de haber sufrido la inyección intravenosa de una dosis mortal de cloruro de magnesio; pero se advierte que antes había recibido, también por la vena, una dosis protectora de cloruro de bario.

cantidad pequeñísima por los riñones. Como se ve, el antagonismo entre el magnesio y el bario alcanza igualmente á sus respectivas vías de eliminación.

RESUMEN

Los experimentos que acabamos de referir, escogidos en una serie mucho más numerosa, nos han convencido del antídoto que ejerce el cloruro de calcio respecto al de magnesio. Si no tuviéramos otras pruebas, el referido antagonis-

mo sería suficiente para no confundir las acciones fisiológicas de los dos metales. No deben ser idénticos dos cuerpos tóxicos que entre sí se contrarrestan, y á mayor abundamiento, los hechos indican una mayor toxicidad del magnesio respecto al calcio; pero este último es susceptible de una función tónica que á ninguna dosis conocemos de las sales de magnesia. El papel del magnesio á las dosis mínimas en que entra en la composición de los tejidos, puede ser y es muy probable que sea el de un enfrenador del catabolismo; pero aún falta mucho que averiguar respecto á la función biológica del calcio.

Esperamos contar con mayores pruebas experimentales para confirmar el antidotismo del magnesio para el bario; por ahora nos contentamos con la afirmación de la acción antagónica que ejerce el cloruro de bario respecto al magnesio. Siendo como es el bario un veneno que comienza por ser convulsivo-tónico para concluir en paralisomotor, es notable que tan completamente se oponga á la acción paralítica y anestésica de las sales de magnesio. También éstas, cuando se administran en dosis rápidamente mortales, inician su acción con algunas convulsiones clónicas; mas sean cuales fueren las conveniencias entre los dos venenos, es lo cierto que el bario no sólo impide la muerte de los animales intoxicados con el magnesio, sino que se opone también á la anestesia y á la parálisis por este último metal. Cuando el bario se inyecta en dosis insuficientes ó llega tarde para contrarrestar los síntomas tóxicos del magnesio, los atenúa y los abrevia.

Por lo que respecta á las acciones respectivas de los dos cloruros sobre el corazón, también serán objeto de ulteriores investigaciones: al presente nos limitamos á llamar la atención sobre los dos cardiogramas de ranas, representados en las figuras 8 y 12: el de la 8 bajo la influencia del $BaCl_2$, y el de la 12 por efectos simultáneos de los cloruros de bario y magnesio.

No quiero dejar la pluma sin consignar, con la más viva complacencia, la eficaz cooperación á estas investigaciones de todo el personal del laboratorio de Fisiología, desde los auxiliares Sies. Menéndez Potenciano y Medina, hasta el interno Sr. del Campo y mi antiguo discípulo Sr. Muñoz Urra. Muchos actuales discípulos míos han seguido con interés mis experimentos, y á todos les agradezco la atención y el cuidado con que han cumplido los encargos que les encomendé.

Madrid y Febrero de 1911.

BIBLIOGRAFÍA

(1) S. J. Meltzer and J. Auer. «The antagonistic action of calcium upon the inhibitori effect of magnesium.» *Am. Journ. of Physiol.* XXI, 400, 1908:

(2) R. Joseph and J. S. Meltzer. «The mutual antagonistic life-saving action of barium and magnesium. A demonstration.» *Proceeding of the Am. Physiol. Society; Am. Journ of Physiol.* XXV, 1909 y 1910.

(3) Binet. «Recherches sur l'action physiologique des metaux alcalins et alcalino-terreux.» *Revue médicale de la Suisse romande*, 523-1892.

(4) B. Wiki. «Sur les propietés pharmacodinamiques des sels de magnesium.» *Compt. Rend. de la Soc. de Biol.* p. 1008, 1906.

(5) E. Bardier. «Les sels de magnesium et le système nerveux moteur périphérique» *Journ. de Physiol. et Path. général* IX, 611-1907:

(6) C. C. Guthrie and A. H. Ryau. «On the alleged specific anæsthetic properties of magnesium salts.» *Am: Journ. of Physiol.* XXVI, 329-1910.

(7) S. J. Meltzer and Jhon Auer. «Physiological and pharmalogical studies of magnesiumm salts. I. General anaesthesia by subcutaneous injections». *Am. Journ of Physiol.* XIV-1905.

Idem, id. «The narcotizing effect of magnesium salts upon nerve fibres». *Am. Journ. of Physiol.* XVI, 233-1906.

Idem, id. «Is the anesthesia and motor paralysis caused by magne-

sium salts due to asphyxia»: *Am. Journ. of Physiol.*, XXIII, 141-1908.

(8) J. Loeb. «La dynamique des phénomènes de la vie». Traduit par Daudin y Schaefer, p. 184. Paris, 1908.

(9) J. Jolyet. «Sur le magnesium du plasma sanguin et de l'eau de mer». *Comptes rendus de la Soc. de Biol.* LX, 553-1906.

(10) Meltzer y Auer. «Physiological and pharmacological studies of magnesium salts. IV. The relation of the salts to the peristaltis of the gastro-intestinal canal». *Am. Journ. of Physiol.* XVII, 315 1906.

(11) X. Cristaux. «Des propriétés inhibitrices des sels de magnésium». Thèse doctorat de la Faculté de Médecine de Lyon, 1907.

(12) Gómez Ocaña. «Datos para el estudio del peristaltismo intestinal». Congreso celebrado en Zaragoza por la Asociación española para el progreso de las ciencias. VII, 47, 1908.

(13) W. B. Macnider and S. A. Matthews. «A further study on the action of magnesium, sulphate on the heart.» *Am. Journ. of Physiol.* XX, 328-1907.

(14) R. Lillie. «The relation of ions to contractile processe». IV. *Am. Journ. of Physiol.* XXIV, 459-1909.

(15) A. Delhay. «L'anesthésie par les sels de magnésium». *Bull. de la Soc. roy. de Sc. med. et nat. de Bruxelles.* H. 4, p. 72, 1908 (*Bioch. Centrablatt.* B. VII, 532 1908.

(16) Gómez Ocaña. «Acción biológica del calcio y del magnesio. Esta misma REVISTA. Junio de 1910.

(17) L. Sabbatani. «Fonction biologique du calcium. Action antagoniste entre le citrate trisodique et le calcium.» *Arch. ital. de Biol.* XXXVI, 416, 1906.

(18) L. Sabbatani. «Fonction biologique du calcium. 3^e partie: Action comparée des reactifs decalcicants.» *Arch. ital. de Biol.* XLIV, 361, 1905.

(19) V. H. Howell and W. W. Duke. «Experiments on the isolated mammalian heart to show relation of the inorganic salts to the action of the action of the accelerator and inhibitory nerves.» *Journ. of Physiol.* XXXV, 131, 1906.

Idem id. «The effect of vagus inhibition on the output of potassium from the heart. *Am. Journ. of Physiol.* XXI, 51, 1908.

Idem id. «Note upon the effects of stimulation of the accelerator nerve upon the calcium, potassium and nitrogen metabolism of the isolated heart.» *Am. Journ. of Physiol.* XXIII, 174, 1908.

(20) H. Busquet et V. Pachon. «Le calcium condition chimique nécessaire de l'inhibition cardiaque.» *Journ. de Physiol. et Path. générale.* IX, 807 y 851, 1909.

Idem, id. «Mecanisme général et cause immediate de la supression fonctionnelle de l'inhibition cardiaque pendant l'irrigation du cœur avec les solutions isotoniques des sels du sodium.» *Compt. rend. de la Soc. de Biol.* T. I, 958. 1909.

(21) Pi-Suñer et Bellido. «Variations électrique du cœur sous l'action du Ca.» VIII Congres. int. de fisiolog. Viena, 1910.

(22) Gómez Ocaña. «Action biologique du K. Na. Ca. y Mg.» VIII Congreso intern. de fisiólogos. Viena, 1910.

(23) Baryum. Dictionnaire de Physiologie.» II, 53, 1897.

(24) Arkavine. «Action du chlorure de baryum sur l'organisme animal.» Thèse de S. Petersburg. 1903. (Anal. del Journ. de Physiol et Path.) V. 906, 1903.

(25) E. Filippi. «Sull azione cardiaca del cloruro de bario» Archivio di farmalogia sperimentale è scien«e affini. V. 103, 1906 (Anal. del Journ. de Physiol. et Path.) XIII, 523, 1906.

Idem. «Modificazioni del ricambio organico per azione del cloruro de bario. «Lo Sperimentale LX, 589, 1906 (Anal. del Journ. de Physiol. et Path.) IX, 166, 1906.

(26) Ch. Wallis Edmunds and. George B: Roth, «Action of barium chloride on the fowl's muscle.» Am. Journ of Physiol. XXIII, 46, 1908 y 9.

(27) M: Vejeux Thyrode: «The mode of action of some purgative salt.» Arch. de Pharmacodynamie et de Thérapie» V. XX, f. III et IV, p 205-1910.

(28) Obra de Loeb antes citada, pág: 155.

(29) Ch: Richet. «De la loi biologique qui gouverne la toxicité des corps simples.» Arch. int. de Pysiol. X, f III, p. 208-1910.

(30) Macwilliam, etc. «Intravascular injección of salts and of nucleo-proteid.» Journ. of Physiol. XXX, 381, 1904.

(31) R. Joseph und S. J. Meltzer. «Eine Vergleichung der Giftigkeit der chloride des Magnesiums Calciums, Kaliums und Natriums.» Centralblatt für Physiols. XXII, 244-1908.

(32) Meltzer and Lucas. «Physiological and pharmacological studies of magnesium salts. V. The influence of nephrectomy upon their toxicity.» Journ. of exp. med. IX, 298-1907.

(33) M. E. Maurel. «Evaluation approximative des quantités minima de chaux et de magnésie urinaire et des quantités minima de ces substances nécessaires à l'organisme dans les conditions de la ration moyenne d'entretien.» Compt. rend. de la Soc de Biol. 706, 1904.

(34) Lafayette, Mendel and Stanley R. Benedict. «The paths of excretion for inorganic compoud. IV. The excretion of magnesium.» Am. Journ. of. Physiol. XXV, 1, 1909 y 1910.

(35) G. M. Meyer. «The elimination of barium.» Am. Journ of Physio'. XXV, 142-1909 y 1910.

XXXVII.— Nuevo método de obtención de aminas, empleando la reacción de Grignard.

POR BENITO BUYLEA.

PARTE PRELIMINAR

Del reactivo y síntesis de Gri- gnard. — Apuntes históricos.

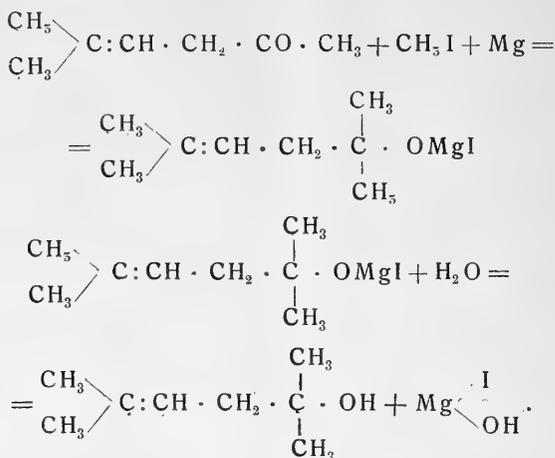
La elegancia de las síntesis orgánicas mediante los cinc-alquilos y los mercurio-alquilos, no compensaba lo peligroso de su obtención y empleo. Inflamables al aire los primeros, venenos peligrosos los segundos, y ambos de rendimiento mínimo en su preparación, sirvieron, sin embargo, de fundamento á los químicos para estudios concienzudos é investigaciones minuciosas, ganosos de aprovechar un método de fecundos resultados en la Química Orgánica.

Guiados por la gran afinidad del magnesio, pudieron hallar los investigadores un buen camino para resolver el problema. Sin embargo, de los trabajos de Hallwachs y Schafarich (1) acerca del magnesio-metilo, y de los estudios Lohr, Fleck (2) y Waga respecto del fenil magnesio, se deducía que las combinaciones órgano-magnesianas adolecían de iguales si no mayores defectos que los reconocidos en las órgano-cíncicas y órgano-mercúricas; pues sólidas é insolubles en casi todos los disolventes, no sólo se inflamaban al aire, sino que lo hacían también en una atmósfera de gas carbónico.

(1) *Annalen der Chemie*, t. 109, pág. 206.

(2) *Annalen der Chemie*, t. 276, pág. 128.

Un avance de lo que más tarde Grignard descubrió y aplicó ampliamente, encuéntrase en el siguiente hecho aislado descrito por Barbier (1). Demostró este químico, que el ioduro de metilo reaccionaba con el metil-eptenon en presencia de magnesio, dando el alcohol terciario correspondiente: el dimetil-eptanol:



Tal hecho significaba un gran paso en el camino de las síntesis mediante compuestos órgano-metálicos. Con efecto, los trabajos de Saytref probaban que los cinc-alquilos no se unían á las acetonas en $\text{CO} \cdot \text{CH}_3$, sino que provocaban su condensación, y, no obstante, la reacción antes escrita muestra palpablemente lo contrario. Además se evitaba el peligro de la obtención del magnesio-metilo libre.

Grignard, después de su descubrimiento, interpretó la reacción de Barbier suponiendo la primordial formación del ioduro de metil-magnesio y su ulterior acción sobre el dime-tileptanon para formar el alcohol, conforme lo probaban las síntesis de alcoholes que practicó después, valiéndose de procedimientos casi análogos.

(1) *Comp. Rend.*, t. 128, pág. 110 (1899).

A los dos años de descubierta la reacción de Barbier, estudiando Grignard la manera de substituir el cinc con el magnesio en la nueva obtención de los cinc alquilos propuesta por Frankland y Wanklin (1), halló *que los alquilo-halogenados se unían al magnesio en presencia del éter anhidro, y que la reacción se efectuaba á la temperatura ordinaria, formándose un compuesto soluble en el mismo éter.*

Este descubrimiento fué el origen de innumerables síntesis orgánicas.

Preparación del reactivo.

Se compone el aparato de un matraz cerrado por un corcho con dos agujeros: por uno pasa el extremo de un embudo con llave; por el otro el tubo acodado de un buen refrigerante ascendente.

Se coloca en el matraz un gramo-átomo de magnesio pulverizado, y en el embudo un gramo-molécula del alquilo-halogenado mezclado con igual volumen de éter anhidro. Se dejan caer primero, 25 ó 30 cm.³ de esta mezcla sobre el magnesio. Al cabo de pocos minutos comienza una viva reacción; se introducen entonces rápidamente 200-250 cm.³ de éter anhidro y se añade poco á poco todo el contenido del embudo. La reacción es tan intensa que el éter llega á hervir y conviene enfriar de vez en cuando el matraz, sumergiéndolo en un baño de agua. Al final debe calentarse ligeramente para completar la acción. En tales condiciones todo

(1) Estos dos químicos, viendo que el método clásico de Löhr no era práctico ni por su facilidad, ni por sus rendimientos, idearon calentar, en tubo cerrado, un ioduro alcohólico con cinc, en presencia de éter anhidro. Llegaron de este modo á obtener una masa sólida que por destilación les dió un compuesto de la fórmula $Zn(CH_3)_2(C_2H_5)_2O$.

Phy. Transactions, t. 412, pág. 1859 (Frankland); *I. of the Chem. Society*, t. 125, pág. 1861. (Wanklin).

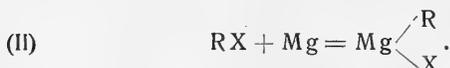
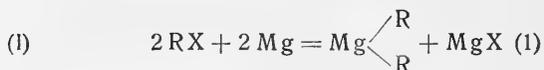
el magnesio desaparece, y se obtiene finalmente un líquido casi incoloro y sin depósito apreciable.

El compuesto tiene todas las propiedades químicas de un órgano-metálico. Se altera con la humedad, fija el gas carbónico y el agua lo descompone violentamente. Ofrece, sin embargo, la ventaja de que no se inflama en contacto del aire seco, y así es manejado sin inconveniente.

En el mismo aparato empleado para obtenerlo puede ser utilizado. Para ello basta dejar caer, valiéndose del embudo con llave, el compuesto que debe reaccionar. Calentando al final en el baño de María y descomponiendo el producto con agua helada, obtenemos el compuesto sintético.

Constitución del reactivo.

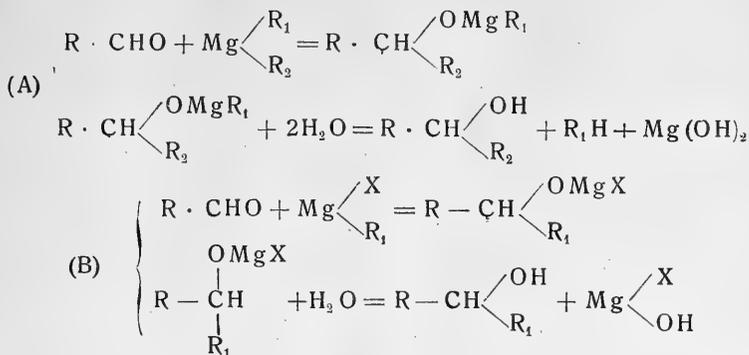
Puede explicarse mediante analogía con los demás compuestos órgano-metálicos, ó por la unión directa del magnesio con el alquilo-halógeno:



La primera fórmula fué inmediatamente desechada, en cuanto tal analogía no existe: los compuestos cinc-alquílicos eran sólidos, poco solubles en éter é inflamables en contacto del aire. Además se formaba al mismo tiempo en la reacción I, yoduro ó bromuro de magnesio, que no ha sido encontrado en la reacción de Grignard, quien apuntó una demostración más decisiva, probando que la acción de su reactivo en la síntesis no corresponde á un cuerpo de la constitución I, sino de la II.

(1) X = halógeno; R = radical alquílico.

El modo de reaccionar de los compuestos órgano-metálicos con un aldehído, por ejemplo, podría explicarse de estas dos maneras:



Con la reacción (A) la mitad del compuesto órgano-metálico del aldehído se transforma en alcohol, y la otra mitad en hidrocarburo. El rendimiento del alcohol será, por tanto, 50 por 100.

En la reacción (B), teóricamente, la cantidad de alcohol formado debe ser 100 por 100.

Grignard (1) demostró experimentalmente que en la acción de un aldehído ó de una cetona sobre su reactivo, se obtenía un compuesto á veces soluble en éter, otras veces insoluble, á menudo cristalizado, el cual, mediante la acción del agua, daba, sin desprendimiento gaseoso, un alcohol secundario ó un alcohol terciario correspondiente y con rendimiento siempre bastante superior del 50 por 100, tanto que en algunas ocasiones llegaba al 80 por 100.

Demuéstrase así que la constitución de dicho reactivo debe ser representada por la fórmula general:



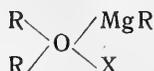
Hemos visto que la obtención de los cinc-alquilos por el método de Frankland y Wanklin originaba un compuesto en

(1) *Comp. Rend.*, t. 130, pág. 1.322 (1900)

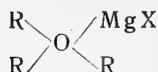
que el éter tomaba parte importante: $X_2 Z_n \cdot (C_2H_5)_2 O$; pues bien, Grignard (1), completando el estudio de los compuestos órgano-metálicos del magnesio, observó que la constitución de su reactivo debe ser: $RMgI \cdot (C_2H_5)_2 O$, en el cual el éter se sumaba molécula á molécula. Blaise (2) confirmó después, por medio del análisis químico, dicha constitución. Y ambos estaban conformes en que al éter debía considerársele como verdadero éter de cristalización.

La molécula de este cuerpo hállase, algunas veces, tan íntimamente unida al reactivo, que sólo es eliminable á elevada temperatura, en el vacío.

Semejante hecho indujo á Beayer y Villiger (3) á considerarlo como un derivado del oxígeno tetravalente por ellos descubierto con el nombre de *oxonio*, y entonces su fórmula sería:



Grignard intentó sustituirla por estotra:



que expresaba mejor, en su sentir, la formación, mediante síntesis, de los diversos compuestos. Sin embargo, V. Tschelinseff (4) es de parecer que la última fórmula no patentiza la cuarta valencia del oxígeno y además no se conocen experimentos que la justifiquen.

Podrían también ser considerados los compuestos en que

(1) *Ann. de Chim., et Phi.*, t. 24, pág. 433 (1900)

(2) *Comp. Rend.*, t. 132, pág. 839 (1901).

(3) *Berich. d. d. G.* t. 24, pág. 3.613; B. t. 34, pág. 2 679; B. t. 33, pág. 1.202.

(4) *B. d. d. G.* t 38, pág. 3.664.

me ocupo, desde el punto de vista de la teoría de Werner (1), en cuyo caso su constitución correspondería á:



Desde luego, la fórmula que mejor expresa su constitución es la de Beayer y Villiger, y sobre ella se han apoyado los químicos, principalmente Tschelinseff, para las determinaciones físico-químicas que permitieron regular el modo de formación del reactivo.

El éter en la reacción de Grignard.

Ocurre ahora preguntar: ¿es necesario el éter en la reacción de Grignard?

A ello respondió Tschelinseff (2), resumiendo los trabajos de Brühl, Ordt (3) y Malmgren (4), y los suyos propios. En todos ellos se probaba que la reacción de Grignard se efectuaba también empleando como disolventes hidrocarburos aromáticos (benceno, tolueno, xileno), siempre que se agregase siquiera indicios de éter etílico.

Halló, además, como consecuencia de sus trabajos, que la *temperatura* es factor importantísimo de la reacción: porque la unión del magnesio con el alquilo-halógeno se lleva á cabo mediante el *calor* sin intermedio de ningún *compuesto extraño*, ó á la *temperatura ambiente* en presencia del éter etílico (5).

Y finalmente, fundándose en la analogía existente entre

(1) A. Werner. *Ann. der Che.*, t. 322, pág. 261.

(2) *Berichte etc.* t. 37, pág. 2.081; t. 37, pág. 3.534; t. 37, página 4.537; t. 38, pág. 561; t. 38, pág. 3.664.

(3) *Berichte etc.*, t. 38, pág. 668-4.372; t. 37, pág. 746.

(4) *Berichte*, t. 36, pág. 2.608.

(5) Las condiciones de reacción á la temperatura ordinaria, exigen, algunas veces, activar el magnesio con un cristal de iodo. *Compt. Rend.* t. 132, pág. 1.182 (1901) (Grignard).

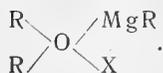
los compuestos oxigenados y los nitrogenados, demostró, merced á numerosos experimentos, que el éter podía ser sustituido por las aminas terciarias, originándose cuerpos de constitución análoga á los formados en solución etérea.

Dedujeron F. y L. Sachs (1), como conclusión de sus trabajos, que la reacción objeto del presente estudio es realizable en todos los disolventes inertes; *hidrocarburos aromáticos* (benceno, tolueno, xileno); *hidrocarburos grasos* (exano, éteres y bencina del petróleo), *hidrocarburos terpénicos...*, etcétera, siempre que se les agreguen algunas gotas de éter ó de amina terciaria.

Resumiendo: fundamentalmente el éter no tiene importancia primordial en la reacción de Grignard, porque hemos visto que á elevada temperatura se pueden *unir directamente* los elementos del sistema. Sin embargo, la necesidad de la práctica y la facilidad de la obtención de dicho reactivo á la temperatura ordinaria, hacen del éter y de las aminas terciarias elementos indispensables para la reacción á que aludimos.

Formación del reactivo.

Tschelinseff (2) califica como la mejor fórmula que expresa la constitución del reactivo de Grignard aquella que le supone derivado del oxonio:



En un trabajo anterior (3) había demostrado que su descomposición sólo podía ser la siguiente:



y esto se contraponía á las ideas de Grignard (4), quien afir-

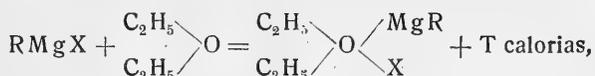
-
- (1) Berichte, etc., t. 37, pág. 3088 (1904).
 - (2) Ber. d. d. Gess., t. 38, pág. 3664.
 - (3) Ber. d. d. Gess., t. 136, pág. 3534.
 - (4) Comp. Rend., t. 136, pág. 1260.

ma que del resultado de la aplicación de su reactivo al análisis, la descomposición del alquil-magnesio-halógeno debe ser necesariamente:



Para demostrar Tschelinseff que la escisión del reactivo de Grignard es conforme á su hipótesis, comenzó haciendo el estudio termoquímico de la fórmula de Baeyer.

Determinó el calor que desarrollan los diversos individuos magnesio-orgánicos al pasar al compuesto etéreo, esto es, el calor de formación de los compuestos magnésicos de las bases *oxónicas*, y expresaba en esta forma la reacción termoquímica:



proponiéndose hallar el valor de T para diversos radicales.

Empleando métodos calorímetros muy perfeccionados, estudió el valor de T en la formación del compuesto orgánico-metalico del magnesio con los ioduros de etilo, de propilo, de butilo, de amilo, etc., todos ellos en solución bencénica, y resultó de esta manera:

	T
Con ioduro de etilo	12,7
— — de propilo.....	12,6
— — de butilo.....	13,3
— — de amilo.....	12,5 etc.

Consecuencia de sus trabajos fué el admitir que la acción del éter dietílico sobre el magnesio-halógeno alquilo se efectuaba siempre con gran desarrollo de calor, aproximadamente el mismo en todos los casos, y que esta constancia suponía la escisión del RMgX en RMg de una parte y el halógeno X, á la continua el mismo, de otra. Pues de suponer la escisión conforme al criterio de Grignard, la variación del radical R supondría otra variación de cuantía en el valor de T.

Concluye afirmando, que así como Grignard explicaba la reacción de Barbier mediante una primera formación del ioduro de metil-magnesio, así podía afirmar que en la reacción de Grignard se forma primero el magnesio-alquilo-halógeno y después el complejo etéreo.

Valor de R y valor de X.

La facilidad del magnesio para unirse á los alquilos halogenados abría ancho campo á la síntesis. La superioridad de estos compuestos sobre los demás órgano-metálicos aparece de tal modo evidente, respecto del número de las combinaciones posibles.

Tocante al halógeno podemos decir que, en general, son los alquilos bromurados y iodurados los que se prestan mejor á las reacciones; hay otros casos en que es preferible el derivado clorurado, y así lo demuestran Houben y L. Hessel-kaul (1) en sus trabajos acerca de los derivados órgano-magnésicos del cloruro de bencilo y del clorhidrato de pineno.

El campo que se presenta para elegir el valor de R es extensísimo. Forman compuestos de esta índole los éteres monohalogenados saturados, alcohólicos ó fenólicos de función simple, éteres grasos, aromáticos, polimetilénicos, terpénicos.

Aun en el caso de estar unidos á otro grupo funcional, originan compuestos empleando la reacción normal. Con efecto, el hecho ha sido ya comprobado respecto de los éteres óxidos de los fenoles halogenados (2), para el α monobromo alcanfor (3) ó para el iodo — 1 — exanón (4). Puede, sin

(1) *Ber. d. d. Gess.*, t. 35, págs. 2519 y 3695 (1902).

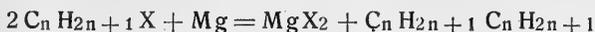
(2) *Compt. Rend.*, t. 136, pág. 377 y 617 (Boudroux).

(3) *Ber. d. d. Gess.*, t. 35, pág. 3910 (S. M. Malmgren).

(4) *Ber. d. d. Gess.*, t. 35, pág. 2684 (1902) (Zelinsky y Moser).

embargo, afirmarse que existe cierta gradación de afinidad, que comienza en los éteres alifáticos primarios y termina en los terciarios.

De otra parte, ha demostrado Grignard (1) que el magnesio puede, en ciertas condiciones, reaccionar como el sodio en la reacción Wurtz y Fittig, ligando entre sí dos hidrocarburos y generando compuestos en la forma R — R:



cuya reacción adquiere importancia principal á partir de los términos en C_6 (2).

Acción del reactivo sobre
los grupos funcionales.

Admitamos que los compuestos órgano-metálicos del magnesio se descomponen, en la síntesis, según Grignard afirma (3); es decir, el radical alquílico de una parte, y el grupo MgX de otra:



Con intento de penetrar lo íntimo de la manera de actuar el reactivo que nos ocupa y poder establecer reglas generales encaminadas á interpretar los hechos conocidos y explicar los que después vendrán, es preciso fijarse en el estudio de su naturaleza electroquímica.

Admitiendo este nuevo factor, es cosa indudable que la descomposición que Grignard adopta se transforma en esta más exacta y completa:

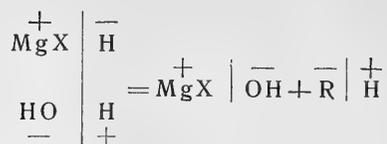


(1) *Compt. Rend.*, t. 132, pág. 835 (Tissier y Grignard); *Ann. d. Ch. et Ph.*, t. 24, pág. 433 (Grignard).

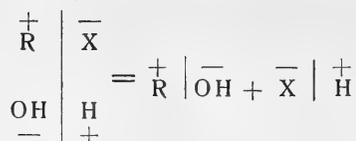
(2) *Compt. Rend.*, t. 139, pág. 481 (Tiffenau).

(3) *Compt. Rend.*, t. 130, pág. 1322 (Grignard).

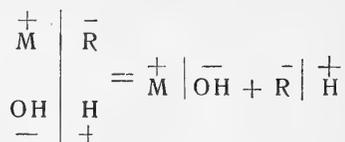
Fácilmente se comprende que así debe acontecer desde el momento en que observamos la descomposición hidrolítica del reactivo:



El carácter negativo del radical R se admite considerando el carácter anfótero de los radicales alquílicos (1); en efecto, si sometemos á la hidrolisis los alquilos halogenados de la fórmula $\overset{+}{\text{R}}\overset{-}{\text{X}}$, el radical R actúa como positivo;



Pero si los metales-alquilos ($\overset{+}{\text{M}}\overset{-}{\text{R}}$) experimentan la descomposición hidrolítica, entonces se manifiesta el carácter negativo de R:



Basta lo apuntado como explicación suficiente de la polaridad eléctrica intermolecular del reactivo de Grignard y la práctica experimental confirma que actúa, en las síntesis, de dos maneras diversas:

- 1.—Con relación á ligaduras múltiples.
- 2.—Con relación á ligaduras simples.

(1) (Abegg.) Ber. d. d. ch. Ges., t. 38, pág. 4.112 — Zeitschr. f. anor. chem. t 39, pág. 350.

PRIMER CASO. Cuando el compuesto contiene ligaduras múltiples, las dos partes del reactivo rompen la doble ligadura (1) y es de manera que el ión positivo del grupo funcional y el negativo de éste se une al negativo y neutraliza el ión positivo de dicho grupo.



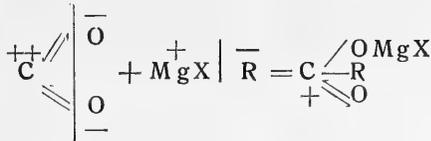
Este modo de reaccionar es general y se aplica, hasta ahora, á los siguientes grupos funcionales.



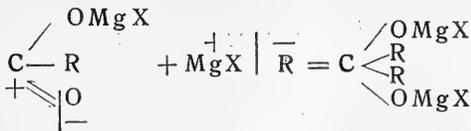
Trataremos de explicarlo haciendo un somero resumen de los hechos hasta el presente estudiados:

C:O.

El caso más sencillo de la agrupación C:O lo encontramos en el anhídrido carbónico (2):



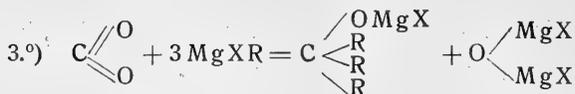
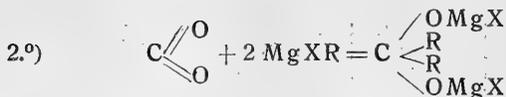
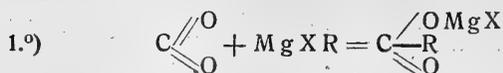
pero observamos, inmediatamente, que el O, no sustituido, hállase en idénticas condiciones que el sustituido y que, conforme á nuestra interpretación de la reacción, debemos tener también:



(1) Decimos *doble ligadura* porque, aun el caso de una ligadura múltiple — C≡N, el nitrógeno queda unido al carbono por dos valencias — C $\begin{array}{l} // \\ \backslash \end{array}$ N.

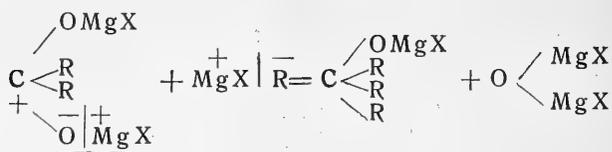
(2) (Grignard) *Ann. de l'Univ. de Lyon*, (1901).

En efecto; Schroeter (1), estudiando la acción del anhídrido carbónico sobre el bromuro de fenil-magnesio, obtiene tal sustitución:

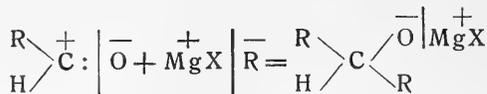


serie de ecuaciones que se puede explicar químicamente de igual manera que la de Hoffman, tratándose de la obtención de las aminas.

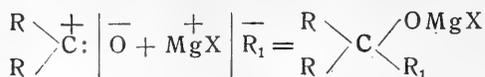
La tercera ecuación es asimismo explicable desde nuestro punto de vista (2):



Supongamos ahora que se trata de un C:O aldehídico: la reacción patentiza la generalidad de nuestras conclusiones:



Y lo mismo acontece respecto del C:O de las acetonas, tanto acíclicas (3):

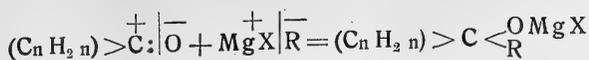


(1) (Schroeter) Ber d. d. ch. Ges., t. 36, pág. 3.005.

(2) (Grignard), *Comp. Rend.*, t. 130, pág. 1322.

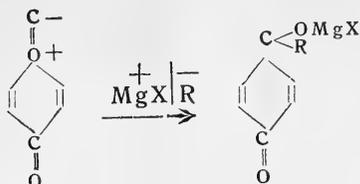
(3) (Grignard), *Comp. Rend.*, t. 130, pág. 1322.

como cíclicas (1):



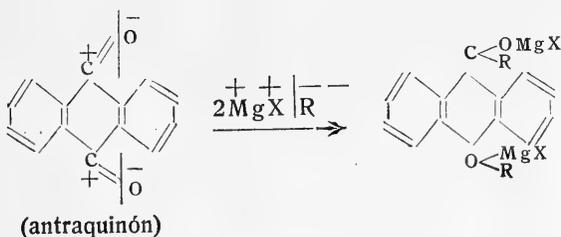
El reactivo de Grignard reacciona también, aunque no completamente, sobre el C : O quinónico.

Bamberger y Blange (2) obtienen compuestos órgano-metálicos de algunos para-quinones:



Este caso confirma la constitución acetónica de la fórmula quinónica.

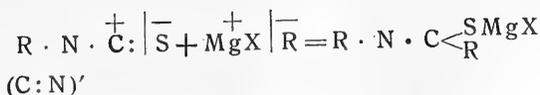
Se comprende que ambos C : O pueden reaccionar.



Estudiemos ahora los otros grupos funcionales:

(C : S)'

Caso de los sénfoles (3):

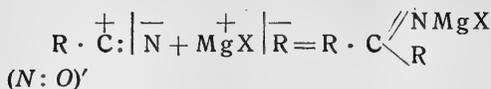


(1) (Zelinsky), *Ber. d. d. ch. Ges.*, t. 34, pág. 2877.

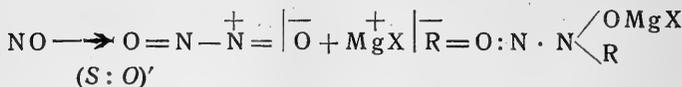
(2) (Bamberger y Blange), *Ber. d. d. ch. Ges.*, t. 36, pág. 625.

(3) (Haller y Guyot), *Comp. rend.*, t. 138, pág. 327-1251.

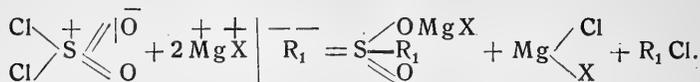
Caso de los nitrilos (se obtienen compuestos cristalizados con una molécula de éter.) (1):



Caso del óxido de nitrógeno (2):



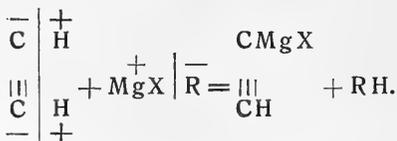
Caso del cloruro de sulfurilo (3):



SEGUNDO CASO. Cuando el compuesto contiene un átomo de hidrógeno sustituible (ó un átomo de halógeno en los cloruros ácidos), la reacción se realiza de igual manera que en el caso anterior, solamente que, habiendo sólo una ligadura simple, el átomo positivo de hidrógeno se elimina con el alquilo negativo del reactivo para formar un hidrocarburo, en el caso del hidrógeno sustituible, ó el átomo de cloro negativo se elimina con el grupo MgX positivo, en el caso de los cloruros ácidos.

Sirvan de confirmación los siguientes ejemplos:

Carburos acetilénicos (4):



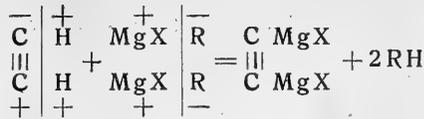
(1) (Sachs y Lövy), *Ber. d. d. ch. Ges.*, t. 36, pág. 583, t. 37, página 874.

(2) (Blaise), *Comp. rend.*, t. 138, pág. 1048; t. 132, pág. 38, (Behal), *Bull. Soc. chim.*, t. 31, pág. 461.

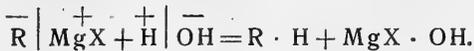
(3) (Sand y Singer), *Ber. d. d. ch. ges.*, t. 35, pág. 3186; *Ann der chem.*, t. 329, pág. 190 (Wüland), *Ber. d. d. ch. ges.*, t. 36, pág. 1315.

(4) (Oddo), *Rend. Acc. Lincei*, t. 14, pág. 169.

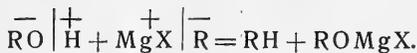
Por consideraciones análogas á las establecidas para el anhídrido carbónico, tendremos la sustitución de los dos hidrógenos observada por Iotsitch (1):



Agua (2):



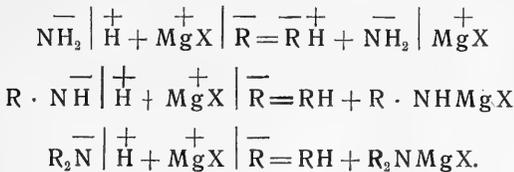
Alcoholes.—Mediante reacción análoga á la formación de los alcoholatos (3):



Tissier y Grignard probaron que esta descomposición puede hacerse extensiva á todos los compuestos hidroxílicos: fenoles, oximas, ácidos carboxílicos, etc.

Amoníaco y aminas primarias y secundarias:

Meunier (4) halló las siguientes reacciones:

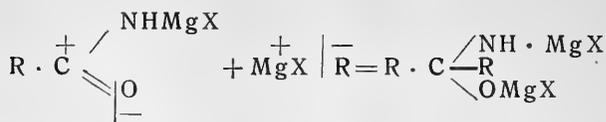


Amidas de los ácidos (5):

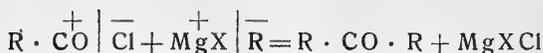


-
- (1) (Oddo) *Rend. Acc. Lincei.*, t. 13, pág. 187.
 (2) (Iotsich), *Bull. soc. chim.*, t. 28, pág. 922; t. 30, pág. 208.
 (3) (Tissier y Grignard), *Comp. rend.*, t. 139, pág. 481.
 (4) (L. Meunier), *Bull. soc. chim.*, t. 39, pág. 314. *Comp. rend.*, t. 136, p. 758.
 (5) (Zschugaeff), *Ber. d. d. ch. ges.*, t. 35, pág. 3912.

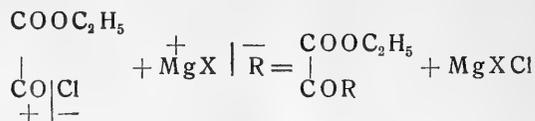
Sólo que aquí el reactivo de Grignard reacciona inmediatamente con el C : O (1):



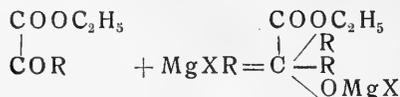
Cloruros ácidos:



pero se comprende que debe completarse la reacción empleando también el C : O (2):



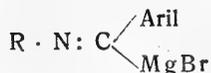
(cloruro de etiloxalilo)



Reacción que el autor escribe en una sola fase.

*
*
*

Existen aún hechos aislados (no generalizados todavía), como el de los isonitrilos (3), en que se llega á compuestos:



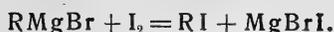
y aquel otro en que el bromo es sustituido por el yodo en compuestos no oxigenados (4).

(1) (Beis), *Comp. rend.*, t. 137, pág. 575.

(2) (Grignard) *Comp. rend.*, t. 136, pág. 1200.

(5) (Sachs y Lövy), *Ber. d. ch. ges.*, t. 37, pág. 874.

(6) (Boudroux), *Comp. rend.*, t. 135, pág. 1350; t. 136 pág. 1138.



Este caso se puede explicar admitiendo el carácter anfótero de cada elemento y la aptitud para desarrollar sus valencias polares.

*
* *

Finalmente, debemos decir que cuando se producen reacciones anormales en las síntesis con los compuestos órgano-metálicos del magnesio, deben atribuirse á la naturaleza química de los cuerpos que intervienen en la reacción. Así pueden observarse transposiciones moleculares (1), apertura (2), ruptura (3) ó soldadura (4) de la cadena y fenómenos de condensación (5).

(Continuará.)

(1) Acción del reactivo de Grignard sobre la formamida (Bouveault), *Comp. rend.*, t. 137, pág. 987.

(2) Anidridos de ciertos glicoles (Blaise), *Comp. rend.*, t. 134, página 551. (Josith), *Soc. Chim. r.*, 24, pág. 26.

(3) Cianógeno (Behal), *Comp. rend.*, t. 132, pág. 753.

(4) I - iodo — 5 exanon (Zelinsky y Morser), *Ber. d. d. ch. ges.*, t. 35, pág. 2684.

(5) Poder condensante del ioduro de etil magnesio (Franke y Holm), *Monath. f. che.*, t. 25, pág. 865.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

- Instituto general y técnico de Vitoria.**—Memoria del Curso de 1907 á 1908. Vitoria, 1908.
- Instituto Central Meteorológico.** - Resumen de las observaciones meteorológicas efectuadas en la Península y algunas de sus islas adyacentes, durante el año 1906.—Madrid, 1908.
- Instituto de 2^a enseñanza de la Habana.**—Memoria anual correspondiente al Curso académico de 1907 á 1908.—Habana, 1909.—1 vol.
- Instituto general y técnico de Vitoria.**—Memoria del Curso de 1906 á 1907. Vitoria, 1908.
- Jaramillo y Guillén (D. Enrique).** - Renovación Científica Española (primeros apuntes naturalistas), por...—(De la Biblioteca medico-naturalista).—Vol. I.—Madrid, 1908.—1 foll.
- Jiménez Jiménez (D. José Miguel).**—Aplicación de la Correspondencia cuadrática al estudio de series y haces cónicas.—Memoria para aspirar al título de Doctor en Ciencias exactas.—Madrid, 1907.
- Labra (D. Rafael María de).**—Repúblicas contemporáneas.—Francia. - Los Estados Unidos de América.—Estudio de Política y Legislación comparadas.—Madrid, 1903.—1 foll.
- Lima Salcedo (D. S. de).** Nuevo método para resolver la ecuación de tercer grado y la trisección del arco.—Coro.—1908.—Caracas, 1908.
- Lobo y Gómez (D. Ruperto).**—Crioscopia.— Su aplicación á la determinación de magnitudes moleculares. —Memoria presentada como tesis doctoral.—Zaragoza, 1904.
- Martin Gil (Dr. D. R.).**—Las ratas son un peligro para la salud pública, por el Dr...—Presidente de la Sociedad Española de Higiene de Málaga, et cétera, etc.—Málaga, 1908.—1 foll.
- Martínez de Campos (D. Ramón).**—Señales eléctricas de alarma para la previsión de inundaciones.—Murcia, 1907.
- Méndez y Mendoza (D. Juan de Dios).**—Discursos leídos ante la Academia Venezolana, en la recepción pública del Sr. Dr..., el día 14 de Febrero de 1909.—Caracas, 1909.
- Merveille, S. J (P. E.).**—La sección magnética.—Traducción del francés por el P. F. Zurbitu, S. J.—(Memorias del Observatio del Ebro.—N.º 3. Barcelona, 1908.

(Continuad.)



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
XXXV.— Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia sexta.....	573
XXXVI.—Antagonismo entre el magnesio, el calcio y el bario, por <i>J. Gómez Ocaña</i>	591
XXXVII.— Nuevo método de obtención de aminas, empleando la reacción de Grignard, por <i>Benito Buylla</i>	636
Publicaciones recibidas.....	654

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX.—NUM. 9.

Marzo de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 8.

1911

A handwritten signature in dark ink, appearing to be "F. de S." or similar, written over the printed text.

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXVIII.—Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia séptima.

SEÑORES:

Hemos obtenido ya las ecuaciones generales del movimiento de un fluido perfecto.

Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \\ \frac{dp}{dy} &= \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \\ \frac{dp}{dz} &= \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \\ \rho &= f(p).\end{aligned}$$

Las tres primeras expresan el equilibrio de cada punto del fluido (ó del paralelepípedo infinitamente pequeño que lo comprende), puesto que su significación es esta: que las tres componentes de todas las fuerzas que actúan en cada punto son iguales separadamente á cero.

Estas fuerzas son:

1.º Las presiones sobre el paralelepípedo elemental que rodea al punto en cuestión.

2.º Las fuerzas exteriores á dicho paralelepípedo, pero que actúan sobre su masa y puede suponerse que dan una resultante que pasa por su centro de gravedad.

3.º Las fuerzas de inercia.

Y claro es, que al decir que son las ecuaciones de equilibrio, suponemos aplicado el principio de D'Alambert.

En rigor, mejor debiéramos decir las ecuaciones de movimiento de cada punto; por eso entran los tres coeficientes diferenciales,

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

En estas tres ecuaciones los datos son X, Y, Z ; y son las incógnitas, p que es la presión que en cada momento corresponde á cada punto; ρ que es la densidad para cada punto también, y x, y, z , que son las coordenadas de cualquier punto que elijamos en el fluido en un instante cualquiera, t .

Pero esto requiere nuevas explicaciones que daremos en breve.

La cuarta ecuación da el valor de la densidad en función de la presión p :

De modo que tenemos cinco incógnitas p, ρ, x, y, z , que hay que determinar en función del tiempo.

Y hasta ahora no tenemos más que cuatro ecuaciones.

Nos falta una; y en efecto nos falta la ecuación que se llama *de continuidad del fluido*.

* * *

El principio para establecer esta nueva ecuación es bien sencillo.

Si se calcula la masa de fluido que entra y la que sale por

las seis caras del paralelepípedo elemental, á que nos hemos referido en la conferencia anterior, aumentará la masa ó disminuirá, y esta variación de masa determinará una variación de densidad del paralelepípedo en cuestión.

No hay más que expresar en fórmulas matemáticas esto que acabamos de explicar en términos vulgares.

Sea el paralelepípedo elemental que hemos escogido en el seno del fluido el $A B C D$, figura 10.

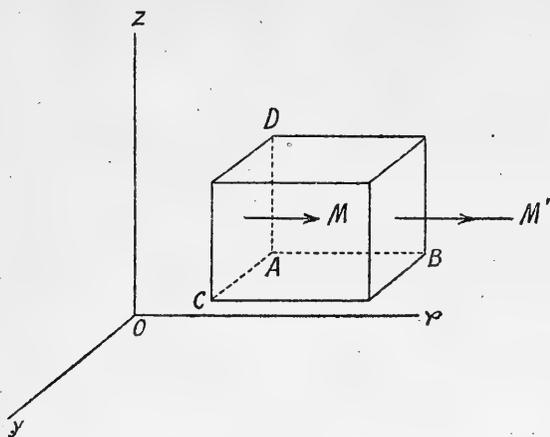


Figura 10.

Sus aristas serán dx , dy , dz .

Su densidad la hemos expresado siempre por ρ .

Su volumen tendrá por valor $dx \cdot dy \cdot dz$.

Y, por lo tanto, su masa será $\rho dx \cdot dy \cdot dz$.

Representemos por u , v , w , las componentes de la velocidad de un elemento del fluido en el punto A , en el instante t . Y esta misma velocidad podremos suponer que es en ese instante t la de todos los elementos, átomos pudiéramos decir, que ocupan la cara M , con errores de orden superior.

De aquí se deduce que, desde el instante t al instante $t + dt$, entrará por la cara M paralelamente al eje de las x un volumen ó prisma, cuya base será M y cuya altura con-

tada paralelamente al eje de las x será $u dt$. Y como la base M es igual á dy, dx , el volumen de flúido que entrará por dicha cara M será evidentemente $dy \cdot dz \cdot u dt$.

Por fin, si la densidad para todos los puntos de esta misma cara es ρ , tendremos: masa que entra por la cara M

$$= \rho u dy dz dt.$$

Cuando decimos: masa que entra, hablamos en términos generales, porque si u tuviese signo negativo hubiéramos debido decir, masa que sale: según el signo de u se verificará uno ú otro caso, pero la expresión es general, dando á u el signo que le corresponda.

Claro es que como v y w son paralelas á la cara M , ni aumentarán ni disminuirán el flúido del paralelepípedo.

Lo que hemos dicho de la cara M podremos decir de la cara M' . Tendrán dz, dy el mismo valor; dt , también será el mismo, porque es el intervalo de tiempo que estamos considerando; pero ρu será distinta porque esta expresión valdrá lo que valía en M , más el incremento que corresponde á ρu al dar á x el incremento $AB = dx$, es decir, al pasar de la cara M á la cara M' , variación que en términos diferenciales se expresa de este modo:

$$\frac{d \rho u}{dx} dx.$$

Podremos, pues, decir:

$$\text{masa que sale por la cara } M' \dots \left(\rho u + \frac{d \rho u}{dx} dx \right) dy dz dt.$$

Y restando lo que sale por la cara M' de lo que entra por la cara M , tendremos el aumento de masa del paralelepípedo por el flujo en las dos caras paralelas M, M' .

Así: aumento de masa del paralelepípedo por los flujos de las caras

$$M, M' \dots \rho u \, dy \, dz \, dt - \left(\rho u + \frac{d\rho u}{dx} dx \right) dy \, dz \, dt$$

y amplificando

$$- \frac{d\rho u}{dx} dx \, dy \, dz \, dt.$$

Repitiendo los mismos razonamientos para las dos caras perpendiculares al eje de las y , tendremos para este segundo par de caras.

$$- \frac{d\rho v}{dy} dy \, dx \, dz \, dt.$$

Por último, aplicando el mismo sistema á las dos caras normales al eje de las z , hallaremos

$$- \frac{d\rho w}{dz} dz \, dx \, dy \, dt.$$

Si sumamos algebraicamente estos tres resultados, podremos decir: en el tiempo dt ha aumentado la masa contenida en el paralelepípedo una cantidad representada en valor y en signo por la siguiente expresión

$$- \frac{d\rho u}{dx} dx \, dy \, dz \, dt - \frac{d\rho v}{dy} dy \, dx \, dz \, dt - \frac{d\rho w}{dz} dz \, dx \, dy \, dt$$

ó bien

$$\left(- \frac{d\rho u}{dx} - \frac{d\rho v}{dy} - \frac{d\rho w}{dz} \right) dx \, dy \, dz \, dt.$$

Decimos en valor y en signo porque pudiera aumentar la masa contenida en el paralelepípedo, y entonces el signo de-

finitivo de la expresión anterior sería positivo y, por el contrario, si resultara negativo nos indicaría que había disminuído la masa contenida en el elemento de volumen, que estamos considerando.

Por otra parte, si ρ representa la densidad en el paralelepípedo en el tiempo t , en el $t + dt$, la densidad habrá aumentado en una cantidad que podremos representar $d\rho$ y la masa habrá variado

$$d\rho \cdot dx dy dz.$$

Igualando esta expresión á la anterior, tendremos

$$d\rho \cdot dx dy dz = \left(-\frac{d\rho u}{dx} - \frac{d\rho v}{dy} - \frac{d\rho w}{dz} \right) dx dy dz dt$$

ó bien

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0;$$

que será la ecuación que se llama de *continuidad* y expresa, en efecto, en la notación diferencial, la continuidad del flúido; lo cual significa que en él no hay ni lagunas, ni separaciones, y que las variaciones de densidad en el tiempo dependen sólo del movimiento del flúido, de la mayor ó menor cantidad que pasa por un espacio cerrado.

Tenemos, pues, para el problema del equilibrio las cinco ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$\rho = f(r),$$

$$\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0,$$

que son cinco ecuaciones para determinar las cinco incógnitas x, y, z, ρ, p , puesto que la temperatura es constante.

Si no lo fuera y hubiera de tenerse en cuenta por entrar en la expresión de ρ , que sería en este caso

$$\rho = f(p, T),$$

necesitaríamos otra ecuación más.

Pero nosotros no hemos de considerar este caso general.

*
* *

Parece que todos los razonamientos que preceden son absolutamente rigurosos, y, en efecto, lo son en el fondo; pero la forma, aunque parece sumamente clara, en rigor es incorrecta, al menos es incorrecta en las *notaciones*, y si tratáramos de resolver las ecuaciones precedentes, al determinar su sentido analítico, nos encontraríamos con las deficiencias que acabamos de anunciar.

Demos un sentido preciso á dichas ecuaciones, y veamos en qué consisten esas incorrecciones á que antes nos referíamos, y qué de propósito hemos dejado deslizar para enseñanza y ejemplo en cierto modo de los alumnos.

Tratamos el problema del movimiento de una masa flúida; pues debemos empezar por definir este *movimiento*, y sobre todo por señalar las cantidades que lo determinan, porque éstas serán las incógnitas del problema.

Lo hemos hecho, mas por decirlo así, instintivamente y no de una manera reflexiva como vamos á hacer ahora.

Todos los autores señalan en este problema de la hidrodinámica *dos sistemas de variables* para definir dicho movimiento.

1.º El sistema de variables que se llama de Lagrange.

2.º El sistema de variables de Euler.

Y reciben estos nombres por haber sido unas y otras las empleadas por ambos matemáticos, respectivamente, en sus estudios sobre el problema de la hidrodinámica.

Por regla general, para las diferenciales del sistema de variables de Lagrange emplearemos la letra d .

Y para las diferenciales que entren en las ecuaciones del sistema de Euler emplearemos la letra ∂ .

Son las notaciones que emplean varios autores, entre otros, Mr. Appell y Mr. Poincaré, aunque hay algunos que no hacen esta distinción, lo cual, á decir verdad, parece incorrecto y propenso á confusiones, que deben evitarse.

Precisamente estas son las deficiencias é incorrecciones á que antes nos referíamos; porque en las ecuaciones precedentes hemos mezclado instintivamente las variables y las notaciones de Lagrange con las variables y las notaciones de Euler.

* * *

Supongamos una masa flúida, naturalmente del flúido perfecto que hemos definido antes, y para mayor claridad supondremos una porción R_0 (fig. 11) limitada por una superficie cualquiera. En rigor, esta superficie puede aumentar y extenderse hacia el infinito si el flúido ocupa todo el espacio.

Bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre dicha masa, fuerzas que no hemos representado en la figura, para no hacerla confusa, el flúido se pondrá en movimiento y de la posición R_0 , en el instante inicial t_0 , llegará en el tiempo t á la posición R .

Como admitimos que la continuidad subsiste durante todo el movimiento, la porción R_0 , que era continua, seguirá siendo continua en su marcha, y continua será en la posición R .

Más adelante veremos que, dadas nuestras hipótesis, dos puntos cualesquiera de R_0 , cuya distancia sea infinitamente pequeña, continuarán estando á distancia infinitamente pequeña uno de otro en todo el trayecto, y estarán también ambos puntos á una distancia infinitamente pequeña al llegar á R .

El movimiento de R_0 quedará perfectamente definido, con-

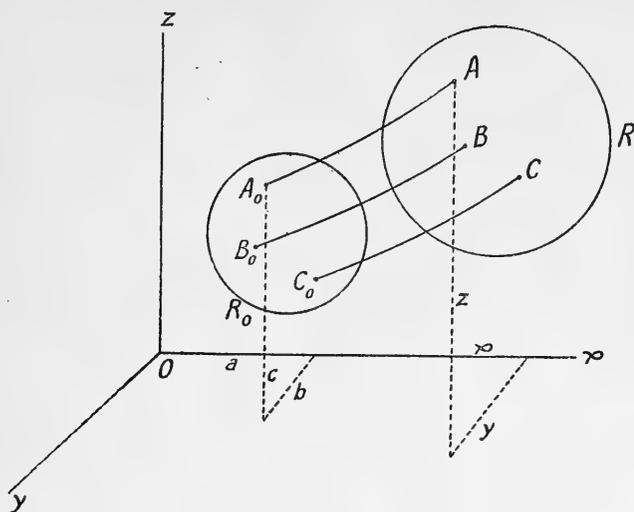


Figura 11.

siderando separadamente el movimiento de cada uno de sus puntos A_0, B_0, C_0, \dots

Representemos por a, b, c las coordenadas de A_0 en el instante inicial t_0 ; y por x, y, z, \dots las coordenadas A_0 al llegar este punto, mejor dicho, la masa de fluido que le corresponde á A en el instante t .

Para pasar A_0 á A habrá descrito una trayectoria $A_0 A$, en ciertas condiciones de movimiento, es decir, de velocidad y de aceleración.

Y este movimiento, y todas las magnitudes que de él se

derivan, estarán definidos por las coordenadas x, y, z , del pequeño móvil, en función de t y de la posición inicial.

Es decir,

$$x = f_x(a, b, c, t),$$

$$y = f_y(a, b, c, t),$$

$$z = f_z(a, b, c, t).$$

Lo que hemos dicho del punto A_0 podemos decir de todos los demás puntos del fluido B_0, C_0, \dots y de todas las masas infinitamente pequeñas interiores á R_0 .

En suma, el movimiento del fluido y de todas sus partes quedará perfectamente definido, si para todos y cada uno de sus puntos se conocen tres ecuaciones análogas á las precedentes, sólo que para otro punto B_0 , por ejemplo, las coordenadas no serán a, b, c , que son las de A_0 , sino las coordenadas de B_0 .

De suerte que en este sistema hay tres funciones x, y, z , y cuatro variables independientes a, b, c , que caracterizan el punto que se elija y el tiempo t .

Tal sistema de variables, se dice que es el sistema de variables de Lagrange.

Con este motivo, podríamos aquí discutir si las funciones f serán las mismas, como en efecto lo son, para todos los puntos; queremos decir, si tendrán la misma forma analítica y sólo diferirán por los valores que se sustituyan en vez de a, b, c , según el punto que tomemos en R_0 . Esto es evidente, puesto que son las integrales. Además es noción elemental.

En las ecuaciones del movimiento entran otras cantidades como p y ρ : pero estas serán á su vez funciones de x, y, z y de t , é indicarán la presión y la densidad de la masa A_0 en cualquier instante. Y en rigor, como x, y, z son funciones de t , claro es que p y ρ serán funciones de t también, es decir, que en cada instante la masa infinitamente pequeña

de fluido que estaba en A_0 , tendrá una densidad y una presión determinadas y que podremos determinar si hemos resuelto el problema general.

En dicho sistema la velocidad de un punto cualquiera A_0 , ó mejor dicho, sus componentes, serán

$$\frac{dx}{dt} = u = f'_x(a, b, c, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = v = f'_y(a, b, c, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = w = f'_z(a, b, c, t).$$

Y las componentes de su aceleración serán así mismo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = J_x = f''_x(a, b, c, t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = J_y = f''_y(a, b, c, t),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = J_z = f''_z(a, b, c, t).$$

Igualmente la presión y la densidad del punto que se considera podrán expresarse de este modo:

$$p = \psi(a, b, c, t),$$

$$\rho = f(a, b, c, t).$$

Claro es que estas cinco ecuaciones definen el movimiento del punto, en función siempre de las cuatro variables a, b, c, t ; que determinan el punto que se elige en el instante inicial, ó sea en función de las coordenadas a, b, c , de este punto y del tiempo t . Haciendo variar á a, b, c , en el instante inicial para todos los puntos del fluido, las fórmu-

las serán aplicables á todos ellos y nos darán el movimiento del fluido descompuesto, por decirlo así, en sus trayectorias parciales.

Pongamos un ejemplo.

*
* *

Supongamos que los puntos que se eligen en el instante inicial forman una curva cuyas ecuaciones sean,

$$F_1(a, b, c) = 0,$$

$$F_2(a, b, c) = 0,$$

y que se quiere saber en un instante cualquiera t en que otra curva se ha convertido dicha curva inicial.

El problema no puede ser más sencillo.

De las tres ecuaciones

$$x = f_x(a, b, c, t),$$

$$y = f_y(a, b, c, t),$$

$$z = f_z(a, b, c, t),$$

deduciremos a, b, c en función de x, y, z, t , y sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones de la curva, tendremos dos relaciones en x, y, z, t , que considerando á t como una constante, serán las ecuaciones de la curva transformada por el movimiento en el instante que se considera.

Como que en rigor, el problema así considerado, es un problema de transformación de figuras ó de sistemas: transformar la R_0 en R por medio de las ecuaciones de transformación que dan x, y, z , en función de a, b, c .

Sólo que es un problema de transformación cinemática, porque entra el tiempo, es decir, porque se tiene en cuenta

no sólo la transformación, sino la velocidad con que se efectúa

Después de la advertencia que hicimos antes respecto á la letra que ha de expresar las diferenciales, excusamos decir que en este sistema que acaba de explicarse se debe emplear constantemente la letra d .

*
*
*

Pasemos al segundo sistema de variables para definir el movimiento de un fluido perfecto.

Definamos por las tres coordenadas x, y, z , cada punto

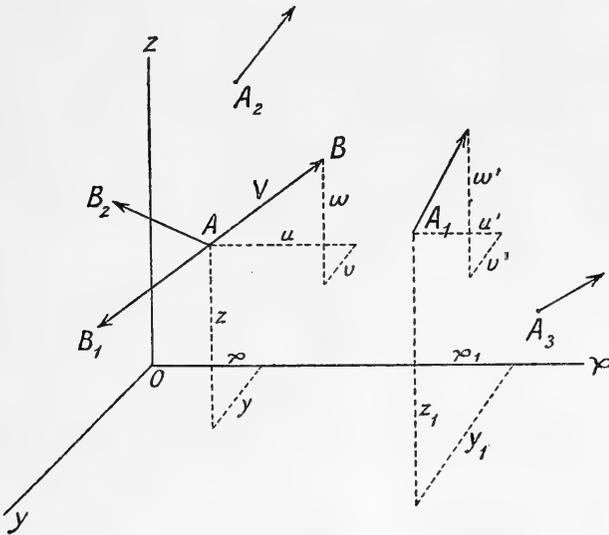


Figura 12.

del espacio por donde pasa, en un instante cualquiera t , un elemento diferencial de la masa del fluido.

Todos los puntos del espacio á que afecta el movimiento del fluido estarán definidos del mismo modo, como se ve en la figura 12 para los puntos A, A_1, A_2, \dots

Estos puntos se consideran como fijos en el espacio: por ellos para el fluido, ó si se quiere, los elementos diferenciales de su masa en diferentes instantes y con diferentes velocidades.

De suerte, que el movimiento del fluido se definirá de este modo.

En el instante t , definido por el tiempo t , por el punto A pasa un elemento de masa del fluido con una velocidad V definida á su vez por los tres componentes u, v, w .

En ese mismo instante, por el punto A_1 pasa otro elemento del fluido, con determinada velocidad V_1 , definida por sus tres componentes u', v', w' ; y lo mismo para todos los demás puntos del espacio á que el movimiento afecta.

Claro es que si en todos los instantes del tiempo se conocen para cada punto del espacio, como acabamos de decir, la masa y la velocidad del fluido que por dicho punto pasa, el movimiento quedará definido para el tiempo y para el espacio, y para todas las cantidades á que el movimiento afecte: como trayectoria de cada punto, posición en cada instante de un elemento determinado, velocidad y aceleración para dicho punto, transformación de curvas, superficies y volúmenes, presiones y densidades; todos estos elementos se podrán determinar en este sistema lo mismo que en el sistema anterior, según luego explicaremos más detenidamente.

Dicho sistema se define, como hemos dicho, por medio de las variables u, v, w y del tiempo t .

Análíticamente, para conocer el movimiento, deberemos tener las siguientes ecuaciones

$$u = \varphi_1(x, y, z, t),$$

$$v = \varphi_2(\rho, y, z, t),$$

$$w = \varphi_3(\rho, y, z, t),$$

que nos darán las componentes de la velocidad, y, por lo tanto, la velocidad, para cualquier punto fijo y en cualquier

instante, con sólo sustituir en las ecuaciones anteriores, en vez de x, y, z , las coordenadas del punto para el cual queremos conocer el estado del movimiento y en vez de t el valor del tiempo que determina ese instante.

Hechas esas sustituciones, las ecuaciones precedentes nos darán los valores de u, v, w, y , por lo tanto, el valor y la dirección de V .

Si el punto elegido es el punto A , sabremos, que en el instante que se considera pasa por dicho punto A un elemento de fluido con tal velocidad; y las ecuaciones

$$p = \psi(x, y, z, t),$$

$$\rho = f(p),$$

que hay que agregar á las dos anteriores, nos dirán cuáles son los valores de la presión y de la densidad en el instante elegido para el punto en cuestión.

Los demás elementos se determinarán como luego indicaremos.

Este sistema de variables lleva en hidrodinámica el nombre de Euler, que fué el que las empleó.

*
* *

En suma, el sistema de variables de Lagrange es a, b, c, t . a, b, c , son las coordenadas de un punto que se elige para estudiar su movimiento, y el movimiento del fluido se estudia por las trayectorias que describen sus diferentes puntos; de modo que, como vimos antes, las coordenadas x, y, z de un punto de esas trayectorias, son funciones de las coordenadas iniciales a, b, c y del tiempo.

En el sistema de Euler se estudia el movimiento *por*

lo que pasa, por decirlo así, en cada punto fijo del espacio.

Las variables son x, y, z, t .

Si se me permite una comparación vulgar, pero clarísima, puedo definir ambos sistemas por el movimiento de los trenes en un sistema de vías férreas.

Puede estudiarse este movimiento, entrando en cada tren, siguiéndole en su marcha, viendo qué velocidades lleva, qué líneas describe, por qué estaciones pasa y en qué momento.

Este, en cierto modo, es el sistema de Lagrange, el de las trayectorias.

Pero también puede estudiarse el movimiento de la red férrea, estableciéndose sucesivamente en cada estación, y observando los trenes que pasan, á qué hora, con qué velocidad, en qué dirección de la red; y si el número de estaciones es muy grande, y están muy próximas, se conocerá el movimiento general de las vías férreas, lo mismo que por el primer método.

Pues este sistema de estaciones, en que se ven pasar los trenes, en vez de seguirlos, es el sistema de Euler.

En el primero, los trenes en marcha representaban las trayectorias de los elementos del fluido; en este segundo sistema, los puntos representan las estaciones del ferrocarril.

*
* *

Y ahora podrá comprenderse por qué hemos dicho, que las ecuaciones establecidas para el movimiento del fluido, si son exactas y rigurosas en sí mismas, y por el procedimiento lógico seguido, son incorrectas en cuanto á las notaciones; porque hemos empleado las mismas notaciones para sistemas diversos.

En efecto, las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{dp}{dx} = \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right), \quad \frac{dp}{dy} = \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad \frac{dp}{dz} = \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

$$\rho = f(p)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0.$$

En las tres primeras ecuaciones los primeros miembros pertenecen, por decirlo así, al sistema de Euler, porque expresan variaciones que experimenta la presión alrededor de un punto x, y, z y en un instante determinado.

Pero en los segundos miembros hemos atendido al sistema de Lagrange, puesto que las tres derivadas segundas, con relación al tiempo, son las componentes de la aceleración de una partícula fluida en su trayectoria.

De manera que siguiendo el sistema de notaciones antes establecido, debemos conservar la ∂ para el primer miembro; pero debemos poner d en el segundo y resultarán en esta forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right).$$

Y como luego veremos, si han de aplicarse estas ecuaciones al sistema de Lagrange, deberemos transformar los primeros miembros, que están expresados en el sistema de Euler, y en que, por lo tanto, x, y, z son las variables; habrá que expresarlos, repetimos, en el sistema de Lagrange, tomando por variables a, b, c : en cuanto á la variable t , ésta es la misma para los dos casos.

Por el contrario, si queremos aplicarlas el sistema de Euler, la forma de los primeros miembros subsiste; pero hay que transformar los coeficientes diferenciales de modo, que solo entren en la notación el símbolo diferencial ∂ en vez del símbolo d .

De la segunda ecuación que expresa la densidad en valores de la presión nada hay que decir, porque es la misma para ambos sistemas.

En cambio hay que decir mucho de la última ecuación, que es la que expresa la continuidad.

Esta ecuación, bien escrita está como la hemos escrito, si se trata del sistema de Euler; pero es inaceptable si se trata del sistema de Lagrange.

En efecto, la hemos obtenido estudiando lo que pasa en un punto determinado por el movimiento del fluido, que pasa por dicho punto. Hemos considerado en él, abarcándolo, un paralelepípedo infinitamente pequeño; y viendo el fluido que entra y el fluido que sale por sus seis caras, expresado este flujo de fluido por medio de las componentes u , v , w , de la velocidad como en el sistema de Euler, hemos determinado la variación de masa de dicho paralelepípedo, y en el límite la derivada de la densidad con relación al tiempo.

Todo esto es correcto en el sistema de Euler y así se expresa la continuidad *en cada punto*; pero no se expresa la continuidad en el sistema de Lagrange, ó sea en el sistema de trayectorias del mismo modo.

En este último sistema debemos expresar la continuidad por otro procedimiento y en otra forma, que, como veremos, sólo contendrá el símbolo d en vez del ∂ .

Tal será el objeto de la conferencia próxima.

Pero como para obtener esta ecuación de continuidad, en el expresado sistema de Lagrange, tenemos que acudir á la teoría del cambio de variables bajo integrales múltiples, y para ello hemos de acudir á la vez á la teoría de las deter-

minantes jacobianas, empezaremos la nueva conferencia por estas dos cuestiones de análisis.

Bien comprendo que esto es interrumpir la exposición de los principios generales de hidrodinámica, que vamos recordando, y que es retardar el estudio de los torbellinos, materia propia de este curso, más para ello creo tener motivos fundados.

Sólo supongo en mis alumnos conocimientos generales y no muy extensos de matemáticas puras, y de mecánica, y como no quiero entrar en el estudio de ningún problema de Física Matemática, sino marchando sobre terreno firme y demostrando directamente todas las fórmulas que empleo, prefiero estas digresiones y aún estas interrupciones de la marcha general, á que en el ánimo de mis alumnos ó de mis lectores, quede la menor sombra ni la menor duda.

Me esfuerzo por establecer el principio de continuidad entre las nociones más elementales y las más elevadas teorías de la ciencia moderna.

Es labor lenta, más aspiro á que sea labor fecunda; y á veces la concisión perjudica á la claridad, obscurece la inteligencia y desanima á los jóvenes que á esta clase de estudios se dedican.

En el fondo todo es claro, al menos con la claridad á que la razón humana puede aspirar; mas para que este fondo sea claro es indispensable empezar por iluminarlo, por modesto que el sistema de iluminación pueda ser.

XXXIX.— Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia octava.

SEÑORES:

Anuncié al terminar la última de mis conferencias, que iba á interrumpir su marcha regular y á suspender por breve espacio la exposición de las leyes fundamentales de la hidrodinámica, para recordar dos problemas de análisis, que acaso tengan en olvido mis alumnos y cuya idea es preciso refrescar, por decirlo de este modo.

La primera cuestión se refiere á la teoría de las determinantes, que ya se estudia en nuestra enseñanza universitaria.

La segunda es un problema de integrales múltiples, á saber: el de cambio de variables.

Tal problema también se estudia en la enseñanza que precede á esta clase; pero, de todas maneras, la repetición no daña y el paréntesis no ha de ser muy largo.

*
* *

Determinantes funcionales.—La determinante jacobiana.—Supongamos que x , y , z son funciones de tres variables x_1 , y_1 , z_1 , es decir:

$$x = x(x_1, y_1, z_1),$$

$$y = y(x_1, y_1, z_1),$$

$$z = z(x_1, y_1, z_1).$$

Las x, y, z del segundo miembro son símbolos de *funciones*.

Las emplearemos en esta forma para no tener que escribir nuevas letras.

Puesto que x, y, z son funciones de x_1, y_1, z_1 , consideradas como variables independientes, podremos obtener para las tres primeras, coeficientes diferenciales de primer orden con relación á las tres últimas, que serán los nueve siguientes:

$$\begin{array}{c} \frac{dx}{dx_1}, \frac{dx}{dy_1}, \frac{dx}{dz_1}, \\ \frac{dy}{dx_1}, \frac{dy}{dy_1}, \frac{dy}{dz_1}, \\ \frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dy_1}, \frac{dz}{dz_1}. \end{array}$$

Y con estas tres líneas, ó con estas tres columnas, tomándolas como líneas ó como columnas, podremos formar la siguiente determinante:

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{dx}{dx_1} & \frac{dx}{dy_1} & \frac{dx}{dz_1} \\ \frac{dy}{dx_1} & \frac{dy}{dy_1} & \frac{dy}{dz_1} \\ \frac{dz}{dx_1} & \frac{dz}{dy_1} & \frac{dz}{dz_1} \end{array} \right|$$

que se llama *determinante funcional* ó *jacobiana*.

Abreviadamente, también se expresa por el siguiente símbolo:

$$\frac{(x y z)}{(x_1 y_1 z_1)}$$

que indica bajo esta forma fraccionaria, que hay que tomar las derivadas de las tres funciones del numerador con relación á las tres variables del denominador, como independientes. Son tres para cada una de las primeras, en totalidad nueve; y formando con ellas líneas ó columnas, resulta la determinante funcional.

Y ahora vamos á demostrar para las jacobianas un teorema análogo al de las derivadas de funciones de funciones.

Se sabe que si se tiene

$$x = f(x_1), \quad x_1 = \varphi(x_2)$$

se tendrá

$$\frac{dx}{dx_2} = \frac{dx}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx_2} = f'(x_1) \cdot \varphi'(x_2);$$

pues una cosa análoga vamos á demostrar para la jacobiana; y para simplificar los cálculos, y porque la marcha de la demostración no cambia, sea cual fuere el número de variables, supongamos que éstas sean en número de dos.

