



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06910095 0



PBT
Madam



1

1

1

RÉSISTANCE

DES

MATÉRIAUX

423

11

1. Strains and stresses

$s \neq \sigma$.

Paris. — Imp. E. BERNARD & C^o, 71, rue La Condamine

RÉSISTANCE
DES
MATERIAUX

PAR

A. MADAMET

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DU GÉNIE MARITIME



PARIS

E. BERNARD ET C^{ie}, IMPRIMEURS-ÉDITEURS

LIBRAIRIE
53^{me}, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

IMPRIMERIE
71, RUE LA CONDAMINE, 71

1891

T. E.

DEPARTMENT OF
PUBLIC SAFETY
224103B
ALBANY, N.Y.
TELEPHONE 333
R. F. L.

NOTATIONS ADOPTÉES

Les unités adoptées sont le kilogramme et le millimètre, sauf pour le travail mécanique, qui est toujours évalué en kilogrammètres.

F représente une force quelconque.

T représente une force de traction.

T' représente une force de compression.

Q représente une force de cisaillement.

M représente un moment de flexion.

M' représente un moment de torsion.

λ représente un allongement mesuré par unité de longueur, c'est-à-dire par millimètre courant.

λ' représente un raccourcissement mesuré par unité de longueur, c'est-à-dire par millimètre courant.

i représente un glissement mesuré par unité de longueur, c'est-à-dire par millimètre courant.

R représente la charge à la traction par millimètre carré qu'éprouve un corps au point et dans la direction qu'on considère.

R' représente la charge à la compression par millimètre carré qu'éprouve un corps au point et dans la direction qu'on considère.

R'' représente la charge au cisaillement par millimètre carré qu'éprouve un corps au point et dans la direction qu'on considère.

R''' représente la charge à la torsion par millimètre carré qu'éprouve un corps au point et dans la direction qu'on considère.

E représente le coefficient d'élasticité relatif à la traction.

E' représente le coefficient d'élasticité relatif à la compression.

G représente le coefficient d'élasticité relatif au glissement.

G' représente le coefficient d'élasticité relatif à la torsion.

I représente le moment d'inertie d'une section plane, par rapport à une droite située dans son plan et passant par son centre de gravité.

J représente le moment d'inertie polaire d'une section plane, par rapport à son centre de gravité.

libre. 1000 2 1000. 1000 2

TABLE DES MATIÈRES

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Notations adoptées.	Pages V
-----------------------------	------------

CHAPITRE I

Notions préliminaires.

§§ 1. — Déformations éprouvées par les corps solides sous l'action des forces qui leur sont appliquées	3
2. — Objet de la Résistance des matériaux	3
3. — Transformations de forces permises dans la Résistance des matériaux	4
4. — Forces moléculaires ou élastiques. Théorie mathématique de l'élasticité	5
5. — Méthode suivie dans ce Traité	7
6. — Méthode des sections.	7
7. — Principe de la superposition des petites déformations.	10
8. — Proportionnalité des forces élastiques aux faibles déformations. Limite d'élasticité	11
9. — Résistance à la traction des corps dans lesquels la limite d'élasticité a été dépassée.	13
10. — Résistance des corps soumis à des efforts statiques.	15
11. — Elasticité subséquente	16
12. — Effets produits par la répétition rapide des efforts	20
13. — Résistance des corps soumis à des actions dynamiques graduelles	23
14. — Résistance des corps soumis à des chocs locaux	28
15. — Effets produits par la répétition des actions dynamiques.	30
16. — Charges qu'il convient de faire supporter aux corps	32
17. — Limites dans lesquelles les formules de la Résistance des matériaux sont applicables.	35

RÉSISTANCE DES PIÈCES DROITES SOUMISES A DES EFFORTS STATIQUES

CHAPITRE II

Traction.

	Pages
§§ 18. — Phénomènes généraux de la traction	39
19. — Formules relatives à la traction	48
20. — Tiges de section variable	44
21. — Contraction transversale et diminution de densité résultant du fait de la traction	44
22. — Striction. Phénomènes auxquels elle donne lieu.	47
23. — Allongement %, de barreaux ayant des sections transversales identiques, mais de longueurs différentes	50
24. — Allongement comparatif de barreaux ayant des sections transversales différentes	54
25. — Influence de la durée de la mise en charge	56
26. — Influence de la température	57
27. — Forme des courbes d'allongement et particularités relatives à divers corps	59
28. — Résultats pratiques relatifs à la traction	63

CHAPITRE III

Compression.

29. — Phénomènes généraux et formules de la compression.	71
30. — Charges de sécurité admissibles dans le cas de la compression.	73
31. — Particularités relatives au fer, à la fonte, au bois	74
32. — Circonstances qui influent sur la résistance à la compression.	74
33. — Résultats pratiques relatifs à la compression.	75

CHAPITRE IV

Glissement.

34. — Phénomènes généraux du glissement. Coefficient de glissement.	79
35. — Etude des phénomènes du glissement	80
36. — Détermination du coefficient d'élasticité de glissement G.	82
37. — Charge de sécurité des pièces soumises à un effort de cisaillement.	85
38. — Réciprocité des glissements	86

	Pages
§§ 39. — Répartition du glissement dans une section transversale . . .	88
40. — Formules du glissement relatives au cas d'une répartition uni- forme	90
41. — Résultats pratiques relatifs au glissement.	90

CHAPITRE V

Flexion.

Flexion plane.

42. — Définition des pièces étudiées	93
43. — Flexion produite par un couple.	94
44. — Flexion produite par une force normale	98
45. — Effort tranchant. Sa valeur en fonction du moment fléchissant. .	102
46. — Remarques relatives au tracé des courbes des moments flé- chissants et des efforts tranchants	105
47. — Répartition de l'effort tranchant dans la section transversale à laquelle il est appliqué. Glissement longitudinal, sa valeur .	107
48. — Application de la formule du glissement longitudinal à quelques cas particuliers de pièces à section constante	112
49. — Détermination de la forme exacte que prennent les sections transversales d'une pièce fléchie par une force normale . .	114
50. — Calcul de la résistance des pièces fléchies, en tenant compte de l'effort tranchant et du glissement longitudinal	116
51. — Calcul des tôles et des rivets d'une poutre d'assemblage de section constante	119
52. — Calcul des pièces d'assemblage réunissant plusieurs poutres superposées	122
53. — Calcul des efforts qui se produisent suivant un joint oblique dans une poutre de section constante	125
54. — Résistance à la flexion des poutres non homogènes	127

**Flexion plane produite par des forces normales en nombre
quelconque. Calcul des flèches.**

55. — Flexion plane produite par des forces normales en nombre quelconque, situées dans un plan de symétrie.	130
56. — Courbes représentatives des efforts tranchants et des mo- ments fléchissants.	132
57. — Cas où les charges se déplacent.	137
58. — Détermination de la forme de la fibre moyenne déformée. Calcul de la flèche	138
59. — Proportionnalité des flèches aux forces qui les produisent . .	142
60. — Détermination des forces nécessaires pour faire prendre à une pièce donnée une forme donnée	143
61. -- Détermination des dimensions que doit avoir une pièce pour	

	Pages
que des forces données lui fassent prendre une forme donnée.	144
§§ 62. — Applications au calcul des pièces supportant une charge commune. Poutres superposées. Poutres en croix.	144
63. — Calcul du moment d'inertie pour les surfaces géométriques de formes simples	149
64. — Moment d'inertie autour d'une droite qui ne passe pas par le centre de gravité	149
65. — Calcul du moment d'inertie pour les surfaces planes de formes quelconques	150
66. — Avantage des sections évidées	154
67. — Emploi de sections non symétriques	155
68. — Effet produit dans certains cas par une tronçature.	157
69. — Gauchissement des pièces soumises à des efforts de flexion.	158
70. — Valeurs des moments d'inertie de diverses surfaces	160

Étude de divers cas particuliers relatifs à la flexion plane des pièces droites.

71. — Pièce encastree à une extrémité et fléchié par un couple	164
72. — Pièce encastree à une extrémité et chargée à l'autre d'un poids P	165
73. — Pièce encastree à une extrémité et uniformément chargée	167
74. — Pièce reposant sur deux appuis de niveau et chargée d'un poids P.	169
75. — Pièce reposant sur deux appuis de niveau et uniformément chargée	172
76. — Pièce reposant sur deux appuis de niveau et chargée en dehors des points d'appui	173
77. — Disposition la plus avantageuse à donner à deux appuis de niveau supportant une pièce uniformément chargée.	174
78. — Pièce encastree à ses deux extrémités et chargée en son milieu d'un poids P	176
79. -- Remarque relative aux encastrements.	178
80. — Pièce encastree à ses deux extrémités et uniformément chargée.	179
81. — Pièce encastree à une extrémité, reposant à l'autre sur un appui et chargée d'un poids P	182
82. — Pièce encastree à une extrémité, reposant à l'autre sur un appui et uniformément chargée	184
83. — Pièce uniformément chargée et supportant plusieurs charges isolées.	187
84. — Aiguille de barrage soutenant une charge d'eau	187

Détermination pratique des coefficients E et R relatifs à la flexion.

85. — Détermination du coefficient d'élasticité E relatif à la flexion	190
86. — Limite d'élasticité relative à la flexion. Fixation de la charge de sécurité R	193

Flexion oblique ou déviée.

	Pages
§§ 87. — Pièce fléchie par une ou plusieurs forces normales non situées dans un même plan contenant l'un des axes principaux des diverses sections transversales.	195

CHAPITRE VI

Torsion.

88. — Phénomènes qui se produisent pendant la torsion d'un cylindre droit à base circulaire	203
89. — Equation d'équilibre. Calcul de l'angle de torsion.	205
90. — Condition de plus grande charge.	207
91. — Tige soumise à des couples en nombre quelconque.	208
92. — Tige encastrée à ses deux extrémités	209
93. — Tige creuse à section circulaire.	211
94. — Tige ayant la forme d'un solide quelconque de révolution	212
95. — Tiges cylindriques pleines dont la section n'est pas circulaire	213
96. — Tiges cylindriques creuses de faible épaisseur dont la section n'est pas circulaire.	218
97. — Calcul du moment d'inertie polaire d'une section.	218
98. — Détermination du diamètre des arbres de transmission	219
99. — Valeur du coefficient d'élasticité de torsion G' . Valeur de la charge maximum de glissement par millimètre carré qu'on peut adopter avec sécurité	221

CHAPITRE VII

Résistance composée.

100. — Définition de la résistance composée.	225
--	-----

Compression et flexion.

(Pièces chargées debout, ayant une section constante).

101. — Pièce chargée debout et articulée à ses deux extrémités	226
102. — Diverses valeurs de la force nécessaire pour produire la flexion.	229
103. — Pièce chargée debout et encastrée à ses deux extrémités.	230
104. — Pièce chargée debout, encastrée à une extrémité et guidée à l'autre suivant sa direction primitive	231
105. — Pièce chargée debout, encastrée à une extrémité et libre à l'autre	233
106. — Limites dans lesquelles la formule d'Euler est applicable. Comparaison avec les résultats d'expérience	234

	Pages
§§ 107. — Formules empiriques donnant la charge de rupture des poteaux et des colonnes. Charge qu'on peut adopter avec sécurité	236
108. — Poteaux en bois à section carrée terminés par des bases plates	237
109. — Colonnes pleines, circulaires, en fonte de fer, en fer, terminées par des bases plates.	239
110. — Colonnes de section non circulaire. Colonnes creuses.	241
111. — Colonnes à extrémités arrondies. Colonnes renflées.	242
112. — Résistance au flambement des pièces en fer ou en acier faisant partie d'ouvrages métalliques	243
113. — Pièce chargée debout par une force excentrée. Calcul de la flèche	245
114. — Autre expression de la flèche d'une pièce chargée debout par une force excentrée	247
115. — Calcul de la résistance d'une pièce chargée debout par une force excentrée.	249
116. — Pièce soumise à une force de compression oblique et excentrée.	251
117. — Autre dispositif du cas précédent	253
118. — Pièce comprimée à ses extrémités et soumise à des forces normales, ainsi qu'à des couples situés dans un plan de symétrie.	255
119. — Cas où la section de la pièce n'est pas constante.	257

Traction et flexion.

(Pièces ayant ou non une section constante).

120. — Pièce sollicitée par une force donnant lieu à des phénomènes de traction et de flexion.	259
121. — Pièce sollicitée par un nombre quelconque de forces de traction et de flexion situées dans un plan de symétrie	262

Flexion composée.

(Pièces ayant ou non une section constante).

122. — Pièce sollicitée par des forces normales situées dans différents plans	263
123. — Pièce sollicitée par des forces obliques situées dans des plans différents et donnant lieu à des phénomènes de traction et de flexion	265

Traction et glissement uniformément réparti.

(Pièces ayant ou non une section constante).

124. — Pièce sollicitée à la traction et au glissement.	267
---	-----

Compression et glissement uniformément réparti.

(Pièces ayant ou non une section constante).

125. — Pièce sollicitée à la compression et au glissement	272
---	-----

Flexion et glissement.

(Pièces ayant ou non une section constante).

	Pages
§§ 126. — Pièce sollicitée à la flexion et au glissement, lorsque les sections transversales peuvent s'infléchir librement	274
127. — Pièce sollicitée à la flexion et au glissement, lorsque la section la plus fatiguée est contrainte à rester plane	274

Traction (ou compression), flexion et glissement.

(Pièces ayant ou non une section constante).

128. — Pièce sollicitée à la traction, à la flexion et au glissement	278
--	-----

Traction (ou compression) et torsion.

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

129. — Pièce sollicitée à la traction et à la torsion.	280
--	-----

Torsion et glissement uniformément réparti.

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

130. — Pièce sollicitée à la torsion et au glissement	281
---	-----

Flexion et torsion.

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

131. — Pièce sollicitée à la flexion et à la torsion	282
--	-----

Traction (ou compression), glissement uniformément réparti, flexion et torsion.

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

132. — Pièce sollicitée à la traction, au glissement, à la flexion et à la torsion	284
--	-----

CHAPITRE VIII

Phénomènes de rupture.

133. — Considérations générales sur les phénomènes de rupture et sur les lois qui les régissent	289
134. — Effort nécessaire pour produire la rupture par traction, par compression, par cisaillement.	290

	Pages
§§ 135. — Moment nécessaire pour produire la rupture par flexion . . .	291
136. — Détermination pratique du moment nécessaire pour produire la rupture par flexion	297
137. — Détermination pratique du moment nécessaire pour produire la rupture par torsion	300

CHAPITRE IX

Solides d'égalé résistance.

138. — Avantages que présentent les solides d'égalé résistance . . .	305
139. — Solides d'égalé résistance à la traction	306
140. — Solides d'égalé résistance à la compression	308
141. — Solides d'égalé résistance à la flexion	308
142. — Sections qu'il convient de donner aux solides d'égalé résistance, là où le moment fléchissant est nul. Formes pratiques de ces solides	312
143. — Flèches des solides d'égalé résistance à la flexion	313
144. — Solides d'égalé résistance à la torsion	315

Solides de charge uniforme.

145. — Définition des solides de charge uniforme	317
146. — Solides de charge uniforme à la traction	317
147. — Solides de charge uniforme à la compression.	317
148. — Solides de charge uniforme à la flexion	318
149. — Solides de charge uniforme à la torsion.	321

CHAPITRE X

Systèmes articulés.

150. — Définition des systèmes articulés	325
151. — Propriétés des systèmes articulés sans lignes surabondantes .	327
152. — Cas exceptionnels où les systèmes articulés sans lignes surabondantes ne peuvent être calculés par la Statique seule . .	329
153. — Calcul des dimensions des barres composant les systèmes articulés sans lignes surabondantes.	330
154. — Systèmes articulés ayant des lignes surabondantes; précautions que nécessite leur emploi	333
155. — A quelles conditions un mécanisme complexe peut-il être pratiquement considéré comme un système articulé?	336
156. — Concentration des forces aux points d'articulation	338
157. — Cas où les points d'application des forces extérieures ne peuvent pas être considérés comme étant situés aux articulations . .	339

CHAPITRE XI

Poutres droites reposant sur plusieurs appuis.

	Pages
§§ 158. — Poutres droites reposant sur plusieurs appuis. Indication du problème à résoudre	345
159. — Théorème des trois moments.	347
160. — Cas particulier du théorème des trois moments. (Appuis de niveau et poutre uniformément chargée).	351
161. — Théorème des trois moments dans le cas de forces isolées . .	352
162. — Application du théorème des trois moments à la recherche du moment fléchissant qui sollicite une section transversale . .	355
163. — Poutre droite uniformément chargée reposant sur trois appuis de niveau et n'ayant pas ses extrémités encastrées	359
164. — Poutre droite uniformément chargée reposant sur trois appuis de niveau et ayant ses extrémités encastrées	363

CHAPITRE XII

Étude de divers systèmes.

165. — Support-grue	367
166. — Grue articulée	370
167. — Autre dispositif de grue articulée	373
168. — Grues non articulées.	375
169. — Poutres armées	376
170. — Calcul des poutres armées en les considérant comme des systèmes articulés	379
171. — Poutre à deux contrefiches	380
172. — Tablier soutenu par des tirants multiples	382
173. — Poutre armée du système Bollmann	383
174. — Poutre armée du système Fink.	385
175. — Poutre Warren ou à treillis simple	386
176. — Poutre à treillis multiple	388
177. — Renseignements divers relatifs aux types de poutres droites, qui viennent d'être décrits.	391
178. — Poutres de hauteur variable	392
179. — Fermes	393
180. — Fermes considérées comme étant des systèmes articulés . .	396

CHAPITRE XIII

Flexion plane des pièces courbes.

181. — Définition des pièces courbes étudiées.	401
--	-----

Première partie. — On suppose connues les forces extérieures appliquées au solide, y compris les réactions des points d'appui.

	Pages
§ 182. — Equations d'équilibre d'une pièce courbe.	402
183. — Effort tranchant	405
184. — Condition de plus grande charge	406
185. — Remarque relative aux forces extérieures agissant sur les solides courbes et à leur bras de levier	407
186. — Position de la fibre neutre ou invariable	407
187. — Tracé de la fibre moyenne déformée.	408
188. — Variation des coordonnées des différents points de la fibre moyenne	410
189. — Applications relatives à divers cas où les forces extérieures, y compris les réactions des points d'appui, sont connues	414
190. — Cas où le rayon de courbure n'est pas très grand relativement à la hauteur des sections transversales	416

Deuxième partie. — Les réactions des points d'appui ne sont pas connues.

191. — Calcul des réactions des points d'appui	419
192. — Importance et avantages des réactions des appuis dans les solides courbes.	421
193. — Anneau circulaire de section constante sollicité par deux forces diamétralement opposées.	422
194. — Anneau légèrement elliptique d'épaisseur faible et constante, soumis à une pression extérieure uniformément répartie.	426

CHAPITRE XIV

Résistance des enveloppes.

195. — Enveloppe cylindrique de faible épaisseur soumise à une pression intérieure.	433
196. — Enveloppe cylindrique de faible épaisseur soumise à une pression extérieure.	437
197. — Enveloppe sphérique de faible épaisseur.	439
198. — Fonds des enveloppes cylindriques de faible épaisseur	439
199. — Enveloppe mince ayant la forme d'un cylindre droit à base elliptique.	441
200. — Enveloppe mince ayant la forme d'un solide de révolution et soumise à une pression intérieure.	441
201. — Tore constitué par une enveloppe mince et soumis à une pression intérieure.	444
202. — Cylindre à parois épaisses soumis à une pression intérieure	446

	Pages
§§ 203. — Cylindre à parois épaisses soumis à une pression extérieure	450
204. — Sphère à parois épaisses soumise à une pression intérieure.	451
205. — Sphère à parois épaisses soumise à une pression extérieure	451
206. — Conséquences des formules relatives aux enveloppes épaisses	452

CHAPITRE XV

Résistance des plaques.

207. — Plaques circulaires	457
208. — Plaques rectangulaires (formules de Grashof)	462
209. — Plaques rectangulaires (formules de Navier)	463

CHAPITRE XVI

Résistance des corps soumis à des actions dynamiques.

210. — Cas de la traction et de la compression	467
211. — Cas de la flexion (lame plane unique).	468
212. — Cas de la flexion (lames planes superposées)	471
213. — Cas de la flexion (lames courbes superposées).	476
214. — Ressorts de flexion enroulés	477
215. — Cas de la torsion (tige circulaire droite)	479
216. — Ressorts de torsion enroulés (à section circulaire)	480
217. — Ressorts de torsion enroulés (à section non circulaire)	482
218. — Mouvement oscillatoire d'un poids suspendu à l'extrémité d'une tige élastique.	483
219. — Vibrations des tiges ou des poutres, dans le cas où l'on tient compte de la masse du corps choqué.	485

CHAPITRE I



NOTIONS PRÉLIMINAIRES



NOTIONS PRÉLIMINAIRES ⁽¹⁾

§ 1. — Déformations éprouvées par les corps solides sous l'action des forces qui leur sont appliquées.

Dans la mécanique rationnelle, on considère les corps comme étant absolument invariables de forme, quels que soient les efforts qu'ils aient à supporter; c'est cette hypothèse qui permet de transporter le point d'application d'une force en un point quelconque de sa direction, et qui sert de base aux transformations si nombreuses qu'on peut faire subir à un ensemble de forces pour le remplacer par tel ou tel autre système équivalent.

Les faits qui se passent sous nos yeux nous montrent que l'hypothèse de solides doués d'une rigidité absolue n'est pas conforme à la réalité: sous l'action des forces les plus faibles, les corps se déforment pour reprendre ensuite d'une manière à peu près parfaite leurs dimensions primitives quand les efforts viennent à cesser, à condition toutefois que ceux-ci n'aient pas dépassé certaines valeurs qu'indique l'expérience; c'est cette propriété à laquelle on donne le nom d'*élasticité*. Au-delà de ces limites, on constate d'abord des changements permanents de forme, puis une séparation en un nombre plus ou moins grand de parties.

§ 2. — Objet de la Résistance des matériaux.

Étant donné une construction ou un assemblage plus ou moins complexe soumis à l'action de forces connues, on se propose, dans l'étude de la *Résistance des matériaux*, de s'assurer par le calcul, non seulement que la rupture n'est pas à craindre immédiatement, mais encore qu'il ne

(1) La première partie de ce Traité est la reproduction, sauf quelques changements et additions, d'un volume publié, en 1881, à la Librairie Gauthier-Villars.

se produit pas de changements de structure susceptibles de l'amener ultérieurement. Il est clair d'ailleurs que les équations auxquelles on se trouve ainsi conduit doivent également permettre soit de calculer la limite maximum des forces compatibles sans danger avec des dimensions données, soit au contraire de déterminer les valeurs au-dessous desquelles celles-ci ne doivent pas descendre, soit enfin d'étudier quel est le dispositif le plus avantageux pour la construction que l'on projette et pour l'agencement de ses diverses parties. De quelque manière que se pose le problème, il est souvent utile de calculer les déformations qu'éprouvera cette dernière une fois exécutée, afin de reconnaître si, malgré ses changements de forme, elle remplira toujours le but qu'on a en vue. Il arrive fréquemment aussi que cette détermination est absolument nécessaire : nous verrons en effet plus tard que, dans un certain nombre de cas, la production des déformations modifie d'une manière notable soit les bras de levier, soit le mode d'action, soit les valeurs des forces extérieures en jeu, et qu'elle est même parfois la cause déterminante de l'existence de quelques-unes d'entre elles, consistant par exemple en réactions de points d'appui ou d'encastrement ; il est alors évidemment indispensable de tenir compte des changements de forme dans la mise en équation des problèmes.

§ 3. — Transformations de forces permises dans la Résistance des matériaux.

Il résulte de tout ce qui précède que le remplacement d'un système de forces par un autre, qui lui est *équivalent* au point de vue abstrait de la *Mécanique rationnelle*, ne saurait être admis pour les corps essentiellement déformables dont nous étudierons la résistance. Tout ce qu'il nous sera permis de faire, ce sera de composer ou de décomposer les forces autour de leur point d'application, qui ne devra jamais être changé, et encore devons-nous faire à ce sujet la remarque suivante : il n'existe pas en réalité de forces concentrées en un point matériel sans dimensions ; quelle que soit la cause qui leur donne naissance (action de deux corps à distance ou par contact l'un avec l'autre), celles-ci se répartissent toujours sur une surface plus ou moins grande ; seulement l'expérience prouve que, quand l'étendue de ce *lieu d'application* est très faible, on peut y opérer toutes les transformations admises en statique, sans que les déformations produites subissent de changements sauf dans une région extrêmement restreinte qui l'avoisine. Si donc, comme nous l'ad-



mettrons toujours, cette petite portion du corps n'est jamais exposée à un effort local assez considérable pour amener sa désorganisation, les compositions et les décompositions dont nous venons de parler pourront être légitimement admises.

§ 4. — Forces moléculaires ou élastiques. Théorie mathématique de l'élasticité.

Quand on veut déterminer par le calcul les effets produits par l'action de forces appliquées à des corps solides, on est tout d'abord amené à se demander comment sont constitués ces derniers. Ce que nous savons à leur sujet nous conduit à les considérer comme formés de *molécules* (1) qui sont séparées par des espaces imperceptibles, et entre lesquelles se développent des forces soit *attractives*, soit *répulsives* suivant que les efforts exercés augmentent ou diminuent leurs distances. Ces forces deviennent nulles dès que l'écartement atteint une valeur appréciable; elles tendent au contraire à devenir infinies quand on essaie de réduire celui-ci à zéro, et c'est là, à vrai dire, ce qu'on doit entendre par l'im-pénétrabilité de la matière. Un grand nombre de géomètres ont admis que les actions qui s'exercent entre deux molécules se réduisent à une force unique qui est dirigée suivant la droite qui les joint et dont l'intensité est une *fonction continue de la seule distance* de ces molécules; mais, ainsi que l'a fait remarquer Lamé, les phénomènes de la cristallisation semblent contredire cette hypothèse au moins pour les corps cristallisés; car, pour expliquer l'orientation parfaitement définie que prennent dans ces circonstances les molécules les unes par rapport aux autres, il paraît nécessaire de faire intervenir à la fois une force et un couple. En outre ce que nous savons en fait de théorie mécanique de la chaleur nous porte à croire que les petites particules des corps sont animées de vibrations extrêmement rapides dont la force vive constitue ce qu'on appelle le calorique, vibrations auxquelles doit d'ailleurs participer l'*éther* interposé et qui sont, à coup sûr, de nature à rendre plus complexe la loi des actions mutuelles dont il est ici question. Quoiqu'il en soit et quelle que puisse être la complication de ces phénomènes, on ne peut guère se refuser à admettre, au moins à titre de fait expérimental, que les forces moléculaires auxquelles donne lieu la variation positive ou négative d'écartement soient proportionnelles à cette dernière

(1) Les *molécules* intégrantes des corps sont elles-mêmes formées par la réunion d'*atomes* groupés entre eux d'une façon qui ne nous est pas connue.

tant que les déformations sont suffisamment petites. C'est cette loi de proportionnalité qui sert de base à l'ensemble des recherches mathématiques qui sont connues sous le nom de *théorie mathématique de l'élasticité* et dans lesquelles on se propose le but suivant : étant donné un corps solide soumis à l'action de forces extérieures quelconques et étant connus les coefficients qui sont nécessaires pour définir les propriétés élastiques de la matière considérée, trouver, par le secours seul de l'analyse, les déformations éprouvées par n'importe quelle portion du corps dans les limites où la loi de proportionnalité peut être admise. Si cette question était entièrement résolue, la science de la Résistance des matériaux serait définitivement fondée. La naissance de cette branche importante de la physique mathématique est due aux travaux de Navier, Cauchy, Poisson, Clapeyron et Lamé; malheureusement ces géomètres et ceux qui, à leur suite, ont abordé ces études délicates se sont tous heurtés à des difficultés souvent insurmontables d'intégration, et ils ne sont parvenus à traiter complètement qu'un petit nombre de cas simples. Le problème inverse, consistant à trouver les forces quand on connaît les déformations en chaque point, se présente sous une forme beaucoup plus simple parce qu'il ne donne lieu qu'à des différentiations, mais il ne constitue évidemment qu'un mode de vérification *a posteriori* de la question qui nous occupe, et il ne peut servir à en trouver la solution. Par l'emploi d'une méthode mixte consistant à se donner arbitrairement une partie des forces et une partie des déformations *compatibles les unes avec les autres*, de Saint-Venant est arrivé à des résultats remarquables dans l'étude de la traction, de la flexion et de la torsion, et il a ainsi entièrement élucidé un certain nombre de cas jusqu'alors non résolus; mais, quelque ingénieuse que soit cette manière de poser la question, il est bien clair qu'elle doit se montrer impuissante dans une foule de circonstances, et, tant que l'analyse mathématique n'aura pas triomphé d'obstacles qui semblent d'ailleurs absolument infranchissables, on se trouvera arrêté dans la voie qui mènerait à une solution exacte des divers problèmes de la Résistance des matériaux. Si on la possédait d'ailleurs, cette solution, il est vraisemblable que souvent on n'en serait pas plus avancé au point de vue des applications : les formules rigoureuses présenteraient en effet bien certainement une si énorme complication qu'il faudrait, pour s'en servir, les simplifier en négligeant les termes les moins influents et, dans plus d'une circonstance, on arriverait ainsi, tout juste, à ce qu'on possède maintenant. Ce qu'on ne doit jamais perdre de vue en mécanique physique et jusqu'en astronomie, c'est qu'il faut et faudra toujours se contenter d'approximations : le tout est d'être certain que celles-ci sont suffisantes pour le but qu'on se propose.

§ 5. — **Méthode suivie dans ce Traité.**

En raison des difficultés que nous venons d'indiquer, le constructeur, qui poursuit avant tout un but pratique, se voit contraint, faute de mieux, à avoir recours à des solutions empiriques. L'objet qu'il a en vue n'est pas d'ailleurs, il faut bien le remarquer, de reconnaître quelles vérités mathématiques il doit croire au sujet de la façon dont se comporte la matière dans telles ou telles circonstances, mais simplement de savoir ce qu'il doit faire. Ce qu'il lui faut, ce sont des méthodes sûres et rapides pour déterminer les dimensions des ouvrages qu'il projette, et il n'hésitera pas au besoin à sacrifier la rigueur absolue des vérités scientifiques s'il peut, par une voie empirique plus commode, serrer la réalité d'assez près pour que les erreurs commises soient négligeables dans la pratique. Telle est la marche que nous suivrons dans ce Traité : nous nous appuierons sur un certain nombre de faits dus à l'expérience, et nous tâcherons, en partant de là, d'arriver à des lois et à des procédés généraux capables de fournir à l'ingénieur le moyen d'éviter tout mécompte dans la mise en œuvre des matériaux.

§ 6. — **Méthode des sections.**

Un corps solide étant soumis à des forces qui se font équilibre, coupons-le par une surface quelconque plane ou courbe MN, qui le sépare en deux parties, et considérons l'une de celles-ci, A par exemple, avec

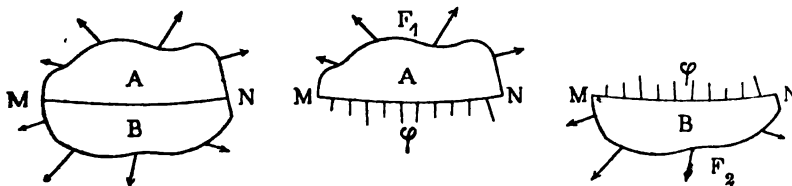


Fig. 1

les forces extérieures F_1 qui la sollicitent. L'équilibre n'existe plus alors, et, pour le rétablir, il faut évidemment appliquer aux divers points de la surface de séparation des forces φ représentant précisément l'action de

la partie B sur la partie A (1). Nous pouvons alors écrire qu'il y a équilibre entre les forces F_1 et φ et poser à ce sujet les équations habituelles de la statique, en ayant soin d'opérer non pas sur le corps à l'état primitif, mais sur le corps déformé et de prendre sur ce dernier les valeurs des efforts extérieurs et des bras de leviers. Très souvent les changements qu'éprouvent ces valeurs par suite de l'existence des déformations sont négligeables, mais il faut toujours préalablement reconnaître s'il en est ainsi, et, en nous occupant plus tard des pièces chargées debout, nous verrons qu'il y a des cas où cette simplification n'est pas permise.

Au lieu de faire usage d'une seule surface coupante, nous en emploierons quelquefois deux, telles que PQ, RS, et nous considérerons le noyau V compris entre elles comme étant en équilibre sous l'action des forces

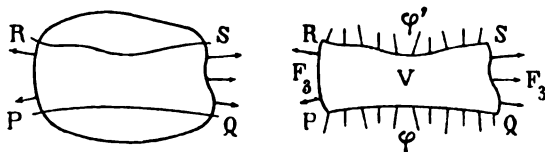


Fig. 2

F_3 , qui lui sont appliquées directement et des efforts intérieurs φ et φ' . Dans tous les cas, quel que soit le procédé employé, nous pourrons toujours, en écrivant l'équilibre, remplacer les forces F_1 , F_2 , F_3 par n'importe quel autre système équivalent, puisqu'il s'agit uniquement, dans la circonstance actuelle, d'équations qui ne relèvent que de la mécanique rationnelle.

En général l'action d'une partie telle que B sur un élément infiniment petit de la surface de séparation peut se représenter par une force f oblique à son plan et donnant lieu par conséquent à une traction ou à

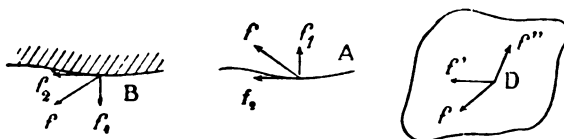


Fig. 3

une compression f_1 et à un effort tangentiel de glissement f_2 , qui est équilibré par la résistance qu'oppose le corps à tout changement de forme. Dans les liquides et les gaz, quand on considère leur fluidité comme parfaite, les molécules n'opposent aucun obstacle à un effort de

(1) Des erreurs ont été et sont encore parfois commises à ce sujet; nous en donnerons plus tard un exemple en parlant du raccordement d'une chaudière cylindrique avec ses fonds (§ 198).

cette dernière nature; ils cèdent, sans résister, à l'action des forces tangentielles, et, quand ils ont atteint une position d'équilibre, ils n'éprouvent en un point quelconque que des pressions normales; c'est là, comme on le sait, l'un des théorèmes fondamentaux qui servent de base à l'étude de leurs propriétés.

Si nous considérons maintenant différents éléments plans infiniment petits passant par un même point D d'un corps solide, nous sommes amenés à reconnaître que les forces obliques f, f', f'' ..., qui les sollicitent varient en général non seulement d'inclinaison, mais encore d'intensité, tandis que dans les liquides et les gaz en équilibre elles sont normales et égales en tous sens. La théorie mathématique de l'élasticité fait connaître un certain nombre de théorèmes remarquables relatifs à ces efforts moléculaires qui s'exercent autour d'un même point, mais nous n'aurons pas à nous en occuper dans ce Traité.

La *méthode des sections* est fréquemment employée pour calculer les forces moléculaires qui se développent dans l'intérieur des corps et pour s'assurer qu'elles n'atteignent pas de valeurs dangereuses; il faut seulement connaître le mode de répartition de ces efforts sur la section considérée. Quand cela n'est pas possible par la théorie seule, on a recours à des hypothèses déduites de données expérimentales ou aux deux moyens combinés ensemble. Il est clair d'ailleurs que, pour écrire les équations d'équilibre, on peut, suivant ce qui semble le plus commode, considérer à volonté la partie A avec les forces F_1 (fig. 1) ou la partie B avec les forces F_2 , les actions moléculaires φ étant les mêmes dans les deux cas mais de directions contraires.

En étudiant par ce moyen ce qui est relatif à un point donné, il faudra évidemment, parmi toutes les sections qu'on peut faire dans le corps par ce point, choisir celle qui éprouve la fatigue la plus grande et à laquelle Poncelet a donné le nom de *section dangereuse*. La sécurité du corps entier ne sera assurée que quand on aura reconnu quelle est, parmi toutes les sections menées en divers points, celle qui fatigue le plus. Sa position et son orientation peuvent varier non seulement avec la valeur et la répartition des forces extérieures, mais encore avec la forme du corps, le mode de liaison de ses diverses parties quand il est formé de plusieurs pièces assemblées ensemble de façon à constituer autant que possible un solide unique, etc. Nous en verrons des exemples en étudiant le glissement longitudinal dans la théorie de la flexion.

§ 7. — Principe de la superposition des petites déformations.

Un principe qui nous sera également d'une grande utilité est celui de la *superposition des petites déformations*; il peut s'énoncer ainsi : tant que les corps n'éprouvent que de très faibles modifications de forme, comme cela doit toujours avoir lieu dans les constructions, les déformations auxquelles donnent naissance des forces agissant simultanément se combinent entre elles, se superposent avec les valeurs qu'elles auraient si elles se produisaient séparément sous l'action de ces mêmes forces s'exerçant isolément.

L'exactitude de ce principe peut être regardée comme à peu près évidente toutes les fois que chacune des forces extérieures en jeu est telle qu'elle n'éprouverait de modification sensible ni dans sa valeur, ni dans ses bras de levier si on venait à supprimer les autres en totalité ou en partie : considérons en effet, comme l'a fait de Saint-Venant, deux molécules dont l'une peut être supposée immobile tandis que l'autre a éprouvé une suite de déplacements extrêmement petits par rapport à leur ligne de jonction; les projections de ces déplacements sur la ligne en question donnent les petits changements de longueur dont dépendent les actions développées et leur sont proportionnelles, de sorte que le déplacement résultant total, ainsi projeté, est alors évidemment celui qui aurait été engendré par la résultante des forces. C'est également ce qui résulte de ce principe de mécanique que « un ensemble de causes dont chacune est capable isolément de produire un très petit effet engendre purement et simplement la somme de ces effets particuliers. » (1)

Dans la pratique, il se présente un grand nombre de circonstances où, comme nous venons de le supposer, la déformation produite par l'une des forces ne modifie que peu ou point l'action des autres. Dans ces conditions le principe que nous venons d'énoncer peut être appliqué en toute sécurité, ou du moins il ne donne lieu qu'à des erreurs absolument négligeables : nous pourrons alors combiner entre elles les petites déformations exactement comme on le fait, en mécanique, pour les chemins parcourus; c'est un simple tracé géométrique à effectuer que nous traduirons ensuite en formule. Dans les autres cas, cette manière d'opérer ne saurait être admise, et elle conduirait à des résultats entachés

(1) Voir la *Résistance des corps solides*, par Navier et de Saint-Venant, p. 15, et la *Théorie de l'élasticité des corps solides*, par Clebsch et de Saint-Venant, p. 12.

souvent de graves inexactitudes. Telle est, par exemple, la circonstance qui se présente pour une pièce chargée debout : suivant qu'on lui applique ou non une force transversale, l'effet produit par la force longitudinale de compression n'est pas du tout le même. C'est encore, suivant une remarque ingénieuse de Bresse, ce qui arrive avec une pièce primitivement droite que des forces F obligent à reposer sur trois appuis non rigoureusement de niveau : la réaction exercée par le support C dépend essentiellement de la flèche que prend la poutre et on ne se trouve plus dans les conditions voulues pour appliquer légitime-

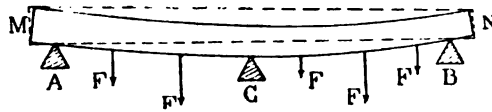


Fig. 4

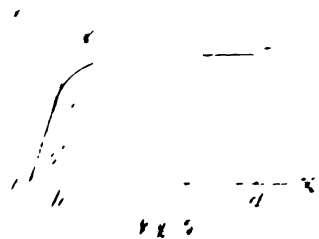
ment le principe qui nous occupe ; dans le cas particulier, par exemple, où chacune des forces F prise à part ne serait pas suffisante à elle seule pour faire courber la pièce jusqu'à ce qu'elle vienne reposer sur le support C , l'application du principe de la superposition des petites déformations conduirait à ce résultat que l'appui en question n'exerce aucune réaction sur la poutre, tandis qu'il n'en est pas du tout ainsi dans l'hypothèse où nous nous sommes placé.

§ 8. — Proportionnalité des forces élastiques aux faibles déformations. Limite d'élasticité.

Nous avons dit que les géomètres, en étudiant au point de vue théorique, l'élasticité des corps solides, ont été conduits à penser que les forces moléculaires ou élastiques sont proportionnelles, dans certaines limites, à la variation positive ou négative de distance des molécules qui leur donne naissance. L'expérience confirme cette manière de voir : une tige, soumise à des efforts d'extension ou de compression, s'allonge ou se raccourcit de quantités très sensiblement proportionnelles à l'effort qu'on lui applique, tant que celui-ci n'atteint pas une certaine valeur, qui se trouve être notablement supérieure à celle qu'on admet dans la pratique des constructions. Au-delà de ce point, les déformations croissent suivant une loi beaucoup plus rapide que précédemment ⁽¹⁾, de sorte que,

(1) Ce fait peut être pratiquement constaté d'une manière très nette au moyen de l'ingénieux « élasticimètre enregistreur », imaginé par MM. Neel et Clermont, chefs de l'atelier des essais de métaux à la Compagnie du Chemin de fer de Lyon. On en trouvera la description dans la *Revue générale des Chemins de Fer*, avril 1890, p. 248.

on trace une ligne droite pour les cas des allongements ou les raccourcissements mesurés par unité de longueur, et pour un même effort par unité de surface, on obtient une courbe analogue à la précédente qui se sépare brusquement sur une certaine longueur AB avec une certaine charge. L'effort correspondant est pris dessous du point B.



Après ce point, même si l'on se procure des instruments de précision pour mesurer les allongements, mais même pour constater leur existence, on ne peut à l'encre sensiblement que constater que soit la durée de l'application des charges, et quelque grand que soit le nombre de fois qu'on les fasse agir. L'allongement peut donc, dans la pratique, se dispenser d'en tenir compte; c'est pourquoi nous admettrons que, jusqu'à un certain point auquel on donne le nom de *limite d'élasticité*, les déformations cessent avec l'action des forces et leur sont proportionnelles; le rapport constant qui existe, dans ces limites, entre la charge par unité de surface et l'allongement ou le raccourcissement par unité de longueur porte le nom de *coefficient d'élasticité relatif à la traction ou à la compression*; c'est la tangente de l'angle KAB.

Comme nous venons de le dire, la portion AB de la courbe ABD ne se confond pas rigoureusement et mathématiquement avec une ligne droite, et le moment où l'on s'aperçoit qu'elle se sépare de la tangente AK est évidemment d'autant plus voisin de l'origine A que les mesures effectuées sont plus précises. Si donc, au lieu d'employer, comme on l'a fait pendant longtemps, des instruments donnant seulement le 1/4 de millimètre environ, on dispose d'appareils permettant de descendre jusqu'aux millièmes et même aux dix-millièmes de millimètre, on arrivera forcément à constater, outre l'existence bien connue du point B, celle d'un autre point tel que B' au-dessous duquel la distance entre la courbe et sa tangente en A est trop faible pour être perçue par l'observateur avec les moyens dont il dispose, la position de B' entre B et A dépend d'ailleurs évidemment varier suivant la perfection plus ou moins grande des moyens en question. Des distinctions de ce genre ont été faites quelquefois dans ces derniers temps: elles nous semblent non pas agrandir le champ de nos connaissances au sujet des propriétés moléculaires des corps, mais plutôt montrer l'habileté de l'observateur

(1) Pour le fer ordinaire une force de traction de 12 kg. par millimètre carré ne donne qu'environ 1 millimètre d'allongement permanent sur une longueur de 100 mètres.

et surtout la haute précision de ses instruments; la complication pratique à laquelle elles donnent lieu ne nous paraît pas d'ailleurs suffisamment justifiée, jusqu'ici du moins, et nous sommes d'avis qu'il est préférable de s'en tenir pour le moment aux notions précédemment exposées.

Pour un même corps la limite d'élasticité Bb varie souvent d'une manière appréciable suivant les opérations physiques auxquelles on l'a préalablement soumis, telles que le forgeage, le laminage, l'écroutissage, la trempe, le recuit; la température a également une influence sensible à cet égard; enfin il est à remarquer qu'il est difficile, soit de fixer d'une manière parfaitement exacte sur la courbe ABD le point où celle-ci cesse de se confondre sensiblement avec une ligne droite, soit de dire à quel moment précis les déformations permanentes doivent être regardées comme réellement appréciables. Pour toutes ces raisons les indications données à ce sujet dans les tableaux et les aide-mémoire ne doivent être considérées que comme s'appliquant d'une manière approximative aux pièces que l'on met en œuvre; il en est de même, d'ailleurs, comme nous le verrons, pour tous les chiffres pratiques relatifs à la Résistance des matériaux.

§ 9. — Résistance à la traction des corps dans lesquels la limite d'élasticité a été dépassée.

Lorsque la limite d'élasticité a été dépassée dans toute l'étendue ou dans une partie seulement d'un solide, les molécules ne reprennent plus leurs positions premières, de sorte qu'on a en réalité affaire à un nouveau corps n'ayant pas les mêmes propriétés élastiques que le premier; ABD étant, par exemple, la courbe qui relie les allongements du métal

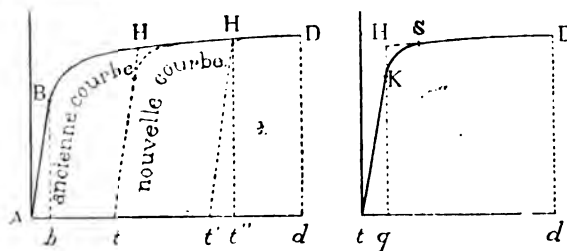


Fig. 6

primitif aux efforts correspondants, nous savons que, tant que l'allongement par millimètre courant n'est pas supérieur à Ab , le corps revient à sa forme primitive; mais il cesse d'en être de même si l'on dépasse le

point B, pour aller jusqu'en H par exemple. Lorsqu'on opère sur du fer ou de l'acier et qu'il s'agit d'efforts de traction, l'expérience prouve que, si l'on mène par H une parallèle Ht à la ligne AB, l'*allongement permanent* est alors à très peu près égal à At , et la nouvelle courbe relative au métal ainsi modifié est très sensiblement représentée par la droite tH et l'ancienne ligne HD se raccordant ensemble par une partie arrondie KS. Il résulte de là que *le coefficient d'élasticité ne change pas sensiblement de valeur, mais que la limite d'élasticité est reculée jusqu'en un point K situé à une faible distance du point H.*

La connaissance de la loi précédente est due en grande partie aux expériences exécutées en France par Tresca, en Italie par le général Rosset, en Allemagne par le professeur Bauschinger, et enfin en Amérique par le professeur Thurston et divers autres expérimentateurs. Elle paraît bien s'appliquer à toutes les variétés de fer ou d'acier employées dans les constructions, mais il serait imprudent de l'étendre aux autres corps et particulièrement à ceux qui sont essentiellement mous et ductiles comme l'étain, le zinc, le cuivre ; dans tous les cas elle cesse d'être exacte à partir du moment où se produisent les phénomènes de la *striction* qui, comme nous le verrons plus loin, donnent lieu dans une certaine région à une sorte d'écoulement du corps solide produisant un allongement permanent sans allongement élastique correspondant.

Comme cela résulte des nombreuses expériences qui ont été faites à ce sujet (1), les phénomènes dont nous venons de parler sont un peu plus compliqués que nous ne venons de l'indiquer ; en réalité, tout métal soumis à froid à un effort mécanique énergique subit une sorte d'é-crouissage plus ou moins prononcé et ne se brise ensuite que sous une charge plus élevée. Comme on l'a constaté, cet effet est très appréciable pour le fer extrêmement doux et ductile, surtout quand on pousse l'effort primitif jusque dans le voisinage de la rupture ; on obtient ainsi jusqu'à un accroissement d'environ 18 % dans l'effort nécessaire pour rompre ensuite les barreaux expérimentés. Les effets ainsi produits se compliquent d'ailleurs de ceux qui résultent des phénomènes dus à l'*élasticité subséquente*, et, comme nous le dirons plus loin (§ 11), ils sont d'autant plus sensibles qu'on a permis au barreau de se reposer pendant un temps plus long, tout en atteignant cependant, au bout de peu de jours, une valeur très voisine de leur maximum. Pour le fer un peu dur et pour l'acier, l'accroissement de résistance dont nous venons de parler est beaucoup moins prononcé et ne paraît guère jamais atteindre plus de 3

(1) On pourra en particulier consulter à cet égard *The elasticity and resistance of the materials of engineering*, par Burr (New-York, 1883), p. 260.

ou 4 %, de sorte que, dans la pratique des constructions, la loi énoncée au commencement de ce paragraphe peut être regardée comme suffisamment exacte. Nous ajouterons en terminant que, par le recuit, le métal reprend ses propriétés primitives : il cesse d'être *aigre* ou *cassant*, ce qui revient à dire (§ 13 et 14) qu'il a recouvré sa faculté première de s'allonger considérablement avant de se rompre.

§ 10. — Résistance des corps soumis à des efforts statiques.

Considérons un corps dont toutes les molécules sont arrivées lentement et par degrés insensibles aux positions définitives que leur font occuper des forces extérieures appliquées sans chocs et sans secousses de façon à ne pas donner lieu à des mouvements vibratoires. Les déformations produites se résument, en dernier ressort, dans l'écartement de certaines molécules et dans le rapprochement de quelques autres ; il est bien clair que le fait du rapprochement ne peut, *par lui-même*, produire une rupture : un corps qu'on presse de tous côtés de façon qu'il lui soit impossible de se dilater dans aucun sens supporte, sans se briser, tels efforts que l'on veut ; c'est en effet ce qu'on observe dans la frappe des monnaies et dans quelques phénomènes du même genre, par exemple dans le courbage des pièces de bois quand on s'oppose efficacement à l'extension des fibres dans la partie convexe. Si, en comprimant les molécules A et B, on arrive à déterminer quelque part une séparation, cela tient à ce que celles-ci, en marchant l'une vers l'autre, se rapprochent en même temps des molécules C et D situées de chaque côté et les forcent à s'écarter, en déterminant

ainsi un gonflement des faces latérales quand ces dernières sont libres. Des considérations analogues sont applicables aux efforts de *cisaillement*, qui, en tendant à faire glisser l'une par rapport à l'autre deux sections infiniment voisines,

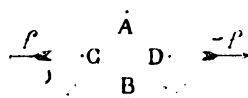


Fig. 7

ne peuvent produire que des allongements ou des raccourcissements dans certaines directions. Pour s'assurer qu'un corps soumis à des efforts statiques ne se brisera pas, il suffirait donc, au point de vue théorique, de voir si, en aucun de ses points, il ne se produit d'écartement supérieur à celui qui est compatible sans danger avec la nature de la matière dont il est formé. Malheureusement cette façon d'aborder le problème donne lieu à des difficultés et à des complications de plus d'une sorte, et, en pratique, quand les faces latérales des solides sont

libres, comme nous le supposerons par la suite, il est préférable d'envisager à part les phénomènes de *traction*, de *compression* et de *cisaillement*, et de demander à l'expérience quel est l'*allongement*, le *raccourcissement* ou le *glissement* par millimètre courant qu'on peut admettre sans avoir à craindre la rupture, soit immédiate, soit ultérieure par suite d'un changement de texture.

Nous avons dit précédemment que, dans les limites des efforts admis dans les constructions, les déformations sont proportionnelles aux charges par millimètre carré qui leur correspondent; il nous sera donc permis, dans les problèmes qui concernent la résistance aux efforts statiques, de nous baser sur les valeurs qu'acquièrent ces dernières, et de dire que nous serons dans de bonnes conditions si, *aux points et dans les directions où la fatigue est la plus grande*, ces valeurs ne sont pas supérieures aux chiffres admis par les constructeurs. Telle est en effet la marche constante que nous suivrons dans tous les cas de cette nature.

§ 11. — **Élasticité subséquente.**

Supposons que nous appliquions à un corps des forces qui ne soient suffisantes ni pour amener la rupture immédiate, ni pour la provoquer au bout d'un certain temps par une désagrégation plus ou moins lente rappelant les phénomènes qui ont donné lieu, de la part de Tresca, à des recherches si intéressantes et si curieuses sur l'*écoulement des solides*; l'expérience de chaque jour montre que, dans ces conditions, le corps considéré atteint, souvent presque de suite, *à peu près* la nouvelle forme qu'il doit conserver; mais l'emploi d'appareils de précision permet de constater qu'en réalité l'équilibre moléculaire ne s'établit pas immédiatement : la déformation continue à augmenter quoique d'une manière très lente et de moins en moins sensible, et elle n'atteint sa valeur maximum qu'au bout d'un certain temps, ne dépassant pas dans bien des cas un petit nombre de minutes, mais pouvant s'élever à des heures, des jours et même des mois, suivant la nature de la matière, la valeur de l'effort et la température. Inversement, si l'on fait cesser l'action des forces auxquelles un corps est soumis, des phénomènes tout à fait analogues se produisent en sens opposé, et l'on constate non seulement que l'état définitif de repos ne s'établit pas de suite, mais encore qu'il exige un intervalle d'autant plus long que la durée d'application de la charge a été plus grande.

Ces effets de déformation lente et supplémentaire ont été étudiés pour

la première fois en 1835, par Weber, qui les a caractérisés par le nom de *elastische Nachwirkung* (*action ultérieure élastique*); ils ont été l'objet de nombreuses recherches de la part de Kohlrausch, Neesen, G. Wiedemann en Allemagne, de William Kent en Amérique et de L. Pérard en Belgique. En France, on les désigne généralement sous le nom d'*élasticité subséquente* ou *rémanente*; ils paraissent dus à ce fait que les molécules ne peuvent pas obéir suffisamment vite aux actions qui les sollicitent, et qu'il leur faut un certain temps pour achever de se déplacer et de changer d'orientation les unes par rapport aux autres. Pour donner une idée des résultats obtenus par les divers expérimentateurs, nous citerons deux expériences dues à Kohlrausch : un fil de laiton a été tordu de 90° une première fois pendant une minute, et une seconde fois pendant deux minutes, après quoi on a fait cesser l'effort; les déviations observées ont été alors les suivantes :

	DÉVIATIONS RESTANTES OU ANGLES DE TORSION RESTANTS AU BOUT DE						
	1 minute	1 heure	2 heures	3 heures	5 heures	7 heures	24 heures
Fil tordu de 90° pendant 1 minute . . .	23°8	11°5	9°3	7°4	6°3	5°5	1°8
Fil tordu de 90° pendant 2 minutes . . .	42°5	17°8	14°4	11°9	9°1	7°0	2°3

Voici encore quelques-uns des résultats obtenus par Wiedemann sur un fil de laiton de 2 millimètres de diamètre et de 0^m,48 de long soumis successivement à différents efforts de torsion :

Valeurs proportionnelles des moments de torsion produisant les déviations ci-dessous	3	5	7	9	11	13
Angles (au premier moment	312°	523°	733°	956°5	1191°	1510
de torsion { une fois l'équilibre définitif observés (établi	312°	523°	734°	959°	1204°	1543°

Pour étudier l'élasticité subséquente, on opère souvent d'une autre manière : on donne au corps expérimenté une déformation quelconque et, en mesurant les efforts qui sont nécessaires au bout de 1, 2, 3.... heures pour maintenir celle-ci constante, on reconnaît que ces derniers

Les observations qui précèdent tendent à démontrer que les matériaux ne gagnent pas la même dureté pendant les opérations de traction. Il faut donc s'attendre à ce que la résistance du corps à la rupture soit sensiblement plus élevée pendant la période de transition qui précède l'état final d'équilibre en question. C'est, en effet, ce que confirme l'expérience avec l'acier américain. Après plus ou moins de temps, les barreaux se reposent pendant des heures entières. La Commission a ainsi obtenu les résultats suivants :

Temps pendant lequel on a laissé les barreaux se reposer entre le premier et le second essai de traction.	Augmentation de résistance à la rupture, obtenue par rapport aux barreaux qu'on a rompus au premier essai de traction.
Moins de 1 heure	1,1 %
De 1 heure à 8 heures	3,8 %
1 jour	15,4 %
8 jours	16,2 %
16 jours	17,8 %
De 8 à 48 jours	15,3 %
16 mois	17,9 %

au bout d'un jour l'état définitif d'équilibre paraît atteint. Pour du fer un peu dur et pour de l'acier, l'augmentation de résistance est plus élevée que celle indiquée au paragraphe 6, p. 201.

mentation de résistance constatée dans des essais analogues est beaucoup moins forte et, comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire (§ 9), elle ne dépasse guère 3 ou 4 %.

Les effets de l'élasticité subséquente sont surtout prononcés dans les substances végétales telles que les fils de soie, le caoutchouc. Ils se produisent avec une extrême rapidité et sont par conséquent à peu près insensibles dans les métaux tant que les efforts exercés sont peu considérables; mais avec la plupart d'entre eux et surtout avec ceux qui sont très ductiles comme le fer extrêmement doux, le cuivre, etc., ils sont très appréciables quand les déformations *permanentes* deviennent un peu fortes et surtout quand on approche de la charge de rupture. On voit donc qu'il importe essentiellement dans ce cas d'en tenir compte; il convient en particulier de ne pas conduire trop rapidement les essais de résistance des matériaux; avec le fer un peu dur et l'acier, un petit nombre de minutes de repos après chaque charge est à peu près suffisant. Quand cette précaution n'est pas prise, on est exposé à voir se produire des phénomènes qui, au premier abord, paraissent inexplicables; c'est par exemple ce qui se présente quand on soumet un corps à l'action de forces considérables se succédant à de très courts intervalles. Imaginons en effet qu'après avoir enlevé le poids P qui exerce un effort de traction sur une tige AB, nous le remettons immédiatement

en place, avant que l'élasticité subséquente ait achevé de produire son effet (consistant ici en un raccourcissement); la seconde mise en charge va trouver le barreau légèrement allongé, de sorte qu'elle produira une fatigue plus grande. Qu'à cette première répétition de l'effort en succèdent rapidement de nouvelles, on comprend de suite que les conditions habituelles de la résistance vont se trouver notablement modifiées. Ce qui complique encore le phénomène, c'est que les effets de l'élasticité subséquente se produisent aussi bien quand on replace la charge que quand on la retire; d'après ce qu'on sait à leur sujet, ils sont d'ailleurs susceptibles, dans certaines circonstances, de ne pas influencer de la même manière et au même moment toutes les molécules du corps; celles-ci doivent donc, en définitive, se trouver soumises à des mouvements confus et irréguliers ayant une influence notable sur la résistance soit par eux-mêmes, soit par les phénomènes d'échauffement, de variation de structure, etc., auxquels ils peuvent donner lieu et qui dépendent de causes diverses parmi lesquelles il convient de citer la *stabilité moléculaire* plus ou moins grande du corps considéré; sous l'action de vibrations répétées, la contexture de l'un d'eux peut se

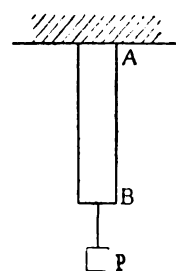


Fig. 8

modifier d'une manière rapide et donner lieu, par exemple, à une diminution très sensible de résistance, tandis que ces effets seront beaucoup moins prononcés dans un autre. Il y a là, comme dans beaucoup d'autres parties de la science qui nous occupe, un vaste champ de recherches ouvert devant l'investigateur qui veut approfondir les phénomènes de la mécanique moléculaire (1).

§ 12. — Effets produits par la répétition rapide des efforts.

Si l'on soumet un barreau à des tractions répétées qui se succèdent à des intervalles de temps suffisamment éloignés et n'atteignent qu'une faible valeur, inférieure en tous cas à celle qui est nécessaire pour déterminer un commencement de *striction*, on n'observe en général aucune fatigue spéciale résultant de la répétition des efforts; en d'autres termes, on se trouve constamment dans d'aussi bonnes conditions si, entre l'application de deux charges successives, on donne au corps un repos d'une durée variable suivant sa nature, mais ne s'élevant souvent qu'à un assez petit nombre de minutes.

Si, au contraire, les efforts exercés se succèdent à des intervalles très rapprochés, les phénomènes changent de nature et, d'après ce qui vient d'être dit à propos de l'élasticité subséquente (§ 11), on doit s'attendre à trouver une diminution de résistance; c'est effectivement ce que montre la pratique dans une foule de circonstances, par exemple pour les pièces de machines à vapeur qui sont soumises à des efforts incessamment renouvelés, faisant même souvent travailler les molécules alternativement à la traction et à la compression. Les effets du genre de ceux dont nous parlons, observés depuis longtemps par Fairbairn, ont été étudiés en détail, surtout pour le fer et l'acier, par Wœhler, par Spangenberg, puis par Bauschinger. Ces expérimentateurs ont fait à ce sujet de nombreux essais de traction, de compression, de flexion et de torsion dont les résultats principaux peuvent se résumer dans la proposition suivante: si l'on calcule les tensions extrêmes (positives pour la traction, négatives pour la compression) qui correspondent aux limites des mouvements alternatifs imprimés au métal, on trouve que *plus la différence algébrique de ces tensions est grande, plus la charge qui détermine la rupture est faible*.

(1) Pour plus de détails relatifs à l'élasticité subséquente, on pourra consulter les ouvrages suivants: *Revue universelle des Mines*, 1880, 1^{er} semestre, p. 486. — *Journal de Physique théorique et appliquée*, 1879, p. 349.

Il y aurait évidemment un intérêt considérable à savoir quelle est, pour chaque espèce de métal, la valeur de cette charge réduite qui produit la rupture dans telle ou telle circonstance donnée. Les expériences faites jusqu'ici ne permettent malheureusement pas de résoudre d'une manière tant soit peu complète le problème en question. Dans les essais de Wöhler, où la charge, appliquée pendant moins de $\frac{1}{10}$ de seconde, se reproduisait à des intervalles réguliers un peu inférieurs à 1 seconde, la charge réduite de rupture φ s'est trouvée, pour les fers et les aciers expérimentés, sensiblement donnée par la formule

$$\varphi = \frac{\Delta}{2} + \sqrt{T(T - n \cdot \Delta)}$$

Δ étant la différence algébrique mentionnée plus haut;

T la charge de rupture telle qu'on l'obtiendrait dans le cas d'un essai ordinaire de résistance par l'addition lente et graduelle de poids;

n un coefficient numérique qu'on peut prendre égal à environ 1,42 pour le fer d'essieux, et à 1,66 pour l'acier d'essieux Krupp, au moins pour les qualités expérimentées par Wöhler.

T étant connu pour un métal déterminé, si l'on se donne arbitrairement Δ on en déduit immédiatement la valeur correspondante de φ et par suite celle de l'effort minimum $\varphi' = \varphi - \Delta$. En opérant de cette façon pour les valeurs $n = 1,42$ et $n = 1,66$ mentionnées plus haut et en prenant $T = 33 \text{ kg.,}2$ pour le fer et $T = 73 \text{ kg.,}4$ pour l'acier, on trouve que des mouvements *très rapidement et indéfiniment répétés* causent la rupture quand les efforts varient entre les limites suivantes :

POUR LE FER D'ESSIEUX			POUR L'ACIER D'ESSIEUX		
De +33 ^k ,2 (traction) à +33 ^k ,2 (traction)			De +73 ^k ,4 (traction) à +73 ^k ,4 (traction)		
De +25	—	+31,5	De +60,0	—	+69,8
De +20	—	+30	De +45,0	—	+64,6
De +15	—	+28,4	De +30,0	—	+58,3
De +10	—	+26,3	De +15,0	—	+50,5
De +5	—	+23,8	De 0	—	+40,9
De 0	—	+21,0	De -22,1 (compression) à		+22,1
De -11,7 (compression) à		+11,7			

Ces résultats sont traduits graphiquement sur la figure 9. Pour $\varphi' = 0$, c'est-à-dire pour le point o , on a

$$\varphi = 2 T (\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

Contrairement à ce qui a été affirmé plusieurs fois, cette valeur n'est pas égale à la limite d'élasticité, telle du moins qu'on la constate dans un essai ordinaire de résistance à la traction.

Pour $\varphi' = -\varphi$, ce qui correspond à des efforts alternativement égaux de traction et de compression, on a

$$\varphi = \frac{T}{2n}$$

Si, pour une valeur donnée φ' , la charge maximum φ dépasse plus ou moins les chiffres précédents, la rupture est inévitable: elle se produit

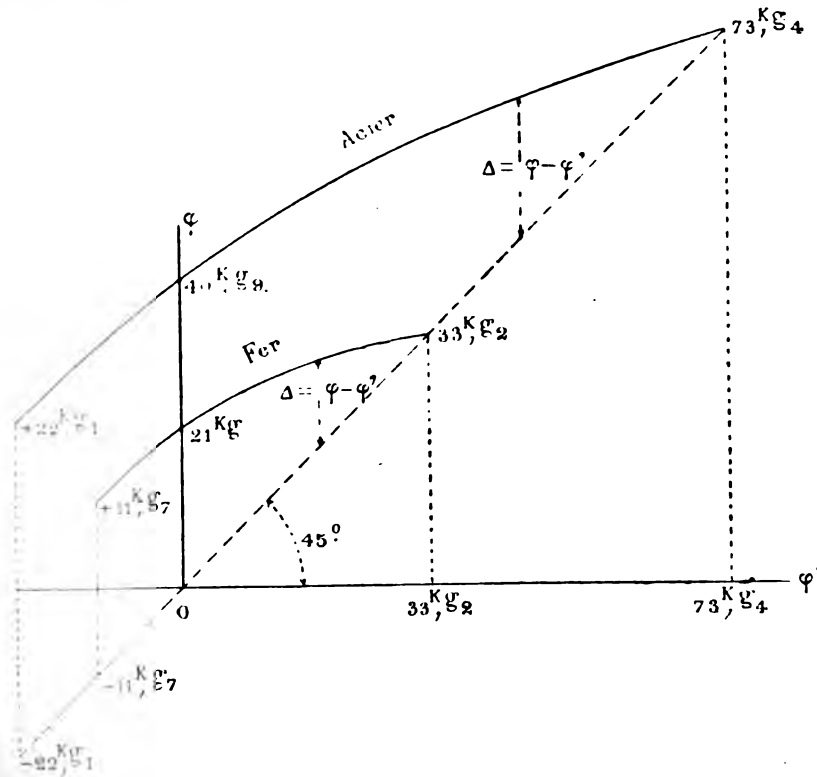


Fig. 9

au bout d'un nombre plus ou moins grand de répétitions de l'effort. Un point également important à noter, c'est que le moindre défaut dans une barre soumise aux efforts variables dont il est ici question facilite beaucoup sa rupture; les chiffres précédents se rapportent à des barreaux parfaitement sains.

Il est hors de doute que la valeur à adopter pour le coefficient n doit varier avec les différentes espèces de fer et d'acier; elle dépend non seulement de la charge de rupture ordinaire T ; mais encore de l'ensemble des diverses propriétés moléculaires du corps considéré, par exemple de sa limite d'élasticité, de sa *stabilité moléculaire* (§ 11), etc.

Il importe également de remarquer que les résultats obtenus par Wœhler sont uniquement relatifs à des efforts d'une durée très courte, rapidement répétés. C'est le cas qui se présente pour les essieux des locomotives et des wagons; c'est aussi, dans une certaine mesure, ce qui se produit pour un certain nombre de pièces des machines à vapeur telles que tiges de pistons, bielles, etc.; mais il est vraisemblable que, pour avoir des résultats exacts, il faut tenir compte du temps pendant lequel agissent les charges ainsi que de la rapidité avec laquelle elles se succèdent. Pour des ponts de chemins de fer, les données du problème sont, on le comprendra de suite, notablement différentes de celles des expériences de Wœhler et, d'une manière générale, on peut dire que les chiffres de ces dernières sont loin d'être applicables en toutes circonstances: pour opérer à coup sûr dans l'étude d'un projet, il faudra, comme toujours, se baser sur les résultats qui ont été constatés sur des constructions ou des appareils aussi analogues que possible à ceux qu'on projette. Ces réserves une fois faites, il faut se hâter d'ajouter que les essais entrepris par Wœhler et par ses continuateurs jettent un jour précieux sur une série de phénomènes jusqu'alors peu ou point connus, et qu'ils fournissent les données premières de lois ayant une importance capitale dans l'étude théorique et pratique de la résistance des matériaux (1).

§ 13. — Résistance des corps soumis à des actions dynamiques graduelles.

Nous venons d'indiquer les conditions de résistance auxquelles doit satisfaire la matière qui est soumise à de simples efforts statiques; mais il est rare que, dans la pratique, la question se présente sous une forme aussi simple. Presque toujours, en effet, une construction ou un ensemble

(1) Pour plus de détails sur ces divers sujets, on pourra consulter le très intéressant mémoire de M. Considère, inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1^{er} semestre 1885, p. 574), ceux de M. Mayer (2^e semestre 1886, p. 725), de M. Bricka (2^e semestre 1887, p. 698), la *Revue universelle des Mines* (1882, 1^{er} semestre, p. 596), le *Génie civil* (mai 1881, p. 305), les *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils* (2^e semestre 1881, p. 39 et 58), la *Stabilité des Constructions*, par Weyrauch, traduite par Michel Sivilokossitch.

...



Fig. 10

constante soumise à des efforts de traction et de compression la courbe ayant pour abscisses les allongements par millimètre courant et pour ordonnées les efforts par millimètre carré. Si L est la longueur de la tige et Ω sa section, le travail moléculaire produit par un allongement par millimètre courant dl , lorsque la

charge par millimètre carré est égale à R, a pour valeur

$$(\Omega / \Omega) \cdot (L \times dl) = L \times \Omega \times R \times dl$$

de sorte que celui qui correspond à l'allongement de 0 à l a pour expression (1)

$$L \times \Omega \times \int_0^l R \times dl$$

ou, ce qui revient au même :

$$L \times \Omega \times \text{aire courviligne ABGg}$$

(1) Avec les unités dont nous faisons usage (kilogramme et millimètre), la quantité $L \times \Omega \times \int_0^l R \times dl$ représente des kilogrammillimètres; il faut donc la diviser par 1000 pour avoir des kilogrammètres.

Poncelet a donné à la quantité ci-dessus le nom de *résistance vive élastique* ou de *résistance vive de rupture* suivant qu'on s'arrête à la limite d'élasticité ou qu'on va jusqu'à la rupture, de sorte qu'on a :

$$\text{Résistance vive élastique} = L \times \Omega \times \int_0^\lambda R \times dl = L \times \Omega \times \text{aire AB}b.$$

$$\text{Résistance vive de rupture} = L \times \Omega \times \int_0^\Lambda R \times dl = L \times \Omega \times \text{aire AHD}d.$$

Au lieu de nous servir des allongements et des forces rapportés aux unités de longueur et de surface, nous pourrions prendre pour abscisses et pour ordonnées les allongements totaux et les efforts réels exercés ; c'est même ce que nous serons forcé de faire quand la section Ω ne sera pas constante comme nous l'avons supposé tout à l'heure, et c'est la surface même de la courbe qui nous fera connaître la résistance cherchée.

La considération des résistances vives nous donne la valeur du travail moléculaire qui nous intéresse dans le cas de la traction et par suite dans celui de la compression. Nous verrons plus tard que des expressions analogues sont applicables à la flexion et à la torsion, de sorte que l'aptitude à résister à une action dynamique peut être regardée comme indiquée par la valeur de l'aire comprise entre la courbe AHD, l'axe des x et l'ordonnée qui correspond à l'allongement maximum considéré comme admissible. Ce qu'il faut connaître pour pouvoir se prononcer à cet égard, ce n'est donc pas seulement le point extrême de rupture D, mais la courbe tout entière; celle qui est figurée par exemple par le tracé n° 2, bien que correspondant à un effort final moins élevé que le n° 1, a cependant une résistance vive d'élasticité et de rupture plus grande et est par suite susceptible d'éteindre une force vive plus considérable. Un autre exemple remarquable de l'importance de la forme de la courbe en question est donné par la comparaison des deux échantillons caractérisés par les chiffres suivants (1) :

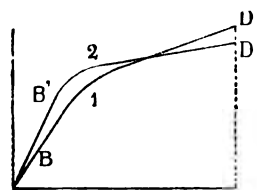


Fig. 11

	Fer au bois, très doux. Courbe H.	Fer très phosphoreux. Courbe H'.
Résistance par m/m carré à la limite d'élasticité.	10 ^k ,7	30 ^k ,0
Résistance par m/m carré à la rupture.	37,2	40,0
Allongement correspondant à la rupture.	21,6 %	22,0 %

(1) *Les métaux à l'Exposition de 1878* par Lebaslour, page 77.

Supposons que deux barreaux faits avec ces fers présentent l'un et l'autre une paille, par suite de laquelle leur résistance totale à la rupture ne soit plus égale qu'à Sd ; on peut admettre que, malgré cela, les courbes H et H' resteront sensiblement les mêmes, de sorte que, si nous menons l'horizontale $S S'$, nous voyons que les résistances vives de rupture

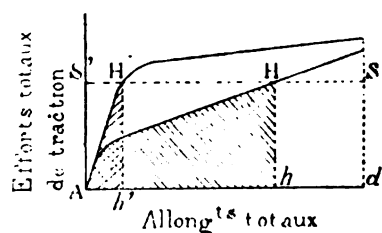


Fig. 12

sont alors mesurées par les aires AHh , $AH'h'$, et par suite la barre phosphoreuse, qui avait primitivement un avantage notable, présente maintenant par rapport à l'autre une infériorité extrêmement marquée. On voit, par ces exemples, l'intérêt réel qu'il y a à se servir d'appareils d'essais qui soient disposés de manière à donner un tracé des courbes en question, dont la connaissance ne doit pas cependant dispenser d'épreuves de choc.

Les considérations précédentes mettent en évidence l'effet désastreux que produit, au point de vue de la résistance aux actions dynamiques, un rétrécissement notable de section tel que KK' pratiqué sur une petite portion de la longueur d'une tige: AHD étant par exemple la courbe relative au n° 1, nous admettrons que celle qui se rapporte au n° 2 est la même (ce qui ne s'éloigne pas notablement de la vérité); seulement elle s'arrêtera au point H tel que l'ordonnée Hh soit égale à la charge

de rupture qui correspond à la section réduite (1). La résistance vive de rupture sera donc diminuée, puisqu'elle est alors mesurée par l'aire AHh , et, pour l'augmenter sans rien changer à l'effort final Sd , il suffira de raboter la tige de façon à lui donner partout même section comme

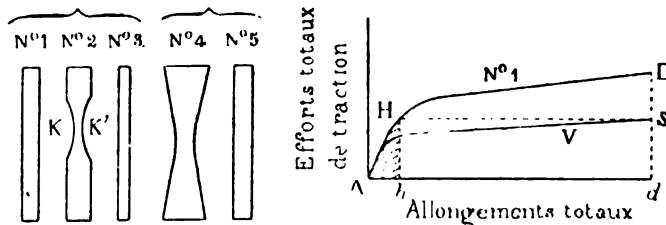


Fig. 13

de rupture qui correspond à la section réduite (1). La résistance vive de rupture sera donc diminuée, puisqu'elle est alors mesurée par l'aire AHh , et, pour l'augmenter sans rien changer à l'effort final Sd , il suffira de raboter la tige de façon à lui donner partout même section comme

(1) Nous supposons que la charge de rupture par millimètre carré mesurée sur la section la plus réduite est la même dans un barreau entaillé (n° 2) et dans un barreau cylindrique (n° 1 et n° 3). En réalité il n'en est pas tout à fait ainsi, comme nous le verrons plus loin; mais notre conclusion n'en subsiste pas moins.

on le voit dans le n° 3; on aura alors une résistance vive égale à $AVSd$. On verrait de même qu'il y a bénéfice à donner à la barre n° 4 la forme n° 5 qui est plus légère, résiste à peu près aussi bien aux efforts statiques et peut éteindre une force vive plus grande.

Un autre fait important à noter à propos du sujet qui nous occupe, c'est qu'un corps auquel on a fait dépasser sa limite d'élasticité est devenu moins propre à résister, sans se rompre, à une action dynamique d'une grande intensité.

Soient en effet ABD et $A'B'D$ les courbes correspondant à l'état naturel du corps et à celui qui résulte d'un allongement préalable Ab' . Nous avons vu que la portion $A'B'$ peut être considérée comme étant sensiblement une ligne droite parallèle à AB ; la résistance vive d'élasticité se trouve donc alors représentée par l'aire $A'B'b'$ et par suite elle est augmentée; mais en revanche, et quelles que puissent être d'ailleurs au juste la forme et la direction du contour $B'A'$, l'existence d'une défor-

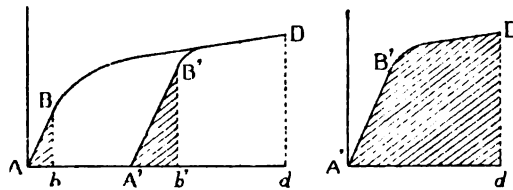


Fig. 14

mation permanente a pour effet inévitable de réduire la force vive de rupture (aire $A'B'Dd$ au lieu de $ABDd$). La déformation artificielle d'un métal lui permet donc de supporter, sans changement permanent de forme, des charges plus élevées, ce qui est à coup sûr un avantage; mais elle a l'inconvénient beaucoup plus grand de le rendre moins propre à subir un choc accidentel très énergique; c'est pourquoi on doit, en principe, la regarder comme désavantageuse. En particulier, dans les essais qu'on fait subir aux constructions pour s'assurer de leur solidité, il faut bien se garder de franchir le point où les changements permanents de forme commencent à acquérir des valeurs appréciables. Après un essai à outrance, il y a lieu, pour rendre à la construction sa sécurité primitive, de changer les pièces qui ont contracté des changements notables de forme; sans cela on serait exposé à voir la rupture se produire sous l'action de chocs bien inférieurs à ceux que la matière a pu supporter une première fois et qui pourraient par suite sembler sans danger aux yeux d'un observateur superficiel. Si, au contraire, la déformation permanente produite est assez faible pour ne réduire que de

bles pour le calcul de l'allongement. On trouve à la fin de ce **précédent** et qui serait dans l'erreur, que la détermination de la nature d'une altération dangereuse de la ...

§ 14. — Résistance des corps soumis à des chocs locaux.

Dans le paragraphe qui précède, on a vu implicitement que la force vive à éteindre est éteinte dans les circonstances telles qu'elle fasse sentir simultanément son action à toutes les parties du corps, sans qu'il y ait une action spécialement concentrée sur un point déterminé. Il se présente un certain nombre de circonstances où cette hypothèse est suffisamment confirmée à la réalité : c'est par exemple ce qui arrive pour une barre que l'on charge longitudinalement ou transversalement de poids allant en croissant d'une manière rapide mais graduelle (jusqu'à certaine valeur maximum) et acquérant ainsi une certaine force vive qui est éteinte, dans les conditions que nous avons indiquées tout à l'heure, par le travail moléculaire développé. Tel est encore le cas qui se rencontre dans l'action exercée sur une bielle, ou une manivelle, ou encore un balancier de machine sous l'action continue mais constamment variable du piston à vapeur dont la vitesse et par suite l'accélération changent à chaque instant de valeur. Ce serait encore à peu près ce qui se présenterait pour un mur ou un obstacle analogue venant à subir l'effort lent et graduel d'une certaine masse fluide et à l'arrêter dans son mouvement. Dans ces diverses circonstances la résistance vive de l'obstacle est mise en jeu, mais elle l'est sans choc proprement dit; pour la solution du problème, une seule chose est nécessaire à connaître : c'est la valeur de la demi-force vive à éteindre, et peu importe alors la façon dont les facteurs m et v entrent dans la valeur, supposée constante, du terme $\frac{1}{2} m. v^2$.

Il n'en faut évidemment de beaucoup que les choses se passent toujours d'une manière aussi simple : généralement, quand il y a une certaine force vive à éteindre, cela provient de ce qu'une masse animée d'une certaine vitesse vient agir subitement sur une portion limitée du corps considéré, en produisant ainsi des phénomènes plus ou moins locaux qui résultent de la rencontre d'une plaque de cuirasse ou d'un obstacle quelconque. Il y a donc sur le corps une portion très peu étendue, qui est soumise à un effort local, et les phénomènes qui en résultent ne se produisent que dans une portion limitée du corps. On peut alors dire que la force vive à éteindre est éteinte par un choc local, et que la résistance vive de l'obstacle est mise en jeu.

déformation locale plus ou moins accentuée et parfois tellement forte que le corps se désagrège dans la région touchée, tandis que les autres parties sont encore restées, ou à peu près, dans leur état primitif. Pour une valeur donnée de $\frac{1}{2} m. v^2$, plus v sera faible, moins l'action locale dont nous venons de parler sera forte et plus on s'approchera par conséquent du cas d'une action dynamique uniforme et graduelle dont l'effet a été étudié au paragraphe précédent.

L'étude théorique complète des phénomènes de ce genre a donné lieu à des travaux de la plus savante analyse; ce qui complique notablement la question, c'est que la masse choquante reste unie à la masse choquée au moins pendant les premiers instants de la rencontre et les phénomènes deviennent singulièrement plus complexes⁽¹⁾. Nous nous bornerons ici à faire purement et simplement remarquer que, dans le cas actuel, ce qu'il faut tâcher de réaliser, c'est que, *dans la partie choquée et dans son voisinage immédiat, des déplacements moléculaires un peu étendus puissent se produire sans amener une désagrégation en ces points*, en donnant ainsi à l'ébranlement produit le temps de se propager dans toute la masse dont le travail moléculaire pourra alors entrer en jeu pour éteindre la force vive de la masse mobile. La partie choquée ayant, comme nous le supposons ici, une faible étendue, on se trouve alors évidemment dans le cas d'un barreau *très court* à qui l'on demande de supporter, sans se rompre, un choc assez intense; *l'allongement proportionnel* dont nous parlerons bientôt n'a, dans ce cas, plus rien à voir avec le phénomène, tout repose sur *l'allongement de striction* (§ 18), et nous arrivons ainsi à cette conclusion capitale, c'est que, pour pouvoir résister *aux chocs proprement dits*,

un corps devra non seulement être tel que la *force vive de rupture* donnée par l'aire de la courbe $ABDd$ ait une valeur assez grande, mais encore que l'allongement de striction soit considérable. Si cette dernière condition n'est pas remplie ou, en d'autres termes, si le métal considéré n'est pas *ductile*,

il pourra peut être subir sans aucun danger une déformation notable quand on aura affaire à une barre un peu longue sur laquelle on agira avec précaution, mais il n'en sera pas moins *aigre et cassant* dès que le changement de forme qu'on essaie de produire sera concentré sur un

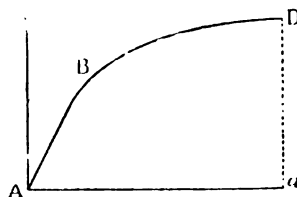


Fig. 15

(1) On trouvera un exposé de l'histoire de la question dans la préface de la *Résistance des Solides* par Navier et de Saint-Venant, page CCXIV. — Voir également la *Théorie de l'élasticité des corps solides* par Clebsch et de Saint-Venant, page 480.a et suivantes.

espace très restreint⁽¹⁾. D'une manière générale on peut dire que les corps n'ayant que peu ou point de striction sont cassants sous l'influence d'un choc local, tout en pouvant cependant être excellents pour éteindre une force vive considérable à condition que celle-ci consiste en une *action dynamique graduelle* qui fasse travailler d'une manière à peu près égale toutes les particules du corps : tel est en effet le cas qui se présente pour les ressorts en acier trempé (§ 15). Il y a là pour l'ingénieur un champ d'études et d'observations extrêmement vaste sur lequel il nous a paru utile d'appeler l'attention. En raison de la complexité du sujet, il est nécessaire, pour être complètement renseigné sur les propriétés de tel ou tel métal, d'entreprendre des expériences directes de choc et encore convient-il de remarquer que, dans ce genre d'essais, des précautions nombreuses sont nécessaires pour avoir des résultats comparables entre eux. Le rapport de la masse choquée à la masse choquante et par suite la hauteur de chute ont une importance considérable; il en est de même de la température qui doit être notée avec soin; enfin il est nécessaire que les supports qui servent de points d'appui soient aussi rigides que possible, sans quoi ils absorberont par leurs déformations une partie sensible de la force vive, et il sera impossible de savoir celle qui est éteinte en réalité par la pièce expérimentée. En principe on peut dire qu'on ne peut guère comparer entre elles des épreuves de cette nature que si elles ont été faites au moyen des mêmes appareils et dans des conditions identiques; il en est de même à plus forte raison s'il s'agit d'essais dans lesquels le choc est produit par des moyens absolument différents, comme la chute d'un poids ou la détonation de substances explosives telles que le fulmi-coton employé par M. Adamson dans les recherches exécutées par cet expérimentateur⁽²⁾.

§ 15. — Effets produits par la répétition des actions dynamiques.

Une étude qui présente une importance aussi grande que les recherches de Wœhler est celle des effets produits par des actions dynamiques

(1) C'est par exemple ce qui a lieu avec les aciers phosphoreux: leur charge de rupture à la traction est élevée et l'allongement proportionnel correspondant est grand, mais ils n'ont que peu de striction, aussi sont-ils *fragiles*.

(2) Pour comparer la résistance au choc de diverses tôles, M. Adamson les plaçait sur une enclume munie d'un évidement circulaire et faisait détoner une charge de fulmi-coton placée à une trentaine de centimètres au-dessus de ce point.

incessamment renouvelées. L'influence que cette répétition indéfinie exerce sur la résistance des corps est jusqu'ici peu connue; un petit nombre seulement d'expériences ont été faites à ce sujet, et elles ont parfois donné des résultats contraires à ceux qui semblaient probables au premier abord; les considérations suivantes montrent en effet combien cette question est complexe, indépendamment des modifications soit temporaires, soit permanentes, que les vibrations incessamment renouvelées des molécules peuvent faire subir aux propriétés physiques ou chimiques des corps.

Si l'on trace la courbe AHD qui lie les allongements aux efforts correspondants, on sait que l'aire AHDd donne la demi-force vive que le métal est susceptible d'absorber; mais ce qu'il importe essentiellement

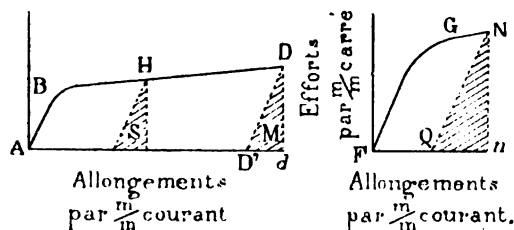


Fig. 16

de remarquer, c'est qu'il n'est capable de le faire qu'une fois pour toutes, après quoi, s'il n'est pas brisé, il ne pourra plus développer, comme nous l'avons vu, que le travail moléculaire représenté par l'aire M, et il sera à la merci du premier choc dont la force vive sera supérieure au double de la surface en question.

Il résulte évidemment de là que la question de la résistance aux actions dynamiques ne doit pas être envisagée de la même manière suivant qu'on se propose soit de pouvoir simplement supporter au besoin un choc fortuit, accidentel qui ne se présentera peut-être jamais, au moins avec son intensité maximum, soit d'être en mesure de recevoir indéfiniment une série prévue, certaine de chocs provenant du mode même de fonctionnement des organes en mouvement. Ce qu'on doit rechercher dans le premier cas, c'est une résistance vive de rupture considérable, tandis que dans le second il semble préférable d'avoir, par un moyen quelconque, une certaine résistance vive élastique, S par exemple, au moins égale à la demi-force vive à éteindre. Si cette condition n'est pas réalisée par l'aire M, il ne peut s'établir aucun état moléculaire stable et définitif capable de résister aux actions dynamiques qui s'exercent sur le corps; l'existence de ce dernier sera comptée comme celle d'un organisme

vivant, et, après avoir éteint en un certain nombre de fois une quantité plus ou moins considérable de force vive, il se brisera en morceaux. On comprend donc que, dans le cas qui nous occupe, un métal n'ayant, il est vrai, qu'un faible allongement final, mais caractérisé par une grande charge de rupture N_n puisse donner d'excellents résultats; en particulier de l'acier fortement carburé pourra être préférable à de l'acier doux pour des tiges de marteaux-pilons, des bielles de machines à vapeur à grande vitesse, etc. (1). On pourra même avoir intérêt à faire usage dans certains cas d'acier dur trempé; c'est ce qui arrive par exemple pour les ressorts qui constituent, comme on le sait, le type des corps propres à emmagasiner, à absorber un nombre indéfini de fois, sans déformation permanente, une certaine quantité de travail. Chose remarquable, les corps de ce genre présentent généralement cette particularité que leur allongement de *striction* est très faible ou parfois même presque nul: en même temps qu'ils sont excellents pour supporter des actions dynamiques graduelles indéfiniment répétées, ils sont donc absolument impropres à résister à un choc *local* (§ 14); c'est ce qu'on exprime souvent en disant qu'ils sont *fragiles* ou *cassants*. Au premier abord ces deux particularités peuvent sembler incompatibles l'une avec l'autre; mais, après les explications que nous avons données, il est facile de comprendre que la contradiction observée n'est qu'apparente.

§ 16. — Charges qu'il convient de faire supporter aux corps.

Les actions dynamiques étant en général celles dont les effets sont le plus à redouter dans une construction, il importe évidemment de conserver en entier aux matériaux leur aptitude à résister aux chocs, et par suite, d'après ce que nous avons vu, il convient de faire en sorte que leur limite d'élasticité ne soit jamais dépassée même sous l'influence des efforts accidentels qu'ils peuvent avoir à supporter. Si l'énoncé de la condition à laquelle il s'agit de satisfaire se présente sous une forme assez simple, il cesse malheureusement d'en être de même quand on arrive à l'application pratique, et cela pour deux séries principales de raisons que nous allons examiner successivement.

(1) Dans des expériences faites par M. Metcalt sur une petite machine faisant, sans charge, 1200 tours par minute, les bielles motrices ayant une teneur en carbone variant de 0,30 0/0 (acier doux) à 0,85 0/0 (acier très dur) ont d'autant mieux résisté qu'elles étaient plus carburées; des effets analogues ont été constatés sur une tige de marteau pilon à vapeur (voir l'*Engineer*. 1^{er} semestre 1878, p. 28, et la *Revue universelle des Mines de Liège*, 1^{er} semestre 1878, p. 506).

En premier lieu la valeur maximum et parfois la nature même des forces qui sont appliquées aux pièces d'un édifice ou d'un ensemble mécanique ne sont souvent connues que d'une manière imparfaite. Prenons par exemple un cas aussi simple que possible : les boulons qui relient un cylindre de machine à son couvercle ont à résister non seulement à la pression de la vapeur, de l'air ou de l'eau motrice, mais encore à la réaction *élastique* qui est due au corps formant le joint et qui peut atteindre un chiffre assez élevé s'il s'agit d'une matière extensible comme le caoutchouc; ils subissent en outre, par suite de l'inclinaison des filets de leurs écrous, des efforts de torsion. Si le portage de leur tête n'est pas suffisamment parfait, ils peuvent être également soumis, dans le voisinage de celle-ci, à un moment plus ou moins considérable de flexion; enfin il est impossible de savoir d'une manière précise comment se répartit entre eux l'effort total que leur ensemble est appelé à équilibrer. Il est facile de comprendre que, pour un organe moins simple que celui-là, la complication peut être encore plus grande surtout s'il est mobile, ce qui conduit alors à tenir compte des forces d'inertie. Dans le cas d'un ensemble complexe, les réactions exercées par les organes les uns sur les autres ainsi que par les points d'appui sont souvent fort difficiles à évaluer et elles éprouvent, sous l'influence des changements de température, des modifications quelquefois considérables; à un moment donné, des forces mal définies ou imprévues peuvent entrer en jeu, par exemple la pression du vent sur une toiture, une couche épaisse de neige, etc. Si de pareilles incertitudes existent au sujet d'efforts statiques ayant une intensité constante, il en est de même à fortiori quand cette dernière varie d'une façon incessante comme dans les expériences de Wœhler; dans le cas enfin où il y a des forces vives à éteindre, des chocs à supporter, les phénomènes deviennent encore plus complexes. Sans qu'il soit nécessaire d'insister plus longuement sur ce sujet, nous voyons que l'une des bases essentielles sur lesquelles doivent reposer nos calculs, c'est-à-dire les forces en jeu, ne nous est connue bien souvent que d'une manière imparfaite.

En second lieu, nous avons besoin de savoir quelle est la charge par millimètre carré qui commence à altérer l'élasticité de chacune des matières que nous sommes appelés à mettre en œuvre. Une pareille détermination est en général délicate et exige en tout cas d'assez longues expériences; il faut en effet opérer sur de nombreux échantillons, apprécier le point où les déformations permanentes commencent à être sensibles et où la loi de proportionnalité cesse d'être satisfaite (1). Le

(1) L'élasticimètre enregistreur dont nous avons parlé au paragraphe 8 est excellent pour cette détermination.

Pour des pièces soumises à de grandes trépidations et à des efforts incessamment variables, on descend souvent au quart ou au cinquième de cette valeur au lieu de la moitié; ce rapport varie d'ailleurs d'un organe à l'autre et ne peut avoir, *a priori*, rien de bien déterminé, comme cela résulte de tout ce qui a été dit précédemment (§ 12 et suivants).

Pour un assez grand nombre de matériaux, la limite d'élasticité n'est pas connue ou elle ne l'est que d'une manière tout à fait imparfaite, soit à cause des difficultés que présente sa détermination, soit par suite du manque d'expériences suffisamment nombreuses à ce sujet. Dans ce cas on est forcé, faute de mieux, de se baser sur la résistance à la rupture (1) qui est beaucoup plus facile à apprécier, mais dont le rapport à la quantité précédente varie beaucoup suivant la nature du corps. En général, on admet alors que, pour les constructions à terre n'ayant pas de chocs à subir et soumises à des efforts d'intensité à peu près constante, la charge peut varier, suivant les corps, entre le quart et le dixième de celle qui correspond à la rupture. Pour des édifices temporaires, on multiplie souvent les chiffres précédents par 1,5.

Dans les tableaux que nous donnerons par la suite, nous supposerons qu'il s'agit de constructions permanentes n'ayant jamais de chocs violents à subir et soumises à des forces dont la valeur n'éprouve pas des changements incessants de quelque importance.

§ 17.—Limites dans lesquelles les formules de la Résistance des matériaux sont applicables.

Dans toutes les formules de la Résistance des matériaux, on suppose les allongements, les raccourcissements et les glissements proportionnels aux efforts qui leur donnent naissance; elles ne sont donc applicables que dans le cas où cette loi de proportionnalité entre la cause et les petits effets peut être admise, c'est-à-dire quand l'élasticité n'est altérée *en aucun point*. A partir de ce moment, les formules en question n'ont pas de rapport avec la réalité des choses.

Il importe de remarquer que, dans plus d'un cas, la limite en question est franchie avant qu'on voie se produire des déformations permanentes; c'est ce qui arrive, en effet, lorsque, la fatigue ne se répartissant pas

(1) Un certain nombre d'ingénieurs ont pensé qu'il était toujours préférable de ne considérer que la force qui produit la rupture; cette manière d'envisager les choses a l'inconvénient de ne pas faire connaître les charges qui déterminent des déformations permanentes souvent inadmissibles ou bien des modifications de texture, et qui peuvent par suite amener ultérieurement la destruction du corps. Les phénomènes de la rupture sont loin d'ailleurs, comme nous le verrons plus tard, de se présenter sous une forme simple, et les lois auxquelles ils sont soumis sont fort complexes et mal connues.

d'une manière inégale, les parties les moins tendues ou les moins comprimées forcent, dans les régions déjà altérées, les molécules à retourner, malgré elles, vers leurs positions primitives. La forme première se conserve, sans changement appréciable, sous l'action d'efforts internes qui persistent même après la suppression des forces extérieures; nous en verrons les exemples quand nous parlerons de la résistance à la rupture par flexion et par torsion et nous indiquerons quelques formules permettant de prévoir d'une manière plus ou moins approchée ces phénomènes si complexes.

Comme nous venons de le dire, les formules de la Résistance des matériaux supposent toujours que l'augmentation ou la diminution relative de distance de deux molécules voisines est extrêmement faible: il n'y a donc, pour ce qui concerne le sujet qui nous occupe, aucune conclusion à tirer d'essais effectués sur des substances extrêmement déformables comme le caoutchouc, dans lesquelles la variation des distances moléculaires peut atteindre un chiffre très élevé: il en est évidemment de même pour les corps qui se présentent à un état plus ou moins mou et gélatineux et qui sont, en réalité, des matières mixtes provenant de liquides plutôt coagulés que solidifiés.

Dans le cas particulier où l'une des trois dimensions d'un solide, ou bien deux d'entre elles sont très petites par rapport à la troisième, il peut parfaitement arriver que la déformation totale éprouvée par le corps dans un certain sens ait une valeur considérable sans que cependant la distance de deux molécules voisines ait éprouvé autre chose qu'un changement relatif très faible. Tel est par exemple le cas d'une tige élastique d'un très faible diamètre, d'une plaque mince, d'un ressort de montre, etc.: dans ces diverses circonstances deux sections infiniment voisines peuvent ne varier qu'infiniment peu de position l'une par rapport à l'autre, tout en donnant lieu à une flexion totale très considérable. Les formules de la Résistance des matériaux sont encore applicables dans ces divers cas; mais il ne faut pas perdre de vue que cela tient uniquement à cette circonstance toute spéciale qu'une des dimensions au moins du corps considéré est infiniment grande ou, pour parler plus exactement, extrêmement grande par rapport aux autres (1).

(1) Dans le cas particulier d'une lame mince (lame de ressort) soumise à un moment fléchissant M on a (§ 43)

$$\rho = \frac{E.I}{M} = \frac{E.a.b^3}{12M}$$

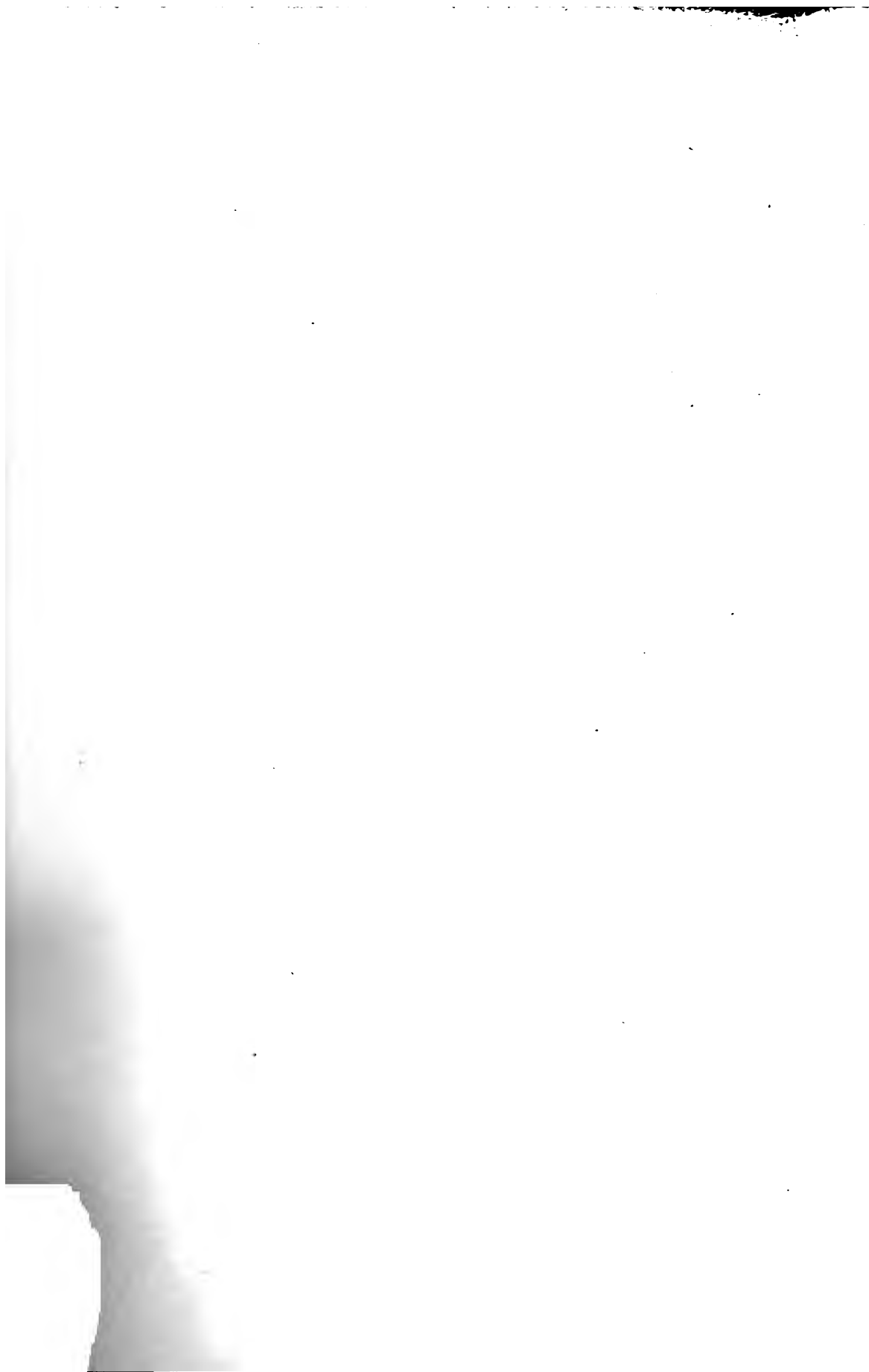
Si donc l'épaisseur b est très faible, ρ l'est également et les deux extrémités de la lame éprouvent l'une par rapport à l'autre des déplacements considérables, bien que l'élasticité ne soit altérée en aucun point du corps. Dans ces cas exceptionnels les formules de la Résistance des matériaux restent toujours applicables puisque les déplacements relatifs de deux molécules sont toujours faibles; il se produit le même phénomène que dans le cas d'une poutre ayant des dimensions transversales ordinaires et une longueur infiniment grande.

RÉSISTANCE DES PIÈCES DROITES

SOUMISES A DES EFFORTS STATIQUES

CHAPITRE II

TRACTION



TRACTION

§ 18. — Phénomènes généraux de la traction.

Nous allons maintenant entreprendre l'étude des divers genres de déformation qu'on peut faire subir aux corps solides, en supposant qu'il s'agisse uniquement d'efforts statiques. Après avoir traité à part le cas des pièces droites et celui des solides courbes, nous aborderons les problèmes relatifs aux actions dynamiques; mais, eu égard à la complexité de la question, nous nous bornerons à donner à leur sujet quelques indications générales. Nous supposerons les corps *homogènes*, c'est-à-dire constitués de la même façon en chacun de leurs points; il pourra arriver que la matière dont ils sont formés offre des résistances variables suivant la direction des efforts; tel est, par exemple, le cas des cristaux; mais le plus souvent nous admettrons qu'ils sont non seulement *homogènes*, mais encore d'*élasticité constante*, ce qui veut dire que leur contexture est la même *en tous sens*, et qu'il y a, par suite, identité de propriétés élastiques quels que soient le point et l'orientation que l'on considère. Des corps de ce genre sont dits *isotropes*; dans la nature on n'en rencontre qu'un très petit nombre qui satisfassent réellement à cette condition; tel paraît être par exemple le verre. Les métaux fondus et surtout ceux qui sont laminés ne sont pas, à coup sûr, rigoureusement isotropes; on sait, en effet, qu'ils ne présentent pas la même résistance dans tous les sens. L'écart est surtout sensible pour les bois qui ne sauraient, en aucune façon, être rangés dans la catégorie en question; toutefois les formules déduites de la supposition de l'isotropie paraissent s'appliquer d'une manière suffisamment exacte aux divers matériaux employés dans les constructions (sauf les bois toutefois), et nous admettrons par la suite que cette hypothèse d'égalité de contexture en tous sens peut être adoptée dans nos recherches.

Nous donnerons le nom général de *fibres* à un ensemble de molécules situées sur une ligne fictive parallèle à l'axe de la pièce, sans que cette

dénomination comporte (sauf cependant pour les bois) l'idée d'une liaison spéciale entre elles.

Occupons-nous d'abord de la traction. Soit ABCD une pièce droite homogène de section constante solidement fixée à l'une de ses extrémités et sur laquelle on exerce un effort de traction T, dirigé dans le sens de sa longueur et passant par son centre de gravité; si cette condition n'était pas remplie, il y aurait, comme nous le verrons plus tard, flexion en même temps que traction (1).

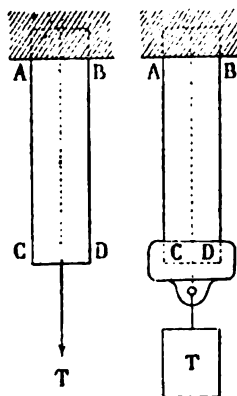


Fig. 17

Nous supposons que l'effort T d'abord nul va en croissant lentement et progressivement, et que chaque nouvelle surcharge est appliquée avec assez de douceur pour que l'équilibre s'établisse lentement et sans mouvements vibratoires. Dans ces conditions l'augmentation graduelle de la charge donne lieu à trois

ordres successifs de phénomènes.

Première période. — Il ne se produit pas de déformations permanentes ou du moins, comme nous l'avons dit, elles sont tellement faibles que le constructeur n'a pas à s'en préoccuper pour les matériaux qu'il met en œuvre. Si L est la longueur de la tige, Ω sa section (supposée constante) et l son allongement total, l'expérience montre alors :

1° Que l'allongement par unité de longueur $\frac{l}{L}$ est constant d'un bout à l'autre de la pièce;

2° Que cet allongement par millimètre courant $\frac{l}{L}$ est proportionnel à la

(1) Pour l'établissement théorique des formules de la traction, il est nécessaire, dans la théorie mathématique de l'élasticité, de supposer non seulement que la résultante T des efforts de traction appliqués à la base CD passe par le centre de gravité de CD, mais encore que les efforts en question sont répartis uniformément dans toute l'étendue de cette base. Comme le montre l'expérience, ces deux modes d'application des forces de traction donnent pratiquement les mêmes résultats sauf dans des régions extrêmement limitées qui sont très proches des points où les efforts sont réellement appliqués; si donc les choses sont disposées de façon que les régions en question ne soient pas exposées à une désorganisation locale (et c'est ce que nous supposons toujours § 3), il n'y a, pour nous, aucune distinction à faire entre les deux modes d'application ci-dessus, à condition toutefois que la longueur de la tige considérée soit suffisamment grande par rapport à ses dimensions transversales.

Des remarques analogues sont applicables à ce qui concerne la compression, la flexion et la torsion. (Voir la *Théorie de l'élasticité des corps solides* par Clebsch et de Saint-Venant, pages 142, 174, 821).

traction $\frac{T}{\Omega}$ qui s'exerce par unité de section, de sorte que dans ces conditions on a

$$\frac{\frac{T}{\Omega}}{l} = \text{constante} = E$$

E est ce qu'on appelle le *coefficient d'élasticité de traction* ou simplement le *coefficient d'élasticité*.

Deuxième période. — Les déformations permanentes commencent à devenir facilement appréciables et l'on dit que la limite d'élasticité est dépassée; les allongements croissent alors plus vite que les charges et ils n'acquièrent leurs valeurs définitives qu'au bout d'un temps plus ou moins long, un petit nombre de minutes seulement avec les matériaux habituellement employés dans les constructions, mais parfois plusieurs heures et quelquefois même davantage suivant la nature du corps et la grandeur de la traction; mais, tant que celle-ci n'est pas trop élevée, l'équilibre finit par s'établir.

Troisième période. — A partir d'un moment extrêmement variable suivant la nature des matériaux, la tige expérimentée éprouve dans une région peu étendue un allongement notablement plus grand que dans les autres, accompagné d'une diminution sensible de section connue sous le nom de *striction*; la matière s'étire et se désagrège sur une certaine longueur, en donnant lieu à une sorte d'écoulement d'un corps solide. On constate, en outre, qu'une fois cette désagrégation commencée, elle continue à se produire (quoique avec une lenteur parfois très grande) sans addition de nouvelles charges et même sous l'action d'un effort moindre que celui qui est nécessaire pour déterminer le commencement du phénomène; il en résulte qu'au bout d'un temps plus ou moins long, le barreau se brise sous l'action d'un effort inférieur, et quelquefois de beaucoup, à celui qu'il paraissait capable de supporter aux premiers instants (1). C'est surtout avec les métaux mous et ductiles tels que l'étain, le plomb, le zinc, le cuivre, le fer extrêmement doux que cet effet est sensible et par suite que les essais de traction doivent se faire avec lenteur; il l'est beaucoup moins dans les matières qui ne

(1) Pour observer facilement ce fait, il faut produire la traction non pas au moyen de poids donnant un effort constant, mais à l'aide d'un dispositif tel que le moindre allongement du barreau donne lieu à une réduction considérable de charge; tel est, par exemple, celui de l'appareil, si employé maintenant, de M. Thomasset où l'effort de traction est produit par une colonne de mercure.

jouissent pas de la faculté de se laisser aussi facilement déformer à froid comme le fer ordinaire, l'acier (quand il n'est pas extrêmement doux), le bronze; enfin il est peu ou point accusé dans certaines espèces de fer, l'acier dur ou trempé, les bois; on constate effectivement que ces derniers corps se rompent sans présenter de retrécissement appréciable, et qu'ils peuvent supporter indéfiniment (en l'absence de toute vibration) une charge en général peu inférieure à l'effort maximum nécessaire pour amener la rupture; celle-ci se produit alors d'une manière brusque et subite. Voici, à titre de renseignement, quelques-uns des résultats obtenus, à cet égard, par Adamson (1):

	Charge maximum par m/m carré supportée par le barreau	Charge par m/m carré au moment de la rupture
Fer très doux.	30 ⁴ ,0	20 ⁴ ,0
Fer pour rivets.	39 ,5	35 ,0
Acier très doux.	41 ,5	35 ,5
Acier doux.	58 ,5	42 ,5
Acier extra-dur.	84 ,0	84 ,0

Dans le tableau précédent, la charge finale par millimètre carré a été calculée en fonction de la *section primitive* du barreau; on aura soin de ne pas perdre de vue que, en réalité, au moment de la rupture, les dimensions transversales de la tige expérimentée ont diminué par suite du phénomène de la striction. Si l'on calcule à chaque instant l'effort par millimètre carré qui correspond à la *section la plus contractée*, on constate qu'il va *en augmentant* et parfois d'une manière très notable; il s'opère dans toute cette région un phénomène analogue à celui de l'écrouissage, en vertu duquel le métal devient plus résistant; mais, comme il se trouve que la section diminue plus vite que la charge par millimètre carré n'augmente, leur produit, qui est l'effort total observé, va en décroissant (*).

Un fait important à noter, c'est que, pendant l'espèce d'écoulement de la matière qui donne lieu à la striction, les sections transversales primitivement planes cessent de l'être. Les diverses fibres longitudinales de la tige expérimentée supportent alors des charges qui varient de l'une à l'autre et leur rupture ne se produit pas du même coup (2); la charge

(1) The Engineer, deuxième semestre 1878, page 201. Engineering, deuxième semestre 1878, pages 383 et 464. — On pourra également consulter à ce sujet la « *Déformation des corps solides* » par le capitaine Dugué, 1^{er} volume, page 24.