Admitimos, pues, que x , y son funciones de x_1 , y_1 , y que x_1 , y_1 son, á su vez, funciones de x_2 , y_2 : es claro que x , y serán funciones de x_2 , y_2 .

Y vamos á demostrar, que la jacobiana de este último grupo es igual al producto de las jacobianas de los dos grupos anteriores.

En rigor, la demostración está reducida á escribir las determinantes funcionales de los dos primeros grupos y á multiplicarlas por la regla conocida de multiplicación de determinantes.

La jacobiana de x , y con relación á x_1 , y_1 , es

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_1} & \frac{dx}{dy_1} \\ \frac{dy}{dx_1} & \frac{dy}{dy_1} \end{vmatrix}.$$

La jacobiana de x_1, y_1 con relación á x_2, y_2 será del mismo modo:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx_2} & \frac{dx_1}{dy_2} \\ \frac{dy_1}{dx_2} & \frac{dy_1}{dy_2} \end{vmatrix}$$

y efectuando el producto:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_1} & \frac{dx}{dy_1} \\ \frac{dy}{dx_1} & \frac{dy}{dy_1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx_2} & \frac{dx_1}{dy_2} \\ \frac{dy_1}{dx_2} & \frac{dy_1}{dy_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_2} + \frac{dx}{dy_1} \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dx}{dy_1} \frac{dx_1}{dx_2} \\ \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_2} + \frac{dy}{dy_1} \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dy}{dy_1} \frac{dx_1}{dx_2} \end{vmatrix}$$

Hemos efectuado estos cuatro productos:

- | | | | |
|--|---|---|--|
| 1. ^a vertical de la 2. ^a por 1. ^a horizontal de la 1. ^a determinante | — | } | formando la 1. ^a horizontal del producto. |
| 2. ^a vertical de la 2. ^a por 1. ^a horizontal de la 1. ^a | — | } | |
| 1. ^a vertical de la 2. ^a por 2. ^a horizontal de la 1. ^a | — | } | formando la 2. ^a horizontal del producto. |
| 2. ^a vertical de la 2. ^a por 2. ^a horizontal de la 1. ^a | — | } | |

Ahora bien, cada uno de los cuatro elementos de la última determinante, recordando los principios de la diferenciación de funciones de funciones compuestas, pueden simplificarse en la siguiente forma:

El término

$$\frac{dx}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_2} + \frac{dx}{dy_1} \frac{dx_1}{dy_2}$$

no es otra cosa que

$$\frac{dx}{dx_2}$$

Asimismo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dx}{dy_1} \frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{dx}{dy_2}, \\ \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dx_2} + \frac{dy}{dy_1} \frac{dy_1}{dx_2} &= \frac{dy}{dx_2}, \\ \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dy}{dy_1} \frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{dy}{dy_2}. \end{aligned}$$

De suerte, que la determinante del segundo miembro se convierte en

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_2} & \frac{dx}{dy_2} \\ \frac{dy}{dx_2} & \frac{dy}{dy_2} \end{vmatrix}.$$

Que es la jacobiana de x, y , por relación de x_2, y_2 .
En la notación abreviada, podremos escribir

$$\frac{d(x y)}{d(x_1 y_1)} \cdot \frac{d(x_1 y_1)}{d(x_2 y_2)} = \frac{d(x y)}{d(x_2 y_2)}.$$

Lo cual demuestra el teorema anunciado, á saber: que la jacobiana de una función de función es igual al producto de las jacobianas de las dos funciones.

Claro es que al emplear la palabra función en singular lo hacemos por abreviar la expresión, porque en este caso las funciones son dos, y dos son las variables independientes de cada grupo.

Claro es también que podemos generalizar el teorema para un número mayor de funciones y variables, por ejemplo:

$$\frac{d(x y z)}{d(x_1 y_1 z_1)} \cdot \frac{d(x_1 y_1 z_1)}{d(x_2 y_2 z_2)} = \frac{d(x y z)}{d(x_2 y_2 z_2)}.$$

*
* *
*

Cambio de variables bajo una integral múltiple.—Para simplificar, consideremos el caso de una integral doble.

Sea, pues,

$$\iint_C f(x, y) dx dy.$$

Ya sabemos, por los elementos de cálculo integral, lo que la expresión anterior significa.

$dx \cdot dy$ representa el área de un rectángulo a (fig. 13).

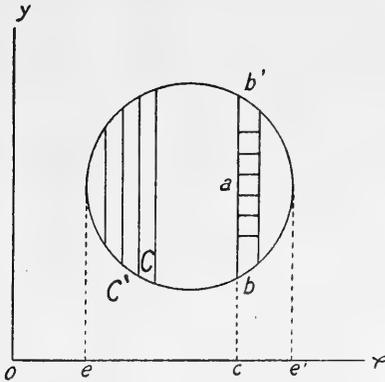


Figura 13.

Esta área hay que multiplicarla por $f(x, y)$, poniendo en vez de x, y las coordenadas del punto a .

Y después hay que hacer dos integraciones.

Una para todos los elementos comprendidos en la faja $b b'$, es decir, entre cb y cb' .

Claro que en esta integración, ó en esta suma, la variable de la integración será y , al paso que $x = Oc$ quedará fija así como dy .

Obtenida la integral de la faja $b b'$, habrá que sumar, ó de otro modo, habrá que integrar todas las fajas del área C desde Oe á Oe' .

Aquí la variable de la integración será x .

Es evidente que lo mismo hubiéramos podido haber integrado, primero con relación á x , es decir, dividiendo el espacio C en fajas paralelas al eje de las x , y luego integrando con relación á y , desde la parte más baja á la más alta de la curva.

Todas estas son, en verdad, nociones absolutamente elementales.

Y esto suponiendo, que C representa el contorno límite en el plano de la integración.

Pues supongamos que se quiere cambiar de variables sin que la integral cambie de valor, es decir, que en vez de las variables x , y se desea emplear dos variables u , v , porque así conviene á tal ó cual problema, que nos proponemos resolver.

Las nuevas variables deberán estar enlazadas con las primitivas, de modo que á cada sistema de valores de unas correspondan valores determinados de las otras.

Deberemos tener dos ecuaciones de esta clase:

$$x = \varphi(u, v),$$

$$y = \psi(u, v).$$

Además, supondremos que ambos sistemas de valores se corresponden uniformemente, á saber: que á cada sistema de x , y corresponderá un sistema de u , v y uno solo. Y recíprocamente, para cada sistema u , v corresponde un sistema x , y y no más.

De aquí resulta que en este caso á la figura 13 corresponderá otra figura 14 respecto á las variables u , v .

Así, á un punto a de la figura 13 corresponderá un punto a_1 de la figura 14, ó sea en el nuevo sistema de variables.

Las coordenadas de a , serán x , y ; las de a_1 , serán u , v , y las cuatro variables x , y , u , v de los puntos a y a_1 , satisfarán á las dos expresadas ecuaciones

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v).$$

El contorno C se habrá convertido en otro contorno distinto C_1 , cuya ecuación se encontraría sin dificultad, conociendo la del contorno C , con sólo sustituir en la ecuación de éste, en vez de x, y , sus valores en función de u, v .

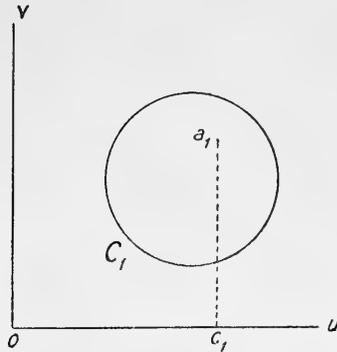


Figura 14.

La correspondencia, pues, entre las dos figuras no puede ofrecer dificultad de ningún género.

En cuanto á la forma de la integral, aplicada á la figura 14, claro es que será del mismo tipo, que la integral de la figura 13, es decir,

$$\iint_{C_1} f_1(u, v) du dv;$$

pero no podemos *á priori* decir cuál será la forma del coeficiente $f_1(u, v)$; porque esta forma ha de ser tal, que efectuada la integración con relación á u y á v , su valor ha de resultar numéricamente igual al que se obtiene en la integral primitiva, ó sea

$$\iint_C f(x, y) dx dy = \iint_{C_1} f_1(u, v) du dv.$$

Tal problema, generalizado para un número cualquiera de variables, es el que en el cálculo integral se conoce con el nombre de cambio de variables bajo el signo integral.

Hay varias soluciones del mismo, soluciones que tienen un fondo común, aunque la forma sea distinta; por ejemplo las demostraciones de Bertrand, Jordán, Coursat y Humbert.

Escogeremos esta última por la claridad y la sencillez de la exposición.

El alumno ó el lector que recuerde esta ú otra demostración cualquiera, para el problema de que se trata, puede pasar por alto lo que sigue, que es como un paréntesis abierto en la materia propia de esta clase.

*
* *

Tomando el caso de dos variables, que fácilmente puede generalizarse, dividiremos el problema en otros dos, cambiando en cada uno de ellos *una sola de las dos variables*.

Así, siendo

$$\iint_c f(x, y) dx dy$$

la integral en que vamos á cambiar las variables x , y por las variables u , v , dividiremos el problema, como hemos dicho, en dos.

Primero: Cambiaremos sólo la variable y por la variable u , dejando x invariable.

De modo que al sistema x , y sustituiremos el x , u .

Para esto deberemos expresar y en función de x , u ; sea la ecuación que determina y la siguiente:

$$y = F(x, u),$$

Las ecuaciones para el cambio de variables serán, pues,

$$\begin{aligned}x &= x, \\y &= F(x, u),\end{aligned}$$

puesto que la x no varía.

El cambio de y por u es ya un problema elemental; es decir, es el cambio de una sola variable.

No hay más que sustituir y , dy por sus valores deducidos de las ecuaciones precedentes: así

$$y = F(x, u); dy = \frac{dF(x, u)}{du} du$$

y por lo tanto hallaremos,

$$\iint_{c_1} f(x, F) \frac{dF}{du} dx du.$$

Para evitar confusiones respecto á los límites de la integral, conviene fijarse, por lo que luego veremos, en el signo de $\frac{dF}{du}$, que es evidentemente una función de x, u , que designaremos por $\varphi(x, u)$, de modo que

$$\frac{dF}{du} = \varphi(x, u).$$

Considerando á esta función como la ordenada h de una superficie

$$h = \varphi(x, u),$$

es claro que $\varphi(x, u) = 0$ representará la intersección de dicha superficie con el plano de las x, u , y esta curva dividirá á dicho plano de las x, u en varias porciones: para unas, todos los puntos interiores, y todos los sistemas de valores

x, u correspondientes darán para $\varphi(x, u)$, ó sea para $\frac{dF}{du}$ valores positivos; y á su vez otras curvas ó porciones de la intersección marcarán regiones en que dicha función será negativa.

Más claro.

Proyectemos la superficie $h = \varphi(x, u)$ ó ABC (fig. 15) en

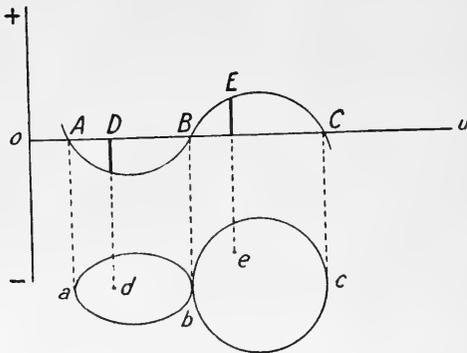


Figura 15.

dos planos coordenados: en el vertical la representaremos por ABC ; en el horizontal, la intersección BC con la superficie la designaremos por bc y la intersección AB por ab .

Es decir, que una parte de la intersección de la superficie $h = \varphi(x, u)$ con el plano de las x, u se proyectará horizontalmente en las curvas ab, bc .

Lo que de estas digamos, podríamos decir de todas las demás partes de la intersección

Ahora bien, todo punto e del interior de bc tiene una ordenada positiva E , puesto que E está por encima de Ou .

bc es, pues, una región en que $\varphi(x, u)$ ó $\frac{dF}{du}$ tiene constantemente signo positivo.

Análogamente, todo punto d del interior de ab corres-

ponde á valores negativos de $\varphi(x, u) = \frac{dF}{du}$ puesto que la coordenada D está por debajo de Ou .

En suma, la curva $\varphi(x, u) = 0$ divide el plano de las x, u , como antes dijimos, en regiones, para cada una de la cuales $\frac{dF}{du}$ conserva el mismo signo, ya positivo, ya negativo. Representemos para abreviar la explicación por c_1, c_2, \dots cada una de estas regiones.

*
* *

Designemos en la figura 16, que está copiada de la obra de Mr. Humbert, los dos planos (P) y (P') correspondientes á las variables x, y el primero, y á las variables x, u el segundo.

La integral dada

$$I = \int \int_c f(x, y) dx dy$$

corresponde al plano P , y dicha integral es la representada en la figura 13.

El plano P' corresponde asimismo á las variables u, x, y por lo tanto, á la integral que ya hemos expresado por

$$I = \int \int_c f(x, F) \frac{dF}{du} dx du.$$

Así, cada punto M del plano P corresponderá á un punto M' del plano P' ; y las coordenadas x, y del punto M estarán enlazadas, como queda dicho, por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= F(x, u) \end{aligned}$$

con las coordenadas x, u del plano P' .

La primera integral tendrá por límite de la integración la curva C , á la cual corresponderá en la segunda integral, punto por punto y recíprocamente, la curva C' .

Como la x queda invariable, ambas curvas tendrán los mismos límites en el sentido del eje de las x , á saber: x_0 y X_0 , y las líneas $x_0 x_0, X_0 X_0$ serán tangentes á ambos contornos.

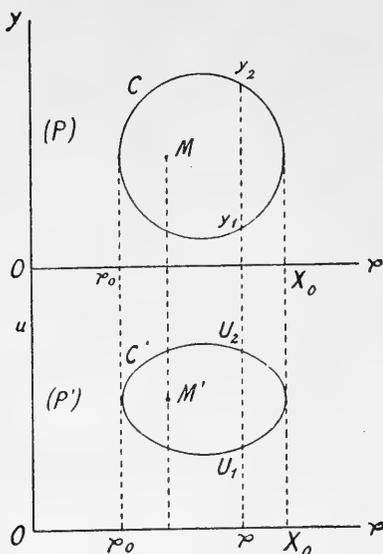


Figura 17.

Las dos figuras de los planos (P) y (P') se corresponden, pues, punto por punto, y punto por punto se corresponden los dos contornos C, C' .

Pero aquí ocurre una duda.

En el plano P , la primera integración con relación á y se ha de efectuar entre los límites y_1, y_2 .

Así, la integral I tiene, como ya hemos dicho, esta forma:

$$I = \int_{x_0}^{X_0} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy.$$

Y la segunda integral, la del plano P' , correspondiente á las variables x, u , tendrá asimismo esta forma análoga:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \frac{dF}{du} du.$$

Mas en la figura, ¿cómo se corresponderán y_1, y_2 y U_1, U_2 ?

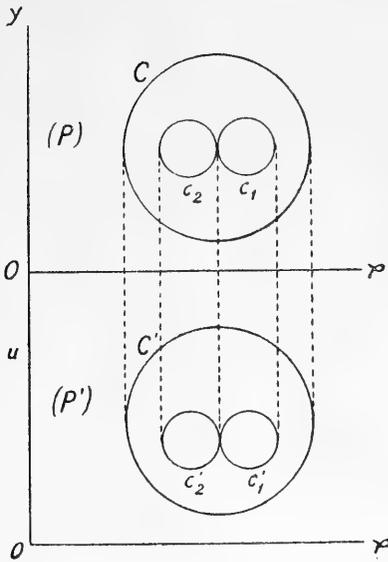


Figura 17.

¿Serán la correspondencia $y_1 \dots U_1, y_2 \dots U_2$, ó será $y_1 \dots U_2, y_2 \dots U_1$, invirtiendo los límites U_1, U_2 ?

Para precisar este punto es para lo que hemos hecho la distinción precedente respecto al signo de $\frac{dF}{du}$ en el espacio ó dominio, como dicen algunos, de la integración, según ahora vamos á explicar.

Consideremos (fig. 18) dividido el espacio C' de la integración en el plano P' en regiones c'_1, c'_2, \dots en cada una de las que $\frac{dF}{du}$ tenga constantemente el mismo signo, ya positivo, ya negativo.

A estos espacios corresponderán en el plano (P), y en el espacio ó dominio C , otros espacios interiores c_1, c_2, \dots que se corresponderán con los anteriores.

Y á todos los espacios del plano (P') corresponderán espacios del plano (P), tantos en uno como en otro plano.

Pues bien: dividamos ambas integrales en estos espacios elementales, y es claro que la integral total será igual á la suma de las integrales parciales.

Más claro:

$$\int_{C'} = \int_{c'_1 + c'_2 + c'_3 + \dots} = \int_{c'_1} + \int_{c'_2} + \int_{c'_3} + \dots$$

En cada una de estas integrales parciales $\frac{dF}{du}$ no cambiará de signo, de modo que se conservará constantemente positiva ó constantemente negativa dicha función.

Tomemos uno de estos espacios de signo constante del plano (P') y la región correspondiente del plano (P), y á este caso particular nos limitaremos por el pronto.

Volvamos ahora á la figura 17, pero en que los contornos C y C' representarán ahora dos contornos parciales de los $c, c' \dots$

De modo que en el interior de C' el signo de $\frac{dF}{du}$ será constante.

En cuanto al contorno C no tenemos que hacer advertencia ninguna, puesto que no entra este coeficiente diferencial.

Claro es que $f(x, y)$ podrá cambiar de signo varias veces entre y_1, y_2 ; pero esto importa poco, porque en la segunda integral I del mismo modo cambiará $f(x, F)$ que es igual en valor y signo á la anterior $f(x, y)$.

Y examinemos ahora dos casos: 1.º, que $\frac{dF}{du}$ sea constantemente positivo; ó 2.º, que sea constantemente negativo.

1.º Si $\frac{dF}{du}$ es constantemente positivo, se ve que según

$$dy = \frac{dF}{du} du,$$

dy y du tendrán el mismo signo, es decir, que y y u al mismo tiempo crecerán ó al mismo tiempo decrecerán; luego se corresponderán los mínimos y los máximos; de otro modo no podrían corresponderse: una de las variables crecería al disminuir la otra.

Luego se corresponderán los mínimos $y_1 \dots U_1$, y los máximos $y_2 \dots U_2$; y la integral en las nuevas variables no podrá tener más que esta forma:

$$I = \int_{x_0}^{x_0} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \frac{dF}{du} du.$$

Advirtiendo que en ella $\frac{dF}{du}$ será constantemente positiva, y como se sabe por álgebra que se llama *módulo* de una cantidad cualquiera á su valor numérico con signo positivo; y como también se sabe, y es evidente, que el módulo de una cantidad positiva es ella misma, podremos escribir:

$$I = \int_{x_0}^{x_0} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \text{ mod. } \frac{dF}{du} du.$$

2.º Supongamos ahora que en el interior del contorno C' $\frac{dF}{du}$ es constantemente negativa.

En este caso la relación entre los dos incrementos infinitesimales de y y de u ,

$$dy = \frac{dF}{du} du,$$

nos demuestra que dy y du tienen signos contrarios; es decir, que cuando la una crece, por ejemplo la y , la otra decrece y recíprocamente; así el mínimo de y debe corresponder al máximo de U , y, al contrario, el mínimo de U al máximo de y ; ó sea que

se corresponden

$$y_1 \dots U_2$$

$$y_2 \dots U_1$$

y la integral tendrá la forma

$$I = \int_{x_0}^{x_2} dx \int_{U_2}^{U_1} f(x, F) \frac{dF}{du} du.$$

Invirtiéndola segunda integral y cambiando el signo,

$$I = - \int_{x_0}^{x_0} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \frac{dF}{du} du,$$

ó poniendo el signo menos al coeficiente diferencial

$$I = \int_{x_0}^{x_0} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \left(- \frac{dF}{du} \right) du.$$

Pero $\frac{dF}{du}$, hemos supuesto, que era constantemente negativa; poniéndole el signo — resultará constantemente posi-

va; de modo que resultará su propio módulo, y podremos expresar la integral anterior de este modo

$$I = \int_{x_0}^{x_0} dx \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \text{ mod. } \frac{dF}{du} du.$$

En general, sea cual fuere el signo de $\frac{dF}{du}$, la integral se puede expresar prescindiendo de esta circunstancia, bajo la forma indicada, con sólo tomar el módulo de $\frac{dF}{du}$.

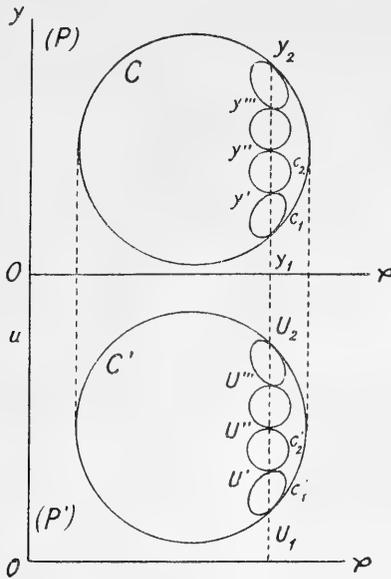


Figura 18.

Y aplicando esta regla á todos los dominios parciales c y reuniendo todas las integrales en una, la fórmula resultará general, y podrá tomarse la integral respecto á y y á u desde la menor á la mayor en ambos planos (P) y (P') .

Fijemos las ideas.

Sean (fig. 18) C y C' los contornos de las dos integrales referidas á x, y la una, á x, u la otra.

Consideremos la ordenada y y la correspondiente u , y sean $c_1, c_2 \dots c'_1, c'_2 \dots$ los contornos de los espacios ó dominios en que $\frac{dF}{du}$ conserva signos constantes.

Considerando cada dos contornos correspondientes podremos aplicar esta fórmula, y sumando las integrales parciales tendremos:

$$\int_{U_1}^{U'} + \int_{U'}^{U''} + \int_{U''}^{U'''} + \int_{U'''}^{U_2} = \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \text{ mod. } \frac{dF}{du} du.$$

Es decir, que á cada ordenada se le puede aplicar la misma fórmula.

Y repitiendo lo mismo para todas las fajas paralelas á los ejes y, u , resultará que la fórmula de transformación será general con tal que tomemos el módulo de $\frac{dF}{du}$, sin que haya necesidad de preocuparse por los cambios de signo del expresado coeficiente diferencial.

*
* *

En resumen: si á la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_0} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy$$

se le aplica la transformación de variables

$$x = x, y = F(x, u)$$

en que una sola variable, la y por ejemplo, cambia, la inte-

gral anterior, expresada en dichas nuevas variables, tendrá esta nueva forma completamente general

$$I = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{U_1}^{U_2} f[x_1 F(x, u)] \text{ mod. } \frac{dF}{du} du$$

en la que si y_1, y_2 van de menor á mayor U_1, U_2 irán también de menor á mayor.

Pero todavía podemos dar otra forma al coeficiente

$$\frac{dF}{du}$$

En efecto, formando la jacobiana del sistema

$$x = x, y = F(x, u)$$

tendremos

$$\frac{d(x, y)}{d(x, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{du} \end{vmatrix} = \frac{dF}{du};$$

luego poniendo en la integral última este valor de $\frac{dF}{du}$,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} du \int_{U_1}^{U_2} f(x, F) \text{ mod. } \frac{d(x, y)}{d(x, u)}$$

*
* *

Si en esta integral cambiamos la variable x por la variable v , podremos aplicar á la última ecuación la misma regla: en el coeficiente sustituir las x, u en función de las nuevas variables u, v , y multiplicar la anterior por la nueva jacobiana. Mejor dicho, por su módulo.

Hallaremos, por lo tanto,

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} f(x, y) \operatorname{mod.} \frac{d(x, y)}{d(x, u)} \cdot \operatorname{mod.} \frac{d(x, u)}{d(u, v)}$$

y como hemos demostrado que

$$\frac{d(x, y)}{d(x, u)}, \frac{d(x, u)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

hallaremos, por último, poniendo en vez de los límites el contorno de la integración, que la fórmula del cambio de variables en una integral doble será la siguiente:

$$I = \iint_C f(x, y) dx dy = \iint_C f(x, y) \operatorname{mod.} \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du dv.$$

Su aplicación se completa con las siguientes explicaciones.

Cuando se sustituya á los contornos de la integración los valores extremos de y y de x , por una parte, y de u y v por otra, habrá que ir siempre en el mismo orden creciente ó decreciente, según hemos explicado, sin pensar en los cambios de signo.

En la segunda integral hay que poner en vez de x , y sus valores en función de u y v : si las ecuaciones del cambio de variables son

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v),$$

claro es que $f(x, y)$ se convertirá en

$$f[\varphi(u, v), \psi(u, v)];$$

y en la jacobiana no hay que preocuparse del orden de las variables, porque

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)}, \frac{d(x, y)}{d(v, u)}, \dots$$

sólo difiere en el signo, y como hay que tomar el módulo, todas resultan positivas é iguales.

Por último, como en estas jacobianas entran también x é y , habrá que sustituir sus valores en función de u, v , para que no queden bajo la integral más que las nuevas variables, que son estas últimas.

*
* * *

Dicha regla de cambio de variables es general, y la demostración es siempre la misma que hemos dado para el caso de dos variables.

Si las variables primitivas eran x, y, z , y las nuevas son u, v, w , se cambian variable por variable, pasando, por ejemplo, del sistema x, y, z al x, y, w ; después del x, y, w al x, v, w, y , por fin, del x, v, w al u, v, w .

En cada cambio entrará la jacobiana correspondiente; pero por la regla del producto de jacobianas

$$\frac{d(x, y, z)}{d(x, y, w)} \cdot \frac{d(x, y, w)}{d(x, v, w)} \cdot \frac{d(x, v, w)}{d(u, v, w)} = \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)},$$

y vendremos á la fórmula final

$$\iiint_c f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{c'} f(x, v, z) \text{ mod. } \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} du dv dw$$

debiendo en el segundo miembro sustituir, en vez de x, y, z , sus valores en función de u, v, w .

Esta es la fórmula general que aplicaremos.

Claro es, que si en cualquiera aplicación de esta fórmula, para un cambio de variables, en un orden bien definido (por ejemplo, á x, y, z se sustituyen u, v, w , midiéndose x, u en el mismo eje; en otro eje rectangular del primero y, v ; y en

un tercer eje perpendicular á los dos anteriores z, w), se demostrase por las condiciones especiales del problema que la jacobiana ó determinante funcional

$$\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)}$$

era constantemente positiva, sería inútil tomar su módulo, y esta notación desaparecería de la fórmula precedente.

Esto es lo que sucede, como veremos, en la obra de Mr. Appell, al aplicar el cambio de variable á las variables de Lagrange, á fin de establecer la ecuación de continuidad; pero este será el objeto de la conferencia próxima.

XL. — Sismógrafo analizador.

POR EDUARDO MIER Y MIURA

Por lo mismo que la Sismología verdaderamente científica es de estos últimos tiempos, hay en ella aún muchos puntos oscuros, que exigen atento y perseverante estudio.

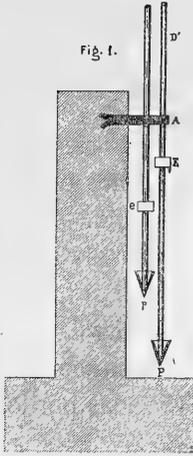
Entre esas cuestiones, todavía no dilucidadas de modo claro y terminante, figuran algunas que se refieren al funcionamiento de los instrumentos empleados por la referida ciencia para realizar sus observaciones, y á las fórmulas con que se interpretan los sismogramas ó curvas trazadas por los sismógrafos.

La justificación de estos asertos conduciría á su autor á disquisiciones de índole teórica, de las que desea huir en este escrito, al que pretende dar, dentro de lo posible, sólo carácter experimental, procurando indicar medios prácticos de esclarecer algunas cuestiones dudosas, tales como el valor que en realidad puede atribuirse al principio de la masa estacionaria, la influencia que en el trazado de los sismogramas tienen, tanto los movimientos pendulares como los rozamientos de los sismógrafos, la eficacia de los amortiguadores y la precisión de algunas de las fórmulas empleadas en Sismología.

El sismógrafo experimental que, con los fines ya señalados, se propone es muy sencillo, y se compone de dos péndulos verticales P y p (fig. 1.^a), montados uno al lado del otro, sobre una corta y robusta pieza de fundición A , empotrada en un pilar, para que ambos péndulos se hallen en condiciones iguales respecto de los empujes que los terremotos han de comunicarles.

Uno y otro péndulo se apoyan sobre cuchillas de acero

iguales, B (fig. 2.^a), incrustadas en la pieza A , sobre cuyas aristas se apoyan piedras de ágata, que forman parte de aros CC , que permiten el giro de los péndulos. Ambas suspensiones deben ser idénticas en lo posible, prefiriéndose la disposición descrita, porque con ella será menos perjudicial la acción del polvo, que si la cuchilla se hallare en la parte superior.

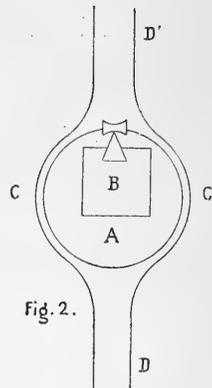


Las aristas de las cuchillas de apoyo deben ser de alguna longitud: de un centímetro, por lo menos, con objeto de que los péndulos sólo puedan oscilar en el plano normal á ellas, para registrar únicamente la componente contenida en el plano de oscilación.

Por encima del eje, en D' (figuras 1.^a y 2.^a) deben estar prolongadas las varillas de los péndulos, con objeto de experimentar si es preferible ó no colocar los amortiguadores en esas prolongaciones.

Las masas de los péndulos pueden estar constituidas por conos huecos P , p , en los que se depositará lastre, en las variables cantidades que los experimentos exijan.

Convendrá que cada una de las varillas propiamente dichas de los péndulos, D , esté constituida por tres piezas, formadas con hierros de los llamados planos, cuya menor dimensión sea la que corte el aire al oscilar los péndulos, más que por disminuir la pequeña resistencia que ese fiúido puede ofrecer, por dar mayor rigidez á las varillas en sentido del plano de oscilación.



De estas tres piezas, que han de constituir cada varilla, una puede formar cuerpo con la masa pendular, y las otras dos, entre las que ha de ajustarse aquélla, constituirían la parte superior de la varilla y el anillo CC (fig. 2.^a), que ha de abrazar la suspensión y está prolongado por una varilla plana D' .

El objeto de esa disposición es poder variar la longitud de los péndulos, subiendo ó bajando la varilla plana de la masa pendular entre las dos que penden de la suspensión, asegurando los tres hierros planos por medio de un par de juegos de tuercas con tornillos, que atravesarán orificios practicados en esos hierros.

El registro de las observaciones ha de ser indispensablemente fotográfico, para eliminar las variables y perjudiciales perturbaciones que el rozamiento introduce en el registro mecánico.

Dos espejos, E, e (fig. 1.^a), colocados á distintas alturas, deberán registrar, sobre una misma banda de papel fotográfico, los sismogramas de ambos péndulos. Se juzga inútil entrar en más detalles acerca del aparato fotográfico de registro, toda vez que se reducirá á uno semejante á los empleados comúnmente.

Si en la figura 3.^a se representan los péndulos suponiendo que su plano de oscilación se vea de frente, claro es que mientras las masas P y p permanezcan estacionarias, en virtud de la inercia, al moverse la suspensión de A'' á A' y viceversa, trasladándose la vertical AP á uno y otro lado de su posición ordinaria, los espejos formarán ángulos variables con su posición inicial, medidas por los $p A' p'$, $P A' P'$, $p A'' P''$, $P A'' P''$, etc., etc., que las variables direcciones de los péndulos forman con la constante que la vertical tiene.

Para ese supuesto caso, que en la realidad no debe presentarse jamás en toda su integridad, serán generalmente inapreciables los movimientos verticales de las masas, por

efecto de oscilaciones horizontales $A'' A'$, á poca longitud que los péndulos tengan.

En efecto, en el triángulo $A A' p$, por ejemplo, designando por l la longitud $A' p$ del péndulo y por a la amplitud del movimiento horizontal terrestre, $A' A''$, lo que se elevará la masa p al pasar la suspensión de A á A' , estará medida por la diferencia d , entre la hipotenusa l y el cateto vertical; así es que:

$$d = l - \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$$

y con que l valga 2 metros, para que d llegara á valer 0,1 mm., sería preciso que

$$a = 40 \text{ mm.},$$

amplitud que sólo se alcanzará ó sobrepujará en casos muy extraordinarios y que desde luego da idea de la enorme proporción en que ha de crecer la amplitud de las ondas para que los movimientos verticales de las masas lleguen á tener apreciable valor.

Forma contraste esta pequeñez de los movimientos de las masas, acabados de examinar, con la magnitud de lo que las verticales $A' P'$, $A'' P''$ se desvían de la posición inicial $A P$, en sentido horizontal, dentro de la hipótesis que se estudia de la masa estacionaria, cuyo escaso rigor científico desde luego se habrá observado por lo ya dicho, que demuestra la existencia de pequeños movimien-

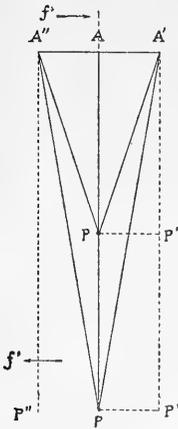


Fig. 3.

tos verticales, á los que además acompañarán siempre otros en sentido horizontal.

En ese supuesto de la inmovilidad de las masas, que de

todos modos conviene aceptar, por ahora, al pasar la suspensión de ambos péndulos de A á A' (fig. 3), los dos triángulos rectángulos $A' p p'$ y $A' P P'$, dan, designando por L la longitud del péndulo AP y conservando las otras anotaciones, antes indicadas:

$$l \cdot \text{sen } pA'p' = p p' = PP' = L \cdot \text{sen } PA'P';$$

de modo que

$$\frac{\text{sen } pA'p'}{\text{sen } PA'P'} = \frac{L}{l},$$

que, traducida al lenguaje usual, dice que los senos de los ángulos, formados por los péndulos con la vertical que pasa por el punto de suspensión, son inversamente proporcionales á las longitudes de esos péndulos.

Mientras los ángulos sean muy pequeños, como en Sismología sucede, claro es que en la proporción anterior será lícito sustituir los senos por los ángulos correspondientes y escribir la última igualdad, que sólo dejaría de ser suficientemente precisa en casos muy excepcionales, de este otro modo:

$$\frac{\text{ángulo de } l}{\text{ángulo de } L} = \frac{L}{l},$$

sobrentendiendo que esos ángulos son los que forman con la vertical los correspondientes péndulos.

Bastará, por lo tanto, con que $L = 2l$ para que constantemente, mientras se pudiera aceptar el principio de la masa estacionaria, los ángulos descriptos por el péndulo más corto fueran dobles, de los que formara simultáneamente el de mayor longitud.

En este caso, los rayos reflejados por los espejos hacia la cámara de registro fotográfico, que á su vez describen ángulos dobles de los que van formando con su posición

inicial cada uno de los dos espejos, conservarán esa misma constante relación $\frac{L}{l}$, y para el valor particular antes adoptado, trazarán dos diagramas distintos, siendo el que corresponde al péndulo más corto de ordenadas dobles que el dibujado por L .

Si, por lo contrario, la vertical AP permaneciera inmóvil y ambos péndulos oscilaran á uno y otro lado de ella, también es sabido que los movimientos pendulares aparecerían definidos por los valores de los períodos t , y T , que respectivamente convienen á l y L , dados por las conocidas expresiones, suficientemente aproximadas:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

que proporcionan la:

$$\frac{T}{t} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l}},$$

de modo que las sinusoides que en el registro fotográfico trazaran, serían perfectamente definidas por lo que á sus períodos se refiere, ya que tanto uno como otro péndulo podrían dibujar curvas de esa especie de muy distintas amplitudes; pero del mismo período t todas las correspondientes á l y del otro período T todas las trazadas por L .

Desde el punto de vista del registro fotográfico, lo mismo da que la masa del péndulo permanezca sin apartarse de una determinada vertical, fija en el espacio, y que sea todo el terreno el que oscile, que si se verificara lo contrario, es decir, que fuera sólo el péndulo el que oscilara, permaneciendo inmóvil el terreno.

Ambos casos pueden examinarse, por lo tanto, al mismo tiempo, para aquilatar hasta qué punto es lícito admitir la

proporcionalidad entre las ordenadas de las curvas trazadas en los sismogramas y las oscilaciones del terreno ó de las masas pendulares.

Para mayor facilidad en ese estudio, puede suponerse que los espejos se hallen en el mismo eje de giro de los péndulos, aunque en la figura 1.^a se representen, para obtener un dibujo menos confuso, colocados muy por debajo de ese eje de giro, y aunque en la práctica no se cometerá error de im-

portancia situando ambos espejos muy cerca de ese eje de giro: el uno un poco más alto que él y el otro algo más bajo, para evitar confusiones en los trazados fotográficos.

Si en la posición normal del espejo *e*, por ejemplo, el rayo incidente y el reflejado, por hallarse ambos en la misma horizontal, están representados (fig. 4.^a) por *RA* y por *Aa*, cuando el péndulo describa el ángulo α , ese

rayo reflejado *a'A* formará el 2α con el incidente *RA*, por haber descripto la normal *An* al espejo el mismo ángulo α , dada la perpendicularidad entre los lados de los ángulos *p'Ap* y *aAn*.

El triángulo rectángulo *Ap'q* da:

$$p'q = l \cdot \text{sen } \alpha,$$

el otro triángulo rectángulo *a'Aa*, proporciona la igualdad:

$$a a' = a A \cdot \text{tg } 2\alpha,$$

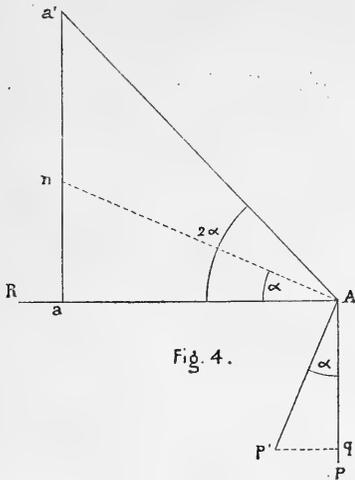


Fig. 4.

y ambas expresiones producen la:

$$aa' = p'q \left(\frac{aA}{l} \cdot \frac{tg\ 2\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha} \right),$$

en la cual designa la cantidad entre paréntesis la escala en que aparecerá trazada la desviación $p'q$ en el sismograma.

Con expresar el valor de $tg\ 2\ \alpha$ en función de $tg\ \alpha$, fácilmente se transforma la expresión anterior en:

$$aa' = p'q \left(2 \frac{aA}{l} \cdot \frac{\frac{tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}}{\text{sen}\ \alpha} \right) = p'q \left(2 \frac{aA}{l} \cdot \frac{1}{\cos\ \alpha (1 - tg^2\ \alpha)} \right).$$

Esa fórmula indica cuándo será lícito y cuándo no lo será admitir $2 \frac{aA}{l}$ como escala del trazado sismográfico, y desde

luego evidencia una de las ventajas de los péndulos largos, toda vez que para una determinada desviación (fig. 3.^a), por ser los ángulos α más pequeños, cuando los péndulos tienen mayor longitud, los trabajos de rozamiento contra el eje son menores también.

En general, para los estudios sismológicos, como los ángulos α son muy pequeños, y, por lo tanto, sus cosenos valen casi la unidad y sus tangentes casi cero, puede y debe

admitirse que la fracción $\frac{1}{\cos\ \alpha (1 - tg^2\ \alpha)}$ se reduce á la uni-

dad; pero no sobra tener presente la fórmula verdadera de la escala, que pudiera llegar á tener aplicación en los estudios que se efectuaran con el sismógrafo experimental objeto de estas páginas, por llegar á combinar longitudes muy pequeñas de péndulos con grandes oscilaciones de ellos.

Las curvas sismográficas, simultáneamente trazadas por esos dos péndulos, permitirán por su comparación deducir muy útiles consecuencias.

Desde luego, indicarán hasta qué punto y para cuáles frecuencias de las oscilaciones sísmicas será lícito admitir en la práctica como bueno el principio de la masa estacionaria, porque mientras pudiera aceptarse deberían aparecer en el sismograma dos curvas de períodos coincidentes y ordenadas proporcionales, cuya constante relación sería $\frac{L}{l}$.

Por lo contrario, la falta de ambos requisitos en las curvas, cuanto más se acentúe, más denotará la falsedad del principio de la masa estacionaria, y el conocimiento de los períodos de los péndulos permitirá establecer consecuencias provechosas acerca de los casos en que los movimientos pendulares preponderen.

La influencia del rozamiento de los péndulos en las deformaciones de los sismogramas podrá estudiarse también, porque después de obtenida una buena colección de curvas, en condiciones normales y casi iguales para ambos péndulos, á cuyo efecto debe ser proporcionalmente mayor el peso del más largo, es fácil aumentar el rozamiento de uno de ellos tan sólo, bien contra su eje de giro ó ya proveyéndole de una pluma que resbale sobre un papel ahumado.

Los sismogramas que se obtengan en estas últimas condiciones tendrán deformada la curva correspondiente al péndulo cuyo rozamiento se haya aumentado intencionadamente; pero como la otra curva no estará desfigurada, será fácil buscar, en la colección de curvas de que antes se habló, el sismograma que corresponde al mismo movimiento del terreno ó á otro casi igual, y la comparación de ambos gráficos marcará claramente cuáles son las modificaciones debidas á la existencia de un rozamiento, cuya medida se habrá hecho previamente, siguiendo la marcha de todos conocida.

Los más entusiastas de la colocación de amortiguadores en los sismógrafos, llegan á pretender que suprimen las oscilaciones pendulares; la mayoría afirma que, por lo menos, el uso de esos accesorios disminuye grandemente las per-

turbaciones que en los sismogramas producen los movimientos propios de los péndulos, y somos muy contados los que negamos la eficacia actual de los amortiguadores. Esta cuestión, por sí sola, justificaría la construcción y estudio del sismógrafo propuesto, con el cual se dilucidaría de concluyente modo.

En efecto, es indudable que si los amortiguadores eliminan de los sismogramas las perturbaciones pendulares, bastaría establecerlos en ambos péndulos del sismógrafo para obtener curvas de iguales períodos y ordenadas proporcionales, y si no las eliminaran por completo; pero si las atenúan, las curvas obtenidas por su semejanza, mayor que cuando los péndulos carecían de esos aditamentos, denotarían la eficacia de los amortiguadores.

Por lo contrario, si el desacuerdo de ambas curvas fuese marcadamente mayor cuando se usan esos accesorios que cuando no se emplean, quedaría demostrado que son perjudiciales.

Podría probarse también el grado de certeza de la opinión que el autor tiene de que los amortiguadores sólo podrán producir favorables efectos cuando se coloquen de otro modo al que generalmente se acepta y emplea.

Lo habitual es, en efecto, que si AP (fig. 3.^a) es el péndulo, se coloque el amortiguador de modo que obre casi directamente sobre la masa P , y en tal caso, al moverse el terreno de A á A' , por ejemplo, el péndulo por sí mismo tiende á moverse también en ese mismo sentido, de izquierda y derecha, y por si esto fuese poco, el amortiguador que, sujeto al terreno, oscila también de P á P' , imprime á la masa un impulso en ese mismo sentido, y en vez de amortiguar la oscilación la aviva y suma su acción á la de la gravedad para hacer oscilar al péndulo de izquierda á derecha.

En cambio, si el amortiguador estuviese colocado al otro lado del eje de giro, con relación á la masa, ó sea en la prolongación de PA , al moverse el terreno y aquel accesorio de

izquierda á derecha, por ejemplo, la gravedad desde luego tendería á hacer girar, como antes, al péndulo en el mismo sentido, de P á P' ; pero el empuje del flúido amortiguador sobre la prolongación de PA , representado por la flecha f , se traduciría en otro sobre la masa en sentido de la flecha f' , contrario al movimiento general y que podría llegar á neutralizar el efecto de la gravedad y hacer que la masa P no se apartara de la vertical primitiva AP .

Además, el uso del amortiguador en sólo uno de los dos péndulos y la comparación de las curvas obtenidas con las correspondientes á terremotos de igual ó muy parecido efecto, sin haber usado amortiguador alguno, pertenecientes á la colección tipo de que antes se habló, permitiría también deducir algunas consecuencias acerca de la eficacia de los accesorios de que se trata.

Con ser varios é importantes los estudios sismológicos ya enumerados, á que se presta el sismógrafo experimental descrito, todavía hay otro que en nada cede á aquéllos.

Se emplean, en efecto, en Sismología, fórmulas en que intervienen los períodos propios de los sismógrafos y de los supuestos movimientos sinusoidales del terreno, cuyo grado de veracidad conviene aquilatar.

Como ejemplo no más se citará la fórmula de Wiechert, que liga la ampliación del movimiento sísmico, en los sismogramas, con la instrumental del sismógrafo y con los períodos del péndulo y de la oscilación terrestre, que se ha supuesto perfectamente sinusoidal.

Esa fórmula, representando por E la ampliación con que aparece en el sismograma el movimiento terrestre; por τ , el período de este último; por V , la ampliación propia del sismógrafo, y por T , su período pendular, es:

$$E = V \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{T^2}}.$$

Es claro que para un determinado movimiento del terreno, si la fórmula anterior representa la amplificación de uno de los dos péndulos: del más corto, por ejemplo, en el sismograma del más largo, de período T_1 la amplificación será, en el caso más general:

$$E' = V_1 \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{T_1^2}}$$

Quieren decir estas fórmulas que si una misma amplitud a del movimiento real del terreno, ha producido en el trazado de uno y otro sismograma dos ordenadas, C y C_1 , que se miden y conocen, deberá verificarse que:

$$a = \frac{C}{E} \quad \text{y} \quad a = \frac{C_1}{E'}$$

ó, en otros términos, que:

$$a = \frac{C}{V \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{T^2}}} = \frac{C_1}{V_1 \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{T_1^2}}}$$

Resulta de la anterior igualdad que

$$C V_1 \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2} \right) = C_1 V \cdot \left(1 - \frac{\tau^2}{T_1^2} \right),$$

expresión en la cual se conocerán, en cada caso particular, los valores que tienen las variables C , C_1 , V , V_1 , τ , T y T_1 , que habrán de satisfacer á la igualdad si realmente puede aceptarse la fórmula de Wiechert en la práctica, toda vez que la identidad de condiciones en que ambos péndulos se hallan, respecto de las ondas terrestres, y la ausencia de ro-

zamientos verdaderamente perturbadores, alejarán toda sospecha de que el no verificarse aquella igualdad pueda atribuirse más que á la deficiencia de la fórmula que la originó.

Con estos estudios experimentales parece probable que muchos puntos dudosos de la Sismología se aclararán, y acaso otras cuestiones, que para algunos son indudables, resultarán alejadas de la verdad; porque es lo cierto que en esa ciencia aún queda mucho que ahondar teórica y experimentalmente y, en testimonio de ello, no parece que esté de sobra indicar algo acerca de lo abstruso que resulta tratar teóricamente el trazado de los sismogramas.

Cuando llegara á realizarse el bello ideal de que las masas de los péndulos permanecieran estacionarias, evidente es que las ordenadas de las curvas, que el rayo de luz dibujara sobre el papel sensible, serían constantemente proporcionales á las desviaciones (pp' , fig. 1.^a) del terreno, y si la ley á que estos últimos obedecieran tuviera por expresión $\varphi(t)$, la ecuación de la curva del sismograma sería:

$$F(t) = 2 \frac{aA}{l} \varphi(t).$$

De análogo modo, si $\psi(t)$ representara la ley de las desviaciones $p'q$ (fig. 4), cuando el péndulo oscilara sin que se moviera el terreno, la curva dibujada estaría representada por:

$$F_1(t) = 2 \frac{aA}{l} \psi(t).$$

En realidad, se ignora cuál es la verdadera ley de las oscilaciones terrestres, que constituye una de las incógnitas del complicado problema sismológico.

La teoría permite suponer que esa ley debe tener por expresión la ecuación de una senoide, y así se ha supuesto por los sismólogos; pero, no debe perderse de vista que, en las

ciencias de observación, hasta que la experiencia no da una serie de valores que consientan deducir experimentalmente una ley no debe aceptarse ésta, por mucho que la teoría abone su veracidad, y no parece camino acertado, cuando se va á desentrañar cuál es la ley á que obedecen los movimientos terrestres, suponer desde luego que ya es conocida é introducirla en las fórmulas que han de servir para estudiar esos mismos movimientos.

En cambio, si hay plena seguridad, acreditada por la teoría y la experiencia, de que la curva correspondiente á las oscilaciones del péndulo es una senoide; así es que si se designa por T el período de aquél, y por b la máxima desviación $p q$ (fig. 4) de la vertical:

$$F_1(t) = 2 \frac{aA}{l} \cdot b \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}.$$

El problema se complica de extraordinario modo cuando á un tiempo mismo oscilan el terreno y el péndulo.

Desde luego, si durante el tiempo que se considere el terreno había de trazar un trozo de la curva $F(t)$, por el sólo hecho de moverse, mientras la masa permaneciera estacionaria y por su parte el péndulo, por sólo su propia oscilación, había de trazar la $F_1(t)$; en realidad se obtendría una curva, resultante de esas dos:

$$f(t) = F(t) - F_1(t) = 2 \frac{aA}{l} \left(\varphi(t) - b \operatorname{sen} 2\pi \frac{t \pm \tau}{T} \right)$$

representando por τ una una constante, cuyo objeto es no establecer implícitamente, que para $t = 0$ hubieran de ser nulos también los valores de las ordenadas componentes.

La verdadera incógnita, que es el movimiento del terreno, tendría, por lo tanto, la expresión:

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{2 \frac{aA}{l}} + b \operatorname{sen} 2\pi \frac{t \pm \tau}{T}$$

y sería perfectamente conocida, puesto que $f(t)$ se obtiene en el sismograma, si se conocieran también b y T .

Pero en esto estriba la dificultad, porque precisamente las amplitudes, b , que las oscilaciones del péndulo adquieren, dependen de los impulsos que su eje de giro experimente por efecto de los terremotos, y, por lo tanto, son funciones de la incógnita $\varphi(t)$, y otro tanto ocurre con el período T de la oscilación del péndulo.

Sin necesidad de acudir á ninguna teoría complicada, puede evidenciarse con un sencillo experimento cuán grande es la dependencia entre las amplitudes b y las oscilaciones terrestres, y á su vez la variabilidad del período del péndulo sólo exige una demostración elemental.

En efecto, basta tomar en la mano una cuerda en cuyo otro extremo exista un peso é imprimirle un movimiento pendular, en el cual fácil es influir después, anulando por completo su amplitud ó aumentándola enormemente, sin más que imprimir á la mano impulsiones de conveniente sentido.

Estos impulsos, que ese grosero péndulo recibe de la mano, quedan sustituidos en los sismógrafos por los que producen los terremotos, en uno y otro sentido, que de análogo modo, según sea su intensidad, su período y la relación en que se hallen las fases de ambos movimientos— punto este último tan importante como desatendido— influyen modificando el valor de b y haciéndole variar mucho.

Para evidenciar la segunda afirmación, referente á la variabilidad, no ya de la amplitud de las oscilaciones del péndulo sino del período de estas últimas, por efecto de los movimientos que al eje de giro imprimen los terremotos, basta una ligera explicación, hecha sobre la figura 5.

En ella representa AV la vertical que pasa por el eje de

giro, A , del péndulo, AP , según cuya dirección se ejerce constantemente la acción de la gravedad.

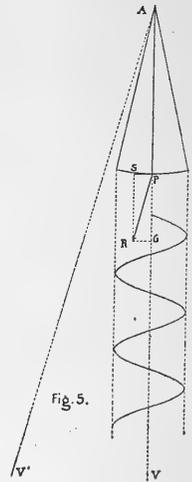
Mientras el eje de giro permaneciera fijo, el extremo inferior del péndulo, puesto en movimiento, trazaría en un papel, que bajo ese extremo pasara, una senoide, que se ha representado también en la figura, si se suponen nulas las pérdidas por resistencias pasivas, cuyo período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

queda perfectamente definido por la longitud del péndulo y el valor de la gravedad.

Pero las circunstancias varían si á consecuencia de movimientos del eje de suspensión coexiste con la fuerza de la gravedad otra debida á la aceleración comunicada á la masa pendular, producida por aquellos movimientos.

Si PS indica esa aceleración tangencial, debida á los movimientos del eje, en realidad á la acción de la gravedad se sustituye la resultante PR de esta última y de aquella otra, y la vertical AV del lugar queda reemplazada para la masa pendular por otra AV' , hacia la que marchará el péndulo, y en torno de la cual oscilará, á uno y otro lado, pudiendo describir su extremo una senoide, cuyo eje será la AV' , como antes lo era la AV para la trazada en la figura, que correspondía al caso en que de ordinario oscila un péndulo.



No tendría ya esa nueva senoide el mismo período T que la primitiva, porque la masa pendular está sometida á una aceleración que, si se representa por γ la debida al mo-

vimiento del eje de giro, PS , tendrá por valor $\sqrt{g^2 + \gamma^2}$ y, por lo tanto, el nuevo período sería:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \gamma^2}}},$$

que relacionado con el anterior da

$$\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \gamma^2}}}{\frac{l}{g}}} = \sqrt[4]{\frac{g^2}{g^2 + \gamma^2}}$$

de donde puede deducirse que

$$T_1 = T \sqrt[4]{\frac{g^2}{g^2 + \gamma^2}}$$

ó si α designa la fracción de g , que vale γ , ($\gamma = \alpha g$),

$$T_1 = T \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \alpha^2}}.$$

Las aceleraciones del terreno, al vibrar por efecto de las ondas terrestres, supuestas en la escala de Omori, varían desde 300 á más de 4.000 milímetros por segundo, y las que figuran en la de Cancani, de más extensa amplitud, oscilan entre 2,5 y 10.000 mm.

Aunque α llegara á valer mucho, como consecuencia de las diversas aceleraciones que el eje de giro experimente dadas estas últimas por los números que figuran en las escalas antes citadas, y se supusiera que era 1, lo cual equivale á suponer la enorme aceleración tangencial de 9810 mm. por

segundo, que es la debida á la gravedad, para la masa del péndulo, el nuevo período sería:

$$T_1 = T \times 0,84,$$

y claro es que, á medida que se consideren aceleraciones inferiores, la raíz cuarta, que figura como coeficiente de T , se aproximará todavía más á la unidad, y que resulta demostrada la escasa influencia que pueden tener las oscilaciones terrestres en modificar el período normal del péndulo disminuyéndolo.

Sin profundizar el asunto, para tratar de cumplir en lo posible el propósito, antes indicado, de no dar á este escrito carácter muy teórico, parece oportuno, sin embargo, señalar la enorme influencia que esas aceleraciones anormales de las masas pendulares pueden tener en el trazado de los sísmogramas.

En efecto; en virtud del cambio de vertical ya señalado, al ir el péndulo de su posición de reposo AV á otra simétrica, con relación á AV' , y al otro lado de ésta, el estilete inscriptor, supuesto en la extremidad inferior de la masa pendular, trazaría una ordenada sobre el papel cuya medida es la tangente del ángulo de oscilación $2V'AV$, estimada en la circunferencia de radio $AP = l$.

En la figura fácilmente se ve, en el triángulo RPG , que

$$\cos V'V = A \frac{PG}{RP} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + \gamma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

y un sencillo cálculo trigonométrico da para esa tangente del arco duplo, ó valor de la ordenada que se busca,

$$l \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}.$$

Y en esa expresión, con que α valga 0,0001, que sólo supo-

ne una aceleración tangencial de la masa de $0^{\text{m}},981$, ya se obtendría para el coeficiente, por el que ha de multiplicarse la longitud del péndulo

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} = 0,0002, \text{ próximamente,}$$

y aunque esa longitud fuera sólo de $1^{\text{m}},50$ y la amplificación fuese 50, ya resultaría en el sismograma una ordenada de

$$1500 \text{ mm} \times 0,0002 \times 50 = 15 \text{ mm.}$$

El caso examinado, de un péndulo en reposo solicitado sólo por una aceleración de constante valor, expuesto con objeto de aclarar algo las ideas, se comprenderá que no se presentará en la realidad, en la que de ordinario obrarán las aceleraciones sobre masas pendulares puestas ya en movimiento y no de modo continuo, sino actuando con valores variables en sentido é importancia, que modificarán las oscilaciones pendulares, no sólo influyendo en sus amplitudes, sino también disminuyendo ó aumentando su período.

Del efecto que en estas duraciones de los períodos de los pendulos puede producir la existencia de una aceleración, tan sólo disminuyéndolas, cabe formar idea por lo ya expuesto; pero no estará de sobra alguna ligera reflexión, de índole elemental, acerca del aumento que esos períodos pueden sufrir por efecto de los terremotos.

Supóngase un péndulo oscilando con su período propio. Al pasar por la vertical lleva su masa almacenada la máxima fuerza viva, y mientras va ascendiendo hacia la posición extrema á que se dirige el trabajo, retardatriz en este caso, de la gravedad va disminuyendo aquella energía almacenada hasta anularla por completo, precisamente en esa situación extrema que es al propio tiempo la inicial de su retroceso.

En esa cuarta parte de la oscilación completa ha empleado

el péndulo justamente la cuarta parte, $\frac{T}{4}$, también, de su período de oscilación; pero, si para ver con mayor claridad la cuestión, se supone que al llegar el péndulo á su posición extrema ó de retroceso se le aplica un corto tiempo una fuerza tangencial, en el mismo sentido que el movimiento de la masa llevaba, subirá esta última más alta, hasta que el trabajo de esa nueva fuerza quede anulado por el de la gravedad y vuelva á caer el péndulo hacia la vertical.

Se tardará poco ó mucho en esta nueva compensación de trabajos; pero siempre se empleará en ello un tiempo t , que hará aumentar la duración aparente del cuarto de período de $\frac{T}{4}$ á $\frac{T}{4} + t$.

Semejantes aumentos pueden introducirse, de una manera repetida, mientras el péndulo oscile, y no ya precisamente en sus posiciones extremas, y se comprenderá que podrán modificar, aumentándolas, las duraciones de los períodos teóricos de oscilación.

De todo lo expuesto se deduce, que tanto la amplitud de las oscilaciones pendulares de los sismógrafos como los períodos de ellas, son funciones, más ó menos complejas, del movimiento sísmico $\varphi(t)$, y que, por lo tanto, la ecuación correspondiente á esta incógnita debería escribirse de este modo:

$$\varphi(t) = \frac{l}{2aA} f(t) + \pi(\varphi(t)) \operatorname{sen} 2\pi \frac{t \pm \tau}{T. \downarrow(\varphi(t))}$$

fórmula completamente indeterminada, en la que sólo se conoce de cierto la ecuación $f(t)$, dada directamente por la curva del sismograma, l y aA .

Como el fin de este trabajo no es el exponer una teoría de los sismógrafos, que, si acaso, será objeto de otro estudio, de muy distinta índole que el presente, parece que basta con

esas indicaciones para dar idea de la necesidad de examinar un problema tan obscuro, no sólo teórica, sino también experimentalmente.

Si se admite para las oscilaciones terrestres la ley sinusoidal, como Wiechert, el príncipe de Galitzine, y otros eminentes sismólogos han hecho, la curva $f(t)$ que se obtiene en los sismogramas, verdadero dato positivo, tendría por expresión analítica, representando por \mathcal{T} el período de la sinusoide, por α su semiamplitud y por E la escala de amplificación, propia del sismógrafo que se considere:

$$f(t) = E \left(\alpha \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{\mathcal{T}} - \pi \left(\alpha \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{\mathcal{T}} \right) \operatorname{sen} 2\pi \frac{t \pm \tau}{T\psi \left(\pi \operatorname{sen} \alpha 2\pi \frac{t}{\mathcal{T}} \right)} \right).$$

La variabilidad de α y de \mathcal{T} , no ya de uno á otro terremoto, sino dentro de uno mismo, y la complejidad de las funciones π y ψ , ya que los valores que han de tomar, no sólo dependen del período y de la amplitud del movimiento sísmico, sino además de las oscilaciones pendulares y de las relaciones entre estas últimas y aquellos elementos, α y \mathcal{T} , influyendo poderosamente la concordancia de ambas fases, un total desacuerdo y el avance á retraso con que una de las sinusoides entre á combinarse con la otra, son todos ellos otros tantos factores de la confusión y dificultad que ofrece el estudio teórico de los sismógrafos.

(Concluirá.)

XLI. — Nuevo método de obtención de aminas, empleando la reacción de Grignard.

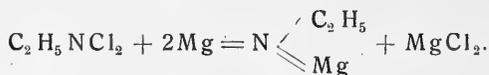
(Continuación.)

POR BENITO BUYLLA.

PARTE EXPERIMENTAL

Aminas alifáticas.—Primera tentativa.

Se reduce la primera prueba á observar si la dicloretilamina (1) puede reaccionar con el magnesio, y si el compuesto originado resulta susceptible de descomposición hidrolítica, conforme á la ecuación apriorística siguiente:



Introduzco la cantidad de magnesio pulverulento calculada para la ecuación dicha, en un matraz de 300 cm.³ próximamente y dejo caer sobre aquel metal la cantidad necesaria de solución etérea de dicloretilamina y agrego éter anhidro en suficiente cantidad. Después de introducir un cristal de iodo, como recomienda Grignard, para activar el magnesio, coloco un refrigerante ascendente y caliento un poco para iniciar la reacción.

Procediendo así no es notado cambio alguno aparente en

(1) *Obtención de la dicloretilamina.*—Destílese el clorhidrato de la base con hipoclorito de calcio. Purifíquese lavando, repetidas veces, con solución diluidísima de sosa cáustica y agua. (Tcherniac) Bull. t. 24 pág. 451 y t. 25 pág. 160. Para la diclorometilamina (Köhler) B. d. d. G. (1879) págs. 771 y 1.869.

la mezcla, los componentes continúan separados y no hay reacción (1).

Repito el experimento empleando magnesio activo (2) y al punto observo una reacción violenta, seguida de formación de precipitado blanco. Hago caer en el matraz algunas gotas de agua, y el referido precipitado desaparece, dejando en su lugar una solución límpida y ligeramente coloreada de amarillo: separo el éter destilando y concentro en el baño de María y noto al punto un olor nitrílico. Por lo tanto, se ha producido una reacción completamente diversa de la que había previsto, y el hecho resulta explicable desde del momento en que sabemos que las amidas de los ácidos se oxidan fácilmente y transfórmanse en nitrilos:

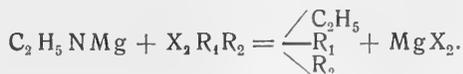


La anima experimentó el mismo cambio:



*
* *

Si la prueba hubiese dado resultados positivos, era mi intención llegar á obtener *aminas terciarias* partiendo de *aminas primarias*; como se ve por la siguiente reacción:



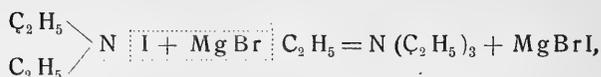
(1) La prueba realmente era obvia, atendiendo á la peculiar constitución de la amina, nada semejante ni por forma, ni por propiedades á los alquilos halogenados, lo cual excluía su posible unión con el magnesio.

(2) Obtención del magnesio activo.—Polvo de magnesio fuertemente calentado con yodo en un matraz de paredes delgadas.

Segunda tentativa.

Obtengo la iodietilamina (1) tratando la dietilamina con solución de iodo en ioduro potásico. Recojo rápidamente el precipitado con éter (porque se descompone fácilmente la amina iodurada pasando á iodoformo); con la iodietilamina hago reaccionar una solución etérea anhidra de bromuro de etilmagnesio.

Teóricamente pretendo llegar á la siguiente reacción:



y con tal objeto empleo las cantidades de los dos componentes deducidas de la ecuación, las cuales hago reaccionar cerca de dos horas en un matraz de 300 centímetros cúbicos con un refrigerante ascendente; cuando supuse terminada la reacción, destilé en corriente de vapor de agua, separando por tal medio las bases orgánicas arrastrables de las otras sustancias ó no básicas ó inorgánicas; salifico, empleando el ácido clorhídrico, las bases recogidas, formando así el clorhidrato de la amina; separo luego, por destilación, el éter y concentro convenientemente en baño de María la solución de clorhidrato.

Con objeto de determinar la amina recojida (2), comienzo

(1) Obtención de la iodietilamina:



(Raschig). *Annalen*, t. 230, págs. 222 y 223.

(2) Que la base recogida es una amina, lo prueba el que una pequeña porción tratada con potasa, para poner en libertad la base, tiene el olor característico amínico y da reacción azul con el papel de tornasol.

por hallar el punto de fusión de su clorhidrato, que es muy delicuescente (1).

PUNTO DE FUSIÓN

Clorhidrato cristalizado en el agua....	216°
Clorhidrato cristalizado en el alcohol-éter.	100°

El clorhidrato cristalizado en alcohol-éter no es delicuescente.

Entre los métodos de reconocimiento de las aminas, el más seguro es la formación de sales dobles, y entre ellas el *cloroplatinato*; trato, por tanto, la amina con el cloruro de platino, y después de concentrar hasta casi la mitad del disolvente, lo dejé cristalizar. La cristalización se presenta en agujas amarillas, avidísimas de humedad; á causa de lo difícil que resulta el operar con esta sal, prefiero formar el *cloraurato*, que no es delicuescente; para ello trato el clorhidrato restante con el cloruro de oro (2), y observo la formación de un precipitado amarillo pulverulento; concentrando la solución al baño de María, el precipitado se disuelve rápidamente; dejándolo en sitio frío, no tarda en cristalizar en

(1) El P. F. del clorhidrato de dietilamina cristalizado en el agua:

$(C_2H_5)_2NH \cdot HCl$ 215°-217° [Wallach] *Ann.* t. 124, pág. 275.
El cristalizado en alcohol-éter. 99° — 100° — (Franchimont).

(2) Debe tenerse la precaución de añadir al disolvente algunas gotas de ácido clorhídrico; porque los clorauratos normales



pierden fácilmente ácido clorhídrico durante la recristalización, transformándose en sales



(*Guida pratica alla ricerca dei Complessi atomici, etc.*, Hans Meyer, Trad. L. Mascarelli).

hermosos cristales amarillos (1) (monoclínicos, según Topsoe) y no delicuescentes, los cuales, recojidos sobre el filtro, fueron purificados mediante sucesivas cristalizaciones, y, finalmente, secados en el vacío hasta peso constante.

P. F. cloraurato 185° (2)

El análisis del oro contenido dió (3):

Peso de la substancia.	0,3212	Oro calculado.....	47,73
Peso del oro.....	0,1531	Oro hallado.....	47,76
		Diferencia en menos.	<u>0,03 diez miligrs</u>

Hemos analizado, por tanto, el cloraurato de dietilamina, esto es, una sal de la substancia de que hemos partido, lo cual significa que no hubo reacción, y la práctica no confirmó la ecuación química teórica, escrita al principio de esta tentativa; de otra parte, dado el resultado negativo de la primera prueba, podía colegirse que también lo sería el de la segunda.

Tercera tentativa.

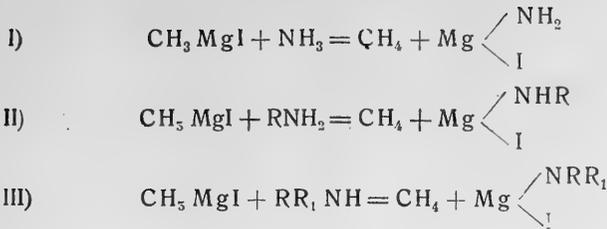
La acción que el ioduro de magnesio-alquilo ejerce sobre el amoníaco y sobre las aminas, se compendia en las siguientes ecuaciones (4).

(1) Si se opera en solución muy concentrada y se deja evaporar al aire todo el disolvente (quince días), estos cristales monoclínicos se hacen perfectamente visiblés.

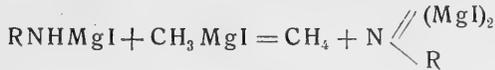
(2) Este P. F. corresponde exactamente al del cloraurato de dietilamina $(C_2 H_5)_2 NH Cl Au Cl_3$ obtenido por mí directamente.

(3) Véase *Apéndice I*.

(4) *Compt. Rend.* t. 136. pág. 758 (1903). *Bull. de la Soc. de la Soc. Chim.*, t. 29 pág. 314 (1904), (L. Meunier) *Sandlung etc.* Band X (1905), (Dr. Julius Schmidt).

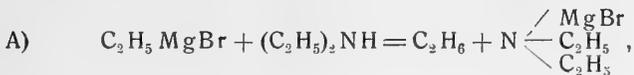


Sondborough y Hilbert (1) han observado que las aminas primarias, después de haber reaccionado en frío, pueden, con el auxilio del calor, poner en libertad una nueva molécula de hidrocarburo:



y de ello dedujeron una manera de diferenciar las aminas, pues las secundarias se detenían en la reacción III, y las terciarias no reaccionaban.

Mi propósito es formar el compuesto III empleando la dietilamina y el bromuro de etilmagnesio



é insistir después empleando una nueva cantidad de bromuro de etilo para que reaccione sobre el producto, en esta forma:



lo que equivale á ligar el tercer etilo á la dietilamina, lo cual constituiría un método fácil que permitiría pasar de las aminas *secundarias* á las *terciarias*.

(1) Proceedings Chem. Soc., t. 20, pág. 165.

Modo de operar.

En un matraz de 300 cm.³ próximamente, se hacen reaccionar las cantidades pesadas (deducidas de la ecuación A) de bromuro de etilmagnesio y de dietilamina; obsérvese violenta reacción, á la temperatura ordinaria, con desprendimiento gaseoso (C_2H_6) y formación de un precipitado blanco que es el compuesto intermedio: agrego después la cantidad calculada (ecuación B), de bromuro de etilo; sustituyo el éter con xilol porque la formación de la amina requiere temperatura superior al punto de ebullición de aquel; el xilol debe ser anhidro, deshidratándolo con anhídrido fosfórico. El éter es separado luego mediante destilación. Calentando fuertemente en baño de arena hago reaccionar los cuerpos, empleando refrigerante ascendente, y al cabo de cinco horas supongo terminada la reacción.

Las materias forman una masa sólida. Destilo en corriente de vapor de agna y recojo así las sustancias básicas de olor amínico característico, y el xilol: acidifico con ácido clorhídrico y torno á destilar en corriente de vapor de agua, separando así el xilol de la amina, que no destila por estar en forma de clorhidrato; agrego, finalmente, potasa y destilo, siempre en corriente de vapor de agua, la amina pura; recojo una substancia líquida, poco soluble en el agua, de olor amínico característico y que da reacción azul con el papel de tornasol; formo el clorhidrato y lo concentro en el baño de María. Esta sal es muy delicuescente.

Entre los diversos métodos de reconocimiento de las aminas prefiero, como en la tentativa anterior, la formación del cloraurato, sal doble, no higroscópica, estable y de fácil combustión; de consiguiente, trato la amina recogida con el cloruro de oro y observo la formación de un precipitado pulverulento, de color amarillo, que intento disolver en agua; concentro en el baño de María y observo que el cloraurato se disuelve con dificultad porque siendo muy bajo su punto

de fusión, al parecer, funde en el agua disolvente, formando una masa aceitosa y resulta difícil, larga y pesada la operación de disolverlo. Dejándolo en reposo, luego de haberlo disuelto, cristaliza en escamas rojizas, constituidas por agujas agrupadas. Después de purificarlo mediante sucesivas cristalizaciones, se presenta en agujas; secado en el vacío, hasta peso constante, obtuve:

P. F. 80° (1).

El análisis del oro da (2):

Peso de la substancia.	0,1074	Oro calculado en el	
Peso del oro.....	0,0477	cloraurato de trietilamina.....	44,70
		Oro hallado.....	44,46
		Diferencia en menos.	<u>0,24 diez miligrs.</u>

Como el análisis del oro, aunque aproximado, no es de una gran exactitud, prefiero hacer el análisis del carbono é hidrógeno contenidos en el cloraurato obtenido; para ello empleo el perfeccionado aparato de combustión por medio de la electricidad del Dr. Carrasco, del Laboratorio de Bolonia:

Peso de la substancia.	0,1956	H calculado el cloraurato de trietilamina.	3,65
Peso del H ₂ O (3)....	0,0642	H hallado.....	3,67
Peso del CO ₂	0,1146	Diferencia en más.....	<u>0,02 diez miligrs.</u>
		C calculado en el cloraurato de trietilamina...	16,31
		C hallado.....	15,99
		Diferencia en menos.....	<u>0,32 diez miligrs.</u>

(1) El cloroaurato de trietilamina obtenido por mi directamente, tiene igual P. F.

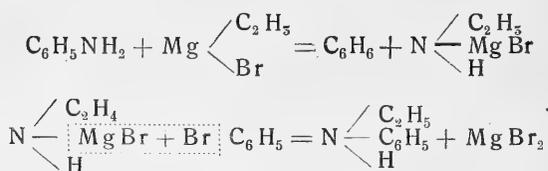
(2) Véase Apéndice II.

(3) Véase Apéndice III.

La poca diferencia entre las cifras calculadas y las halladas, dentro del natural error de los procedimientos experimentales, permiten afirmar que está conseguido el objeto que nos proponíamos. Existe, por tanto, un método fácil para pasar de las *aminas* secundarias á las *aminas terciarias*, basándose en el empleo reactivo de Grignard.

Aminas aromáticas.—Cuarta tentativa.

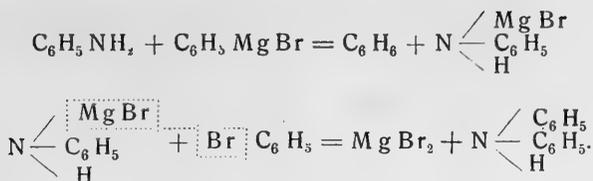
Suponiendo general el caso de la transformación de aminas, efectuada en la tentativa precedente, podría aplicarse al paso de una amina inferior á otra superior aun cuando se tratase de las aromáticas. Pruebo con aminas aromáticas mixtas y me propongo estudiar la siguiente reacción:



He operado de manera idéntica á la anterior tentativa, hasta separar el clorhidrato de la base. La falta de reacciones definitivas que me permitieran afirmar la formación de la etilanilina, me hicieron desistir de la separación, purificación y caracterización; además, el haber recogido en la destilación con vapor de agua casi el peso de la anilina y del bromobenzol empleados, induce á asegurar, sin temor de equivocarme, que si se forma la amina mixta es en tan pequeña cantidad que excluye toda idea de separación y de obtención práctica.

Quinta prueba.

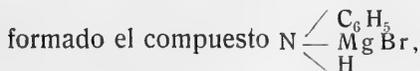
Opero entonces con anilinas puras:



Un primer intento de obtención, empleando el método general, no da resultados positivos; fué repetida la prueba en tubo cerrado, y haciendo reaccionar los compuestos directamente, sin intermedio del xilol.

Modo de operar.