(2) Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, premier semestre 1885, pages 586 et suivantes.

(3) Voir les *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, premier semestre 1880, page 682 (mémoire de M. Barba).

correspondante par millimètre carré mesurée sur la section totale de rupture ne constitue donc en définitive qu'une moyenne d'une nature assez complexe.

Les divers phénomènes relatifs à la traction ont donné lieu à des recherches très étendues de la part du professeur Thurston; ils avaient été signalés depuis longtemps pour le fil de fer *recuit* (fabriqué, comme on le sait, avec du fer très doux). Sous l'action d'un effort trois ou quatre fois moindre que celui qui amène sa rupture instantanée, il éprouve un allongement qui, au moins pour certains échantillons, augmente pendant plusieurs années sans que l'équilibre s'établisse; une charge égale aux trois quarts de cet effort peut, au bout d'un grand nombre de mois, provoquer la rupture par suite d'une désagrégation lente (1); mais des phénomènes aussi accentués ne doivent être considérés que comme des exceptions qu'on ne rencontre point dans les métaux habituellement employés dans les constructions et pris sous leur forme ordinaire, aux températures habituelles. Ils ne doivent pas cependant être perdus de vue toutes les fois qu'on opère sur des métaux très ductiles; avec ces derniers l'effort nécessaire pour déterminer la rupture varie sensiblement avec la rapidité plus ou moins grande avec laquelle est opéré l'essai de traction. C'est en particulier ce qui résulte du tableau suivant (2).

	CHARGE PAR M/M CARRÉ QUI PRODUIT LA RUPTURE DANS UN ESSAI DONT LA DURÉE EST DE					
	30 sec.	1 min.	5 min.	15 min.	60 min.	indéfinie
Cuivre à la température de 15° . . .	27 ^k ,8	27 ^k ,1	26 ^k ,3	25 ^k ,8	25 ^k ,1	23 ^k ,8
— — 200° . . .	20,7	20,2	19,7	19,1	17,7	15,0
— — 300° . . .	17,7	»	»	15,0	13,0	9,5
— — 400° . . .	14,0	13,0	11,6	9,7	7,5	3,0

§. 19. — Formules relatives à la traction.

Appelons T la force de traction appliquée à une tige de section constante Ω et de longueur L, et l l'allongement total qui en résulte. Soit

(1) C'est à cause de ces propriétés que le fil de fer recuit est d'un mauvais emploi dans les constructions.

(2) *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, premier semestre 1890, page 708 (Note de M. Le Chatelier, Ingénieur des Constructions navales).

$R = \frac{T}{\Omega}$ l'effort exercé par millimètre carré et $\lambda = \frac{l}{L}$ l'allongement par millimètre courant. D'après ce que nous avons vu, on a, tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée,

$$\frac{\frac{T}{\Omega}}{\frac{l}{L}} = E$$

D'où

$$R = \frac{T}{\Omega}, \quad \lambda = \frac{R}{E} = \frac{T}{E \times \Omega} \text{ et } l = L \times \lambda = L \cdot \frac{R}{E} = L \cdot \frac{T}{E \times \Omega}$$

formules qui permettent de résoudre les divers problèmes qu'on peut se poser au sujet de la traction. Si par exemple on veut savoir de combien s'allonge une tige de fer ayant 27 mètres de long et 4 centimètres de diamètre sous l'action d'une force de 8250 kg., on a

$$T = 8250 \quad \Omega = 1257 \quad L = 27000$$

D'autre part nous verrons plus loin que pour le fer $E = 19000$; par conséquent

$$l = L \cdot \frac{T}{E \times \Omega} = 27000 \frac{8250}{19000 \times 1257} = 9^{\text{mm}},3$$

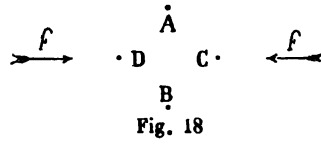
§ 20. — Tiges de section variable.

Si la section est variable au lieu d'avoir partout la même valeur, on peut en général considérer la barre comme formée par une succession de tiges ayant une section soit rigoureusement, soit sensiblement constante. Si donc on admet que chacune d'elles se comporte exactement comme si elle était seule, (ce qui a lieu au moins d'une manière approximative s'il n'existe pas de nombreux et brusques changements de section), les formules précédentes sont applicables à condition toutefois que la direction prolongée de la force passe par les centres de gravité de toutes les sections transversales, sans quoi il y aurait flexion en certains points.

§ 21. — Contraction transversale et diminution de densité résultant du fait de la traction.

Tout allongement opéré sur un solide dont les faces latérales sont libres donne forcément lieu à une contraction transversale. Considérons en effet, comme nous l'avons déjà fait, un groupe de quatre molécules:

si deux d'entre elles A et B sont contraintes de s'écarter l'une de l'autre, elle s'éloignent en même temps de C et de D, et par suite l'équilibre ne peut se rétablir que si ces dernières, supposées libres, se déplacent dans le sens des flèches f . Il y a un intérêt considérable à savoir quel est le rapport η de la contraction transversale ainsi produite à l'allongement λ



de la tige considérée (1). Dans la théorie mathématique de l'élasticité, on arrive assez facilement à prouver que $\eta = \frac{1}{4}$ pour les solides isotropes (2) : il suffit pour cela d'admettre que l'action qui s'exerce entre deux molécules est dirigée suivant la droite qui joint leurs centres et qu'elle est uniquement fonction de leur distance (§ 4). L'exactitude de cette hypothèse est, à coup sûr, très vraisemblable, mais elle est loin cependant d'être admise par tous les géomètres (3); les matériaux auxquels nous avons affaire ne satisfont d'ailleurs que d'une manière parfois très imparfaite aux conditions d'isotropie, aussi il importe d'avoir recours à l'expérience pour savoir quelle valeur, au moins approximative, il convient d'adopter pour le coefficient numérique η . En se basant sur des expériences de Coulomb et de Duleau, Clapeyron avait reconnu depuis longtemps que, pour le fer, on a à peu près $\eta = \frac{1}{4}$ (4). Des expériences optiques extrêmement précises faites par M. Cornu sur des prismes en glace de Saint-Gobain (substance bien homogène et pouvant être regardée comme isotrope) ont conduit à cette même valeur de 0,25 (5); c'est également ce qui a été constaté, pour le même corps, dans les intéressantes expériences d'acoustique entreprises par M. Mercadier qui, en revanche, a trouvé pour des plaques faites avec des aciers de diverses natures

(1) Si a et a' sont l'une des dimensions transversales de la barre avant et après traction, la contraction en question est $\frac{a - a'}{a} = \eta \times \lambda$, λ étant l'allongement par millimètre courant de la tige dans le sens de sa longueur.

(2) Cette démonstration n'est valable, bien entendu, que dans les limites où l'élasticité n'est pas altérée; elle suppose que les faces latérales du solide considéré sont entièrement libres, c'est-à-dire qu'elles ne sont soumises à aucune force.

(3) On trouvera dans la *Théorie de l'élasticité* de Clebsch, traduite et annotée par de Saint-Venant des explications détaillées sur ce sujet délicat, pages XV, 39, 63 et suivantes. Voir également les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, deuxième semestre 1861, page 1107.

(4) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, premier semestre 1858, page 241. L'expression de η , en fonction des coefficients λ et μ de Lamé, est donnée par la relation

$$\eta = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{2 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)}$$

de sorte que la valeur $\eta = \frac{1}{4}$ correspond à $\lambda = \mu$.

(5) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, deuxième semestre 1869, page 333.

$\eta = 0,323$ ⁽¹⁾; enfin, dans ces derniers temps, la question a été étudiée d'une manière plus complète par M. Amagat ⁽²⁾ qui, en se maintenant toujours au-dessous du point où commencent les déformations permanentes, a obtenu les résultats suivants :

	VALEUR DU COEFFICIENT η
Verre	0,2451
Cristal	0,2499
Acier	0,2686
Cuivre	0,3270
Laiton	0,3275
Métal Delta	0,3399
Plomb	0,4282

De l'ensemble de toutes ces expériences, on peut conclure que, pour les matériaux employés dans les constructions, la valeur $\eta = 0,25$ ou un nombre un peu supérieur (0,30 par exemple) peut être pratiquement adoptée. Dans tous les calculs théoriques qui suivront, nous prendrons $\eta = \frac{1}{4}$.

Il résulte de ce qui précède que un volume 1 du corps considéré devient, sous l'influence de l'allongement λ par millimètre courant,

$$(1 + \lambda) (1 - \eta \lambda)^2$$

ce qui, pour des valeurs très faibles de λ , peut s'écrire

$$1 + (1 - 2\eta)\lambda$$

De là résulte dans ces conditions, pour $\eta = \frac{1}{4}$, une *augmentation* % de volume

$$\left(1 - 2 \times \frac{1}{4}\right) \lambda = \frac{1}{2} \lambda$$

et par suite la *densité diminue* dans le rapport de 1 à $1 + \frac{\lambda}{2}$. Pour que celle-ci fut constante (en supposant toujours λ extrêmement petit), il faudrait avoir $\eta = \frac{1}{2}$. Tel est le cas de liquides supposés incompressibles; tel est aussi sensiblement celui du caoutchouc ⁽³⁾. C'est là une valeur

(1) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, deuxième semestre 1887, page 105 et deuxième semestre 1888, pages 27 et 82.

(2) Voir le *Journal de Physique théorique et appliquée*, tome VIII, page 363.

(3) Comme de Saint-Venant l'a fait remarquer et comme nous l'avons déjà dit, le caoutchouc, les gelées, les pâtes à base de gomme, etc., sont des matières provenant de liquides plutôt coagulés que solidifiés; ils résistent à peine aux déformations, et énormément aux variations de volume. En raison des grands changements qu'éprouvent leurs distances moléculaires, les formules de la théorie mathématique de l'élasticité ne leur sont pas applicables.

limite qui n'est atteinte par aucun des corps solides proprement dits : l'hypothèse de la densité se maintenant constante pendant les essais de traction n'est donc pas conforme à la réalité des choses (1).

Un point important à noter à propos du sujet qui nous occupe, c'est que, bien que la densité varie, l'augmentation de volume de la tige expérimentée

$$\text{ou} \quad (1 + \lambda) (1 - \eta \lambda)^2 - 1$$

$$(1 - 2 \eta) \lambda - (2 - \eta) \eta \lambda^2 + \eta^2 \lambda^3$$

est très faible, en raison de la petitesse de λ , tant qu'on ne dépasse pas la limite d'élasticité comme nous l'avons supposé dans toute l'étude qui précède; pour la constater expérimentalement il faut faire usage de procédés de mesure extrêmement précis.

§ 22. — **Striction. Phénomènes auxquels elle donne lieu.**

Dans le paragraphe qui précède, nous n'avons considéré que des efforts de traction assez faibles pour que la limite d'élasticité ne soit pas dépassée; supposons maintenant que nous allions plus loin, jusqu'à provoquer la rupture. La diminution de section dont il a été question tout à l'heure s'accroît alors de plus en plus sur toute la longueur de la tige expérimentée; puis, à partir d'une certaine charge qui dépend de la nature de la matière et est en général assez voisine de l'effort de rupture, il se produit un phénomène d'un nouveau genre : dans une région MN variable de position d'un échantillon à l'autre (la section étant supposée constante sur toute la longueur), il se forme un rétrécissement très sensible nommé *striction* qui se prononce de plus en plus à mesure que la traction augmente; cette partie s'étire, se désagrège; ses molécules se déplacent les unes par rapport aux autres en donnant lieu à une sorte d'écoulement de la matière. Cet effet est très marqué pour certains métaux, dits *ductiles*, tels que le plomb, l'étain et le cuivre; il l'est beaucoup moins pour le fer et l'acier doux, enfin il est peu ou point apparent dans les bois, la fonte et l'acier fortement carburé ou trempé.



Fig. 19

Pour bien observer dans toutes leurs particularités les faits que nous venons d'indiquer, il convient d'opérer sur une barre parfaitement

(1) On pourra consulter à ce sujet une note insérée dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, premier semestre 1866, page 418.

tant qui nous semble bien résumer l'ensemble de toutes les expériences sur lesquelles il existe à ce sujet des données certaines.

Comme nous l'avons déjà dit (§ 21), l'augmentation de volume qui résulte, en un point donné, du fait simultané de l'allongement λ et de la contraction transversale $\eta\lambda$ est égal à :

$$\Delta V = (1 + \lambda) (1 - \eta\lambda)^2 - 1$$

ou bien

$$\Delta V = (1 - 2\eta)\lambda - (2 - \eta)\eta\lambda^2 + \eta^2\lambda^3$$

Si l'on calcule quelles valeurs successives acquiert cette fonction quand l'allongement % λ en un point donné va en croissant, on obtient les résultats suivants, en prenant $\eta = 0,30$ comme cela paraît avoir lieu pour le fer et l'acier :

ALLONGEMENT % λ	AUGMENTATION % DE VOLUME $\Delta V = (1 + \lambda) (1 - \eta\lambda)^2 - 1$
0	0
0,1	0,035
0,2	0,060
0,4	0,084
0,6	0,076
0,8	0,040
0,94	0,0001
1,0	— 0,020
1,1	— 0,057

Comme on le voit, ΔV est forcément très petit quand λ l'est lui-même; d'autre part il se trouve que cette fonction ΔV s'annule pour une valeur de λ à peu près égale aux allongements maximum des régions les plus contractées des métaux un peu ductiles, c'est-à-dire précisément au moment où il devient facile de constater expérimentalement les effets produits. Par suite de cette coïncidence, il doit donc arriver forcément que la variation de volume d'un barreau ou d'une portion de barreau étiré reste constamment très faible; en d'autres termes la densité varie peu elle aussi. C'est bien effectivement ce qu'ont trouvé tous les expérimentateurs et ce qu'explique la loi empirique et approximative $\eta = \text{constante} = \text{environ } 0,30$ qui semble présider aux phénomènes en question, du moins pour les métaux généralement employés dans les constructions.

Un autre fait important à noter, c'est que, en raison de la constance de η , la mesure de la contraction maximum qui se produit dans une tige un peu longue soumise à essai de traction donne, par suite de la relation de proportionnalité, un renseignement précieux sur la valeur

même de l'allongement dû au fait proprement dit de la striction; c'est donc avec raison que cette contraction est notée avec soin dans la plupart des expériences de précision effectuées sur des métaux ductiles (1).

§ 23. — Allongement % de barreaux ayant des sections transversales identiques, mais de longueurs différentes.

Supposons maintenant que nous ayons affaire à des tiges de même matière et de sections transversales identiques, mais de longueurs différentes, en considérant d'abord le cas où chacune d'elles est assez longue pour que les effets de la striction puissent s'y produire librement (§ 22). En se reportant au tracé de la figure 20, on reconnaît de suite que l'allongement correspondant à une longueur infiniment petite dL est

$$\lambda \times dL$$

ce qui donne pour une longueur totale L

$$\int_0^L \lambda \times dL = \text{aire } A A' C' B' B$$

D'où, pour allongement proportionnel ou allongement % mesuré de A en B,

$$\frac{\text{aire } A A' C' B' B}{L}$$

C'est la hauteur λ' d'un rectangle $AA''B''B$ équivalent à la surface ci-dessus, hauteur qui, toutes choses égales d'ailleurs, va évidemment en diminuant à mesure que L augmente, et qui tend vers la limite λ'' .

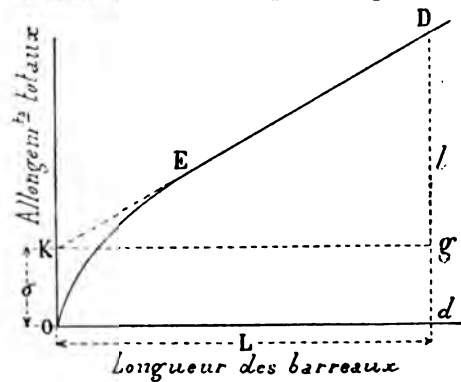


Fig. 21

Les choses peuvent encore se représenter graphiquement d'une autre façon: portons en abscisses les longueurs L de divers barreaux considérés et en ordonnées les allongements totaux correspondants l ; il est clair, d'après ce qui précède, que nous obtiendrons une ligne telle que OED dont la portion curviligne correspond à la région où s'est

(1) Dans beaucoup de comptes-rendus d'expériences, ce qu'on donne c'est la contraction % de la surface rompue, $1 - (1 - \eta \lambda)^2$ et non pas la contraction linéaire $1 - (1 - \eta \lambda) = \eta \lambda$. L'une d'elles se déduit facilement de l'autre.

produite la striction; ce n'est d'ailleurs autre chose évidemment que la courbe intégrale de celle qui est tracée sur la figure 20. Pour en obtenir directement et d'une manière assez simple la partie rectiligne ED, il suffit

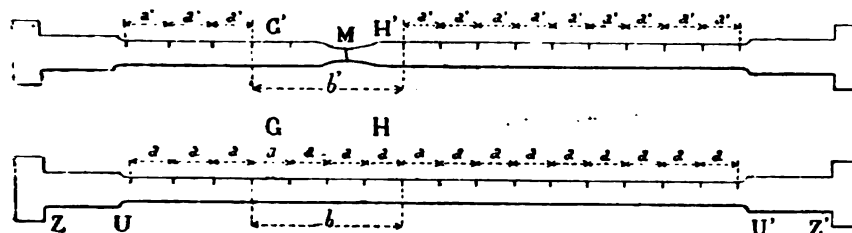


Fig. 22

de diviser la tige expérimentée en un certain nombre de parties égales au moyen de repères distants de 1 à 2 fois environ le diamètre et de porter en abscisses les longueurs primitives

$$b, \quad b + a, \quad b + 2a, \quad \dots$$

en prenant pour ordonnées les allongements correspondants

$$v - b, \quad v + a - (b + a), \quad v + 2a - (b + 2a), \quad \dots$$

Quelle que soit la manière d'opérer, il est clair que l'allongement total l d'un barreau de longueur L (fig. 21) se compose de deux parties, l'une constante dg , l'autre gd proportionnelle à L , et l'allongement $\% \frac{l}{L}$

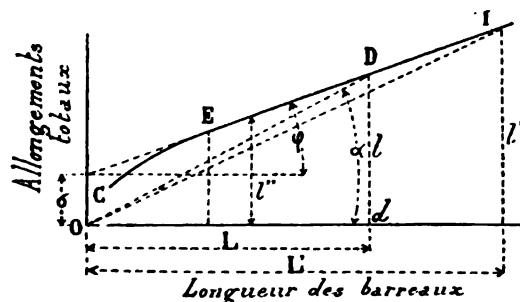


Fig. 23

donne simplement la tangente de l'angle α , c'est-à-dire une quantité qui est essentiellement variable avec la valeur arbitraire de L et qui ne permet ni de caractériser le corps expérimenté, ni de calculer quel sera l'allongement l' correspondant à une longueur différente L' . Pour bien définir ce qui concerne l'allongement dû à la traction, il faut donner les deux éléments suivants:

1° L'allongement de striction σ (qui est fonction, comme nous le verrons, de la forme et de la grandeur de la section transversale du barreau expérimenté);

2° L'allongement proportionnel proprement dit, mesuré par la tangente de l'angle φ .

La connaissance de ces deux éléments est évidemment nécessaire s'il s'agit de déterminer l'allongement total éprouvé par une barre de longueur modérée; mais, dans les cas qui se présentent habituellement dans les calculs de résistance et avec les matériaux en usage, les tiges considérées ont généralement assez de longueur pour que le terme σ puisse être négligé dans la valeur de l sans qu'il en résulte d'erreur plus grande que celle qui provient soit du défaut de précision absolue des observations; soit des différences qu'on rencontre d'un échantillon à l'autre et, comme la valeur de σ diminue en même temps que la section transversale, il suffit évidemment que les barreaux d'épreuve soient très longs par rapport à leur diamètre pour que l'allongement proportionnel $\frac{l'}{L}$ obtenu dans les essais de traction puisse être sensiblement confondu avec la valeur de la tangente de l'angle φ .

Si l'on opère sur des barreaux de fer ordinaire ou d'acier doux de petit échantillon, et si l'on prend pour abscisses les rapports $\frac{L^2}{S}$ et pour

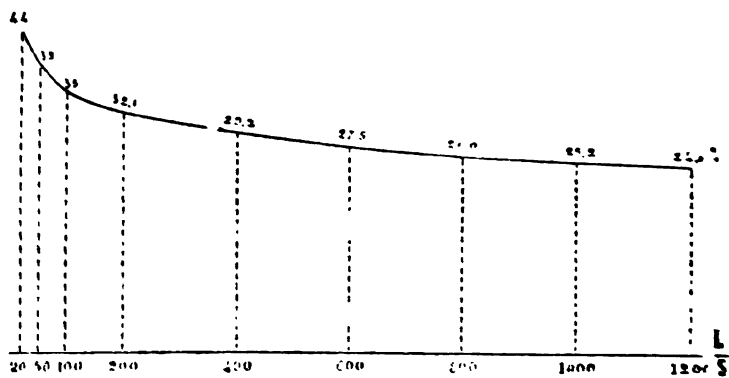


Fig. 24

ordonnées, les allongements $\% \frac{l}{L}$ (S étant la surface de la section transversale), on obtient des courbes analogues à la précédente que nous donnons à titre de spécimen. Pour presque tous les composés ferreux, l'allongement $\%$ est à peu près indépendant de la longueur quand le rapport $\frac{L^2}{S}$ atteint ou dépasse le nombre 1000: avec des éprouvettes

1 centimètre de diamètre par exemple, une longueur de 30 centimètres sera suffisante; pour des corps où la striction est plus prononcée, il faudrait probablement aller un peu plus loin. M. Joëssel, Ingénieur de la Marine, avait déjà constaté depuis très longtemps sur des tiges cylindriques le fait de la constance du rapport $\frac{l}{L}$ à mesure que le rapport $\frac{L}{D}$ augmente (D désignant le diamètre). Il importe d'ailleurs de remarquer que, tant que la striction n'a pas commencé à se produire, c'est-à-dire bien au-delà de la limite d'élasticité, $\frac{l}{L}$ est indépendant de la longueur L.

Une conséquence importante des considérations précédentes est la suivante: si l'on trace, comme on le fait souvent, une courbe ayant pour abscisses les *allongements* % (et non pas les allongements totaux) d'un barreau, et pour ordonnées les efforts de traction, la longueur *cd* de la partie qui correspond à la striction diminue de plus en plus, toutes choses égales d'ailleurs, à mesure que la longueur L de la tige augmente: elle peut même finir par se réduire à presque rien: des courbes de ce genre n'ont de sens net que si elles se rapportent à des barreaux ayant une longueur et un diamètre (ou une section transversale) bien connus et bien définis. Si, au contraire, on prend pour abscisses les allongements totaux, la portion CD de la courbe reste invariable, mais c'est alors la première ABC qui s'allonge de plus en plus à mesure qu'on a affaire à des éprouvettes de longueur croissante.

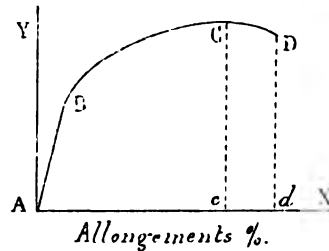


Fig. 25

Dans ce qui précède, nous avons supposé que toutes les barres expérimentées sont assez longues, comparativement à leur diamètre, pour que les effets de la striction puissent s'y faire sentir librement. Si cette condition n'est pas remplie, les phénomènes deviennent notablement plus complexes: d'une éprouvette à l'autre, l'espèce d'écoulement qui se produit dans le corps s'opère dans des conditions dissemblables et on n'observe plus qu'un mélange absolument confus de striction et d'allongement proportionnel, sur lequel il n'y a aucun fonds à faire. Il nous paraît inutile d'insister sur ce sujet; nous ferons seulement remarquer, à titre de fait expérimental, que, plus l'écoulement est gêné, plus la charge de rupture par millimètre carré de la *section minimum* *bd* est forte; avec une éprouvette de la forme ci-contre cette particularité serait extrêmement prononcée, en même temps que la contraction transversale serait très faible.

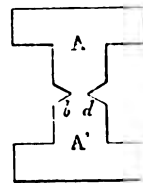


Fig. 26

Comme résumé de la longue étude qui précède, nous formulerons les conclusions suivantes :

1° Pour le métallurgiste qui, dans ses laboratoires, dispose d'instruments de haute précision et a un intérêt capital à être fixé d'une manière complète sur les diverses particularités des métaux qu'il produit, il y a lieu, dans les essais de traction, de déterminer non seulement l'allongement $\%$ relatif aux régions qui n'éprouvent pas de striction, mais encore l'allongement de striction ϵ . On pourra y arriver en opérant par exemple de la façon indiquée par la figure 22 et on sera ainsi en mesure de tracer la droite ED des figures 21 et 23. La réduction de diamètre éprouvée par la partie la plus étranglée devra également être notée avec soin ainsi que la limite d'élasticité. Il conviendra d'ailleurs de compléter ces indications relatives à la nature du métal, en lui faisant subir de nombreux essais de travail à chaud et à froid, de choc, etc.

2° Pour le constructeur qui n'a pas en général à sa disposition des appareils aussi précis et qui n'a pas le temps, le plus souvent, de se livrer à des recherches aussi délicates, il pourra suffire de mesurer, sur des barreaux de grande longueur, l'allongement $\%$ qui a alors un sens bien défini et dans lequel le phénomène de striction n'entre que pour une part infime. Pour être renseigné sur ce qui concerne ce dernier point, il sera bon de mesurer, aussi exactement que possible, avec les moyens dont on dispose, la réduction maximum de diamètre ou de largeur éprouvée par la barre expérimentée, et il faudra surtout faire subir au métal, à chaud et à froid, des essais (tels que ceux de ployage) qui donneront lieu à de grandes déformations locales et qui seront d'ailleurs assez variés pour qu'on puisse être fixé sur les diverses particularités intéressant la mise en œuvre. Telle est du reste à peu près la marche suivie partout maintenant ; nous croyons seulement qu'il conviendrait de prendre pour le rapport de la longueur des barreaux d'épreuve à leur section transversale un chiffre plus élevé que celui qui est généralement adopté actuellement.

§ 24. — Allongement comparatif de barreaux ayant des sections transversales différentes.

Les phénomènes de striction étant dus à une sorte d'écoulement de matière, il est bien clair que, toutes choses égales d'ailleurs, ils valent forcément non seulement avec l'étendue de la section transversale

des barreaux mais enco­rè avec la forme de celle-ci. Les lois de ces changements sont mal connues et elles sont probablement fort complexes ; ce qui ressort seulement des faits connus, c'est que, pour des sections ayant des *formes géométriques semblables* et ne différant pas trop de grandeur entre elles, les allongements σ dus à la striction sont proportionnels aux racines carrées des sections, c'est-à-dire aux dimensions homologues, aux diamètres par exemple s'il s'agit de tiges circulaires. Il est d'ailleurs toujours entendu qu'il s'agit de barres suffisamment longues pour que la striction s'y produise librement.

Ceci posé, considérons deux barreaux dont les sections soient différentes, mais aient des formes géométriques semblables : l'expérience montre que, dans ces conditions, les charges de rupture par millimètre carré sont les mêmes pour chaque espèce de matière ; on trouve en outre que l'angle φ est constant, de sorte que les allongements *avant striction* BD sont alors proportionnels aux longueurs L *quelles que soient ces dernières* ; mais il n'en est pas de même pour les allongements totaux l et l' , et, pour rétablir la constance du rapport $\frac{l}{L}$, il faut évi-

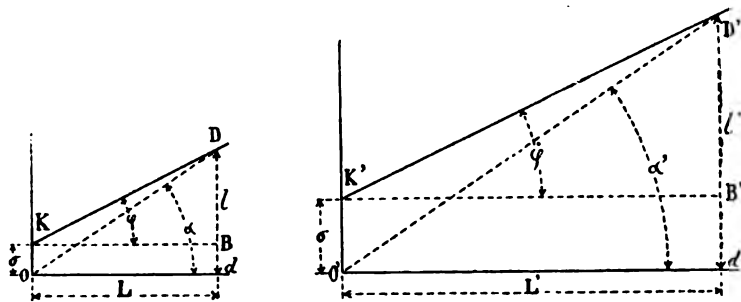


Fig. 27

demment opérer sur des barreaux dont les longueurs soient proportionnelles aux quantités σ et σ' , c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu précédemment, aux dimensions homologues. Nous sommes donc conduit à la conclusion suivante.

Deux expériences de traction ne sont comparables entre elles que si elles ont été exécutées sur des éprouvettes de formes géométriques semblables.

Cette loi importante avait été reconnue par MM. Lebasteur et Marié pour des barreaux circulaires ; M. Barba en a montré l'exactitude pour des surfaces quelconques (1).

Si les sections des barreaux considérés ne remplissent pas les conditions précédentes de similitude, l'allongement proportionnel avant

(1) Voir les *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, 1^{er} semestre 1880, p. 682.

striction, c'est-à-dire $\tan \varphi$ a bien toujours la même valeur pour une matière d'une espèce donnée; mais, dès que commence la striction, les déplacements moléculaires ne suivent plus les mêmes lois et on ne trouve les mêmes valeurs ni pour les charges de rupture par millimètre carré, ni pour les allongements par millimètre courant, de sorte que les essais exécutés dans ces conditions conduisent presque fatalement à des résultats très confus. C'est surtout pour les allongements que les différences sont sensibles; elles sont quelquefois peu prononcées pour les charges.

En appliquant la loi de similitude, on ne doit pas oublier qu'elle suppose l'identité complète de matière; or, dès que les dimensions d'une pièce deviennent un peu considérables, on doit s'attendre à y rencontrer des défauts plus ou moins prononcés tels que pailles, criques, imperfections de soudure, etc., de sorte qu'il sera bon, pour les grosses pièces, de compter sur des efforts moindres. Il ne faut pas non plus perdre de vue que les effets mécaniques, tels que l'érouissage produit par le laminage et le forgeage, etc., sont plus sensibles sur les pièces minces que sur les pièces épaisses, et par suite que les unes et les autres ne se trouvent pas en général dans des conditions comparables. Pour les essais de résistance de matériaux, il y a, comme on le voit, un intérêt sérieux à ce que tous les expérimentateurs opèrent sur des tiges de même diamètre si elles sont circulaires, ou de dimensions transversales identiques dans le cas contraire.

§ 25. — Influence de la durée de la mise en charge.

Des expériences nombreuses ont été faites pour étudier la façon dont la résistance est affectée par la durée de la mise en charge. Ce qui en résulte d'une manière bien claire, c'est que, dans les essais de traction, les forces doivent être appliquées aussi lentement et aussi graduellement que possible de telle sorte que les barreaux s'allongent sans qu'aucun de leurs points acquière de vitesse appréciable. Quand cette condition n'est pas remplie, il se produit des mouvements oscillatoires dont l'étude complète est très compliquée, mais qui ont toujours pour résultat de diminuer la charge de rupture; dans quelques essais de M. Kirkaldy la réduction a été de 18 %.

Admettons que nous opérions de telle sorte que les vibrations dont nous venons de parler soient évitées; il pourra alors arriver que l'intervalle qui s'écoule entre l'application d'une charge et la suivante soit de

quelques secondes ou de quelques minutes, ou bien encore ait une durée plus grande. Il est bien prouvé maintenant que, dans ces conditions, la charge de rupture diminue à mesure que la durée d'application de la charge augmente (1); mais, aux températures ordinaires et pour les matériaux habituellement employés dans les constructions, les différences résultant de ces divers modes d'opérer sont assez faibles et, le plus souvent, il n'y a pas lieu d'en tenir compte. Il est néanmoins prudent, quand on approche de la rupture, de donner aux barreaux expérimentés environ une ou deux minutes de repos après chaque charge afin de permettre à la matière de prendre tout son allongement. Avec des métaux très ductiles comme le cuivre et surtout le plomb ou l'étain, l'intervalle qui sépare l'application des charges devrait être certainement plus grand.

§ 26. — Influence de la température.

De nombreuses expériences ont été faites pour déterminer l'influence de la température sur la résistance des métaux, mais les résultats qu'elles ont donnés sont loin d'être tous concordants. Voici les principaux faits qui semblent se dégager de toutes ces recherches.

Pour le fer ordinaire et l'acier, la résistance aux efforts statiques ne varie que dans d'assez faibles limites, depuis -15° jusqu'à environ 240° ; à ce moment il se produit un accroissement brusque de résistance suivi bientôt d'un maximum puis d'une diminution de plus en plus accentuée;

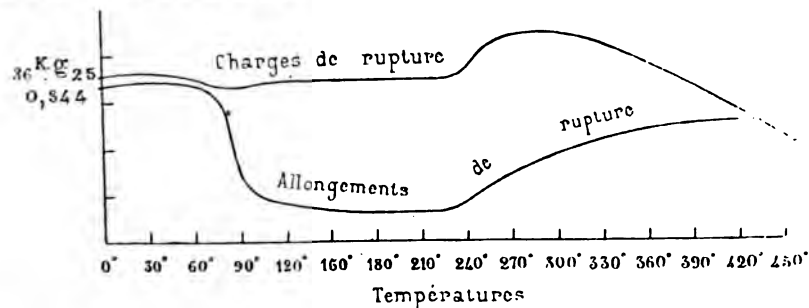


Fig. 28

vers 700° on ne constate plus guère qu'environ 20 % de la résistance primitive, et seulement 4 à 7 % vers 1000° . Quant à l'allongement %.

(1) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 1890, 1^{er} semestre, p. 705.

mesuré au moment de la rupture, le sens de ses variations est donné par le tracé précédent qui est relatif à de l'acier extrêmement doux, mais qui présente le même aspect pour les alliages ferreux plus carburés (1). On constate en outre que, à partir d'environ 240°, la rupture se fait avec une striction peu prononcée; en d'autres termes la ductilité du métal devient faible; il est cassant (§ 14) bien que son allongement proportionnel aille en augmentant et ne tarde pas à acquérir de nouveau une valeur assez grande: comme on l'a constaté bien des fois, le fer et l'acier ne peuvent en effet, vers 300°, supporter le choc du marteau; ils sont devenus très fragiles. Le fer extrêmement pur serait, paraît-il, le seul qui ne présenterait pas cette particularité.

Dans le voisinage de 0° et au-dessous, la résistance au choc des composés ferreux éprouve une diminution assez prononcée, qui paraît être plus importante pour l'acier que pour le fer. C'est là un fait dont il faut tenir compte dans les épreuves de choc, et qui présente d'ailleurs une grande importance dans bien des circonstances, par exemple pour les rails ainsi que pour les essieux des locomotives (2).

Pour le cuivre la charge de rupture diminue notablement avec la température (3); de 25 kg.2 par millimètre carré (cuivre rouge laminé), elle tombe à 20 kg., 14 kg., 9 kg.4 et 3 kg.6 aux températures successives de 15°, 150°, 250°, 350° et 460°. Quant au bronze (4), vers 315° sa résistance est réduite de moitié environ et sa ductilité est alors à peu près nulle; celle du laiton est également très faible vers 260°. Quant aux autres métaux les effets produits sur eux par les changements de température ne sont que très imparfaitement connus; le zinc, dont la charge de rupture va en s'abaissant d'une manière continue et très notable avec la température, présente à cet égard quelques particularités curieuses: il ne se travaille pas à froid mais devient très malléable vers 120 à 130°; il perd cette propriété quand la température s'élève et la reprend ensuite au delà de 300° environ; entre 210 et 240° il est d'une fragilité extrême et se brise en petits morceaux sous le choc du marteau.

(1) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 1889, 2^e semestre, p. 58. (Note de M. Le Chatelier, Ingénieur des Constructions navales.)

(2) Voir la *Revue générale des Chemins de fer*, octobre 1888, p. 279, et juillet 1889 p. 25.

(3) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 1889, 2^e semestre, p. 24.

(4) Voir l'*Engineering*, 1890, 1^{er} semestre, p. 414.

§ 27. — Forme des courbes d'allongement et particularités relatives à divers corps.

Comme nous l'avons fait remarquer (§ 23, fig. 25), l'ensemble de la courbe d'allongement se modifie suivant qu'on a affaire à des barreaux plus ou moins longs et par suite les renseignements relatifs à la forme de la courbe en question et à la surface $ABCDd$ qu'elle détermine n'ont pas un sens absolument net et précis. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que les barres expérimentées eussent une longueur très grande comparativement à leurs dimensions transversales, auquel cas l'influence de la partie CD relative à la striction deviendrait négligeable. Comme nous l'avons dit, il n'en est presque jamais ainsi dans les expériences de traction; en particulier les éprouvettes cylindriques employées dans les essais ont très souvent 16 millimètres de diamètre sur 200 millimètres de long et l'allongement constant dû au fait de la striction entre alors pour une part sensible dans l'allongement proportionnel total. C'est à des barreaux de ce type que se rapportent les renseignements que nous allons donner et ce n'est que sous la réserve des observations qui précèdent qu'il convient d'accueillir les chiffres, approximatifs d'ailleurs, qui figurent dans le présent paragraphe et dans le suivant (1).

Fer. — La forme des courbes qui donnent les efforts en fonction des allongements est susceptible de variations notables suivant la nature du

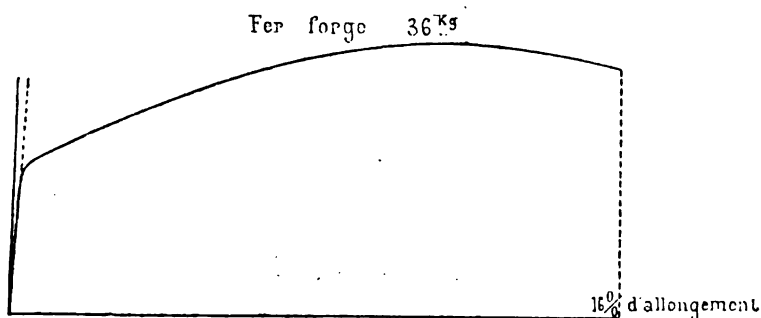


Fig. 29

fer, les matières étrangères qu'il contient, le travail mécanique auquel il a été soumis; comme nous l'avons déjà fait remarquer à propos du

(1) Dans la Marine militaire et dans plusieurs grandes Compagnies, les barreaux expérimentés ont une longueur de 200 millimètres entre repères; leur diamètre est de 16 millimètres quand ils sont cylindriques. Pour les tôles, la largeur est égale à l'épaisseur quand cette dernière dépasse 18 millimètres; elle est de 30 millimètres pour les tôles de 18 à 5 millimètres d'épaisseur et de 20 millimètres pour les tôles au-dessous de 5 millimètres. Pour l'acier moulé, les barrettes n'ont cependant que 100 millimètres de long sur 13^{mm},8 dans les essais de traction; pour le fer à rivets, elles ont 200 millimètres sur 13^{mm},8.

fer phosphoreux (§ 13, fig. 12), le point extrême qui correspond à la rupture est absolument insuffisant pour caractériser les propriétés élastiques du métal : la connaissance de la courbe elle-même ou, au moins, celle de la limite d'élasticité est nécessaire. La figure 29 donne un spécimen d'une courbe de ce genre.

Toutes choses égales d'ailleurs, plus le fer est dur, c'est-à-dire carburé, plus sa charge de rupture s'élève en même temps que l'allongement final diminue ; au point de vue de la résistance vive de rupture, ces deux effets ne se compensent pas complètement, et le fer doux est supérieur sous ce rapport au fer dur.

Acier. — Les nombreux composés ferreux connus sous le nom d'acier et de métal fondu ont tous très sensiblement le même coefficient d'élasticité qui est un peu supérieur à celui du fer. Il résulte de là que la ligne droite qui constitue la première portion de la courbe d'allongement a toujours la même inclinaison, seulement la partie curviligne s'en détache plus ou moins loin de l'origine pour aboutir à un point qui varie d'un composé à l'autre. A mesure que la proportion de carbone augmente, on constate les faits suivants.

Élévation de la charge de rupture.

Élévation de la limite d'élasticité et par suite de la résistance vive d'élasticité, puisque la valeur du coefficient ci-dessus est la même pour tous les aciers.

Diminution de l'allongement final.

Diminution de la résistance vive de rupture.

Quand la proportion de carbone dépasse celle qui correspond à l'acier extra-dur, c'est-à-dire environ 1 %, la charge de rupture continue à augmenter et, dans le voisinage de 1,25 %, elle atteint et dépasse 120 kg., tandis que l'allongement proportionnel descend à 1 %. A partir de ce point on constate une diminution brusque de résistance accompagnée d'une réduction constante d'allongement, et l'expérience montre qu'on cesse en même temps d'avoir affaire à de l'acier ; on n'a en réalité qu'un composé ferreux intermédiaire entre ce métal et la fonte. Plus la proportion de carbone augmente, plus les chiffres précédents s'abaissent et, en arrivant à la fonte grise, on finit par n'avoir plus qu'environ 12 kg. de charge de rupture et 0,25 % d'allongement.

Il importe essentiellement de remarquer que la présence de corps autres que le fer et le carbone (manganèse, chrome, silicium, soufre, phosphore, etc.), modifie notablement les propriétés de l'acier, mais l'étude de ces changements ne rentre pas dans le cadre de ce Traité.

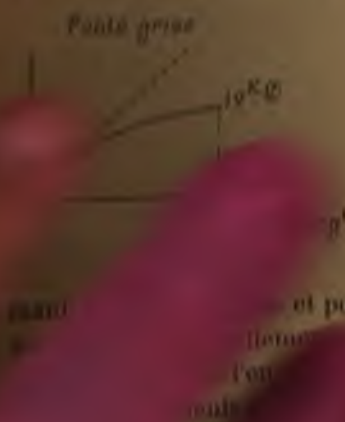
La trempe élève la charge de rupture de l'acier et diminue l'allongement correspondant ; plus le métal est carburé, plus les changements

	ACIER EXTRA-DOUX		ACIER TRÈS DOUX		ACIER DOUX		ACIER DUR		ACIER TRÈS DUR		ACIER EXTRA DUR	
	non trempé	trempé à l'eau	non trempé	trempé à l'eau	non trempé	trempé à l'eau	non trempé	trempé à l'eau	non trempé	trempé à l'eau	non trempé	trempé à l'eau
Charge par m/m carré qui produit la rupture.	40*	49*	44*	55*	54*	72*	64*	90*	74*	110*	84*	128*
Allongement par m/m courant au moment de la rupture.	0,27	0,18	0,24	0,15	0,17	0,09	0,12	0,05	0,075	0,025	0,045	»
Coefficient d'élasticité.	21 000	21 000	21 000	21 000	21 000	22 000	21 000	24 000	21 000	27 000	21 000	»

ainsi produits sont sensibles. Quant à la limite d'élasticité, tantôt elle s'abaisse comme dans le cas de l'acier puddlé où elle est parfois réduite de moitié, tantôt elle s'élève comme cela se présente avec l'acier fondu et, quand ce dernier est très carburé, elle s'approche souvent même de la charge de rupture; il a été en outre reconnu que la trempe augmente sensiblement le coefficient d'élasticité de l'acier dur. Le tableau de la page 61 est simplement destiné à indiquer de quel ordre de grandeur sont les changements que nous venons d'indiquer sommairement, les chiffres qu'il renferme pouvant varier d'une manière très appréciable suivant la provenance et la pureté des produits expérimentés.

Fonte. — Les propriétés élastiques de la fonte varient d'une manière très sensible avec son degré de dureté, son genre de fabrication, sa provenance, le mode de coulée, la forme des pièces, etc.; la charge de rupture qui n'est parfois que de 8 kg. s'élève, dans certaines variétés très dures, jusqu'à 25 et même 32 kg. (1); la limite d'élasticité est susceptible en général d'osciller de 4 kg. à 8 kg., 5 et l'allongement à la rupture de 0,05% à 0,55%. Dans tous les cas, ce métal a un coefficient d'élasticité notablement moindre que celui du fer (*), la moitié environ pour la fonte grise, et par suite, toutes choses égales d'ailleurs, il se déforme notablement plus.

En raison des faibles valeurs de l'effort de rupture et de l'allongement correspondant, ainsi que de son manque de ductilité, la fonte résiste mal aux actions dynamiques et aux chocs; cela tient aussi en partie à ce que, pendant le refroidissement de la masse en fusion, il se produit, surtout dans



les objets volumineux et d'épaisseur très variable, des retraits inégaux et par suite des tensions intérieures quelquefois très énergiques. En outre les pièces en fonte devraient, en toute rigueur, être considérées comme composées de deux corps différents dont l'un, situé à l'extérieur, s'est refroidi au contact du moule beaucoup plus rapidement que l'autre for-

et possède une résistance plus grande; on considère donc la couche externe constituée une plus grande partie de la résistance, dans les petites pièces que dans les grosses. Pour simplifier la résistance, on suppose que la matière

(1) *Annales de l'industrie de Mulhouse*, 1887, p. 309.
 (*) Une manière très sensible avec la provenance et la qualité.
 et descendre dans certains cas jusqu'à 4 000 ou 3 000.

est homogène, c'est uniquement à cause de la complication et des difficultés auxquelles conduirait une autre manière d'opérer.

La figure 30 montre quelle est la forme générale des courbes d'allongement relatives à la fonte; on voit que la limite d'élasticité y est beaucoup plus difficile à saisir qu'avec le fer et l'acier; quelquefois même la partie réellement rectiligne est réduite à une longueur presque insensible.

Bois. — Les propriétés élastiques des bois varient considérablement avec leur essence, le terrain dans lequel il ont poussé, l'exposition, les circonstances climatiques dans lesquelles ils se sont développés, leur âge, le degré et le mode de dessiccation, etc. Ceux qui sont venus dans des terrains secs et à bonne exposition présentent en général sur les autres une supériorité assez marquée.

Les bois encore humides prennent des allongements permanents sous l'action de charges assez faibles, tandis qu'une fois secs ils n'en éprouvent que de beaucoup moindres même dans le voisinage de la rupture. La

dessiccation naturelle augmente notablement la résistance du chêne, mais est sans influence sur les essences résineuses; plusieurs procédés de dessiccation artificielle altèrent la force des bois.

La figure 31 indique la forme de la courbe d'allongement d'un barreau à l'état de siccité ordinaire tiré dans le sens des fibres; c'est toujours dans cette direction que doivent être appliqués les efforts de traction, car on sait que la résistance dans le sens perpendiculaire est beaucoup moindre.

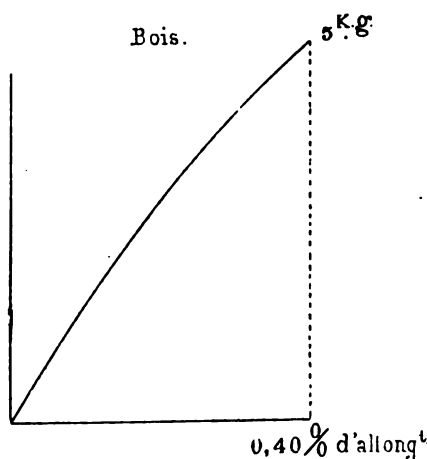


Fig. 31

§ 28. — Résultats pratiques relatifs à la traction.

Les tableaux suivants donnent, dans le cas d'efforts de traction, les renseignements principaux qu'il importe de connaître pour quelques-uns des matériaux les plus employés; on ne doit évidemment les regarder

que comme des moyennes susceptibles d'éprouver en pratique de notables variations, et, toutes les fois qu'on a un travail important à exécuter, il convient de déterminer au moyen d'expériences directes l'effort de rupture et l'allongement des matières qu'on se propose de mettre en œuvre, en y joignant, suivant les cas, des essais de choc; il est à peine besoin d'ajouter que, suivant l'usage universellement adopté, ces renseignements devront être complétés par des épreuves pratiques relatives à la façon dont le métal expérimenté se comporte dans le travail à chaud et à froid. Une remarque importante à faire est la suivante: la valeur des charges que nous indiquons comme pouvant être appliquées avec sécurité est relative aux cas où les corps n'ont à supporter ni de grandes variations d'efforts, ni des chocs violents ou répétés; s'il n'en est pas ainsi, il faudra, comme nous l'avons déjà dit, fixer la charge de résistance en se basant sur des constructions analogues qui ont fait leurs preuves sans paraître cependant pécher par excès de solidité.

Le tableau de la page 67 donne les résistances vives de quelques variétés de fer et d'acier; les nombres qui y sont inscrits ne sont autres

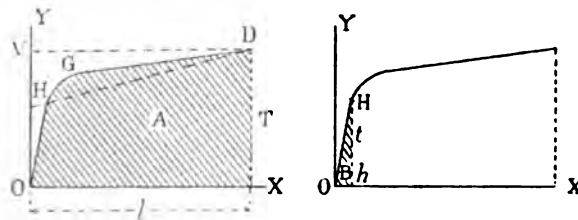


Fig. 32

que les aires A et B et par conséquent ils se mesurent facilement sur les courbes qui donnent les forces en fonction des allongements; on peut aussi les déterminer approximativement par le calcul quand on connaît la charge de rupture T, l'allongement correspondant l , et la limite d'élasticité t . Pour cela remarquons que la ligne OH peut sans grande erreur être regardée comme se confondant avec l'axe OY; d'autre part l'examen des courbes montre que l'aire curviligne VDGH est à peu près égale aux deux tiers du triangle VDH. On peut donc poser:

$$\begin{aligned} \text{Résistance vive de rupture} &= \text{aire O H G D X} = \text{rectangle OVDX} - \text{aire VDGH} = \\ &= T \times l - \frac{2}{3} \frac{(T-t)l}{2} = l \times \left(T - \frac{T-t}{3} \right) = l \times \frac{2T+t}{3} \end{aligned}$$

On peut écrire cette formule d'une autre manière en appelant K le

rapport $\frac{t}{T}$ entre la limite d'élasticité et la charge de rupture; on a alors en effet

$$\text{Résistance vive de rupture} = l \times \frac{2T + K.T}{3} = \frac{2+K}{3} \times l \times T.$$

Quant à la résistance vive élastique B, elle a pour mesure:

$$\text{Résistance vive élastique} = \frac{1}{2} \times t \times Oh = \frac{1}{2} \times t \times \frac{t}{E} = \frac{t^2}{2E}$$

Nous ferons enfin remarquer en terminant que, comme nous l'avons déjà dit (§ 27), les valeurs indiquées pour l'allongement de rupture se rapportent à des éprouvettes et à des barreaux ayant les dimensions actuellement admises par la Marine militaire et par la plupart des grandes Compagnies, soit 200 millimètres de long pour 16 millimètres de diamètre dans le cas d'une tige cylindrique; c'est là un point important sur lequel nous avons déjà insisté (§ 23 et 27) et qu'il ne faut jamais perdre de vue.

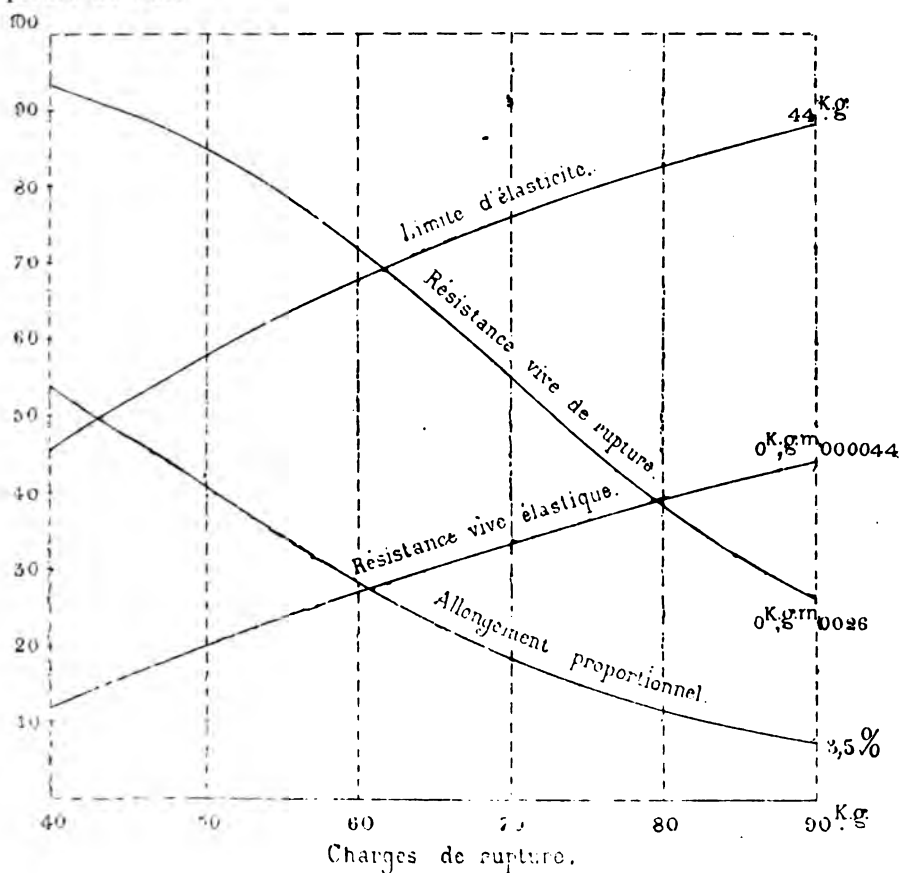


Fig. 33

Résistance à la traction

	Charge par m. m carré qui peut supporter avec sécurité	Charge par m. m carré qui commence à altérer l'élastic.	Charge par m. m carré qui produit la rupture	Coefficient d'élasticité E.
Fer forgé de grosseur moyenne et de bonne qualité.	6 ^t ,00	De 11 ^t à 18 ^t	34 ^t ,00	19 000
Fil de fer de 3 m. m de diamètre non recuit. . .	9,00	18 ^t ,00	70,00	»
Acier extra-doux.	7,00	22,80	40,00	21 000
Acier très doux.	7,50	25,50	44,00	21 000
Acier doux.	9,00	31,00	54,00	21 000
Acier dur.	10,50	35,50	64,00	21 000
Acier très dur.	12,00	39,50	74,00	21 000
Acier extra-dur.	13,50	42,50	84,00	21 000
Fil d'acier.	»	»	de 70 à 250 k. sui- vant la qualité et la grosseur.	»
Fonte grise ordinaire. . .	3,00	6,00	12,00	9 500
Cuivre rouge fondu. . . .	2,10	»	13,00	»
Cuivre rouge laminé. . .	4,00	8,00	25,00	10 000
Fil de cuivre non recuit. .	7,00	13,00	60,00	12 000
Laiton.	2,20	4,40	12,50	6 500
Fil de laiton non recuit. .	8,00	»	70,00	10 000
Bronze à 10 % d'étain (en masses volumineuses). . .	2,00	»	12,00	3 200
Bronze à 10 % d'étain (en pièces de petite et de moyenne grosseur). . . .	3,30	»	20,00	3 200
Plomb.	0,22	0,44	1,35	600
Zinc.	0,75	1,50	5,50	9 400
Etain.	0,45	0,90	3,00	3 200
Teak.	1,10	»	11,00	1 600
Chêne de bonne qual. Chêne perpendicu- lairem. aux fibres.	0,75	»	7,50	1 100
Pin.	0,17	»	1,70	»
Sapin.	0,75	»	7,50	1 400
Orme.	0,40	»	4,00	900
Orme.	0,70	»	7,00	1 000
Cordages non gou- dronnés neufs de très bonne qualité Cordages très Cordages avec	2,20	»	9,50	»
	1,50	»	6,30	»
	0,40	»	2,25	»
	0,60	»	de 2,5 à 5 suiv. l'usure.	»

Valeurs approximatives des résistances vives de divers échantillons de fer, d'acier et de fonte.

	Charge par m/m carré qui produit la rupture	Limite d'élasticité	Allongem. % au moment de la rupture	Résistance vive de rupture	
				pour 1 m/m de long et 1 m/m carré de section	
				<i>kgm</i>	<i>kgm</i>
Fer forgé ordinaire . . .	34 ^k	15 ^k	0,160	0,004.4	0,000,006
Tôles communes de fer en long	33	»	0,075	0,002.0	»
Tôles communes de fer en travers	28	»	0,035	0,000.8	»
Tôles fines de fer en long .	37	»	0,180	0,005.4	»
Tôles fines de fer en travers .	35	»	0,100	0,002.8	»
Tôles d'acier douces d'épaisseur moyenne	46	»	0,180	0,006.8	»
Acier extra-doux	40	22,8	0,270	0,009.3	0,000,012
Acier très doux	44	25,5	0,240	0,009.1	0,000,015
Acier doux	54	31,0	0,170	0,007.9	0,000,022
Acier dur	64	35,5	0,120	0,006.5	0,000,029
Acier très dur	74	39,5	0,075	0,004.7	0,000,035
Acier extra-dur	84	42,5	0,045	0,003.2	0,000,041
Fonte grise ordinaire . . .	12	6,0	0,0025	0,000.02	»

Les chiffres donnés pour la tôle d'acier se rapportent au sens de moindre résistance; ils diffèrent assez peu de ceux qui sont relatifs à la direction perpendiculaire.

Le tracé graphique de la figure 33 représente les résultats ci-dessus en ce qui concerne les aciers.



CHAPITRE III



COMPRESSION

1998

1999



COMPRESSION

§ 29. — Phénomènes généraux et formules de la compression.

La compression, comme nous l'avons dit (§ 10), ne peut causer par elle-même la rupture, elle ne la produit que d'une manière indirecte par les dilatations transversales auxquelles elle donne lieu quand les faces latérales des corps sont libres (1). L'étude de la compression peut donc, en principe, se ramener dans ce cas à celle de la traction; mais en pratique il est préférable de considérer ce nouveau genre d'efforts absolument à part du premier (§ 10) et d'en chercher séparément les lois; c'est ce que nous allons faire maintenant.

Supposons que nous ayons affaire à un solide droit prismatique homogène ABCD, dont la face AB est soumise à des forces normales de compression uniformément réparties et dont la hauteur AC est assez petite pour qu'aucune flexion ne soit possible (2). L'expérience montre que, dans ces conditions, les lois de la compression sont les mêmes que celles de la traction, tant que l'élasticité n'est altérée en aucun point; en d'autres termes, pour des valeurs suffisamment faibles de la résultante T' des forces de compression, les déformations permanentes sont peu ou point appréciables et les raccourcissements peuvent être considérés comme proportionnels aux charges.

Il résulte de là que si on appelle:

T' la valeur de l'effort de compression appliqué à une tige courte de section constante Ω et de longueur L ,

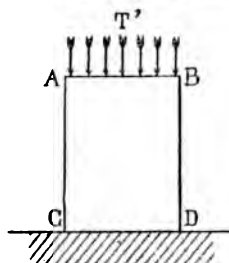


Fig. 34

(1) Comme dans le cas de l'allongement (§ 21), on prouverait que la dilatation transversale en question est égale théoriquement au $1/4$ du raccourcissement produit par la force de compression.

(2) Il suffit pour cela que le rapport de la hauteur au plus petit côté de la base ne dépasse pas environ 4 à 5 pour le fer et la fonte, et 8 pour les bois.

l' le raccourcissement total,
 λ' le raccourcissement par millimètre courant,
 R' la charge par millimètre carré,

on a

$$\frac{\frac{T'}{\Omega}}{\frac{l'}{L}} = \text{constante} = E'$$

et par suite

$$R' = \frac{T'}{\Omega} \quad \lambda' = \frac{R'}{E'} = \frac{T'}{E' \times \Omega} \text{ et } l' = L \times \lambda' = L \cdot \frac{R'}{E'} = L \cdot \frac{T'}{E' \times \Omega}$$

L'expérience montre en outre que le coefficient E' calculé pour des charges qui n'altèrent pas l'élasticité a sensiblement la même valeur que pour la traction, de sorte qu'on peut prendre $E' = E$ (1).

Si nous nous occupons maintenant de ce qui se passe à partir du moment où les déformations permanentes deviennent sensibles, nous reconnaitrons expérimentalement que, sous l'action de compressions de plus en plus fortes, le corps se gonfle latéralement en même temps qu'il se raccourcit, après quoi il se brise. Le mode de rupture est d'ailleurs très différent suivant la nature de la matière; les substances extrêmement dures et peu déformables se réduisent en un grand nombre de fragments; d'autres comme la fonte, les pierres se fendillent et se séparent sous forme de coins, de cônes, de pyramides tels que M et N; le plomb et les corps mous s'aplatissent et se transforment en plaques; les bois et en général les corps formés de fibres, pressés longitudinalement, se rompent par la séparation de ces dernières, etc. Pour que ces phénomènes puissent se produire librement, il est nécessaire que les blocs

(1) Cette identité des lois de la traction et de la compression (pour des déformations extrêmement petites), ainsi que l'égalité des coefficients E et E' résultent des principes mêmes qui servent de base à la théorie mathématique de l'élasticité : on admet en effet dans cette théorie que l'action qui s'exerce entre deux molécules est une fonction *continue* de leur *seule* distance (§ 4), et d'autre part on a été amené à reconnaître que cette action $T = f(\lambda)$ est, pour des déformations extrêmement petites, une fonction linéaire (c'est-à-dire du premier degré) de la variation λ de distance relative des molécules. En raison de cette linéarité, on a (pour un raccourcissement infiniment petit $\lambda' = -\lambda$)

$$f(-\lambda) = -f(\lambda)$$

c'est-à-dire qu'au signe près les effets observés doivent être les mêmes.

Il va sans dire que, dès que les contractions ne sont plus extrêmement petites, cette identité cesse d'exister; en particulier rien ne permet de prévoir si, pour la traction et la compression, les points à partir desquels l'élasticité commencera à s'altérer seront les mêmes : l'expérience prouve en effet que pour certains corps tels que la fonte, les deux limites en question sont très

expérimentés ne soient pas trop minces; Hodgkinson a proposé de les faire une fois et demie à deux fois plus hauts que larges. Malgré cette précaution, il est souvent difficile de saisir le moment précis auquel on doit considérer la désagrégation comme opérée, aussi règne-t-il une

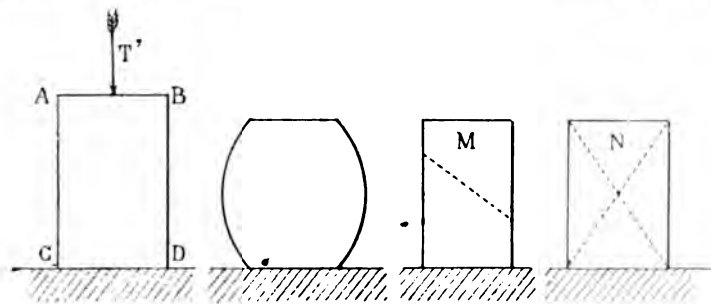


Fig. 35

assez grande incertitude sur la valeur d'un certain nombre de chiffres de rupture.

Dès que le rapport de la longueur au plus petit côté de la base atteint une certaine valeur variable d'une matière à l'autre (environ 4 à 5 pour le fer et la fonte, 8 pour les bois), les pièces comprimées se comportent d'une façon toute différente; il se produit une flexion qui détermine la rupture bien avant qu'on ait atteint la charge qui correspond à l'écrasement des blocs de peu de hauteur; nous nous occuperons plus tard de ces phénomènes à propos des pièces chargées debout (§ 101 et suivants).

§ 30. — Charges de sécurité admissibles dans le cas de la compression.

Les charges qui déterminent la rupture d'une substance par traction ou par compression diffèrent, en général, sensiblement entre elles, mais celles qui correspondent à la limite d'élasticité ont, sauf pour la fonte, des valeurs qui ne s'éloignent pas beaucoup les unes des autres, et, comme c'est d'après ces dernières que nous fixons les forces maximum qu'on peut appliquer avec sécurité, nous voyons que nous sommes conduit à adopter pour ces deux genres d'efforts à peu près les mêmes chiffres de résistance (la fonte exceptée); on trouvera plus loin ceux qu'on peut admettre pour les corps les plus employés dans les constructions.

§ 31. — Particularités relatives au fer, à la fonte, au bois.

Le fer se brise sous des efforts de compression inférieurs à ceux qui déterminent sa rupture par traction (environ 25 kg. par millimètre carré au lieu de 34 kg.), mais dans les deux cas son élasticité ne commence à s'altérer que dans le voisinage d'une charge qui ne s'éloigne pas notablement de 13 kg. La fonte résiste beaucoup mieux à la compression qu'à la traction (75 kg. pour la rupture de la fonte grise au lieu de 12 kg., et 24 kg. pour la limite d'élasticité au lieu de 6 kg.); il importe d'ailleurs de ne pas oublier que la résistance de ce métal varie avec sa composition, son mode de fabrication, la grosseur des pièces, etc. : les fontes très carburées à larges facettes s'écrasent sous une charge de 40 kg, tandis que dans certaines espèces dures à grains serrés ce chiffre s'élève à 110 kg. Pour tous ces corps (fer, acier, fonte) le coefficient d'élasticité relatif à la compression paraît être un peu moindre que pour la traction, mais la différence est assez faible pour être négligée dans la pratique.

Certains bois non résineux, et en particulier le chêne, sont beaucoup plus résistants quand ils sont secs que quand ils sont humides. Avant de se rompre, ils éprouvent un raccourcissement considérable qui peut atteindre pour le chêne le tiers de la hauteur, et pour le pin la moitié.

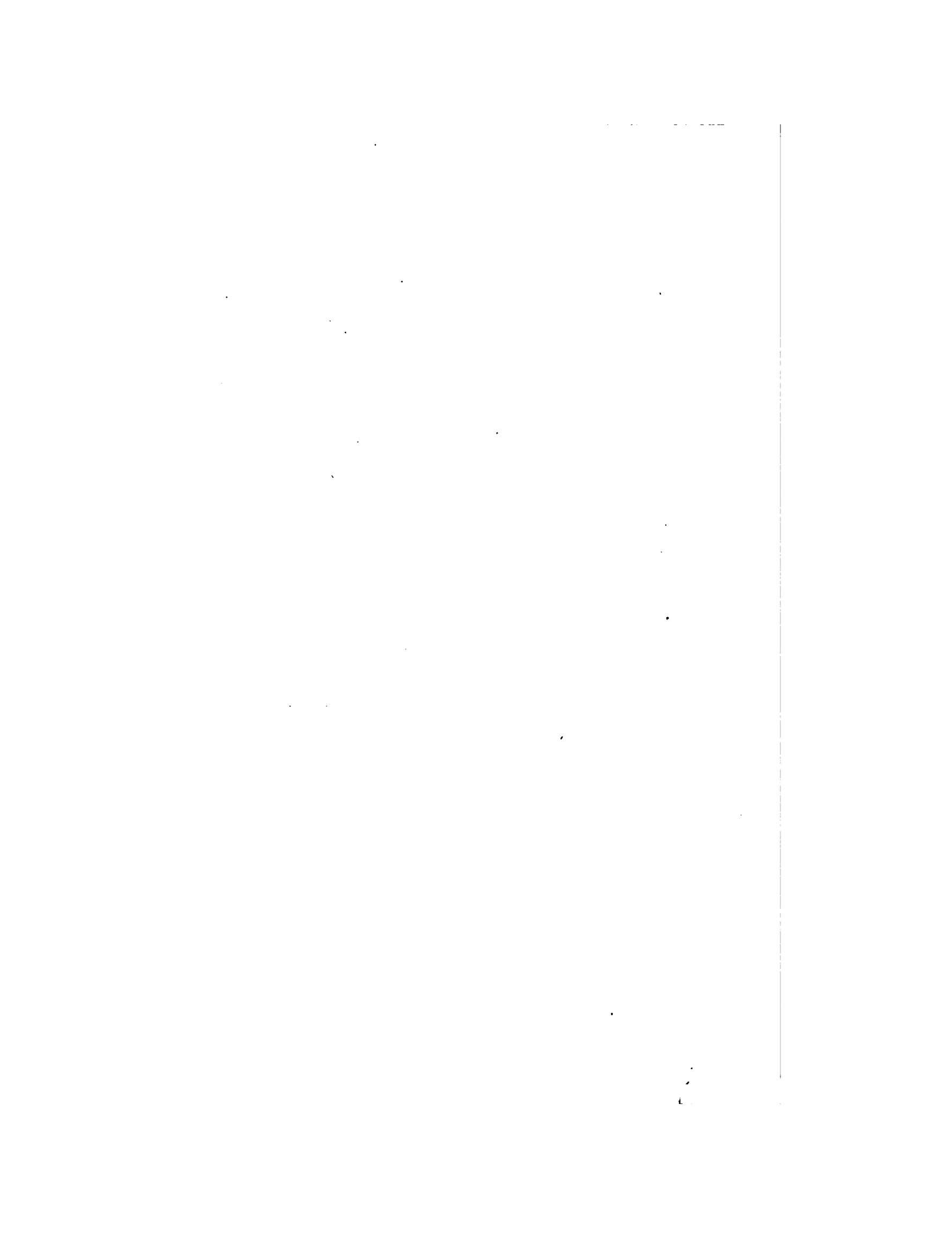
§ 32. — Circonstances qui influent sur la résistance à la compression.

Les circonstances dont nous avons signalé l'influence sur la résistance à la traction produisent, dans le cas de la compression, des effets analogues, mais moins bien étudiés jusqu'ici; suivant quelques expérimentateurs, la grandeur et la forme de la section transversale affectent d'une manière très sensible la valeur de la charge par millimètre carré qui produit la rupture, sans qu'il soit possible cependant d'établir des règles bien nettes à ce sujet.

§ 33. — Résultats pratiques relatifs à la compression.

Résistance à la compression

	Charge par m/m carré qu'on peut appliquer avec sécurité	Charge par m/m carré qui commence à altérer l'élasticité	Charge par m/m carré qui produit la rupture	Coefficient d'élasticité E'
Fer forgé	6 ^k ,00	de 10 à 15 ^k	25 ^k ,00	19000
Acier extra-doux	7,00	un peu inférieure à celle qui est relative à la traction	supérieure à la charge de rupture par traction	21000
Acier très doux	7,50			21000
Acier doux	9,00			21000
Acier dur	10,50			21000
Acier très dur	12,00			21000
Acier extra-dur	13,50			21000
Fonte grise ordinaire	12,00	24,00	75,00	9500
Cuivre rouge	4,00	»	»	»
Laiton	2,20	»	»	»
Bronze	3,30	»	»	»
Teak.	0,85	»	8,50	»
Chêne sec de bonne qualité	0,60	»	6,00	»
Pin	0,50	»	5,00	»



CHAPITRE IV

GLISSEMENT



GLISSEMENT

§ 34. — Phénomènes généraux du glissement. Coefficient de glissement.

Considérons une pièce ABCD fixée d'une manière invariable ou, comme on dit, *encastrée* dans un support rigide quelconque, un mur par exemple, et appliquons à la partie H une force Q située dans le plan d'encastrement ST; l'expérience prouve que dans ces conditions les

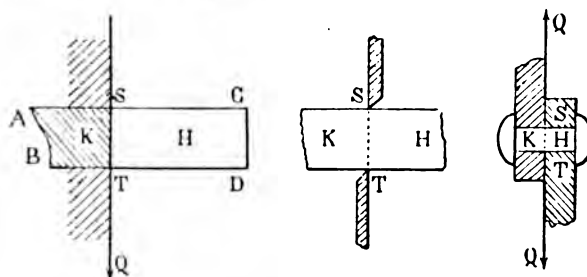


Fig. 36

deux portions H et K tendent à se séparer par suite d'un déplacement tangentiel de l'une par rapport à l'autre effectué suivant le plan ST; ce phénomène constitue ce qu'on appelle le *glissement*, et on dit que la pièce tend à être *cisaillée* sous l'action de l'*effort tranchant* Q.

Soit p un point quelconque pris sur une section UV qui est parallèle à ST et qui en est infiniment voisine; par l'effet du cisaillement, p se déplace le long de UV d'une certaine quantité pp' qu'on appelle *glissement total ou absolu*, et, en menant la normale pm , on donne le nom de *glissement par unité de longueur* ou simplement de *glissement* au rapport $\frac{pp'}{pm}$ qu'on peut remplacer sans erreur sensible, à cause de la petitesse des

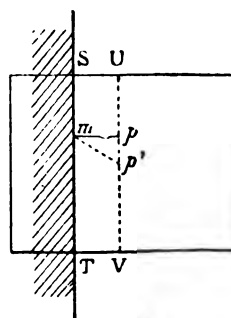


Fig. 37

déformations, par la valeur trigonométrique de l'angle mpm' ; nous le désignerons par la lettre i .

Appelons $d\omega$ un élément infiniment petit de la section ST ayant m pour centre, q la portion de l'effort total de cisaillement qui lui est appliquée, et i le glissement au point en question; nous admettrons comme un fait résultant de l'expérience que le rapport $\frac{q}{d\omega \times i}$ est constant pour une même espèce de matière (et pour une même direction de l'effort) et nous poserons

$$\frac{q}{d\omega \times i} = G$$

Par analogie avec ce que nous avons fait dans le cas de la traction et de la compression, nous donnerons au nombre G le nom de *coefficient d'élasticité de glissement*, ou simplement de *coefficient de glissement*. Comme pour la quantité E , sa valeur n'est constante dans toutes les directions et pour tous les points du corps que dans les solides *isotropes*, c'est-à-dire homogènes et d'élasticité constante (§ 18); dans le cas particulier de matières fibreuses telles que les bois, G varie beaucoup suivant le sens du cisaillement.

Comme on le voit, si on appelle R'' l'effort de cisaillement $\frac{q}{d\omega}$ qui s'exerce en un point donné et sur un petit élément de 1 millimètre carré, on a

$$R'' = G \times i$$

formule tout à fait analogue à celles de la traction et de la compression, $R = E \times \lambda$, $R' = E' \times \lambda'$.

§ 35. — Etude des phénomènes du glissement.

Tout glissement équivaut à une dilatation et à une contraction moitié moindres suivant des lignes inclinées à 45° sur la direction du glissement.

m étant, comme précédemment, un point quelconque pris sur la section ST qui tend à être cisailée, et UV une section parallèle infiniment voisine, considérons le rectangle infiniment petit $mprt$; celui-ci se déforme par le glissement et se transforme en un quadrilatère $m'p'r't'$ qui, à cause de la petitesse des déformations et de la loi de continuité

qui les régit, peut être regardé comme ayant ses côtés rectilignes et parallèles (1), c'est-à-dire comme étant un parallélogramme; l'une des diagonales mt s'allonge et l'autre pr se raccourcit de quantités que

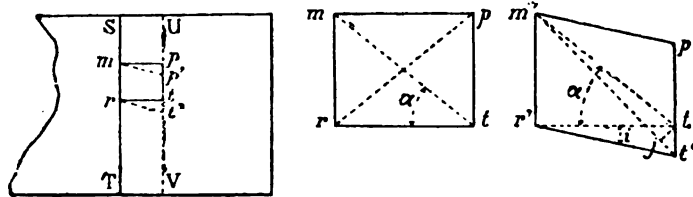


Fig. 38

nous allons évaluer. A cet effet, menons les lignes $m't$, $m't'$ ainsi que tj perpendiculaire à $m't'$; la diagonale mt éprouve un allongement par millimètre courant qui, à un infiniment petit près, est égal à

$$\frac{m't' - m't}{m't} = \frac{jt'}{m't} = \frac{tt' \times \sin \alpha}{m't} = \frac{r't \times i \times \sin \alpha}{\frac{r't}{\cos \alpha}} = i \times \sin \alpha \times \cos \alpha$$

Nous verrons de même que le raccourcissement par millimètre courant de la diagonale pr est égal, lui aussi, à

$$i \times \sin \alpha \times \cos \alpha$$

et, comme ces deux expressions sont maximum pour $\alpha = 45^\circ$ et deviennent alors $\frac{i}{2}$, il en résulte qu'un glissement quelconque, se produisant

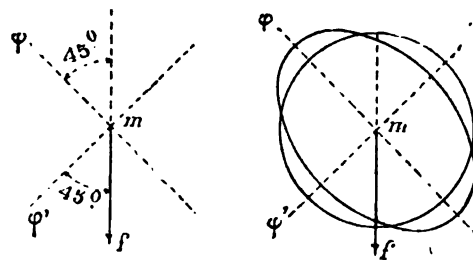


Fig. 39

au point m dans le sens f , donne lieu tout autour de m à des allongements et à des raccourcissements qui sont maximum et égaux à $\frac{i}{2}$ suivant les directions φ et φ' inclinées à 45° sur f ; c'est précisément ce que

(1) Voir la *Torsion des prismes*, par de Saint-Venant, p. 4, et les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1^{er} semestre 1880, p. 53 et 209.

et le *glissement* i , tel que nous l'avons défini (§ 34) est par suite

$$i = \frac{R''}{G} = \frac{R}{2G}$$

Ce premier point une fois établi, remarquons que l'*angle de glissement* i est égal, par définition, à la quantité dont s'incline, dans la déformation infiniment petite considérée, la normale BM à la face AD et

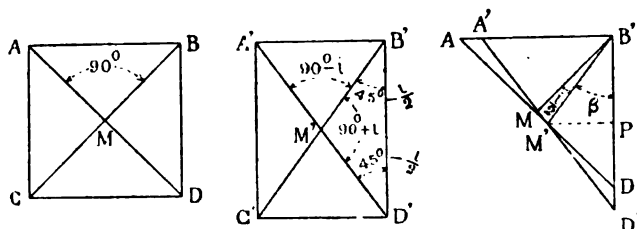


Fig. 41

on voit facilement que l'angle $M'B'D'$ a, par conséquent, pour valeur $45^\circ - \frac{i}{2}$. On a donc

$$\frac{i}{2} = M\hat{B}M' = M\hat{B}D' - M'\hat{B}D' = \frac{\pi}{4} - \beta$$

et par suite

$$\sin \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta - \sin \beta \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Or, en menant la perpendiculaire $M'P$, on voit sur la figure que

$$\cos \beta = \frac{B'P}{B'M'} = \frac{B'D'}{2B'M'} \quad \sin \beta = \frac{M'P}{B'M'} = \frac{A'B'}{2B'M'}$$

ce qui peut s'écrire

$$\cos \beta = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{2}} \quad \sin \beta = \frac{1 - \eta \lambda}{\sqrt{2}}$$

Par conséquent

$$\sin \frac{i}{2} = \frac{\lambda}{2}(1 + \eta) = \frac{R(1 + \eta)}{2E}$$

En raison de la petitesse de l'angle i , on peut remplacer $\sin \frac{i}{2}$ par $\frac{i}{2}$, de sorte que

$$i = \frac{R(1 + \eta)}{E}$$

Égalons maintenant cette valeur de i à celle ($i = \frac{R}{2G}$) que nous avons trouvée tout à l'heure; il vient

$$\frac{R}{2G} = \frac{R(1 + \eta)}{E}$$

d'où

$$G = \frac{E}{2(1 + \eta)}$$

relation qui a une importance capitale dans la théorie mathématique de l'élasticité (1).

Si, dans l'expression ci-dessus, nous remplaçons η par sa valeur $\frac{1}{4}$ que nous avons admise pour les solides isotropes, c'est-à-dire homogènes et d'égale contexture en tous sens (§ 21), nous obtenons

$$G = \frac{2}{5} E$$

37. — **Charge de sécurité des pièces soumises à un effort de cisaillement.**

Il n'existe pas d'expériences permettant de fixer d'une manière bien exacte la plus forte valeur de l'effort de cisaillement qu'on peut appliquer en toute sécurité aux divers matériaux employés dans les constructions; faute de mieux, on se guide souvent sur les considérations suivantes: soient i et λ le glissement et l'allongement (ou le raccourcissement) maximum par millimètre courant compatibles avec la matière considérée; la charge cherchée est égale à $G \times i$ et si on admet qu'on puisse prendre, comme la théorie nous l'a indiqué, $i = 2 \lambda$ et $G = \frac{2}{5} E$, on a

$$G \times i = \frac{2}{5} E \times 2 \lambda = \frac{2}{5} E \times 2 \frac{R}{E} = \frac{4}{5} R,$$

R étant la charge de sécurité par millimètre carré relative soit à la traction soit à la compression. Telle est la valeur que l'on adopte souvent

(1) Au lieu de raisonner sur un simple carré, comme nous l'avons fait, on pourrait, à l'exemple de Clebsch, considérer un cube, ce qui, par un mode de raisonnement identique, conduit au même résultat.

faute d'expériences précises, en ayant soin de prendre pour R le plus petit des deux nombres qui correspondent aux deux genres d'efforts ci-dessus quand la matière ne résiste pas également bien à l'un et à l'autre.

Les données expérimentales que nous possédons sur la résistance à la rupture par glissement justifient, au moins dans une certaine mesure, la règle précédente; on a reconnu, en effet, que la force nécessaire pour cisailer un certain nombre de corps, le fer par exemple, est égale environ aux $\frac{4}{5}$ de celle qui détermine la rupture par traction; en prenant $\frac{4}{5}R$ pour charge de sécurité on adopte ainsi la même fraction de la charge de rupture aussi bien pour le glissement que pour la traction et la compression, ce qui est assez rationnel à défaut d'expériences permettant de fixer la limite d'élasticité relative au genre d'efforts qui nous occupe.

§ 38. — Réciprocité des glissements.

Un glissement quelconque ne peut se produire sans en faire naître un autre de même valeur dirigé dans un sens perpendiculaire au premier. C'est là un fait géométrique qui résulte de la transformation du rec-

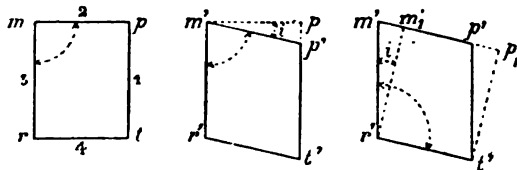


Fig. 42

tangle $mprt$ dans le parallélogramme $m'p'r't'$; par suite de cette déformation il se produit les deux faits suivants :

1° L'angle m varie et devient m' , ce qui donne lieu à un glissement de pt par rapport à mr égal à la mesure trigonométrique de l'angle $pm'p'$, et provenant directement de la force de cisaillement.

2° L'angle r varie lui aussi, et, pour lui rendre sa valeur première, il faudrait que $m'p'$ vint en m_1p_1' ; mp a donc glissé par rapport à rt d'une quantité mesurée par l'angle $m_1r'm'$ évidemment égal à $pm'p'$; on voit par là, comme nous l'avons annoncé, que les côtés 1 et 2 du

rectangle considéré éprouvent des glissements égaux par rapport aux côtés 3 et 4 qui leur sont respectivement parallèles.

Il est facile de se rendre compte d'une autre manière de la coexistence forcée et de l'égalité des glissements qui se produisent dans deux directions rectangulaires : isolons en effet dans l'intérieur d'un corps quelconque en équilibre un cube infiniment petit dans lequel la face AB soit soumise de la part de la matière environnante à une force

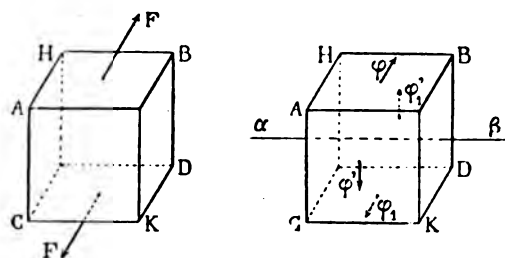


Fig. 43

oblique F ayant pour composante tangentielle φ ; la face CD étant infiniment peu distante de AB est sollicitée par une force égale et parallèle donnant lieu par conséquent à une composante tangentielle φ_1 , égale à la précédente mais de direction contraire; les forces φ et φ_1 tendent à faire tourner le cube dans le même sens autour de l'axe $\alpha\beta$; donc, puisque l'équilibre a lieu, il faut qu'il existe le long des faces AK et HD des forces φ' et φ'_1 égales et perpendiculaires à φ ; en d'autres termes quand un élément plan infiniment petit quelconque pris à l'intérieur d'un solide est soumis à une force de glissement φ , il est certain qu'un second élément perpendiculaire à la direction de cette force est sollicité par un effort tangentiel ayant même valeur par unité de surface et dirigé à angle droit avec le premier. C'est là un fait qu'il ne faut pas perdre de vue quand on veut s'assurer qu'un corps est capable de résister à un effort donné de cisaillement; pour les substances fibreuses en particulier telles que les bois, il est prudent de ne jamais compter que sur la résistance qui correspond au sens de plus facile glissement, sans quoi on voit les fibres se disjoindre et glisser les unes par rapport aux autres sous l'action de forces agissant dans la direction perpendiculaire à celle de l'effort. Les coefficients que nous adopterons en pratique seront assez faibles pour que nous n'ayons rien à craindre sous ce rapport.

§ 39. — Répartition du glissement dans une section transversale.

Soit ABCD une pièce dans laquelle une section transversale ST est soumise à un effort de cisaillement Q; *m* étant un point quelconque pris sur cette dernière, nous avons vu que le rectangle *mpri* se transforme dans le parallélogramme *m'p'r't'*, et nous avons appelé glisse-

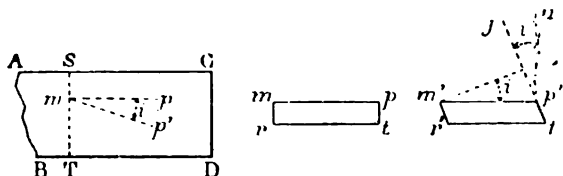


Fig. 44

ment au point considéré l'angle *mpm'* ou, ce qui revient au même, l'angle *jp'u* formé par l'élément *p't'* et la ligne *p'u* menée perpendiculairement à *m'p'*.

Ceci posé, deux cas peuvent se présenter :

- 1° Le glissement *i* a la même valeur dans toute l'étendue de la section considérée depuis S jusqu'en T.
- 2° Ce glissement varie d'un point à un autre.

Nous allons examiner successivement chacun d'eux. En premier lieu,

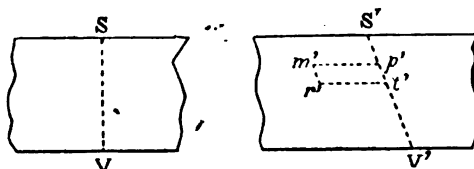


Fig. 45

si *i* a une valeur constante de S en V, tous les petits éléments, tels que *p't'* rencontrent les fibres de la pièce sous un angle constant égal à

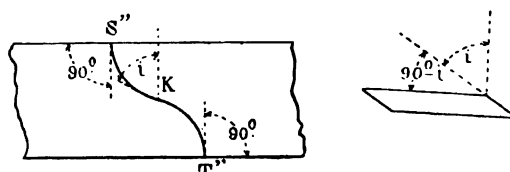


Fig. 46

$90^\circ - i$, et par conséquent une section transversale primitivement plane reste plane après la déformation; tel est le fait qui caractérise la

répartition uniforme du glissement. Si, au contraire, i change d'un point à l'autre, il est clair que la section SV éprouve forcément un gauchissement plus ou moins prononcé comme l'indique la figure 46. Avec la forme qui est représentée en $S''T''$ et que nous rencontrerons en nous occupant de la flexion, le glissement est nul en S'' et T'' et maximum en K .

Proposons-nous de reconnaître dans quels cas une force de cisaillement Q se répartit ou non d'une manière uniforme dans la section transversale à laquelle elle est appliquée. En vertu du principe de réciprocité dont nous avons parlé précédemment, il ne peut y avoir en un point quelconque de force de glissement transversal q , sans qu'il existe en même temps un effort égal de glissement longitudinal q' dirigé perpendiculairement à la section ST ; si donc le contour extérieur de cette dernière est libre et soumis simplement à la pression de l'atmosphère,

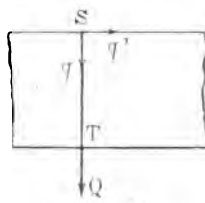


Fig. 47

la répartition uniforme ne peut exister; q' et par conséquent q sont nuls sur tout le pourtour en question et il se produit un gauchissement tel que les angles en S'' et T'' sont droits; en d'autres termes, quelque considérable que puisse être l'effort de cisaillement qui s'exerce sur les molécules intérieures d'un corps, tout point situé sur une partie libre de sa surface extérieure n'éprouve aucun glissement et ne supporte pas la moindre partie de l'effort tranchant total; c'est ce qui arrive pour les boulons et les rivets qui ont du jeu dans leurs trous. Pour qu'il y ait répartition uniforme, il faut appliquer sur la surface extérieure des forces longitudinales convenables ou adopter un dispositif qui en tienne lieu, par exemple fixer la pièce par un encastrement dans lequel elle soit invariablement scellée ou soudée,

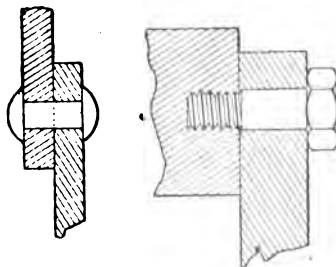


Fig. 48

ou qui lui fasse subir un frottement au moins égal à la valeur de l'effort longitudinal de glissement. Tel est sensiblement le cas des rivets qui réunissent deux feuilles de tôle, d'un tourillon ou d'une broche de faible longueur qui sont taraudés ou emmanchés à frottement très dur, etc.

§ 40. — Formules du glissement relatives au cas d'une répartition uniforme.

Pour un point quelconque d'une section soumise à un effort tranchant Q , nous avons vu que l'on a

$$q = G \times d\omega \times i$$

Si i est supposé constant, on a pour l'ensemble de la surface Ω

$$Q = G \times i \times \int d\omega = G \times \Omega \times i$$

Le tableau suivant donne les valeurs qu'il paraît prudent de ne pas dépasser pour la charge de cisaillement par millimètre carré, $G \times i$.

Nous verrons, en nous occupant de la flexion, ce qu'il convient de faire quand la force de cisaillement ne se répartit pas d'une manière uniforme.

§ 41. — Résultats pratiques relatifs au glissement.

Résistance au cisaillement.

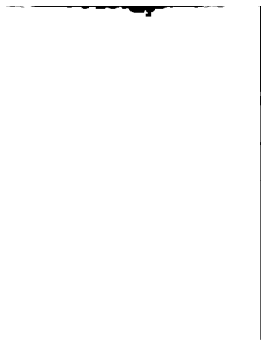
	Charge par m/m carré qu'on peut appliquer avec sécurité	Charge par m/m carré qui produit la rupture	Coefficient d'élasticité de glissement G
Fer forgé supportant à la traction 34 kil. par m/m carré.	5 ^k ,00	30 ^k ,00	7 000
Acier extra-doux.	5,60	32,00	7 500
Acier très doux.	6,00	35,00	7 500
Acier doux.	7,20	41,00	7 500
Acier dur	8,40	47,00	7 500
Acier très dur.	9,60	54,00	7 500
Acier extra-dur.	10,80	60,00	7 500
Fonte	1,70	10,00	4 000
Cuivre rouge	3,00	18,00	4 300
Laiton	1,70	10,00	2 100
Bronze à 10 % d'étain supportant à la traction 20 kil. par m/m carré.	2,00	12,00	1 060
Chêne	0,40	2,5	400
Pin.	0,35	2,0	400

Les valeurs données dans ce tableau sont loin d'être déterminées d'une manière bien exacte, surtout en ce qui concerne les coefficients d'élasticité.

CHAPITRE V



FLEXION



Vertical line of text or markings on the right side of the page.

A small, dark mark or smudge at the bottom right corner of the page.

FLEXION

FLEXION PLANE

§ 42. — Définition des pièces étudiées.

Soit ABCD un solide engendré par une aire plane S dont le centre de gravité G se déplace le long d'une ligne HK droite ou très légèrement courbe mais plane, et qui lui reste constamment normale sans subir d'ailleurs aucune rotation dans son propre plan. Les forces extérieures qui agissent sur la pièce sont supposées toutes contenues dans un même plan (celui de la courbe HK) qui est en outre un plan de symétrie pour

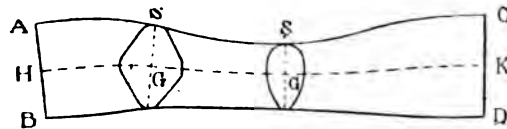


Fig. 49

la surface S; celle-ci peut, du reste, soit rester toujours identique à elle-même, soit varier de forme ou d'étendue d'une manière lente et continue; nous admettons enfin que les dimensions transversales de l'aire S sont faibles relativement à la longueur du solide considéré (1) et qu'elles peuvent être considérées comme restant invariables sans éprouver jamais de contraction latérale (§ 21). Il est bien clair que, dans les conditions qui viennent d'être indiquées, tout se passe de la même façon de part et d'autre du plan de symétrie dans lequel se trouve par suite la ligne des fibres moyennes HK à tout instant de la déformation.

Nous supposons, dans l'étude qui va suivre, que les forces tendant à courber la pièce ou, en d'autres termes, à produire une flexion sont assez faibles pour que la limite d'élasticité soit à la traction, soit à la

(1) Quand cette dernière condition n'est pas remplie, les phénomènes de cisaillement peuvent avoir une importance au moins aussi grande que ceux de flexion; ce cas sera incidemment étudié au paragraphe 50 avec les règles pratiques à adopter.

compression, soit au cisaillement ne soit atteinte *en aucun point*; nous admettrons en outre que le solide considéré se déforme très peu et dans des conditions telles que ni la valeur des forces, ni leurs bras de levier ne soient modifiés d'une manière appréciable, de sorte que nous pourrions relever les valeurs des unes et des autres sur la pièce prise à l'état naturel. Nous verrons plus tard ce qu'il convient de faire quand ces diverses suppositions s'éloignent trop de la réalité pour qu'il soit possible d'agir de cette manière; nous dirons également plus loin (§ 54) quelques mots relatifs au cas où le solide étudié n'est pas homogène, comme nous le supposons en ce moment.

§ 43. — Flexion produite par un couple.

1° *Etude de la déformation produite.* — Pour simplifier l'étude de la flexion définie comme nous venons de le faire, nous examinerons d'abord divers dispositifs simples de forces extérieures, après quoi nous supposerons que celles-ci peuvent être situées de n'importe quelle manière et en nombre quelconque dans le plan de symétrie du solide. Occupons-nous d'abord du cas où elles se réduisent à un couple M (1)

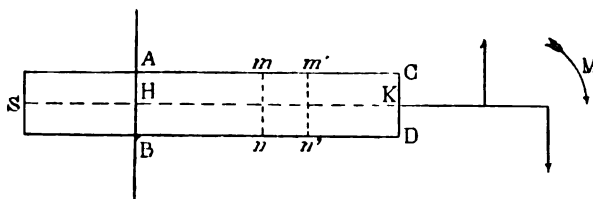


Fig. 50

dont le moment est supposé ne pas varier, au moins d'une manière sensible, par suite de la déformation de la pièce. Nous supposons que celle-ci est *encastrée* dans un support rigide, un mur par exemple, c'est-à-dire qu'elle y est fixée de telle façon que la partie HS qui y est engagée ne puisse changer en aucune manière d'inclinaison; nous dirons plus tard (§ 79) dans quelle mesure cette condition peut être réalisée pratiquement.

Nous admettrons comme résultat expérimental :

1° Que, sous l'action du couple M , les fibres s'allongent dans la partie AC et se raccourcissent dans la partie BD, en restant parallèles après la

(1) On verra au paragraphe 76 un dispositif très simple qui rentre dans ce cas.

déformation si elles l'étaient auparavant. Il existe donc quelque part, dans l'intérieur de la pièce, une ligne de fibres HK qui ne change pas de longueur; on lui donne le nom de *ligne des fibres neutres* ou *invariables*.

2° Que les lignes droites $mn, m'n', \dots$, tracées normalement à la ligne des fibres moyennes (telle que nous l'avons définie précédemment) restent droites et normales à cette ligne déformée (1).

On peut s'assurer que ces lois sont bien conformes à la réalité, en faisant quelques expériences sur des poutres en bois ou en fer soumises à des efforts qui sont assez considérables pour donner lieu à une flexion prononcée. On a remarqué en particulier qu'en faisant des traits de scie a

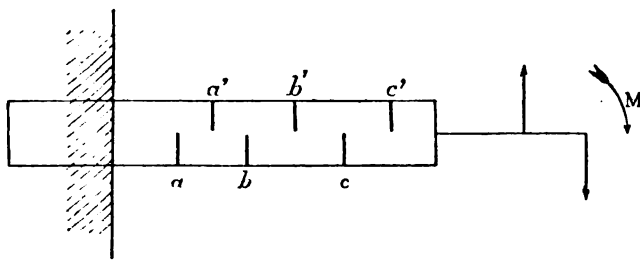


Fig. 51

b, c, \dots à la partie inférieure de la pièce et en venant ensuite à les remplir avec des cales de bois ou de métal, la résistance ne se trouve pas altérée, ce qui prouve bien qu'il y a compression dans cette région. Si au contraire les traits en question sont pratiqués du bord opposé en a', b', c', \dots on les voit s'ouvrir de plus en plus à mesure que l'effort augmente, et la rupture se produit beaucoup plus tôt.

Ces lois expérimentales vont nous permettre de trouver comment se comporte la poutre ABCD. Soit en effet HK la ligne, pour le moment inconnue, des *fibres invariables* supposée primitivement rectiligne; considérons une section mn normale à cette dernière et faisant un angle φ avec la verticale; soit $m'n'$ une autre section normale infiniment voisine de la première, appelons ρ le rayon de courbure de HK au point α , et soit $\alpha\beta = ds$. Désignons par ds' la longueur

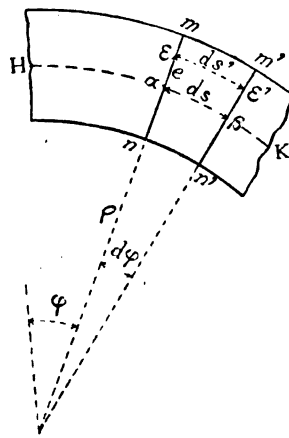


Fig. 52

(1) C'est Charles Dupin qui, dans des expériences faites à Corfou alors qu'il y était Ingénieur de la Marine française, élucida ces points délicats qui étaient restés jusque là fort obscurs malgré les recherches de Galilée, de Mariotta, de Leibnitz et de Jacques Bernouilli.

que prend une portion de fibre $\epsilon\epsilon'$ située à une distance e du point α . Avant la déformation on a $ds' = ds$, tandis que maintenant

$$\begin{aligned} ds &= \varphi \times d\varphi \\ ds' &= (\varphi + e) d\varphi \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'allongement par millimètre courant de $\epsilon\epsilon'$

$$\lambda = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{e}{\rho}$$

Si donc nous admettons, ce qui est suffisamment conforme à la réalité, que les choses se passent comme si la fibre $\epsilon\epsilon'$ était isolée du reste de la pièce et soumise à un simple effort de traction (ou de compression), sa tension est, en appelant $d\omega$ sa section,

$$E. d\omega. \lambda = E. d\omega. \frac{e}{\rho} \quad (1)$$

Telle est l'expression de la tension éprouvée par une fibre quelconque de m en α ; au-dessous de ce dernier point il y a non pas allongement, mais un raccourcissement donnant lieu à une force de compression exprimée également par $E. d\omega. \frac{e}{\rho}$, si l'on suppose (comme nous l'avons admis § 29) que le coefficient d'élasticité E peut être considéré comme ayant la même valeur dans les deux cas.

Supposons maintenant la poutre coupée suivant le plan normal mn et écrivons, pour la partie de droite considérée à part, les équations d'équilibre qui se réduisent ici à trois puisque tout se passe dans un plan; il faut alors, comme nous le savons (§ 6), remplacer la portion de gauche par les forces intérieures auxquelles elle donnait lieu avant la séparation effectuée suivant le plan mn . En projetant sur la ligne $\alpha\beta$ (supposée droite à cause de sa longueur infiniment petite), on a

Projection des forces intérieures de la section $mn = o$

puisque les forces extérieures se réduisent à un couple. Cela donne

$$\Sigma E. d\omega. \frac{e}{\rho} = o$$

(1) Comme il est à peine besoin de le faire remarquer, cette relation n'est exacte que si l'élasticité n'est altérée en aucun point du corps considéré; au delà de cette limite, nos formules cessent d'être conformes à la réalité des choses. Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ce point en parlant de la rupture à la flexion (§ 135).

ou, puisque E est constant sur toute la hauteur de la pièce, *celle-ci étant supposée homogène*,

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho} \cdot \Sigma e \cdot d\omega &= 0 \\ \Sigma e \cdot d\omega &= 0 \end{aligned}$$

Donc la *ligne des fibres neutres ou invariables* passe par le centre de gravité d'une section quelconque *mn*; elle se confond par conséquent avec la *ligne des fibres moyennes* précédemment définie et se trouve ainsi connue.

Si nous projetons maintenant les forces en jeu sur une perpendiculaire à $\alpha\beta$, le couple M donne encore, comme toujours, une somme nulle; il doit donc en être de même pour les forces intérieures, c'est-à-dire que la section *mn* n'est soumise à aucun effort de cisaillement. La résultante de ces forces se réduit donc, *dans ce cas particulier*, à un couple dont nous allons calculer le moment par rapport au point α en écrivant la troisième équation d'équilibre qui est

$$\begin{aligned} \Sigma (E \cdot d\omega \cdot \frac{e}{\rho} \cdot e) &= M \\ \frac{E}{\rho} \cdot \Sigma e^2 \cdot d\omega &= M \end{aligned}$$

$\Sigma e^2 \cdot d\omega$ est le *moment d'inertie* de la section transversale considérée *mn* par rapport à un axe mené par le centre de gravité α perpendiculairement au plan de symétrie; nous le désignerons par I, de sorte que

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

équation qui donne la valeur de ρ en un point quelconque de la pièce. Dans le cas qui nous occupe M est constant; si donc I l'est aussi, ce qui a lieu par exemple dans le cas où la section est la même sur toute la longueur, la poutre primitivement droite se courbe suivant un arc de cercle dont le rayon est $\frac{E \cdot I}{M}$.

Les formules précédentes donnent immédiatement la charge par millimètre carré (à la tension ou à la compression) de la fibre longitudinale qui passe au point ϵ . Pour $d\omega = 1$, on a en effet

$$R = E \cdot \lambda = \frac{E \cdot e}{\rho}$$

et, puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{E \cdot I}, \\ R &= \frac{M \cdot e}{I} \end{aligned}$$

2° *Condition de plus grande charge.* — Le maximum de R , pour une section transversale donnée, se produit en même temps que celui de e ,

c'est-à-dire que la fibre la plus fatiguée est la plus éloignée de la ligne des fibres neutres. En désignant par v et v' ces distances maximum relatives aux deux parties de la section mn situées de part et d'autre de $\alpha\alpha'$, on voit donc que les plus fortes charges à la traction et à la compression sont respectivement représentées par les formules

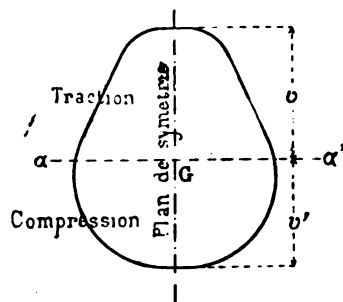


Fig. 53

$$R = \frac{M \cdot v}{I} = M^{\text{é fléchissant}} \times \frac{v}{I}$$

$$R' = \frac{M \cdot v'}{I} = M^{\text{é fléchissant}} \times \frac{v'}{I}$$

expressions qui ne supposent, en aucune façon, que I ait une valeur constante d'un bout à l'autre de la pièce.

Pour la plupart des matériaux employés dans les constructions (sauf pour la fonte), les charges maximum admissibles en toute sécurité ont sensiblement la même valeur pour la traction et la compression (§ 30); dans ces conditions il suffit évidemment de considérer celle des deux expressions ci-dessus qui est relative à la plus grande des deux distances v et v' (v par exemple)

$$R = \frac{M \cdot v}{I}$$

C'est ce que nous ferons à l'avenir pour simplifier les explications; mais il doit être bien convenu que, pour des matières telles que la fonte, les deux valeurs ci-dessus de R et R' doivent, l'une et l'autre, être calculées.

§ 44. — Flexion produite par une force normale.

1° *Étude de la déformation produite.* — Considérons, comme précédemment, une pièce droite ou presque droite $ABCD$ *encastrée* en AB ; supposons-la sollicitée par une force normale P agissant à l'extrémité K de la *fibre moyenne* et contenue dans le plan de symétrie. L'expérience prouve que dans ce cas la pièce fléchit comme l'indique la figure 54 et que les fibres supérieures $A'C'$ s'allongent tandis que celles du bas se raccourcissent; de plus, si l'on trace un certain nombre de sections normales,

on constate qu'après la déformation elles ne sont restées ni parfaitement planes, ni exactement normales aux directions constamment parallèles

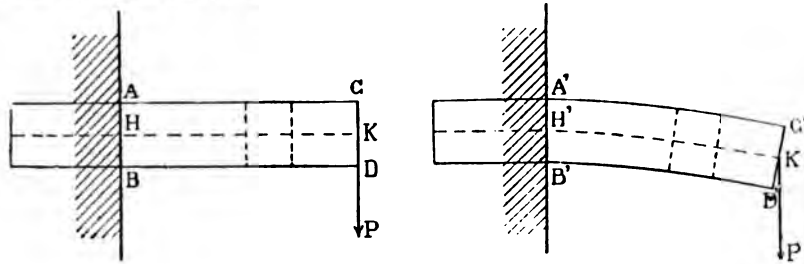


Fig. 54

des diverses fibres, mais la différence est faible quand la déformation de la pièce est peu prononcée comme cela a lieu dans la pratique, et pour le moment nous la considérerons comme nulle, sauf à voir bientôt ce qu'il convient de faire pour en tenir compte.

Ceci étant admis, considérons comme précédemment deux sections

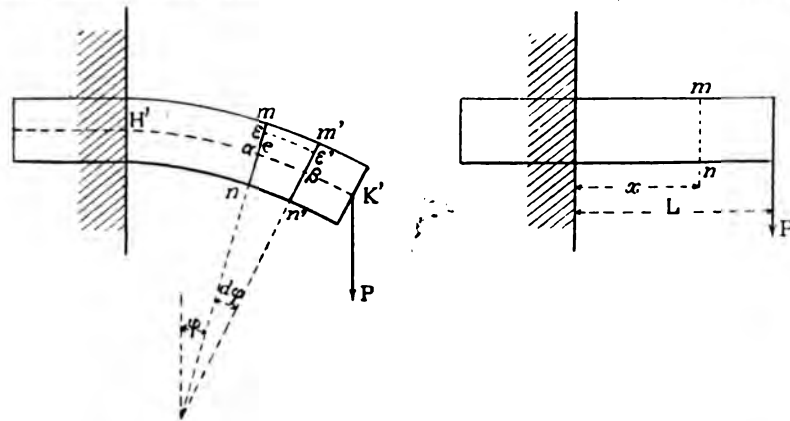


Fig. 55

normales infiniment voisines mn , $m'n'$ et écrivons les équations d'équilibre relatives à la première mn . On a comme tout à l'heure

$$\begin{aligned} ds &= \rho \cdot d\varphi \\ ds' &= (\rho + e) \cdot d\varphi \\ \lambda &= \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{e}{\rho} \end{aligned}$$

D'où pour la force de traction ou de compression qui sollicite une fibre $\varepsilon \varepsilon'$

$$E \cdot d\omega \cdot \frac{e}{\rho}$$

224103B

On a donc en projetant toutes les forces sur $\alpha\beta$

$$\Sigma E. d\omega. \frac{e}{\rho} = \text{projection de P sur } \alpha\beta$$

Or la déformation étant supposée faible et, la poutre étant primitivement droite ou à peu près droite, P reste presque normal à $\alpha\beta$, de sorte que le deuxième membre de cette équation peut être considéré comme à peu près nul, ce qui donne

$$\Sigma E. d\omega. \frac{e}{\rho} = 0$$

$$\Sigma e. d\omega = 0$$

c'est-à-dire que la *ligne des fibres neutres* se confond sensiblement avec le lieu des centres de gravité des sections transversales, ou, autrement dit, avec la *ligne des fibres moyennes* comme cela avait lieu tout à l'heure.

Nous aurions à écrire maintenant la deuxième équation de projections, mais nous la laisserons provisoirement de côté et nous passerons de suite à l'équation des moments par rapport au point α

$$\Sigma E. d\omega. \frac{e}{\rho} \times e = \text{Moment de P} = \text{sensiblement P. (L - x)}$$

$$\frac{E. I}{\rho} = P. (L - x)$$

relation qui donne ρ en un point quelconque α et par suite la forme de la fibre moyenne déformée.

Quant à la charge R par millimètre carré de la fibre longitudinale qui passe en ϵ , on l'obtient par la relation

$$R = E. \lambda = \frac{E. e}{\rho}$$

et par suite

$$R = \frac{P. (L - x). e}{I} = \text{Moment fléchissant} \times \frac{e}{I}$$

2° Condition de plus grande charge. — Dans une section transversale quelconque située à une distance x de l'encastrement, la fibre qui fatigue le plus est celle qui est la plus éloignée de la ligne des fibres neutres, et sa charge R par millimètre carré est égale à

$$R = \frac{P. (L - x). v}{I} = \text{Moment fléchissant} \times \frac{v}{I}$$

ce qui donne R pour une section transversale quelconque.

Dans le cas où la section transversale de la pièce est la même d'un bout à l'autre, c'est évidemment celle de l'encastrement qui fatigue le plus; pour cette dernière on a $x = 0$ et par conséquent

$$R = \frac{P \cdot L \cdot v}{I}$$

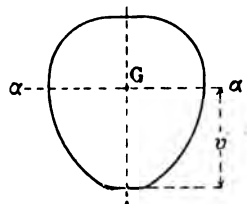


Fig. 56

Comme on le remarquera, les valeurs de R sont indépendantes du coefficient d'élasticité E.

3° *Lieu géométrique des points qui ont le même allongement ou le même raccourcissement.* — Considérons, dans une section quelconque mn située à une distance x' de l'extrémité de la pièce, un point ϵ éloigné de l'axe KX' d'une quantité $\alpha\epsilon = y'$, l'allongement ou le raccourcissement

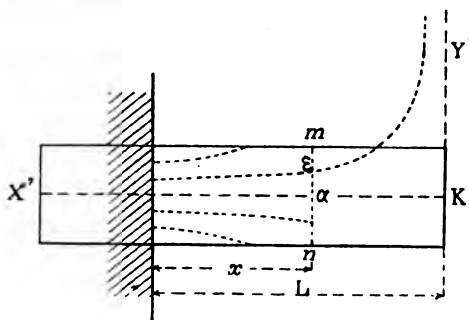


Fig. 57

par millimètre courant λ qui correspond au point ϵ est, comme nous le savons,

$$\lambda = \frac{\alpha \epsilon}{\rho} = \frac{y'}{\rho}$$

Le lieu géométrique cherché est donc donné par la relation

$$\frac{y'}{\rho} = \text{constante} = \lambda$$

Or on a

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = P \cdot (L - x) = P \cdot x'$$

et par suite

$$y' \cdot \frac{P \cdot x'}{E \cdot I} = \lambda$$

ce qui donne pour équation du lieu

$$x' \cdot y' = \frac{E \cdot I \cdot \lambda}{P}$$

Si I est constant d'un bout à l'autre de la pièce, chacun des lieux correspondant aux diverses valeurs (positives ou négatives) de λ est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes KX' , KY' .

§ 45. — **Effort tranchant. Sa valeur en fonction du moment fléchissant.**

Dans ce qui précède nous n'avons pas étudié d'une manière complète le cas d'une pièce droite soumise à une force normale P , car il nous reste encore à écrire une équation d'équilibre, celle qui exprime que la projection de toutes les forces sur la droite mn est nulle. Cette équation est la suivante :

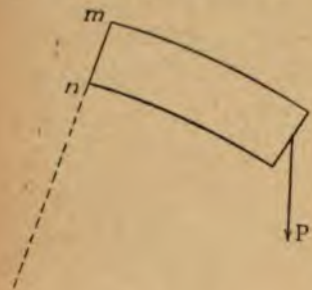


Fig. 58

Projection sur mn des forces intérieures appliquées à la section $mn +$ projection de P sur $mn = 0$
ou sensiblement, puisque la déformation est faible :

Projection sur mn des forces intérieures appliquées à la section $mn - P = 0$.

Lors donc que les forces intérieures ne se réduisent pas à un couple la section mn est soumise non seulement à un moment fléchissant $P(L - x)$, mais encore à une force de *cisaillement* ou de *glissement* qu'on désigne dans ce cas sous le nom d'*effort tranchant*. L'étude de

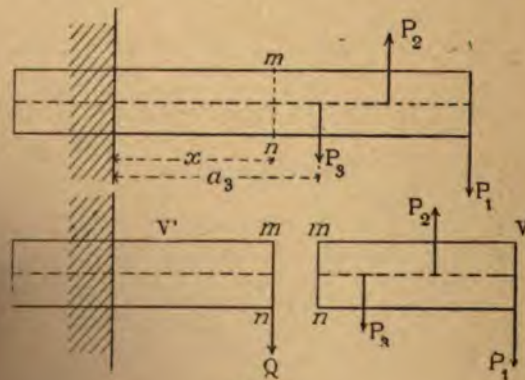


Fig. 59

Les forces qui se produisent ainsi est assez compliquée parce que nous le verrons tout à l'heure, le glissement ne se répartit pas

d'une manière uniforme dans toute l'étendue de chaque section transversale; il nous sera possible cependant de formuler des règles pratiques assez simples permettant de tenir compte du surcroît de fatigue qui résulte de l'effort en question.

Quelles que soient les forces (contenues dans le plan de symétrie) auxquelles une pièce est soumise, l'effort tranchant Q qui s'exerce sur une section quelconque du tronçon de gauche V' est évidemment égal à la somme algébrique ΣP des projections sur mn des forces extérieures appliquées à l'autre tronçon V , à condition, bien entendu, de faire figurer dans cette somme les réactions qui sont exercées par les points d'appui du corps et qui constituent évidemment des forces extérieures. Cet effort Q peut encore se déterminer d'une autre façon: pour la section considérée mn du tronçon V' , une force telle que P_3 donne en effet

$$\text{Moment } P_3 = P_3 \cdot (a_3 - x)$$

et par suite, en désignant par M le moment fléchissant total qui sollicite mn ⁽¹⁾,

$$M = \Sigma P \cdot (a - x) = \Sigma P \cdot a - x \cdot \Sigma P$$

On déduit immédiatement de là

$$\frac{dM}{dx} = - \Sigma P$$

et comme

$$Q = \Sigma P$$

il en résulte

$$Q = - \frac{dM}{dx}$$

la démonstration ci-dessus étant d'ailleurs évidemment valable pour le cas où les forces normales P sont, non pas seulement des forces isolées, mais encore des forces réparties, uniformément ou non, suivant une loi quelconque. Ainsi donc *l'effort tranchant en un point quelconque d'une poutre droite soumise à des forces situées dans le plan de symétrie et normales à la fibre moyenne est égal, en valeur absolue, à la dérivée du moment fléchissant en ce point prise par rapport à l'abscisse comptée suivant la longueur de la pièce.*

(1) Comme toujours le moment M est considéré comme positif quand le sens de la rotation a lieu de ox vers oy ; quant aux forces P elles sont prises positivement ou négativement suivant qu'elles sont dirigées dans le sens de oy ou en sens contraire.

En raison de l'importance de ce théorème nous allons en donner une démonstration géométrique et montrer en même temps *qu'il est encore exact dans le cas où les forces précédentes, sans être normales à la fibre moyenne, ont leurs points d'application situés sur cette dernière.*

Considérons à cet effet un tronçon H compris entre deux sections transversales infiniment voisines $mn, m'n'$ et supposons d'abord qu'il ne

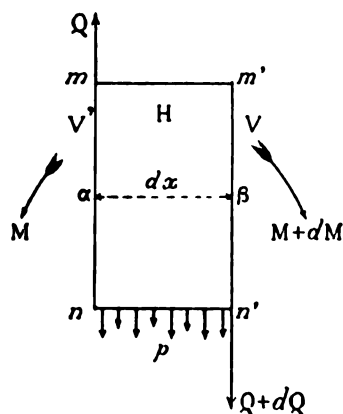


Fig. 60

soit soumis à aucune force *isolée* comprise de mn en $m'n'$, mais simplement à des forces qui soient des fonctions *continues* de l'abscisse x , par exemple uniformément réparties ou soumises à tout autre mode de distribution. Appelons p la résultante (infiniment petite) de ces efforts normaux et remarquons que le tronçon H est, comme toujours, en équilibre sous l'action de toutes les forces qui lui sont appliquées (forces extérieures p et forces intérieures provenant des tronçons supprimés V et V'). L'équation des moments prise par rapport au

point α de la fibre moyenne donne donc

$$M - \text{Moment des forces } p - (Q + dQ) \cdot dx - (M + dM) = 0$$

Or le moment des forces p est un infiniment petit du second ordre, car la résultante des forces p est infiniment petite ainsi que son bras de levier; pour la même raison on peut laisser de côté $dQ \cdot dx$; il reste donc

$$Q \cdot dx = - dM$$

$$Q = - \frac{dM}{dx}$$

comme nous l'avons annoncé (1). Lorsque $Q = 0$, M est maximum ou minimum; si Q est constamment nul, la fonction M se réduit à une constante.

Si dans la tranche infiniment mince considérée se trouvait une force isolée, l'effort tranchant varierait brusquement en ce point et deviendrait

(1) Comme il importe de le remarquer, la démonstration que nous venons de faire est identiquement applicable à un tronçon pris sur une pièce courbe; il faut seulement remplacer dx par la longueur ds de l'arc $\alpha\beta$, de sorte qu'on a alors $Q = - \frac{dM}{ds}$ (§ 183).

ainsi une fonction discontinue de l'abscisse; mais le théorème précédent subsiste de chaque côté du point d'application de la force.

Lorsque les forces extérieures p appliquées au tronçon II ne sont pas normales, on voit de suite que le moment de leur résultante n'est plus un infiniment petit du *second* ordre, car il comprend alors le terme $p'' \times \alpha\gamma$ qui est du premier ordre puisque le bras de levier $\alpha\gamma$ est une *quantité finie*; le raisonnement fait plus haut ne subsiste donc plus et le théorème précédemment démontré n'est plus exact, à moins toutefois que les forces p n'aient leur point d'application situé sur la fibre moyenne $\alpha\beta$; dans ce dernier cas en effet $\alpha\gamma$ est égal à zéro.

Comme exemple de la particularité précédente, on peut citer le cas où la pièce considérée est soumise à une série de couples infiniment petits constitués par des forces plus ou moins régulièrement réparties telles que celles qui sont indiquées sur la figure 62: l'effort tranchant est alors en effet évidemment nul en tous points tandis que le moment fléchissant, constamment variable, a une dérivée différente de zéro.

La restriction que nous venons de faire au sujet de la direction (qui doit être normale) des forces p , n'a pas sa raison d'être pour les forces isolées; le théorème ci-dessus n'étant en effet applicable que dans l'étendue d'un tronçon qui n'en contient pas, peu importe la façon dont elles sont situées dans le plan de symétrie de la pièce.

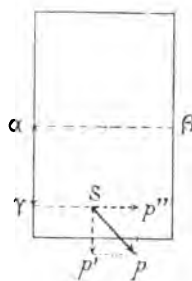


Fig. 61

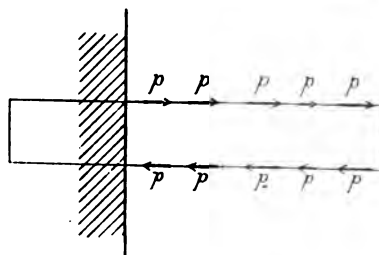


Fig. 62

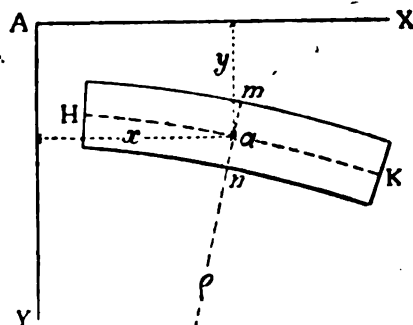
§ 46. — Remarques relatives au tracé des courbes des moments fléchissants et des efforts tranchants.

Une pièce droite étant soumise à un couple ou à une force normale, nous avons établi qu'on a

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

Ceci posé, soient AX et AY deux axes rectangulaires quelconques auxquels nous rapportons la position de la fibre moyenne déformée HK;

on sait que la valeur du rayon de courbure ρ en un point quelconque a est donnée par l'expression



$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Dans les problèmes relatifs à la flexion des pièces *primitivement droites* auxquelles les forces fléchissantes ne font éprouver qu'une *déformation légère*, on a l'habitude de supprimer, dans la valeur ci-dessus de ρ , le terme $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ qui,

dans ce cas, est effectivement négligeable devant l'unité; on peut ainsi prendre

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Nous avons donc, avec une exactitude bien suffisante pour les besoins de la pratique,

$$M = E. I. \frac{d^2y}{dx^2}$$

M étant le moment fléchissant relatif à la section considérée mn . Or, quelle que soit la direction des axes coordonnés, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif ou négatif suivant que la courbe tourne sa concavité vers les y positifs ou négatifs; c'est là un fait bien connu en analyse. Pour que l'équation ci-dessus soit satisfaite non seulement en valeur absolue mais encore avec son signe, il faut donc, *dans le tracé de la courbe des moments fléchissants, porter M du côté de la concavité* formée par la fibre moyenne supposée primitivement droite, c'est-à-dire *du côté où le moment fléchissant qui agit au point considéré tend à courber la pièce*. Cette règle est absolument indépendante de la direction des axes coordonnés et du tronçon qu'on considère soit à droite, soit à gauche de la section transversale mn .

Quant à l'effort tranchant Q , les valeurs $Q = \Sigma P$ et $Q = - \frac{dM}{dx}$ que nous obtenues au paragraphe précédent sont relatives, comme

nous l'avons fait remarquer au tronçon V', ΣP étant la projection sur mn des forces P appliquées à l'autre tronçon V. Or, dans les tracés graphiques relatifs aux efforts tranchants, ce que nous porterons en ordon-

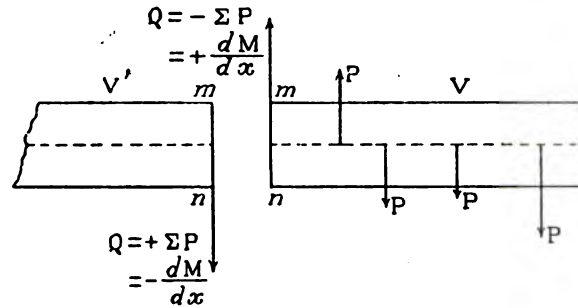


Fig. 64

nées ce sera la valeur de l'effort de cisaillement appliqué à la section transversale mn du tronçon V auquel sont appliquées les forces P (et non pas du tronçon V'); dans ces conditions les expressions algébriques ci-dessus doivent évidemment être changées de signe et, dans cette convention, il faut prendre par conséquent

$$Q = - \Sigma P$$

$$Q = + \frac{dM}{dx}$$

sans qu'il puisse y avoir aucune ambiguïté à cet égard, pas plus que sur la relation

$$M = + E. I. \frac{d^2y}{dx^2}$$

dont il vient d'être question tout à l'heure.

§ 47. — Répartition de l'effort tranchant dans la section transversale à laquelle il est appliqué. Glissement longitudinal, sa valeur.

Occupons-nous maintenant de voir comment l'effort tranchant se répartit dans la section transversale qu'il tend à cisailier (1); nous nous servirons pour cela d'un moyen détourné reposant sur le principe de la

(1) Ce sont les recherches entreprises en Russie par le Colonel Gouravski qui ont appelé l'attention sur ce point délicat de la Résistance des matériaux et qui ont permis d'en donner une solution élémentaire. (Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, 2^e semestre 1856, p. 328.)

réciprocité des glissements. Nous avons vu en effet (§ 38) que, si dans un corps un élément plan quelconque infiniment petit AB est sollicité par une force tangentielle φ , un second élément AK perpendiculaire à la direction de celle-ci se trouve nécessairement soumis à une seconde force tangentielle φ' perpendiculaire à l'intersection des deux éléments et égale à la première par unité de surface.

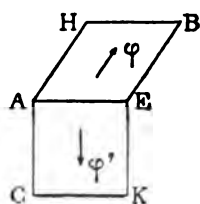


Fig. 65

Dans le cas actuel un élément quelconque bb' pris dans la section transversale mn est soumis à un effort de cisaillement qui est une certaine fraction, plus ou moins grande, de l'effort tranchant total; l'élément longitudinal aa' perpendiculaire au premier est donc soumis à une force tangentielle égale à la précédente et donnant lieu à un *glissement longitudinal* des fibres les unes par rapport aux autres.

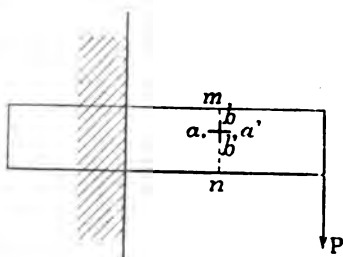


Fig. 66

L'existence de ce glissement peut être mise en évidence par quelques expériences bien simples: soumettons par exemple à la flexion produite par la force P une série de pièces superposées encastées en AB; leurs extrémités libres vont se disposer en gradins C'D', en montrant ainsi d'une manière bien claire l'existence d'un déplacement longitudinal des diverses couches les unes par rapport aux autres. Si l'on veut empêcher ce dernier de se produire, il faut faire usage de clavettes ou de boulons tels

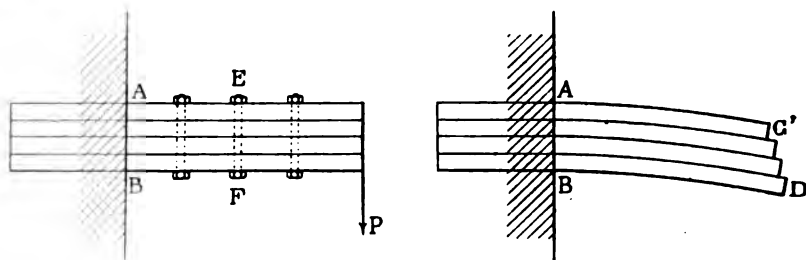


Fig. 67

que EF et avoir soin d'ailleurs de leur donner des dimensions suffisamment fortes, sans quoi ils se briseront comme le montre l'expérience.

Pour calculer quelle est, en chaque point d'une section transversale quelconque, la valeur de cette force de glissement longitudinal, imaginons que la pièce soit décomposée en une série de couches minces superposées dont les plans de séparation soient perpendiculaires au

plan de symétrie et parallèles à la fibre moyenne, comme on le voit sur la figure 68. En outre isolons par la pensée un petit élément de fibre $bb'dd'$ de section $d\omega$ et de longueur dx ; la portion V' de la pièce, située

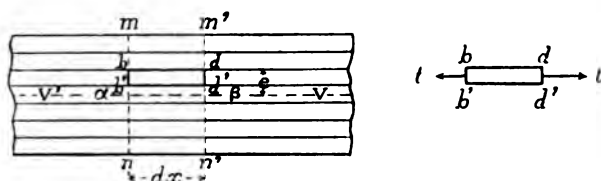


Fig. 68

à sa gauche exerce évidemment sur lui une traction longitudinale t qui est précisément égale à la tension de la fibre bd au point b ; on a donc (§ 44)

$$t = E. d\omega. \frac{e}{\rho}$$

e étant la distance du point b à la fibre neutre $\alpha\beta$.

D'autre part on sait que

$$\frac{E. I}{\rho} = M$$

Par conséquent

$$t = \frac{e. d\omega}{I} \cdot M$$

De même la surface élémentaire dd' est soumise, de la part de la portion de droite V , à une traction longitudinale t' qui a pour valeur, *en supposant que la section de la pièce soit constante d'un bout à l'autre et par suite que dM est la seule quantité variable quand on passe de mn à $m'n'$,*

$$t' = \frac{e. d\omega}{I} (M + dM)$$

On déduit de là, en appelant Q l'effort tranchant qui s'exerce dans la section transversale considérée

$$t' - t = \frac{e. d\omega}{I} \cdot dM = \frac{Q}{I} \cdot e. d\omega. dx$$

puisque

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

C'est pour savoir quelle est au point b et sur une longueur dx la force totale de glissement qui résulte de l'action de la partie ACNS de la pièce sur la portion inférieure. Nous n'avons évidemment qu'à faire la

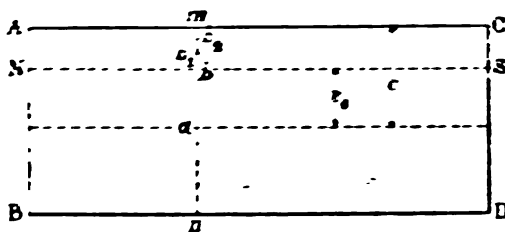


Fig. 60

somme des actions tangentielles telles que $f - t$ qui s'exercent aux points b, b_1, b_2, \dots compris depuis b jusqu'en m ; nous avons ainsi pour valeur de la résultante cherchée

$$\int_{r_0}^x \frac{Q}{I} \cdot e \cdot d\omega \cdot dx = \frac{Q}{I} \cdot dx \cdot \int_{r_0}^x e \cdot d\omega$$

Cette force est appliquée à un rectangle ayant pour côtés dx et la largeur l de la pièce au point b ; la force de glissement par unité de surface (par millimètre carré) est donc (1)

$$R'' = \frac{Q}{I \cdot l} \int_{r_0}^x e \cdot d\omega$$

UU' étant la section transversale constante de la pièce, l'expression $\int_{r_0}^x e \cdot d\omega$ est le moment de la surface S par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$ mené par le centre de gravité G perpendiculairement au plan de symétrie; sa valeur est naturellement la même soit qu'on considère la surface S, soit qu'on prenne la portion complémentaire S' puisque l'intégrale totale correspondant à l'ensemble de la section S + S' est égale à zéro.

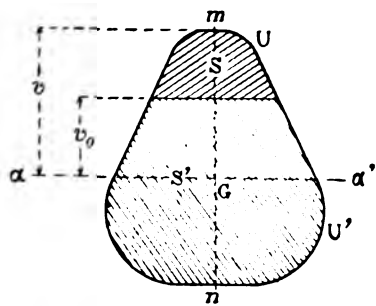


Fig. 70

On voit facilement que l'intégrale $\int_{r_0}^v e \cdot d\omega$, nulle pour les points m et n

(1) Ceci suppose que la force de glissement se répartit uniformément sur toute la surface de la bande horizontale $l \cdot d\omega$, ce qui n'est nullement prouvé; mais, si l'on considère que, dans les cas étudiés en pratique, la largeur l est généralement faible, on conçoit que cette hypothèse doit donner des résultats suffisamment exacts; il faut cependant avoir soin de n'appliquer la formule ci-dessus qu'à des pièces de peu de largeur.

de la surface libre, est maximum au centre de gravité G situé sur la ligne des fibres moyennes; il en est de même de l'expression $\frac{Q}{I} \int_{v_0}^v e \cdot d\omega$ à moins que la largeur l de la pièce n'aille en augmentant notablement dans le voisinage de cette région centrale $\alpha\alpha'$, ce qui n'a pas lieu dans la pratique où l'on s'efforce au contraire d'éviter près de l'axe les pièces soumises à la flexion; par conséquent, à moins de cas exceptionnels analogues par exemple à celui de la figure 71 (1), les glissements sont maximum sur la ligne des fibres moyennes et diminuent à mesure qu'on s'éloigne de cette dernière.

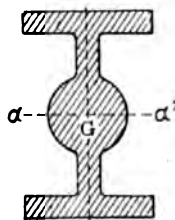


Fig. 71

L'expression R'' calculée plus haut donne l'effort de glissement par millimètre carré qui s'exerce en un point donné; il importe de remarquer qu'on peut aussi avoir besoin de connaître la valeur de cet effort non pas par unité de surface mais par millimètre courant, c'est-à-dire pour une bande rectangulaire ayant la largeur l de la pièce et une longueur de 1 millimètre. Il est clair que cette force est égale à

$$\frac{\frac{Q}{I} \cdot dx \int_{v_0}^v e \cdot d\omega}{\frac{v_0}{dx}} = \frac{Q}{I} \cdot \int_{v_0}^v e \cdot d\omega$$

Cette expression est utile à connaître dans un certain nombre de cir-

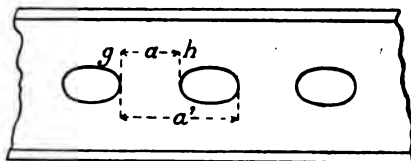


Fig. 72

constances, par exemple lorsqu'on a affaire à des pièces présentant des évidements longitudinaux comme ceux de la figure 72 (2); il faut alors que la matière comprise dans la longueur d'un plein, de g en h , soit capable de résister à la force de glissement qui se produit sur la longueur d'un vide et d'un plein, c'est-à-dire à

$$a' \cdot \frac{Q}{I} \cdot \int_{v_0}^v e \cdot d\omega$$

(1) La même particularité se présenterait si la section transversale de la poutre fléchie était un losange.

(2) On en trouvera également des applications dans les problèmes traités aux paragraphes 51 et 52.

ce qui donne pour valeur de la charge par millimètre carré dans la partie conservée

$$\frac{a'}{a} \cdot \frac{Q}{I \cdot L} \int_{r_0}^x e \cdot d\omega$$

c'est d'ailleurs ce qui est évident *a priori*.

L'étude qui précède se rapporte, comme nous l'avons fait remarquer, au cas d'une poutre ayant *même section sur toute sa longueur*; si cette condition n'est pas remplie, le problème se présente sous une forme beaucoup plus compliquée parce que dans la relation

$$t = \frac{e \cdot d\omega}{I} \cdot M$$

$e \cdot d\omega$ et I varient, dans ce cas, d'une section transversale à une autre en même temps que M et l'expression qui donnerait la valeur de $t' - t$ est alors singulièrement plus compliquée. On trouvera un exemple intéressant d'une détermination de ce genre dans le *Cours de Mécanique appliquée* de Bresse, troisième édition, page 76.

§ 48. — Application de la formule du glissement longitudinal à quelques cas particuliers de pièces à section constante.

1° Calculons la force de glissement longitudinal dans le cas d'une poutre horizontale à section rectangulaire de longueur L encastée à

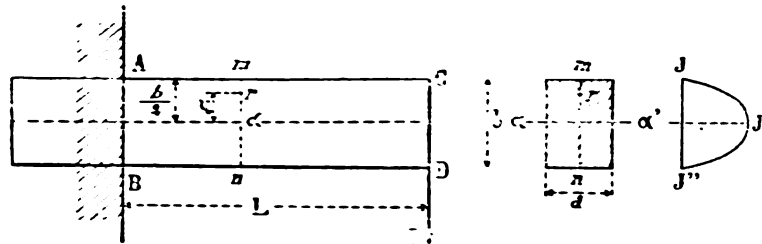


Fig. 73

l'une de ses extrémités et chargée à l'autre d'un poids P . En un point r d'une section transversale mn , cette force par millimètre carré est égale à (§ 47)

$$R'' = \frac{P}{I \cdot a} \int_{r_0}^x e \cdot d\omega = \frac{P}{12 \cdot a \cdot b^3 \times a} \left(a \frac{b^2}{8} - a \frac{r_0^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{P (b^2 - 4 r_0^2)}{a b^3}$$

Les différentes valeurs de cette expression sont données par les ordonnées d'une courbe telle que $J J' J''$; le maximum, qui se produit à la ligne des fibres moyennes est égal à

$$\frac{3}{2} \frac{P}{a \cdot b}$$

c'est-à-dire qu'en ce point il est une fois et demie plus grand que si l'effort tranchant P se répartissait d'une manière uniforme dans toute l'étendue de la section.

2° Considérons un fer à double T à branches égales ou une poutre rectangulaire creuse dans lesquels l'épaisseur de l'âme et celle des semelles sont faibles par rapport à la hauteur totale, comme cela a lieu dans la pratique. La force de glissement par millimètre carré produite par la charge P est donnée, comme précédemment, par l'expression (§ 47)

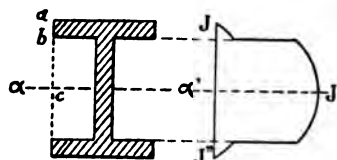


Fig. 74

$$R'' = \frac{P}{I \cdot l} \int_{v_0}^{v'} e \cdot d\omega$$

qu'il est facile de calculer pour un point situé à une distance quelconque de l'axe $\alpha \alpha'$ passant par le centre de gravité. On reconnaît sans peine que sa valeur, très faible de a en b , augmente brusquement à partir de ce point pour rester ensuite à peu près constante jusqu'en c , comme on le voit sur la courbe $J J' J''$. Le glissement longitudinal est donc à peu près nul dans les semelles et presque constant sur toute la hauteur de l'âme; dans la pratique on peut admettre qu'il en est rigoureusement ainsi, ce qui conduit à la règle pratique suivante : *dans les pièces à âme fortement évidée, comme les fers à T, dans lesquelles l'épaisseur de l'âme et des semelles est petite par rapport à la hauteur totale, le glissement longitudinal et par conséquent l'effort tranchant peuvent être considérés comme s'exerçant uniquement sur l'âme et s'y répartissant d'une manière uniforme (1).*

3° Une étude tout à fait semblable à celles qui précèdent est applicable

(1) Il est facile de voir que la même conclusion peut être admise, au moins à titre approximatif pour les pièces à âme évidée de section variable, ou du moins pour celles qu'on rencontre généralement dans la pratique : l'effort tranchant, forcément nul à la face supérieure et à la face inférieure (§ 39), reste faible dans toute la hauteur des semelles en raison de leur peu d'épaisseur, et il ne varie pas beaucoup de valeur sur toute la hauteur de l'âme.

à une surface quelconque et ne présente aucune difficulté; s'il s'agit par exemple d'un cylindre creux ayant une forme circulaire, elliptique,

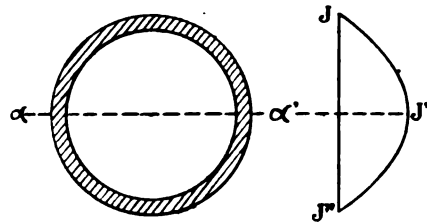


Fig. 75

rectangulaire, etc., et dont l'épaisseur peut d'ailleurs être variable d'un point à l'autre d'une même section transversale, on trouvera que la valeur du glissement longitudinal est donnée par une courbe telle que JJ'J'' dont les ordonnées, nulles aux extrémités, sont évidemment maximum au milieu si l'épaisseur est constante.

évidemment maximum au milieu si l'épaisseur est constante.

§ 49. — **Détermination de la forme exacte que prennent les sections transversales d'une pièce fléchie par une force normale.**

Comme nous l'avons dit (§ 44), l'expérience montre que, lorsqu'une pièce droite est fléchie par une force normale, les sections transversales primitivement planes restent, après la flexion, *sensiblement* planes et normales, mais on doit comprendre maintenant qu'il ne saurait en être rigoureusement ainsi. Si l'on se reporte en effet à l'une des remarques faites à propos du glissement (§ 39, fig. 46), on verra que, toutes les fois qu'il se produit un glissement i , la section transversale et la fibre longitudinale déformées font en ce point un angle égal à $90^\circ - i$; i n'é-

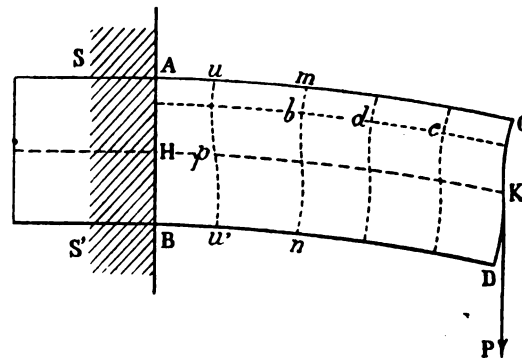


Fig. 76

tant pas constant sur toute la hauteur de la pièce fléchie (§ 47), il en résulte forcément que les sections transversales primitivement droites se courbent d'une façon plus ou moins prononcée.

Si l'on a affaire par exemple à une pièce rectangulaire fléchie par une force normale P , le glissement i , forcément nul sur les faces *libres* (*) AC, BD augmente graduellement à mesure qu'on se rapproche de la fibre moyenne HK; les sections transversales, primitivement planes, vont donc se courber en forme de *doucine*, elles couperont AC et BD sous un angle de 90° et présenteront un point d'inflexion sur HK. Il résulte d'ailleurs de l'expression même qui donne la valeur de la force de glissement que, dans le cas actuel où l'effort tranchant est constant, celle-ci est indépendante de la position de mn ; toutes les sections transversales vont donc se transformer, sous l'action de la force P , en courbes identiques comme l'indique la figure 76 (*). Comme conséquence il convient de noter ce résultat remarquable, à savoir que les portions de fibres $bd, de...$ comprises de l'une à l'autre ont précisément la même longueur et par suite les dilatations et les raccourcissements sont aussi les mêmes que dans l'hypothèse précédemment admise de la conservation de la forme plane des sections dans une poutre fléchie par une force normale.

S'il s'agit d'une pièce fortement évidée comme les fers à double T

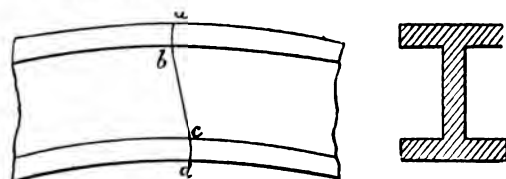


Fig. 77

(1) Les faces AC et BD sont dites *libres*, parcequ'elles ne sont soumises à aucune force extérieure.

(2) Il convient cependant d'ajouter que cette transformation de lignes droites en courbes infléchies n'a pas lieu pour certaines sections très exceptionnelles, par exemple dans le cas où un obstacle absolu et insurmontable s'y oppose. Si on imagine, par exemple, que la poutre considérée soit scellée et soudée dans son encastrement SS' de telle façon qu'aucun déplacement ne puisse s'y produire, la section AB reste alors forcément plane et c'est par une série continue de transitions réparties sur une petite longueur Hp que se fait le passage d'une forme à l'autre. Quant à ce qui se passe de AB en uu' , on ne le sait pas et on ne le saura probablement jamais d'une manière mathématiquement rigoureuse, car cela dépend d'intégrations qui seront peut-être toujours impossibles. Pour que cette indécision ne puisse être une cause de mécomptes pour les constructeurs, il suffira que ceux-ci calculent les dimensions de leurs pièces dans l'un et l'autre des deux modes de déformations (forme plane et forme infléchie de AB), et qu'ils adoptent les plus fortes qui résulteront des deux genres de calculs.

Une remarque analogue est applicable à l'extrémité libre de la pièce; la forme de la section CD dépend évidemment, d'une façon essentielle, du mode d'application de la force P ou, plus généralement, des forces dont la résultante est P ; seulement, comme tout à l'heure, à une petite distance de CD les choses se règlent toujours d'elles-mêmes de la même façon, c'est-à-dire que très près de CD on a la forme en *doucine* dont il vient d'être question; c'est là une remarque d'un caractère général qui a été déjà faite au commencement de ce Traité (§ 3).

dont il a été question plus haut (§ 48), le glissement i , à peu près nul dans l'épaisseur des semelles, a une valeur presque constante sur toute la hauteur de l'âme; une section primitivement plane prend donc une forme telle que $abcd$ composée d'une partie sensiblement rectiligne bc se recourbant brusquement à angle droit avec les fibres longitudinales en ba et cd . Quelle que soit la section de la pièce considérée, c'est d'ailleurs toujours par le calcul du glissement longitudinal que l'on parviendra à se rendre compte de la déformation que subissent les sections transversales.

Avant de terminer ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer

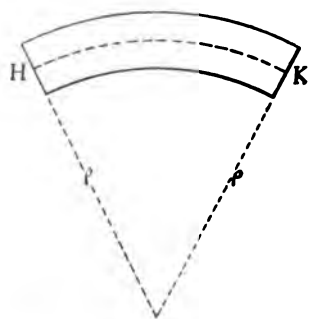


Fig. 78

que, si la flexion est produite non pas par une force mais par un couple comme au paragraphe 43, l'effort tranchant et par suite le glissement longitudinal est nul en tous les points; dans ce cas et dans ce cas seulement (la section de la pièce étant d'ailleurs constante d'une extrémité à l'autre), les sections transversales restent planes et normales; elles concourent toutes au centre de l'arc de cercle HK formé par la fibre moyenne après sa déformation.

Les considérations qui précèdent permettent, comme on le voit, de se rendre un compte exact des phénomènes qui se produisent pendant la flexion et qui ont été envisagés pendant longtemps d'une manière erronée; l'honneur de les avoir mis en lumière revient à de Saint-Venant dont nous n'avons fait que résumer sur ce point et d'une manière élémentaire la savante analyse.

§ 50. — Calcul de la résistance des pièces fléchies, en tenant compte de l'effort tranchant et du glissement longitudinal.

Une pièce ABCD étant fléchie par une force normale P, nous venons de montrer qu'en un point donné il se produit non seulement un allongement ou une compression de la fibre longitudinale, mais encore un glissement dont nous savons maintenant évaluer la valeur. Pour avoir la fatigue réelle au point considéré, il faudrait donc en réalité combiner ces deux déformations l'une avec l'autre et déterminer quelle est la

charge maximum qui en résulte ; nous nous occuperons de ce problème en parlant de la Résistance composée ; mais, dans le cas de la flexion ordinaire et avec les formes généralement adoptées, cette recherche ne présente pas d'intérêt pratique et, sauf quelques cas tout à fait exceptionnels où les sections sont assujetties à rester planes (§ 127), le calcul des pièces fléchies peut se faire d'une manière plus simple. Nous venons de voir en effet que, dans une section transversale pouvant s'infléchir librement comme c'est le cas général, les parties où les allongements et les raccourcissements sont les plus grands sont précisément celles où il n'y a pas de glissement longitudinal et par suite d'effort tranchant ; si l'on considère au contraire les points situés sur la ligne des fibres moyennes, la flexion proprement dite ne leur fait éprouver aucune fatigue, tandis qu'en revanche c'est là que le cisaillement s'exerce avec le plus d'intensité ; on conçoit donc que, pour s'assurer qu'une pièce fléchie par une force normale se trouve dans de bonnes conditions de sécurité, il suffise avec les formes usuelles :

1° de calculer la charge à la traction et à la compression des fibres les plus éloignées de l'axe,

2° de déterminer sur la fibre moyenne la charge due au glissement longitudinal,

et de s'assurer ensuite qu'aucune d'elles ne dépasse les limites admises dans la pratique (1).

Appliquons ces règles simples aux cas qu'on rencontre le plus habituellement.

I. — Lorsque la section de la pièce considérée est pleine et que sa hauteur est petite par rapport au bras de levier de la force fléchissante, il est facile de reconnaître que les efforts de cisaillement ont alors trop peu d'importance pour être à craindre ; on peut donc, dans ce cas, laisser absolument de côté l'effort tranchant et se borner à constater au moyen de la formule

$$R = \frac{\text{Moment fléchissant} \times v}{I} = \frac{M \cdot v}{I}$$

(1) Ces considérations ne prouvent pas, d'une manière absolue, qu'entre les fibres extrêmes et la fibre moyenne il ne s'en trouve pas d'autres supportant une charge plus forte que celles-ci ; c'est cependant ce qui a lieu, au moins avec les formes de sections habituellement employées (§ 47) et cela quelle que soit la valeur du bras de levier de la force fléchissante. S'il s'agit, par exemple, d'une section rectangulaire ou circulaire, de Saint-Venant a montré que, le bras de levier allant indéfiniment en diminuant à partir d'une valeur initiale assez grande, le maximum de charge reste d'abord cantonné à la surface puis passe brusquement au centre ; cette propriété remarquable justifie, au moins pour les sections en question, l'assertion émise ci-dessus. (Voir la *Torsion des prismes*, par de Saint-Venant, p. 262.)

que la charge maximum R des fibres les plus éloignées de l'axe n'atteint pas une valeur dangereuse.

II. — La pièce étant toujours supposée pleine, mais étant sollicitée par une force dont le bras de levier est très faible (environ trois fois la hauteur et au dessous), la fatigue maximum cesse brusquement de se produire à la surface, comme nous venons de le dire, et ce sont les points situés sur la fibre moyenne ou dans son voisinage immédiat qui sont le plus chargés; il faut donc alors calculer pour celle-ci la valeur du glissement longitudinal ⁽¹⁾ afin de s'assurer que la pièce n'est pas soumise à un effort trop considérable.

III. — Si l'on a affaire à une pièce évidée telle qu'un rail, une poutre creuse, etc., le glissement longitudinal peut donner lieu, dans la partie centrale peu épaisse, à une fatigue dangereuse et il y a lieu en conséquence :

1° de s'assurer, comme tout à l'heure, au moyen de la formule $R = \frac{M.v}{I}$ que la charge R des fibres les plus éloignées de l'axe ne dépasse pas les valeurs admises dans la pratique;

2° de vérifier qu'il ne se produit pas de glissement trop considérable suivant la ligne des fibres moyennes, c'est-à-dire que la charge

$R'' = \frac{Q}{I.l} \int_0^v e.d\omega$ n'est pas trop forte pour un effort de cisaillement.

IV. — Dans le cas où la pièce soumise à un effort de flexion se compose de deux semelles minces réunies par une âme peu épaisse comme les fers à T ou les poutres tubulaires ordinaires, nous avons vu que cette âme peut, dans la pratique, être considérée comme résistant seule à l'effort tranchant Q qui se répartit à peu près uniformément dans toute sa surface (§ 48); si donc on appelle h sa hauteur, on n'aura rien à craindre de l'effort tranchant et par conséquent du glissement longitudinal quand le quotient $\frac{Q}{I.l}$

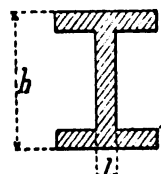


Fig. 79

ne dépassera pas le chiffre admis pour la charge maximum par millimètre carré relative au cisaillement. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que, si on veut calculer dans ce cas l'expression $\frac{Q}{I.l} \int_0^h e.d\omega$, on trouve très sensiblement $\frac{Q}{I.l}$; c'est le résultat auquel on devait évidemment arriver. Nous pouvons donc dire que, dans le cas de pièces analogues à

(1) Comme on le sait, cette valeur est égale à $\frac{Q}{I.l} \int_0^v e.d\omega$, v étant, dans la section transversale considérée, la distance du centre de gravité à la fibre qui en est la plus éloignée.

celles où la matière est concentrée dans deux semelles réunies par une ou plusieurs âmes relativement hautes et peu épaisses, on devra s'assurer

1° que les semelles sont capables, à elles seules, de résister à des efforts de traction et de compression égaux à $\frac{M \cdot v}{I}$,

2° que l'âme peut, à elle seule, résister à l'effort de glissement longitudinal $\frac{Q}{l} \int_0^v e \cdot d\omega = \frac{Q}{l \cdot h}$.

Dans les calculs de résistance des matériaux relatifs aux pièces véritablement fléchies (et non pas plutôt cisailées que fléchies comme dans le cas n° II), on omet souvent de vérifier qu'elles n'ont rien à redouter du glissement longitudinal; cela tient d'une part à ce que, dans les pièces fortement évidées et d'une hauteur relativement grande comme les fers à T, on est forcé, pour se mettre à l'abri du *déversement* ou *flambement*, de donner à l'âme, dans les types usuels, une épaisseur plus grande qu'il n'est nécessaire pour résister à l'effort tranchant; tel est le phénomène qui se produit pour les anciens rails en fer, mais ce serait une erreur de croire qu'il doit toujours en être ainsi. Si l'on étudie par exemple ce qui se passe dans certains rails d'acier où le champignon a été sensiblement augmenté de volume aux dépens de l'âme, on trouve que le démaigrissement de cette dernière a été poussé à un point tel qu'elle arrive à travailler par cisaillement presque autant que le font le champignon et le patin par traction et compression; on ne saurait donc, sans danger, aller plus loin dans cette voie, et le calcul que nous avons indiqué est nécessaire pour montrer où il convient de s'arrêter pour ne pas dépasser les limites imposées par la sécurité (1).

§ 51. — Calcul des tôles et des rivets d'une poutre d'assemblage de section constante.

Comme application de ce qui précède, proposons-nous de calculer les échantillons d'une poutre en tôle, de grandes dimensions, formée par la réunion d'un certain nombre de pièces assemblées et ayant par exemple la disposition d'ensemble indiquée par la figure 80. Nous supposons que l'âme est mince et haute et qu'elle a un moment d'inertie très faible par rapport à celui des semelles dont la hauteur est elle-même assez petite en comparaison de celle de la poutre; enfin, pour fixer les idées,

(1) Voir le *Traité des Chemins de fer*, de Couche, tome III, p. 809.

nous considérerons le cas où la pièce, encastrée à l'une de ses extrémités, est fléchie à l'autre par une force normale P dont le bras de levier est L.

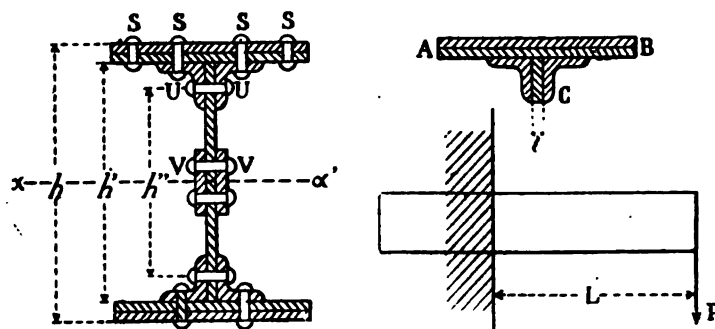


Fig. 80

1° *Calcul des semelles.* — Nous savons que les semelles (tôles et cornières ABC) peuvent être considérées comme travaillant uniquement l'une à la traction, l'autre à la compression, et la charge par millimètre carré qu'elles subissent est donnée par la relation

$$R = \frac{P \cdot L \cdot \frac{h}{2}}{I}$$

Ω étant la section de *chacune* des semelles ABC, on a sensiblement

$$I = 2 \times \Omega \cdot \frac{1}{4} h^2 = \frac{1}{2} \Omega \cdot h^2$$

et par suite

$$R = \frac{P \cdot L}{\Omega \cdot h}$$

équation qui permet de déterminer Ω et h de telle façon que la valeur de R ne dépasse pas la charge maximum par millimètre carré qu'on admet pour la traction ou la compression.

2° *Calcul de l'âme.* — L'âme, d'épaisseur l et d'une hauteur égale environ à h' , peut être considérée comme soumise à l'effort tranchant P uniformément réparti (§ 50); elle est donc soumise à une force de cisaillement dont la valeur par millimètre carré

$$R'' = \frac{P}{l \cdot h'}$$

ne doit pas dépasser le chiffre de sécurité admis pour les phénomènes de glissement.

3° *Calcul des rivets des semelles.* — Les rivets S qui réunissent entre elles les diverses pièces superposées composant les semelles ont à résister à un effort de glissement longitudinal dont la valeur *par millimètre courant* de la longueur de la poutre est égale à (§ 47)

$$\frac{P}{I} \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} e. d\omega$$

ou sensiblement

$$\frac{P}{h}$$

Si donc on appelle n le nombre de files de rivets (4 dans la figure 80), d leur diamètre, δ leur écartement de centre en centre, et si l'on remarque qu'ils ne travaillent chacun que par une section, on a, en écrivant l'équilibre du système pour une longueur δ de la poutre,

$$n \times \frac{1}{4} \pi. d^2 \times R'' = \frac{P}{h} \times \delta$$

R'' étant la charge de sécurité admise pour le cisaillement. Si l'on se donne arbitrairement δ en fonction de d , cette dernière quantité se déduit immédiatement de la relation ci-dessus.

4° *Calcul des rivets servant à l'assemblage de l'âme avec les semelles.* — Ces rivets U, qui travaillent par deux sections, sont soumis à un effort de glissement longitudinal qui, sur une longueur de 1 millimètre de la poutre s'élève à

$$\frac{P}{I} \int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} e. d\omega$$

ou sensiblement à

$$\frac{P}{h}$$

Leur diamètre d' et leur écartement de centre en centre δ' sont donnés, comme tout à l'heure, par l'équation

$$2 \times \frac{1}{4} \pi. d'^2 \times R'' = \frac{P}{h} \times \delta'$$

5° *Calcul des rivets du couvre-joint longitudinal.* — Supposons l'âme assez haute pour qu'on soit conduit à la faire en deux pièces réunies

par un couvre-joint double. Chacune des files V des rivets de celui-ci doit résister à un effort de glissement longitudinal qui s'élève par millimètre courant à

$$\frac{P}{I} \int_0^{\frac{h}{2}} e. d\omega$$

ou sensiblement à

$$\frac{P}{h}$$

Ces rivets travaillant par deux sections puisque le couvre-joint est double, on a

$$2 \times \frac{1}{4} \pi. d''^2 \times R'' = \frac{P}{h} \times \delta''$$

Les calculs que nous venons de faire montrent la marche à suivre dans les différents cas plus ou moins variés qui peuvent se présenter dans la pratique. Dans plus d'une circonstance la valeur des intégrales $\int e. d\omega$ pourra s'obtenir d'une manière suffisamment exacte par des procédés approximatifs analogues à ceux que nous avons employés; si l'on juge que cette simplification n'est pas possible, on devra évaluer exactement chacune de ces expressions qui représente simplement le moment d'une surface par rapport à la ligne des fibres moyennes de la pièce; dans ce cas on prendra également pour l sa valeur véritable.

Il convient de remarquer que, dans l'exemple que nous avons traité, l'effort tranchant est le même d'un bout à l'autre de la poutre; s'il n'en est pas ainsi, et c'est ce qui arrive dans une foule de circonstances (charges multiples, charges uniformément réparties, etc.), les proportions théoriques du rivetage ne sont pas les mêmes d'une extrémité à l'autre de la pièce, mais leur étude pourra toujours se faire de la même façon.

§ 52. — Calcul des pièces d'assemblage réunissant plusieurs poutres superposées.

Supposons que nous ayons plusieurs poutres superposées fléchies par une force normale P et voyons quelles sont les dimensions des clefs d'assemblage qu'il faudrait interposer entre elles pour les rendre solidaires et les faire travailler comme une pièce unique.

Après ce qui a été dit précédemment, ce calcul ne présente pas de difficultés : la clef M par exemple doit en effet résister à la force de cisail-

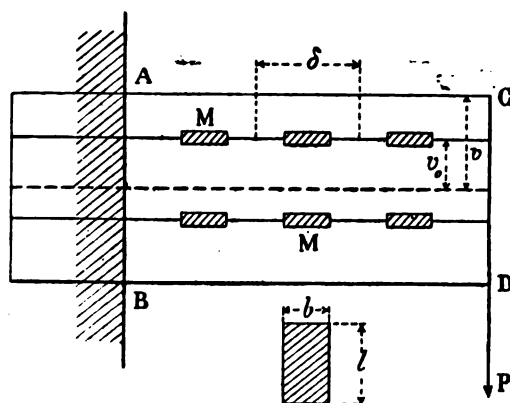


Fig. 81

lement ou de glissement longitudinal q qui se produit sur la longueur δ correspondant à l'écartement des clefs et qui est égale à (§ 47)

$$q = \delta \times \frac{P}{I} \int_{v_0}^v e. dw$$

Si donc on appelle b la largeur de la clef considérée et l sa longueur, égale à la largeur de la poutre, on a, pour déterminer les dimensions cherchées, l'équation

$$b. l \times R'' = \delta. \frac{P}{I} \int_{v_0}^v e. dw$$

R'' étant la charge de sécurité admise pour le cisaillement.

On remarquera que, si l'effort tranchant est constant, les clefs d'une même file, supposées égales, doivent être équidistantes.

Si l'on examine de plus près les phénomènes qui se produisent, il est

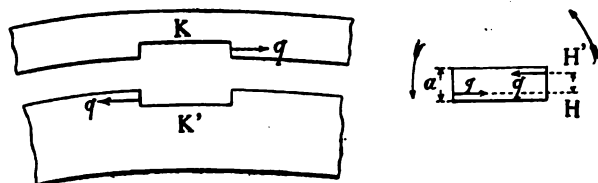


Fig. 82

facile de reconnaître que les clefs ne suffisent pas à elles seules pour rendre les deux pièces absolument solidaires ; raisonnons en effet, pour

plus de simplicité, sur le cas où il n'y a que deux poutres superposées et examinons les chacune à part ainsi que les clefs de façon à bien nous rendre compte de la disposition des forces q dont l'effet est de forcer la pièce supérieure K à s'allonger et l'autre K' à se raccourcir. Sous l'influence de ces forces les clefs tendent à tourner, actionnées par le couple $q \times III'$, et par suite les deux pièces K et K' sont sollicitées à s'écarter

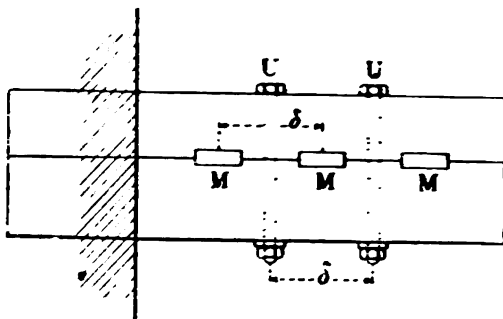


Fig. 83

l'une de l'autre. Pour résister à ce genre d'efforts, on se trouve conduit à faire usage de brides ou de boulons U que nous supposons par exemple situés à la même distance que les clefs; chacun d'eux a à résister à une force de traction T donnée par la relation

$$T \times \delta = \text{Moment du couple } q = q \times H H'$$

Le bras de levier HH' étant certainement inférieur à l'épaisseur a de la clef, on aura toute sécurité en admettant que la tension T atteigne la valeur

$$T = \frac{q \cdot a}{\delta} = \frac{P \cdot a}{I} \cdot \int_{v_0}^v e \cdot d\omega$$

On en déduit immédiatement les dimensions à donner aux brides ou aux boulons. Si ce sont ces derniers dont on fait usage, ils ont évidemment pour effet non seulement de s'opposer à l'écartement des poutres superposées, mais encore de résister au glissement longitudinal; leur emploi permet donc de réduire les dimensions des clefs.

Il résulte également de l'étude précédente qu'on a intérêt, pour diminuer le couple $q \times HH'$, à faire usage de clefs ayant une épaisseur aussi faible que cela est pratiquement possible. Si l'on pouvait réduire cette dernière à zéro, on se trouverait alors dans le cas d'une poutre d'une seule pièce, qui peut en effet être considérée comme composée d'une série de feuilles infiniment minces superposées les unes aux autres et se

sollicitant mutuellement par une sorte de frottement tangential, sans qu'il se produise de forces normales aux surfaces de séparation.

Nous ferons remarquer, en terminant, que la pièce inférieure K', comprimée par les forces q , tend à se courber et à fléchir d'une clef à l'autre comme le font les pièces comprimées; l'emploi de brides ou de boulons est donc doublement avantageux puisqu'il a évidemment pour effet de s'opposer à cette flexion et, à ce point de vue, il convient de placer ces organes de liaison au milieu de l'intervalle qui sépare deux clefs consécutives.

§ 53. — Calcul des efforts qui se produisent suivant un joint oblique dans une poutre de section constante.

Supposons qu'il existe, dans une pièce ABCD, un joint oblique, rectiligne ou non, perpendiculaire au plan de symétrie qui contient la force P et proposons-nous de calculer les efforts, l'un normal, l'autre tangential qui se produisent en un point quelconque m de la surface de séparation; la solution de ce problème nous donnera ainsi le moyen de déterminer

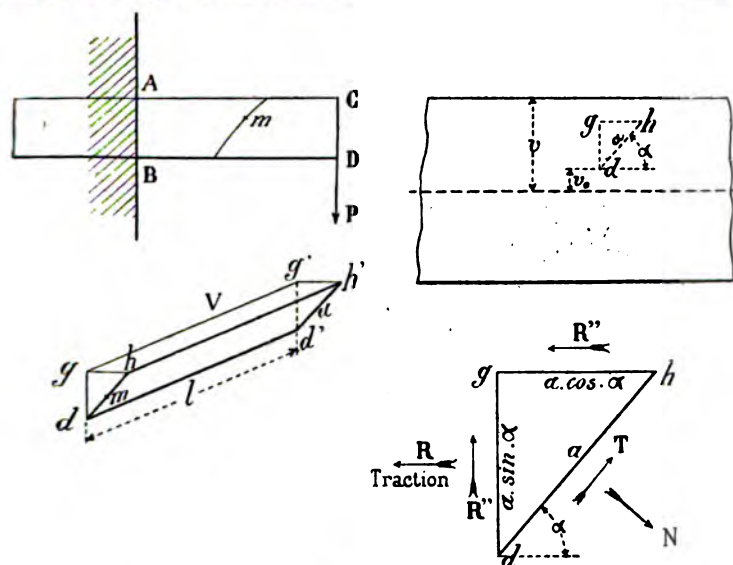


Fig. 84

les dimensions des organes d'assemblage (clefs, boulons ou brides) dont il convient de faire usage pour rétablir la continuité détruite par l'existence du joint.

Prenons au point m un élément infiniment petit dh du joint, ayant une longueur a , et supposons-le d'abord situé dans la région supérieure où il y a allongement des fibres longitudinales; on peut considérer dh comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés, parallèles et perpendiculaires à la ligne des fibres moyennes, sont égaux à $a \cdot \cos \alpha$ et $a \cdot \sin \alpha$. Supposons maintenant détaché de la poutre le petit prisme triangulaire V dont la base est le triangle précédent et dont les arêtes, perpendiculaires au plan de symétrie, ont pour longueur la largeur l de la pièce; nous savons (§ 44 et 47) que les faces horizontales et verticales de ce solide sont soumises à trois forces dont les valeurs par millimètre carré sont égales à

$$\text{Force longitudinale de traction appliquée à la face verticale } gh \left. \vphantom{\int} \right\} R = \frac{M \cdot v_0}{I}$$

$$\text{Force de cisaillement appliquée à la face verticale } gh \left. \vphantom{\int} \right\} R'' = \frac{P}{I \cdot l} \int v_0^2 e \cdot d\omega$$

$$\text{Force de glissement longitud. appliquée à la face horizontale } gh \left. \vphantom{\int} \right\} R''' = \frac{P}{I \cdot l} \int v_0^2 e \cdot d\omega$$

Les dimensions de la poutre ainsi que la force P étant données, R et R'' sont des quantités qui sont connues en vertu des relations ci-dessus. Pour trouver les efforts tangentiels T et N qui s'exercent sur 1 millimètre carré de la surface du joint au point m , nous n'avons évidemment qu'à exprimer qu'il y a équilibre entre les forces appliquées au solide V et qui sont $R \times a \cdot l \cdot \sin \alpha$, $R'' \times a \cdot l \cdot \sin \alpha$, $R''' \times a \cdot l \cdot \cos \alpha$, $T \times a \cdot l$, $N \times a \cdot l$; écrivons pour cela les deux équations de projections et supprimons le facteur commun $a \cdot l$

$$T = R \cdot \sin \alpha \times \cos \alpha + R'' \cdot \cos \alpha \times \cos \alpha - R''' \cdot \sin \alpha \times \sin \alpha$$

$$N = R \cdot \sin \alpha \times \sin \alpha + R'' \cdot \cos \alpha \times \sin \alpha + R''' \cdot \sin \alpha \times \cos \alpha$$

ou bien

$$T = \frac{1}{2} R \cdot \sin 2\alpha + R'' \cdot \cos 2\alpha$$

$$N = R \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + R''' \cdot \sin 2\alpha$$

Si le point considéré m se trouve dans la partie où il y a compression des fibres, la force R a alors une direction inverse de celle que

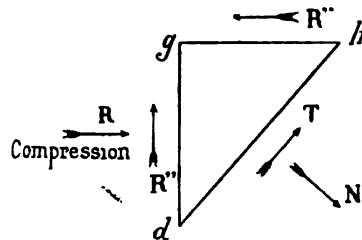


Fig. 85

nous avons supposée précédemment et par suite R doit être changé de signe dans les formules ci-dessus; quant aux forces T et N , elles devront être portées dans le sens des flèches ou en sens contraire

suivant que les valeurs déduites des équations précédentes sont positives ou négatives. Dans ces conditions, les expressions ci-dessus peuvent être considérées comme s'appliquant à un point quelconque de la poutre et elles donnent par suite la solution du problème proposé.

§ 54. — Résistance à la flexion des poutres non homogènes.

Jusqu'ici nous avons supposé que les pièces dont nous nous sommes occupé étaient homogènes; examinons maintenant le cas où cette condition n'est pas remplie, c'est-à-dire où le coefficient d'élasticité varie d'un point à l'autre. La poutre considérée étant, comme précédemment, fléchie par une force normale P, nous avons toujours pour déterminer la position de la *fibre neutre* , c'est-à-dire de la fibre sans allongement, l'équation (§ 44)

$$\begin{aligned} \Sigma E. \frac{e. d\omega}{\rho} &= 0 \\ \Sigma E. e. d\omega &= 0 \end{aligned}$$

E étant une quantité variable.

Si l'on considère maintenant, à titre purement fictif, chaque point du corps comme ayant une densité égale ou proportionnelle au coefficient d'élasticité correspondant E, la relation précédente signifie que la fibre neutre passe par les centres de gravité des sections transversales de la pièce fictive considérée; rien n'est donc plus facile que de déterminer sa position.

Si maintenant nous prenons, par rapport au point α de la *fibre neutre* , le moment des forces appliquées à la section transversale mn , nous avons, comme précédemment,

$$\begin{aligned} \Sigma \left(E. d\omega. \frac{e}{\rho} \times e \right) &= \text{Moment fléchissant} = M \\ \frac{1}{\rho} \Sigma E. e^2. d\omega &= M \end{aligned}$$

$\Sigma E. e^2. d\omega$ est le moment d'inertie de la section mn par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$ en continuant à attribuer à chaque élément $d\omega$ une densité égale à E; son calcul ne présente pas de difficultés. En le désignant par I', on a

$$\frac{I'}{\rho} = M$$

Quant à la charge par millimètre carré R que supporte en ϵ la fibre longitudinale qui passe par ce point, on verrait, comme au paragraphe 44, qu'elle est donnée par les relations

$$R = E \cdot \lambda = E \cdot \frac{\epsilon}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma}{\rho} = M$$

D'où

$$R = E \cdot \frac{M \cdot \epsilon}{\Gamma} = \text{Moment fléchissant} \times \frac{E \cdot \epsilon}{\Gamma}$$

E étant le coefficient d'élasticité relatif au point considéré ϵ .

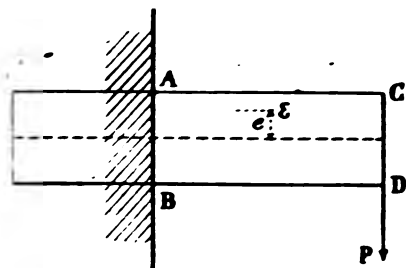


Fig. 86

Il est à remarquer que, chacun des termes de la somme $\Gamma = \sum E \cdot \epsilon^2 d\omega$ contenant à la première puissance le coefficient d'élasticité local E , le rapport $\frac{E}{\Gamma}$ et par suite R ne changent pas quand on donne aux éléments $d\omega$ de chaque section transversale des valeurs soit égales, soit simplement proportionnelles à E comme cela est plus commode pour le calcul.

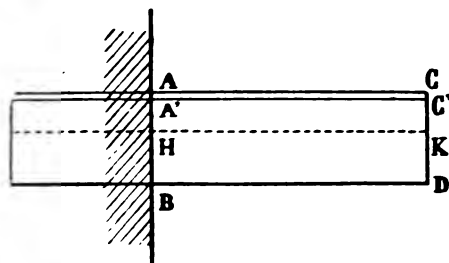


Fig. 87

On rencontre parfois dans la pratique des exemples de pièces non homogènes; tel est le cas d'une poutre en bois solidement reliée à une armature mince en fer $A C A' C'$ placée dans la partie qui subit des efforts d'extension. Le coefficient d'élasticité du fer étant 19000 et celui

du bois (chêne) 1100, on admettra que chaque élément de ce dernier a une densité égale à 1 en prenant $\frac{19000}{1100} = 17,3$ pour celle du fer; le calcul de la position de la fibre neutre HK et celui de Γ et de R s'effectueront ensuite sans difficultés.

On a quelquefois appliqué des considérations du même ordre aux grosses poutres pleines en fonte dans lesquelles la couche extérieure du métal, refroidie plus rapidement que la partie centrale au contact du moule, n'a pas des propriétés élastiques identiques, mais cette complication n'a guère de raison d'être en présence de l'incertitude qui règne sur les valeurs relatives des coefficients d'élasticité des deux régions en question dont les épaisseurs sont d'ailleurs mal connues.

Nous citerons enfin une application intéressante des formules ci-dessus, qui a été faite par M. Voisin Bey, à des poutres en tôle et maçonnerie, faisant partie des caissons employés pour la construction de formes de radoub à Toulon (1). Il doit être, d'ailleurs, toujours bien entendu que, dans le cas d'une poutre non homogène résultant de la superposition ou de tout autre agencement de pièces diverses, ces dernières sont supposées dans nos formules faire intimement corps les unes avec les autres absolument comme si on avait affaire à un solide unique à coefficient d'élasticité variable.

(1) Voir le *Bulletin de la Société d'Encouragement*, 1881, p. 37.

FLEXION PLANE PRODUITE PAR DES FORCES NORMALES EN NOMBRE QUELCONQUE. — CALCUL DES FLÈCHES.

§ 55. — Flexion plane produite par des forces normales en nombre quelconque, situées dans un plan de symétrie.

Nous supposons toujours que la pièce considérée est symétrique par rapport à un plan qui contient toutes les forces, supposées normales à la fibre moyenne; celles-ci peuvent d'ailleurs être soit isolées, soit réparties d'une manière continue suivant une loi plus ou moins simple et sur une longueur plus ou moins grande de la poutre. Le problème

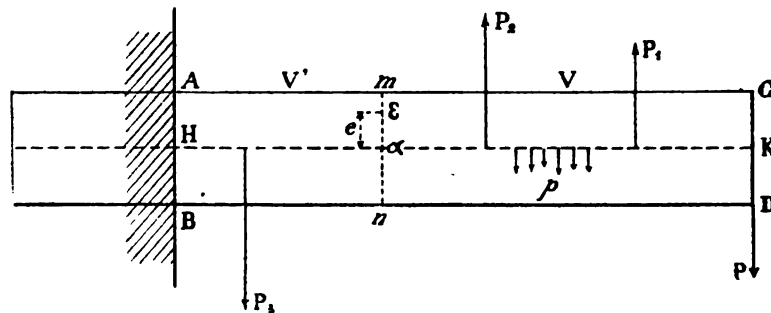


Fig. 88

ainsi posé se traite absolument de la même manière que quand il n'y a qu'une force normale (§ 44) (1), et, par la même suite de raisonnements, on arrive à conclure :

1° que la ligne des *fibres neutres* (c'est-à-dire sans allongement) se confond avec celle des *fibres moyennes*,

2° qu'en appelant M le moment fléchissant, par rapport à une section

(1) Nos explications et les figures qui les accompagnent se rapportent à une pièce dont une extrémité est libre et l'autre encastrée; mais elles s'appliquent tout aussi bien à une poutre droite quelconque reposant sur n'importe quels appuis, pourvu qu'on remplace ces derniers par les réactions (forces et moments) auxquels ils donnent lieu.

transversale quelconque mn , de l'ensemble des forces extérieures situées soit à droite, soit à gauche de mn , on a comme précédemment

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M,$$

3° que la charge par millimètre carré d'une fibre longitudinale en un point quelconque s situé à une distance e de l'axe est égale à

$$\frac{M \cdot e}{I}$$

ce qui donne pour la charge R de la fibre la plus fatiguée dans la section mn

$$R = \frac{M \cdot v}{I}$$

Ces diverses relations ne supposent nullement que la section de la pièce soit constante d'une extrémité à l'autre.

Les considérations que nous avons développées relativement à la répartition de l'effort tranchant et au glissement longitudinal sont d'ailleurs évidemment applicables au cas qui nous occupe mais à condition, comme précédemment, que la section transversale ne varie pas.

Il résulte immédiatement de là que le problème de la flexion d'une pièce droite soumise à des forces normales en nombre quelconque, situées dans un plan de symétrie, se trouve résolu; il ne

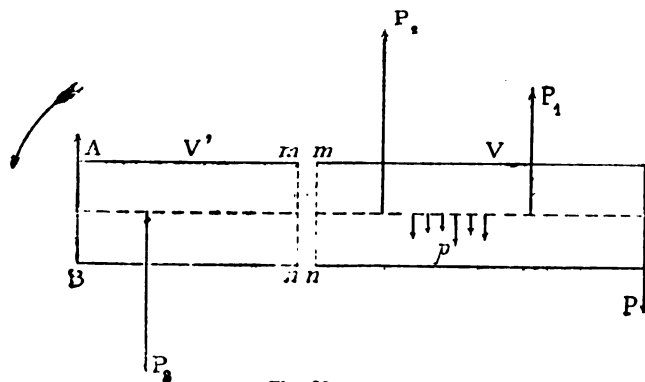


Fig. 89

reste, dans chaque cas particulier, qu'à calculer pour chaque section transversale la valeur du moment fléchissant et de l'effort tranchant qui sollicitent cette dernière. Nous allons voir maintenant comment on peut arriver à effectuer rapidement cette détermination pour laquelle on peut considérer à volonté soit la partie de droite V, soit celle de

gauche V' , avec les forces extérieures respectivement appliquées à chacune d'elles; il faut seulement avoir bien soin de faire figurer parmi ces forces les réactions (forces et couples) dues aux points d'appui quand il y en a un de compris dans le tronçon considéré, V' par exemple, dans le cas de la figure 89.

§ 56. — Courbes représentatives des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Il est souvent utile de représenter par un tracé graphique les valeurs successives des efforts tranchants et des moments fléchissants appliqués aux diverses sections transversales d'une poutre; on détermine ainsi plus rapidement l'ensemble de ces valeurs, on se rend mieux compte de leurs variations et enfin on s'aperçoit plus facilement des erreurs accidentelles qu'on pourrait commettre.

I. Supposons d'abord qu'il s'agisse uniquement de forces *isolées* normales et, pour simplifier les explications, supposons que nous ayons affaire à une pièce horizontale encastree à l'une de ses extrémités. Les valeurs successives de l'effort tranchant sont évidemment égales à

P de K en A ,

$P - P_1$ de A en B ,

$P - P_1 - P_2$ de B en C ,

et ainsi de suite, ce qui donne pour ligne représentative de l'effort tranchant la ligne discontinue $k'a'$, $a''b''$, $b'c'$, Quant aux moments fléchissants, on voit également qu'ils sont égaux à

$P(L-x)$ dans la section mn ,

$P(L-L')$ au point A ,

$P(L-x') - P_1(L'-x')$ dans la section $m'n'$,

et ainsi de suite, ce qui donne pour ligne figurative la ligne brisée $KA'B'...$, dont les sommets se trouvent aux points d'application des forces $P, P_1, ...$.

II. Examinons maintenant le cas où les forces normales sont réparties d'une manière *continue*, suivant une loi quelconque, sur la totalité ou sur une portion seulement de la longueur de la pièce et proposons-nous de calculer l'effort tranchant Q et le moment fléchissant M correspondant à une section transversale quelconque mn donnée par

l'abscisse x . Appelons p la charge de la poutre par millimètre courant ;

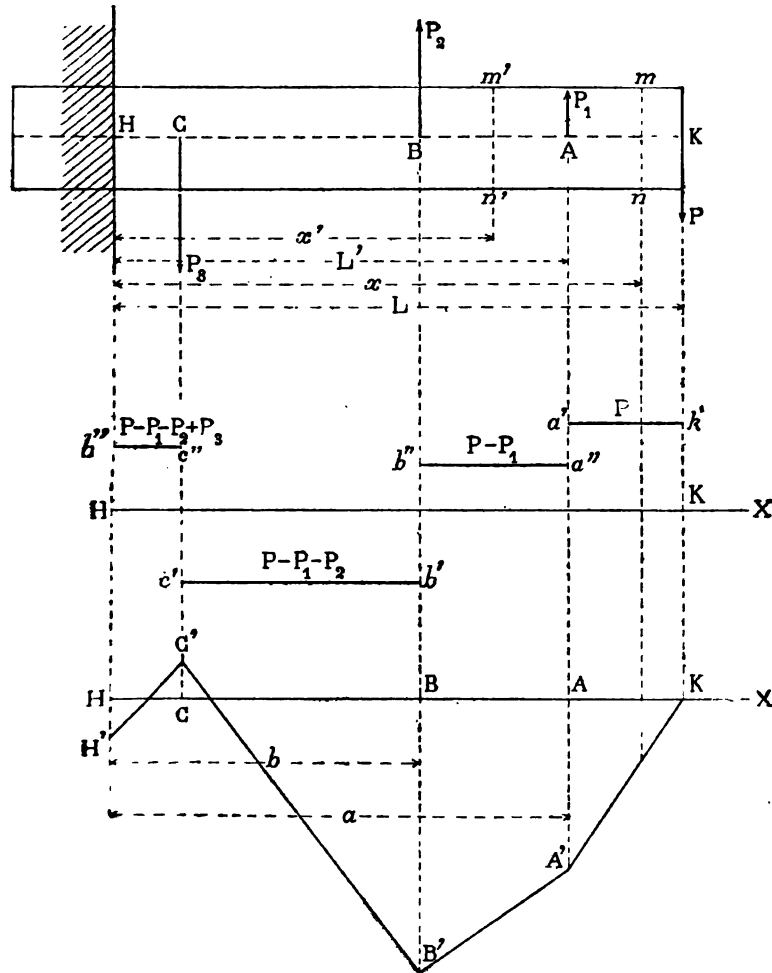


Fig. 90

v est une fonction donnée de l'abscisse x telle que

$$p = f(x)$$

$f(x)$ étant une fonction plus ou moins compliquée qui, dans le cas d'une charge uniformément répartie, se réduit à une constante. Si l'on désigne par ξ une variable auxiliaire représentant l'abscisse d'un point quelconque u de la fibre moyenne compris entre la section considérée

mn et le point K , la charge appliquée à la poutre sur la longueur infi-

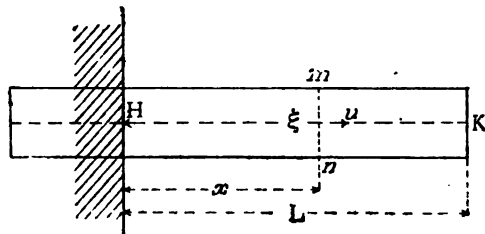


Fig. 91

niment petite $d\xi$ est $p \times d\xi = f(\xi) \times d\xi$, de sorte que l'effort tranchant dans la section mn , qui est évidemment égal à $\Sigma p \cdot d\xi$, a pour valeur

$$Q = \int_x^L f(\xi) \times d\xi$$

Remarquons maintenant que le moment de la force $p \times d\xi$ par rapport à la section mn est

$$p \times d\xi \times (\xi - x);$$

on a donc pour valeur du moment fléchissant cherché

$$M = \Sigma p \times d\xi \times (\xi - x) = \int_x^L f(\xi) \times (\xi - x) \times d\xi$$

La recherche des valeurs de Q et de M se réduit donc à celle des intégrales ci-dessus, de sorte qu'au point de vue algébrique le problème peut être considéré comme résolu. Dans la pratique, il n'en est malheureusement pas de même à moins que la forme de la fonction $p = f(x)$ ne soit relativement simple, mais nous allons voir comment, même dans les cas les plus compliqués, on peut se tirer d'affaire par une construction géométrique.

Traçons en effet, avec les axes coordonnés HX et HY , la courbe $y = p = f(x)$ qui donne les forces appliquées à la pièce par millimètre courant; le produit $f(\xi) \times d\xi$ étant égal à l'aire élémentaire $rr'ss'$, il s'ensuit que l'effort tranchant $Q = \int_x^L f(\xi) \times d\xi$ correspondant à la section m est représenté par l'aire curviligne $Am m'$. La détermination des valeurs successives de Q ne présente donc aucune difficulté puisqu'elle se réduit à une opération de quadrature: cette dernière s'effectuera, par exemple, en divisant la longueur L de la poutre en un certain nombre de parties égales et en mesurant les ordonnées correspondantes de la courbe p , que l'on combinera convenablement entre elles

suivant les formules de quadrature. On obtiendra ainsi très simplement la courbe n° 2 dont les ordonnées représentent la valeur de l'effort tranchant Q .

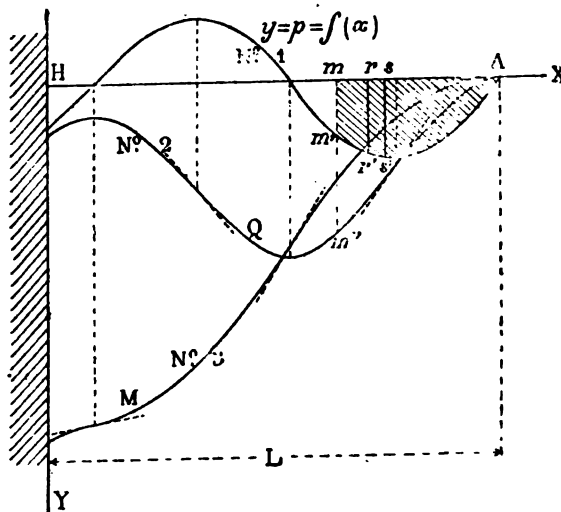


Fig. 92

Supposons cette courbe tracée; celle des moments fléchissants s'en déduit immédiatement: nous avons vu en effet que l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant (§ 45); inversement ce dernier est l'intégrale de l'autre de sorte que la courbe cherchée n'est autre que la courbe intégrale de la précédente Q ou, en d'autres termes, celle qui donne les valeurs successives des aires telles que $A m m''$ (1); nous nous trouvons ainsi conduit à faire sur la courbe Q les mêmes opérations de quadrature que sur celle des p , et nous avons ainsi la courbe des moments fléchissants M . Le problème que nous nous étions posé se trouve donc ainsi résolu.

Pour faciliter les tracés précédents, il convient de ne pas perdre de vue les remarques suivantes :

1° Aux points où la courbe p coupe l'axe des x correspondent un maximum ou un minimum pour la courbe Q , et un point d'inflexion pour la courbe M .

2° Aux points où la courbe p présente un maximum ou un minimum correspond un point d'inflexion pour la courbe Q .

(1) Il est facile de démontrer analytiquement que l'expression trouvée plus haut

$$M = \int_x^L f(\xi) \times (\xi - x) \times d\xi$$

représente bien l'aire $A m m''$.

3° Aux points où la courbe Q coupe l'axe des x correspondent un maximum ou un minimum pour la courbe M.

Le tracé géométrique que nous venons d'indiquer est applicable aux circonstances les plus variées et s'effectue toujours de la même manière

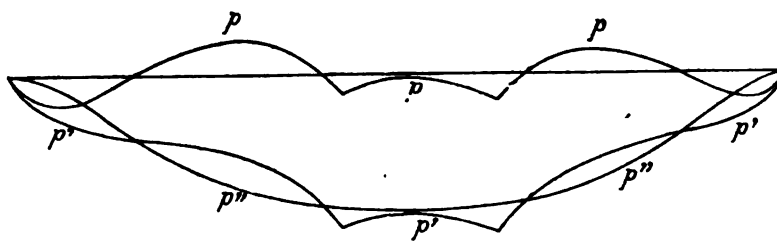


Fig. 93

quelque compliqué que soit le mode de répartition des forces plus ou moins irrégulièrement appliquées à la poutre. S'il s'agit par exemple d'un navire, on le suppose décomposé en tranches successives de 1 mè-

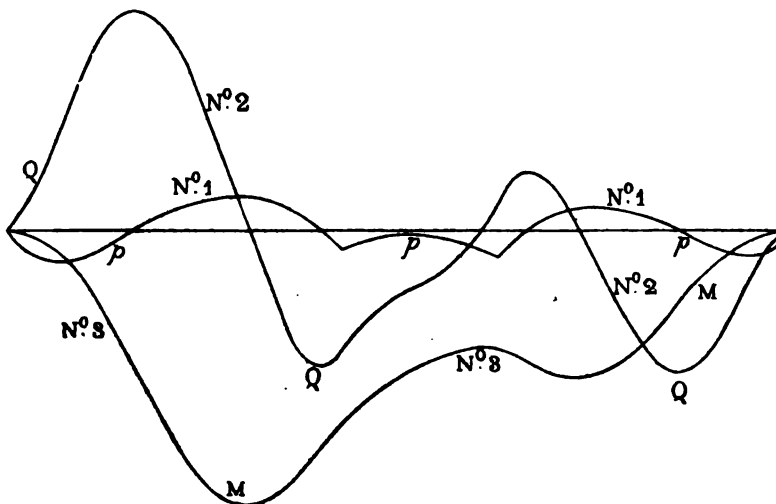


Fig. 94

tre de longueur et on calcule le poids p' de chacune d'elles, ainsi que son déplacement p'' , c'est-à-dire la poussée qu'elle éprouve de la part de l'eau de mer; la différence $p = p' - p''$ donne immédiatement la valeur de la force appliquée au navire par mètre courant, et l'on n'a plus qu'à tracer, comme nous l'avons expliqué, les courbes p , Q et M pour avoir l'effort tranchant et le moment fléchissant auxquels est soumise chacune des sections transversales du navire. Nous donnons un exemple d'un tracé de cette nature dans les figures 93 et 94 relatives à un

cuirassé anglais l'*Audacious*; les points de rebroussement qu'on y remarque sur la courbe des p' et par suite des p sont dus à la présence de poids considérables (cloisons cuirassées, tours blindées, etc.), concentrées sur une faible longueur du navire et donnant lieu, comme dans le premier cas étudié, à une ligne discontinue (1).

III. Si la pièce considérée est soumise à la fois à des forces continues et à des forces qui ne peuvent, en aucune façon, être considérées comme réparties sur une longueur plus ou moins grande de la poutre, on traitera ces dernières comme des forces isolées et les efforts tranchants seront alors la somme algébrique de ceux qui résultent des tracés indiqués dans les cas 1 et 2 du présent paragraphe. On aura ainsi, pour les efforts tranchants totaux Q , une ligne discontinue dont la quadrature donnera, comme tout à l'heure, la courbe des moments M ; il ne peut y avoir à ce sujet aucune incertitude dans la façon d'opérer, après les explications que nous avons données.

§ 57. — Cas où les charges se déplacent.

Nous avons admis jusqu'ici que les diverses forces appliquées à une pièce occupent une position invariable, mais il est bien des circonstances où il n'est pas permis d'agir de cette manière : c'est ainsi que dans les calculs de ponts on est forcé de supposer que les charges (un convoi de voitures par exemple) occupent successivement diverses positions par rapport à chaque travée en conservant les unes par rapport aux autres les mêmes distances. Dans ces conditions on se trouverait conduit à considérer un certain nombre de stations du convoi et à tracer pour chacune d'elles la courbe des moments fléchissants que nous avons appris à construire (§ 56); on pourrait ainsi reconnaître quelle est, pour chacune des sections transversales de la poutre ou de la travée considérée, le moment maximum de flexion qui se produit pendant le déplacement du convoi et, en traçant cette ligne des moments maximum dite *courbe enveloppe des moments*, on aurait les éléments nécessaires pour procéder au calcul des dimensions de l'ouvrage.

Il est facile de comprendre que cette manière d'opérer est en général longue et pénible; on peut, il est vrai, la simplifier en ayant recours à des considérations géométriques basées sur l'emploi des polygones funiculaires (2); mais, dans un grand nombre de circonstances, on

(1) Voir la *Revue maritime et coloniale*, tome 37, p. 739, tome 38, p. 182 et tome 40, p. 487.

(2) Voir la *Résistance des matériaux* de Bresse, 3^e édition, p. 95.

obtiendra des résultats suffisamment exacts dans la pratique, en substituant aux charges mobiles une charge fixe uniformément répartie et ayant une valeur convenablement choisie. Pour les ponts de chemins de fer, cette simplification a été autorisée par une circulaire ministérielle du 9 juillet 1877 qui donne en même temps la valeur de la charge par mètre courant, variable avec la portée, qu'il convient d'adopter.

Il est d'ailleurs bien entendu que, dans les calculs précédents, on ne tient nullement compte des vibrations qu'imprime à une poutre le passage rapide d'un convoi ou d'une charge quelconque, et qui occasionnent dans tout le système une fatigue supplémentaire parfois très importante (Chapitre XVI).

§ 58. — Détermination de la forme de la fibre moyenne déformée. Calcul de la flèche.

Une pièce primitivement droite étant soumise à des forces normales quelconques situées dans son plan de symétrie, nous avons vu (§ 56) comment on peut déterminer, par une double intégration effectuée soit algébriquement soit géométriquement, le moment fléchissant M qui est appliqué à chacune des sections transversales. Ce dernier étant ainsi connu, voyons maintenant comment on peut trouver quelle forme affecte la fibre moyenne déformée et par suite calculer la flèche.

Premier procédé. — Prenons deux axes rectangulaires dont l'un HX coïncide avec la fibre moyenne non déformée. Nous avons vu que, pour

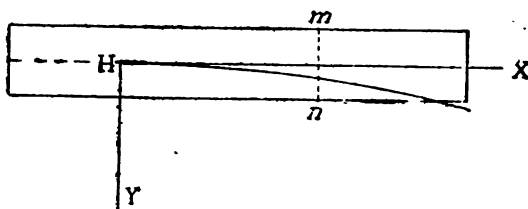


Fig. 95

une section transversale quelconque mn , on a (§ 55), sans supposer en aucune façon que la pièce ait partout même section,

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

Pour avoir l'équation de la fibre moyenne déformée, il suffit évidem-

ment de remplacer dans l'équation précédente ρ par sa valeur bien connue

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Or, dans les problèmes relatifs à la flexion des pièces primitivement droites auxquelles les forces fléchissantes ne font éprouver qu'une déformation légère, on supprime le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ qui alors est effectivement négligeable devant l'unité, et l'on a ainsi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

D'où

$$\text{E. I.} \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\text{E. I}}$$

En intégrant deux fois on a pour une abscisse quelconque x

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int_0^x \frac{M}{\text{E. I}} dx + K \\ y &= \int_0^x dx \int_0^x \frac{M}{\text{E. I}} dx + K. x + K' \end{aligned}$$

K et K' étant deux constantes que l'on détermine par la connaissance qu'on a des conditions initiales dans lesquelles se trouve la pièce, telles que : encastrement à l'une des extrémités, nécessité de passer par deux points donnés, etc. Comme il importe d'ailleurs de le remarquer, l'expression ci-dessus de l'ordonnée y n'est qu'approximative puisque la valeur prise pour ρ n'est pas rigoureusement exacte.

Les calculs qui précèdent étant effectués, on obtient évidemment la flèche f en remplaçant x , dans la dernière équation, par la longueur L de la pièce.

En résumé on voit que, pour déterminer algébriquement la forme de la fibre déformée en partant de la connaissance des forces fléchissantes, il faut, dans le cas général de forces réparties d'une manière continue, faire quatre intégrations successives :

la première pour avoir l'effort tranchant Q ,

la deuxième pour avoir le moment fléchissant M ,

la troisième pour avoir l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ de la fibre moyenne déformée,

la quatrième pour avoir l'ordonnée de cette fibre.

Nous indiquerons tout à l'heure un procédé qui permet de se dispenser de ces deux dernières.

Comme application très simple du mode d'opérer que nous venons d'exposer, considérons le cas d'une poutre de *section constante* encastree à l'une de ses extrémités et fléchie à l'autre par une force normale P comme dans le cas du paragraphe 44; on a alors, I étant constant ainsi que E puisque nous supposons toujours que la pièce est homogène,

$$E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = P. (L - x)$$

$$E. I. \frac{dy}{dx} = P. L. x - \frac{1}{2} P. x^2$$

$$E. I. y = \frac{1}{2} P. L. x^2 - \frac{1}{6} P. x^3$$

les constantes d'intégration étant nulles puisqu'à l'origine H on a $\frac{dy}{dx} = 0$ et $y = 0$.

Quant à la flèche f , elle est donnée par la valeur de y qui correspond à $x = L$; par conséquent

$$E. I. f = \frac{1}{2} P. L^3 - \frac{1}{6} P. L^3$$

$$f = \frac{P. L^3}{3 E. I}$$

Dans ce cas et dans quelques autres dont nous verrons bientôt des exemples (§ 71 et suivants), les deux intégrations que nous venons de faire pour passer de la connaissance du moment fléchissant à celle de l'ordonnée y , ne présentent absolument aucune difficulté, mais il n'en est malheureusement pas de même dans une foule de circonstances; c'est en particulier ce qui arrive, même avec des forces disposées d'une manière très simple, lorsque la section de la pièce et par suite le moment d'inertie I cessent d'être constants d'une extrémité à l'autre. On peut alors, il est vrai, effectuer graphiquement les deux intégrations ci-dessus en ayant recours aux procédés de quadrature que nous avons indiqué au paragraphe 56 pour calculer l'effort tranchant et le moment fléchissant, mais il est alors infiniment plus simple et plus pratique d'avoir recours à la solution suivante :

Deuxième procédé. — Nous avons vu (§ 55) que, dans une poutre de section constante ou variable soumise à des forces normales, on a

$$\rho = \frac{E \cdot I}{M}$$

Calculons au moyen de cette relation la valeur du rayon de courbure ρ pour un certain nombre de points de la fibre moyenne et construisons, à une échelle quelconque, la courbe VV' ayant pour abscisses les

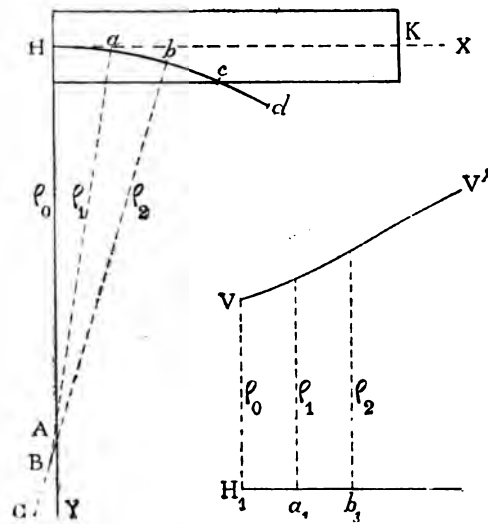


Fig. 96

longueurs successives de cette fibre et pour ordonnées les rayons ρ . Il est clair qu'à cause de la petitesse des déformations nous pouvons obtenir d'une façon suffisamment exacte la forme de la fibre moyenne déformée en la traçant de proche en proche au moyen d'une série de petits arcs de cercle, de 2° à 3° par exemple.

Si la pièce est encastree à l'une de ses extrémités, c'est par cette dernière qu'on commencera la construction en prenant $HA = \rho_0$ et en décrivant l'arc de cercle Ha ; on relèvera ensuite sur la courbe VV' l'ordonnée ρ_1 correspondant à l'abscisse $H_1a_1 = Ha$, ce qui permettra de tracer l'arc de cercle ab et ainsi de suite.

On ne connaît pas toujours la direction du premier élément de la fibre moyenne déformée; c'est en particulier ce qui se présente pour une pièce reposant sur deux appuis. On trace alors à part la fibre en question

et il ne reste plus qu'à l'orienter de telle façon qu'elle satisfasse aux données du problème, par exemple qu'elle passe, dans l'hypothèse ci-dessus, par les deux appuis fixes.

Les rayons de courbure ρ étant généralement très grands, il y a intérêt à adopter dans le tracé précédent deux échelles, l'une pour les abscisses, l'autre de dimensions moindres pour les ordonnées et par suite pour les rayons de courbure dont la direction extrême ne fait jamais qu'un angle assez faible avec l'axe des y . Pour que cette dernière condition soit toujours remplie, on aura soin de ne pas exagérer plus qu'il n'est nécessaire la différence des deux échelles.

Au lieu d'avoir recours à cet artifice, on peut calculer la longueur des arcs successifs tels que bc correspondant à l'angle au centre α° que l'on a adopté, au moyen de la relation

$$bc = \text{arc de } \alpha^\circ = \rho_2 \times \frac{2\pi \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$$

Cette longueur se portera sur une direction faisant un angle de α° avec l'élément précédent ab , après quoi on opérera de même pour le suivant cd et ainsi de suite.

§ 59. — Proportionnalité des flèches aux forces qui les produisent.

La proportionnalité des flèches aux forces qui les produisent est une conséquence immédiate du principe de la superposition des petites déformations dont nous avons parlé précédemment (§ 7). Si en effet une force P donne lieu à une flèche f , une seconde force P appliquée ensuite à la même pièce et dans les mêmes conditions produira son effet comme si la première n'existait pas; de là résulte une flèche $2f$ et ainsi de suite. Il est bien clair d'ailleurs, comme nous l'avons dit, que ces considérations ne sont applicables que dans les cas où l'addition de nouvelles forces ne change en rien la valeur ou les bras de levier des précédentes ou n'en fait pas naître de nouvelles. Cette dernière circonstance se présenterait par exemple si, en se déformant, la pièce venait porter sur des points d'appui avec lesquels elle n'était pas précédemment en contact.

§ 60. — **Détermination des forces nécessaires pour faire prendre à une pièce donnée une forme donnée.**

Une pièce, de section constante ou non, étant donnée, il y a quelquefois intérêt à savoir quelles forces il convient de lui appliquer pour qu'elle prenne une forme assignée d'avance; ce problème est facile à résoudre en s'appuyant sur les considérations développées dans les paragraphes précédents. Nous avons vu en effet que, pour une section transversale quelconque mn , on a (§ 55)

$$M = \frac{E. I}{\rho}$$

équation qui donne M et permet par conséquent de construire la courbe des moments fléchissants puisque I est connu et que le rayon de courbure ρ peut se déterminer sur la ligne HK .

Connaissant la courbe M , on peut en déduire d'abord celle des efforts tranchants Q , puis celle des forces appliquées à la pièce; c'est le problème inverse de celui que nous avons résolu au paragraphe 56. Nous tracerons donc un certain nombre de tangentes à la ligne M et, en mesurant leurs coefficients angulaires, nous aurons les ordonnées de la seconde courbe Q ; en opérant de même sur cette dernière, nous aurons celle des forces qui satisfont aux conditions demandées.

Dans le cas particulier où il s'agit de courber une poutre sur un gabarit circulaire de rayon donné ρ , la force P qu'il faut appliquer à l'extrémité d'un bras de levier L est donnée par l'équation

$$P. L = \frac{E. I}{\rho}$$

$$P = \frac{E. I}{L. \rho}$$

Si donc on fait fléchir la pièce en agissant simplement sur son extrémité libre, la force P augmente et finit même par devenir infinie à mesure que la longueur L de la partie non courbée va en diminuant de plus en plus.

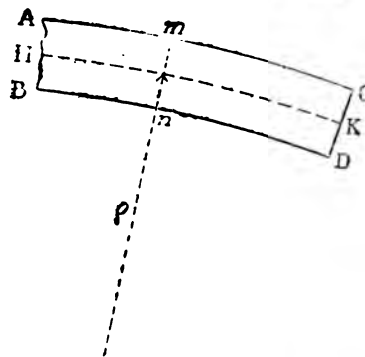


Fig 97

§ 61. — Détermination des dimensions que doit avoir une pièce pour que des forces données lui fassent prendre une forme donnée.

Ce problème n'est qu'une variante du précédent: il se résout, comme lui, à l'aide de l'équation

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

D'où

$$I = \frac{M \cdot \rho}{E}$$

On peut donc ainsi calculer le moment d'inertie I . On remarquera qu'à une même valeur I correspondent une infinité de sections satisfaisant au problème. Si, parmi ces dernières, on veut prendre celle qui correspond à la charge maximum R qu'on peut appliquer en toute sécurité, on aura recours à la relation

$$R = \frac{M \cdot v}{I}$$

$$v = \frac{R \cdot I}{M} = \frac{R \cdot \rho}{E}$$

équation qui détermine v et par conséquent la hauteur de la section dont on connaît déjà le moment d'inertie.

§ 62. — Applications au calcul des pièces supportant une charge commune. Poutres superposées. Poutres en croix.

On rencontre souvent dans la pratique des pièces qui sont disposées de telle façon que toute flexion de l'une a pour conséquence forcée une flexion de l'autre, de sorte que tout effort appliqué à la première agit forcément sur la seconde en se répartissant entre elles suivant certaines proportions (1). On peut se poser à ce sujet de nombreux problèmes dont nous allons examiner rapidement quelques uns en supposant, pour

(1) Ce cas est celui des lames de ressort superposées (§ 212).

simplifier les explications, que les flèches, produites par exemple par le contact de deux pièces, ont des valeurs égales pour l'une et pour l'autre. Il est d'ailleurs toujours convenu que nous supposons être dans les cas où le principe de la superposition des petites déformations est applicable (§ 7 et 59).

1° Un certain nombre de pièces données supportant un effort commun P, on peut se demander comment ce dernier se répartit entre elles. Pour résoudre ce problème, nous déterminerons soit théoriquement (§ 60), soit expérimentalement quels sont les poids p, p', p'', \dots qui, sans altérer l'élasticité, font prendre aux pièces des flèches égales; d'après ce que nous savons (§ 59), la force P se répartit proportionnellement aux quantités p, p', p'', \dots .

2° Soient AB et CD deux poutres superposées pouvant glisser librement l'une sur l'autre en dehors de l'encastrement S S' et supportant un effort commun P; proposons-nous de voir dans quelles conditions il faut les

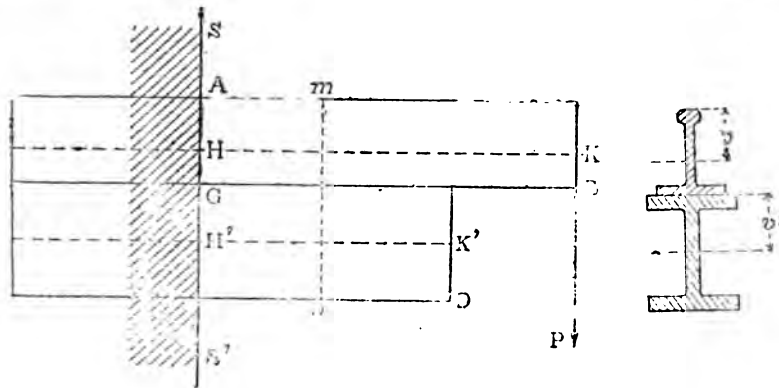


Fig. 98

établir pour qu'elles travaillent aux charges maximum R et R' considérées comme admissibles, ou à telles autres qu'on se sera fixé d'avance. Si l'on considère une coupe transversale mn faite dans les deux pièces de section constante ou variable, on a pour la première

$$R = \frac{M \cdot v}{I} = \frac{E \cdot I}{\rho} \cdot \frac{v}{I} = \frac{E \cdot v}{\rho}$$

et pour la seconde

$$R' = \frac{E' \cdot v'}{\rho'}$$

Les deux fibres moyennes HK, et H'K' étant peu distantes l'une de

l'autre, on peut admettre qu'elles ont même rayon de courbure puisque les deux poutres restent en contact; on a donc

$$\frac{E \cdot v}{R} = \frac{E' \cdot v'}{R'}$$

$$\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{E'}{E}$$

relation qui donne le rapport $\frac{v}{v'}$.

Si les deux pièces sont de même matière, on doit évidemment prendre $R = R'$ et par suite $v = v'$.

Dans le cas où les lignes des fibres moyennes HK, H'K' sont semblablement situées sur chacune des deux poutres, la condition $v = v'$ revient à dire que celles-ci doivent avoir l'une et l'autre la même hauteur dans chaque section transversale, pour travailler à la même charge maximum.

3° Considérons le cas où nous avons deux poutres en croix, *de section constante*, encastées en A et B et supportant une charge totale P à leur extrémité commune C et cherchons, comme tout à l'heure, comment il

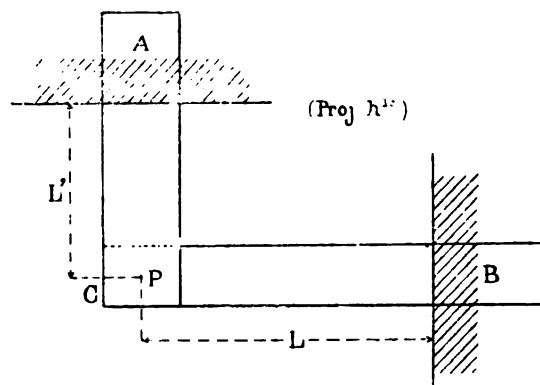


Fig. 99

faut les proportionner pour que les sections d'encastrement, qui sont évidemment les plus fatiguées, travaillent aux charges R et R' assignées d'avance. La force P se répartit en deux autres p et p' en donnant lieu à des flèches égales f et f', de sorte que (§ 58)

$$f = \frac{p \cdot L^3}{3 E \cdot I} = f' = \frac{p' \cdot L'^3}{3 E' \cdot I'}$$

Or, on a

$$R = \frac{M \cdot v}{I} = \frac{p \cdot L \cdot v}{I}$$

$$R' = \frac{M' \cdot v'}{I'} = \frac{p' \cdot L' \cdot v'}{I'}$$

En déduisant de ces dernières équations les valeurs de p et de p' et en les portant dans la première, on obtient

$$\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left(\frac{L}{L'}\right)^2$$

Telle est la relation à laquelle doivent satisfaire les deux pièces. Lorsque ces dernières sont de même matière, cette équation se réduit à

$$\frac{v}{v'} = \left(\frac{L}{L'}\right)^2$$

Dans les circonstances qui se présentent le plus souvent dans la pratique, les deux poutres, au lieu d'être encastées, reposent chacune par leurs extrémités sur deux points d'appui et sont en contact par leur milieu commun. Comme nous le verrons bientôt, ce cas se ramène à celui de pièces encastées au point U et sollicitées en A, B, C, D par

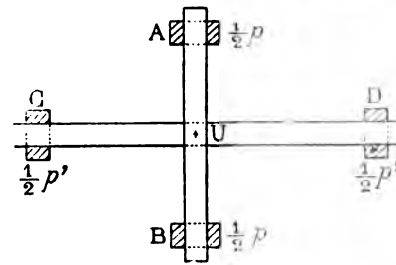


Fig. 100

des forces égales aux réactions des points d'appui, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}p$ et $\frac{1}{2}p'$. Ce problème se ramène donc immédiatement au précédent.

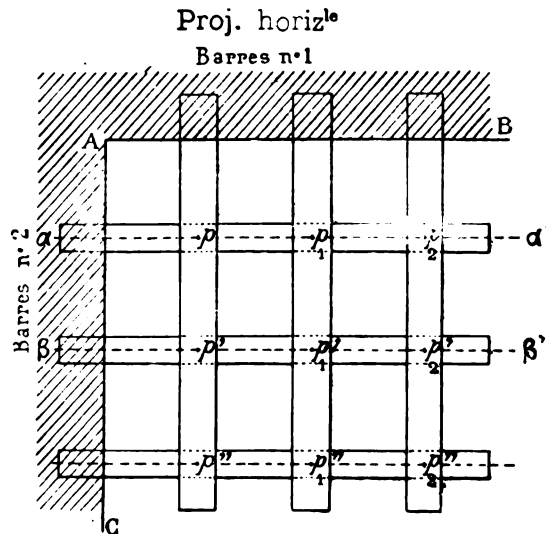
4° Deux séries de barres horizontales reposant les unes sur les autres à leurs points de croisement et encastées en AB et AC forment le quadrillage représenté par la figure 101 ; on demande quelles dimensions il faut leur donner pour que, sous l'action des forces $p, p', \dots, p_i, p_i', \dots$ elles travaillent toutes à la charge maximum R considérée comme admissible.

Pour résoudre ce problème, donnons-nous le rapport, évidemment arbitraire, suivant lequel nous désirons que les charges p, p', \dots se répartissent entre les barres ; admettons par exemple que la série n° 1 doive en supporter les $\frac{2}{3}$ et l'autre le $\frac{1}{3}$. Considérons à part la première soumise à l'action des forces $\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p', \dots, \frac{2}{3}p_i, \frac{2}{3}p_i', \dots$ et, après avoir tracé les courbes des efforts tranchants et des moments fléchissants (§ 56), déterminons pour chaque section le rapport $\frac{I}{v}$ au moyen de la relation

$$R = \frac{M \cdot v}{I}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{M}{R}$$

ce qui donne la section transversale considérée, une fois qu'on s'est fixé arbitrairement soit v , soit plutôt la forme qu'on désire adopter.



Si nous déterminons maintenant la figure qu'affectent, après leur déformation, ces mêmes poutres n° 1, actuellement connues, sous l'influence des forces $\frac{2}{3} p, \dots$ (§ 58), nous en déduirons immédiatement, en faisant les coupes $\alpha \alpha', \beta \beta', \dots$ quelle est la forme que doivent prendre à leur tour les barres de la deuxième série puisque, par hypothèse, il y a toujours contact des unes avec les autres, et nous nous trouvons ainsi amené à chercher les dimensions qu'il faut donner aux pièces n° 2 pour que, sous l'action des forces $\frac{1}{3} p, \dots$, elles prennent une forme donnée ; c'est précisément la question qui a été traitée au paragraphe 61, de sorte que le problème que nous nous étions posé peut être considéré comme résolu.

En terminant, il est à peine besoin d'ajouter, comme tout à l'heure, que le cas où les barres reposent par leurs extrémités sur deux points d'appui se ramène à celui que nous venons d'étudier, pourvu qu'on ajoute aux forces $\frac{2}{3} p, \dots, \frac{1}{3} p, \dots$ celles qui sont dues aux réactions des appuis et qui se déduisent de la connaissance des forces telles que nous les supposons appliquées à chaque barre séparément.

§ 63. — **Calcul du moment d'inertie pour les surfaces géométriques de formes simples.**

Supposons qu'il s'agisse d'une surface plane de forme géométrique très simple, rectangle, triangle, cercle, etc., on commence par déterminer la position en hauteur de son centre de gravité et on a ainsi la ligne $\alpha\alpha'$ par rapport à laquelle il faut calculer le moment d'inertie I qui entre dans les formules de la flexion. En adoptant $\alpha\alpha'$ pour axe des

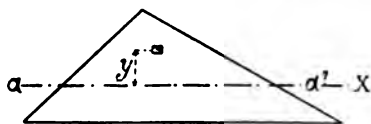


Fig. 102

x , on voit que, la surface d'un élément infiniment petit étant égale à $dx \cdot dy$, la quantité cherchée a pour expression

$$I = \iint y^2 \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{3} \int y^3 \cdot dx$$

en intégrant entre les limites convenables.

Dans un certain nombre de cas simples, l'intégration précédente s'effectue sans difficulté; on peut d'ailleurs souvent la simplifier soit en décomposant la surface en bandes horizontales ou verticales, en triangles, etc., soit en ayant recours à d'autres artifices; ce sont là des recherches analytiques sur lesquelles nous n'avons pas à insister ici. Nous donnons plus loin (§ 70) les résultats relatifs aux formes les plus usuelles.

§ 64. — **Moment d'inertie autour d'une droite qui ne passe pas par le centre de gravité.**

Soit I le moment d'inertie d'une surface quelconque Ω par rapport à une droite $\alpha\alpha'$ qui passe par son centre de gravité, I' le même moment par rapport à une droite parallèle SS' distante de la première d'une quantité D , on a souvent besoin de passer de la connaissance de I à celle de I' ou inversement; nous rappellerons

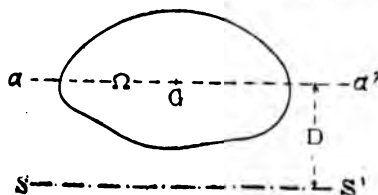


Fig. 103

qu'il suffit pour cela de faire usage de la relation bien connue

$$I' = I + \Omega \cdot D^2$$

Elle permet d'obtenir immédiatement un certain nombre des résultats consignés au paragraphe 70.

§ 65. — Calcul du moment d'inertie pour les surfaces planes de formes quelconques.

Si la surface considérée est limitée par un contour curviligne de forme plus ou moins complexe, on peut avoir recours au mode habituel d'intégration graphique pour calculer

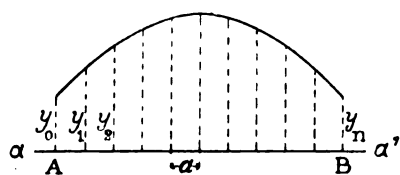


Fig. 104

l'expression $\frac{1}{3} \int y^2 \cdot dx$ relative à chacune des moitiés de la surface : à cet effet on partagera la longueur totale AB en un certain nombre de parties égales et on mesurera les ordonnées y_0, y_1, \dots, y_n correspondant aux points de division. On aura alors, en vertu d'une formule connue,

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{3} \int y^2 dx = \frac{1}{3} a \left(\frac{1}{2} y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + \frac{1}{2} y_n^2 \right)$$

$$I = \frac{2}{3} a \left(\frac{1}{2} y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + \frac{1}{2} y_n^2 \right)$$

a étant l'écartement de deux ordonnées consécutives.

Eu égard aux formes que présentent les sections transversales des pièces soumises à la flexion, il est presque toujours préférable d'opérer d'une autre manière et d'avoir recours, suivant les cas, à l'un ou l'autre des procédés suivants :

1° Il arrive souvent que la section donnée peut être considérée comme étant la somme ou la différence de surfaces dont on connaît déjà les moments d'inertie; il suffit alors évidemment d'ajouter ou de retrancher ces derniers entre eux pour avoir l'expression cherchée. C'est ce qui a lieu pour un rectangle creux, un anneau circulaire, un T, etc. La même circonstance se présente pour une poutre armée de cornières comme celle qui est représentée par la

figure 105, chacune des parties située d'un côté de l'axe $\alpha \alpha'$ peut en effet être regardée comme étant la somme des rectangles 1, 2, 3, 4 dont nous désignerons les largeurs par a_1, a_2, a_3, a_4 , ce qui donne pour moment d'inertie de la portion supérieure

$$\frac{1}{3} \left[a_1 (h_1^3 - h_2^3) + a_2 (h_2^3 - h_3^3) + a_3 (h_3^3 - h_4^3) + a_4 h_4^3 \right]$$

Une formule analogue est applicable à la moitié inférieure.

Ces exemples, qu'il est inutile de multiplier, montrent comment on peut opérer; pour un cas particulier donné, il sera d'ailleurs souvent

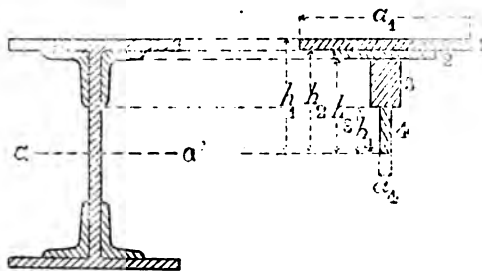


Fig. 105

préférable de calculer immédiatement les valeurs numériques des diverses parties considérées et de les combiner convenablement entre elles sans établir préalablement une formule algébrique analogue à celle qui précède.

2° Dans le cas de fers à T de grandes dimensions ou de poutres d'assemblage en tôle dans lesquelles l'épaisseur des semelles et de l'âme est généralement faible par rapport à la hauteur totale de la pièce, on a souvent une approximation bien suffisante en admettant que le moment d'inertie de chacun des rectangles partiels par rapport à une ligne telle que CD est égal à sa surface Ω multipliée par le carré de la distance h mesurée au milieu de l'épaisseur AB; cela revient à négliger le moment d'inertie du rectangle par rapport à la parallèle $m m'$ qui passe par son centre de gravité de sorte qu'on a ainsi une valeur un peu trop faible pour I et par suite un petit excédant de solidité de l'ouvrage relativement aux prévisions, ce qui n'a pas d'inconvénient.

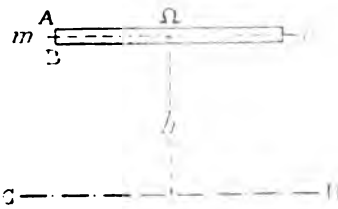


Fig. 106

Quand on agit ainsi, il convient d'opérer de façon à obtenir à la fois la position du centre de gravité et la valeur du moment d'inertie par rapport à un axe passant par ce dernier. Voici comment on peut disposer

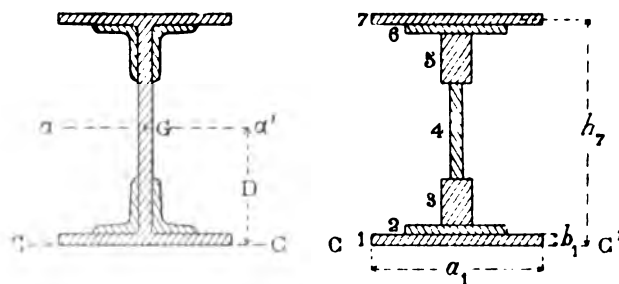


Fig. 107

les calculs en prenant pour axe provisoire une ligne CC' passant par exemple par la partie inférieure de la pièce.