Las cantidades calculadas de anilina y de bromuro de fenilmagnesio, en solución etérea anhidra, reaccionan vivamente en un matraz de 200 cm.³, provisto de refrigerante ascendente:



separo por destilación el éter é introduzco esta substancia con la cantidad necesaria pesada de bromobenzol en un tubo de vidrio que cierro perfectamente á la lámpara, colocándolo luego en la estufa cuya temperatura es sostenida á 210° durante cuatro días, pasados los cuales, retirado y abierto el tubo, observo que se ha formado en el interior una masa casi sólida, ligeramente coloreada de azul y bastante oscura; la destilo en corriente de vapor de agua. En el líquido destilado se forman dos estratos aceitosos, el inferior amarillo con el color del bromobenzol, el superior color castaño oscuro; formo el clorhidrato añadiendo ácido

clorhídrico y torno á destilar en corriente de vapor de agua. Naturalmente, sólo pasan las substancias no básicas, ó sea aceite amarillo, que resultó ser el bromobenzol con peso casi igual al empleado; pongo en libertad las aminas añadiendo potasa á su clorhidrato, y las recojo con éter en embudo de llave; separo el agua por decantación y deshidrato las últimas porciones empleando potasa sólida; recojo finalmente un aceite rojizo que á primera vista parece en gran parte constituido por anilina; ensayo con una pequeña porción de la masa. Tratada con ácido sulfúrico, da un precipitado blanco de sulfato de anilina. Agregando después algunas gotas de ácido nítrico, aparece coloración azul intensa que puede ser debida á la reacción de Liebermann (ácido nítrico con difenilamina); se está, por lo tanto, en presencia de una mezcla de aminas.

Para separarlas empleo la diazotación, y con objeto de conseguirlo trato primeramente con ácido sulfúrico diluido; después, empleando un embudo con llave, añado á la dicha mezcla solución concentradísima de nitrito sódico, teniendo cuidado de agitar constantemente y de enfriar al exterior con hielo, sin perjuicio de introducir algún pedazo en el recipiente hasta que la temperatura de la mezcla se conserve constante á 4.°, 5.° sobre cero; terminada la diazotación, lo que se prueba viendo si hay en la mezcla exceso de nitrito sódico, por medio del papel impregnado de ioduro potásico y almidón, la anilina se habrá transformado en *sulfato de diazobenzol* y la difenilamina, caso de existir, en *nitrosodifenilamina*; separo el agua por decantación con embudo con llave, después de secar el éter por medio del sulfato de calcio, filtro y lo separo por destilación. No destilo completamente porque el nitroso compuesto se descompone con facilidad, conforme lo he visto al notar la formación de vapores nitrosos en el refrigerante; al enfriar observo la formación de cristallitos (en cantidad mínima) del nitroso compuesto de la amina aromática pura; descompongo, por fin, el nitroso

compuesto con hidrógeno naciente, obtenido mediante acción del ácido clorhídrico y el estaño.

La falta material de tiempo y la escasez de la substancia, recogida, tan poca que no se aprecia á simple vista, me han impedido analizarla formando su picrato; no obstante, puede desde luego afirmarse que esta reacción, aun en el caso del tubo cerrado á la lámpara, no es recomendable en cuanto sólo se producen indicios de difenilamina, apreciables apelando á la sensibilísima reacción con el ácido nítrico.

Universidad de Bolonia (Italia).—Laboratorio del Profesor Ciamician.

APÉNDICE I

Cálculo del análisis del oro en la prueba y en el cloraurato de dietilamina.

PRUEBA

gram. 10 = crisol vacío	+	gram. 1,1628		
— 10 = — con substancia	+	— 0,8416		
<i>Peso de la substancia.</i>		— 0,3212		

Calcinada en el mismo crisol, hasta que el cloraurato se transforma en oro puro.

gram. 10 = crisol vacío	+	gram. 1,1628		
— 10 = — con oro	+	— 1,0097		
<i>Peso del oro.</i>		— 0,1531		

PROPORCIÓN

$$0,3212 : 0,1531 :: 100 : x$$

$$\log. 1531 = 18498$$

$$\log. 3212 = 50678$$

$$\text{Dif.} \quad \underline{\underline{67820}}$$

Número correspondiente á 67820. 47,66
Oro contenido en la prueba. 47,66

Oro en el cloraurato de dietilamina.

Fórmula $[(C_2 H_5)_2 NH_2] Au Cl_4$:

C_4 = 48,00
 H_{12} = 12,09
N. = 14,04
Au. = 197,20
 Cl_4 = 141,81

Peso mol. del
cloraurato. 413,14

PROPORCIÓN

413,14 : 197,20 :: 100 : x

log. 1972 = 29491
log. 41314 = 61611

Dif. 67880

Número correspondiente á 67880. 47,73
Oro contenido en el cloraurato de dietilamina. . . 47,73

Oro calculado. 47,73
Oro hallado. 47,76

Diferencia en menos. 0,03 diez miligramos.

APÉNDICE II

Cálculo del análisis del oro en la prueba y en el cloraurato de trietilamina.

PRUEBA

grm. 10 = crisol vacío + grm. 1,1630
— 10 = — con la substancia + — 1,0556

Peso de la substancia. — 0,1074

Calcinada en el mismo crisol, hasta que el cloraurato se transforma en oro puro.

gram. 10 = crisol vacío	+	gram. 1,1630	
— 10 = — con oro	+	— 1,1153	
<i>Peso del oro</i>		— 0,0477	

PROPORCIÓN

$$0,1074 : 0,0477 :: 100 : x$$

$$\log. 477 = 67852$$

$$\log. 1074 = 03060$$

$$\text{Dif.} \quad \underline{64792}$$

Número correspondiente á 64792.	44,46
Oro contenido en la prueba.	44,46

Oro en el cloraurato de trietilamina.

Fórmula [(C₂H₅)₃NH] Au Cl₄:

C ₆	= 72,00
H ₁₆	= 16,12
N.	= 14,04
Au.	= 197,20
Cl ₄	= 141,81

<i>Peso mol. del cloraurato.</i>	<u>441,17</u>
----------------------------------	---------------

PROPORCIÓN

$$441,17 : 197,20 :: 100 : x$$

$$\log. 1972 = 29491$$

$$\log. 44117 = 64461$$

$$\text{Dif.} \quad \underline{65030}$$

Número correspondiente á 65030.	44,70
Cantidad de oro en el cloraurato de trietilamina.	44,70

Oro calculado.....	44,70
Oro hallado.....	44,46
<i>Diferencia en menos.</i>	<u>0,24</u> diez miligramos.

APÉNDICE III

Cálculo del carbono y del hidrógeno contenidos en la prueba y en el cloraurato de trietilamina.

PRUEBA

gram. 10 = tubito vacío	+ 8,2276
— 10 = — con substancia	+ 8,0320
<i>Peso de la substancia.</i>	<u>0,1956</u>

H₂O

gram. 70 = tubo para H ₂ O	+ 12,2314
— 70 = — H ₂ O después de la combustión	+ 12,1672
<i>Diferencia</i>	<u>0,0642</u>

CO₂

gram. 40 = tubo para CO ₂	+ 5,3722
— 40 = — CO ₂ después de la combustión	+ 5,2576
<i>Diferencia</i>	<u>0,1146</u>

Cálculo de H en la prueba.

$$\log. \text{ factor (H en H}_2\text{O)} \dots \dots \dots 0,4869$$

PROPORCIÓN

$$\text{Factor : } 0,0642 :: 0,1956 : x$$

log. factor.....	04869
log. 1956.....	29137
<i>Dif</i>	<u>75732</u>
log. 642.....	80754
<i>Suma</i>	<u>56486</u>

Número correspondiente á 56486..... 3671
H contenido en la prueba..... 3,67

Cálculo de C en la prueba:

log. factor (C. en CO₂)..... 43573

PROPORCIÓN

Factor : 0,1146 :: 0,1956 : x

log. factor.	43573
log. 1956.....	29137
	<hr/>
Dif.....	14436
log. 1146.....	05919
	<hr/>
Suma.....	<u>20355</u>

Número correspondiente á 20355..... 1599
C contenido en la prueba..... 15,99

Cálculo de H y de C contenidos en el cloraurato de trietilamina.

Fórmula [(C₂H₅)₃ NH] Au Cl₄:

Cl ₄	= 141,812
Au.....	= 197,200
N.....	= 14,040
H ₁₆	= 16,122
C ₆	= 72,000

Peso mol. del
cloraurato 441,174

Cálculo de H en el cloraurato de trietilamina.

PROPORCIÓN

441,17 : 16,122 :: 100 : x

log. 16122.....	20742
log. 44117.....	64464
	<hr/>
Dif.....	<u>56278</u>

Número correspondiente á 56278..... 3654
H contenido en el cloraurato 3,65

Cálculo del C contenido en el cloraurato de trietilamina.

PROPORCIÓN

$$441,17 : 72 :: 100 : x$$

log. 72.....	85733
log 44117.	64464
	<hr/>
<i>Dif.</i>	21269
	<hr/>

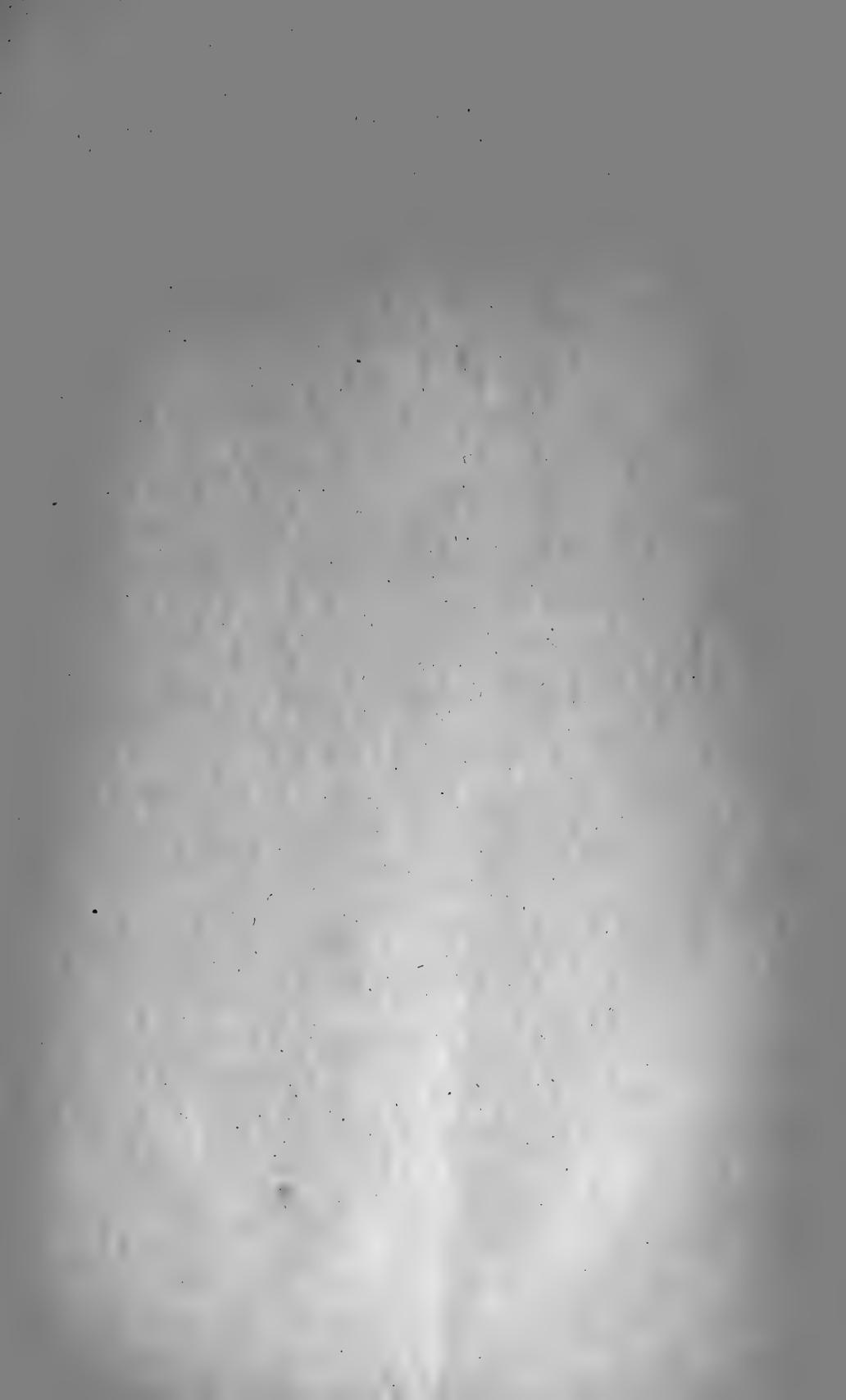
Número correspondiente á 21269.. 1631
C contenido en el cloraurato..... 16,31

H

Calculado.....	3,65
Hallado.....	3,67
	<hr/>
<i>Dif. en menos</i>	0,02 diez miligramos.
	<hr/>

C

Calculado.....	16,31
Hallado.....	15,99
	<hr/>
<i>Dif. en menos.</i>	0,32 diez miligramos.
	<hr/>



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>Págs.</u>
XXXVIII.— Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia séptima.....	655
XXXIX.— Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> , Conferencia octava.....	674
XL.— Sismógrafo analizador, por <i>Eduardo Mier y Miura</i>	697
XLI.— Nuevo método de obtención de aminas, empleando la reacción de Grignard, por <i>Benito Buylla</i>	718

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX.—NUM. 10.

Abril de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

**XLII.—Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.**

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia novena.

SEÑORES:

En el problema general de la hidrodinámica y en el problema particular del equilibrio y movimiento de un fluido perfecto, dijimos en una de las conferencias anteriores, que podían adoptarse dos sistemas de coordenadas, que eran las de Lagrange y las de Euler, y adoptamos en cada una de ellas para el signo diferencial dos notaciones distintas, á fin de evitar toda confusión.

En el sistema de Lagrange, el signo d ; en el de Euler, este otro signo ∂ ; y nos proponíamos establecer en uno y otro sistema el conjunto de ecuaciones de las que la resolución del problema dependía.

En rigor ya las establecimos; pero necesitábamos corregir en ellas toda irregularidad en una y otra notación, y sobre este punto hicimos algunas observaciones, de las que hemos de partir para la conferencia de hoy.

Una de las ecuaciones era la que se refería á la continuidad del fluido, que en rigor era la aplicación á este caso del principio de la conservación de la materia; esto por una parte; pero, además, según la hipótesis especial, que al definir el fluido señalábamos, era preciso que en el movimiento de éste y, por lo tanto, en su equilibrio también, la masa no

presentase roturas, desgarraduras, lagunas, soluciones de continuidad, en una palabra. El flúido en todas sus partes está en contacto siempre consigo mismo, y las partes contiguas en un momento, en todos los momentos siguen, en cierto modo, siendo contiguas.

Estas dos condiciones definen en rigor la continuidad del flúido.

Si el flúido es compresible, condición que constituye un caso general, claro es que una porción cualquiera del mismo podrá disminuir de volumen y aumentar de densidad, ó, por el contrario, dilatarse y llegar en todos ó algunos de sus puntos á una densidad menor.

En la hipótesis de la discontinuidad esto se comprende y es llano, porque para que se presente uno ú otro caso basta que las distancias intermoleculares ó interatómicas disminuyan ó aumenten: el volumen ocupado por la materia es menor que el volumen aparente, y queda hueco, si se nos permite expresarnos de este modo, para que el volumen aparente sea mayor ó menor.

Tal interpretación de las dilataciones ó condensaciones no puede aplicarse á la hipótesis de la continuidad. En ella hay que admitir que el flúido penetra en sí mismo (¿y qué es entonces de la impenetrabilidad de la materia?) y aumenta la *intensidad* de la masa en cada punto, ó, si se quiere, la *densidad*. Al contrario para la dilatación.

Recordarán mis alumnos que, á este propósito, dábamos, no una explicación, pero sí una especie de representación sensible, acudiendo al espacio de cuatro dimensiones.

Sea como fuese, la continuidad de una masa cualquiera del flúido se expresará de este modo:

Sea A un volumen infinitamente pequeño, que podremos considerar descompuesto en paralelepípedos rectangulares, cuyas tres aristas sean dx , dy , dz .

Si la densidad media de uno de estos paralelepípedos la representamos por ρ , su masa será evidentemente el produc-

to de la densidad media, tal como la definimos en otra conferencia, por el volumen de que se trata, es decir,

$$\rho \, dx \, dy \, dz.$$

El volumen A es el conjunto de todos estos paralelepípedos; luego

$$\text{Masa } A = \iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

debe ser constante durante el movimiento. Para que el principio de continuidad subsista, deberá contener el volumen A , volvemos á repetirlo, la misma masa de fluido en todos los instantes del movimiento: podrá A variar de volumen y de forma; pero tendrá que variar en cierto modo en razón inversa la densidad. Podrá variar la densidad, aumentando ó disminuyendo; pero el volumen tendrá que variar también, disminuyendo ó aumentando, para compensar los cambios de densidad del elemento en cuestión.

De suerte que si en el tiempo t la masa estaba representada, como acabamos de decir, por

$$\iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

y en otro tiempo t' las aristas de los nuevos paralelepípedos en que A se descomponían, fuesen dx' , dy' , dz' y la densidad ρ' la nueva masa, á saber:

$$\iiint \rho' \, dx' \, dy' \, dz'$$

tendría que ser igual á la anterior, y la continuidad del fluido vendría expresada por la ecuación

$$\iiint \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint \rho' \, dx' \, dy' \, dz'.$$

Si tomamos una porción cualquiera del fluido encerrada en una superficie C (fig. 19) para el tiempo t , y por C' para otro momento cualquiera, la conservación de la masa y la continuidad vendrán expresadas por la igualdad de las dos integrales anteriores, dentro de los límites C y C' .

$$\iiint_C \rho dx dy dz = \iiint_{C'} \rho' dx' dy' dz'$$

Esta ecuación expresará la constancia de la masa; ¿expresará también la continuidad del fluido en el sentido que antes explicábamos?

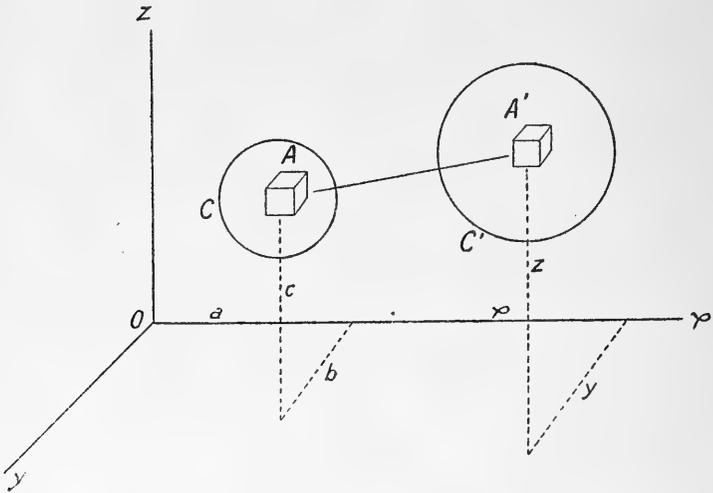


Figura 19.

sará también la continuidad del fluido en el sentido que antes explicábamos?

Sobre esto algo diremos más adelante.

*
* *

Recordando lo que dijimos en las conferencias anteriores, acaso llame la atención de mis alumnos este doble método para expresar la continuidad del fluido.

Porque es lo cierto que obtuvimos una ecuación de continuidad, que era ésta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho z}{\partial z} = 0$$

y ahora acabamos de obtener otra

$$\iiint_c \rho dx dy dz = \int_c \rho' dx' dy' dz'$$

¿Es que son necesarias dos ecuaciones?

¿Es que son distintas, ó es que son idénticas y una puede transformarse en la otra?

Estas dudas, que son propias de algunos principiantes, y que, por infundadas que sean, pueden introducir perturbaciones en el estudio, conviene desvanecerlas, y se desvanecen sin dificultad.

En efecto; dijimos que en los problemas de hidrodinámica pueden adoptarse dos sistemas de coordenadas: las coordenadas de Lagrange y las coordenadas de Euler, y es natural que la ecuación de continuidad se exprese de distinto modo en ambos sistemas de coordenadas.

La primera de las dos que acabamos de reproducir, se refiere al sistema de coordenadas de Euler.

La segunda, al sistema de coordenadas de Lagrange.

Por eso son dos, porque dos son los sistemas: como la misma curva referida á dos sistemas de ejes coordenados se expresa por ecuaciones de diversa forma.

En el sistema de Euler, en que las variables independientes son x, y, z, t , y en que se estudia, por decirlo de este modo, lo que pasa en cada punto (x, y, z) , en cada instante t , la continuidad se representa y se obtiene viendo el fluido que entra y sale por las seis caras del paralelepípedo elemental, obteniendo lo que la masa del paralelepípedo au-

menta ó disminuye, en el intervalo de tiempo dt , é igualando este resultado al incremento de densidad en dicho tiempo, multiplicada por el volumen; en una palabra, se obtiene la primera de las dos últimas ecuaciones aplicando el método que ya explicamos.

En su esencia es obtener la continuidad en cada punto en todos los instantes.

La segunda ecuación, que es la que corresponde á las variables de Lagrange, expresa también la continuidad del fluido; pero no en cada punto, sino en el movimiento de una masa de fluido infinitamente pequeña.

Es, si se quiere, como antes explicábamos, la conservación de la masa en las diferentes formas por que pasa en su movimiento.

Esta última ecuación es la que vamos á transformar ahora para obtener una ecuación sencillísima de la continuidad en el caso de las variables de Lagrange.

*
* *

Las ecuaciones de Lagrange, una vez integradas, hemos dicho que nos darán tres ecuaciones de esta forma, en que por ahora no expresamos todas las constantes de la integración.

$$x = f_1(a, b, c, t)$$

$$y = f_2(a, b, c, t)$$

$$z = f_3(a, b, c, t)$$

Ecuaciones en que a, b, c , son las coordenadas del punto del fluido, cuyo movimiento estudiamos, en el instante $t = 0$, aunque también podría ser en un momento cualquiera.

Y x, y, z , son las coordenadas de ese mismo punto en un instante t ; por eso decimos que las tres ecuaciones anterior-

res, son las del movimiento de cualquier punto definido por a, b, c , en el instante inicial, y, por lo tanto, las ecuaciones del movimiento de todo el fluido, puesto que todo punto está definido por las ecuaciones expresadas, con sólo poner en ellas, en vez de a, b, c , las coordenadas que le corresponden para $t = 0$.

Por eso puede afirmarse que a, b, c , son constantes arbitrarias de la integración de las ecuaciones diferenciales que expresan el movimiento en el sistema de Lagrange.

En rigor, como las ecuaciones son diferenciales de segundo orden, puesto que entran

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}$$

las constantes arbitrarias deben ser seis. Tres, que son las expresadas a, b, c , designan las coordenadas iniciales del punto que se considera y las otras tres serán las componentes de la velocidad, también inicial.

Pero en estas últimas no necesitamos ocuparnos por ahora, y por eso no las representamos explícitamente en f_1, f_2, f_3 .

*
* *

Tales ecuaciones, lo hemos dicho, representan el movimiento de un punto cualquiera del fluido.

Sea (fig. 19) C una porción cualquiera del fluido de que se trata, en el instante $t = 0$.

La masa C , sin perder su continuidad, ocupará en el instante t la posición C' : se habrá transformado; será como un sistema de puntos que pasan de la figura C á la C' .

Así, un punto A en su trayectoria definida por las ecuacio-

nes anteriores, en el instante t ocupará la posición A' , y lo mismo podemos repetir para los demás puntos de C .

Luego aquí el problema de dinámica puede decirse que comprende un problema de *transformación de figuras*: la figura C que se convierte en la C' .

Y las integrales

$$x = f_1(a, b, c, t)$$

$$y = f_2(a, b, c, t)$$

$$z = f_3(a, b, c, t)$$

serán precisamente las fórmulas de transformación, ó sean las que expresan la transformación de la figura C en la figura C' , correspondiéndose a, b, c , con x, y, z .

La ecuación de continuidad ha de expresar, como hemos dicho, en el sistema de Lagrange, que la masa comprendida en C debe ser igual á la comprendida en C' , lo cual se representa en estas notaciones, del siguiente modo, llamando I al valor constante de dicha masa en todo el movimiento:

$$I = \iiint_c \rho_0 da db dc = \iiint_{c'} \rho dx dy dz$$

Si aplicamos á la última integral las fórmulas de transformación anteriores, cambiando x, y, z , por las variables a, b, c , tendremos la siguiente transformación, ya demostrada:

$$\iiint_{c'} \rho dx dy dz = \iiint_c \rho \operatorname{mod} \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} da db dc$$

en la que deberá considerarse $\rho(x, y, z)$ como una función de a, b, c , puesto que x, y, z , dependen de estas cantidades, y ρ representará densidad en cada punto de C' .

Esta última expresión es siempre el valor de I y está expresada en a, b, c ; luego será igual á la primera integral, y aun si se expresase en función de a, b, c , debería ser idéntica.

Tendremos, pues,

$$\iiint_c \rho_o da db dc = \iiint_c \rho \operatorname{mod} \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} da db dc$$

Como esta relación subsiste, sea cual fuere C , podemos suponer que el volumen se reduce al de un elemento diferencial, y tendremos

$$\rho_o da db dc = \rho \operatorname{mod} \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} da db dc$$

ó bien

$$\rho_o = \rho \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$$

que es precisamente la condición de continuidad en el sistema de Lagrange.

Expliquemos bien la significación de la ecuación precedente.

ρ_o representa la densidad en cualquier punto del fluido en el instante inicial $t = 0$. En rigor será una función conocida de a, b, c .

ρ expresa la densidad en determinado punto del fluido: el que tuvo por punto inicial al punto a, b, c . Es función de x, y, z , que son funciones de a, b, c , pero desconocidas hasta que se resuelva el problema. Aquí aparecen como incógnitas, bajo esta forma: $\rho(x, y, z)$.

La determinante desarrollada será esta:

$$\frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx}{da} & \frac{dx}{db} & \frac{dx}{dc} \\ \frac{dy}{da} & \frac{dy}{db} & \frac{dy}{dc} \\ \frac{dz}{da} & \frac{dz}{db} & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dx}{da} & \frac{dx}{db} & \frac{dx}{dc} \\ \frac{dy}{da} & \frac{dy}{db} & \frac{dy}{dc} \\ \frac{dz}{da} & \frac{dz}{db} & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix}}$$

pero habrá que tomar su módulo, es decir, su valor positivo, cambiando el signo si es preciso.

De suerte que esta ecuación de continuidad será una ecuación diferencial de las funciones x, y, z , con relación á las variables independientes a, b, c , del sistema de Lagrange; así que dicha ecuación comprenderá las siguientes cantidades:

$$F \left| a, b, c, x, y, z, \frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}, \frac{dy}{da}, \dots, \frac{dz}{dc} \right| = 0.$$

La ecuación

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \text{mod} \frac{d(x, y, z)}{d(a, b, c)}$$

es, por lo tanto, la ecuación de continuidad en el mencionado sistema de Lagrange, ó representando por D la determinante,

$$\epsilon_0 = \rho D.$$

Una última observación debemos hacer.

Según observa Mr. Appell, la determinante D es positiva, y no hay necesidad de poner el símbolo *módulo*.

Y en efecto, si á partir del instante inicial, suponemos el movimiento del sistema durante el tiempo dt , y éste tiende hacia 0 , el valor de D tenderá hacia $+1$; porque x, y, z tienden hacia a, b, c , y

$$\frac{dx}{da}, \frac{dy}{db}, \frac{dz}{dc} \text{ hacia } \frac{da}{da} = \frac{db}{db} = \frac{dc}{dc} = 1;$$

al mismo tiempo las demás derivadas tenderán hacia 0 , pues en este movimiento hacia el estado inicial, x no depende de b, c , ni y de a, c , ni z de a, b .

De modo que la determinante D toma esta forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Y á partir de este valor positivo de D , dicha determinante no puede cambiar de signo para convertirse en negativa, en razón á que tendría que convertirse en o , de modo que

$$\rho_0 = \rho D = o,$$

es decir, que habría puntos en el flúido cuya densidad sería nula y el flúido no sería contínuo.

La fórmula de continuidad comprueba este resultado, porque toda densidad es una cantidad evidentemente positiva, de suerte que en la ecuación de continuidad son positivas ρ_0 , ρ y D .

Con lo dicho, podemos escribir las ecuaciones de la hidrodinámica, sin ninguna duda ni doble notación de las ecuaciones, como vamos á explicar á continuación.

*
* *

Ecuaciones en el sistema de Lagrange.—Las tres ecuaciones generales del movimiento hemos dicho que eran

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right); \end{aligned}$$

ó si se quiere, representando por J_x, J_y, J_z las tres componentes de la aceleración,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho (X - J_x),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho (Y - J_y),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho (Z - J_z);$$

Estas tres componentes de la aceleración están tomadas en el sistema de Lagrange, porque se trata de la aceleración en la trayectoria de un punto cualquiera del fluido; pero los coeficientes diferenciales del primer miembro están tomados en el sistema de Euler, puesto que se refieren á las variaciones de presión alrededor de cada punto y en el sentido de los tres ejes. Por eso hemos escrito ∂ en el primer miembro y d en el segundo para

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Esto lo hemos simbolizado materialmente en la figura 19. Así

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$$

están referidos al paralelepípedo, cuyo centro es el punto A' . Y en cambio

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$$

se refieren al mismo punto A' en el movimiento de la trayectoria $A A'$.

Para unificar, por decirlo así, estas ecuaciones, debemos

expresar las derivadas del primer miembro en función de derivadas del sistema Lagrange, es decir, x, y, z con relación á a, b, c .

Basta observar para ello que p es función de x, y, z (coordinada de la A'), además x, y, z son funciones de a, b, c (en la trayectoria $A A'$), luego p será función de a, b, c .

Diferenciando, pues, p con relación á las tres variables a, b, c , por el método conocido de las funciones de funciones, y funciones compuestas, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{da} \\ \frac{dp}{db} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{db} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{db} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{db} \\ \frac{dp}{dc} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dc} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dc} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dc} \end{aligned}$$

Lo natural, ahora sería despejar

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$$

de estas tres ecuaciones, sustituyendo sus valores en los primeros miembros de las tres ecuaciones fundamentales; pero esto, en el fondo, es lo mismo que eliminar entre las tres últimas ecuaciones y las tres generales, los tres coeficientes diferenciales expresados; para lo cual, basta sustituir en las tres últimas ecuaciones los valores de

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$$

tomados de

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(X - \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varsigma \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

y dividiendo por ρ resultará:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{da} &= \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{dx}{da} + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{dy}{da} + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \frac{dz}{da} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{db} &= \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{dx}{db} + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{dy}{db} + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \frac{dz}{db} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dc} &= \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{dx}{dc} + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{dy}{dc} + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \frac{dz}{dc} \end{aligned} \right\} (1)$$

Estas son las tres primeras ecuaciones del movimiento en el sistema de Lagrange.

A estas tres ecuaciones hay que agregar la ecuación de continuidad

$$\rho_0 = \rho D \quad (2)$$

que ya antes hemos explicado

Y, por último, suponiendo que la temperatura es constante, y que no hay que tenerla en cuenta, habrá que agregar sin embargo, la ecuación característica del fluido, que es la que expresa la densidad en función de la presión

$$\rho = t(p) \quad (3)$$

Las cinco ecuaciones (1), (2), (3), son las ecuaciones generales del movimiento de un fluido perfecto en que se prescindir de la temperatura, ó se supone que es constante, en el sistema de variables de Lagrange. Son, en resumen, cinco ecuaciones con las cinco funciones desconocidas x, y, z, p, ρ , que hemos de determinar en función de las cuatro variables independientes a, b, c, t .

Las cuatro primeras son ecuaciones diferenciales, como se ve desde luego, en las tres ecuaciones (1), y también lo es la cuarta, según el desarrollo de D .

La quinta es una ecuación en términos finitos.

Este sistema de ecuaciones contiene las funciones x, y, z ,

p , ρ , y los coeficientes diferenciales de estas funciones, con relación á a , b , c , t .

Una vez integradas determinarán el movimiento de cada punto A , su posición A' en cada instante, y la densidad ρ y la presión p , de un elemento infinitamente pequeño de fluido, que corresponda á A' en el instante expresado.

Como son ecuaciones diferenciales de segundo orden respecto á t , en la primera integración tendremos $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ que son las tres componentes de la velocidad en un punto cualquiera de cualquier trayectoria, y esta integración introducirá, por lo tanto, tres constantes arbitrarias u_0 , v_0 , w_0 , que serán las componentes de la velocidad en el instante inicial para cualquier punto A del fluido.

Por fin, si la temperatura fuera otra nueva variable, necesitaríamos otra ecuación más, que no conocemos, y, á decir verdad, el problema se convierte en un problema de termodinámica.

Pasemos ya á las ecuaciones generales del movimiento del fluido, cuando se adoptan las variables de Euler.

*
* *

Ecuaciones en el sistema de Euler.— Tendremos, como antes, que establecer cinco ecuaciones.

Las tres fundamentales de la dinámica, la de continuidad y la característica del fluido.

En rigor, ya las hemos obtenido; pero hay que hacer lo que hicimos al tratar de las variables de Lagrange, á saber uniformarlas respecto á las notaciones, de modo que no pueda ocurrir ninguna duda, y hacer de modo que no entren más que las funciones que hemos de obtener y las variables de este caso, que son x , y , z , t ; porque el movimiento se

estudia, como hemos explicado minuciosamente, para cada punto.

Las funciones ya no son como antes x, y, z , sino las componentes de la velocidad en un instante dado para cada punto x, y, z . Llamando u, v, w , á dichas componentes de la velocidad para cualquier punto, estas son las funciones que hemos de determinar en valores de x, y, z, t .

En resumen, diremos que u, v, w son las funciones descomidas, y además ρ, p como antes; x, y, z, t serán las variables independientes.

Veamos qué forma toman las ecuaciones del problema.

Las tres ecuaciones del movimiento son, como siempre, dividiendo por ρ

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2};$$
$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Los coeficientes diferenciales del primer miembro pertenecen al sistema Euler, como hemos visto, porque se refieren á cada punto y son derivadas con relación á x, y, z , es decir, á las variables de este sistema.

Estos tres primeros miembros pueden, por lo tanto, subsistir; pero en el segundo miembro entran las componentes de la fuerza generatriz del movimiento en cualquier trayectoria. Son, pues, coeficientes en el sistema de Lagrange, y éstos son los que debemos transformar.

Antes transformábamos el primer miembro; ahora tenemos que transformar el segundo.

Veamos qué nueva forma toman los segundos coeficientes diferenciales con relación al tiempo.

El coeficiente diferencial $\frac{d^2x}{dt^2}$, por ejemplo, es lo mismo que $d \frac{dx}{dt}$, ó bien $\frac{du}{dt}$, ó sea el incremento infinitamente

pequeño de la velocidad en una trayectoria cuando el tiempo recibe un incremento dt , dividido por este último.

Sea A , fig. 20, la posición de un punto del fluido; en el

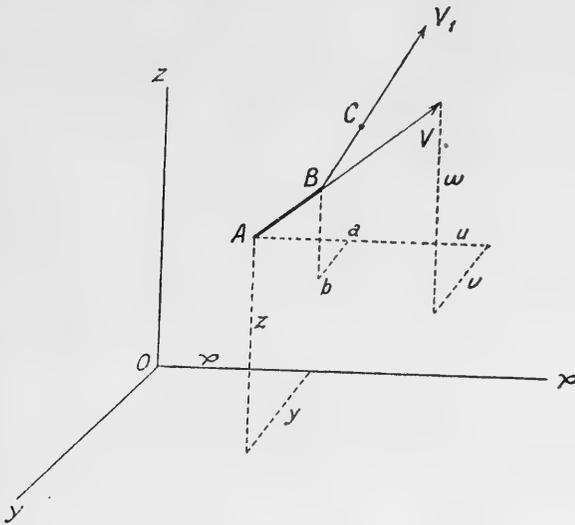


Figura 20.

instante t , el elemento del fluido que pasa por A tiene una velocidad V , cuyas componentes son u, v, w .

La componente u , por ejemplo, será en el sistema de Euler una función de x, y, z ; es decir, que dependerá del punto A que se considere. La expresaremos por

$$u = u(x, y, z, t)$$

en que la u del segundo miembro es, como otras veces, símbolo de función.

Consideremos otro punto B del fluido, por el pronto arbitrario, infinitamente próximo al A , en que las coordenadas sean

$$x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z$$

y todavía para el instante t .

El valor de u para el punto B estará dado por la función anterior, que determina esta componente de la velocidad para todos los puntos del fluido, y no habrá más que sustituir, en vez de x, y, z , los valores $x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z$.

Pero si además expresamos la componente de la velocidad en B en el instante $t + dt$, deberemos hacer también esta sustitución en dicha fórmula, y llamando u_1 á la componente de la velocidad en B para el instante $t + dt$, hallaremos

$$u_1 = u(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, t + \partial t)$$

y restando de esta ecuación la anterior

$$u_1 - u = u(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, t + \partial t) - u(x, y, z, t)$$

ó bien

$$\begin{aligned} u_1 - u = & u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z + \frac{\partial u}{\partial t} \partial t - u(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Y por fin,

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial t} \partial t + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z.$$

Hasta el momento presente nada hemos dicho del punto B ; supongamos ahora que B está tomado sobre la dirección de la velocidad V correspondiente al punto A , pues es claro, en este caso, que A y B serán dos puntos de la trayectoria

del elemento que pasa por A , correspondiendo el primero es decir, A , al instante t , y el segundo al instante $t + \partial t$.

En este caso, tendremos, evidentemente, que las tres componentes dx ; dy , dz , del elemento AB , serán

$$\partial x = u \partial t, \partial y = v \partial t, \partial z = w \partial t.$$

Y por lo tanto,

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial t} \partial t + \frac{\partial u}{\partial x} u \partial t + \frac{\partial u}{\partial y} v \partial t + \frac{\partial u}{\partial z} w \partial t$$

y dividiendo por ∂t

$$\frac{u_1 - u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w.$$

Pero en el primer miembro u_1 , es la componente de la velocidad V , correspondiente al punto B en el tiempo $t + \partial t$, luego $u_1 - u$ es el incremento du de la componente en la trayectoria ABC , es decir, que el primer miembro es desde luego

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = J_x$$

y tendremos, por último, para esta componente de la aceleración en las nuevas variables Euler,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = J_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w.$$

Como iguales razonamientos podemos hacer para las otras dos componetes de la aceleración, tendremos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = J_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = J_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w,$$

y las tres primeras ecuaciones del movimiento del fluido en el sistema de Euler serán, por lo tanto,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} &= Y - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} &= Z - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \right. (1')$$

A éstas hay que agregar la ecuación de continuidad, que ya la obtuvimos para el sistema de variables de Euler, y que era

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2').$$

Por último, habrá que unir á las anteriores la ecuación característica del fluido

$$\rho = f(p) \quad (3')$$

en que prescindimos de la temperatura, por considerarla constante.

En resumen, las cinco ecuaciones (1') (2') (3'), serán las ecuaciones del movimiento en el sistema de Euler y nos servirán para obtener

las cinco funciones. u, v, w, ρ, p
 en función de las cuatro variables. x, y, z, t .

De este modo, para cada instante conoceremos la velocidad con que, por cada punto, pasa el fluido y qué presión y qué densidad lleva.

Habrà, para ello, que integrar dicho sistema de ecuaciones diferenciales, en las que no entran más que las variables

y derivadas de las funciones desconocidas, con relación á las variables independientes.

* *
* *

Sea cual fuere el sistema de variables que se adopte, integrado el sistema (1) (2) (3) si se escogen las variables de Lagrange, ó bien (1') (2') (3') si se sigue el sistema de Euler, el problema quedará completamente resuelto.

Si se ha adoptado el sistema de Lagrange, de sus integrales

$$x = f_1(a, b, c, t),$$

$$y = f_2(a, b, c, t),$$

$$z = f_3(a, b, c, t),$$

diferenciándolas con relación al tiempo, deduciremos las componentes de la velocidad

$$\frac{dx}{dt} = u = f_1'(a, b, c, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = v = f_2'(a, b, c, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = w = f_3'(a, b, c, t);$$

y despejando a, b, c en las tres primeras y sustituyendo en las tres últimas, tendremos las componentes de la velocidad en función de x, y, z, t , que serán las integrales en el sistema Euler.

Por el contrario, si se ha adoptado el sistema Euler y se ha efectuado la integración, en la cual, por otra parte, entrarán las mismas constantes que en el primer sistema, á saber:

coordenadas y velocidades iniciales de todos los puntos, será facilísimo pasar al sistema de Lagrange.

En efecto, hemos demostrado que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

y análogamente para $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ (4)

Como suponemos resuelto el problema con las variables de Euler, las u, v, w serán funciones conocidas de x, y, z, t , y los segundos miembros de las ecuaciones (4) serán también funciones conocidas de estas cuatro variables independientes.

Integrando, pues, dichas tres ecuaciones, conoceremos x, y, z en función de las variables de Lagrange.

Sólo nos queda, para terminar esta exposición elemental del problema de hidrodinámica que nos ocupa, decir dos palabras respecto al problema de los límites.

Lo hemos indicado ya no hace mucho: en casi todos los problemas de Física Matemática hay dos partes que considerar:

1.º Por las ecuaciones diferenciales del cuerpo, del sistema, ó del campo á que el problema se refiere, se pueden obtener las integrales generales; y

2.º Por medio de estas integrales, en las que deben entrar constantes ó funciones arbitrarias, en número y condiciones suficientes, habrá que satisfacer á las condiciones de los límites.

Estas pueden ser de dos clases.

Las correspondientes al tiempo y las correspondientes al espacio:

Por ejemplo: en nuestro caso, las integrales generales deberán satisfacer á las posiciones y á las velocidades de todos los puntos del fluido, en el momento inicial; esta parte se refiere al tiempo.

Peró el flúido en el espacio podrá estar sujeto á ciertas condiciones; por ejemplo: que dicho flúido esté durante su movimiento en contacto constante con una superficie fija ó con una superficie que cambie con el tiempo.

Fijemos las ideas mediante un caso particular.

Supongamos que el flúido en su movimiento ha de estar apoyándose sobre una superficie fija cuya ecuación sea

$$F(x, y, z) = 0.$$

En este caso, los elementos líquidos, que en cualquier momento se apoyen sobre la superficie, si al apoyarse no dan origen á ninguna fuerza de viscosidad ó rozamiento como suponemos, deberán tener una velocidad tangencial á dicha superficie; y como el camino descrito tendrá por componentes

$$u \partial t, v \partial t, w \partial t,$$

estas tres componentes, ya que los puntos extremos del expresado camino están ambos sobre la superficie, serán tres elementos diferenciales dx, dy, dz de las coordenadas x, y, z de la misma, y deberán satisfacer á la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

de modo que tendremos,

$$\frac{\partial F}{\partial x} u \partial t + \frac{\partial F}{\partial y} v \partial t + \frac{\partial F}{\partial z} w \partial t = 0.$$

ó bien

$$\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w = 0.$$

Los valores obtenidos al resolver el problema para x, y, z, u, v, w , deberán convertir la expresión anterior en

una identidad para cualquier valor de t . Teniendo en cuenta la relación que entre x, y, z , establece la ecuación $F = 0$ las constantes y funciones arbitrarias, que contengan las integrales generales, deberán determinarse sin ambigüedad por esta clase de condiciones.

Estas explicaciones son un tanto vagas; pero no podemos insistir más en ellas, como no podemos dar mayor extensión á estas nociones de hidrodinámica, que hemos creído necesario recordar antes de entrar de lleno en el problema de los torbellinos.

XLIII.—Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décima.

SEÑORES:

En la Física Matemática, y aun en los problemas de la Mecánica racional, se descubren dos tendencias distintas al estudiar las obras y las Memorias especiales de los maestros.

Tendencias que obedecen, pudiéramos decir, á la nota psicológica y hasta á la organización cerebral de cada uno de ellos.

En unos, domina *lo abstracto* y como expresión de lo abstracto, *el análisis*; pero en otros, domina la tendencia *geométrica*, ó comparte con el análisis la manera especial de estudiar las cuestiones: domina en éstos últimos, volvemos á repetirlo, el espacio y la *representación sensible*.

Para aquéllos, la solución, y aun la interpretación de un problema, reside exclusivamente en *las fórmulas matemáticas*; para éstos, aunque de las fórmulas no puede prescindirse nunca, hay que animarlas y darles carácter de realidad, buscando para ellas representaciones en el espacio, haciendo intervenir, en suma, como elementos ineludibles á los productos de la sensación.

Concretemos estas ideas por medio de algunos ejemplos.

La teoría de la *rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto*, fué resuelta hace mucho tiempo, por varios méto-

dos analíticos, de una manera completa, perfecta casi, pudiéramos decir con suprema elegancia; porque bien puede emplearse esta palabra al estudiar ciertos métodos y ciertas fórmulas de la ciencia matemática, ya en sí, ya en sus aplicaciones á la Mecánica ó á la Física. Citemos á d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, Jacobi y Mme. Kowaleski, grandes maestros en el análisis matemático.

Y teniendo *fórmulas* que en cada instante nos determinasen la posición del cuerpo sólido y de cada uno de sus puntos, sus velocidades, sus aceleraciones, sus trayectorias, en suma, todos elementos dinámicos del problema, parecía que era imposible pedir más.

Y, sin embargo, esto no satisfacía al espíritu claro, preciso, pictórico, y valga la palabra, del ilustre Poinsot.

No le bastaba saber cómo el cuerpo sólido, girando alrededor un punto, ocupaba en cada instante determinada posición; quería seguir al cuerpo en su movimiento, y *ver* con la imaginación cómo á esa posición había llegado: no esperar á que llegase, sino acompañarle en su marcha.

«Una de las cosas, decía en estas ó parecidas palabras, que yo más he deseado comprender, es el movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un punto»; y para realizar estos anhelos matemáticos, creó su preciosa *teoría de la rotación*, que en rigor nada agregaba de fundamental á las soluciones anteriores, creó, repetimos, la teoría, llamada de Poinsot, que los analistas de pura raza miraban con cierto desdén relativo.

Unas buenas fórmulas, pensaban, valen más y tienen más altura científica, que unos conos macizos rodando unos sobre otros.

En cambio, los matemáticos de la segunda escuela á que antes nos referíamos; los que creen que la ciencia no ha pronunciado su última palabra *mientras no encuentre representación material* para las cosas y para los fenómenos, al menos en la ciencia del hombre dotado de sentidos físicos; los que buscan cierta belleza plástica en la resolución de los

problemas, éstos han aplaudido siempre el artístico y admirable esfuerzo de Poincaré.

*
* *

Y si de la Mecánica racional pasamos á la Física matemática, encontraremos, como dijimos antes, estas dos tendencias.

La escuela inglesa, hablando en términos generales, muestra marcada inclinación á los simbolismos sensibles, y se empeña, con grandes esfuerzos de ingenio, en representar los fenómenos de la Naturaleza por medio de máquinas compuestas de ruedas, engranajes, palancas, resortes y giróscopos; no porque supongan aquellos maestros que los fenómenos de la Naturaleza sean algo así como fábricas y talleres industriales, sino porque tales mecanismos son esquemas vivos y palpitantes, y sobre todo plásticos, de los fenómenos naturales y de sus palpitations y movimientos.

Después de todo, si la Naturaleza no es una máquina á modo de las máquinas industriales, y la imagen parece tosca, tampoco la Naturaleza es un conjunto de fórmulas, que en rigor no son más que esquemas analíticos de los fenómenos.

Los fenómenos naturales, pueden decir los defensores de tal escuela, realmente más se parecen á un mecanismo que á una fórmula abstracta.

En la Naturaleza se ven movimientos, giros, enlaces materiales; en la Naturaleza no se encuentran ni integrales, ni diferenciales, abstracciones sublimes con las que se procura penetrar en la esencia de las cosas; pero al fin y al cabo abstracciones del entendimiento, no realidades del mundo exterior.

Citemos, entre los que han seguido esta escuela de la representación material, al insigne Lodge y al admirable y ad-

mirado Lord Kelvin, en que la imaginación compite con el talento.

En oposición á dicha escuela, podemos decir que los alemanes, en general, tienen predilección marcadísima por las abstracciones del análisis para todos los problemas de la Física matemática.

Así toda una escuela de físicos insignes renuncian, como hemos explicado en otras ocasiones, á penetrar, descubrir ó imaginar la constitución de los campos electromagnéticos, y, por lo tanto, la constitución del éter; problema, á su entender, completamente inútil, porque es para la inteligencia humana de todo punto inaccesible.

Para los partidarios de tal escuela, lo único que puede conocerse, y lo único que importa conocer, es una doble magnitud ó, en términos más precisos, un doble vector.

Un campo electromagnético está definido, conociendo, para cada punto, el vector eléctrico V_e y el vector magnético V_m : de igual suerte que en termodinámica está definido un cuerpo conociendo su *volumen*, su *presión* y su *temperatura*.

Un campo electromagnético, para los partidarios de este sistema, ni es éter, ni es materia, ni es dieléctrico, ó si es algo, no lo podemos saber; para esta ciencia ultrapositivista á fuerza de ser ultramatemática, un campo de cualquier clase que sea, es un conjunto de vectores. Si la imaginación busca algo en que apoyarse, que se figure y pinte en el espacio una lluvia de flechas con cierta ley de variación.

Claro es que ni aun para la ciencia más positivista, basta con los dos vectores para cada punto, como en termodinámica no basta que hablemos del volumen V , de la presión P , ó de la temperatura T .

Es preciso que busquemos ecuaciones, que enlacen matemáticamente el vector eléctrico y el vector magnético.

Pero estas ecuaciones se deducen única y exclusivamente de la experiencia, como explicábamos á fin del curso ante-

rior, al dar cierto avance de las teorías modernas de la electricidad.

Y así, llevando las cosas al extremo, el mundo de la realidad desaparece, y físico hay, y de los más eminentes, para el que la electricidad no existe, ó al menos procede en sus estudios como si no existiese. La electricidad es un conjunto de fórmulas matemáticas, una masa es una integral, una fuerza un vector.

Y siguiendo por este camino, la realidad, poderosa y palpitante, se convierte en una moderna ciencia cabalística, de formas abstractas, sin ningún contacto con lo sensible y sin ninguna *representación material* de los fenómenos de la Naturaleza.

*
* * *

Pero ya que tanta predilección mostramos por las representaciones materiales de los hechos, presentemos un ejemplo, que será como una representación material de nuestras ideas.

Y de antemano pedimos disculpa por lo vulgar de tal ejemplo.

Supongamos que se le dice á una persona: vamos á tratar de un mecanismo importantísimo que ha creado el ingenio humano; pero no vamos á explicar ni la combinación interna de los elementos de tal mecanismo, ni vamos á presentar para su estudio ningún ejemplar del mismo; daremos tan sólo su ley matemática, expresada por estas dos ecuaciones

$$\omega = \frac{2\pi}{3600} t,$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{43200} t.$$

ω y ω_1 son velocidades angulares, y t es una variable independiente: podemos suponer que es el tiempo medido en segundos.

Estas dos ecuaciones expresan, como queda dicho, la ley matemática del mecanismo, y esto es todo lo que se necesita saber.

En verdad que entre esta ley matemática y el mecanismo que representa, media un abismo para la imaginación, si la imaginación busca interpretaciones físicas, que den consistencia é imágenes materiales á las dos ecuaciones.

El que propuso el problema acaso pensó en un reloj. La primer ecuación expresará el movimiento giratorio del minuterero, porque, en efecto, en 60 minutos, que son 3600 segundos, el minuterero da una vuelta, y sustituyendo en la primera ecuación $t = 3600$, resultará

$$\omega = \frac{2\pi}{3600} \cdot 3600 = 2\pi,$$

es decir, una vuelta.

La segunda ecuación, en cambio, podrá representar el movimiento del horario, puesto que, haciendo la misma sustitución que antes, $t = 3600$, tendremos

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{43200} \cdot 3600 = \frac{2\pi}{12},$$

de modo que esta aguja habrá recorrido 5 minutos de la esfera ó la 12.^a parte de una vuelta, mientras el minuterero ha dado la vuelta completa.

La ley matemática, en efecto, coincide con el mecanismo de un reloj, en cuanto á los efectos; mas por sencillas y exactas que sean las dos ecuaciones anteriores, no es fácil que á nadie le den una idea exacta de lo que es un reloj, si jamás ha tenido ocasión de observar esta máquina maravillosa.

En rigor, más se aproximará á la realidad el que observe

un reloj con su esfera, su numeración y sus dos agujas, y experimentalmente determine la ley y el movimiento de ambas agujas.

Lo cual prueba, que sin negar á la escuela conceptualista su importancia entre las varias escuelas científicas, hay que reconocer, que está mucho más lejos de la realidad, que la escuela puramente espermental y de observación.

Pero continuemos con el ejemplo, que á veces, en lo más modesto, se dibuja en cierto modo lo más elevado.

Si otra persona de mayores ambiciones intelectuales, ni se contenta con las fórmulas abstractas, áridas y muertas, que al principio escribimos, ni se contenta con mirar á la esfera del reloj y ver cómo el horario y el minuterero giran, deduciendo de su movimiento la ley experimental á que están sujetos; sino que con gran atrevimiento de inventiva, y después de intentar sin conseguirlo, que penetre su mirada en la caja del reloj, por estar encerrada su máquina en envolvente inquebrantable de bronce, se pone á *inventar* mecanismos, y consigue uno que produzca iguales movimientos en las dos agujas; aun cuando el mecanismo que invente sea totalmente distinto de el del reloj del problema, me parece que no hay duda de que la inteligencia y la sensibilidad humana quedarán mucho más satisfechas con el reloj hipotético, que con las simples fórmulas matemáticas, ó con la simple observación externa de la esfera y de las agujas del impenetrable reloj, que en nuestro ejemplo representa el conjunto de fenómenos impenetrables de la Naturaleza.

Aunque el reloj misterioso sea eléctrico y el reloj inventado sea puramente mecánico, irregular y tosco, y sujeto á perpetua descomposición, aun así y todo, y con todas sus imperfecciones, el reloj inventado, el *reloj hipotético*, pudiéramos decir, valdrá infinitamente más en el orden intelectual, para el porvenir de la ciencia, y para lo que pudiéramos llamar la estética del entendimiento, que unas cuantas

fórmulas algebraicas, ó que una esfera impenetrable con dos agujas giratorias.

Pero, rogando que se nos dispense esta digresión, volvamos á nuestro objeto; que continuando por este camino, antes terminaría el curso, que el tema que venimos discutiendo.

*
* *

Decíamos, que para muchos físicos y matemáticos, un problema no está resuelto del todo, aun cuando hayamos obtenido las fórmulas matemáticas, que determinan todas las magnitudes de dicho problema en función de tales ó cuales variables.

Es preciso, además, que la inteligencia posea una representación plástica, ó si se quiere, una imagen del fenómeno.

Fijemos las ideas, para la cuestión que estamos tratando, que no es otra, que la del equilibrio y movimiento del fluido perfecto.

Las ecuaciones (1) (2) (3) (conferencia anterior), analíticamente resuelven el problema según las variables de Lagrange.

Si logramos integrar dicho sistema de ecuaciones, prescindiendo ahora de la cuestión de límites, para no complicar el punto que discutimos, podemos decir que tendremos los valores de x , y , z , para todo punto, cuyas coordenadas iniciales sean a , b , c , en función de estas coordenadas y del tiempo; de modo que

$$x = f_1(a, b, c, t.)$$

$$y = f_2(a, b, c, t.)$$

$$z = f_3(a, b, c, t.)$$

Mediante estas ecuaciones, para cualquier punto del fluido definido por sus coordenadas a , b , c , en el instante inicial

$t = 0$, conoceremos la posición á que ha llegado en cualquier momento t . No habrá más que sustituir este valor de t en los segundos miembros; y siendo conocidos a, b, c, t , el cálculo numérico de las funciones f_1, f_2, f_3 , nos darán los valores de x, y, z , para dicho instante, y por lo tanto, la posición del punto que se considera.

Y del mismo modo, y con igual facilidad, podremos conocer todas las demás magnitudes del movimiento del sistema.

Por ejemplo, las componentes de las velocidades, diferenciando con relación á t las tres ecuaciones anteriores.

Las aceleraciones, diferenciando dos veces las mismas ecuaciones.

La forma de la trayectoria, eliminando t entre las tres ecuaciones en cuestión; con lo cual, obtendremos dos ecuaciones en x, y, z , que serán las de dicha trayectoria.

Y como al integrar las cinco ecuaciones fundamentales, habremos obtenido también ρ y p en función de a, b, c, t , conoceremos la presión de cada punto en su marcha, y en diferentes instantes, y su densidad y por fin cualquier magnitud que con éstas se relacione.

En suma: el problema estará resuelto de una manera casi perfecta.

¿Es que no basta con esto?

Para ciertos espíritus imaginativos no basta, porque las cinco funciones x, y, z, p, ρ dan la solución analítica, pero no dan la imagen de esta solución.

Se tiene una serie de trayectorias, un conjunto inmenso de curvas, que constituyen para la imaginación una verdadera maraña de hilos flúidos, que se cruzan, se enredan, y en la que la imaginación, al buscar una representación sensible, no encuentra ni orden, ni concierto, ni ley.

Precisamente, las teorías en que vamos ocupándonos ayudan á introducir algún orden en este desorden, alguna ley en esta confusión.

Un punto, tomado en el flúido en el instante inicial, traza

una trayectoria perfectamente determinada por las variables que en el sistema de Lagrange son x, y, z , determinadas á su vez en función del tiempo, integradas que sean las ecuaciones generales.

Pues bien, para penetrar algo más en el fondo del fenómeno, consideremos, no un punto, sino una pequeña masa del fluido que lo rodee, y sigamos á esta masa en su movi-

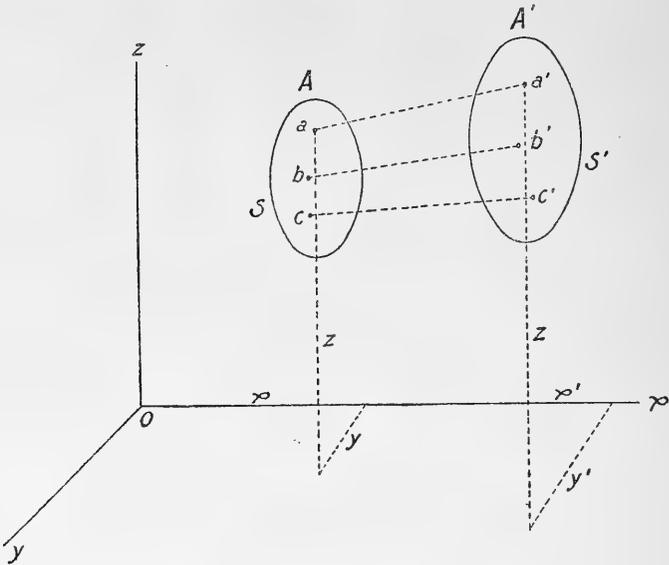


Figura 21.

miento y en sus transformaciones, á medida que el punto que la acompaña, formando parte de ella, describe su trayectoria propia, y que ya conocemos.

Siguiendo este movimiento general, fijémonos en dos estados consecutivos; es decir, consideremos una porción infinitamente pequeña de este movimiento, que se verificará en un tiempo infinitamente pequeño dt .

Acompañemos de este modo, paso á paso, al movimiento de dicha masa, y representemos por a, b, c, \dots diferentes puntos de la misma figura 21.

Cada uno de éstos tendrá su trayectoria propia, todas muy próximas entre sí, porque la masa elemental que consideramos es muy pequeña, y a , b , c , estarán muy próximos también.

En el tiempo dt , el punto a describirá un elemento aa' que supondremos rectilíneo é infinitamente pequeño: en rigor, será un elemento de su trayectoria finita.

Del mismo modo el punto b describirá otro elemento bb' .

El punto c , á su vez, otro elemento cc' .

Y lo mismo podríamos decir de todos los demás puntos de la masa A en movimiento.

Para el intervalo infinitamente pequeño de tiempo que estamos considerando, el conjunto de todas estas rectas aa' , bb' , cc' ,, es decir, de todos estos elementos de trayectoria, definirán geoméricamente el movimiento de la masa A ó dm , á la cual pertenecen los puntos a , b , c ,

Serán, si se nos permite la comparación, los hilos flúidos componentes de este cordón de trayectorias, que corresponden á dicha masa dm .

Y si se tienen en cuenta sus longitudes, y se refieren al tiempo, conoceremos no solamente la parte cinemática, sino la parte dinámica del movimiento de la masa elemental en cuestión; y no sólo podremos calcular todos los elementos relativos al fenómeno, sino que los veremos con la imaginación.

Repitiendo esto mismo para todos los instantes, y para todos los manojos infinitamente estrechos de trayectorias, tendremos una representación geométrica y dinámica del movimiento general.

Volvamos al movimiento en el tiempo dt de la masa A ó dm , al pasar de la posición a , b , c á la a' , b' , c'

Si todas las rectas elementales aa' , bb' , cc' , son paralelas é iguales, este movimiento elemental, que consideramos, será el más sencillo, porque se reducirá *al movimiento de traslación* de la masa dm , como si fuera un cuerpo sólido.

do infinitamente pequeño: todos sus puntos trazan rectas iguales y paralelas, y con la misma velocidad,

$$aa' = bb', = cc' \dots$$

la velocidad constante será $\frac{aa'}{dt}$.

Pero este es un caso particular sencillísimo.

Ni todas estas rectas tendrán, en general, la misma longitud, ni tendrán la misma orientación.

Podemos decir, siguiendo la imagen precedente, que los hilos flúidos del cordón de trayectorias tenderán á producir cierta torsión, y además á aumentar ó disminuir el diámetro del cordón mismo.

Esto, dicho en términos vulgares, á los que en breve daremos expresión matemática.

Pero sólo con lo expuesto, podemos ya marcar tres ideas: la idea del movimiento de traslación, la idea de la torsión ó tendencia al giro y la idea de la dilatación ó compresión.

De la primera y de la última nace en cierto modo la idea de una clase de movimientos que se llaman *irrotacionales*, porque en ellos no hay tendencia á la rotación alrededor del eje ó línea media de este manajo elemental de trayectorias ni de otra línea cualquiera.

De la segunda idea, es decir, de la torsión, nacen los movimientos *rotacionales*, que son precisamente los que dan origen á *la teoría de los torbellinos*.

Todo esto es todavía un tanto vago; tiene por objeto tan sólo hacer que despierte en mis alumnos la idea de torbellino ó vértice para el movimiento de los flúidos.

*
* *
*

Y antes de pasar adelante, digamos que estas dos palabras, *rotacional* é *irrotacional*, no son palabras castellanas,

ni se encuentran en ningún diccionario de la lengua, y aun suenan como vocablos bárbaros é inarmónicos.

Algún purista acaso nos aconsejase que empleásemos la palabra *rotativo*; pero el consejo no es aceptable, porque tal palabra expresa una idea distinta de la que queremos expresar empleando la palabra *rotacional*.

No se trata de un movimiento finito de rotación, de una rotación de hecho, aunque en algún caso pueda serlo; sino de una tendencia al movimiento, de un movimiento elemental, y aplicado á filetes flúidos, cada vez más sutiles, como explicaremos más adelante; y si no existe en castellano una palabra apropiada al fenómeno, ¿qué otro recurso nos queda que tomarla de idiomas extranjeros en que haya nacido la teoría que vamos á exponer?

Tampoco en francés existía esta palabra, y los sabios de aquel país no han tenido inconveniente en crear la palabra *rotationnel*, tomada del inglés *rotational*.

Pero prescindamos ya de palabras, y vamos al fondo del problema.

* * *

Hay tres problemas que, por decirlo así, van á la par, y que están comprendidos en las mismas fórmulas generales, al menos bajo el punto de vista geométrico y aun cinemático.

- 1.º El de transformación de figuras.
- 2.º El de deformación de un cuerpo elástico.
- 3.º El del movimiento de un flúido.

Primero. Sea (fig. 21) un espacio *A*, comprendido en una superficie límite *S*, y que para fijar más las ideas, y cuando nos convenga para la explicación, supondremos que es sumamente pequeño.

Este espacio, con todos sus puntos, representará para nosotros una figura geométrica.

Pues supongamos que dicho espacio ó figura A , se transforma en otra figura A' , de suerte que á cada punto a de la primera corresponde un punto a' de la segunda, y uno sólo; así á a corresponde a' ; á b , b' ; á c , c' Y admitamos que recíprocamente, á cada punto de la segunda figura corresponde á su vez un punto y uno sólo de la primera: á a' , a ; á b' , b ; á c' , c

Claro es que las coordenadas de cada punto a' serán funciones de las coordenadas de cada punto a de la figura A , y recíprocamente.

Con esta condición, que ambas funciones sean uniformes.

Entonces, para la transformación, no habrá duda; ni para la transformación de los puntos, ni de las figuras, como veremos más adelante.

La transformación estará definida por las tres funciones de transformación

$$x' = \varphi_1(x, y, z),$$

$$y' = \varphi_2(x, y, z),$$

$$z' = \varphi_3(x, y, z),$$

de las cuales podrán deducirse otras tres; es decir, x , y , z en función de x' , y' , z' , para la transformación inversa: la de la figura A' en la figura A .

Hasta aquí el problema es puramente geométrico; y si suponemos transformaciones infinitamente pequeñas, las rectas aa' , bb' , cc', serán infinitamente pequeñas también.

Este es el primer problema á que antes nos referíamos.

Segundo. El espacio A ya no representa pura y simplemente una figura geométrica, sino que representa una porción sumamente pequeña de un cuerpo elástico, que por acciones dinámicas sufre una deformación infinitamente pequeña, y suponemos que el sólido elástico A se ha convertido en A' .

En esta hipótesis, el espacio A está lleno todo él de una substancia material y elástica.

Los puntos a, b, c , son puntos materiales que por la deformación han venido á parar á a', b', c' De modo que A' es el sólido deformado, y las rectas aa', bb', cc', son las líneas infinitamente pequeñas que marcan los caminos de la deformación.

El punto a , por ejemplo, ha trazado el camino infinitamente pequeño aa' para venir á a , y otro tanto puede decirse de los demás puntos materiales de A .

Las fórmulas anteriores de x', y', z' en función de x, y, z , ya no las podemos escribir arbitrariamente; serán las que resulten de resolver el problema de elasticidad que consideremos, y dependerán de las fuerzas que actúan sobre el sistema y de las propiedades físicas del cuerpo elástico.

Si en este problema de elasticidad y de deformaciones elásticas sólo consideramos la parte geométrica, este problema, repetimos, se confunde con el anterior; pero como problema físico es mucho más complicado, porque hay que considerar en él la parte cinemática, es decir, las velocidades con que la deformación se efectúa, y la parte mecánica, ó sea los esfuerzos que se desarrollan.

Así, por ejemplo, la recta aa' en el primer problema no es más que un segmento rectilíneo; pero en el segundo problema el cociente $\frac{aa'}{dt}$ expresará la velocidad con que el punto a pasa de a á a' , y además aa' , expresará la dirección de un esfuerzo elástico. Y si el punto a es una masa, á ella irá unida una fuerza viva.

Claro es que todas las rectas aa', bb', cc' serán proporcionales á las velocidades con que el cuerpo A se transforma en A' , puesto que sólo difieren las rectas de las velocidades en el factor constante $\frac{1}{dt}$.

Si u, v, w representan las componentes de la deformación

aa' , en muchos problemas no habrá inconveniente en que representen las componentes de la velocidad, y sólo con advertirlo se hace este cambio de notaciones.

Dicho problema de las deformaciones infinitamente pequeñas de los cuerpos elásticos lo estudiamos ya con alguna extensión en el curso de 1907 á 1908, páginas 104 y siguientes, al estudiar la teoría de la elasticidad por el método de Lamé.

Tercero. Supongamos que la figura A no representa ya un puro espacio geométrico, ni tampoco una porción muy pequeña de un cuerpo elástico, sino una porción siempre muy pequeña de un fluido perfecto en movimiento; y que se trata, por consiguiente, no de un problema de transformación de figuras, ni de un problema de elasticidad, sino de un problema de hidrodinámica.

A representará, pues, una masa fluida en movimiento en el instante t , y A' la misma masa en el instante $t + dt$.

De modo que el elemento fluido a ha venido á pasar á a' , el elemento b á b' ; el c á c' , y así sucesivamente.

Estas líneas ya no serán líneas de transformación, ni líneas de deformación, sino elementos de trayectoria; y el problema no será, por lo tanto, un problema de transformación de figuras, ni de deformaciones elásticas, sino de movimiento de una porción de un fluido perfecto en un intervalo sumamente pequeño dt .

De todas maneras, como en los dos problemas anteriores, y aquí está la clave de la semejanza, al menos en cuanto á la forma de dichos tres problemas, las coordenadas de los puntos a' , b' , c' ... serán como antes funciones de x , y , z .

Sólo que estas funciones φ_1 , φ_2 , φ_3 ya no serán funciones de transformación geométrica, ni expresiones de una deformación elástica, sino resultado de integrar, en el sistema de variables de Lagrange, las ecuaciones diferenciales del movimiento, suponiendo, y esto siempre puede suponerse, que t es el instante inicial, y que por lo tanto, en las tres ecuaciones expresadas x , y , z representan lo que en el caso ge-

neral habíamos designado por las coordenadas iniciales a, b, c .

*
* *

Vemos, pues, que aunque los problemas son completamente distintos, nos ha servido la misma figura, y nos han servido las mismas fórmulas.

Así nos han de servir, como veremos en la conferencia próxima, los resultados obtenidos al estudiar la teoría de la elasticidad según Lamé como introducción al estudio de los torbellinos en este problema de hidrodinámica.

Y en efecto, ya en aquella ocasión hablábamos de movimientos *rotacionales* é *irrotacionales*.

Precisamente, de los resultados allí obtenidos hemos de servirnos, para formarnos alguna idea, de cómo cambia una masa de fluido perfecto al caminar á lo largo de su trayectoria media, en la hipótesis de las variables de Lagrange.

Este será el objeto de la nueva conferencia.

**XLIV.—Catálogo de los moluscos testáceos marinos
de la costa y bahía de Cádiz.**

POR JOAQUÍN GONZÁLEZ HIDALGO.

Situada la bahía de Cádiz en el Sur de España, abierta al Océano Atlántico, no lejos de la entrada al Mediterráneo y de la costa de Africa, es una localidad muy á propósito para hacer en ella exploraciones malacológicas que contribuyan á completar el conocimiento de la distribución geográfica de los moluscos.

Pocas han sido, sin embargo, las verificadas hasta ahora, según puede verse en el tomo XV de las *Memorias de la Real Academia de Ciencias*, escrito que hemos destinado á consignar los títulos de 2.500 publicaciones que tratan de moluscos, los datos que éstas contienen acerca de la fauna malacológica de España y Portugal, y breves noticias relativas al contenido, disposición y mérito de dichas publicaciones, como base para la formación de una buena fauna malacológica de esos países.

En dicho volumen, pues, hallarán los lectores las pocas especies de moluscos que se citaron de Cádiz en las antiguas obras de Bonanni, *Recreatio mentis et oculi* (2 especies); Gmelin, *Systema naturæ* (3 especies), y Chemnitz, *Conchylien Cabinet* (5 especies); las recogidas fuera de la bahía en un dragado hecho por Mac Andrew, *Notes on the distrib. of mollusca* (38 especies vivientes y 33 muertas); las dragadas por la *Expedition du Travailleux*, que publicó Locard (58 especies vivientes y 14 muertas); las encontradas por el Sr. Paz y nosotros mismos, *Cat. mol. testacés Espagne, Moluscos marinos de España* (47 especies vivas); las halladas por el Sr. Calderón, *Moluscos marinos de Andalucía*

(56 entre vivientes y muertas), y las encontradas últimamente por Maxwell Smith, *The Nautilus*, vol. XXIV (93 vivientes y 17 muertas). Se debe también la cita de algún molusco de Cádiz á los conquiólogos Kiener, Philippi, Redfield, Weinkauff, Bergh, Martorell, Folin, Fischer, Monterosato, etcétera.

Pero la exploración más interesante y la más completa que se ha verificado hasta ahora es la hecha por don Juan Gavala, ingeniero de minas, muy aficionado al estudio de los moluscos, el cual ha recogido en Cádiz doscientas especies de estos seres, todas con el animal y la indicación exacta del sitio y condiciones en que viven.

Agregando á este número las que aún no encontré, pero que recogieron vivientes los autores antes citados, ya se puede formar el lector idea de lo que es la fauna malacológica de dicho puerto español, que será más completa cuando el Sr. Gavala acabe de explorar por completo dicha región y se publique un suplemento al presente escrito.

Mas antes de dar el catálogo de las especies, será útil hacer una reseña de la localidad, seguida de algunas observaciones para la mejor inteligencia del mismo.

La población de Cádiz está situada en el extremo de una larga y estrecha prolongación de terreno, cuya orilla interna forma parte de la bahía y la externa es la costa del Océano Atlántico. Frente á esta última hay tres pesqueras, denominadas por los naturales del país *El Límpio*, *La Caballa* y *El Duro*, procediendo de derecha á izquierda. La primera, *El Límpio*, la más separada de la población de Cádiz, tiene de 16 á 30 brazas de profundidad; la segunda, *La Caballa*, de 30 á 40, y la tercera, *El Duro*, de 50 á 80. La entrada de la bahía está situada entre la población de Cádiz y el Castillo de Santa Catalina en el lado opuesto. La profundidad de este sitio es de 10 á 15 brazas, y después muy variable, pero disminuyendo generalmente hasta el fondo de la bahía. Esta se halla dividida en dos partes desiguales por un avance del

terreno en la orilla izquierda, que forma un paso estrecho entre el Castillo de Puntales y el Castillo de Matagorda.

En el terreno situado al fondo de la bahía, correspondiente á la parte menor de la misma, se halla el pueblo de San Fernando y el Caño de la Carraca, y caminando desde aquí hasta el mar libre por la derecha, se encuentran sucesivamente en la orilla la población de Puerto Real, el Castillo de Matagorda (en el sitio que divide en dos partes la bahía), el río San Pedro y los bajos de dicho río; la playa de la Cabezuela, el río Guadalete y sus bajos, la población del Puerto de Santa María, La Pólvora, La Herradura, el Castillo y la playa de Santa Catalina, la Puntilla de Rota, los pueblos de Rota y Chipiona y la continuación de la costa atlántica.

Todos los sitios antes dichos han sido explorados por el Sr. Gavala, y al indicar aquellos en que ha encontrado las especies, ha tenido cuidado de anotar las condiciones en que éstas viven, ó sea la profundidad, naturaleza del fondo, etc., como también su rareza ó abundancia.