Nos des rectangles	Largeurs des rectangles	Hauteurs des rectangles	Surfaces des rectangles	Distances des milieux à l'axe CC'	Moments des surfaces	Moments d'inertie
I	II	III	IV = II × III	V	VI = IV × V	VII = VI × V
1	a_1	b_1	$a_1 \times b_1$	h_1	$a_1 \times b_1 \times h_1$	$a_1 \times b_1 \times h_1^2$
2	a_2	b_2	$a_2 \times b_2$	h_2	$a_2 \times b_2 \times h_2$	$a_2 \times b_2 \times h_2^2$
3						
Sommes			Ω		S	I'

Une fois effectués les calculs qui sont indiqués par le tableau précédent, on obtient évidemment la hauteur D du centre de gravité et le moment d'inertie I par rapport à l'axe aa' au moyen des relations

$$\Omega \cdot D = S$$

$$I' = I + \Omega \cdot D^2$$

ce qui donne

$$D = \frac{D}{\Omega} \sigma$$

$$I = I' - \Omega \cdot D^2 = I' - \frac{S^2}{\Omega}$$

3° Un mode de calcul analogue est avantageusement applicable à une surface curviligne quelconque. Voici comment on peut opérer : on partage la hauteur totale AB en un certain nombre de parties égales ; par

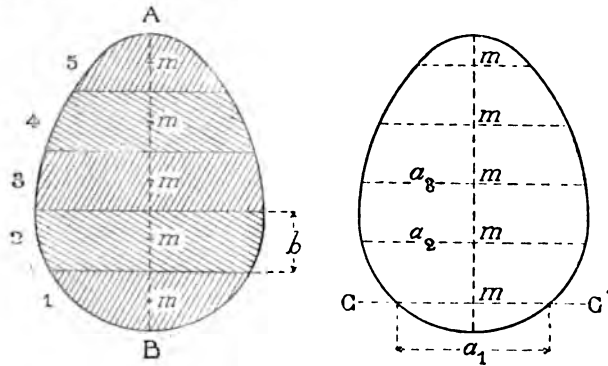


Fig. 108

les milieux m on mène des horizontales dont on mesure les longueurs a_1, a_2, \dots et, pour plus de commodité, on fait passer l'axe provisoire CC' par le dernier de ces points m . Appelons b la hauteur de chacune des bandes horizontales indiquées par des hachures; l'une d'elles, la troisième par exemple, peut être considérée comme ayant $a_3 \times b$ pour surface, $(a_3 \times b) \times 2b$ pour moment par rapport à CC' et $(a_3 \times b) \times (2b)^2$ pour moment d'inertie. On peut donc former le tableau suivant :

Nos des bandes	Surfaces divisées par b	Multiplicateurs	Moments des surfaces divisés par b^2 IV = II \times III	Moments d'inertie divisés par b^3 V = IV \times III
I	II	III	IV = II \times III	V = IV \times III
1	a_1	0	0	0
2	a_2	1	$a_2 \times 1$	$a_2 \times 1^2$
3	a_3	2	$a_3 \times 2$	$a_3 \times 2^2$
Sommes	S'		S	I'

On a alors, en appelant Ω la surface totale et D la distance de son centre de gravité à l'axe CC' ,

$$\begin{aligned}\Omega &= S' \cdot b \\ \Omega \cdot D &= S \cdot b^2 \\ \Gamma \cdot b^3 &= I + \Omega \cdot D^2\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}D &= \frac{S}{S'} \cdot b \\ I &= \left(\Gamma - \frac{S^2}{S'} \right) b^3\end{aligned}$$

Nous ajouterons que, si la section donnée est symétrique non seulement par rapport au plan qui contient les forces, mais encore par rapport à une droite horizontale $\alpha\alpha'$, c'est cette dernière qu'il faut immédiate-

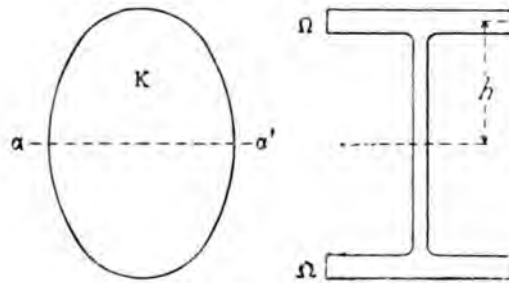


Fig. 109

ment prendre pour axe définitif des moments; on ne fera les calculs que pour l'une des moitiés K de la surface et on aura le moment d'inertie cherché I en doublant le résultat obtenu. C'est ainsi que, pour une poutre symétrique à double T, on a, dans les conditions d'approximation qui ont été définies plus haut,

$$I = 2 \Omega \cdot h^3$$

Ω étant la surface de chacune des semelles.

§ 66. — **Avantage des sections évidées.**

Lorsqu'une poutre est fléchie, ce sont, dans chaque section transversale, les parties les plus éloignées du centre qui agissent de la manière la plus énergique pour s'opposer aux efforts de traction et de compression provenant du fait même de la flexion; or, comme ce sont ces der-

niers efforts dont le rôle est de beaucoup le plus important dès que le bras de levier des forces extérieures en jeu a une valeur notable, il s'ensuit qu'on a intérêt à reporter la matière le plus loin possible de la partie centrale. De là provient l'avantage considérable que présentent sous ce rapport les pièces dont l'âme est évidée, telles que les cylindres à section annulaire, les poutres creuses, les cornières, les fers à T, etc.; c'est aussi l'une des raisons pour lesquelles une construction en fer peut, à poids égal, être beaucoup plus résistante que si elle était en bois: il est en effet possible d'y répartir la matière d'une façon beaucoup plus avantageuse au point de vue de la flexion, en faisant usage de pièces évidées dont la fabrication est devenue courante depuis longtemps dans les usines métallurgiques. Il ne faut pas cependant aller trop loin dans cette voie sous peine de voir se produire soit un cisaillement dans l'âme, soit un déversement général de la poutre; nous nous sommes longuement étendu sur le premier point en parlant de l'effort tranchant et du glissement longitudinal et nous avons donné les règles pratiques relatives à ce sujet (§ 50 et 51); quant au second nous allons le traiter sommairement tout à l'heure (§ 69).

§ 67. — **Emploi de sections non symétriques.**

Si l'on considère une pièce dont la section transversale n'est pas symétrique par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$ qui passe par son centre de gravité, les charges maximum R et R' des fibres qui travaillent le plus sont données, comme nous le savons, par les relations

$$R = \frac{M \cdot v}{I} \text{ (Traction, en AA')}$$

$$R' = \frac{M \cdot v'}{I} \text{ (compression, en BB')}$$

D'où

$$\frac{R}{R'} = \frac{v}{v'}$$

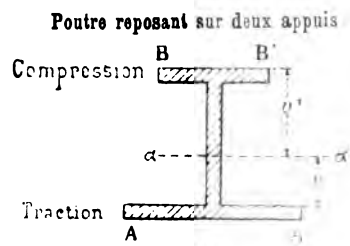


Fig. 110

Supposons que nous ayons affaire à une pièce de fonte; nous avons vu que ce métal résiste beaucoup mieux à la compression qu'à la traction et nous avons admis que, dans les circonstances ordinaires, les charges par millimètre carré qu'on peut lui appliquer avec sécurité sont respectivement de 12 kg. et de 3 kg. (§ 33 et 28); si donc on veut profiter, aussi bien dans la partie étendue AA' que dans la partie comprimée

BB', de toute la latitude que permet l'emploi de cette matière, il faut évidemment faire en sorte qu'on ait

$$\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'} = \frac{8}{12} = \frac{1}{4}$$

On est ainsi conduit à l'emploi de sections dont le profil n'est pas symétrique par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$. C'est effectivement cette solution qui est en général adoptée pour les poutres en fonte destinées aux constructions et aux grands travaux d'art; mais, dans la pratique, on considère comme à peu près impossible d'aller jusqu'à la limite $\frac{v}{v'} = \frac{1}{4}$ parce que alors, sous l'influence des différences considérables d'épaisseur de matière, il se produirait des retraits très inégaux et des tensions intérieures susceptibles de compromettre la solidité des pièces; on serait en outre très exposé à voir la partie comprimée se gauchir et se déverser latéralement par suite de son peu d'épaisseur. Pour ces divers motifs on se borne le plus souvent à disposer les choses de façon qu'on ait $\frac{v}{v'} = \frac{1}{2}$

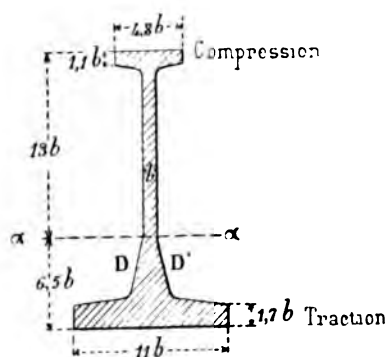


Fig. 111

comme on le voit dans la figure 111 qui représente un type de poutre qui a été avantageusement employé pour des planchers métalliques supportant des voûtes en briques qui reposaient sur les faces inclinées D et D'.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un corps pour lequel les charges de sécurité admises dans la pratique soient les mêmes pour la traction et la compression, comme cela a lieu pour les métaux autres que la fonte; on voit que,

si l'on ne doit jamais dépasser les points en question, il y a intérêt à avoir $v = v'$, c'est-à-dire à faire usage de sections symétriques telles que celles de fers à double T à semelles égales. La même conclusion subsiste encore si l'on fait travailler le corps jusqu'à sa limite d'élasticité, car les charges par millimètre carré qui commencent à altérer cette dernière diffèrent peu dans la pratique l'une de l'autre. Ces remarques font comprendre pourquoi on préfère en général des sections symétriques pour les poutres faites avec un métal autre que la fonte; cette

manière de voir n'est pas cependant universellement adoptée: un certain nombre d'ingénieurs en effet, se basant sur ce fait que les *charges de rupture* à la traction et à la compression diffèrent souvent très notablement l'une de l'autre (34 kg. et 25 kg. par exemple pour le fer), ont préconisé l'emploi de pièces à sections non symétriques. De nombreuses expériences ont été entreprises à ce sujet, mais leurs résultats sont loin d'être bien concordants et il n'y a pas lieu de s'en étonner quand on songe combien les phénomènes de rupture par flexion sont compliqués non seulement par eux-mêmes (§ 135), mais encore par les circonstances accessoires de gauchissement ou de déversement latéral qui viennent s'y adjoindre et qui varient d'un cas à l'autre suivant la nature et la disposition des liaisons qui unissent la pièce considérée au reste de la construction. On ne doit pas d'ailleurs perdre de vue ce fait capital que nous avons déjà signalé (§ 17), à savoir que nos formules de Résistance deviennent absolument inapplicables à partir du point où l'élasticité est altérée; comme il importe essentiellement que ce dernier point ne soit pas dépassé au moins dans les constructions qui n'ont pas un caractère temporaire, nous voyons donc qu'en général l'emploi de poutres à sections symétriques se trouve tout naturellement indiqué pour les métaux autres que la fonte.

§ 68. — **Effet produit dans certains cas par une troncature.**

D'après ce que nous avons dit plus haut, on pourrait croire qu'il y a toujours intérêt à ajouter à un corps travaillant par flexion de nouvelle matière plus éloignée de l'axe que celle qui existe déjà, mais il est facile de voir qu'il peut ne pas en être ainsi. Si l'on considère par exemple la section représentée par le n° 1 de la figure 112 et si on lui ajoute deux lames minces A et B, on voit que le moment d'inertie I n'est accru que d'une faible quantité tandis que la distance v augmente considérablement; le rapport $\frac{I}{v}$ se trouve donc alors sensiblement diminué. Il résulte de là que, si l'on veut qu'en aucun point de la pièce la charge par millimètre carré $R = M \cdot \frac{v}{I}$ ne dépasse pas une certaine limite, on ne pourra pas, après l'addition des appendices A et B, lui faire supporter un effort

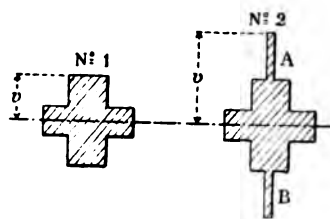


Fig. 112

aussi grand qu'auparavant; or le but que nous nous proposons dans toutes nos études, pour éviter une rupture immédiate ou éloignée, est de faire en sorte qu'il n'y ait dans les corps aucun point où la limite d'élasticité soit dépassée (§ 16); nous voyons donc que la section n° 2 doit, à ce point de vue, être considérée comme inférieure à l'autre ou, en d'autres termes, qu'une troncature peut parfois augmenter la valeur de l'effort maximum qu'on peut, sans inconvénient, faire supporter à la pièce (1).

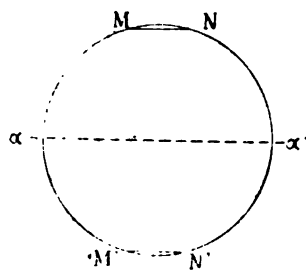


Fig. 113

La proposition que nous venons d'énoncer n'est pas limitée aux seuls cas où les surfaces considérées ont une forme aussi insolite que celle sur laquelle nous venons de raisonner; son exactitude *théorique* subsiste encore dans un grand nombre de circonstances où la section en question ne se termine point par des extrémités minces ou aigües comme tout à l'heure. Pour un cercle par exemple, on trouve que des troncatures MN, M'N' distantes entre elles des $\frac{98}{100}$ du diamètre augmentent le quotient $\frac{1}{v}$ de $\frac{1}{144}$ environ (2); mais, dans ce cas ainsi d'ailleurs que dans ceux qui se présentent avec les formes usuelles de sections, l'augmentation qu'éprouve parfois le rapport $\frac{1}{v}$ est trop faible pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte dans la pratique; il suffit seulement d'être éclairé à l'avance sur ce point singulier de la Résistance des matériaux.

§ 69. — Gauchissement des pièces soumises à des efforts de flexion.

Nous avons toujours supposé jusqu'ici que les forces fléchissantes qui sollicitent une pièce sont situées dans le plan de symétrie de cette

(1) Cela ne veut pas dire que la rupture de la pièce n° 2 se produira sous une charge moindre que pour le n° 1; c'est même le contraire qui a généralement lieu parce que les appendices A et B, quoique ayant dépassé et de beaucoup la limite d'élasticité, résistent cependant encore dans une certaine mesure; mais il n'en est pas moins vrai de dire que, dans une construction d'une nature durable, il convient de ne dépasser en aucun point la limite en question. Dans la pratique il est arrivé plus d'une fois que des nervures analogues à A et à B se sont brisées sous une charge bien inférieure à celle que pouvait supporter sans inconvénient la pièce munie de ces appendices, et on a alors purement et simplement pris le parti d'enlever ces derniers afin de ne pas avoir, dans une construction ou un ensemble mécanique, une pièce présentant des commencements de fracture.

(2) Voir la *Résistance des corps solides*, par Navier et de Saint-Venant, p. 94.

dernière; mais, lors même qu'on s'est efforcé de réaliser cette condition, il arrive souvent qu'elle n'est pas rigoureusement remplie dans la pratique soit par suite d'une circonstance accidentelle, soit à cause des vibrations auxquelles l'ensemble du système est exposé et qui sont susceptibles de faire sortir momentanément du plan de symétrie les points d'application des forces, soit enfin en raison même du mode d'exécution de l'ouvrage et des efforts intérieurs qui s'y développent. Considérons par exemple deux grandes poutres de pont A et B reliées par des

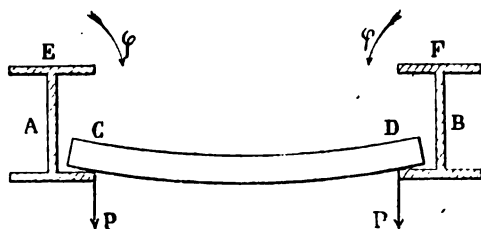


Fig. 114

pièces transversales CD auxquelles sont appliquées les charges : sous l'action de ces dernières, les pièces CD fléchissent de sorte que leur point de contact avec les semelles inférieures se trouve alors situé à une certaine distance de l'âme, comme on le voit sur la figure 114. Sous l'influence des forces excentrées P, chacune des poutres A et B tend à fléchir dans le sens des flèches φ et, si des dispositions spéciales n'ont pas été prises pour résister à ce moment gauchissant, il se produit un déversement qui est parfois assez prononcé pour entraîner la chute de tout le système. Pour des pièces de faibles dimensions, cornières, fers à T, etc., cet effet n'est presque jamais à craindre à cause du peu de hauteur de l'âme et de ses dimensions relativement fortes ; mais comme l'expérience l'a prouvé plus d'une fois, il cesse d'en être de même avec les poutres d'assemblage en tôle employées dans les grands ouvrages d'art. Pour résister au moment gauchissant φ , il faut alors, soit réunir les semelles supérieures E et F par des pièces horizontales formant *contreventement* et les maintenant, à une distance constante, soit munir les âmes verticales d'armatures (cornières ou fers à T) assemblées avec les pièces transversales CD et assez vigoureuses pour résister aux efforts de déversement dont nous venons de parler. On trouvera à ce sujet des considérations détaillées dans une étude intéressante de M. Périssé qui donne en même temps des formules pratiques relatives au calcul de ces divers genres de consolidations (1). Ce même

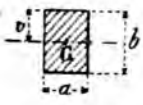
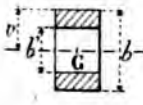
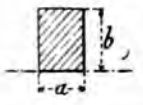
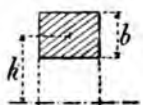
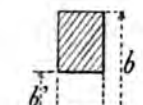
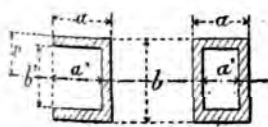
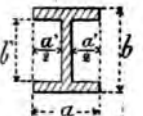
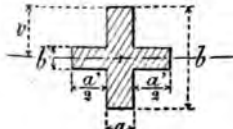
(1) Du gauchissement des poutres des ponts en fer avec calcul des contreventements par Sylvain Périssé. Voir aussi, sur ce même sujet, les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 1^{er} semestre 1880, p. 1413 et 1^{er} semestre 1881, p. 948.



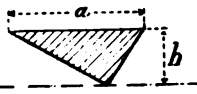
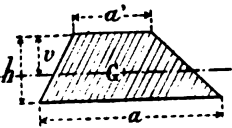
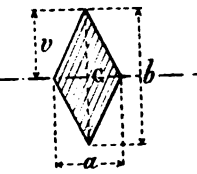
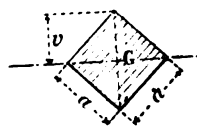
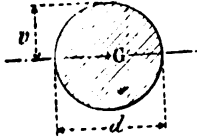
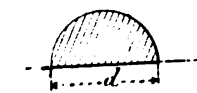
ingénieur a également signalé la tendance au gauchissement résultant de la compression qui, par le fait même de la flexion, se produit dans les semelles supérieures E, F soumises à des efforts de compression : il est bien clair que celles-ci se trouvent dans des conditions assez analogues à celles qui se présentent pour les pièces chargées debout et qu'il y a lieu, comme pour ces dernières, de ne pas dépasser la limite à partir de laquelle commencerait à se produire une flexion dangereuse. Des comparaisons faites avec des ouvrages existants et ayant fait sous ce rapport leurs preuves de solidité permettront de se mettre, à cet égard, dans de bonnes conditions et de donner à l'ouvrage toute la rigidité transversale qui est nécessaire.

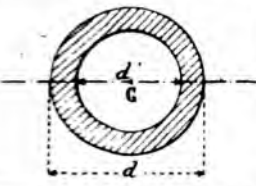
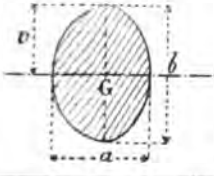
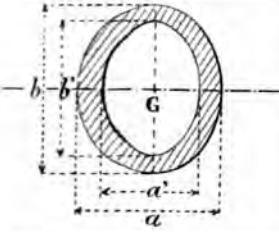
§ 70. — Valeurs des moments d'inertie de diverses surfaces.

Le tableau suivant fait connaître, pour les sections les plus usuelles, la surface S, la position du centre de gravité définie par la distance v , le moment d'inertie et le rapport $\frac{I}{v}$; on remarquera que, dans certains cas, nous donnons les valeurs de I relatives non seulement à un axe passant par le centre de gravité, mais encore à une autre ligne parallèle ; cela a pour but de permettre de calculer facilement les moments d'inertie de certaines surfaces qu'on est conduit à décomposer, comme nous l'avons dit, en plusieurs autres de formes plus simples. On passe, d'ailleurs, facilement de l'une de ces expressions à l'autre en se basant sur la relation indiquée au paragraphe 64.

Pour les cornières, les fers à T et les autres fers profilés d'un usage courant, on trouve presque toujours maintenant dans le catalogue de chaque usine le poids par mètre courant, ainsi que les valeurs de v , de I et de $\frac{I}{v}$ calculées pour les profils les plus employés ; ce sont celles qu'on devra employer sauf à avoir recours, pour une première étude, aux formules approchées dans lesquelles on néglige le moment d'inertie de l'âme et où on suppose la matière de chaque semelle concentrée en son centre de gravité, ce qui revient à laisser également de côté son moment d'inertie propre pris par rapport à un axe parallèle passant par ce dernier point.

FORME DE LA SECTION	SURFACE	I	v	$\frac{I}{v}$
	$a \cdot b$	$\frac{1}{12} a \cdot b^3$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6} a b^2$
	$a(b - b')$	$\frac{1}{12} a (b^3 - b'^3)$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6} a \frac{b^3 - b'^3}{b}$
	$a \cdot b$	$\frac{1}{3} a b^3$	»	»
	$a \cdot b$	$a \cdot b \cdot h^2 + \frac{1}{12} a \cdot b^3$	»	»
	$a(b - b')$	$\frac{1}{3} a (b^3 - b'^3)$	»	»
	$ab - a'b'$	$\frac{1}{12} (ab^3 - a'b'^3)$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{ab^3 - a'b'^3}{b}$
				
	$ab + a'b'$	$\frac{1}{12} (ab^3 + a'b'^3)$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{ab^3 + a'b'^3}{b}$

FORME DE LA SECTION	SURFACE	I	v	$\frac{I}{v}$
	$\frac{1}{2} a \cdot h$	$\frac{1}{36} a \cdot h^3$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{1}{24} a h^2$
	$\frac{1}{2} a h$	$\frac{1}{12} a \cdot h^3$	»	»
	$\frac{1}{2} a \cdot h$	$\frac{1}{4} a h^3$	»	»
	$\frac{1}{2} (a + a') h$	$\frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + 4a \cdot a' + a'^2}{a + a'}$	$\frac{h \cdot \frac{2a + a'}{3}}{a}$	$\frac{h^2 \cdot \frac{a^2 + 4a \cdot a' + a'^2}{12}}{2a + a'}$
	$\frac{1}{2} a \cdot b$	$\frac{1}{48} a \cdot b^3$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{24} a \cdot b^2$
	a^2	$\frac{1}{12} a^4$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^3}{b \cdot \sqrt{2}}$
	$\frac{\pi}{4} \cdot d^2$	$\frac{\pi}{64} \cdot d^4$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} \cdot d^3$
	$\frac{\pi}{8} \cdot d^2$	$\frac{\pi}{128} \cdot d^4$	»	»

FORME DE LA SECTION	SURFACE	I	v	$\frac{I}{v}$
	$\frac{\pi}{4} (d^2 - d'^2)$	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d'^4)$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{d^4 - d'^4}{d}$
	$\frac{\pi}{4} \cdot a \cdot b$	$\frac{\pi}{64} \cdot a \cdot b^3$	$\frac{b}{2}$	$\frac{\pi}{32} \cdot a \cdot b^2$
	$\frac{\pi}{4} (a \cdot b - a' \cdot b')$	$\frac{\pi}{64} (a \cdot b^3 - a' \cdot b'^3)$	$\frac{b}{2}$	$\frac{\pi}{32} \frac{a \cdot b^3 - a' \cdot b'^3}{b}$

Il importe essentiellement de remarquer que les formules données jusqu'ici pour la flexion n'ont été établies que pour des pièces symétriques par rapport à un plan qui contient les forces fléchissantes et ne s'appliquent pas, par conséquent, à tous les profils compris dans ceux qui sont figurés plus haut. On verra plus tard (§ 87) ce qu'il convient de faire quand cette condition de symétrie n'est pas remplie.

ÉTUDE DE DIVERS CAS PARTICULIERS RELATIFS A LA FLEXION PLANE DES PIÈCES DROITES.

Il y a un certain nombre de cas particuliers qui sont relatifs à la flexion des pièces droites et qui se rencontrent fréquemment dans la pratique; nous allons nous occuper de leur étude et faire connaître les résultats relatifs à chacun d'eux. Ce ne sont d'ailleurs que des applications des théories générales qui ont été exposées précédemment et qui nous ont permis d'établir les équations suivantes (§ 55).

1° ρ étant le rayon de courbure de la fibre moyenne déformée dans une section transversale où le moment fléchissant est égal à M , on a

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

2° La charge par millimètre carré de la fibre la plus chargée de cette même section est donnée par la relation

$$\frac{R \cdot I}{v} = M$$

3° L'équation différentielle de la fibre moyenne déformée est (§ 58)

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

Ces relations ont été établies, comme nous le savons, sans qu'il fût nécessaire de supposer que la section de la pièce est constante sur toute sa longueur.

1. — Pièce encastree à une extrémité et fléchie par un couple.

Vous avez déjà étudié ce cas (§ 43) et nous avons trouvé que le rayon de courbure ρ en un point quelconque est donné par la relation

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = \text{Moment fléchissant} = M$$

et que la plus grande charge R se déduit de l'équation

$$\frac{R \cdot I}{v} = M$$

Si la pièce a une section constante, elle se courbe alors en arc de cercle et la charge R a la même valeur dans toutes les sections.

Il ne nous reste qu'à calculer la flèche ; remarquons pour cela qu'on a

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

ou approximativement (§ 58)

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

ce qui donne en intégrant deux fois, I étant supposé constant,

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = M \cdot x$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{1}{2} M \cdot x^2$$

Faisons maintenant dans cette équation $x = L$, ce qui correspond à $y = f$; nous avons

$$E \cdot I \cdot f = \frac{1}{2} M \cdot L^2$$

$$f = \frac{M \cdot L^2}{2 E \cdot I}$$

§ 72. — Pièce encastree à une extrémité et chargée à l'autre d'un poids P.

Ce cas a été déjà traité en détail (§ 45 et 58), nous nous bornerons donc à rappeler les résultats que nous avons obtenus ; P étant la force normale appliquée à la pièce de longueur L, le moment fléchissant dans une section transversale quelconque mn est P. (L — x). Il est nul en K et maximum à l'encastrement ; la courbe des moments fléchissants est une droite KG telle que $HG = P \cdot L$.

L'effort tranchant est constant et égal à P; il est représenté par l'horizontale UV telle que $KU = P$ (1).

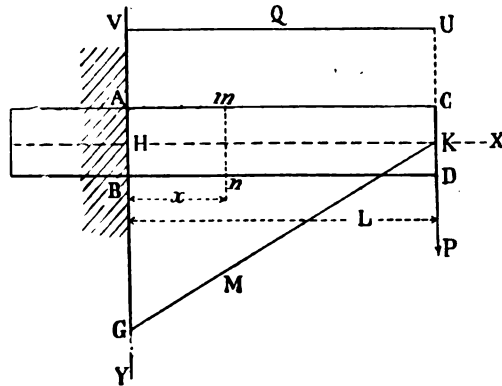


Fig. 115

La charge par millimètre carré R de la fibre la plus chargée de la section mn et le rayon de courbure ρ de la fibre moyenne déformée sont donnés par les formules

$$\frac{R \cdot I}{v} = \text{Moment fléchissant} = P \cdot (L - x)$$

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = \text{Moment fléchissant} = P \cdot (L - x)$$

et l'équation différentielle de cette même fibre est

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \text{Moment fléchissant} = P \cdot (L - x)$$

Dans le cas particulier où la pièce a une section constante sur toute sa longueur, la charge est maximum à l'encastrement pour lequel on a

$$\frac{R \cdot I}{v} = P \cdot L$$

$$R = \frac{P \cdot L \cdot v}{I}$$

(1) Ces deux lignes figuratives des moments fléchissants et des efforts tranchants sont ici tracées l'une au-dessous, l'autre au-dessus de HK en vertu des conventions faites au paragraphe 46.

et, dans la même hypothèse, l'équation de la fibre moyenne déformée est (§ 58)

$$E. I. y = \frac{1}{2} P. L. x^2 - \frac{1}{6} P. x^3$$

ce qui conduit, pour la flèche, à la valeur

$$f = \frac{P. L^3}{8 E. I}$$

§ 73. — **Pièce encastree à une extrémité et uniformément chargée.**

Soit p la valeur par millimètre courant du poids uniformément réparti;

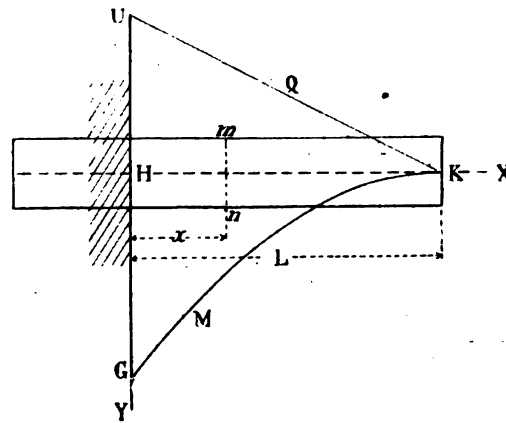


Fig. 116

une section transversale quelconque mn supporte un moment fléchissant égal à

$$M = p. (L - x) \times \frac{1}{2} (L - x) = \frac{1}{2} p. (L - x)^2$$

et un effort tranchant égal à

$$Q = p. (L - x)$$

La courbe des moments fléchissants est une parabole KG; celle des efforts tranchants est une droite KU et on a

$$HG = \frac{1}{2} p \cdot L^2 \quad HU = p \cdot L$$

En un point quelconque de la fibre moyenne

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = \frac{1}{2} p \cdot (L - x)^2$$

et l'équation de la fibre moyenne déformée est :

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} p \cdot (L - x)^2$$

Enfin, la charge R de la fibre la plus fatiguée de la section transversale *mn* est donnée par l'équation

$$\frac{R \cdot I}{\rho} = \frac{1}{2} p \cdot (L - x)^2$$

Dans le cas particulier où la pièce a une section constante sur toute sa longueur, le point le plus chargé est situé à l'encastrement pour lequel

$$\frac{R \cdot I}{\rho} = \frac{1}{2} p \cdot L^2$$

L'équation de la fibre moyenne déformée est alors

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} p \cdot (L - x)^2$$

En intégrant deux fois, on a, puisque I est constant par hypothèse,

$$E \cdot I \cdot y = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} L^2 x^2 - \frac{1}{3} L x^3 + \frac{1}{12} x^4 \right)$$

La flèche *f* s'obtiendra en faisant $x=L$ dans cette équation, ce qui donne

$$f = \frac{p \cdot L^4}{8 E \cdot I}$$

Il est à remarquer que, si le poids total $p.L$, au lieu d'être uniformément réparti, était concentré à l'extrémité libre de la pièce, la flèche serait égale à $\frac{p.L^3}{3E.I}$, c'est-à-dire qu'elle serait plus grande que dans le cas actuel dans le rapport de 8 à 3.

§ 74. — Pièce reposant sur deux appuis de niveau et chargée d'un poids P.

La poutre étant supposée reposer sur deux arêtes ou couteaux horizontaux situés à la même hauteur et n'éprouver, comme toujours, que de faibles déformations, les réactions exercées par les appuis ont une direction qui est à très peu près verticale et que nous pouvons, sans erreur sensible, regarder comme telle. D'après la statique ces réactions sont égales à $P \cdot \frac{b}{a+b}$ et $P \cdot \frac{a}{a+b}$.

La pièce étant prise avec la déformation qu'elle éprouve sous l'action

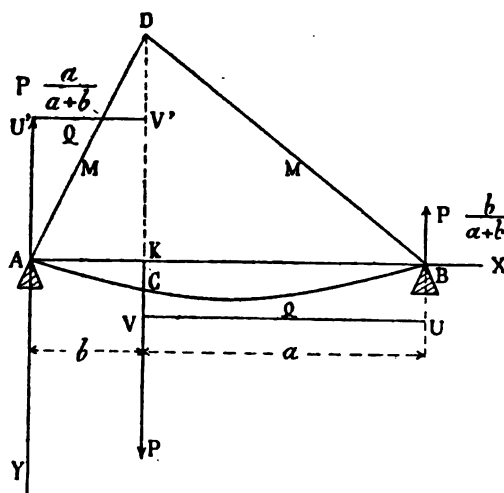


Fig. 117

de la force P, on peut évidemment la considérer comme encastrée en un point quelconque de sa longueur et en particulier dans la section transversale où est appliquée P; on se trouve ainsi ramené

aux deux problèmes suivants dont la solution a été donnée précédemment (§ 72):

1° Pièce CB encastrée en C et supportant à son extrémité une charge $P \cdot \frac{b}{a+b}$;

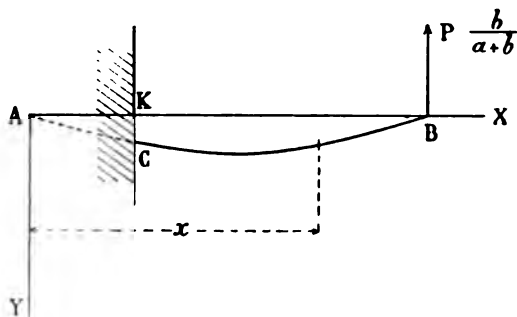


Fig. 118

2° Pièce CA encastrée en C et supportant à son extrémité une charge $P \cdot \frac{a}{a+b}$.

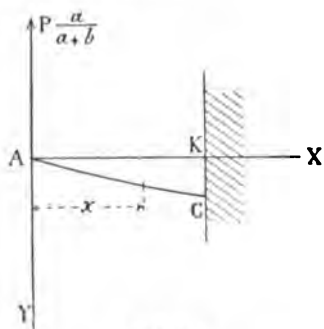


Fig. 119

Traçons la courbe des moments fléchissants : de B en C c'est une ligne droite BD telle que $KD = P \cdot \frac{a \cdot b}{a+b}$ de A en K, c'est la droite AD. Quant à l'effort tranchant, il est représenté par les horizontales UV et V'U' qui sont tracées l'une au-dessous, l'autre au-dessus de AB (§ 46). Nous avons ainsi tout ce qui est nécessaire pour calculer la charge maximum R en un point quelconque de la pièce et

par suite les dimensions de cette dernière.

Si nous voulons trouver l'équation de la fibre moyenne déformée, nous aurons recours aux deux relations suivantes :

$$\text{de A en K} \quad E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = - P \cdot \frac{a}{a+b} \cdot x$$

$$\text{de K en B} \quad E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = - P \cdot \frac{b}{(a+b)} (a+b-x)$$

En intégrant deux fois chacune de ces équations, nous introduirons quatre constantes qui se détermineront en considérant :

- 1° que, pour $x=0, y=0$ pour le tronçon AC,
- 2° que, pour $x=a+b, y=0$ pour le tronçon CB,
- 3° que, pour $x=b$, les valeurs de y doivent être les mêmes pour les deux tronçons,
- 4° que, pour $x=b$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ doivent être les mêmes.

Connaissant les quatre constantes, nous en déduisons l'équation de la fibre moyenne déformée et par suite la flèche en un point quelconque. Dans la pratique, il sera presque toujours préférable d'avoir recours, pour cette dernière détermination, au tracé graphique que nous avons indiqué au paragraphe 58.

Si la charge P se déplace de A en B , le point D qui correspond au moment de flexion maximum décrit une parabole ADB ; on a en effet

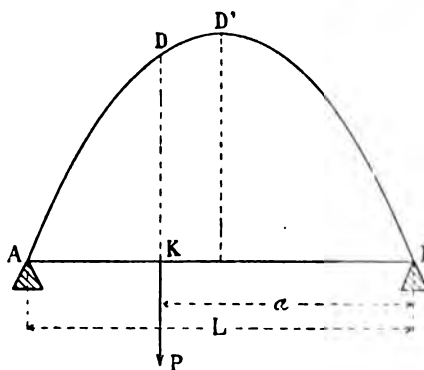


Fig. 120

$$KD = P \cdot \frac{a \cdot b}{a + b} = P \cdot \frac{a(a + b - a)}{a + b}$$

ou, en posant $a + b = L$

$$KD = \frac{P}{L} \cdot (a \cdot L - a^2)$$

On voit en outre que KD est maximum pour $a = \frac{L}{2}$, c'est-à-dire quand la charge est appliquée au milieu de la pièce. Si, dans ce cas particulier, on suppose en outre que la poutre à une section constante, la flèche f est donnée par la relation suivante (§ 72)

$$f = \frac{P}{8 E \cdot I} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{P \cdot L^3}{48 E \cdot I}$$

§ 75. — Pièce reposant sur deux appuis de niveau et uniformément chargée.

Soit p la valeur de la charge par millimètre courant, de sorte que le poids total est $p \cdot L$. Chaque appui donne alors lieu à une réaction $\frac{1}{2} p \cdot L$,

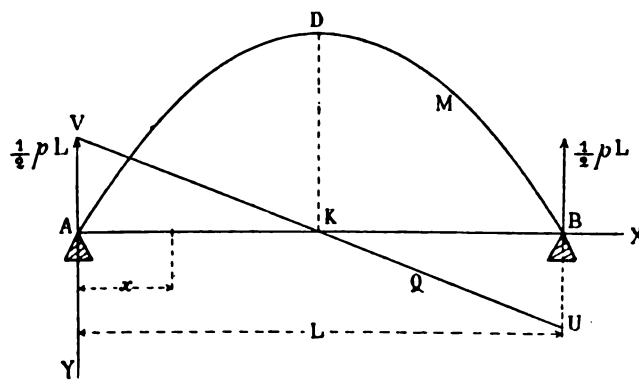


Fig. 121

et la poutre prend une forme qui est symétrique par rapport à la verticale passant en son milieu.

Le moment fléchissant dans une section transversale quelconque située à une distance x du point A est égal à

$$\frac{1}{2} p \cdot L \cdot x - p \cdot x \times \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} p \cdot (Lx - x^2)$$

Il est donc mesuré par les ordonnées de la parabole ADB qui a son sommet en D et l'on a $KD = -\frac{1}{8} p \cdot L^2$.

L'effort tranchant dans la même section transversale a pour valeur

$$-\frac{1}{2} p \cdot L + p \cdot x = -p \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)$$

et par suite il est représenté par la droite UV; il s'annule au milieu K de la poutre.

Aux extrémités A et B, il n'y a pas de moment fléchissant, mais simplement un effort tranchant; l'inverse a lieu en K.

Pour obtenir la valeur de la flèche, nous n'avons évidemment, en vertu du principe de la superposition des petites déformations, qu'à retrancher les valeurs des flèches qui seraient produites isolément par la force $\frac{1}{2} p.L$ et par le poids uniformément réparti p appliqués à la pièce KB de longueur $\frac{L}{2}$; nous avons donc, en supposant que la poutre a une section constante (§ 72 et 73)

$$f = \frac{\frac{1}{2} p \cdot L \times \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3 E \cdot I} - \frac{p \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^4}{8 E \cdot I}$$

$$f = \frac{5 p \cdot L^4}{384 E \cdot I}$$

On remarquera que, si la charge totale $p.L$, au lieu d'être uniformément répartie, était concentrée au milieu de la poutre, la flèche serait plus grande qu'actuellement dans le rapport de $\frac{1}{48}$ à $\frac{5}{384}$, c'est-à-dire de 8 à 5.

§ 76. — Pièce reposant sur deux appuis de niveau et chargée en dehors des points d'appui.

Ce cas qui est représenté par la figure 122 se traitera comme les précédents; il ne peut y avoir aucune difficulté à cet égard.

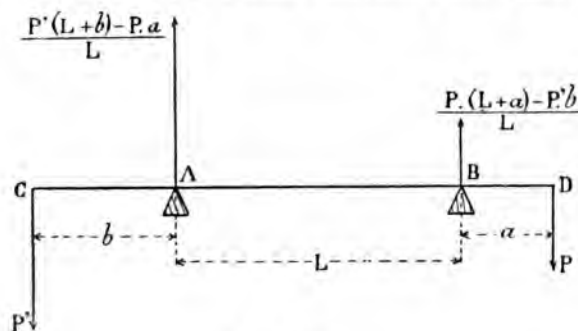


Fig. 122

Supposons, comme cas particulier, $a = b$ et $P = P'$; les moments fléchissants sont représentés par la ligne brisée DFHC telle que $BF = AH = P.a$; les efforts tranchants sont donnés par les horizontales UV, BA

et V'U'. De A en B il y a un moment fléchissant dû au couple P.a et pas d'effort tranchant. C'est, pour cette portion de la pièce, la réalisation pratique du cas étudié au paragraphe 43.

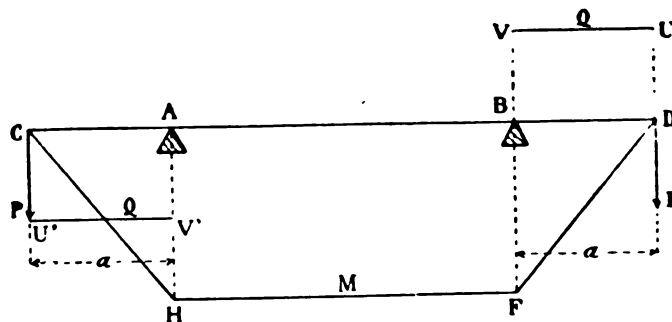


Fig. 123

La flèche peut se calculer facilement d'abord pour les parties BD et AC et ensuite pour le tronçon milieu AB.

§ 77. — Disposition la plus avantageuse à donner à deux appuis de niveau supportant une pièce uniformément chargée.

La charge par millimètre courant étant égale à p , on voit que chacun des appuis donne une réaction $\frac{1}{2} p.L$. De C en A le moment fléchissant est égal à

$$p \cdot x \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

ce qui donne la parabole CH. De D en B on a la même courbe DF; enfin de A en B le moment de flexion est

$$p \cdot a \times \left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2} p \cdot L \times (x-a) + p \cdot (x-a) \times \frac{x-a}{2} = \frac{1}{2} p \cdot (x^2 - L \cdot x + L \cdot a)$$

d'où pour courbe figurative la parabole HVF.

Proposons-nous de voir quelle est la position des points d'appui qui donne le plus possible la valeur maximum du moment de flexion, ce sera

évidemment le dispositif le plus avantageux dans le cas où la pièce a

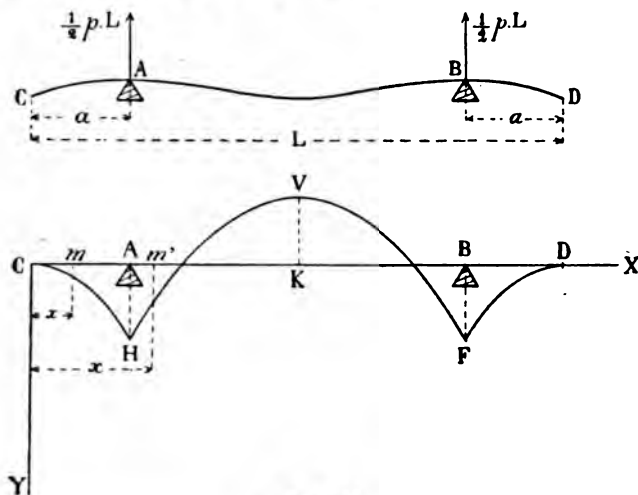


Fig. 124

une section constante (1). Il est facile de voir que cette condition est réalisée quand on a

$$AH = -KV$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p. a^2 &= -\frac{1}{2} p. \left(\frac{L^2}{4} - L. \frac{L}{2} + L. a \right) \\ a^2 + L. a - \frac{L^2}{4} &= 0 \\ a &= \frac{L}{2} (\sqrt{2} - 1) = 0,207 L \end{aligned}$$

Le moment maximum de flexion est alors égal à

$$\frac{1}{2} p. \frac{L^2}{4} (\sqrt{2} - 1)^2 = 0,0214 p. L^2$$

Si, au contraire, les points d'appui se trouvaient aux extrémités de la pièce, le moment maximum serait égal à $\frac{1}{8} p.L^2$ (§ 75), c'est-à-dire environ 5,8 fois plus grand que dans le cas actuel; on voit donc quelle importance considérable peut avoir, dans certaines circonstances, la position assignée aux supports d'une pièce.

(1) S'il s'agissait au contraire d'une poutre analogue aux grandes poutres d'assemblage en tôle dont on peut faire varier à volonté la section par suite même du mode de construction, ce ne serait pas la valeur maximum du moment de flexion mais plutôt la moyenne des valeurs absolues de ces moments qu'il conviendrait de réduire le plus possible.

§ 78. — Pièce encastrée à ses deux extrémités et chargée en son milieu d'un poids P.

Nous supposons que la pièce est encastrée à ses deux extrémités, c'est-à-dire que ces dernières sont engagées d'une manière invariable dans un mur ou fixées à un support de telle façon que les tangentes en A et B restent toujours horizontales (1); d'autre part il y a symétrie complète par rapport à la verticale KC qui passe par le milieu K de la poutre; celle-ci va donc prendre une forme telle que ACB.

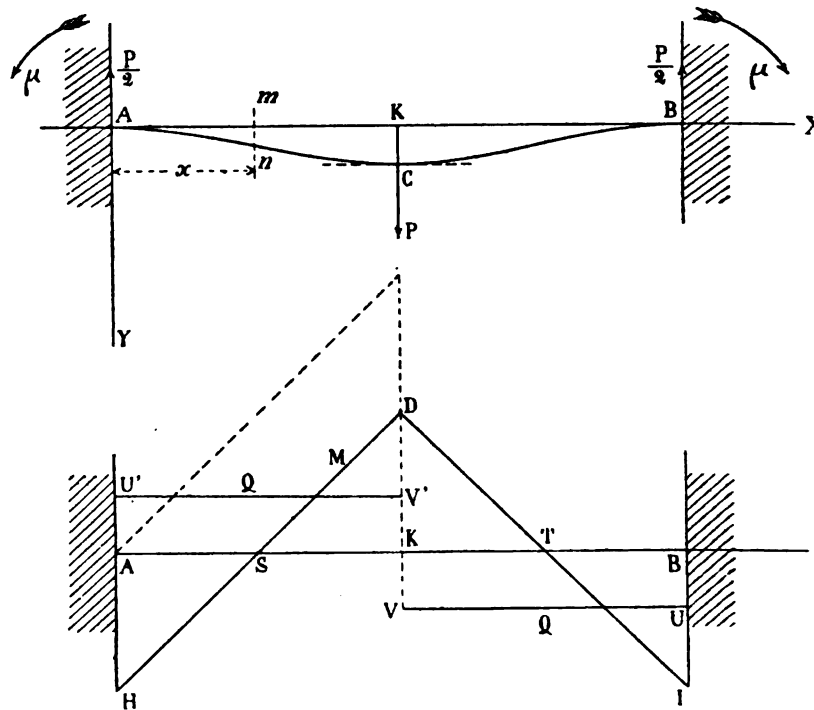


Fig. 125

Pour calculer les efforts qui sollicitent une section quelconque, remarquons qu'un encastrement donne lieu d'abord à une réaction verticale comme un point d'appui ordinaire, puis à un couple qui force la tangente

(1) Nous admettons cependant que les choses sont disposées de telle sorte que la poutre peut se déplacer longitudinalement dans l'un de ses encastresments ou que l'un de ceux-ci peut se rapprocher légèrement de l'autre, de telle sorte qu'aucun d'eux n'exerce d'action horizontale sur la pièce.

à rester horizontale. Dans le cas actuel, à cause de la symétrie, les réactions en question appliquées en A et B sont égales à $\frac{P}{2}$, et les couples d'encastrement μ sont aussi égaux entre eux. Proposons-nous de calculer leur valeur.

Le moment fléchissant auquel est soumise une section transversale quelconque mn comprise de A en K est égale à

$$-\frac{1}{2} P. x + \mu$$

On a donc entre ces deux points

$$E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} P. x + \mu$$

D'où, en intégrant et en supposant que la section de la pièce et par suite le moment d'inertie I sont constants,

$$E. I. \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4} P. x^2 + \mu. x$$

puisque, pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Remarquons que, pour $x = \frac{L}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ est également nul; par conséquent

$$-\frac{1}{4} P. \frac{L^2}{4} + \mu. \frac{L}{2} = 0$$

$$\mu = \frac{1}{8} P. L$$

Nous sommes maintenant en mesure de tracer la courbe des moments fléchissants puisque ces derniers ont pour valeur depuis le point A jusqu'en K

$$-\frac{1}{2} P. x + \mu = \frac{1}{2} P \left(\frac{L}{4} - x \right)$$

De A en K c'est donc une droite HD telle que $AH = KD = \frac{1}{8} P. L$; de K en B c'est la ligne symétrique DI.

La ligne figurative des efforts tranchants se compose des deux horizontales UV, U'V' telle que $BU = AU' = \frac{1}{2} P$.

Aux points S et T situés au quart de la longueur de la pièce, le moment fléchissant est nul et les sections correspondantes sont soumises à un simple effet de torsion; c'est là que se produisent les inflexions de la fibre moyenne.

Si la pièce au lieu d'être encastrée en A et B, reposait simplement sur deux appuis, la ligne figurative des moments fléchissants monterait parallèlement à elle-même de la quantité $AH = \frac{1}{8} P. L$, comme l'indique le tracé en pointillés; on voit donc que l'encastrement diminue de moitié la valeur du moment fléchissant maximum.

Proposons-nous de trouver l'équation de la fibre moyenne déformée dans le cas où la section de la pièce est constante; nous venons de voir qu'elle a alors

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4} P. x^2 + p. x = -\frac{1}{4} P. x^2 + \frac{1}{8} P. L. x$$

En intégrant on a

$$E. I. y = -\frac{1}{12} P. x^3 + \frac{1}{16} P. L. x^2$$

équation applicable de A en K; l'autre moitié est symétrique de la première par rapport à la verticale KD.

La flèche s'obtiendra immédiatement en faisant $x = \frac{L}{2}$, ce qui donne

$$E. I. f = \frac{1}{192} P. L^3$$

$$f = \frac{P. L^3}{192 E. I}$$

Elle est donc 4 fois moins grande que s'il n'y avait pas d'encastrement.

§ 79. — Remarque relative aux encastrements.

Nous venons de voir que l'existence d'un double encastrement diminue considérablement le moment maximum de flexion; pour qu'il en soit réellement ainsi, il faut évidemment que ces encastrements produisent bien l'effet que nous avons supposé, c'est-à-dire qu'ils forcent les deux extrémités de la pièce à conserver parfaitement leur direction primitive.

Il est facile de voir que cette condition ne peut être remplie que si l'on prend certaines dispositions particulières : s'il s'agit par exemple d'une pièce engagée dans un mur ou dans un autre support quelconque, il faut que la portion encastrée AA' ne soit pas trop courte, sans quoi la matière qui forme le support cédera d'une manière appréciable sous l'in-

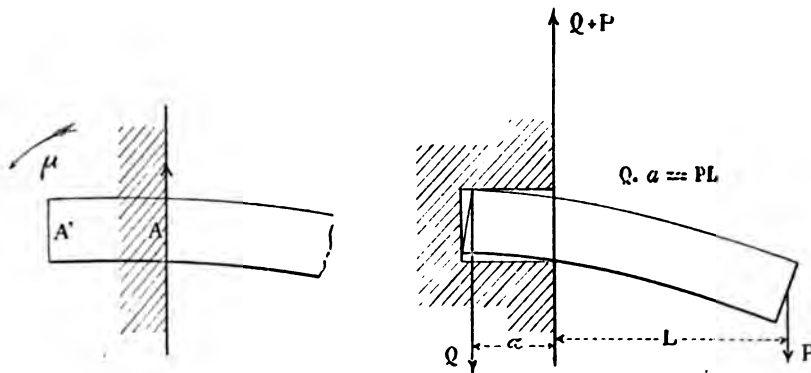


Fig. 126

fluence des forces considérables qui devront alors se développer sur la faible longueur des parties en contact en donnant naissance au couple μ . Une remarque analogue est applicable aux cas où l'encastrement est obtenu de n'importe quelle autre manière, par exemple par la jonction de deux poutres en tôle l'une contre l'autre au moyen de cornières. Il faut donc, quel que soit le dispositif adopté, ne compter sur tous les bénéfices de l'encastrement que si celui-ci est réalisé d'une manière effective et complète, et il importe essentiellement de remarquer que ce résultat ne peut être obtenu que moyennant une dépense plus ou moins forte résultant de la constitution même de l'encastrement et des consolidations accessoires (courbes, équerres, goussets, etc.), destinés à le rendre bien complet.

**§ 80. — Pièce encastrée à ses deux extrémités
et uniformément chargée.**

Soit p la charge par millimètre courant; nous traiterons ce cas exactement comme le précédent: les encastremets donnent lieu chacun à une

force verticale $\frac{1}{2} p \cdot L$ et à un couple μ . Pour une section transversale quelconque mn , on a

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2} p \cdot L \cdot x + \mu + p \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Si l'on suppose la section de la pièce et par suite I constants, on a en intégrant

$$E. I. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} p \cdot x^2 - \frac{1}{4} p \cdot L \cdot x + \mu \cdot x$$

puisque, pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

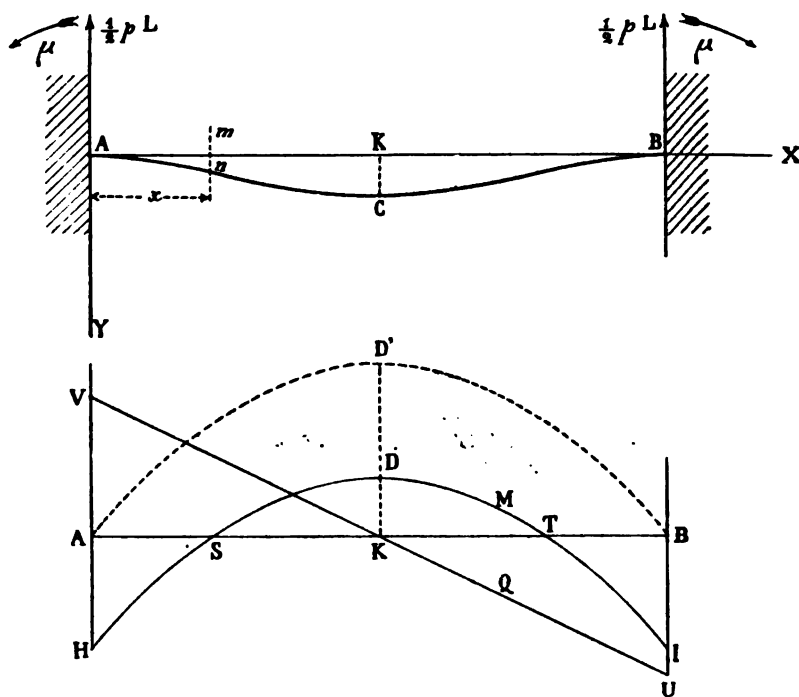


Fig. 127

Pour $x = \frac{L}{2}$, nous devons également avoir $\frac{dy}{dx} = 0$ à cause de la symétrie de la fibre moyenne déformée par rapport à la verticale milieu KC ; par conséquent

$$\frac{1}{6} p \cdot \frac{L^2}{8} - \frac{1}{4} p \cdot L \cdot \frac{L}{4} + \mu \cdot \frac{L}{2} = 0$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{12} p \cdot L^2$$

Nous sommes donc maintenant en mesure de tracer la courbe des moments fléchissants puisque, pour une section transversale quelconque, ce moment a pour valeur

$$\frac{1}{2} p \cdot x^2 - \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x + \frac{1}{12} p \cdot L^2 = \frac{1}{2} p \cdot \left(x^2 - L \cdot x + \frac{1}{6} L^2 \right)$$

La courbe en question est une parabole HDI dans laquelle $AH = \frac{1}{12} p \cdot L^2$ et $KD = \frac{1}{24} p \cdot L^2$. Quant aux efforts tranchants, ils sont donnés par la droite UV telle que $BU = AV = \frac{1}{2} p \cdot L$.

Aux points S et T il n'y a pas de moment de flexion, mais simplement un effort tranchant; les valeurs des abscisses correspondantes AS, AT sont évidemment données par l'équation

$$x^2 - L \cdot x + \frac{1}{6} L^2 = 0$$

d'où

$$AS = \frac{1}{2} L \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,211 L$$

$$AT = \frac{1}{2} L \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,789 L$$

C'est en ces points que se produisent les inflexions de la fibre moyenne déformée.

Si la pièce, au lieu d'être encastree, reposait simplement sur deux appuis, les moments fléchissants seraient donnés par la courbe HDI remontée parallèlement à elle-même comme l'indique le tracé en pointillé dans lequel $KD' = \frac{1}{8} p \cdot L^2$; le double encastrement réduit la fatigue dans le rapport de $\frac{1}{12}$ à $\frac{1}{8}$ c'est-à-dire de 2 à 3.

L'équation de la fibre moyenne déformée (en supposant toujours la section constante) se déduit immédiatement de ce qui précède: nous avons trouvé en effet

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} p \cdot x^2 - \frac{1}{4} p \cdot L \cdot x + \frac{1}{12} p \cdot L^2 \cdot x$$

D'où, en intégrant,

$$E \cdot I \cdot y = \frac{1}{24} p \cdot x^3 - \frac{1}{12} p \cdot L \cdot x^2 + \frac{1}{24} p \cdot L^2 \cdot x$$

— 127 —

$$T = \frac{P \cdot a}{L}$$

$$= \frac{P \cdot a}{a + \mu}$$

La force T est la tension dans le fil qui maintient l'équilibre du système.

3. — Fil suspendu à une extrémité, reposant à l'autre sur un appui et chargé d'un poids P .

Soit un fil suspendu à une extrémité A et reposant à l'autre sur un appui B et chargé d'un poids P au point K . Soit L la longueur du fil et a la distance AK .

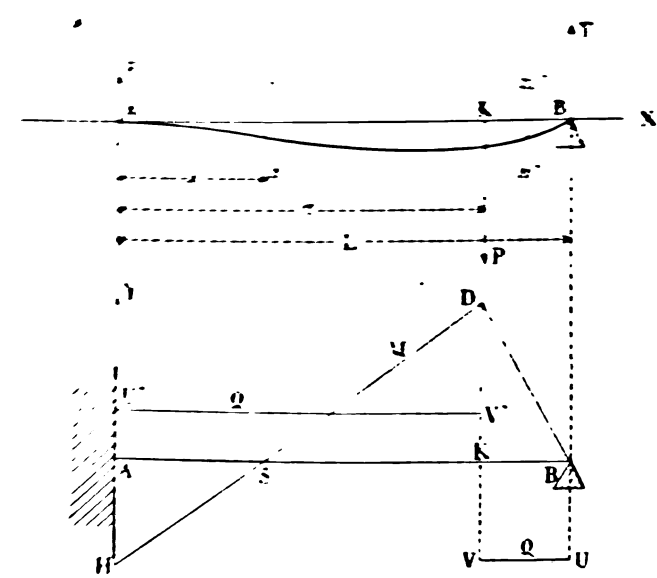


Fig. 128

Les principes de la statique donnent

$$F + T = P$$

$$T \cdot L - P \cdot a + \mu = 0$$



Pour une section quelconque mn comprise entre l'encastrement et la charge P, on a

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = -T. (L - x) + P (a - x)$$

Pour une section $m'n'$ située au-delà de P, on a

$$E. I. \frac{d^2 y'}{dx^2} = -T (L - x)$$

Si nous supposons la section de la pièce et par suite I constants, nous avons en intégrant

$$\begin{cases} E. I. \frac{dy}{dx} = -T. \left(L. x - \frac{x^2}{2} \right) + P. \left(a. x - \frac{x^2}{2} \right) \\ E. I. y = -T. \left(L. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + P. \left(a. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \\ E. I. \frac{dy'}{dx} = -T. \left(L. x - \frac{x^2}{2} \right) + C \\ E. I. y' = -T. \left(L. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C. x + C' \end{cases}$$

Pour $x = L, y' = 0$; par conséquent

$$-T. \left(L. \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6} \right) + C. L + C' = 0$$

d'où

$$C' = \frac{1}{3} T. L^2 - C. L$$

La dernière des équations ci-dessus peut donc s'écrire

$$E. I. y' = -T. \left(L. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C. x + \frac{1}{3} T. L^2 - C. L$$

Écrivons maintenant que, pour $x = a, \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$; nous avons ainsi

$$C = \frac{1}{2} P. a^2$$

et par suite l'équation précédente devient

$$E. I. y' = -T. \left(L. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{2} P. a^2 (L - x) + \frac{1}{3} T. L^2$$

Remarquons enfin que, pour $x = a$, $y = y'$, ce qui nous donne

$$P \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \right) = -\frac{1}{2} P \cdot a^2 (L - a) + \frac{1}{3} T \cdot L^2$$

d'où

$$T = \frac{P \cdot a^2 \cdot (3L - a)}{2L^2}$$

On déduit de là

$$F = P - T = P - \frac{P \cdot a^2 \cdot (3L - a)}{2L^2}$$

$$\mu = P \cdot a - T \cdot L = P \cdot a - \frac{P \cdot a^2 \cdot (3L - a)}{2L^2}$$

Nous connaissons donc maintenant la valeur de toutes les forces appliquées à la pièce et le problème proposé se trouve résolu. Traçons la courbe des moments fléchissants (fig. 128): elle se compose de deux droites HD, DB telles que

$$AH = \mu = P \cdot a - \frac{P \cdot a^2 \cdot (3L - a)}{2L^2}$$

$$KD = T \cdot (L - a) = \frac{P \cdot a^2 \cdot (3L - a) \cdot (L - a)}{2L^2}$$

Quant aux efforts tranchants, ils sont donnés par les deux horizontales UV, V'U' telles que $BU = T$ et $AU' = F$.

Il y a inflexion de la fibre moyenne au point S pour lequel le moment fléchissant est nul.

Si l'on veut obtenir algébriquement la flèche, on calculera la valeur de x pour laquelle $\frac{dy}{dx} = 0$ et, en reportant celle-ci dans l'équation qui donne y , on en déduit immédiatement la flèche cherchée. Comme nous l'avons déjà dit bien des fois, il sera en général préférable d'avoir recours au procédé graphique indiqué au paragraphe 58.

§ 82. — Pièce encastree à une extrémité, reposant à l'autre sur un appui et uniformément chargée.

Ce problème se résoudra comme le précédent. Soient μ et F le couple et la force produits par l'encastrement, et T la réaction à laquelle donne lieu l'appui B; la statique donne

$$F + T = p \cdot L$$

$$T \cdot L - \frac{1}{2} p \cdot L^2 = \mu$$



Pour une section transversale quelconque mn , on a

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = -F. x + \frac{1}{2} p. x^2 + \mu$$

La section de la pièce étant supposée constante, on a en intégrant

$$E. I. \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} F. x^2 + \frac{1}{6} p. x^3 + \mu. x$$

$$E. I. y = -\frac{1}{6} F. x^3 + \frac{1}{24} p. x^4 + \frac{1}{2} \mu. x^2$$

Remarquons maintenant que, pour $x = L$, le moment fléchissant est

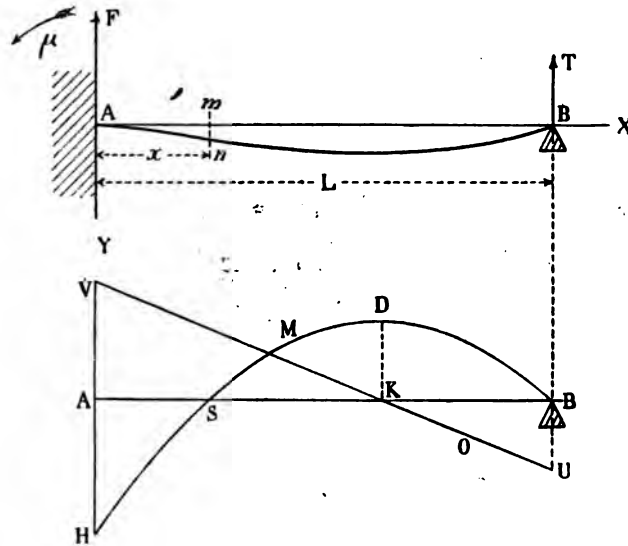


Fig. 129

nul et que, pour $x = L$, $y = 0$; nous avons donc

$$-F. L + \frac{1}{2} p. L^2 + \mu = 0$$

$$-\frac{1}{6} F. L^3 + \frac{1}{24} p. L^4 + \frac{1}{2} \mu. L^2 = 0$$

On déduit de là

$$F = \frac{5}{8} p. L$$

$$\mu = \frac{1}{8} p. L^2$$

et par suite

$$F = p \cdot L - F = \frac{1}{2} p \cdot L$$

On va considérer donc toutes les fibres situées à la pièce et le moment de flexion. Le moment fléchissant dans une section transversale *mn* est

$$-F \cdot x - \frac{1}{2} p \cdot x^2 + \mu = \frac{1}{2} p \cdot x^2 - \frac{5}{8} p \cdot L \cdot x - \frac{1}{8} p \cdot L^2$$

La courbe des moments fléchissants est une parabole HDB dans laquelle $AK = x = \frac{1}{4} p \cdot L^2$ par conséquent il a pour abscisse la valeur de *x* telle que $\frac{d^2 F}{dx^2} = 0$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = 0$$

c'est-à-dire

$$-F + px = 0$$

$$x = AK = \frac{F}{p} = \frac{5}{8} L$$

Quant à la valeur correspondante du moment fléchissant, elle est égale à

$$-F \cdot \frac{5}{8} L + \frac{1}{2} p \times \frac{25}{64} L^2 + \mu = -\frac{9}{128} p \cdot L^2$$

L'effort tranchant dans la section *mn* est égal à

$$p \cdot x - F = p \cdot x - \frac{5}{8} p \cdot L$$

Il est représenté par la droite UV qui passe par le point K et on a

$$BU = \frac{8}{8} p \cdot L \quad \dots \quad AV = \frac{5}{8} p \cdot L$$

Il y a inflexion de la fibre moyenne déformée au point S où le moment fléchissant est nul, c'est-à-dire où on a

$$-F \cdot x + \frac{1}{2} p \cdot x^2 + \mu = 0$$

$$-\frac{5}{8} p \cdot L \cdot x + \frac{1}{2} p \cdot x^2 + \frac{1}{8} p \cdot L^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{4} L$$

Pour avoir la flèche, calculons l'abscisse du point pour lequel $\frac{dy}{dx} = 0$

$$-\frac{1}{2} F \cdot x^2 + \frac{1}{6} p \cdot x^3 + p \cdot x = 0$$

On en déduit

$$x = 0.578 L$$

quantité inférieure à AK et correspondant par conséquent à un point situé à gauche de K.

En portant cette valeur de x dans l'équation où figure y , on obtient immédiatement la valeur de la flèche; on trouve ainsi

$$f = 0,00542 \frac{p \cdot L^4}{E \cdot I}$$

§ 83. — **Pièce uniformément chargée et supportant plusieurs charges isolées.**

Pour résoudre ce problème, nous étudierons à part l'effet produit par la charge uniformément répartie et par chacun des poids isolés, ce qui rentre dans les divers cas qui viennent d'être traités. En vertu du principe bien des fois mentionné de la superposition des petites déformations, il ne nous restera plus alors qu'à ajouter entre elles les valeurs respectivement obtenues par les moments fléchissants, les efforts tranchants et les flèches correspondant à chacune des sections transversales de la pièce considérée; nous n'avons ainsi à faire qu'une simple addition algébrique ne présentant aucune difficulté et il est par conséquent inutile d'insister davantage sur ce sujet. Dans le cas particulier où on veut tenir compte du poids d'une pièce à section constante, celui-ci doit être simplement assimilé à une charge uniformément répartie sur toute la longueur.

§ 84. — **Aiguille de barrage soutenant une charge d'eau.**

Soit AB l'aiguille rectangulaire d'un barrage d'eau; nous la supposons verticale et soutenue seulement le long des arêtes A et B, c'est-à-dire

non appuyée sur les côtés. Le niveau de l'eau est au point C en amont et au point D en aval.

Appelons p le poids, en kilogrammes, de 1 millimètre cube de liquide ; on sait que la résultante de toutes les pressions élémentaires exercées

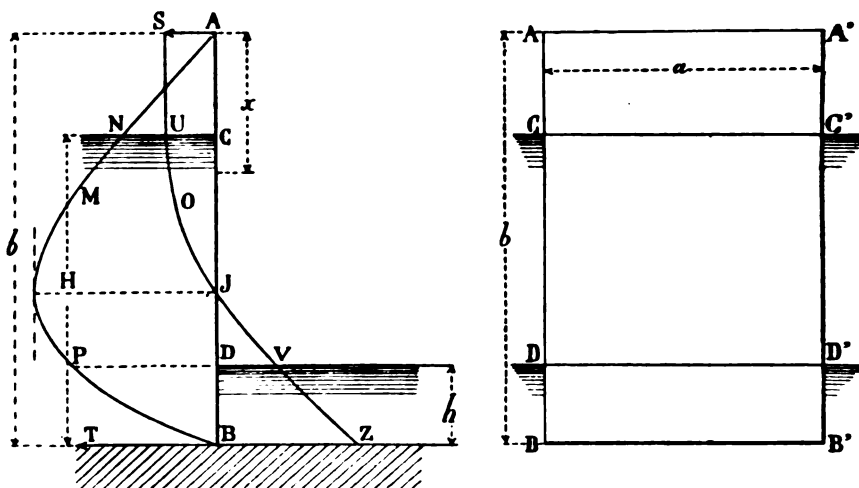


Fig. 130

par le liquide de C en B sur la face d'amont est égale à $\frac{1}{2} p \cdot a \cdot H^2$ et que son point d'application est situé à une distance du point B égale à $\frac{1}{3} H$. De même la résultante de toutes les pressions hydrostatiques qui se produisent sur la face d'aval DB a pour valeur $\frac{1}{2} p \cdot a \cdot h^2$ et est appliquée au tiers de BD à partir du point B.

Pour résoudre le problème, calculons les réactions horizontales S et T exercées par les points d'appui de l'aiguille de barrage ; la statique donne

$$S + T = \frac{1}{2} p \cdot a \cdot H^2 - \frac{1}{2} p \cdot a \cdot h^2$$

$$S \cdot b = \frac{1}{6} p \cdot a \cdot H^3 - \frac{1}{6} p \cdot a \cdot h^3$$

Ces équations déterminent S et T ; toutes les forces appliquées à l'aiguille sont donc connues et nous pouvons tracer la courbe des moments

fléchissants et des efforts tranchants : la première M est une ligne discontinue dont les ordonnées M ont les valeurs suivantes :

de A en C, $M = -S \cdot x$ ligne droite AN,

de C en D, $M = -S \cdot x + \frac{1}{6} p \cdot a \cdot (x - b + H)^2$ courbe NP,

de D en B, $M = -S \cdot x + \frac{1}{6} p \cdot a \cdot (x - b + H)^2 - \frac{1}{6} p \cdot a \cdot (x - b + h)^2$ courbe PB.

Quant aux efforts tranchants Q, ils ont les valeurs ci-dessous :

de A en C, $Q = -S$ ligne droite SU,

de C en D, $Q = -S + \frac{1}{2} p \cdot a \cdot (x - b + H)^2$ courbe UV,

de D en B, $Q = -S + \frac{1}{2} p \cdot a \cdot (x - b + H)^2 - \frac{1}{2} p \cdot a \cdot (x - b + h)^2$ courbe VZ.

Le problème que nous nous étions proposé est donc résolu.

Le maximum du moment de flexion est facile à trouver, puisqu'il correspond au point J ou l'on a $Q = 0$ et qui est obtenu de suite au moyen des expressions qui viennent d'être calculées pour Q ; il ne reste plus alors qu'à porter l'abscisse $x = AJ$ dans l'équation correspondante du moment fléchissant.



DÉTERMINATION PRATIQUE DES COEFFICIENTS E ET R RELATIFS A LA FLEXION.

§ 85. — Détermination du coefficient d'élasticité E relatif à la flexion.

Dans l'étude théorique qui nous a permis d'établir les équations relatives à la flexion (§ 43), nous avons admis que, sous l'action des forces longitudinales de traction ou de compression qui les sollicitent, les fibres obéissent aux mêmes lois de déformation que si elles étaient isolées les unes des autres, et par suite nous avons pris pour coefficient d'élasticité E précisément celui qui résulte d'expériences directes de traction ou de compression. Il y a évidemment lieu de vérifier que cette manière de considérer les phénomènes donne des résultats suffisamment conformes à la réalité et, comme le coefficient E entre dans les formules qui expriment la valeur des flèches, il convient, par une mesure de ces dernières, de procéder à la détermination directe du coefficient E relatif à la flexion ;

on aura ainsi d'ailleurs l'occasion de voir si les lois exprimées par ces formules représentent bien les faits observés, et par suite de s'assurer de l'exactitude pratique des résultats fournis par les études qui précèdent.

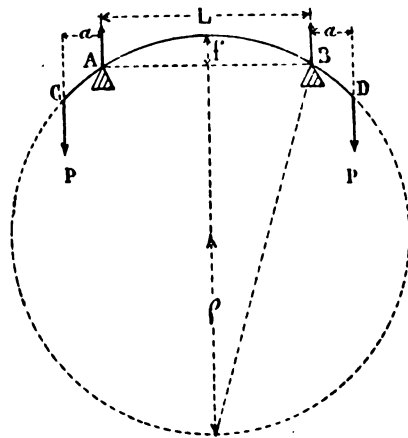


Fig. 131

En principe, les expériences en question peuvent se faire sur une poutre droite placée dans l'une quelconque des circonstances que nous avons étudiées précédemment (§ 71 et suivants); mais, dans la pratique, il est préférable de choisir le cas où il y a flexion simple sans circonstances accessoires de glissement longitudinal et transversal, c'est-à-dire de prendre une pièce fléchie par un couple suivant le dispositif

indiqué au paragraphe 76; le tronçon qui est compris entre les points A et B et dont nous supposons la section constante se courbe alors exactement en arc de cercle (§ 43) de sorte qu'on a

$$\frac{L^2}{4} = f \cdot (2\rho - f)$$

et comme

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M^{\text{fléchissant}} = P \cdot a$$

il s'ensuit que

$$E = \frac{P \cdot a \cdot \left(\frac{L^2}{4f} + f\right)}{2 I \cdot f}$$

ou très sensiblement

$$E = \frac{P \cdot a \cdot L^2}{8 I \cdot f}$$

Pour avoir des résultats bien nets, on observe les flèches produites par une série de poids allant en croissant et on trace une courbe ayant, par exemple, pour abscisses f et pour ordonnées P ; l'expérience prouve qu'on obtient ainsi une ligne d'abord très sensiblement droite qui, à partir d'un certain point K, s'infléchit vers l'axe des x ; on constate en outre que, pour toute la portion OK, la valeur $\frac{P \cdot a \cdot L^2}{8 I \cdot f}$ calculée pour E ne diffère que peu ou point de celle du coefficient d'élasticité de traction et de compression.

Des expériences analogues ont été faites par de nombreux expérimentateurs sur des poutres fléchies de diverses manières et ont donné les mêmes résultats; parfois cependant il a été admis qu'il convenait de prendre pour le coefficient d'élasticité de flexion un chiffre un peu moindre que celui que nous indiquons et cela pour tenir compte des phénomènes de glissement longitudinal et transversal qui ont pour résultat d'augmenter très légèrement les flèches; mais, dans la pratique, on peut se borner à adopter une valeur unique pour E . Ce qu'il ne faut pas perdre de vue, c'est que, dans les pièces d'assemblage, les joints cèdent toujours un peu et leur existence donne lieu à une déformation plus

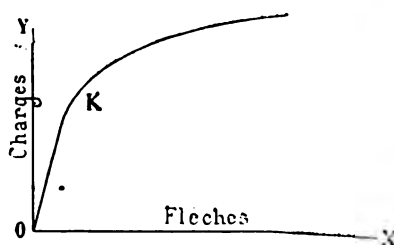


Fig. 132

grande que celle qu'on constaterait sur une pièce d'un seul morceau ; pour des poutres en tôle par exemple, on a souvent trouvé, lors de l'application de la première charge, une flèche une fois et demie plus grande que celle qui résulte des formules théoriques ; mais, une fois le premier effet produit, ces dernières se sont trouvées d'accord avec les résultats de l'observation ; il n'en est cependant pas toujours ainsi et, avec des assemblages qui ne présentent pas la rigidité des rivures des poutres en tôle, il se produit entre les pièces en contact un jeu parfois considérable qui disparaît en partie avec l'enlèvement de la charge et augmente notablement les déformations, sans qu'il soit évidemment possible d'indiquer aucune règle précise à ce sujet.

Les mesures de flèches, effectuées pour déterminer le coefficient d'élasticité, doivent se faire avec une très grande précision ; on peut employer pour cela un cathétomètre avec lequel on ne doit pas oublier de relever, à chaque expérience, la hauteur des points d'appui afin de se prémunir contre le tassement que peuvent éprouver ces derniers. Pour que leur distance reste bien constante et soit facilement mesurable, on leur donne la forme de couteaux durs et émoussés, et on interpose avantageusement une petite plaque d'acier trempé entre eux et la pièce expérimentée ; enfin, quand les poids dont il serait nécessaire de faire usage sont trop considérables, on leur substitue souvent des vérins hydrauliques munis de manomètres permettant de mesurer le plus exactement possible la pression exercée. On conçoit d'ailleurs que le mode d'expérimentation que nous venons d'indiquer puisse être varié d'une infinité de manières destinées à rendre les observations soit plus commodes, soit plus rapides ; nous nous bornerons seulement à mentionner l'appareil optique de MM. Lœvy et Tresca au moyen duquel on peut obtenir des résultats d'une haute précision dans la mesure des flèches et par suite dans la détermination du coefficient d'élasticité (1).

En terminant ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer que la pièce sur laquelle on opère peut n'être pas parfaitement droite et qu'en tout cas elle s'infléchit d'une façon plus ou moins appréciable sous l'action de son poids ; ce qu'il faut mesurer, ce n'est donc pas la déformation totale existant à un moment donné, mais bien l'augmentation de courbure et par suite la flèche réellement due à l'action du poids P ; c'est là une remarque générale applicable à tous les modes possibles d'expérimentation.

(1) Voir les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 2^e semestre 1882, p. 1114.

§ 86.— **Limite d'élasticité relative à la flexion. Fixation de la charge de sécurité R.**

Un barreau étant soumis à un effort de flexion, imaginons qu'on le charge jusqu'à ce qu'il commence à se produire des déformations permanentes. Si, à ce moment, au moyen de la formule bien connue

$$\frac{R \cdot I}{v} = M^t \text{ fléchissant}$$

on calcule la charge par millimètre carré R de la fibre la plus éloignée de la ligne neutre et par conséquent la plus fatiguée, on trouve un nombre qui est notablement supérieur à celui qui correspond à la limite d'élasticité soit de traction soit de compression; en d'autres termes, les déformations permanentes ne commencent à apparaître que bien au-delà de la charge qui a commencé à altérer l'élasticité d'une partie de la pièce. Ce résultat, en apparence paradoxal, s'explique facilement si l'on songe que, dans une pièce fléchie, les fibres travaillent de moins en moins à mesure qu'on s'éloigne de la surface; aussi, lors même qu'une partie d'entre elles a déjà dépassé la limite élastique, les autres qui sont moins chargées n'ont pas encore atteint ce point et elles forcent les premières à reprendre, au moins très sensiblement, leur longueur primitive lorsqu'on enlève les poids. C'est là un point dont nous avons déjà dit quelques mots (§ 17) et sur lequel nous reviendrons en nous occupant des phénomènes de rupture (§ 133 et suivants).

Si l'on calcule, comme nous venons de l'indiquer, pour différentes pièces et pour diverses substances la valeur de R relative à la limite d'élasticité de flexion, on trouve un nombre qui, toujours supérieur à ceux que nous avons obtenus pour la traction et la compression, ne présente avec eux aucun rapport constant; ce dernier dépend non seulement de la nature de la matière, mais encore, comme on devait naturellement s'y attendre, de la forme de la section transversale: dans des expériences faites sur divers échantillons d'acier (1); il a varié de 1,17 à 1,59 et rien ne prouve qu'il ne puisse dépasser ces limites. Il semble donc que, dans la pratique, on pourrait faire supporter aux pièces fléchies une charge plus forte que celle sur laquelle on pouvait compter

(1) Voir une note de M. Marché insérée dans les *Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils*, année 1876, p. 616.

au premier abord; mais si l'on considère d'une part que le rapport ci-dessus a une valeur bien difficile à apprécier dans chaque circonstance donnée, et de l'autre que, pour des pièces destinées à des constructions permanentes, il y a intérêt à ne dépasser en aucun point la limite d'élasticité, on arrive à cette conclusion que la charge par millimètre carré qu'il est bon d'adopter pour les pièces fléchies doit être la même que celle que nous avons donnée soit pour la traction, soit pour la compression (§ 28 et 33). Dans le cas où les nombres correspondant à ces deux genres d'efforts ne sont pas les mêmes, c'est évidemment le plus petit qu'il faut prendre comme charge à ne pas dépasser.

FLEXION OBLIQUE OU DEVIÉE.

§ 87. — **Pièce fléchie par une ou plusieurs forces normales non situées dans un même plan contenant l'un des axes principaux des diverses sections transversales.**

1^o Cas d'une pièce à section constante. — Nous avons toujours supposé jusqu'ici que les pièces soumises à un effort de flexion sont symétriques

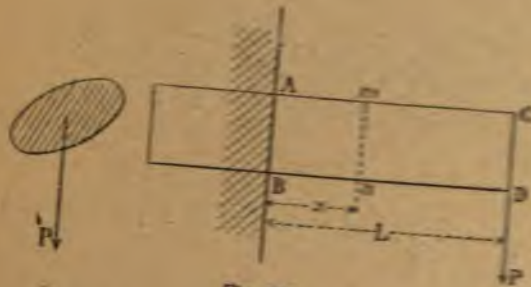


Fig. 133

par rapport à un plan qui contient les forces fléchissantes; nous allons examiner maintenant le cas où il n'en est plus ainsi et où l'on a affaire à une pièce telle que ABCD encastree par exemple à l'une de ses extrémités et sollicitée à l'autre par une force normale P. Une expérience bien simple permet de se rendre compte des phénomènes qui se produisent dans ces circonstances: que l'on prenne en effet une lame rectangulaire de tôle très mince ou de carton, encastree normalement dans un mur et ayant son plan oblique à l'horizon, si on vient à la soumettre à l'action d'un poids P, on voit l'axe HK s'infléchir non pas dans le plan vertical KK' mais très sensiblement dans le plan KK' perpendiculaire à l'axe HK. D'autres termes, quand il y a un plan de plus facile flexion et que la force fléchissante est normale à l'un des axes principaux d'eux, la flexion s'opère dans un plan autre que

le plan de sollicitation et compris entre ce dernier et le plan de plus facile flexion. Les lois de ces phénomènes ont été étudiées d'une manière complète par de Saint-Venant ⁽¹⁾ et peuvent, au point de vue des applications pratiques, se résumer en quelques considérations bien simples.

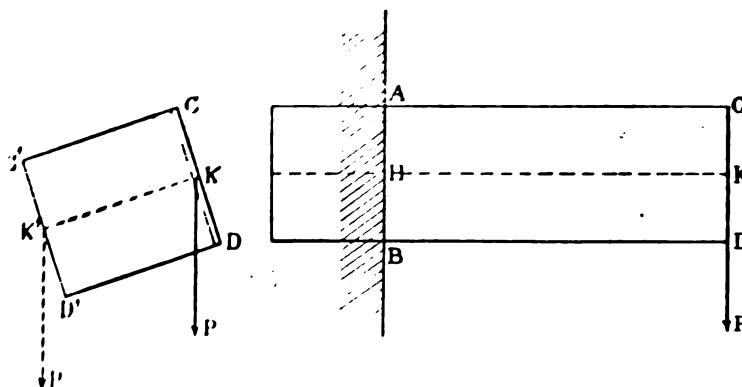


Fig. 134

Dans le cas qui nous occupe, la déformation ne se produisant plus dans un plan contenant la force P, les trois équations d'équilibre dont il a été question aux paragraphes 44 et 45 ne sont plus suffisantes ; il faut, à l'équation

$$\Sigma \left(E \cdot d\omega \cdot \frac{e}{\rho} \times e \right) = \text{Moment de P par rapport à } aa'$$

relative à l'axe aa' (§ 44), joindre une seconde équation de moments par

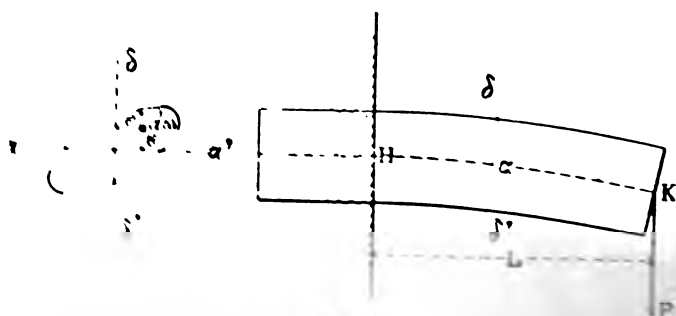


Fig. 135

(1) Voir la Résistance des corps solides, par Navier et de Saint-Venant, p. 122 et 123, ainsi que la Torsion des prismes, par de Saint-Venant, p. 84.

rapport à l'axe $\delta\delta'$ perpendiculaire au premier et situé, comme lui, dans le plan de la section transversale considérée; on doit donc avoir

$$\Sigma \left(E \cdot d\omega \cdot \frac{e}{\rho} \times e' \right) = \text{Moment de P par rapport à } \delta\delta'$$

ou bien

$$\frac{E}{\rho} \cdot \Sigma e \cdot e' \cdot d\omega = \text{Moment de P par rapport à } \delta\delta'$$

Le second membre de cette équation est nul lorsque la flexion se produit dans le plan de la force P (car le bras de levier de celle-ci par rapport à l'axe $\delta\delta'$ est lui-même nul); on a donc alors

$$\Sigma e \cdot e' \cdot d\omega = 0$$

relation qui caractérise les deux axes principaux d'inertie de la section transversale considérée. Nous arrivons donc à cette conclusion que le

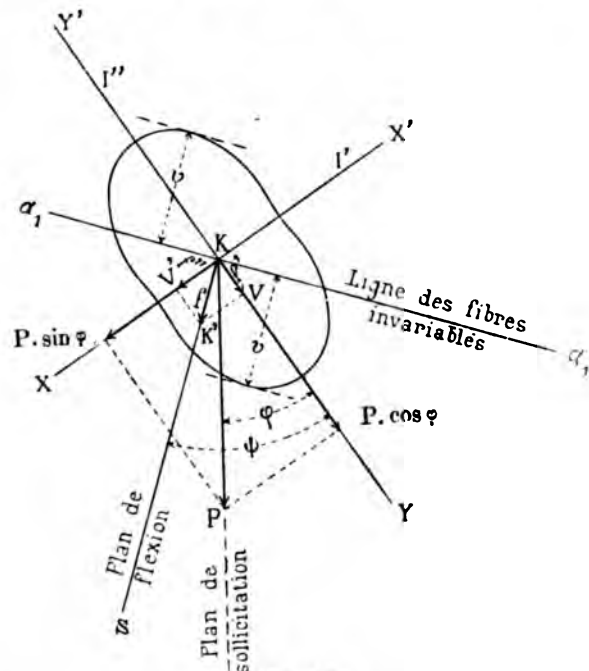


Fig. 136

plan de flexion ne se confond avec celui de sollicitation que si ce dernier contient l'un des axes principaux d'inertie; lorsque cette condition n'est pas remplie, il se produit la flexion oblique ou déviée dont nous venons de parler et dont nous allons étudier les lois.

Soient XX' et YY' les axes principaux d'inertie de la section transversale de la pièce, I' et I'' les moments d'inertie correspondants; la force fléchissante P peut, à son point d'application K (§ 3), être décomposée en deux autres $P \sin \varphi$ et $P \cos \varphi$ qui, *agissant suivant les axes principaux XX' et YY'* , donnent lieu aux phénomènes ordinaires et bien connus de flexion (§ 44); en vertu du principe de la superposition des petites déformations (§ 7), nous n'avons simplement qu'à composer entre eux les deux effets partiels ainsi produits; en particulier la flèche totale KK' est la résultante des deux flèches partielles KV et KV' de sorte qu'on a, en appelant ψ l'angle YKK' ,

$$\text{tang } \psi = \frac{f''}{f'}$$

En vertu d'ailleurs de ce qui a été vu au paragraphe 58, on a

$$f'' = \frac{P \sin \varphi \cdot L^3}{3 E \cdot I''}$$

$$f' = \frac{P \cos \varphi \cdot L^3}{3 E \cdot I'}$$

de sorte que

$$\text{tang } \psi = \frac{I'}{I''} \cdot \text{tang } \varphi$$

φ étant l'angle connu fait par la force P avec l'axe KY .

La même relation étant applicable à toutes les sections transversales et les axes principaux de ces dernières étant, *par hypothèse*, situés respectivement dans un même plan, il s'ensuit que l'angle ψ est constant et qu'il doit toujours être porté à partir de la même direction; la pièce subit donc, sur toute sa longueur, une flexion *plane* dont nous savons maintenant déterminer la direction KS puisque l'angle ψ se calcule facilement au moyen de la relation

$$\text{tang } \psi = \frac{I'}{I''} \cdot \text{tang } \varphi.$$

Le plan de flexion étant connu, nous en déduisons immédiatement la ligne des fibres invariables $\alpha_1 \alpha_1'$ qui est perpendiculaire à KS ; et connaissant la valeur $P \cos (\psi - \varphi)$ de la force fléchissante dans le plan KS une flexion plane absolument semblable à celle que nous avons étudiée précédemment (§ 44) et à laquelle s'appliquent les mêmes formules. Si, en particulier:

par millimètre carré R de la fibre la plus fatiguée de la section transversale mn qui est située à une distance x de l'encastrement (fig. 133), on fera usage de la relation habituelle (§ 44)

$$\frac{R \cdot I}{v} = \text{Moment fléchissant} = P \cdot (L - x) \cdot \cos(\psi - \varphi)$$

v , qui est la distance à l'axe $\alpha_1\alpha_1'$ des fibres qui en sont le plus éloignées dans la section transversale considérée, se mesure sur la figure (fig. 136); quant à I , moment d'inertie par rapport à ce même axe, il se déduit immédiatement des valeurs déjà calculées de I' et de I'' au moyen de la formule connue

$$I = I' \cos^2 \psi + I'' \sin^2 \psi$$

L'équation écrite plus haut, qui donne R , peut se mettre sous une autre forme: si l'on remplace en effet I par l'expression précédente, on trouve après quelques transformations

$$\frac{R}{v \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{I''^2}}} = P(L - x)$$

Le rayon de courbure ρ en un point quelconque de la fibre moyenne s'obtient au moyen de l'équation (§ 44)

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = \text{Moment fléchissant} = P \cdot (L - x) \cdot \cos(\psi - \varphi)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{E}{\rho \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{I''^2}}} = P \cdot (L - x)$$

Enfin la flèche f peut soit se calculer directement, soit se déduire de la relation

$$f = \sqrt{f'^2 + f''^2} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{I''^2}}$$

Il faut, ces formules de la flexion ordinaire dans lesquelles I est remplacé par

2° *Cas d'une pièce à section variable.* — Si les sections transversales, au lieu d'être toutes égales, varient d'un point à l'autre de la fibre moyenne mais en restant telles que le rapport $\frac{I'}{I''}$ soit constant, il est facile de voir que l'angle ψ l'est aussi et par conséquent la flexion s'opère toujours dans un plan défini par la relation

$$\text{tang } \psi = \frac{I'}{I''} \cdot \text{tang } \varphi$$

et elle est due à la force $P \cdot \cos(\psi - \varphi)$ agissant dans ce plan. Dans le cas, au contraire, où $\frac{I'}{I''}$ varie d'une section à l'autre, il est bien clair, d'après ce qui précède, que la flexion n'est plus plane : la pièce est tordue sur elle-même en même temps que fléchie. Cette particularité se présenterait évidemment encore si, contrairement à ce que nous avons supposé dans toute cette étude, les sections bien qu'égales ou satisfaisant à la condition $\frac{I'}{I''} = \text{constante}$, n'étaient pas toutes orientées de la même manière, c'est-à-dire si elles n'avaient pas leurs axes principaux d'inertie tous compris dans deux plans rectangulaires.

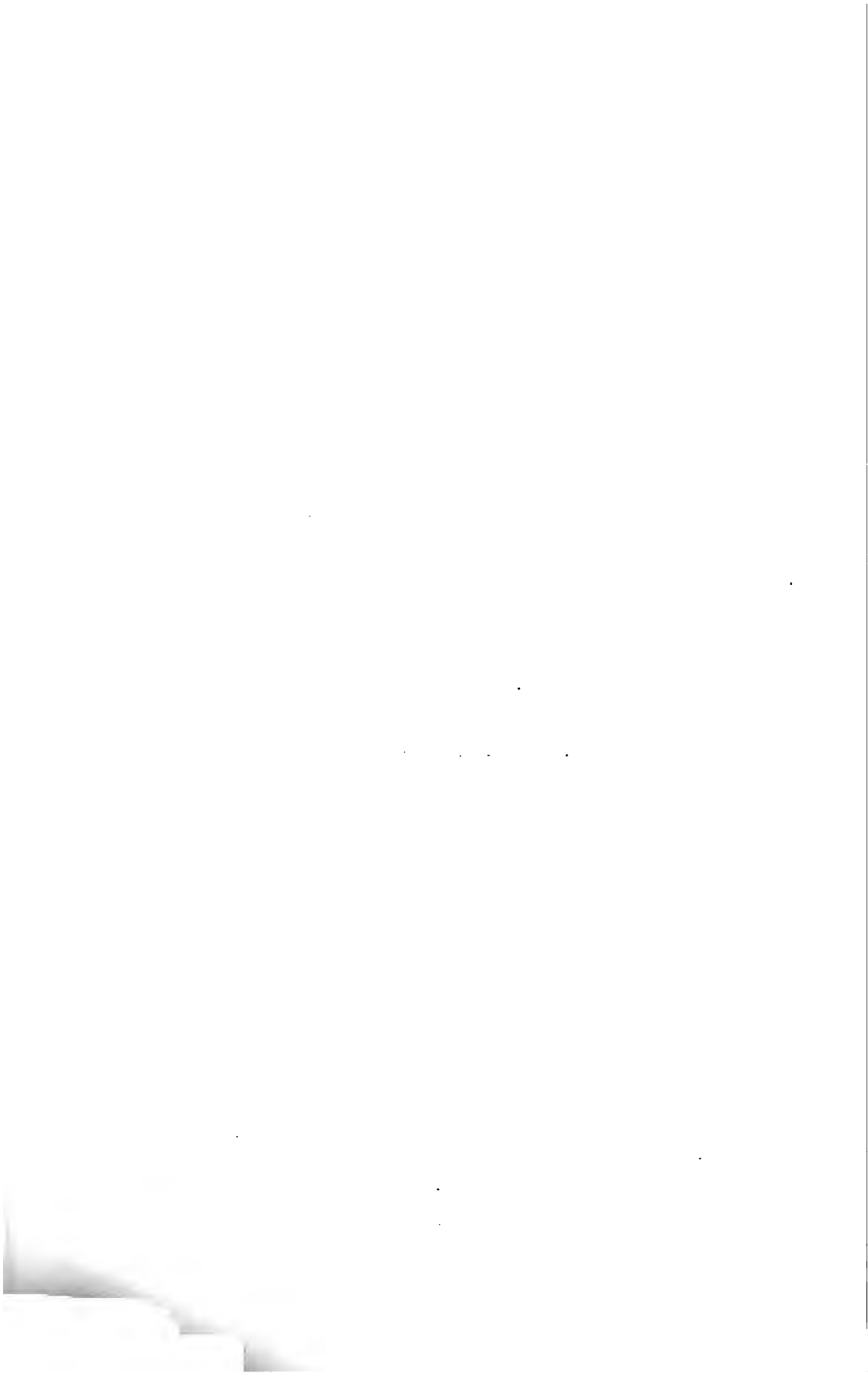
Avec une section circulaire ou carrée toutes les droites passant par le centre sont des axes principaux et par conséquent la flexion n'est jamais déviée.

Pour terminer ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer que nous n'avons parlé dans l'étude précédente que des pièces encastées par une extrémité, mais les autres cas particuliers qui pourraient se présenter se traiteraient d'une manière analogue.

CHAPITRE VI



TORSION



TORSION

§88. — Phénomènes qui se produisent pendant la torsion d'un cylindre droit à base circulaire.

Soit $ABCD$ un cylindre droit à base circulaire encastré à sa base AB et soumis, à sa partie supérieure, à l'action d'un couple M' agissant dans un plan perpendiculaire à son axe. Sous l'influence de celui-ci, les différentes sections droites du cylindre se déplacent les unes par rapport

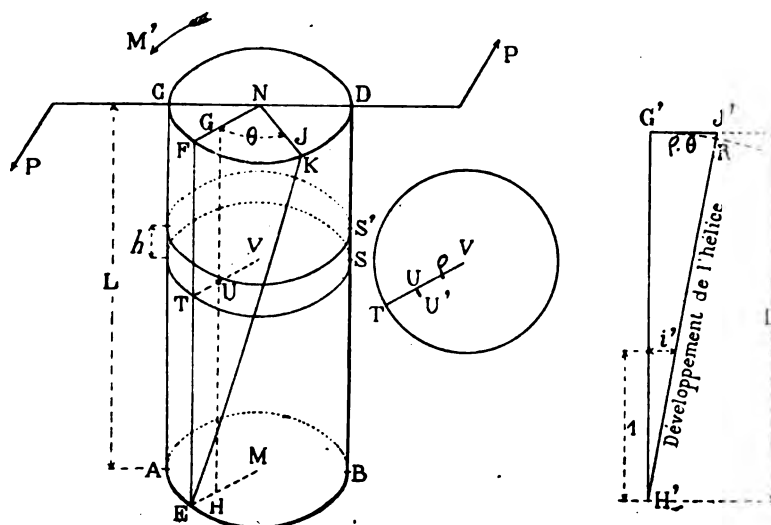


Fig. 137

aux autres en donnant naissance à une série de véritables *glissements* tout à fait analogues au glissement ou cisaillement étudié dans le chapitre IV (§ 34 et suivants); l'ensemble des phénomènes qui se produisent alors constitue ce qu'on appelle la *torsion*.

Si le cylindre considéré est droit et à base circulaire, comme nous le supposons, il n'y a évidemment aucune raison pour qu'une section droite se déforme inégalement en deux points équidistants du centre, ou pour qu'elle se bombe dans un sens plutôt que dans un autre; on voit donc qu'on peut admettre, à cause de la symétrie:

1° que l'axe du cylindre reste droit,

2° que toute section droite reste plane et n'éprouve pas de déformation dans son plan,

3° que le déplacement longitudinal d'une section droite par rapport aux sections infiniment voisines s'opère par une rotation autour du centre du cercle, et que cette rotation a la même valeur sur toute la hauteur du solide.

Il résulte évidemment de là qu'une génératrice quelconque du cylindre et, en général, toutes les parallèles à l'axe telles que HG se transforment, par le fait de la torsion, en hélices; celles-ci ont toutes le même pas, mais leur inclinaison sur l'axe est variable: nulle au centre, elle augmente à mesure qu'on se rapproche de la surface.

Si nous considérons un point quelconque U d'une section droite et une section infiniment voisine, distante de la première d'une quantité h , il se produit entre elles un glissement infiniment petit UU' perpendiculaire au rayon VU et proportionnel à ce dernier. Conformément aux principes précédemment admis, nous prendrons, pour la valeur r qui définit ce glissement, le rapport $\frac{UU'}{h}$ qui n'est autre que la tangente trigonométrique de l'angle formé par la génératrice primitive du cylindre avec l'hélice dans laquelle elle s'est transformée: si donc on appelle θ l'angle dont a tourné la base supérieure distante de l'autre d'une quantité L , et ρ la distance au centre du point U, on a

$$r = \frac{G' J'}{G' H} = \frac{\rho \cdot \theta}{L}$$

θ étant évalué non pas en degrés, mais en fonction du rayon (1). On en déduit immédiatement que, si l'on désigne par G' un certain coefficient constant qui est le *coefficient d'élasticité relatif à la torsion*, la force de glissement qui se développe au point U sur l'unité de surface est

$$G' \cdot r = G' \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{L}$$

(1) Le nombre de degrés qui mesure l'angle θ est égal à $360^\circ \times \frac{\theta}{2\pi}$

Par analogie avec ce qui a été fait pour la traction, la compression et le cisaillement (§ 34), nous désignerons par R''' cette force de glissement par millimètre carré, $G' \cdot \epsilon'$, c'est-à-dire que nous poserons

$$R''' = G' \cdot \epsilon'$$

Outre les phénomènes de glissement que nous venons de signaler, la torsion donne également lieu à un certain allongement des génératrices par suite de leur transformation en hélices; mais, en se reportant à la figure 137, il est facile de voir que, si la quantité $G'J' = \rho \cdot \theta$ est un infiniment petit du premier ordre (comme nous le supposons toujours), la différence $H'J' - H'G'$ ou $J'R$ est un *infiniment petit du second ordre* et ne donne lieu par suite qu'à des efforts de traction qui doivent être négligés; nous n'aurons donc, dans l'étude des forces intérieures en jeu, qu'à tenir compte de celles qui sont dues au glissement circulaire des sections droites les unes par rapport aux autres (1).

§ 89. — **Équation d'équilibre. Calcul de l'angle de torsion.**

Si la section de la pièce, bien que n'étant pas un cercle, ne s'en éloigne pas cependant beaucoup, l'expérience montre que les hypothèses énoncées plus haut au sujet de la déformation peuvent encore être admises sans donner lieu à de trop grandes erreurs. Supposons donc que, dans le cas d'une *tige de section constante, différant peu d'un cylindre droit à base circulaire*, une section droite quelconque reste plane et tourne par rapport à ses voisines sans éprouver de déformation; il est facile de prouver que ces rotations s'accomplissent alors autour du centre de gravité de la section quand les forces de torsion se réduisent à des couples. Soit en effet V le point de la section droite SS' autour duquel s'opère la rotation élémentaire d'amplitude totale θ ; un élément quelconque $d\omega$ situé à une distance ρ du point V éprouve un glissement égal à $\frac{\rho \cdot \theta}{L}$ (§ 88), et par suite la force de cisaillement qui lui est appliquée

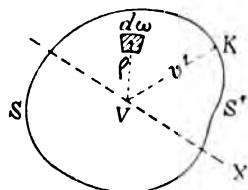


Fig. 138

(1) Voir la *Torsion des prismes* par de Saint-Venant, p. 245.

est égale à $G' \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{L} \cdot d\omega$. La somme totale de ces forces projetée sur un axe quelconque VX passant par le point V est

$$\int G' \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{L} \cdot d\omega \cdot \sin(\rho, X) = \frac{G' \cdot \theta}{L} \int \rho \cdot d\omega \cdot \sin(\rho, X).$$

Les forces extérieures qui agissent sur la pièce se réduisant par hypothèse à des couples, on doit donc avoir, puisqu'il y a équilibre entre les forces en question et les efforts de glissement développés dans la surface SS'

$$\frac{G' \cdot \theta}{L} \int \rho \cdot d\omega \cdot \sin(\rho, X) = 0$$

ou

$$\int \rho \cdot d\omega \cdot \sin(\rho, X) = 0$$

c'est-à-dire que V est le centre de gravité de la section considérée. La ligne qui joint ces points V constitue donc, dans l'intérieur de la tige, une fibre qui n'est soumise à aucun effort de torsion.

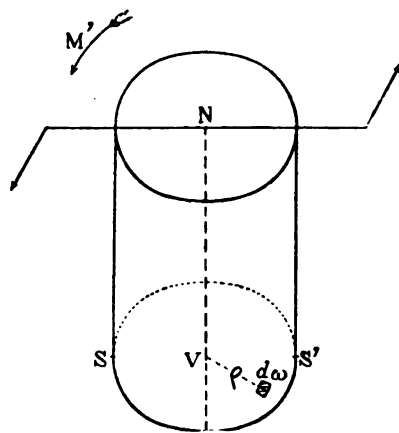


Fig. 139

Ecrivons maintenant l'équation d'équilibre entre le moment de torsion M' et les forces de glissement de la surface SS'. Le moment de ces dernières par rapport à l'axe VN est égal à

$$\int G' \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{L} \cdot d\omega \times \rho$$

On doit donc avoir

$$\frac{G' \cdot \theta}{L} \int \rho^2 \cdot d\omega = M'$$

ou, en désignant par J le moment d'inertie polaire $\int \rho^2 \cdot d\omega$ de la surface SS' pris par rapport au centre de gravité V

$$\frac{G' \cdot J \cdot \theta}{L} = M'$$

équation qui permet de calculer la valeur de l'angle de torsion θ

$$\theta = \frac{M' \cdot L}{G' \cdot J}$$

Dans le cas d'un cercle de diamètre d

$$J = \frac{\pi}{32} d^4$$

de sorte qu'alors

$$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{G' \cdot \theta \cdot d^4}{L} = M'$$

ou

$$\theta = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M' \cdot L}{G' \cdot d^4}$$

c'est-à-dire que, lorsque la limite d'élasticité n'est pas dépassée, l'angle de torsion est proportionnel au moment de torsion, à la longueur du cylindre et en raison inverse de la quatrième puissance du diamètre.

Ces lois se vérifient facilement au moyen des appareils imaginés pour l'étude expérimentale des phénomènes de torsion.

§ 90. — Condition de plus grande charge.

Le glissement dû à la torsion va en augmentant dans chaque section depuis le centre de gravité V (fig. 138) jusqu'au point K qui en est le plus éloigné et pour lequel il acquiert une certaine valeur maximum i' . En posant $VK = v'$, on a

$$i' = \frac{v' \cdot \theta}{L}$$

D'où

$$\theta = \frac{L \cdot i'}{v'}$$

En substituant cette valeur dans l'équation d'équilibre obtenue au paragraphe précédent, il vient

$$\frac{G' \cdot J}{L} \cdot \frac{L \cdot i'}{v'} = M'$$

$$\frac{G' \cdot i' \times J}{v'} = M'$$

ou bien, puisque nous avons posé $R''' = G' \cdot i'$,

$$\frac{R''' \cdot J}{v'} = M'$$

ce qui peut s'écrire encore

$$R''' = \frac{M' \cdot v'}{J}$$

Ces expressions donnent le glissement i' et l'effort de glissement par millimètre carré R''' qui se produisent aux points les plus fatigués.

Dans le cas d'un cercle de diamètre d où $J = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ et $v' = \frac{d}{2}$, les relations précédentes deviennent

$$\frac{\pi}{16} \cdot d^2 \cdot R''' = M'$$

$$R''' = G' \cdot i' = \frac{16 \cdot M'}{\pi \cdot d^2}$$

§ 91. — Tige soumise à des couples en nombre quelconque.

Supposons qu'au lieu d'un seul couple nous en ayons un nombre quelconque situés dans des plans perpendiculaires à l'axe de la tige : si l'on appelle M' le couple résultant qui sollicite une section droite quelconque SS' , on a toujours pour cette dernière la relation (§ 90)

$$\frac{R''' \cdot J}{v'} = M'$$

Tout se réduit donc, pour connaître la plus grande charge R''' dans la section considérée, à calculer M' ; cette opération ne présente pas de difficultés : elle se fera d'une manière analogue à celle qui a été indiquée pour la détermination plus compliquée des moments fléchissants et des efforts tranchants dans le cas de la flexion (§ 56).

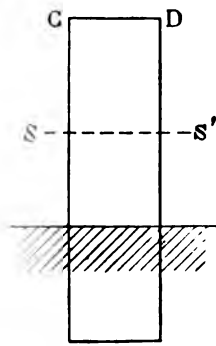


Fig. 140

Si l'on suppose d'abord qu'on a uniquement affaire à un certain nombre de couples isolés, le moment cherché M' n'est autre que la somme algébrique de ceux qui sont situés depuis l'extrémité libre CD jusqu'à la section considérée SS' . Si, au contraire, il s'agit de couples répartis d'une manière continue suivant une loi quelconque, on tracera la courbe $abcde$ qui donne la valeur des moments par unité de longueur, et l'ordonnée de la courbe intégrale FGH fait connaître immédiatement, pour une section quelconque, le moment total nn' qui le sollicite.

Dans le cas particulier de couples uniformément répartis dont la valeur est égale à m' par millimètre courant, la courbe en question est une droite $y = m' \cdot x$.

L'angle total de torsion θ mesuré à la base supérieure s'obtiendra également d'une manière simple: si l'on se reporte en effet à l'équation (§ 89)

$$\theta = \frac{M' \cdot L}{G' \cdot J}$$

on voit de suite que deux sections infiniment voisines distantes d'une quantité dx tournent l'une par rapport à l'autre d'un angle $d\theta$ égal à

$$d\theta = \frac{M' \cdot dx}{G' \cdot J}$$

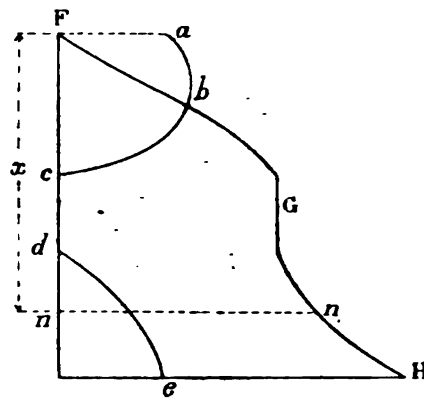


Fig. 141.

M' étant le moment total qui sollicite la section considérée SS' ; on a donc, dans le cas actuel,

$$\theta = \frac{1}{G' \cdot J} \int_0^L M' \cdot dx$$

Il suffit donc, pour avoir la valeur de l'angle de torsion en une section quelconque, de tracer la courbe intégrale de la courbe M' précédemment obtenue, ce qui ne présente pas de difficultés.

Dans le cas particulier des couples uniformément répartis dont nous avons parlé tout à l'heure et dont la valeur est de m' par millimètre courant, on a

$$\theta_x = \frac{m' \cdot x^2}{2 G' \cdot J}$$

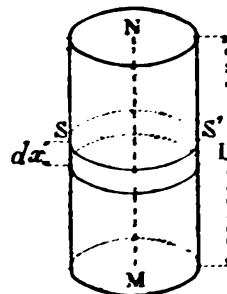


Fig. 142

x étant la distance comprise entre la base libre et la section considérée SS' ; la valeur totale de l'angle de torsion pour toute la longueur L de la pièce est par suite

$$\theta = \frac{m' \cdot L^2}{2 G' \cdot J}$$

§ 92. — Tige encastrée à ses deux extrémités.

Soit ABCD une tige cylindrique à base circulaire encastrée à ses deux extrémités et soumise dans le plan EF à un couple M' . Il est facile de

calculer les couples μ' et μ'' auxquels donnent lieu les encastrements : si l'on appelle en effet θ l'angle de torsion correspondant à la section EF (1),

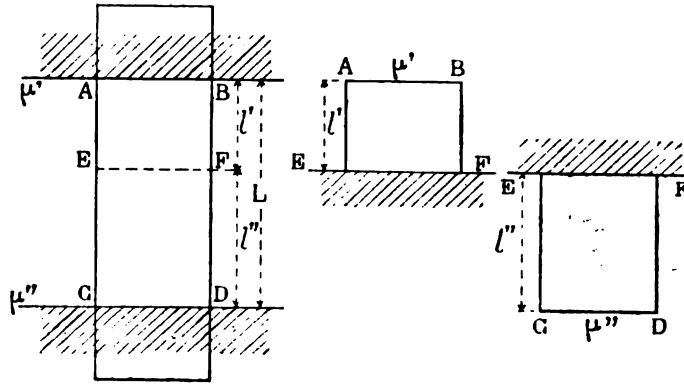


Fig. 143

on a pour les deux tiges de longueur l' et l'' considérées chacune à part

$$\frac{G' \cdot J \cdot \theta}{l'} = \mu'$$

$$\frac{G' \cdot J \cdot \theta}{l''} = \mu''$$

D'où

$$\frac{\mu'}{\mu''} = \frac{l''}{l'}$$

et comme
on en déduit

$$\mu' + \mu'' = M'$$

$$\mu' = M' \cdot \frac{l''}{L}$$

$$\mu'' = M' \cdot \frac{l'}{L}$$

Le couple M' se répartit entre les deux encastrements exactement comme le ferait une force normale appliquée à une poutre reposant sur deux appuis.

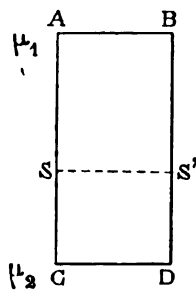


Fig. 144

Les valeurs de μ' et de μ'' étant connues, rien n'est plus facile que d'étudier à part les effets produits sur chacune des portions l' et l'' de la tige considérée séparément.

Les problèmes relatifs à la torsion ne présentent pas plus de difficultés lorsque, au lieu d'un couple unique M' , on en a un nombre plus ou moins grand, répartis d'une manière continue ou non entre les deux

(1) Cet angle est évidemment le même, en valeur absolue, pour les deux portions de tige l' et l'' , puisque, en vertu même des deux encastrements, les sections AB et CD ne peuvent tourner dans leur plan.

bases; on sait en effet, en vertu de la remarque qui vient d'être faite tout à l'heure, comment chacun de ceux-ci se partage entre les deux encastresments et par suite on se trouve ramené, pour l'étude de ce qui concerne une section quelconque SS', au cas d'une tige sollicitée par un couple connu (μ_1 ou μ_2 , suivant qu'on considère l'une ou l'autre des deux parties de la tige) et par les couples situés de S en A ou de S en C; cela rentre dans les questions étudiées précédemment (§ 91).

§ 93. — **Tige creuse à section circulaire.**

Si l'on a affaire à une tige creuse à section circulaire, les considérations développées au paragraphe 88 sont encore évidemment applicables, c'est-à-dire que les sections droites restent planes après la déformation; on a donc, comme précédemment (§ 90), pour condition de plus grande charge

$$\frac{R''' \cdot J}{\rho'} = M'$$

et comme, en appelant d et d' les diamètres extérieur et intérieur,

$$J = \frac{\pi(d^4 - d'^4)}{32} \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{d}{2}$$

on en déduit

$$R''' \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d^4 - d'^4}{d} = M'$$

$$R''' = \frac{16 M' \cdot d}{\pi(d^4 - d'^4)}$$

Quant à l'angle de torsion θ , il est toujours donné par la relation (§ 89)

$$\theta = \frac{M' \cdot L}{G' \cdot J}$$

ce qui, dans le cas actuel, devient

$$\theta = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M' \cdot L}{G' (d^4 - d'^4)}$$

On voit, par ces formules, quel avantage considérable les arbres creux présentent sur les arbres pleins, à égalité de section.

§ 94. — Tige ayant la forme d'un solide quelconque de révolution.

Si, au lieu d'un cylindre droit à base circulaire, on considère un solide quelconque de révolution, on peut encore admettre comme évident que, par raison de symétrie (§ 88), l'axe du corps ne cesse pas d'être rectiligne. et que les sections droites restent planes après la déformation ; c'est du reste ce qui résulte de ce fait que le solide en question peut être considéré comme constitué par une série de cylindres de hauteur infiniment petite.

Il résulte de là que les relations obtenues précédemment sont encore applicables à chacune des tranches comprises entre deux sections

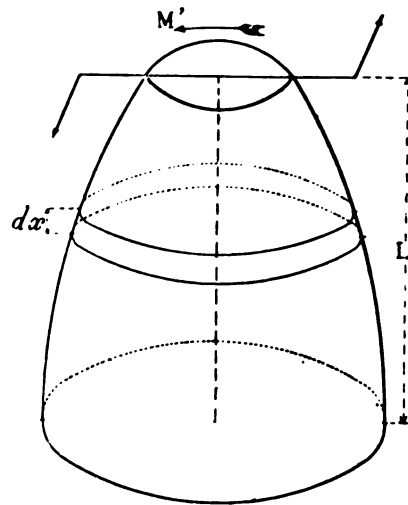


Fig. 145

droites infiniment voisines, de sorte qu'en appelant dx la distance qui les sépare, $d\theta$ l'angle infiniment petit dont l'une tourne par rapport à l'autre, et J leur moment d'inertie polaire, on a

$$\frac{G \cdot J \cdot d\theta}{dx} = M'$$

ou

$$d\theta = \frac{M' \cdot dx}{G \cdot J}$$

ce qui donne par conséquent pour la valeur totale de l'angle de torsion

$$\theta = \frac{1}{G} \int_0^L \frac{M'}{J} \cdot dx$$

ou, en appelant d le diamètre de la section droite considérée,

$$\theta = \frac{32}{\pi \cdot G} \int_0^L \frac{M'}{d^4} \cdot dx$$

intégrale qu'il est facile de calculer graphiquement comme au paragraphe 94.

Quant à la condition de plus grande charge, elle est toujours (§ 90)

$$\frac{R'''}{r'} \cdot J = M'$$

$$R''' = \frac{M' \cdot r'}{J}$$

ou bien

$$R''' = \frac{16 M'}{\pi \cdot d^3}$$

Si le moment de torsion M' appliqué à la section considérée, au lieu d'être constant sur toute la hauteur de la tige, est variable suivant n'importe quelle loi, les formules ci-dessus sont encore évidemment applicables, de sorte que les problèmes relatifs à la torsion des tiges cylindriques de révolution soumises à des couples quelconques connus se trouvent ainsi résolus.

§ 95. — Tiges cylindriques pleines dont la section n'est pas circulaire.

Lorsqu'une tige de section quelconque, encastrée d'une manière parfaitement rigide et soumise à un couple de torsion, n'a qu'une longueur *extrêmement courte*, il est bien clair que, la section d'encastrement restant forcément plane, toutes les autres peuvent être considérées comme étant sensiblement dans le même cas et par suite les considérations et les formules précédentes sont encore applicables dans ce cas particulier;

mais il cesse d'en être de même dès que la tige présente une longueur appréciable, et les problèmes relatifs à la torsion deviennent alors extrêmement complexes parce que les sections droites primitivement planes ne restent pas planes, de sorte que les glissements ne sont plus proportionnels aux distances à l'axe (1). Ces phénomènes, qui semblaient présenter des difficultés insurmontables aux études des géomètres, ont été l'objet de savantes recherches de la part de de Saint-Venant qui, le premier, a établi les lois auxquelles ils obéissent (2); nous nous bornerons à en résumer, ainsi qu'il suit, quelques-uns des points principaux.

Le gauchissement des sections droites est, en général et pour un même genre de surfaces, d'autant plus prononcé que leur forme s'éloigne davantage de celle d'un cercle ou, en d'autres termes, que leurs dimensions maximum et minimum diffèrent plus l'une de l'autre.

Ce gauchissement ayant pour résultat de diminuer la résistance à la torsion, la forme circulaire est la plus avantageuse de toutes à égalité de surface.

Les points qui fatiguent le plus sont situés sur le contour de la section et occupent sur cette dernière une position qui varie avec sa nature;

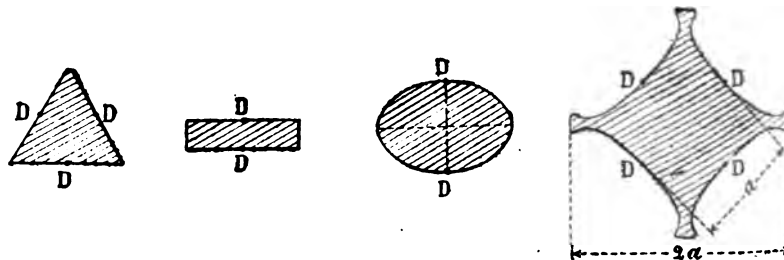


Fig. 146

ce sont ceux qui sont le plus rapprochés de l'axe si l'on a affaire à un triangle équilatéral, à un rectangle, à une ellipse, à une étoile à quatre branches, etc.; ils sont indiqués par la lettre D sur la figure 146. On voit donc quelles erreurs grossières on commettrait en admettant que les sections droites peuvent être considérées comme restant planes et par suite que les glissements sont proportionnels aux distances à l'axe; les deux formules

$$\frac{G' \cdot J \cdot \theta}{L} = M'$$

$$\frac{R''' \cdot J}{r'} = M'$$

(1) On peut avoir facilement une idée des déformations qui se produisent, en tordant un prisme rectangulaire en caoutchouc.

(2) Voir la *Résistance des corps solides*, par Navier et de Saint-Venant, ainsi que la *Torsion des prismes*, par de Saint-Venant.

relatives à la torsion des cylindres droits à base circulaire (§ 89 et 90) cessent absolument d'être applicables (1), mais il est facile de comprendre que, pour chaque espèce particulière de section (carré, rectangle, ellipse, etc.), on puisse se tirer d'affaire moyennant l'addition d'un coefficient spécial de correction que nous allons faire connaître. Nous commencerons par faire remarquer que, dans le cas d'un cercle, si l'on pose

$$\Omega = \text{surface de la section} = \frac{1}{4} \pi \cdot d^2$$

les relations précédentes peuvent s'écrire

$$0,0253 \frac{G' \cdot \theta}{L} \cdot \frac{\Omega^4}{J} = M'$$

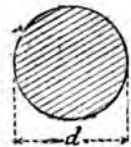
$$0,282 R''' \cdot \sqrt{\Omega^3} = M'$$

Les recherches de de Saint-Venant ont montré que, pour les sections ci-après, ces équations doivent être remplacées par celles-ci :

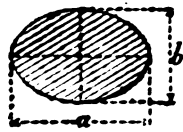
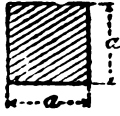




$$K \cdot \frac{G' \cdot \theta}{L} \cdot \frac{\Omega^4}{J} = M'$$

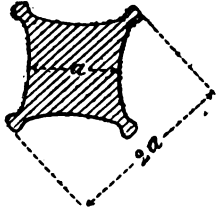


$$K' \cdot R''' \cdot \sqrt{\Omega^3} = M'$$

K et K' étant des coefficients dont les valeurs sont données par le tableau suivant.

FORME DE LA SECTION	VALEUR DU COEFFICIENT		OBSERVATIONS
	K	K'	
Cercle 	0,0253	0,282	$\Omega = \frac{1}{4} \pi \cdot d^2$ $J = \frac{1}{32} \pi \cdot d^4$

(1) Pour donner une idée des mécomptes auxquels conduirait l'application de ces relations, nous nous bornerons à dire que le premier membre $\frac{G' \cdot J \cdot \theta}{L}$ de la première d'entre elles doit être multiplié: pour une section carrée, par le coefficient 0,843; pour un triangle équilatéral, par 0,6; pour un rectangle, par un coefficient variant de 0,843 à zéro; pour une autre section particulière, par 0,0186, etc.

FORME DE LA SECTION	VALEUR DU COEFFICIENT		OBSERVATIONS
	K	K'	
Ellipse $a > b$ 	0,0253	$0,282 \sqrt{\frac{b}{a}}$	$\Omega = \frac{1}{4} \pi \cdot a \cdot b$ $J = \frac{1}{64} \pi \cdot a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)$
Carré 	0,0234	0,208	$\Omega = a^2$ $J = \frac{1}{6} a^4$
Rectangle $a < b$ 	$a = 2b$ 0,0238 $a = 5b$ 0,0252 $a = 10b$ 0,0260 $a = 50b$ 0,0274 $a = \infty$ 0,0278	0,174 0,130 0,099 0,047 0,000	$\Omega = a \cdot b$ $J = \frac{1}{12} a \cdot b (a^2 + b^2)$
Triangle équilatéral 	0,0222	0,175	$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ $J = \frac{\sqrt{3}}{48} a^4$
Carré curviligne à angles aigus et à côtés concaves ayant $\frac{1}{22}$ de flèche. 	0,0220	0,192	$\Omega = 1,064 a^2$ $J = 0,192 a^4$
Carré curviligne à angles arrondis et à côtés légèrement concaves. 	0,0232	0,200	$\Omega = 1,032 a^2$ $J = 0,179 a^4$

FORME DE LA SECTION	VALEUR DU COEFFICIENT		OBSERVATIONS
	K	K'	
Etoile carrée curviligne à quatre pointes arrondies. 	0,0211	0,161	$\Omega = 1,220 a^2$ $J = 0,297 a^4$
Double spatule analogue à un rail. $b = 0,2 a$ 	0,0232	0,128	$\Omega = 0,291 a^2$ $J = 0,126 a^4$
Autre forme de double spatule $b = 0,14 a$ 	0,0239	0,119	$\Omega = 0,256 a^2$ $J = 0,113 a^4$

Si la section donnée n'est pas l'une des précédentes, on verra quelle est celle dont elle se rapproche le plus et on en déduira, par analogie, des valeurs approximatives de K et de K' dont l'exactitude sera en général suffisante au point de vue pratique.

Il est à remarquer que, malgré des différences considérables de formes, le coefficient K varie peu (de 0,0233 à 0,0211 dans les exemples ci-dessus) et, comme d'ailleurs on a

$$\theta = \frac{M \cdot L}{K \cdot G} \cdot \frac{J}{\Omega^4},$$

on voit que la déformation θ est sensiblement proportionnelle à $\frac{J}{\Omega^4}$.
 Pour une valeur donnée d'une surface non évidée Ω , il y a donc un intérêt considérable, au point de vue de la raideur des pièces, à réduire le

plus possible le moment d'inertie, c'est-à-dire à faire usage de tiges rondes; c'est précisément l'inverse de ce qu'on serait amené à croire si l'on supposait, à tort, que les sections droites des pièces non circulaires restent planes pendant la torsion.

Une remarque analogue à la précédente est applicable à la valeur de la plus grande charge par millimètre carré R''' des points les plus fatigués; pour diminuer le plus possible cette dernière, il convient de faire usage de tiges circulaires; tout emploi de nervures donne, à surface égale, de mauvais résultats.

§ 96. — Tiges cylindriques creuses de faible épaisseur dont la section n'est pas circulaire.

Si l'on veut étudier la torsion des tiges cylindriques creuses de section quelconque, on se trouve en présence de difficultés plus grandes encore que s'il s'agissait de pièces pleines; dans le cas où l'épaisseur est faible, on pourra pratiquement considérer la résistance de la tige considérée comme sensiblement égale à la différence des résistances du cylindre extérieur et du moyeu cylindrique intérieur supposé plein, ce qui conduit aux relations

$$\begin{aligned} K \cdot \frac{G' \cdot \theta}{L} \cdot \left(\frac{\Omega^4}{J} - \frac{\Omega_1^4}{J_1} \right) &= M' \\ K' \cdot R''' \cdot (\sqrt{\Omega^2} - \sqrt{\Omega_1^2}) &= M' \end{aligned}$$

dans lesquelles on prendra pour K et K' les valeurs données précédemment.

§ 97. — Calcul du moment d'inertie polaire d'une section.

Les formules qui précèdent contiennent le *moment d'inertie polaire* de la section droite des tiges soumises à la torsion. Sa valeur est facile à déterminer au moyen de la relation connue

$$J = J' + J''$$

laquelle J' et J'' représentent les moments d'inertie de la section rapportés à deux axes rectangulaires quelconques passant par le centre de gravité; quant au calcul de J' et J'' , on l'effectuera comme il a été dit aux paragraphes 63, 65, 70.

Les valeurs de J relatives à un certain nombre de sections ont été données au paragraphe 95; il est donc inutile de les écrire de nouveau ici. Nous ajouterons seulement que, pour l'hexagone et l'octogone réguliers, on a respectivement

$$J = 0,0677. d^4$$

et

$$J = 0,0798. d^4$$

d étant le diamètre du cercle circonscrit à chacun de ces polygones.

§ 98. — Détermination du diamètre des arbres de transmission.

Il résulte de ce qui précède (§ 90) que le diamètre d d'un arbre rond soumis à l'action d'un couple M' se détermine par la formule

$$\frac{\pi}{16} \cdot R''' \cdot d^3 = M'$$

d'où

$$d = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M'}{R'''}}$$

la charge par millimètre carré R''' admissible en toute sécurité étant prise sur le tableau du paragraphe 99.

Cette formule, parfaitement suffisante pour toutes les tiges qui sont soumises, *au repos*, à l'action d'un couple M' , ne tient pas compte de l'angle total de torsion θ qui leur est imprimé; or ce dernier a une importance considérable pour les arbres qui, animés d'un mouvement plus ou moins rapide, reçoivent et transmettent le mouvement des machines; dans ce cas, qui est de beaucoup le plus fréquent, il importe essentiellement que θ n'ait pas une valeur trop considérable lorsqu'il s'agit d'un arbre ou d'une file d'arbres présentant une longueur un peu grande, car il se produirait alors, dans tout l'ensemble du système, des mouvements vibratoires plus ou moins considérables éminemment fâcheux au point de vue non seulement de la solidité, mais encore de la régularité qui est nécessaire dans le mouvement de tous les organes. La valeur maximum admissible pour l'angle θ dépend évidemment de la longueur des arbres ainsi tordus et varie par conséquent d'un cas à l'autre; mais, quelque grande que soit cette dernière, on peut admettre,

comme résultat pratique, qu'il n'y a pas d'inconvénient à aller jusqu'à environ $\frac{1}{4}$ de degré de torsion par mètre courant, c'est-à-dire $\frac{1^\circ}{4000}$ par millimètre, ce qui donne

$$\frac{\theta}{L} = \frac{1}{4000} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

En substituant cette valeur dans l'équation (§ 89)

$$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{G' \cdot \theta \cdot d^4}{L} = M',$$

il vient

$$d = 39,1 \sqrt[4]{\frac{M'}{G'}}$$

Il est donc nécessaire, pour les arbres soumis à la torsion, de prendre pour d la plus forte des deux valeurs fournies par cette équation et par celle qui a été déduite de la condition de plus grande charge

$$d = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M'}{R^m}}$$

Dans la pratique il arrive le plus souvent qu'on connaît non pas le moment M' qui tend à tordre un arbre, mais le nombre de chevaux C de 75 kilogrammètres que transmet ce dernier et le nombre de tours n qu'il fait par minute; or on a, en ayant soin de remarquer que, en vertu des unités que nous avons adoptées, le premier membre de l'équation ci-dessous représente des *kilogrammillimètres*

$$\frac{M' \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60}}{75} = 1000 C$$

d'où

$$M' = 716200 \frac{C}{n}$$

ce qui permet de passer immédiatement de la valeur de $\frac{C}{n}$ à celle de M' .

où, au lieu d'avoir des arbres ronds, on a affaire à des sections quelconque, les considérations et les calculs graphes leur sont évidemment applicables, à condition que l'on parte des formules qui concernent ces corps au paragraphe 95 avec les valeurs pratiques des

§ 99. — **Valeur du coefficient d'élasticité de torsion G' .
Valeur de la charge maximum de glissement par
 m^2/m carré qu'on peut adopter avec sécurité.**

Si les phénomènes qui se produisent pendant la torsion d'un cylindre droit à base circulaire étaient entièrement assimilables à ceux du cisaillement, il conviendrait d'adopter, pour les uns comme pour les autres, les mêmes valeurs du coefficient d'élasticité et de la charge maximum par millimètre carré $R''' = G' \cdot \tau'$ qu'on peut appliquer avec sécurité; mais les premiers sont d'une nature plus complexe que les seconds dans lesquels les glissements, au lieu d'être perpendiculaires aux rayons passant par le centre de chaque section, sont parallèles à une même direction. C'est donc à l'expérience qu'il convient d'avoir recours pour déterminer les nombres en question relatifs à chaque espèce de matière. Pour obtenir G' , on peut se servir de l'un des appareils qui ont été imaginés pour l'étude expérimentale de la torsion; il suffit en effet, après avoir mesuré θ , d'avoir recours à la relation (§ 89)

$$G' = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M' \cdot L}{\theta \cdot d^4}$$

Ces mêmes expériences permettraient de déterminer les forces de glissement par millimètre carré R''' qui commencent à altérer l'élasticité, et celles qui produisent la rupture; malheureusement il n'a jamais été fait d'essais très complets à ce sujet et, si G' n'est pas connu bien exactement, il règne une incertitude plus grande encore sur la valeur des charges dont nous venons de parler. Les nombres qui figurent dans le tableau suivant ne doivent donc être considérés que comme approximatifs; on verra que, sauf pour les bois, ce sont les mêmes que ceux qui sont relatifs au cisaillement: telle est en effet la conclusion à laquelle conduit la discussion des résultats, parfois assez peu concordants, obtenus par les divers expérimentateurs qui se sont occupés de cette question. Comme pour le glissement, nous ferons remarquer qu'ils ne s'éloignent pas beaucoup des formules théoriques (§ 37 et 41)

$$G' = \frac{2}{5} E \quad \tau' = 2 \lambda = 2 \frac{R}{E} \quad R''' = G' \cdot \tau' = \frac{4}{5} R$$

Il importe d'ailleurs essentiellement de ne pas oublier que, suivant la

remarque que nous avons déjà faite (§ 16), l'effort maximum R^T doit, dans chaque cas spécial, être fixé d'après les nombres admis de constructions analogues ayant fait leurs preuves de solidité et en paraissant légères.

Résistance à la torsion.

	CHARGE DE GLISSEMENT par millimètre carré qu'on peut appliquer avec sécurité	Coefficient d'élasticité C^T
Fer.	5 ^h ,00	7 000
Acier doux	6,00	7 500
Fonte.	1,70	4 000
Cuivre rouge	3,00	4 500
Laiton	1,70	2 100
Bronze à 10% d'étain. . .	2,00	1 000
Chêne	0,30	400
Pin.	0,26	400

CHAPITRE VII



RÉSISTANCE COMPOSÉE



RÉSISTANCE COMPOSÉE

§ 100. — Définition de la résistance composée.

Dans les chapitres qui précèdent, nous avons étudié le cas de solides sollicités par des forces produisant soit une traction, soit une compression, soit un glissement, soit une flexion, soit enfin une torsion ; or, dans la pratique, il arrive souvent qu'une même pièce est soumise à la fois à plusieurs de ces divers genres d'efforts et il importe essentiellement de savoir calculer quelle est alors la charge totale des fibres les plus fatiguées, afin d'être en mesure de déterminer les dimensions qu'il convient d'adopter. C'est de ce problème dont nous allons nous occuper maintenant : pour le résoudre nous nous appuierons, toutes les fois que cela sera possible, sur le principe de la superposition des petites déformations, c'est-à-dire que nous combinerons géométriquement entre eux les déplacements moléculaires dus à chacun des efforts en question considérés isolément (§ 7). Comme nous l'avons déjà dit, cette façon d'opérer ne saurait être admise quand le fait même de l'existence des forces en jeu modifie d'une manière sensible soit la valeur de quelques unes d'entre elles, soit leurs bras de leviers ; nous allons en trouver un exemple en nous occupant des pièces qui sont à la fois fléchies et comprimées.

COMPRESSION ET FLEXION.
PIÈCES CHARGÉES DEBOUT, AYANT UNE SECTION CONSTANTE.

§ 101. — **Pièce chargée debout et articulée
à ses deux extrémités.**

En étudiant les phénomènes de compression, nous avons toujours admis jusqu'ici que les corps considérés sont très courts relativement à

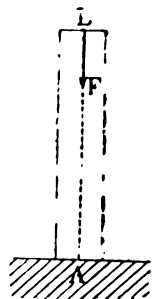


Fig. 147

la plus petite dimension de leur base. Supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi et que nous ayons affaire à une tige plus ou moins longue AB qui soit soumise à un effort de compression F dirigé suivant son axe et dont l'extrémité libre B soit astreinte à rester sur la ligne droite AB. L'expérience prouve qu'il existe une certaine valeur minimum de F au dessous de laquelle la pièce, légèrement fléchie par une cause accidentelle, se redresse naturellement, tandis qu'au delà de ce point un accroissement, même assez faible, de la force de compression donne lieu

à une flèche considérable et met la pièce en danger de se rompre. Celle-ci est donc, à ce moment, comme en équilibre instable et se trouve dans des conditions inadmissibles dans la pratique ; on conçoit donc qu'il y a un intérêt capital à ne jamais atteindre la valeur en question que nous allons maintenant nous occuper de déterminer.

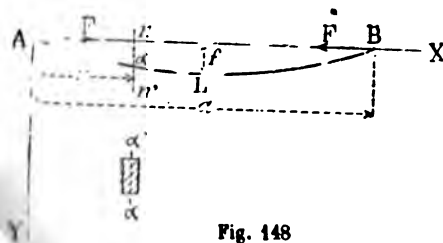


Fig. 148

section constante. Imaginons que, prenant l'extrémité B à la main.

Traisons d'abord le cas d'une poutre droite de longueur L articulée à l'extrémité A tandis que l'autre B est assujettie à se mouvoir sans frottement sur la droite AX sans pouvoir s'en écarter; nous supposons, comme dans tout ce qui va suivre.

nous forçons la pièce à prendre une forme très légèrement courbe telle que $AB = a < L$, et appelons F la réaction qu'elle exerce dans la direction AB . Si les deux points A et B étaient réunis par un tirant de longueur a , F serait la tension qu'acquerrait ce dernier quand l'équilibre se serait produit : ce que nous nous proposons de déterminer, c'est la valeur minimum qu'il faut donner à F pour que la flexion de la pièce primitivement droite commence à se produire.

La poutre AB pouvant être assimilée à un arc flexible en équilibre sous l'action seule des deux forces F dirigées suivant la corde AB , on a, pour une section transversale quelconque nn' , en désignant par I son moment d'inertie par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$ perpendiculaire au plan de flexion

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = - F. y$$

le signe — étant dû à cette circonstance que $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est négatif dans le cas actuel (§ 46).

La section de la pièce étant supposée la même sur toute sa longueur, I est une quantité constante et l'intégrale générale qui satisfait à l'équation ci-dessus est

$$y = C. \sin mx + C'. \cos mx$$

m étant égal à $\frac{F}{E.I}$

On a d'ailleurs

$C' = 0$, puisque $y = 0$ pour $x = 0$,

$C = f$, puisque, pour le point milieu $\frac{dy}{dx} = 0$ et par suite $\cos mx = 0$ et $\sin mx = 1$, f étant la valeur de la petite flèche donnée arbitrairement à la pièce.

Il y a encore une autre équation de condition à laquelle on doit satisfaire : il faut en effet que, pour $x = a$, on ait $y = 0$, et par conséquent

$$0 = f. \sin ma$$

Comme f n'est pas nul par hypothèse, on doit donc nécessairement avoir

$$\sin ma = 0$$

ce qui ne peut avoir lieu que si l'on donne à a une valeur telle que

$$m. a = \text{au moins } \pi$$

ou

$$a \geq \frac{\pi}{m} = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

ou

$$F \geq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{a^2}$$

Les déformations étant toujours très faibles (sans quoi nos formules ne seraient pas applicables) (1), on peut, sans erreur sensible, remplacer a par L , ce qui donne la relation due à Euler

$$F \geq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Telle est la condition que doit remplir la force de compression pour que le phénomène de flexion se produise; tant que F n'atteint pas cette valeur, la pièce reste droite. Le problème que nous nous étions proposé se trouve donc résolu puisque nous savons quel est le point au-dessous duquel doit toujours se maintenir la force de compression.

Si Ω est la surface de la section transversale de la pièce et r le *rayon de giration* de cette section, de telle sorte que $I = \Omega \cdot r^2$, la relation précédente peut s'écrire

$$F \geq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \Omega}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

ou encore

$$\frac{F}{\Omega} \geq \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (2)$$

Il est bien clair d'ailleurs que, en appelant R' la charge à la compression par millimètre carré admissible avec sécurité pour les *pièces courtes* (§ 33), l'effort exercé F doit être inférieur à $R' \cdot \Omega$,

$$F < R' \cdot \Omega$$

ou

$$\frac{F}{\Omega} < R'$$

sans quoi la pièce serait trop chargée au point de vue de la compression simple sans flexion.

(1) On suppose également, bien entendu, que la limite d'élasticité n'est dépassée en aucun point de la pièce.

(2) Dans le cas particulier d'une pièce circulaire pleine de diamètre D , cette relation devient :

$$\frac{F}{\Omega} \geq \frac{\pi^2 \cdot E}{16 \left(\frac{L}{D}\right)^2}$$

§ 102. — Diverses valeurs de la force nécessaire pour produire la flexion.

Nous venons de voir que, pour que f ne soit pas nul, c'est-à-dire pour qu'il y ait flexion, on doit avoir

$$\sin ma = 0$$

équation qui est satisfaite non seulement pour $m \cdot a = \pi$, mais encore par

$$m \cdot a = K \cdot \pi$$

K étant un nombre entier quelconque.

On déduit de là

$$\frac{F}{E \cdot I} \cdot a^3 = K^3 \cdot \pi^3$$

ou, en remplaçant a par L (§ 101),

$$F = K^3 \cdot \frac{\pi^3 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

La solution $K=1$ correspond au cas où la pièce déformée prend la forme de la figure 148, puisqu'on a alors évidemment $m \cdot a = \pi$.

Si le milieu de la poutre est assujetti, par un moyen quelconque, à



Fig. 149

rester sur la droite AB , on a alors $m \cdot a = \frac{\pi}{2}$ avec la forme indiquée par la figure 149, ce qui correspond à $K=2$; la force nécessaire pour opérer un commencement de flexion est 4 fois plus grande que tout à l'heure, ce qui est évident *a priori* puisqu'on se trouve dans le même cas que si on avait affaire à une pièce AD de longueur deux fois moindre.

En général si n est le nombre *total* des points assujettis à rester en ligne droite, y compris les deux extrêmes, on a $K = n - 1$ et

$$F = (n - 1)^3 \cdot \frac{\pi^3 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

On voit donc qu'en multipliant suffisamment les points d'appui, on met la pièce dans des conditions telles qu'elle peut être considérée comme travaillant simplement par compression, sans flexion.

§ 103. — Pièce chargée debout et encastrée à ses deux extrémités.

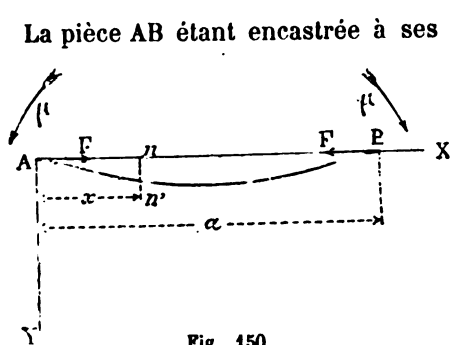


Fig. 150

La pièce AB étant encastrée à ses extrémités, nous supposons que l'encastrement A est fixe tandis que l'autre se déplace parallèlement à lui-même d'une certaine quantité, arbitraire mais faible, de telle sorte que les points A et B restent toujours situés sur la direction primitive de l'axe AB. Chaque encastrement

donne lieu à un couple μ et à une force F, de telle sorte que, pour une section transversale quelconque nn' , on a

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = \mu - F. y$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$\mu - F. y = - F. y'$$

Alors

$$E. I. \frac{d^2 y'}{dx^2} = - F. y'$$

D'où pour intégrale

$$y' = C. \sin mx + C'. \cos mx$$

m^2 étant égal à $\frac{F}{E. I}$.

On a donc

$$-\frac{\mu}{F} + y = C. \sin mx + C'. \cos mx$$

$$y = \frac{\mu}{F} + C. \sin mx + C'. \cos mx$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$ et par suite $C' = -\frac{\mu}{F}$.

Pour $x = 0$, on a $\frac{dy}{dx} = 0$ et par suite $C = 0$

On en déduit

$$y = \frac{\mu}{F} (1 - \cos mx)$$

Il faut en outre que, pour $y=0$, on ait $x=a$, ou sensiblement $x=L$, ce qui donne

$$\frac{\mu}{F} (1 - \cos mL) = 0$$

Donc si μ n'est pas nul, c'est-à-dire s'il y a flexion, on a nécessairement

$$\cos mL = 1$$

et par suite

$$m \cdot L = 2 \pi$$

D'où, en remplaçant m par sa valeur,

$$F = 4 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Telle est la valeur minimum que doit acquérir la force de compression pour que la flexion commence à se produire ; en comparant ce résultat à celui qui a été obtenu au paragraphe 101, on voit que le double encastrement quadruple la charge qu'on peut appliquer.

§ 104. — **Pièce chargée debout, encastree à une extrémité et guidée à l'autre suivant sa direction primitive.**

Dans ce cas le guide B donne évidemment lieu aux deux forces F et F' , de sorte que l'équation d'équilibre relative à une section transversale quelconque nn' est

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = - F \cdot y + F' (a - x)$$

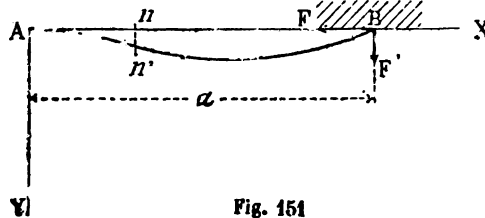


Fig. 151

Si l'on pose

$$m^2 = \frac{F}{E \cdot I} \quad , \quad n^2 = \frac{F'}{E \cdot I}$$

Il est évident, comme précédemment, que l'équation ci-dessus a pour racine

$$- \pi^2 \cdot y - \pi^2 \cdot x - x = C \cdot \sin mx + C' \cdot \cos mx$$

ou

$$\text{pour } x = 0, y = 0 \text{ et par suite } C' = \pi^2 \cdot a,$$

$$\text{pour } x = a, \frac{dy}{dx} = 0 \text{ et par suite } C = -\frac{\pi^2}{m}$$

Enfin, comme dernière équation de condition, il faut que, pour $y = 0$, on ait $x = 0$ ou sensiblement $x = L$; on en déduit

$$C \cdot \sin mL + C' \cdot \cos mL = 0$$

ou

$$m \cdot L = \text{tang } mL$$

Le coefficient m (c'est-à-dire la force F) n'étant pas supposé nul, cette équation exige que l'arc $m \cdot L$ soit égal à $257^{\circ}27'$, ce qui donne

$$m \cdot L = 4,493$$

ou bien, en remplaçant m par sa valeur,

$$\frac{F}{E \cdot I} \cdot L^2 = 20,187$$

$$F = 20,187 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$$

expression que nous écrirons sous la forme suivante pour pouvoir la comparer à celles qui précèdent

$$F = 2,046 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

ou sensiblement

$$F = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Telle est la valeur minimum que doit avoir la force de compression pour que la flexion puisse se produire.

§ 105. — Pièce chargée debout, encastrée à une extrémité et libre à l'autre.

Si l'on appelle f la flèche BB' prise par la pièce, il est facile de voir, après ce qui a été dit précédemment, que l'équation d'équilibre est

$$E. I. \frac{d^2 y}{dx^2} = F. (f - y)$$

D'où pour intégrale

$$y = f + C. \sin mx + C'. \cos mx$$

m^2 étant égal à $\frac{F}{E.I.}$.

On a d'ailleurs :

pour $x = 0, y = 0$ et par suite $C' = -f,$

pour $x = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ et par suite $C = 0$

On a donc en définitive

$$y = f(1 - \cos mx)$$

Enfin, pour $x = L, y = f,$ de sorte que, si f n'est pas nul, on a

$$\cos mL = 0$$

$$m. L = \frac{\pi}{2}$$

D'où pour valeur minimum de la force nécessaire pour produire la flexion

$$F = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

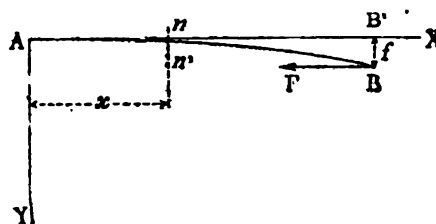


Fig. 152

§ 106. — Limites dans lesquelles la formule d'Euler est applicable. Comparaison avec les résultats d'expérience.

Comme nous avons eu l'occasion de le dire déjà bien des fois, les formules théoriques de la Résistance des matériaux, ne sont applicables que quand l'élasticité n'est altérée en aucun point des pièces étudiées (§ 17); or, si l'on se reporte à l'un quelconque des cas étudiés précédemment, par exemple à celui d'une pièce articulée à ses deux extrémités (§ 101), on voit qu'il peut parfaitement arriver que la force par millimètre carré nécessaire pour produire les phénomènes de flexion

$$\frac{F}{\Omega} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

soit supérieure à la limite d'élasticité à la compression (R' par exemple) et cela arrivera même forcément lorsque le rapport $\frac{L}{r}$ sera assez faible pour qu'on ait (dans le cas de pièces à double articulation)

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} &> R' \\ \frac{L}{r} &< \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{R'}} \quad (1) \end{aligned}$$

Dans ces conditions, par suite du fait seul de la compression, la limite d'élasticité est atteinte et même dépassée avant que la flexion ait lieu, et par conséquent les calculs des paragraphes précédents ne sont plus exacts, puisque, comme nous venons de le dire, l'hypothèse générale qui leur sert de base cesse d'être réalisée. S'il s'agit de pièces en fer, on a environ $E=19000$ et $R'=12$ kg., d'où

$$\frac{L}{r} < 125$$

Pour la fonte de fer, en prenant $E=9500$ et $R'=24$ kg., on aurait

$$\frac{L}{r} < 62,5$$

(1) Dans le cas des paragraphes 103, 104 et 105, le radical de cette inégalité devrait, comme on le voit de suite, être respectivement multiplié par les coefficients 2 , $\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Ces chiffres ne doivent, bien entendu, être considérés que comme approximatifs (*).

Ce n'est évidemment qu'au-dessus de cette limite que la formule d'Euler peut être conforme à la réalité des choses, et c'est bien là en effet, ce que confirme l'expérience. En particulier dans des essais faits par Hodgkinson sur des colonnes cylindriques en fonte de fer, il a été trouvé que pour $\frac{L}{D}$ compris de 25 à 120, la charge de rupture est représentée par l'expression

$$\text{constante} \times \frac{D^{3,6}}{L^{1,7}}$$

résultat qui cadre assez bien avec la formule d'Euler puisque celle-ci donne

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = \text{constante} \times \frac{D^4}{L^2}$$

Des expériences récentes, exécutées dans d'excellentes conditions de précision sur divers échantillons de fers et d'aciers par M. Considère, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, ont montré que, dans le cas de pièces articulées, la formule

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \Omega}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

donne des résultats parfaitement conformes à la réalité quand $\frac{L}{r}$ atteint et dépasse environ 140 tandis qu'au-dessous de ce chiffre elle s'écarte de plus en plus des nombres observés, en restant notablement au-dessus de ces derniers. Il a été en outre constaté que l'effondrement de la pièce chargée debout se produit aussitôt après l'apparition de la première flèche sensible (*).

(1) Dans le cas d'une pièce circulaire pleine de diamètre D, le rayon de giration r est égal à $\frac{D}{4}$, ce qui donne environ

$$\frac{L}{D} < 30 \text{ pour le fer,}$$

$$\frac{L}{D} < 15 \text{ pour la fonte.}$$

(2) Divers expérimentateurs, opérant sur des colonnes, ont constaté, au contraire, que la rupture n'avait lieu que pour des charges notablement supérieures à celles qui déterminaient la première flèche sensible; mais cela tenait à ce que le fait même de la production d'une petite déformation faisait varier la position du point d'application de l'effort de compression, ou bien encore à ce que l'articulation des colonnes était constituée par des broches de fort diamètre donnant lieu à un grand frottement.

En résumé, la formule d'Euler n'est, théoriquement et pratiquement, applicable qu'à des barres relativement longues, dans lesquelles le rapport $\frac{L}{r}$ est supérieur aux valeurs approximatives indiquées plus haut. Au-dessous du point en question les phénomènes sont beaucoup plus complexes, comme nous aurons l'occasion de le faire remarquer en parlant de ce qui concerne la rupture (§ 133).

§ 107. — **Formules empiriques donnant la charge de rupture des poteaux et des colonnes. Charge qu'on peut adopter avec sécurité.**

De nombreuses expériences ont été faites pour déterminer la force de compression qui produit la rupture des pièces chargées debout et en particulier de celles qui sont employées comme poteaux ou colonnes; mais, pour des raisons dont quelques-unes ont été indiquées dans une note du paragraphe précédent, les résultats obtenus par les divers expérimentateurs sont loin d'être concordants et quelques-uns présentent même des anomalies inadmissibles. Comme nous l'avons dit (§ 103), Hodgkinson a trouvé que, pour des colonnes cylindriques à bases plates en fonte de fer dont la longueur L varie de 25 à 120 fois le diamètre D , la force ci-dessus F satisfait à l'égalité

$$F = \text{constante} \times \frac{D^{2,6}}{L^{1,7}}$$

En raison des exposants fractionnaires, l'emploi de cette formule est peu commode; la suivante, également empirique, dans laquelle Ω et I représentent la surface et le plus petit des moments d'inertie de la section droite (circulaire ou non) d'une colonne pleine ou creuse, est plus facile à appliquer:

$$F = \Omega \frac{a}{1 - k \frac{\Omega L^2}{I}}$$

où a est le rayon de gyration minimum de la section.

$$F = \Omega \frac{a}{1 - k \frac{\Omega L^2}{I}}$$

a et b étant deux coefficients numériques, variables d'un corps à l'autre mais indépendants de la forme de la section transversale pourvu qu'elle ne s'écarte pas trop de celles qui sont habituellement employées; cette formule donne des résultats suffisamment exacts dès que la hauteur dépasse une vingtaine de fois le plus petit côté de la base, c'est-à-dire à partir d'environ $\frac{L}{r} = 70$.

Connaissant F au moyen de la relation précédente, on en déduira la charge qu'on peut appliquer avec sécurité, en adoptant pour cette dernière une certaine fraction de F plus ou moins heureusement choisie, qui, par analogie avec ce qui a été admis pour les pièces courtes (§ 16 et 33), pourra être environ $\frac{1}{4}$ pour le fer, $\frac{1}{6}$ pour la fonte et $\frac{1}{10}$ pour les bois ('). Le problème relatif au calcul des pièces chargées debout se trouvera ainsi résolu; mais dans la pratique il est préférable, croyons-nous, d'avoir recours au mode de détermination que nous allons indiquer.

§ 108. — Poteaux en bois à section carrée, terminés par des bases plates.

Si l'on a affaire à des poteaux carrés en bois, terminés par des bases planes perpendiculaires à leur longueur, les expériences de Rondelet et celles de Hodgkinson, confirmées par la pratique des constructeurs, montrent que le nombre de kilogrammes par millimètre carré qu'on peut faire porter avec sécurité à la matière est donné par le tableau suivant, dans lequel D représente le côté de la base.

$\frac{L}{D}$	10	20	30	40	50	60	70
Chêne sec	0,52	0,39	0,27	0,16	0,09	0,05	0,03
Pin	0,45	0,33	0,22	0,14	0,08	0,04	0,02

(1) La fixation de ces coefficients n'a, bien entendu, rien d'absolu; elle est susceptible de varier non seulement d'un constructeur à un autre, mais encore suivant la nature et l'importance de l'ouvrage projeté.

§ 107

En résumé, une barre de 3^m,60 de haut, ayant une épaisseur de 120^{mm}, alors $\frac{L}{D} = \frac{3600}{120} = 30$, de sorte que le rapport $\frac{L}{D}$ est au-dessous de 40, on peut, sans inconvénient, employer des barres de ce genre.

§ 107. — For

De nombreux essais ont été faits en particulier pour la détermination de la limite de rupture des barres de fer forgé, et on a constaté que la limite de rupture est sensiblement la même pour des barres de différentes dimensions.

En résumé, on peut employer des barres de fer forgé de différentes dimensions, sans inconvénient, pourvu qu'elles aient une limite de rupture sensiblement la même.

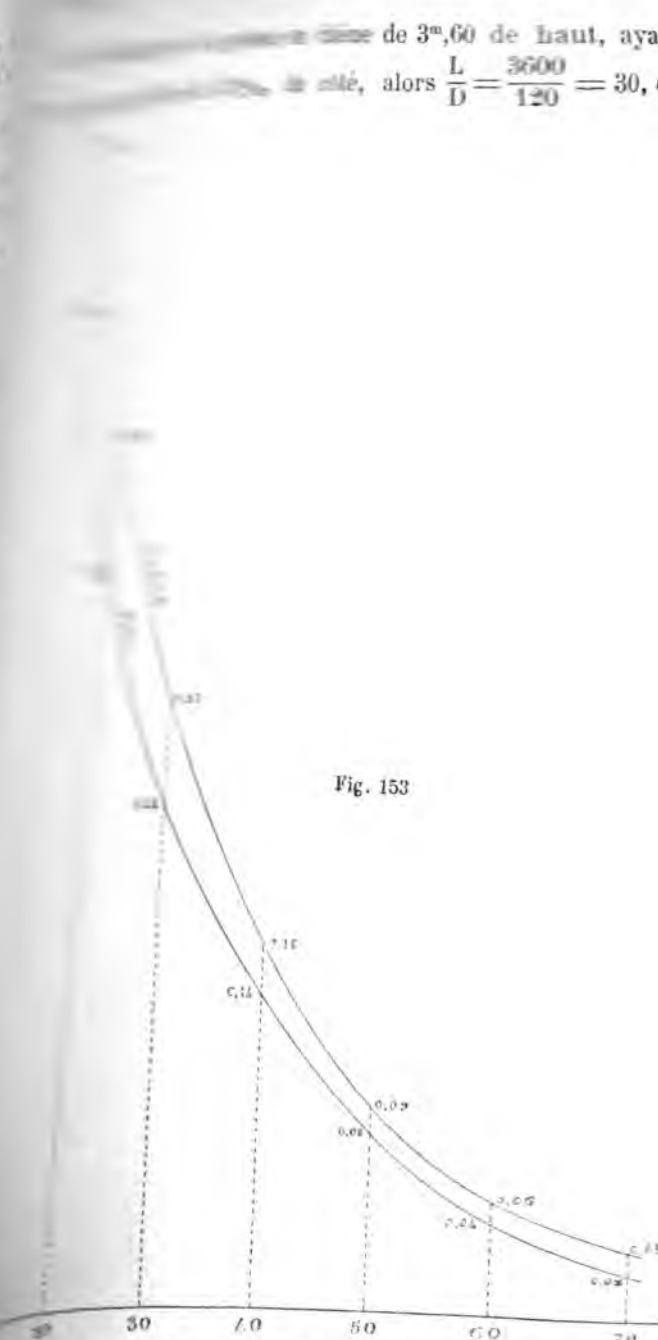


Fig. 153

lui faire porter 0 kg. 27 par millimètre carré, soit

Les nombres du tableau précédent sont représentés par le tracé graphique de la figure 153; il sont égaux environ au dixième des charges qui occasionnent la rupture.

§ 109. — **Colonnes pleines, circulaires, en fonte de fer, en fer, terminées par des bases plates.**

Les nombreux essais exécutés par Hodgkinson et par quelques autres expérimentateurs sur la rupture des colonnes en fer et en fonte de fer permettent de déterminer d'une manière approximative la charge par millimètre carré qu'elles sont susceptibles de porter sans danger et qui peut être fixée ainsi qu'il suit quand les deux bases sont planes et perpendiculaires à la longueur.

1° Colonnes en fonte de fer (fig. 154).

$\frac{L}{D}$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Charge par m/m carré qu'on peut appliquer avec sécurité.	12 ^k ,00	7,44	4,64	2,77	1,83	1,28	0,93	0,71	0,55	0,44	0,36	0,30	0,25

Ces résultats sont convenablement représentés, à partir de $\frac{L}{D} = 20$, par la formule empirique suivante

$$\frac{F}{\Omega} = \frac{8,95}{1 + 0,00015 \frac{\Omega \cdot L^2}{I}} = \frac{8,95}{1 + 0,0024 \frac{L^2}{D^2}}$$

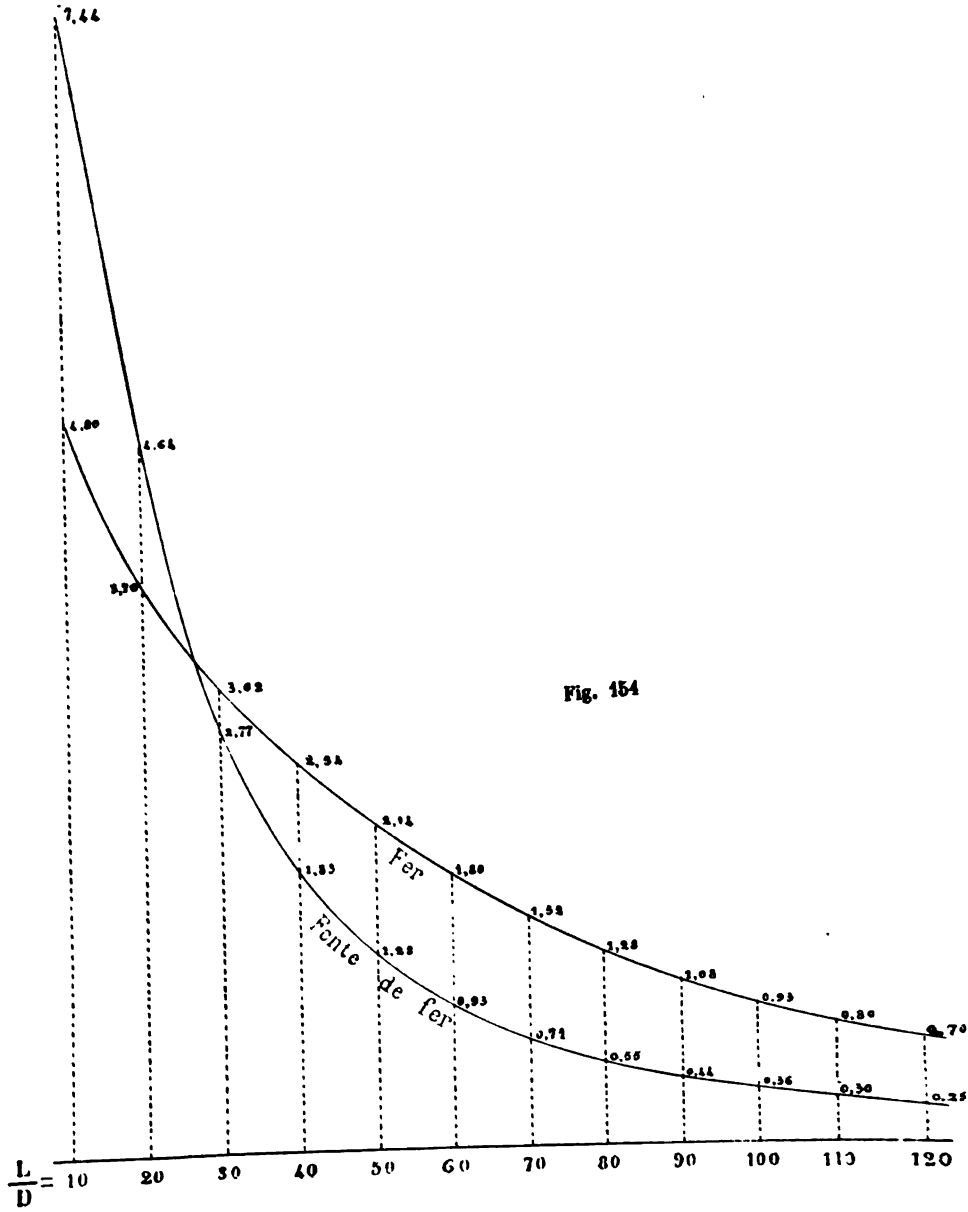
Avec des pièces parfaitement saines et sans soufflures, la rupture a lieu quand la force de compression atteint environ 6 F; mais, dans la pratique, cette valeur s'abaisse souvent à cause des défauts auxquels sont sujets les objets fondus; c'est en particulier ce qui a lieu pour les colonnes creuses quand le noyau s'est légèrement déplacé pendant la coulée.

2° Colonnes en fer (fig. 154).

$\frac{L}{D}$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Charge par m/m carré qu'on peut appliquer avec sécurité.	6 ^k ,00	4,80	3,70	3,02	2,53	2,14	1,80	1,52	1,28	1,08	0,93	0,80	0,70

Ces nombres concordent assez bien depuis $\frac{L}{D} = 30$ avec ceux qu'on déduit de la relation empirique

$$\frac{F}{D} = \frac{3,84}{1 + 0,00002 \frac{L^2}{I}} = \frac{3,84}{1 + 0,00082 \frac{L^2}{D^2}}$$



Quant à la rupture, elle se produit sous une charge égale à environ 4F.

Nous avons représenté par le tracé graphique de la figure 154 les résultats qui précèdent; on y voit qu'au-dessous de $\frac{L}{D} =$ environ 27 la fonte peut supporter une charge plus forte que le fer, tandis que l'inverse a lieu au-delà de ce point. Cela tient à ce que, sous forme de pièces courtes, la première résiste mieux à la compression que le second, mais en revanche elle est beaucoup plus flexible puisque son coefficient d'élasticité a une valeur moitié moindre; on conçoit donc facilement qu'à partir d'une certaine hauteur les colonnes en fer deviennent plus avantageuses.

**§ 110. — Colonnes de section non circulaire.
Colonnes creuses.**

La formule théorique (§ 101)

$$F = \frac{\pi^2 E \cdot I}{L^2}$$

aussi bien que la relation empirique (§ 107)

$$F = \Omega \cdot \frac{a}{1 + b \frac{\Omega \cdot L^2}{I}} = \Omega \cdot \frac{a}{1 + b \left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

montrent que la charge par millimètre carré $\frac{F}{\Omega}$ nécessaire pour produire la flexion ne dépend, pour une matière donnée, que du rapport $\frac{L}{r}$; si donc on a une colonne non circulaire ayant une hauteur L, une section Ω et un moment d'inertie minimum I, on calculera le diamètre fictif D de la colonne ronde ayant même rayon de giration r, c'est-à-dire qu'on posera

$$\frac{D}{4} = r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$$

$$D = 4 \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$$

et il ne restera plus qu'à mesurer sur les figures 153 ou 154 la charge par millimètre carré qu'on peut appliquer avec sécurité à la

colonne circulaire caractérisée par le rapport $\frac{L}{D}$; cette charge R' sera, au moins d'une façon approchée, celle qui convient à la pièce considérée, de sorte que cette dernière pourra être soumise à une force de compression $R' \cdot \Omega$.

Si, en particulier, il s'agit d'une colonne creuse ayant pour diamètres D' et D'' , nous aurons pour le diamètre fictif cherché

$$D = 4 \sqrt{\frac{I}{\Omega}} = 4 \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64} (D'^4 - D''^4)}{\frac{\pi}{4} (D'^2 - D''^2)}}$$

$$D = \sqrt{D'^2 + D''^2}$$

On remarquera que D est plus grand que le diamètre extérieur D' de la colonne supposée pleine; cela tient, comme on le sait, à ce que, à surface égale, le noyau central long et mince résiste beaucoup moins bien à la flexion que la partie extérieure.

Il importe de ne pas oublier que le moment d'inertie I doit être pris par rapport à l'axe $\alpha \alpha'$ auquel correspond la plus faible valeur de cette quantité, puisque la flexion tend toujours à se produire dans le sens où elle est la plus facile; c'est pour ce motif que les fers à T ou à double T, excellents pour remplir l'office de poutres ordinaires, ne conviennent que médiocrement comme supports verticaux à moins que, par un contreventement convenablement disposé, on ne les empêche de se courber dans le sens de la plus facile flexion.

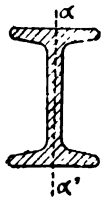


Fig. 155

§ 111. — Colonnes à extrémités arrondies. Colonnes renflées.

Les chiffres pratiques indiqués précédemment se rapportent au cas dans lequel les colonnes ou supports, de section constante, ont des bases planes, perpendiculaires à leur longueur, et sont comprimées par une force exactement dirigée suivant leur axe.

Si les deux extrémités sont arrondies, les nombres précédents doivent être multipliés par 0,33 environ quand les colonnes ont une assez grande longueur. Si l'une des bases seulement est arrondie, l'autre étant pleine et perpendiculaire à l'axe, le coefficient de réduction à adopter est 0,66 au lieu de 0,33.

Enfin le léger renflement qu'on donne quelquefois aux colonnes dans leur partie milieu augmente leur résistance d'à peu près $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{8}$.

§ 112. — Résistance au flambement des pièces en fer ou en acier faisant partie d'ouvrages métalliques.

Les grands ouvrages métalliques actuellement si répandus, tels que les ponts en fer ou en acier, renferment de nombreuses pièces qui travaillent à la compression et il y a un intérêt considérable à s'assurer, avant l'exécution, qu'elles ne sont pas exposées à la flexion ou, comme on dit, au *flambement*. Ces pièces, faisant partie de l'ensemble de la construction avec laquelle elles sont rivées, se trouvent évidemment dans des conditions notablement différentes de celles des colonnes à bases plates ou arrondies de Hodgkinson, et de nouvelles expériences étaient évidemment nécessaires à leur sujet. Celles qui ont été entreprises par divers expérimentateurs sont, pour des raisons du même genre que celles que nous avons déjà indiquées (§ 106 et 107), bien loin d'être concordantes entre elles. Dans ces derniers temps quelques essais peu nombreux, mais intéressants et précis, ont été faits par M. Considère (§ 106); ils ont porté sur des barres rectangulaires, des cornières, des fers à T et divers fers profilés et ont été exécutés avec des dispositions de couteaux telles qu'on pouvait compter sur une articulation parfaite à la partie basse et à la partie haute en même temps que sur un centrage très exact de l'effort de compression. Dans ces conditions, M. Considère a été amené à conclure que la loi qui lie l'effort de rupture F avec le rapport $\frac{L}{r}$ peut être approximativement représentée par les courbes AA', BB' de la figure 156⁽¹⁾, dans laquelle les abscisses représentent le rapport $\frac{L}{r}$ (ou $4 \frac{L}{D}$ dans le cas d'une section circulaire pleine). Dans la pratique, l'effort de compression n'étant jamais exactement dirigé suivant l'axe de la pièce soit par suite de dispositions vicieuses ou d'imperfections de la construction, soit en raison de l'effort latéral exercé par le vent, il y a évidemment lieu de tenir compte de cet effet et de baisser un peu les courbes précédentes, en A₁A₁' et B₁B₁' par exemple, comme le propose M. Considère. Il est vrai que, d'autre part, les assemblages des constructions rivées

(1) Ces courbes sont relatives l'une à du fer ordinaire, l'autre à de l'acier ayant une charge de rupture de 55 kg. environ à la traction.

constituent un mode de réunion bien supérieur, en général, à celui des articulations, mais sur l'efficacité duquel on ne saurait toujours

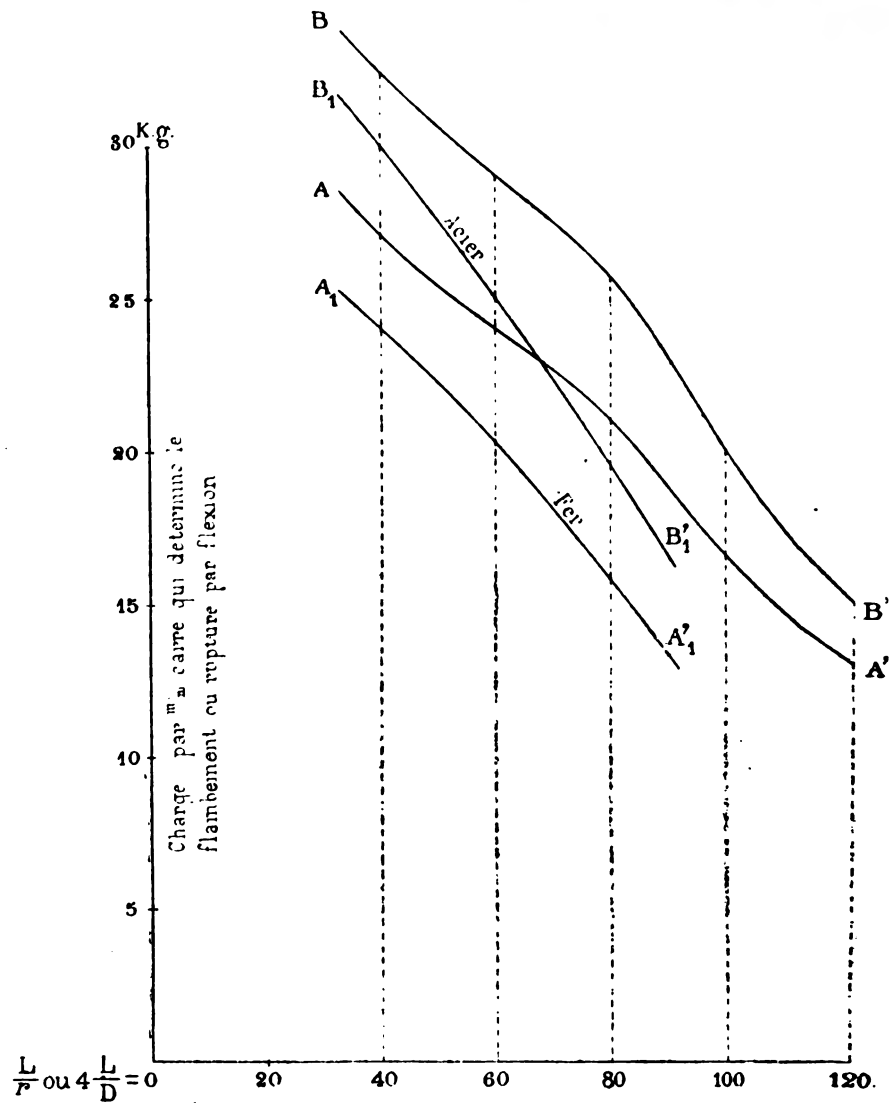


Fig. 156

compter et dont nous laisserons de côté le bénéfice dans cette étude sommaire (*).

(*) Dans le cas d'encastements parfaits, les charges de rupture ci-dessus pourraient être multipliées par 4, comme dans l'étude théorique du paragraphe 103.

Ceci posé, il convient de remarquer que, dans les ouvrages métalliques tels qu'on les exécute maintenant, le rapport $\frac{L}{r}$ (ou $4 \frac{L}{D}$) est presque toujours compris entre 40 et 90: dans ces conditions les charges par millimètre carré qui déterminent la flexion, c'est-à-dire la rupture, sont comprises:

de 24 kil. à 13 kil. pour le fer (courbe A, A'),

de 30 kil. à 16 kil. pour l'acier (courbe B, B').

Or ces charges sont bien supérieures à celles qu'on admet dans la pratique pour la compression simple et par conséquent, avec les proportions ci-dessus, le flambement n'est pas à craindre et il n'y a pas lieu de s'en préoccuper. Par surcroît de précaution M. Considère conseille cependant de se tenir (pour les pièces articulées) au-dessous de $\frac{L}{r} = 60$ pour le fer et de $\frac{L}{r} = 40$ pour l'acier de façon que la flexion ne soit jamais possible même dans le cas d'efforts absolument accidentels et exagérés que les pièces faites avec ces métaux pourraient avoir à supporter. Ces chiffres ne sont évidemment qu'approximatifs; mais, malgré les discussions auxquelles leur fixation peut donner lieu, il n'en subsiste pas moins ce fait capital que, pour des valeurs de $\frac{L}{r}$ égales ou peu inférieures à celles qu'on rencontre généralement dans les ouvrages bien étudiés et bien exécutés, le flambement des diverses pièces considérées isolément n'est pas à craindre, et la charge par millimètre carré peut être fixée comme s'il ne s'agissait que de compression simple.

§ 113. — **Pièce chargée debout par une force excentrée.**
Calcul de la flèche.

Soit AB une pièce droite, de section constante, encastrée en A et sollicitée à son extrémité libre B par une force P parallèle à sa direction et agissant à l'extrémité du bras de levier BC = b (1). Il est bien clair que, dans ces conditions, la pièce va se courber en prenant une flèche f qui porte à $b + f$ la valeur du bras de levier de la force fléchissante et occasionne par suite un surcroît de fatigue; nous nous trouvons donc

(1) Nous supposons en outre, comme dans tout ce qui va suivre, que la force P est contenue dans un plan de symétrie de la pièce, de telle façon que la flexion se produise dans ce plan et ne soit pas *oblique* ou *déviée* (§ 87).

dans le cas où il faut, avant tout, calculer les déformations produites, c'est-à-dire ici la grandeur de f .

Si l'on considère une section transversale quelconque nn' , on a pour équation d'équilibre

$$E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = P (b + f - y)$$

d'où pour intégrale, I étant constant,

$$y = b + f + C. \sin mx + C'. \cos mx$$

m^2 étant égal à $\frac{P}{E.I}$.

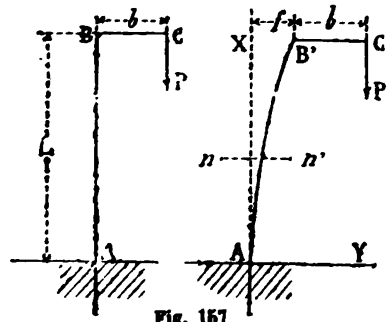


Fig. 157

Pour déterminer les constantes C et C' , remarquons que

$$\text{pour } x = 0, y = 0; \text{ d'où } C' = -(b + f)$$

$$\text{pour } x = 0, \frac{dy}{dx} = 0; \text{ d'où } C = 0$$

L'équation de la fibre moyenne déformée est donc

$$y = (b + f) (1 - \cos mx)$$

La valeur cherchée de f se déduit immédiatement de là, en écrivant que, pour $x = L, y = f$, ce qui donne

$$f = (b + f) (1 - \cos mL)$$

$$f = b \left(\frac{1}{\cos mL} - 1 \right)$$

On voit que, pour $b = 0$, cette formule donne $f = 0$; il doit effectivement en être ainsi puisque nous supposons toujours que les déformations sont faibles et par suite que la force P a une valeur inférieure à celle qui est nécessaire pour faire fléchir la pièce chargée debout suivant son axe.

Quant à l'équation de la fibre moyenne déformée, elle est

$$y = \frac{b}{\cos mL} (1 - \cos mx)$$

§ 114. — Autre expression de la flèche d'une pièce chargée debout par une force excentrée.

Dans ce qui va suivre nous emploierons, pour la valeur de la flèche f , une expression différente de la précédente et plus commode pour résoudre les divers problèmes relatifs aux pièces chargées debout: pour cela appliquons au point B, ce qui est toujours permis (§ 3), deux forces

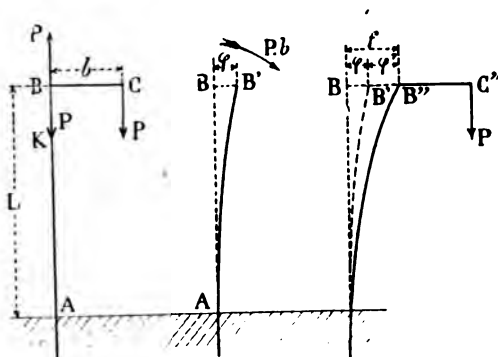


Fig. 158

égales et parallèles à P mais dirigées en sens contraire l'une de l'autre; la poutre AB se trouve alors soumise à une force de compression $BK = P$ dirigée suivant son axe et à un couple $P.b$, et il est clair que l'effet produit par ce dernier n'est influencé que d'une manière insensible par l'existence ou la suppression de l'effort de compression P , qui ne changent ni sa valeur, ni son mode d'action. Commençons donc par soumettre la pièce à la seule action du moment fléchissant $P.b$, ce qui lui fait prendre une flèche φ donnée par la relation (§ 71)

$$\varphi = \frac{P.b.L^2}{2E.I}$$

puis appliquons au système ainsi déformé AB' la force P . Les déformations étant, comme toujours, supposées très faibles, nous avons encore affaire à une pièce droite ou sensiblement droite, et nous nous trouvons par conséquent dans le cas étudié tout à l'heure d'une force de compression agissant à l'extrémité d'un bras de levier BB' égale à φ ; la

poutre va donc prendre une flèche *supplémentaire* φ' dont la valeur est (§ 113), en posant $m^2 = \frac{P}{E \cdot I}$,

$$\varphi' = \varphi \left(\frac{1}{\cos mL} - 1 \right)$$

de sorte que la flèche *totale* que nous avons désignée précédemment par f est égale à

$$f = \varphi + \varphi' = \frac{\varphi}{\cos mL}$$

Telle est la nouvelle expression dont nous ferons usage; il est facile de vérifier analytiquement qu'elle diffère peu de l'autre: nous avons trouvé en effet (§ 113) qu'on a

$$f = b \left(\frac{1}{\cos mL} - 1 \right)$$

d'où

$$f = \frac{b}{\cos mL} (1 - \cos mL)$$

ou bien en développant $\cos mL$ en série par la formule connue

$$f = \frac{b}{\cos mL} \left(\frac{m^2 L^2}{2} - \frac{m^4 L^4}{2 \cdot 4} + \dots \right)$$

Or la flèche φ , c'est-à-dire $\frac{P \cdot b \cdot L^3}{2 E \cdot I}$ ou $\frac{b}{2} \cdot m^2 \cdot L^2$, est supposée n'avoir qu'une très faible valeur; on peut donc, sans erreur sensible, ne conserver que le premier terme de la parenthèse ci-dessus et prendre

$$f = \frac{b}{\cos mL} \cdot \frac{m^2 \cdot L^2}{2} = \frac{b \cdot P \cdot L^3}{\cos mL \cdot 2 \cdot E \cdot I}$$

c'est-à-dire

$$f = \frac{\varphi}{\cos mL}$$

comme nous l'avons annoncé.

§ 115. — Calcul de la résistance d'une pièce chargée debout par une force excentrée.

Maintenant que nous connaissons la déformation qu'éprouve une pièce AB, de section constante, sollicitée par une force excentrée P, rien n'est

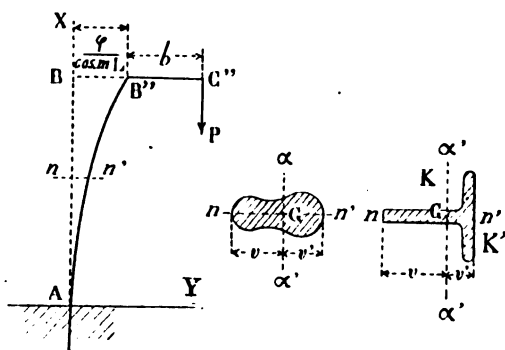


Fig. 159

plus simple que de calculer la charge à laquelle elle est soumise. Si l'on pose en effet

$$m^2 = \frac{P}{E \cdot I} \quad \varphi = \frac{P \cdot b \cdot L^2}{2 E \cdot I}$$

on voit qu'une section transversale nn' a à supporter:

1° un moment fléchissant $P \cdot \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} - y \right)$,

2° une force de compression proprement dite P.

Le moment fléchissant donne lieu, dans l'étendue de nn', à des allongements et à des raccourcissements variables, tandis que la force P produit sur toutes les fibres une compression uniforme dirigée dans le même sens que celle qui résulte de la flexion; ces divers effets s'ajoutent algébriquement entre eux et on voit que les efforts de compression surpassent ici en général ceux de traction. Dans la section nn', les fibres qui travaillent le plus à la compression sont celles qui sont situées en n' et la charge par millimètre carré qu'elles supportent est évidemment égale à la somme des charges partielles dues au moment fléchissant et à la force P, c'est-à-dire (§ 44) à

$$P \cdot \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} - y \right) \cdot \frac{v'}{I} + \frac{P}{\Omega}$$

v' étant la distance du point n' à l'axe transversal $\alpha\alpha'$ qui passe par le centre de gravité G.

La forme de la fibre moyenne déformée étant connue (§ 113), cette expression peut se calculer pour une section quelconque nn' ; mais dans le cas actuel il suffit de remarquer que, cette section étant partout la même, la somme ci-dessus est maximum à l'encastrement A de sorte qu'en définitif les fibres qui fatiguent le plus à la compression dans toute la pièce supportent une charge par millimètre carré R' égale à

$$R' = P. \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} \right) \cdot \frac{v'}{I} + \frac{P}{\Omega}$$

On verrait de même que la charge R des fibres les plus fatiguées à la traction est

$$R = P. \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} \right) \cdot \frac{v}{I} - \frac{P}{\Omega}$$

Nous sommes ainsi en mesure de voir si les charges maximum R et R' des points les plus fatigués ne dépassent pas les valeurs admises dans la pratique pour la traction et la compression et par suite le problème proposé se trouve résolu.

Si, avec les formes adoptées, v' est égal à v ou n'en diffère pas beaucoup et si, pour la matière considérée (autre que de la fonte par conséquent), on peut prendre la même charge de sécurité à la compression aussi bien qu'à la traction, il suffit le plus souvent de vérifier que la charge en question est égale ou supérieure à la somme

$$R' = P. \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} \right) \cdot \frac{v'}{I} + \frac{P}{\Omega},$$

mais on conçoit facilement qu'il puisse en être autrement dans différents cas, même quand on n'a pas affaire à de la fonte; c'est en particulier ce qui peut se présenter avec une section analogue à celle qui est indiquée en KK' sur la figure 159 et pour laquelle il convient de calculer l'une et l'autre des charges R et R' .

§ 116. — Pièce soumise à une force de compression oblique et excentrée.

Soit F la force oblique de compression qui agit à l'extrémité du bras de levier BC avec lequel nous supposons qu'elle fasse un angle obtus. Appliquons en B , ce qui est permis (§ 3), deux forces égales et parallèles

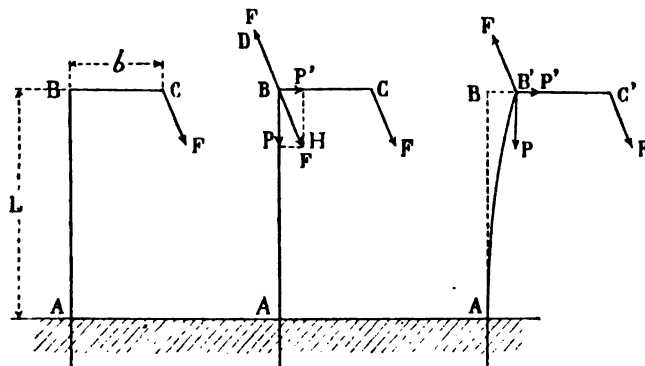


Fig. 160

à F mais dirigées en sens contraire l'une de l'autre BD , BH , et décomposons la dernière BH en deux autres P et P' , l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction AB ; la pièce considérée se trouve ainsi soumise :

1° à un couple de flexion dont la valeur est $P \cdot b$, comme on le reconnaît facilement,

2° à une force de flexion P' agissant à l'extrémité du bras de levier L ,

3° à un effort de compression P qui est dirigé suivant l'axe de la pièce et qui, par suite de la déformation, agit également comme force de flexion.

Les effets produits par le couple $P \cdot b$ et par la composante P' pouvant évidemment être regardés comme indépendants l'un de l'autre ainsi que de la force P , nous suivrons une marche absolument semblable à celle qui a été employée dans le paragraphe précédent et nous commencerons par soumettre la pièce AB à l'action seule du couple $P \cdot b$ et de la force P' ; dans ces conditions il se produit une flèche φ égale à (§ 71 et 72)

$$\varphi = \frac{P \cdot b \cdot L^2}{2 E \cdot I} + \frac{P' \cdot L^3}{3 E \cdot I}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à appliquer à l'ensemble ci-dessus l'effort de compression P , et la flèche *totale* f résultant de l'action simultanée de toutes ces forces est, comme nous le savons (§ 114)

$$f = \frac{\varphi}{\cos mL}$$

La solution du problème ne présente plus alors de difficultés : nous voyons en effet que la pièce doit résister :

1° à l'effort de flexion P' dont le bras de levier est L ,

2° au couple $P \cdot b$,

3° à l'effort de flexion P dont le bras de levier dû à la déformation

est $\frac{\varphi}{\cos mL}$,

4° à l'effort de compression proprement dit P .

La section de la pièce étant constante sur toute sa hauteur, c'est, comme précédemment, à l'encastrement A que se produit la fatigue maximum. Dans cette section la charge par millimètre carré à la compression est

$$R' = P' \cdot L \cdot \frac{v'}{I} + P \cdot b \cdot \frac{v'}{I} + P \cdot \frac{\varphi}{\cos mL} \cdot \frac{v'}{I} + \frac{P}{\Omega}$$

ou bien

$$R' = \left[P' \cdot L + P \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} \right) \right] \cdot \frac{v'}{I} + \frac{P}{\Omega}$$

Les fibres qui travaillent le plus à la traction supportent une charge

$$R = \left[P' \cdot L + P \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} \right) \right] \cdot \frac{v}{I} - \frac{P}{\Omega}$$

On ne doit pas d'ailleurs perdre de vue que chacune des sections transversales de la pièce est également soumise à un effort de cisaillement P' dont l'effet est négligeable si la poutre est à âme pleine, mais dont il peut être nécessaire de tenir compte si celle-ci est fortement évidée ; nous avons donné au paragraphe 50 les règles pratiques qu'il convient de suivre à ce sujet.

§ 117. — Autre dispositif du cas précédent.

Il peut arriver que la force oblique F fasse un angle aigu avec le bras de levier BC; supposons qu'il en soit ainsi et considérons d'abord le cas où la direction prolongée de F ne rencontre pas la pièce AB. En opérant exactement comme dans le cas précédent, c'est-à-dire en appliquant

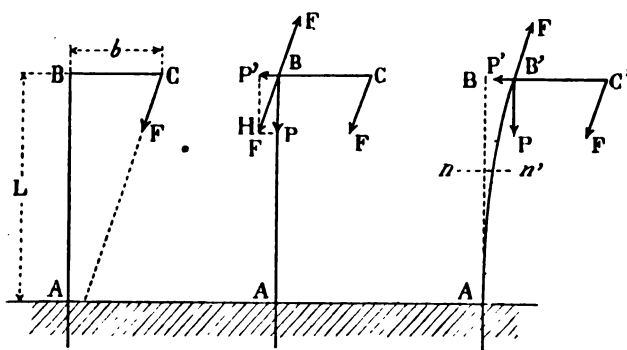


Fig. 161

en B deux forces de sens contraire égales et parallèles à F et en remplaçant l'une d'elles BH par les deux composantes P et P', nous voyons que la pièce peut être considérée comme soumise :

- 1° au couple $P \cdot b$,
- 2° à la force fléchissante P' qui, dans le cas actuel agit *en sens inverse* du couple $P \cdot b$,
- 3° à la force de compression P dont nous avons besoin de connaître le bras de levier.

Si la pièce n'était soumise qu'au couple $P \cdot b$ et à la composante P', elle prendrait une flèche égale à

$$\varphi = \frac{P \cdot b \cdot L^2}{2 E \cdot I} - \frac{P' \cdot L^3}{3 E \cdot I}$$

le signe — étant dû à ce fait que les deux effets se retranchent l'un de l'autre au lieu de s'ajouter comme tout à l'heure.

Comme nous le savons, la force de compression P donne lieu à une

flèche supplémentaire qui, en s'ajoutant à la précédente, donne une flèche totale qui est égale à (§ 114)

$$J = \frac{\varphi}{\cos mL}$$

et que nous savons par conséquent calculer.

Pour une section transversale quelconque nn' , les charges à la compression et à la traction des fibres les plus fatiguées sont alors

$$R' = \left[-P' \cdot L + P \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} - y \right) \right] \cdot \frac{v'}{I} + \frac{P}{\Omega}$$

$$R = \left[-P' \cdot L + P \left(b + \frac{\varphi}{\cos mL} - y \right) \right] \cdot \frac{v}{I} - \frac{P}{\Omega}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas précédent, sauf le chargement de $+P'$ en $-P'$; seulement le maximum de fatigue n'a plus lieu en général dans la section d'encastrement A: cela tient à ce que les moments fléchissants $P \cdot b$ et $P' \cdot (L-x)$, au lieu de s'ajouter, se re-

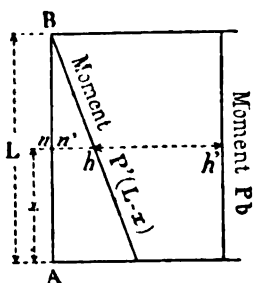


Fig. 162

tranchent ici l'un de l'autre pour donner, dans chaque section transversale nn' , une différence telle que hh' . Il est donc nécessaire d'étudier la loi des variations qu'éprouvent de B en A les valeurs de R et de R', et pour cela il faut connaître y , c'est-à-dire la forme de la fibre moyenne déformée. On y arriverait facilement en effectuant une intégration du genre de celle du paragraphe 113, quoique un peu plus compliquée (1); mais, pratiquement cela n'est pas nécessaire dans le cas actuel: nous

avons supposé en effet que la direction prolongée de F ne rencontre pas la pièce AB, et par suite le moment de cette force n'est nul pour aucune des sections transversales comprises de B en A. Dans ces conditions la courbe AB' a sa concavité tournée tout entière du même côté et, dans la pratique, on peut, pour ce qui nous occupe, la remplacer par un arc de cercle tangent en A à la droite AB et passant en B'; l'ordonnée y est ainsi connue d'une façon suffisamment exacte en chaque point, et la question proposée se trouve résolue.

(1) Voir la *Résistance des matériaux*, de Bresse, 3^e édition, p. 384.

Si l'on suppose au contraire que la direction de l'effort oblique rencontre la pièce AB, le problème devient plus complexe parce que celle-ci se courbe évidemment en deux sens différents; il y a inflexion au point d'intersection déterminé par F, comme on le voit sur la figure 163, puisque le moment fléchissant y est nul. On traitera alors la question comme nous allons l'indiquer pour le cas général des pièces chargées debout (§ 118).

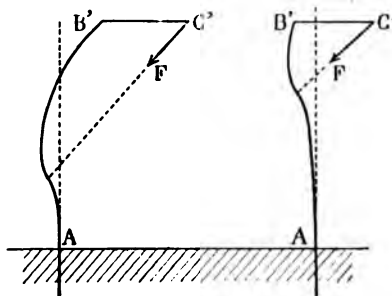


Fig. 163

§ 118. — Pièce comprimée à ses extrémités et soumise à des forces normales ainsi qu'à des couples situés dans un plan de symétrie.

Supposons maintenant que nous ayons affaire à une pièce droite AB soumise à ses extrémités à des efforts longitudinaux de compression F

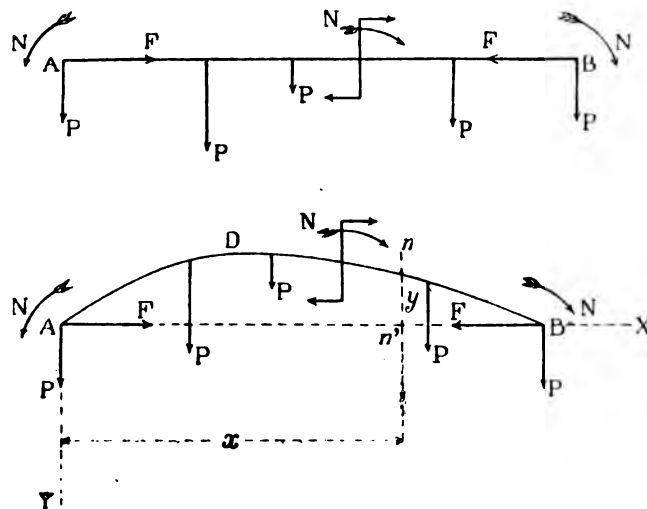


Fig. 164

et sollicitée en divers points de sa longueur par des forces normales et des couples quelconques, P et N. Il s'agit de calculer quelle sera, dans

chaque section transversale $m m'$, la forme de la poutre, en tenant compte, bien entendu, de la flèche qu'elle prend sous l'influence combinée des couples, des forces normales et des efforts de compression.

Pour résoudre ce problème, on peut évidemment écrire, pour la section $m m'$, l'équation habituelle d'équilibre relative à la poutre déformée

$$E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = \text{Moment fléchissant des couples et des forces normales} - F. y$$

le signe — provenant ici de ce que y est négatif.

Si on peut intégrer deux fois l'équation ci-dessus, on obtiendra la relation

$$y = f(x)$$

qui donnera la forme de la fibre moyenne déformée, et il sera ensuite facile de calculer en chaque point les moments fléchissants, c'est-à-dire de résoudre le problème proposé. Comme exemple remarquable de cette manière d'opérer, nous citerons les calculs faits pour un pont à vapeur à vapeur de 50 tonneaux en service depuis une vingtaine d'années au port de Lorient, ainsi que la discussion intéressante à laquelle ils donnent lieu (*). Il ne faut pas se dissimuler toutefois que la double intégration dont nous venons de parler est souvent impossible, surtout dans le cas de forces isolées, et il convient alors d'avoir recours, faute de mieux, au procédé suivant qui est de beaucoup plus applicable.

Les forces de compression F étant provisoirement laissées de côté, déterminons soit par le calcul, soit par un tracé graphique la forme AD_1B (fig. 165) que prend dans ces conditions la fibre moyenne et relevons la valeur φ de la flèche dD_1 ainsi produite par les forces normales et les couples; cela ne présente pas de difficultés après ce qui a été dit au paragraphe 58. Quand on viendra ensuite à appliquer les forces de compression F , la courbure de la poutre augmentera et, par analogie avec ce qui a été vu dans les paragraphes précédents, on peut admettre que la flèche totale dD aura pour valeur $\frac{\varphi}{\cos m L}$, ce qui permettra de tracer, non pas exactement mais d'une manière approximative, la courbe définitive ADB ; on pourra par exemple augmenter dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\cos m L}$ toutes les ordonnées de AD_1B , ou bien user plus ou moins

* *Mémoires de Génie maritime, 1^{re} édition de 1871*, tiré par M. Cochon, Directeur des Travaux de Lorient.

heureusement de tel ou tel autre moyen qui pourra sembler plus conforme à la réalité des choses. Ces diverses opérations étant effectuées, le calcul des moments fléchissants se fera sans difficulté, comme nous l'avons déjà indiqué à plusieurs reprises.

Le problème que nous venons de traiter donne la solution du cas

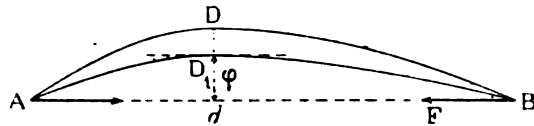


Fig. 165

d'une pièce oblique à l'horizon qui fléchit sensiblement sous l'action de son poids et qui est soumise, à ses extrémités, à des forces de compression. On reconnaît en effet facilement que les composantes *longitudinales* du poids uniformément réparti de la pièce n'ont qu'une faible importance et peuvent, sans inconvénient sérieux, être laissées de côté; on se trouve donc ainsi simplement ramené au problème que nous venons de résoudre.

En terminant ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer que, quelle que soit la marche suivie, les formules obtenues permettent non pas de calculer *a priori* les dimensions de la pièce projetée, mais simplement de vérifier si celles qu'on a adoptées d'une manière plus ou moins judicieuse ne conduisent pas à des charges trop élevées pour les points les plus fatigués; on se trouve ainsi conduit, comme dans bien d'autres problèmes de la Résistance des matériaux, à une série plus ou moins longue de tâtonnements, qui sera considérablement abrégée par le sens pratique et l'expérience du constructeur.

§ 119. — Cas où la section de la pièce n'est pas constante.

Dans ce que nous venons de dire au sujet de la résistance aux efforts combinés de compression et de flexion, nous avons toujours supposé, pour faciliter l'intégration de l'expression $E. I. \frac{d^2y}{dx^2}$, que la section de la pièce considérée (et par suite I) est constante sur toute sa longueur. Si cette condition n'est pas remplie, il y aura lieu de procéder, comme précédemment, au calcul de la déformation en adoptant pour le moment d'inertie une certaine valeur moyenne plus ou moins habilement choisie

et prise plutôt un peu trop faible que trop forte; une erreur d'appréciation commise dans ce sens aura en effet simplement pour résultat de faire paraître la pièce un peu plus chargée qu'elle ne l'est en réalité et de conduire à un léger excès de solidité, ce qui n'a en général aucun inconvénient. Le calcul des moments fléchissants et celui de la charge de la pièce s'effectuera ensuite, en opérant alors sur les dimensions réelles de cette dernière. Cette manière d'agir, bien que très critiquable au point de vue théorique, est cependant susceptible de donner dans la pratique des résultats suffisants.

TRACTION ET FLEXION

(Pièces ayant ou non une section constante)

§ 120. — Pièce sollicitée par une force donnant lieu à des phénomènes de traction et de flexion.

1° *Calcul de la charge de la pièce.* — Considérons une pièce AB sollicitée dans son plan de symétrie par une force excentrée et oblique F donnant lieu à des phénomènes de traction et de flexion; si nous décomposons F en deux autres forces T et P' l'une parallèle, l'autre perpendi-

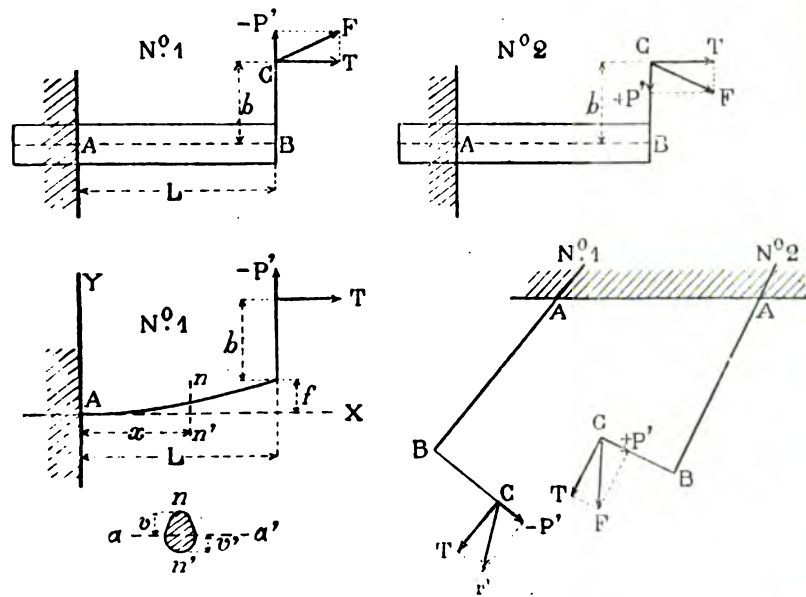


Fig. 166

culaire à AB, nous voyons qu'une section transversale quelconque nn' de la pièce est soumise, après sa déformation:

1° à une force de traction T,

2° à un moment fléchissant P' . $(L - x)$,

3° à un moment fléchissant T . $(b + f - y)$

f étant la flèche, positive ou négative mais supposée toujours très faible, de l'extrémité B.

Il est facile de voir que, dans le cas actuel, le moment de flexion $T (f - y)$ peut toujours être négligé en présence des autres efforts que supporte la poutre considérée: en effet, si le bras de levier b a une grande valeur, la variation $f - y$ qu'il éprouve est négligeable; si b est faible, alors, de deux choses l'une, ou T l'est aussi et alors le produit $T (f - y)$ de deux quantités, l'une et l'autre petites, peut être laissé de côté, ou bien la force T est considérable et, contrairement à ce qui se produit pour la compression, elle a pour effet de réduire la flèche en redressant la pièce; on voit donc qu'on peut, dans le cas d'une pièce soumise à la traction et à la flexion, ne pas tenir compte de la déformation qu'elle subit.

Ceci posé, remarquons que, suivant qu'on a affaire au dispositif n° 1 ou n° 2, le moment P' . $(L - x)$ agit en sens contraire du moment T . b , ou dans le même sens; l'un et l'autre arrangement peuvent évidemment être compris dans les mêmes formules à condition de regarder P' comme négatif, par exemple, dans le premier cas, et comme positif dans le second. On peut donc, d'une manière générale, dire que la fibre n , qui est la plus chargée à la traction, supporte l'effort suivant par millimètre carré

$$R = \frac{T}{\Omega} + \left[T \cdot b + P' \cdot (L - x) \right] \frac{v}{I}$$

tandis que la fibre n' doit résister à un effort de compression (positif ou négatif) donné par la relation

$$R' = - \frac{T}{\Omega} + \left[T \cdot b + P' \cdot (L - x) \right] \cdot \frac{v'}{I}$$

Généralement il n'y a pas lieu de se préoccuper de ce dernier, la sécurité de la pièce étant presque toujours assurée quand la somme R ne dépasse pas le chiffre pratique admis pour la traction.

Si l'on appelle M le moment fléchissant qui s'exerce sur la section transversale considérée; les formules ci-dessus prennent la forme suivante qui est fréquemment employée

$$R = \frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega}$$

$$R' = \frac{M \cdot v'}{I} - \frac{T}{\Omega}$$

et, comme $HH' = KU = \frac{T}{E. \Omega}$, on en conclut

$$\left[P'. (L - x) + T. b \right] \cdot \frac{d}{E. I} = \frac{T}{E. \Omega}$$

d'où

$$d = \frac{T. I}{[P'. (L - x) + T. b]. \Omega} = \frac{T. I}{\text{Moment fléchissant} \times \Omega}$$

relation qui donne d .

Un calcul absolument semblable est applicable au cas des pièces comprimées, seulement la fibre neutre passe évidemment alors de l'autre côté du centre de gravité G.

On remarquera que, suivant la valeur des forces en jeu, le point cherché H peut occuper une position quelconque sur la section nn' et même se trouver situé en dehors de la pièce.

§ 121. — Pièce sollicitée par un nombre quelconque de forces de traction et de flexion situées dans un plan de symétrie.

Les considérations qui viennent d'être développées (§ 120) sont évidemment applicables au cas d'une pièce sollicitée par un nombre quelconque de forces situées dans un plan de symétrie et donnant lieu à des phénomènes de traction et de flexion:

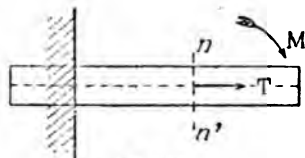


Fig. 168

si l'on appelle M le moment fléchissant qui sollicite une section transversale quelconque, et T l'effort de traction (appliqué en un point de la fibre moyenne), les charges par millimètre carré des fibres les plus chargées à

la traction et à la compression dans cette section nn' sont

$$R = \frac{M. v}{I} + \frac{T}{\Omega}$$

$$R' = \frac{M. v'}{I} - \frac{T}{\Omega}$$

En outre il existe, en général, un effort tranchant dont il y a lieu de tenir compte, le cas échéant, pour les poutres à âme très évidée.

FLEXION COMPOSÉE

(Pièces ayant ou non une section constante)

§ 122. — Pièce sollicitée par des forces normales situées dans différents plans.

Considérons une pièce AB encastrée en A, et à la fibre moyenne de laquelle sont appliquées, dans des plans différents, diverses forces normales P_1, P_2, P_3, \dots . Une section transversale quelconque comprise de K en D est soumise à la seule action de la force fléchissante P_1 ; il n'y a donc rien de particulier à dire à ce sujet, mais au-delà de D nous avons

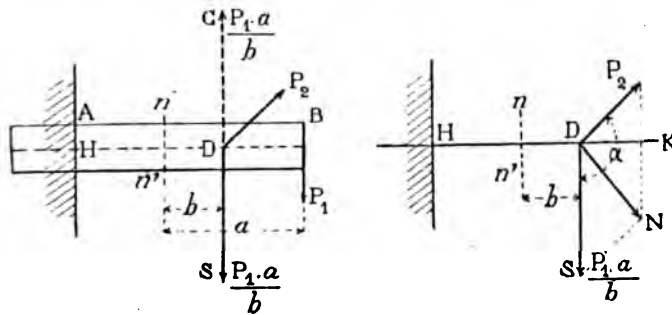


Fig. 169

affaire aux deux forces P_1 et P_2 situées dans des plans différents. Pour nous rendre très simplement compte de l'effet produit, appliquons au point D et parallèlement à P_1 deux forces DS, DC dirigées en sens contraire l'une de l'autre et égales chacune à $\frac{P_1 \cdot a}{b}$; il est clair que les forces P_1 et DC donnent lieu, sur la section nn' , à des moments fléchissants égaux ($P_1 \cdot a$ et $\frac{P_1 \cdot a}{b} \cdot b$) qui se détruisent; cette section peut donc être considérée comme uniquement soumise aux forces P_1 et DS passant toutes

les deux par le point D, et par suite comme n'étant sollicitée que par leur résultante DN qui donne lieu à un moment fléchissant $DN \times b$ agissant dans le plan SDN. La valeur de DN s'obtient de suite par un tracé graphique; on peut aussi la calculer analytiquement au moyen de la relation

$$\overline{DN}^2 = \left(\frac{P_1 \cdot a}{b}\right)^2 + P_2^2 + 2 \frac{P_1 \cdot a}{b} \cdot P_2 \cdot \cos \alpha$$

ce qui donne pour l'expression du moment de flexion $DN \times b$

$$\text{Moment fléchissant résultant} = \sqrt{(P_1 \cdot a)^2 + (P_2 \cdot b)^2 + 2 (P_1 \cdot a) \cdot (P_2 \cdot b) \cdot \cos \alpha}$$

ou bien en posant

$$P_1 \cdot a = M_1, \quad P_2 \cdot b = M_2$$

$$\text{Moment fléchissant résultant} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 \cdot M_2 \cdot \cos \alpha}$$

En d'autres termes le moment de flexion relatif à une section quelconque nn' est donné en grandeur et en direction par la résultante des moments partiels qui la sollicitent.

Si de D en H se trouvent de nouvelles forces normales, on continuera

à opérer de la même manière en appliquant simplement la règle précédente, ce qui ne présente aucune difficulté; si l'on veut par exemple étudier ce qui concerne une autre section transversale hh' , on calculera les moments $P_1 \cdot a, P_2 \cdot b, P_3 \cdot c, \dots$ qui la sollicitent et on composera ensuite

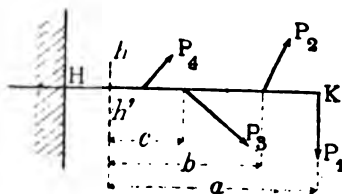


Fig. 170

ces derniers entre eux exactement comme on le ferait pour des forces; la résultante obtenue sera le moment fléchissant total cherché.

Il est à remarquer que, par suite des directions différentes des forces appliquées à la poutre, le plan de sollicitation des divers moments fléchissants change d'orientation avec la section transversale considérée; pour que la flexion se produise, en chaque point, dans le plan en question, il est donc nécessaire que ce dernier coupe la section considérée suivant un axe principal d'inertie, c'est-à-dire qu'il doit y avoir égalité des moments d'inertie pour toutes les droites qui passent par le centre de gravité; c'est ce qui arrive par exemple avec un cercle, un carré, un triangle équilatéral, etc. Si cette condition n'était pas remplie, la flexion

serait *oblique ou déviée* (§ 87), mais cette circonstance se présente rarement dans la pratique pour les pièces soumises au genre d'efforts qui nous occupe.

On remarquera également que, par suite des flexions qui se produisent dans divers plans, la fibre moyenne HK prend une double courbure de sorte que chacune des forces normales en jeu donne évidemment lieu à un moment de torsion, mais la valeur de ce dernier est faible puisque les déformations produites sont toujours supposées très petites, et nous la considérerons même comme négligeable.

§ 123. — **Pièce sollicitée par des forces obliques situées dans des plans différents et donnant lieu à des phénomènes de traction et de flexion.**

Si, au lieu de simples forces normales, on a des forces obliques situées dans différents plans passant par la fibre moyenne HK et donnant lieu à des phénomènes de flexion et de traction, le problème se traitera d'une manière tout à fait analogue à celle qui précède: une force telle que F donnera naissance, pour la section nn' , à un moment fléchissant

$$M_1 = P' \cdot a + T \cdot b$$

et à une force de traction uniformément répartie T. Les moments M_1, M_2, \dots ainsi déterminés se composeront entre eux suivant la règle indiquée plus haut et leur résultante M donnera lieu, pour la section en question, à une certaine charge maximum $\frac{M \cdot v}{I}$ à laquelle il faudra

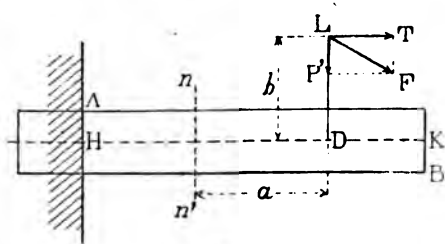


Fig. 171

ajouter la charge $\frac{T_1 + T_2 + \dots}{\Omega}$ provenant des efforts de traction. Il ne peut y avoir là aucune difficulté après ce qui a été dit dans l'étude des effets combinés de flexion et de traction (§ 120 et 121).

Les mêmes considérations s'appliquent évidemment au cas où il existe, en même temps que des forces isolées, d'autres efforts répartis suivant une loi quelconque; on déterminera, dans chacun des plans diamétraux contenant les diverses forces, les moments fléchissants relatifs aux sections transversales successives de la pièce (§ 56) et il ne restera plus qu'à opérer comme nous l'avons indiqué précédemment, en tenant compte de l'effort de traction dû aux composantes longitudinales des forces en jeu.

TRACTION ET GLISSEMENT UNIFORMÉMENT RÉPARTI.

(Pièces ayant ou non une section constante)

§ 124. — Pièce sollicitée à la traction et au glissement.

Considérons une pièce AB soumise dans le sens de sa longueur à un effort de traction T uniformément réparti, (1) et soit H un point de AB, qui, par suite de circonstances quelconques, éprouve un glissement dans la direction f' . L'effort de traction et celui de cisaillement se combinent évidemment entre eux de façon à augmenter la fatigue de la matière au point H, et, ce que nous nous proposons de reconnaître, c'est de savoir quand la sécurité de la pièce se trouve ainsi compromise.

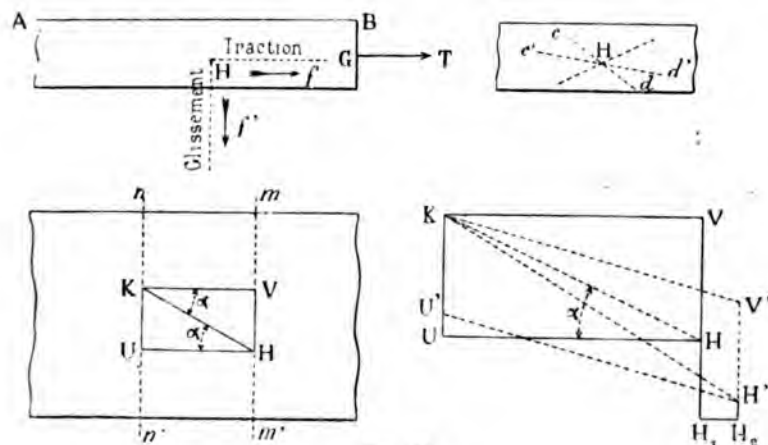


Fig. 172

Pour résoudre ce problème, nous mènerons par H et dans diverses directions de petites droites telles que $cd, c'd', \dots$; nous calculerons

(1) Comme on le sait (§ 18), une force de traction, appliquée en un point de la fibre moyenne, peut être considérée comme se répartissant d'une manière uniforme dans l'étendue de chaque section transversale ou, en d'autres termes, comme ne donnant pas lieu à des phénomènes de flexion; quant aux efforts de glissement, ce n'est que dans des cas exceptionnels que cette uniformité se produit (§ 39).

quel est, pour chacune d'elles et au point H, l'allongement λ_1 résultant des effets combinés de traction et de cisaillement, et nous chercherons enfin quelle est la valeur maximum Λ de la fonction λ_1 . Si Λ est inférieur ou égal au plus grand allongement qu'on peut admettre sans danger, il est bien clair que la pièce se trouvera dans de bonnes conditions de sécurité puisque, dans le cas actuel, c'est la rupture par traction qui est à craindre.

Ces considérations préliminaires étant établies, menons par le point H une ligne oblique quelconque HK et considérons le rectangle infiniment petit KVHU compris entre les deux sections transversales infiniment voisines mm' , mm'' . Appelons :

λ l'allongement par millimètre courant résultant du seul effet de la traction T.

i le glissement par millimètre courant (§ 34) résultant du seul effet de l'effort de cisaillement qui s'exerce en H.

Comme nous le savons (§ 21), toute dilatation longitudinale d'un solide dont les faces latérales sont libres est accompagnée d'une contraction transversale dont la valeur par millimètre courant, avec les notations que nous avons adoptées, est $\eta \cdot \lambda$. Il résulte de là que le rectangle KVHU se transforme en un parallélogramme KV'H'U' et, en vertu du principe de la superposition des petites déformations (§ 7), le point H' est situé à l'extrémité d'une ligne polygonale HH₁H₂H' telle que

$$\begin{aligned} H_1 H_2 & \text{ (allongement longitudinal de KV) } = KV \times \lambda \\ H H_1 & \text{ (glissement de VH relativement à KU) } = KV \times i \\ H' H_2 & = U' U \text{ (contraction transversale de KU) } = KU \times \eta \cdot \lambda. \end{aligned}$$

On a donc, en projetant sur KH' la ligne brisée KHH₁H₂H' et en remarquant que l'angle HKH' ou $d\alpha$ est infiniment petit,

$$\begin{aligned} KH' & = KH + HH_1 \cdot \sin \alpha + H_1 H_2 \cdot \cos \alpha - H_2 H' \cdot \sin \alpha \\ \frac{KH' - KH}{KH} & = \frac{HH_1}{KH} \cdot \sin \alpha + \frac{H_1 H_2}{KH} \cdot \cos \alpha - \frac{H_2 H'}{KH} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{ou, en remarquant que } KH = \frac{KV}{\cos \alpha} = \frac{KU}{\sin \alpha},$$

$$\lambda_1 = i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \lambda \cdot \cos^2 \alpha - \eta \cdot \lambda \cdot \sin^2 \alpha$$

compression et de glissement simultanés (§ 125), c'est, au contraire, évidemment maximum qu'il faut calculer, afin de s'assurer qu'elle n'atteint pas une

ce qui peut s'écrire

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda (1 - \eta) + i \sin 2 \alpha + \lambda \cdot (1 + \eta) \cdot \cos 2 \alpha$$

Comme il est facile de le voir, cette fonction est maximum pour

$$\text{tang } 2 \alpha = \frac{i}{\lambda \cdot (1 + \eta)}$$

ce qui donne pour le maximum Λ de λ_1

$$\Lambda = \frac{1}{2} \lambda \cdot (1 - \eta) + \sqrt{\left[\frac{\lambda \cdot (1 + \eta)}{2}\right]^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2}$$

Telle est l'expression cherchée. On a trouvé d'autre part (§ 21) que, pour les solides isotropes, on peut prendre $\eta = \frac{1}{4}$; on a donc en définitive

$$\Lambda = \frac{3}{8} \lambda + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \lambda\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2}$$

formule dont nous allons faire un fréquent usage.

Supposons par exemple (ce qui est le cas du problème faisant l'objet de ce paragraphe), qu'on ait une force de traction T et un effort de cisaillement Q *uniformément réparti* (ainsi que T) dans la section transversale de surface Ω ; désignons par R la charge par millimètre carré à la traction de la fibre ayant l'allongement Λ , et remarquons que:

$$R = E \cdot \Lambda \quad , \quad \frac{T}{\Omega} = E \cdot \lambda \quad , \quad \frac{Q}{\Omega} = G \cdot i;$$

il vient alors

$$R = \frac{3}{8} \cdot \frac{T}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{E}{2G} \cdot \frac{Q}{\Omega}\right)^2}$$

En admettant la relation théorique

$$G = \frac{2}{5} E$$

cette formule devient

$$R = \frac{3}{8} \cdot \frac{T}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{T}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{Q}{\Omega}\right)^2}$$

... pour que la ... valeur ...

$$= \frac{3}{8} \frac{T}{Q} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{Q}\right)^2 + \left(\frac{r}{r''} \cdot \frac{Q}{Q}\right)^2}$$

... la section ... aux efforts de ... et T=0

$$u = \frac{3}{8} \frac{T}{Q}$$

$$u' = \frac{5}{8} \frac{T}{Q}$$

... pour la traction

$$R = \frac{3}{8} \frac{T}{Q} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{Q}\right)^2 + \left(\frac{r}{r''} \cdot \frac{Q}{Q}\right)^2}$$

... dans le cas extrême où T=0, la formule ci-dessus conduit à $\frac{R}{Q} = \frac{4}{3} R$, ce qui donne

une charge maximum de cisaillement les $\frac{4}{3}$ de celle qui est relative à la traction. Telle est en effet la valeur théorique de l'état limite du glissement; telle est aussi à peu près celle qui est admise pratiquement pour la plupart des corps sauf pour la fonte et les bois (§ 41). Si l'on veut tenir compte de la particularité que présentent ces derniers corps, on remarquera qu'on a

$$\frac{E}{2G} = \frac{E \cdot \lambda}{2G \cdot \lambda} = \frac{E \cdot \lambda}{G \cdot i} = \frac{r}{r''}$$

r et r'' étant les charges pratiques de sécurité admises pour la traction et le glissement, par exemple 3 kg. et 1 k. 70 pour la fonte (§ 28 et § 41). Dans ces conditions, la formule qui nous occupe peut s'écrire

$$R = \frac{3}{8} \frac{T}{Q} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{Q}\right)^2 + \left(\frac{r}{r''} \cdot \frac{Q}{Q}\right)^2}$$

et, pour T=0, elle donne

$$R = \frac{r}{r''} \cdot \frac{Q}{Q}$$

c'est-à-dire $\frac{Q}{Q} = r''$ pour R=r, comme cela doit effectivement avoir lieu; mais cette complication ne nous paraît pas utile, et elle a d'autant moins de raison d'être que les valeurs de r'' qu'il convient d'admettre pour la fonte et les bois sont loin d'être connues avec précision; l'hypothèse T=0 rentre d'ailleurs dans un cas extrême pour lequel la formule n'est pas faite.

L'étude que nous venons de faire est applicable au cas d'un rivet ou d'un boulon destiné à l'assemblage de deux tôles ou de deux pièces de faible épaisseur, et soumis à un effort de traction longitudinale qui résulte soit du fait même de sa mise en place à chaud, soit du serrage énergique de son écrou. Les résultats auxquels elle conduit nous seront encore utiles pour les autres problèmes relatifs à la Résistance composée ; dans le cas en particulier où l'effort de cisaillement Q ne se répartirait pas d'une manière uniforme, les formules

$$\Lambda = \frac{3}{8} \lambda + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \lambda\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2}$$

$$R = \frac{3}{8} \frac{T}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega}\right)^2}$$

sont toujours évidemment exactes à condition d'appeler i et $\frac{Q}{\Omega}$ le glissement et l'effort de cisaillement par millimètre carré *qui sont spécialement relatifs au point considéré* (le point H par exemple, sur la figure 172).