En el catálogo de los moluscos marinos de Cádiz que sigue á esta breve introducción, se incluyen todas las especies recogidas con el animal vivo por las personas antes citadas, principalmente por el Sr. Gavala, y en él se señalan con * las encontradas por los conquiólogos españoles y que forman parte de sus colecciones. Las que no llevan dicho signo se han recogido por los naturalistas cuyo nombre se cita. Al final se da una lista de otras especies mencionadas de Cádiz por los autores, y que sólo se admiten provisionalmente como pertenecientes á su fauna, porque los ejemplares obtenidos estaban muertos, en mal estado de conservación ó eran valvas sueltas de Pelecipodos. Respecto á estos moluscos, no hay seguridad de que vivan en Cádiz, pues es probable que las corrientes hayan traído sus restos de otros parajes. Así, por ejemplo, los pescadores de Cádiz han encontrado algunos ejemplares muertos y en mal estado del *Sipho islandicus*, de la *Neptunea despecta*, y valvas de

la *Cyprina islandica*, y estos moluscos viven en los mares del Norte, ó tal vez en latitudes más bajas, y en mucho fondo, por lo cual no pertenecen realmente á la fauna del litoral.

En todas las especies se cita la figura ó figuras que convienen mejor con los ejemplares recogidos, siendo la mayor parte de las veces las de nuestra obra *Moluscos marinos de España*, por dos razones: la primera, porque son muy buenas, como hechas en París por los notables artistas Arnoul y Delahaye; y la segunda, porque habiendo sido dibujadas del natural por ejemplares de las costas de España y varios del mismo Cádiz, convienen mejor con los ahora recogidos que las figuras de diversos autores, aun siendo también excelentes. Pero se citan bastantes de estas últimas cuando representan mejor los ejemplares hallados en Cádiz, ó cuando no están figuradas las especies en nuestra obra.

Lo conocido hasta el presente de la fauna malacológica marina de Cádiz es lo que sigue:

Cefalópodos.

* 1. **Argonauta Argo** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 55, fig. 1.

EST. Al regresar unos pescadores de su tarea encontraron frente á Cádiz un grupo de catorce ó quince individuos de esta especie que iban nadando en dirección al Estrecho de Gibraltar; de ellos pudieron recoger dos, el mayor de 11 centímetros de longitud. (Gavala).

* 2. **Spirula Peroni** Lamarck.

Tryon, *Man. Conchol.* I, lám. 96, figs. 467-469.

EST. Arrojada en abundancia á las playas por las olas.

Gastrópodos.

* 3. **Siphonaria Algesiræ** Quoy.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 18. *Siphonaria palpebrum*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 55, figs. 2 á 5.

EST. En las rocas de Fuenterrabía. Abundante.

Esta *Siphonaria* es variable en su forma, pues unos ejemplares son elevados en el dorso, como el tipo de Quoy, y otros deprimidos, que son los que más abundan. La coloración interior del fondo es negruzca con manchas blancas, ó blanquecina con manchas de color castaño, ó blanca sin mancha alguna, como en la variedad figurada por Reeve y en la mayor parte de los individuos recogidos en Cádiz. Es tan parecida esta *Siphonaria* á otras publicadas posteriormente de la costa occidental de Africa, que algunas sólo parecen modificaciones de una misma especie.

* 4. **Murex Brandaris** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos de España*, lám. 12, figuras 3 y 4.

EST. En diversos puntos de la bahía, en los Caños de la Carraca, en San Fernando, y sacado por los pescadores adherido á ciertas especies de esponjas, formando en ellas numerosas colonias. Común.

* 5. **Murex Trunculus** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 12, figs. 5 y 6.

EST. En diversos puntos de la bahía, sobre fondos pedregosos ó de plantas marinas. Común.

Se encuentran individuos de mayor tamaño que las figuras citadas. Las zonas transversales son negruzcas ó de color rojizo en los ejemplares bien conservados.

* 6. **Murex Erinaceus** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 13, fig. 6, y lámina 21, fig. 8.

EST. En las rocas de diversos sitios de la bahía, en la zona de las mareas, ó sacado por los pescadores á 15 ó 20 brazas de profundidad, de fondo de fango. Algo abundante.

Las dos figuras citadas en mi obra corresponden: la primera, al tipo de la especie denominado *Murex Tarentinus* por Lamarck, y la segunda á la variedad designada por Dautzenberg como especie distinta, con el nombre de *Murex Hanleyi*. Esta última es de mayor tamaño, de escultura más gruesa y con las varices prominentes, foliaceo-digitadas.

* 7. **Murex cristatus** Brocchi.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres-conchyl.* lám. 5, figuras 9 y 10.

EST. Entre los arrecifes de piedra y corales que se encuentran entre Rota y Chipiona, de 4 á 8 brazas de profundidad, de donde es sacado por los pescadores de la Corvina. Poco común.

Los ejemplares hallados son pequeños y convienen con la variedad representada en las figuras citadas de Kobelt. Los ejemplares grandes del Mediterráneo, como el figurado en la obra *Mol. marin. España*, lám. 13, figs. 3 y 4, son los que están de acuerdo con la figura original de Brocchi *Conch. subapp.*, lám. 7, fig. 15, é igualmente las figuras 7 y 8 de la lámina 5 de Kobelt.

* 8. **Murex Edwardsi** Payraudeau.

Pallary, *Journ. de Conchyl.* 1902, lám. 1, figs. 9 y 11.

EST. Dragado á 4 brazas en los bajos del río San Pedro, en fondo de plantas marinas, y vive también entre las rocas del sitio denominado *La Herradura*. Poco abundante.

Ejemplares más pequeños y más estrechos que los hallados en el Sur de Francia y Este de España.

* 9. **Murex aciculatus** Lamarck.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres conchyl.* lám. 6, figuras 2 y 3. *Murex corallinus*.

EST. Dragado á 4 brazas en los bajos del río San Pedro,

en fondo de plantas marinas y entre las rocas de *La Herradura*, como la especie anterior. Común.

* 10. **Trophon muricatus** Montagu.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 18, fig. 2.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 111, figs. 3 y 4.

EST. Sacado por las redes de la Corvina en diversos arrecifes de piedra y corales. Raro.

* 11. **Purpura hæmastoma** Linné.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres conchyl.* lám. 7,

Chemnitz, *Conchyl Cab.*, XI, lám. 187, figs. 1796 y 1797.

EST. Adherida á las rocas en varios puntos de la bahía, especialmente en *La Herradura*, en los sitios que sólo quedan al descubierto en las grandes mareas. Común.

En mi escrito titulado *Moluscos de la Guinea española*, Madrid, 1910, hice un estudio de todas las variedades conocidas de la *Purpura hæmastoma*, y allí ya se menciona el gran tamaño de una de las que viven en la bahía de Cádiz. Los individuos recogidos por el Sr. Gavala en dicha localidad, convienen con las tres figuras que cito; unos son del mismo tamaño, forma y coloración que la figura 1 de Kobelt, con dos series de nudos en la parte superior de la última vuelta; otros iguales á la figura 2, es decir, menos ventrudos que los primeros, con la espira más aguda y sólo con nudos en el ángulo de la última vuelta. Los restantes corresponden exactamente, por su forma y tamaño, á los dibujos de la obra de Chemnitz; tanto, que uno de los ejemplares de Cádiz parece que ha servido de modelo para ellos. Son grandes, ventrudos, gruesos, pesados, de 95 á 105 milímetros de alto y 84 á 90 de ancho, con una serie de enormes tubérculos comprimidos en el ángulo de la última vuelta, y otra serie de nudos debajo de la primera. Se encuentran individuos de esta misma variedad y forma, pero mucho más pequeños.

Pallary cita también de Orán ejemplares de iguales dimensiones y aun algo mayores de esta especie de *Purpura*. También recogió el Sr. Gavala un individuo no muy grande, pero que tiene la base de la columnilla de color negruzco.

* 12. **Triton nodiferus** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 18, fig. 1.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* láminas 33 y 34.

EST. Vive en fondo de fango, de 10 á 20 brazas de profundidad, en la entrada de la bahía de Cádiz. Muy abundante.

Se encuentran ejemplares de diferentes tamaños, algunos muy grandes, como los figurados en las láminas que se citan de Kobelt.

* 13. **Triton costatus** Born.

Martini, *Conchyl. Cab.*, lám. 131, figs. 1.252 y 1.253.

Hidalgo, *Mol. marin. de España*, lám. 17, fig. 1.
Triton succinctus.

EST. Se encuentra en el mismo sitio que la especie anterior. Común.

Este *Triton* ha recibido diferentes nombres: *Murex costatus* Born, *Murex Parthenopus* Salis, *Triton succinctus* Lamarck, *Triton olearium*, etc.; pero debe quedar el nombre de Born, porque es más antiguo y porque su descripción y la figura que cita de Martini convienen del todo á la presente especie.

La concha está revestida por completo de una epidermis gruesa, que presenta de trecho en trecho láminas longitudinales provistas en el borde libre de apéndices filiformes, como puede verse en la figura 1 de la lámina 39 de la obra de Kobelt, *Iconog. europ. meeresconchylien*.

* 14. **Triton cutaceus** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 16, figs. 2 y 3.

EST. Dragado á 4 brazas de profundidad, frente á Santa Catalina. Raro.

* 15. **Triton corrugatus** Lamarck.

Kobelt, *Iconog. europ. meeresconchyl.* lám. 38, figuras 5 y 7.

EST. En fondo de fango, de 10 á 20 brazas de profundidad, en la entrada de la bahía. Común.

Los ejemplares recogidos son de tamaño regular y ninguno llega á las dimensiones extraordinarias del que está figurado en la lámina 16 de mi obra *Moluscos marinos de España*.

* 16. **Ranella gigantea** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 19, fig. 3.

Reeve, *Conch. icon. Ranella*, fig. 3.

EST. Sacada por las redes del bou, desde 20 á 40 brazas de profundidad, de fondo de fango. Común.

Se encuentran ejemplares hasta de 19 centímetros de longitud con pocas series de tubérculos alargados transversalmente (figura de Hidalgo) y otros con mayor número de series de nudos pequeños (figura de Reeve).

* 17. **Ranella Scrobilator** Linné.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 54, figs. 4 y 5.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconch.*, lám. 31, figuras 1 y 2.

EST. Obtenido un ejemplar á la profundidad de 60 brazas, frente á Chipiona, de fondo de fango.

El nombre empleado por Linné para esta especie es el de *Scrobilator*, en las ediciones 10 y 12 del *Systema naturæ*, y no el de *Scrobiculator* con que se designa generalmente.

* 18. **Pisania maculosa** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 86, figs. 1 á 3.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 16, figuras 16, 17 y 20.

EST. En diversos puntos de la bahía, sobre las rocas, en la zona de las mareas. Muy abundante.

* 19. **Euthria cornea** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 54, figs. 2 y 3.

EST. Dragada entre las piedras de Santa Catalina, á 4 brazas de profundidad. Poco abundante.

20. **Pollia fusulus** Brocchi.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 28, figuras 23 á 25 (*Trophon*).

Locard, *Exped. Travailleur, Mollusques*, lám. 16, figuras 9 á 16.

EST. A 60 brazas de profundidad (Locard).

Esta especie no ha sido encontrada aun por el Sr. Gavala.

* 21. **Pollia Orbigny** Payraudeau.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 86, figs. 4 y 6.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 16, figuras 8 á 10. (*Pisania*).

EST. En las rocas de diversos puntos de la bahía, en la zona de las mareas. Común.

* 22. **Pollia leucozona** Philippi.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 16, figuras 14 y 15.

EST. Sacada por las redes de la Corvina en diversos arrecifes de piedra y corales. Rara.

* 23. **Fusus pulchellus** Philippi.

Kobelt, *Iconogr. meeres conchyl.* lám. 8, figuras 20 á 25.

EST. Dragado entre las piedras de Santa Catalina, y recogido por los pescadores de la Corvina. Raro.

* 24. **Cyclonassa neritea** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 88, figuras 5, 8 y 9 (*Cyclops*).

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 28, figuras 21 y 22.

EST. Sobre la arena, en la playa de la Puntilla, en la zona de las mareas. Muy común.

* 25. **Cyclonassa pellucida** Risso.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 88, figs. 1 y 2 (*Cyclops*).

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 28, figura 20 (*C. neritea*).

EST. En el mismo sitio que la especie anterior. Rara.

* 26. **Nassa reticulata** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 86, figuras 13 y 14.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 24, figuras 2 y 3.

Var. Jeffreys, *Brit. Conch.*, V, lám. 87, fig. 4. *Nassa nitida*.

Hidalgo, *loc. cit.*, lám. 86, figs. 11 y 12.

Kobelt, *loc. cit.*, lám. 24, figs. 21 y 22.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete, en la zona de las mareas. Muy común.

Se encuentra el tipo de la especie y la variedad de pliegues longitudinales más separados, denominada por Jeffreys *Nassa nitida*. Esta suele ser de coloración más oscura, con una zona transversal clara en la parte superior de la última vuelta.

* 27. **Nassa mutabilis** Linné.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 22, figuras 1, 3 y 4.

EST. Vive á 3 brazas de profundidad, en fondo de arena, en la playa que se extiende al Este de la desembocadura del río Guadalete. Común.

Los ejemplares recogidos son muy semejantes por su mayor tamaño y su coloración á las figuras citadas de la obra de Kobelt.

* 28. **Nassa corniculum** Olivi.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 87, figuras 3, 4, 7 y 8.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres conchyl.* lám. 28, figuras 2, 3 y 6.

EST. En las rocas de *La Pólvora*. Poco abundante.

Los ejemplares hallados son de coloración oscura, gruesos, con la abertura de color morado, unos lisos y otros con pliegues longitudinales. Se incluye por algunos en el género *Amycla*.

* 29. **Nassa incrassata** Ström.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 87, fig. 13.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 26, figura 17.

Var. Reeve, *Conch. icon.*, fig. 183. *Nassa rosacea*.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 87, fig. 16.

Kobelt, loc. cit., lám. 27, figs. 16 y 17.

EST. En las rocas de *La Herradura* y en los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete, en la zona de las mareas. Muy abundante.

Los ejemplares típicos de Cádiz presentan tres zonas oscuras, y la variedad es rosada ó naranjada, con una mancha negruzca en la base y blancos los bordes de la abertura.

Mac Andrew cita la especie con el nombre sinonímico de *Nassa macula*.

* 30. **Nassa Pfeifferi** Philippi.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 87, figs. 1 y 2.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 23, figuras 6, 7 y 8.

EST. En el caño de La Carraca, delante de Puerto Real, en la zona de las mareas. Poco abundante.

Esta especie fué descrita por Philippi, por ejemplares hallados en Cádiz, en su obra *Abbild. Conchylien, Buccinum*, lámina 1, fig. 7. Después se ha encontrado en La Toja (España), Noroeste y Occidente de Africa.

* 31. **Nassa pygmaea** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 88, figs. 16 á 18.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 27, figuras 8 á 10 (*Nassa granulata*) y 18 y 19 (*Nassa varicosa*).

EST. Dragada á tres brazas, sobre fondo de plantas marinas, en el bajo del río San Pedro. Común.

* 32. **Nassa semistrata** Brocchi.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 88, fig. 20.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 23, figuras 22, 23 y 25.

Fischer, *Journ. Conch.* 1863, lám. 2, fig. 6. *Nassa Gallandiana*.

EST. Dragada á 15 brazas de profundidad, sobre fondo de fango y arena, en la entrada de la bahía. Poco abundante.

Los ejemplares son de coloración rojiza ó negruzca, ó blanquecino-amarillentos con tres filas de manchitas leonadas, como en las figuras que cito.

* 33. **Nassa Cuvieri** Payraudeau.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 88, figs. 10 á 15.

EST. Dragada á poca profundidad, en fondo de fango, dentro de la bahía. (Hidalgo).

34. **Nassa limata** Chemnitz.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 25, figuras 10 á 15.

EST. San Fernando (Calderón), según clasificación de Monterosato.

* 35. **Cymbium papillatum** Schumacher.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 4, fig. 5.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 29, figuras 1 y 2.

EST. En fondo de arena, á la profundidad de 10 á 20 brazas, en la entrada de la bahía. Puerto Real (Calderón). Muy común.

En mi obra *Moluscos marinos de España, Cymbium*, páginas 3 y 4, se demuestra que esta especie ha sido considerada por muchos autores como la *Voluta Olla* Linné; pero como no corresponden sus caracteres con las descripciones de este autor, hubo necesidad de adoptar para ella la denominación dada por Schumacher. Otros la citan de Cádiz con el nombre de *Yetus Olla*.

* 36. **Mitra ebenus** Lamarck.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 41, figura 14.

EST. En las rocas de *La Pólvora*, en la zona de las mareas. Rara.

Los individuos recogidos son pequeños, y en ellos es poco visible la zona amarillenta de la parte superior de la última vuelta de espira.

37. Erato lævis Donovan.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 19, fig. 27.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 18, figs. 4 y 5.

EST. En la playa (Maxwell Smith).

38. Marginella miliaria Linné.

Kiener, *Species, Marginella*, lám. 6, fig. 26.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 44, figuras 8 y 9.

HAB. Cádiz, según Redfield.

* **39. Marginella cæolata** Monterosato.

Monterosato, *Journ. Conch.*, 1877, lám. 2, fig. 3.

Kobelt, *Iconographia europ. meeresconchyl.* lám. 44, figuras 14 y 15.

EST. Hallados algunos ejemplares vivos adheridos á las redes que se colocan en los arrecifes de piedra de la almadra de Rota para la pesca de la Corvina.

Los pocos individuos recogidos vivos, son muy brillantes y tienen bien conservada la coloración; uno es pálido con zonas amarillentas y los otros son castaños con la base blanquecina y una zona de este mismo color alrededor de la sutura.

40. Marginella Philippii Monterosato.

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 15, fig. 43.

Kobelt, *Iconographia europ. meeresconchyl.* lám. 44, figuras 10 y 11.

Hab. Cádiz. (Maxwell Smith).

* **41. Columbella rustica** Linné.

Kiener, *Species, Columbella*, lám. 2, fig. 1.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres conchyl.* lám. 37, figura 6.

EST. En las rocas de diversos puntos de la bahía, en la zona de las mareas. Muy común.

42. *Mitrella scripta* Linné.

Kiener, *Spec. Buccinum*, lám. 16, fig. 56.

EST. A 58 brazas de profundidad (Locard).

* **43. *Mitrella minor* Scacchi.**

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres conchyl.* lám. 42, figuras 1 á 3.

Scacchi, *Catal. conchyl.* fig. 11. *Columbella minor*.

EST. Vive á 4 brazas de profundidad en los bajos del río San Pedro, en fondo de plantas marinas.

Los ejemplares son de color leonado ó castaño obscuro.

* **44. *Mitrella Hidalgoi* Monterosato.**

Monterosato, *Journ. Conch.* vol. 37, pág. 116.

Locard, *Exped. Travailleur, Moll.* lám. 14, figuras 14 á 16.

Pallary, *Journ. Conch.* 1902, lám. 1, figs. 5 á 7.

EST. En las piedras, sobre las plantas marinas (Hidalgo).

Sólo hallé unos pocos ejemplares, de los cuales dí algunos á Monterosato, el cual los publicó como especie nueva. Pallary ha encontrado esta especie en abundancia, en la bahía de Tánger.

* **45. *Conus mediterraneus* Hwass.**

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 4, figs. 1 y 2.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeres conchyl.* lám. 100, figuras 7 8.

EST. En las rocas del sitio denominado *La Herradura*. También en Puerto Real (Calderón). Poco abundante. ♀

* 46. **Bela septangularis** Montagu.

Kiener, *Species, Pleurotoma*, lám. 26, fig. 3.

Sowerby, *Index Brit. shells*, lám. 19, fig. 24.

EST. Dragada á 4 brazas en la desembocadura del río San Pedró. Rara.

* 47. **Lachesis minima** Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 108, figs. 1 y 2.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 18, fig. 6.

EST. En las plantas marinas, en diversos puntos de la bahía.

* 48. **Surcula undatiruga** Bivona.

Kiener, *Species*, lám. 9, fig. 2. *Pleurotoma corrugata*.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 85, figura 1. (*Clavatula*).

EST. Sacados bastantes ejemplares sin el animal, pero en buen estado de conservación, del sitio denominado *El Limpio*, á 16 brazas de profundidad.

* 49. **Surcula balteata** Beck.

Kiener, *Species, Pleurotoma*, lám. 13, fig. 2.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 85, figuras 2 á 5. *Clavatula undatiruga*.

EST. Encontrada á 60 brazas de profundidad (Locard). Tengo en mi colección un ejemplar dragado en Málaga. Varios autores consideran estas dos *Surcula* como variedades de una misma especie.

* 50. **Mangelia Vauquelini** Payraudeau.

Payraudeau, *Moll. Corse*, lám. 7, figs. 14 y 15.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 93, figuras 12 y 13.

EST. Dragada á 16 brazas de profundidad. Rara.

* 51. **Mangelia rugulosa** Philippi.

Philippi, *Enum. Moll. Sicil.*, lám. 26, fig. 8.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 93, figura 14.

EST. En unión de la anterior. Algo más común.

* 52. **Mangelia albida** Deshayes.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 94, figuras 1 y 2.

EST. Dragada á 4 brazas en la desembocadura del río San Pedro. Poco abundante.

* 53. **Clathurella reticulata** Renier.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 95, figuras 13 y 14.

EST. En las rocas de *La Pólvara*, en la zona de las mareas. Rara. A 30 brazas (Mac Andrew).

54. **Clathurella linearis** Montagu.

Kiener, *Species, Pleurotoma*, lám. 25, fig. 4.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 96, figuras 13 á 15.

Hab. Cádiz (Maxvell Smith).

* 55. **Halia Priamus** Meuschen.

Swainson, *Exotic Conch.* lám. 23. *Achatina maculata*.

Reeve, *Conch. icon. Halia*, lám. 1.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 4, figs. 4 y 5.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 30, figuras 1 á 5.

EST. En el pesquero llamado *Duro de fuera*, de 50 á 60 brazas de profundidad, en fondo de fango. Poco abun-

dante y muy rara, en buen estado de conservación, pues casi siempre sale roto el borde derecho de la abertura.

Considerada en un principio esta especie como terrestre (*Helix Priamus*, *Achatina maculata*, etc.), Beck indicó después que era marina operculada, y Fischer dijo, por último, que era marina, pero sin opérculo, en vista del estudio del animal. Martyn la citó el primero de España, y esta es la localidad exacta, pues Reeve menciona un ejemplar encontrado en la bahía de Vigo, y ahora no hay duda alguna de que vive en la costa de Cádiz, de donde la cité el primero en 1867 (*Catalogue des moll. marins de l'Espagne*) y donde la ha recogido con el animal hace poco el Sr. Gavala, en el sitio antes mencionado. Es muy probable que exista también cerca de la costa de Africa, porque varios ejemplares que trajo á Madrid hace cuarenta años mi amigo Paz y Membiela (distribuidos entre su colección, la de M. Crosse y la mía) habían sido dragados por vapores pesqueros de Cádiz, que se alejaban bastante de este puerto, hacia el litoral africano. El ejemplar cuya anatomía estudió Fischer procedía de la costa de España, puesto que le fué remitido por Elizalde, el cual residía en Cádiz y tenía colección de moluscos.

Algún individuo es de coloración uniforme, sin las series de pequeñas manchas que presentan casi todos los ejemplares. El de mayor tamaño que posee el Sr. Gavala tiene nueve centímetros de longitud. Todas las figuras citadas representan muy bien esta interesante especie.

56. *Cancellaria cancellata* Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 11, figs. 3 y 4.
Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 79
figuras 1 y 2.

Hab. Cádiz (Kiener).

He hallado esta especie con bastante frecuencia en Mála-

ga, con el animal, entre la multitud de *Venus Gallina* que venden en el mercado.

* 57. **Chenopus pes pelicani** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 2, figs. 4 y 5.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 101, figuras 10 y 11, y lám. 103, figs. 1 y 2.

EST. A 50 brazas de profundidad, frente á Chipiona, en fondo de fango. Raro.

* 58. **Chenopus Serresianus** Michaud.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 2, figs. 2 y 3.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 104, figuras 1 y 2.

EST. En el mismo sitio y condiciones que el anterior.

* 59. **Cypræa achatidea** Gray.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 10, figs. 8 y 9.

Cypræa Physis.

Kiener, *Species*, lám. 26, fig. 3. *Cypræa Grayi*.

Crosse, *Journ. Conchyl.*, 1896, lám. 7, fig. 6.

Hidalgo, *Mon. genero Cypræa*, pág. 243.

EST. En las pesqueras denominadas *El Limpio* y *La Cabballa*, constituidas por llanuras de arena, entre arrecifes de corales, de 16 á 40 brazas de profundidad. Rara.

El Sr. Gavala ha llegado á reunir 14 ó 16 ejemplares vivos de esta bonita especie, de los cuales tres están en mi colección. El mayor tiene 42 milímetros de longitud, y casi todos ellos presentan dos zonas transversales oscuras y las pequeñas manchas de color, que unas veces son muy numerosas y casi cubren el dorso, y otras en menor número y más separadas entre sí. En un ejemplar apenas se distinguen las dos zonas transversales, y las manchas son pequeñas y están espaciadas, como se ve en la figura 10 de la lámina 108 de la *Iconographia* de Kobelt.

60. *Cypræa lurida* Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 10, figs. 5 á 7.

Hidalgo, *Monogr. género Cypræa*, pag. 402.

Hab. Cádiz (Weinkauff).

¿Vive efectivamente en Cádiz esta especie? El Sr. Gavala no la encontró aun, como tampoco la *Cypræa spurca*, y sin embargo, ha recogido ejemplares con el animal de las otras dos *Cypræa*, la *Pyrum* y la *achatidea*.

* 61. *Cypræa Pyrum* Gmelin.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 10, figs. 1 á 4 y lám. 11 a, fig. 1.

Hidalgo, *Monogr. género Cypræa*, pág. 490.

EST. Entre las rocas de diversos puntos de la bahía, en la zona que sólo queda al descubierto en las grandes mareas. Común.

Hace muchos años encontré yo mismo en Cádiz los ejemplares figurados en mi obra y posteriormente ha recogido esta especie en más abundancia el Sr. Gavala, sobre todo, después de una violenta tempestad que arrojó muchos individuos vivos entre las piedras. Pero fué tal el rozamiento con éstas por causa del oleaje, que el dorso de la concha quedó algo deteriorado y sin el brillo propio de la especie.

Los individuos de Cádiz son más pequeños que los de diversas localidades del Mediterráneo, presentando los ejemplares incompletos lívido el dorso con 3 á 5 zonas transversales blanquecinas, de las cuales sólo quedan perceptibles las dos centrales ó ninguna, á medida que se hacen más adultos, por el gran número de pequeñas manchas leonadas que llegan á cubrir toda la superficie.

* 62. *Trivia arctica* Pulteney.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 11, figs. 5 y 6 y lám. 11. a., fig. 3. *Trivia europæa*.

Hidalgo, *Monogr. género Cypræa*; pág. 263.

EST. Arrojada por el mar á la playa de Santa Catalina, pero en buen estado de conservación y á veces con el animal. Abundante.

Se encuentran las dos variedades, la de manchas oscuras dorsales y la que carece de ellas.

* 63. *Ovula Spelta* Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 20 c.; figs. 4 y 5.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 107, figuras 14 y 15. *Amphiperas spelta*.

EST. Sacada por las redes de la Corvina de diversos arrecifes de piedra y corales. Rara.

Varía el color de los ejemplares, pues los hay blancos ó ligeramente rosados y también un poco amarillentos.

* 64. *Dolium Galea* Linné.

Reeve, *Conch. icon. Dolium*, fig. 1.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 50.

EST. Sacado por las redes del bou de 40 á 50 brazas de profundidad, de fondo de fango, frente á Chipiona. Abundante.

Ejemplares de gran tamaño, mucho mayores que las figuras citadas.

* 65. *Cassis undulata* Gmelin.

Kiener, *Species*, lám. 12, fig. 22. *Cassis sulcosa*.

Reeve, *Conch. icon.*, fig. 30. *Cassis sulcosa*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 3, fig. 1.

EST. Sacados algunos ejemplares por las redes de los pescadores en el pesquero denominado *El Limpio*, de 16 á 30 brazas de profundidad.

En mi obra *Moluscos marinos de España*, *Cassis*, páginas 4 á 6, puede ver el lector las razones por las cuales ad-

mitimos de preferencia el nombre de *Cassis undulata* Gmelin al de *Cassis sulcosa* Bruguiere.

* 66. **Cassis Saburon** Adanson.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 3, figs. 2 y 3.

Reeve, *Conch. icon. Cassis*, fig. 11.

Kiener, *Cassis*, lám. 14, fig. 27.

Dautzenberg, *Moll. Rousillón*, lám. 7, figs. 1 y 2.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 45, figura 2.

EST. Vive en fondo de fango, frente a la entrada de la bahía, a la profundidad de 20 a 30 brazas. Co.nún.

El tipo figurado en la obra de Adanson presenta series transversales de manchas cuadriláteras, las que a veces tienden a unirse bajo el aspecto de zonas en la misma dirección (figura de Reeve), ó en sentido longitudinal, como se observa en alguno de los individuos recogidos. Otros ejemplares son de color ferruginoso uniforme y generalmente más gruesos; estos podrían considerarse como individuos muy adultos, si no se hallaran otros muy pequeños y delgados que presentan la misma coloración.

67. **Cassidaria echinophora** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 1, figs. 2 y 3.

Hab. Cádiz (Maxvell Smith), con el nombre de *Morio echinophora*.

* 68. **Cassidaria rugosa** Linné.

Chemnitz, *Conchylien Cab.*, 1.^a edic., lám. 153, figuras 1.461 y 1.462. *Buccinum tyrrhenum*.

Reeve, *Conch. icon.*, fig. 1. *Cassidaria tyrrhena*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 1, fig. 1.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 48, figura 1. *Cassidaria tyrrhena*.

EST. Vive frente á Chipiona, en fondo de fango, de donde es sacada por las redes del *bou* á una profundidad de 60 brazas. Bastante abundante.

En mi obra *Moluscos marinos de España, Cassidaria*, páginas 7 y 8, está perfectamente demostrado que esta especie debe llevar el nombre de *rugosa* Linné (*Mantissa plantarum*, pág. 549), y no el de *tyrrhena* Chemnitz, como ya lo indicó primeramente Dillwyn y confirmó después Hanley al ver que el ejemplar existente en la colección de Linné convenía del todo con la descripción original de este autor.

Algunos ejemplares de Cádiz llegan á tener un decímetro de longitud, y los hay con pequeños nudos en el sexto cordón transversal (á contar desde la sutura), como indica Linné en su descripción, ó en el quinto y sexto á la vez, ó en el cuarto, quinto y sexto. Dichos ejemplares constituyen el tipo de la especie, y una variedad los que no presentan nudosidad alguna en los cordones transversales (figura de Hidalgo).

Coloración de la concha variable, blanco-amarillenta, ocrácea ó ferruginosa, según los individuos.

* 69. **Natica hebræa** Martyn.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 20, B., fig. 1.
Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 52,
figuras 1 á 8.

EST. Vive en fondo de arena, á 20 brazas de profundidad, en el sitio denominado *El Limpio*. Rara.

* 70. **Natica fusca** Blainville.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 20, figs. 1 y 2.
Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 54,
figuras 1 á 4.

EST. Vive en el sitio denominado *Duro de fuera*, á más de 50 brazas de profundidad. Recogido un solo ejemplar vivo.

* 71. **Natica catena** Da Costa.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 20. A, figs. 3 y 4. *Natica monilifera*.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 54, figura 7 y lám. 55, fig. 4.

EST. Dragada á 4 y 6 brazas de profundidad en fondo de arena y fango, delante del río San Pedro. Común.

* 72. **Natica intricatoides** Hidalgo.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 20 B, figs. 12 y 13 y lám. 20. C., figs. 10 y 11.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 51, figuras 12 á 15.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete, en fondo de fango y plantas marinas. Algo abundante.

Esta especie es variable en su coloración y ha sido mencionada después por algunos autores con los nombres de *Natica vittata* Gmelin y *Natica textilis* Reeve, aun cuando la figura de Chemnitz citada por Gmelin y la de la *Coch. iconica* de Reeve no se parecen al tipo descrito y figurado en mi obra *Moluscos marinos de España*, lám. 20 B., figs. 12 y 13. Este presenta, en los individuos bien caracterizados, una redcilla de líneas leonadas muy finas que circunscriben orificios muy pequeños, cuatro zonas estrechas transversales articuladas de blanco y leonado, y una faja obscura que rodea la entrada del ombligo. Después se han encontrado en Málaga y Cádiz algunos ejemplares de color castaño casi uniforme (lám. 20 C., figs. 10 y 11), otros con una zona transversal obscura, ancha ó estrecha, en el medio de la última vuelta (Kobelt, figs. 12 y 15), alguno con la zona transversal y otra articulada de blanco en la sutura y finalmente varios que se parecen al tipo vistos por el dorso y á la variedad de zona central, vistos del lado de la abertura. Son de diverso tamaño los individuos adultos de esta especie; los mayores tienen 22 milímetros en su diámetro mayor y 20 de alto.

* 73. **Natica intricata** Donovan.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 20. A., fig. 10.

EST. En el bajo del río San Pedro. Encontrado un solo ejemplar y pequeño.

* 74. **Natica glaucina** Linné.

Hidalgo, *Moluscos marinos España*, lám. 20., figuras 8 y 9.

EST. En el sitio denominado *El Limpio*, de 18 á 30 brazas de profundidad. Rara.

Esta especie es la descrita por Linné en su *Fauna suecica* y la que debe llevar el nombre de *glaucina*, según el estudio hecho por Recluz. Forbes la dió el nombre de *Natica Alderi*, con el cual figura en las obras inglesas.

* 75. **Natica Sagraiana** Orbigny.

Orbigny, *Moluscos de Cuba*, lám. 17, figs. 20 y 21.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 20. A. figuras 4 á 7.

EST. A 58 brazas de profundidad (Locard). Cádiz (Petit).

Esta *Natica* fué publicada por Orbigny en el año 1845; en Octubre del mismo año por Philippi, con el nombre de *filosa*, y este último nombre fué empleado por Reeve en 1855, para designar otra especie diferente. Tiene al parecer prioridad el nombre de Orbigny sobre el de Philippi, y sin duda alguna, sobre el de *flamulata* empleado después por Recluz en 1848. La figura original de Orbigny es mejor que la original de Philippi. En Málaga es más abundante esta especie en unión de la *Cancellaria cancellata*.

Probablemente es errónea la localidad *Cuba* dada por Orbigny.

76. **Sigaretus Philippii** Weinkauff.

Tryon, *Man. Conch.*, VIII. lám. 24, figuras 66 á 68.
Hab. Cádiz (Maxwell Smith).

77. Marsenia stomatella Risso.

Risso, *Hist. nat. Europe merid.* IV, lám. 10, figura 152 (*Sigaretus*).

Hab. Cádiz (Rang) según Bergh.

* **78. Caliptræa Chinensis** Linné.

Tryon, *Man. Conch.*, VIII, lám. 34, figs. 56 y 57.

EST. Dragada en fondo de arena y fango, á 20 brazas de profundidad, en la entrada de la bahía. Poco abundante.

* **79. Capulus Hungaricus** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 41, figs. 2 á 4.

Tryon, *Man. Conch.*, VIII, lám. 39, figs. 72 y 73.

EST. Vive en fondo de arena, á 20 brazas de profundidad, en el sitio denominado *El Limpio*.

Interior de la concha, blanco ó de un rosa vivo.

80. Vermetus triqueter Bivona.

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 9, fig. 21.

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 30, figs. 1 á 6.

HAB. Cádiz (Monterosato).

* **81. Turritella triplicata** Brocchi.

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 28, fig. 3.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 89, figs. 1 á 3.

Turritella communis.

EST. Dragada en fondo de arena y fango, á 20 brazas de profundidad, en la entrada de la bahía. Poco abundante. A 60 brazas (Locard).

Ha sido citada también de Cádiz con los nombres de *Turritella Monterosatoi* Kobelt, *Turritella Britannica* Montagu y *Turritella tricostalis* Mac Andrew. Es variable esta *Turritella* en su tamaño y en su escultura, pues unas veces presenta los tres cordones transversales casi iguales, ó dos más salientes y uno pequeño cerca de la sutura, ó dos bien mar-

cados en las vueltas y un grupo de tres muy finos cerca de la sutura, lo cual ha conducido á algunos autores á considerar estas variaciones como distintas especies.

* **82** *Turritella communis* Risso.

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 28, figs. 6 y 7.

Tryon, *Man. Conch.*, VIII, lám. 60, fig. 46.

EST. Dragada en fondo de arena y fango, á 20 brazas de profundidad, en la entrada de la bahía. Muy común.

Mac Andrew la cita con el nombre de *Turritella terebra*.

* **83** *Mesalia varia* Kiener.

Kiener, *Species, Turritella*, lám. 2, fig. 3.

Tryon, *Man. Conch.*, VIII, lám. 65, fig. 30.

EST. Dragada á 15 brazas de profundidad en fondo de fango y arena, en la entrada de la bahía. Poco abundante.

84 *Cœcum trachea* Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 69, fig. 4.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 15, fig. 6.

EST. En la arena (Folin).

(Continuará.)

XLV. — Sismógrafo analizador.

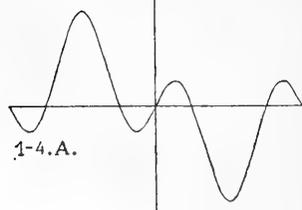
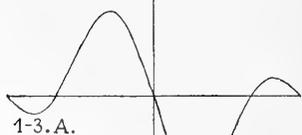
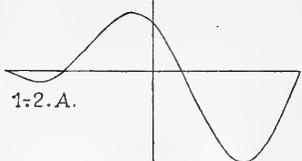
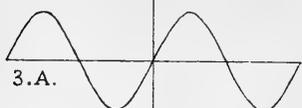
POR EDUARDO MIER Y MIURA

(Conclusión.)

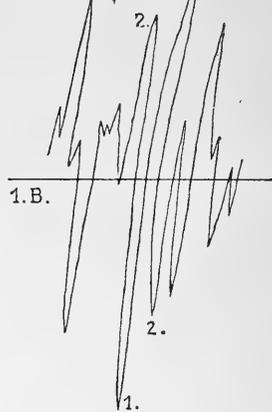
Sin embargo, dentro de esa obscuridad, y no dando á la ley sinusoidal del movimiento terrestre más que un valor provisional, no se negará que lo expuesto basta para hacer ver que, en general, los sismogramas no serán sinusoides, y que puede dar alguna luz sobre estos últimos el combinar curvas de esa especie, en diversidad de condiciones, ya que los trazados sismográficos deben estar compuestos de diversas partes, que resultarán de la combinación de trozos de sinusoides, debidos á los movimientos pendulares, con otras partes de curvas, también sinusoidales verosíblemente, ó de forma análoga, producidas por los movimientos terrestres.

En tal concepto se han agrupado, en las figuras que constituyen las láminas que se incluyen á continuación, combinaciones de sinusoides en circunstancias diversas, que acaso puedan contribuir á formar juicio acerca de muchas de las irregularidades observadas en las curvas sismográficas, en cuya total composición intervendrán, para cada terremoto, varias de las combinaciones examinadas y de otras análogas que hayan dejado de considerarse.

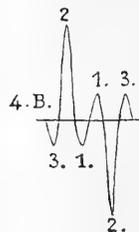
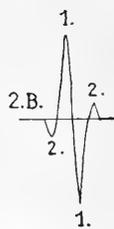
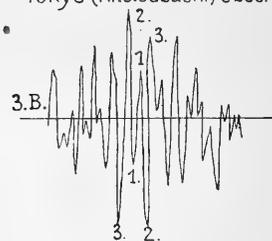
En el grupo de curvas *A* se ha combinado la senoide 1 con las 2, 3 y 4, de la misma amplitud todas ellas; pero de períodos menores, y decrecientes de una á otra, las tres últimas. Las curvas resultantes pierden la apariencia sinusoidal y tienen semiperíodos de oscilación de duraciones distintas. Se puede observar en las combinaciones 1 — 3 *A* y 1 — 4 *A*



Kyoto Observation
E.W. Component



ToKyo (Hitotsubashi) Observation



la simetría de las curvas con relación al punto que determina en el eje de los tiempos la línea trazada en la figura, que pasa por los puntos de ordenada nula de las sinusoides generatrices. Simetrías de ese género se repiten en los sismogramas, y para hacer resaltar este hecho se han dibujado las curvas $2B$ y $4B$, de las mismas amplitudes que las $1-3A$ y $1-4A$; pero, suponiendo los tiempos representados con dimensiones mucho menores, y se han copiado, en $1B$ y $3B$ de la lámina $2a$, de *Seismogramme des Japanischen Erdbebens am 21. Januar 1906, von Siegmund Szirtes*, trozos de los sismogramas, correspondientes á los observatorios que en nuestra figura se señalan, cuya analogía con las curvas $2B$ y $4B$ es evidente, como puede comprobarse siguiendo los pares de números 1, 2 y 3, puestos en el dibujo en $1B$ y $2B$ y en $3B$ y $4B$.

En general, debiera haberse hecho análogas reducciones de las dimensiones de los tiempos en los dibujos que siguen, para poner más en armonía las curvas resultantes con los sismogramas usuales; pero semejante trabajo hubiera alargado considerablemente el número de dibujos, y si para evitar estas reducciones se hubiesen empleado desde luego sinusoides generadoras, en las que los tiempos estuvieran representados por longitudes muy pequeñas, se caía en el peligro de obtener figuras poco claras.

Debe notarse también, en esas curvas resultantes del grupo A , que las máximas y mínimas ordenadas no valen lo mismo que en las generatrices; que el número de semi-oscilaciones nunca es el de la 1, sino el de la otra senoide con la que se combina, así, por ejemplo, $1-2A$ tiene 3 como $2A$ y, finalmente, que las duraciones de las semioscilaciones son variables y las de los períodos totales, distintas de las que corresponden á las dos sinusoides generadoras, como sucede en la $1-2A$, ó bien de una de ellas, como pasa con $1-3A$ y $1-4A$, respecto de la 1.

El grupo C está formado por sinusoides iguales, pero con

desiguales retrasos de fases: desde la 2, que está en concordancia con 1 hasta la 5, cuya fase está retrasada medio período con relación á la 1.

De ese modo, se obtienen amplitudes variables desde O , que corresponde á la recta $1 - 2 C$ hasta la amplitud duplicada que aparece en $1 - 5 C$ y duraciones de períodos que coinciden con las dos originarias, que son iguales entre sí; pero, en las $1 - 3 C$ y $1 - 4 C$ las fases de las resultantes no están de acuerdo con las de ninguna de las dos componentes.

Se ha querido hacer resaltar la influencia de la amplitud de las oscilaciones en el grupo D y para ello se ha combinado la senoide 1 con las 2, 3 7, todas estas últimas de igual período y de la misma fase; pero, de amplitudes crecientes.

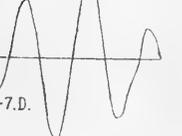
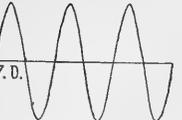
En la $1 - 2 D$ se observa que las semioscilaciones son de distinta amplitud que las originarias, á más de ser diferentes entre sí; que las duraciones de las semioscilaciones están en el mismo caso y que el número de períodos de la resultante igual al de 1 es muy inferior al de 2.

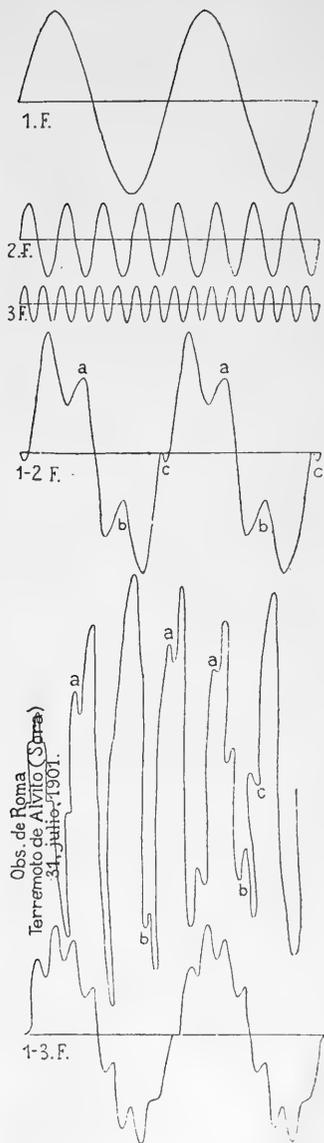
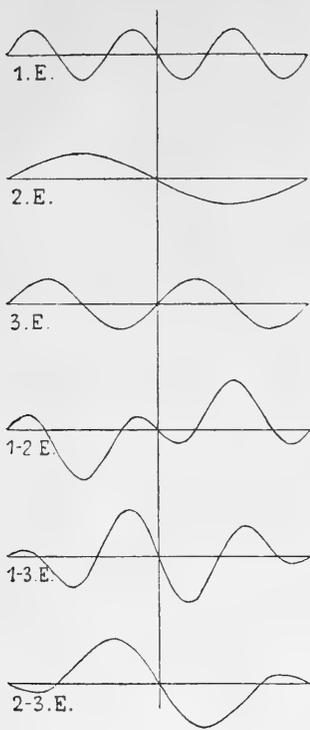
Se acentúan esas diferencias y aparecen deformaciones en las siguientes resultantes, en las que puede irse viendo el progresivo aumento de períodos.

Las sinusoides $1 E$, $2 E$, $3 E$, de las mismas amplitudes; pero de períodos muy distintos, hacen ver, por sus combinaciones, cómo influyen estos últimos, variando la duración de las semioscilaciones, sus amplitudes y hasta el número de los períodos resultantes. Si $2 E$, por ejemplo, representase la oscilación sísmica y $1 E$ la pendular, sería contrario á la verdad suponer que la duración del período terrestre fuera alguna de las dadas por $1 - 2 E$.

La recta trazada en esta figura del grupo E , cortando las sinusoides, sirve para hacer resaltar otra vez la simetría con que aparecen los resultados finales respecto de los puntos en que corta á los ejes de los tiempos.

Las combinaciones del grupo F entre sinusoides de am-





Obs. de Roma
 Terremoto de Avico (Spre)
 31. Julio 1901.

plitudes y períodos muy distintos, á un tiempo mismo, dan resultados cuyas discordancias con las sinusoides generadoras, sobre todo con las $2 F$ y $3 F$, no hace falta especificar.

Se indicará, sin embargo, que serían enormes los errores que se cometieran al querer igualar los períodos y amplitudes de esas resultantes con las de las sinusoides generatrices.

Entre las curvas $1 - 2 F$ y $1 - 3 F$ se ha copiado, de la conocida obra de Agamennone, *La Registrazione dei Terremoti*, el primer trozo del sismograma que publica en una lámina, obtenido en Roma, con el sismométrgrafo Canconi, de registro veloz y continuo y correspondiente al terremoto de Alvito (Sora), del 31 de Julio de 1901. Es evidente la analogía que ofrecen las irregularidades que aparecen en ese sismograma con las que se notan en la curva $1 - 2 F$, señaladas con las letras *a*, *b* y *c*.

Para hacer más patentes las anomalías que pueden ofrecer las curvas resultantes de movimientos parcialmente sinusoidales, que han de acercarse aun más á la realidad, sin alcanzarla del todo, que los antes supuestos, se han efectuado las combinaciones que se insertan correspondientes á los grupos *G*, *H* é *I*.

En el primero de ellos puede observarse cuán grande es la irregularidad de la resultante, formada por la combinación de ramas de las sinusoides de $1 G$, con la curva $2 G$, que representa próximamente el trazado de un movimiento que, por rozamientos ú otras causas, va amortiguándose.

El grupo *H* indica, por lo contrario, los efectos de súbitos aumentos y disminuciones de amplitudes dentro de cada movimiento componente, muy parecidos á los que se observan en muchos sismogramas, y parecidos resultados se obtienen en el grupo *I*, cuya combinación $1 - 2 I$ presenta, en sus diversas ramas, múltiples entrantes, muy análogos á los observados en los sismogramas.

Se presta el atento examen de esos dibujos á importantes deducciones acerca de cuando convendrá emplear péndulos

de largo y corto período, como también aconseja ir con pies de plomo al tratar de medir en un sismograma los períodos aparentes de oscilación, y al establecer consecuencias respecto de las amplitudes de las oscilaciones terrestres, como consecuencia de las obtenidas en los sismógrafos; pero, parece cuerdo dejar todo ello para cuando se haya efectuado un estudio más completo y detallado de estos asuntos, por medio de las disposiciones que se proponen en este trabajo ó de otras análogas.

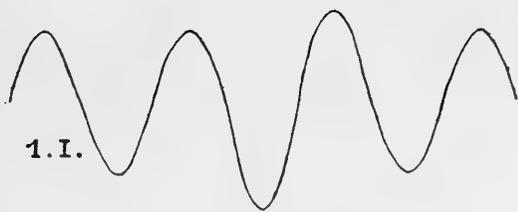
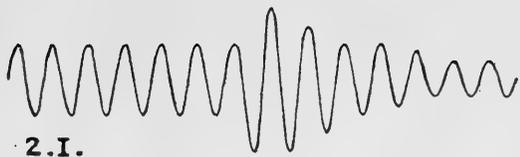
Por esto mismo se ha creído conveniente omitir el estudio analítico. que pudiera hacerse fácilmente, de la combinación de dos movimientos sinusoidales, estableciendo las condiciones de máximos y mínimos, etc., etc.

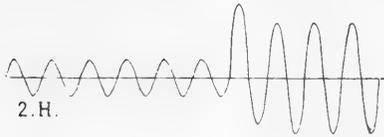
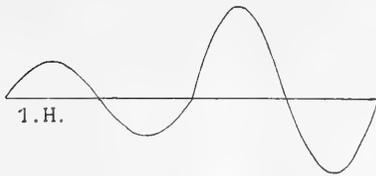
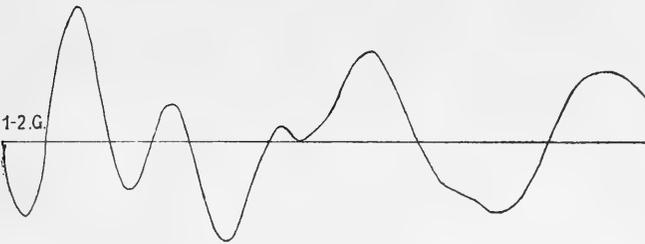
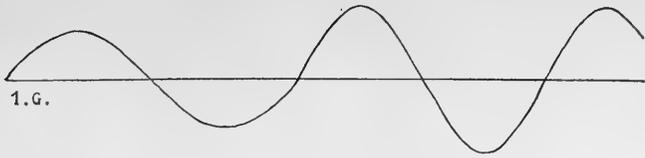
Todas las combinaciones precedentes, con ser muchas y suponer un gasto no escaso de paciencia el obtenerlas, sólo pueden dar idea aproximada de las que en realidad han de verificarse, ya que, en general, tanto y tan rápidamente han de variar los períodos del movimiento terrestre y las amplitudes de las oscilaciones de este último y de los péndulos.

De idearse un instrumento que automáticamente inscribiera las curvas resultantes de moverse los péndulos, á impulsos de oscilaciones sinusoidales conocidas de sus puntos de apoyo, se habría dado un gran paso, sin duda, en el estudio práctico de los sismogramas, á cuyo esclarecimiento contribuiría poderosamente el extenso y variado album de trazados automáticos rápida y fácilmente obtenidos.

Sin embargo, no parece fácil, á primera vista al menos, idear un aparato que ha de estar sujeto á tan complejas condiciones para ser bueno.

El tal aparato debe ser, en lo posible, sencillo, porque las complicaciones instrumentales se traducen generalmente en defectos de funcionamiento. No ha de ser tampoco caro; condición que se halla de acuerdo con la anterior, ya que las complicaciones suelen acarrear aumentos de coste; pero, aparte de estas y otras condiciones, tales como el manejo





sencillo, fácil construcción etc., etc., que por ser de índole general en los aparatos, aunque no siempre muy atendidas, no merecen ser mencionadas con encarecimiento en este particular caso, hay otras exigencias con las que el aparato ideado ha de cumplir que proceden de su especial destino.

Será preciso, en efecto, que el péndulo ó los péndulos empleados puedan cambiar fácilmente de longitud; dificultad que ya está resuelta en los que antes se describieron.

Conveniente será también eliminar cuanto se pueda las causas de rozamiento al jugar los péndulos.

La disposición adoptada, en la solución antes propuesta, para suspender los péndulos y el registro fotográfico parece que garantizan la pequeñez del trabajo gastado en vencer resistencias pasivas, ya que la poca velocidad de los movimientos pendulares permite prescindir de la acción del aire y que si así no se juzgare todo se reduciría á disponer los péndulos dentro de una cámara, con cristales que permitieran la reflexión de la luz, en la que se hubiera enrarecido el aire.

Para hacer comparables los resultados de los dos péndulos descriptos, como próximamente el más corto describe ángulos que están con los señalados simultáneamente por el otro, en muchos casos, en la relación, ya expresada, de $\frac{L}{l}$, en esta misma se hallarán los espacios recorridos por las superficies que rueden sobre sí ó se rozen, según el sistema de suspensión adoptado y siempre convendrá que los pesos de los péndulos se hallan en la relación inversa $\frac{l}{L}$, para compensar con el mayor valor de la fuerza de presión, debida al peso del péndulo más largo, el camino recorrido, para él más corto, que multiplicado por la fuerza ha de suministrar el trabajo de rozamiento, siempre sustractivo.

El aparato ha de cumplir, además, con la condición de poder variar no sólo fácil, sino rápidamente también, los períodos

de las sinusoides que agiten la suspensión de los péndulos.

Además, habrá de poder modificarse la amplitud de esas sinusoides, dentro de límites bastante amplios, y deberá saberse, para cada trazado, cuál es el valor de esa amplitud y cuál es el del período de la oscilación del eje de los péndulos.

Parece que la solución que se describirá á continuación cumple con las exigencias antes expuestas.

A (fig. 6.^a), es un disco metálico, macizo, cuyo borde tiene la forma sinusoidal, haciendo que los radios crezcan y disminuyan con arreglo á los valores de las ordenadas de una senoide.

Contra el borde de ese disco se apoya el extremo de una barra, *BB*, guiada por el collar *C* y el cilindro *D*, en cuyo interior juega el extremo ensanchado de esa pieza, contra el cual obra un resorte de presión, graduable por medio del tornillo *E*.

De este modo, al girar el disco *A*, la pieza *B*, *B*, oprímida constantemente contra él por el resorte del cilindro *D*, tendrá un movimiento rectilíneo, alternativo y sinusoidal.

A lo largo de dos resbaladeras *R*, *R*, puede correr la parte *GG*, en la que se halla, como luego se verá, el eje de giro de la barra *FF*, que por uno de sus extremos queda unida á la *BB*, mediante un eje que esta última lleva y que entra en una escotadura longitudinal de poca longitud de la barra *FF*, para consentir los pequeños cambios de longitud que entre el eje de giro *FF* y el de apoyo del eje de *B*, han de verificarse necesariamente, al moverse la barra *FF*, con movimiento circular alternativo, arrastrada por el rectilíneo sinusoidal que la *BB* ha de adquirir.

De un modo análogo, por medio de una escotadura y un eje, con un botón para unir ambas piezas, se enlaza la barra *FF* con la *HH*, guiada por el collar *L* y solidaria de la pieza *II*, también guiada por uno ó más collares, y sobre la cual actúa el resorte *M*, contenido en un cilindro, y regulado por

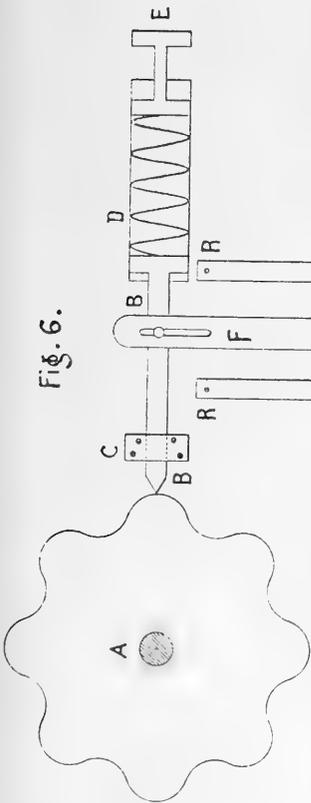


Fig. 6.

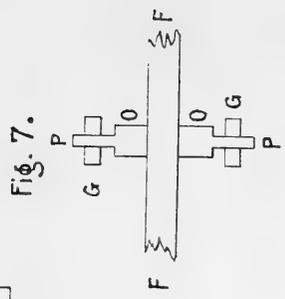


Fig. 7.

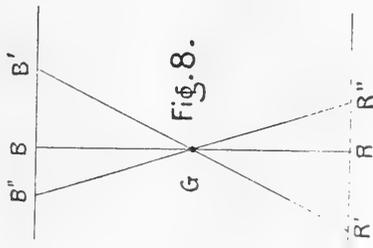
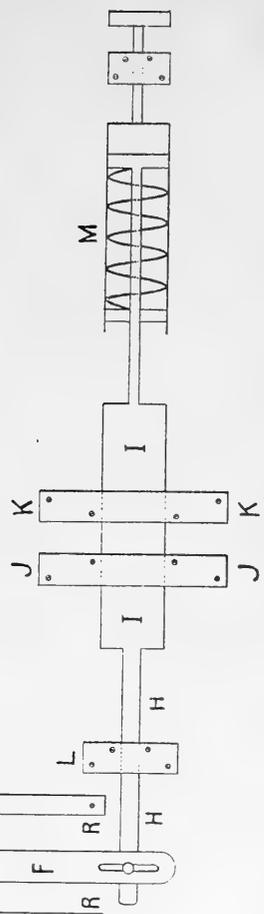


Fig. 8.



el tornillo N , con objeto de graduar el empuje producido de izquierda á derecha, que ha de sumar su acción á la que el D produce.

Tanto el disco A , como las piezas B , F , H é I , se hallan en un plano horizontal elevado, para que debajo de la pieza II , y formando cuerpo con ella, estén los ejes de giro de los péndulos de registro fotográfico, iguales ó análogos á los que se describieron antes.

El eje de giro de la barra FF se describe en la figura 7, en la que puede verse el collar OO , que puede resbalar á lo largo de la pieza FF y quedar sujeto en cualquier punto de ella mediante un tornillo de presión, que no se ha creído indispensable representar en la figura; puede verse también el eje de giro PP , que forma cuerpo con ese collar OO y el otro collar GG , en el que juega ese eje, y que resbalará á lo largo de RR cuando se desee, sujetándole á esas dos piezas por medio de tornillos de presión.

Al disco A se le puede hacer girar por medios puramente mecánicos (resortes, pesos) ó por la acción de un motorcillo eléctrico, y sea cualquiera el sistema que se adopte para conseguir esa rotación, desde luego se ve que podrá variarse fácil y rápidamente la velocidad y, por lo tanto, la duración de los períodos de las sinusoides descritas por las barras BB é II .

Además, según sea el punto en que se coloque el collar GG , podrá variarse, dentro de límites muy apartados entre sí, la relación entre la amplitud de las oscilaciones de la barra BB , iguales á las del borde sinusoidal de A y la que adquirirá la pieza II y, en su consecuencia, los ejes de suspensión de los péndulos.

Si en el aparato precedentemente descrito se representa por:

- v el número de vueltas, por minuto, del disco A ,
- s la longitud que sobre el borde del disco ocupa cada senoide,

- n* el número de esas sinusoides completas,
a' la semiamplitud de las sinusoides de *A*,
a la semiamplitud de las descriptas por la pieza *II*.
T el período completo de las oscilaciones,
b la longitud del brazo de palanca *GB*,
r la longitud del brazo de palanca *QR*,

se tendrá, según puede verse en la figura 8, que es un esquema de parte de la 6, que constantemente, puesto que *Q* permanece inmóvil y los puntos *B*, *B'*, *B''* y *R*, *R'*, *R''* pertenecen á dos líneas paralelas:

$$\frac{a}{a'} = \frac{r}{b} \quad \text{ó} \quad a = a' \frac{r}{b},$$

de modo que será fácil, haciendo variar *r* y *b* desde *r* = 2 cm. y *b* = 50 cm. hasta *r* = 50 cm. y *b* = 2 cm., por ejemplo, conseguir que *a* tome todos los valores posibles entre $\frac{a'}{25}$ y 25 *a'*.

Ese valor de *a'* puede hacerse variar también, empleando sucesivamente diversos discos, de bordes de distintas amplitudes, y es, por lo tanto, factible obtener para las amplitudes de las sinusoides, que han de agitar los péndulos, todos cuantos valores se deseen, desde unos cuantos micrones á muchos centímetros.

Aun con un disco solo sobraré seguramente con los datos que pueda proporcionar, para arrojar gran luz sobre el funcionamiento de los sismógrafos.

Por ejemplo, para un valor de 2,5^{mm} para la semiamplitud de los sinusoides de *A* (*a'* = 2,5^{mm}) se obtendrá para las sinusoides de los péndulos valores que oscilarán, teniendo en cuenta los números antes indicados para *b* y *r*, entre

$$a = \frac{2,5^{\text{mm}}}{25} = 0,1^{\text{mm}} \quad \text{y} \quad a = 62,5^{\text{mm}}.$$

El período de todos los movimientos oscilatorios del aparato será:

$$\mathcal{T} = \frac{60^s}{\nu \cdot n}$$

puesto que esa expresión designa lo que tarda cada senoide completa en pasar por la pieza BB , y producir su efecto oscilatorio en la palanca de transmisión y en la pieza II .

Entran en esa expresión dos cantidades, ν y n que es fácil hacer variar mucho, en el sentido que convenga, para que el período completo \mathcal{T} adquiera cuantos valores se desee.

Desde luego, en un disco dado, de diámetro d :

$$s = \frac{\pi d}{n}$$

y no convendrá que n sea muy grande, y en consecuencia de ello s muy pequeño, sobre todo cuando las amplitudes de esas sinusoides del disco sean grandes, porque debe procurarse que sea relativamente fácil el resbalamiento de la barra B sobre el borde del disco y cuanto más suavemente haya de actuar uno sobre otro será mejor.

Claro es que empleando dos ó tres discos, que sucesivamente se pusieran en el aparato, podría disponerse de otros tantos pares de valores de n y s , muy diferentes entre sí; pero, aun con un disco solamente ya se obtendrá suficiente variación en las duraciones de los períodos, sin más que producir cambios en la velocidad de rotación, ν .

En un disco de 20 cm. de diámetro, por ejemplo, con la senoide antes indicada, de $2,5^{\text{mm}}$ de amplitud, disponiendo en el borde 20 de esas curvas

$$s = \frac{628^{\text{mm}}}{20} = 31,4^{\text{mm}} \text{ próximamente,}$$

longitud que permitiría construir un borde del disco de sua-

ves cambios, que consentiría el fácil deslizamiento sobre él de la barra B , ya que el cambio de 5 mm. en la longitud del radio se ha de realizar durante un recorrido lineal de arco de círculo seis veces mayor.

Para esos números

$$\tau = \frac{60^s}{v \cdot n} = 3^s \cdot \frac{1}{v},$$

bastaría con que v variara entre 30 y 0,1 para que el período tomara todos los valores posibles en 0,1^s y 30^s, y nada difícil es obtener esos cambios de velocidad entre una vuelta del disco cada dos segundos, ó 30 por minuto, y otra cada diez minutos, toda vez que, construído el aparato motor de modo que sea susceptible de dar al disco esa máxima velocidad, nada extraordinaria, de una vuelta cada dos segundos, el enfrenar el movimiento ó disminuir la potencia motora, ó actuar á la vez en sentido contrario en uno y otra, para reducir la velocidad, es tarea en extremo sencilla.

De advertir es que ni remotamente se tiene la pretensión de que el aparato acabado de describir reproduzca, de matemático modo, los movimientos sísmicos, que deben ser en extremo complejos; pero, sí parece que dará suficientes elementos para analizar esos movimientos en lo futuro, con bases más sólidas de las que actualmente existen.

El sismógrafo que al principio se describió y este último aparato vienen á completarse, porque el primero permitirá hacer estudios en los terremotos mismos y el segundo consentirá acelerar y perfeccionar rápidamente los conocimientos que aquel otro sólo proporcionará con lentitud, por lo mismo que ha de esperar para suministrar elementos de estudio á que se verifiquen terremotos.

Aunque en realidad no haga gran falta, y poco ó nada haya de enseñar el mantener fijas en el espacio las masas pendulares del aparato ó, á la inversa, dejar en reposo la pieza de suspensión y hacer oscilar sólo los péndulos, es lo cierto

que podrán observarse sismogramas correspondientes á esos movimientos componentes.

Los múltiples estudios que pueden realizarse, combinando diversos períodos de los péndulos y de las piezas de suspensión con variables amplitudes de los movimientos de estas últimas, proporcionarán, por lo contrario, datos de suma utilidad, muchos de ellos extraños é inesperados, que suministrarán abundantes elementos para la acertada interpretación de los sismogramas.

El efecto de las resistencias pasivas, tanto por rozamientos en los ejes de giro como en las plumas inscriptoras, y el que se deba á las vibraciones, sobre todo de las palancas inscriptivas, también podrán estudiarse, porque en la mano del operador estará introducir una á una esas causas perturbadoras, para comparar los resultados obtenidos con las que aparecieron sin existir ese nuevo elemento estudiado, cuando las restantes condiciones eran las mismas.

Todo esto tendrá además la ventaja de poder variar mucho las condiciones de los experimentos con objeto de no dar por buena ninguna fórmula ni ley, hasta apoyarla en gran número de hechos concordantes, que garanticen su precisión de suficiente modo.

Fácil será, además, analizar el verdadero efecto de los amortiguadores, ya que se conocen en este caso fijamente el movimiento de la suspensión, el trazado que resulte sin amortiguarla y el obtenido cuando se usen aquellos accesorios.

En los sismogramas suele admitirse que los períodos de sus curvas son los del terremoto y esto será cierto á veces; pero, no es seguro, ni mucho menos.

Esta verdadera petición de principio, que realmente se hace al suponer conocida la ley de un movimiento, cuyo estudio es lo más esencial en sismología práctica, no existirá en las aplicaciones del aparato de que se trata á la comprobación de las fórmulas sismológicas, fundadas precisamente en que sean sinusoidales las oscilaciones terrestres.

En efecto, en los experimentos no se pide nada que no pueda concederse ya que la suspensión tendrá un movimiento sinusoidal, y por esto mismo en la fórmula de Wiechert, antes escrita, sólo á título de ejemplo, podrá admitirse con más seguridad el valor de ζ , que corresponde al aparato, que el deducido del estudio de verdaderos sismogramas, en los que no puede afirmarse que sea precisamente el valor que se mida en ellos el que tenía en realidad el período de la oscilación terrestre.

Las ondas sísmicas, que obran sobre los sismógrafos, los agitan y producen las curvas de los sismogramas, deben ser, en realidad, de composición compleja, y su registro no es instantáneo, ya que en un momento determinado la situación del rayo luminoso ó de la pluma inscriptora, es función también, tanto de los elementos anteriores de las ondas terrestres, como de los precedentes movimientos pendulares adquiridos por el instrumento.

Se impone, por lo tanto, agotar todos cuantos expedientes se ocurran para analizar tan abstruso fenómeno y la razón aconseja acudir en estos casos, mejor que á teorías y á desarrollos analíticos, á métodos experimentales, por medio del sismógrafo analizador propuesto y por instrumentos que tengan análogo fin, que sin duda hará aparecer la práctica de estas observaciones, que se aconseja realizar.

El caso que se examina tiene cierta analogía con el estudio de las ondas eléctricas de los alternadores; pero es todavía más difícil y no parece bien pretender resolverlo de plano, introduciendo hipótesis acerca de la naturaleza de las ondas terrestres, de sus períodos, de la constancia de ellos dentro de cada fase y de la directa apreciación de estos períodos en los sismogramas y todavía parece peor dejar en libertad el análisis, fundado en bases cuya certeza está sin comprobar.

A pesar de esa menor dificultad del estudio de las ondas en electricidad, cuya forma puede observarse directamente

con los reógrafos, oscilógrafos y ondógrafos, mientras que en sismología apenas podrán observarse nunca las verdaderas ondas terrestres, que tan desfiguradas aparecen en los sismogramas; á pesar de esa ventaja y aunque se pueda emplear el cálculo para descomponer la onda eléctrica en sus armónicas, la experiencia ha evidenciado que es muy preferible recurrir á métodos experimentales para hallar las amplitudes y fases de esas curvas con relación á la armónica fundamental.

Más razón hay, seguramente, para preferir y emplear los métodos experimentales en el análisis de las curvas de los sismogramas y por tal motivo, de indiscutible importancia, se ha creído conveniente indicar uno de los caminos que pudiera seguirse para apoyar las investigaciones sismológicas en estudios prácticos, cuyos resultados, por lo mismo que serán innegables, permitirán probablemente rectificar algunos juicios y aclarar más de una duda.

XLVI. — Sur la Constance de la Radiation solaire.

PAR M. EMILE SCHWOERER.

Pris dans son ensemble, le problème de la durée de l'incandescence de notre Soleil est l'un des plus intéressants qui puisse se présenter en Cosmogonie.

On sait que les savants sont aujourd'hui divisés, en quelque sorte, en deux camps, quant à l'interprétation de la constance de la radiation solaire. Tandis que les uns admettent, avec Hirn (1), que l'état actuel des astres ne peut être identifié à l'état initial; qu'au phénomène, unique d'abord, de perte de chaleur de la Nébuleuse par radiation, il s'en est peu à peu, et après la formation des soleils, surajouté un autre de compensation, tel que le Soleil et les étoiles ne peuvent plus être aujourd'hui regardés uniquement comme des corps chauds en voie de refroidissement et destinés à tomber un jour au zéro absolu, après un laps de temps plus ou moins long, les autres, au contraire, cherchent une explication plus tangible et admettent que la chaleur solaire pourrait être entretenue par la chute continue de particules matérielles, animées d'une vitesse considérable, qui, en pénétrant sans cesse dans la masse solaire, développeraient par leurs chocs, par l'annulation de leur force vive, suffisamment de chaleur pour faire équilibre aux pertes périphériques de l'astre et à celles de toutes les autres étoiles se trouvant dans les mêmes conditions que lui.

Examinons de plus près cette explication tout au moins

(1) Voy. *La Constitution de l'Espace Céleste*, par G. A. HIRN; Paris, Gauthier-Villars.

spécieuse, et cherchons quelles seraient les conséquences d'un pareil *bombardement*.

Soit P_0 le poids total de corps solides, liquides ou gazeux, qu'il faudrait projeter sur le Soleil, avec une vitesse V , pour que la chaleur développée par la percussion fasse équilibre aux pertes externes. Designons ces pertes par Q_0 et la gravité par G_0 . On a l'équation de condition

$$(I) \quad EQ_0 = \frac{P_0 V^2}{2 G_0},$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Pour réduire P_0 à la plus petite valeur possible, il est clair qu'il faut, au contraire, donner à V la plus grande valeur possible, en évitant toutefois de tomber dans l'arbitraire et l'exagération. Il est visible que cette valeur sera celle de la vitesse que prendrait un corps attiré uniquement par le Soleil et partant, sans vitesse initiale, d'une distance infinie.

Soient G la gravité à la surface du Soleil, R le rayon de l'astre, r la distance du mobile à la surface du Soleil, au bout d'un temps t de chute. On a

$$\gamma = \frac{d^2 r}{dt^2} = - G \left(\frac{R}{R + r} \right)^2.$$

Nous devons prendre le terme de droite négativement, puisque la force tend à diminuer sans cesse la distance r .

En multipliant de part et autre par $2 dr$, nous avons pour l'intégrale

$$\left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)^2 = - 2GR^2 \int \frac{dr}{(R + r)^2},$$

d'où, en posant

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2,$$

il vient :

$$v^2 = \frac{2GR^2}{R+r} + c.$$

Comme, par définition, nous devons avoir

$$v = 0 \text{ pour } r = \infty,$$

la constante devient nulle, et l'on a

$$V^2 = \frac{2GR^2}{(R+d)} - \frac{2GR^2}{(R+\infty)} = 2GR,$$

V étant la vitesse du mobile au moment où il atteint la surface solaire.

L'équation de condition (I) devient ainsi, en y posant $G = \lambda G_0$,

$$E Q_0 = P_0 \lambda R,$$

d'où

$$P_0 = \frac{E Q_0}{\lambda R}.$$

Mettons maintenant cet accroissement en rapport avec le poids total que représente le Soleil et qui a pour expression

$$\pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta.$$

En désignant par A la distance moyenne de la Terre au Soleil, par q_0 la quantité de chaleur envoyée par le Soleil à l'unité de surface de la Terre dans l'unité de temps, on a, pour la quantité totale de chaleur émise par le Soleil sur une surface sphérique correspondant au rayon A ,

$$Q_0 = 4 q_0 \pi A^2,$$

et, par conséquent,

$$P_0 = \frac{4 q_0 \pi A^2 E}{\lambda R}$$

Divisant P_0 par π , il vient

$$\frac{P_0}{\pi} = \rho = \frac{3 q_0 A^2 E}{\lambda \delta R^4}$$

En mettant à la place de R , A , δ , λ , E , q_0 , leurs valeurs respectives connues:

$$R = 109.3 \left(\frac{40000000}{2\pi} \right); \quad A = 23439 \left(\frac{40000000}{2\pi} \right);$$
$$\delta = 0,248 \times 5500; \quad \lambda = 27,252; \quad E = 432;$$

$q_0 = 0, \text{cal. } 4$, soit en une année $0,4 (86400 \text{ sec.} \times 365,256374)$, et en effectuant tous les calculs, on a

$$\rho = 0,0000000418$$

pour l'accroissement *annuel* de la masse solaire.

Si petit qu'il soit en lui-même comme nombre, on peut appeler cet accroissement *énorme* et absolument impossible. Au bout de dix siècles, en effet, on aurait déjà pour l'accroissement de la masse solaire.

$$\delta M = 1,0000418.$$

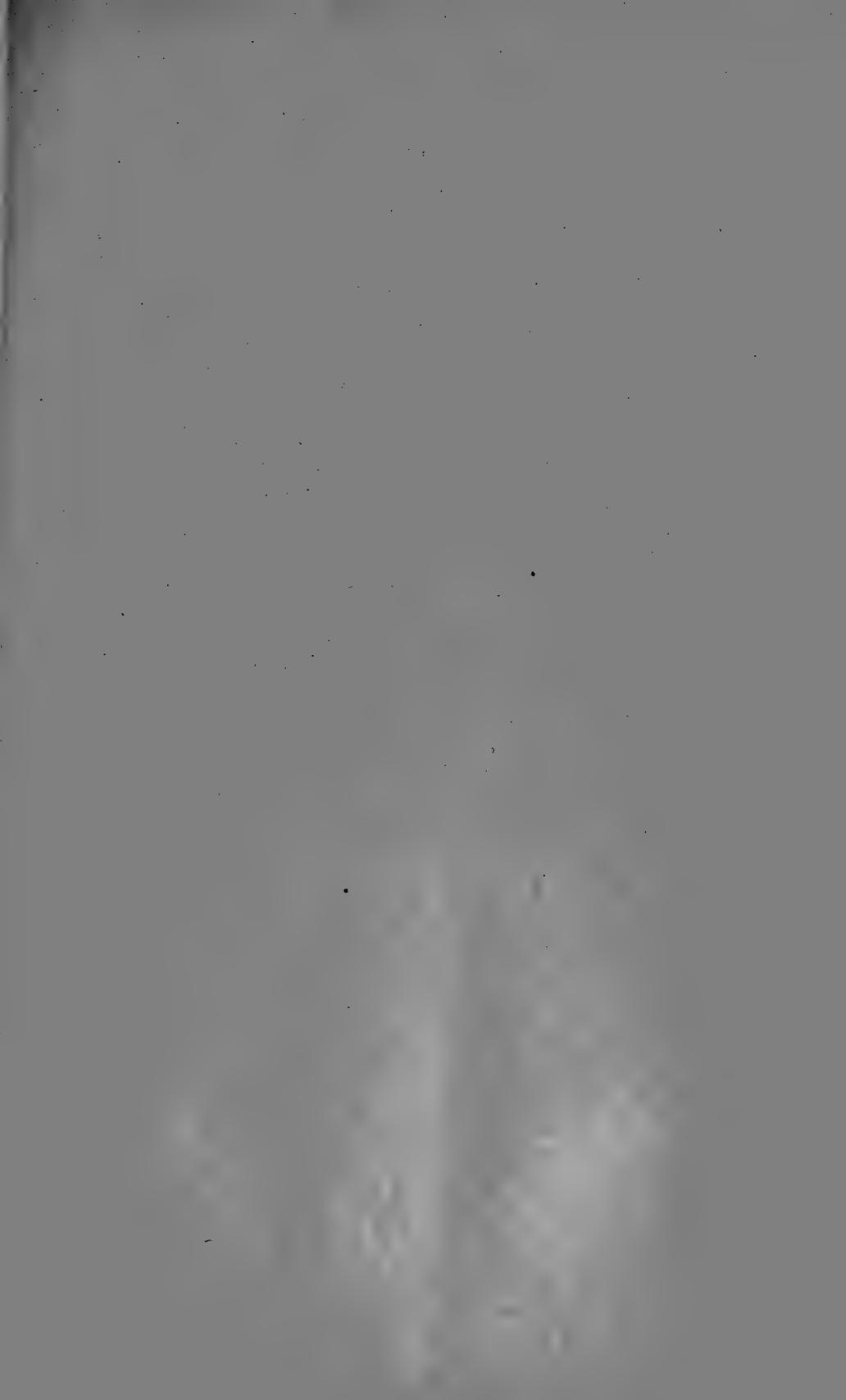
Cet accroissement en déterminerait un autre absolument identique dans l'intensité de l'attraction de l'astre, et pour que la Terre pût rester sur son orbite actuelle, après une telle augmentation de l'attraction solaire, il faudrait que sa vitesse fût beaucoup plus grande. C'est ce qu'il est facile de reconnaître. La vitesse moyenne de la Terre étant proportionnelle à la racine carrée de la force accélératrice dérivant de l'attrac-

tion solaire, il s'ensuit que la durée de révolution est inversement proportionnelle à cette racine carrée. En admettant pour δM la valeur indiquée ci-dessus, on trouve que l'accroissement de l'année, il y a dix siècles, eût été de

$$\begin{aligned} & (365,256374 \times 86400^{\text{sec}} \sqrt{1,0000418} - \\ & - 365,258374 \times 86400^{\text{sec}}) = 659,^{\text{sec}} 57. \end{aligned}$$

Il faudrait donc que l'année sidérale eût plus de 650 secondes de moins qu'à cette époque; mais il est visible que la Terre et toutes les autres planètes, au lieu de rester sur leurs orbites, décriraient des spirales, et se rapprocheraient de plus en plus du Soleil. Rien de semblable, on le sait, n'existe dans la réalité, même au diminutif le plus réduit qu'on voudrait.

L'explication proposée doit donc être définitivement rejetée du domaine de la Science.



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
XLII.—Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia novena.....	735
XLIII.—Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décima.....	759
XLIV.—Catálogo de los moluscos testáceos marinos de la costa y bahía de Cádiz, por <i>Joaquín González Hidalgo</i> ...	776
XLV.—Sismógrafo analizador, por <i>Eduardo Mier y Miura</i> (conclusión).....	804
XLVI.—Sur la Constance de la Radiation solaire, par <i>M. Emile Schwoerer</i>	818

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO IX.—NUM. 11.

Mayo de 1911.



MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

[Handwritten signature]

IAN 20 1957

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

**XLVII.—Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.**

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia undécima.

SEÑORES:

Comparábamos tres problemas que, con ser distintos, tenían representaciones geométricas iguales, y aun en parte iguales representaciones analíticas; y eran estos problemas:

1.º El de la transformación en general de una figura de tres dimensiones.

2.º El de la deformación de una parte finita ó infinitamente pequeña, pero que infinitamente pequeña la suponíamos para nuestro caso, de un sistema elástico y continuo.

3.º El del movimiento de una porción, también muy pequeña, de un fluido perfecto.

En estos tres casos las coordenadas de un punto cualquiera de la figura transformada, ó del elemento deformado, ó de la segunda posición del fluido elástico, eran funciones de las coordenadas del punto en el primer sistema, según minuciosamente explicamos en la conferencia precedente.

El tercer problema, por el pronto, vamos á referirlo al primero, de tal manera, que vamos á copiar, literalmente casi, lo que en el curso de 1907 á 1908 explicábamos respecto á la deformación de un sólido elástico.

Y allí decíamos lo siguiente (pág. 104):

Sea M (fig. 22) un punto cualquiera del sólido elástico, y vamos á estudiar las deformaciones en un espacio infinitamente pequeño, alrededor de dicho punto M .

No establecemos otra hipótesis que la de la continuidad en el sistema.

Supongamos que, á causa de las fuerzas que actúan sobre dicho sistema, el punto M viene á parar á la posición M' ,

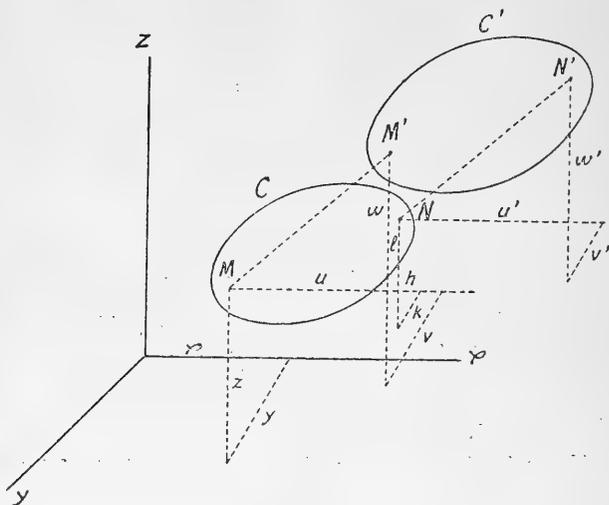


Figura 22.

describiendo un camino MM' infinitamente pequeño, y que por esta circunstancia puede suponerse rectilíneo.

A las componentes de este desplazamiento las designaremos por u, v, w , paralelamente á los ejes x, y, z .

Consideremos otro punto N del sólido, infinitamente próximo á M :

La recta MN tendrá por componentes h, k, l . De manera, que si M fuera el origen de coordenadas, y por él trázásemos tres ejes paralelos á Ox, Oy, Oz , podríamos decir que h, k, l , eran las coordenadas del punto N , tomando M por origen.

El punto N también experimentará un desplazamiento, trasladándose de N á N' y teniendo por componentes u' , v' , w' .

Supongamos que el problema elástico está resuelto por cualquier medio que sea; pues esto quiere decir que para todo instante las tres componentes del desplazamiento de un punto serán funciones determinadas de las coordenadas de dicho punto.

De suerte que tendremos:

$$u = \varphi_1(x, y, z),$$

$$v = \varphi_2(x, y, z),$$

$$w = \varphi_3(x, y, z).$$

Estas funciones φ serán para cada problema, es decir, para cada cuerpo y cada sistema de fuerzas, funciones perfectamente determinadas, ó suponemos que lo sean.

No podemos decir cuáles serán en cada caso, *hasta no resolver el problema*; pero podemos afirmar su existencia, y podemos hacer esta afirmación fundamental, mejor dicho, esta hipótesis: *que si el problema es determinado, estas funciones serán funciones continuas*. Es lo único que podemos establecer respecto al carácter de dichas funciones.

Si para el punto M , las componentes del desplazamiento están determinadas en funciones de sus coordenadas por las ecuaciones

$$u = \varphi_1(x, y, z),$$

$$v = \varphi_2(x, y, z),$$

$$w = \varphi_3(x, y, z);$$

á su vez, para el punto N , las componentes del desplazamiento de este punto se obtendrán poniendo en las ecuaciones anteriores las coordenadas de dicho punto N , que son

$$x + h, y + k, z + l;$$

y tendremos, por lo tanto,

$$u' = \varphi_1(x + h, y + k, z + l),$$

$$v' = \varphi_2(x + h, y + k, z + l),$$

$$w' = \varphi_3(x + h, y + k, z + l).$$

Tales ecuaciones resolverán el problema para todos los puntos del cuerpo; y concretando más, para los puntos infinitamente próximos á M en el espacio que le rodea. No hay más que substituir á h, k, l los valores correspondientes á este punto.

No conocemos las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; pero así y todo podemos deducir las leyes generales de la deformación infinitamente pequeña alrededor de cualquier punto M .

Desarrollemos por la serie Taylor, despreciando los términos de orden superior, es decir, desde los términos en $h^2, k^2, l^2, kl, hl, kl$, en adelante.

Claro es que aquí hacemos una nueva hipótesis, que se repite en la mayor parte de los problemas de la Física matemática, á saber; que las funciones φ pueden desarrollarse por la serie de Taylor, y que en ésta pueden despreciarse desde el grupo de segundo orden en h, k, l , inclusive, en adelante.

Aceptando esta hipótesis, tendremos:

$$u = \varphi_1(x, y, z) + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

$$v = \varphi_2(x, y, z) + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$

$$w = \varphi_3(x, y, z) + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l,$$

que con mayor brevedad pueden escribirse así:

$$\begin{aligned}u' &= u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l, \\v' &= v + \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k + \frac{dv}{dz}l, \\w' &= w + \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \frac{dw}{dz}l.\end{aligned}\tag{a}$$

Tenemos, pues, *aproximadamente*, las componentes de los desplazamientos alrededor de un punto M del cuerpo, ó sea las componentes de los desplazamientos de un punto N cualquiera infinitamente próximo á M definido por sus coordenadas h, k, l , con relación á M .

Estos desplazamientos, u, v, w , vemos que dependen de los desplazamientos u, v, w , del punto M y de nueve cantidades,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} \quad \frac{du}{dy} \quad \frac{du}{dz}, \\ \frac{dv}{dx} \quad \frac{dv}{dy} \quad \frac{dv}{dz}, \\ \frac{dw}{dx} \quad \frac{dw}{dy} \quad \frac{dw}{dz},\end{aligned}$$

que son funciones de x, y, z , es decir, que dependen del punto M que se considere; pero que una vez determinado éste, *deben considerarse como constantes para todos los puntos que rodean á dicho punto M .*

En suma: para todo desplazamiento alrededor de M , las únicas variables independientes son h, k, l .

Se ve, por lo dicho, que los resultados anteriores no deben considerarse *sino como aproximaciones*; porque suponemos que la serie de Taylor es convergente y que pueden desprejarse todos los términos que hemos desprejado.

Agreguemos aún que los coeficientes $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \dots$ son

cantidades muy pequeñas, porque en los cuerpos elásticos, las deformaciones lo son con relación á las magnitudes primitivas, y dichos coeficientes no significan otra cosa que estas relaciones; lo que aumenta, por ejemplo, u con relación á x .

Y esta observación tiene su importancia, porque si el sistema fuese discontinuo, habría que comparar los expresados coeficientes con los valores de h, k, l , para calcular el orden de los términos que se desprecian.

Tratándose, como aquí tratamos, de sistemas continuos, h, k, l pueden ser tan pequeños como se quiera, y, en cambio, los coeficientes de que se trata, aunque muy pequeños, son cantidades finitas.

*
* *

Hemos dicho que las ecuaciones

$$u' = u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

$$v' = v + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l,$$

$$w' = w + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l,$$

nos determinan las componentes del desplazamiento de un punto cualquiera N (fig. 22), cuyas coordenadas con relación al punto M , que hemos elegido, son h, k, l .

Estos valores u', v', w' vemos, en resumen, que dependen de los nueve coeficientes expresados $\frac{du}{dx}$, que son funciones de las coordenadas de M , y, por tanto, deben considerarse como constantes para todas las deformaciones alrededor de M .

Y analíticamente está resuelto el problema; pero conviene estudiar la descomposición del desplazamiento NN' en movimientos diversos y sencillos que le lleven del punto de partida N á la posición final N' .

Para facilitar dicho estudio, y por razones que se verán inmediatamente, y además por la sencillez de los resultados, sustituiremos á las nueve constantes $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, , que constituyen el último cuadro que hemos formado, otras nueve constantes, que serán los siguientes:

$$\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy},$$

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

Para abreviar la escritura, y para la simetría de los cálculos, cada uno de estos términos los representaremos por una letra, y en la forma siguiente, adoptando siempre, como hemos dicho, las notaciones de Mr. Sarrau.

Tendremos, pues,

$$a_1 = \frac{du}{dx}, a_2 = \frac{dv}{dy}, a_3 = \frac{dw}{dz},$$

$$2b_1 = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}, 2b_2 = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, 2b_3 = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy},$$

$$2p_1 = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, 2p_2 = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, 2p_3 = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

De estas ecuaciones será fácil deducir las nueve derivadas del grupo (1), y tendremos:

$$a_1 = \frac{du}{dx}, a_2 = \frac{dv}{dy}, a_3 = \frac{dw}{dz},$$

$$b_1 + p_1 = \frac{dw}{dy}, b_2 + p_2 = \frac{du}{dz}, b_3 + p_3 = \frac{dv}{dx},$$

$$b_1 - p_1 = \frac{dv}{dz}, b_2 - p_2 = \frac{dw}{dx}, b_3 - p_3 = \frac{du}{dy}.$$

Y con esto podremos sustituir al grupo (I) el grupo (II), que se compondrá de las nueve constantes a, b, p ; constantes, decimos, siempre con relación al punto M :

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo los valores de las nueve derivadas del cuadro (I) en las ecuaciones (a), tendremos:

$$u' = u + a_1 h + (b_3 - p_3) k + (b_2 + p_2) l$$

$$v' = v + (b_3 + p_3) h + a_2 k + (b_1 - p_1) l$$

$$w' = w + (b_2 - p_2) h + (b_1 + p_1) k + a_3 l.$$

y ordenando convenientemente:

$$u' = u + p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l,$$

$$v' = v + p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l,$$

$$w' = w + p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l,$$

Estas tres ecuaciones nos demuestran, que el desplazamiento NN' puede conseguirse por tres movimientos infinitamente pequeños, representados por estos tres grupos de las ecuaciones anteriores:

$$1^{\text{er}} \text{ grupo } \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right. \quad 2^{\text{o}} \text{ grupo } \left\{ \begin{array}{l} p_2 l - p_3 k \\ p_3 h - p_1 l \\ p_1 k - p_2 h \end{array} \right. \quad 3^{\text{er}} \text{ grupo } \left\{ \begin{array}{l} a_1 h + b_3 k + b_2 l \\ b_3 h + a_2 k + b_1 l \\ b_2 h + b_1 k + a_3 l \end{array} \right.$$

Veamos la significación geométrica de cada uno de estos grupos, y representémoslos, para más claridad, en la figura 23, considerando tan sólo el desplazamiento NN' .

Primer grupo.—Es evidente que u, v, w representan una traslación igual y paralela á la del punto M de las figuras 22 y 23, de suerte que, por este primer movimiento, N habrá venido á N_1 (fig. 23).

Segundo grupo.—Para simplificar, representemos los tres

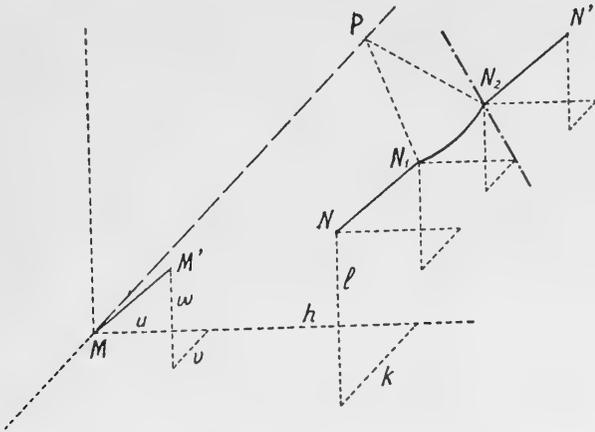


Figura 23.

desplazamientos paralelos á los tres ejes por u_1, v_1, w_1 , es decir,

$$u_1 = p_2 l - p_3 k,$$

$$v_1 = p_3 h - p_1 l,$$

$$w_1 = p_1 k - p_2 h.$$

Pero sabemos, por lo expuesto al final de la conferencia anterior (del curso de 907 á 908), que dichas tres expresiones son las componentes paralelas á los ejes del desplazamiento producido por una rotación infinitamente pequeña alrededor de un eje P , cuyas rotaciones componentes son

p_1, p_2, p_3 , y en que las coordenadas del punto que gira son h, k, l .

En vez de hacer girar en la figura el punto N , hemos hecho girar el N_1 , pero esto, sabemos por la teoría de los movimientos infinitamente pequeños que solo produce errores de orden superior.

La primera traslación, paralela á MM' , trajo al punto N á N_1 .

Esta rotación lleva el punto N_1 á la posición N , posición que corresponde, según acabamos de explicar, á la superposición de estos dos movimientos:

traslación u, v, w ,

rotación u_1, v_1, w_1 .

Tercer grupo. — Las tres componentes, paralelas á los ejes de este tercer movimiento, infinitamente pequeño, las representaremos, para abreviar, por u_2, v_2, w_2 , y tendremos:

$$u_2 = a_1 h + b_3 k + b_2 l,$$

$$v_2 = b_3 h + a_2 k + b_1 l,$$

$$w_2 = b_2 h + b_1 k + a_3 l.$$

La interpretación de estas ecuaciones es sencilla é ingeniosa; pero no creemos necesario reproducir aquí lo que expusimos extensamente en el curso de 1907 á 1908 de donde hemos tomado los párrafos precedentes.

Nos limitaremos, pues, á observar, que si consideramos la ecuación general

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2b_1 yz + 2b_2 zx + 2b_3 xy = \lambda,$$

la que tomando por origen de coordenadas el punto M de la figura anterior y substituyendo á x, y, z , las variables h, k, l ,

que determinan un punto cualquiera N de la masa flúida, que rodea al punto M , se convierte en

$$a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2b_1 kl + 2b_2 lh + 2b_3 kh = \lambda,$$

esta última ecuación representará una superficie de segundo grado referida á su centro.

Ahora bien: si suponemos que los ejes x, y, z se han elegido paralelamente á los ejes de dicha superficie, los términos con los dobles productos de las variables desaparecerán, es decir,

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = 0.$$

Y quedará reducida esta ecuación á

$$a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 = \lambda.$$

Si además suponemos que a_1, a_2, a_3 , tienen el mismo signo y que son positivos, la ecuación anterior representará un elipsoide.

Por otra parte, los valores de las deformaciones del tercer grupo u_2, v_2, w_2 , serán

$$u_2 = a_1 h$$

$$v_2 = a_2 k$$

$$w_2 = a_3 l.$$

En suma; las deformaciones del tercer grupo, consistirán en contracciones ó dilataciones paralelas á los tres ejes del elipsoide que hemos considerado.

En suma; si continuamos refiriéndonos á la deformación elástica de una porción infinitamente pequeña de un sólido, cuya masa representaremos por dm , en la primera posición, y por dm' en la segunda, podemos resumir el resultado precedente diciendo:

Que dicha masa dm , que rodea al punto M , para pasar á la posición dm' rodeando al punto M' que es la nueva posición de M , puede considerarse que pasa de la primera á la segunda posición efectuando estos tres movimientos.

1.º Una traslación M, M' cuyas componentes serán u, v, w .

2.º Una rotación de dicha masa dm alrededor de un eje M, P ; rotación que tendrá por componentes b_1, b_2, b_3 , que serán ángulos, infinitamente pequeños, que tendrán por valor

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right), p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right), p_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right)$$

y que producirán desplazamientos, paralelos á los ejes, u_1, v_1, w_1 .

3.º Una deformación compuesta de tres dilataciones ó contracciones rectangulares paralelas á los tres ejes del elipsoide definido por

$$a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 = \lambda.$$

Claro es que en este elipsoide los ejes no son paralelos á los coordenados. No tenemos para qué preocuparnos del valor de λ .

En estos tres movimientos podemos considerar á la masa dm como si fuera un cuerpo sólido; los errores serán infinitamente pequeños de orden superior.

Todo lo que hemos dicho en el caso de una deformación elástica, lo podemos repetir, como hemos ya explicado minuciosamente, al acompañar al movimiento de una pequeña masa de fluido que rodease á un punto M del mismo, siguiéndole en su trayectoria.

Lo que en el problema del sólido elástico eran dos posiciones consecutivas por deformación, será, en este nuevo caso, dos posiciones consecutivas por movimiento.

Y siguiendo con la imaginación á la pequeña masa flúida, la veríamos

1.º Trasladarse paralelamente á sí misma, según un elemento de la trayectoria, como si se preparasen todos los puntos de la masa á trazar trayectorias paralelas á las de dicho punto M .

2.º Girar toda la masa dm un ángulo infinitamente pequeño alrededor de un eje perfectamente determinado MP .

3.º Al llegar á esta posición la masa sufriría tres dilaciones paralelas á los tres ejes de un elipsoide, ejes perfectamente definidos.

En todas las expresiones anteriores u, v, w , representarían rectas infinitamente pequeñas; pero dividiéndolas por dt se convertirían en velocidades finitas, y á las u, v, w , que llamábamos deformaciones, deberemos sustituir udt, vdt, wdt , en que u, v, w , ya no representarán lo que antes, sino las componentes de la velocidad en el punto M de la trayectoria, y una vez resuelto el problema serán funciones perfectamente determinadas de x, y, z .

De modo que podemos repetir lo que antes hemos dicho, sustituyendo á las deformaciones los tres productos anteriores.

Y perdónesenos la repetición en gracia á la claridad y al deseo de evitar toda duda á mis alumnos, que al recorrer estas líneas pueden pasar por alto lo que para ellos sea superfluo.

Consideremos una masa muy pequeña del fluido dm (figura 24.)

Tomemos en esta masa un punto A , el cual describirá una trayectoria A, B .

Si el problema está resuelto, conoceremos las coordenadas de cualquier punto de esta trayectoria, es decir, de la

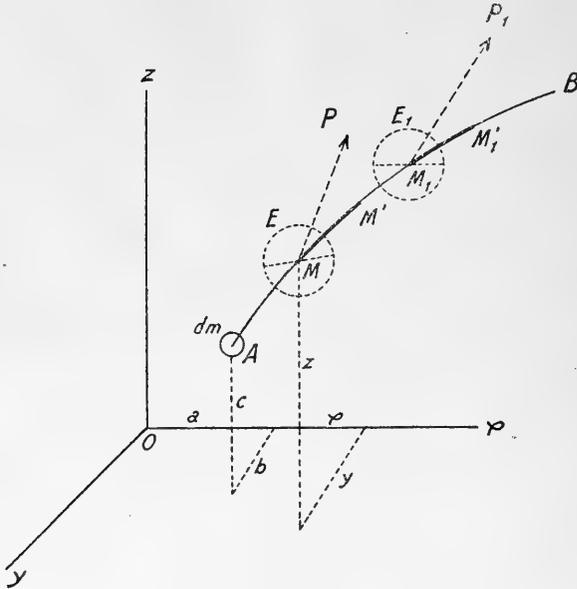


Figura 24.

posición del punto A en cualquier instante, coordenadas que vendrán dadas por tres ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= f_1(a, b, c, t), \\y &= f_2(a, b, c, t), \\z &= f_3(a, b, c, t).\end{aligned}$$

Claro es que de estas ecuaciones podemos deducir la velocidad del punto A al llegar á las posiciones M, M', \dots , ó si se quiere, las componentes u, v, w , de esta velocidad.

No habrá más que diferenciar con relación á t las ecuaciones precedentes, y tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = u = f'_1(a, b, c, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v = f'_2(a, b, c, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w = f'_3(a, b, c, t).$$

Si quisiéramos expresar estas ecuaciones con relación á las coordenadas de los diferentes puntos de la masa dm , en la posición que corresponde al tiempo t , como posición inicial de las dos que consideramos, no habría más que despejar a, b, c , del penúltimo grupo en función de x, y, z , y sustituirlas en los valores u, v, w .

De este modo obtendríamos

$$\begin{aligned} u &= \psi_1(x, y, z, t) \\ v &= \psi_2(x, y, z, t) \\ w &= \psi_3(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Establecido lo que precede, podemos seguir sin dificultad la marcha y las transformaciones de la masa infinitamente pequeña del fluido dm , que estamos considerando á lo largo de la trayectoria A, B , de uno de sus puntos A , como hemos representado en la figura 24.

Basta que acompañen á dicha masa dm en su movimiento una recta ideal, que será un eje de giro y una elipsoide, también ideal, entendiéndose que para cada punto de la trayectoria, el eje de giro tendrá una posición determinada por los valores de las derivadas de u, v, w , con relación á x, y, z , para el punto que se considere, y deducidas de las últimas

ecuaciones en que hemos obtenido u, v, w , en función de x, y, z .

Por ejemplo: llega el punto A á la posición M de la trayectoria, y en este punto la masa dm , claro es que tendrá cierta orientación y cierta densidad; pues pasará á la posición inmediata, como antes explicábamos, mediante dos movimientos y una deformación pura.

1.º Si MM' es un elemento de la trayectoria, todos los puntos de la masa describirán rectas iguales y paralelas á MM' , cuyas componentes serán

$$u dt, v dt, w dt$$

deduciéndose u, v, w , de las ecuaciones (1).

2.º Girará como si fuera un cuerpo sólido durante el tiempo dt , alrededor de un eje MP , cuyas tres componentes refiriendo el eje á la unidad de tiempo, serán designándolas según costumbre, no como en sus deformaciones por la letra p , sino por ξ, η, ζ

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \quad (2)$$

en que u, v, w y sus derivadas, se deducirán también de las ecuaciones (1); de modo que estas tres componentes de la rotación, serán funciones conocidas de x, y, z , ó sea de las coordenadas del punto M .

Tenemos, pues, el valor de la rotación alrededor de P por unidad de tiempo, y para obtener el arco descrito por cada punto alrededor de P , será preciso multiplicarla por dt .

3.º Por último, y esto no interesa para nuestro caso, la masa dm sufrirá tres dilataciones ó contracciones paralelas á los ejes del elipsoide E , entendiendo que este es el elipsoide para el punto M .

Las magnitudes de dichas deformaciones, ζ , ó mejor de estos

movimientos, serán también funciones perfectamente determinadas de las tres derivadas de u , v , w , con relación, respectivamente, á x , y , z .

Y esto que hemos dicho para el punto M , se repetirá para otro punto cualquiera, por ejemplo, M_1 de la trayectoria.

También para este punto por las coordenadas de M_1 y por las ecuaciones (1) tendremos un eje instantáneo P_1 y un elipsoide E_1 , y al pasar dm de una posición á la inmediata, pasará por una traslación M , M'_1 ; por una rotación alrededor de $M_1 P_1$, y por una deformación pura, definida por el elipsoide E_1 .

Y en todo punto de la trayectoria AB tendremos los elementos necesarios para definir la traslación por el elemento de trayectoria, la rotación por el eje instantáneo, la deformación pura por el elipsoide.

*
* *
*

Si buscamos una imagen material del movimiento de la masa dm , podremos decir que dicha masa traza un cordón de fluido y cada punto una hebra, y en esta hebra hay un avance paralelo á la trayectoria central, y un giro ó retorcimiento del hilo, y un ensanche ó contracción de este hilo ó filete fluido.

Con lo cual la imaginación empezará á poner algún orden en los movimientos, que parecían desordenados, del fluido en cuestión; y como las ecuaciones de Lagrange determinan la trayectoria de cada masa, por las consideraciones que preceden tendremos algo así como una representación de lo que á esa masa le sucede á lo largo de dicha trayectoria.

Ahora bien; si prescindimos de las dilataciones ó contracciones de cada filete, porque para la teoría de los torbellinos esto no nos interesa gran cosa, y sólo nos fijamos en las ro-

taciones instantáneas, podremos imaginar en el espacio (figura 25) una serie de masas infinitamente pequeñas, ó sea de elementos del fluido; y una serie de trayectorias AB , $A'B'$: y á lo largo de la trayectoria AB una serie de ejes instantáneos a, b, c; para la trayectoria $A'B'$ otra serie de ejes a', b', c', y así sucesivamente.

De modo que el espacio se nos poblará de vectores, que representarán dichos ejes instantáneos de giro; y sin entrar

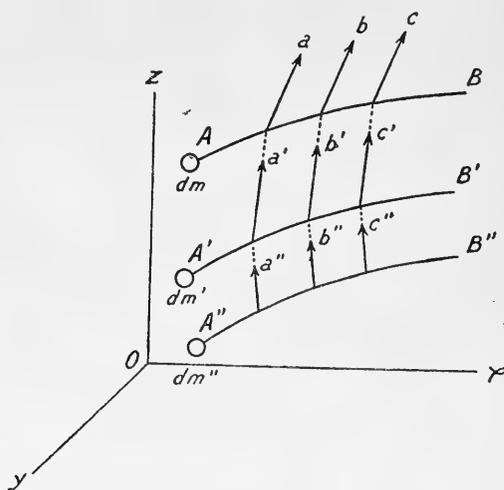


Figura 25.

en explicaciones que luego precisaremos, la imaginación unirá estos ejes instantáneos por ley de continuidad en líneas, que podremos denominar líneas torbellinos; y agrupará estas líneas en superficies, que serán superficies de torbellinos, y toda la teoría, ó todo el campo, ó si se quiere todo el conjunto de problemas que de aquí brotan, se presentarán por anticipado ante nosotros como por una primera intuición.

Esto en cuanto á la representación geométrica; en cuanto á los valores numéricos de estas rotaciones, ya hemos visto que en las ecuaciones (2) están perfectamente determinadas, y sin dificultad de ningún género, si el problema general

está resuelto, porque en este caso los coeficientes diferenciales que entran en dichas ecuaciones (2) se deducirán inmediatamente de las ecuaciones (1) y las tres componentes de rotación ξ , η , ζ serán para cada punto x , y , z funciones perfectamente determinadas de estas coordenadas del punto.

Es decir, que en todo instante conoceremos, en cualquier punto, cuál es la rotación correspondiente; por decirlo así, lo que en aquel momento y en aquel punto gira ó se retuerce la molécula flúida que lo ocupa.

*
*
*

De lo dicho se deduce que en un flúido puede haber *dos clases* de movimientos.

1.º Si para un punto cualquiera ó para una serie de puntos existen las cantidades

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right)$$

es decir, si no se anulan dichas cantidades en ese punto, la molécula que lo ocupa experimentará en el tiempo dt , según hemos explicado, una rotación infinitamente pequeña, que si continuase siendo la misma durante la unidad de tiempo tendría por componentes las tres cantidades anteriores.

Expresarían en cierto modo la torsión de la molécula.

Esta no sólo avanzaría según el elemento de la trayectoria, no sólo experimentaría una deformación pura, dilatación ó contracción, sino que sufriría un giro ó torsión medido por unidad de tiempo por las tres magnitudes ó componentes de vector ξ , η , ζ .

A este movimiento se le llama movimiento *rotacional*. Y

todos los puntos del fluido en una línea, en una superficie, en un volumen, en una región cualquiera del fluido, que experimenten estas rotaciones, distintas en general para cada punto, recibirán este mismo nombre.

Así el movimiento del fluido, en la región á que nos referimos, se dirá que es un movimiento *rotacional*.

2.º Pero si en un punto, ó para los puntos de una región, las componentes expresadas son nulas, es decir, si se tiene

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 0$$

en este caso es evidente, que la molécula que se considera, no experimentará ninguna rotación infinitesimal; su movimiento se expresará tan sólo por una traslación y una deformación pura, de contracción ó dilatación, y la partecilla fluida, ó la región finita en que esto se verifique para todos sus puntos, se dirá que está sujeta á un movimiento *irrotacional*.

Claro es, que el asegurarnos de si esto se verifica es sumamente sencillo, si el problema está resuelto; porque como hemos dicho tantas veces, u, v, w , son funciones de x, y, z, t . Luego para un instante cualquiera podemos obtener las derivadas que entran en las ecuaciones anteriores, cuyos primeros miembros se convertirán en funciones de x, y, z, t .

Si en el instante t , que estamos considerando las tres ecuaciones anteriores, se verifican idénticamente para todos los valores x, y, z , de una región, el movimiento en esta región será irrotacional en ese instante.

Si sólo se verifican para valores particulares de x, y, z , podemos decir, por ahora en términos generales, que en ese instante para dichos puntos es irrotacional el movimiento.

¿Puede suceder que para un instante t el movimiento sea irrotacional y que sea rotacional para otro instante, ó viceversa?

Aquí aparecen, aunque ahora con cierta vaguedad, problemas de sumo interés en la teoría de los torbellinos, y que les dan carácter curiosísimo, como veremos más adelante.

Pero ahora no queremos más que explorar el terreno, y nos contentaremos con observar, que las relaciones anteriores, que pueden ponerse bajo esta forma,

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy},$$

expresan las condiciones analíticas necesarias y suficientes para que

$$u dx + v dy + w dz$$

sea una diferencial exacta de x, y, z .

Mas si esta expresión es una diferencial exacta de una función $\varphi(x, y, z)$, claro es que tendremos

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}; \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

y entonces se dice que las tres componentes de la velocidad se derivan de una potencial φ .

De donde resulta que si la velocidad tiene una potencial, ó de otro modo, si sus componentes son las derivadas de una función de x, y, z , el movimiento será *irrotacional*, las moléculas del fluido no girarán ó no tenderán á girar.

Por el contrario, si las tres últimas condiciones expresadas no se verifican, las diferencias

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$

tendrán valores determinados; luego existirá el vector de giro y el movimiento será *rotacional*.

Las consideraciones anteriores nos dan ya alguna idea,

aunque incompleta, de los movimientos internos de un fluido perfecto sometido á ciertas fuerzas, y nos han permitido hacer una clasificación general de los movimientos de dicho fluido en *rotacionales* é *irrotacionales*.

Pero quedan muchos problemas en pie. Por ejemplo, saber cómo se enlazan en líneas y en superficies los movimientos rotacionales.

Saber si estas líneas y superficies subsisten en el movimiento ó si las que corresponden á un instante se deshacen en sus elementos y éstos se combinan de otro modo para formar otras líneas y superficies.

Averiguar si en un mismo fluido pueden subsistir movimientos rotacionales é irrotacionales, ó si todos han de ser de una ó de otra clase.

Averiguar, por último, para no hacer interminable esta lista de problemas, si los movimientos rotacionales se pueden convertir en irrotacionales y viceversa.

O de otro modo, si se pueden crear y pueden destruirse los movimientos rotacionales.

De todas estas cuestiones que constituyen la teoría de los torbellinos trataremos en las conferencias próximas.

En esta nos limitaremos, para terminar, á una indicación, que es anticipación á un estudio que ha de venir más tarde.

Los movimientos irrotacionales tienen analogías analíticas, y pudiéramos decir que de representación, con los problemas de la electroestática.

Y los movimientos rotacionales, ó sea la teoría de los torbellinos, tienen á su vez, como ya hemos dicho en otra ocasión, semejanzas analíticas y valor representativo de muchos problemas de electrodinámica.

No es, pues, tan ajena como pudiera creerse la teoría de los torbellinos, y aún el estudio general de la hidrodinámica, á la materia de esta asignatura, es decir, al estudio de la Física matemática.

Así como en el curso anterior, con motivo de la fórmula

de Green y de la fórmula de Stokes, presentamos algo como un avance del problema general de la electrostática y de los problemas de electrodinámica, digresiones análogas nos proponemos hacer en este curso al exponer los elementos de la admirable creación de Helmholtz, desarrollada con predilección por Thomson.

XLVIII. — Conferencias sobre Física Matemática.

Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

(Conferencia duodécima).

SEÑORES:

Llamábamos la atención en la última conferencia sobre el doble punto de vista aplicable á todos los problemas de la Física matemática.

O mejor dicho, sobre la doble tendencia que en matemáticos y físicos se observa, y aun en los que se dedican á la ciencia pura, al estudiar y resolver aquellos problemas de la Física matemática; y no digo de las Matemáticas en general, porque á la primera debemos limitar nuestras observaciones, ya que de Física matemática es la clase que tengo la honra de explicar.

Esta doble tendencia obedece, sin duda alguna, á las distintas condiciones psicológicas y aun fisiológicas que dominan en unos y otros sabios.

Inteligencias hay que aman lo abstracto, en lo abstracto se complacen y en lo abstracto desarrollan sus actividades, con preferencia á lo concreto.

La forma sensible no les atrae; la consideran tosca, grosera, imperfecta, y en cambio, en el análisis matemático se recrean, y en teniendo fórmulas, creen haber alcanzado la perfección suprema, que al genio humano le es dado alcanzar.

En cambio, otros buscan lo concreto, lo plástico, la forma sensible, y si á ella no llegan, consideran imperfecta la solución del problema: le ven, en cierto modo, flotar en el espacio, pero sin acercarse á la realidad y encarnar en ella. Y la verdad es que, en estos problemas, como en otros muchos, el ideal de la perfección está en la armonía y no en el exclusivismo.

La representación analítica y la representación geométrica, son dos medios de representación legítimos, fecundos y hasta complementarios.

Por algo el ser humano está dotado de razón y está provisto de sentidos.

Y desarrollando estas ideas, decíamos en nuestra última conferencia: las fórmulas de Lagrange ó las fórmulas de Euler resuelven analíticamente el problema general de hidrodinámica, ó si se quiere, del movimiento de un flúido perfecto, que es nuestro caso; pero la solución será aún más perfecta para los que aman la forma plástica, casi pudiéramos decir la forma pictórica, si además de la solución analítica que nos proporcionan unos y otros sistemas de ecuaciones, podemos formarnos idea del movimiento en sí del flúido que estudiamos.

Si en la confusa maraña, permítaseme la palabra, de movimientos, podemos establecer algún orden y podemos seguir con la imaginación, que es la facultad propia de estos casos, la marcha de las diversas partecillas del flúido en el seno del mismo, tanto mejor; y empezamos, para dar alguna realidad á estos conceptos, á estudiar el sistema de Lagrange.

Algo conseguimos, y algo muy importante, al señalar en toda masa flúida que se mueve dos clases de movimientos completamente distintos, que llamábamos el movimiento *rotacional*, que da origen á la teoría de los torbellinos, y el movimiento *irrotacional*, que tiene otras aplicaciones importantes.

Análiticamente distinguíamos uno de otro caso, considerando estas tres expresiones.

$$\frac{dw}{ay} - \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$

y viendo si se reducían ó no á cero.

Si no se reducen á cero, sus valores, ó con más exactitud la mitad de sus valores, expresan las componentes de *la rotación*, que tiende á realizar la partícula flúida, que ocupa el lugar (x, y, z) , en el instante t . Y el movimiento es *rotacional*.

Si, por el contrario, dichas tres expresiones son nulas, en cnyo caso, según dijimos,

$$udx + vdy + wdz$$

es una diferencial exacta de x, y, z , el movimiento es *irrotacional*.

Y con la imaginación seguíamos el movimiento de cada punto del flúido en su trayectoria; y le veíamos *avanzar, girar, dilatarse ó condensarse* si el movimiento era rotacional. O reducir todo su movimiento al primero y el último de los tres elementales señalados, si era irrotacional.

Por lo demás, el orden en que se verifiquen estos tres movimientos, infinitamente pequeños, sabemos que por ser infinitamente pequeños importa poco. Y además en la traslación y en la rotación, la masa infinitamente pequeña de flúido de que se trata, aún puede considerarse como un cuerpo sólido.

Quizás sobre esto insistiremos más adelante.

Hasta aquí el resultado plástico, por decirlo de esta manera, que hemos obtenido aplicando al movimiento del fluido el sistema de Lagrange.

Apliquemos con el mismo objeto el *sistema de Euler*. Y en rigor poco tenemos que decir sobre este último aspecto de la cuestión.

Hemos dicho ya, que el sistema de Euler consiste en estudiar lo que pasa en cada instante, en cada punto del espacio que el fluido ocupa.

Más claro: ver por cada punto A , por ejemplo, con qué orientación y con qué velocidad pasa una masa infinitamente pequeña de fluido dm .

Y ahora, aprovechando el estudio anterior, podremos averiguar para cada instante t , en cada punto A , con qué velocidad pasa la masa infinitamente pequeña dm ; en qué dirección, que es como decir cuáles son sus componentes u , v , w ; qué presión lleva, qué densidad tiene, si tiende ó no tiende á girar al llegar á ese punto, y cuál es la dirección y la magnitud del eje de giro, ó si se quiere, el vector de la rotación.

Estudiaremos, pues, todas las rotaciones simultáneas en cada instante t , de todos los elementos del fluido, no las rotaciones sucesivas de la misma masa dm .

Y esto nos proporciona una representación distinta y complementaria de la que antes hemos estudiado.

En suma, antes estudiábamos transformaciones *sucesivas*: este es el sistema de Lagrange.

Ahora estudiaremos transformaciones *simultáneas*, según el espíritu del método de Euler.

Fijemos las ideas por medio de figuras.

Sería verdaderamente absurdo desterrar de la enseñanza al método gráfico, que es método intuitivo, circunscribiendo aquélla á la exposición de fórmulas, por muy sublimes ó muy rigurosas que sean.

Fijemos un instante determinado t del movimiento y tomemos un punto A , figura 26, de la masa fluida.

En ese instante pasará por el punto A un elemento de fluido con una velocidad en la dirección Aa .

Si el movimiento es rotacional, la masa fluida, al pasar por A , tenderá á girar alrededor de un eje determinado, cuya dirección representaremos por AB .

Tomemos sobre este eje un elemento infinitamente pequeño igual á AB , y repitamos para el punto B lo que hemos dicho para el punto A .

En ese mismo instante t pasará por B un elemento de

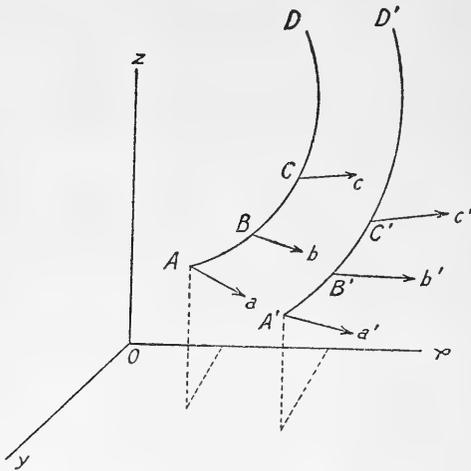


Figura 26.

fluido con una velocidad en la dirección Bb y tenderá á girar alrededor de un eje instantáneo, cuya dirección representaremos por BC .

Para el punto C podemos repetir lo que hemos dicho para los puntos B y A , y continuando de este modo podemos trazar la curva AD , que será en cierto modo la envolvente de los ejes instantáneos de giro AB, BC, \dots

Habremos, por esta operación, trazado, siempre para el instante t , una curva DA tal, que todas las moléculas fluidas

que se encuentran sobre esta curva tenderán á girar alrededor del elemento sobre el cual se encuentran.

Siguiendo la imagen, que hemos presentado otras veces, podemos decir que es un hilo que se retuerce alrededor de cada uno de sus elementos, aunque con distinta torsión según el punto que se considere.

Este filete flúido es lo que llamamos una *línea de torbellino*.

Si elegimos en el mismo instante otro punto A' de la masa flúida, podemos repetir todas las consideraciones que hemos hecho para el punto A , y obtendremos otra línea de torbellino $A'D'$.

Podremos, por lo tanto, para el instante t , que se considera, imaginar que el flúido está compuesto, allí donde el movimiento rotacional exista, de líneas de torbellino $AD, A'D'$.

Todas estas líneas son simultáneas.

Pero todas ellas tienden á cambiar de posición, porque todos sus puntos tienen velocidades determinadas, que hemos representado por $Aa, Bb, Cc, \dots A'a', B'b', C'c' \dots$

En un momento cualquiera todas estas líneas se retuercen y avanzan: se retuercen alrededor de los elementos $AB, BC \dots A'B', B'C' \dots$ y tienden á avanzar según las velocidades en $a, b, c, \dots a', b', c' \dots$

Al avanzar, ¿se descompondrán como líneas rotacionales ó se conservarán para otro instante cualquiera?

Este es problema que estudiaremos más adelante.

Que se conservarán como *líneas del flúido* no cabe duda, dada la continuidad del mismo, y esto lo hemos de demostrar en breve; pero ocurre la idea de que acaso no se conserven como líneas de torbellinos.

En todo lo dicho, que al pronto parece un tanto vago, más adelante iremos poniendo orden, y desvaneciendo dudas, y contestando á interrogaciones que, por el momento, no hacemos más que formular.

Como por ahora no hacemos otra cosa que presentar imá-

genes provisionales de la parte geométrica del movimiento, nos contentaremos con lo dicho, que sintetizaremos de este modo para los dos sistemas, el de Lagrange y el de Euler.

*
* *

En el sistema de Lagrange, el movimiento del fluido se representa por un conjunto de trayectorias á lo largo de las cuales corren los elementos del fluido, avanzando, girando y

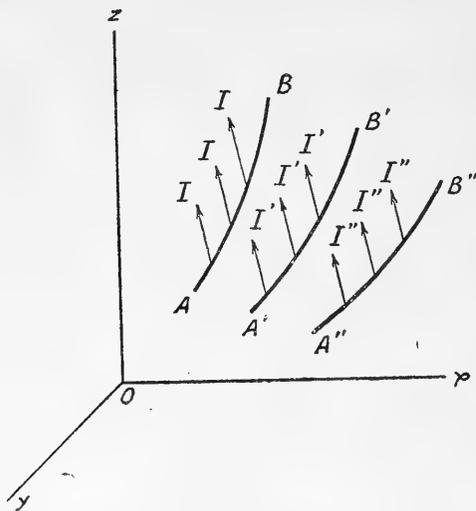


Figura 27.

deformándose; y los ejes instantáneos son líneas que parten de estas trayectorias.

En la figura 27 hemos representado lo dicho esquemáticamente.

$AB, A'B', A''B'' \dots$ son las trayectorias de los elementos fluidos; $I, I', I'' \dots$ los ejes instantáneos de la rotación.

Que podrán ó no determinar envolventes y aun superficies: esto ya lo veremos más adelante.

Si el movimiento es irrotacional, los ejes instantáneos desaparecerán; no quedarán más que las trayectorias.

Esta representación se refiere á todo tiempo t .

En el sistema de Euler, la representación esquemática en cierto modo se invierte.

Para un instante cualquiera, como antes explicábamos, el

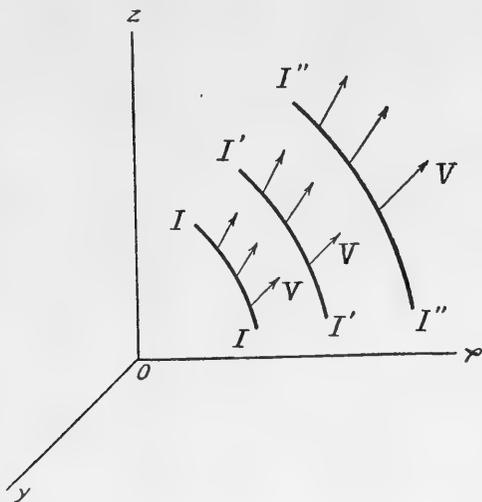


Figura 28

fluido está dividido en líneas de torbellinos $II, I'I', I''I''$ (fig. 28), y de éstas salen líneas de velocidad en ese instante, que son elementos de trayectorias $V....., V'....., V''.....$.

Sobre esta última representación y sobre las diferencias entre las trayectorias y las envolventes de estas velocidades para *un instante t*, aún tendremos que decir algo más adelante.

*
* *
*

A formarnos una idea geométrica del movimiento de un fluido contribuye, en primer término, aunque lo hemos dejado en esta explicación para lo último, la continuidad del fluido que estamos estudiando.

Pero ya apuntamos algunas ideas que ahora vamos á desarrollar.

Dijimos que hay tres problemas que se plantean en formas análogas, y que tienen ciertas semejanzas dignas de consideración, á saber: *la transformación de figuras, la deformación de sistemas elásticos y el movimiento de los flúidos.*

Prescindamos del segundo grupo de problemas que acabamos de indicar.

Fijémonos tan sólo en la transformación de figuras y en el movimiento de un fluido.

Y conste que ya no vamos á considerar dos estados consecutivos infinitamente próximos, sino dos estados cualesquiera.

La transformación de una figura A en otra figura A' (figura 29), y al decir una figura A no queremos decir sólo el contorno, sino todos los accidentes de la figura misma, que pueden ser infinitos, y que no hemos representado por lo mismo, tomando como símbolo de su conjunto la letra A en la figura primitiva, y A' en la transformada; dicha transformación, repetimos, estará definida analíticamente, como hemos explicado con repetición, por tres ecuaciones fundamentales que expresen las coordenadas x' , y' , z' , de cualquier punto M' de la segunda, en función de cualquier punto M de la primera, á saber:

$$x' = \varphi_1(x, y, z),$$

$$y' = \varphi_2(x, y, z),$$

$$z' = \varphi_3(x, y, z),$$

Estas ecuaciones suponemos que son *continuas y unifor-*

mes; es decir, en primer lugar, que á variaciones infinitamente pequeñas de x, y, z corresponden variaciones infinitamente pequeñas también de x', y', z' , y recíprocamente.

De modo que á puntos infinitamente próximos de la figura A , corresponden puntos infinitamente próximos de la figura A' ; y si los primeros forman una línea, los correspondientes de la figura transformada formarán otra línea también.

Si aquéllos forman una superficie, otra superficie formarán

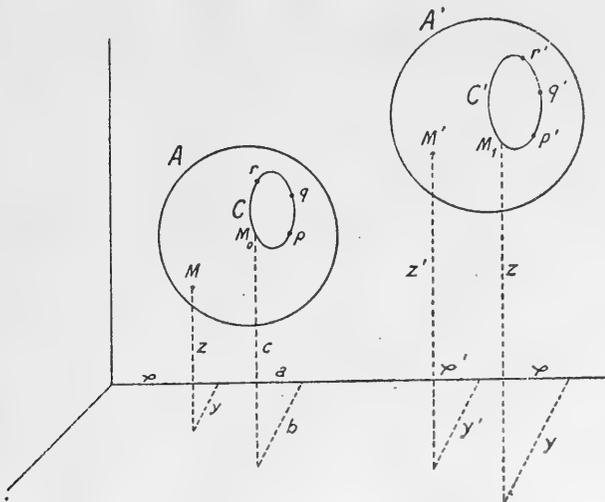


Figura 29.

á su vez los puntos transformados por la aplicación de las ecuaciones anteriores.

Esto es una consecuencia de la idea de *continuidad*; pero no basta para nuestro objeto.

Suponemos además que el sistema de ambas coordenadas es *uniforme*: lo cual significa que á un sistema de valores x, y, z , corresponde *un solo sistema* de valores x', y', z' , y recíprocamente.

O de otro modo, que los puntos de ambas figuras se co-

responden *uno á uno de una sola manera*. A cada punto M , un solo punto M' . A cada punto M' , un solo punto M . Esto es esencial para lo que vamos á explicar á continuación.

Y en el problema de la transformación de figuras esto es posible, porque nosotros escogemos las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

*
* *

Pero si pasamos del problema de la transformación de figuras al del movimiento de un fluido; si A representa una posición de la masa fluida, por ejemplo, en el instante inicial $t=0$, y A' la posición de esa misma masa en otro instante cualquiera t , las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ya no serán arbitrarias, y no podremos afirmar, ni que sean continuas, ni que sean uniformes, porque esto dependerá de la naturaleza del problema dinámico.

Si repetimos todo lo dicho para la transformación de figuras, conservando siempre la figura 29, pero llamando a, b, c las coordenadas de un punto M_0 en la posición inicial A , y llamando x, y, z á lo que antes llamábamos x', y', z' ; es decir, las coordenadas del punto M_0 , en el tiempo t , del elemento del fluido que en el instante inicial era M_0 , y tenía por coordenadas a, b, c , las tres ecuaciones anteriores se escribirán con estas notaciones

$$x = \varphi (a, b, c, t)$$

$$y = \varphi (a, b, c, t)$$

$$z = \varphi (a, b, c, t)$$

y expresarán las integrales de las ecuaciones del movimiento en el sistema Lagrange.

Claro es que si escogemos un instante cualquiera t , la posición del fluido A' en ese instante, podrá considerarse como la transformación de la figura A por virtud de estas

tres últimas ecuaciones como ecuaciones de transformación en que t no será otra cosa que una constante.

Y en rigor, considerando todas las posiciones del fluido, cada una de ellas será una figura de transformación de la primera A y las últimas ecuaciones servirán para todos estos casos, con sólo variar el valor de t ; pero ya estas funciones φ no son arbitrarias; son las que resultan de integrar las ecuaciones diferenciales en el sistema de Lagrange, de modo que no podemos *a priori* afirmar ni que sean continuas, ni que sean uniformes; esto lo dirá el resultado de la integración, ó mejor dicho, la naturaleza de las ecuaciones diferenciales, y, por fin, los datos del problema, entre ellos la naturaleza de las fuerzas exteriores X, Y, Z .

Pero aunque no podamos asegurarlo *a priori*, podemos suponerlo, lo cual significa que nos limitamos á estudiar los casos particulares en que se verifica tal condición; porque precisamente en este estudio particular hemos de encontrarnos con la teoría de los torbellinos.

En suma: en el problema de hidrodinámica que estudiamos, suponemos, como en el problema de la transformación de figuras, que las funciones φ , ó mejor dicho los sistemas a, b, c, x, y, z , puestos en relación por dichas funciones φ , son *continuos* y *uniformes*, y estas condiciones van á permitirnos establecer teoremas importantes, sin que se olvide al establecerlos las condiciones de que hemos admitido.

Si éstas no se verifican, los teoremas caerán por su base; y por lo demás es claro que la Naturaleza, en la complicación de sus fenómenos no está sometida á las condiciones que nosotros establezcamos para simplificar los problemas.

De cualquier modo que sea, si aquellas condiciones no se verifican de una manera rigurosa, pero se verifican aproximadamente, aproximadamente se verificarán también los teoremas en cuestión, y sobre esto tendremos ocasión de presentar algunos ejemplos.

Admitido lo dicho, podemos demostrar con todo rigor, que si en el estado inicial del fluido, estado que hemos representado por A , una serie de moléculas fluidas forman una curva cerrada C , en el movimiento del fluido esta curva será siempre cerrada; por ejemplo, para el instante t , será C' cerrada también, y claro es que podrá considerarse como la transformación de C .

En resumen, toda *curva cerrada* podemos decir que continúa *eternamente cerrada*.

Dadas las hipótesis la demostración es inmediata.

Tomaremos la que presentan casi todos los autores, por ejemplo, Mr. Appell y Mr. Poincaré.

Si en el estado inicial, y es claro que cualquier momento puede ser tal, consideramos una línea cerrada C , analíticamente esta línea estará definida por dos funciones de las coordenadas a, b, c .

Pero también sabemos por geometría analítica que puede expresarse de otro modo, á saber: determinando las tres coordenadas a, b, c por tres funciones de una variable continua é independiente α , en esta forma:

$$a = f_1(\alpha), b = f_2(\alpha), c = f_3(\alpha).$$

A cada valor de α corresponderá en nuestra hipótesis un sistema único de valores a, b, c , y un punto determinado p de la curva.

Suponemos, según lo dicho, que las funciones f_1, f_2, f_3 , son continuas y uniformes; y por eso á cada valor de α sólo corresponde un punto de la curva, aunque, por lo que ahora explicaremos, no afirmamos por el pronto la recíproca.

Dando á α diferentes valores, tendremos diferentes sistemas a, b, c , y cada uno nos determinará un punto p de la curva C .

Las tres funciones f_1, f_2, f_3 serán periódicas respecto á α , puesto que C es cerrada. Así, cuando α , después de haber

determinado todos los puntos p, q, r , determine de nuevo p y siga variando, las funciones f_1, f_2, f_3 volverán á tomar los mismos valores que para el primer ciclo. Por eso decimos que f_1, f_2, f_3 son periódicas en α . Y por eso cada sistema a, b, c corresponderá á infinitos valores de α , y la uniformidad no será recíproca.

Claro es que el período de α puede ser, en general, variable. Si α fuese la longitud S de un arco, el período sería constante é igual á la longitud de la curva. Pero este es un caso particular.

Podemos, en general, decir que a, b, c son funciones continuas y periódicas de α .

Los valores de las coordenadas x, y, z , en un instante cualquiera t vendrán dados por las fórmulas generales

$$x = \varphi_1(a, b, c, t)$$

$$y = \varphi_2(a, b, c, t)$$

$$z = \varphi_3(a, b, c, t)$$

y sustituyendo los valores anteriores de a, b, c , tendremos:

$$x = \varphi_1(f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), t)$$

$$y = \varphi_2(f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), t)$$

$$z = \varphi_3(f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), t)$$

luego x y z serán también funciones de α .

Los puntos correspondientes á ambas curvas C y C' , corresponderán al mismo valor de la variable independiente α , y como las funciones φ á su vez suponemos que son *continuas* y *uniformes*, continuos, uniformes y periódicos serán los valores de x, y, z , y la curva C' también será cerrada.

Más claro: supongamos que en la curva C el origen de α está en p , al cual corresponde el punto p' en la transformada C' .

Al cerrarse el ciclo C tomará α en p un valor tal que se

reproducirán los valores a, b, c del principio, y los mismos valores tomarán f_1, f_2, f_3 en $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, luego los mismos valores tomarán x, y, z en p', y , por lo tanto, la curva C' se cerrará en dicho punto p' .

Lo que hemos explicado para una línea, pudiéramos repetir para una superficie, recordando que las coordenadas de una superficie se pueden expresar por dos variables independientes, y los resultados serían análogos á los anteriores, admitiendo siempre la continuidad y la uniformidad de las funciones que intervienen en la demostración.

Si varias moléculas flúidas, en un momento dado, forman una superficie continua, en cualquier otro momento y para cualquier posición del flúido, formarán otra especie continua; y si es cerrada, continuará siendo cerrada. Porque de lo contrario se vería fácilmente que puntos infinitamente próximos en la primera posición se habían separado á distancias finitas en la segunda, y que á un punto único de la primera corresponderían varios puntos en la segunda.

*
* *

Claro es que estas consecuencias se derivan forzosamente de las hipótesis hechas; pero en la Naturaleza tales hipótesis no se verificarán, por regla general: y decimos en general, porque ni aun para esto queremos aventurar afirmaciones absolutas.

Sería contrario á toda experiencia afirmar que una línea cerrada de moléculas en un líquido ó en un gas, iba eternamente á ser cerrada, y que dichas moléculas iban á estar en contacto, formando una línea continua, cuando á cada momento casi vemos romperse los filetes líquidos y los filetes gaseosos, y líneas cerradas convertirse en líneas abiertas.

Esto mismo podemos repetir para las superficies.

¿Cómo puede creerse que en la realidad, en la Naturaleza, el fluido que contiene una superficie cerrada va á estar sin comunicación, en absoluto, con otras regiones del fluido? ¿No es una abstracción suponer que la superficie que envuelve cierta masa, acaso se dilate, pero que será como una cárcel cerrada eternamente?

Esto podrá admitirse en una transformación abstracta de figuras, y aun en deformaciones elásticas infinitamente pe-

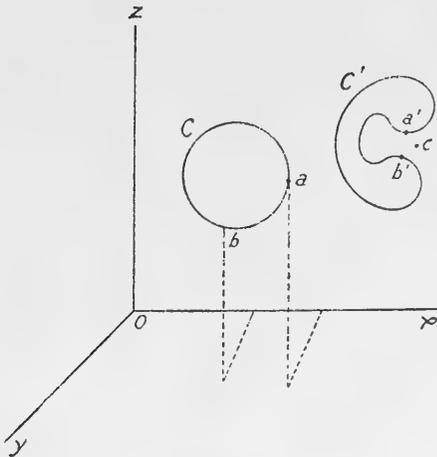


Figura 30

peñas, y cuenta que en la teoría de la elasticidad se presentan, respecto á la continuidad, problemas delicados que no podemos discutir en este momento; pero no son admisibles tales hipótesis en la teoría general de los fluidos, á no ser que en teoría y previamente se establezca la continuidad y la uniformidad absolutas.

Y señalamos esta última condición porque es esencial.

Fijemos las ideas.

Supongamos (fig. 30), que la curva C de elementos de fluido se va transformando de una manera continua en el movimiento, hasta tomar la forma C' .

La masa flúida, que primitivamente estaba en a , de una manera contiua ha venido á parar á a' .

La masa que estaba en b también de una manera continua, ha venido á b' ; pero los dos puntos a' , b' , que corresponden á a y b se encuentran á una distancia infinitamente pequeña $a' b'$, cuando al principio se encontraban á una distancia finita $a b$.

Continuando el movimiento, a' , b' se confundirán y las fórmulas generales de transformación, ó si se quiere las integrales generales, ya no serán *recíprocamente uniformes*.

Si cuando los puntos a' y b' se confunden designamos al nuevo punto por c , podremos decir que al punto a corresponde un solo punto c ; que al punto b corresponde un solo punto c ; pero en cambio al punto c no corresponde un solo punto de la curva C , sino dos, á saber: a , b , de modo que la uniformidad no es recíproca.

Y la curva C , que era sencilla, puede convertirse en una curva con punto múltiplo y hasta en dos curvas distintas.

Claro es que aquí caben muchas otras combinaciones.

*
* *

Para terminar esta materia, hagamos todavía una observación.

Por el estudio á que nos dedicamos en la conferencia anterior y en la de hoy, podemos comenzar á formarnos una idea, todavía un tanto vaga, pero en que ya se van dibujando algunas líneas generales, del movimiento de un flúido perfecto bajo la acción de determinadas fuerzas.

Para ello hemos seguido el método general de Lagrange, y también el método general de Euler, y hemos aplicado el principio de *continuidad* y de *uniformidad* á la masa flúida.

Por el primer método hemos podido seguir la marcha de cada elemento flúido á lo largo de la trayectoria de uno de

sus puntos, suponiendo por de contado dicha masa sumamente pequeña.

Y con la imaginación hemos podido verla en la serie de sus traslaciones, en la serie de sus giros, y en sus expansiones ó contracciones.

Claro es que estos movimientos, para nuestro estudio geométrico, y en cada intervalo infinitamente pequeño de tiempo dt , hemos considerado que eran sucesivos: en la realidad serán simultáneos, y la masa flúida á la vez avanzará, girará y cambiará de densidad por deformaciones puras paralelas á los tres ejes de un elipsoide variable de un punto á otro de la trayectoria.

Cada punto del flúido trazará de este modo una línea continua en vez de tres pequeñas líneas discontinuas, á saber: una recta, un arco y una normal á un elipsoide.

De este primer estudio hemos deducido dos clases de movimientos para cada filete flúido, movimientos que hemos designado con los nombres de movimiento *rotacional* ó de *torbellino* y de movimiento *irrotacional*.

Y por fin, considerando los ejes instantáneos de giro, que constituirán en cierto modo un campo de vectores, hemos anticipado la idea de que estas líneas rectas serán envolventes de otras líneas continuas á que hemos dado el nombre de *líneas de torbellinos*, planteando para más adelante el problema de si en la marcha general del flúido estas líneas se conservan ó se deshacen, soldándose, por decirlo así, elementos de diversas líneas para formar en otro momento otras nuevas.

En el segundo estudio, según el método de Euler, hemos insistido completándolas sobre estas mismas ideas.

Y por fin, aplicando los principios de continuidad y uniformidad, hemos llegado á resultados notables, á saber: la conservación de cada línea cerrada ó de cada superficie también cerrada; algo así como un conjunto de *invariantes geométricas*, si vale la palabra.

Más adelante, y estudiando las líneas de torbellino, llegaremos á consecuencias de este orden aunque aún más significativas; á una especie de conservación de las líneas de torbellino, consecuencia que ha sugerido al ilustre Willian Thonsom la hipótesis de los átomos torbellinos, cuando en la invariabilidad de los átomos de la química se creía.

Propiedad que causó extrañeza y admiración entre físicos y matemáticos; admiración justa, pero acaso confiada en demasía, porque estos resultados no son más que consecuencias naturales de las primitivas hipótesis, hipótesis puramente ideales y que sólo en algunos casos se realizan aproximadamente en los fenómenos de la Naturaleza.

Si, como veremos más adelante, las fuerzas que actúan sobre el sistema no dependen de una función de fuerzas; si existe la viscosidad; si las integrales del movimiento no son funciones uniformes, tales consecuencias desaparecen ó se modifican grandemente, esto aun sin tener en cuenta la temperatura, que es otro elemento importantísimo en la realidad de los fenómenos físicos.

Pero sea como fuere caben nuevas hipótesis, si no respecto á los sistemas ponderables, al menos respecto al éter.

¿No podrá considerarse al éter como de la familia, por decirlo de este modo, de los flúidos perfectos?

¿No le serán aplicables la uniformidad y la continuidad?

¿No podrán imaginarse en el centro del flúido etéreo los movimientos rotacionales que en esta conferencia hemos definido?

Todo esto es materia para más adelante.

Por el pronto, sigamos estudiando el movimiento de un flúido perfecto, y para ello, en la conferencia próxima, empezaremos simplificando y transformando las ecuaciones de Lagrange, mediante nuevas hipótesis: primero, relativas á las fuerzas que actúan sobre el flúido; segundo, respecto á la relación entre la densidad y la presión, relación que continuaremos suponiendo independiente de la temperatura.

XII. -Catálogo de los moluscos testáceos marinos
de la costa y bahía de Cádiz.

POR JOAQUÍN GONZÁLEZ HIDALGO.

85. Eulima polita Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 15, fig. 22.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 92, figs. 1 y 2.

EST. A 30 brazas de profundidad (Mac Andrew).

86. Eulima subulata Donovan.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 15, fig. 25.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 92, figs. 7 y 8.

EST. A 30 brazas de profundidad (Mac Andrew).

87. Odostomia conoidea Brocchi.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 17, fig. 8.

Forbes y Hanley *Brit. Moll.*, lám. 95, fig. 4.

EST. A 30 brazas de profundidad (Mac Andrew).

* **88. Turbonilla fenestrata** Forbes.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 16, fig. 7. (*Chemnitzia*).

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 93, figs. 6 y 7. (*Chemnitzia*).

EST. Dragada en el bajo del río San Pedro. Poco abundante.

89. Turbonilla lactea Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 16, fig. 1. (*Chemnitzia*).

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 93, figs. 1 y 2.
Chemnitzia elegantissima.

EST. A 30 brazas de profundidad (Mac Andrew).

Citada de Cádiz con el nombre sinónimico de *Chemnitzia elegantissima*.

90. Turbonilla rufa Philippi.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 16, figs. 4 y 5.
(*Chemnitzia*).

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 93, figs. 3 y 4.
(*Chemnitzia*).

EST. A 30 brazas de profundidad (Mac Andrew).

91. Janthina communis Lamarck.

Reeve, *Conch. icon. Janthina*, fig. 5.

HAB. Cádiz (Martorell).

* **92. Janthina balteata** Reeve.

Reeve, *Conch. icon. Janthina*, fig. 11.

EST. Arrojada por el mar á la orilla. Común.

Hay dos pequeñas *Janthina* muy parecidas en sus caracteres, y las dos del Atlántico, la *balteata* del Cabo y la *Smitthiae* de Inglaterra, según Reeve. Los ejemplares hallados en Cádiz se parecen más á la primera.

* **93. Scalaria communis** Lamarck.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.* lám. 59,
figuras 1 y 2. (*Scala*).

EST. En el bajo del río Guadalete. Poco común.

94. Scalaria lamellosa Lamarck.

Kiener, *Species, Scalaria*, lám. 3, fig. 7.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 63,
figuras 2 y 3. (*Scala commutata*).

HAB. Cádiz (Maxwell Smith).

El nombre de *Scalaria commutata* dado á esta especie por Monterosato es posterior al de *lamellosa* empleado por Lamarck.

95. Scalaria crenata Linné.

Kiener, *Species*, lám. 6, fig. 18. *Scalaria crenulata*.

HAB. Cádiz (Fischer) el cual la designa con el mismo nombre de Kiener.

* **96. Cerithium vulgatum** Bruguiere.

Kobelt, *Iconogr. europ. meeresconchyl.*, lám. 115, figuras 8 y 9.

EST. En las rocas de *La Pólvora* y de Santa Catalina, en la zona de las mareas. Común. Puerto Real (Calderón).

De esta especie tan variable, los individuos recogidos en Cádiz corresponden más exactamente con las figuras que se citan de la obra de Kobelt.

* **97. Cerithium rupestre** Risso.

Kiener, *Species*, lám. 9, fig. 1 (*Cerithium fuscatum*).

EST. En las rocas de *La Pólvora* y Santa Catalina, en la zona de las mareas. Común. Deshayes le dió el nombre de *Cerithium mediterraneum*. Está también citada de Cádiz la variedad denominada *Cerithium lividulum* Risso (Kobelt, *Iconographia europ. meeresconchyl.*, lám. 117, figs. 17 y 18).

* **98. Bittium reticulatum** Da Costa.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 15, fig. 8. (*Cerithium*).

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 91, figs. 1 y 2. (*Cerithium*).

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete. Común.

Se ha citado también de Cádiz con el nombre de *Cerithium scabrum*.

* 99. **Triforis perversus** Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 15, fig. 10.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 91, figs. 5 y 6.
(*Cerithium adversum*).

EST. En las plantas marinas. Raro.

* 100. **Littorina rudis** Donovan.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 89, figs. 3, 4,
13 y 14.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 12, figs. 16 á 18.

EST. Viven adheridas á las piedras en varios sitios de la bahía las variedades *patula* y *tenebrosa* de esta especie. (Paz é Hidalgo.)

* 101. **Littorina Neritoides** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 84, fig. 2.

EST. En las rocas de Santa Catalina, á veces fuera del agua. Común.

Los ejemplares son negruzcos del todo, como la figura que se cita.

* 102. **Littorina punctata** Gmelin.

Reeve, *Conch. iconica, Littorina*, fig. 66.

Kobelt, *Iconographia europ. meeresconchyl.*, lámina 112, figs. 5 y 6.

EST. En las rocas de Santa Catalina. Común.

103. **Fossarus costatus** Brocchi.

Tryón, *Man. Conch.* IX, lám. 51, fig. 94. *Fossarus sulcatus*.

HAB. Cádiz (Maxwell Smith), el cual le cita con el nombre de *Littorina clathratus*.

104. **Rissoa ventricosa** Desmarest.

Schwartz, *Rissoa*, lám. 3, fig. 36.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 61, fig. 15.

HAB. Cádiz (Maxwell Smith).

* 105. **Rissoa subcostulata** Schwartz.

Schwartz, *Rissoa*, lám. 3, fig. 22.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 62, fig. 35 (*Guerini*
var. *costulata*).

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 77, figs. 4 y 5.
Rissoa costulata.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete,
sobre algas filamentosas, en la zona de las mareas. Común.

* 106. **Rissoa similis** Scacchi.

Schwartz, *Rissoa*, lám. 3, figs. 28, 28 a.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 61, fig. 29.

EST. Sobre las algas (Hidalgo).

* 107. **Rissoa glabrata** Muhlfeldt.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 14, fig. 10.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 69, fig. 45.

EST. Sobre las plantas marinas (Hidalgo).

108. **Rissoa vitrea** Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 75, figs. 5 y 6.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 63, fig. 81.

EST. A seis brazas en fondo de arena fangosa (Folin).

109. **Alvania láctea** Michaud.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 13, fig. 12.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 66, fig. 51.

HAB. Cádiz (Maxwell Smith).

* 110. **Alvania cimex** Linné.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 65, figs. 11 y 12.

EST. En la desembocadura del río Guadalete, á 2 brazas
de profundidad, en fondo de fango y plantas marinas.

111. *Alvania striatula* Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 79, figs. 7 y 8.
(*Rissoa*).

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 66, fig. 58.

HAB. Cádiz (Mac Andrew, según Jeffreys).

*** 112. *Alvania Montagu* Payraudeau.**

Payraudeau, *Moll. Corse*, lám. 5; fig. 14. (*Rissoa*).

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 65, fig. 15.

HAB. Cádiz (Hidalgo). A 30 brazas, en fondo de arena y cascajo (Mac Andrew).

113. *Alvania cimicoides* Forbes.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 13, figura 6.
(*Rissoa*).

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 65, fig. 27.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 80, figs. 5 y 6.
(*Rissoa sculpta*).

HAB. Cádiz (Weinkauff), con el nombre de Forbes.

*** 114. *Barleeia rubra* Adams.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 78, figs. 4 y 5,
y lám. 80, fig. 3. (*Rissoa*).

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 60; fig. 71.

EST. En las plantas marinas (Hidalgo).

*** 115. *Skenea planorbis* Fabricius.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 74, figs. 1 á 3.

Tryon, *Man. Conch.* IX, lám. 60, fig. 100.

EST. Sobre las plantas marinas (Hidalgo).

*** 116. *Peringia ulvæ* Pennant.**

Morelet, *Moll. Portugal*, lám. 7, fig. 5. *Melania*
Charreyi.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 81, figs. 4, 5, 8, 9
y lám. 87, figs. 2, 8. (*Rissoa*).

EST. En un afluente del Guadalete próximo á la desembocadura de este río, y que sólo cubre el agua en las horas de pleamar. Muy abundante.

Creo que los ejemplares pequeños de esta especie han sido dados por Maxwell Smith, como *Paludestrina acuta*. (*Cyclostoma acutum* Draparnaud).

117. Truncatella subcylindrica Linné.

Draparnaud, *Hist. Moll.*, lám. 1 figs. 28-31 (*Cyclostoma truncatulum*),

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 32, figuras 24 á 29.

HAB. Cádiz (Maxwell Smith), con el nombre de *Truncatella truncatula*.

*** 118. Adeorbis subcarinatus** Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 68, figs. 6 á 8.
Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 11, fig. 25.

EST. Dragado un ejemplar vivo á 4 brazas de profundidad, en fondo de fango y plantas marinas, en la desembocadura del río San Pedro.

*** 119. Phasianella Pullus** Linné.

Kiener, *Species, Phasianella*, lám. 5, fig. 1.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 11, fig. 27.

EST. En los bajos de los ríos Guadalete y San Pedro. Común.

Especie muy variable de dibujo y coloración, como se indica en las figuras de Kiener.

*** 120. Phasianella tenuis** Michaud.

Kiener, *Species*, lám. 4, fig. 3. *Phasianella intermedia*.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 39, figuras 19 á 24.