COMPRESSION ET GLISSEMENT UNIFORMÉMENT RÉPARTI

(Pièces ayant ou non une section constante)

§ 125. — Pièce sollicitée à la compression et au glissement.

Supposons maintenant que nous ayons affaire à une pièce soumise à un effort de compression T' et à une force de cisaillement Q uniformément répartie (ainsi que T') dans toute l'étendue de la section transversale considérée. L'étude de ce cas est la même que celle du précédent; seulement, au lieu d'une contraction transversale, on a évidemment une *dilatation* (§ 29). Considérons, comme tout à l'heure, un rectangle $UHPS$ et voyons quel est le raccourcissement par millimètre courant λ' , de la diagonale SH : dans la déformation dont nous nous occupons, le côté SU se dilate de la quantité $UU' = US \times \eta \cdot \lambda'$, de sorte que le sommet H' du parallélogramme $U'H'P'S$ est situé à l'extrémité d'une ligne brisée HH_1H_2H' telle que

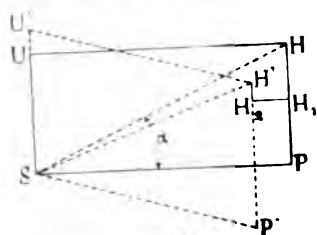


Fig. 173

l'extrémité d'une ligne brisée HH_1H_2H' telle que

$$HH_1 \text{ (glissement de HP par rapport à US)} = UH \times \epsilon$$

$$H_1H_2 \text{ (raccourcissement longitudinal de UH)} = UH \times \lambda'$$

$$H_2H' \text{ (dilatation transversale de US)} = US \times \eta \cdot \lambda'$$

λ' étant le raccourcissement longitudinal par millimètre courant produit par la force T' agissant isolément.

Or on a, comme tout à l'heure,

$$SH = SH' + HH_1 \cdot \sin \alpha + H_1H_2 \cdot \cos \alpha - H_2H' \cdot \sin \alpha$$

et par conséquent

$$\frac{SH - SH'}{SH} = \frac{HH_1}{SH} \cdot \sin \alpha + \frac{H_1H_2}{SH} \cdot \cos \alpha - \frac{H_2H'}{SH} \cdot \sin \alpha$$

$$\lambda_1' = i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \lambda' \cdot \cos^2 \alpha - \eta \cdot \lambda' \cdot \sin^2 \alpha$$

C'est la même expression que celle qui a été obtenue pour λ_1 dans le paragraphe précédent; le maximum Λ' de λ_1' a donc pour valeur

$$\Lambda' = \frac{3}{8} \lambda' + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \lambda'\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2}$$

ce qui conduit aux relations

$$R' = \frac{3}{8} \frac{T'}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T'}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q'}{\Omega}\right)^2}$$

$$\Omega' = \frac{3}{8} \omega + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \omega\right)^2 + \omega'^2}$$

R' étant la charge à la compression par millimètre carré de la fibre la plus fatiguée à la compression au point H; ω et ω' , les surfaces qu'il faudrait donner à la section transversale considérée pour résister isolément, avec sécurité, à la force de compression T' et à l'effort de cisaillement Q. Il est d'ailleurs bien entendu que nous supposons que la pièce comprimée est assez courte relativement à ses dimensions transversales pour qu'on n'ait jamais à craindre pour elle la flexion ou, autrement dit, le *flambement* dont il a été longuement question à propos des solides chargés debout. Cette dernière remarque est applicable à tous les paragraphes qui vont suivre et dans lesquels il sera question d'efforts de compression.

FLEXION ET GLISSEMENT.

(Pièces ayant ou non une section constante).

§ 126. — Pièce sollicitée à la flexion et au glissement, lorsque les sections transversales peuvent s'infléchir librement.

Ce cas est celui qui a été traité pour une pièce fléchie par une ou plusieurs forces normales (§ 50); nous avons fait connaître en même temps les règles pratiques dont il convient de faire usage; il est donc inutile de revenir sur ce sujet.

§ 127. — Pièce sollicitée à la flexion et au glissement, lorsque la section la plus fatiguée est contrainte à rester plane.

Il se présente dans la pratique un certain nombre de circonstances où l'une des sections transversales d'un corps fléchi reste forcément plane;

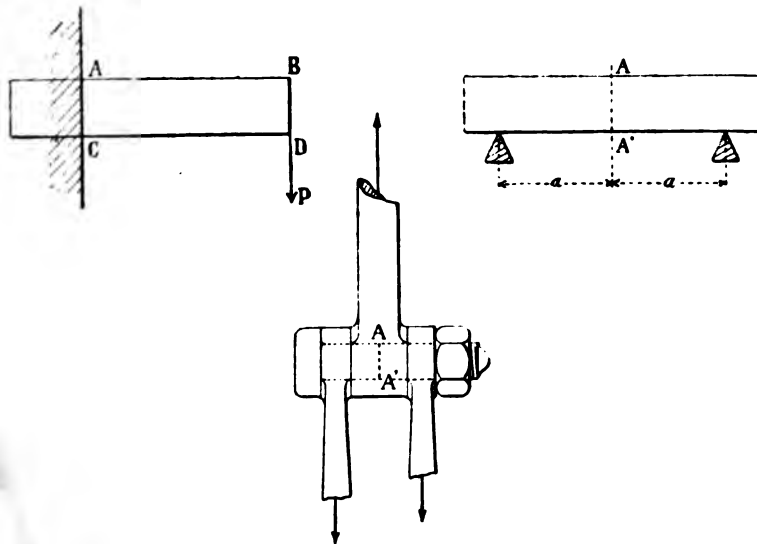


Fig. 174

par exemple le cas d'une pièce fixée par un encastrement dans

lequel elle est invariablement *scellée* ou *soudée* de telle sorte qu'aucun mouvement ne peut avoir lieu dans la surface AC. Le même phénomène se produit, avec divers dispositifs, pour certaines sections exceptionnelles qui, n'ayant aucune raison pour s'infléchir d'un côté plutôt que de l'autre, restent planes quand il y a symétrie parfaite de chaque côté : c'est par exemple ce qui arrive pour la section AA' d'une pièce reposant sur deux appuis et symétriquement chargée. Voyons comment on peut alors calculer la charge de la fibre qui travaille le plus dans l'une de ces sections exceptionnelles : appelons M le moment fléchissant auquel elle est soumise et Q l'effort tranchant qui lui est appliqué ; celui-ci se répartit d'une manière uniforme dans toute l'étendue Ω de la surface AA' puisque celle-ci reste plane (§ 39) ; c'est donc aux points A et A',

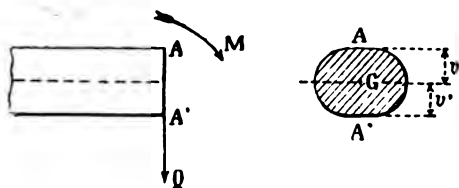


Fig. 175

les plus chargés par le fait de la flexion, que la fatigue est la plus grande et, pour avoir cette dernière, nous n'avons qu'à combiner entre eux l'effort de glissement et ceux d'extension ou de compression, comme nous avons appris à le faire (§ 124 et 125). La charge maximum à la traction R (qui se produit en A) est donc égale à

$$R = \frac{3}{8} \cdot \frac{M \cdot v}{I} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{M \cdot v}{I}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega}\right)^2}$$

puisque l'effort de traction par millimètre carré $\frac{T}{\Omega}$ (que le moment fléchissant M produit au point A) est égal à $\frac{M \cdot v}{I}$ (§ 44).

On voit de même que la charge maximum à la compression R' (qui a lieu en A') a pour valeur

$$R' = \frac{3}{8} \frac{M \cdot v'}{I} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{M \cdot v'}{I}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega}\right)^2}$$

R et R' étant ainsi connus, le problème proposé se trouve résolu.

Les expressions précédentes peuvent se mettre sous une forme un peu différente qui, pour la première par exemple, est la suivante

$$R = \frac{M \cdot v}{I} \left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{1 + \left(\frac{2Q \cdot I}{\Omega \cdot M \cdot v} \right)^2} \right]$$

Dans le cas d'une pièce encastree, de longueur L , fléchie par une force normale P , cette relation devient

$$R = \frac{M \cdot v}{I} \left[\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{1 + \frac{2I}{\Omega \cdot v \cdot L}} \right]$$

Lors donc que les quantités $\left(\frac{2I}{\Omega \cdot v \cdot L} \right)^2$ et $\left(\frac{2I}{\Omega \cdot v' \cdot L} \right)^2$ sont assez petites pour être négligées devant l'unité, il suffit de prendre

$$R = \frac{M \cdot v}{I}$$

$$R' = \frac{M \cdot v'}{I}$$

ce qui revient à laisser absolument de côté l'effet produit par l'effort tranchant, même pour les sections exceptionnelles dont il est ici question.

Dans le cas particulier d'une pièce de section rectangulaire on a

$$\left(\frac{2I}{\Omega \cdot v \cdot L} \right)^2 = \left(\frac{b}{3L} \right)^2$$

de sorte que dès que la longueur L est un peu plus grande que la hauteur b , la simplification dont nous venons de parler est permise et la

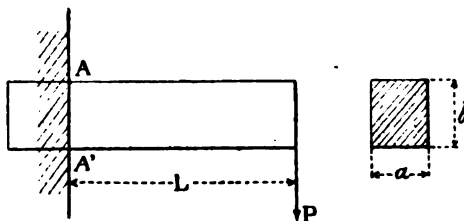


fig. 176

résistance de la pièce peut être calculée comme si elle n'était soumise qu'au seul moment fléchissant $P \cdot L$. Cette conclusion importante subsiste

encore si le corps considéré, au lieu d'être rectangulaire, a une section circulaire, elliptique, etc.

En résumé, les conclusions de l'étude que nous venons de faire sont les suivantes :

1° Il n'y a qu'un petit nombre de sections, se trouvant dans des conditions tout à fait exceptionnelles, pour lesquelles il puisse y avoir lieu de tenir compte des effets combinés de flexion et de glissement ; ce sont celles qui sont astreintes à rester planes.

2° Même pour ces sections exceptionnelles, il n'y a pas lieu de se préoccuper de l'effet de glissement ou cisaillement dès que le bras de levier de la force de la flexion atteint, avec les formes généralement adoptées, environ 1 fois ou 1 fois $\frac{1}{2}$ la hauteur de la pièce.

TRACTION ET COMPRESSION, FLEXION ET GLISSEMENT.

(Pièces ayant de 1811 une section constante).

§ 128. — Pièce sollicitée à la traction, à la flexion et au glissement.

Soit M le moment fléchissant auquel est soumise la section considérée

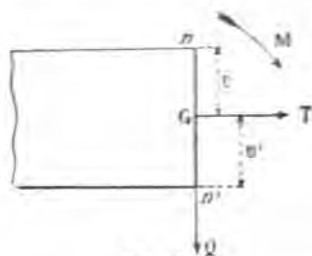


Fig. 177

$\pi\pi'$ du corps solide, T la force de traction qui est appliquée au centre de gravité G de cette surface et se répartit par conséquent d'une manière uniforme sur cette dernière (§ 18). Comme nous l'avons vu au paragraphe 120, les efforts d'extension et de compression dus au moment M s'ajoutent algébriquement à ceux qui résultent de la traction T , de sorte que les charges

supportées de ce fait en n et n' par les fibres les plus fatiguées sont

$$\begin{aligned} \frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega} & \quad \text{(traction)} \\ \frac{M \cdot v'}{I} - \frac{T}{\Omega} & \quad \text{(compression)} \end{aligned} \tag{1}$$

et il ne reste plus maintenant qu'à les combiner avec les efforts résultant de la force de cisaillement; c'est le problème qui a été résolu aux paragraphes 126 et 127. Si la section est libre de s'infléchir, il n'y a rien à ajouter aux charges ci-dessus, mais simplement à voir s'il n'y a pas des régions où l'effort tranchant est à craindre (§ 50); on n'oubliera

(1) Ne pas oublier que la différence $\frac{M \cdot v'}{I} - \frac{T}{\Omega}$ est positive, c'est-à-dire qu'il y a réellement compression dans le cas contraire la fatigue est certainement moindre en n' qu'en n et il ne faut conséquemment de s'en occuper.

pas d'ailleurs qu'aux points en question le glissement doit se combiner, suivant les formules du paragraphe 124, avec la traction uniformément répartie $\frac{T}{\Omega}$. Dans les cas exceptionnels au contraire où la section en question est assujettie à rester plane, le glissement s'y répartit d'une manière uniforme comme nous l'avons déjà dit bien des fois, et les charges R et R' des fibres les plus fatiguées à la traction et à la compression sont (§ 127)

$$R = \frac{3}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega} \right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega} \right) \right]^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega} \right)^2}$$

$$R' = \frac{3}{8} \left(\frac{M \cdot v'}{I} - \frac{T}{\Omega} \right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8} \left(\frac{M \cdot v'}{I} - \frac{T}{\Omega} \right) \right]^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega} \right)^2}$$

Si, au lieu d'une traction T, on avait une compression T', il suffirait de remplacer dans les expressions précédentes T par —T'.

TRACTION (ou Compression) ET TORSION.
(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

§ 129. — **Pièce sollicitée à la traction et à la torsion.**

Appelons M' le moment du couple de torsion auquel est soumise la section circulaire considérée nn' et T la force de traction appliquée à la fibre moyenne; le couple M' produit un glissement tangentiel t' dont la valeur est maximum à la circonférence et qui donne lieu à une charge par millimètre carré égale à (§ 90)

$$\frac{M' \cdot \nu}{J}$$

tandis que celle qui résulte de la traction a , en tous les points, une valeur égale à $\frac{T}{\Omega}$. Pour résoudre le problème proposé, nous n'avons donc qu'à combiner entre eux les deux efforts précédents, comme nous avons

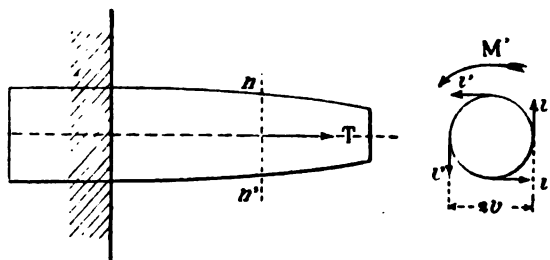


Fig. 178

déjà eu l'occasion de le faire (§ 124). La charge à la traction R des points qui fatiguent le plus dans la section nn' et qui sont tous situés sur son contour extérieur est donc

$$R = \frac{3}{8} \cdot \frac{T}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{T}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{M' \cdot \nu}{J}\right)^2}$$

Dans le cas d'une force de compression T' , la formule à adopter serait la même (§ 125).

TORSION ET GLISSEMENT UNIFORMÉMENT RÉPARTI.

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

§ 130. — Pièce sollicitée à la torsion et au glissement.

Supposons, pour fixer les idées, que l'axe du solide considéré soit horizontal et que la force de cisaillement Q soit verticale. Le couple de torsion M' donne lieu, sur la circonférence extérieure de la section $A B C D$, à un effort tangentiel de glissement qui est égal, par millimètre carré, à $\frac{M' \cdot v}{J}$ et qui se combine avec un autre de même espèce parallèle à Q et ayant pour valeur $\frac{Q}{\Omega}$ si, comme nous l'admettons, le cisaillement se répartit d'une manière uniforme dans toute l'étendue de la section. Il résulte évidemment de là que la fatigue maximum a lieu au point C où les deux déplacements moléculaires produits s'ajoutent entre eux en donnant une charge de glissement par millimètre carré égale à

$$R'' = \frac{Q}{\Omega} + \frac{M' \cdot v}{J}$$

Si l'on voulait trouver la charge qui correspond à un autre point quelconque de la section $A B C D$, on opérerait d'une manière analogue en composant algébriquement entre eux les deux déplacements correspondants ; pour le point A par exemple où ceux-ci sont à angle droit l'un avec l'autre, leur résultante AH a pour valeur $\sqrt{v^2 + v^2}$, de sorte que la charge de glissement par millimètre carré est alors

$$R_1'' = \sqrt{\left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{M' \cdot v}{J}\right)^2}$$

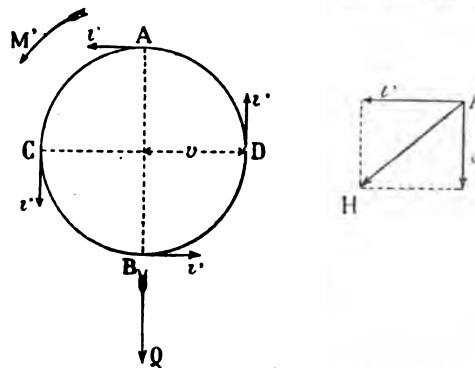


Fig. 179

FLEXION ET TORSION.

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

§ 131. — Pièce sollicitée à la flexion et à la torsion.

Le couple de torsion M' fait travailler d'une manière égale tous les points du contour extérieur ABCD, tandis que ceux qui fatiguent le plus à la flexion par le fait du moment fléchissant M sont situés dans le plan de flexion en A et B; ce sont donc ces derniers qui éprouvent la plus grande fatigue et leurs charges respectives totales R et R' à la traction et à la compression sont données par l'expression suivante (§ 124 et 125), puisque $\frac{Mv}{I}$ est la valeur des efforts de traction et de compression par millimètre carré produits par la flexion en A et en B.

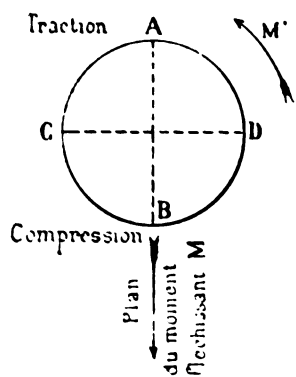


Fig. 180

$$R = R' = \frac{3M \cdot r}{8I} + \sqrt{\left(\frac{5M \cdot r}{8I}\right)^2 + \left(\frac{5M' \cdot r}{4J}\right)^2}$$

Le cas que nous venons de traiter est, à peu près, celui d'un arbre de

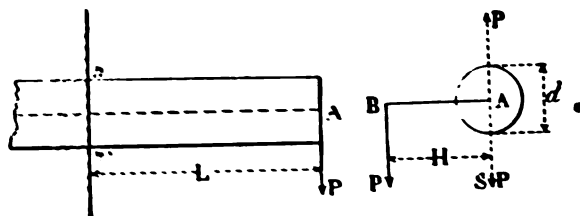


Fig. 181

machine sollicité par une force normale agissant à l'extrémité d'un bras

de levier AB; on voit en effet que, si on applique en A deux forces égales et parallèles à P mais dirigées en sens contraire l'une de l'autre, la section transversale nn' a à supporter un moment de torsion $M' = P.H$, et un moment de flexion $M = P.L$. La formule qui donne les valeurs de R et de R' est alors, en appelant d le diamètre de l'arbre,

$$R = R' = \frac{4 P}{\pi d^3} (3 L + 5 \sqrt{L^2 + H^2})$$

Il convient d'ajouter que la force de flexion $AS = P$ donne lieu à un effort tranchant dont il faudrait tenir compte en toute rigueur, mais qui est le plus souvent négligeable (§ 50); si cependant on jugeait qu'il y a lieu de s'en préoccuper, on agirait comme il a été dit au paragraphe précédent.

**TRACTION (ou Compression), GLISSEMENT UNIFORMÉMENT RÉPARTI,
FLEXION ET TORSION.**

(Pièces ayant la forme d'un solide de révolution).

**§ 132 — Pièce sollicitée à la traction, au glissement,
à la flexion et à la torsion.**

L'étude de ce cas complexe ne présente pas de difficultés après ce qui vient d'être dit dans les paragraphes précédents : en un point quelconque H du contour extérieur de la section transversale considérée,

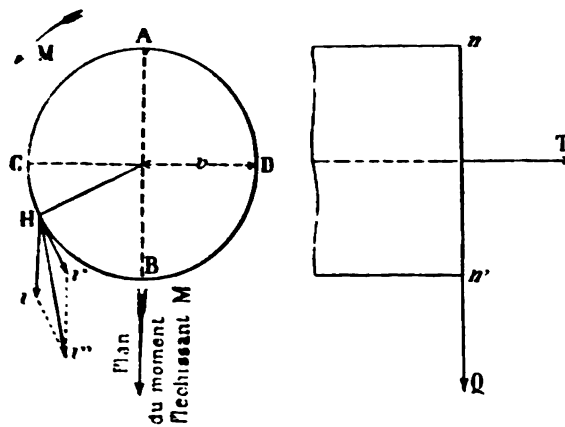


Fig. 182

on a deux glissements i et i' dus à la force Q et au couple M' , et pouvant être remplacés, suivant la règle du parallélogramme, par le glissement résultant i'' ; ce dernier, à son tour, se combine avec l'allongement λ dû à l'effort de traction T et avec l'allongement λ_1 ou le raccourcissement λ'_1 provenant du moment de flexion M . Comme on le voit sur la figure, la direction de i'' est à angle droit avec celles de λ , λ_1 , et λ'_1 ,

de sorte que le problème à résoudre rentre immédiatement dans ceux que nous venons d'étudier en détail. Voyons en particulier ce qui se passe aux points A, B, C, D.

En A les deux glissements i et i' sont à angle droit et donnent lieu par conséquent à un effort de cisaillement par millimètre carré égal à (§ 130)

$$\sqrt{\left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{M' \cdot v}{J}\right)^2}$$

D'autre part, en ce même point, les charges $\frac{M \cdot v}{I}$ et $\frac{T}{\Omega}$ dues au moment fléchissant M et à la traction T s'ajoutent entre elles pour donner un effort de traction par millimètre carré égal à

$$\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega}$$

de sorte qu'en définitive la fatigue maximum à la traction qui se produit en A est (§ 124)

$$R = \frac{3}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega} \right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega} \right) \right]^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{M' \cdot v}{J} \right)^2}$$

Au point B les mêmes phénomènes se passent si ce n'est toutefois que l'effort de traction $\frac{M \cdot v}{I}$ est remplacé par un effort de compression $\frac{M \cdot v}{I}$; nous avons donc pour charge à la compression par millimètre carré en B

$$R' = \frac{3}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} - \frac{T}{\Omega} \right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} - \frac{T}{\Omega} \right) \right]^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{M' \cdot v}{J} \right)^2}$$

En C l'effet produit par le moment fléchissant M est nul, tandis que les glissements i et i' s'ajoutent; on a donc pour valeur de la fatigue maximum à la traction au point considéré (§ 124)

$$R = \frac{3}{8} \frac{T}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{\Omega} \right)^2 + \left[\frac{5}{4} \left(\frac{Q}{\Omega} + \frac{M' \cdot v}{J} \right) \right]^2}$$

Enfin en D les deux glissements se retranchent l'un de l'autre, ce qui donne pour ce point

$$R = \frac{3}{8} \frac{T}{\Omega} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{T}{\Omega}\right)^2 + \left[\frac{5}{4} \left(\frac{Q}{\Omega} - \frac{M' \cdot v}{J}\right)\right]^2}$$

mais il n'y a évidemment pas lieu de tenir compte de cette valeur, puisqu'elle est inférieure à la précédente.

Si, au lieu d'une force de traction T on a une force de compression T' , les considérations qui précèdent ne cessent pas d'être exactes, et les formules précédentes sont encore applicables à condition d'y remplacer T par $-T'$.

En terminant ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer que, dans les cas qui se présentent dans la pratique, l'effet produit par la flexion l'emporte généralement sur ceux qui proviennent du glissement: dans ces conditions la fatigue maximum se produit au point A dans le cas d'une traction T , et en B dans le cas d'une compression T' ; on n'aura donc le plus souvent besoin, pour s'assurer de la solidité de la pièce, qu'à faire usage de la formule suivante

$$R = \frac{3}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega}\right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8} \left(\frac{M \cdot v}{I} + \frac{T}{\Omega}\right)\right]^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{Q}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} \frac{M' \cdot v}{J}\right)^2}$$

applicable dans le cas de la compression comme dans celui de la traction, à condition de remplacer alors T par T' et R par R' . Nous rappellerons seulement une remarque déjà faite (§ 125), à savoir que nous supposons que les pièces comprimées soient assez courtes relativement à leurs dimensions transversales pour que le *flambement* ne soit pas à craindre.

CHAPITRE VIII



PHÉNOMÈNES DE RUPTURE



PHÉNOMÈNES DE RUPTURE

§ 133. — Considérations générales sur les phénomènes de rupture et sur les lois qui les régissent.

Nous avons déjà dit à bien des reprises (§ 17) que les formules ordinaires de la Résistance des matériaux sont essentiellement basées sur ce principe que les petites déformations (allongements, raccourcissements et glissements) sont proportionnelles aux forces qui les produisent et par conséquent elles ne sont applicables que dans les cas où l'élasticité n'est altérée *en aucun point* du corps considéré. Vouloir s'en servir au-delà de cette limite, c'est commettre, de propos délibéré, une erreur grossière : en particulier, si l'on veut calculer ou simplement prévoir ce qui se passe dans les phénomènes de rupture, il faut avoir de nouveau recours à l'expérience et lui demander les bases qui pourront servir de point de départ pour l'établissement de nouvelles formules. Comme nous allons le voir dans l'étude sommaire qui va suivre, les phénomènes en question sont d'ailleurs très complexes et, à un moment donné, ils peuvent même changer brusquement de nature : sans parler des pièces chargées debout suivant leur axe, dans lesquelles, à partir d'un certain point, la compression est remplacée subitement par la flexion si elles sont suffisamment longues, nous citerons le cas de la traction dans lequel l'effort exercé finit par ne plus être uniformément réparti (§ 18) et donne même forcément lieu à des effets de flexion dès qu'une crique ou une disjonction non symétrique commence à se produire. De même, comme l'a constaté Vicat, la rupture d'un prisme par torsion s'achève parfois par une flexion autour de lignes obliques par rapport aux arêtes ; c'est ce même ingénieur qui a fait cette remarque que la disjonction de la matière se produit quelquefois suivant une section toute différente de celle qui éprouvait la plus grande fatigue quand la limite d'élasticité n'était pas atteinte, et, d'après ce que nous venons

de dire, il n'y a pas lieu de s'en étonner. Sans vouloir insister davantage sur les observations de ce genre qu'il serait facile de multiplier, nous allons parler maintenant brièvement des diverses sortes de rupture.

§ 134. — Effort nécessaire pour produire la rupture par traction, par compression, par cisaillement.

En nous occupant de la traction, de la compression et du glissement nous avons déjà fait connaître ce qui concerne la rupture dans ces diverses circonstances; nous n'avons donc que peu de chose à ajouter à cet égard. Nous rappellerons seulement que, dans le cas de la traction qui a été de beaucoup le mieux étudiée, l'effort exercé ne peut, à aucun moment, être sensé être comme uniformément repartie que si sa direction passe par le centre de gravité des diverses sections transversales. Si l'on a affaire par exemple à une barrette ou à une tige percée de trous non symétriques ou ayant une craque telle que A, les phénomènes qui



Fig. 103

se produisent sont plus complexes que ceux qui relèvent de la simple traction; il en est de même généralement de même si on opère sur des tiges non homogènes. Si cependant il y avait symétrie dans la répartition de la matière autour du centre de gravité, aucun effet de dissymétrie, c'est-à-dire de flexion, ne serait évidemment à craindre; mais, dès le commencement de l'essai, la fatigue des fibres les plus longitudinales ne serait

pas la même et la rupture se produirait que successivement, à des intervalles plus ou moins éloignés, et atteindrait le maximum possible de déformation. Avec les tiges percées de trous, c'est-à-dire capables de supporter des charges plus élevées que celles qui leur permettraient de résister sans se briser, il est clair que les tiges les plus chargées et éloignées les unes des autres, se briseront en raison même de la nature de leur position, et que les plus chargées de contour résisteront le plus longtemps à la résistance totale. Il y a donc une certaine limite pour laquelle les métaux ductiles et les métaux fragiles se comportent que les autres et se trouvent dans les meilleures conditions; comme on le voit par la figure 103, la remarque est tout parti-

culièrement applicable aux circonstances dans lesquelles la fatigue de la matière n'est pas uniforme dans toute l'étendue de la pièce, c'est-à-dire dans le cas de la flexion ou de la torsion comme nous le verrons bientôt.

§ 135. — Moment nécessaire pour produire la rupture par flexion.

Une étude beaucoup plus compliquée que la précédente est celle de la rupture par flexion parce que les diverses fibres parallèles à l'axe supportent des efforts qui sont extrêmement variables d'un point à l'autre d'une même section transversale, et qui sont d'ailleurs les uns de traction, les autres de compression. Si l'on considère une poutre fléchie par une ou plusieurs forces normales P , il est clair que les points les plus fatigués, tels que A et B , atteignent, avant tous les autres, la limite d'élasticité et qu'ils la dépassent aussitôt qu'on continue à faire croître les forces extérieures. Si, à ce moment, on suspend l'action de ces dernières, les molécules de la région centrale qui n'ont pas encore atteint la limite en question, forcent évidemment les autres à retourner, malgré elles, vers leurs positions premières, en sorte que les déformations permanentes ne deviennent appréciables que sensiblement au-delà du point où l'élasticité est altérée à la surface. En d'autres termes, si l'on appelle M la valeur du moment fléchissant qui commence à produire ces changements de forme, la charge correspondante par millimètre carré R calculée au moyen de la formule habituelle

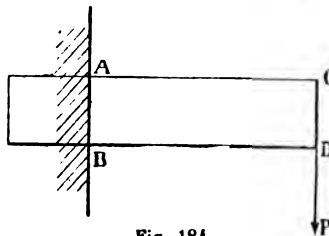


Fig. 184

$$M = \frac{R \cdot I}{v}$$

est plus grande que la limite d'élasticité constatée dans des expériences de traction ou de compression faites sur la même matière. C'est là un fait sur lequel nous avons déjà insisté (§ 86).

La même augmentation de la charge R se constate, d'une manière plus sensible encore, si l'on pousse les charges jusqu'au point qui détermine la rupture. Pour nous rendre compte de ce qui se passe dans ces

circonstances, considérons, comme au paragraphe 43, deux sections transversales infiniment voisines mn , $m'n'$; comme l'expérience a permis de le constater bien des fois, ces sections restent sensiblement planes et normales de sorte que l'allongement ou le raccourcissement des diverses fibres est toujours égal à $\frac{e}{\rho}$ c'est-à-dire que, pour une

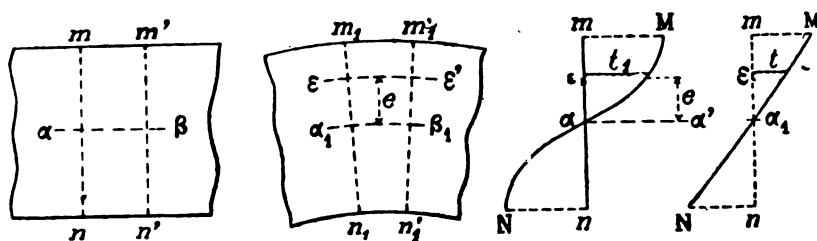


Fig. 185

même valeur de ρ , il est proportionnel à la distance e qui les sépare de la ligne des *fibres invariables* (*) (§ 43), mais, la limite d'élasticité étant dépassée pour un certain nombre d'entre elles, les efforts qui les sollicitent, au lieu d'obéir à la même loi de proportionnalité, sont représentés par les ordonnées t_i (positives ou négatives) d'une certaine courbe MzN qui ne se confond avec une ligne droite que dans le voisinage du point α et dont l'une des ordonnées extrêmes mM , nN est, lors du commencement de la rupture, égale à la charge, par traction ou par compression, qui détermine la désorganisation de la matière (*). Comme équation d'équilibre, on a à cet instant, en appelant M_i le moment fléchissant correspondant,

$$M_i = \int t_i \cdot dw \times e$$

ou bien, en désignant par a la largeur de la pièce au point considéré,

$$M_i = \int t_i \cdot a \cdot e \cdot de$$

Or si la proportionnalité entre les déformations et les forces élastiques

(*) Comme nous le verrons tout à l'heure, cette ligne est alors différente, en général, de celle qui passe par les centres de gravité des sections; elle varie même de position d'un instant à l'autre suivant la valeur de la force fléchissante.

La théorie de la rupture par flexion qu'on trouvera longuement développée dans la *Résistance des Matériaux* de Navier et de Saint Venant (page 86 et suivantes) a été, depuis lors, complétée et précisée. Voir en particulier les *Annales des Mines*, 2^e semestre de

avait lieu dans le cas qui nous occupe, la courbe $M\alpha N$ devrait évidemment être remplacée par la droite $M\alpha_1 N$ et le moment fléchissant de rupture serait, dans cette hypothèse, égal non pas à M , mais à

$$M = \int t. d\omega \times e = \int t. a. e. de$$

D'après ce que nous savons sur la forme des courbes qui représentent les allongements et les compressions en fonction des efforts qui les produisent, t_1 est plus grand que t , et on a par conséquent

$$M_1 > M$$

c'est-à-dire que la valeur réelle du moment de flexion nécessaire pour produire la rupture est plus grande que la quantité M qu'on déduirait de la formule connue

$$M = \frac{R. I}{\nu}$$

si on appliquait, à tort, cette dernière au cas actuel en y prenant R égal à la charge de rupture par millimètre carré relative à la traction ou à la compression. Pour exprimer le même fait d'une autre façon, on peut encore dire que le nombre R , calculé brutalement au moyen de la relation

$$M_1 = \frac{R_1. I}{\nu}$$

est notablement plus grand que R et ne représente nullement la charge par millimètre carré qui, dans les essais de traction ou de compression, détermine la séparation des molécules. Une réserve cependant est à faire : si, en effet, on opère sur un corps, tel que l'acier très dur et peu ou point ductile, dont l'élasticité se maintient presque jusqu'à la rupture, il est bien clair que la courbe $M\alpha N$ et la droite $M\alpha_1 N$ se confondent sensiblement l'une avec l'autre et que, pour ces matières exceptionnelles, on a à peu près $M = M_1$, et $R = R_1$ (1). Les nombreuses expériences faites par divers expérimentateurs et en particulier par Bauschinger

(1) A ce cas particulier il faudrait évidemment joindre celui où la pièce fléchie serait constituée par deux semelles très minces réunies par une âme d'épaisseur négligeable; on n'aurait plus en effet alors que deux simples bandes travaillant d'une manière uniforme l'une à la traction, l'autre à la compression; mais ce cas n'a rien de pratique en raison du déversement qui se produirait bien avant la rupture des semelles.

confirment entièrement les divers résultats théoriques qui viennent d'être indiqués.

Comme on le remarquera, la courbe $M \propto N$ qui donne la charge par millimètre carré t , d'une fibre en fonction de la distance e (charge qui, pour une valeur donnée du rayon de courbure ρ de la ligne neutre, est proportionnelle à l'allongement ou au raccourcissement de cette fibre) ne doit pas différer beaucoup de celles qu'on relèverait dans des essais directs de traction et de compression. Si l'on suppose ces dernières connues, l'intégrale

$$M_t = \int t \cdot a \cdot e \cdot de$$

peut s'évaluer facilement puisque c'est le moment par rapport à l'axe $\alpha\alpha'$ de la surface dont les ordonnées seraient e et les abscisses $t \cdot a$; sa dé-

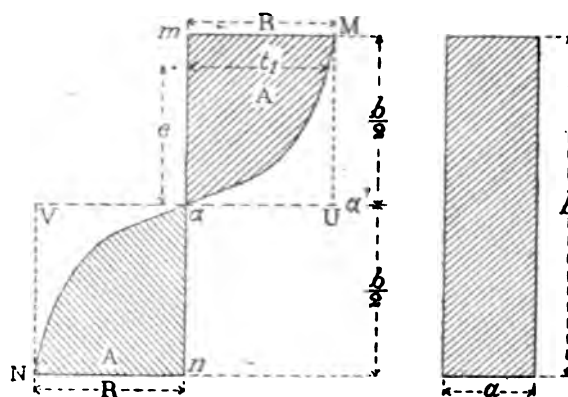


Fig. 186

termination graphique ne présente aucune difficulté. Examinons en particulier le cas où l'épaisseur a de la section transversale considérée est constante et où les deux courbes αM , αN relatives à la traction et à la compression sont supposées les mêmes ; on a alors

$$M_t = a \int t \cdot e \cdot de$$

ou bien en appelant A chacune des aires curvilignes indiquées par des hachures sur la figure 186,

$$M_t = 2 a \times \text{Moment de l'aire } A$$

Or, en vertu de la forme des courbes de traction et de compression, on est certain qu'on a

Moment de l'aire $\Lambda < \text{Moment du rectangle } m M U \alpha$

$$< R. \frac{b}{2} \times \frac{b}{4}$$

On peut donc écrire

$$M_1 < \frac{1}{4} R. a. b^2$$

D'autre part la formule habituelle de la flexion, dont il a été question plus haut,

$$M = \frac{R. I}{\nu}$$

donne, dans le cas actuel,

$$M = \frac{1}{6} R. a. b^2$$

On déduit de là

$$\frac{M_1}{M} < \frac{3}{2}$$

$$M_1 < \frac{3}{2} M$$

ou, ce qui revient au même d'après ce qui précède,

$$R_1 < \frac{3}{2} R$$

Le nombre R_1 , déduit de la formule $M_1 = \frac{R_1 \cdot I}{\nu}$ pourrait donc s'élever à près de 1,5 fois la charge de rupture R déterminée par des expériences directes de traction ou de compression, sans toutefois atteindre ce chiffre. Or l'expérience prouve qu'il le dépasse parfois; cela tient, comme l'a fait si justement remarquer de Saint-Venant, à ce que les courbes αM et αN relatives à l'extension et à la compression diffèrent souvent notablement l'une de l'autre. Dans le cas de la fonte de fer par exemple, qui résiste beaucoup mieux au second genre d'efforts qu'au premier, les

courbes en question peuvent affecter une forme telle que celle de la figure 187; la ligne des fibres neutres ou invariables $\alpha\beta$ ne passe plus alors par le milieu de la hauteur mn , mais en un point α tel qu'on ait,

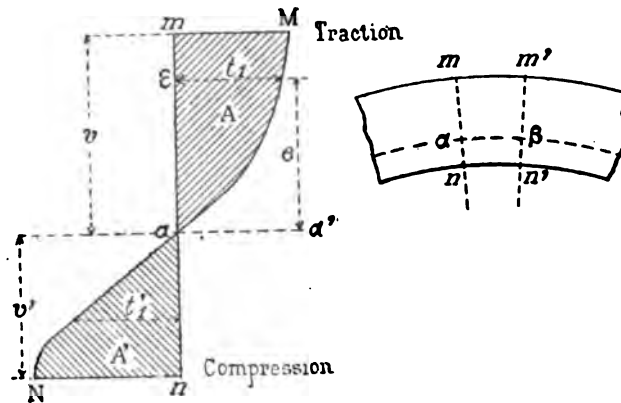


Fig. 187

en écrivant que les forces intérieures projetées sur $\alpha\beta$ donnent une somme nulle ou sensiblement nulle (§ 43 et 44),

$$\int t_1 \cdot d\omega + \int t'_1 \cdot d\omega = 0$$

(t'_1 étant considéré comme négatif), ou bien, si l'épaisseur a est constante,

$$a \cdot \int t_1 \cdot de + a \cdot \int t'_1 \cdot de = 0$$

ou bien encore

$$\text{aire } A = \text{aire } A'$$

A mesure que la fatigue de la pièce augmente, la fibre neutre s'éloigne donc de celle qui est en danger de se rompre; il résulte de là un accroissement notable des bras de levier e , et par suite, du moment fléchissant M , auquel le corps peut résister sans se briser dans le point le plus exposé. Des faits analogues ont été constatés à diverses reprises sur des barreaux de fer et d'acier; il a été trouvé par exemple, sur un échantillon à section carrée de ce dernier métal, des variations de longueur de 30 % dans la partie la plus étendue mM et de 17,5 % seulement dans l'autre nN , ce qui place le point α aux $\frac{30}{30+17,5} = \frac{63}{100}$ de la hauteur;

dans un autre essai les chiffres ci-dessus ont été de 39 et 26 %⁽¹⁾. Cette nouvelle cause, jointe à celle que nous avons signalée tout à l'heure, influe d'une manière sensible sur la valeur de l'expression empirique

$$R_1 = M_1 \cdot \frac{\nu}{I}$$

et explique pourquoi R_1 peut dépasser, dans les pièces à section rectangulaire, le maximum $\frac{3}{2} R$ que nous avons d'abord été conduit à lui assigner. Des essais de ce genre entrepris sur des barres d'acier ont donné pour le rapport $\frac{R_1}{R}$ des nombres variant de 1,02 à 1,80 et même à 2,00 et un peu au-delà, ce qui concorde assez bien avec les considérations théoriques qui précèdent⁽²⁾.

Comme M. Considère l'a fait remarquer avec beaucoup de raison, la ductilité de l'acier sur lequel on opère a une importance considérable sur le phénomène; grâce à cette faculté d'un grand allongement extrême, les fibres les plus étendues m peuvent en effet, sans se rompre, continuer à s'étirer pendant longtemps; la ligne $\alpha\beta$ des fibres invariables s'éloigne alors de plus en plus du centre sans déterminer cependant la disjonction de la matière, et, comme nous l'avons vu tout à l'heure, le moment fléchissant M_1 augmente d'une manière sensible; c'est effectivement avec des aciers extra-doux qu'on a obtenu pour le rapport $\frac{R_1}{R}$ des chiffres égaux et mêmes supérieurs à 2.

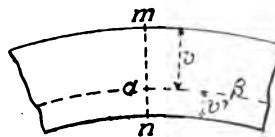


Fig. 188

§ 136. — Détermination pratique du moment nécessaire pour produire la rupture par flexion.

Le calcul du moment fléchissant M_1 nécessaire pour briser une pièce donnée, ayant une section de forme quelconque, exigerait la connais-

(1) Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1^{er} semestre 1885, p. 615 et 618.

(2) Voir les *Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils*, année 1879, p. 644, et les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1^{er} semestre 1885, p. 610 et 620.

sance complète des courbes d'allongement et de compression dont nous avons parlé au paragraphe précédent et au sujet desquelles on ne sait en général rien de parfaitement précis; aussi est-il utile d'avoir à sa disposition un autre moyen pour déterminer le moment en question; on peut pour cela s'appuyer sur les considérations suivantes :

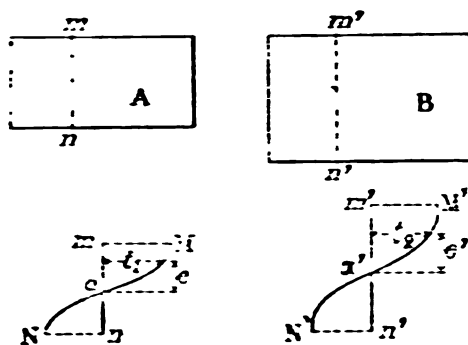


Fig. 189

Soient A et B deux poutres de *formes semblables* et de même matière, supposées rendues chacune au moment où la rupture va se produire aux points m et m' . Traçons, comme tout à l'heure, les courbes d'allongement et de compression dans lesquelles les charges par millimètre carré mM , $m'M'$ sont évidemment égales puisque ce sont celles qui, de part et d'autre, provoquent la séparation des molécules; nous avons alors, en appelant M_1 et M_2 les deux moments fléchissants de rupture,

$$M_1 = \int t_1 \cdot a \cdot e \cdot de$$

$$M_2 = \int t_2 \cdot a' \cdot e' \cdot de'$$

D'autre part nous avons vu (§ 135) que les sections transversales primitivement planes et normales ne cessent pas de l'être sensiblement, et par conséquent les allongements et les raccourcissements peuvent être considérés comme proportionnels à leurs distances à l'axe neutre z et z' ; dans ces conditions, il est clair que les courbes M_1zN , $M_2z'N'$, qui ont des ordonnées extrêmes égales $mM = m'M'$, ne diffèrent l'une de l'autre que par les proportions des abscisses e , de sorte que, pour les points homologues des deux sections transversales, on a $t_1 = t_2$; le rapport $\frac{M_2}{M_1}$ est donc égal à celui des produits $a \cdot e \cdot de$, $a' \cdot e' \cdot de'$ qui sont évidemment

entre eux comme les cubes des dimensions homologues. On a donc, en appelant γ le rapport de similitude,

$$\frac{M_2}{M_1} = \gamma^3$$

De là découle immédiatement la règle suivante: étant donnée une poutre B pour laquelle on a besoin de connaître le moment fléchissant M_2 capable de déterminer la rupture, on construira, à une échelle arbitraire $\frac{1}{\gamma}$, un modèle de la pièce en question et on déterminera expérimentalement son moment de rupture M_1 en le plaçant dans les mêmes conditions que la poutre B; M_1 étant ainsi connu, on en déduira immédiatement M_2 par la relation

$$M_2 = M_1 \cdot \gamma^3$$

et le problème proposé sera résolu à condition qu'il y ait réellement identité de matière entre le petit modèle et la pièce B.

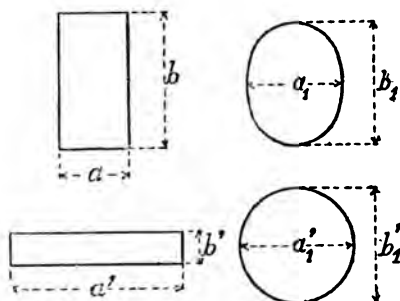


Fig. 190

Comme l'a montré de Saint-Venant, la proposition qui précède est susceptible d'une plus grande généralité: supposons en effet que les poutres considérées A et B aient des sections transversales telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre en amplifiant ou en réduisant dans deux rapports différents γ et δ les ordonnées a et les abscisses b perpendiculaires à la ligne des fibres invariables, on a encore $t_1 = t_2$ et comme

$$\frac{a}{a'} = \gamma \quad \frac{e \cdot de}{e' \cdot de'} = \delta^2$$

on en conclut

$$\frac{M_2}{M_1} = \gamma \cdot \delta^3$$

Cette formule est susceptible de nombreuses applications dans la pratique; elle montre par exemple que la rupture de deux barres à sections rectangulaires est proportionnelle à leurs largeurs et au carré de leurs hauteurs. La même relation est applicable à deux ellipses et en général à toutes les surfaces qui peuvent se transformer l'une dans l'autre en multipliant les abscisses et les ordonnées par deux coefficients numériques quelconques.

§ 137. — Détermination pratique du moment nécessaire pour produire la rupture par torsion.

Lorsqu'une tige cylindrique droite à base circulaire est soumise à un couple de torsion, ce dernier donne lieu, dans chaque section transversale, à des glissements nuls au centre et maximum à la surface (§ 88); par suite de cette répartition inégale des efforts élastiques il se produit, lorsque la limite d'élasticité est dépassée en quelques points, des phénomènes analogues à ceux que nous avons signalés pour la flexion (§ 135) : les molécules de la région centrale, qui n'ont à supporter qu'une faible charge, forcent celles de la surface à retourner, malgré elles, vers leurs positions premières. On doit donc constater, comme précédemment, une augmentation plus ou moins forte dans les charges par

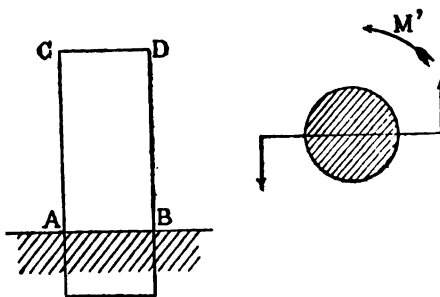


Fig. 191

millimètre carré qui correspondent l'une au commencement des déformations permanentes appréciables, l'autre à la rupture : ces prévisions sont

confirmées par l'expérience. Il résulte de là que les formules que nous avons obtenues dans l'étude de la torsion en supposant que l'élasticité n'est altérée en aucun point ne peuvent servir à calculer le moment nécessaire pour produire ce genre de rupture.

Pour arriver pratiquement à cette détermination, supposons que le cylindre considéré ABCD soit rendu au moment où la rupture va commencer, de telle sorte qu'à la surface le glissement ait la valeur maximum τ à partir de laquelle se produit la désorganisation de la matière dont le corps est formé; si l'on appelle M' le moment correspondant et q l'effort de cisaillement par millimètre carré qui se produit, à une distance e du centre, sur un petit élément $d\omega$, on a évidemment

$$M' = \int q \cdot d\omega \cdot e$$

Pour un autre cylindre de diamètre différent et de même matière, qui se trouve arrivé, comme le précédent, à l'instant où la rupture va se produire, on a

$$M'_1 = \int q' \cdot d\omega' \cdot e'$$

En nous plaçant dans le même ordre d'idées que pour la flexion (§ 136), on est amené à reconnaître que, en raison de la similitude des deux surfaces considérées, les glissements se répartissent de la même manière dans leur étendue et, comme ils sont nuls l'un et l'autre au centre avec la même valeur à la surface, on admettra facilement qu'ils sont égaux dans les points homologues des deux sections. En d'autres termes, dans les deux expressions ci-dessus, on a $q = q'$; le rapport $\frac{M'_1}{M'}$ est donc le même que celui des expressions $d\omega' \cdot e'$ et $d\omega \cdot e$, c'est-à-dire qu'en appelant d et d' les diamètres des deux cylindres, on a

$$\frac{M'_1}{M'} = \frac{d'^3}{d^3}$$

Les moments de rupture sont donc proportionnels aux cubes des diamètres; on déduit immédiatement de là le moyen d'obtenir le moment M'_1 après avoir préalablement fait une expérience de rupture sur un cylindre de petit diamètre d fait avec la même matière que le corps considéré.

Le processus qui provient de la pratique pratique qui en découle
est le processus de mouvement à des positions fixes à bases circu-
laire dans les cas à des lignes de mouvement semblables dont les
sens sont opposés et dont affectent une forme quelconque : les
lignes d'oscillation de semblable mouvement que le rapport de leurs
mouvements est inverse et même que pour les cas de leurs dimen-
sions sont égales.

Les résultats qui sont dus aux recherches de de Saint-
Simon sur les cas de la pratique et la détermination du
mouvement des corps soumis à des effets de torsion est un
travail qui a été accompli et publié et sera dans toutes
les langues.

CHAPITRE IX

**SOLIDES D'ÉGALE RÉSISTANCE.
SOLIDES DE CHARGE UNIFORME.**



SOLIDES D'ÉGALE RÉSISTANCE

§ 138. — Avantages que présentent les solides d'égalé résistance.

Un corps étant soumis à des efforts de traction, de compression, de flexion ou de torsion, nous avons appris à calculer la charge R de la fibre la plus fatiguée dans chaque section transversale; il y a évidemment intérêt, au point de vue de la légèreté et par suite de l'économie, à faire en sorte que, dans les diverses sections, cette charge maximum R atteigne au même moment la plus grande valeur possible compatible avec la sécurité de la construction. Quand cette condition est remplie, on dit que le solide est d'*égale résistance*.

Les solides d'égalé résistance sont avantageux non seulement au point de vue de la légèreté et de l'économie, mais aussi sous le rapport de la résistance aux actions dynamiques: prenons par exemple une poutre de section constante, encastree en AB et soumise à son extrémité à une force normale P ; diminuons ses sections transversales depuis AB jusqu'en CD , de telle sorte que la valeur de R déduite de l'équation $R = P \cdot l \cdot \frac{v}{I}$ soit égale, sur toute la longueur de la pièce, à la charge de sécurité admise en pratique; nous aurons alors, un solide d'égalé résistance capable de supporter le même poids P que précédemment, mais prenant évidemment une flèche plus grande que le corps primitif et susceptible par conséquent d'absorber, en se déformant, une force vive ou un travail plus grands. En d'autres termes, dans le cas considéré, la poutre d'égalé résistance, tout en étant plus légère que l'autre, lui est équivalente au point de vue des efforts statiques de flexion, mais résiste mieux qu'elle aux actions dynamiques parce qu'elle fléchit davantage.

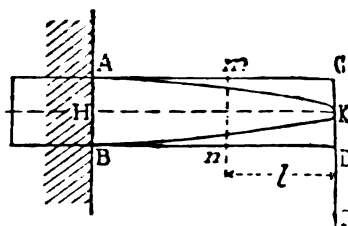


Fig. 192

La résistance que peut offrir un corps (sans que sa densité soit prise en compte) augmente mal à propos les dimensions de ce corps. On explique bien comment il se fait que, pour une construction en essayant de la faire plus forte dans la première partie de ce Traité (p. 13), nous en avons

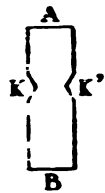


Fig. 193

été un exemple frappant en parlant de tiges entaillées AB qui sont soumises à des efforts de traction, et, sans avoir besoin de citer plus longuement sur ce sujet, nous pouvons dire que toute augmentation de dimensions au delà de ce qui est nécessaire pour supporter avec sécurité les efforts statiques diminue la résistance dynamique. Faire lourd ne constitue pas un gage de sécurité; ce qui importe, c'est de bien proportionner les diverses parties de la construction qu'on projette. Cette remarque s'applique d'ailleurs non seulement à une pièce isolée, mais encore à l'ensemble de toutes celles qui constituent un système plus ou moins complexe.

Nous allons maintenant indiquer les formes qu'il convient de donner à quelques solides d'égalité résistance.

§ 139. — Solides d'égalité résistance à la traction.

1° Cas où on néglige le poids de la tige. — Si la tige soumise à un effort de traction a un poids assez faible pour qu'il ne soit pas nécessaire

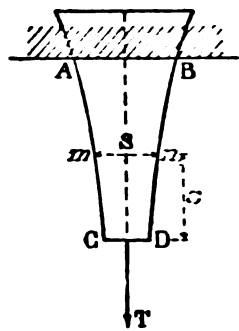


Fig. 194

d'en tenir compte, il suffit évidemment de lui donner une section constante pour qu'elle soit constituée en solide d'égalité résistance. On remarquera d'ailleurs que, dans ce cas, chaque section transversale supporte non seulement la même charge maximum, mais encore la même charge en tous ses points.

2° Cas où on tient compte du poids de la tige. — Lorsqu'il s'agit d'une tige verticale de grande longueur (tige de pompe ou câble d'un puits de mine par exemple), il est nécessaire de tenir compte de son poids. Soit ABCD le solide d'égalité

résistance de densité δ dont nous voulons trouver la forme dans ces conditions; appelons S la surface d'une section transversale quelconque $m n$ et R la charge par millimètre carré que nous voulons lui faire porter. On a

$$R \cdot S = P + \int_0^x S \cdot \delta \cdot dx$$

ce qui donne en différentiant, R étant constant par hypothèse pour toutes les sections,

$$R \cdot dS = S \cdot \delta \cdot dx$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{\delta}{R} \cdot dx$$

et par suite, en désignant par K une constante,

$$\log_n \frac{S}{K} = \frac{\delta}{R} \cdot x$$

$$S = K \cdot e^{\frac{\delta}{R} \cdot x}$$

e étant la base des logarithmes népériens, c'est-à-dire 2,718.

Pour $x = 0$ on doit avoir $R \cdot S = T$, et par conséquent

$$\frac{T}{R} = K$$

d'où pour équation définitive donnant la forme cherchée

$$S = \frac{T}{R} \cdot e^{\frac{\delta}{R} \cdot x}$$

Dans la pratique, au lieu d'adopter le contour résultant de cette relation, on prend une série de liges dont la section, constante pour chacune d'elles, va en augmentant de l'une à l'autre et se calcule de proche en proche avec la plus grande facilité : appelons en effet s, s', s'', \dots les sections successives, l, l', l'', \dots les longueurs correspondantes ; on a

$$R \cdot s = T + s \cdot l \cdot \delta$$

$$R \cdot s' = T + s \cdot l \cdot \delta + s' \cdot l' \cdot \delta'$$

.....

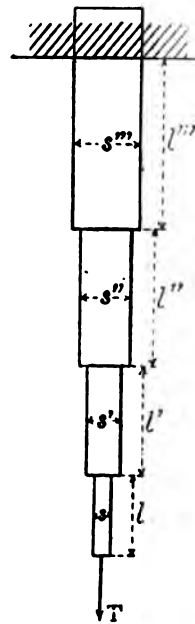


Fig. 195

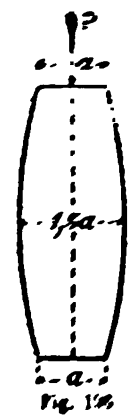
— 30 —

$$v = \frac{P}{2} \frac{x^2}{E I}$$

$$v = \frac{P}{2} \frac{x^2}{E I}$$

Application aux déformations de poutres sur ressorts etc. etc.

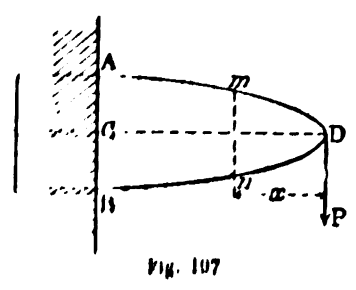
§ 139. — Solides d'égalé résistance à la compression.



Un solide dont la résistance est constante, est d'égalé résistance s'il a une section constante. Dans le cas contraire il tend à se déformer sous la flexion, de sorte que c'est la partie milieu qui fléchit le plus; il est donc clair qu'il doit être renforcé dans cette région. Le calcul de la déformation de sections qui il conviendrait de lui donner est assez compliqué et conduit à ce résultat que, pour un corps plein, la section milieu, supposée semblable à celle des extrémités, doit avoir des dimensions linéaires doubles environ; dans la pratique on se borne en général à les augmenter dans un rapport voisin de celui de 1 à 1,5.

§ 141. — Solides d'égalé résistance à la flexion.

1. Poutre encastree à une extrémité et chargée à l'autre d'un poids P.



Soit ABD une poutre d'égalé résistance encastree en AB et portant à son autre extrémité un poids P; pour une section transversale quelconque m n on a, en adoptant nos notations habituelles,

$$\frac{R \cdot I}{v} = P \cdot x$$

$$\frac{I}{v} = \frac{P}{R} \cdot x$$

La pièce sera d'égal résistance si R est constant, c'est-à-dire si l'on a, en désignant par K une quantité constante,

$$\frac{I}{v} = K \cdot x$$

relation qui peut être satisfaite d'une infinité de manières. Supposons par exemple que les sections transversales soient des rectangles et appelons a et b les deux côtés de celui qui constitue la section mn ; nous avons alors

$$\frac{1}{6} \cdot a \cdot b^3 = K \cdot x$$

équation qui peut, elle-même, donner lieu à une foule de solutions.

1° Imposons-nous par exemple la condition que la largeur a soit constante; nous aurons

$$b^3 = \frac{6K}{a} \cdot x = K' \cdot x$$

Les hauteurs sont les ordonnées d'une parabole ayant pour abscisses les distances à l'extrémité libre D ; d'où le contour ADB de la figure 198.

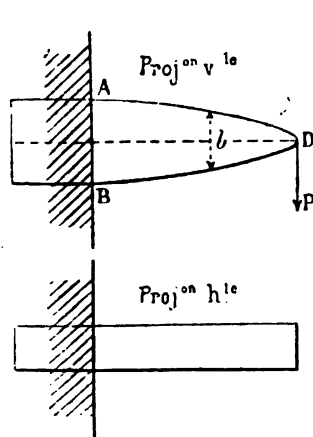


Fig. 198

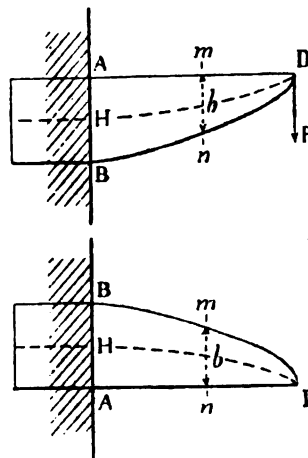


Fig. 199

On le remplace quelquefois par l'un de ceux qui sont représentés par la figure 199, et dans lesquels les mêmes hauteurs b sont portées au-dessous ou au-dessus de l'horizontale AD . Comme l'a fait remarquer M. Résal, cette manière d'opérer est inexacte au point de vue théorique

parce que les diverses sections transversales considérées ne sont pas normales à la fibre moyenne HD, comme le suppose la théorie; mais il est facile de comprendre que l'erreur ainsi commise a, en général, peu d'importance; on peut d'ailleurs en tenir compte en appliquant la règle pratique donnée à ce sujet par M. Léauté (1).

2° Si l'on suppose que ce n'est pas la largeur, mais la hauteur qui est constante, on a

$$a = \frac{6K}{b^3} \cdot x = K' \cdot x$$

de là résulte la forme qui est représentée par la figure 200 et dont nous aurons l'occasion de parler à propos de ressorts de flexion (§ 211). On

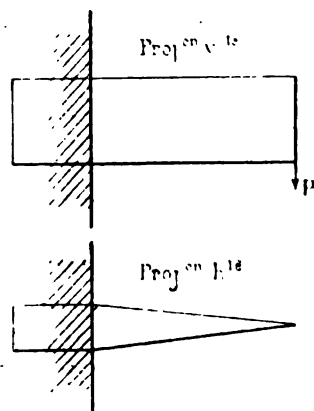


Fig. 200

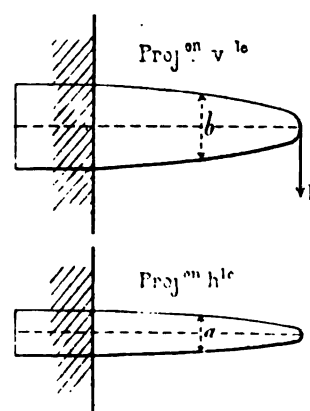


Fig. 201

remarquera que, dans ce cas, la flexion a lieu suivant un arc de cercle puisque

$$\rho = \frac{E \cdot v}{R} = \frac{E \cdot b}{2R} = \text{constante}$$

3° Lorsqu'on se donne la condition $\frac{a}{b} = \text{constante} = K'$, l'équation ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} K' \cdot b^3 &= K \cdot x \\ b^3 &= K'' \cdot x \end{aligned}$$

ce qui donne les deux contours paraboliques de la figure 201.

(1) Voir les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, deuxième semestre 1882, p. 1219.

4° Supposons qu'au lieu d'un rectangle nous ayons pour section un cercle ; alors

$$\begin{aligned} R. \frac{\pi. d^3}{32} &= P. x \\ d^3 &= K. x \end{aligned}$$

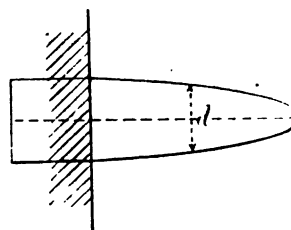


Fig. 202

équation qui donne le contour parabolique de la figure 202.

II. *Pièce encastrée à une extrémité et uniformément chargée.* — Nous avons, dans ce cas, en appelant p le poids uniformément réparti par millimètre courant

$$\begin{aligned} \frac{R. I}{v} &= \frac{1}{2} p. x^2 \\ \frac{I}{v} &= K. x^2 \end{aligned}$$

Cette équation peut être satisfaite d'une infinité de manières :

1° Si, en particulier, la section est rectangulaire, on a

$$\frac{1}{6} a. b^3 = K. x^2$$

de sorte que, si la largeur a est constante,

$$b = K'. x$$

D'où le profil représenté par la figure 203.

2° Si la hauteur b est partout la même

$$a = K'. x^2$$

d'où une forme parabolique.

3° Si on s'impose la condition $\frac{a}{b} = \text{constante} = K'$, l'équation générale devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} K'. b^3 &= K. x^2 \\ b^3 &= K''. x^2 \end{aligned}$$

4° Si on a affaire à une surface de révolution au lieu d'un rectangle, alors

$$\begin{aligned} R. \frac{\pi. d^3}{32} &= \frac{1}{2} p. x^2 \\ d^3 &= K. x^2 \end{aligned}$$

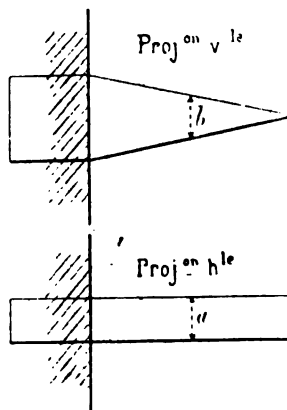


Fig. 203

... et en lieu
... contre
... et

$$\frac{1}{2} = 1$$

$$= \dots$$

... et

§ 74. — Sections où moment de flection est nul.
Formes pratiques de ces solides.

... complète-
... les parties élargies
... de la flexion
... complètement
... atteint ou
... cependant
... moment flectis-
... pour l'effort tran-
... encastree,
... § 74 et 75.
... les pièces étudiées
... aux règles que
... pour les diverses sections, calcu-
... qui se produi-
... mais une
... dans la pratique
... à supposer le cisaillement uniformément réparti et à forcer
... notamment les dimensions ainsi calculées; c'est effectivement

à ce dernier parti qu'on s'arrête quand on prend, comme on le fait assez souvent, la hauteur des parties extrêmes d'une pièce de ce genre égale à environ la moitié de la hauteur maximum et même plus forte encore; d'autres fois on se borne à faire marcher légèrement du côté de l'extrémité libre le contour d'égale résistance de façon à avoir une section suffisamment grande au point d'application de la force. Notons en outre que la longueur de la partie AB qui repose sur les points d'appui doit être assez grande pour qu'il n'y ait ni écrasement, ni même déformation trop prononcée; on la fait souvent égale à la plus grande hauteur h .

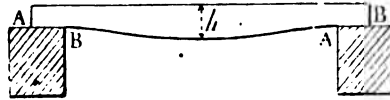


Fig. 204

Pour terminer ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer que les contours curvilignes obtenus précédemment ne sont guère admissibles que pour des pièces obtenues par voie de fusion; pour les autres il est nécessaire d'adopter des formes géométriques plus simples telles que troncs de cônes, troncs de pyramides, prismes tronqués, etc., dans lesquelles les sections extrêmes ont une aire suffisante pour résister à la force qui tend à les cisailer, et, pour qu'on ait une entière sécurité, il convient qu'elles soient tout entières extérieures aux solides d'égale résistance dont nous avons appris à déterminer les formes géométriques exactes. S'il s'agit enfin de poutres en bois, on se gardera bien, sauf dans des circonstances exceptionnelles, de leur faire subir en divers points des réductions d'échantillons qui auraient le grand inconvénient de trancher leur fil, sans que les déchets obtenus soient susceptibles d'être employés utilement.

§ 143. — **Flèches des solides d'égale résistance à la flexion.**

Si nous considérons deux solides ayant les mêmes dimensions dans la section transversale la plus fatiguée et dont l'un est d'égale résistance tandis que l'autre n'a pas subi de réduction d'échantillons, il est clair que le premier, sous l'action des mêmes forces que le second, prend une flèche plus grande. On a en effet, en vertu d'une relation connue (§ 44),

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = M$$

$$\rho = \frac{E \cdot I}{M}$$

Or, dans la poutre d'égale résistance, I a une valeur plus faible que dans l'autre (sauf pour la section de fatigue maximum); ρ est donc plus petit pour une même valeur de M et par suite la flèche est plus forte.

La détermination de la flèche dans les solides d'égale résistance se fera par les procédés généraux qui ont été indiqués au paragraphe 58 pour les poutres droites de forme quelconque. Dans quelques cas simples on peut aussi l'obtenir algébriquement, mais il est nécessaire que le contour de la pièce soit bien celui qui est donné par les équations

d'égale résistance à la flexion et n'ait pas subi, à ses extrémités libres par exemple, l'augmentation de section dont nous avons parlé tout à l'heure (§ 142). Comme cas très simple, prenons celui de la poutre droite de largeur constante encastree à une extrémité et supportant à l'autre une charge normale P ; on a alors pour équation de la fibre moyenne déformée

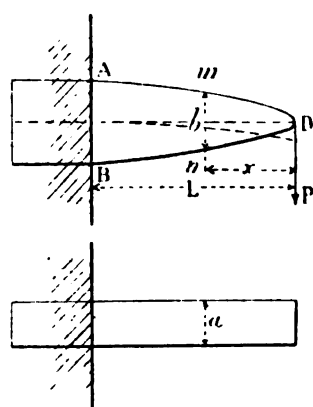


Fig. 205

$$E. I. \frac{d^2y}{dx^2} = P. x$$

$$E. \frac{1}{12} a. b^3. \frac{d^2y}{dx^2} = P. x$$

La largeur a étant supposée constante, la hauteur b est assujettie à la relation (§ 141)

$$R. \frac{I}{v} = P. x$$

$$R. \frac{1}{6} a. b^3 = P. x$$

$$b^3 = \frac{6 P. x}{R. a}$$

L'équation de la fibre déformée est donc

$$E. \frac{1}{12} a \left(\frac{6. P. x}{R. a} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P. x$$

$$E. \frac{d^2y}{dx^2} = 2 R \sqrt{\frac{R. a}{6 P}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ce qui donne en intégrant et en remarquant que, pour $x = L$, on a $\frac{dy}{dx} = 0$ et $y = 0$

$$E. y = 4 R \sqrt{\frac{R. a}{6 P}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \sqrt{L} \cdot x + \frac{1}{3} \sqrt{L^3} \right)$$

Pour avoir la flèche f , nous n'avons plus qu'à faire $x = 0$ dans la relation ci-dessus; on a donc

$$f = \frac{4 R}{3 E} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot a \cdot L^3}{6 P}}$$

Si la poutre, au lieu d'être d'égale résistance, avait partout la même section qu'à l'encastrement, la flèche aurait pour valeur (§ 72)

$$f' = \frac{P \cdot L^3}{3 E \cdot I} = \frac{P \cdot L^3}{3 E \cdot \frac{1}{12} a \cdot b^3}$$

ou bien, en vertu de la relation $b^3 = \frac{6 P \cdot x}{R \cdot a}$,

$$f' = \frac{2 R}{3 E} \sqrt{\frac{R \cdot a \cdot L^3}{6 P}}$$

et par conséquent

$$f' = 2 f$$

La flèche du solide d'égale résistance est double de celle qu'acquiert la poutre de section constante.

Les autres cas se traiteraient d'une manière analogue, seulement l'intégration serait en général beaucoup plus compliquée. Avec une poutre posée sur deux appuis et uniformément chargée, on trouve, en particulier, pour le solide d'égale résistance auquel on donne une largeur constante

$$f' = \text{environ } \frac{4}{3} f.$$

§ 144. — Solides d'égale résistance à la torsion.

Si la pièce est sollicitée par un couple unique situé à l'une de ses extrémités, la forme d'égale résistance est évidemment celle d'un cylindre droit à base circulaire. Dans le cas de couples multiples, le diamètre d d'une section transversale sur laquelle agit un couple M est donné par la relation suivante (§ 91) dans laquelle R''' représente la

charge constante de glissement par millimètre carré qu'on adopte pour les fibres qui fatiguent le plus

$$\frac{R''' \cdot J}{r^3} = M'$$

relation qui donne $\frac{J}{r^3}$ et par suite le diamètre de la section transversale considérée.

SOLIDES DE CHARGE UNIFORME

§ 145. — Définition des solides de charge uniforme.

Nous venons d'étudier la forme qu'il convient de donner aux solides pour que, dans toutes les sections transversales, la fatigue des fibres *les plus chargées* soit la même; il y a évidemment mieux à faire au point de vue de l'économie de matière et nous allons voir maintenant comment, tout en satisfaisant à la condition précédente, on peut en outre faire en sorte que *tous les points de chaque section transversale* supportent précisément cette même charge maximum. Nous donnerons le nom de *solides de charge uniforme* à ceux dans lesquels ce desideratum se trouve réalisé.

§ 146. — Solides de charge uniforme à la traction.

Nous avons toujours admis qu'une force de traction, appliquée à la fibre moyenne d'une tige droite, se répartit d'une manière uniforme dans toutes les sections transversales; les solides *d'égale résistance* à la traction sont donc en même temps des solides de *charge uniforme* et par suite nous n'avons rien de nouveau à dire à leur sujet.

§ 147. — Solides de charge uniforme à la compression.

Quand le solide soumis à une force de compression est très court, il satisfera à la condition de charge uniforme s'il a une section constante. Lorsque au contraire la longueur est assez grande pour qu'il y ait lieu

de prendre en considération les phénomènes de flexion, il est clair qu'on devra donner au corps une section qui soit celle d'un anneau cylindrique de faible épaisseur; le diamètre de ce dernier devra d'ailleurs aller en augmentant depuis les extrémités jusqu'au milieu. Dans la pratique, on pourra adopter un renflement analogue à celui que nous avons admis pour les supports pleins (§ 140).

§ 148. — Solides de charge uniforme à la flexion.

Dans toute section transversale soumise à un effort de flexion, la fatigue augmente à mesure qu'on s'éloigne de la fibre neutre; étant donnée la hauteur maximum H considérée comme admissible, il conviendra donc de séparer la matière qu'on doit employer, en deux parties qu'on

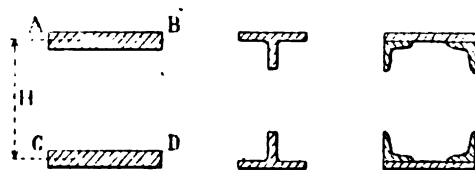


Fig. 206

éloignera l'une de l'autre à la distance H . On peut d'ailleurs varier de beaucoup de manières le système auquel on aura recours et faire usage par exemple de deux rectangles AB , CD , de cornières, de fers à T, de tôles armaturées de diverses manières, etc; il s'agira ensuite de réunir ces deux parties l'une avec l'autre de façon à en faire un tout solidaire et à les faire travailler simultanément comme on le suppose dans la théorie de la flexion. De nombreux dispositifs ont été imaginés dans ce but; l'un des plus simples consiste à faire usage de tôles pleines verticales qu'on relie par des cornières ou par tout autre moyen aux deux semelles supposées horizontales. Ces dernières se calculeront de façon à faire équilibre, par leur allongement et leur compression, au moment fléchissant; en appelant Ω leur section totale et H la distance de leurs centres de gravité, on a sensiblement, en les supposant égales (§ 65),

$$\text{Moment d'inertie } I = \Omega \cdot \frac{H^2}{4}$$

et par suite

$$R \cdot \frac{\Omega \cdot H}{2} = \text{Moment fléchissant } M$$

Si on veut opérer d'une manière plus rigoureuse, on peut, au lieu de $\Omega \cdot \frac{H^2}{4}$, prendre le moment d'inertie exact ; on n'y fera figurer que la matière contenue dans les semelles. Quant à l'âme, on la calculera comme résistant seule à l'effort tranchant parce que ce dernier, par suite de sa répartition inégale dans chaque section transversale, est nul à la fibre supérieure et à la fibre inférieure ; nous nous sommes étendu avec détails sur ce sujet aux paragraphes 50 et 51, et il est inutile par conséquent d'y revenir.

L'épaisseur à laquelle le calcul conduit ainsi pour l'âme est généralement très faible, de sorte qu'on est souvent obligé de l'augmenter pour ne pas avoir des tôles trop minces que le moindre choc percerait ou que l'oxydation rongerait de suite. Malgré cet accroissement d'échantillons, l'âme serait parfois sujette à se voiler rien que par le poids de la semelle supérieure ; les forces de flexion pourraient également produire cet effet dans la partie comprimée ; c'est pourquoi on a soin de mettre l'âme double, comme cela se fait pour les ponts métalliques et d'autres constructions du même genre. Cette précaution n'est pas d'ailleurs toujours suffisante et, pour éviter le gauchissement dont nous avons déjà parlé (§ 69), on fait un fréquent usage de cornières verticales légères rivées sur chaque âme et allant d'une semelle à l'autre.

Les poutres à âmes pleines constituées comme nous venons de le dire sont dans d'excellentes conditions au point de vue de la résistance ; leur construction est facile ainsi que leur entretien ; on doit seulement avoir soin, pour rendre le rivetage possible, de pratiquer des évidements dans les âmes quand cette opération ne peut se faire par l'extérieur ou que les poutres n'ont pas des dimensions assez grandes pour permettre d'avoir accès dans leur intérieur. Nous verrons plus tard (§ 176) que ce système de poutres à âmes pleines n'est inférieur à aucun autre au point de vue de la légèreté ; il y aurait donc lieu de l'employer d'une manière courante si son aspect massif ne le faisait rejeter de la plupart des grandes constructions et s'il n'avait en outre l'inconvénient de donner trop de prise au vent. On conçoit cependant que, dans certains cas où la nécessité de la légèreté domine avant tout, il puisse constituer une excellente solution du problème des poutres soumises à de grands efforts de flexion.

Il peut sembler avantageux, au premier abord, pour réaliser des économies de poids, d'accroître indéfiniment la hauteur H puisque, pour un même moment d'inertie I , la section Ω des semelles est inversement proportionnelle à H^2 en vertu de la relation

$$\Omega \cdot \frac{H^2}{4} = I$$

mais il est à remarquer qu'en augmentant H on fait varier dans le même sens la hauteur de l'âme dont l'épaisseur ne peut, pour les raisons que nous venons de donner, être réduite indéfiniment. On comprend donc qu'à partir d'un certain point on perde plus qu'on ne gagne, et c'est effectivement ce que confirme la pratique. D'après un usage généralement suivi, la hauteur en question varie entre le $\frac{1}{10}$ et le $\frac{1}{12}$ de la portée et elle s'abaisse parfois jusqu'au $\frac{1}{8}$; quant à la largeur, elle ne doit pas être inférieure aux 0,65 environ de la dimension précédente afin que la poutre ait une assiette suffisante sur ses supports.

Si le moment fléchissant n'est pas constant sur toute la longueur de la pièce, il est nécessaire, pour la rendre aussi légère que possible, de faire en sorte que l'expression $R \cdot \frac{1}{v}$ aille en diminuant à partir de l'endroit le plus chargé de façon à être juste égale, en chaque point, au moment fléchissant qui sollicite la section considérée. Cette diminution peut être faite de diverses manières, soit en diminuant Ω et en gardant H constant, soit en faisant l'opération inverse, soit enfin en combinant entre elles ces deux solutions. La première donne évidemment des semelles plus légères que la seconde, mais elle peut conduire à des âmes plus lourdes si l'épaisseur de ces dernières ne peut être pratiquement aussi petite que l'indique le calcul des efforts tranchants; malgré cela la poutre à hauteur constante est généralement plus légère que celle à âme courbe ayant même hauteur maximum; elle est en outre plus raide, c'est-à-dire que, sous l'action des mêmes forces, elle prend moins de flèche. On a en effet pour une section transversale quelconque (§ 44)

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = \frac{R \cdot I}{v}$$

$$\rho = \frac{E}{R} \cdot v$$

Pour une même valeur de R , ρ varie donc comme v , c'est-à-dire comme la hauteur de la poutre dans le cas qui nous occupe, et par suite, toutes choses égales d'ailleurs, la plus haute est celle qui se courbe le moins.

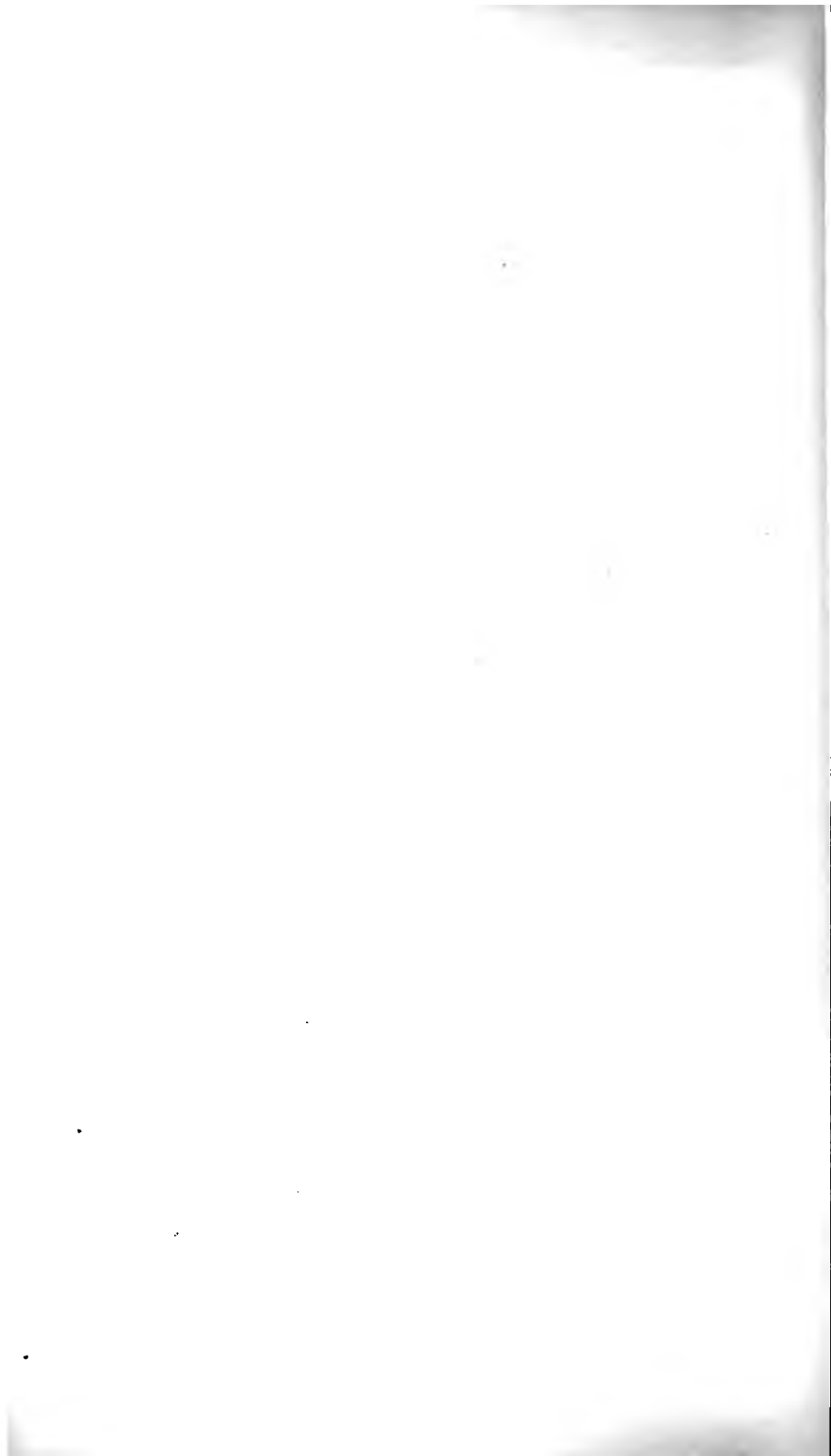
§ 149. — Solides de charge uniforme à la torsion.

Pour avoir un solide de charge uniforme soumis à un effort de torsion, il faut évidemment faire usage d'arbres creux minces. Si l'on n'a qu'un moment unique de torsion, la forme cherchée est celle d'un cylindre; dans le cas contraire, il y a lieu de faire varier le diamètre de telle sorte que la charge par millimètre carré soit constante d'une section à l'autre (§ 91).



CHAPITRE X

SYSTÈMES ARTICULÉS



SYSTÈMES ARTICULÉS

§ 150. — Définition des systèmes articulés.

Considérons un réseau de tiges ou de barres élastiques rectilignes, situées toutes dans le même plan et réunies les unes aux autres au moyen d'*articulations sans frottement*, et supposons que ce système soit soumis à des forces en nombre quelconque qui, en y comprenant les réactions des points d'appui (1), soient contenues dans le plan en question, aient leurs *points d'application situés sur les diverses articulations* et se fassent équilibre; nous admettons enfin que le poids de chaque tige est assez faible pour ne produire sur celle-ci ni flèche sensible, ni fatigue dont il soit utile de tenir compte. Dans ces conditions une barre telle que GS (Fig. 207), étant considérée à part, n'est soumise de G en S à aucune force extérieure et par suite à aucun moment fléchissant; la résultante R des efforts qui s'exercent à la charnière G est donc forcément dirigée suivant GS (2). En d'autres termes les diverses barres de l'ensemble considéré sont uniquement soumises à des forces de traction ou de compression dirigées *suitant leur longueur*; nous admettrons d'ailleurs que la charge des pièces comprimées a une valeur inférieure à celle qui doit être considérée comme dangereuse en les exposant à fléchir et que nous avons calculée précédemment (§ 112).

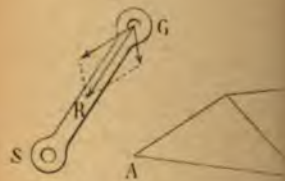
Le système dont nous nous occupons étant ainsi complètement défini, nous allons chercher quelles dimensions il convient d'adopter pour

(1) Nous supposons en outre que les points d'appui, articulés ou en forme de couteaux, sont au nombre de deux seulement et que, quand le système vient à se dilater ou à se déformer, ils peuvent, au besoin, s'éloigner ou se rapprocher légèrement l'un de l'autre; dans ces conditions, les réactions de ces points d'appui se déterminent, comme précédemment, par la Statique seule et doivent par conséquent être considérées comme connues aussi bien que les forces extérieures données.

(2) Nous verrons plus loin (§ 157) comment les choses se passent quand il y a une ou plusieurs forces extérieures appliquées en divers points des barres *autres que les articulations*.

chacune des tiges qui le
résister avec sécurité à de
en particulier qu'il est facile
charge uniforme, c'est-à-dire
porte par millimètre carré
nature. Cette étude a été
nous allons utiliser les procédés
vue (1).

Imaginons un système
de telle sorte qu'on ne pu
posent *sans qu'il cesse d'être*
ne contenant pas de lignes



est représenté en ABC, t
lignes qu'il n'est nécess
de trop, MP ou NQ par e
lation; il faut deux con
définir un point et par
d'autre part trois condi
d'une figure dans son pl
ou longueurs données de
système sans qu'aucune
En d'autres termes, *m* é

il n'y a pas de lignes sur

il existe *K* lignes sural
figure géométrique con

(1) Voir la *Statique graphique*

soit soumise à une charge de *p* kilo-
appelons *L* la longueur de chacune de
de ces dernières. Les réactions verti-

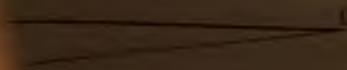


Fig. 55

les appuis A et B sont égales à $\frac{1}{2} n \cdot p \cdot L$.
les charges aux divers points de sub-
soumis chacun à une force *p* · *L*.
et B, ils recevront chacun de ce fait une
réaction totale qui leur est définitivement

$$\frac{1}{2} p \cdot L = \frac{1}{2} (n - 1) \cdot p \cdot L \quad (1)$$

considérer la poutre Bollmann comme
une série de systèmes articulés chargés
conséquent nous obtenons de suite les



elles sont appliquées à la poutre (§ 170), sans oublier, bien
 les réactions $\frac{1}{2} n. p. L$ réellement exercées par les deux points
 à remarquer qu'avec le dispositif Bollmann chaque système
 travaille indépendamment des autres et n'a aucun effort à
 si sa contrefiche n'aboutit pas à l'un des points d'application
 préalablement concentrées aux points de subdivision. En
 dans le cas d'une charge roulante les diverses armatures
 successivement en travail les unes à la suite des autres, chacune
 supportant à un moment donné toute la charge, puis revenant
 C'est là évidemment un inconvénient du dispositif que nous
 d'étudier.

§ 174. — **Poutre armée du système Fink.**

position des armatures est représentée par la figure 257 : on
 semelle AB en deux parties égales au point C et on lui applique
 formée de la contrefiche C C' et des tirants AC', BC'. Chacune
 est elle-même subdivisée en deux autres sur lesquelles on



FIG. 257

tre entière, et on continue d
 les subdivisions assez cou
 être considérés comme
 réparti et, co
 ints d'abo
 est appl
 25

cet allongement virtuel (positif ou négatif) de l , on voit que, dans un changement de forme, les forces extérieures sont les seules qui ont lieu à un travail et ce dernier peut facilement s'évaluer en construisant graphiquement la nouvelle figure qu'affecte le système lorsque le côté EH a pour longueur $l+dl$, de sorte qu'on a

$$F \times dl = \text{Travail des forces extérieures}$$

équation qui permet de calculer F indépendamment des sections diverses barres ; en d'autres termes, la valeur de F ne dépend que de la constitution géométrique du système. Il est en outre aisé de voir que, si dl et le travail des forces extérieures se trouvent avec le même signe, F correspond à une traction ; dans le cas contraire, par compression que travaille la tige considérée.

En opérant ainsi successivement pour toutes les barres du système articulé, on arrivera à connaître quel est l'effort de traction ou de pression auquel chacune d'elles est soumise et par suite on pourra calculer la section qu'il faut lui donner pour se trouver dans des conditions de sécurité. Rien ne sera plus facile, en particulier, de constituer tout l'ensemble en solide de charge uniforme, puisque l'équation ne contient que la section de la barre à laquelle elle se rapporte. On voit en outre que, le système une fois construit et placé, on peut augmenter ou diminuer à volonté la grosseur ou la nature de la matière de l'une quelconque de ses tiges sans qu'il résulte aucune modification dans les tensions des autres ; c'est là évidemment une propriété précieuse qui donne toute sécurité pour les changements, les réparations ou les consolidations qu'on peut avoir à subir à un système articulé ne contenant pas de lignes surabondantes. Il faut cependant avoir soin de remarquer que, bien que la section de quelques-unes des tiges ne change pas la valeur des efforts exercés, il n'en est pas de même pour les allongements ou les raccourcissements produits, de sorte que la résistance aux effets dynamiques n'est point la même d'un cas à l'autre quoiqu'il y ait toujours égalité au point de vue des efforts statiques : c'est avec la charge uniforme que les variations de longueur et par suite les travaux élémentaires $F \times dl$ sont maximum ; c'est donc ce dernier principe d'égalité de résistance aux efforts en question, est le plus favorable à l'éteindre une force vive donnée ; c'est là un phénomène d'ordre que celui que nous avons mentionné (§ 13) à propos de sections variables soumises à des forces de traction.

bien
points

ystème
effort à
fication
on. En
natures
chacune
evenant
ie nous

257 : on
applique
Chacune
elles on

21

ne peut plus alors être écrite; la Statique est impuissante à déterminer F . Nous nous hâterons d'ajouter que ces cas tout à fait anormaux ne se rencontrent guère que quand on s'efforce artificiellement de les réaliser; on peut d'ailleurs toujours reconnaître leur existence et, dans l'étude qui nous occupe, nous les laisserons absolument de côté (*).

§ 153. — **Calcul des dimensions des barres composant les systèmes articulés sans lignes surabondantes.**

Nous venons de voir comment, en donnant successivement à chacune des barres un allongement virtuel dl , on peut déterminer l'effort F auquel elle est soumise dans le sens de sa longueur. Il est clair d'ailleurs que, pour constituer la nouvelle forme correspondant à la longueur $l + dl$, on peut soit laisser immobile la partie de droite, soit agir de même pour celle de gauche, soit enfin combiner les deux procédés l'un avec l'autre. Au lieu d'opérer de cette façon, il est presque toujours plus simple et plus rapide d'avoir recours à d'autres moyens que nous allons indiquer brièvement.

1° Les forces extérieures appliquées aux diverses articulations du système étant connues, on peut, si deux barres seulement aboutissent à l'une d'elles, A par exemple, décomposer la force extérieure P en

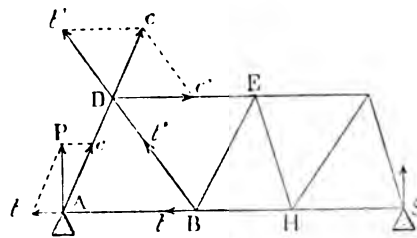


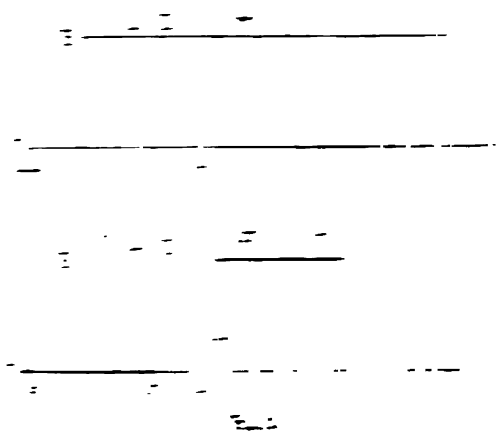
Fig. 209

deux autres t et c dirigées suivant les côtés AB , AD . La compression c se transmettant intégralement en D , on la composera avec la force extérieure appliquée en ce point, s'il y en a une, et, deux barres seulement

(1) Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra consulter la *Statique graphique* de Maurice Lévy, 1^{re} partie, p. 151, et 4^e partie p. 308.

se croisant en 11 au point de vue des axes de symétrie
 f' et c' agissant sur les axes de symétrie de f et c'
 de f et c' de la même manière que les axes de symétrie
 la décomposera sur les axes de symétrie de f et c'
 allant de gauche en droite et de haut en bas
 rapidement en même temps que les axes de symétrie de f et c'
 en arrivant au centre de f et c' les axes de symétrie de f et c'
 qu'il y a égalité entre les axes de symétrie de f et c'
 effectués par les axes de symétrie de f et c'

Si on suppose que les axes de symétrie de f et c' sont
 d'un côté à l'autre de l'axe de symétrie de f et c' les
 barres au point de vue des axes de symétrie de f et c'



Si on suppose que les axes de symétrie de f et c' sont
 d'un côté à l'autre de l'axe de symétrie de f et c' les
 barres au point de vue des axes de symétrie de f et c'

Si on suppose que les axes de symétrie de f et c' sont
 d'un côté à l'autre de l'axe de symétrie de f et c' les
 barres au point de vue des axes de symétrie de f et c'

Si on suppose que les axes de symétrie de f et c' sont
 d'un côté à l'autre de l'axe de symétrie de f et c' les
 barres au point de vue des axes de symétrie de f et c'

Si on suppose que les axes de symétrie de f et c' sont
 d'un côté à l'autre de l'axe de symétrie de f et c' les
 barres au point de vue des axes de symétrie de f et c'



POUTRES DROITES REPOSANT SUR PLUSIEURS APPUIS

§ 158. — Poutres droites reposant sur plusieurs appuis. Indication du problème à résoudre.

Les études que nous avons faites sur les poutres reposant sur deux appuis nous ont montré que la fatigue de ces pièces augmente considérablement avec leur longueur, surtout quand une fraction sensible de leur charge se compose de leur poids et que, par suite, elles se trouvent en partie dans un cas semblable à celui de poutres uniformément chargées. On conçoit donc que, pour de grandes portées, il y ait intérêt à faire usage de supports intermédiaires, même lorsque leur établissement entraîne d'assez grandes dépenses, et telle est en effet la solution adoptée maintenant par les constructeurs qui, depuis déjà pas mal d'années, ont établi un nombre considérable de grandes poutres métal-

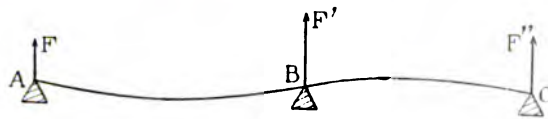


Fig. 222

liques reposant sur plusieurs appuis. C'est de l'étude de ces dernières dont nous allons maintenant nous occuper d'une manière sommaire : la Statique seule ne permettant plus alors de calculer les réactions des points d'appui, il faut, pour résoudre le problème, faire entrer en jeu les déformations produites ; la méthode qui se présente naturellement à l'esprit est celle que nous avons employée déjà bien des fois pour arriver à la connaissance du contour qu'affectent les pièces soumises à des efforts de flexion. Supposons d'abord qu'il s'agisse de trois points d'appui seulement ; nous avons alors à déterminer trois réactions F , F' , F'' auxquelles nous pouvons, en raison de la faible déformation de la pièce, supposer une direction verticale comme celle des forces extérieures. La

Statique ne nous donne que deux équations, une de projection (puisque toutes les forces extérieures sont verticales) et une de moments de sorte qu'il nous faut encore une relation pour nous permettre de calculer les inconnues F , F' , F'' .

Écrivons pour cela, en fonction de ces dernières ainsi que des forces extérieures et d'après la forme habituelle, l'équation différentielle de la fibre déformée de A en B et intégrons-la deux fois, ce qui introduit deux constantes; opérons de même pour la partie comprise de B en C, ce qui fait apparaître deux nouvelles constantes, soit quatre en tout qui, jointes aux trois réactions F , F' , F'' donnent sept inconnues. Or il est facile de voir que nous pouvons écrire sept équations de condition, savoir :

- 1° les 2 équations de la Statique dont il a été question plus haut,
- 2° 2 équations relatives à la fibre déformée AB et exprimant que celle-ci passe par les points A et B,
- 3° 2 équations exprimant que la fibre déformée BC passe en B et C,
- 4° 1 équation exprimant que les deux fibres déformées ont une tangente commune en B.

On a donc bien 7 équations pour 7 inconnues, ce qui détermine ces dernières.



Fig. 223

S'il y a une travée de plus CD, nous aurons une nouvelle réaction F''' ; nous écrirons alors l'équation de la fibre déformée de C en D et, en l'intégrant deux fois, nous aurons 2 autres constantes, soit en tout 3 nouvelles inconnues pour lesquelles nous aurons 3 équations de condition :

- 1° 2 équations exprimant que la fibre déformée passe en C et en D,
- 2° 1 équation exprimant qu'il y a une tangente commune en C.

Il résulte de là que chaque nouvelle travée introduit 3 inconnues et 3 équations de condition, le problème peut donc être considéré comme résolu; mais il importe de remarquer qu'en opérant comme nous venons de le dire on a à intégrer 2 fois n équations différentielles (n étant le nombre des travées) et à résoudre $3n + 1$ équations du premier degré contenant $3n + 1$ inconnues, et ce sont là des opérations extrêmement longues et laborieuses. Le *théorème des trois moments* permet d'arriver beaucoup plus rapidement à la solution du problème qui nous occupe.

§ 159. — Théorème des trois moments.

Soient A, B, C trois appuis consécutifs sur lesquels repose une poutre droite dont la section est constante dans la longueur de chaque travée, et qui est soumise à des forces quelconques normales à sa direction et contenues dans le plan de symétrie de la pièce; nous supposons, par exemple, la poutre horizontale de façon que les forces en question

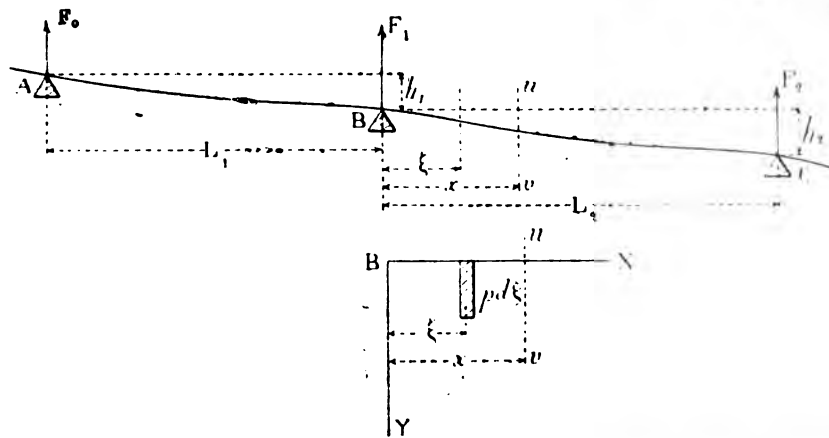


Fig. 224

soient verticales. Appelons M_0 , M_1 , M_2 les moments fléchissants auxquels la poutre est soumise aux points A, B, C; L_1 et L_2 les longueurs des deux travées; I_1 et I_2 les moments d'inertie de leurs sections transversales; h_1 et h_2 les hauteurs verticales dont il faut descendre pour passer d'un appui à celui de droite; F_0 , F_1 , F_2 les pressions (verticales) que la poutre exerce sur ses appuis et par suite les réactions exercées par ces derniers.

Faisons une section transversale quelconque uv dans la travée de droite et appelons m le moment auquel donnent lieu sur cette section, de B en un , les forces extérieures seules qui sont directement appliquées à cette travée BC, non compris les réactions des appuis. Nous avons montré précédemment (§ 56) que, si p est la force verticale par millimètre courant appliquée à la pièce BC, on a (p étant une fonction quelconque de l'abscisse ξ),

$$m = \int_0^n p \cdot (x - \xi) \cdot d\xi$$

et nous en déduisons que la valeur de cette intégrale peut se calculer, pour une abscisse quelconque x , soit par l'analyse, soit par un tracé graphique qui est facile à effectuer dans tous les cas même les plus compliqués. Nous pouvons donc considérer m comme une fonction

de x qui est connue soit par sa valeur algébrique, soit par une courbe figurative.

Ceci posé considérons la travée BC à part et écrivons l'équation différentielle d'équilibre pour la section ax , en appelant T_1 la portion de la réaction F_1 qui est employée à déformer BC (1); nous avons ainsi

$$E \cdot I_x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 - T_1 \cdot x + m,$$

m , étant égale à ce que nous venons de le dire, à $\int_0^x p_x(x-\xi) \cdot d\xi$, et p_x étant la charge par millimètre courant, variable ou non, qui est appliquée à la travée BC.

Passons maintenant à l'équation pour la travée totale, en prenant les

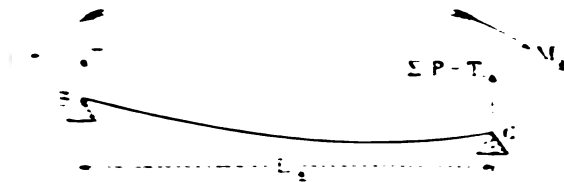


Fig. 215

moments par rapport au point C et en appelant ΣP , la somme des charges uniformément appliquées à la travée BC.

$$M_1 = M_1 - T_1 \cdot L_2 + \int_0^{L_2} p_x(x-\xi) \cdot d\xi$$

(1) Comme il est facile de s'en rendre compte, F_1 est employé à déformer non seulement la travée BC, mais encore celle de gauche; T_1 est la portion de F_1 qu'il faut appliquer en B, avec le moment M_1 , pour que la déformation de la poutre ne change pas. On verra plus loin (§ 163) un exemple de cette décomposition des réactions F exercées par les appuis.

ou bien, en posant $C_2 = \int_0^{L_2} p_2 \cdot (x-\xi) \cdot d\xi$, C_2 étant une *quantité constante* qu'on peut déterminer facilement,

$$M_2 = M_1 - T_1 \cdot L_2 + C_2$$

D'où

$$T_1 = \frac{M_1 - M_2 + C_2}{L_2}$$

et par suite

$$E. I_2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M_1 - \frac{M_1 - M_2 + C_2}{L_2} \cdot x + m_2$$

ce qui donne en intégrant

$$E. I_2 \cdot \left(\frac{dy}{dx} - \varphi_1 \right) = M_1 \cdot x - \frac{M_1 - M_2 + C_2}{2 L_2} \cdot x^2 + \int_0^x m_2 \cdot dx$$

φ_1 étant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x=0$.

Intégrons une nouvelle fois

$$E. I_2 \cdot (y - \varphi_1 \cdot x) = \frac{1}{2} M_1 \cdot x^2 - \frac{M_1 - M_2 + C_2}{6 L_2} \cdot x^3 + \iint_0^x m_2 \cdot dx^2$$

Pour $x=L_2$, on doit avoir $y=+h_2$; l'équation précédente donne donc

$$E. I_2 \cdot (h_2 - \varphi_1 \cdot L_2) = \frac{1}{2} M_1 \cdot L_2^2 - \frac{M_1 - M_2 + C_2}{6} \cdot L_2^3 + \iint_0^{L_2} m_2 \cdot dx^2$$

D'où en réduisant

$$E \left(\frac{h_2}{L_2} - \varphi_1 \right) = \frac{1}{L_2} \left[\frac{1}{3} M_1 \cdot L_2 + \frac{1}{6} M_2 \cdot L_2 - \frac{1}{6} C_2 \cdot L_2 + \frac{1}{L_2} \iint_0^{L_2} m_2 \cdot dx^2 \right]$$

Pour appliquer la même équation à la travée AB (c'est-à-dire pour aller de B en A au lieu de B en C), il suffit évidemment de changer h_2 en $-h_1$, et φ_1 en $-\varphi_1$, M_2 en M_0 , L_2 en L_1 , C_2 en C_1 , p_2 en p_1 et I_2 en I_1 . On a donc

$$E \left(-\frac{h_1}{L_1} + \varphi_1 \right) = \frac{1}{L_1} \left[\frac{1}{3} M_1 \cdot L_1 + \frac{1}{6} M_0 \cdot L_1 - \frac{1}{6} C_1 \cdot L_1 + \frac{1}{L_1} \iint_0^{L_1} m_1 \cdot dx^2 \right]$$

Ajoutons membre à membre les deux relations précédentes; il vient, après réductions,

$$M_0 \frac{L_1}{I_1} + 2 M_1 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_2 \frac{L_2}{I_2} = \frac{C_1 \cdot L_1}{I_1} + \frac{C_2 \cdot L_2}{I_2} - \frac{6}{L_1 \cdot I_1} \iint_0^{L_1} m_1 \cdot dx^2 - \frac{6}{L_2 \cdot I_2} \iint_0^{L_2} m_2 \cdot dx^2 - 6 E \left(\frac{h_1}{L_1} - \frac{h_2}{L_2} \right)$$

C'est l'équation dite *des trois moments* parce qu'elle donne une relation entre les moments qui sollicitent la poutre par le travers de trois appuis consécutifs quelconques (1).

S'il s'agit d'une poutre de dimensions données, l'équation précédente ne contient comme inconnues que les trois moments et elle permet par suite, comme nous le verrons plus loin, d'arriver facilement à leur détermination. Si, au contraire, il s'agit de la faire servir à trouver quelles dimensions il convient d'adopter pour une poutre soumise à des charges connues, l'existence des moments d'inertie I_1 , I_2 complique singulièrement la solution du problème. Pour le résoudre, il faudrait opérer par approximations successives; mais, dans la pratique, la question se simplifie d'une manière notable parce que, sauf des cas exceptionnels, on place les appuis *de niveau*, c'est-à-dire sur une même horizontale; on a alors $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ et il suffit alors de se donner *a priori* la valeur du rapport $\frac{I_1}{I_2}$ pour avoir une relation qui ne renferme comme inconnues que les trois moments considérés.

Une autre remarque importante à faire est la suivante: dans les calculs qui conduisent à l'établissement du théorème des trois moments, on suppose que la section de la poutre est constante dans la longueur de chaque travée; or, en réalité, il n'en est pas ainsi parce qu'on tâche de se rapprocher, au moins dans une certaine mesure de la forme du solide d'égale résistance. Faire usage, dans ces conditions, du théorème des trois moments constitue, à coup sûr, une manière d'agir qui est absolument inexacte au point de vue théorique, mais l'expérience a montré que les longues poutres des ponts métalliques calculées de cette manière ont donné des résultats satisfaisants et on peut par suite l'adopter en toute sécurité (2). Le seul point auquel il soit nécessaire de

(1) Comme nous l'avons déjà dit, la fonction m est connue, par conséquent les intégrales $\iint m \cdot dx^2$ se calculeront facilement par une double intégration soit algébrique, soit graphique.

(2) Il est cependant possible de tenir compte théoriquement de la variation de section de la poutre; on pourra consulter à ce sujet les *Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils*, deuxième semestre 1880, p. 111 (Mémoire de M^r Clerc) et la *Statique graphique* de M^r Maurice Lévy, tome 2. p. 302.

porter une attention toute particulière est de bien veiller à ce que les appuis soient exactement de niveau, comme on le suppose dans la formule simplifiée en faisant $h_1 = 0$ et $h_2 = 0$: il est en effet facile de comprendre qu'une variation de hauteur, même assez faible, des points d'appui puisse être très comparable à la flèche que tend à prendre la poutre sous l'action des charges auxquelles elle est soumise et par conséquent que cette dénivellation soit susceptible de modifier d'une manière extrêmement sensible les résultats qui ont été obtenus en partant d'une hypothèse toute différente. Il pourrait même arriver, dans certains cas extrêmes, que la poutre cessât de porter sur l'un des points d'appui et la réalité n'aurait plus alors qu'un rapport très éloigné avec les calculs théoriques qui seraient censés s'y appliquer. Il faudra donc apporter un soin tout particulier à ce que les appuis soient à des hauteurs telles que la poutre, supposée soustraite à toutes les forces qui la sollicitent, y compris la pesanteur, les touche tous sans se déformer; en d'autres termes le profil suivant lequel sont établis les points d'appui devra être celui qu'aurait la poutre supposée, par exemple, couchée sur le côté. La réalisation de cette dernière condition a paru assez délicate à plusieurs ingénieurs pour les engager à renoncer aux ponts à travées solidaires et à faire usage de poutres coupées à chaque point d'appui, de façon à se trouver alors dans des conditions bien nettement définies; néanmoins des raisons d'économie dans la construction et de facilité dans le montage et la mise en place font presque toujours préférer à ce dernier dispositif celui des travées solidaires qui est particulièrement avantageux pour les grandes ouvertures.

§ 160. — **Cas particulier du théorème des trois moments.**

(Appuis de niveau et poutre uniformément chargée).

Si les trois appuis consécutifs considérés sont de niveau, le terme $6E\left(\frac{h_1}{L_1} - \frac{h_2}{L_2}\right)$ disparaît de l'équation, qui ne contient plus alors les moments d'inertie que sous la forme $\frac{1}{I_1}$. Si l'on suppose en outre que la poutre est uniquement soumise à des charges uniformément réparties mais pouvant

d'ailleurs varier d'une travée à l'autre, la fonction p est alors constante, de sorte qu'on a

$$m = \int_0^x p \cdot (x - \xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

$$\iint_0^L m \cdot dx^2 = \frac{1}{24} p \cdot L^3$$

$$C = \int_0^L p \cdot (x - \xi) \cdot d\xi = \frac{1}{2} p \cdot L^2$$

Par suite l'équation des trois moments devient

$$M_0 \cdot \frac{L_1}{I_1} + 2 M_1 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_2 \cdot \frac{L_2}{I_2} = \frac{p_1 \cdot L_1^3}{2 I_1} + \frac{p_2 \cdot L_2^3}{2 I_2} - \frac{p_1 \cdot L_1^2}{4 I_1} - \frac{p_2 \cdot L_2^2}{4 I_2}$$

ou bien

$$M_0 \cdot \frac{L_1}{I_1} + 2 M_1 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_2 \cdot \frac{L_2}{I_2} = \frac{p_1 \cdot L_1^2}{4 I_1} + \frac{p_2 \cdot L_2^2}{4 I_2}$$

Si l'on suppose en outre qu'on ait $I_1 = I_2$, on a

$$M_0 \cdot L_1 + 2 M_1 (L_1 + L_2) + M_2 \cdot L_2 = \frac{1}{4} (p_1 \cdot L_1^2 + p_2 \cdot L_2^2)$$

C'est la forme simple sous laquelle on se borne à donner souvent l'équation des trois moments, équation qui a été établie d'abord par Bertot, puis par Clapeyron.

§ 161. — Théorème des trois moments dans le cas de forces isolées.