EST. En el mismo sitio que la anterior. Común.

Es también variable la coloración de esta especie, pero no tanto como en la *Phasianella Pullus*.

* 121. ***Astralium rugosum*** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 56, figuras 1 á 4. (*Turbo*).

Kiener, *Species, Turbo*, lám. 15, fig. 1.

EST. Vive en todos los arrecifes existentes entre el Puerto de Santa María y Chipiona, de donde es sacado por las redes de la Corvina. Abundante.

* 122. ***Clanculus cruciatus*** Linné.

Fischer en Kiener, *Species*, lám. 95, fig. 3. *Trochus cruciatus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 63, figuras 1 á 3; lám. 65 A, figs. 19 y 20.

EST. En las rocas del *Corral Catalán*. Abundante.

Hay ejemplares desprovistos de las manchas blancas en la espira, y en los individuos que las tienen son á veces en menor número y están dispuestas en forma de cruz, á lo cual alude su nombre específico.

Los ejemplares muertos son encarnados por alteración del color de la concha.

* 123. ***Clanculus Jussieui*** Payraudeau.

Kiener, *Species*, lám. 82, fig. 1. *Trochus Jussieui*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 63, figuras 4 á 7.

EST. En las rocas del *Corral Catalán*, lo mismo que el anterior. Común.

* 124. **Trochocochlea lineata** Da Costa.

Fischer en Kiener, *Species*, lám. 67, fig. 2. *Trochus crassus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 61, fig. 1 y lámina 62, figs. 3 á 5. (*Trochus*).

Var. *Trochocochlea denudata* Monterosato.

Hidalgo, *loc. cit.* lám. 62, figs. 1 y 2. (*Trochus*).

Pallary, *Journ. Conch.* 1902, lám. 1, figs. 21 y 22. *Trochocochlea crassa. var. denudata*.

EST. Muy abundante en todas las rocas de la bahía.

La variedad es de color leonado ó gris, más ó menos verdoso y claro, sin las líneas negruzcas del tipo, pero no puede considerarse como especie distinta, porque se encuentran algunos ejemplares en que la mitad de la última vuelta tiene la coloración del tipo y la otra parte la de la variedad. Los demás caracteres son los mismos.

* 125. **Trochocochlea articulata** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 61, fig. 3 y lámina 62, figs. 6 á 8. (*Trochus*).

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 49, figs. 2 y 4. (*Trochus*).

EST. Se encuentra en el *Caño de la Carraca*, delante de Puerto Real. Común.

126. **Gibbula cineraria** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 64, figs. 10, 11, 12, 14. (*Trochus*).

HAB. Cádiz (Martorell).

* 127. **Gibbula umbilicaris** Linné.

Kiener, *Species*, lám. 48, fig. 2. (*Trochus*).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 64, figs. 3 á 7. (*Trochus*).

EST. En el bajo del río San Pedro, en fondo de fango y plantas marinas, á una braza de profundidad. Común.

* 128. **Gibbula Philberti** Recluz.

Kiener, *Species*, lám. 87, fig. 1. *Trochus villicus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 65, B., figs. 9 á 11. (*Trochus*).

EST. En las rocas del *Corral Catalán*. Abundante.

* 129. **Gibbula varia** Linné.

Kiener, *Species*, lám. 87, fig. 2. *Trochus varius*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 63, figs. 8 á 11. (*Trochus*).

EST. En las rocas del *Corral Catalán*. Común.

Se encuentran las dos variedades que he figurado, con manchas ó listas blanquecinas, ó sin ellas, por la parte superior de la concha.

* 130. **Gibbula obliquata** Gmelin.

Kiener, *Species*, lám. 62, figs. 2 y 3. *Trochus umbilicatus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 61, figs. 9 á 11. *Trochus umbilicatus*.

EST. En las rocas del *Corral Catalán*. Común.

Se encuentra también la variedad imperforada denominada *Trochus Agathensis* por Recluz.

* 131. **Calliostoma granulatum** Born.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 59, figs. 10 y 11. (*Trochus*).

Tryon, *Man. Conch.* XI, lám. 16, fig. 7.

EST. Sacado por las redes del bou frente á Chipiona, á 60 brazas de profundidad, de fondo de fango. Raro.

* 132. **Calliostoma Zizyphinus** Linné.

Var. *conuloides* Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 59, figs. 4 y 5.
(*Trochus*).

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 41, figs. 9 á 11.
(*Trochus*).

EST. Sacado por las redes del bou, frente á Chipiona, á 60 brazas de profundidad, de fondo de fango. Abundante.

Var. *Chemnitzii* Philippi.

Hidalgo, *loc. cit.*, lám. 65, figs. 1 y 2. (*Trochus*).

EST. Entre las rocas, en el Corral Catalán. Común.

El tipo de la especie tiene lisas las vueltas de espira, con un cordón en el ángulo de la última vuelta; la variedad *conuloides* presenta en las vueltas cuatro ó cinco cordones, y en la variedad *Chemnitzii* éstos son más numerosos, más finos y ligeramente granosos. De esta última dí al Marqués de Monterosato algún ejemplar que encontré en Málaga y dió cuenta de ella con el nombre de «*multisúlcosa*» Hidalgo.

* 133. **Calliostoma dubium** Philippi.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 65 a., figs. 13 y 14. (*Trochus*.)

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 42, figs. 5 á 9.
(*Trochus*.)

EST. A dos brazas, en fondo de plantas marinas, en la desembocadura del río San Pedro. Raro.

* 134. **Calliostoma striatum** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 66, figs. 5 y 6.
(*Trochus*.)

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 43, fig. 9.
(*Trochus*.)

EST. En diversos puntos de la bahía, sobre fondo de plantas marinas, en la zona de las mareas. Abundante.

* 135. **Calliostoma exasperatum** Pennant.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 65 B, figs. 1 y 2. (*Trochus*.)

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 66, figs. 11 y 12. (*Trochus exiguus*.)

EST. En las rocas de Santa Catalina y sacado también de cuatro á seis brazas en las redes de la Corvina. Común.

* 136. **Haliotis tuberculata** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 29, figs. 1 á 3.
Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 64.

EST. En las rocas de la Puñtilla de Rota, en la zona de las mareas. Rara.

* 137. **Fissurella nubecula** Linné.

Hanley, *Ipsa Linn. Conchyl.*, lám. 4, fig. 10.

Tryon, *Man. Conch.* XII, lám. 60, figs. 94 á 98.

EST. Adherida á las rocas (Hidalgo).

* 138. **Glyphis gibberula** Lamarck.

Reeve, *Conch. icon. Fissurella*, figs. 119 a. b.

Tryon, *Man. Conch.* XII, lám. 36, figs. 21 á 24.

EST. Hallados varios ejemplares con el animal, arrojados por las olas á la playa de Santa Catalina.

* 139. **Glyphis græca** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 63, fig. 4. (*Fissurella reticulata*.)

Tryon, *Man. Conch.* XII, lám. 35, figs. 7 8.

EST. En las rocas de Santa Catalina, en la zona de las mareas. Común.

* 140. **Acmæa virginea** Muller.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 61, figs. 1 y 2.

Tryon, *Man. Conch.* XIII, lám. 10, figs. 13 y 14.

EST. Adherida á las piedras sumergidas (Hidalgo). Rara.

* 141. **Patella vulgata** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 52, figs. 6 y 8.

EST. En las rocas de Santa Catalina. Abundante. Puerto Real. (Calderón).

* 142. **Patella aspera** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 53, figs. 5 y 6.

EST. En las rocas de Santa Catalina. Común.

Especie bien distinta de todas las variedades de la anterior.

* 143. **Actæon tornatilis** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos de España*, lám. 19, figuras 3 y 4.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 114. D, fig. 3.
Tornatella fasciata.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 66, figs. 15 á 17.

EST. Dragado á 3 brazas en fondo de fango y plantas marinas, dentro de la bahía. Puerto Real. (Calderón).

Además del tipo de la especie, que presenta dos zonas blancas transversales, se ha encontrado una variedad en que sólo existe la faja superior, como se ve en la figura antes citada de Forbes y Hanley, y en la 17 de Dautzenberg.

144. **Ringicula auriculata** Menard.

Morlet, *Journ. de Conchyl.*, 1878, lám. 5, fig. 14.

EST. A 30 brazas de profundidad, en fondo de arena y cascajo (Mac Andrew).

145. **Ringicula leptocheila** Brugnone.

Morlet, *Journ. de Conchyl.*, 1878, lám. 5, fig. 17.

EST. A 58 brazas de profundidad (Locard).

146. Ringicula conformis Montérosato.

Journ. Conchyl., 1875, lám. 2, fig. 4.

Morlet, *Journ. Conchyl.*, 1878, lám. 5, fig. 5.

HAB. Cádiz (Folin).

147. Scaphander lignarius Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 9, figs. 1 y 2.

EST. A 60 brazas de profundidad (Locard).

* **148. Bulla striata** Bruguiere.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 9, figs. 4 y 5.

Tryon, *Man. Conch.* XV, lám. 37, figs. 42 á 46.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete, en la zona de las mareas. Común. Puerto Real (Calderón).

* **149. Haminea Hydatis** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 9, figs. 6 á 8.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 20, fig. 18.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 63, fig. 4 á 7.

Haminea navícula.

EST. En el fango, á poca profundidad, en aguas tranquilas (Hidalgo).

150. Haminea elegans Leach.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 21, figs. 4 y 5.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 20, fig. 19. *Haminea Hydatis*.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 63, figs. 8 y 9.

Haminea Hydatis.

HAB. Cádiz (Maxvell Smith).

No están de acuerdo los autores sobre cuál de estas dos especies de *Haminea* es la *Bulla Hydatis* de Linné. En mi obra *Moluscos marinos de España* he referido la especie Linneana á la de mayor tamaño, ó sea la *Bulla navícula* de Dacosta ó *cornea* de Lamarck. Estudiado otra vez este

punto, mantengo mi opinión, porque dice Hanley (*Ipsa Linnæi Conchylia*, pág. 204) que el ejemplar de *Bulla Hydatis* de la colección Linné conviene con la figura número 1 de la lámina 360 de la *Encycl. Methodique*, y esta figura no corresponde, ni por su forma, ni por su tamaño, con los ejemplares de la *Haminea elegans*, que es muy pequeña. Representa un individuo de tamaño regular de la *Bulla cornea* de Lamarck. En cuanto á las palabras *sæpius magnitudine pisi minoris*, sólo indican que vió ejemplares pequeños y jóvenes de la *Bulla Hydatis* ó que juzgó eran de la misma especie algunos de la denominada posteriormente *elegans* por Leach. La figura citada por Hanley de la Enciclopedia, que conviene con el ejemplar de la colección de Linné, basta para asegurar que debe aplicarse el nombre de este autor á la especie de mayor tamaño.

151. *Cylichna cylindracea* Pennant.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 114 B, fig. 6.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 20, fig. 4.

EST. A 30 brazas de profundidad en fondo de arena y cascajo (Mac Andrew), el cual la cita con el nombre de *Bulla cilíndrica*.

*** 152. *Chætopleura fulva* Wood.**

Wood, *General Conchology*, I, pág. 7, lám. 1, figura 2. *Chiton fulvus*.

Reeve, *Conch. icon. Chiton*, lám. 7, fig. 39.

Tryon, *Man. Conch.* XIV, lám. 44, figs. 62 á 64.

EST. Vive en la desembocadura del río San Pedro, sobre fondo de plantas marinas. Común.

Descrita ya esta especie por Chemnitz y citada por él de Cádiz con el nombre de *Chiton candidatus Gaditanus*, ha sido denominada después por Wood con arreglo á la nomenclatura binaria con el de *Chiton fulvus*. La primitiva figura de Chemnitz es mala; la de Wood es buena, lo mismo que

su descripción, en la cual indica que el color de la concha es leonado ó pardo, más obscuro en el ángulo del dorso en los ejemplares bien conservados, y blanquecino en los que están algo corroídos. Los ejemplares de Cádiz difieren del tipo en que la coloración es más oscura y las líneas de las valvas son azuladas en vez de blanquecinas. Wood citó este molusco de Portugal; le tengo también de la Coruña, La Guardia (un ejemplar de 60 milímetros) y otras localidades de Galicia, en el Noroeste de España.

* 153. **Ischnochiton cinereus** Linné.

Reeve, *Conch. icon.*, figs. 182 y 183. *Chiton marginatus*.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 58, fig. 1. *Chiton marginatus*.

Tryon, *Man. Conch.* XIV, lám. 6, figs. 25 á 31.

HAB. Adherido á las piedras (Hidalgo) en diversos puntos de la bahía.

* 154. **Nuttallina cinerea** Poli.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 61, figs. 7 á 9. *Chiton caprearum*.

Tryon, *Man. Conch.* XIV, lám. 54, figs. 28 á 33

EST. En los mismos sitios que la especie anterior. (Hidalgo.)

Puede conservarse el nombre *cinereus* Poli, porque no es la misma especie que el *Chiton cinereus* Linné, y cada una está incluida actualmente en género diferente.

* 155. **Chiton olivaceus** Spengler.

Reeve, *Conch. icon.*, lám. 2, fig. 5. *Chiton Siculus*.

Tryon, *Man. Conch.* XIV, lám. 35, figs. 87 á 92.

EST. En las rocas de la Puntilla de Rota, en la zona de las mareas. Común.

Escafopodos.

* 156. **Dentalium dentale** Linné.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 66, figuras 10 y 11,

Tryon, *Man. Conch.* XVII, lám. 9, figs. 55 á 57.

EST. Dragado delante de Santa Catalina, de 8 á 10 brazas de profundidad, en fondo de fango. Poco abundante.

* 157. **Dentalium rubescens** Deshayes.

Tryon, *Man. Conch.* XVII, lám. 19, fig. 2.

EST. En el mismo sitio que el anterior y más abundante.

* 158. **Dentalium novemcostatum** Lamarck.

Tryon, *Man. Conch.* XVII, lám. 9, figs. 44 á 48.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 66, figuras 12 á 14.

EST. Sacado por los pescadores á 30 brazas de profundidad, de fondo de fango. Raro.

Pelecípodos.

* 159. **Ostrea edulis** Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 17.

EST. Sacada por las redes del bou de profundidades variables y fondo de fango. Común.

* 160. **Ostrea angulata** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 76, figs. 1 á 4 y lám. 77, fig. 3.

Reeve, *Conch. icon.* fig. 20. *Ostrea rostralis*.

EST. Cubre casi totalmente la mayor parte de las rocas de la bahía. Muy común.

Su forma es variable en extremo y se distingue siempre de la especie anterior por los pliegues de sus valvas, la inferior más cóncava y la mancha pardo-purpúrea de su impre-

sión muscular. Dentro del río Guadalete abunda también una variedad alargada denominada *Ostrea rostralis* por Sowerby. La *Ostrea angulata* vive también en Portugal, en la desembocadura del Tajo, y está aclimatada en la costa de Francia.

Chemnitz la menciona de Cádiz, pero creyéndola igual á una especie exótica que describe y figura con el nombre de *Ostrea plicata*, y que es bien distinta. Lamarck la incluyó en el género *Gryphæa*.

* 161. **Ostrea Cochlear** Poli.

Reeve, *Conch. icon.* *Ostrea*, fig. 44.

EST. Adherida á los objetos sumergidos y á diversos políperos. (Paz). A 58 brazas de profundidad. (Locard).

* 162. **Anomia Ehippium** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 66, figs. 2 y 3 y lám. 67, fig. 4.

Sowerby, *Ind. Brit. Shells*, lám. 8, fig. 18.

EST. En diversos puntos de la bahía de Cádiz, adherida á las piedras, á otros individuos de la misma especie, ó á valvas de otras conchas, etc., y también en el sitio denominado El Limpio. Muy abundante.

Cuando se fija sobre *Pecten*, presenta costillas lo mismo que éstos.

* 163. **Lima squamosa** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57 B, fig. 8.

Reeve, *Conch. icon.*, fig. 10.

EST. Adherida por el biso á las rocas del Corral Catalán, en la zona de las mareas. Muy rara.

* 164. **Lima inflata** Chemnitz.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57 B, fig. 9.

Reeve, *Conch. icon.*, fig. 17. *Lima fasciata*.

EST. Dragada á 2 brazas de profundidad en Santa Catalina, en fondo de fango. Poco abundante.

* 165. **Lima hians** Gmelin.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57 B, fig. 11.
Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, II, lám. 11, figs. 7 á 11. (*Radula*)

EST. Entre las rocas de Santa Catalina. Rara.

* 166. **Pecten maximus** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Mollusca*, lám. 49.
Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 34, fig. 1.

EST. En los sitios denominados El Limpio y las Arenas, de 16 á 30 brazas de profundidad. Común.

En los ejemplares hasta ahora recogidos la valva plana es de color castaño, con algunas líneas angulosas más oscuras, y á veces con manchas blancas cerca del gancho, y blanca la valva convexa, menos en el ápice, donde es rojiza.

* 167. **Chlamys opercularis** Linné.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 36, figs. 2 y 5,
y lám. 35 A, fig. 3. (*Pecten*).

Var. *Pecten lineatus* Da Costa.

Chemnitz, *Conch. Cab.*, 2.^a edic. *Pecten*, lám. 31,
figuras 2 y 3.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 51, fig. 5.

EST. Sacado con las redes de los pescadores del sitio denominado Las Arenas, de 16 á 30 brazas de profundidad. Abundante.

Esta especie varía mucho en su coloración, según puede verse en las láminas de diversos autores; pero en Cádiz las variedades hasta ahora recogidas son:

De color castaño, con grandes manchas blancas.

Algo purpúrea, con pequeñas manchas blanquecinas.

Leonada, con radios algo purpúreos.

De color uniforme naranjado ó amarillo de azufre.

Amarillo de azufre con manchas blancas.

Blanquecina, con una línea purpúrea sobre cada costilla.

(*Pecten lineatus*.)

* 168. **Chlamys varius** Linné.

Chemnitz, *Conch. Cabinet*, 2.^a edic. *Pecten*, lámina 24, fig. 4.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 35, figs. 1 y 3.
(*Pecten*.)

EST. En el mismo sitio que el anterior, y además en otros muchos puntos de la bahía de Cádiz. Común.

Los individuos hallados son de un morado obscuro; encarnados, con algunas manchas blanquecinas hacia los ganchos, ó amarillos, conviniendo exactamente con las figuras citadas.

* 169. **Chlamys glaber** Linné.

Var. *sulcatus* Born.

Reeve, *Conch. icon.*, fig. 50. *Pecten sulcatus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 33, fig. 5. *Pecten sulcatus*.

EST. En el sitio denominado Las Arenas, de 16 á 30 brazas de profundidad. Raro.

Locard (*Expéd. Travailleur*, II, pág. 388) cita también de Cádiz esta especie con el nuevo nombre de *Pecten subsulcatus*, porque dice que Müller dió ya la denominación de *sulcatus* en 1776 á otra especie diferente.

En el Mediterráneo viven muchos individuos de ciertos *Pecten*, muy semejantes en su forma, pero de colores y dibujos diversos, que están considerados por algunos autores como pertenecientes todos á una sola especie, al *Pecten glaber* Linné, y por otros naturalistas como especies distintas, con los nombres de *Pecten anisopleurus*, *citrinus*, *discors*, *distans*, *flagellatus*, *flexuosus*, *glaber*, *griseus*, *isabella*, *ma-*

culatus, nebulosus, plica, plicatus, polymorphus, proteus, rusticus, solaris, subsulcatus, sulcatus, unicolor y virgo.

Muy probablemente es exacta la opinión de los primeros; pero en el caso de admitir más de una especie, hay que prescindir de los caracteres de la coloración, y atendiendo sólo á algunas variaciones de forma y escultura, pueden considerarse como distintos los siguientes *Pecten*, hoy día *Chlamys*:

Pecten glaber Linné. Con 10 costillas radiadas, próximamente iguales, más ó menos separadas entre sí, y en ocasiones alguna bifurcada.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 24. *Pecten unicolor* y figura 50. *Pecten sulcatus*.

Chemnitz, *Conch. Cabinet*, 2.^a edic., lám. 38, figuras 4 á 8, y lám. 34, figs. 1 á 3. *Pecten glaber*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 32, figs. 7 y 8, lámina 33, figs. 2 á 5 y lám. 34, fig. 2. *Pecten sulcatus*.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, láms. 19 y 20, figuras 1 á 3, *Pecten glaber*, tipo y var. *distans, sulcata* y *pontica*.

Locard, *Exped. Travailleur*, lám. 16, figs. 1 á 15. *Pecten distans, griseus* y *anisopleurus*; lám. 17, figuras 5 á 11. *Pecten subsulcatus*.

Pecten discors Chemnitz. Con 10 costillas radiadas, más estrechas y menos salientes las intermedias. Chemnitz, *Conch. Cab.*, 2.^a edición, lám. 17, figura 13, lám. 18, fig. 7 y lám. 33, fig. 1. *Pecten discors*.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 53. *Pecten glaber*.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 20, figs. 7 y 8. *Pecten proteus* var. *præterita*.

Locard, *Exped. Travailleur*, lám. 17, figs. 16 á 19. *Pecten glaber*.

Pecten proteus Solander. Con 5 costillas radiadas, algo prominentes y separadas entre sí.

Reeve, *Conch. iconica*. *Pecten*, fig. 55.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 20, figs. 4 á 6.

Locard, *Expedit. Travailleur*, lám. 17, figs. 12 á 15.

Chemnitz, *Conch. Cabinet*, lám. 33, figs. 2 y 3.

Pecten flexuosus Poli. Parecido al *Pecten discors*, pero de menor tamaño, aurículas más puntiagudas, borde inferior de las valvas doblado hacia dentro; 10 costillas radiadas; las intermedias, más pequeñas y á veces nulas.

Reeve, *Conch. icon. Pecten*, fig. 61.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 32, figs. 3 á 7 y lám. 35, figs. 5 y 6.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 21, figuras 1 á 10.

Chemnitz, *Conch. Cabinet*, 2.^a edic., lám. 7, figuras 8 á 11 y lám. 34, figs. 4 á 8.

(Continuará.)

L. — Potenciómetro autocalibrable.

POR B. CABRERA

1. Este potenciómetro está destinado á la medida de pequeñas intensidades de corriente y fuerzas electromotrices, hallándose dispuesto de tal suerte que puedan determinarse las resistencias de sus diferentes porciones en función de la resistencia media del hilo por unidad de longitud.

Esquemáticamente el aparato está constituido por veinte resistencias iguales $b_1, b_2, b_2 \dots b_{19}, b_{20}$, (fig. 1) en serie, y

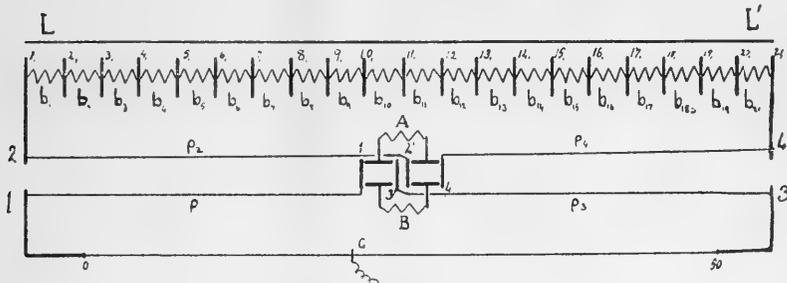


Figura 1.

un hilo de resistencia también igual á cada una de aquéllas. Además, todas ellas están construídas con el mismo hilo, para lograr la mayor igualdad posible en el coeficiente de temperatura. Para su empleo, la corriente penetra por el bloque 4—2₁, pasa del 2 al 1 mediante una lámina de conexión, que se ve en la fig. 7, y sale por 3 (dicho se está que en este caso los bloques 3 y 4 están desligados). La fuerza electromotriz se une á la barra LL' , que puede comunicar con cualquiera de los bloques $1_1, 2_1, 3_1 \dots 19_1, 20_1, 21_1$ por una clavija, y con el contacto móvil, G . Su funcionamiento como tal potenciómetro no necesita mayor explicación.

2. Veamos la manera de calibrarle. La primera parte de este calibrado se refiere al estudio del hilo. Para este fin se disponen en 1—2 y 3—4 dos resistencias iguales, A y B , que pueden permutarse mediante el conmutador representado en el esquema, con el fin de hallar su valor en función del hilo y comprobar su igualdad, en la forma que más adelante diremos. Uniendo 2 y 4 á los polos de una pila, y G y uno de los bloques intermedios, $6_1, 7_1, 8_1 \dots 14_1, 15_1, 16_1$, á un galvanómetro, tendremos constituido un puente de Wheatstone, con cuyo auxilio se logra el estudio en cuestión, dividiendo el hilo en 11 partes de igual resistencia, empleando la modificación del método de Carey-Foster que hemos descrito anteriormente (*).

3. En segundo término, es menester que conozcamos los valores de A y B en partes del hilo. Para ello, supongamos se trata de A : puesta esta resistencia en 1'—2', por ejemplo, se ligan 3—4 por una resistencia nula, buscándose la posición de equilibrio de G en el puente antes reseñado. Hecha la lectura correspondiente se permutan A y la conexión de resistencia nula, restableciéndose el equilibrio del puente mediante el cambio de posición de G . Como es sabido, el valor de A será la diferencia de las lecturas en G . El mismo método se sigue en la determinación de B .

En la práctica es menester agregar un término de corrección, puesto que en la primera posición de A se suman á ella las comunicaciones ρ_1, ρ_2 , y en la segunda las ρ_3, ρ_4 . Además, las resistencias de los contactos de la conexión en 3—4, pueden no ser iguales á las que corresponden á 1—2. Para determinar el término de corrección es menester medir $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, de una vez para todas, y en cada caso los valores que toma la conexión con los contactos correspondientes.

(*) An. S. Esp. Fís. Quím. IX., 44.

Teniendo en cuenta que las ρ son cantidades muy pequeñas y sensiblemente iguales por construcción, su medida puede ejecutarse por el método siguiente:

ρ_1 y ρ_3 . Montado el puente en la forma que indica el esquema (fig. 2), se hace el equilibrio con una lectura en G , que llamaremos x_1 . Se transporta la pila á 1' y se equilibra

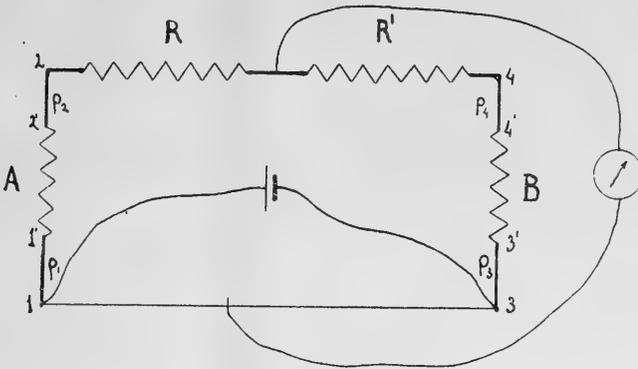


Figura 2.

nuevamente, designando por x_2 la lectura. Las ecuaciones de equilibrio serán, llamando l la resistencia total del hilo

$$(*) \quad \frac{x_1}{l - x_1} = \frac{R}{R'} + \frac{\rho_1}{R'},$$

$$\frac{x_2}{l - x_2} + \frac{\rho_1}{l - x_2} = \frac{R}{R'},$$

de donde inmediatamente se obtiene

$$\rho_1 = R' \left(1 - \frac{x_2}{l} + \frac{R'}{l} \right)^{-1} \frac{x_1 - x_2}{l - x_1}.$$

(*) En estas fórmulas R y R' representan las resistencias que en la figura llevan estos nombres, mas todas las restantes comprendidas en el brazo correspondiente, exceptuando la ρ que se trata de medir.

Es evidente, estudiando esta fórmula, que la mayor precisión en el conocimiento de ρ , se obtendrá reduciendo el factor de $\frac{x_1 - x_2}{l - x_1}$ al menor valor posible. Ello se logra ligando A y B al bloque $2'$, con lo cual $R = A$ y $R' = B + \rho_3$.

El mismo método se emplea en la determinación de ρ_3 .

ρ_2 y ρ_4 . Estas dos resistencias se determinan por el procedimiento detallado en el caso anterior, colocando la pila en $2' - 4'$ y en $2 - 4'$ para ρ_2 , y en $2' - 4'$ y en $2' - 4$ para ρ_4 . Claro es que en este caso no pueden suprimirse R

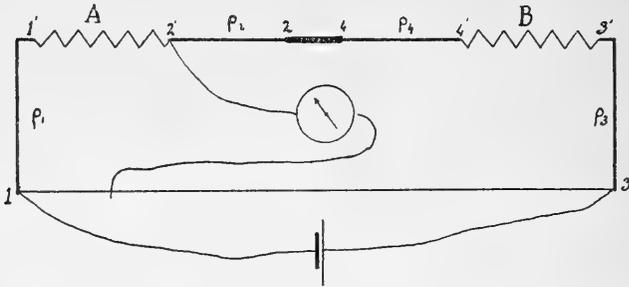


Figura 3.

y R' . Planteando las ecuaciones de equilibrio y despejando ρ_2 se obtiene

$$\rho_2 = \left(1 + \frac{B + \rho_3 + l - x_2}{R' + \rho_4} \right)^{-1} \frac{A + B + \rho_1 + \rho_3 + l}{B + \rho_1 + l - x_1} (x_1 - x_2)$$

y una expresión análoga para ρ_4 .

También pueden medirse estas resistencias ligando directamente $2 - 4$, en cuyo caso el esquema del puente es el representado en la figura 3. La pila se mantiene fija en 1 y 3, mientras el galvanómetro se lleva sucesivamente a $2'$, 2 , 4 y $4'$. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\frac{A + \rho_1}{x_1} = \frac{\rho_2}{x_2 - x_1} = \frac{\rho_4}{x_4 - x_3} = \frac{B + \rho_3}{l - x_4}$$

de donde

$$\rho_2 = \frac{A + B + \rho_1 + \rho_3}{l + x_1 - x_4} (x_2 - x_1) \text{ y } \rho_4 = \frac{A + B + \rho_1 + \rho_3}{l + x_1 - x_4} (x_4 - x_3).$$

La comparación de estas fórmulas con la anterior pone de manifiesto la superioridad de este último método, puesto que el factor de $(x_2 - x_1)$ es en él más pequeño que en el primero.

Conocidos los valores de las ρ , pueden determinarse A y B . Consideremos sólo A . El puente se monta primero en la forma que indica el esquema de la figura 4, uniendo los bloques 2_1 y 20_1 á la barra LL' (fig. 1), y después, cambiando

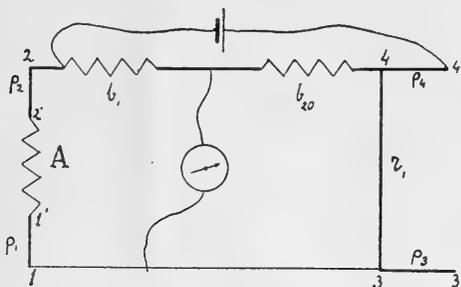


Figura 4.

A con la chapa de conexión, cuya resistencia, junto con la de los contactos, designaremos por r_2 ; las ecuaciones de equilibrio serán

$$\frac{b_1}{b_{20}} = \frac{\rho_2 + A + \rho_1 + x_1}{r_1 + l - x_1}$$

$$\frac{b_1}{b_{20}} = \frac{x_2 + r_2}{\rho_4 + A + \rho_3 + l - x_2},$$

de donde, por eliminación del primer miembro, y despejando A , resulta

$$A = x_2 - x_1 + \frac{1}{2} \left\{ [(\rho_1 + \rho_2) - (\rho_3 + \rho_4) + (r_1 - r_2)] \times \right. \\ \left. \times \frac{(\rho_1 + \rho_2) - (\rho_3 + \rho_4) + r_2 - r_1 + 2(x_1 + x_2 - l)}{2(A + l) + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + r_1 + r_2} - [\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - (r_1 + r_2)] \right\}$$

En dicha expresión el primer término de la corrección es un infinitamente pequeño de orden superior, y por consiguiente despreciable, con lo cual

$$A = x_2 - x_1 - \frac{1}{2} [\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 - (r_1 + r_2)].$$

Figuran en esta fórmula r_1 y r_2 , que representan los valores de la conexión y de sus contactos en el primero y segundo montajes. Según decíamos arriba, es necesario determinar sus valores en cada vez, y para ello basta transportar la pila de 4' á 3' en el primero y de 2' á 1' en el segundo. De las dos lecturas que corresponden al contacto se deducen los valores de r_1 y r_2 por las formulas

$$r_1 = \left(1 + \frac{A + l - x}{b_{20}} \right)^{-1} \frac{A + l}{A + l - x'} (x' - x)$$

$$r_2 = \left(1 + \frac{A + x}{b_1} \right)^{-1} \frac{A + x'}{A + l} (x - x').$$

fácilmente deducibles.

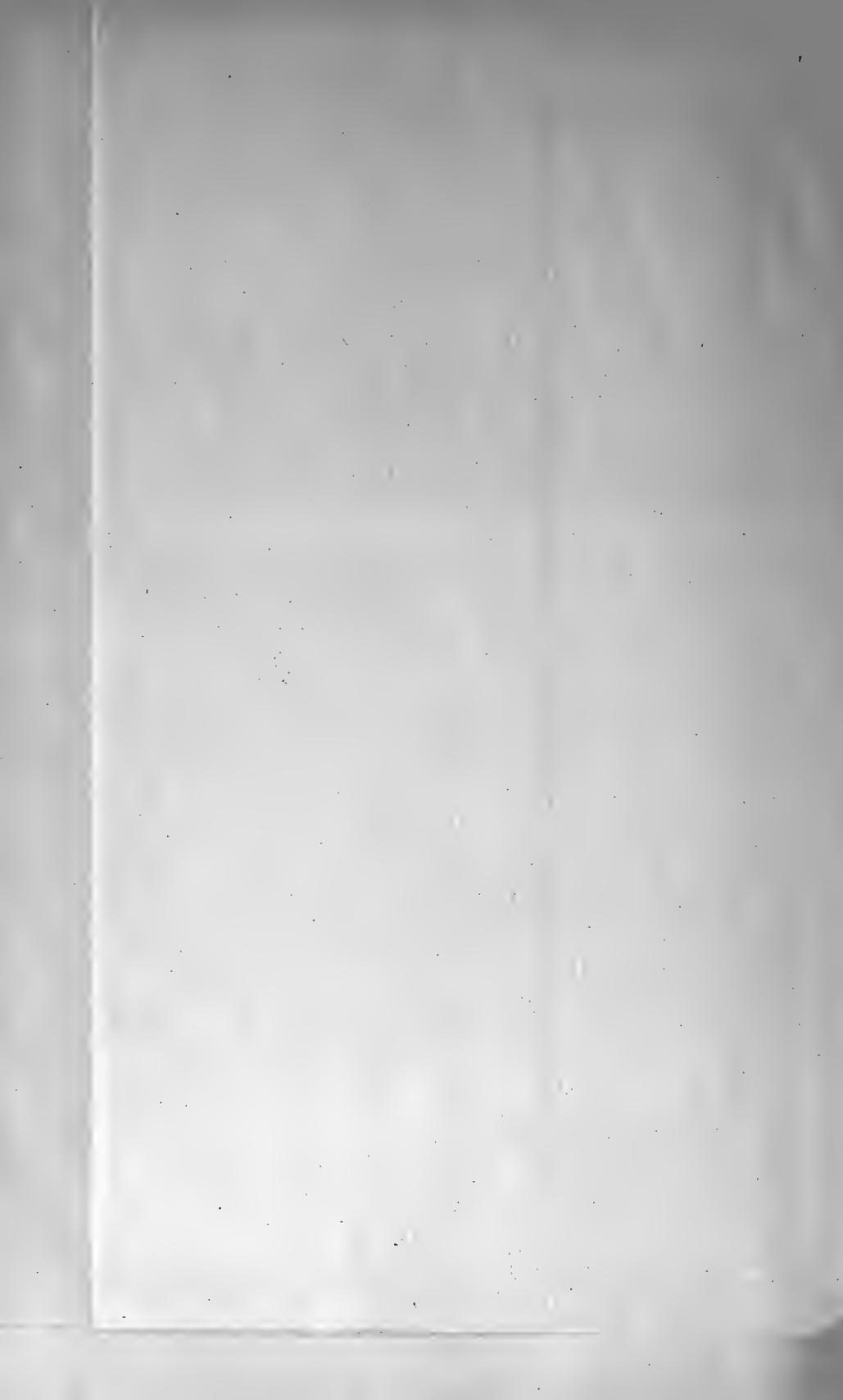
4. Conocidos A y B es necesario hallar los valores de $b_1, b_2 \dots b_{19}, b_{20}$. Tal determinación se ejecuta por un método de recurrencia, que conviene emplear varias ecuaciones de condición para cada dos resistencias equidistantes de los extremos. Es menester, con tal fin, equilibrar una serie de puentes de Wheatstone formados por las diferentes resistencias del potenciómetro, cuyos montajes indicamos en el adjunto Cuadro I, así como las ecuaciones correspondientes.

* 15₁ y 19₁ | 3₁ y 15₁ | 17₁

$$\frac{r}{x} (b_{17} + b_{18}) = q^v$$

Cuadro I

Fila.	Clavijero.	Galvanométrico.	Ecuaciones de Equilibrio	Ecuaciones Reducidas
1 y 3	2 y 21	1, 2, y 21	$\frac{A}{x_1} = \frac{b_1}{x_2 - x_1} = \frac{B}{l - x_1}$	$b_1 = (x_2 - x_1) \frac{A+B}{l + x_1 - x_2} = h'$
1 y 3	1, y 20	1, 20, y 21	$\frac{A}{x_1} = \frac{b_1}{x_2 - x_1} = \frac{B}{l - x_1}$	$b_2 = (x_2 - x_1) \frac{A+B}{l + x_1 - x_2} = h''$
1 y 2	2, y 21	1	$\frac{A}{x} = \frac{b_1}{B+l-x+r}$	$b_1 = \frac{A}{x} (B+l-x+r) = h''$
3 y 20	1, y 20	21	$\frac{b_1}{A+x+r} = \frac{B}{l-x}$	$b_2 = \frac{B}{l-x} (A+x+r) = h'''$
2 y 4	2, y 20	2, y 20	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2}{B+l-x_1}$	$b_1 - \frac{A+x_1}{B+l-x_2} b_2 = b_1 - h'' b_2 = 0$
2 y 3	3, y 21	2	$\frac{b_1}{A+x} = \frac{b_2}{B+l-x+r}$	$b_1 - \frac{A+x}{B+l-x+r} b_2 = b_1 - h'' b_2 = 0$
1 y 4	1, y 19	20	$\frac{b_2}{A+x+r} = \frac{b_1}{B+l-x}$	$b_2 - \frac{A+x+r}{B+l-x} b_1 = b_2 - h''' b_1 = 0$
1 y 3	3, y 21	1	$\frac{A}{x} = \frac{b_1 + b_2}{B+l-x+r}$	$b_1 + b_2 = \frac{A}{x} (B+l-x+r) = h''$
3 y 19	1, y 19	21	$\frac{b_1 + b_2}{A+x+r} = \frac{B}{l-x}$	$b_1 + b_2 = \frac{B}{l-x} (A+x+r) = h''$
2 y 4	3, y 19	3, y 19	$\frac{b_1 + b_2}{A+x_1} = \frac{b_1 + b_2}{B+l-x_1}$	$b_1 + b_2 - \frac{A+x_1}{B+l-x_2} (b_1 + b_2) = b_1 + b_2 - h'' (b_1 + b_2) = 0$
2 y 4	3, y 20	2, 3, y 20	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2}{x_2 - x_1} = \frac{B}{B+l-x_1}$	$b_2 = \frac{B}{A+r-B-l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = k$
2 y 4	2, y 19	2, 19, y 20	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2}{x_2 - x_1} = \frac{B}{B+l-x_1}$	$b_2 = \frac{b_1 + b_2}{A+r-B-l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = k'$
2, y 20	3, y 19	3, y 19	$\frac{b_1}{b_1 + A + x_1} = \frac{b_2}{b_2 + B + l - x_1}$	$b_1 - \frac{b_1 + A + x_1}{b_2 + B + l - x_2} b_2 = b_1 - h'' b_2 = 0$
2 y 4	4, y 20	3	$\frac{b_1}{b_1 + A + x} = \frac{b_2}{b_2 + B + l - x + r}$	$b_1 - \frac{b_1 + A + x}{b_2 + B + l - x_2} b_2 = b_1 - h'' b_2 = 0$
18 y 20	18, y 2	10	$\frac{b_1}{b_1 + A + x + r} = \frac{b_2}{b_2 + B + l - x}$	$b_1 - \frac{b_1 + A + x + r}{b_2 + B + l - x_2} b_2 = b_1 - h'' b_2 = 0$
1, y 21	4, y 20	7	$\frac{b_1}{A+x} = \frac{b_2 + b_3}{B+l-x+r}$	$b_2 + b_3 = \frac{b_1}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = m''$
1, y 21	2, y 1	20	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2 + b_3}{B+l-x_1}$	$b_2 + b_3 = \frac{b_1}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = m'$
1, y 20	3, y 18	4, y 18	$\frac{b_1}{b_1 + A + x_1} = \frac{b_2 + b_3}{b_2 + B + l - x_1}$	$b_2 + b_3 - \frac{b_1 + A + x_1}{b_2 + B + l - x_2} (b_2 + b_3) = b_2 + b_3 - m'' (b_2 + b_3) = 0$
1, y 21	4, y 20	3, 4, y 20	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2}{x_2 - x_1} = \frac{b_3}{B+l-x_1}$	$b_3 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = m$
1, y 21	2, y 18	2, y 18, y 19	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2}{x_2 - x_1} = \frac{b_3 + b_4}{B+l-x_1}$	$b_3 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = m'$
3, y 19	4, y 18	4, y 18	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + A + x_1} = \frac{b_3}{b_3 + b_4 + B + l - x_1}$	$b_3 - \frac{b_1 + b_2 + A + x_1}{b_3 + b_4 + B + l - x_2} b_3 = b_3 - m'' b_3 = 0$
3, y 5	5, y 19	4	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + A + x} = \frac{b_3}{b_3 + b_4 + B + l - x + r}$	$b_3 - \frac{b_1 + b_2 + A + x}{b_3 + b_4 + B + l - x_2} b_3 = b_3 - m'' b_3 = 0$
17 y 19	17, y 3	18	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + A + x + r} = \frac{b_3}{b_3 + b_4 + B + l - x}$	$b_3 - \frac{b_1 + b_2 + A + x + r}{b_3 + b_4 + B + l - x_2} b_3 = b_3 - m'' b_3 = 0$
1, y 5	5, y 21	3	$\frac{b_1 + b_2}{A+x} = \frac{b_3 + b_4}{B+l-x+r}$	$b_3 + b_4 = \frac{b_1 + b_2}{A+x} (B+l-x+r) = h''$
21 y 17	17, y 1	19	$\frac{b_1 + b_2}{A+x+r} = \frac{b_3 + b_4}{B+l-x}$	$b_3 + b_4 = \frac{b_1 + b_2}{B+l-x} (A+x+r) = h''$
1, y 19	5, y 17	5, y 17	$\frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2 + A + x_1} = \frac{b_3 + b_4}{b_3 + b_4 + B + l - x_1}$	$b_3 + b_4 - \frac{b_1 + b_2 + A + x_1}{b_3 + b_4 + B + l - x_2} (b_3 + b_4) = b_3 + b_4 - h'' (b_3 + b_4) = 0$
1, y 21	5, y 20	4, 5, y 20	$\frac{b_1 + b_2}{A+x_1} = \frac{b_3}{x_2 - x_1} = \frac{b_4}{B+l-x_1}$	$b_4 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = n$
0, y 1	17, y 2	2, 17, y 18	$\frac{b_1}{A+x_1} = \frac{b_2}{x_2 - x_1} = \frac{b_3 + b_4}{B+l-x_1}$	$b_4 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = n'$
1, y 18	3, y 17	5, y 17	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + A + x_1} = \frac{b_4}{b_4 + b_5 + B + l - x_1}$	$b_4 - \frac{b_1 + b_2 + b_3 + A + x_1}{b_4 + b_5 + B + l - x_2} b_4 = b_4 - h'' b_4 = 0$
4, y 6	6, y 18	5	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + A + x} = \frac{b_4}{b_4 + b_5 + B + l - x + r}$	$b_4 - \frac{b_1 + b_2 + b_3 + A + x}{b_4 + b_5 + B + l - x_2} b_4 = b_4 - h'' b_4 = 0$
6, y 18	4, y 16	17	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + A + x + r} = \frac{b_4}{b_4 + b_5 + B + l - x}$	$b_4 - \frac{b_1 + b_2 + b_3 + A + x + r}{b_4 + b_5 + B + l - x_2} b_4 = b_4 - h'' b_4 = 0$
2, y 6	6, y 20	4	$\frac{b_1}{b_1 + A + x} = \frac{b_2}{b_2 + B + l - x + r}$	$b_2 - \frac{b_1 + A + x}{b_2 + B + l - x_2} b_1 = b_2 - h'' b_1 = 0$
16, y 20	2, y 16	18	$\frac{b_1}{b_1 + A + x + r} = \frac{b_2}{b_2 + B + l - x}$	$b_2 - \frac{b_1 + A + x + r}{b_2 + B + l - x_2} b_1 = b_2 - h'' b_1 = 0$
4, y 18	6, y 16	6, y 16	$\frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_2 + b_3 + A + x_1} = \frac{b_4}{b_4 + b_5 + B + l - x_1}$	$b_4 - \frac{b_1 + b_2 + b_3 + A + x_1}{b_4 + b_5 + B + l - x_2} b_4 = b_4 - h'' b_4 = 0$
2, y 20	5, y 17	5, 6, y 17	$\frac{b_1 + b_2}{A+x_1} = \frac{b_3}{x_2 - x_1} = \frac{b_4}{b_4 + B + l - x_1}$	$b_4 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = p$
2, y 20	5, y 16	5, 16, y 17	$\frac{b_1 + b_2}{A+x_1} = \frac{b_3}{x_2 - x_1} = \frac{b_4}{b_4 + B + l - x_1}$	$b_4 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{A+B+l-x_1-x_2} (x_2 - x_1) = p'$
3, y 16	6, y 16	6, y 16	$\frac{b_1}{b_1 + \dots + b_4 + A + x_1} = \frac{b_5}{b_5 + \dots + b_6 + B + l - x_1}$	$b_5 - \frac{b_1 + \dots + b_4 + A + x_1}{b_5 + \dots + b_6 + B + l - x_2} b_5 = b_5 - h'' b_5 = 0$
5, y 7	7, y 17	6	$\frac{b_1}{b_1 + \dots + b_4 + A + x} = \frac{b_5}{b_5 + \dots + b_6 + B + l - x + r}$	$b_5 - \frac{b_1 + \dots + b_4 + A + x}{b_5 + \dots + b_6 + B + l - x_2} b_5 = b_5 - h'' b_5 = 0$
13 y 17	5, y 15	16	$\frac{b_1}{b_1 + \dots + b_4 + A + x + r} = \frac{b_5}{b_5 + \dots + b_6 + B + l - x}$	$b_5 - \frac{b_1 + \dots + b_4 + A + x + r}{b_5 + \dots + b_6 + B + l - x_2} b_5 = b_5 - h'' b_5 = 0$
3, y 7	7, y 19	5	$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + A + x} = \frac{b_3}{b_3 + b_4 + B + l - x + r}$	$b_3 + b_4 = \frac{b_1}{b_1 + b_2 + A + x} (b_3 + b_4) = q''$



En dicho cuadro, la columna encabezada «Pila» contiene los bloques en que se colocan los polos de la misma; la designada «Clavijas», indica los bloques que se ligan á la barra LL' , para eliminar las resistencias comprendidas; la «Galvanómetro», designa los bloques á que se une uno de los terminales del galvanómetro, pues el otro permanece en todo caso ligado al contacto móvil; bajo el epígrafe «Ecuaciones de equilibrio» se contienen las deducidas de los montajes anteriores, y en la última columna figuran estas mismas ecuaciones reducidas á la forma en que se consideran para el cálculo de las bobinas.

En todas las ecuaciones que corresponden á las líneas marcadas con asterisco, figura un término r , que representa la resistencia de la porción de barra LL' introducida por las clavijas en uno de los brazos del puente, juntamente con las resistencias de contacto de las mismas. Su determinación debe efectuarse en cada caso por el mismo método puesto en práctica para hallar las resistencias de las láminas de conexión al determinar los valores de A y B . No es necesario insistir más sobre este extremo.

Otros contactos se encuentran siempre en circuito, cuales son los del conmutador de las resistencias A y B . Para disminuir su efecto conviene siempre ejecutar dos veces el equilibrio, permuntando A y B .

Para deducir de las anteriores ecuaciones los valores de las bobinas en función de la resistencia del hilo, se forman los sistemas de ecuaciones de condición contenidos en el Cuadro II.

En las ecuaciones de los anteriores sistemas se designan con subíndices los coeficientes de aquellas ecuaciones que no figuran en el cuadro general; pero que se deducen de una de ellas introduciendo los valores, anteriormente determinados, de ciertas incógnitas. Así la ecuación del segundo sistema,

$$b_2 - k_1^{VI} b_{1,9} = k_2^{VI}$$

se deduce de la del primer sistema:

$$b_1 + b_2 - k^{VI} (b_{19} + b_{20}) = 0,$$

reemplazando en ella b_1 y b_{20} por sus valores, ya calculados.

Todos los sistemas, menos el primero y el noveno, están igualmente formados, de suerte que las ecuaciones normales poseen una de las tres formas del Cuadro III.

5. Conocidos de esta suerte los valores de todas las resistencias que figuran en el potenciómetro, en función del hilo, réstanos la determinación de este último ó de una de sus porciones en valor absoluto. Basta para ello ejecutar con una resistencia R , de valor conocido, por comparación directa con un patrón, idénticas operaciones á las ejecutadas en la medida de las bobinas auxiliares A y B . Así tendremos la fracción de hilo de resistencia R , que nos permitirá reducir todos los valores anteriormente obtenidos á ohmios.

Si esta comparación se ejecuta á dos temperaturas diferentes, se conocerá también el coeficiente térmico del aparato.

También pueden hallarse estos valores midiendo la suma de todas las bobinas $b_1 \dots b_{20}$ mediante un puente ordinario.

6. Conocido el esquema del potenciómetro, veamos su realización. Dados los fines á que se halla destinado, es necesaria una gran seguridad en la constancia de su temperatura, así como en el conocimiento de su valor. Para lograr este fin, todas las resistencias, incluyendo el hilo, se encuentran sumergidas en un baño de aceite de petróleo, agitado por una turbina T (fig. 7), que establece una corriente del líquido por el interior del tubo T_1, T_2 (fig. 5), sobre el cual se arrollan las resistencias $b_1, b_2, \dots, b_{19}, b_{20}$, en la forma que describiremos ahora. Este baño puede calentarse eléctricamente mediante las resistencias de calefacción C, C (figura 5) que terminan en los bornes marcados por la misma letra; el régimen de esta corriente se rige automáticamente por un termo-regulador de mercurio situado en R (fig. 7),

Cuadro II

<p style="text-align: center; font-size: small;">Primer sistema: Determinación de δ_1 y δ_{10} y primera aproximación de δ_2 y δ_7.</p> $\begin{aligned} b_1 &= h \\ b_2 &= h' \\ b_3 &= h'' \\ b_4 &= h''' \\ b_5 &= h^{IV} \\ b_6 &= h^V \\ b_7 &= h^{VI} \\ b_8 &= h^{VII} \\ b_9 &= h^{VIII} \\ b_{10} &= h^{IX} \end{aligned}$	<p style="text-align: center; font-size: small;">Segundo sistema: Determinación de δ_2 y δ_{10} y primera aproximación de δ_1 y δ_7.</p> $\begin{aligned} b_1 &= k \\ b_2 &= k' \\ b_3 &= k'' \\ b_4 &= k''' \\ b_5 &= k^{IV} \\ b_6 &= k^V \\ b_7 &= k^{VI} \\ b_8 &= k^{VII} \\ b_9 &= k^{VIII} \\ b_{10} &= k^{IX} \end{aligned}$	<p style="text-align: center; font-size: small;">Tercer sistema: Determinación de δ_7 y δ_{11} y primera aproximación de δ_1 y δ_7.</p> $\begin{aligned} b_1 &= m \\ b_2 &= m' \\ b_3 &= m'' \\ b_4 &= m''' \\ b_5 &= m^{IV} \\ b_6 &= m^V \\ b_7 &= m^{VI} \\ b_8 &= m^{VII} \\ b_9 &= m^{VIII} \\ b_{10} &= m^{IX} \\ b_{11} &= m^{X} \end{aligned}$
---	--	--

4.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{12} y primera aproximación de δ_2 y δ_{10} .

5.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{10} y primera aproximación de δ_2 y δ_{12} .

6.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{12} y primera aproximación de δ_2 y δ_{11} .

<p style="font-size: small;">4.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{12} y primera aproximación de δ_2 y δ_{10}.</p> $\begin{aligned} b_4 &= n \\ b_5 &= n' \\ b_6 &= n'' \\ b_7 &= n''' \\ b_8 &= n^{IV} \\ b_9 &= n^V \\ b_{10} &= n^{VI} \\ b_{11} &= n^{VII} \\ b_{12} &= n^{VIII} \end{aligned}$	<p style="font-size: small;">5.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{10} y primera aproximación de δ_2 y δ_{12}.</p> $\begin{aligned} b_5 &= p \\ b_6 &= p' \\ b_7 &= p'' \\ b_8 &= p''' \\ b_9 &= p^{IV} \\ b_{10} &= p^V \\ b_{11} &= p^{VI} \\ b_{12} &= p^{VII} \end{aligned}$	<p style="font-size: small;">6.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{12} y primera aproximación de δ_2 y δ_{11}.</p> $\begin{aligned} b_6 &= q \\ b_7 &= q' \\ b_8 &= q'' \\ b_9 &= q''' \\ b_{10} &= q^{IV} \\ b_{11} &= q^V \\ b_{12} &= q^{VI} \end{aligned}$
--	---	---

7.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{11} y primera aproximación de δ_2 y δ_{12} .

8.º Sistema: Determinación de δ_2 y δ_{11} y primera aproximación de δ_1 y δ_{12} .

9.º Sistema: Determinación de δ_1 , δ_{11} y δ_{12} .

<p style="font-size: small;">7.º Sistema: Determinación de δ_1 y δ_{11} y primera aproximación de δ_2 y δ_{12}.</p> $\begin{aligned} b_7 &= r \\ b_8 &= r' \\ b_9 &= r'' \\ b_{10} &= r''' \\ b_{11} &= r^{IV} \\ b_{12} &= r^V \end{aligned}$	<p style="font-size: small;">8.º Sistema: Determinación de δ_2 y δ_{11} y primera aproximación de δ_1 y δ_{12}.</p> $\begin{aligned} b_8 &= s \\ b_9 &= s' \\ b_{10} &= s'' \\ b_{11} &= s''' \\ b_{12} &= s^{IV} \end{aligned}$	<p style="font-size: small;">9.º Sistema: Determinación de δ_1, δ_{11} y δ_{12}.</p> $\begin{aligned} b_9 &= t \\ b_{10} &= t' \\ b_{11} &= t'' \\ b_{12} &= t''' \end{aligned}$
--	--	--

Cuadro III

Ecuaciones normales del primer sistema:

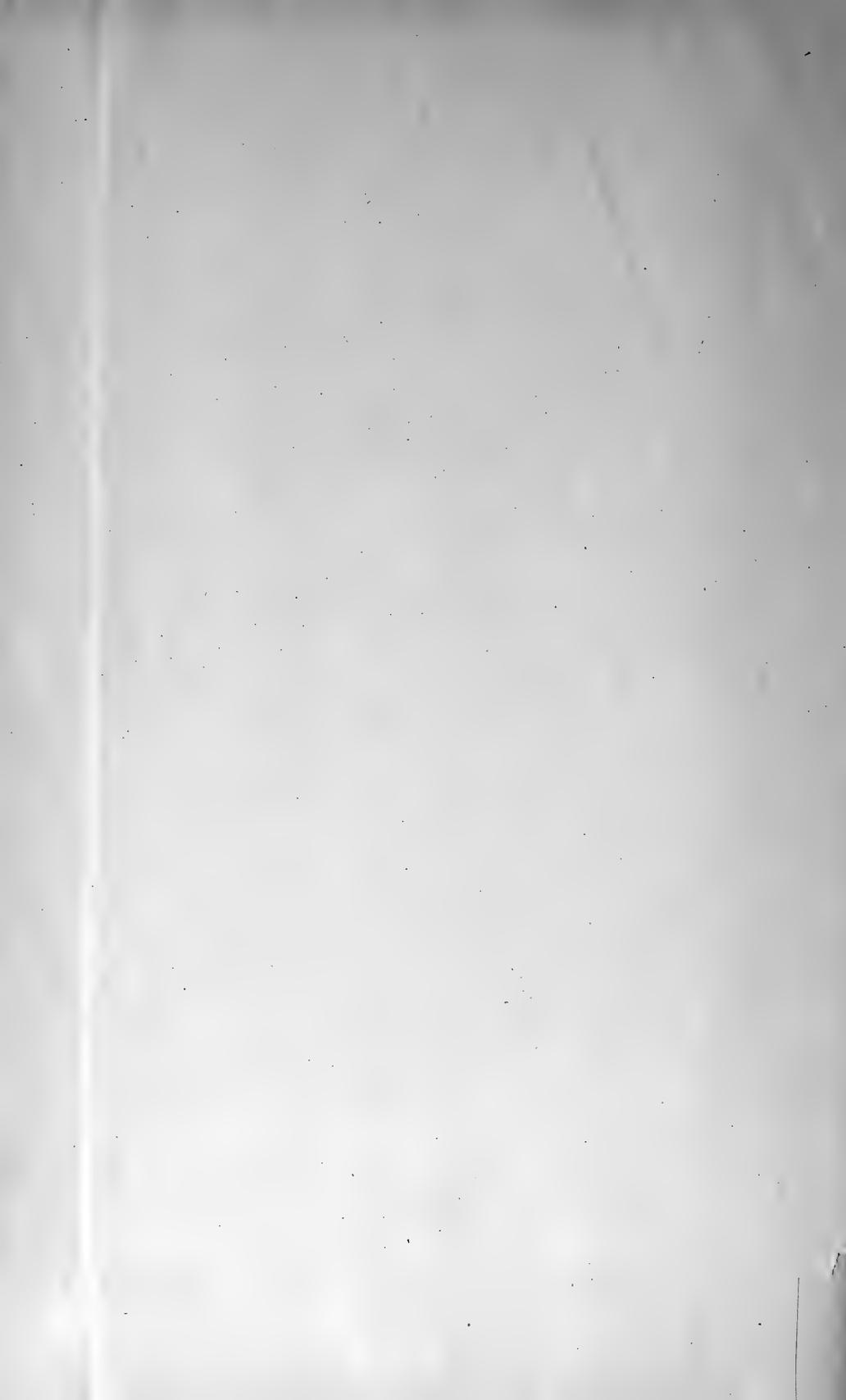
$$\begin{aligned} 6 b_1 + (2 - k'') b_2 - k^{VI} b_{10} - (h^{IV} + k^{VI}) b_{10} &= h + h'' + k^{IV} \\ (2 - k'') b_1 + (2 + k'') b_2 - k^{VI} b_{10} - k^{VI} b_{10} &= k^{VI} \\ -k^{VI} b_1 - k^{VI} b_2 + (2 + k^{VI}) b_{10} + (1 - k^{VI} + k^{VI}) b_{10} &= k^V \\ -(h^{IV} + k^{VI}) b_1 - k^{VI} b_2 + (1 - k^{VI} + k^{VI}) b_{10} + (3 - h^{IV} + k^{VI} + k^{VI}) b_{10} &= h' + h''' + k^V \end{aligned}$$

Ecuaciones normales para los sistemas 2.º a 8.º:

$$\begin{aligned} 8 b_1 + (2 - m'') b_2 - m^{VI} b_{10} - (k^{VI} + k^{VI} + m^{VI}) b_{10} - k + k_1' + k_1^{VI} + k_2^{VI} + m^X \\ (2 - m'') b_2 + (2 + m'') b_{10} - m^{VI} b_{10} - m^{VI} b_{10} = m^{VI} \\ -m^{VI} b_2 - m^{VI} b_{10} + (2 + m^{VI}) b_{10} + (1 - m^{VI} + m^{VI}) b_{10} = m^V \\ -(k_1^{VI} + k_2^{VI} + m^{VI}) b_2 - m^{VI} b_{10} + (1 - m^{VI} + m^{VI}) b_{10} + (4 - k_1^{VI} + k_2^{VI} + m^{VI} + m^{VI}) b_{10} - k - k_1^{VI} + k_2^{VI} - m^X \end{aligned}$$

Ecuaciones normales del 9.º Sist.:

$$\begin{aligned} 8 b_9 + (2 - v'') b_{10} - v^{VI} b_{11} - (t_1^{VI} + t_2^{VI} + v^{VI}) b_{10} = t + t_1^{VI} + t_2^{VI} + v^{VI} \\ (2 - v'') b_9 + (4 + v'') b_{10} - (v^{VI} + v^{VI}) b_{11} - v^{VI} b_{10} = v + v^V \\ -v^{VI} b_9 - (v^{VI} + v^{VI}) b_{10} + (3 + v^{VI} + v^{VI}) b_{11} + (1 - v^{VI} + v^{VI}) b_{10} = v + v^V \\ -(t_1^{VI} + t_2^{VI} + v^{VI}) b_9 - v^{VI} b_{10} + (1 - v^{VI} + v^{VI}) b_{11} + (4 + t_1^{VI} + t_2^{VI} + v^{VI} + v^{VI}) b_{10} = t' + t_1^{VI} + t_2^{VI} - t_1^{VI} t_2^{VI} + v^V \end{aligned}$$



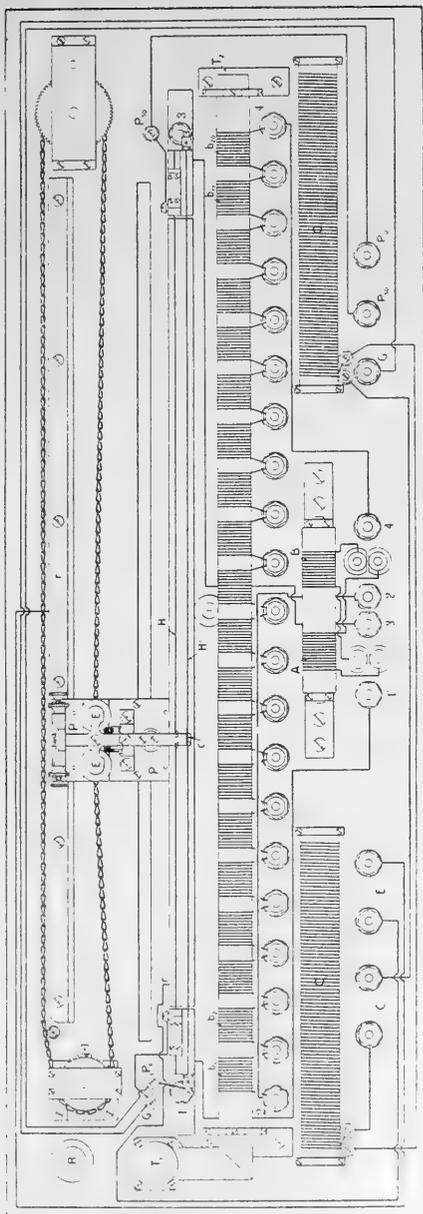


Figura 5.

que permite obtener una temperatura constante, con un error inferior á la décima de grado. Por último, en el centro del baño existe un orificio t , destinado á colocar un termómetro.

Cada una de las bobinas b_1, b_2, \dots se ha arrollado sobre un carrete independiente, siguiendo las instrucciones del Reichsanstalt, de Berlín, ensartándolas luego en el tubo

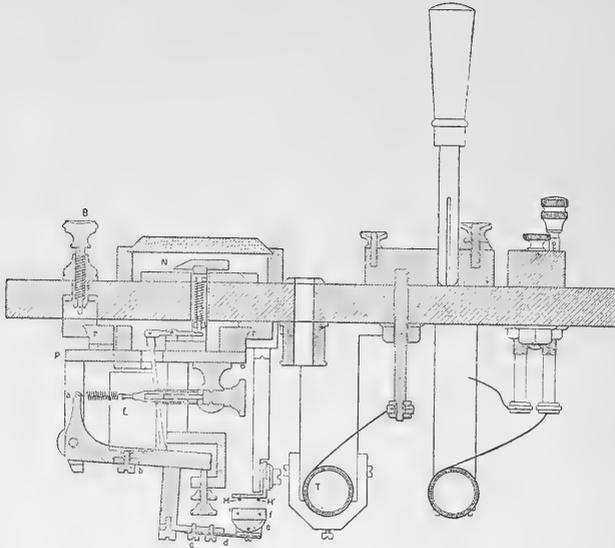


Figura 6.

T_1, T_2 de la turbina. Con el fin de poder realizar la separación eventual de cualquiera de las bobinas sin tocar las restantes, el tubo en cuestión entra á frotamiento suave en el codo de la turbina, sujetándosele por las dos colleras que se ven en proyección horizontal en la figura 5, y en proyección vertical sobre la figura 6.

Como también el hilo ha de permanecer sumergido en el aceite, mientras la escala necesita estar fuera, es menester que el contacto quede á gran distancia del índice que señala su posición sobre la escala. Por otra parte, es conveniente que no exista ninguna abertura en la tapa para la mayor re-

gularidad de la temperatura del baño y para conservar su limpieza en trabajos muy largos. Todas estas condiciones se han llenado, disponiendo el contacto en la siguiente forma:

Dos carriles *rr* (figuras 5 y 6) conducen una platina *P*, que soporta todo el contacto, y cuyas dimensiones impiden

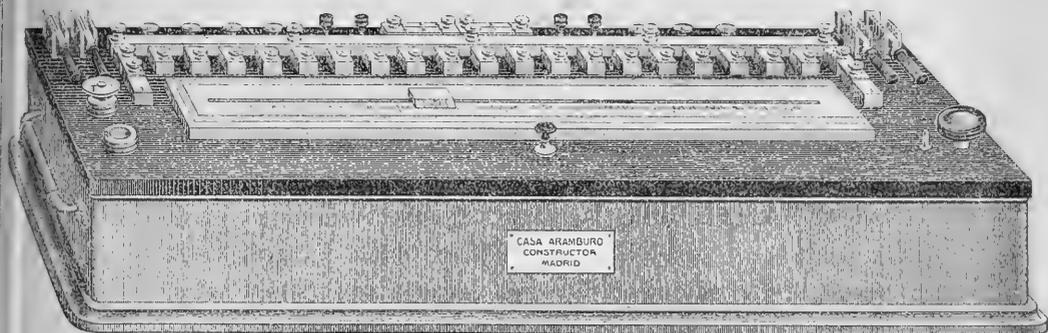


Figura 7.

todo movimiento del sistema que no sea una traslación paralela al hilo y la regla. Este movimiento se comunica mediante una cadena, arrastrada por una rueda dentada, que á su vez engrana con un piñón; para transportes rápidos se hace girar directamente la rueda, y para los lentos se hace uso del piñón, empleándose con tal fin, en ambos casos, la llave que se ve á la derecha en el grabado de la figura 7.

Sobre la platina de que acabamos de hablar existe una palanca acodada, *abe*, provista de tornillos de ajuste bien visibles en las figuras 5 y 6, cuya palanca lleva el contacto *f* en la extremidad de una lámina de acero. Este contacto está formado por una lámina de plata, sujeta en la parte superior de una pieza de marfil *e*, sostenida por un eje que le consiente girar libremente. En reposo, la palanca tiene la posición que indica la figura, y no existe contacto. Cuando se quiere establecer se comprime el botón *B*, que cierra un circuito en el que están intercalados un acumulador, ligado á

los bornes E , y el electroimán F transportado por la platina; la conexión entre ambos se establece por los railes, según se ve claramente en la figura 5, siguiendo los conductores que parten de los indicados bornes.

Al actuar el electroimán, la lámina de plata f establece la comunicación entre el hilo de cobre H' , convenientemente aislado y unido al borne G , y el hilo del potenciómetro H . Con el fin de evitar los efectos del choque sobre este último, la lámina f cae primero sobre H' . Ambos hilos apoyan sobre un puente de hierro recubierto de seda y goma laca.

Lleva además la platina P el nonius N , que sirve de índice. Para conservar la escala en el mejor estado, conviene que el nonius no descansa sobre ella sino en el momento de la lectura, y esto se logra con la disposición que traduce la figura 6. El nonius está fijo en la extremidad superior de una varilla vertical, que se mueve longitudinalmente en el interior de un tubo, donde también se aloja un resorte que tiende á hacer descender el nonius. Este resorte no queda libre sino al levantarse la palanca acodada abc para establecer el contacto; pues una palanca articulada, que se ve claramente en el dibujo, mantiene elevada la varilla mientras no se actúa sobre el botón B .

Todas las resistencias que forman la parte eléctrica del potenciómetro, están constituidas por alambre de manganina cubierto con doble capa de seda del mismo diámetro, y tomado del mismo carrete, para asegurar la mayor igualdad posible del coeficiente de temperatura. Este diámetro es de 0,8 milímetros, y su longitud tal que la resistencia de cada bobina y del hilo sean próximamente medio ohmio. Las bobinas se construyeron, según ya dijimos, siguiendo las prescripciones del Reichsanstalt de Berlín, y el hilo H se descubrió cuidadosamente, dándole luego un ligero baño de oro, para evitar la alteración posterior de su superficie por oxidación.

Cada una de las extremidades de las bobinas se ha solda-

do con plata á un ovalillo de cobre, que después se estañó. Los ovalillos de las extremidades contiguas de dos bobinas consecutivas se unen á un mismo bloque, sujetándoles entre dos tuercas, también estañadas; después de lo cual se ha corrido la soldadura, formando con estas diferentes partes una masa única.

El hilo H se ha tendido entre dos fuertes arcos de cobre que le sirven de soporte, mediante un pequeño torno incrustado en uno de dichos arcos, después de lo cual se ha comprimido sobre el arco en su misma extremidad mediante chapas, también de cobre, sujetas por tornillos.

La disposición de los bloques $1_1, 2_1 \dots 20_1, 21_1$ y de la barra LL' del esquema, se ven claramente sobre el grabado de la figura 7. Cada uno de los bloques posee un tornillo de empalme que permite las conexiones para los puentes que se emplean en el calibrado. Igualmente los poseen los bloques $1', 2', 3'$ y $4'$ del conmutador de las resistencias A, B .

Otros dos bornes existen, que se designan por P_0 y P_{50} , ligados á las extremidades de los arcos de cobre que establecen la comunicación con el hilo H . Sirven estos bornes para medir, por métodos comparables á los que hemos descrito varias veces, la resistencia de la conexión entre el principio del hilo y la primera bobina.

Para ligar la barra LL' á cada uno de los bloques $1_1, 2_1 \dots$, se emplean clavijas de cobre, una de cuyas secciones se ve sobre la figura 6 con suficiente claridad para no necesitar nueva aclaración. Normalmente á dicha sección la clavija tiene las mismas dimensiones que los bloques, de suerte que se utiliza la totalidad de superficie para el contacto; habiéndoseles además seccionado por tres cortes paralelos al plano del dibujo, con el fin de uniformar la presión, y, por ende, el contacto.

Por último, conviene advertir, que para reconocer fácilmente cualquier defecto de funcionamiento del aparato, y principalmente del contacto, las diferentes partes del mismo

se encuentran fijas á la tapa de ebonita del depósito de aceite. Esta tapa se halla sujeta á un bastidor de latón, unido á otro que lleva el borde de la caja mediante una visagra que se extiende á toda su longitud, con lo cual la expresada tapa puede levantarse con relativa comodidad.

El modelo estudiado de este potenciómetro ha sido cuidadosamente construído por la casa Viuda de Aramburo de esta plaza, bajo los auspicios de la Junta para ampliación de estudios é investigaciones científicas.

(Laboratorio de Investigaciones físicas.)

Concurso á premios.

Fundación del Duque de Berwick y de Alba, Conde de Lemos, instituída en memoria de la Excm. Sra. Doña Rosario Falcó y Ossorio, Duquesa de Berwick y de Alba, Condesa de Lemos y Siruela, para conmemorar el tercer centenario de la publicación del *Quijote*, premiando obras literarias, históricas y científicas.

En cumplimiento de lo que se dispone en la escritura de la expresada fundación, esta Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales abre *Concurso* público bajo las condiciones siguientes:

1.^a Los trabajos que obtien al Premio habrán de ser de índole científica, quedando el tema ó asunto á la libre elección de los concurrentes, siempre que no versen sobre inventos de medios de destrucción.

2.^a El Premio consistirá en 12.000 pesetas en metálico, descontados los gastos de administración, salvos el aumento ó la disminución que puedan experimentar los intereses del capital destinado á la fundación.

3.^a El término para la presentación de trabajos comenzará á contarse desde el día de la publicación de esta convocatoria en la *Gaceta de Madrid* (*) y quedará cerrado el 31 de Enero de 1914, á las doce de la noche; recibándose los trabajos en la Secretaría de la Academia, Valverde, núm. 26.

4.^a El Premio, si se presentase trabajo digno de él, será adjudicado en Mayo de 1914, siempre que la extensión ó índole del trabajo ó trabajos presentados hagan posible su examen en el plazo de Enero á Mayo, pues de no ser así, se entenderá éste prorrogado hasta el fin del año, haciéndose la entrega al autor en cualquier solemnidad pública que la Academia celebre después de hecha la adjudicación.

5.^a Si se tratare de una obra, la impresión correrá á cargo

(*) Se ha publicado en la *Gaceta* del 11 de Mayo de 1911.

y quedará á beneficio del autor, al que no se le entregará toda la cantidad en que el Premio consiste hasta después de la publicación de la obra, reteniendo entretanto la Academia la parte de metálico que estimare suficiente para la edición.

6.^a Los manuscritos ó trabajos no premiados se devolverán á sus respectivos dueños.

7.^a Los trabajos originales presentados al concurso no podrán ir suscritos por el autor, el cual conservará en absoluto el anónimo, distinguiendo su obra ó invento con un lema igual á otro que, en sobre cerrado, lacrado y sellado, firmará, declarando su nombre y apellidos, y haciendo constar su residencia y el primer renglón del manuscrito.

8.^a Podrán los trabajos ser de uno ó varios autores, pero en ningún caso se dividirá el Premio entre dos ó más obras.

9.^a Sólo se admitirán al concurso obras ó trabajos inéditos, no premiados en otros concursos, y de autores españoles y en castellano, quedando excluidos los de individuos de esta Corporación.

10.^a La Secretaría admitirá las obras ó trabajos que se le entreguen con los anteriores requisitos y dará de cada uno de ellos recibo, en que se expresen su título, lema y primer renglón del manuscrito.

El autor que remita su obra por el correo designará, sin nombrarse, la persona á quien se haya de dar el recibo.

11.^a Si antes de haberse dictado fallo acerca de los trabajos presentados, quisiera alguno de los autores retirar el suyo, se le devolverá previa exhibición del recibo que le fué expedido, y acreditando á satisfacción del Secretario ser autor del que reclame, ó persona autorizada para pedirlo.

12.^a Si el concurso quedare desierto ó se fallara no ser de mérito bastante trabajo alguno de los presentados, la Academia abrirá otro nuevo por otros tres años.

13.^o Adjudicado el Premio, se abrirá el premio señalado con el mismo lema que el trabajo premiado y se proclamará el nombre del autor.

Madrid, 5 de Mayo de 1911.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	<u>PÁGS.</u>
XLVII.—Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia undécima	823
XLVIII.—Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia duodécima	846
XLIX.—Catálogo de los moluscos testáceos marinos de la costa y bahía de Cádiz, por <i>Joaquín González Hidalgo</i> (continuación)	776 865
L.—Potenciómetro autocalibrable, por <i>B. Cabrera</i>	887
Concurso á premios.—Fundación del Duque de Berwick y de Alba, Conde de Lemos, instituida en memoria de la Excm. Sra. Doña Rosario Falcó y Ossorio, Duquesa de Berwick y de Alba, Condesa de Lemos y Siruela, para conmemorar el tercer centenario de la publicación del <i>Quijote</i> , premiando obras literarias, históricas y científicas	901

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID



TOMO IX.—NUM. 12.

Junio de 1911.

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL

CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.

1911

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

LI.—Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia décimotercera.

SEÑORES:

Para la resolución del problema del movimiento de un fluido á que hemos dado el nombre de fluido perfecto, y del cual hemos dado en conferencias anteriores una definición precisa, establecimos dos sistemas de ecuaciones diferenciales, que eran en cierto modo una doble forma para la resolución del problema.

En primer lugar, por el sistema de variables de Lagrange.

En segundo lugar, por el sistema de variables de Euler.

Son, volvemos á repetirlo, dos métodos, ó dos soluciones bajo dos formas distintas.

De ambos sistemas en lo sucesivo, y mientras no advirtamos otra cosa, escogeremos el primero.

En éste, según recordarán mis alumnos, las variables independientes eran a, b, c, t , es decir, las coordenadas a, b, c , de un punto del fluido en el instante inicial $t = 0$, ó si se quiere en un instante cualquiera t .

La cuarta variable independiente era el tiempo t .

Las funciones desconocidas, y que nos proponemos determinar en función de las cuatro variables independientes eran, x, y, z, p, ρ , es decir, las coordenadas en un instante cualquiera, de una cualquiera de las trayectorias del sistema, por ejemplo, la que corresponde al punto inicial (a, b, c) y además la presión p y la densidad ρ .

Teníamos para ello las cinco ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= X - \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= Z - \frac{d^2z}{dt^2}, \\ \varphi &= t(p), \\ \rho D &= \rho_0;\end{aligned}$$

y ya explicamos extensamente, que para la uniformidad de las notaciones era preciso expresar

$$\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dx}{dz},$$

en función de las derivadas de las funciones desconocidas con relación á las variables independientes a, b, c ; lo cual se conseguía por el procedimiento ya expuesto en otra conferencia.

Hecho esto, no había más que integrar las cinco ecuaciones anteriores, con lo cual obtendríamos los valores de x, y, z, p, φ en función de a, b, c, t y de las constantes de la integración.

El problema planteado con esta generalidad es enormemente difícil, y sólo puede ó simplificarse ó resolverse en casos particulares mediante hipótesis particulares también; por ejemplo, cuando las fuerzas que actúan sobre el sistema tienen una potencial; cuando tienen una potencial las velocidades; cuando el movimiento es permanente, y no decimos cuando la densidad es función de la presión, porque esta hipótesis ya la hemos hecho de una vez para todas, puesto que no hemos considerado la temperatura, ó mejor dicho, porque la suponemos constante en todo el movimiento.

Nosotros no vamos á tratar este problema general de la integración, al menos por ahora, ni siquiera en algunos de los

casos particulares ya indicados; vamos tan sólo á estudiar propiedades generales del movimiento, que *se desprenden de la forma de las ecuaciones diferenciales, aun antes de la integración.*

Porque tales hipótesis y tal estudio nos servirán para establecer problemas muy interesantes respecto á la teoría de los torbellinos.

* * *

Han de fijarse bien en este punto mis alumnos; no imaginen que el estudio que vamos á hacer es con el objeto exclusivo de integrar las cinco ecuaciones precedentes.

Hemos de establecer propiedades, que se deducen de las ecuaciones mismas, sin necesidad de pasar por la integración general: este es nuestro punto de vista.

Y este es un punto de vista importantísimo, acaso es el ideal de la teoría de las ecuaciones diferenciales: deducir las propiedades del sistema, estudiando sólo las ecuaciones diferenciales; porque obsérvese que todas las propiedades de dichas integrales, en las ecuaciones diferenciales están contenidas, aunque por manera oculta.

Integrar un sistema de ecuaciones diferenciales y estudiar las propiedades de las funciones integradas, es un procedimiento seguro; pero es, si se nos permite la palabra, un procedimiento vulgar.

Fijemos las ideas, por un ejemplo.

Admitamos que una ecuación diferencial representa una serie de elipses; pues para estudiar estas curvas, el método directo, que yo llamo vulgar, consiste en integrar la ecuación diferencial, y en la ecuación en términos finitos obtenida, estudiar por los métodos de la geometría analítica las propiedades de la elipse, como elemento del sistema de elipses.

Pero existe otro método, que es el método que yo llamo ideal, que consistiría en descubrir esta propiedad en la misma ecuación diferencial.

Y en rigor no sólo es este el método ideal, sino que es el único método posible, si la ecuación diferencial representa sistemas y funciones desconocidas, jamás estudiadas antes, y que por primera vez se presentan en forma de ecuaciones diferenciales; porque ni notaciones existen para expresarlas.

Fijemos aún más las ideas con un ejemplo sencillísimo.

Supongamos que las funciones trigonométricas fueran completamente desconocidas y que se nos propusiera este problema: Estudiar las propiedades de la función $y = f(x)$ definida por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ante este problema, el decir que vamos á integrar tal ecuación diferencial, no sabiendo que existen las funciones trigonométricas, ni sentido tiene siquiera; lo que hay que hacer es estudiar las propiedades de y en la misma ecuación diferencial, sin integrar lo que no puede integrarse; es decir, hallar una función que no puede expresarse por funciones ya integradas ó por lo menos definidas.

Otro tanto podemos repetir para las funciones elípticas, para las funciones avelianas, y en suma y en general, para todo sistema de ecuaciones diferenciales que no correspondan á sistemas de *antemano estudiados*, ó, por lo menos, definidos.

Perdónesenos esta digresión y volvamos á nuestro objeto.

* * *

Nos proponemos transformar las tres primeras ecuaciones del sistema de Lagrange, por medio de la cuarta y de una hipótesis, que vamos á formular de este modo:

En cada punto del flúido y en cada instante, actúa una

fuerza cuyas componentes son, como hemos dicho, X, Y, Z .

Estas componentes por unidad de masa, suponemos que dependen únicamente para cada instante de las coordenadas x, y, z del punto.

Y además admitimos, y esto es fundamental, que son las derivadas, con relación á x, y, z , de una función única $V(x, y, z, t)$.

Dicha función se puede llamar *potencial*, ó, si se quiere, función *de fuerzas*; ambas funciones son iguales, con signos contrarios.

Y se dice que las fuerzas que actúan sobre diferentes puntos del fluido *tienen en cada instante una potencial V* .

Tal función es la misma en todos los instantes; pero en ella t tomará el valor que á ese instante corresponda.

De modo que tendremos

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz},$$

siendo

$$V = V(x, y, z, t).$$

Podemos poner las tres ecuaciones de Lagrange bajo esta forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$$

y sustituyendo en ellas los valores anteriores de X, Y, Z y de p , resultará:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dx} - \frac{1}{f(p)} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV}{dy} - \frac{1}{f(p)} \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV}{dz} - \frac{1}{f(p)} \frac{dp}{dz}. \quad (1)$$

Ahora bien, si designamos por P la expresión

$$P = \int \frac{dp}{f(p)}$$

es claro que P , efectuada la integración, será una función de p , que para fijar las ideas designaremos por λ ; es decir,

$$P = \int \frac{dp}{f(p)} = \lambda(p).$$

Pero p , que es la presión en un instante cualquiera, es función de x , y , z y de t ; de manera que llamándola μ , resultará

$$p = \mu(x, y, z, t),$$

función general, que para el instante t se aplicará á todos los puntos del fluido, y por lo tanto, á cualquier punto de la trayectoria AB (fig. 31) de un punto inicial cualquiera A .

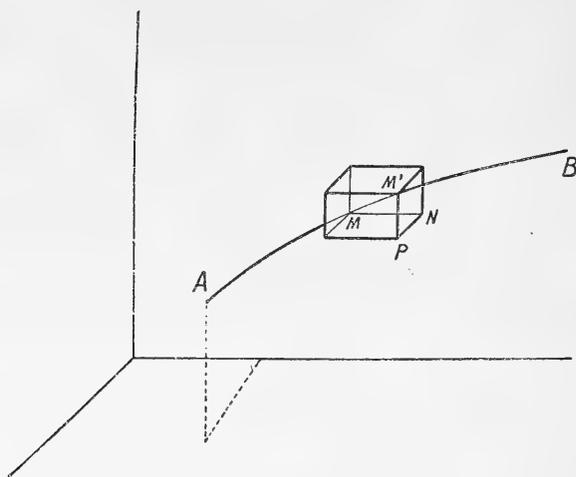


Figura 31.

Por ejemplo, cuando A esté en M , punto para el que podremos formar el paralelepípedo $MNPM'$, siendo M y M' dos posiciones consecutivas del punto que hemos elegido.

Para esta trayectoria ya no serán arbitrarias dx , dy , dz , sino que tendremos

$$dx = MN, \quad dy = NP, \quad dz = MP'.$$

Por lo demás, el paralelepípedo que consideramos puede ser cualquiera, con tal que comprenda al punto M . De tomar uno á tomar otro, las diferencias son de orden superior.

Pero estos son pormenores elementales en que no podemos detenernos.

Si recordamos cómo dedujimos estas tres primeras ecuaciones de Lagrange, comprenderemos que este pudo ser el paralelepípedo que nos sirvió para establecerlas, y en este caso las dx , dy , dz , serán precisamente las que acabamos de escribir; es decir, las que corresponden al movimiento sobre la trayectoria elegida.

Hemos dicho que P es una función de p , siendo p una función μ de x, y, z .

De modo que diferenciando P con relación á x, y, z , pero siendo estos tres elementos diferenciales, los que antes fijamos para la posición M del punto móvil, tendremos sucesivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mu(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mu(x, y, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mu(x, y, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Pero la ecuación

$$\lambda(p) = \int \frac{dp}{f(p)}$$

en que la constante arbitraria la suponemos contenida en la integral (y en ella lo mismo da ∂ que d), nos dice evidentemente que

$$\frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} = \frac{1}{f(p)}$$

luego

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{f(p)} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Así, pues, sustituyendo en las ecuaciones (I), resultará

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z},\end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial z}.\end{aligned}$$

Si, para abreviar, representamos por Q la función $V - P$, siendo evidentemente Q , como V y P , una función de x, y, z, t ; es decir,

$$Q(x, y, z, t) = V - P,$$

las tres primeras ecuaciones de Lagrange tendrán esta forma

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial Q}{\partial z},\end{aligned}$$

que es una forma clásica, y podemos expresarla diciendo, que la aceleración del movimiento en una trayectoria cualquiera tiene una potencial Q , y que, por lo tanto, sus componentes

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2},$$

son las derivadas con relación á x, y, z de la potencial $Q(x, y, z, t)$.

Esta función potencial Q es la misma en cada instante para todos los puntos del flúido, y, por lo tanto, puede aplicarse al movimiento de Lagrange, ó sea al de cada trayectoria $A B$.

Aplicada á la trayectoria $A B$ en cada instante t , se aplicará á la posición M del punto móvil.

Las ecuaciones serán las mismas que si estudiáramos el movimiento aislado de un punto M sometido en cada instante á una fuerza que tuviera una potencial Q , y cuyas componentes, por lo tanto, fueran

$$\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Parece, pues, que las ecuaciones del movimiento se han simplificado extraordinariamente, toda vez que han tomado la forma canónica anterior; pero fijemos bien las ideas.

*
* *

Las tres ecuaciones que hemos obtenido

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

tienen, en efecto, una forma muy sencilla. Son como las ecuaciones del movimiento de un punto, de masa igual á la unidad, bajo la acción de una fuerza, en el caso más sencillo también de que dicha fuerza tenga una potencial; ó, si se quiere, cuando hay una función de fuerzas, puesto que las tres componentes

$$\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z},$$

se deducen diferenciando con relación á x, y, z una función única $Q(x, y, z, t)$.

De modo que si representamos por Q_x , Q_y , Q_z el resultado de estas tres diferenciaciones, no tendremos más que integrar las tres ecuaciones de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Q_x(x, y, z, t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Q_y(x, y, z, t),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Q_z(x, y, z, t);$$

y así obtendremos x , y , z en función de t y de las constantes de la integración.

Esto parece evidente, y á un principiante podría podrucirle cierta ilusión.

Mas para el problema de la integración esto es, hasta cierto punto, completamente ilusorio.

Sería eficaz el método *si conociésemos* Q , porque entonces conoceríamos Q_x , Q_y , Q_z .

Pero es que no conocemos Q .

Porque recordemos lo que representa esta función

$$Q(x, y, z, t).$$

Hemos visto que se tiene

$$Q = V - P$$

ó bien

$$Q = V - \lambda(p)$$

siendo

$$\lambda(p) = \int \frac{\partial p}{f(p)}.$$

Luego para conocer Q es preciso que conozcamos V y P .

V , en efecto, es conocida, porque es la potencial de las fuerzas (X , Y , Z); es, pues, un dato.

Conocemos, por consiguiente, V , y podemos conocer sus derivadas con relación á x , y , z .

Pero no conocemos P ; porque P es una función, de forma conocida, es cierto, si se conoce $f(p)$, pero si es una función conocida de p , en cambio p es una de las cinco incógnitas del problema: es la presión en cada instante para cada punto.

En resumen, que no conocemos Q , y que las tres ecuaciones anteriores podrán ser formas sencillas para la integración, pero insuficientes, porque á ellas han de añadirse las otras dos ecuaciones del sistema general, á saber: ρ en función de p , y la ecuación de continuidad.

Ni aun en el caso más sencillo, ni aun suponiendo que el flúido sea incompresible, en cuyo caso la densidad será constante, podremos conocer Q , si antes no hemos resuelto el problema.

Porque en este caso

$$Q = V - \int \frac{dp}{\rho} = V - \frac{1}{\rho} p$$

y todavía en el segundo miembro entra p , es decir, la presión que, antes de resolver el problema, es una función desconocida de a, b, c, t ó si se quiere eliminando a, b, c , una función de x, y, z, t .

Volvemos, pues, á lo que indicamos al principio: las tres ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

por más sencillas que sean en su forma, no nos sirven directamente para el problema de la integración, aunque en ciertos casos y por otras combinaciones puedan facilitararlo.

* * *

Pero si no nos sirven para la integración directa, son utilísimas para determinar ciertas propiedades del movimiento del flúido.

Y esto responde á la idea general que al principio de esta conferencia explicábamos.

A saber: que las ecuaciones diferenciales de un problema, por sí solas, sin pasar por la integración, demuestran ciertas propiedades de los sistemas como si ya estuvieran integrados, y en rigor en ellas están escritas, no algunas, sino todas las propiedades de dichos sistemas.

En una ciencia ideal y perfecta, tener las ecuaciones diferenciales, será lo mismo que tener las integrales que de ellas se deducen.

Y no sólo contendrán en sí las propiedades de los sistemas ya integrados, sino que podrán combinarse con otros sistemas representados por otras ecuaciones diferenciales.

Pero nos vamos separando demasiado de nuestro objeto.

* * *

Una observación general que nos evita otras muchas.

Al exponer la teoría de los torbellinos, pudiéramos dar á nuestros alumnos una larga lista bibliográfica.

Preferimos no citar más que tres obras, que son las que tomamos por guía en nuestro trabajo, sin perjuicio de las modificaciones que creamos conveniente introducir en la exposición para más claridad de la enseñanza.

Estas obras son:

1.^a La teoría de los torbellinos de Poincaré.

2.^a Los capítulos relativos á dicha teoría y los que con ella tienen relación en la obra de Mecánica de Mr. Appell; y 3.^a, por último, la obra titulada *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*, por J. J. Thomson.

Entrando ya en materia, empecemos por establecer el teorema de Helmholtz tal como Mr. Poincaré y Mr. Appell lo desarrollan, aunque explicándolo, como siempre hacemos, á nuestro modo, y bajo nuestro punto de vista, que es el que creemos más conveniente para esta clase.

Supongamos un instante determinado por el valor t del tiempo.

Para ese instante, consideremos en el fluido una serie de puntos, ó mejor dicho, de elementos de fluido a, b, c (fig. 32) constituyendo una curva cerrada C .

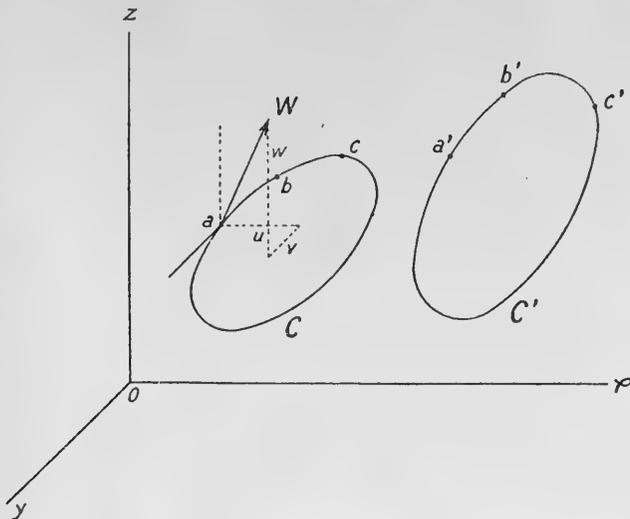


Figura 32.

Hemos demostrado antes, que esta *curva flúida*, se conservará íntegra, aunque cambiando de forma en el movimiento del fluido; es decir, que en otro instante t' , C se habrá convertido en C' , que también será una curva cerrada, y los elementos flúidos que constituyen C' serán los mismos que constituían C : se habrán dilatado ó se habrán condensado, pero siempre podremos considerar en el límite á la línea flúida C' como una transformación de la C .

Esta, en todo el movimiento, conserva en cierto modo su *individualidad*.

Si fuera un ser humano, y permítasenos esta comparación y este idealismo matemático, si fuera un ser consciente, casi

podría estar satisfecho y tranquilo, porque bajo la fe de esta teoría, tenía la seguridad de ser inmortal.

Pero no sólo conserva su substancia flúida, sino algo más: cierta magnitud muy importante que es la que constituye el fondo del *teorema del Helmholtz*.

El teorema dice así:

Si consideramos una curva cerrada C compuesta de elementos del flúido y formamos la integral

$$I = \int_C (u \partial x + v \partial y + w \partial z),$$

para cualquier instante en todo el movimiento de dicha curva, y de los elementos flúidos que la constituyen, *la expresada integral conservará constantemente el mismo valor, y será, por lo tanto, independiente del tiempo.*

El sentido de dicha integral se comprende inmediatamente.

Para cada punto a , en la posición determinada C , se conoce, ó mejor dicho, tiene un valor determinado y una dirección determinada W , la velocidad del punto a en el movimiento, luego quedarán determinadas (que las conozcamos ó que no las conozcamos) las tres componentes u , v , w de dicha velocidad W .

Asimismo, para el punto en cuestión a , estará determinado el elemento ab de la curva C , y por lo tanto, sus tres componentes ∂x , ∂y , ∂z , que para evitar confusiones no hemos representado en la figura.

Luego para el punto a de la curva C , el elemento diferencial

$$u \partial x + v \partial y + w \partial z$$

será una cantidad perfectamente determinada.

Y como lo mismo podemos decir para todos los demás puntos b , c ,.... de la curva en cuestión, la integral representará la suma de todas estas cantidades á lo largo del contorno total $a b c$,.... C ,.... a .

Es, además, claro, que como los elementos diferenciales se refieren á puntos de la curva, la integral, aunque aparentemente contiene tres variables x , y , z , no dependerá más que de una sola, la que por sus diferentes valores va determinando los diversos puntos de C .

Dicha integral es susceptible de una interpretación sumamente sencilla.

Si W fuese una fuerza y u , v , w , por lo tanto, sus componentes, se sabe por mecánica que el elemento diferencial

$$u\partial x + v\partial y + w\partial z$$

representaría el trabajo elemental de la fuerza hipotética W á lo largo del elemento ab . Luego la integral representaría *el trabajo de la fuerza variable W á lo largo de toda la curva*.

Pero esto no es más que una representación mecánica, porque W no es una fuerza, sino una velocidad, y no recorre la curva cambiando de posición y de valor, sino que en un instante dado sobre cada elemento actúa, ó á el corresponde, una velocidad W .

Muchos autores, á esta integral, le dan el nombre de *circulación del flúido á lo largo de la curva C* .

Y ahora pasemos á la demostración y veamos, cómo dentro de las hipótesis establecidas, la curva caminará con su flúido durante el movimiento, cambiando de forma, pero formada siempre por los mismos elementos de dicho flúido, conservando *una circulación* ó, dándole otro nombre, un trabajo constante I .

Hemos anticipado esta idea: que la integral no depende más que de una sola variable que ahora llamaremos α .

Variando α sus diferentes valores determinan diferentes puntos de la curva y al llegar al valor, por ejemplo, β , se habrá vuelto al punto de partida.

Estos diferentes valores de α , si determinan los diferentes puntos de la curva, determinan también sus coordena-

das; de modo que para una posición cualquiera C de la curva, en cualquier instante t , tendremos:

$$x = f_1(\alpha, t), \quad y = f_2(\alpha, t), \quad z = f_3(\alpha, t).$$

Mr. Poincaré supone que estas funciones f son *funciones periódicas* de α , porque esta variable independiente puede recorrer varios ciclos, dando los mismos valores para x, y, z ; pero esto importa poco para nuestro objeto; lo que importa es que al variar desde α á β determine todos los puntos de la línea C sin discontinuidad.

Puesto que x, y, z son funciones de α , el valor de I podrá escribirse de este modo:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(u \frac{\partial x}{\partial \alpha} + v \frac{\partial y}{\partial \alpha} + w \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \partial \alpha$$

y evidentemente la cantidad comprendida en el paréntesis puede considerarse que no es más que una función de α .

En efecto, u, v, w , son funciones de x, y, z para el instante que se considera, y éstas son funciones de α .

Por otra parte, siendo x, y, z funciones de α , también lo serán

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}.$$

Si la integral I es invariable, el coeficiente diferencial, con relación al tiempo t , deberá ser igual á 0; y recíprocamente si es igual á 0, claro es que I será constante.

Veamos lo que resulta de diferenciar I con relación á t .

Tendremos

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \left(u \frac{\partial x}{\partial \alpha} + v \frac{\partial y}{\partial \alpha} + w \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)}{\partial t} \partial \alpha,$$

y desarrollando

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_a^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + u \frac{\partial \frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\partial t} + v \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial \alpha}}{\partial t} + w \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\partial t} \right) \partial \alpha$$

Pero u, v, w deben satisfacer á las ecuaciones del movimiento, y estas ecuaciones al simplificar la fórmula de Lagrange, hemos visto que pueden ponerse bajo esta forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

ó bien

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

puesto que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w.$$

Y tendremos:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_a^\beta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \partial \alpha$$

en razón á que

$$\frac{\partial \frac{\partial x}{\partial \alpha}}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial \alpha}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Por último, el valor de $\frac{\partial I}{\partial t}$ se convertirá en

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_a^{\beta} \left[\frac{\partial Q}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2 + v^2 + w^2)}{\partial \alpha} \right] \partial \alpha$$

y

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \int_a^{\beta} \frac{\partial \left(Q + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right)}{\partial \alpha} \partial \alpha.$$

Esta última integral con relación á α , dará evidentemente

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \left[Q + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]_a^{\beta}$$

Pero Q, u, v, w , son funciones de x, y, z en la curva C , y estas coordenadas al cerrarse el ciclo, según antes dijimos, tienen el mismo valor para α que para β ; de modo que

$$\left[Q + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]_{\beta} - \left[Q + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]_a = 0$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

Es decir, que la integral I , ó sea la *circulación*, es *independiente del tiempo*.

El mismo valor tendrá I para la curva C , que para la curva C' , que para todas las curvas correspondientes á todos los valores de t .

Queda, pues, demostrado el teorema de Helmholtz.

*
*
*

Para alejar toda duda de mis alumnos, todavía haremos una observación, tan elemental, tan sencilla, que casi es inútil; pero la experiencia me ha demostrado que nada es inútil en materia de dudas, porque á veces las más injustificadas se hacen formidables para un principiante.

Y aclaremos el punto en cuestión.

Hemos dicho que las coordenadas x, y, z de un punto de la curva C eran

$$x = f_1(\alpha, t), \quad y = f_2(\alpha, t), \quad z = f_3(\alpha, t)$$

y hemos admitido implícitamente que para otra posición cualquiera de la curva en cuestión, por ejemplo, para C' , las tres funciones f_1, f_2, f_3 , habían de ser exactamente las mismas en su forma analítica; lo único que variará de una curva á otra será el valor de t . Para la forma y posición inicial habrá que poner $t = 0$; para la posición C deberemos substituir $t = t$; para la posición C' , $t = t'$, y así sucesivamente.

Pero si la forma de f_1, f_2, f_3 , cambiase de una curva á otra la demostración no sería rigurosa.

Pues bien, la constancia en la forma analítica de f_1, f_2, f_3 para todas las curvas C es evidente.

Porque dichas tres ecuaciones se deducen de las *integrales generales de Lagrange*, que, como hemos visto, tienen la forma general.

$$x = F_1(a, b, c, t), \quad y = F_2(a, b, c, t), \quad z = F_3(a, b, c, t).$$

Para un punto cuyas coordenadas iniciales sean a, b, c , habrá que poner estos valores en las ecuaciones anteriores, y si el punto cuyas coordenadas son a, b, c recorre una curva inicial C_0 , sus valores en función de la variable independiente α serán

$$a = \varphi_1(\alpha), \quad b = \varphi_2(\alpha), \quad c = \varphi_3(\alpha)$$

y substituyendo estos valores en los de x, y, z tendremos para ecuación de la curva C

$$x = F_1(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), t)$$

$$y = F_2(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), t)$$

$$z = F_3(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), t).$$

Pero para todas las curvas $C, C' \dots$ la forma analítica de F_1, F_2, F_3 será la misma porque corresponden á las *integrales generales* que son únicas en cuanto á la forma para to-

dos los puntos; y como las formas de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, también son invariables, las formas de los segundos miembros de los valores de x, y, z que son los que hemos representado por f_1, f_2, f_3 , serán siempre las mismas; sólo variará el valor de t que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Todas las curvas estarán definidas por ecuaciones de la misma forma en que sólo variará el parámetro t y en cada curva obtendremos todos los puntos haciendo variar la variable independiente α entre α y β .

*
*
*

Tenemos, pues, esta propiedad verdaderamente notable, aunque sujeta á una serie de condiciones, á saber:

Si el flúido es perfecto.

Si las fuerzas X, Y, Z se derivan de una potencial.

Si la densidad depende de la presión y se prescinde de la temperatura, que supondremos constante, ó casi dijéramos mejor que supondremos nula, porque si no el problema del movimiento se complica con otro movimiento.

Y, en fin, si las integrales en el sistema Lagrange son recíprocamente uniformes, además de continuas, con respecto á a, b, c , pues de lo contrario sería necesario un estudio especial, como en otra conferencia indicamos.

Si, en suma, todas estas condiciones se verifican, toda curva cerrada compuesta de elementos infinitamente pequeños de flúido, en el movimiento de éste continuará constituyendo una curva cerrada también, y la circulación por dicha curva, es decir, la integral I , será invariable.

Es algo, si se nos permite la comparación, como una inmortalidad hidrodinámica.

El cuerpo, es decir, la curva, cambia de forma; la cantidad especial que hemos llamado *circulación* permanece invariable.

Establecido este teorema fundamental, en la conferencia inmediata estudiaremos sus principales consecuencias.

LII. --Conferencias sobre Física Matemática.
Teoría de los torbellinos.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimocuarta.

SEÑORES:

Considerando una serie continua de elementos en un fluido perfecto, que constituyan una línea cerrada, un filete infinitamente estrecho pudiéramos decir, del fluido en cuestión, hemos demostrado en la conferencia precedente:

1.º Que la línea del fluido, siguiendo el movimiento general de éste, cambiaría naturalmente de posición, de forma, y de dimensiones; pero los elementos de fluido que la constituyesen seguirían siendo los mismos.

2.º Que la *circulación* á lo largo de dicha línea, que la representábamos por *I* y que también abreviadamente podríamos decir que era el trabajo de las velocidades, conservaría un valor constante.

Todo esto suponiendo que se verificase la serie de hipótesis que oportunamente indicábamos.

*
* *

De este teorema fundamental de Helmholtz se deduce la demostración de otro teorema de hidrodinámica, también muy importante, y á que podemos dar el nombre de *teorema de Lagrange* y es el siguiente:

Si en todo el fluido ó en una región del fluido, en el origen del movimiento, las velocidades tienen una potencial, es decir, si pueden obtenerse las componentes u, v, w diferenciando con relación á x, y, z una determinada función de estas variables que llamaremos φ , de modo que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

esta propiedad se verificará para dicha masa ó región en otro instante cualquiera del movimiento.

O con más brevedad: si las velocidades tienen una potencial en el instante inicial, tendrán una potencial en cualquier instante.

Y como podemos considerar, que cualquier instante es el inicial, aún podremos decir, en términos más generales, que si las velocidades tienen una potencial en un instante determinado, tendrán también una potencial en otro instante cualquiera.

La demostración es una consecuencia inmediata del teorema de Helmholtz.

En efecto, la integral I por el teorema de Helmholtz ha de conservar un valor constante para cualquier línea cerrada; pues tomemos una línea cerrada en la región que goza de la propiedad que se indica, y substituyendo en vez de u, v, w las derivadas de la función potencial $\varphi(x, y, z, t)$ en

$$\int (u \partial x + v \partial y + w \partial z)$$

tendremos

$$I = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \partial y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \partial z \right).$$

Pero la cantidad entre paréntesis para el instante que se considera, es una diferencial exacta de x, y, z .

Luego representado por C el contorno de la línea cerrada

$$I = \int_C \partial\varphi = (\varphi)_C.$$

Mas la función φ para una línea cerrada en los puntos extremos, que coincidirán en uno sólo, tiene el mismo valor, y suponiendo φ uniforme, el segundo miembro es $\varphi - \varphi = 0$ y por lo tanto,

$$I = 0$$

Así la integral

$$I = \int_C (u\partial x + v\partial y + w\partial z),$$

que según el teorema general tiene siempre un valor constante, tendrá en este caso el valor 0 en todo el movimiento.

Y como esto se verifica sea cual fuere el contorno C , grande ó pequeño, se ve fácilmente que en todos los instantes la expresión $u\partial x + v\partial y + w\partial z$ es una diferencial exacta de las tres variables x, y, z , y que, por lo tanto, u, v, w , son las derivadas de una función x y tienen á ésta por potencial.

Además, esto lo demostramos en el curso anterior como una consecuencia del teorema de Stokes.

Lo que importa retener de todo ello, es:

1.º Que en el caso general I tiene un valor determinado y constante: luego veremos que esto corresponde al movimiento rotacional.

2.º Que si las componentes de la velocidad tienen una potencial, este valor constante de I es nulo. Este segundo caso corresponde al movimiento irrotacional y la afirmación no es absoluta.

El valor, pues, de la integral, caracteriza una ú otra clase de movimiento.

Y ocurre preguntar, anticipándose á la teoría:

¿En un fluido perfecto pueden presentarse ambos casos, á saber, que en unas regiones del fluido tenga este movimiento rotacional y en otras movimiento irrotacional?

Y bajo otra forma: ¿Puede suceder que en una región del fluido y en el movimiento de esta región, las velocidades tengan una potencial y en otra región no la tengan?

Si ambos movimientos pueden coexistir en un fluido, lo que aseguramos desde luego es que ambos movimientos persistirán sin que se cambie uno en otro.

Pero continuemos el estudio de los torbellinos sin anticipar las ideas, sino lo puramente preciso para estimular el interés, si se me permite la palabra, de los que me escuchan.

*
* *

La integral del teorema de Helmholtz puede presentarse bajo otra forma importantísima, aplicando á dicha integral el teorema de Stokes.

Este teorema lo explicamos en forma elemental, pero con toda la extensión que nos fué posible, en el curso anterior.

En él dimos una demostración sencillísima, la de M. Poincaré, y allí decíamos: «La fórmula de Stokes tiene por objeto transformar una *integral de línea* en *integral de superficie*; ó, reciprocamente, una integral de superficie en integral de línea, que es como si dijéramos, una *integral doble* en *integral simple*, ó una integral simple en integral doble.»

No enlaza dicha fórmula cantidades distintas, de tal modo, que puedan despejarse las incógnitas en función de los datos; es una pura fórmula de transformación; algo así como si escribiéramos

$$a(b + c) = ab + ac,$$

de donde no se puede despejar, ni a , ni b , ni c , pero que indica operaciones distintas, *dando un resultado igual*.

Transformando la integral I por el teorema de Stokes, tendremos:

$$\int_C (u dx + v dy + w dz) = \\ = \int_A d\omega \left[l \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) + m \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) + n \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \right]$$

Recordemos la significación de los elementos que entran en la fórmula precedente y lo que significan ambos miembros.

El primer miembro es una integral á lo largo de una curva cerrada cualquiera C .

Cada elemento diferencial se refiere á un punto, ó, mejor dicho, á un elemento de la curva.

La curva, en el caso presente, está formada, como explicamos antes, por elementos infinitamente pequeños del fluido.

u, v, w representan las componentes de la velocidad del fluido para cada punto de dicha curva C .

Y , por último, dx, dy, dz son las componentes del elemento ds de la curva para el punto al cual se refiere el elemento diferencial.

La significación de este primer miembro ya la hemos explicado: en todo el movimiento el valor de la integral es el mismo, y este valor dijimos que recibía el nombre de *circulación* á lo largo de la expresada curva.

Así es que, según el teorema de Helmholtz, la circulación en una curva cerrada es constante.

El segundo miembro representa *este mismo valor*, pero bajo otra forma; porque analíticamente podemos decir que es una integral doble.

Si por la curva C hacemos pasar una superficie cualquiera S , y adviertan mis alumnos esta circunstancia, que es importantísima, á saber: que dicha superficie S es arbitraria,

completamente arbitraria, sin más condición que la de apoyarse y tener por límite dicha curva C ; si representamos por $d\omega$ un elemento de área de la superficie S , y por l, m, n los cosenos de los ángulos que la normal á $d\omega$ forma con los ejes, que es lo que se llaman cosenos directores; y si integramos el elemento diferencial para toda la superficie A , el valor numérico de este segundo miembro será exactamente igual al valor numérico del primero; es decir, expresará bajo otra forma la circulación á lo largo de la curva C .

En cierto modo la circulación en la línea estará distribuída en circulaciones parciales en toda la superficie A .

Si esto así dicho parece un tanto vago, ya lo precisaremos más adelante.

Claro es que las u, v, w del segundo miembro significan las componentes de la velocidad; pero no para puntos de la curva C , sino para todos los puntos de la superficie A .

Adoptando el lenguaje moderno de los vectores, pero no de vectores que puedan moverse paralelamente á sí mismos, como en ciertas teorías se admite, sino de vectores con punto de aplicación determinado, podemos afirmar: que en cada instante del movimiento del flúido todas las velocidades representan lo que hemos llamado *un campo de vectores de velocidad*.

Unos vectores (u, v, w) , los del primer miembro, corresponderán á los puntos de la línea C ; otros vectores (u, v, w) , los del segundo miembro, corresponderán á puntos del área A ; de modo que empleando también cierto lenguaje moderno, podremos decir, que si los primeros representan un infinito simple por referirse á una línea C , los segundos representan un infinito doble por referirse á todos los puntos de un área A .

Y ya explicábamos en el curso anterior cómo una expresión en que no entraban más que vectores de una línea era equivalente á otra expresión en que entraban vectores de un área.

En el segundo miembro de la fórmula anterior entran tres expresiones, que ya encontrábamos en la conferencia anterior, á saber:

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz},$$
$$\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx},$$
$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}.$$

A estas expresiones divididas por 2 es á las que Helmholtz da el nombre de componentes del torbellino.

De modo que llamaremos torbellino, á un vector que tenga por componentes ξ , η , ζ , siendo, por lo tanto,

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 2\xi$$
$$\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 2\eta$$
$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta.$$

Estos binomios del primer miembro ó sus mitades, es decir, ξ , η , ζ , así explicados é introducidos en la teoría que nos ocupa, tienen una significación puramente analítica; cumplen con la ecuación de Stokes, convierten, por decirlo de esta manera una integral de línea en una integral de superficie; pero no hablan á la imaginación, no llevan consigo ninguna representación geométrica ó dinámica; por el pronto no se sabe, ni casi se sospecha, por qué reciben este nombre extraño: componentes de torbellino:

Cuando más representan un vector y tres componentes de vector.

Pero de antemano sabemos nosotros por otras conferencias, y aun por lo que explicábamos en el curso precedente, cuál sea esta representación geométrica y dinámica que echábamos ahora de menos.

Al aplicar las fórmulas que obtuvimos en el curso de 1907 á 1908, sobre la deformación de los cuerpos elásticos por el método de Lamé, al movimiento de un fluido perfecto, en las coordenadas de Lagrange, decíamos que un elemento infinitamente pequeño de fluido, que se movía á lo largo de la trayectoria de uno de sus puntos, podía *imaginarse* que estaba sujeto á tres movimientos.

Un movimiento de traslación paralelamente al elemento diferencial de la trayectoria; un movimiento de rotación alrededor de un eje cuyas tres componentes eran precisamente la mitad de las tres binomios anteriores, es decir, las que hemos llamado ξ , η , ζ .

Estas tres componentes son las que determinan el *vector torbellino*, y aquí lo encontramos por vez segunda en la fórmula de Stokes expresando, por la combinación analítica que indica el segundo miembro, el valor de la circulación que representa el primero.

En la conferencia que hemos citado, agregábamos: que el elemento diferencial en cuestión, después del movimiento de *traslación* y del de *rotación*, podía contraerse ó dilatarse de cierto modo; mas esta deformación no nos interesa por el pronto.

De estos tres movimientos sólo nos interesa el de rotación, porque el vector de que se trata y cuyas componentes son ξ , η , ζ , representa en dirección el eje de rotación y en magnitud la rotación por unidad de tiempo de la porción de fluido que estamos considerando.

Sustituyendo en el segundo miembro de

$$\int_C (u dx + v dy + w dz) = \\ = \int_A d\omega \left[l \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) + m \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) + n \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \right]$$

los valores de los paréntesis, que son

$$\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} = 2\xi,$$

$$\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 2\eta,$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\zeta,$$

tendremos:

$$\int_C (u \partial x + v \partial y + w \partial z) = 2 \int \int_A \partial \omega (\xi l + \eta m + \zeta n)$$

y podremos decir, que la circulación por la línea C está expresada en función del vector torbellino, cuyas componentes son ξ , η , ζ , según expresa el segundo miembro de la ecuación anterior.

Si en la figura 33, en que C representa la curva para la cual se está calculando la circulación, y S la superficie que por dicha curva hemos hecho pasar, tomamos en dicha superficie un punto A , y consideramos para este punto: 1.º, un área infinitamente pequeña, $d\omega$; 2.º, la normal AN en este punto á la superficie en cuestión; y 3.º, el vector AB , cuyas componentes sean ζ , η , ξ , el segundo miembro de la fórmula precedente tendrá una representación sumamente sencilla, que ya hemos empleado en otras ocasiones.

En efecto; el paréntesis $\xi l + \eta m + \zeta n$, en que l, m, n , son los cosenos directores de la normal AN , no es otra cosa que la suma de las proyecciones sobre esta normal de las tres componentes ξ, η, ζ , que es lo mismo que la proyección del vector AB , á que hemos dado el nombre de vector torbellino, sobre AN .

Si para abreviar representamos este vector torbellino por Ω y á su proyección AN por Ω_n , la ecuación de que se trata se convertirá en

$$\int_{\sigma} (u \partial x + v \partial y + w \partial z) = 2 \iint \Omega_n \partial \omega.$$

Pero $\Omega_n d\omega$ es precisamente lo que hemos llamado el flujo del vector Ω .

De suerte, que la ecuación anterior puede expresarse de este modo:

La circulación sobre una línea cerrada de fluido es igual al doble del flujo del vector torbellino sobre una superficie continua cualquiera, limitada por la línea C.

Este teorema, aplicado á las velocidades, es idéntico en el fondo al que anunciábamos en el curso anterior, al interpretar geoméricamente el teorema de Stokes.

Allí decíamos:

El trabajo de un vector V es igual al flujo del vector torbellino W .

Si lo que allí era un vector cualquiera aquí es el vector velocidad, y prescindimos del factor 2, introducido en cierto modo por razón de comodidad, ambos enunciados son idénticos.

El vector torbellino de ahora está definido del mismo modo que el de entonces, salvo que aquí tomamos la mitad; pero la teoría abstracta, la teoría matemática pura, es idéntica para uno y otro caso, y las mismas observaciones que para la claridad del teorema dábamos en aquella ocasión podemos repetir en ésta.

Podemos decir:

El campo general de vectores es en este caso un campo de velocidades en que están sumergidas, por decirlo de este modo, la curva C y la superficie S de la figura 33.

La velocidad, cuyas componentes son u, v, w del primer miembro de la fórmula, se refiere sólo á puntos de la curva C .

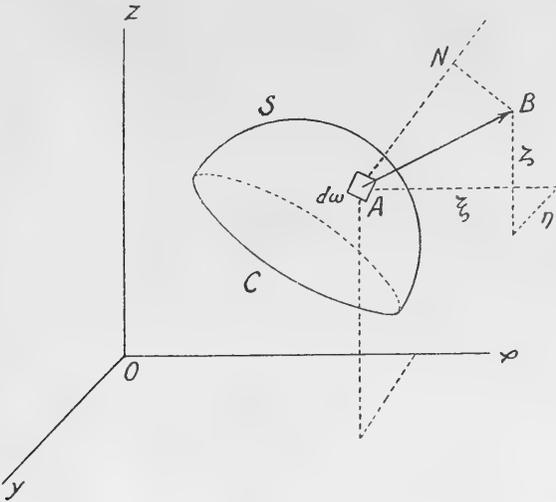


Figura 33.

La velocidad, cuyas componentes u, v, w sirven para formar el segundo miembro de dicha fórmula por sus derivadas con relación á x, y, z , se refieren á puntos A de la superficie S .

Pero fíjense bien mis alumnos en que, en este campo de vectores (u, v, w) , no es el que proporciona el flujo á través forman de la supercie S . Con este campo del vector-velocidad, se los vectores Ω cuyas componentes son ξ, η, ζ uno de éstos, viene representado en la figura por AB , y los normales como AN ó sea Ω_n son los que determinan el flujo del segundo miembro de la fórmula, que en este caso es el doble por pura comodidad en la notación.

Por último, la superficie S á que se refiere el teorema es completamente arbitraria con tal que sea continua, pase y esté limitada por la curva C .

*
* * *

Estudiemos aún más minuciosamente este segundo miembro de la fórmula y la significación de Ω y del flujo elemental $\Omega_n d\omega$.

Para ello supongamos que la curva C se va estrechando; que sólo limita un área infinitamente pequeña de la superficie S ; que esta curva es una circunferencia, y que la superficie S que pasa por esta circunferencia es precisamente su plano.

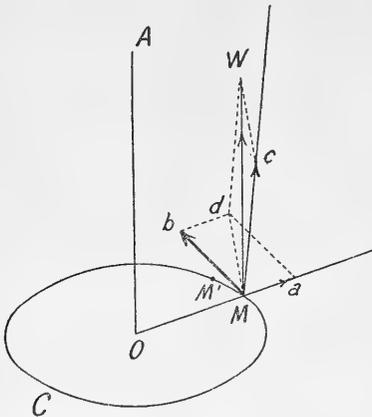


Figura 34.

Esto lo hemos representado en la figura 34.

En suma: C es la curva cerrada y en este caso una circunferencia de radio R .

La superficie que pasa por C y que llamábamos S es el plano de esta circunferencia.

La normal en el centro será la recta OA .

Y la velocidad del elemento flúido que ocupa el punto M está representada en la figura por el vector MW .

Apliquemos á este caso sencillísimo la fórmula de Stokes.

Hemos dicho que el primer miembro

$$\int_C (u\partial x + v\partial y + w\partial z)$$

puede considerarse como el trabajo á lo largo de la línea C de una fuerza cuyas componentes fuesen u, v, w .

Pues dicho trabajo, que será el del vector W á lo largo de la circunferencia C , puede obtenerse inmediatamente, sin acudir á las componentes u, v, w , aunque la aplicación directa de la fórmula no ofrecería dificultad de ningún género.

Mas puede abreviarse el cálculo como hace Mr. Poincaré, por la siguiente consideración.

Descompongamos W según los tres ejes rectangulares siguientes:

La tangente Mb á la circunferencia C en el punto M , la recta Ma que es el radio prolongado OM y la recta Mc que es paralela á OA .

De este modo, las tres componentes en que se descomponen MW serán:

$$Mb, Ma, Mc.$$

Lo mismo da hallar el trabajo elemental $u dx + v dy + w dz$ que el trabajo del vector MW , ó que el trabajo de sus tres componentes

$$Mb, Ma, Mc.$$

Pero el trabajo de las dos últimas es nulo, porque son normales al camino recorrido C . En efecto, Ma es prolongación del radio, y Mc es perpendicular al plano de la circunferencia.

Sólo queda, pues, Mb .

En la figura 34 bis hemos reproducido la figura 34, pero no en perspectiva, sino en el plano de la circunferencia C .

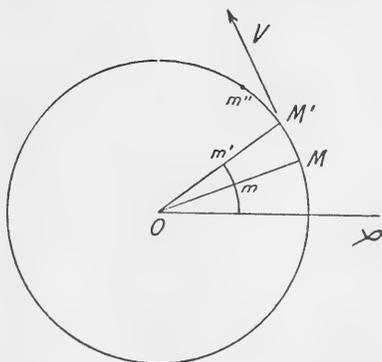


Figura 34 bis.

Para abreviar: la recta Mb la representaremos por V , y si m'' es un punto infinitamente próximo á M , el trabajo elemental de $Mb = V$ será

$$V.Mm''.$$

Tomando como eje inicial Ox , y llamando ω al ángulo que forma un radio cualquiera Om'' con Ox , tendremos evidentemente

$$Mm'' = R\partial\omega$$

y el trabajo elemental de V será

$$VR\partial\omega$$

luego

$$\int (u\partial x + v\partial y + w\partial z) = \int_0^{2\pi} VR\partial\omega.$$

Y vamos ahora á poner V bajo otra forma.

V que es una velocidad, será el cuociente por ∂t de una longitud cualquiera infinitamente pequeña de su dirección, que por ser tangente á la circunferencia será un arco de ésta que llamaremos ds ; el cuociente, repetimos, de ds por dt ; es decir,

$$V = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Si ds es, por ejemplo, MM' , podremos poner V de este modo,

$$V = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{MM'}{\partial t}.$$

Pero considerando el círculo de centro o , y cuyo radio sea

la unidad, que será el mismo en que se mide ω , y el incremento mm' que corresponde á MM' , tendremos

$$MM' = mm'R$$

ó bien

$$MM' = \partial\omega R$$

luego

$$V = \frac{\partial\omega}{\partial t} \cdot R.$$

Pero $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ no es otra cosa que una velocidad angular medida en la circunferencia de radio igual á la unidad en que se mide el arco ω . Si esta velocidad angular la representamos por φ , tendremos evidentemente $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \varphi$, y, por lo tanto,

$$V = \varphi \cdot R.$$

Resultando, por último,

$$\int_C (u\partial x + v\partial y + w\partial z) = \int_0^{2\pi} \varphi R^2 \partial\omega = R^2 \int_0^{2\pi} \varphi \partial\omega.$$

En rigor, esta última integral representa la suma de las velocidades angulares φ que para cada punto de C corresponden á V , multiplicadas por el arco $d\omega$, en que la velocidad V actúa.

Si llamamos φ_0 á una velocidad media de las φ , que se determinará evidentemente de modo que dé el mismo valor que la integral; es decir,

$$\int_0^{2\pi} \varphi \partial\omega = \varphi_0 \cdot 2\pi$$

tendremos

$$\int_C (u\partial x + v\partial y + w\partial z) = 2\pi R^2 \varphi_0.$$

Hemos introducido, pues, en vez de las velocidades V una velocidad media de la rotación alrededor del eje de la circunferencia C .

Veamos ahora en lo que se convierte el segundo miembro de la fórmula de Stokes.

Como la superficie S se ha reducido á un elemento, este elemento superficial será el área del círculo C , y la integral doble

$$2 \iint_A \partial \omega (\xi l + \eta m + \zeta n)$$

se reducirá á un elemento cuya área será πR^2 . Así

$$2 \iint_A \partial \omega (\xi l + \eta m + \zeta n) = 2\pi R^2 (\xi l + \eta m + \zeta n)$$

y aplicando la fórmula de Stokes á este caso, tendremos, por fin,

$$2\pi R^2 \varphi_o = 2\pi R^2 (\xi l + \eta m + \zeta u)$$

de donde

$$\varphi_o = \xi l + \eta m + \zeta n$$

El primer miembro es una velocidad media alrededor de cualquier normal de la superficie S , y el segundo miembro es precisamente la componente normal del torbellino.

Luego esta componente normal puede estar representada por una velocidad media de rotación, y esto justifica la denominación de torbellino que lleva consigo la idea de rotación ó de giro y que se da al vector que tiene por componentes ξ , η , ζ .

Nosotros habíamos justificado por anticipado esta denominación, al estudiar en las conferencias precedentes los movimientos y transformaciones de un elemento infinitamente

pequeño de fluido á lo largo de la trayectoria de uno de sus puntos.

*
* *

Permítasenos insistir sobre esta última fórmula, quiero decir sobre la aplicación de la fórmula de Stokes á la circulación á lo largo de una curva cerrada cualquiera del fluido.

Al explicar en el curso precedente la fórmula de Stokes llamábamos componentes del vector torbellino á unos binomios que hemos vuelto á encontrar en esta teoría de hidrodinámica.

Pero en esta última no hemos dado el nombre de componentes del torbellino sino á la mitad de dichos binomios, y así hemos escrito

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

de manera que el nombre de componentes del torbellino corresponde á las tres cantidades ξ , η , ζ , según la notación de Helmholtz, que es la que seguimos.

Esto en el fondo importa poco, porque lo mismo da decir que el trabajo de las velocidades sobre la curva C , ó sea la *circulación* es igual á la integral del flujo del vector torbellino sobre el área A , entendiendo que las componentes del vector torbellino son los binomios completos, que decir que la circulación es igual al doble del vector torbellino, si éste segundo es la mitad del primero.

El anterior teorema resulta igual al precedente, pues no se

ha hecho otra cosa que dividir todos los elementos de la integral por dos, y multiplicar por dos la integral completa.

Pero la última definición que hemos dado, nos parece que tiene una explicación bien sencilla, y que en vigor anticipamos en el curso precedente, al observar que las fórmulas de Stokes no eran más que una identidad, por decirlo así, de trabajos mecánicos.

Es decir, que la suma de los trabajos de los elementos del área A se reducía al trabajo total del contorno.

Fijemos las ideas y supongamos, para simplificar, que la curva cerrada C (fig. 35) es una curva plana situada en el plano de las xy , y que la superficie S es la extensión del plano de la xy comprendida en la curva.

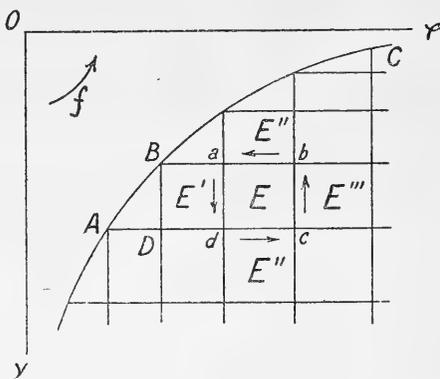


Figura 35

En este caso, de las tres componentes del vector torbellino no quedará más que la que tiene su eje perpendicular al plano de las xy ; y si para abreviar llamamos V a la componente de la velocidad en cualquier punto de la curva C sobre el elemento ds de esta curva, el trabajo elemental será Vds , y el trabajo sobre toda la curva C

$$\int_C V ds.$$

Este será el primer miembro simplificado de la fórmula de Stokes.

En el segundo miembro, como ξ , η son nulos, no queda más que ζ ; y como es nulo el ángulo que forma esta componente con la normal al elemento de A , que es paralela al eje de las z , porque toda el área A coincide con el plano de las xy , y por lo tanto el coseno n es igual á la unidad, el segundo miembro de la fórmula de Stokes, es decir, el de la integral doble, será

$$2 \iint_A \zeta \partial \omega.$$

Así, pues, tendremos

$$\int_C v \partial s = 2 \iint_A \zeta \partial \omega$$

ó bien

$$\int_C v \partial s = 2 \iint_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \partial \omega.$$

Dividamos el área A en rectángulos infinitamente pequeños, y sea uno de ellos $abcd$.

Esta será el área elemental $d\omega$ de A , que equivaldrá á $dx \cdot dy$, y por lo tanto,

$$\int_C v \partial s = 2 \iint_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

La identidad de los trabajos de las velocidades resulta evidente en este caso, como ya demostramos en el curso anterior, y el origen del factor $\frac{1}{2}$ aquí aparece clarísimo y hasta nos atreveríamos á decir que por estas consideraciones la fórmula de Stokes pierde el misterio analítico de que al principio parece rodeada para los principiantes.

En efecto; considerando el elemento de área $abcd$, al lado de ad , corresponde la componente v de la velocidad del fluido, que supondremos dividirla en dos partes iguales $\frac{v}{2}$: una para el elemento de área E ; otra para el elemento contiguo E' .

Asimismo pasa el lado ab , al cual corresponderá la componente u , consideraremos dividida esta velocidad en dos partes iguales: una mitad $\frac{u}{2}$ para el elemento E ; otra mitad para el elemento E'' .

Y otro tanto pudiéramos repetir para los lados bc y cd .

Hagamos esta descomposición por mitades, en todos los lados de todos los rectángulos elementales.

Calculemos el trabajo para todas estas fuerzas y veremos que el segundo miembro de la fórmula de Stokes resulta idéntico al primero, es decir, al trabajo de V

En efecto, volviendo al elemento E tendremos

$$\begin{aligned} \text{trabajo sobre } ab \dots &= -\frac{u}{2} \partial x \\ \text{trabajo sobre } \partial c \dots &+ \frac{1}{2} \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y \right) \partial x \\ \text{sobre ambos lados} &\frac{1}{2} \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y \right) \partial x - \frac{1}{2} u \partial x = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \partial x \partial y \end{aligned}$$

suponiendo que este trabajo se emplea en hacer girar al rectángulo líquido E alrededor de su centro, el sentido de la rotación sería la que marca la flecha f .

O de otro modo y sin ninguna hipótesis. En la circulación sobre $abcde$, contada en el sentido general f , la circulación sobre dc lleva el signo $+$, porque dx y la velocidad n son positivas; y la circulación sobre ab el signo $-$, porque ba es negativa y $\frac{u}{2}$ positiva.

Del mismo modo considerando los lados ad y bc tendremos

$$\text{trabajo sobre } ad \dots + \frac{v}{2} \partial y$$

$$\text{trabajo sobre } bc \dots - \frac{1}{2} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \partial x \right) \partial y$$

$$\text{trabajo sobre ambos lados} - \frac{1}{2} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \partial x \right) \partial y + \frac{1}{2} v \partial y = - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \partial x \partial y.$$

Pero observemos que el trabajo sobre los lados ab, cd suponiendo que u vaya creciendo con y , si se aplicase á hacer girar el elemento E tendería á producir una rotación, como hemos dicho, en el sentido de la flecha f .

Y el trabajo de las fuerzas $\frac{v}{2}$, en hipótesis análogas, tendería á producir una rotación en sentido contrario luego; si las velocidades fueran fuerzas y tendieran á producir la rotación de E , el par resultante sería en magnitud y en signo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \partial x \partial y - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \partial x \partial y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \partial x \partial y$$

ó bien, según la notación de Helmholtz,

$$\zeta \partial x \partial y$$

que es el elemento de la integral doble en la fórmula de Stokes el signo depende del sentido de f .

Es decir, que el trabajo ó circulación en todo el contorno del rectángulo E , si un punto lo recorriese en el sentido f , viene expresado por el producto del torbellino por el área.

Esto podemos repetir para todos los elementos $E', E'', E''', E'''' \dots$

Pero sobre el elemento ad , por ejemplo, admitiendo siempre como rotación positiva la que marca la flecha f , la velocidad $\frac{v}{2}$ que actúa sobre E da un trabajo igual y de signo

contrario á la otra mitad $\frac{v}{2}$ correspondiente al elemento E' , puesto que los caminos se contarán en sentidos contrarios si las rotaciones E y E' son en el mismo sentido.

Como el camino total ad es el mismo y las fuerzas que representan las velocidades tienen el mismo valor numérico $\frac{v}{2}$ estos trabajos ó valores de *circulación* se destruirán, y otro tanto podremos repetir para todos los lados de todos los rectángulos elementales.

Luego en toda el área A los trabajos ó valores de circulación se destruirán dos á dos.

Ahora veamos lo que sucede en los triángulos del perímetro como, por ejemplo, en el ABD ó en otros análogos.

En dicho triángulo ABD subsistirá como sabemos el teorema de Stokes, luego el trabajo en su perímetro también estará definido por el producto del torbellino por el área.

Estos productos completarán la integral doble del segundo miembro.

Los trabajos á lo largo de AD y BD serán nulos y sólo quedará el trabajo

$$\frac{V}{2} BA = \frac{V}{2} \partial s.$$

Luego si en el segundo miembro se suprimían todos los trabajos nulos sólo quedará

$$\int_c \frac{V}{2} \partial s = \frac{1}{2} \int_c V \partial s$$

que es el primer miembro de la fórmula de Stokes dividido por dos.

Para que los dos miembros sean iguales puesto que el primero es

$$\int_a V \partial s$$

deberemos multiplicar la integral doble por 2.

De este modo, creo que vemos con bastante claridad por qué aparece el factor $\frac{1}{2}$ en la definición de los torbellinos.

Vemos como se anulan dos á dos por ser iguales y contrarios los trabajos ó circulaciones elementales y vemos cómo las diferencias de velocidades en los lados opuestos de cada cuadrilátero tienden á producir el giro de cada elemento E y á crear el movimiento rotacional.

Si los pares correspondientes á los lados opuestos ab, cd por una parte, y ad, bc por otra, fuesen iguales y contrarios, no giraría el elemento E y el movimiento sería irrotacional.

Por último, la anulación de los trabajos sobre cada lado del rectángulo elemental, veremos al aplicar estas teorías á la electricidad, que se substituye por la anulación de corrientes iguales y en sentido contrario.

Claro es, que todo lo que hemos dicho refiriéndonos al trabajo de las velocidades es en cierto modo una explicación simbólica.

Sería trabajo, si las velocidades fueran fuerzas, pero si al estudio anterior, que es puramente cinemático, substituímos el estudio dinámico de los torbellinos, el problema debe estudiarse de otro modo como lo hace Mr. Appell en el tercer tomo de su Mecánica.

Con esto terminaremos la presente conferencia, para continuar en la próxima el estudio de las diferentes líneas que en un flúido en movimiento deben considerarse, como son, por ejemplo: las *trayectorías*, las *líneas de velocidades* ó de corriente en un instante dado, las *líneas de torbellino* y los elementos importantísimos que á estas últimas se refieren.

LIII.— Catálogo de los moluscos testáceos marinos
de la costa y bahía de Cádiz.

POR JOAQUÍN GONZÁLEZ HIDALGO.

* 170. *Chlamys discors* Chemnitz.

Véase antes *Pecten discors*.

Chemnitz. *Conchyl. Cab.*, XI, lám. 207, fig. 2042.

EST. Sacado con las redes de los pescadores del sitio denominado *Las Arenas*, de 16 á 30 brazas de profundidad. Abundante.

Se han recogido tres variedades de color: una, como el tipo de Chemnitz (fig. 2042) de un rojo parduzco sin mancha alguna; otra, como las dos figuras restantes de Chemnitz, negruzca con dos zonas anchas, blancas y desiguales, en dirección transversal, y una tercera variedad, de bonito aspecto, es de color castaño ó negruzco con manchas y líneas de diversa forma, blanquecinas ó amarillentas, alguna vez con un margen obscuro en su parte inferior.

Se asemeja mucho al *Chlamys flexuosus* pero es más grande, más aplanado, con las costillas más deprimidas y el sistema de coloración algo diferente. El mayor ejemplar tiene 42 milímetros de largo por 40 de alto.

* 171. *Chlamys flexuosus* Poli.

Véase antes *Pecten flexuosus*.

EST. Vive en el sitio denominado El Limpio, de 16 á 30 brazas de profundidad. Poco abundante.

La coloración de esta especie es variable, como puede verse en las figuras de los autores antes citados.

* 172. **Chlamys inflexus** Poli.

Chemnitz, *Conchyl. Cab.* lám. 34, figs. 9 y 10. (*Pecten*).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 31, fig. 4. (*Pecten*).

EST. Sacado del mismo sitio que el anterior. Muy raro.

* 173. **Chlamys commutatus** Monterosato.

Recluz, *Journ. Conch.* IV. lám. 2, fig. 15. *Pecten Philippii*.

Chemnitz, *Conch. Cab.* 2.^a edic. lám. 36, fig. 8. *Pecten Philippii*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 32, fig. 2. *Pecten Philippii*.

Locard, *Exped. Travailleur*, lám. 18, fig. 17 á 19. *Pecten solidulus*.

EST. En el sitio denominado El Limpio, de 16 á 30 brazas de profundidad. Raro.

Alguno de los ejemplares hallados tiene 32 milímetros de longitud por 30 de altura. Locard cita esta especie de Cádiz con el nombre de *Pecten solidulus* de Reeve, pero basta comparar la fig. 155 de Reeve, con todas las antes citadas de la presente especie, para comprobar que no se parecen en nada. Reeve dice de su especie *auriculis grandibus sub-æqualibus*, y precisamente el *Chlamys commutatus* las tiene muy desiguales y una de ellas muy oblicua.

* 174. **Avicula Tarentina** Lamarck.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 42, figs. 1 y 2.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 15.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57. A. fig. 3.

EST: En el sitio denominado El Duro, á 50 y 60 brazas de profundidad. Muy abundante.

* 175. **Pinna fragilis** Pennant.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 43. *Pinna pectinata*.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 16. *Pinna rudis*.

EST. Sacada con las redes del bou del mismo sitio que la *Avicula Tarentina*. Común.

Se encuentran las dos variedades, la provista de escamas pequeñas en las líneas salientes longitudinales y la que carece de ellas. Unos autores dan esta especie como la *Pinna rudis* de Linné, y otros como la *pectinata* del mismo autor. No hay completa seguridad de ello y es preferible emplear el nombre dado por Pennant.

* 176. **Mytilus galloprovincialis** Lamarck.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 33. a. *Mytilus edulis*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 25, fig. 4. *Mytilus edulis*.

EST. Dragado á 20 brazas y adherido por el biso á las rocas de la bahía. Común.

Ejemplares de mayor tamaño que las figuras citadas.

Esta especie no es realmente más que una variedad del *Mytilus edulis* Linné, y creo que muchas veces se da gran importancia á pequeñas diferencias anatómicas.

* 177. **Mytilus pictus** Born.

Reeve, *Conch. iconica*, *Mytilus*, lám. 7, fig. 27.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 26 y 26, a. figura 1.

EST. Adherido por el biso á las rocas. (Paz).

Ha recibido también el nombre de *Mytilus africanus* Chemnitz, porque vive en la costa occidental de Africa.

* 178. **Mytilus minimus** Poli.

Poli, *Test. Sicilia*, lám. 32, fig. 1.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 26, figs. 4 y 5.

EST. Adherido á las piedras por el biso. (Hidalgo).

* 179. **Modiola Martorelli** Hidalgo.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 75, fig. 6.

EST. Obtenido hasta ahora un sólo individuo vivo, á 60 brazas de profundidad en fondo de fango, frente á Chipiona.

Los ejemplares que me sirvieron para establecer la especie fueron hallados en condiciones parecidas en la costa mediterránea de España, hacia Vinaroz y Benicarló. La Expedición del Talismán encontró también un ejemplar, en fondo de 60 metros, al Sur de la bahía de Cádiz.

* 180. **Modiola barbata** Linné.

Jeffreys, *Brit. Conch.*, lám. 27, fig. 3.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 75, fig. 3.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 7, fig. 9.

EST. En el bajo del río Guadalete. Muy común.

Además de los ejemplares típicos se han recogido otros de mayor tamaño, puesto que tienen 66 milímetros de longitud.

* 181. **Modiola adriatica** Lamarck.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 7, fig. 8.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 75, figs. 8 y 9.

EST. En el bajo del río Guadalete. Rara.

Los individuos hallados son pequeños, un poco rojizos en la parte posterior y con algún radio más obscuro.

182. **Modiola agglutinans** Cantraine.

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 15, fig. 12.

EST. A 30 brazas de profundidad. (Mac Andrew).

* 183. **Lithodomus lithophagus** Linné.

Reeve, *Conch. iconica, Lithodomus*, fig. 9.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 26, fig. 9.

EST. Dentro de las piedras. (Hidalgo).

* 184. **Modiolaria costulata** Risso.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 7, fig. 15.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 75, fig. 2.

EST. A poca profundidad, en el fango. (Hidalgo).

* 185. **Arca Polii** Mayer.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 31, figuras 13 y 14.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 68, figs. 3 y 4.
Arca diluvii.

EST. Sacada por los pescadores de 80 á 90 brazas de profundidad, de fondo de fango. A 30 brazas (Mac Andrew). De 35 á 61 brazas. (Locard). Algo abundante.

* 186. **Arca Corbuloides** Monterosato.

Hidalgo, *Mol. marinos de España*, lám. 68, figuras 1 y 2. *Arca diluvii*.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, lám. 31, fig. 18.

Lamy, *Journ. Conch.* 1904, lám. 5, fig. 8. *Arca diluvii*.

EST. Sacada por los pescadores de 10 á 20 brazas de profundidad, de fondo de fango. Poco abundante.

Esta *Arca* y la anterior son muy semejantes; la *Polii* es más inequilateral, menos alargada transversalmente, más truncada en los dos extremos, y tiene menos costillas que la *Corbuloides*; ésta es menos inequilateral, más alargada transversalmente, más redondeada en los extremos y tiene más costillas que la *Polii*. El magnífico ejemplar de Sitges que he figurado en mi obra (lám. 68, figs. 1 y 2) corresponde al *Arca Corbuloides* y tiene 75 milímetros de longitud, lo mismo que una valva suelta encontrada en Cádiz en unión de otros ejemplares más pequeños, pero vivientes.

187. **Byssoarca** Noe Linné.

Reeve, *Conch. icon. Arca*, fig. 72.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 69, figs. 2 y 3.
HAB. Cádiz (Jeffreys).

188. Byssoarca tetragona Poli.

Poli, *Test. Sicilia*, lám. 25, figs. 12 y 13 (*Arca*).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 69, figs. 4 y 5.
(*Arca*).

EST. A 58 brazas de profundidad (Locard).

Los ejemplares hallados en la *Exped. del Travailleur* no corresponden al tipo normal de la especie, sino á los individuos deformados por vivir en las hendiduras de las rocas. (Véase Delessert, *Recueil de coquilles*, lám. 11, fig. 4.)

* **189. Byssoarca barbata** Linné.

Reeve, *Conch. iconica*, *Arca*, fig. 83.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 69, fig. 1.
(*Arca*).

EST. Adherida por el biso á las rocas en diversos puntos de la bahía, en la zona de las mareas. Común.

* **190. Byssoarca lactea** Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, figs. 8 y 9.
(*Arca*).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 69, figs. 6 y 7.
(*Arca*).

EST. En las hendiduras de las rocas. Común.

* **191. Pectunculus Gaditanus** Gmelin.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 73, fig. 2.

Delessert, *Recueil Coquill.*, lám. 12, fig. 2. *Pectunculus violacescens*.

EST. Vive á 4 brazas de profundidad en fondo de arena y fango en la desembocadura del río San Pedro. Muy abundante.

Especie variable que fué ya citada de Cádiz, por Bonanni

(*Recreatio mentis*; II, fig. 63), y denominada por Gmelin, *Cardium gaditanum*, con referencia á dicha figura.

Hay ejemplares de color castaño más ó menos teñido de morado, con el área oval, más oscura y los ganchos de un morado intenso; otros se diferencian de éstos por presentar zonas transversales pálidas, como indica la primitiva figura de Bonanni, constituyendo el tipo de la especie á que dió Lamarck el nombre de *Pectunculus zonalis*. Los hay también de un morado pálido con zonas más claras, que denominó Lamarck *Pectunculus violacescens* (figura de Delessert); y, por último, el Sr. Gavalá ha encontrado alguno blanquecino, con multitud de pequeñas líneas angulosas de un morado pálido. En esta última variedad faltan las líneas radiadas de coloración más clara que presentan las otras variedades antes descritas.

El *Pectunculus stellatus* Gmelin se estableció por un ejemplar joven de esta especie (Bonanni, fig. 62; Reeve, fig. 5), que presenta una estrella blanca en los ganchos, y no hay duda en referirle al *P. Gaditanus*, por el color morado y zonas más claras de la figura de Reeve y las líneas radiadas de la figura de Bonanni. Hay también ejemplares con estrella blanca en los ganchos de las otras especies de *Pectunculus* de Europa. En mi colección poseo uno del *Pectunculus Glycymeris*, de Cádiz; otro del *P. pilosus*, de Mahón, y otro del *P. siculus*, de Barcelona.

* 192. **Pectunculus Glycymeris** Linné.

Reeve, *Conch. icon. Pectunculus*, fig. 12, b.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 72, fig. 8.

EST. Recogido por los pescadores en los sitios denominados El Limpio y la Caballa, de 16 á 30 brazas de profundidad. Poco abundante.

* 193. **Nucula Nucleus** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* IV, lám. 47, figs. 7 y 8.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 1.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete.
Común.

* 194. **Nucula radiata** Hanley.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* IV, lám. 47, figs. 4 y 5.
Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 3.

EST. En los mismos sitios que la especie anterior. Algo rara.

* 195. **Nucula nitida** Sowerby.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* IV, lám. 47, fig. 9.
Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 4.

EST. Con las dos anteriores. Poco común.

* 196. **Nucula sulcata** Brönn.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* IV, lám. 47, figs. 1, 2
y 3. *Nucula decussata*.
Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 8, fig. 2.

EST. Dentro de las estrellas de mar. Muy rara.

* 197. **Leda pella** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 74, figs. 9 y 10.
Sowerby, *Thes. Conchyl.*, III, lám. 228, figuras
65 y 66.

EST. En el estómago de las estrellas de mar. Muy rara.

198. **Leda fragilis** Chemnitz.

Reeve, *Conch. icon. Leda*, fig. 53.
Sowerby, *Thes. Conchyl.*, III, lám. 228, figs. 80
y 81. *Leda commutata*.

EST. Cádiz (Chemnitz y Dillwyn).

199. **Venericardia sulcata** Bruguiere.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 57 A, fig. 9.
(*Cardita*.)

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, II, lám. 38, figuras 1, 2 y 3. *Venericardia antiquata*.

HAB. Cádiz (Maxwell Smith).

200. Cardita aculeata Poli.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 57 A, fig. 6.

Reeve, *Conch. iconica*, *Cardita*, fig. 17.

EST. De 35 á 60 brazas de profundidad. (Locard.)

* **201. Cardita trapezia** Linné.

Reeve, *Conch. iconica*, *Cardita*, fig. 15.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 57 A, fig. 7.

EST. En el estómago de las estrellas de mar. Muy rara.

* **202. Cardita calyculata** Linné.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 57 A, figuras 4 y 5.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, II, lám. 38, figuras 10 á 18.

EST. En fondo de fango, entre las rocas de Santa Catalina. Rara.

* **203. Astarte fusca** Poli.

Hidalgo, *Mol. mar. España*, lám. 15, fig. 3.

Sowerby, *Thes. Conch.*, lám. 167, fig. 24.

EST. Dentro de las estrellas de mar. Rara.

204. Astarte sulcata Da Costa.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 15, fig. 1.

Sowerby, *Thes. Conchyl.*, lám. 167, figs. 2 y 3.

EST. A 58 brazas de profundidad. (Locard.)

* **205. Woodia digitaria** Linné.

Delessert, *Recueil Coquilles*, lám. 6, fig. 10. *Lucina digitalis*.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 65. *Lucina digitalis*.

EST. Dragada á dos brazas de profundidad en diversos puntos de la bahía. Poco abundante. A 30 brazas de profundidad. (Mac Andrew.)

206. *Kellia sebetia* Costa.

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 1, fig. 15. *Bornia corbuloides*.

Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, II, lám. 39, figuras 1 y 2.

HAB. Cádiz (Calderón según Monterosato, con el nombre de *Kellia corbuloides*).

207. *Montacuta ferruginosa* Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 18, fig. 5.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 6, fig. 1.

EST. A 6 brazas de profundidad en fondo de arena fan-gosa. (Folin).

*** 208. *Lasæa rubra* Montagu.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 36, figs. 5, 6 y 7. (*Poronia*).

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 5, figs. 7 y 8. (*Kellia*).

EST. Entre las piedras (Hidalgo).

*** 209. *Lepton squamosum* Montagu.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 36, figs. 8 y 9.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 6, fig. 9.

EST. Dragado un ejemplar vivo en el bajo del río San Pedro á 2 brazas de profundidad.

*** 210. *Cardium aculeatum* Linné.**

Reeve, *Conch. iconica*, *Cardium*, fig. 17.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 39, fig. 1.

EST. Dentro de la bahía de Cádiz, en fondo de arena y

fango, á la profundidad de 15 brazas. Encontrados algunos ejemplares, no muy grandes.

* 211. **Cardium mucronatum** Poli.

Poli, *Test. Sicilia*, lám. 17, figs. 7 y 8.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 37, fig. 2.

EST. Vive en fondo de fango, de 20 á 40 brazas de profundidad. Abundante. Bien distinto del *Cardium echinatum*.

* 212. **Cardium tuberculatum** Linné.