Supposons que la poutre, au lieu d'être sollicitée par des charges uniformément réparties, soit soumise à des forces isolées. Considérons par exemple l'effet produit par la force P_1 appliquée à la deuxième travée à la distance a_1 de l'appui B. Le moment m est alors nul de B en S, et en C il est égal à $P_1 (x - a_1)$; la fonction qui le représente est continue : elle se compose de deux autres, l'une

constamment nulle de B en S, l'autre égale à $P_2 (x - a_2)$. Dans nos calculs nous aurons donc à intégrer séparément chacune d'elles, la première de $x=0$ à $x=a$, l'autre de $x=a$ à $x=L$; les intégrales successives

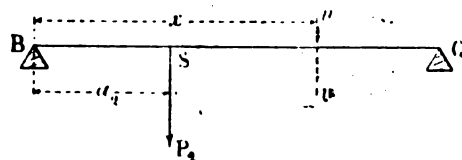


Fig. 227

de la première fonction étant évidemment nulles, nous n'avons qu'à nous occuper de la seconde. Nous avons donc à partir du point S

$$m = P_2 (x - a_2)$$

$$\int m. dx = P_2 \left(\frac{x^2}{2} - a_2. x + \frac{a_2^2}{2} \right)$$

puisque l'intégrale doit être nulle pour $x=a_2$,

$$\iint m. dx^2 = \frac{P_2}{6} (x^3 - 3 a_2. x^2 + 3 a_2^2. x)$$

et par conséquent, en prenant cette intégrale entre les limites a_1 et L_1 ,

$$\iint_{a_1}^{L_1} m. dx^2 = \frac{P_2}{6} (L_1^3 - a_1^3 - 3 a_2. L_1^2 + 3 a_2^2. L_1)$$

Quant à C_1 , sa valeur est

$$C_1 = P_2 (L_1 - a_2)$$

Nous avons donc pour la force considérée P_2 , appliquée à la seconde travée

$$\frac{C_1. L_1}{I_1} - \frac{6}{L_1. I_1} \iint_0^{L_1} m_1. dx^2 = \frac{P_2. a_2}{L_1. I_1} (2 L_1 - a_2) (L_1 - a_2)$$

Supposons également qu'il y ait une force P_1 , appliquée à la première travée AB; elle donnera lieu identiquement aux mêmes calculs, à

condition qu'on remplace a_1 par la longueur BV qui définit sa distance à l'origine commune des coordonnées B. Or, si nous voulons toujours

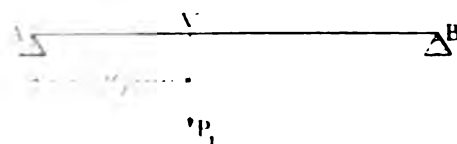


Fig. 228

estimer la position des forces par rapport à l'appui *de gauche* le plus voisin, nous avons $VB=L_1-a_1$, et par conséquent

$$\frac{C_1 \cdot L_1}{I_1} - \frac{6}{L_1 \cdot I_1} \int_0^{L_1} L_1 m_1 dx = \frac{P_1 \cdot a_1}{L_1 \cdot I_1} (L_1^2 - a_1^2)$$

de sorte que l'équation des trois moments est alors

$$M_0 \cdot \frac{L_1}{I_1} + 2 M_1 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_2 \cdot \frac{L_2}{I_2} = \frac{P_1 \cdot a_1}{L_1 \cdot I_1} (L_1^2 - a_1^2) + \frac{P_2 \cdot a_2}{L_2 \cdot I_2} (2 L_2 - a_2) (L_2 - a_2) - 6 E \left(\frac{h_1}{L_1} - \frac{h_2}{L_2} \right)$$

Si il y a un nombre quelconque de forces isolées appliquées aux diverses travées, chacune d'elles donne lieu évidemment à un terme

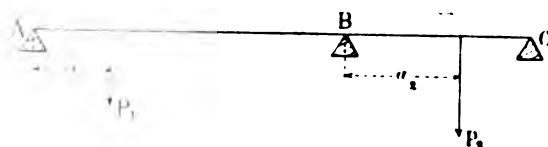


Fig. 229

analogue aux termes ci-dessus en P_1 et en P_2 . Dans le cas enfin où il existe en outre des charges uniformément réparties, on a à ajouter au second membre l'expression déjà trouvée $\frac{1}{4} (p_1 \cdot L_1^3 + p_2 \cdot L_2^3)$.

Si les forces appliquées à la travée donnaient lieu à des intégrations algébriques trop compliquées, on aurait soin, bien entendu, d'employer l'intégration graphique qui ne présente de difficultés dans aucun cas et ne peut donner lieu à aucune erreur quand la courbe figurative des moments (dans lesquels n'entrent pas les réactions des points d'appui) a

été tracée. On pourra par exemple traiter de cette manière le cas où une charge uniformément répartie s'étend sur *une partie seulement* de

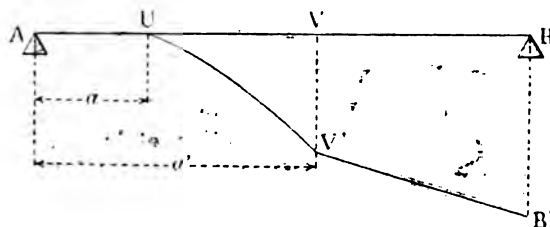


Fig. 230

la longueur de une ou plusieurs travées, de U en V pour fixer les idées : la fonction m a alors les valeurs suivantes :

- de A en U, m est constamment nul,
- de U en V, $m = \frac{1}{2} p (x^2 - a^2)$, parabole UV',
- de V en B, $m = p (a' - a) \left(x - \frac{a + a'}{2} \right)$, ligne droite V'B'.

L'intégration graphique se fera sans difficultés ; on pourrait aussi traiter la question algébriquement.

En résumé nous concluons de tout ce qui précède que nous savons calculer dans tous les cas et par des procédés pratiques la valeur des différents termes qui figurent dans le second terme de l'équation des trois moments.

§ 162. — Application du théorème des trois moments à la recherche du moment fléchissant qui sollicite une section transversale.

Premier cas. — *Les deux extrémités de la poutre ne sont pas encastrées.*

Considérons une poutre droite reposant sur $n + 1$ appuis et supposons d'abord qu'elle ne soit encastrée à aucune de ses extrémités ; les moments extrêmes M_0 et M_n sont alors nuls. Or le théorème des trois moments nous donne $n - 1$ équations distinctes ; nous aurons donc autant de relations que cela est nécessaire pour déterminer les $n - 1$ moments

inconnus et il nous suffira de résoudre $n - 1$ équations du premier degré à $n - 1$ inconnues, tandis que par la première méthode nous en avons $3n + 1$ (§ 159). Le problème se trouve donc considérablement simplifié; malgré cela il donne encore lieu à des calculs un peu longs quand le nombre des travées est considérable et que celles-ci ont des longueurs variables. En pratique, on adopte généralement, pour les longues poutres qui constituent les ponts métalliques, des ouvertures constantes de travées, sauf pour la première et la dernière qu'on fait en général un peu moins grandes mais cependant toutes deux égales entre elles. Ce dispositif facilite beaucoup les calculs en permettant des simplifications qu'on trouvera exposées dans les ouvrages spéciaux (⁴), mais qui ne rentrent pas dans le cadre de ce Traité.

Connaissant les moments correspondant à chacun des points d'appui, on calcule alors les valeurs des portions T des réactions des points d'appui par la formule (§ 159)

$$T_k = \frac{M_k - M_{k+1} + C_{k+1}}{L_{k+1}}$$

C_{k+1} étant égal, comme nous l'avons vu, au moment par rapport au point S (Appui $k + 1$) de toutes les forces extérieures (non comprises les



Fig. 231

réactions des points d'appui) appliquées à la travée VS . La quantité C_{k+1} a d'ailleurs pour expression (§ 159)

$$C_{k+1} = \int_0^{L_{k+1}} p_{k+1} (x - \xi) d\xi$$

et elle se calculera par l'analyse ou par une intégration graphique.

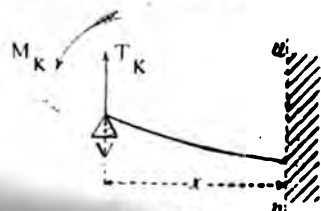


Fig. 232

Les valeurs de T_k, T_{k+1}, \dots étant ainsi connues, on déterminera le moment fléchissant M correspondant à une section quelconque uv par la relation (§ 159)

$$M = M_k - T_k \cdot x + \int_0^x p_{k+1} (x - \xi) d\xi$$

particulier, consulter la *Résistance des matériaux* de Bresse et celle de

dans laquelle $\int_0^x p_{k+1} (x - \xi) d\xi$ se calculera comme l'intégrale précédente. Les valeurs ainsi obtenues pour les moments fléchissants M relatifs aux diverses sections transversales pourront alors être avantageusement représentées par un tracé graphique.

Rien ne sera plus facile ensuite que de calculer l'effort tranchant Q correspondant à une section transversale quelconque uv , soit en ayant recours à l'expression analytique $Q = -\frac{dM}{dx}$, soit en menant une tangente à la courbe des moments que nous venons d'apprendre à tracer.

On obtient également sans difficulté les réactions exercées par les points d'appui : considérons par exemple l'appui V de rang k : la pous-

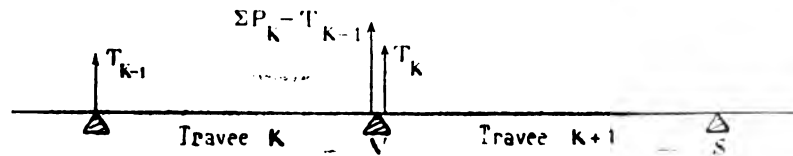


Fig. 233

sée totale qu'il exerce de bas en haut est égale, comme nous l'avons déjà dit (§ 159), au terme T_k (relatif à la travée $k+1$) augmenté de la quantité analogue exprimant la pression exercée par la travée k sur le même appui V , c'est-à-dire à

$$T_k + \Sigma P_k - T_{k-1}$$

ΣP_k étant la somme totale des forces extérieures directement appliquées à la travée k , somme qui est connue.

Comme application des théories précédentes, examinons le cas particulier où la charge se compose uniquement de poids uniformément répartis dans chaque travée. On a alors

$$T_k = \frac{M_k - M_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k+1} \cdot L_{k+1}}{L_{k+1}}$$

$$M = M_k - T_k \cdot x + \frac{1}{2} p_{k+1} \cdot x^2$$

$$Q = -T_k + p_{k+1} \cdot x$$

Les moments fléchissants sont donc alors représentés par une parabole du second degré, et les efforts tranchants par une ligne droite qui coupe

nous avons en faisant $\varphi_0 = 0$

$$\frac{I_1 \cdot E \cdot h_1}{L_1} = \frac{1}{3} M_0 \cdot L_1 + \frac{1}{6} M_1 \cdot L_1 - \frac{1}{6} C_1 \cdot L_1 + \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} m_1 \cdot dx^2$$

Pour la dernière travée nous aurons de même (§ 159)

$$E \left(-\frac{h_n}{L_n} + \varphi_n \right) = \frac{1}{I_n} \left[\frac{1}{3} M_n \cdot L_n + \frac{1}{6} M_{n-1} \cdot L_n - \frac{1}{6} C_n \cdot L_n + \frac{1}{L_n} \int_0^{L_n} m_n \cdot dx^2 \right]$$

d'où en faisant $\varphi_n = 0$

$$-\frac{I_n \cdot E \cdot h_n}{L_n} = \frac{1}{3} M_n \cdot L_n + \frac{1}{6} M_{n-1} \cdot L_n - \frac{1}{6} C_n \cdot L_n + \frac{1}{L_n} \int_0^{L_n} m_n \cdot dx^2$$

Ces deux équations jointes aux autres permettront de calculer les $n+1$ moments inconnus; on procédera ensuite comme précédemment pour trouver les moments fléchissants et les efforts tranchants ainsi que pour tracer leurs courbes représentatives.

§ 163. — Poutre droite uniformément chargée reposant sur trois appuis de niveau et n'ayant pas ses extrémités encastées.

A titre d'application, étudions le cas d'une poutre droite reposant sur trois appuis de niveau, non équidistants, A, B, C et uniformément chargée sur toute sa longueur de p kilogrammes par millimètre courant.

Comme il ne s'agit que de mieux faire voir par un exemple la marche à suivre pour les calculs, nous nous donnerons en chiffres le rapport des longueurs des travées et nous admettrons par exemple que l'une d'elles a une longueur double de l'autre. Les deux extrémités de la poutre n'étant pas encastées, on a $M_0 = 0$, $M_2 = 0$ et par conséquent l'équation des trois moments devient

$$2 M_1 (L + 2 L) = \frac{1}{4} (p \cdot L^3 + p \cdot 8 L^3)$$

$$M_1 = \frac{3 p \cdot L^2}{8} = BS$$

et par conséquent la charge que donne la seconde travée sur le troisième point d'appui C est

$$T_2 = p \cdot 2L - \frac{19}{16} p \cdot L = \frac{13}{16} p \cdot L = CG$$

Les valeurs précédentes permettent de tracer les droites DE, FG qui représentent les efforts tranchants ; ceux-ci sont nuls pour les abscisses AJ et BH données par la relation

$$0 = Q = -T_k + p_{k+1} \cdot x$$

ce qui donne

$$AJ = \frac{T_0}{p} = \frac{1}{8} L$$

$$BH = \frac{T_2}{p} = \frac{13}{16} L$$

Les ordonnées correspondantes JK, HI des courbes des moments fléchissants sont données par l'équation

$$M = M_k - T_k \cdot x + \frac{1}{2} p_{k+1} \cdot x^2$$

d'où l'on déduit

$$JK = -\frac{1}{128} p \cdot L^2$$

$$HI = -\frac{169}{512} p \cdot L^2$$

On connaît donc les sommets K et I des deux paraboles, ce qui permet de tracer immédiatement ces dernières puisque, en faisant passer les axes coordonnés par leurs sommets, on a pour équation de ces courbes

$$y = \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

Le problème que nous nous sommes posé est donc entièrement résolu : nous connaissons les courbes des moments fléchissants et des efforts tranchants, ainsi que les réactions *totales* exercées par les appuis. Ces dernières sont égales :

pour le premier appui A à $\frac{1}{8} p \cdot L$;

Il faut écrire maintenant que la poutre déformée a sa tangente horizontale en A et en C, ce qui donne (§ 162)

$$\frac{1}{3} M_0 \cdot L + \frac{1}{6} M_1 \cdot L - \frac{1}{6} C_1 \cdot L + \frac{1}{L} \int_0^L m_1 \cdot dx^2 = 0$$

Or on a (§ 160)

$$C_1 = \frac{1}{2} p \cdot L^2$$

$$\int_0^L m_1 \cdot dx^2 = \frac{1}{24} p \cdot L^3$$

On en déduit immédiatement

$$(2) \quad 2 M_0 + M_1 = \frac{1}{4} p \cdot L^2$$

Pour l'autre extrémité C, on a de même

$$\frac{1}{3} M_2 \cdot \frac{3}{2} L + \frac{1}{6} M_1 \cdot \frac{3}{2} L - \frac{1}{6} C_2 \cdot \frac{3}{2} L + \frac{2}{3L} \int_0^{\frac{3}{2}L} m_2 \cdot dx^2 = 0$$

et, en remarquant que

$$C_2 = \frac{1}{2} p \left(\frac{3}{2} L \right)^2 = \frac{9}{8} p \cdot L^2$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}L} m_2 \cdot dx^2 = \frac{1}{24} p \cdot \left(\frac{3}{2} L \right)^3 = \frac{27}{128} p \cdot L^3$$

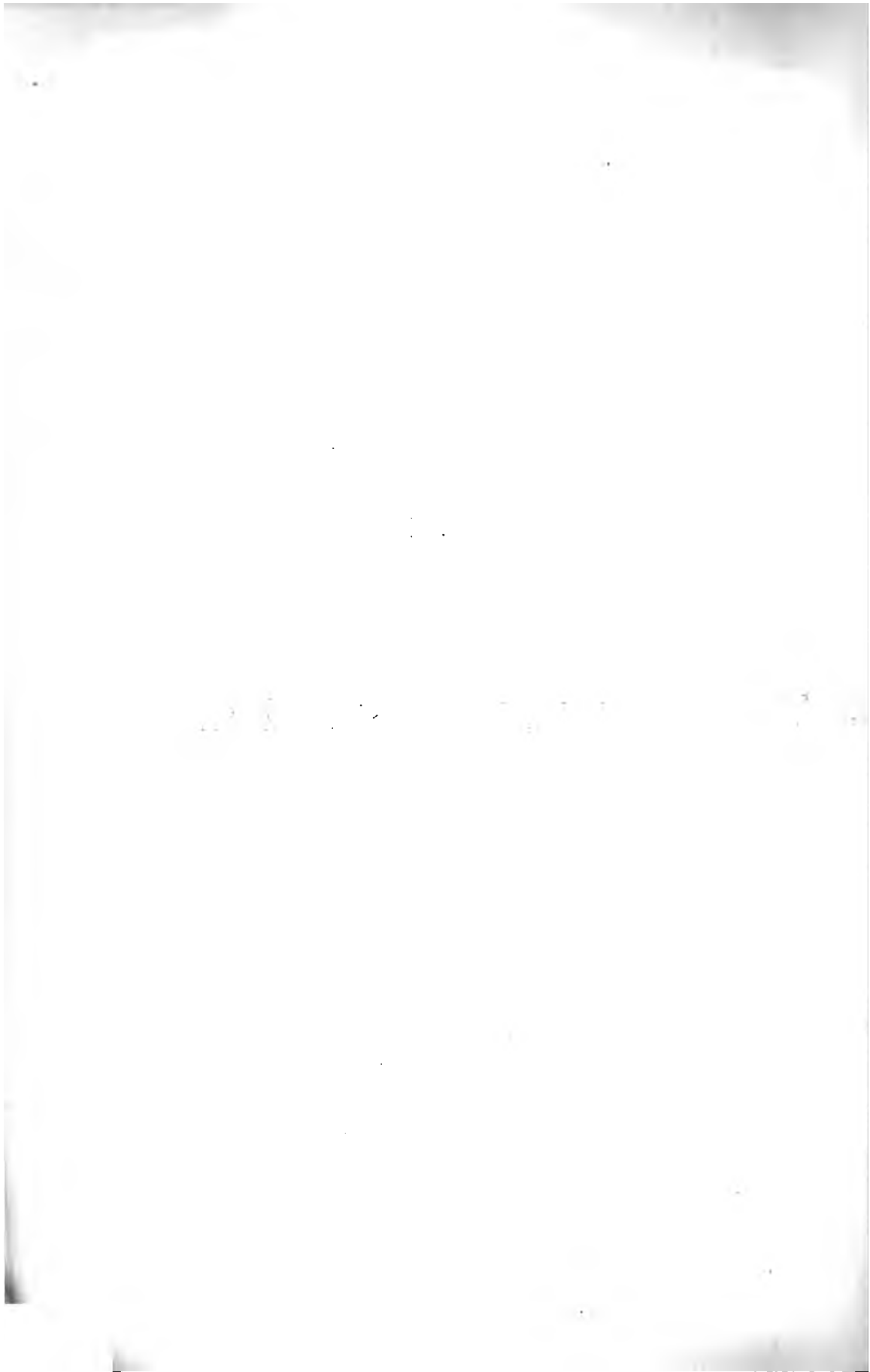
on obtient

$$(3) \quad 2 M_2 + M_1 = \frac{9}{16} p \cdot L^2$$

Nous avons donc trois équations (1), (2) et (3) pour calculer M_0 , M_1 , M_2 , et la solution du problème se continuera d'après les principes que nous avons exposés précédemment.

CHAPITRE XII

ÉTUDE DE DIVERS SYSTÈMES



ÉTUDE DE DIVERS SYSTÈMES

§ 165. — Support-grue.

Soient deux tiges AD, DB articulées en A et en B contre un support fixe (un mur par exemple) et articulées également l'une avec l'autre en D.

Supposons qu'un poids P soit suspendu au point D et voyons à quelles forces sont soumises les diverses parties du système.

1° On néglige le poids des pièces.

Si les deux tiges sont assez courtes et leur poids assez faible pour qu'on puisse négliger, sans erreur notable, les efforts de flexion auxquels

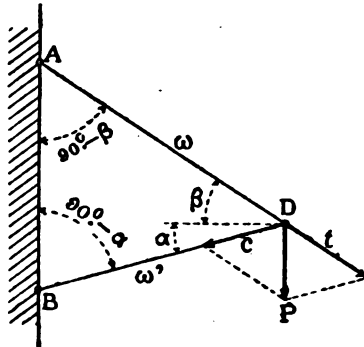


Fig. 238

elles sont soumises, nous pouvons traiter le support d'après la théorie exposée pour les systèmes articulés, et nous n'avons par suite qu'à décomposer la force P en deux autres dirigées suivant AD et BD. La première t est une force de traction; l'autre c , une force de compression et les sections ω et ω' des deux barres se calculeront par les relations

$$\begin{aligned} R \cdot \omega &= t \\ R' \cdot \omega' &= c \end{aligned}$$

R et R' étant les charges par millimètre carré considérées comme admissibles pour les pièces en question.

En pratique t et c peuvent se déterminer par un tracé graphique, ou bien par le calcul au moyen des équations

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{t}{\cos \alpha} = \frac{c}{\cos \beta}$$

Si P et la somme $\alpha + \beta$ sont constants, t et c sont, comme on le voit, proportionnels à $\cos \alpha$ et $\cos \beta$.

2° On tient compte du poids des pièces.

Supposons maintenant que les pièces soient assez longues, et leur poids assez grand pour que la charge due à leur flexion ne soit plus négligeable; nous étudierons alors l'équilibre de chacune d'elles à part. Occupons-nous d'abord de la jambe de force BD et admettons que ce

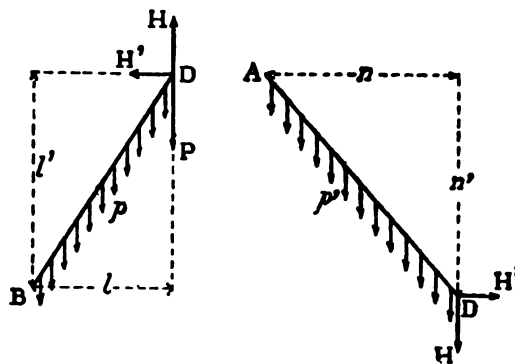


Fig. 239

soit à elle, par exemple, que soit fixé le poids P . Appelons H et H' les réactions, verticale et horizontale exercées par le tirant DA sur DB ; on a, en appelant p le poids de la pièce et en supposant que son centre de gravité soit situé au milieu de sa longueur,

$$p \cdot \frac{l}{2} + P \cdot l = H \cdot l + H' \cdot r$$

Considérons maintenant le tirant AD : les forces qui lui sont appliquées sont son poids p' , les réactions de la jambe de force qui sont évidemment $-H$ et $-H'$, ainsi que la réaction du point fixe A . En prenant les moments par rapport à ce dernier, on a

$$p' \cdot \frac{n}{2} + H \cdot n = H' \cdot n'$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer H et H' , en supposant

que p et p' soient connus soit exactement, soit d'une manière approximative, à l'aide par exemple du calcul qui a été fait au commencement de ce paragraphe d'après la théorie générale des systèmes articulés.

Une fois H et H' connus, le calcul des dimensions à donner à chacune des pièces ne présente pas de difficultés: la jambe de force BD est en effet soumise à une force de compression et à des forces de flexion; c'est un cas que nous avons traité aux paragraphes 118 et 119 (1).

Quant au tirant AD , il est soumis à des efforts de flexion et de traction (§ 120 et 121) et, contrairement à ce qui a lieu pour la pièce précédente, les déformations qu'il subit n'ont pas d'influence sensible sur la fatigue qu'il éprouve.

Comme on le voit d'après ce qui vient d'être dit pour le calcul de la jambe de force et comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 118), on se trouve conduit, dans la détermination des dimensions à adopter, à une série plus ou moins longue de tâtonnements puisque, à vrai dire, on ne sait en définitive que vérifier si, avec des dimensions données, la construction projetée n'éprouve pas une fatigue trop grande.

Si l'on veut s'opposer à la flexion de la jambe de force BD , on se trouve conduit, comme nous l'avons expliqué à propos des systèmes articulés, à multiplier les lignes de la construction et à adopter par exemple, une disposition analogue à celle de la figure 241, dans laquelle il n'y a aucune ligne surabondante et dont chaque côté peut se calculer avec la plus grande facilité.

Quelques constructeurs, pour augmenter la solidité du support-grue dont nous nous occupons, rendent invariable l'angle D au moyen d'une équerre ou d'un dispositif analogue; on agit parfois de même en A et

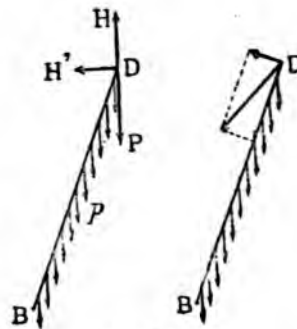


Fig. 240

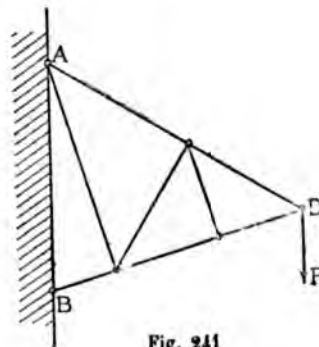


Fig. 241

(1) Les composantes longitudinales des forces p , c'est-à-dire du poids de la jambe de force, n'ont qu'une importance très faible, comme on le reconnaît facilement, de sorte qu'en les négligeant on se trouve ramené au cas d'une pièce soumise à des forces normales et à une force de compression située à son extrémité (§ 118).

en B. Ces manières de faire doivent, en principe, être rejetées, car elles équivalent à une surabondance de lignes (§ 154).

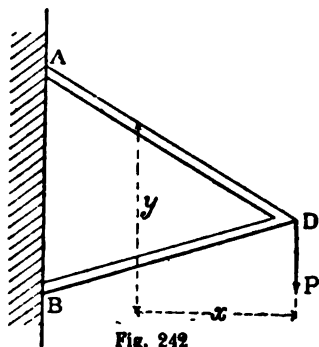


Fig. 242

Si les deux barres AD, BD sont réunies par un dispositif qui les rende absolument solidaires l'une de l'autre, le problème se présente alors d'une autre façon et il y a lieu de considérer le support comme un corps rigide, à âme évidée, travaillant par flexion. On a dans ce cas, en supposant que les barres aient même section ω .

$$R. \frac{I}{v} = P. x$$

$$R. \frac{2 \omega. \frac{y^3}{4}}{\frac{y}{2}} = P. x$$

$$R. \omega. y = P. x$$

relation d'où l'on déduit ω . Il faut ensuite ajouter une âme (évidée ou non) capable de résister à l'effort tranchant, et ne pas perdre de vue que le système ainsi constitué doit être établi de façon à pouvoir résister au déversement.

§ 166. — Grue articulée.

Supposons que la grue ait la forme indiquée par la figure 243, les différentes parties étant réunies par des articulations.

1° On néglige le poids des pièces.

Négligeons d'abord le poids des pièces, celles-ci étant supposées ne pas travailler par flexion; les forces extérieures appliquées à la grue sont :

le poids P appliqué en D,

la réaction verticale P de la crapaudine,

le couple F. d tel que F. d = P. a (équation qui donne F).

Comme dans le problème précédent, nous supposons le poids P appliqué, par exemple, à la volée, et nous le décomposerons en deux forces, l'une de compression c sollicitant la volée, l'autre de traction t agissant

2° *Tirants (supposés réduits à un seul)*. — Le tirant est soumis aux forces suivantes :

- le poids p' ,
 - les réactions H et H' provenant de la volée et égales, mais de sens contraire, à celles qu'exerce la volée sur le tirant,
 - les réactions U et U' dues au pivot.
- Les équations d'équilibre sont

$$\begin{aligned} (4) \quad & U + p' = H \\ (5) \quad & U' = H' \\ (6) \quad & p' \cdot \frac{a}{2} + H' \cdot h = H \cdot a \end{aligned}$$

3° *Pivot*. — Le pivot a à résister aux efforts suivants :

- son poids p'' ,
- la réaction verticale $P + p + p' + p''$ de la crapaudine appliquée en G ,
- le couple $F \cdot d$,
- les réactions U et U' , V et V' provenant du tirant et de la volée.

Les équations (1) à (6) permettent de déterminer les 6 inconnues H , H' , U , U' , V et V' ; nous connaissons d'ailleurs F . Il en résulte que les efforts appliqués à chacune des pièces sont connus; la marche à suivre pour le calcul de leurs dimensions est celle qui a été exposée précédemment. Le tirant, n'ayant rien à craindre de la flexion puisqu'il n'est soumis à aucune force de compression, se calculera simplement comme une tige travaillant à la traction; quant à la volée, il importe essentiellement, comme nous l'avons dit à plusieurs reprises, de tenir compte de la charge provenant du fait de la flexion. En ce qui concerne le pivot, on se trouve dans le cas d'une pièce soumise à des efforts longitudinaux et à des moments fléchissants. Tous ces problèmes ont été traités précédemment.

§ 167. — Autre dispositif de grue articulée.

Nous supposons qu'il y a articulation aux points A , B , D et nous admettons que nous connaissons, au moins d'une manière approximative, le poids de chacune des pièces (par exemple par comparaison avec un engin analogue). Les forces extérieures qui sollicitent le système sont :

le poids P à soulever,
 le poids p de la jambe de force BD ,
 le poids p' de la volée AK ,
 le poids p'' du pivot GI ,
 la réaction $P+p+p'+p''$ de la crapaudine,
 le couple $F.d$ s'opposant au renversement de la grue.

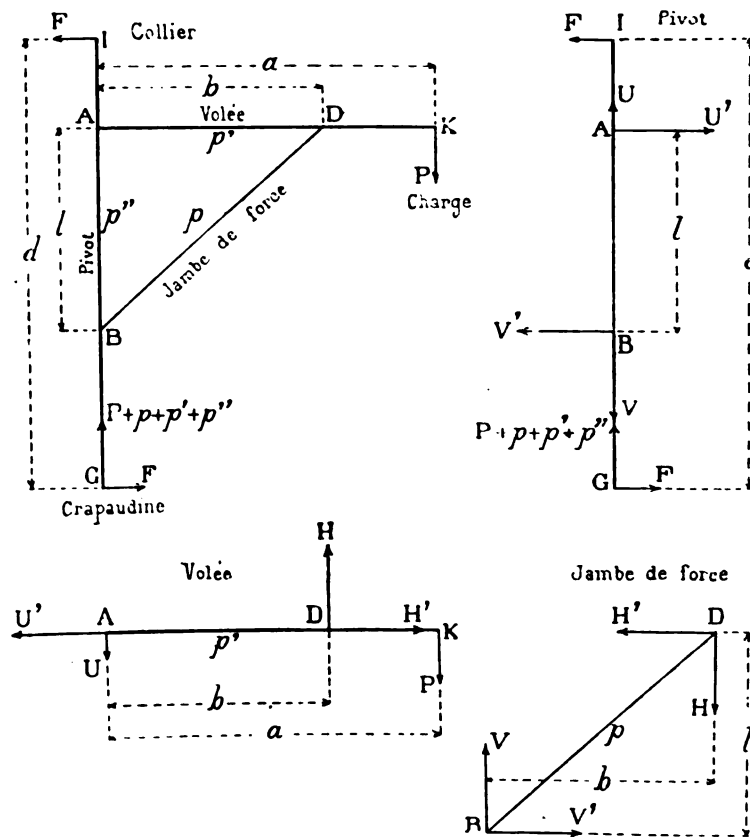


Fig. 245

Représentons à part chaque pièce avec les diverses forces qui lui sont appliquées, et écrivons leurs équations d'équilibre. On a pour la volée

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & U + p' + P = H \\
 (2) \quad & U' = H' \\
 (3) \quad & p' \cdot \frac{a}{2} + P \cdot a = H \cdot b
 \end{aligned}$$

On a pour la jambe de force

$$(4) \quad H + p = V$$

$$(5) \quad V' = H'$$

$$(6) \quad H \cdot b + p \cdot \frac{b}{2} = H' \cdot l$$

Ces 6 équations déterminent les 6 inconnues U, U', V, V', H, H'. Quant à la valeur de F, elle est donnée par la relation

$$F \cdot d = P \cdot a + p \cdot \frac{b}{2} + p' \cdot \frac{a}{2}$$

Nous avons donc tout ce qui est nécessaire pour déterminer les forces auxquelles chaque pièce est soumise; le calcul des dimensions à adopter se fera d'après les méthodes que nous avons exposées.

§ 168. — Grues non articulées.

Si les pièces qui composent la grue, au lieu d'être articulées les unes avec les autres, sont réunies par des courbes, des équerres ou d'autres dispositifs qui rendent leurs angles invariables, il faut, pour déterminer les efforts auxquels chaque pièce doit résister, faire entrer en jeu les déformations produites. Les calculs à effectuer deviennent alors notablement plus compliqués, sans que le mode d'agencement ainsi adopté donne lieu, comme nous l'avons dit plusieurs fois à propos des systèmes articulés, à aucune économie de matière.

Une étude très intéressante de ce genre, relative à une grue de forges de 20 tonnes, a été insérée dans la 6^e livraison de l'année 1867 du *Mémorial du Génie maritime*. Son auteur, M. l'Ingénieur de la Marine Fréville, a étudié en détail l'influence des liaisons s'opposant à l'invariabilité des angles, et, par une discussion claire et précise, il a fait voir qu'au point de vue des efforts statiques il y a avantage à avoir recours à des assemblages articulés; c'est, comme nous l'avons dit bien des fois, la conclusion générale à laquelle a conduit plus tard l'étude d'ensemble des systèmes de ce genre: s'il y a intérêt à rendre, dans la mesure du possible, les angles invariables, c'est en vue des vibrations et des efforts de dislocation que produisent les chocs et qui tendent évidemment à disjoindre les diverses pièces et à les séparer les unes des autres.

§ 169. — Poutres armées.]

Supposons que nous ayons une poutre droite AB posée sur deux appuis de niveau et soumise à des charges normales quelconques ; elle va prendre une forme telle que ADB. Pour diminuer la fatigue qu'elle éprouve ou pour lui permettre de porter une charge plus forte, on munit souvent les poutres de cette espèce d'une *contrefiche* D'E à l'extrémité de laquelle aboutissent deux tirants EA', EB' (1). Grâce à l'addition de ces trois pièces, le point D ne peut plus s'abaisser qu'en

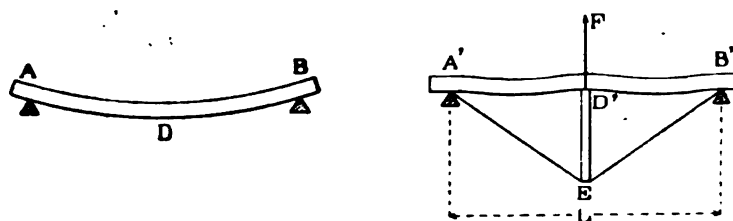


Fig. 246

forçant les deux tirants à s'allonger et la poutre se déforme à peu près comme on le voit en A'D'B'. Pour calculer les dimensions à donner au système, il faudrait préalablement connaître quel est l'abaissement vertical subi par le point D et traiter ensuite la pièce A'B' comme une poutre reposant sur trois appuis dont les différences de niveau sont connues. En réalité cet abaissement est extrêmement faible et, dans la pratique, on peut admettre qu'il doit être regardé comme nul ; le problème revient ainsi à celui de la poutre posée sur trois appuis de niveau et il est par conséquent facile de calculer quelle est, dans ces conditions, la réaction verticale F exercée par la contrefiche ED'. Si par exemple, nous nous trouvons dans le cas d'une charge uniformément répartie à raison de p kilogrammes par millimètre courant et si D' est situé au milieu de A'B', nous avons vu (§ 163) que $F = \frac{5}{8} p \cdot L$ (2). La réaction F étant connue, on en déduit immédiatement au moyen d'une simple décomposition de forces quelles sont les tensions V, V' des tirants puisqu'il y a articulation en E. Rien n'est plus simple alors que de calculer les dimensions de la contrefiche (pièce chargée debout), des deux tirants

(1) Nous supposons que la contrefiche est articulée en D' et qu'il y a articulation aux points A', E, B'.

(2) Dans cette expression L représente en effet la longueur totale A'B' des deux travées actives A'D', D'B'.

(tiges tendues) et de la poutre AB qui est soumise aux forces extérieures connues F , V , V' aux réactions verticales H et H' des deux

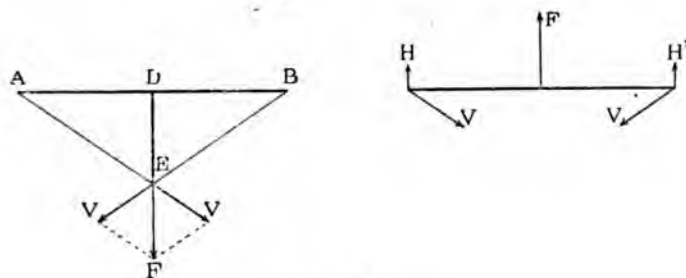


Fig. 247

points d'appui A et B qu'il est facile d'obtenir et enfin aux poids ou autres charges directement appliqués à cette pièce.

Comme on le voit par ce qui précède, la contrefiche remplit l'office d'un point d'appui supplémentaire et par conséquent elle diminue considérablement la valeur des moments fléchissants qui agissent sur la poutre; elle donne naissance, il est vrai, à des forces de compression énergiques qui s'exercent aux extrémités de celle-ci; mais, pour résister à ces derniers efforts, des dimensions beaucoup moindres sont nécessaires que dans le cas de moments de flexion, de sorte que, tout compte fait, l'addition d'armatures permet de porter, avec une quantité de matière donnée, un poids beaucoup plus considérable; tel est l'avantage qui résulte de leur emploi.

Lorsque la charge est concentrée en un point unique et qu'on a soin de faire aboutir la contrefiche à ce dernier, on voit facilement que la poutre est déchargée de tout moment fléchissant et a simplement à résister à des efforts longitudinaux de compression.

Il est à remarquer que, dans le calcul des poutres armées, nous admettons que le point d'articulation D' de la contrefiche (fig. 246) reste constamment situé sur la droite AB; or il est bien clair que, si cette condition est réalisée avant que la charge ne soit appliquée, elle cesse de l'être dès que cette dernière fait sentir son action. Pour nous trouver complètement dans les conditions admises par la théorie, il faudrait évidemment munir les tirants de ridoirs permettant de raccourcir ceux-ci à volonté et par suite de faire monter verticalement le point D' jusqu'à ce qu'il se trouve sur la droite AB lorsque la poutre est en charge. Cette précaution pourrait être prise, mais on s'en dispense généralement dans la pratique; on se contente alors de bien raidir les

tirants au moment de la construction du système et on laisse ensuite la charge produire son effet sur tout l'ensemble. Les calculs qui servent à déterminer les dimensions des poutres armées ne doivent donc, comme on le voit, être considérés que comme un moyen commode de résoudre d'une manière approchée le problème proposé (1).

Si les deux tirants sont munis des ridoirs dont nous venons de parler, on peut évidemment, en agissant dans un sens ou dans l'autre, augmenter ou diminuer à volonté la réaction verticale exercée par la contrefiche et l'on comprend facilement que de faibles variations de longueur modifieront d'une manière très appréciable les forces en jeu. Si par exemple on fait descendre le point D' d'une quantité égale à la flèche que prendrait la poutre abandonnée à elle-même sous l'action des charges qui lui sont appliquées, l'effet des tirants et de la contrefiche deviendra nul. Dans tous les cas d'ailleurs, quel que soit le serrage obtenu avec les ridoirs, il y aura toujours équilibre autour du point E entre la compression de la contrefiche et la tension des tirants, puisqu'il y a une articulation en ce point.

Si, pour un motif quelconque, la contrefiche n'est pas perpendiculaire à la poutre, le problème se résoudra aussi simplement : le point D étant en effet toujours considéré comme un nouveau point d'appui fixe donnera lieu à une force *verticale* F qui se déterminera par le théorème des trois moments (elle sera égale à $\frac{5}{8} p.L$ si le point D est au milieu de

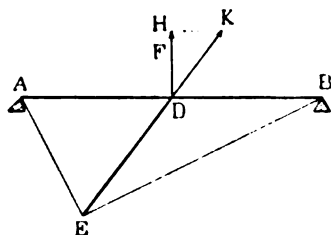


Fig. 248

AB et si la charge est uniformément répartie). Comme la contrefiche est supposée articulée en D, sa tension sera donc égale à la longueur DK déterminée par l'horizontale HK menée par le point H.

Dans l'étude qui précède nous avons supposé, pour plus de simplicité, qu'il n'y a qu'une seule contrefiche. S'il en existe plusieurs, on pourra traiter le problème de la même façon après avoir calculé les réactions de ces dernières en s'appuyant sur le théorème des trois

(1) On ne doit d'ailleurs pas perdre de vue que, dans le cas de charges mobiles, il peut y avoir un intérêt sérieux à ce que les trois points A, D, B ne soient pas en ligne droite quand la pièce est en charge. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un poids unique P tantôt en place, tantôt retiré; si on règle la tension des tirants de telle sorte que la compression F de la contrefiche (fig. 246) soit précisément égale à P, la poutre ne sera soumise à aucun effort de flexion par le fait de la présence du poids P; mais, quand ce dernier sera enlevé, elle aura à résister à un moment fléchissant à peu près égal à celui qu'il s'agissait d'éviter. On voit donc bien que, dans ce cas, il conviendra d'avoir $F < P$, c'est-à-dire de faire en sorte que, sous l'action de la charge P, le point D' s'abaisse très légèrement au-dessous de la droite AB.

moments et en admettant que leurs extrémités supérieures se maintiennent sur la ligne droite qui joint les deux points d'appui de tout le système. Il nous paraît inutile, après toutes les explications qui précèdent, de nous étendre plus longuement sur ce sujet; nous allons voir d'ailleurs qu'il existe un moyen plus simple et en général suffisamment exact dans la pratique, pour traiter le problème qui nous occupe.

§ 170. — **Calcul des poutres armées en les considérant comme des systèmes articulés.**

Considérons une poutre rigide AB reposant sur deux points d'appui A et B et soumise à l'action d'un certain nombre de forces isolées P, P', P'',; imaginons qu'au point d'application de chacune d'elles aboutisse

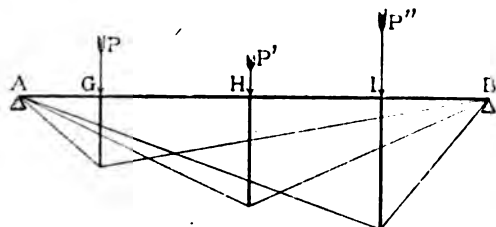


Fig. 249

une contrefiche munie de tirants et que la tension de ces derniers ait été réglée de telle façon que les points A, B, G, H, soient tous en ligne droite quand la pièce est en charge. Il est bien clair que, dans ces conditions, les moments fléchissants de la poutre sont nuls en tous points et par conséquent nous pouvons, pour le calcul des efforts intérieurs, opérer comme si le système était entièrement articulé.

Si les forces considérées, au lieu d'être isolées, sont réparties sur toute la longueur ou bien se déplacent (comme dans le cas de charges roulantes), il est hors de doute que, théoriquement du moins, on se trouve dans un cas tout différent du précédent; mais, pratiquement, si le nombre des contrefiches est suffisamment multiplié (et c'est ce qui a lieu le plus souvent), les moments fléchissants qui se développent d'une contrefiche à l'autre sont faibles et il se trouve même que, sans commettre d'erreur notable, on peut généralement les considérer comme négligeables. Les règles données pour les systèmes articulés

... à la détermination des efforts intérieurs dans les divers points du système en question et à la détermination des efforts dans les tirants. Comme nous l'avons vu (§ 166), il est généralement préférable d'exprimer ceux-ci, non pas en fonction des forces dans le cas d'articulation A, B, mais en fonction des efforts intérieurs du système considéré.

Pour nous faire comprendre par un exemple, nous supposons cette manière d'être représentée le cas d'une poutre articulée portant une charge uniformément répartie p par unité de longueur et soutenue en son milieu par une contrefiche :

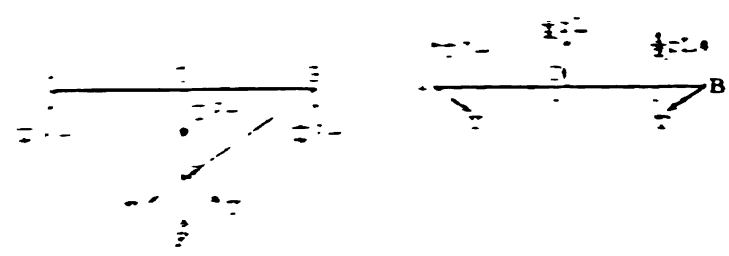


Fig. 250

la charge totale $p.L$ sera concentrée fictivement aux points A, D, B, ce qui donne $\frac{1}{4} p.L$, $\frac{1}{2} p.L$ et $\frac{1}{4} p.L$. La compression $F = \frac{1}{2} p.L$ de la contrefiche étant ainsi connue, il ne reste plus qu'à la décomposer en E suivant la direction des tirants pour avoir la tension T de ces derniers; les efforts intérieurs qu'il s'agissait de déterminer sont ainsi connus. Quant à la poutre AB, elle est soumise, d'après cela, à l'action T des tirants, à celle $\frac{1}{2} p.L$ de la contrefiche, à la réaction réelle $\frac{1}{2} p.L$ de chacun des appuis A et B, et enfin à la charge $p.L$ uniformément répartie; le calcul des dimensions à lui donner rentre dans ce qui a été vu dans les chapitres précédents.

§ 171. — Poutre à deux contrefiches.

Quant on veut faire usage de deux contrefiches, on emploie quelquefois le système représenté par la figure 251. Nous supposons que les charges sont concentrées, par les décompositions de forces que nous avons indiquées (§ 166 et 170), aux points d'appui A et B et aux

points d'articulation C et D des contrefiches. Appelons P et P' les charges fictives qui sont ainsi attribuées aux points C et D : les réactions des

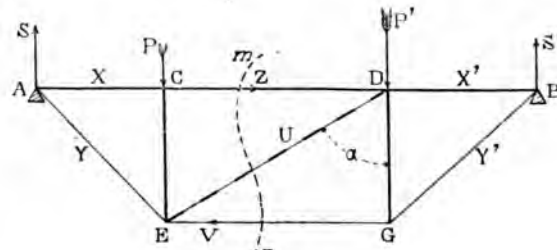


Fig. 251

points d'appui (dans cette hypothèse de la concentration des forces) se détermineront de suite au moyen des relations :

$$\begin{aligned} S' \times AB &= P' \times AD + P \times AC \\ S + S' &= P + P' \end{aligned}$$

Pour obtenir les valeurs des tensions Z, U, V, coupons la poutre par une ligne telle que mn; nous avons, comme dans le cas général des systèmes articulés (§ 153), les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z \times EC + P' \times CD &= S' \times CB \text{ (Moment par rapport à E)} \\ V \times DG &= S' \times DB \text{ (Moment par rapport à D)} \\ U \times \cos \alpha &= P' - S' \text{ (Projection sur DG)} \end{aligned}$$

ce qui donne de suite Z, V, U.

Les forces X et Y se trouveront de suite par la décomposition de S; on obtiendra de même X' et Y'. Les compressions qui s'exercent sur les contrefiches se détermineront d'une manière analogue par des compositions de forces effectuées autour des points E et G; comme vérification, les résultantes obtenues devront être dirigées suivant EC et GD.

Il est facile de voir que la poutre AB est comprimée sur toute sa longueur ainsi que les deux contrefiches; les tirants AE, EG, GB sont soumis à des efforts d'extension. Quant à la barre DE, elle travaille soit à l'extension, soit à la compression suivant les valeurs des forces P et P' et les proportions relatives du système; il y a avantage à cet égard à se servir soit de la diagonale DE, soit de l'autre CG de façon à avoir une barre tirée et non pas comprimée. Quelques constructeurs font usage de ces deux diagonales à la fois de façon qu'il y en ait toujours une qui

travaille par extension quelles que soient les forces en jeu ; mais, si on préfère ne pas faire usage de lignes surabondantes, on n'en prendra

qu'une en la disposant de telle sorte qu'elle puisse résister au besoin à la compression.

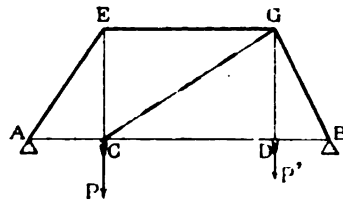


Fig. 252

Autre dispositif de poutre à deux contrefiches. — Le dispositif de la figure 252 donne lieu à des considérations du même genre et le calcul des efforts intérieurs ne présente pas de difficulté. On remarquera seulement que les pièces

qui travaillaient par traction dans le cas de la figure 251 sont ici soumises à des efforts de compression et inversement.

§ 172. — **Tablier soutenu par des tirants multiples.**

Pour soutenir les tabliers de certaines passerelles ou de ponts, on a plusieurs fois employé le dispositif de la figure 253 qui est applicable à d'autres cas.

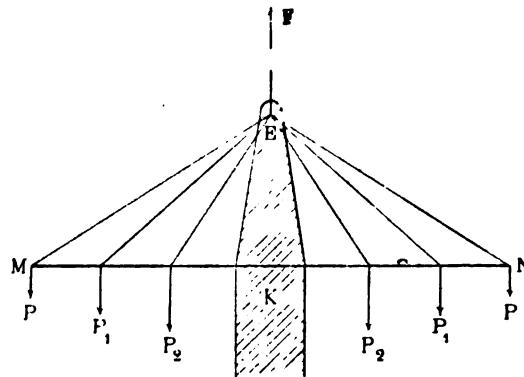


Fig. 253

La réaction verticale F exercée par le support central K est égale à la somme de toutes les charges ; celles-ci étant d'ailleurs supposées concentrées aux points d'articulation des tirants avec le tablier MN , on pourrait déterminer, par la méthode des sections (§ 153), les efforts qui sollicitent les diverses barres, mais il est plus simple de considérer le

ystème comme résultant de la superposition des systèmes articulés représentés par la figure 254. Chacun d'eux se calculera aisément et la compression exercée sur la poutre MN s'obtiendra de proche en proche par de simples additions. On remarquera seulement que, pour que les

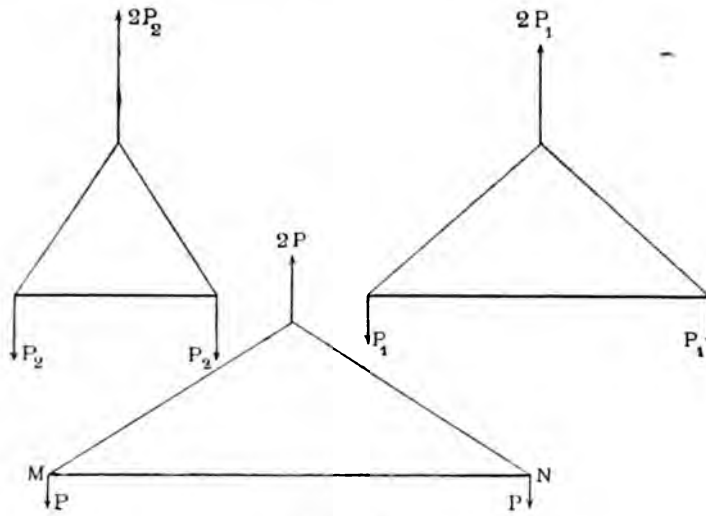


Fig. 254

choses se passent pratiquement comme on le suppose dans le calcul précédent, le réglage des tirants qui soutiennent le tablier devra être l'objet d'une attention toute spéciale, sans quoi il pourrait se produire des moments fléchissants notables aux points de jonction des tirants avec la poutre rigide MN.

Des considérations analogues aux précédentes sont évidemment applicables au cas d'un tablier placé en porte à faux d'un seul côté du support fixe K ; on aurait alors à considérer la superposition de plusieurs systèmes articulés semblables à celui du support grue du paragraphe 165.

§ 173. — Poutre armée du système Bollmann.

La semelle AB est divisée en un certain nombre de parties égales soutenues par des contrefiches de même hauteur, à l'extrémité inférieure desquelles aboutissent des tirants venant tous s'attacher aux extrémités

A et B. Supposons que la poutre soit soumise à une charge de p kilogrammes par millimètre courant; appelons L la longueur de chacune de ses subdivisions et n le nombre de ces dernières. Les réactions verti-

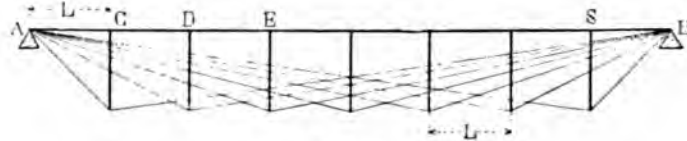


Fig. 255

cales exercées par chacun des appuis A et B sont égales à $\frac{1}{2} n. p. L$.

Concentrons maintenant toutes les charges aux divers points de subdivision; C, D, E,..... seront ainsi soumis chacun à une force $p. L$. Quant aux points d'appui A et B, ils recevront chacun de ce fait une charge $\frac{1}{2} p. L$, de sorte que la réaction *totale* qui leur est définitivement appliquée est égale à

$$\frac{1}{2} n. p. L - \frac{1}{2} p. L = \frac{1}{2} (n - 1). p. L \quad (1)$$

Ceci posé, nous pouvons considérer la poutre Bollmann comme résultant de la superposition d'une série de systèmes articulés chargés chacun d'un poids $p. L$, et par conséquent nous obtenons de suite les

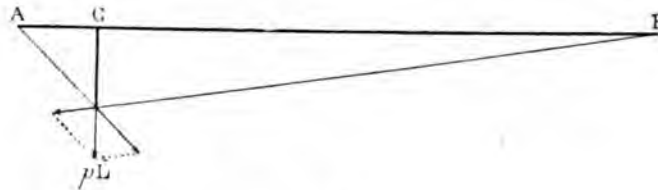


Fig. 256

tensions des tirants ainsi que les efforts de compression appliqués à la poutre. Le calcul de cette dernière se fera, comme nous l'avons dit bien des fois, en tenant compte des forces dues aux contrefiches et aux tirants ainsi que des moments fléchissants provenant des forces réelles

(1) C'est du reste ce qu'on trouve directement en écrivant qu'il y a équilibre entre les forces appliquées en A et B, et les charges concentrées appliquées aux $n - 1$ autres sommets B, C, D, ... S.

telles qu'elles sont appliquées à la poutre (§ 170), sans oublier, bien entendu, les réactions $\frac{1}{2} n. p. L$ réellement exercées par les deux points d'appui.

Il est à remarquer qu'avec le dispositif Bollmann chaque système d'armature travaille indépendamment des autres et n'a aucun effort à supporter si sa contrefiche n'aboutit pas à l'un des points d'application des forces préalablement concentrées aux points de subdivision. En particulier, dans le cas d'une charge roulante les diverses armatures entrent successivement en travail les unes à la suite des autres, chacune d'elles supportant à un moment donné toute la charge, puis revenant au repos. C'est là évidemment un inconvénient du dispositif que nous venons d'étudier.

§ 174. — Poutre armée du système Fink.

La disposition des armatures est représentée par la figure 257 : on divise la semelle AB en deux parties égales au point C et on lui applique l'armature formée de la contrefiche C C' et des tirants AC', BC'. Chacune des moitiés est elle-même subdivisée en deux autres sur lesquelles on

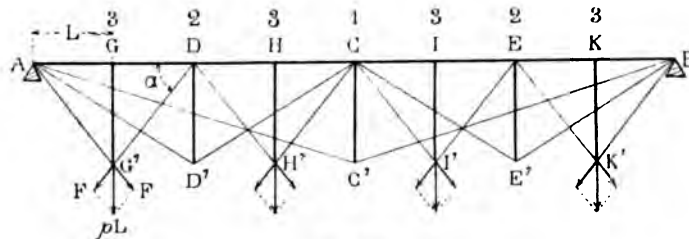


Fig. 257

opère absolument comme sur la poutre entière, et on continue de la même façon jusqu'à ce qu'on arrive à des subdivisions assez courtes pour que les moments fléchissants puissent être considérés comme très faibles.

Supposons qu'il s'agisse d'un poids uniformément réparti et, comme précédemment (§ 173), concentrons les charges aux points d'aboutissement des contrefiches de sorte qu'en chacun de ceux-ci est appliquée

une force $p. L$, les réactions totales des points d'appui A et B étant d'ailleurs $\frac{1}{2}(n-1).p. L$. Si l'on considère les contrefiches de l'indice n le plus élevé à la partie supérieure desquelles n'aboutit aucun tirant⁽¹⁾, on voit de suite qu'elles sont soumises à une compression $p. L$ et par conséquent on obtient immédiatement, au moyen du parallélogramme des forces, les tensions F des tirants qui y aboutissent. Passant de là aux points de division suivants D, E d'indice $n-1$, on voit qu'ils sont soumis d'abord à une charge extérieure $p. L$, puis à une charge $2F. \sin \alpha$ provenant des tirants qui y aboutissent; comme $2F. \sin \alpha = p. L$, il en résulte que les contrefiches DD', EE' supportent en réalité un effort $2p. L$ et on en déduit immédiatement les tensions des tirants qui concourent en D' et E'. En passant ensuite aux subdivisions d'indice $n-2$, on trouve de même que les contrefiches correspondantes CC' sont soumises à une charge $4p. L$ et ainsi de suite de sorte que les calculs s'achèvent sans difficulté.

Les tensions des tirants qui aboutissent à tous les points de division (sauf les extrêmes A et B) se faisant équilibre, il s'ensuit que la compression éprouvée par la semelle est constante sur toute sa longueur.

Si l'on a affaire à une ou à plusieurs charges isolées, on voit, au moyen des considérations qui précèdent, que, si le poids considéré est appliqué à l'un des derniers points de subdivision d'indice n , son influence se fera sentir de proche en proche, en s'affaiblissant de plus en plus, sur une partie seulement des contrefiches et des tirants d'indices $n-1$, $n-2$, etc. Si le point d'application est situé sur l'une des divisions d'un indice inférieur à n , on voit également que l'effet de la charge sera nul pour les pièces qui correspondent aux points d'un ordre supérieur: en particulier, quand le poids mobile se trouvera au milieu C de la poutre, il n'intéressera que la contrefiche CC' et les deux tirants AC', BC'. Avec le dispositif Fink, une charge roulante fera donc travailler d'une manière très inégale les armatures, en laissant à certains moments une notable partie d'entre elles absolument inactives.

§ 175. — Poutre Warren ou à treillis simple.

La poutre Warren est formée de barres formant entre elles des triangles tous égaux juxtaposés, dont la forme peut d'ailleurs être combinée de

(1) Sur la figure 257, $n=3$ et les contrefiches en question sont GG', HH', I I' et KK'.

diverses manières. La même étude est applicable à tous les dispositifs de ce genre; prenons par exemple celui de la figure 258, p étant la charge uniformément répartie sur la semelle inférieure, et n le nombre des divisions de cette dernière. Après avoir concentré les poids aux articulations A, C, D, E, S, B, on voit que chacune d'elles est soumise à une

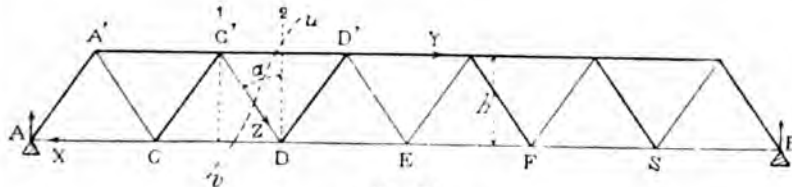


Fig. 258

charge $p \cdot L$, tandis que les réactions de A et de B sont $\frac{1}{2}(n-1) \cdot p \cdot L$.

Pour trouver les forces qui sollicitent les barres, nous emploierons la méthode des sections. Coupons par exemple la poutre par la ligne uv et considérons la partie de droite; nous avons trois équations d'équilibre pour calculer les forces X, Y, Z. Si l'on appelle M et M' les moments fléchissants qui correspondent aux sections transversales 1 et 2, Q la valeur constante de l'effort tranchant dans l'intervalle compris entre ces sections (1), on a, en prenant deux équations de moments et une de projection,

$$\begin{aligned} X \cdot h &= M \\ Y \cdot h &= M' \\ Z \cdot \cos \alpha &= Q \end{aligned}$$

On déterminera de cette façon les valeurs des forces qui sollicitent toutes les barres. On reconnaît d'ailleurs facilement, à cause de la disposition des courbes qui représentent les moments fléchissants et les efforts tranchants d'une poutre reposant sur deux appuis (§ 75), que X représente toujours une tension et Y une compression de sorte que la semelle inférieure est partout tirée et la semelle supérieure partout comprimée; *ce sont elles qui résistent aux moments fléchissants*. Quant aux barres obliques, celles qui vont en montant de droite à gauche sont tirées dans la moitié gauche de la poutre et comprimées dans la moitié située à droite; le contraire a lieu pour les barres obliques symétriques; comme on le reconnaît facilement, cette inversion du phénomène tient au changement de signe qu'éprouve l'effort tranchant au milieu de la

(1) Ces valeurs de M, M', Q pourront soit se calculer séparément pour les diverses sections transversales, soit être relevées sur un tracé général fait pour l'ensemble de la poutre.

poutre. *Ce sont ces barres obliques qui ont pour effet de résister aux efforts tranchants.*

Si, au lieu d'une charge uniformément répartie, on a un ou plusieurs poids isolés placés à quelques-uns des sommets, on traitera le problème d'une façon analogue. La courbe représentative des moments fléchissants montre que la semelle supérieure travaille toujours à la compression et l'autre à l'extension ; le point où la valeur de l'effort tranchant s'annule fera d'ailleurs voir en quel point se produit le renversement du mode de travail des barres ; mais, ce qu'il importe de remarquer, c'est que, dans tous les cas, un poids même unique fait travailler toutes les pièces, ce qui n'a pas lieu avec les dispositifs Bollmann et Fink.

Les poutres Warren peuvent, comme nous l'avons dit, avoir leurs triangles agencés de diverses manières ; on a fait par exemple quelquefois usage de triangles rectangles établis de l'une des manières indiquées par la figure 259. Une étude comparative de ces divers dispositifs montre

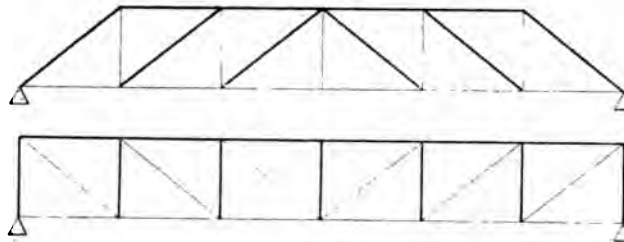


Fig. 259

que c'est la poutre à *triangles isocèles* (fig. 258) qui, dans le cas d'une charge uniformément répartie, est la plus avantageuse au point de vue de la légèreté (1).

§ 176. — Poutres à treillis multiples.

Ces poutres sont composées d'une semelle supérieure et d'une semelle inférieure réunies par de nombreuses barres obliques équidistantes, symétriquement inclinées sur la verticale et formant, en se croisant, un réseau à mailles plus ou moins serrées. Les assemblages des diverses

(1) Pour plus de détails à ce sujet, on pourra consulter la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy, tome IV, page 265 et suivantes.

parties les unes avec les autres sont effectués au moyen de rivets et constituent un tout rigide difficilement assimilable à un système articulé, mais que, faute de mieux, on a l'habitude de calculer de la façon suivante (*). On admet, à cet effet, que, si on coupe la poutre par un plan vertical quelconque mn , les barres rencontrées ont toutes même tension

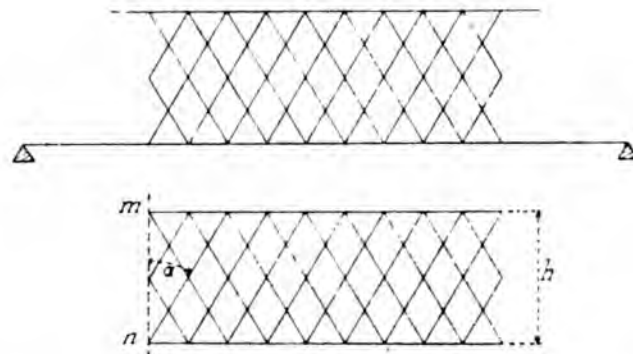


Fig. 260

les unes étant tirées et les autres comprimées; les choses se passent dans ce cas-là comme si l'on décomposait chacune des tiges obliques du système Warren en plusieurs autres parallèles, sans que cette opération change le mode de répartition des forces; les deux semelles se calculeront donc par les mêmes formules que tout à l'heure, celle du haut étant comprimée et celle du bas étendue. Quant aux treillis, si on appelle K le nombre total de barres rencontrées par le plan mn et Z la tension de chacune d'elles, on a

$$K \cdot Z \cdot \cos \alpha = Q$$

Q étant l'effort tranchant qui s'exerce sur la section transversale mn . On en déduit

$$Z = \frac{Q}{K \cdot \cos \alpha}$$

Il se présentera, comme précédemment, la même inversion du mode de travail des barres au point où l'effort tranchant s'annule.

Comparaison d'une poutre à treillis multiple avec une poutre à âme

(*) Cette manière de faire est justifiée par ce fait que les poutres à treillis ainsi calculées non seulement résistent bien, mais présentent plutôt un excès de solidité.

...abord on est tenté de croire qu'une poutre à treillis...
...elle avait une âme pleine ; en réalité c'est l'inverse...
...comme nous allons le montrer. Appelons en effet Ω la section transversale des barres du treillis, R la charge par millimètre carré admissible, on a

$$\Omega \cdot R = Z$$
$$\Omega = \frac{Q}{R \cdot \cos \alpha}$$

Si nous considérons maintenant une tranche longitudinale dl de la poutre, elle contient sur chaque barre une longueur $\frac{dl}{\sin \alpha}$ de sorte que le volume des barres est

$$V = K \cdot \frac{dl}{\sin \alpha} \cdot \Omega$$

d'où

$$V = K \cdot \frac{dl}{\sin \alpha} \cdot \frac{Q}{R \cdot \cos \alpha} = \frac{2 Q \cdot dl}{R \cdot \sin 2 \alpha}$$

Dans le cas le plus favorable pour la légèreté $\alpha = 45^\circ$, ce qui donne alors

$$V = \frac{2 Q \cdot dl}{R}$$

Supposons maintenant que le treillis soit remplacé par une paroi pleine, on a, en adoptant la même charge R par millimètre carré et en appelant Ω' la section transversale de cette âme

$$\Omega' \cdot R = Q$$

d'où pour le volume V' correspondant à la longueur dl

$$V' = \Omega' \cdot dl = \frac{Q \cdot dl}{R}$$

Donc, même dans le cas le plus favorable, le treillis pèse deux fois plus qu'une âme pleine (*). Pratiquement cela n'est vrai que si l'épaisseur à laquelle on se trouve conduit pour cette dernière n'est pas trop faible pour être admissible à cause des chocs accidentels, de la rouille, etc.

(*) Les poutres à âme pleine sont également... que les poutres articulées des divers systèmes, comme nous l'avons vu (§ 154).

Dans les ouvrages d'art, à moins que la légèreté ne soit une condition qui domine impérieusement toutes les autres, on n'emploie pas les parois pleines à cause de leur aspect peu satisfaisant et de la prise qu'elles donnent au vent.

Les treillis dont nous venons de parler sont le plus souvent constitués par des barres plates rivées les unes avec les autres à leurs points d'intersection; on doit veiller avec le plus grand soin à ce que leur attache avec les longerons des deux semelles présente toute la solidité nécessaire (§ 51) et on leur adjoint en outre, aussi bien qu'avec les parois pleines, des montants verticaux qui opèrent une excellente liaison des deux semelles et s'opposent au *flambement*. D'autres fois, les barres obliques sont formées par des cornières, des fers à T ou d'autres pièces profilées dont la rigidité rend inutiles les montants ci-dessus qui sont alors supprimés.

Poutres droites de divers systèmes. — Outre les dispositifs qui font l'objet de ce paragraphe et des précédents, il en existe beaucoup d'autres présentant des lignes surabondantes en nombre plus ou moins considérable. Comme nous l'avons dit à bien des reprises, leurs diverses pièces ne peuvent plus se calculer d'une manière simple; nous nous bornerons, à leur sujet, à renvoyer aux ouvrages spéciaux relatifs à ces matières.

§ 177. — Renseignements divers relatifs aux types de poutres droites, qui viennent d'être décrits.

Le volume de matière nécessaire pour résister à une charge donnée ne diminue pas indéfiniment à mesure que la hauteur de la poutre augmente; cela tient à ce que le volume des barres obliques formant treillis s'accroît avec cette hauteur. En pratique, quand le nombre des subdivisions de la poutre est un peu considérable, il y a avantage à adopter une hauteur variant du $\frac{1}{8}$ au $\frac{1}{12}$ et, en général, du $\frac{1}{10}$ au $\frac{1}{12}$ de la portée.

La hauteur ne doit pas dépasser une fois et demie environ la largeur, sans quoi la stabilité de la poutre sur ses points d'appui ne serait pas suffisamment assurée, à moins qu'on ne fasse usage de moyens spéciaux.

Dans les poutres de dispositifs analogues à ceux des paragraphes 173, 174 et 175, il y a intérêt à multiplier les subdivisions jusqu'à ce que les moments fléchissants qui se produisent sur chacune d'elles puissent être

négligés, mais il convient de ne pas aller au-delà sous peine d'augmenter inutilement le poids de la construction.

Des divers systèmes articulés que nous avons examinés, le plus avantageux au point de vue de la légèreté, dès qu'on dépasse deux divisions, est la poutre Warren et, parmi les divers dispositifs de cette dernière, c'est celui des triangles isocèles qu'il convient d'adopter au moins pour une charge roulante ou uniformément répartie.

Les supports de même hauteur que les portées des poutres donnent en général la solution la plus économique; cette règle fixe d'une manière approximative le nombre des supports à employer pour les poutres des ponts métalliques.

Sous la charge d'épreuve, les poutres droites métalliques, telles qu'on les construit actuellement, prennent ordinairement une flèche maximum de $\frac{1}{1500}$ à $\frac{1}{2000}$ de l'ouverture.

Il convient enfin de mentionner, en terminant, que, dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les réactions des points d'appui restent constamment à très peu près verticales et que, par conséquent, des dispositions spéciales doivent être prises afin de permettre la variation de longueur qu'éprouvent forcément les grandes poutres métalliques en raison des changements de température.

§ 178. — Poutres de hauteur variable.

On fait assez souvent usage de poutres ayant une hauteur variable, composées d'éléments semblables à ceux des poutres de hauteur constante

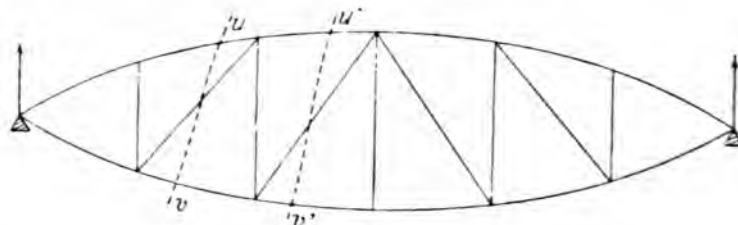


Fig. 261

que nous venons d'étudier. Elles comprennent deux semelles dont l'une au moins est courbe et qui sont réunies par un système de barres formant treillis et plus ou moins étagement d'éléments. Si, comme cela se

présente dans la pratique, les semelles sont subdivisées en un nombre de parties assez grand pour que l'ensemble de la construction puisse être traité comme un système articulé, on calculera les dimensions des diverses parties de la même façon que pour une poutre de hauteur invariable; en principe il convient d'ailleurs, comme précédemment, d'éviter l'emploi de lignes surabondantes. S'il s'agit par exemple d'un dispositif analogue à celui de la figure 261, on pourra couper la poutre par diverses lignes telles que uv , $u'v'$ et on calculera ainsi sans difficulté les efforts intérieurs cherchés.

L'un des systèmes de poutres courbes le plus employé est celui qui est désigné sous le nom de *bowstring*; il est caractérisé par la présence d'une semelle courbe qui résiste à la compression et d'une semelle droite

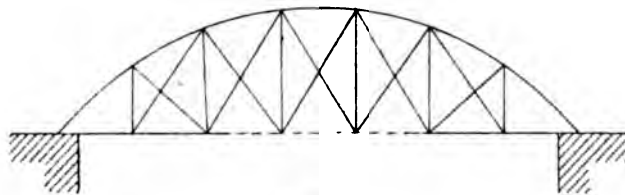


Fig. 262

faisant l'effet de tirant comme on le voit dans la figure 262. Il doit être toujours bien entendu que les choses sont supposées disposées de telle façon que les réactions des appuis soient verticales.

§ 179. — Fermes.

Une ferme se compose d'un ensemble de pièces en bois ou en métal formant l'ossature d'une toiture; elle est essentiellement constituée par deux *arbalétriers* réunis entre eux à leur partie supérieure et reposant à leur autre extrémité sur les deux murs ou sur les colonnes de l'édifice à couvrir. Un ou plusieurs tirants aboutissant à la partie inférieure des arbalétriers sont destinés à contrebalancer la poussée horizontale produite par ces derniers, de telle sorte que les murs aient simplement à résister à des efforts verticaux (c'est là une condition indispensable à remplir, sans quoi ceux-ci seraient renversés).

Les fermes sont disposées par plans parallèles; des *pannes* horizontales, perpendiculaires aux arbalétriers reposent sur ces derniers et

reçoivent elles-mêmes des *chevrons* parallèles à ceux-ci. Deux pièces horizontales, le *fattage* et la *sablère*, supportent l'extrémité des chevrons, enfin c'est sur ces dernières pièces qu'on applique des lattes légères sur lesquelles sont fixées les tuiles, les ardoises ou les autres matériaux formant la couverture.

Ferme simple sans contrefiche. — Examinons d'abord le cas d'une ferme simple non munie d'une contrefiche; AC et BC sont les arbalétriers; AD et BD, les tirants, enfin CD forme ce qu'on appelle le *poinçon*. Le poids de la toiture étant supposé uniformément réparti le long des arbalétriers à raison de p kilogrammes par millimètre courant, les

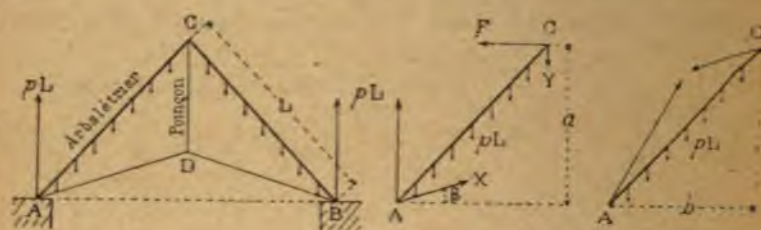


Fig. 263

deux appuis exercent chacun une réaction $p \cdot L$; d'autre part on peut admettre que les assemblages des diverses pièces entre elles ne sont susceptibles de donner lieu à aucun moment et par suite on peut, pratiquement, considérer celles-ci comme articulées. Ceci posé, considérons l'un des arbalétriers à part, AC par exemple; celui de droite exerce sur lui une action F qui, à cause de la symétrie, est forcément horizontale. Si on néglige le poids des tirants, ceux-ci ne donnent lieu, ainsi que le poinçon, qu'à des forces X et Y dirigées suivant leur longueur et on a pour l'équilibre de la pièce AC les trois équations suivantes (deux de projection et une de moments prise par rapport au point A)

$$\begin{aligned} p \cdot L + X \cdot \sin \beta &= p \cdot L + Y \\ X \cdot \cos \beta &= F \\ F \cdot a &= p \cdot L \cdot \frac{b}{2} + Y \cdot b \end{aligned}$$

Ces relations déterminent X , Y et F . Elles s'appliquent d'ailleurs à l'arbalétrier de droite, de sorte qu'en réunissant les deux parties de la toiture nous aurons la ferme entière avec les forces qui la sollicitent. On voit ainsi que le poinçon CD est soumis à une traction $2Y$, tandis que les tirants AD et BD sont soumis à un effort d'extension X . Quant à

chaque arbalétrier, nous connaissons les forces qui le sollicitent et nous savons calculer ses dimensions (§ 118). Comme vérification on doit trouver qu'il y a équilibre autour du point D.

Quelquefois les deux tirants AD, BD sont réunis en un seul qui est alors horizontal; le poinçon ne supporte plus alors aucune traction. On le conserve néanmoins pour diminuer la flèche du tirant, mais ses dimensions sont alors très réduites.

Ferme avec arbalétriers munis d'une contrefiche. — Quand les arbalétriers ont une longueur un peu grande, on les soutient en général dans leur milieu par une contrefiche perpendiculaire à leur direction, de sorte que la ferme prend alors l'aspect indiqué par la figure 264.

Imaginons d'abord que la ferme ne soit pas munie de contrefiches (fig. 265); nous retombons sur le cas étudié tout à l'heure et nous pouvons par suite facilement calculer les forces X, Y et F dont il a été question il y a un instant. Cette première opération étant effectuée, ajoutons les deux contrefiches DE, DK et, comme dans la première étude relative aux poutres armées (§ 169), admettons que ces pièces supplémentaires fassent l'effet de points d'appui fixes; la réaction normale EH exercée par le

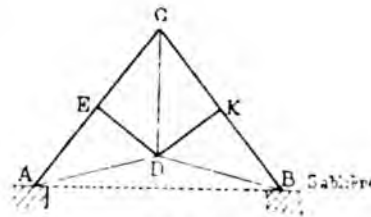


Fig. 264

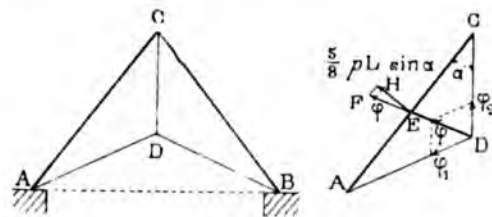


Fig. 265

point E doit être égale à $\frac{5}{8} p. L. \sin \alpha$, ce qui donne de suite, en menant HF parallèle à AC, la valeur $\varphi = EF$ de la compression à laquelle est soumise la contrefiche; il ne reste plus alors qu'à décomposer φ en deux composantes φ_1 et φ_2 dirigées suivant DA et DC, et l'on voit alors que la présence des contrefiches DE, DK donne lieu aux nouvelles forces intérieures suivantes qui se font équilibre autour du point D (fig. 264):

pour les poutres EA,
pour les poutres AB,
pour les poutres BA,
pour les poutres DB,
pour les poutres DA.

En ajoutant ces nouveaux efforts à ceux tant intérieurs qu'extérieurs du cas précédent, nous avons évidemment l'ensemble de toutes les forces auxquelles les diverses pièces du système sont soumises et nous pouvons calculer les dimensions qu'il convient de donner à chacune d'elles.

§ 180. Fermes considérées comme étant des systèmes articulés.

En parlant des poutres armées nous avons dit que, dans la pratique, on peut presque toujours les traiter comme étant des systèmes articulés (§ 170); les fermes avec arbalétriers n'étant, en définitive, autre chose

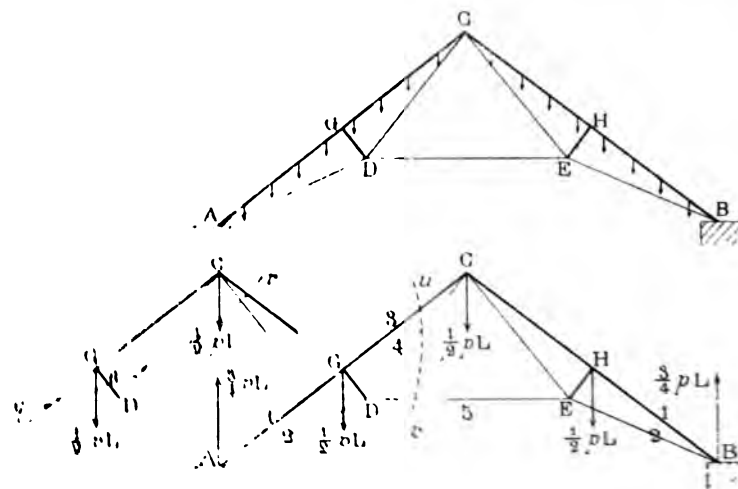


Fig. 266

que des poutres armées, la même simplification est évidemment permise; aussi au mode de calcul indiqué dans le paragraphe précédent convient-il de substituer celui qui concerne les systèmes articulés et auquel nous allons maintenant avoir recours: il simplifie notablement les calculs, surtout pour les fermes de formes un peu compliquées dont nous allons

donner quelques exemples. Nous ferons remarquer d'ailleurs que nous supposons toujours que les réactions exercées par les deux appuis sont verticales et par suite que la Statique donne immédiatement leurs valeurs.

Dans le dispositif représenté par la figure 266, supposons la charge uniformément répartie à raison de p kilogrammes par millimètre courant des arbalétriers et, comme d'habitude, concentrons-la aux articulations, ce qui nous donne $\frac{1}{2} p \cdot L$ et $\frac{3}{4} p \cdot L$ pour les forces respectivement appliquées aux points G, H, C, A et B (y compris les réactions des points d'appui), comme l'indique la figure. Ceci fait, rien n'est plus simple que de calculer toutes les forces intérieures : 1 et 2 s'obtiennent en décomposant $\frac{3}{4} p \cdot L$ suivant la règle du parallélogramme des forces. En coupant ensuite la figure par la ligne uv , on détermine les efforts 3, 4, 5; enfin une section opérée suivant qr donne, en prenant les moments par rapport à C, la compression 6 de la contrefiche GD puisque les directions de toutes les autres forces intérieures concourent en ce point. Comme vérification on doit trouver qu'il y a équilibre autour de D.

Pour les arbalétriers de grande portée, on fait souvent usage de contrefiches plus nombreuses, comme l'indique la figure 267. On peut traiter ce système par la même méthode que la poutre Fink (§ 174); mais, plusieurs des armatures ayant des côtés communs, il est plus

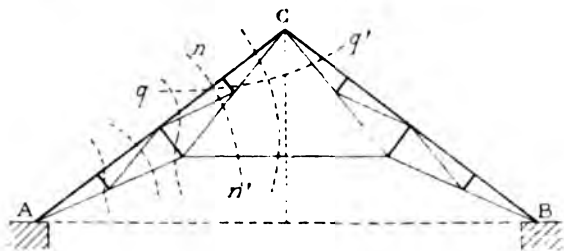


Fig. 267

simple d'opérer par la *méthode des sections*; ces dernières pourront d'ailleurs être choisies de plusieurs façons, par exemple de celle qui est indiquée sur la figure 267. On remarquera que plusieurs d'entre elles rencontrent les mêmes lignes, aussi aura-t-on soin de se borner à calculer une fois seulement chacune d'elles, ce qui est facile puisqu'au moyen d'un choix convenable du centre des moments chaque équation ne contient qu'une inconnue. La section nn' coupe quatre barres, mais la tension de l'une d'elles au moins étant déjà connue, le calcul s'effectuera

sans difficulté; il en est de même pour la section qq' parce que toutes les tiges, sauf une, concourent au point C.

La disposition des fermes peut varier d'une infinité de manières; le nombre des contrefiches, en particulier, peut être plus considérable, mais le mode de calcul que nous venons d'indiquer sera applicable dans



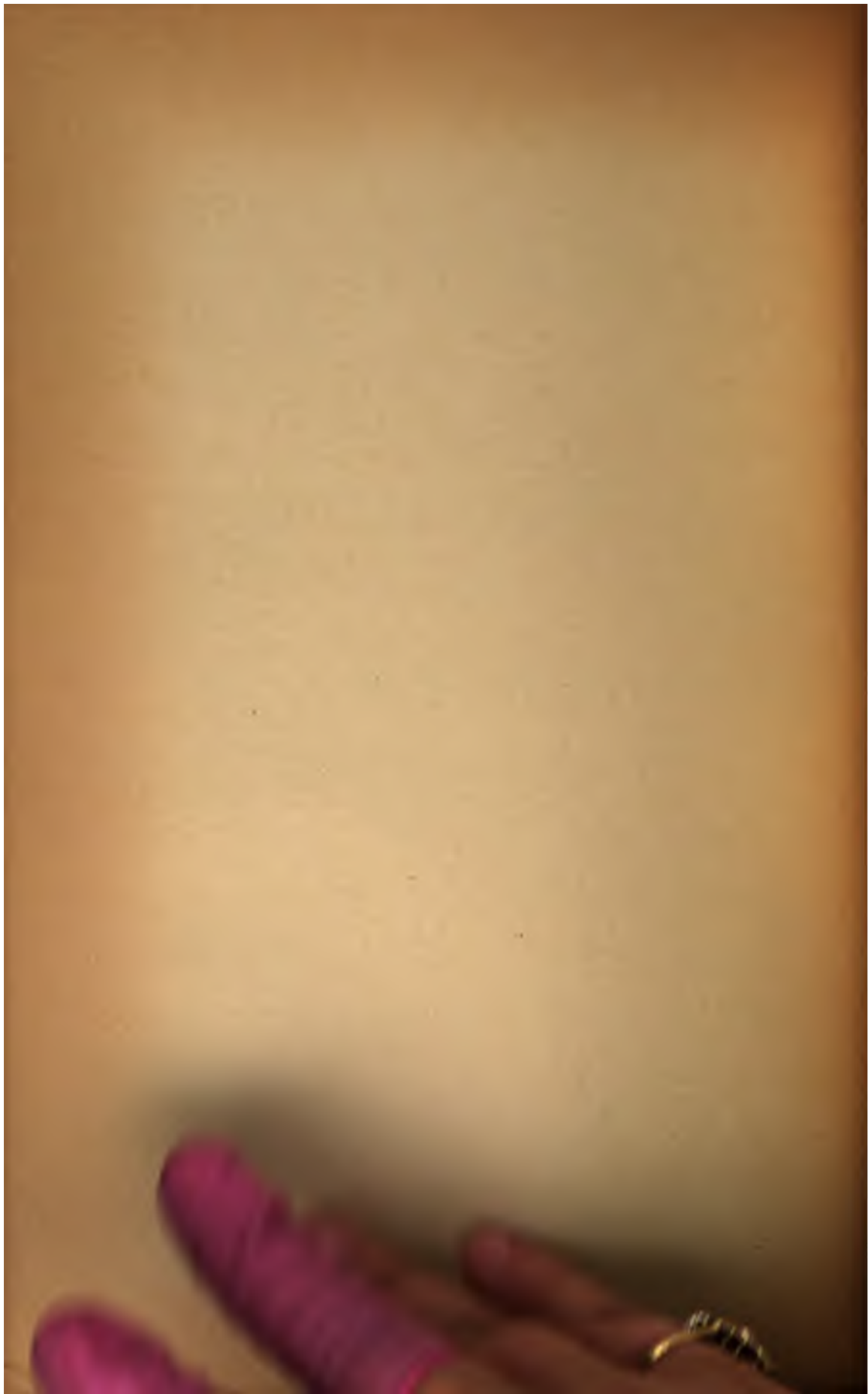
Fig. 268

tous les cas et conduira à une détermination rapide des forces intérieures. A titre d'exemple, nous mentionnerons les dispositifs représentés par la figure 268.

CHAPITRE XIII



FLEXION PLANE
DES PIÈCES COURBES



FLEXION PLANE DES PIÈCES COURBES

§ 181. — Définition des pièces courbes étudiées.

Nous allons maintenant nous occuper de la flexion des solides remplissant les conditions suivantes : HK étant une courbe plane, toutes les sections faites dans la pièce par des plans mn normaux à HK ont leur centre de gravité situé sur HK et l'intersection du plan sécant avec le plan de la courbe est un axe de symétrie de la section ou un axe principal d'inertie ; les hauteurs des diverses sections transversales du solide sont

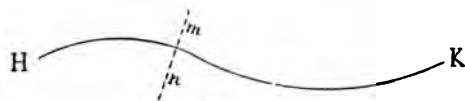


Fig. 269

d'ailleurs supposées faibles relativement aux rayons de courbure de la fibre moyenne HK en ses divers points (1) ; enfin nous admettons que toutes les forces extérieures appliquées au corps sont contenues dans le plan de symétrie et que leurs valeurs ne sont pas assez fortes pour altérer l'élasticité en aucun point (2).

Les pièces employées dans les constructions satisfont presque toujours à ces conditions ; ce sont les seules dont nous nous occuperons.

(1) Le cas où cette condition n'est pas remplie sera examiné plus tard (§ 190).

(2) Comme on le voit, ces conditions sont (sauf la courbure de HK) les mêmes que celles qui ont été admises pour les pièces droites (§ 42). Il est bien clair que, lorsqu'elles sont remplies, la courbe HK reste plane après la déformation.

On suppose connues les forces extérieures appliquées
et les réactions des points d'appui.

Conditions d'équilibre d'une pièce courbe.

On suppose que la pièce est définie comme nous venons de l'indiquer.
Dans ces conditions, une section primitivement
rectangulaire, comme dans le cas des solides droits, être consi-
dérée comme plane et normale après la déforma-
tion. Cette hypothèse va servir de base à nos calculs.

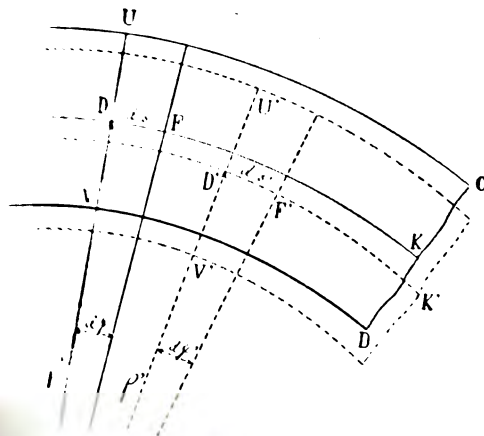


Fig. 270

la nouvelle forme qu'affecte la fibre moyenne HK, U'V' la
section normale UV, φ et φ' les angles faits
avec une direction fixe (la verticale par exemple), ρ et ρ'
les rayons de courbure aux points D et D', ds' la nouvelle
longueur de la fibre moyenne en D.

Si donc l est l'allongement (positif ou négatif) par millimètre courant de l'arc ds , on a

$$l = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1$$

Considérons maintenant la fibre JL parallèle à HK et distante de cette dernière d'une quantité $D\alpha = e$; après la déformation elle vient en $J'L'$ et, comme les déformations transversales du solide sont supposées négli-

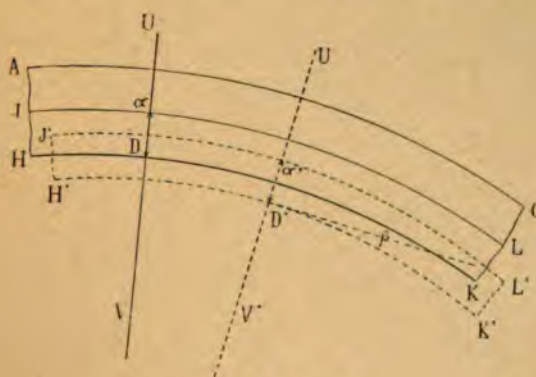


Fig. 271

geables vis à vis des autres, on peut admettre que $D'\alpha' = D\alpha = e$. Si donc ds'_1 est la longueur, après déformation, d'un arc ds_1 pris sur la fibre JL au point α , on a

$$ds_1 = (\rho + e) d\varphi = \left(1 + \frac{e}{\rho}\right) ds$$

$$ds'_1 = (\rho' + e) d\varphi' = \left(1 + \frac{e}{\rho'}\right) ds' = \left(1 + \frac{e}{\rho'}\right) (1 + l) ds$$

Si λ est l'allongement (positif ou négatif) par millimètre courant de la fibre en question JL au point α , il s'ensuit que

$$\lambda = \frac{ds'_1 - ds_1}{ds_1}$$

ou bien

$$\lambda = \frac{1 + \frac{e}{\rho'} + l + \frac{e \cdot l}{\rho'} - 1 - \frac{e}{\rho} + \frac{e \cdot l}{\rho} - \frac{e \cdot l}{\rho}}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

$$\lambda = l + \frac{e(1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

Or nous avons admis, comme étant suffisamment conforme à la réalité, que les dimensions transversales de la pièce sont faibles relativement à son rayon de courbure; on peut négliger $\frac{e}{\rho}$ en présence de l'unité et écrire

$$\lambda = l + e (1 + l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right)$$

Si donc, comme nous l'avons supposé pour les pièces droites (§ 43), l'effort de tension ou de compression t qui correspond à l'allongement ou au raccourcissement de la fibre de section $d\omega$ est le même que si cette dernière était isolée des autres, on a

$$t = E. \lambda. d\omega = E. l. d\omega + E (1 + l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) e. d\omega$$

Ceci posé, considérons le solide comme séparé en deux parties par le plan U'V' et écrivons qu'il y a équilibre entre les forces intérieures développées par le tronçon de gauche et les forces extérieures appliquées au tronçon de droite. Projetons d'abord toutes les forces sur la tangente à la fibre moyenne D'\beta et appelons T la somme des projections sur D'\beta des forces extérieures agissant sur le tronçon de droite, ou, comme on le dit souvent, l'effort tangentiel appliqué à la section considérée; nous avons

$$T = E. l. \Omega + E (1 + l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \int e. d\omega$$

Ω étant la surface de la section normale UV. Or on a $\int e. d\omega = 0$ puisque, par hypothèse, le point D est le centre de la section; donc, en définitive,

$$(1) \quad T = E. l. \Omega$$

équation qui donne la valeur de l , c'est-à-dire l'allongement par millimètre courant de la fibre moyenne au point considéré, puisque toutes les forces extérieures appliquées au solide déformé (y compris les réactions des points d'appui) sont supposées connues.

Passons maintenant à l'équation des moments. En appelant M le moment des forces extérieures du tronçon de droite par rapport au point D' de la fibre moyenne, on a

$$\int t. e = M$$

c'est-à-dire

$$M = E. l. \int e. d\omega + E (1 + l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \int e^2. d\omega$$

Or $\int e. d\omega = 0$; d'autre part $\int e^2. d\omega$ est le moment d'inertie I de la section normale UV par rapport à la perpendiculaire au plan de symétrie menée par le centre de gravité D de cette section; on a donc

$$(2) \quad M = E. I. (1 + \nu) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right)$$

relation qui permet de calculer ρ' (la forme et les dimensions de la pièce étant connues ainsi que M), et par suite de déterminer le nouveau contour H'K' de la fibre moyenne puisque d'autre part l'équation (1) donne l'allongement par millimètre courant de celle-ci (*).

§ 183. — Effort tranchant.

Comme dans le cas des pièces droites (§ 45), il nous reste encore une équation d'équilibre à écrire, celle qui est relative à la projection des forces extérieures sur la section normale UV; cette projection donne la valeur de l'effort tranchant Q appliqué à la section en question.

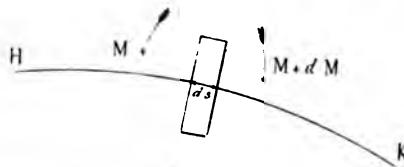


Fig. 272

Par un raisonnement absolument identique à celui du paragraphe 45, on démontrerait que, si l'on appelle ds la longueur d'un arc infiniment petit près la ligne des fibres moyennes HK, on a, dans les mêmes conditions (§ 46) (*)

$$Q = - \frac{dM}{ds}$$

(1) Comme on le voit d'après l'équation (2), l'existence du moment fléchissant est intimement liée avec celle du terme $\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}$ ou, en d'autres termes avec la *variation* de la courbure. On remarquera en outre que M est positif ou négatif suivant que ce moment tend à augmenter ou à diminuer la courbure de la pièce au point considéré; c'est la même chose que pour les pièces droites (§ 46). Quant à T, une valeur positive correspond à un allongement, une valeur négative à un raccourcissement.

(2) En particulier on ne doit pas perdre de vue que les forces, qui sont obliques à la direction de la fibre moyenne, doivent avoir leur point d'application situé sur cette fibre.

c'est-à-dire que, si on construit une courbe ayant pour ordonnées les moments fléchissants et pour abscisses les longueurs de la courbe HK développée, la tangente donnera la valeur de l'effort tranchant. Aux points où $Q = 0$, M est maximum ou minimum.

En ce qui concerne la répartition de ce dernier dans l'intérieur de chaque section transversale considérée, des considérations semblables à celles qui ont été développées pour les pièces droites sont encore applicables et il nous paraît inutile d'insister davantage sur ce sujet.

§ 184. — Condition de plus grande charge.

L'effort que supporte une fibre quelconque de section $d\omega$ est (§ 182)

$$t = E \cdot l \cdot d\omega + E(1+l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) e \cdot d\omega$$

ce qui peut s'écrire

$$t = E \cdot l \cdot d\omega + \frac{M \cdot e}{I} \cdot d\omega$$

Si donc R est la charge par millimètre carré de cette fibre,

$$R = E \cdot l + \frac{M \cdot e}{I} = \frac{T}{\Omega} + \frac{M \cdot e}{I}$$

Comme dans le cas des pièces droites (§ 43), le maximum de R , pour une section transversale donnée, a lieu en même temps que celui de e , c'est-à-dire pour le point le plus éloigné de la fibre moyenne (au-dessus ou au-dessous suivant qu'on considère les fibres allongées ou comprimées). En appelant v la distance maximum en question comptée d'un bord ou de l'autre suivant le cas, on a donc

$$R = \pm \frac{T}{\Omega} + \frac{M \cdot v}{I}$$

relation qui donne la tension ou la compression de la fibre la plus chargée; c'est la même que pour les poutres droites soumises à des forces obliques (§ 120).

Comme pour les pièces droites, la formule ci-dessus ne tient pas compte de l'effort tranchant qui, dans certains cas, ne saurait sans

inconvenient être laissé de côté. Les considérations dans lesquelles il convient d'entrer à cet égard sont identiques à celles qui ont été longuement développées pour les solides droits et elles conduisent aux mêmes règles pratiques que celles qui ont été formulées au paragraphe 50; il nous paraît inutile de les reproduire.

§ 185. — Remarque relative aux forces extérieures agissant sur les solides courbes et à leurs bras de levier.

Dans l'étude qui nous occupe il doit être convenu, comme toujours (§ 2), que les valeurs des forces extérieures et de leurs bras de levier sont celles qui correspondent à la *pièce déformée*. Pour les solides courbes cette remarque a une importance capitale; car, dans la plupart des cas, les réactions des points d'appui dépendent essentiellement des déformations en question (§ 191). Quant aux bras de levier des forces, il se trouve que, dans la généralité des pièces employées dans les constructions, ils n'éprouvent que des variations relatives insignifiantes; dans ce cas, mais dans ce cas seulement, il est légitime de les relever sur le solide pris dans son état naturel.

§ 186. — Position de la fibre neutre ou invariable.

Considérons une section normale quelconque UV et cherchons sur cette dernière le point S qui ne subit ni allongement ni raccourcissement

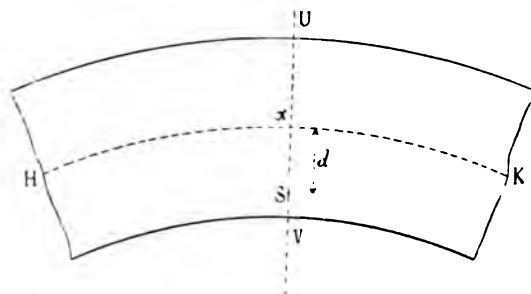


Fig. 273

ou, en d'autres termes, celui par lequel passe la *ligne des fibres neutres*.

Pour calculer la position de S, il suffit évidemment de faire $\lambda = 0$ dans l'équation (§ 182)

$$\lambda = l + e(1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)$$

ce qui donne, en posant $eS = d$

$$l + d(1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = 0$$

Or

$$l = \frac{T}{E \cdot \Omega} \quad \text{et} \quad (1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{M}{E \cdot I}$$

Donc

$$\frac{T}{E \cdot \Omega} + \frac{M \cdot d}{E \cdot I} = 0$$

$$d = -\frac{T \cdot I}{M \cdot \Omega}$$

relation qui donne la valeur de d et permet par conséquent de tracer par points la fibre neutre. C'est la même formule que pour les pièces droites fléchies et tirées (§ 120). Comme on le remarquera, le point S peut évidemment se trouver situé en dehors de la section UV, au-delà du point V.

§ 187. — Tracé de la fibre moyenne déformée.

Soit ABCD la pièce courbe considérée et HK sa fibre moyenne avant déformation; partageons HK en un certain nombre de parties, égales

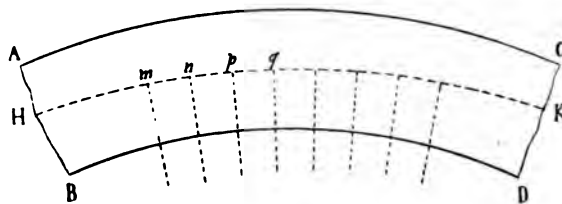


Fig. 274

par exemple, ce qui nous donne les points de division m, n, p, q, \dots et,

déterminons quelle est, pour chacun d'eux, la valeur du rayon de courbure ρ . Les deux équations

$$(1) \quad T = E. l. \Omega$$

$$(2) \quad E. I (1 + l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) = M$$

permettent de calculer l (et par suite les *nouvelles* longueurs des divisions $m'n, n'p, \dots$) ainsi que les *nouveaux* rayons de courbure ρ' ; on a en effet

$$l = \frac{T}{E. \Omega}$$

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E. I \left(1 + \frac{T}{E. \Omega} \right)}$$

nous pourrons donc, comme pour les pièces droites (§ 58), tracer par arcs de cercle successifs la fibre moyenne avec la nouvelle forme qu'elle affecte après déformation.



Fig. 275

Si les rayons de courbure ρ' sont trop grands pour qu'on puisse opérer de cette façon, on remarquera que l'angle que forment entre eux, après déformation, deux éléments consécutifs de la fibre moyenne est précisément égal à l'angle $d\varphi'$ de la figure 270. Or on a

$$d\varphi' = \frac{ds'}{\rho'} = \frac{1+l}{\rho'} \cdot ds =$$

$$= (1+l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) ds + \frac{1+l}{\rho} \cdot ds$$

$$\pm \frac{ds}{\rho} + \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds$$

$$d\varphi' = d\varphi + \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds \quad (1)$$

Cet angle peut donc se calculer facilement, ce qui permet de tracer à la suite les uns des autres les différents éléments de la fibre moyenne déformée puisque d'autre part leurs longueurs ds' sont connues; c'est le même procédé que pour les pièces droites (§ 58). Si ρ est suffisamment grand, le terme $\frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho}$ pourra d'ailleurs être négligé en présence de $\frac{M}{E \cdot I}$ ce qui simplifiera les choses.

§ 188. — Variation des coordonnées des différents points de la fibre moyenne.

Il est souvent utile d'avoir l'expression algébrique des déplacements éprouvés par les divers points de la fibre moyenne (*); c'est de cette détermination dont nous allons nous occuper maintenant.

Soit HK la fibre moyenne non déformée dont l'équation est donnée en coordonnées rectangulaires; proposons-nous de calculer la variation que subit, par suite de la déformation, chacune des coordonnées d'un point quelconque B de HK (**).

Prenons sur la fibre un point quelconque A comme origine; ce sera par exemple un point d'appui, un point d'encastrement, ou tout autre choisi comme on voudra. Appelons Δx_0 , Δy_0 les changements que la déformation fait éprouver à ses coordonnées, et α_0 l'angle dont s'incline la normale AA'. Les coordonnées du point B varient pour deux raisons :

1° parce que le point A pris pour origine se déplace en même temps que la normale AA' change d'orientation;

(1) Comme on le remarquera l'angle $d\alpha$ dont un élément $n'p'$ s'incline par rapport à sa direction primitive est égal à $d\varphi' - d\varphi$, de sorte que

$$d\alpha = \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds$$

(2) Quand les réactions des points d'appui ne peuvent pas se déterminer par la Statique seule, et c'est là ce qui arrive le plus souvent, on a recours à ces expressions pour obtenir des équations susceptibles de fournir les valeurs des réactions en question (§ 191).

(3) Dans les formules qui vont suivre, T et M doivent être considérés comme positifs quand ils sont dirigés l'un dans le sens des x positifs, l'autre dans le sens de la rotation qui va de Ox vers Oy; dans le cas contraire ils seront négatifs. C'est un point qui ne doit pas être perdu de vue et dont on trouvera un exemple au paragraphe 194 à propos de la déformation d'un anneau elliptique.

2° parce que l'arc AB se déforme.

Etudions séparément chacun de ces effets.

Les variations Δx_0 , Δy_0 se font sentir telles quelles sur le point B;

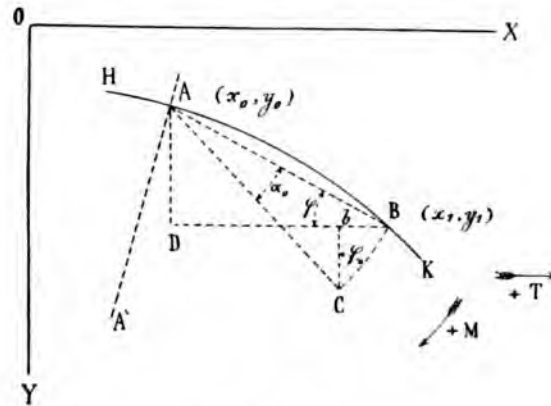


Fig. 276

occupons-nous donc de l'effet produit par la rotation α_0 de la normale AA'. En vertu de cette rotation, B décrit un arc de cercle BC, et les variations éprouvées de ce fait par l'abscisse et l'ordonnée de ce point sont

$$\begin{aligned} -Bb &= -BC \times \sin \varphi = -AB \times \alpha_0 \times \sin \varphi \\ &= -\frac{AD}{\sin \varphi} \times \alpha_0 \times \sin \varphi = -\alpha_0 (y_1 - y_0) \\ bC &= BC \times \cos \varphi = AB \times \alpha_0 \times \cos \varphi \\ &= \frac{BD}{\cos \varphi} \times \alpha_0 \times \cos \varphi = \alpha_0 (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

La variation des coordonnées de B due au premier effet ci-dessus est donc

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= \alpha_0 (y_1 - y_0) \\ \Delta y_0 &= \alpha_0 (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Calculons en second lieu les changements provenant de la déformation de l'arc AB; S étant un point quelconque de ce dernier, à partir duquel nous portons une longueur ds , l'allongement $\frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot ds$ de cet arc a pour projections

$$\frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot dx \quad , \quad \frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot dy$$

De plus la normale NS d'arcure d'un angle α par rapport à la section normale infiniment voisine, ce qui produit sur les coordonnées du

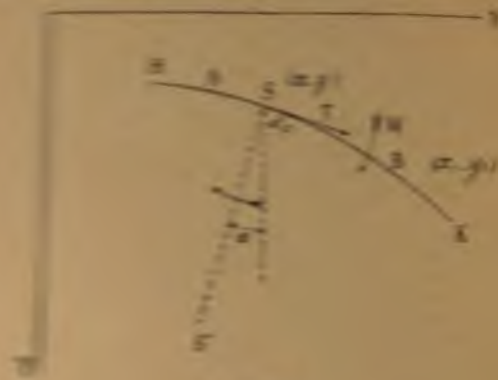


Fig. 17

point B des variations qui sont, d'après ce qu'on vient de voir et en raison de l'angle α , égales à

$$\begin{aligned} & -dy(y - y) \\ & dx(x - x) \end{aligned}$$

Les déplacements que les coordonnées du point B éprouvent par suite de la déformation de l'arc AB sont donc

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int_A^B (y - y) dx \\ \int_A^B \frac{\partial u}{\partial y} dy &= \int_A^B (x - x) dx \end{aligned}$$

En résumé, en supposant les déformations dues à ces diverses causes, on a pour les variations totales éprouvées par les coordonnées x , et y , de point B

$$\begin{aligned} dx &= \int_A^B \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_A^B (y - y) dx \\ dy &= \int_A^B \frac{\partial u}{\partial y} dy + \int_A^B (x - x) dx \end{aligned}$$

On a vu d'autre part (§ 187) que

$$dx = \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds$$

de sorte que en définitive

$$(1) \Delta x_1 = \Delta x_0 + \alpha_0 (y_1 - y_0) + \int_A^B \frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot dx - \int_A^B (y_1 - y) \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds$$

$$(2) \Delta y_1 = \Delta y_0 + \alpha_0 (x_1 - x_0) + \int_A^B \frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot dy + \int_A^B (x_1 - x) \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds$$

Les équations (1) et (2) résolvent le problème qui nous occupe; il y a lieu seulement de calculer les diverses intégrales qu'elles renferment, ce qui est possible (analytiquement ou graphiquement) puisqu'elles ne renferment que des quantités connues, les dimensions et la forme de la pièce étant données ainsi que les forces extérieures appliquées au solide, y compris les réactions des points d'appui. Quant aux quantités Δx_0 , Δy_0 et α_0 , elles résultent, elles aussi, des données mêmes du problème qu'on se propose de résoudre; si par exemple l'appui A constitue un encastrement, on a évidemment $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$ et $\alpha_0 = 0$.

Remarquons en terminant que le changement total d'inclinaison α_1 éprouvé par la fibre moyenne à son extrémité B est donné par la relation

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \int_A^B \left(\frac{M}{E \cdot I} + \frac{T}{E \cdot \Omega \cdot \rho} \right) ds$$

On voit également que l'arc AB de longueur S a augmenté de longueur d'une quantité égale à

$$\int_A^B ds' - ds = \int_A^B l \cdot ds = \int_A^B \frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot ds$$

ce qui donne pour la longueur nouvelle S' de l'arc déformé

$$S' = S + \int_A^B \frac{T}{E \cdot \Omega} \cdot ds$$

§ 189. — **Applications relatives à divers cas où les forces extérieures, y compris les réactions des points d'appui, sont connues.**

Quand la pièce courbe est fixée par l'une de ses extrémités seulement, de sorte que l'autre se trouve libre, les calculs à effectuer pour vérifier si le solide présente la résistance voulue n'offrent pas de difficultés.

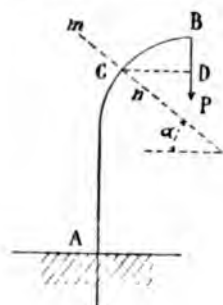


Fig. 278

Soit par exemple une potence encastree en A et supportant en B un poids P; si l'on fait en un point quelconque C une section normale mn , on connaît toutes les forces extérieures appliquées à la partie CB, puisqu'il n'y a pas de point d'appui situé à droite de mn . On voit donc de suite qu'on a en C une force de compression T égale à $P \cdot \cos \alpha$ et que la plus grande charge de la section mn est donnée par la formule (§ 184)

$$R = \frac{T}{\Omega} + \frac{M \cdot v}{I} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{\Omega} + \frac{P \times CD \times v}{I}$$

C'est dans la région qui travaille à la compression que se produira cette charge maximum. Dans la partie où les fibres sont sollicitées à la traction, on a évidemment

$$R_t = -\frac{T}{\Omega} + \frac{M \cdot v}{I}$$

Enfin il pourra être nécessaire, dans certains cas, de tenir compte de l'effort tranchant $P \cdot \sin \alpha$ (§ 184); si, par exemple, la potence est composée de deux semelles et d'une âme mince, cette dernière sera considérée comme résistant seule à l'effort en question.