Reeve, *Conch. icon.* fig. 16. *Cardium rusticum*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 38, fig. 3.

EST. Dentro de la bahía de Cádiz, en fondo de arena y fango, á la profundidad de 15 brazas. Común.

Recogidos ejemplares en que son muy visibles las zonas alternas, claras y oscuras (figura de Reeve), y otros de coloración oscura, sin fajas blanquecinas (figura de Hidalgo). El *Cardium rusticum* Linné es una variación de esta especie.

* 213. **Cardium paucicostatum** Sowerby.

Reeve, *Conch. iconica, Cardium*, fig. 18.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 37, fig. 4.

EST. En la entrada de la bahía, á 15 brazas de profundidad, en fondo de fango y arena. Poco común.

Son ejemplares de poco tamaño los encontrados hasta ahora.

* 214. **Cardium Norvegicum** Spengler.

Reeve, *Conch. icon.* fig. 48. *Cardium Pennantii*.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 40, figs. 1 y 2.

EST. Encontrados algunos ejemplares jóvenes (fig. 2), y valvas sueltas de individuos adultos (fig. 1), en el sitio denominado *El Limpio*, á 20 brazas de profundidad.

* 215. **Cardium edule** Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 5, fig. 12.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 39, fig. 2.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete, en la zona de las mareas, pero los ejemplares son de pequeño tamaño. Puerto Real (Calderón).

* 216. *Cardium exiguum* Gmelin.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 32, fig. 8. *Cardium pygmaeum*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 40 A, figs. 2 y 4.

EST. En los bajos de los ríos San Pedro y Guadalete, en la zona de las mareas. Común.

217. *Cardium nodosum* Turton.

Reeve, *Conch. iconica*, *Cardium*, fig. 128.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 5, fig. 6.

EST. A 30 brazas de profundidad, en fondo de arena y cascajo. (Mac Andrew).

218. *Cardium minimum* Philippi.

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 14, fig. 18.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 5, fig. 8.

EST. En las mismas condiciones que el anterior (Mac Andrew).

* 219. *Isocardia Cor* Linné.

Reeve, *Conch. iconica*, *Isocardia*, lám. 1, figuras 3, a, b.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 49, fig. 1.

EST. Vive en fondo de fango, de 80 á 100 brazas de profundidad, de donde sale en las redes del bou. Algo abundante.

* 220. *Callista Chione* Linné.

Reeve, *Conch. iconica*, *Dione*, fig. 13.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 7, fig. 5, y lámina 8, fig. 3.

EST. En el sitio denominado *El Limpio*, de 16 á 30 brazas de profundidad. Rara.

* 221. **Caryatis rudis** Poli.

Delessert, *Recueil Coquill*, lám. 9, fig. 9. *Cytherea Venetiana*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 8, figs. 6 y 7.

EST. En el mismo sitio que la especie anterior. Rara.

Los ejemplares recogidos son pequeños y entre ellos salió la variedad blanca del todo, á que Tíberi, creyéndola especie distinta, dió el nombre de *Cytherea mediterránea* (véase Dautzenberg, *Moll. Roussillon*, II, lám. 53, figs. 6 y 7).

* 222. **Circe mínima** Montagu.

Reeve, *Conch. iconica*, *Circe*, fig. 14.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 26 A, figuras 4 á 9.

EST. En las mismas condiciones y sitio que las dos anteriores. Común.

Varía la coloración de esta especie; hay individuos de un solo color, blanquecinos, morados ó ferruginosos; otros son blanquecinos con dos radios, continuos ó interrumpidos, oscuros; ó pardo-rojizos, con líneas radiadas oscuras y muy finas. También los hay de color castaño ó negruzco, con una gran mancha blanca trífida en la parte superior de cada valva, ó leonados con dos radios blancos.

* 223. **Dosinia lincta** Pulteney.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 50. *Artemis lunaris*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 8, fig. 5. *Dosinia lunaris*.

EST. Dragada en fondo de arena á 2 brazas de profundidad en la desembocadura del río Guadalete. Común.

La *Dosinia lincta* Pulteney, *modesta* de Reeve y *lunaris* de Lamarck, son tres formas de diferente tamaño y más ó

menos convexas de una misma especie, que vive en el Atlántico y el Mediterráneo. La encontrada en Cádiz corresponde á la *lunaris*, que es la más pequeña. No se debe admitir el nombre de *Lupinus* Linné para esta especie, porque la *Venus Lupinus* está insuficientemente descrita por este autor, sin cita de figura alguna; porque dice además *variat maculis griseis*, lo que nunca se observa en esta *Dosinia*, y porque después, en la edic. 12 del *Systema naturæ*, la considera como variedad de la *Dosinia exoleta*.

* 224. **Venus verrucosa** Linné.

Reeve, *Conch. iconica*. *Venus*, fig. 40.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 22, fig. 4.

EST. En los canalizos formados entre las rocas de Santa Catalina y el Corral Catalán. Muy común.

Abundan los ejemplares pequeños con tres radios oscuros.

* 225. **Venus Nux** Gmelin.

Bonanni, *Recreatio mentis*, clase 2.^a, fig. 39.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 45. *Venus casina*, forma gibosa (Reeve).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 22, fig. 5, y lámina 23, fig. 1.

EST. Sacada por los pescadores de una profundidad de 80 á 90 brazas, de fondo de fango. Muy abundante.

Especie viviente en diferentes puntos del Mediterráneo y conocida de los naturalistas bajo diversos nombres, que deben pasar todos á la sinonimia, porque estando *bien figurada*, por Bonanni, fué ya denominada *Venus Nux* por Gmelin, con referencia á la figura de dicho autor. Casi todos los ejemplares de Cádiz son de menor tamaño que los del Mediterráneo. Locard, en su obra *Expédition du Travailleur*, alteró el nombre específico de Gmelin, denominándola *nuciformis*, que debe pasar á la sinonimia.

* 226. **Chione Gallina** Linné.

Reeve, *Conch. iconica*, *Venus*, fig. 75.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 23, fig. 2.
(*Venus*),

EST. Se encuentra á 2 brazas de profundidad, en fondo de arena, en la desembocadura del Guadalete. Común.

Var. *striatula* Da Costa.

Reeve, *Conch. iconica*, *Venus*, fig. 91, a.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 24, fig. 2.

EST. Sacados algunos ejemplares de pequeño tamaño, á 15 brazas de profundidad, de fondo de fango y arena, en la entrada de la bahía.

La variedad difiere algo en su forma general y escultura del tipo de la especie, pero como se encuentran algunos ejemplares que tienen en una misma valva las dos esculturas, no puede considerarse como especie distinta de la *Chione Gallina*. Esta abunda extraordinariamente en Málaga, donde se usa como alimento, y presenta las diversas variaciones figuradas en la lámina 24 de mi obra antes citada.

* 227. **Chione fasciata** Da Costa.

Reeve, *Conch. iconica*, *Venus*, fig. 108.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 24, fig. 8.
(*Venus*.)

EST. En el sitio denominado *El Limpio*, de 18 á 30 brazas de profundidad. Rara.

Un ejemplar presenta tres radios anchos rojizos y otro es blanquecino con algunas manchas oscuras. Los individuos completos y las valvas sueltas halladas en la *Expedition du Travailleur*, corresponden, no al tipo de la especie, sino á la variedad denominada *Venus Brongniartii*, por Payraudeau (*Moll. Corse*, lám. I, figs. 23 á 25).

* 228. **Chione ovata** Pennant.

Reeve, *Conch. iconica*, *Venus*, fig. 137.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 24, figs. 1.
(*Venus*.)

EST. En el estómago de las estrellas de mar. Poco abundante.

Los individuos recogidos son todos de color agrisado, sin mancha alguna.

229. *Lucinopsis decussata* Philippi.

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 3, fig. 5. (*Venerupis*.)

Dautzenberg, *Moll. Roussillón*, lám. 67, figs. 7 y 8.

Lucinopsis Lajonkairei.

HAB. San Fernando (Calderón).

* **230. *Venerupis irus* Linné.**

Deshayes, *Traité Conchyl.* lám. 12, figs. 16 á 18.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 67, figs. 5 y 6.

EST. En el interior de las rocas de Santa Catalina.
Común.

* **231. *Tapes decussatus* Linné.**

Reeve, *Conch. iconica*, *Tapes*, fig. 57.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 42.

EST. En distintos sitios de la bahía, á poca profundidad, en las playas. Abundante.

Especie bastante constante en su forma y escultura, pero variable en la coloración. Entre los individuos recogidos en Cádiz los hay pardos ó rojizos, sin mancha alguna ó con líneas angulosas negruzcas; también de este último color con dos adios separados amarillentos, etc.

* **232. *Tapes rhomboides* Pennant.**

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 17, *Tapes virginea*.

Hidalgo, *Moluscos marinos España*, lám. 44, figs. 1 y 2. *Tapes edulis*.

EST. En la entrada de la bahía y en el sitio denominado

El Limpio, de 16 á 20 brazas de profundidad. Poco común.

Una variedad presenta dos radios blancos separados. La figura 2 que cito de mi obra ha sido referida por Locard á su nueva especie *Tapes lepidulus*, que no puede conservarse como tal, porque es tan sólo una de las muchas variaciones que presenta el *Tapes rhomboides*. Por mucho tiempo se creyó que este último era la *Venus virginea* Linné, que hoy se considera como una especie exótica.

* 233. **Tapes aureus** Gmelin.

Sowerby, *Index Brit. Shells*. lám. 4, fig. 7.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 46, figs. 5 y 6.

EST. En diferentes puntos de la bahía, enterrada en la arena. Común.

Es variable la coloración de esta especie como se representa en las láminas 45 A y 46 de mi obra. Los ejemplares que he visto de Cádiz son amarillentos del todo ó con líneas angulosas oscuras, como las figuras 5 y 6 citadas.

* 234. **Tapes floridus** Lamarck.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 54.

EST. La misma que la especie anterior y el color de la concha tan variable como en el *Tapes aureus*, pero se distingue de éste por ser más delgado, con estriado más fino y por su forma más prolongada transversalmente.

* 235. **Tapes geographicus** Chemnitz.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 44, figs. 5 á 12.

EST. Entre las piedras de Santa Catalina, en la zona de las mareas. Poco abundante.

Los ejemplares más comúnmente hallados son blancos con una red de mallas anchas formada por líneas angulosas de color castaño ó rosados, con dos radios blancos muy distantes entre sí (fig. 12).

* **236. *Petricola lithophaga* Retzius.**

Reeve, *Conch. icon. Petricola*, fig. 11.

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 74, fig. 11.

EST. En el interior de las rocas de Santa Catalina.
Común.

* **237. *Ungulina rubra* Daudin.**

Chenu, *Illustr. Conch.* lám. 1, figs. 1, 3, 5. *Ungulina oblonga*,

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 49, fig. 7.

EST. A la orilla del mar, entre las piedras, en Santi Petri (Hidalgo), yo mismo recogí un ejemplar vivo que es el figurado en mi obra, y después han hallado valvas sueltas los S. S. Gavala y Calderón.

238. *Diplodonta labelliformis* Locard.

Locard, *Expéd. Travailleur, Moll.* lám. 13, figuras 13 á 17.

EST. De 35 á 61 brazas de profundidad (Locard).

* **239. *Donax trunculus* Linné.**

Reeve, *Conch. iconica, Donax*, fig. 23.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 48, figs. 1 á 4.

EST. Dragado en fondo de arena, á 2 brazas de profundidad, en la desembocadura del río Guadalete. Muy común.

Se encuentran ejemplares de un solo color, leonados, morados ó blanquecinos, ó con radios morados sobre fondo de otra coloración.

240. *Donax venustus* Poli.

Poli, *Testac. Sicilia*, lám. 19, figs. 13 y 14.

HAB. Cádiz (Maxvell Smith).

Esta especie es sólo una variedad del *Donax semistriatus* Poli, desprovista de las estrias transversales.

* 241. **Psammobia Færæensis** Chemnitz.

Reeve, *Conch. iconica*, *Psammobia*, fig. 33.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 70, figs. 6 y 7.

EST. Dragada á 8 brazas de profundidad, frente á Santa Catalina.

El nombre específico está muy alterado en diversas publicaciones del modo siguiente: *Fervensis*, *Ferroensis*, *Ferræensis*, *Feroensis*, *Feræensis* y *Foerensis*.

* 242. **Psammobia depressa** Pennant.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 17. *Psammobia vespertina*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 70, fig. 4.
Psammobia vespertina.

EST. Dragada á 8 brazas de profundidad, frente á Santa Catalina. Rara.

La variedad encontrada es la de color naranjado hacia los ganchos, ó sea la *Psammobia florida* de Lamarck.

* 243. **Solen marginatus** Pennant.

Reeve, *Conch. iconica*, *Solen*, fig. 4.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 28, fig. 1. *Solen vagina*.

EST. En la desembocadura del río San Pedro y en la playa de la Cabezuela. Muy común.

Considerada por mucho tiempo esta especie como el *Solen vagina* Linné, se ha reconocido al fin que no era la especie Linneana (Hanley. *Ipsa Lin. Conch.* pág. 29) y se ha cambiado el nombre por el que la dió Pennant en 1777.

* 244. **Ensis Siliqua** Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 15. (*Solen*).

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 28, fig. 3.
(*Solen*).

EST. En la playa de la Cabezuela. Poco abundante.

* 245. **Pharus Legumen** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 13, fig. 2.
(*Solen*).

Hidalgo, *Mol. marin. España*, lám. 28, fig. 4, (*Ceratisolen*).

EST. En la desembocadura del río San Pedro, en fondo de arena, en la zona de las mareas. Abundante.

* 246. **Solecortus candidus** Renieri.

Deshayes, *Traité Conchyl.* lám. 6, figs. 11 á 13.

Hidalgo, *Moluscos marinos España*, lám. 26 A, figura 12.

EST. Sacado con las redes del bou de los sitios denominados *La Caballa* y *El Duro*, entre 30 y 80 brazas de profundidad.

* 247. **Solecortus antiquatus** Pulteney.

Reeve, *Conch. iconica*, fig. 8. *Solecortus coarctatus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 26 a, fig. 11 y lámina 83, fig. 3.

EST. Dragado dentro de la bahía á 6 brazas de profundidad, en fondo de arena. Poco abundante.

248. **Cultellus pellucidus** Pennant.

Söwerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 12.
(*Solen*).

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 13, fig. 3.
(*Solen*).

EST. A 61 brazas de profundidad (Locard).

* 249. **Mactra stultorum** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 22, figs. 4 á 6.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 31, figuras 1 y 2.

EST. Dragada entre los ríos San Pedro y Guadaléte en fondo de arena, á 2 y 3 brazas de profundidad. Muy abundante.

Se encuentran dos variedades, con radios ó blanca del todo y ésta es la *Mactra corallina* Linné. ¿Sería una variedad de esta especie la *Venus argentea* Gmelin (Bonanni, fig. 85), citada de Cádiz por estos autores? La figura es muy mala y la descripción muy breve, para poder resolver esta duda.

250. *Mactra subtruncata* Da Costa.

Forbès y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 22, fig. 2.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 30, figs. 3 y 4.

EST. A 60 brazas de profundidad. (Locard.)

*** 251. *Lutraria elliptica* Lamarck.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 12.

Hidalgo; *Mol. marinos España*, lám. 80, fig. 7.

EST. Arrojada por los temporales á las playas con el animal. Rara. Ejemplares no muy grandes.

*** 252. *Lutraria oblonga* Chemnitz.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 13, fig. 1.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 6, fig. 1.

EST. Arrojada á las playas con el animal. Poco abundante.

*** 253. *Eastonia rugosa* Chemnitz.**

Reeve, *Conch. iconica, Mactra*, fig. 115.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 6, fig. 3.

EST. Dragada á tres y cuatro brazas en fondo de fango, junto al río San Pedro. Común.

Esta especie vive también en Vigo, Noroeste de España, donde he recogido ejemplares de gran tamaño.

* 254. **Corbula gibba** Olivi.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 9, fig. 7. *Corbula nucleus*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 26, figs. 6 y 7 y lám. 26 a., fig. 3.

EST. En diversos puntos de la bahía, á dos ó tres brazas de profundidad, en fondo de fango. Común.

Unos ejemplares son blanquecinos ó rojizos del todo, y otros blanquecinos con algún radio rosado. La *Corbula rosea* Brown (Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 9, figs. 13 y 14), citada también de Cádiz por Locard, se considera generalmente como una variedad de la *Corbula gibba*.

* 255. **Panopæa Glycymeris** Born.

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 2, fig. 2.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 71, figuras 1 y 2.

EST. Sacadas en las redes del *bou* muchas valvas sueltas y hasta ahora sólo dos ejemplares vivos, uno en la entrada y otro en el interior de la bahía, de fondo de fango. También se recogieron dos ó tres ejemplares vivos de fondo de fango, en Málaga, al hacer las obras del puerto, y uno de ellos forma parte de mi colección, pero la concha es delgada y no muy grande.

* 256. **Saxicava arctica** Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 6, figs. 4 á 6.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 40 A, figuras 8 y 10.

EST. En el sitio denominado *El Limpio*, de 16 á 30 brazas de profundidad. Rara.

La *Saxicava minuta* Linné (Locard, *Expedition Travailleur Moll.* lám. 12, figs. 1 á 7), hallada en Cádiz á 60 brazas de profundidad, es sólo una variación de la *Saxicava arctica*.

257. *Gastrochæna dubia* Pennant.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 2, figs. 5 á 7.
Gastrochæna modiolina.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 49, figs. 3 y 4.

EST. A 30 brazas de profundidad, en fondo de arena y cascajo (Mac Andrew, con el nombre de *Gastrochæna cuneiformis*).

*** 258. *Pholas Dactylus* Linné.**

Sowerby, *Index. Brit. Shells*, lám. 1, fig. 8.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 47 A, figuras 1 y 2.

EST. En las margas que forman la playa de *La Herradura*. Abundante.

*** 259. *Barnea candida* Linné.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 5, figs. 1 y 2.
(Pholas).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 47 A, figuras 3 y 4.

EST. En las calizas margosas de la desembocadura del Guadalete, en la zona de las mareas. Poco abundante.

*** 260. *Loripes leucoma* Turton.**

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 35, fig. 2.
(Lucina lactea).

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 74, fig. 5.
(Lucina).

EST. Dragada á 2 brazas de profundidad en la desembocadura de los ríos San Pedro y Guadalete. Poco abundante.

Los individuos hallados hasta ahora, son de pequeño tamaño. Diversos autores consideran esta especie como la *Tellina lactea* de Linné, y la mencionan como *Lucina* ó *Loripes lacteus*, pero no hay seguridad de ello, como indica

Hanley en su *Ipsa Linn. Conchylia* y es preferible adoptar el nombre dado por Turton.

261. *Lucina borealis* Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 35, fig. 5.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 74, fig. 7.

EST. A 60 brazas de profundidad (Locard).

262. *Lucina ignota* Locard.

Locard, *Expéd. Travailleur, Moll.* lám. 11, figuras 24 á 27.

EST. A 62 brazas de profundidad (Locard).

Según Locard, que describe esta especie como nueva, difiere de la anterior por su menor tamaño, la carencia del surco que va desde los ganchos á la extremidad posterior, etcétera.

263. *Lucina divaricata* Linné.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 35, fig. 3.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 74, fig. 6.

HAB. Cádiz (Maxwell Smith) como *Divaricella divaricata*.

*** 264. *Tellina distorta* Poli.**

Sowerby, *Thes. Conchyl. Tellina*, lám. 56, fig. 6.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57 B, fig. 6.

EST. Vive en fondo de arena á 2 brazas de profundidad, en la desembocadura del río Guadalete. Rara.

Ejemplares con radios de color de rosa.

*** 265. *Tellina Cumana* Costa.**

Philippi, *Moll. Sicilia*, lám. 3, fig. 11. *Tellina Costæ*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57. A, fig. 1.

EST. Dragada en la playa de la Cabezuela. Común.

* 266. *Tellina planata* Linné.

Sowerby, *Thes. Conch. Tellina*, lám. 61, fig. 174.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57, fig. 2.

EST. En el mismo sitio que la especie anterior. Común.

* 267. *Tellina nitida* Poli.

Sowerby, *Thes. Conchyl. Tellina*, lám. 59, fig. 101.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 57, fig. 1.

EST. Dragada en fondo de arena, á 2 brazas de profundidad en la desembocadura del Río Guadalete. Poco abundante.

* 268. *Gastrana fragilis* Linné.

Sowerby, *Thes. Conch. Tellina*, lám. 59, figura 149.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 48, fig. 11.
(*Fragilia*).

EST. En el bajo del río Guadalete, en la zona de las mareas. Poco abundante.

* 269. *Scrobicularia plana* Da Costa.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 15, fig. 5. *Scrobicularia piperata*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 80, fig. 1 á 3.

EST. En las orillas del río Guadalete, entre el fango. Muy común.

Ha sido denominada *Mya gaditana* por Gmelin, *Lavigno calcinella* por Recluz, *Lutraria compressa* por Lamarck, etcétera.

* 270. *Syndosmya alba* Wood.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 3, fig. 22.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 79, fig. 6.

EST. Dragada á 8 brazas de profundidad, frente á Santa Catalina. Poco abundante.

* 271. **Syndosmya nitida** Muller.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 21.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 17, figs. 9 y 10.

Syndosmya intermedia.

EST. En el bajo del río San Pedro. Común. A 30 brazas en fondo de arena y cascajo (Mac Andrew).

272. **Poromya granulata** Nyst.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 9, figs. 4, 5 y 6.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 1.

EST. A 61 brazas de profundidad (Locard).

273. **Næera rostrata** Spengler.

Sars, *Moll. Norvegiæ*, lám. 6, fig. 7.

EST. A 61 brazas de profundidad (Locard) con el nombre de *Cuspidaria rostrata*.

274. **Næera Wollastoni** E. Smith.

Locard, *Expéd. Travailleur, Moll.* lám. 8, figs. 6 á 11. (*Cuspidaria*)

EST. A 61 brazas de profundidad (Locard).

275. **Pandora Pinna** Montagu.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 3. *Pandora obtusa*.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 80, figs. 5 y 6.

Locard, *Expéd. Travailleur, Moll.* lám. 12, figs. 17 á 20. *Pandora pinnoides*.

EST. A 35 brazas de profundidad (Locard). A 30 brazas en fondo de arena y cascajo (Mac Andrew).

276. **Pandora inæquivalvis** Linné.

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 2.

Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 49, figs. 5 y 6

HAB. Cádiz (Maxwell Smith).

277. *Lyonsia striata* Montagu.

Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 8, figs. 8 y 9.
Lyonsia Norvegica (según Locard).

EST. A 58 brazas de profundidad (Locard).

*** 278. *Thracia pubescens* Pulteney.**

Sowerby, *Index Brit. Shells*, lám. 2, fig. 8.
Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 79, fig. 1.

EST. A poca profundidad, en el fango. Recogido un solo ejemplar vivo.

Además de estas 278 especies de moluscos testáceos marinos recogidos vivos en Cádiz por las personas enumeradas en la introducción, se citan también otras 32, cuya lista es adjunta, pero no se incluyen de un modo definitivo en la fauna de dicha localidad, porque sólo se encontraron muertas ó muy deterioradas, ó sólo valvas sueltas las pertenecientes á los Pelecipodos.

Las especies así obtenidas viven en sitios más ó menos lejanos, fueron arrastradas por las corrientes al lugar donde se hallaron, y no deben, según mi parecer, ser incluídas en las faunas locales hasta que se encuentren con el animal ó por lo menos en número considerable y bien conservadas, lo cual hace verosímil su habitación en algún sitio próximo y no registrado todavía de la localidad que se explora.

Sipho islandicus Chemnitz. A 60 brazas (Gavala).

Neptunea despecta Linné. A 60 brazas (Gavala).

Triton doliarius Linné. A 60 brazas (Locard).

Defrancia gracilis Montagu. A 30 brazas (Mac Andrew).

Raphitoma brachystomum Philippi. A 30 brazas.
(Mac Andrew).

Cypræa Moneta Linné. (Lischke).

Natica Josephinia. Risso. Paz según Hidalgo (Jeffreys).

Esta cita es un error involuntario de Jeffreys, pues nunca he visto ejemplar de España de dicha *Natica*, y sólo está mencionada por Recluz del Cabo Creus.

Vermetus subcancellatus Bivona (Maxwell Smith).
Odostomia acuta Jeffreys. A treinta brazas (Mac Andrew).

Scalaria pulchella Bivona (Maxwell Smith).

Trochus millegranus Philippi. A 30 brazas (Mac Andrew).

Utriculus truncatulus Bruguiere. A 30 brazas (Mac Andrew).

Dentalium quadrangulare Mac Andrew. A 30 brazas (Mac Andrew).

Sowerby y Reeve describen un *Dentalium* con este nombre, pero es una especie de Colombia.

Ostrea plicata Chemnitz.

El autor de esta especie describe y figura muy bien una *Ostrea* exótica; pero dice al final de su descripción que tiene un ejemplar de la misma, de Cádiz, y que también la hay en el Mediterráneo, por creer sin duda que era igual á su *Ostrea plicata* la *Ostrea angulata* publicada después por Lamarck.

Lima Loscombii Sowerby. A 30 brazas (Mac Andrew).

Arca obliqua Philippi. A 30 brazas (Mac Andrew).

Cardium echinatum Linné. A 30 brazas. (Mac Andrew).

¿Se habrá dado con este nombre el *Cardium mucronatum*?

Cardium oblongum Chemnitz. A 60 brazas (Locard).

Cyprina islandica Linné. Valvas sueltas á 60 brazas (Gavala).

Venus casina Linné. A 60 brazas (Locard).

Lucinopsis undata Pennant. A 35 brazas (Locard).

Diplodonta rotundata Montagu. A 30 brazas (Mac Andrew); á 61 brazas (Locard).

Ervilia castanea Montagu. A 30 brazas (Mac Andrew).

Mactra gallina Da Costa. A 60 brazas (Locard).

Variedad de la *Mactra solida*.

Mactra gracilis Locard (*Exped. Travailleur*, lámina 12, figs. 21 á 29). A 35 brazas (Locard).

Mya truncata Linné. A 60 brazas (Locard).

Corbula curta Locard. A 58 brazas (Locard).

Probablemente variedad de la *Corbula gibba*.

Saxicava rugosa Linné. A 60 brazas (Locard).

Lucina spinifera Montagu. A 30 brazas (Mac Andrew).

Tellina squalida Pulteney. A 60 brazas (Locard).

Tellina serrata Brocchi. De 35 á 58 brazas (Locard).

Tellina tenuis Da Costa. A 35 brazas (Locard).

Con el número de moluscos marinos testáceos ya mencionados de Cádiz en este catálogo (310), aumentado con el de otros de pequeño tamaño que se encontrarán en exploraciones posteriores puesto que viven en diversas localidades del Atlántico y del Mediterráneo, puede afirmarse que la fauna central de la costa occidental del Atlántico es la misma que la del Mediterráneo en número aproximado é identidad de especies, á excepción de algunas que están localizadas en uno ú otro mar. La fauna boreal ó del Norte y la africana ó del Sur tienen sus especies propias, varias de las cuales se han propagado á la central como sucede con los *Buccinum*, *Sipho*, *Neptunea*, *Lima*, *Astarte*, que bajan del Norte, y los *Cymbium*, *Mesalia*, *Siphonaria*, etc., que ascienden del Sur. Otro tanto sucede en sentido inverso con la fauna central ó atlántico-mediterránea; algunas de sus especies suben muy alto hacia el Norte y otras se propagan tanto hacia el Sur que llegan hasta la colonia del Cabo.

Los que deseen enterarse más detenidamente de la distribución geográfica de las especies de estas faunas pueden consultar muchas publicaciones, entre las cuales las de más

interés son las de los autores siguientes, cuyos títulos pueden verse en el tomo XV de las *Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid*.

Adanson, Allen, Aradas, Blainville, Bofill, Broegger, Carus, Dautzenberg, Deshayes, Dunker, Fischer, Folin, Forbes, Friele, Graells, Hanley, Hidalgo, Jeffreys, Kobelt, Krauss, Locard, Mac Andrew, Monterosato, Nobre, Pallary, Payraudau, Petit, Philippi, Poli, Richard, Risso, Rochebrune, Sars Sowerby, Weinkauff y otros varios.

ADICIÓN

al Catálogo de los moluscos marinos testáceos de Santander.

El Sr. D. José Rioja, Director de la Estación biológica de Santander, nos prometió la remisión de los moluscos que se fueran encontrando en dicha localidad, para completar el Catálogo que habíamos publicado sobre su fauna malacológica marina, y he aquí el resultado del estudio de los ejemplares enviados hasta ahora, como también de los dibujos en color de diversas especies de Opisthobranchios. Quedamos muy agradecidos al interés que demuestra explorando ese puerto del Atlántico, contribuyendo de esa manera al mejor conocimiento de la fauna de España.

Hay que agregar, pues, al catálogo las especies siguientes, que han sido recogidas vivas.

139. **Ranella gigantea** Lamarck. (Reeve, *Conch. iconica*, *Ranella*, fig. 3). Recogida á 30 brazas en fondo de fango.

140. **Buccinum humphreysianum** Bennet (Kobelt, *Iconographia europ. meeresconchyl.*, lám. 28, fig. 2). Sacados dos ó tres ejemplares, por los pescadores, de mucha profundidad. Son de color uniforme, blanquecino-amarillento.

141. **Neptunea contraria** Linné (Hidalgo, *Mol. marinos de*

España, lám. 54, fig. 1). En las mismas condiciones que la especie anterior. Rara.

142. *Cypræa achatidea* Gray (Kobelt, *Iconographia europ.*, lám. 108, figs. 12 y 13). A 50 brazas, en el sitio denominado Palomera. Se hallaron otros tres ejemplares con el animal, además del ya citado en nuestras *Noticias sobre algunos moluscos de España*, pág. 10.

143. *Natica hebræa* Martyn. (Hidalgo, *Mol. marinos de España*, lám. 20. B. fig. 1). A 20 brazas, en fondo de arena. Rara.

144. *Natica Josephinia* Risso. (Kobelt, *Iconographia europ.*, lám. 56, figs. 1 á 7. *Neverita Josephinia*). Con la anterior; cuatro ó cinco ejemplares.

145. *Emarginula crassa* Sowerby (Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 63, fig. 2). Un ejemplar encontrado en el sitio denominado Mar de Abascal, á 200 brazas.

146. *Emarginula cancellata* Philippi (Sowerby, *Thes. Conch.* lám. 246, figs. 15 y 16). Un ejemplar en el mismo lugar que la anterior.

147. *Emarginula fissura* Linné (Forbes y Hanley, *Brit. Moll.* lám. 63, fig. 1. *Emarginula Mulleri*). A 113 brazas de profundidad, varios ejemplares.

148. *Pecten striatus* Muller (Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 35 a, fig. 7). Sobre *Amphihelias*, en el mar de Abascal, á 200 brazas de profundidad. Raro. Es una variedad de color blanquecino uniforme la que se ha encontrado.

149. *Pectunculus Glycymeris* Linné. (Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 72, fig. 8). A 20 brazas de profundidad.

150. *Cardium paucicostatum* Sowerby (Hidalgo, *Mol. marinos España*, lám. 37, fig. 4). Dentro de la bahía, en fondo de fango y arena.

151. *Isocardia Cor* Linné (Hidalgo, *Mol. marinos España*, lámina 49, figs. 1 y 2). Sacada por las redes de los pescadores de gran profundidad.

152. *Saxicava arctica* Linné. (Hidalgo, *Mol. marinos Es-*

paña, lám. 40, figs. 8 y 10). Sobre *Amphihelias* y *Dendrophyllias*, á 170 brazas de profundidad, en el sitio denominado el Patacón. Abundante.

Dibujos de los Opistobranquios recogidos, hechos en color del natural por el Sr. Rioja con mucha exactitud, han permitido su clasificación exacta, parte de ellos por nosotros mismos y los restantes por el reputado especialista en esta clase de moluscos nuestro amigo el Sr. Vayssiere, profesor de la Universidad de Marsella, á quien estamos reconocidos por su atención. Hemos agregado en casi todos la cita de las figuras de la obra de Alder y Hancock, terminada por Eliot, cambiando algún nombre genérico, con arreglo á la obra de este último naturalista. Las especies halladas en Santander hasta ahora, menos una ó dos que tal vez sean nuevas, son:

153. *Doriopsilla areolata* Bergh. En Cabo Menor.

154. *Doris testudinaria* Risso ó *Archidoris stellifera* Ihering (Eliot, lám. 1, figs. 5 á 9). En la Magdalena.

155. *Aldisa Berghi* Vayssiere. Cabo Menor; Peña Vieja.

156. *Rostanga coccinea* Forbes (Alder y Hancock, fam. 1, lámina 7. *Doris*).

157. *Amphorina cærulea* Montagu (Eliot, fam. 1, lám. 6, figuras 6 á 8).

158. *Chromodoris albescens* Schultz.

159. *Thecacera pennigera* Montagu (Alder y Hancock, fam. 1, lám. 21, a.).

160. *Polycera quadrilineata* Muller (Alder y Hancock, fam. 1, lám. 22).

161. *Triopa clavigera* Muller (Alder y Hancock, fam. 1, lám. 20).

162. *Antiopella cristata* Delle Chiaje ó *Janus cristatus*. (Alder y Hancock, fam. 3, lám. 44). En la bahía.

163. *Aeolidia papillosa* Linné ó *Aeolis papillosa* (Alder y Hancock, fam. 3, lám. 9).

164. *Coryphella gracilis* Ald. y Hanc. ó *Aeolis gracilis* (Alder y Hancock, fam. 3, lám. 18).

165. **Doto coronata** Gmelin (Alder y Hancock, fam. 3, lámina 6).
166. **Doto fragilis** Forbes (Alder y Hancock, fam. 3, lámina 5).
167. **Acera bullata** Muller (Forbes y Hanley, *Brit. Moll.*, lám. 114 D., figs. 4 y 5). Peña Vieja.
168. **Oscanius membranaceus** Montagu.
169. **Bouviera perforata** Philippi (*Pleurobranchus*). Machinas.
170. **Bouviera aurantiaca** Risso (*Pleurobranchus*). San Martín.
-

tamente, mientras el de *Co* puede considerarse como insoluble. Este hecho, que permite la resolución del problema inverso del anterior, ó sea investigar pequeñas cantidades de *Co* en presencia del *Ni*, hace que el estudio de tal reacción, por decirlo así, de *doble efecto*, sea particularmente interesante.

Otros autores (1) hace tiempo han propuesto ya para resolver este problema el etil xantogenato potásico. No nos ha sido posible conocer el pormenor de las investigaciones realizadas; pero sospechamos que los resultados obtenidos por sus autores no deben aventajar á los que se consiguen aplicando otras reacciones que, al igual de las de *Vogel* (sulfo-cianato amónico y alcohol amílico), *Ilinski* y *von Knorre* (nitroso- β -naftol), *Fischer* (nitrito potásico), *Tschugaef* (dime-til glioxima) y otras, se encuentran hoy en boga y gozan de justa preferencia en los libros de análisis.

Por las razones que se expondrán al final de este trabajo, nosotros hemos optado por el *sulfo-thio carbonato-metil-potásico*, pues aunque el derivado propílico le aventaja en sensibilidad en caso de estar los iones separados, no se presta tan bien á su caracterización estando juntos.

Acción del metil-sulfo-thio-carbonato-ion sobre el Niqueloso-ion.

Si sobre una disolución acuosa de una sal de Níquel (2) se vierte otra disolución también acuosa de metil-xantogenato potásico, se produce un precipitado amarillo-ocráceo, voluminoso, que se aglomera y sedimenta fácilmente mediante una ligera agitación; este precipitado, que desaparece calentándolo, es *soluble* en amoniaco, incluso en el de una con-

(1) Phipson, 1877, y Campbell, 1900.

(2) Hemos empleado en este trabajo sales de *Ni exentas de Co*, y de *Co exentas de Ni* de la casa *Kahlbaum*.

centración no superior al 3 por 100 é insoluble en el ácido acético.

Si la solución de sal Niquelosa es poco concentrada, el precipitado queda en suspensión, originando un enturbiamiento marcadamente dicróico, amarillo por reflexión y rosado por transparencia.

El reactivo diluído al 1 por 1.000 produce todavía los efectos descritos.

Acción del metil-sulfo-thio-carbonato-ion sobre el Cobaltoso-ion.

Si sobre una disolución acuosa de una sal de Cobalto se vierte otra disolución también acuosa de metil-xantogenato-potásico, se produce un precipitado verde oscuro si el reactivo está concentrado, verde claro, si está diluído, voluminoso y que no se aglomera tan fácilmente como el anterior al agitar; este precipitado es insoluble en ácido acético como el anterior, é *insoluble* en el amoniaco de una concentración próxima al 3 por 100.

Si el líquido problema no es muy concentrado, el tono verdoso del precipitado va siendo menos acentuado, y en disoluciones muy diluídas se produce una opalescencia azulada.

Acción del metil-sulfo-thio carbonato-ion sobre una mezcla de iones Ni y Co.

En este caso hay que considerar separadamente, por ser distinta, la acción del reactivo concentrado y la del diluído.

Si el reactivo está concentrado al ser puesto en contacto con el líquido problema, se producen simultáneamente el precipitado amarillo correspondiente al níquel y el verde intenso correspondiente al cobalto; este último enmascara al primero y es el único que se percibe; pero si el reactivo está

diluido y se adiciona poco á poco, se advierte perfectamente, en primer lugar, la aparición del precipitado amarillo, ni más ni menos que si el níquel se encontrara sólo en el problema, y si se continúa añadiendo, se percibe después la formación del precipitado verde, que lentamente va mezclándose con el anterior y obscureciéndole si el cobalto abunda; es decir, que aparentemente al menos el metil-xantogenato del níquel es el primero que se forma, y cuando la precipitación de éste ha terminado, es cuando comienza la del metil-xantogenato de cobalto; al final, cuando el precipitado total mezcla de ambos es ya de color obscuro, si se añade $NH^4 OH$ al 3 por 100 en cantidad suficiente, se acentúa de un modo sensible el tono verdoso, debido indudablemente á la disolución del compuesto amarillo de níquel; si éste estuviera predominante, no se nota precipitado verde alguno hasta que se añade el amoníaco y queda en él insoluble.

*
* * *

De lo expuesto se deduce, indudablemente, que mediante el reactivo á que nos referimos puede investigarse el níquel en presencia del cobalto si se le emplea en una disolución conveniente; y puede investigarse también el cobalto en presencia del níquel, terminando la reacción por una adición de amoníaco diluido que dejará sin disolver el metil-xantogenato de cobalto.

Este hecho de un reactivo de *doble efecto*, por decirlo así, que aun ejerciendo una acción análoga sobre dos iones metálicos, permite reconocerlos estando juntos, aunque no nuevo ni único en análisis, no deja de ser curioso, sobre todo si se tiene en cuenta que casi todos los reactivos propuestos para resolver el caso concreto de que nos estamos ocupando, se fundan en acciones originadas únicamente por uno de los dos iones y no por el otro.

Así, pues, creemos poder dar las siguientes instrucciones, para la resolución de dos interesantes problemas:

Investigación del *Ni* en presencia del *Co*.

Reactivo: solución acuosa de sulfo-thio-carbonato-metilpotásico al 1 por 1.000 ó más diluída.

Problema: solución acuosa de sal de níquel y cobalto ligeramente ácida por el ácido acético.

Técnica: á 2 cc del problema, colocados en un tubo de ensayo, se adiciona 1 cc del reactivo lentamente y escurriendo por la pared del tubo, de modo que quede sobre el problema.

En el acto aparecerá un anillo amarillo ocráceo en la parte superior del ensayo, si existe el *Ni*; al terminar la adición del reactivo ó agregando á veces un poco más, se percibirá un anillo verdoso sobre el anterior. Si no había níquel, este anillo verdoso ó azulado aparecerá desde el primer momento.

En casos extremos, que se puntualizarán más adelante, se filtra, y sobre el filtro, se percibirá el precipitado amarillo ligeramente verdoso si había *Ni*, ó francamente verde si no.

Investigación del *Co* en presencia del *Ni*.

Reactivos: solución acuosa del sulfo-thio-carbonato-metilpotásico al 5 por 100 ó superior concentración; solución de $NH_4 OH$ al 3 por 100.

Problema: igual que en el caso anterior.

Técnica: se procede exactamente como antes (1): una coloración verde en el precipitado denotará abundancia de cobalto; si no es así, se añade sobre el ensayo el amoníaco

(1) En este caso no conviene acidular, pues empleando solución concentrada de reactivo, éste se descompone más rápidamente en líquido ácido y podría conducir á error.

diluido, y entonces, si el líquido queda *límpido*, es que no había cobalto; si lo hubiera, quedará enturbiado por un ligero precipitado verde.

Conviene en este ensayo que todo el *Ni* haya sido precipitado y por eso se emplea el reactivo concentrado.

Nota:

Las disoluciones de metil-xantogenato potásico al 5 por 100 se alteran pronto; al 1 por 1.000 se conservan mejor, pero á los tres ó cuatro días se alteran algo; el cuerpo sólido y cristalizado se conserva perfectamente, de modo que, con un poco de costumbre en conocer las intensidades de color amarillo de las soluciones (las de 1 por 1.000 apenas lo tienen), pueden prepararse aquéllas en el acto y sin necesidad de hacer pesada alguna (1).

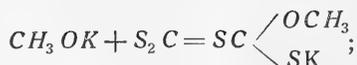
Para no dar á estas reacciones que proponemos ni más ni menos valor que el que realmente tengan, las hemos comparado con aquellas reacciones vigentes para el *Ni* y *Co* más en boga, y á continuación exponemos los resultados obtenidos, por el orden siguiente:

1.º Sensibilidad de la reacción para la investigación del Niquiloso-ion estando solo.

2.º Idem íd. en el caso de que con el Níquel haya cantidades variables, pero superiores de Cobaltoso-ion.

3.º Idem íd. para la investigación de Cobaltoso-ion estando sólo.

(1) Conviene recordar que la fácil preparación del metil-xantogenato potásico, es como sigue: á una disolución saturada de *KOH* en alcohol metílico anhidro, se añade por porciones y sin cesar de enfriar la cantidad de S_2C que indica el cálculo, que se hace mediante la reacción:



se forma una masa cristalina, y los cristales se escurren á la trompa y se lavan una ó dos veces con éter; *debe guardarse completamente seco.*

Y 4.º Idem íd. en el caso de que con el Cobalto haya cantidades variables, pero superiores, de Niqueloso-ion.

Para las dos primeras cuestiones hemos operado, como queda dicho, y paralelamente hemos hecho los mismos ensayos sirviéndonos de la reacción *Tschugæff* (dimetilglioxima), ya que ésta es, en opinión de autores eminentes (1), la mejor que se conoce hasta hoy para reconocer el *Ni* en presencia del Cobalto. Esta última reacción la hemos practicado en las diversas formas aconsejadas por el autor citado, quien afirma que pueden reconocerse cómodamente una parte de *Ni* en 40.000 de agua y en presencia de diez partes de Cobalto, sin hacer uso del H_2O_2 y en presencia de cantidades superiores de *Co*, utilizando H_2O_2 según indica, y filtrando también en casos extremos.

La dimetilglioxima que hemos utilizado procede de la casa Kahlbaum, y ha sido empleada ya sólida, ya en solución alcohólica; el haber procedido siempre de idéntica manera y por el mismo operador, hace, á nuestro juicio, que los casos en que con ella hemos obtenido resultados positivos, sean garantía de que aquellos otros en que han sido negativos puedan atribuirse á defecto de la reacción citada, si bien no excluimos en modo alguno nuestra inexperiencia personal respecto de la misma, toda vez que no poseemos más detalles que los mencionados en la obra de referencia, donde no hay indicación alguna respecto á su sensibilidad máxima.

*
* *

1.º Investigación del *Ni* estando solo.

++

Hemos efectuado los ensayos que á continuación se detallan, empezando por la concentración de 1×20.000 , un poco superior á la indicada como límite:

(1) *Treadwell: Analyse qualitative*; trad. francesa de Gosciny, 1910, pág. 149.

Cantidades relativas de Ni y H ₂ O respectivamente.	0,001 gr. en 20 ^{cc} (0,00005 gr. × 1 ^{cc})	0,00005 gr. en 2 ^{cc} (0,000025 gr. × 1 ^{cc})	0,00005 gr. en 4 ^{cc} (0,0000125 gr. × 1 ^{cc})	0,00005 gr. en 4,5 ^{cc} (0,0000111 gr. × 1 ^{cc})
Concentración en Ni resultante.	1 × 20.000	1 × 40.000	1 × 80.009	1 × 90.000
Volumen con que se operó.	1 ^{cc}	1 ^{cc}	1 ^{cc}	1 ^{cc}
Reacción de Tschugaeff (Dimetilgloxima) (solución alcohólica ó sólida).	Precipitado rosa muy bello aun en frío. (El autor recomienda hervir).	(El) Resultado como en el caso anterior.....	(Como en los casos anteriores, pero menos abundantes.)	Precipitado rosa cristalino, pero á la ebullición.
Reacción con el metil-xantogenato potásico. (Unas gotas sol. conc.).....	Precipitado amarillo abundante	Idem.....	Precipitado amarillo menor que en los casos anteriores.....	Precipitado franco amarillo.
Cantidades relativas de Ni y H ₂ O respectivamente	0,0001 gr. en 10 ^{cc} (0,00001 gr. × 1 ^{cc})	0,00005 gr. en 10 ^{cc} (0,000005 gr. × 1 ^{cc})	0,00001 gr. en 5 ^{cc} (0,000002 gr. × 1 ^{cc})	0,00001 gr. en 10 ^{cc} (0,000001 gr. × 1 ^{cc})
Concentración en Ni resultante.	1 × 100.000	1 × 200.000	1 × 500.000	1 × 1.000.000
Volumen con que se operó.	1 ^{cc}	1 ^{cc} 2 ^{cc}	1 ^{cc} 4 ^{cc}	5 ^{cc}
Reacción de Tschugaeff (Dimetilgloxima) (solución alcohólica ó sólida).	Coloración rosa tenue; hirviendo apenas hay precipitado cristalino.	Color rosa muy tenue que aparece al calentar. Poquísimos cristaltos rosa sobre el menisco, pero visibles.	Nada.	Menisco ligeramente amarillento rosado. Nada.
Reacción con el metil-xantogenato potásico. (Unas gotas sol. conc.).....	Precipitado amarillento.	Muy tenue, turbidez amarillenta.	Nada.	Muy ligeramente opaco. Nada.

Del examen de los resultados anteriores se deduce que la sensibilidad de ambas reacciones es casi la misma, y puede afirmarse que con ambas puede reconocerse bien, en las condiciones de este caso, 0,00001 de *Ni*, y aun menos, puesto que la media cienmilésima fué bien apreciada por nosotros, empleando 2 cc.; en las disoluciones muy diluídas se manifiesta bien la acción de la masa; en la concentración indicada por *Treadwell*, como límite, ó sea al 1 por 40.000, ambas reacciones dan un resultado por igual admirable, comprendiéndose perfectamente que el límite está más allá.

*
* *

2.º Investigación del *Ni* en presencia de una mayor cantidad de cobalto:

Hemos tomado como punto de partida la indicación de *Treadwell*, empezando por investigar 1 de *Ni* en 10 de *Co* en diferentes condiciones de concentración, según indican los ensayos que á continuación exponemos, en los que hemos empleado el metil-xantogenato al 1 por 1.000, y la dimetilglioxima sólida, y haciendo uso de H_2O_2 , ya que, sin este líquido, no conseguimos que nos diera resultados positivos:

(En cada ensayo se ha utilizado tan sólo 1^{cc} de problema.)

CANTIDADES que intervienen en el problema.	Concentración que resulta para el Níquel con respecto al agua.	REACCIÓN TSCHUGAEFF (Dimetilglixima.)	REACCIÓN
$Co \equiv 0,04$ $Ni \equiv 0,004$ $H_2O \equiv 1^{cc}$	1×250	<p><i>Muy escaso</i> depósito cristalino rosado sobre las paredes del tubo; resultado mediano que mediano.</p> <p>El depósito cristalino es más abundante que en el caso anterior: la reacción en este caso <i>da buen</i> resultado; sin el H_2O_2 = resultado negativo como en el caso anterior.</p>	<p>con el metil-xantogenato potásico.</p> <p>Precipitado amarillo ocráceo muy abundante: reacción franca del Níquel; resultado excelente.</p>
$Co \equiv 0,04$ $Ni \equiv 0,004$ $H_2O \equiv 4^{cc}$	1×1.000	<p>Resultado bueno, pero menos abundante que en el caso anterior, el depósito cristalino característico.</p>	<p>Como en el caso anterior: muy buen resultado.</p>
$Co \equiv 0,04$ $Ni \equiv 0,004$ $H_2O \equiv 40^{cc}$	1×10.000	<p>Buen resultado.</p>	<p>Reacción franca del Ni como antes: muy bien.</p>
$Co \equiv 0,01$ $Ni \equiv 0,001$ $H_2O \equiv 30^{cc}$	1×30.000	<p>Bien.</p>	<p>Bien (el color verde aparece sin embargo antes que en los anteriores ensayos; pero se ve antes el amarillo sin dificultad alguna).</p>
$Co \equiv 0,01$ $Ni \equiv 0,001$ $H_2O \equiv 40^{cc}$	1×40.000	<p>Muy pequeño depósito cristalino, pero se percibe.</p>	<p>Bien (el color amarillo es un poco verdoso y el verde posterior un poco amarillento, lo que hace que el cambio de color no sea tan perceptible).</p>
$Co \equiv 0,01$ $Ni \equiv 0,001$ $H_2O \equiv 50^{cc}$	1×50.000	<p>Reacción poco abundante, pero visible. Sin H_2O_2 también aparece la reacción.</p>	<p>No se advierte el precipitado amarillo: sólo por comparación con Cobalto puro se nota entonación diferente del precipitado verde.</p>
$Co \equiv 0,01$ $Ni \equiv 0,001$ $H_2O \equiv 80^{cc}$	1×80.000		<p>No aparece el precipitado amarillo, y, por consiguiente, no se reconoce el Níquel.</p>

Obsérvase que no habiendo variado en ningún caso la relación entre las cantidades relativas de *Ni* y *Co*, la sensibilidad de ambas reacciones para el *Ni* aparece afluenciada por la concentración de éste con respecto al volumen total de líquido, si bien esta influencia se manifiesta en sentido inverso. La dimetilglioxima, que da malos resultados para concentraciones superiores al 1×1.000 , los da buenos entre esta concentración y 1×50.000 , siendo de notar que en las soluciones diluidas no es preciso el empleo del H_2O_2 , y sí en las concentradas; el metil-xantogenato potásico no llega sino hasta el 1×40.000 ; pero, en cambio, da excelentes resultados para concentraciones superiores al 1×1.000 , siendo siempre una reacción más cómoda que la otra, puesto que, como es sabido, la de *Tschugaeff* necesita alcalinizar con NH_4OH fuerte, adicionar H_2O_2 hervir, añadir el reactivo y volver á hervir, mientras que las que nosotros proponemos no necesita más que acetificar y añadir el reactivo en frío, ni más ni menos que cuando á una sal argéntica se adiciona ácido clorhídrico.

Hemos continuado aumentando la proporción de Cobalto con respecto al Níquel, observando como antes que la sensibilidad para el Níquel disminuye cuando disminuye la concentración; he aquí el detalle del caso siguiente:

1 parte de Níquel en 50 de Cobalto.

Concentración del Níquel.	Dimetilglioxima.	Metil-xantogenato potásico.
1×1.000	Muy bien (es preciso añadir un exceso de reactivo).....	Muy bien.
1×10.000	Bien: empleando el H_2O_2 ; mejor que en el caso anterior.....	Bien: viso verdoso al final.
1×20.000	Bien.....	Bien: ídem.

Concentración del Niquel.	Dimetilgloxima	Metil-xantogenato potásico.
1×25.000	Apenas salió, pero se llegó á percibir.....	Regular sólo: pero se nota el tránsito á más verdoso añadiendo exceso de reactivo.
1×35.000	Escasísimos cristales visib- les difícilmente.....	Precipitado verdoso: du- doso por tanto el Niquel.
1×45.000	Nada.	Muy dudoso.
1×50.000	Nada.....	Nada.

1 parte de Niquel en 100 de Cobalto.

$Ni = 1 \times 10.000$	{ Dimetilgloxima = 0. Metil-xantogenato potásico = Muy bien.
$Ni = 1 \times 20.000$	
$Ni = 1 \times 50.000$	{ Dimetilgloxima = 0. Metil-xantogenato potásico = Bien. Dimetilgloxima = 0. Metil-xantogenato potásico = 0.

No habiendo reconocido 1 de *Ni* en 100 de *Co* por la di-
metil-gloxima ni aun en soluciones diluidas, renunciamos á
continuar usando este reactivo, considerando pasado el lími-
te de su sensibilidad, y ensayamos tan sólo, para concen-
traciones de *Ni* inferiores á 1×10.000 , el metil-xantoge-
nato potásico en las circunstancias que se indican á conti-
nuación:

$Ni = 1$ $Co = 100$	$Ni = 1$ $Co = 150$	$Ni = 1$ $Co = 200$
Muy bien. Amarillo bas- tante persis- tente.....	Bien. El precipitado ama- rillo pasa pronto á verdoso: filtrando enseguida y lavan- do queda sobre el filtro una masa amarillento-ver- dosa.....	Aparece el amarillo que en segui- da pasa á rojizo por mezclarse con el resto del problema, que es rojo (sal de Cobalto); en el menisco se ve el verdoso: fil- trando y lavando, si se añade NH_3 al 3 por 100 se advierte cómo se acentúa el verde.

$Ni = 1$ $Co = 300$	$Ni = 1$ $Co = 400$	$Ni = 1$ $Co = 0$ (Testigo)
Amarillento con viso verdoso que enseguida adquiere este color; filtrando se nota algo verdoso-amarillento...	Anillo amarillento que enseguida pasa á verde; por filtración no se consigue gran cosa.....	Anillo blanco sucio que adquiere pronto el color verde; por filtración queda sobre el filtro una masa francamente verde.

En estos últimos ensayos, sólo procediendo por comparación, como hemos hecho, se llega á poder apreciar la presencia del níquel, pero dudamos de que pueda hacerse en condiciones ordinarias; así es que diremos que la reacción propuesta llega á reconocer: una *parte de níquel* en 100 de *Cobalto* con toda perfección; una de *Ni* en 150 de *Co* procediendo con más cuidado; afinando mucho, una de *Ni* en 200 *Co*, y quizás algo más procediendo por comparación con un ensayo en blanco, hecho con sales de cobalto exentas de níquel.

*
* * *

3.º Investigación del *Co* estando solo.

++

En el estudio de la sensibilidad del metil-sulfo-thio-carbonato-ión para el *Co*, y en la investigación de este catión en presencia de mayores cantidades de *Ni*, hemos operado, comparando los resultados obtenidos con los que da la reacción de Vogel, que es una de las más sensibles y prácticas.

Los ensayos efectuados para determinar la sensibilidad están reunidos en el siguiente cuadro:

Cantidades relativas de <i>Co</i> y H_2O respectivamente.	$0,0002 \text{ gr. en } 10^{\text{cc.}}$ $(0,00002 \text{ » } \times 1^{\text{cc.}})$	$0,00002 \text{ gr. en } 5^{\text{cc.}}$ $(0,000004 \text{ » } \times 1^{\text{cc.}})$	$0,00002 \text{ gr. en } 10^{\text{cc.}}$ $(0,000002 \text{ » } \times 1^{\text{cc.}})$
Concentración en <i>Co</i>	1×50000	1×250000	1×500000
Volumen con que se operó	1^{cc}	1^{cc}	1^{cc}
Reacción Vogel. (Sulfocianato amónico y alcohol amílico)	Coloración azul no muy intensa.....	Nada.	Nada.
Metil-xantogenato potásico. (Solución concentrada).....	Precipitado verde manzana, no es caso, insoluble en NH_3 al 3 por 100.	Turbidez perfectamente apreciable.	Nada.

Del examen del cuadro anterior se observa que para la reacción de Vogel, hemos encontrado la misma sensibilidad que indica Treadwell (1) y para el metil xantogenato una sensibilidad cinco veces mayor, permitiendo reconocer perfectamente una parte de cobalto en 250.000 de agua.

*
* *

4.º Investigación del *Co* en presencia de mayor cantidad de *Ni*.

La técnica seguida ha sido la descrita anteriormente, empleando solución de metil-xantogenato potásico al 5 por 100 y solución de amoniaco al 3 por 100. En todos los ensayos se ha operado con 1^{cc}.

1 parte de *Co* y 10 de *Ni*

Cantidades que intervienen en el problema.	Concentración del <i>Co</i> con respecto al agua.	Reacción de Vogel.	Reacción con el metil-xantogenato potásico.
<i>Co</i> = 0,004 <i>Ni</i> = 0,04 <i>H₂O</i> = 1 ^{cc}	1 × 250	Color azul intenso.....	Precipitado amarillo sucio: tratado por amoniaco queda abundantemente precipitado negro verdoso. Precipitado amarillo: tratado por gran cantidad de amoniaco, queda el líquido turbio amarillento, que paulatinamente va pasando á verdoso. Con igual concentración en <i>Ni</i> y sin <i>Co</i> , el precipitado se disuelve instantáneamente, quedando el líquido <i>completamente transparente</i> .
<i>Co</i> = 0,004 <i>Ni</i> = 0,04 <i>H₂O</i> = 100 ^{cc}	1 × 25.000	Ligera coloración, perfectamente perceptible.	
<i>Co</i> = 0,00004 <i>Ni</i> = 0,0004 <i>H₂O</i> = 5 ^{cc}	1 × 125.000	Nada.	Precipitado amarillo, que tratado por amoniaco deja un líquido turbio.
<i>Co</i> = 0,00004 <i>Ni</i> = 0,0004 <i>H₂O</i> = 10 ^{cc}	1 × 250.000	Nada.	Después de tratarle por amoniaco el líquido queda con turbidez perfectamente perceptible.
<i>Co</i> = 0,000004 <i>Ni</i> = 0,00004 <i>H₂O</i> = 10 ^{cc}	1 × 2.500.000 Concentración en <i>Ni</i> 1 × 250000	Nada.	No precipita.

(1) Loc. cit., pág. 155.

El último resultado del cuadro anterior está en concordancia con los obtenidos anteriormente en la investigación del *Ni* estando solo.

1 parte de Cobalto y 100 de *Ni*.

Concentración del Cobalto.	Reacción de Vogel.	Reacción con el Metil-xantogenato potásico.
1 × 5.000 1 × 25.000 1 × 250.000	Bien. Bien. Nada.	Bien. Bien. Líquido ligeramente turbio.

De los resultados anteriores se deduce que la sensibilidad de las dos reacciones estudiadas es la misma estando el cobalto solo ó hallándose en presencia del níquel; en comprobación de ello hemos hecho los siguientes ensayos, operando ya en los límites de la sensibilidad.

Concentración del <i>Co</i> respecto al <i>Ni</i> .	Concentración del <i>Co</i> respecto al agua.	Reacción de Vogel.	Reacción con el metil-xantogenato potásico.
1 × 200 1 × 200	1 × 25.000 1 × 250.000	Bien. Nada.	Bien. Líquido opalino.
1 × 2 000	1 × 50.000	Coloración azul, difícilmente visible, á causa del intenso color verde del líquido.....	Líquido turbio
Cobalto = 0 Níquel = concentración anterior.	Líquido perfectamente diáfano.

El reactivo que proponemos sirve perfectamente para investigar los iones *Ni* y *Co* ya estén juntos ya separados, y si en algunos casos no es mejor que los reactivos generalmente usados, en otros los supera, teniendo además la ventaja de su técnica sencilla y de que sirve para los dos iones.

La sensibilidad es aproximadamente igual para los dos cationes y si en el caso de estar reunidos se observa que es mayor para el *Co*, es debido á la diferente propiedad en que se basa su investigación, según sea el que menos abunda.

La del *Ni* se funda en las diferencias de color que se observan sucesivamente en el precipitado, debido á que precipita primero el *Ni* que el *Co*; la causa de esto, es debido simplemente á la diferente estructura de los precipitados; el de *Ni* es cristalino y aparece inmediatamente; el de *Co* es amorfo, coloide y tarda en aparecer, pero los dos se forman al mismo tiempo; cuanto mayor sea la diferencia entre las estructuras de los precipitados, mejor podrán diferenciarse y por eso preconizamos el metil-xantogenato sobre los otros, aunque alguno de ellos presenta mayor sensibilidad para la investigación de los iones separados. Fácilmente se comprende que á medida que aumenta la concentración en Cobalto, su xantogenato aparecerá más rápidamente y por lo tanto el precipitado que se forma, habiendo la misma cantidad de *Ni*, presentará colores intermedios y la sensibilidad para este último catión irá disminuyendo; por otra parte, cuando la solución está fuertemente coloreada por el *Co*, y hay poco *Ni*, se presenta un fenómeno que puede dar lugar á confusiones, y es que el color verdoso del xantogenato de *Co*, combinándose con el rojo de la solución, da un amarillo rojizo, que puede confundirse con el color del xantogenato de *Ni*, por esta causa aconsejamos en estos casos, filtrar después de haber añadido poco reactivo, y observar el color del precipitado sobre el filtro, después de lavado; esta filtración debe hacerse rápidamente, pues el xantogenato de *Ni*

en presencia de Co se transforma en gran parte en xantogenato de Co y esta transformación es bastante rápida y completa en el caso que tratamos, ó sea cuando el Ni es escaso con relación al Cobalto.

La caracterización del Co se funda en la diferente solubilidad de los metil-xantogenatos formados en el amoníaco; si se emplea un amoníaco suficientemente diluído, el de cobalto se puede considerar como completamente insoluble, no siendo influenciada esta propiedad por la presencia del xantogenato de Ni , de aquí que la sensibilidad del reactivo para el cobalto sea la misma en todos los casos. Al hacer esta separación se observa que la solubilidad del xantogenato de níquel en el amoníaco disminuye, ó, á lo menos, la velocidad de disolución es menor, en presencia del cobalto, de aquí que generalmente se tenga que emplear un gran exceso de amoníaco con relación al necesario para disolver la misma cantidad de xantogenato de níquel, y que el criterio más seguro para caracterizar el cobalto sea de transparencia ú opalinidad del líquido final, sin tener en cuenta la coloración del sólido que lo enturbia, pues en ciertos casos el precipitado es primero amarillento, y sólo al cabo de unos minutos presenta el tinte verdoso del xantogenato de cobalto.

(Laboratorios de Análisis Química General y de Química Orgánica de la Facultad de Ciencias de Madrid.)

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

	Págs.
<i>Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1910.</i>	
Académicos de número.....	5
Académicos electos.....	6
Académicos Corresponsales nacionales.....	7
Académicos Corresponsales extranjeros.....	8
Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por <i>José Echegaray</i> (Conferencias 14. ^a á 17. ^a).....	11, 34, 58 y 193
Los métodos indirectos de la Química analítica, por <i>Juan Fa-</i> <i>ges Virgili</i>	83 y 219
Apuntes para la reforma de la Nomenclatura matemática, por <i>Modesto Domínguez Hervella</i>	127
Estudio completo de una clase especial de integrales singulares, por <i>Lauro Clariana</i>	134, 249 y 344
Sobre un problema de Física (segunda parte), por <i>Juan Jacobo Durán Loriga</i>	145
Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valde- luzura (Plasencia), por <i>José Giral Pereira</i> y <i>Julio C. Sánchez</i> <i>Angoso</i>	167
Notas sobre un insecto « <i>Scutellista Cyanea</i> », beneficioso para la Agricultura, por <i>Ricardo García Mercet</i>	185
La nomenclatura de los instrumentos de observación, por <i>E. Saavedra</i>	210
Perfeccionamiento de la alimentación albuminoidea, por <i>José</i> <i>R. Carracido</i>	212
El Congreso Científico internacional de Buenos Aires (10 á 25 de Julio de 1910), por <i>E. Herrero Ducloux</i>	263
Contribución al estudio de las esencias españolas. Esencia de mejorana silvestre, por <i>Bernabé Dorronsorro</i>	279
Estudio acerca de los ácidos cromopolisulfúricos, por <i>Pablo</i> <i>Martínez Strong</i>	296 y 371
Conferencias sobre Física matemática. Teoría de los torbelli- nos, por <i>José Echegaray</i> . (Conferencias 1. ^a á 14. ^a)....	309, 327, 401, 416, 481, 573, 655, 674, 735, 759, 823, 846, 903 y 923
Sobre la investigación de los aceites minerales mezclados á las	

	Págs.
oleínas de grasa de lana de procedencia no alemana, por <i>Werner Mecklenburg</i> y <i>Georg Winterfeld</i>	356
Estudio analítico del Resalto superficial, por <i>Juan Flórez Posada</i>	364
Sobre la composición química de la Blenda de Picos de Europa, por <i>Ramón Lord</i> y <i>Gamboa</i>	389
Publicaciones recibidas.....	400 y 654
Mezclas fosforescentes, por <i>José Rodríguez Mourelo</i>	433
Contribución al estudio de los derivados halogenados del antraquinón, por <i>José Prats Aymerich</i>	442
Un caso más de ionización de gases de origen químico, por <i>Angel del Campo</i> y <i>Jaime Ferrer</i>	451
Viaje de estudio á la Guinea española.—Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por <i>Gustavo Pittaluga</i>	463 y 554
Crisópidos nuevos ó poco conocidos, por el <i>R. P. Longinos Navás, S. J.</i>	473
Los «Phragmidium» de España, por <i>Blas Lázaro é Ibiza</i>	499
Cráneo Foguino del Museo Antropológico de Madrid, por <i>Luis de Hoyos Sáinz</i>	529
Caracteres de las formas cuadráticas definidas, con aplicación á varias cuestiones, por <i>Julio Rey Pastor</i>	540
Programa de premios para el concurso del año 1912.....	569
Antagonismo entre el magnesio, el calcio y el bario, por <i>J. Gómez Ocaña</i>	591
Nuevo método de obtención de aminas, empleando la reacción de Grignard, por <i>Benito Buylla</i>	636 y 718
Sismógrafo analizador, por <i>Eduardo Mier</i> y <i>Miura</i>	697 y 804
Catálogo de los moluscos testáceos marinos de la Costa y Bahía de Cádiz, por <i>Joaquín González Hidalgo</i>	776, 865 y 946
Sur la Constance de la Radiation solaire, par <i>M. Emile Schwoerer</i>	818
Potenciómetro autocalibrable, por <i>B. Cabrera</i>	887
Concurso á premios.—Fundación del Duque de Berwick y de Alba, Conde de Lemos, instituída en memoria de la Exce-lentísima Sra. Doña Rosario Falcó y Ossorio, Duquesa de Berwick y de Alba, Condesa de Lemos y Siruela, para conmemorar el tercer centenario de la publicación del <i>Quijote</i> , premiando obras literarias, históricas y científicas.....	901
Aplicación analítica de algunos xantogenatos. Investigación de los iones, níquel y cobalto, por <i>Jaime Ferrer</i> y <i>Angel del Campo</i>	979



INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

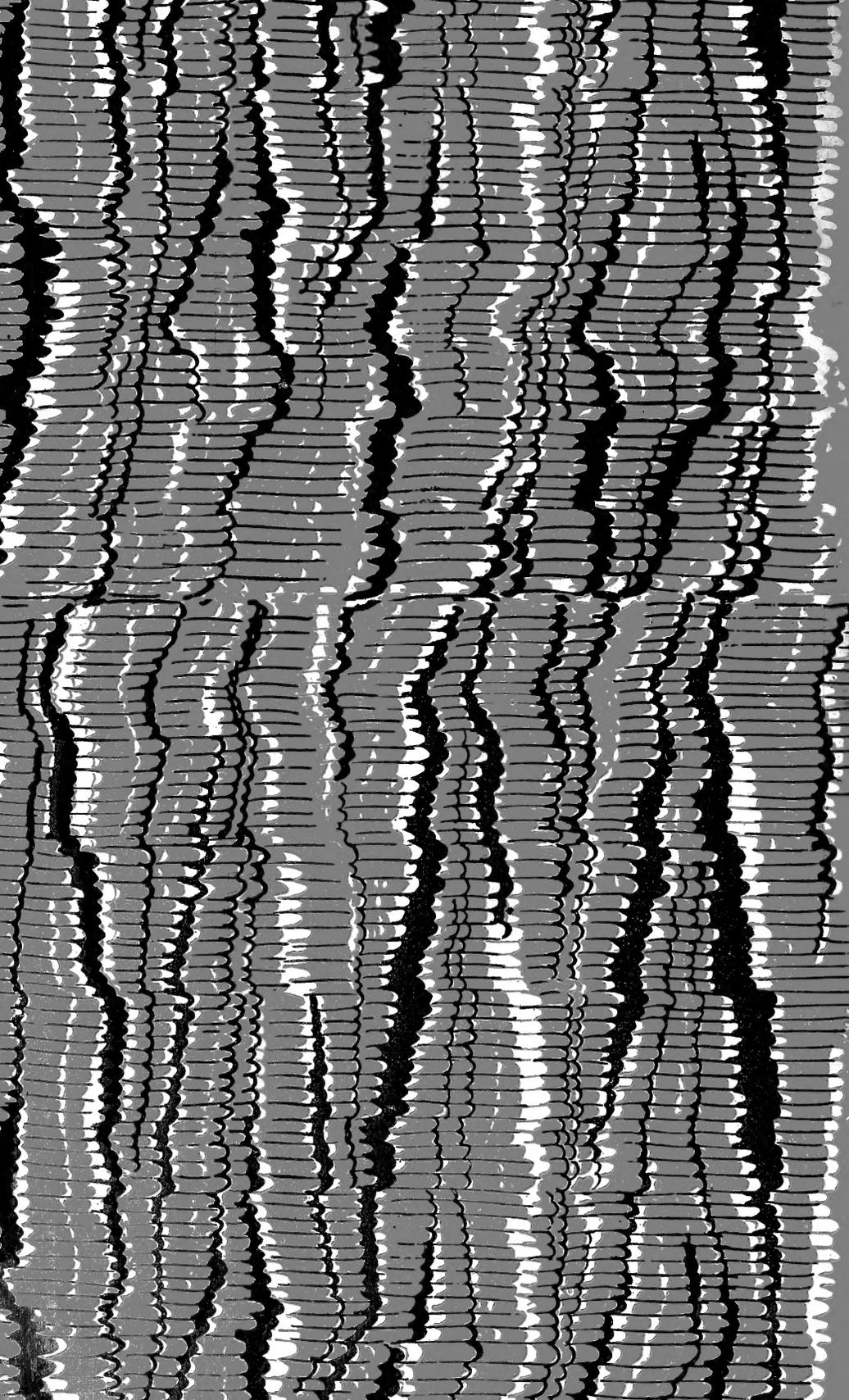
	PÁGS.
LI.—Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimotercera.....	903
LII.—Conferencias sobre Física Matemática. Teoría de los torbellinos, por <i>José Echegaray</i> . Conferencia décimocuarta.....	923
LIII.—Catálogo de los moluscos testáceos marinos de la costa y bahía de Cádiz, por <i>Joaquín González Hidalgo</i> .	946
LIV.—Aplicación analítica de algunos xantogenatos.—Investigación de los iones, níquel y cobalto, por <i>Jaime Ferrer y Angel del Campo</i>	970

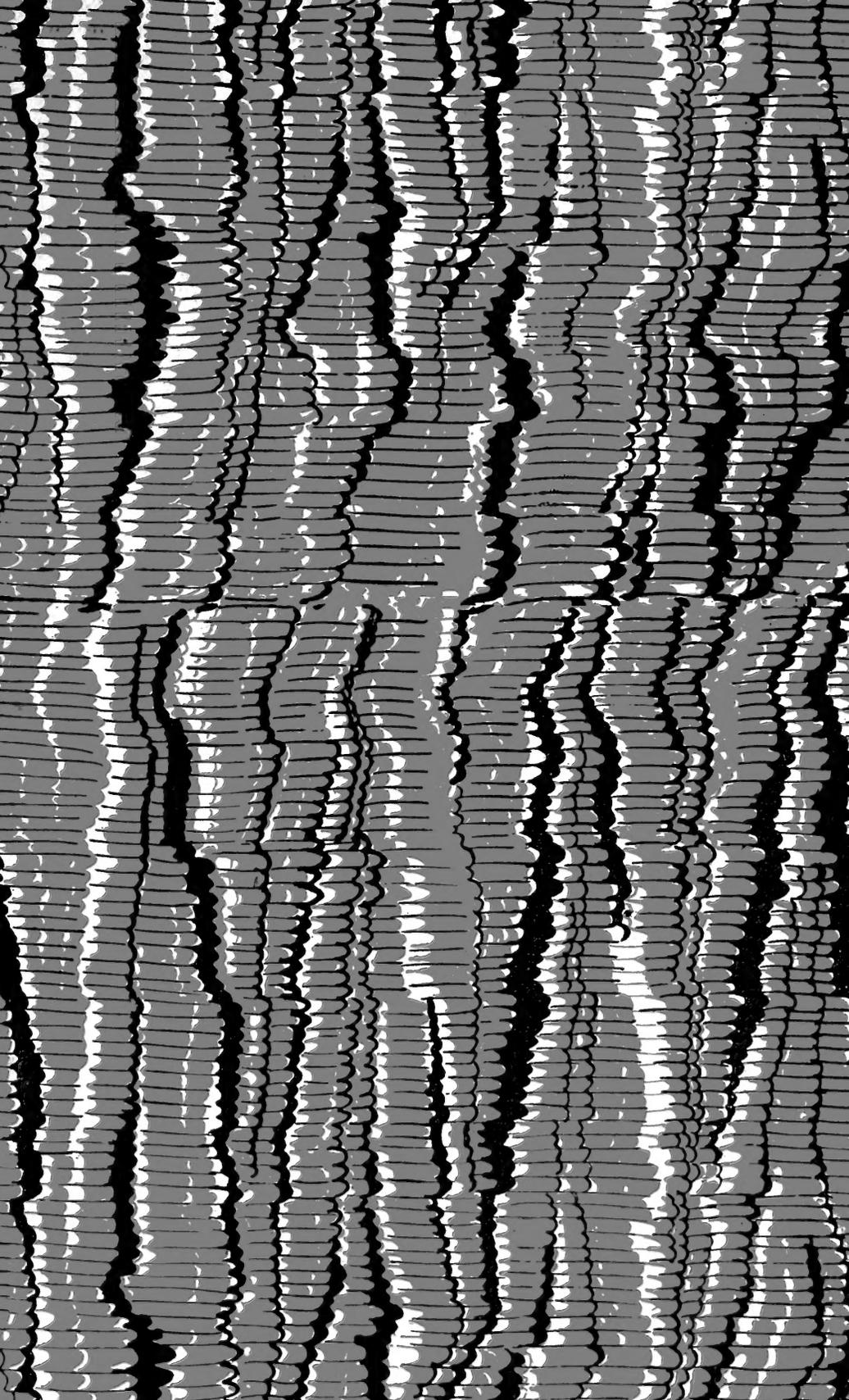
La suscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.









SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01224 1584