Lorsqu'au lieu d'une force unique P, on en a plusieurs, le mode d'opérer est le même.

Le cas d'un croc, encastree dans un mur par exemple, se traitera d'une manière absolument semblable; il en sera encore de même si l'on a affaire à un anneau, circulaire ou non, ouvert en l'un de ses points et encastree ou suspendu; chacune des deux parties situées à droite ou à gauche du point de fixation sera alors assimilée au croc ou à la potence

dont nous venons de parler. Dans ces divers problèmes on aura seulement bien soin de ne pas perdre de vue que les formules précédemment établies supposent que la hauteur des pièces considérées est faible relativement à leur rayon de courbure ⁽¹⁾. Il doit en outre être bien entendu que, quand le bras de levier des forces de flexion devient lui-même très petit comparativement à cette hauteur, les phénomènes changent de nature et sont alors plutôt du domaine du glissement que de la flexion, comme nous l'avons expliqué au paragraphe 50 en donnant les règles pratiques à suivre.

Un autre cas remarquable où le calcul des pièces courbes s'effectue d'une manière relativement simple est celui d'un solide courbe muni de trois articulations, A, B, C par exemple; nous avons vu en effet (§ 157) que, dans ce cas, les efforts qui se produisent en A, B, C peuvent, en grandeur et en direction, se calculer par la Statique seule; les réactions des appuis sont donc entièrement connues aussi bien que les autres

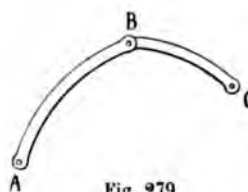


Fig. 279

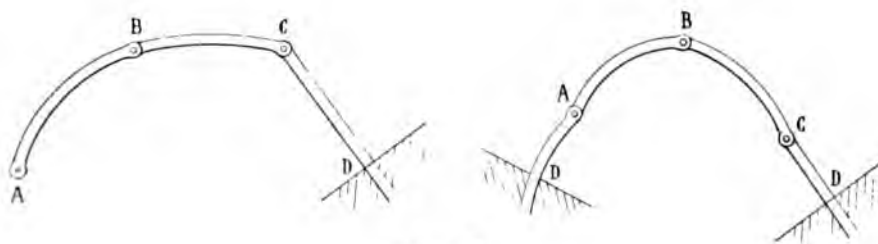


Fig. 280

forces extérieures appliquées aux solides AB, BC, et les formules données précédemment s'appliquent sans difficulté ⁽²⁾. La même remarque est évidemment applicable aux dispositifs de la figure 280 qui jouissent de la même propriété et dans lesquels il y a encastrement en D, et articulation en A, B, C.

(1) On verra plus tard ce qu'il convient de faire (§ 190) quand cette condition n'est pas remplie.

(2) Les solides de ce genre sont, comme on le voit, d'un calcul plus facile et plus sûr; ils n'exigent aucun réglage et les efforts qui s'exercent aux articulations ne sont pas modifiés par une variation de température; en revanche ils sont sensiblement plus déformables que ceux qui ne sont pas articulés et l'effet des vibrations est plus à craindre pour eux.

§ 190. — **Cas où le rayon de courbure n'est pas très grand relativement à la hauteur des sections transversales.**

Supposons maintenant que la hauteur des diverses sections transversales du solide considéré ne soit pas très faible relativement au rayon de courbure de la fibre moyenne (1); dans les formules du paragraphe 182, on ne peut plus alors négliger $\frac{e}{\rho}$ devant l'unité, de sorte qu'il faut prendre (§ 182)

$$\lambda = l + \frac{e(1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

On en déduit ensuite

$$T = E \cdot l \cdot \Omega + E(1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \int \frac{e \cdot d\omega}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

$$M = E(1+l)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \int \frac{e^2 \cdot d\omega}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

Posons

$$\int \frac{e^2 \cdot d\omega}{1 + \frac{e}{\rho}} = \Gamma$$

et remarquons que

$$\int \frac{e \cdot d\omega}{1 + \frac{e}{\rho}} = \int \frac{e + \frac{e^2}{\rho} - \frac{e^2}{\rho}}{1 + \frac{e}{\rho}} d\omega = \int e \cdot d\omega - \frac{\Gamma}{\rho} = -\frac{\Gamma}{\rho}$$

puisque $\int e \cdot d\omega = 0$; on a alors

$$(1) \quad T = E \cdot l \cdot \Omega - \frac{E \cdot \Gamma}{\rho} (1+l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)$$

$$(2) \quad M = E \cdot \Gamma (1+l) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)$$

(1) Bien que $\frac{e}{\rho}$ ne soit plus alors négligeable devant l'unité, nous supposons cependant que e reste assez faible pour que les dimensions transversales de la pièce puissent être considérées comme constantes sans qu'il en résulte d'erreur notable; en d'autres termes on ne tient pas compte de la contraction transversale η (§ 21).

En éliminant Γ' , on en déduit la relation très simple

$$(3) \quad T = E. l. \Omega - \frac{M}{\rho}$$

Ces deux dernières équations permettent évidemment de déterminer l et ρ' , puisque la quantité

$$\Gamma = \int \frac{e^2. d\omega}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

peut se calculer (analytiquement ou graphiquement) pour une section transversale quelconque qu'on connaît. Le contour de la fibre moyenne déformée est donc susceptible maintenant d'être tracé par les moyens que nous avons indiqués précédemment. Si, pour cette opération, on a recours à la valeur de l'angle $d\varphi'$ (§ 187), on remarquera qu'on a alors

$$d\varphi' = \frac{ds'}{\rho'} = \frac{1+l}{\rho'} ds$$

ce qui donne

$$d\varphi' = d\varphi + \left(\frac{M}{E. \Gamma} + \frac{T}{E. \Omega. \rho} + \frac{M}{E. \Omega. \rho^2} \right) ds$$

et l'angle $d\alpha$ dont tourne chaque élément par rapport à sa position primitive est

$$d\alpha = \left(\frac{M}{E. \Gamma} + \frac{T}{E. \Omega. \rho} + \frac{M}{E. \Omega. \rho^2} \right) ds$$

ce qui donne pour la variation totale d'inclinaison α_1 éprouvée par l'un des points de la fibre moyenne

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \int \left(\frac{M}{E. \Gamma} + \frac{T}{E. \Omega. \rho} + \frac{M}{E. \Omega. \rho^2} \right) ds$$

Quant à la plus grande charge par millimètre carré R , on voit facilement qu'elle est égale à

$$R = \pm \frac{T + \frac{M}{\rho}}{\Omega} + \frac{M. v}{\Gamma \left(1 + \frac{v}{\rho} \right)}$$

expression dont le second membre ne renferme que des quantités connues.

On remarquera combien, toutes choses égales d'ailleurs, R augmente à mesure que le rayon de courbure ρ diminue.

Relativement à l'effort tranchant, nous n'avons rien de particulier à signaler et il y aura lieu d'en tenir compte dans les cas qui ont été indiqués.

La détermination de la fibre neutre ne présente pas de difficulté; il suffit en effet d'écrire qu'on a

$$\lambda = 0$$

c'est-à-dire

$$0 = l + \frac{d \cdot (1 + D) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right)}{1 + \frac{d}{\rho}}$$

ce qui donne

$$d = - \frac{\left(T + \frac{M}{\rho} \right) \Gamma'}{M \Omega + \left(T + \frac{M}{\rho} \right) \frac{\Gamma'}{\rho}}$$

Les formules qui précèdent sont applicables au croc d'une grue, à la fourche d'une bielle, etc., pièces dans lesquelles le rayon de courbure est assez faible; il ne nous paraît pas nécessaire d'entrer dans des explications détaillées à ce sujet. Nous ferons remarquer seulement que, le bras de levier des forces en jeu étant faible, il importe essentiellement de tenir compte de l'effort tranchant suivant les principes que nous avons exposés (§ 50).

Deuxième Partie. — Les réactions des points d'appui
ne sont pas connues.

§ 191. — Calcul des réactions des points d'appui.

Sauf un certain nombre de cas assez limités (§ 189), les réactions produites par les points d'appui dépendent des déformations éprouvées par le solide et ne peuvent pas s'obtenir par la Statique seule. Voici comment on peut alors procéder à leur détermination qui est nécessaire pour le calcul des dimensions de la pièce.



Fig. 281

Considérons d'abord par exemple le cas d'une pièce courbe fixée en A et B par deux articulations; la Statique permet de calculer les composantes normales P et P' des réactions (en prenant les moments par rapport à B et A) ainsi que la *différence* Q—Q'. Pour aller plus loin il faut avoir recours aux relations (1) et (2) du paragraphe 188, qui donnent les variations Δx_1 et Δy_1 du point B. Comme le point A est fixe, aussi bien que B, on a comme données du problème $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$, de sorte que les deux équations de condition

$$\Delta x_1 = 0$$

$$\Delta y_1 = 0$$

ne renferment que deux inconnues, Q ou Q' et la variation d'inclinaison α_0 .

opposées par la fibre moyenne en A; on peut donc ainsi obtenir Q et Q' de la même manière, en grandeur et en direction, les forces opposées R et R'.



Fig. 108

Si on se représente un arc encastré en A et en B, le déplacement, l'angle et le moment en B, Q, R, Q' et les deux moments d'encastrement A, B, sont les six inconnues de la question; remarquons que, Δx_0 , Δy_0 et α , étant connus, on a six équations de conditions de liaisons; que les six inconnues ci-dessus; ce sont les six équations ordinaires d'équilibre, puis les suivantes

$$\begin{aligned} H &= 0 \\ V &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned}$$

On a donc six équations qui peuvent être considérées comme résultant de la théorie de la déformabilité de la poutre. On traiterait d'une manière semblable à l'équation de la poutre courbe et le nombre des inconnues est toujours plus ou moins grand de trois à quatre, à moins qu'on ne se représente un arc encastré en A et en B, ce qui donnerait six inconnues de plus. D'une manière générale, on peut dire que le nombre des inconnues est toujours plus ou moins grand de trois à quatre, à moins qu'on ne se représente un arc encastré en A et en B, ce qui donnerait six inconnues de plus. D'une manière générale, on peut dire que le nombre des inconnues est toujours plus ou moins grand de trois à quatre, à moins qu'on ne se représente un arc encastré en A et en B, ce qui donnerait six inconnues de plus.

et de la déformation d'un solide courbe se fera au moyen des procédés que nous avons indiqués ; on se trouve seulement conduit à la détermination d'intégrales parfois très compliquées. C'est pour simplifier l'ensemble de ces recherches qu'il a été établi, notamment par Bresse, des tableaux donnant les résultats numériques des formules dans un nombre de cas assez grand de pièces courbes, de façon à dispenser de calculs longs et fastidieux et à permettre d'arriver assez rapidement à une solution pratique.

Comme il importe essentiellement de le remarquer, les méthodes que nous avons exposées supposent qu'on se donne préalablement la forme et les dimensions du solide courbe ; elles permettent donc seulement de vérifier que les données ainsi choisies d'une façon plus ou moins heureuse ne conduisent pas à des charges ou à des flèches exagérées, et ce n'est par conséquent que par une série plus ou moins longue de tâtonnements qu'on peut arriver à trouver la pièce courbe qui satisfait d'une manière convenable aux conditions qu'on s'est préalablement imposées.

§ 192. — **Importance et avantages des réactions des appuis dans les solides courbes.**

Comme on le comprend sans peine, les composantes Q et Q' dirigées suivant la droite qui joint les points d'appui ont pour effet de donner lieu à des moments fléchissants qui agissent dans un sens contraire à celui des forces extérieures et qui diminuent ainsi la fatigue du solide ; c'est là un avantage considérable que présentent les pièces courbes par rapport aux poutres droites et qui leur permet de franchir, sans support intermédiaire, des portées plus grandes (*).

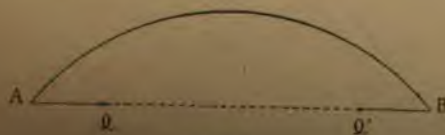


Fig. 283

Les réactions exercées par les points d'appui augmentent évidemment, toutes choses égales d'ailleurs, en même temps que les défor-

(*) On pourrait facilement annuler l'existence des forces Q et Q' en faisant reposer l'une des extrémités de l'arc sur un plateau nivelé de hauteur ; les réactions des appuis pourraient alors se réduire à celle de l'élasticité seule, mais le solide ne serait plus en état de supporter des charges aussi

mations auxquelles ceux-ci s'opposent; c'est là précisément ce qui explique ce fait singulier signalé par Bresse à savoir que, en augmentant la hauteur de la section transversale de certains arcs et par suite le moment d'inertie I (tout en conservant la surface Ω constante), on puisse cependant diminuer leur solidité, c'est-à-dire la charge maximum qu'ils sont en état de porter dans de bonnes conditions. On voit par là combien l'étude des solides courbes est délicate et quelle importance présentent les calculs qui servent à leur établissement.

Dans le calcul des réactions des points d'appui, nous avons admis qu'on a rigoureusement $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y_0 = 0$, $\Delta x_1 = 0$, $\Delta y_1 = 0$, c'est-à-dire que les appuis en question jouissent d'une fixité absolue. S'ils venaient à céder d'une manière sensible à l'action des efforts qui leur sont appliqués, on comprend de suite que les conditions de résistance de l'arc seraient notablement modifiées; c'est là un détail qui a une importance capitale.

Un autre point à noter est le suivant : sous l'influence d'une variation de température, la pièce courbe change de longueur et par suite exerce sur ses appuis des réactions susceptibles de changer notablement de valeur. Une remarque du même genre est applicable au *calage* des constructions de ce genre; suivant la façon dont celui-ci est exécuté, on obtient des résultats très dissemblables. En raison de ces particularités, de la longueur et de la difficulté des calculs auxquels on est conduit, ainsi que des hypothèses peu fondées auxquelles on a parfois recours dans un but de simplification, il n'y a pas lieu de s'étonner que dans certains ouvrages « le calcul soit en plein désaccord avec l'expérience (1) ». Il ne faudrait pas toutefois s'exagérer les inconvénients que présentent sous ce rapport les pièces courbes; il convient seulement de ne pas perdre de vue que, dans tous les cas de ce genre, une grande prudence et le sens pratique des choses sont nécessaires à qui veut éviter tout mécompte.

§ 193. — Anneau circulaire de section constante sollicité par deux forces diamétralement opposées.

Soit EFGH l'anneau considéré soumis à l'action des forces P ; nous supposons, comme toujours que, la limite d'élasticité n'étant atteinte en aucun point, les déformations sont très faibles et que les forces

(1) Voir le *Traité des Ponts métalliques* par Jean Résal, tome I, page 415.

extérieures ainsi que leurs bras de levier n'éprouvent, de ce fait, aucune modification sensible, ce qui est légitime dans le cas actuel (1).

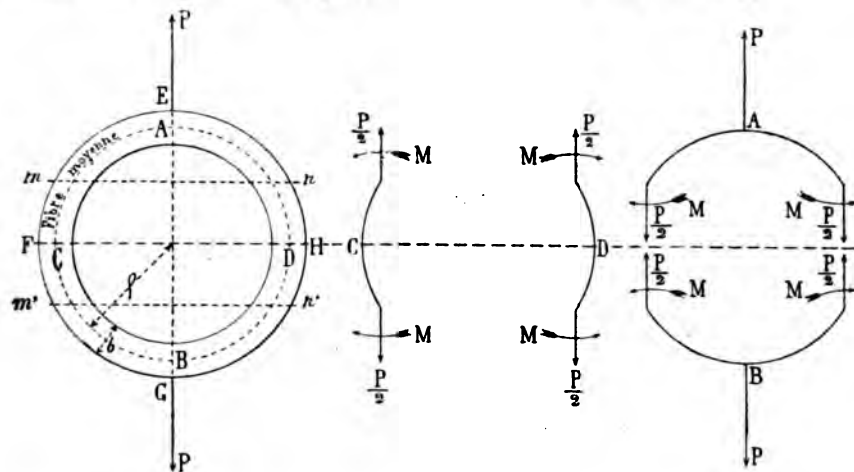


Fig. 284

Tout étant symétrique par rapport aux diamètres EG et FH, les tangentes restent horizontales en E et G, et verticales en F et H. Coupons l'anneau par deux plans mn, m'n' équidistants du centre et isolons les

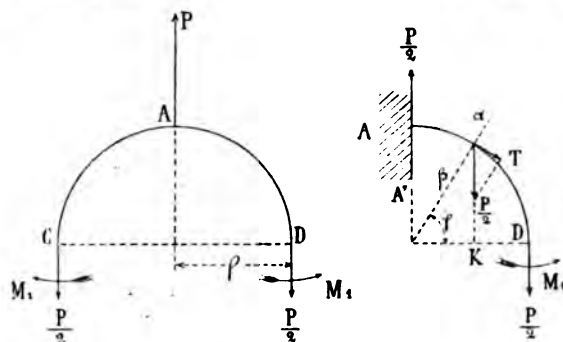


Fig. 285

quatre parties ainsi obtenues, comme l'indique la figure 284; les forces qu'il faut ajouter pour compenser l'action des portions enlevées se

(1) S'il y avait un étai allant de C en D, la déformation de l'anneau donnerait lieu à une réaction de ce dernier produisant alors un effet tout à fait semblable à celui de deux points d'appui C et D; l'hypothèse qui sert de base à nos calculs ne serait plus alors admissible puisque de nouvelles forces extérieures prendraient naissance par suite même du plus petit changement de forme du solide. Il en serait encore évidemment de même dans plus d'une autre circonstance. On traiterait alors le problème en écrivant une nouvelle équation de condition exprimant que la distance CD reste invariable, mais cela conduit à de très grandes complications.

... qui sont forcément ver
 ... aucune action
 ... et directement opposés.
 ... en considérant les deux
 ... section par le
 ... $\frac{1}{2} P$ dont il vient d'être
 ... valeur particulière M_0 .
 ... AD isolé du reste de la
 ... qui est légitime puisque la
 ... M_0 le moment d'encastre-
 ... avoir recours aux théories
 ... rapprocher davantage de
 ... la hauteur h du solide s'est
 ... l'unité (§ 190); nous con-
 ... n'atteint pas une valeur
 ... compte de la contrac-
 ... transversales (ϵ).
 ... quelque ϵ faite
 ... M le
 ... tangential.



Remplaçons M et T par leurs valeurs et intégrons, en remarquant que l' et Ω sont constants par hypothèse ; nous avons ainsi

$$\frac{E \cdot I' \cdot \Omega \cdot \rho^2}{I' + \Omega \cdot \rho^2} \alpha = C + \left(M_1 - \frac{1}{2} P \cdot \rho \right) \rho \cdot \varphi + \frac{1}{2} P \cdot \rho (\rho + a) \sin \varphi$$

La direction de la tangente ne changeant ni en D ni en A, la variation totale d'inclinaison α est nulle pour φ = 0 et pour φ = π/2, on a donc d'abord C = 0, puis

$$M_1 = P \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho + a}{\pi} \right)$$

La valeur du moment fléchissant M₂ qui sollicite la section AA' de l'anneau s'en déduit immédiatement ; on a en effet

$$M_2 = M_1 - \frac{1}{2} P \cdot \rho$$

$$M_2 = - \frac{\rho + a}{\pi}$$

M₂ est donc négatif ; d'autre part il est facile de voir que M₁ est toujours positif ; il en résulte que le moment fléchissant M s'annule entre A et D pour un certain point K qui est donné par la relation

$$a = M_1 - \frac{1}{2} P \cdot \rho (1 - \cos \varphi_1)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{a}{\rho} \right)$$

Comme a est faible en comparaison de l'unité. Il



résulte de là qu'en K, K₁, K₂, K₃ le

conséquent qu'on pourrait mettre des articulations en ces quatre points sans troubler en aucune façon l'équilibre de l'anneau.

Dans une section transversale quelconque correspondant à l'angle φ , la charge maximum R est (§ 190)

$$R = \pm \frac{T + \frac{M}{\rho}}{\Omega} + \frac{M \cdot \sigma}{r \left(1 + \frac{r}{\rho}\right)}$$

et, pour connaître quelles sont dans toute la pièce les fibres qui fatiguent le plus, il n'y a plus qu'à voir pour quelle valeur de φ l'expression R acquiert la plus grande valeur. On reconnaît facilement que cette particularité se présente soit en A, soit en D (*) de sorte qu'en définitive il suffira de calculer R pour les deux points en question. On aura soin d'ailleurs, bien entendu, de tenir compte en outre de l'effort de cisaillement comme cela a été indiqué au paragraphe 50 et comme nous avons eu l'occasion de le rappeler à diverses reprises.

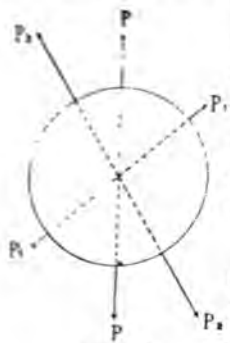


Fig. 287

Si au lieu de deux forces seulement, on en a un nombre quelconque, respectivement égales et diamétralement opposées, on considérera l'anneau comme étant successivement soumis à part à l'action des forces P, puis P₁ et ensuite P₂, etc., après

quoi il ne restera plus qu'à superposer tous les effets séparément produits.

§ 194. - Anneau légèrement elliptique d'épaisseur faible et constante, soumis à une pression extérieure uniformément répartie.

Soit ABCD l'anneau en question dont la fibre moyenne est une ellipse ayant pour demi-axes a et b (a étant peu différent de b) (*) et que

(*) La valeur absolue de M est en effet maximum en A et en D parce que, en ces points, l'effort tranchant Q, c'est-à-dire $\frac{dM}{ds}$, est nul.

(*) M. Bâal (*Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, 1^{er} semestre 1879 p. 997) a traité l'ellipticité n'est pas très faible.

nous supposons soumis à des forces normales uniformément réparties, dirigées vers l'intérieur et égales à p par millimètre courant du contour de l'ellipse; nous ne considérons d'ailleurs que le cas où l'épaisseur de l'anneau est faible relativement à ses rayons de courbure. Tout étant symétrique par rapport au diamètre AB , il n'y a pas d'effort tranchant appliqué aux sections transversales AA' , BB' ; car, avec une force oblique telle que F , il ne saurait y avoir symétrie relativement à AB , puisque l'action de la partie inférieure sur la portion supérieure donne évidemment lieu à un effort F_1 égal et directement opposé à F .

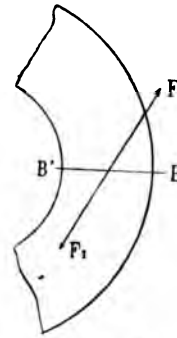


Fig. 288

Ceci posé, considérons à part le quart d'ellipse CB et appelons T_1 , M_1 l'effort tangentiel et le moment fléchissant qui sollicitent la section BB' . Si l'on désigne par M le moment fléchissant auquel est soumise une section transversale quelconque $\alpha\beta$, on a, en remarquant que la pression

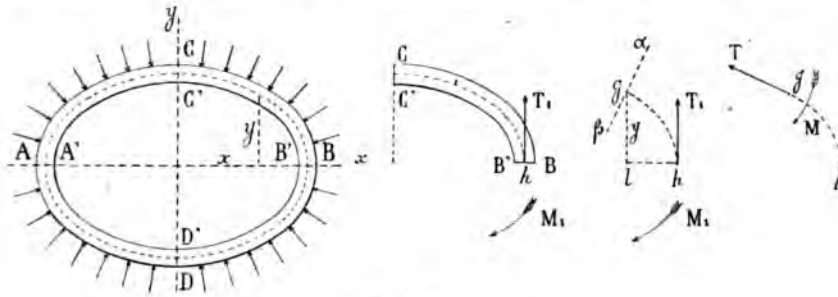


Fig. 289

par millimètre courant p qui s'exerce le long de l'arc gh peut être remplacée par celle qui agirait sur les droites gl et lh ,

$$M = p \cdot y \times \frac{1}{2} y + p (a - x) \times \frac{1}{2} (a - x) - T_1 (a - x) + M_1$$

Déterminons T_1 et M_1 . Si l'on considère à cet effet la section faite par AB , on a évidemment

$$2 T_1 = p \times 2 a$$

et par suite

$$M = \frac{1}{2} p (x^2 + y^2 - a^2) + M_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

permissible en raison de la courbure,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

intégrer en intégrant

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

l'énergie cinétique est :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Quant à l'effort tangentiel T qui est appliqué au centre de gravité g de la section $\alpha\beta$, sa valeur absolue égale à $p.a$ au point h devient $p.b$ pour l'autre sommet de l'ellipse et, comme a diffère peu de b , on peut prendre sans erreur notable

$$T = \frac{1}{2} p (a + b)$$

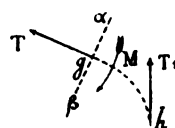


Fig. 290

Tout est donc connu pour une section transversale quelconque $\alpha\beta$ et par suite le problème proposé peut être considéré comme résolu (au moins approximativement), et la valeur de la plus grande charge est donnée, comme toujours, par la relation (§ 184)

$$R = \pm \frac{T}{\Omega} + \frac{M.v}{I}$$

$$R = \pm \frac{p(a+b)}{2\Omega} + \frac{M.v}{I}$$

Comme il importe de le remarquer, la valeur de M qui est constamment nulle pour $a=b$ (en supposant l'épaisseur de la pièce très faible) augmente rapidement avec l'excentricité et l'on voit par conséquent qu'une assez légère altération de forme d'un anneau circulaire uniformément pressé accroît notablement sa fatigue. Il est d'ailleurs à peine besoin d'ajouter que, suivant une remarque qui a été faite bien des fois, les valeurs de a et b se rapportent non pas à l'anneau primitif, mais à la *pièce déformée* ayant pris sa position d'équilibre. Si l'on n'est pas certain que les déformations restent assez faibles pour ne pas modifier sensiblement les résultats des calculs, il y a donc intérêt à déterminer ces dernières au moins d'une manière approximative, et voici comment on peut y arriver dans le cas qui nous occupe.

Cherchons à cet effet les variations qu'éprouvent les demi-axes a et b . On a, avec les notations du paragraphe 188 et en négligeant comme

on le fait à l'heure $\frac{T}{\Omega \cdot \rho}$ en présence de M ,

$$\Delta x_0 = x_0(y_1 - y_0) + \int_C^B \frac{T}{E \cdot \Omega} dx - \int_C^B (y_1 - y_0) \frac{M}{E \cdot I} ds$$

$$y_1 = 0$$

Vertical line on the right side of the page.

Small black mark at the bottom center.

RÉSISTANCE DES ENVELOPPES

§ 195. — Enveloppe cylindrique de faible épaisseur soumise à une pression intérieure.

Nous allons étudier la résistance que présentent les enveloppes à des pressions s'exerçant soit sur leur surface intérieure, soit sur leur surface extérieure; ces pressions sont produites par des liquides ou des gaz et sont par conséquent normales en chaque point de la paroi; nous supposons d'ailleurs que leur valeur est constante sur toute l'étendue de la surface et que le poids du fluide en jeu est négligeable ainsi que celui de l'enveloppe.

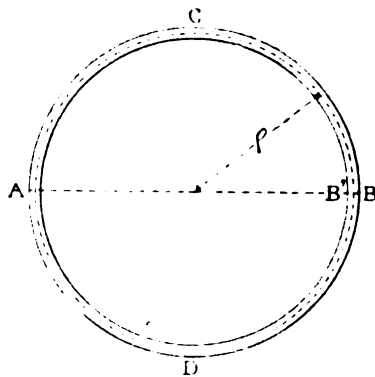


Fig. 292

Considérons d'abord une enveloppe cylindrique à profil circulaire dont l'épaisseur constante e est faible et dont la longueur est supposée indéfinie de façon à ne pas avoir à tenir compte, au moins pour le moment, de l'action exercée par les fonds. Tout étant symétrique par rapport à chacun des diamètres tels que AB, il est clair que le profil conserve

de plus, dans le problème qui nous occupe,

$$\rho' = \rho (1 + l)$$

puisque la fibre moyenne de rayon ρ se transforme en une circonférence de rayon ρ' , l étant constant. On déduit de là

$$M = -\frac{T \cdot I}{\Omega \cdot \rho}$$

et par conséquent la charge de la fibre la plus fatiguée dans la section BB', qui est égale à (§ 184)

$$R = \pm \frac{T}{\Omega} + \frac{M \cdot v}{I}$$

a pour valeur absolue en désignant par $\epsilon = 2v$ l'épaisseur de l'enveloppe

$$R = \frac{T}{\Omega} \left(1 + \frac{\epsilon}{2\rho} \right)$$

Le terme $\frac{\epsilon}{2\rho}$ qui provient de M étant, par hypothèse, négligeable devant l'unité, on voit qu'on peut, sans changer d'une manière sensible les conditions de résistance de la pièce, la supposer uniquement soumise à des efforts tangentiels T de traction.

Pour terminer ce qui concerne cette étude, il ne nous reste plus qu'à

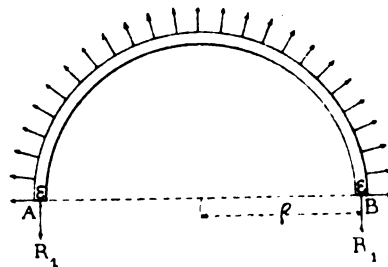


Fig. 294

calculer les efforts de traction auxquels l'enveloppe est soumise. Appelons R_1 la charge à la traction par millimètre carré, qui se produit dans le sens perpendiculaire aux génératrices du cylindre; si l'on coupe ce dernier par le plan diamétral AB et si l'on en prend une tranche de lon-

gueur L , on a, en désignant par p la pression effective par millimètre carré exercée par le fluide sur la paroi,

$$2 L. \epsilon \times R_1 = 2 \rho. L \times p$$

$$R_1 = \frac{p \cdot \rho}{\epsilon} = \frac{p \cdot D}{2 \epsilon}$$

D étant le diamètre du cylindre.

Si l'on considère maintenant une section faite perpendiculairement aux génératrices, la charge R_2 qui s'exerce dans le sens de ces dernières est évidemment donnée par la relation

$$2 \pi. \rho. \epsilon \times R_2 = \pi. \rho^2 \times p$$

$\pi. \rho^2 \times p$ étant l'effort exercé sur un fond supposé assez éloigné pour que son existence n'influe pas sur les conditions de résistance de la région considérée. On déduit de là

$$R_2 = \frac{p \cdot \rho}{2 \epsilon} = \frac{p \cdot D}{4 \epsilon} = \frac{1}{2} R_1$$

Comme on le voit et comme cela est d'ailleurs évident *a priori*, la charge R varie, autour d'un même point, suivant la direction qu'on se donne. Comme on le démontre dans la théorie mathématique de l'élasticité, c'est perpendiculairement aux génératrices du cylindre que la fatigue est la plus forte, et c'est d'après la relation $R = \frac{p \cdot D}{2 \epsilon}$ qu'il faut par conséquent calculer l'épaisseur ϵ .

La charge par millimètre carré R_1 dans le sens de la circonférence étant connue, on en déduit immédiatement quelle est la nouvelle valeur ρ' du rayon ρ ; on a en effet

$$\rho' = \rho (1 + l) = \rho \left(1 + \frac{T}{E \cdot \Omega} \right) = \rho \left(1 + \frac{R_1}{E} \right) = \rho \left(1 + \frac{p \cdot D}{2 E \cdot \epsilon} \right)$$

Remarquons en terminant que, si l'on considère un carré de 1 millimètre de côté formant comme une sorte de lanière $mm'nn'$, découpée dans l'enveloppe, on voit que celle-ci est soumise, dans deux sens rectangulaires, à des efforts de traction respectivement égaux à $R_1 \cdot \epsilon$ et $R_2 \cdot \epsilon$; en outre elle est comprimée dans le sens de son épaisseur par la force normale p ; elle ne se trouve donc pas dans les mêmes conditions que si elle était simplement sollicitée, comme dans une épreuve ordinaire de traction, par le plus grand des deux efforts ci-dessus, $R_1 \cdot \epsilon$,

pendant que ses faces latérales resteraient libres. La pression normale p , qui tend à opérer l'écrasement, a pour effet de déterminer des dilata-tions latérales (§ 29) qui augmentent évidemment la fatigue, mais la

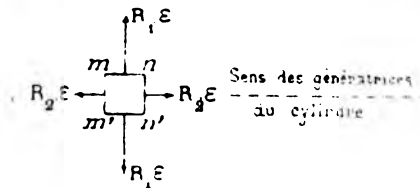


Fig. 295

force de traction $R_{1,\epsilon}$ produit un résultat d'un ordre inverse perpendi-culairement aux génératrices, c'est-à-dire dans la direction $R_{1,\epsilon}$ où la fatigue est maximum (§ 21). Dans la pratique on ne s'éloignera pas beaucoup de la vérité en négligeant l'ensemble de ces deux derniers effets et on se bornera à regarder le métal de l'enveloppe comme étant simplement soumis à un effort ordinaire de traction $R_{1,\epsilon}$ dirigé perpen-diculairement aux génératrices du cylindre.

§ 196. — Enveloppe cylindrique de faible épaisseur soumise à une pression extérieure.

Les calculs qui précèdent sont évidemment applicables à une enveloppe cylindrique de faible épaisseur soumise à une pression extérieure uni-forme, mais le sens des phénomènes est renversé: la matière travaille par compression et le moment fléchissant qui sollicite chaque section transversale est extrêmement faible. Seulement l'équilibre qui, avec la forme cylindrique, était précédemment stable est maintenant instable; la moindre déformation accidentelle, au lieu de tendre à s'effacer, a au con-traire des chances de s'accroître de plus en plus. Or les déformations de ce genre existent forcément soit par suite d'un léger vice de fabrication, soit en raison du fonctionnement du système; une certaine raideur est donc nécessaire et, comme celle que possède l'enveloppe par elle-même est presque toujours insuffisante, il y a lieu d'avoir recours à des consolida-tions supplémentaires. Celles-ci peuvent consister simplement dans la pré-sence de deux fonds dont l'influence ne saurait guère être chiffrée rigou-

reusement par la théorie mais qui est considérable (*) ; dans le cas d'une longueur un peu grande, des anneaux ou des cercles de renforcement sont souvent nécessaires ; ceux-ci se trouvent alors dans le cas qui a été traité au paragraphe 194 et on donnera à leur section transversale un mo-



Fig. 296

ment d'inertie tel que, pour une certaine excentricité prise arbitrairement et plus ou moins heureusement choisie, ils puissent résister sans danger au moment fléchissant dont nous avons appris à calculer la valeur. Parfois aussi la raideur du système est due à la tôle elle-même de l'enveloppe, qui est ondulée ; le moment d'inertie de l'une des ondulations par rapport à une droite menée par son centre de gravité parallèlement aux génératrices du cylindre permet alors de comparer, pour une longueur donnée AC, le plus ou moins grand degré de sécurité que présente le dispositif adopté.

Parmi les nombreuses formules empiriques qui donnent la charge d'écrasement d'une enveloppe cylindrique en tôle non ondulée munie de deux fonds plats très rigides, nous citerons la suivante qui est due à Love et qui résume assez bien les expériences de Fairbairn (*).

$$p = 376729 \frac{e^2}{l \cdot d} + 1160 \frac{e^2}{d} - 93 \frac{e}{d}$$

p étant la pression effective en kilogrammes par centimètre carré, qui produit l'écrasement,

e l'épaisseur de l'enveloppe en centimètres,

l la longueur du cylindre en centimètres,

d le diamètre intérieur du cylindre en centimètres.

(1) Les formules empiriques déduites d'expériences de rupture renseignent, dans une certaine mesure, sur le mode de déformement de résistance ainsi obtenu, mais elles sont loin d'être toutes concordantes entre elles. Les phénomènes qui précèdent la rupture suivent d'ailleurs des lois généralement très différentes, mais qui sont relatives à la période où l'élasticité n'est pas altérée (§ 133).

(2) Pour les détails de ces expériences on pourra consulter la *Résistance des matériaux* de Morin, ou le *Bulletin de la Société d'Encouragement*, année 1859, page 150.

§ 197. — **Enveloppe sphérique de faible épaisseur.**

Le cas des enveloppes sphériques se traite exactement comme celui des enveloppes cylindriques; l'équilibre, stable pour les pressions intérieures, est instable pour les autres. Si on coupe la sphère par un plan diamétral quelconque, on a pour valeur de la surface coupée $\pi \cdot D \cdot \varepsilon$ et pour force de traction à équilibrer $\frac{1}{4} \pi \cdot D^2 \cdot p$, D étant le diamètre de la sphère, ε son épaisseur et p la pression effective par millimètre carré exercée par le fluide. Par conséquent

$$\pi \cdot D \cdot \varepsilon \times R = \frac{1}{4} \pi \cdot D^2 \cdot p$$

$$R = \frac{p \cdot D}{4 \varepsilon}$$

Tel est l'effort de traction par millimètre carré auquel est soumise la matière; pour une même valeur de D , il est moitié moindre que dans le cas d'un cylindre. Il en est de même pour l'augmentation $D' - D$ de diamètre due à la déformation; on a en effet évidemment (§ 195)

$$D' = D(1 + l) = D \left(1 + \frac{R}{E} \right) = D \left(1 + \frac{p \cdot D}{4 E \cdot \varepsilon} \right)$$

§ 198. — **Fonds des enveloppes cylindriques de faible épaisseur.**

Considérons une enveloppe mince ayant la forme d'un cylindre droit à base circulaire et terminée par deux calottes hémisphériques; ε et ε_1

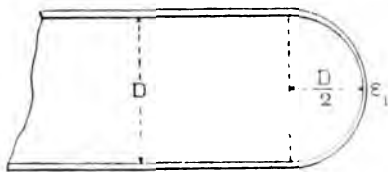


Fig. 197

étant les épaisseurs respectives du métal dans ces parties, les charges par millimètre carré sont (§ 195 et 197)

$$R = \frac{p \cdot D}{2 \varepsilon} \quad R_1 = \frac{p \cdot D}{4 \varepsilon_1}$$

et les augmentations de diamètre ont pour valeur

$$D' - D = \frac{p \cdot D^2}{2 E \cdot \epsilon} \quad D_1' - D_1 = \frac{p \cdot D_1^2}{4 E \cdot \epsilon_1}$$

Si donc $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$ la matière travaille partout également et les diamètres, égaux avant la déformation, *continuent à l'être après*, de sorte que l'enveloppe et ses fonds s'accompagnent continuellement sans se gêner dans leur dilatation (*).

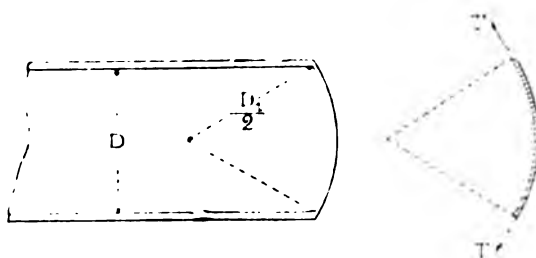


Fig. 298

Dans le cas hypothétique d'une enveloppe et de fonds se raccordant à angle vif comme dans la figure 298, il cesse d'en être ainsi, même quand on établit entre les épaisseurs ϵ et ϵ_1 la relation

$$\frac{D}{\epsilon} = \frac{D_1}{2 \epsilon_1}$$

En effet l'action exercée sur la calotte par le cylindre n'est plus dirigée suivant la tangente T, comme dans le cas d'une sphère complète et une perturbation semblable a lieu pour l'action inverse. Il est juste d'ailleurs d'ajouter que la jonction des deux parties doit se faire par une petite surface de raccordement, mais le problème devient alors beaucoup plus complexe (*).

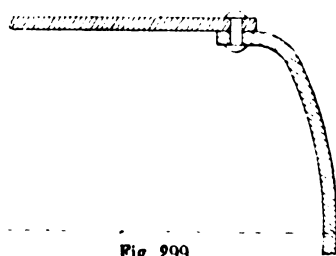


Fig. 299

(1) Si cette égalité dans la dilatation des deux parties n'existait pas, ces dernières réagiraient évidemment l'une sur l'autre en donnant lieu à des perturbations très complexes.

(2) Voir les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, deuxième semestre 1874, page 726 (Note de M. Résal).

§ 199. — **Enveloppe mince ayant la forme d'un cylindre droit à base elliptique.**

Si l'on considère un tronçon d'une enveloppe de ce genre supposée indéfinie, on se trouve ramené au cas de l'anneau elliptique qui a été traité au paragraphe 194; il se produit dans la matière des moments de flexion qui ont une valeur notable dès que l'excentricité est un peu prononcée. Or l'enveloppe, étant supposée mince, ne présente pas la rigidité nécessaire pour s'opposer à ces derniers de sorte que, à moins de consolidations spéciales, il se produira des déformations très grandes et celles-ci ne prendront fin elles-mêmes que quand l'enveloppe sera parvenue, si c'est possible, à un équilibre stable (à la forme circulaire par exemple, si on a affaire à une pression intérieure uniformément répartie). Dans la pratique, ces grandes déformations étant inadmissibles, on se trouve conduit à munir les enveloppes elliptiques d'armatures et de tirants plus ou moins multipliés et le problème à résoudre pour calculer la résistance de cet ensemble complexe se présente alors sous une forme beaucoup moins simple, inaccessible en réalité le plus souvent à une détermination théorique; il nous paraît donc inutile d'insister plus longuement sur ce sujet.

§ 200. — **Enveloppe mince ayant la forme d'un solide de révolution et soumise à une pression intérieure (1).**

Imaginons une enveloppe mince fermée, obtenue par la révolution d'une courbe telle que MN autour de l'axe OX et supposons-la soumise intérieurement à une pression de p kilogrammes par millimètre carré uniformément répartie. Nous considérons l'enveloppe avec la forme d'équilibre qu'elle acquiert *après la déformation*, et nous supposons que son épaisseur constante ϵ est assez faible pour que les charges puissent être regardées comme y étant uniformément réparties. Soit VV' une portion infiniment petite de l'enveloppe limitée d'une part par deux plans méridiens faisant entre eux un angle $d\varphi$, de l'autre par les

(1) Ce paragraphe et le suivant sont extraits d'une ingénieuse et savante étude de M. Alheilg, Ingénieur des Constructions Navales, qui est parvenu à élucider un point délicat resté jusqu'ici, à notre connaissance du moins, sans solution satisfaisante.

cônes de révolution ayant pour bases les parallèles $y, y + dy$ et pour sommets les points d et h déterminés par les normales DK, HK. Appelons

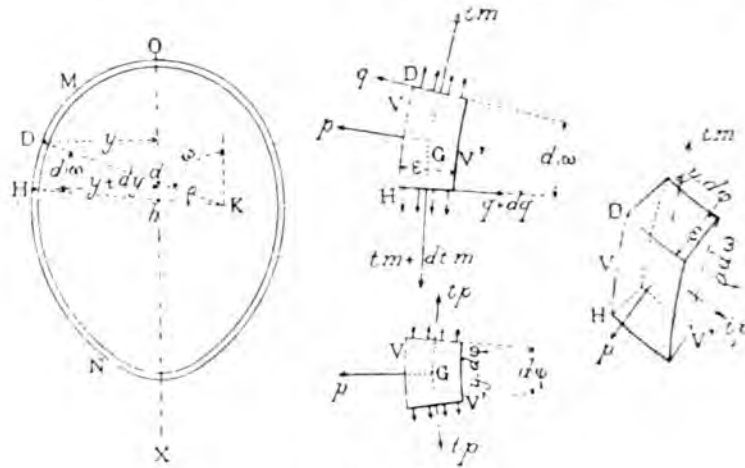


Fig. 300

ρ le rayon de courbure DK de la section méridienne,
 t_m et $t_m + dt_m$ les tensions suivant le méridien en D et en H,
 t_p la tension suivant le parallèle,
 q et $q + dq$ les efforts tranchants.

En vertu de l'égalité de répartition que nous venons d'admettre pour les forces élastiques dans l'épaisseur ϵ , les forces $t_m, t_m + dt_m$ et t_p passent toutes, ainsi que p , par le centre de gravité G de l'élément considéré. En prenant les moments par rapport à G, on a donc

$$q = 0$$

c'est-à-dire que l'effort tranchant peut être considéré comme nul.

Ceci posé, projetons toutes les forces en jeu d'abord sur la tangente, puis sur l'axe de révolution; on a ainsi

$$t_m \times y \cdot d\varphi \cdot \epsilon - (t_m + dt_m) \times (y + dy) \cdot d\varphi \cdot \epsilon + t_p \times \rho \cdot d\omega \cdot \epsilon \times d\varphi \times \cos \omega = 0$$

ou bien

$$(1) \quad d(y \cdot t_m) - \rho \cdot t_p \cdot \cos \omega \cdot d\omega = 0$$

puis

$$p \times \rho \cdot d\omega \cdot y \cdot d\varphi \times \cos \omega + t_m \times y \cdot d\varphi \cdot \epsilon \times \sin \omega - (t_m + dt_m) \times (y + dy) \cdot d\varphi \cdot \epsilon \times \sin (\omega + d\omega) = 0$$

ou bien

$$(2) \quad p \cdot \rho \cdot y \cdot \cos \omega \cdot d\omega - \varepsilon \cdot d(y \cdot t_m \cdot \sin \omega) = 0$$

En remplaçant dans la relation (2) $\rho \cdot \cos \omega \cdot d\omega$ par la valeur égale dy , il vient

$$p \cdot y \cdot dy - \varepsilon \cdot d(y \cdot t_m \cdot \sin \omega) = 0$$

équation dont l'intégrale est

$$y \cdot t_m \cdot \sin \omega = \frac{p}{2\varepsilon} (y^2 + C)$$

ou

$$t_m = \frac{p}{2\varepsilon \cdot \sin \omega} \left(y + \frac{C}{y} \right)$$

C étant une constante.

D'autre part en développant $d(y \cdot t_m \cdot \sin \omega)$ et en remplaçant $d(y \cdot t_m)$ par sa valeur tirée de (1), l'équation (2), peut s'écrire

$$p \cdot \rho \cdot y \cdot \cos \omega \cdot d\omega - \varepsilon \cdot \rho \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot t_p \cdot d\omega - \varepsilon \cdot y \cdot t_m \cdot \cos \omega \cdot d\omega = 0$$

ou

$$\frac{t_m}{\rho} + \frac{t_p \cdot \sin \omega}{y} = \frac{p}{\varepsilon}$$

ce qui donne, en remplaçant t_m par la valeur obtenue tout à l'heure,

$$t_p = \frac{p \cdot y}{\varepsilon \cdot \sin \omega} \left(1 - \frac{y + \frac{C}{y}}{2 \rho \cdot \sin \omega} \right)$$

Remarquons enfin que, si la courbe méridienne MN a sa concavité constamment tournée vers l'axe de révolution, comme nous le supposons, la constante C est forcément nulle puisque pour $y=0$ la valeur de t_m doit être finie. On a donc en définitive

$$(A) \quad t_m = \frac{p \cdot y}{2 \varepsilon \cdot \sin \omega}$$

$$(B) \quad t_p = \frac{p \cdot y}{\varepsilon \cdot \sin \omega} \left(1 - \frac{y}{2 \rho \cdot \sin \omega} \right)$$

Les équations (A) et (B) résolvent le problème proposé, en donnant, en un point quelconque, les valeurs des tensions qui s'exercent suivant le méridien et suivant le parallèle.

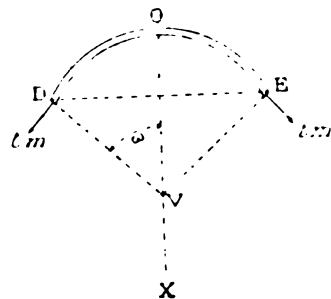


Fig. 301

Comme on le remarquera, la première d'entre elles peut s'obtenir immédiatement en coupant l'enveloppe par le cône de révolution DVE et en écrivant l'équation de projection sur le parallèle.

L'équation (B) conduit à cette conséquence que si l'on a, en un point de la courbe méridienne,

$$1 - \frac{y}{2 \rho \cdot \sin \omega} < 0$$

t_p est négatif, c'est-à-dire que, dans la région en question, l'équilibre ne peut avoir lieu sans qu'il se produise des *compressions*, au lieu de tensions, dans l'enveloppe considérée; or celle-ci étant, par hypothèse, supposée très mince est absolument impropre à résister à ce genre d'efforts et, dans la pratique, elle sera inévitablement exposée à *se plisser* (1). Des dispositifs de ce genre sont donc éminemment dangereux et il faut bien se garder d'en faire usage.

§ 204. — **Tore constitué par une enveloppe mince et soumis à une pression intérieure.**

Considérons un tore engendré par la révolution de la circonférence ABCD de rayon r autour de l'axe OX; nous le supposons constitué par

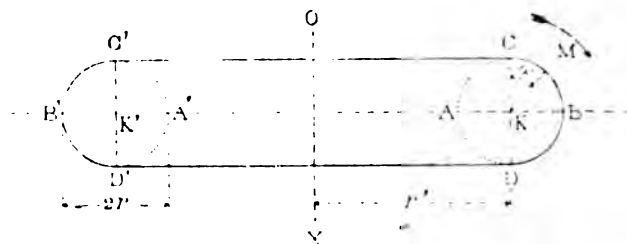


Fig. 302

1) C'est par exemple ce qui arrivera avec un ellipsoïde suffisamment aplati; b étant le demi-axe de révolution, il tendra à y avoir plissement dans le voisinage de l'équateur quand on aura $\frac{b^2}{a^2} < 2$.

une enveloppe mince d'épaisseur ϵ à l'intérieur de laquelle un fluide exerce une pression de p kilogrammes par millimètre carré. Appelons r' le rayon du cercle décrit par le centre K , et ω l'angle CKM compté de 0° à 180° dans le sens de la flèche. Dans ces conditions les formules du paragraphe précédent deviennent, en remarquant que $y = r' + r \cdot \sin \omega$,

$$t_m = \frac{p}{2 \epsilon \cdot \sin \omega} \left(y + \frac{C}{y} \right)$$

$$t_p = \frac{p \cdot y}{\epsilon \cdot \sin \omega} \left(1 - \frac{y + \frac{C}{y}}{2 \rho \sin \omega} \right)$$

Or en aucun point, et en particulier pour $\omega = 0$, la tension t_p ne peut être infinie; y étant égal à r' pour $\omega = 0$, on a donc

$$r' + \frac{C}{r'} = 0$$

$$C = -r'^2$$

ce qui donne, puisque $\rho = r$,

$$t_m = \frac{p \cdot r}{2 \epsilon} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{r}{r'} \sin \omega} \right)$$

$$t_p = \frac{p \cdot r}{2 \epsilon}$$

Le maximum de t_m a lieu pour $\sin \omega = -1$, c'est-à-dire pour les points A et A' situés sur l'équateur intérieur; il est égal à

$$\frac{p \cdot r}{2 \epsilon} \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}} \right)$$

et dépasse notablement la valeur qui correspondrait à un tuyau rectiligne (c'est-à-dire $\frac{p \cdot r}{\epsilon}$) dès que r' n'est pas grand comparativement à r ; pour $r' = 1,5 r$, la fatigue est doublée.

Dans le cas où on a affaire non pas à un tore complet, mais à une fraction de tore (c'est-à-dire à un tuyau coudé) terminé par deux fonds, il est facile de voir que, à une certaine distance de ces derniers, les tensions de la matière sont les mêmes que précédemment. Il en est encore de même pour un tuyau coudé AB dont les deux extrémités,

supposées ouvertes, sont fixées sur deux cloisons CD, EK qui permettent seulement aux effets de dilatation de la fibre moyenne de se produire sans difficulté; mais, dans le cas où un joint glissant aurait été

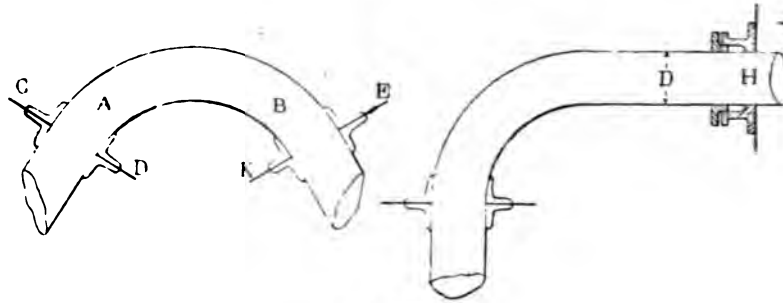


Fig. 303

ménagé à l'une des extrémités H du tuyau, il n'en serait plus de même évidemment et, à la fatigue produite par la pression intérieure p , il faudrait joindre celle qui résulterait de la force $F = \frac{1}{4} \pi \cdot D^2 \cdot p$ précisément égale à la pression précédemment exercée par le fluide sur le fond actuellement supprimé au tuyau. Cet effort F donne lieu à des phénomènes de flexion qui, en se superposant aux précédents, augmentent la fatigue $\frac{p \cdot r}{2\epsilon}$ du parallèle.

§ 202. — Cylindre à parois épaisses soumis à une pression intérieure.

Quand l'épaisseur des enveloppes ne peut plus être considérée comme très faible relativement à leur diamètre, le problème devient notablement plus compliqué parce que l'égalité des tensions à l'intérieur et à l'extérieur ne saurait plus être admise même à titre approximatif⁽¹⁾ (§ 195). Proposons-nous d'étudier les phénomènes qui se produisent

(1) Si cette égalité de tensions et par suite d'allongements était exacte, les rayons des couches extérieures seraient ceux qui augmenteraient le plus et l'épaisseur de l'enveloppe s'accroîtrait par suite du fait de la déformation; or cela est inadmissible puisque les couches successives, pressant les unes sur les autres tendent évidemment à se rapprocher et à se resserrer de plus en plus.

alors dans le cas d'un cylindre droit à base circulaire, de longueur indéfinie, en supposant, comme toujours, que l'élasticité n'est altérée en aucun point. Soient D et D' les diamètres intérieur et extérieur, P et P' les pressions en kilogrammes par millimètre carré qui s'exercent en

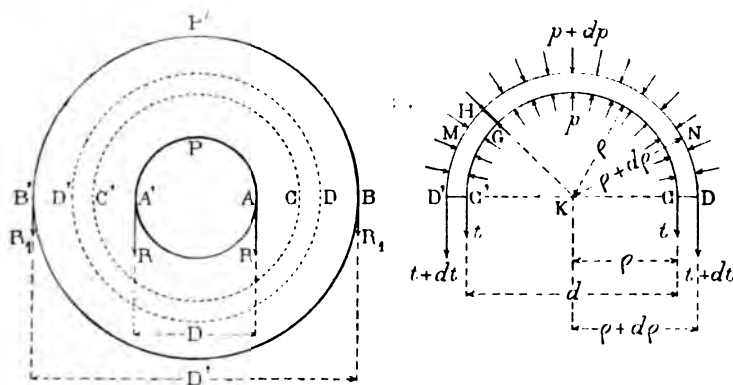


Fig. 304

dedans et en dehors de l'enveloppe, R et R₁ les charges par millimètre carré que supporte le métal aux points A et B perpendiculairement aux génératrices du cylindre⁽¹⁾. Isolons, par la pensée, un anneau CD C'D' dont les rayons aient pour valeurs ρ et $\rho + d\rho$ avant la déformation. Quand cette dernière s'est produite, ρ est devenu évidemment

$$\rho (1 + \lambda) = \rho \left(1 + \frac{t}{E}\right)$$

λ désignant l'allongement par millimètre courant produit sur la circonférence CC' par la force tangentielle t qui lui est appliquée. De même $\rho + d\rho$ a pris pour valeur

$$(\rho + d\rho) \left(1 + \frac{t + dt}{E}\right)$$

de sorte que l'épaisseur $d\rho$ est maintenant égale, à un infiniment petit du second ordre près, à

$$(\rho + d\rho) \left(1 + \frac{t + dt}{E}\right) - \rho \left(1 + \frac{t}{E}\right) = d\rho + \frac{t \cdot d\rho + \rho \cdot dt}{E}$$

(1) Comme dans le cas du paragraphe 195 et identiquement pour la même raison, il n'y a pas d'effort tranchant s'exerçant sur une section diamétrale quelconque telle que AB.

et s'est par suite accrue algébriquement de

$$\frac{t \cdot d\epsilon + \epsilon \cdot dt}{E}$$

D'autre part un petit prisme ou un petit cylindre de matière dirigé suivant GH de G en H est comprimé à ses extrémités par des forces p et $p + dp$ (1), de sorte qu'il éprouve, sur sa longueur $d\epsilon$, un raccourcissement mesuré par (§ 29)

$$\frac{p}{E} \times d\epsilon$$

c'est-à-dire un allongement algébrique

$$- \frac{p}{E} \cdot d\epsilon$$

Les deux expressions ci-dessus $\frac{t \cdot d\epsilon + \epsilon \cdot dt}{E}$ et $-\frac{p}{E} \cdot d\epsilon$ mesurant la valeur d'une seule et même quantité (la variation de l'épaisseur $CD = d\epsilon$) sont forcément égales et nous écrivons en conséquence qu'on a

$$\frac{t \cdot d\epsilon + \epsilon \cdot dt}{E} = - \frac{p}{E} \cdot d\epsilon$$

ou

$$(1) \quad (t + p) \cdot d\epsilon + \epsilon \cdot dt = 0$$

Exprimons maintenant que les forces appliquées au demi-anneau MN se font équilibre ; nous avons ainsi, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$2 t \cdot d\epsilon + (p + dp) \cdot 2 (\epsilon + d\epsilon) - p \cdot 2 \epsilon = 0$$

ou

$$(2) \quad (t + p) d\epsilon + \epsilon \cdot dp = 0$$

Nous avons ainsi deux équations (1) et (2) pour calculer les deux inconnues R et R_1 du problème de sorte que ce dernier peut être considéré maintenant comme résolu.

(1) p et $p + dp$ représentent les valeurs des pressions normales qu'exercent les couches concentriques les unes sur les autres.

En retranchant (2) de (1), on a en effet

$$dp = dt$$

d'où en intégrant de A en B

$$(\alpha) \quad P - P' = R - R_1$$

En ajoutant au contraire (1) et (2), il vient

$$\begin{aligned} 2(t+p) \cdot d\rho + \rho \cdot dp + \rho \cdot dt &= 0 \\ 2(t+p) \cdot d\rho + \rho \cdot d(t+p) &= 0 \\ \frac{d(t+p)}{t+p} &= -2 \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

D'où, en intégrant de A en B,

$$\begin{aligned} \log n \frac{R_1 + P'}{R + P} &= 2 \log n \frac{D}{D'} \\ (\beta) \quad (R_1 + P') \cdot D^2 &= (R + P) \cdot D^2 \end{aligned}$$

Des équations (α) et (β) on déduit facilement

$$\begin{aligned} R &= \frac{P(D^2 + D'^2) - 2P' \cdot D^2}{D'^2 - D^2} \\ R_1 &= R - (P - P') = \frac{2P \cdot D^2 - P'(D^2 + D'^2)}{D'^2 - D^2} \end{aligned}$$

valeur plus petite que R.

Pour compléter la solution du problème, on peut se proposer de calculer les valeurs de t et p pour une couche quelconque CC' de l'enveloppe située à une distance ρ du centre. Il suffit à cet effet de remarquer qu'en intégrant de A en C les deux équations différentielles (1) et (2) on a évidemment

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad P - p &= R - t \\ (\beta') \quad (t+p) \cdot d^2 &= (R + P) \cdot D^2 \end{aligned}$$

ce qui donne après réductions

$$\begin{aligned} t &= \frac{(P - P') \cdot D^2 \cdot D'^2}{d^2 (D'^2 - D^2)} + \frac{P \cdot D^2 - P' \cdot D'^2}{D'^2 - D^2} \\ p &= \frac{(P - P') \cdot D^2 \cdot D'^2}{d^2 (D'^2 - D^2)} - \frac{P \cdot D^2 - P' \cdot D'^2}{D'^2 - D^2} \end{aligned}$$

P étant plus grand que P' comme nous l'avons supposé, t et p vont en diminuant à mesure qu'on s'éloigne du centre; c'est à l'intérieur de l'enveloppe que la fatigue moléculaire est la plus forte.

Des relations trouvées plus haut on déduit facilement la suivante qu'il y a intérêt à connaître :

$$\frac{D'}{D} = \sqrt{\frac{R + P}{R + 2P' - P}}$$

Quant à la tension r suivant les génératrices du cylindre rien n'est plus facile que de l'obtenir en supposant que les deux fonds sont situés l'un et l'autre à une distance infiniment grande de la section transversale qu'on considère; les efforts de traction dans le sens des arêtes se répartissent alors en effet d'une manière uniforme dans l'épaisseur, de sorte que

$$\frac{1}{4} \pi (D'' - D') \times r = \frac{1}{4} \pi \cdot D'' \cdot P - \frac{1}{4} \pi \cdot D'' \cdot P'$$

$$r = \frac{P \cdot D'' - P' \cdot D''}{D'' - D'}$$

valeur inférieure à R.

Les formules ci-dessus relatives aux enveloppes épaisses, ainsi que les suivantes, ont été données pour la première fois par Lamé dans un « Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes » (1); depuis lors des démonstrations plus simples mais moins satisfaisantes ont été proposées à diverses reprises (2).

§ 203. — Cylindre à parois épaisses soumis à une pression extérieure.

Si c'est la pression extérieure P' qui est la plus forte, les formules précédentes sont applicables; seulement la traction se change partout en compression, ce qui conduit à remplacer R par $-R'$ et on a alors

$$R' = \frac{2P' \cdot D'' - P \cdot (D'' + D')}{D'' - D'}$$

$$R' = R' + P - P'$$

$$\frac{D'}{D} = \sqrt{\frac{R' - P}{R' + P - 2P'}}$$

(1) Voir le tome 4, année 1833, des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, page 465.

(2) Voir en particulier les *Annales Industrielles*, 1^{er} semestre 1879, pages 340 et 357.

Les fibres qui fatiguent le plus étant toujours situées à la paroi intérieure et supportant une charge à la compression de R' kilogrammes par millimètre carré.

§ 204. — Sphère à parois épaisses soumise à une pression intérieure.

Le cas d'une sphère à parois épaisses se traite exactement de la même façon que celui du cylindre. Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce sujet, il est facile de voir qu'on est conduit aux relations

$$(1) \quad (t + p) \cdot d\rho + \rho \cdot dt = 0$$

$$(2) \quad 2 (t + p) \cdot d\rho + \rho \cdot dp = 0$$

ce qui donne

$$dp = 2 dt$$

$$(a) \quad P - P' = 2 (R - R')$$

puis

$$\frac{d(t + p)}{t + p} = - 3 \frac{d\rho}{\rho}$$

$$(b) \quad (R_1 + P') \cdot D'^3 = (R + P) \cdot D^3$$

et par conséquent

$$R = \frac{P (2 D^3 + D'^3) - 3 P' \cdot D'^3}{2 (D'^3 - D^3)}$$

$$\frac{D'}{D} = \sqrt[3]{\frac{2 (R + P)}{2 R + 3 P' - P}}$$

C'est à la paroi intérieure que la matière fatigue le plus.

§ 205. — Sphère à parois épaisses soumise à une pression extérieure.

Comme dans le cas du cylindre, il suffit, pour passer de la pression intérieure à la pression extérieure, de changer R en $- R'$, ce qui

donne

$$R' = \frac{3 P' \cdot D'^2 - P (2 D^2 + D'^2)}{2 (D'^2 - D^2)}$$

$$\frac{D'}{D} = \sqrt[3]{\frac{2 (R' - P)}{2 R' + P - 3 P'}}$$

La fatigue maximum a toujours lieu à la paroi intérieure.

§ 206. — Conséquences des formules relatives aux enveloppes épaisses.

Il résulte des formules précédentes qu'une enveloppe, quelque grande que soit son épaisseur, est incapable (sans que la limite d'élasticité soit dépassée en certains points) de résister à des pressions qui atteignent une certaine valeur. Prenons par exemple le cas d'une enveloppe cylindrique soumise à une pression intérieure ; on a alors (§ 202)

$$\frac{D'}{D} = \sqrt{\frac{R + P}{R + 2 P' - P}}$$

de sorte que, si P devient égal à $R + 2 P'$, D' est infini ; en d'autres termes on ne peut atteindre la pression en question sans dépasser, à la paroi intérieure, la limite d'élasticité. En adoptant $R = 6$ kilogrammes pour le fer et $R = 3$ kilogrammes pour la fonte, cela correspond, en négligeant P', à environ 600 et 300 atmosphères. On a été parfois notablement au delà, surtout pour les presses hydrauliques, mais il se produit alors des déformations permanentes et les phénomènes deviennent beaucoup plus complexes.

Si la pression la plus forte s'exerçait à l'extérieur (§ 203), la limite ci-dessus deviendrait

$$P' = \frac{R + P}{2}$$

c'est-à-dire que, toutes choses égales d'ailleurs, un cylindre épais résiste moins bien à une pression s'exerçant au dehors qu'au dedans. Des considérations analogues sont applicables à la sphère.

On peut, au moyen d'un artifice ingénieux, augmenter notablement la pression intérieure à laquelle une enveloppe est susceptible de résister ;

cette pression maximum est en effet égale à $P = R + 2P'$; si donc, par un moyen quelconque, on donne une grande valeur à P' , la limite ci-dessus se trouvera par là même notablement reculée. On obtient ce résultat au moyen de frettes mises à chaud qui, en se contractant, exercent une compression considérable P' sur l'anneau central ; il faut avoir soin toutefois que cette valeur de P' ne fasse pas, avant l'application de la pression intérieure, travailler trop fortement le métal à la compression ; il est nécessaire en outre que la tension initiale des frettes, ajoutée à celle que leur communiquera ultérieurement la pression intérieure P , n'atteigne pas une valeur trop élevée. Pour rendre les choses plus claires, imaginons que ABC soit la courbe des tensions par millimètre carré qui se produiraient dans l'épaisseur d'un cylindre ho-

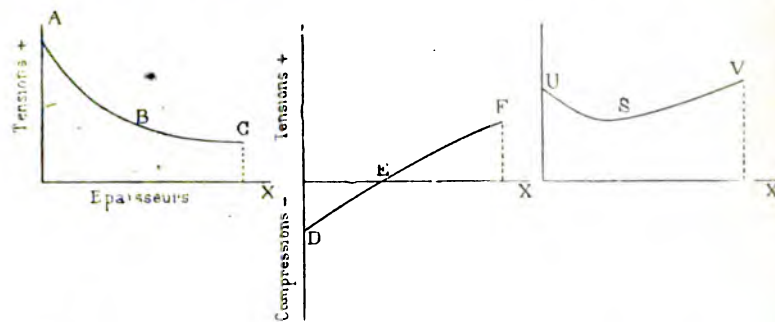


Fig. 305

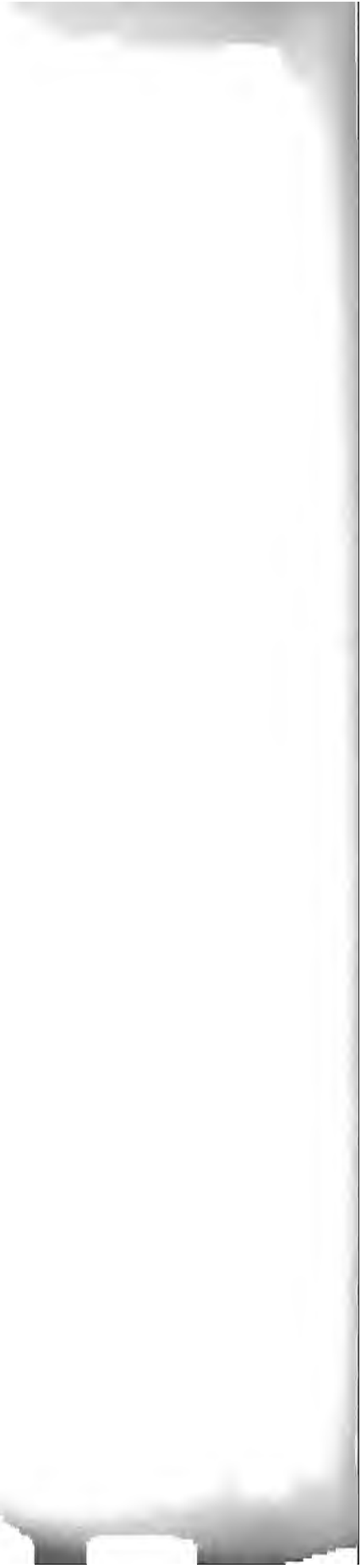
mogène ne supportant, par hypothèse, aucun effort initial. Supposons maintenant que les couches extérieures soient remplacées par des frettes mises à chaud, de façon que les compressions et les tensions initiales soient représentées par la courbe DEF ; il est bien clair qu'après l'application de la pression P les efforts définitifs seront donnés par la somme algébrique des ordonnées correspondantes des courbes ABC, DEF. On diminuera donc la fatigue des couches internes aux dépens des fibres extérieures qui tout à l'heure ne travaillaient pas assez et par suite il sera possible de se placer dans des conditions bien meilleures. Si l'on pouvait arriver à ce que la courbe résultante USV fût une droite parallèle à l'axe des x , toutes les fibres éprouveraient alors la même fatigue et la formule des enveloppes minces serait encore applicable, ce qui permettrait de pousser la pression à telle valeur qu'on voudrait.

En terminant ce qui concerne ce sujet, nous ferons remarquer que, dans le cas d'une enveloppe constituée par diverses couches superposées, il y a évidemment intérêt à mettre à l'intérieur le métal le plus

extensible (de la fonte par exemple ou de l'acier doux); ce dernier, étant en effet susceptible de s'allonger beaucoup sous un effort relativement modéré, permet aux couches extérieures de travailler plus énergiquement en augmentant ainsi la résistance de tout l'ensemble. Une tension initiale, donnée aux couches extérieures, sera susceptible d'ailleurs dans ce cas, comme dans le précédent, de donner d'excellents résultats.

CHAPITRE XV

RÉSISTANCE DES PLAQUES



RÉSISTANCE DES PLAQUES

§ 207. — Plaques circulaires.

Dans les études qui ont été faites jusqu'ici au sujet de la traction et de la flexion, nous avons supposé que les dimensions transversales des pièces ou des poutres considérées sont faibles comparativement à leur longueur (§ 18 et 42). Lorsque cette condition n'est pas remplie, les formules obtenues précédemment ne sont pas généralement applicables⁽¹⁾ et il faut avoir recours à la *Théorie mathématique de l'élasticité* pour se rendre compte de ce qui se passe quand on a, au contraire, affaire à des corps dont la longueur et la largeur sont grandes comparativement à la troisième dimension, c'est-à-dire à l'épaisseur. Malgré les savantes recherches qui ont été faites à ce sujet, le problème de la déformation et de la résistance des *plaques* n'est pas encore résolu dans tous ses détails et nous nous bornerons à citer les résultats qui ont été obtenus par les géomètres à la suite de longs et laborieux calculs⁽²⁾. Nous supposons, dans ce paragraphe, qu'il s'agit de plaques circulaires planes dont l'épaisseur, sans être extrêmement petite, est cependant faible relativement au diamètre tout en pouvant lui être comparable; les plaques en question reposent, comme nous le dirons tout à l'heure, sur des appuis circulaires dans lesquels elles peuvent d'ailleurs être encastées; mais (comme dans le cas des poutres droites) ceux-ci sont supposés ne

(1) En particulier il est absolument inadmissible de calculer la résistance d'un piston de cylindre en assimilant chacune de ses moitiés à une pièce encastée le long d'un diamètre et fléchie par des forces uniformément réparties représentant la pression de la vapeur ou du fluide en jeu.

(2) Les formules que nous donnons sont celles du traité de Grashof « *Theorie der Elasticitat und Festigkeit* » après avoir eu soin toutefois de prendre le coefficient de contraction latérale η égal non pas à $\frac{1}{3}$, mais à $\frac{1}{4}$ comme l'indique la théorie mathématique de l'élasticité pour les solides isotropes (§ 21). Ces formules concordent bien du reste avec celles de Mathieu (*Théorie de l'élasticité des corps solides*) et celles de Clebsch (*Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par de Saint-Venant) sauf, pour ces dernières, un terme complémentaire de moindre importance.

$$R_x = \frac{45}{128} \cdot \frac{p}{\varepsilon^3} (r^3 - 3x^3)$$

$$R_y = \frac{45}{128} \cdot \frac{p}{\varepsilon^3} (r^3 - x^3)$$

Au centre la charge est la même dans tous les sens et a pour valeur

$$R_o = \frac{45}{128} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3}$$

Au pourtour R_y est nul, tandis que R_x est maximum et a pour valeur absolue

$$R = \frac{45}{64} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3}$$

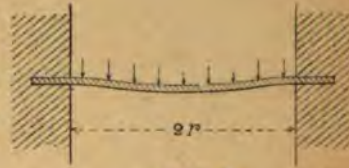


Fig. 307

3° Plaque circulaire appuyée sur son pourtour et chargée en son centre d'un poids P.

Le poids P est supposé réparti sur une circonférence d'un petit rayon r_o et l'on a

$$f = \frac{117}{64 \cdot \pi} \cdot \frac{P \cdot r^2}{E \cdot \varepsilon^3}$$

$$R_x = \frac{45}{32 \pi} \cdot \frac{P}{\varepsilon^3} \left(\log n \frac{r}{x} - \frac{1}{5} \right)$$

$$R_y = \frac{45}{32 \pi} \cdot \frac{P}{\varepsilon^3} \left(\log n \frac{r}{x} + \frac{4}{5} \right)$$

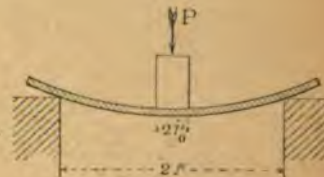


Fig. 308

Ces deux expressions sont maximum pour $x=r_o$ et c'est la seconde qui est la plus grande

$$R = \frac{45}{32 \pi} \cdot \frac{P}{\varepsilon^3} \left(\log n \frac{r}{r_o} + \frac{4}{5} \right)$$

ou

$$R = K \cdot \frac{P}{\varepsilon^3}$$

expression indépendante de r ou, du moins, étant seulement fonction de $\frac{r}{r_o}$.

Le coefficient numérique K a les valeurs suivantes :

pour	$\frac{r_o}{r} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$
	K = 1,4	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2

Pour $r_0 = 0$ la fatigue devient infinie et l'on voit par conséquent que, dans ce cas comme dans les suivants, il y a un intérêt capital à ce qu'une charge centrale soit répartie sur un cercle ou sur une circonférence dont le rayon ne soit pas trop petit. Comme nous le verrons tout à l'heure et comme cela est d'ailleurs évident, la même précaution est indispensable pour un support servant d'appui central.

4° *Plaque circulaire encastrée sur son pourtour et chargée en son centre d'un poids P.*

Avec les mêmes notations que dans le cas précédent, on a

$$f = \frac{45}{64 \pi} \cdot \frac{P \cdot r^3}{E \cdot \varepsilon^3}$$

$$R_x = \frac{45}{32 \pi} \cdot \frac{P}{\varepsilon^3} \left(\logn \frac{r}{x} - 1 \right)$$

$$R_y = \frac{45}{32 \pi} \cdot \frac{P}{\varepsilon^3} \cdot \logn \frac{r}{x}$$

Le maximum de R_y , qui est le plus grand des deux, a lieu pour $x = r_0$ et si l'on pose, comme tout à l'heure,

$$R = K' \cdot \frac{P}{\varepsilon^3}$$

on a

pour	$\frac{r_0}{r} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$
	$K' = 1,0$	1,3	1,5	1,6	1,7	1,8

5° *Plaque circulaire encastrée sur son pourtour, soutenue en son centre et chargée de p kilogrammes par millimètre carré.*

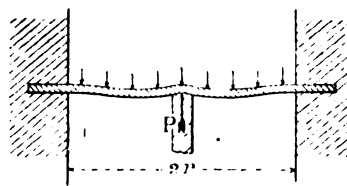


Fig. 309

La force qu'il faut appliquer au centre pour empêcher ce point de se déplacer

$$- P = \frac{1}{4} \pi \cdot r^3 \cdot p$$

et l'on a

$$R_x = \frac{45}{128} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3} \left(\logn \frac{r}{x} + \right)$$

$$R_y = \frac{45}{128} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3} \left(\logn \frac{r}{x} \right)$$

Pour $x=0$ les valeurs ci-dessus deviennent infinies; il faut donc supposer que l'appui central est une circonférence de petit rayon r_0 , et, si l'on suppose que le rapport $\frac{r_0}{r}$ est très petit, la charge maximum est donnée par R_y et a lieu pour $x=r_0$; sa valeur est

$$R = \frac{45}{128} \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3} \left(\log n \frac{r}{r_0} + \frac{r_0^3}{r^3} - 1 \right)$$

Comme il est facile de s'en rendre compte, si le rapport $\frac{r_0}{r}$ était suffisamment grand, R_x pourrait devenir supérieur à R_y .

6° *Plaque annulaire encastrée sur son pourtour, mobile à sa partie centrale sur une douille de rayon r_0 et chargée de p kilogrammes par millimètre carré.*

Si l'on pose

$$\frac{r_0}{r} = n \quad \alpha = \frac{1 - \left(4 \log n \frac{1}{n} + 1 \right) n^2}{\frac{1}{n^2} - 1}$$

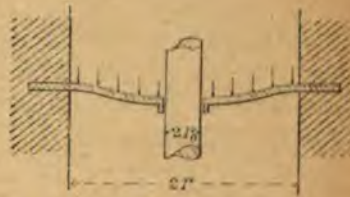


Fig. 310

on a

$$R_x = \frac{45}{128} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3} \left[1 - \frac{3x^2}{r^2} - 4n^2 \left(\log n \frac{r}{x} - 1 \right) + \alpha \left(\frac{r^2}{x^2} + 1 \right) \right]$$

$$R_y = \frac{45}{128} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3} \left[1 - \frac{x^2}{r^2} - 4n^2 \log n \frac{r}{x} - \alpha \left(\frac{r^2}{x^2} - 1 \right) \right]$$

La charge R_y est nulle pour $x=r_0$ et $x=r$, et il suffit de considérer la valeur absolue maximum de R_x qui a lieu pour $x=r$ et est égale à

$$R = \frac{45}{64} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3} (1 - 2n^2 - \alpha)$$

Si l'on veut savoir quelles sont pour $x=r_0$ et $x=r$ les valeurs de R_x , on pourra avoir recours au tableau suivant :

	$n = 0,1$	$0,2$	$0,4$
pour $x = r_0$,	$R_x = 0,64$	$0,54$	$0,32 \times \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3}$
pour $x = r$,	$R_x = 0,68$	$0,63$	$0,44 \times \frac{p \cdot r^3}{\varepsilon^3}$

7° *Plaque annulaire encastrée à son pourtour intérieur et extérieur et chargée de p kilogrammes par millimètre carré.*

Si l'on pose

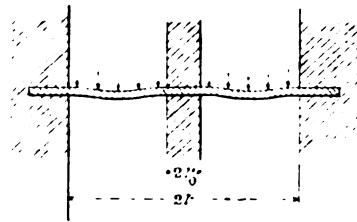


Fig. 311

on a

$$\frac{r_0}{r} = n$$

$$\lambda = \frac{1}{1 - n^2} \cdot \log n \frac{1}{n}$$

$$\mu = \frac{1 + n^2 - 4 n^2 \cdot \lambda}{1 - 4 n^2 \lambda^2}$$

$$R_x = \frac{45}{128} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\epsilon^3} \left[1 - 3 \frac{x^3}{r^3} - \mu \left(\log n \frac{r}{x} - 1 \right) - n^2 (\lambda \cdot \mu - 1) \left(\frac{r^2}{x^2} + 1 \right) \right]$$

Cette expression est maximum pour $x=r_0$ et a alors pour valeur

$$R = \frac{45}{64} \cdot \frac{p \cdot r^3}{\epsilon^3} \left[-1 + n^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \mu \right]$$

Les diverses valeurs de R_x pour $x=r_0$ et $x=r$ sont d'ailleurs données dans le tableau suivant :

	$n = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5
pour $x = r_0$ $R_x =$	0,81	0,49	0,32	0,21	$0,14 \times \frac{p \cdot r^3}{\epsilon^3}$
pour $x = r$ $R_x =$	0,30	0,25	0,20	0,15	$0,11 \times \frac{p \cdot r^3}{\epsilon^3}$

§ 208. — **Plaques rectangulaires (Formules de Grashof).**

Le problème de la résistance des plaques rectangulaires est plus compliqué encore que pour celles de forme circulaire et il n'a pas encore reçu de solution satisfaisante. Voici les résultats déduits des formules de Grashof (1).

1° *Plaque rectangulaire encastrée sur son pourtour et portant une charge de p kilogrammes par millimètre carré.*

On a au centre K

$$f = \frac{1}{32} \cdot \frac{a^4 \cdot b^4}{a^4 + b^4} \cdot \frac{p}{E \cdot \epsilon^3}$$

(1) Ouvrage déjà cité au § 207. Pour les plaques rectangulaires les formules de Grashof sont loin de présenter le même degré de rigueur que les précédentes.

et pour charges, en ce même point, suivant KX et KY

$$R_x = \frac{b^4}{2(a^4 + b^4)} \cdot \frac{p \cdot a^3}{\epsilon^3}$$

$$R_y = \frac{a^4}{2(a^4 + b^4)} \cdot \frac{p \cdot b^3}{\epsilon^3}$$

Le maximum de fatigue a lieu au point K dans le sens du plus petit côté, avec la valeur donnée ci-dessus pour R_y (1).

Dans le cas particulier où $a = b$

$$f = \frac{p \cdot a^4}{64 E \cdot \epsilon^3}$$

$$R = \frac{p \cdot a^3}{4 \epsilon^3}$$

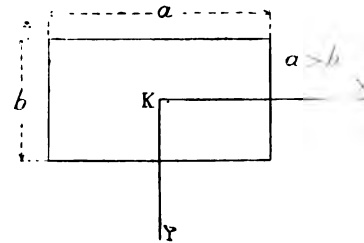


Fig. 312

2° Plaque portant une charge de p kilogrammes par millimètre carré et soutenue en des points disposés suivant des carrés de côté a .

En appelant f la flèche qui se produit au centre de chaque carré et R la charge en ce point, c'est-à-dire là où elle est maximum, on a

$$f = \frac{15}{512} \cdot \frac{p \cdot a^4}{E \cdot \epsilon^3}$$

$$R = \frac{15}{64} \cdot \frac{p \cdot a^3}{\epsilon^3}$$

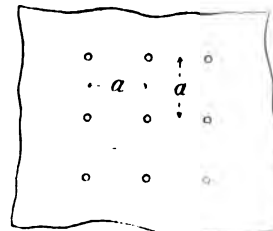


Fig. 313

§ 209. — Plaques rectangulaires (Formules de Navier).

Navier a traité le problème des plaques rectangulaires en supposant que l'épaisseur de ces dernières est extrêmement petite; les formules obtenues par ce géomètre se présentent sous la forme de séries très convergentes dont on peut, dans la pratique, ne conserver que le premier terme, comme nous allons le faire (1).

(1) En faisant a infini dans les formules ci-dessus, on tombe (comme cela devait en effet arriver) sur les formules relatives à une poutre encastrée à ses deux extrémités et uniformément chargée (§ 80).

(2) Voir le *Résumé des leçons* données à l'Ecole des Ponts et Chaussées, première partie, deuxième édition, page 414. On pourra consulter aussi la *Théorie de l'élasticité des corps solides* par Clebsch et de Saint-Venant, page 740 et la *Résistance des matériaux* par Flamant, page 547.

1° *Plaque rectangulaire simplement appuyée sur son pourtour et portant une charge de p kilogrammes par millimètre carré.*

La flèche au centre de la plaque et la fatigue maximum qui se produit en ce point ont approximativement pour valeurs, a étant supposé plus grand que b ,

$$f = 0,19 \frac{a^4 \cdot b^4}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{p}{E \cdot \varepsilon^3}$$

$$R = 0,92 \frac{a^4 \cdot b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{p}{\varepsilon^3}$$

2° *Plaque rectangulaire simplement appuyée sur son pourtour et chargée à sa partie centrale d'un poids P .*

On a dans ce cas pour valeurs approximatives de f et de R

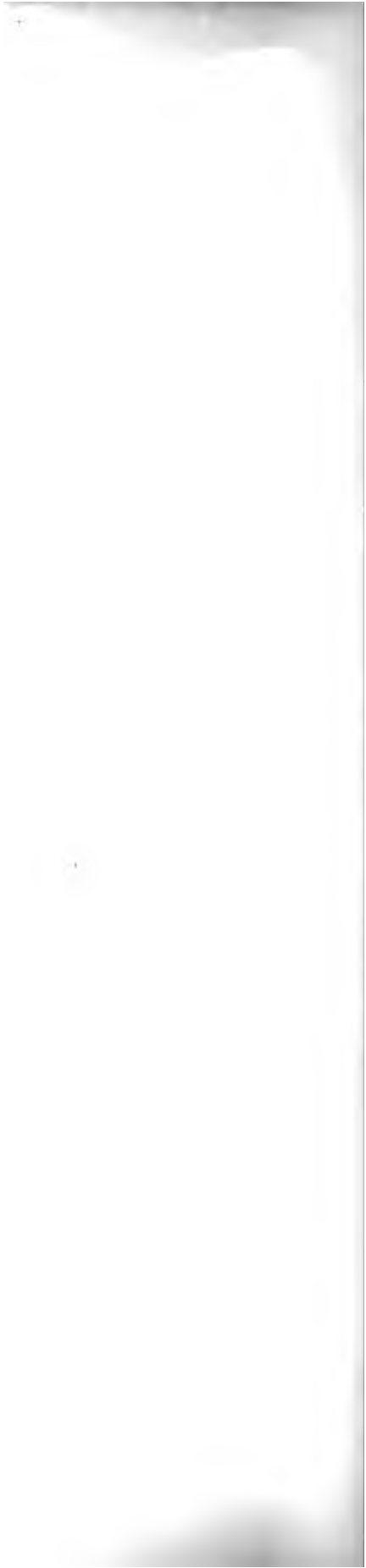
$$f = 0,46 \frac{a^2 \cdot b^3}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{P}{E \cdot \varepsilon^3}$$

$$R = 2,28 \frac{a^2 \cdot b}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \frac{P}{\varepsilon^3}$$

Comme le montrent les formules de ce paragraphe et du précédent, la fatigue R d'une plaque rectangulaire est, pour une même valeur de la charge totale P ou $p \cdot a \cdot b$, indépendante des dimensions de la plaque; elle est seulement fonction du rapport $\frac{a}{b}$ et de l'épaisseur ε . Une remarque analogue a déjà été faite pour les plaques circulaires.

CHAPITRE XVI

**RÉSISTANCE DES CORPS
SOUMIS A DES ACTIONS DYNAMIQUES**



RÉSISTANCE DES CORPS

soumis à des actions dynamiques

§ 210. — Cas de la traction et de la compression.

Comme nous l'avons déjà dit à plusieurs reprises, les corps ont à résister non seulement à des efforts statiques, mais encore à des actions dynamiques (§ 13). Nous nous sommes longuement étendu sur ce sujet à propos de la traction ; des considérations analogues sont évidemment applicables à la compression, de sorte qu'il ne nous reste plus à parler que de ce qui est relatif à la flexion et à la torsion. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons qu'il n'y a pas de choc local (§ 14) et que l'ébranlement produit en un point du corps se transmet assez vite dans toute sa masse pour que les parties les plus éloignées y prennent part et concourent efficacement à éteindre la force vive du corps choquant (1). Nous admettons en outre que la limite d'élasticité n'est dépassée en aucun point, comme cela a lieu pour les ressorts, de sorte que la même quantité de force vive puisse être indéfiniment éteinte un nombre quelconque de fois (§ 15) ; dans ces conditions les petits effets restent, comme on le sait, proportionnels aux causes et le principe de la superposition des petites déformations (§ 7) fait voir que, dans la limite en question, les petits déplacements moléculaires et par conséquent les allongements, les compressions, les flèches et les angles de torsion sont proportionnels aux forces qui les produisent.

Le cas de la traction ayant été étudié en détail, nous nous bornerons à rappeler que, si l'on considère une tige de section constante Ω et de longueur L soumise à chaque instant à un effort de traction précisément égal à celui qui est nécessaire pour produire l'allongement existant à ce

(1) Comme on le sait, ce cas est celui où le corps choquant à une faible vitesse et une masse considérable relativement à celle du corps choqué.

travail moléculaire total développé, et par conséquent la charge susceptible d'être éteinte, a pour valeur (§ 13 et 28)

$$L \times \Omega \times \int_0^l R \times dl$$

si la limite d'élasticité n'étant pas dépassée.

$$L \times \Omega \times \frac{R^2}{2E} = V \times \frac{R^2}{2E} = V \times \frac{R \times \lambda}{2}$$

On voit par ces premières expressions, la charge *maximum* par laquelle on peut soumettre un corps à un allongement λ par millimètre cubique, est proportionnelle à la limite d'élasticité R et à la section Ω soumise pendant la traction.

On voit aussi par ces mêmes expressions, que dans les mêmes conditions une force vive aussi grande que celle qui est nécessaire pour étirer le corps qui, pour une même valeur du déplacement λ , a une limite d'élasticité très élevée R ; on devra par conséquent employer un corps plus épais. C'est là une remarque que l'on peut appliquer à ce qui va suivre.

§ 54. De la flexion d'une lame plane unique).

Soit une lame plane unique, fixée à son extrémité libre, à une certaine distance de son autre extrémité, et soumise à une charge instantanée à celle qui est nécessaire pour faire prendre à la pièce la forme f existant à ce moment; le travail produit par la force variable P , et par conséquent la demi-force vive qui peut être éteinte par le déplacement de l'extrémité B, est égale à

Fig. 54

$$\int_0^f P \times df$$

celle intégrale étant prise depuis $f = 0$ jusqu'à la valeur de la flèche maximum considérée comme admissible (par exemple celle à partir de laquelle l'élasticité commence à être altérée au point le plus fatigué). Dans les chapitres qui précèdent, nous avons appris à calculer soit algébriquement, soit graphiquement (§ 58) les valeurs de f en fonction de P ou inversement; l'expression cherchée $\int P \times df$ peut donc s'obtenir sans difficulté pour un corps quelconque et en dimensions quelconques.

Dans le cas particulier où il s'agit d'une pièce dont la section transversale est constante d'un bout à l'autre, on a (§ 72)

$$f = \frac{P \cdot L^3}{3 E \cdot I}$$

d'où

$$\int P \times df = \int \frac{3 E \cdot I}{L^3} \cdot f \cdot df = \frac{3}{2} \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} \cdot f^2$$

Il ne reste plus qu'à donner à f dans cette expression la valeur maximum considérée comme admissible; remarquons pour cela que la section la plus fatiguée est celle de l'encastrement, de sorte que, si R est la charge de la fibre qui travaille le plus, on a (§ 44)

$$\frac{R \cdot I}{v} = P \cdot L$$

d'où

$$P = \frac{R \cdot I}{v \cdot L}$$

et

$$f = \frac{R \cdot L^3}{3 E \cdot v}$$

Donc

$$\int P \times df = \frac{3}{2} \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} \cdot f^2 = \frac{I \cdot L}{v^2} \times \frac{R^2}{6E}$$

R étant la charge maximum considérée comme compatible avec la sécurité de la matière.

Si la section de la pièce (supposée toujours constante) est rectangulaire on a

$$I = \frac{1}{12} a \cdot b^3 \quad v = \frac{b}{2}$$



Fig 315

de sorte que

$$\int P \times df = \frac{1}{18} \cdot a \cdot b \cdot L \cdot \frac{R^2}{E} = V \cdot \frac{R^2}{18 E}$$

V étant le volume de la barre (1).

Si la barre considérée, au lieu d'avoir une section transversale constante, est constituée en solide d'égale résistance, il est bien clair que,

(1) Comme on le voit, cette expression ne change pas quand on met la barre soit à plat, soit de champ; seulement la flèche correspondant à une force donnée, ou autrement dit la *flexibilité*, est très différente dans les deux cas.

pour un même effet P et une même fatigue maximum R de la matière, la flèche f a une valeur plus grande que précédemment le sera qu'avec un encombrement et un poids moindres on est en mesure d'absorber une force vive plus considérable; c'est là un point qui a été déjà mentionné (§ 138). Dans chaque cas particulier, la détermination analytique ou graphique de la flèche f permettra de calculer l'intégrale $\int P \times df$ qu'il est nécessaire de connaître pour résoudre le problème qui nous occupe.

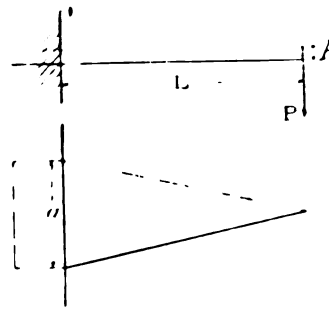


Fig. 316

Comme application des considérations précédentes, supposons que nous ayons affaire à une lame triangulaire d'épaisseur constante b et par conséquent d'égale résistance (§ 141, fig. 200); la flèche f produite par une force normale P a pour valeur (§ 143)

$$f = \frac{6 P \cdot L^3}{E \cdot a \cdot b^3}$$

et par conséquent

$$\int P \times df = \frac{E \cdot a \cdot b^3}{6L^3} \int f \times df = \frac{E \cdot a \cdot b^3}{12L^3} \cdot f^2$$

Or on a pour la section d'encastrement

$$\frac{R \cdot I}{v} = P \cdot L$$

d'où

$$f = \frac{R \cdot L^3}{E \cdot b}$$

ce qui donne

$$\int P \times df = a \cdot b \cdot I \cdot \frac{R^2}{12 E} = V \cdot \frac{R^2}{6 E}$$

V désignant le volume $\frac{1}{2} a \cdot L \times b$ de la barre et R la charge par millimètre carré à laquelle travaille la matière. S'il s'agit d'acier trempé, on peut prendre approximativement (§ 27)

$$E = 27000 \quad R = 110 \text{ kil.}$$

de sorte que, pour $V = 1$ millimètre cube, les unités adoptées étant le kilogramme et le millimètre, on a

$$\int P \times df = 1 \times \frac{110^3}{6 \times 27000} = 0 \text{ kg.}^{\text{m}}/{}^{\text{m}}07$$

Avec $\frac{7^{\text{sr}},8}{1000}$ d'acier trempé on peut donc emmagasiner par la flexion un nombre de *kilogrammes-millimètres* égal à environ 0,07, soit 9 kilogrammètres par kilogramme d'acier (1). Tel est en effet à peu près le chiffre admis dans la pratique. Si, au lieu d'une lame triangulaire d'égale résistance, on faisait usage d'une barre rectangulaire d'épaisseur constante, on ne pourrait compter, comme nous venons de le voir à l'instant, que sur $V \cdot \frac{R^3}{18 E}$, c'est-à-dire sur 3 kilogrammètres seulement.

§ 212. — Cas de la flexion (lames planes superposées).

Considérons plusieurs lames planes encastrées dans un même support et superposées comme l'indique la figure 317, tout en pouvant glisser librement les unes sur les autres ; chacune d'elles, à section transversale

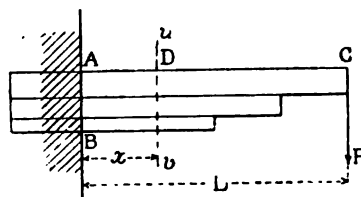


Fig. 317

rectangulaire, a une épaisseur constante, mais sa largeur peut varier suivant une loi quelconque et leur ensemble est soumis à une force normale P. Dans ces conditions les diverses lames vont se courber et nous

(1) Avec une barre soumise à la traction on aurait un chiffre sensiblement plus élevé, $V \cdot \frac{R^3}{2 E}$ au lieu de $V \cdot \frac{R^3}{6 E}$ (§ 210), et il n'y a pas lieu de s'en étonner, car toutes les molécules travaillent alors à la charge maximum admissible R ; mais un dispositif de ce genre employé comme ressort pour éteindre de la force vive aurait le très grave inconvénient d'être peu extensible (à moins d'avoir une longueur pratiquement inadmissible) et il ne produirait son effet qu'en exerçant des efforts considérables et dangereux sur le corps choquant. La flexibilité est une qualité essentielle d'un ressort ; c'est en général l'une des données du problème, donnée qu'on ne peut modifier que dans certaines limites.

On suppose que les diverses lames ont une épaisseur ρ en assez faible relation avec les dimensions des fibres moyennes pour que ceux-ci puissent être considérés comme étant tous sensiblement égaux dans une même section transversale nr . Le moment fléchissant total $P(L-x)$ se répartit en question se répartit d'une certaine façon (selon le développement) entre les diverses lames et l'on a pour celles-ci les relations § 55,

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = m$$

$$\frac{E' \cdot I'}{\rho} = m'$$

$$\frac{E'' \cdot I''}{\rho} = m''$$

etc.....

D'où en ajoutant

$$\frac{E \cdot I}{\rho} + \frac{E' \cdot I'}{\rho} + \dots = m + m' + \dots = P(L-x)$$

$$\rho = \frac{E \cdot I + E' \cdot I' + \dots}{P(L-x)}$$

équation qui donne ρ dont la valeur varie avec x .

ρ étant connu, on en déduit m, m', m'', \dots (c'est-à-dire la façon dont le moment total se répartit entre les diverses pièces) ainsi que la valeur $R = \frac{E \cdot \sigma}{\rho}$ de la fatigue maximum qui se produit dans chacune d'elles. On peut également déterminer, pour chaque valeur de P , la flèche f relative au point C (§ 58) et calculer par conséquent l'intégrale $\int P \times df$ qui fait connaître la demi-force susceptible d'être absorbée.

Le problème qui nous occupe étant ainsi résolu, voyons maintenant comment les choses doivent être disposées pour qu'on se trouve dans les meilleures conditions possibles: il y a évidemment intérêt à ce que la charge par millimètre carré R soit la même pour toutes les lames dans une même section transversale nr . Si l'on suppose $E = E' = \dots$ c'est-à-dire même matière partout, la relation $R = \frac{E \cdot \sigma}{\rho}$ montre que σ doit être le même pour les diverses lames superposées, c'est-à-dire qu'elles doivent avoir toute la même épaisseur ρ , comme l'indique la

figure 318; le moment fléchissant total $P(L-x)$ se répartit alors entre elles proportionnellement à leurs largeurs et elles se comportent évidemment de la même façon que si, au lieu d'être superposées, elles étaient

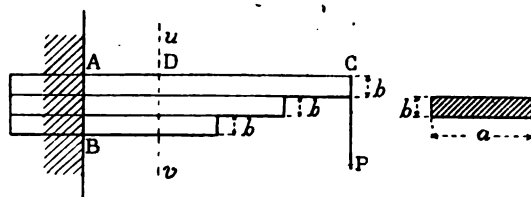


Fig. 318

juxtaposées les unes aux autres dans un même plan horizontal en faisant corps entre elles comme une pièce unique.

En second lieu il y a intérêt aussi à ce que, d'une extrémité à l'autre de chaque lame, R soit constant pour chaque valeur de P et par suite il doit en être de même de ρ puisque $R = \frac{E \cdot v}{\rho}$; en d'autres termes la courbure due à la flexion doit s'opérer suivant un arc de cercle. En vertu de la relation

$$\rho = \frac{E \cdot (I + I' + \dots)}{P \cdot (L - x)} = \frac{E \times \frac{1}{12} \cdot b^3 (a + a' + \dots)}{P \cdot (L - x)}$$

cette condition est remplie quand on a

$$\frac{a + a' + a'' + \dots}{L - x} = \text{constante}$$

c'est-à-dire quand la somme des largeurs des pièces superposées est

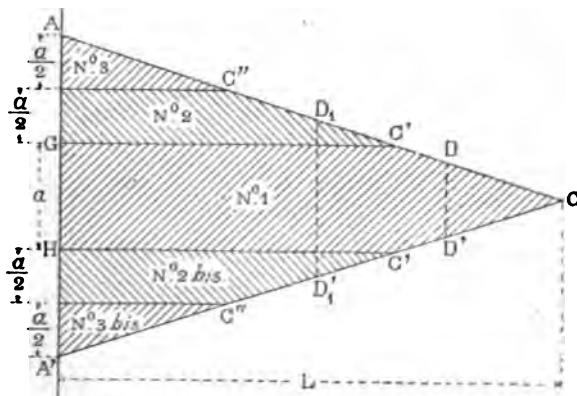


Fig. 319

proportionnelle à la distance $L-x$; $AA'C$ étant un triangle quelconque

de hauteur L , les sommes en question seront données par les longueurs DD' , D, D', \dots interceptées par des parallèles à la base AA' et on retombe ainsi sur la barre triangulaire d'égale épaisseur et d'égale résistance dont il a été question au paragraphe précédent (fig. 316); on voit seulement que, pour diminuer l'encombrement, il y a lieu de découper le triangle $AA'C$, en bandes, de même largeur par exemple, qu'on empilera

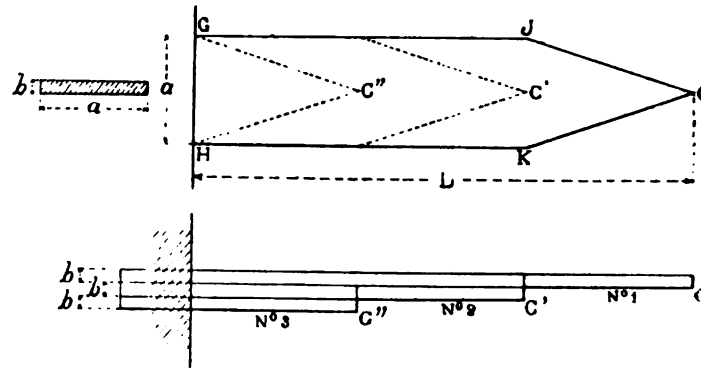


Fig. 320

les unes au-dessus des autres comme l'indique la figure 320, les deux demi-bandes de même numéro faisant d'ailleurs corps entre elles et se terminant en triangle. Les formules relatives à ce dispositif se déduisent immédiatement de celles qui ont été obtenues précédemment; on a en effet pour la fatigue R éprouvée par la matière

$$\frac{R \cdot I}{v} = P \cdot L$$

ou bien (fig. 319)

$$R \times \frac{1}{6} \times AA' \times b^2 = P \cdot L$$

ce qui donne, en appelant a la largeur GH de chaque lame et n leur nombre,

$$R = \frac{6 P \cdot L}{n \cdot a \cdot b^2}$$

On voit également de suite qu'on a

$$f = \frac{R \cdot L^2}{E \cdot b}$$

$$\int P \times df = v \cdot \frac{R^2}{6 E}$$

$$v = \frac{E \cdot b}{2 R}$$

formules qui donnent les divers renseignements dont on a besoin pour calculer un système de ce genre, et dans lesquelles V représente, comme tout à l'heure, le volume total du corps.

Dans la pratique on n'emploie pas généralement la solution des extrémités triangulaires telles que JCK et chaque lame affecte alors la forme d'un rectangle (fig. 321); l'ensemble ainsi constitué se comporte alors comme le ferait la lame plane à adents $AA'MC$ et il en résulte évidemment un surcroît inutile et par conséquent fâcheux de résistance provenant de l'existence des petits triangles supplémentaires h ; aussi, pour

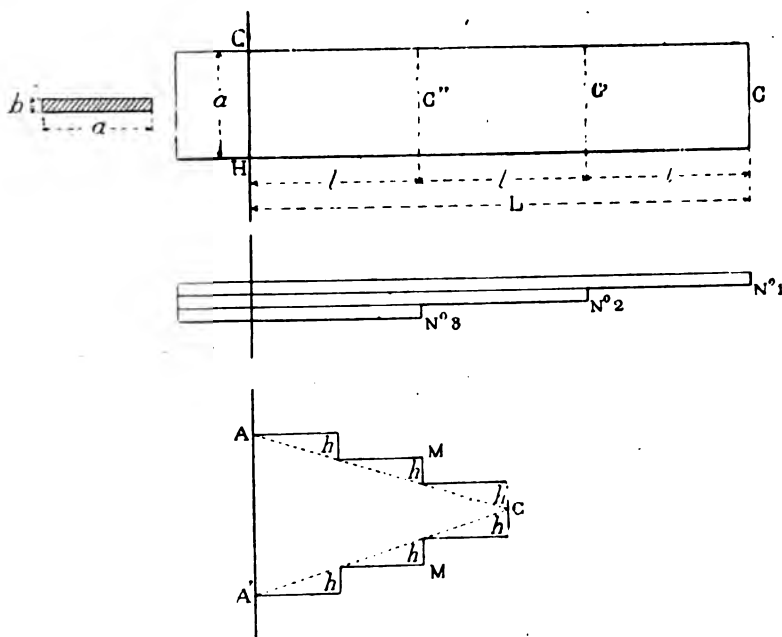


Fig. 321

compenser ce défaut, prend-on souvent la précaution d'amincir l'extrémité de chacune des lames. Quel que soit le parti adopté, on comprend d'ailleurs facilement que les formules du cas précédent sont encore applicables, au moins à titre approché; nous ferons remarquer seulement que la première d'entre elles

$$R = \frac{6 P \cdot L}{n \cdot a \cdot b^2}$$

se met quelquefois sous une forme un peu différente : en désignant par

de voir que sa valeur (pour de faibles déformations) est sensiblement égale à $\int 2 \frac{M}{L} \times df$, ce qui donne pour la demi-force vive susceptible d'être absorbée

$$\int 2 \frac{M}{L} \times df = \frac{L \cdot I}{2 v^2} \cdot \frac{R^2}{E}$$

Ces formules donnent tous les renseignements dont on a besoin. Dans le cas particulier d'une section rectangulaire ayant pour côtés a et b , ces relations deviennent

$$R = \frac{6 M}{a \cdot b^3}$$

$$f = \frac{R \cdot L^3}{E \cdot b}$$

$$\rho = \frac{E \cdot b}{2 R}$$

$$\int 2 \frac{M}{L} \times df = L \cdot a \cdot b \cdot \frac{R^2}{6 E} = V \cdot \frac{R^2}{6 E}$$

Ce sont les mêmes que pour la lame triangulaire d'épaisseur uniforme et il fallait d'ailleurs évidemment s'y attendre puisque, dans les deux cas, on a affaire à des corps ayant des sections transversales de même forme (rectangulaire), et constitués l'un et l'autre en solides d'égale résistance travaillant à la même charge R (').

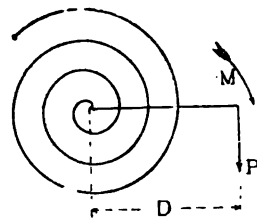


Fig. 324

longueur du ressort développé, puisque les effets produits sur les différentes parties des spires s'ajoutent évidemment entre eux.

Le cas théorique que nous venons d'examiner se rencontre dans la pratique à propos des *ressorts spiraux* ou des *ressorts hélicoïdaux* formés de lames à section rectangulaire ou circulaire et soumis à un moment fléchissant $M = P \times D$ qui peut être considéré comme constant pour chacune des sections transversales ; la solution du problème est donnée par les formules ci-dessus dans lesquelles L représente la

(1) Pour une section circulaire (et non pas rectangulaire) on aurait $V \cdot \frac{R^2}{8 E}$ au lieu de $V \cdot \frac{R^2}{6 E}$ pour valeur du travail absorbé.

§ 215. — Cas de la torsion (tige circulaire droite).

Considérons une barre circulaire droite de longueur L et de diamètre d , encastree à une extrémité et soumise à un couple de torsion. En supposant toujours que la limite d'élasticité n'est dépassée en aucun point, on a la relation (§ 89)

$$\theta = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M' \cdot L}{G' \cdot d^4}$$

θ étant l'angle de torsion produit par le moment M' . Quant au travail développé par la torsion, c'est-à-dire à la demi-force vive susceptible d'être absorbée par la déformation, il est égal à

$$\int_0^{\theta} M' \times d\theta = \frac{\pi \cdot G' \cdot d^4}{64 L} \theta^2$$

θ_1 étant la valeur maximum considérée comme admissible pour l'angle de torsion; or on a vu (§ 90) que cet angle θ_1 a pour expression

$$\theta_1 = \frac{L \cdot i'}{v'} = \frac{2 L \cdot i'}{d}$$

et par suite

$$\int M' \times d\theta = \frac{1}{4} \pi \cdot d^4 \cdot L \times \frac{G' \cdot i}{4} = V \times \frac{R'''^2}{4 G'}$$

V désignant le volume de la tige cylindrique, R''' la charge maximum par millimètre carré admissible pour la torsion et G' le coefficient d'élasticité correspondant; leurs valeurs numériques ont été données au paragraphe 99 pour les principaux corps employés dans les constructions (*).

Si la tige était creuse, au lieu d'être pleine, on aurait, comme il est facile de le voir

$$\int M' \times d\theta = V \cdot \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \times \frac{R'''^2}{4 G'}$$

(*) Si l'on prend $R''' = \frac{4}{5} R$ et $G' = \frac{2}{5} E$ comme cela a lieu approximativement (§ 99), on a $\int M' \times d\theta = V \times \frac{2}{5} \frac{R^2}{E}$ tandis que, pour la flexion, on avait seulement $\int P \times df = V \times \frac{R^2}{6 E}$. On peut donc, par la torsion, emmagasiner beaucoup plus de kilogrammètres dans 1 kilogramme d'acier qu'en ayant recours aux phénomènes de flexion.

§ 215 — Ressorts de torsion enroulés à section circulaire).

On appelle un ressort enroulé, ou autrement dit à boudin, appuyé sur un point EF perpendiculaire à sa base et ayant son extrémité supérieure fixe au centre pour y recevoir une charge P dirigée suivant l'axe du cylindre; nous supposons d'ailleurs que la portion AC est assez rigide pour n'être que peu ou point influencée par la flexion. Il est bien clair que, dans ces conditions, la partie supérieure C, et par conséquent l'extrémité A de l'hélice, va s'abaisser d'une certaine quantité h en obéissant à l'action de la force P, et les choses se passeront sensiblement comme si un bras de levier horizontal AC, tournant d'un angle θ , imprimant au fil AKS une certaine torsion: seulement, le point A descendant lui-même de la quantité $h = r \cdot \theta$, le levier AC reprend une position horizontale A₁ C₁. Comme on le voit d'ailleurs facilement, les différentes sections normales du fil spiral SA sont toutes soumises au même moment de torsion $P \times r$, de sorte qu'on se trouve dans le cas étudié au paragraphe précédent, celui d'un fil cylindrique de diamètre d et de longueur L (L étant

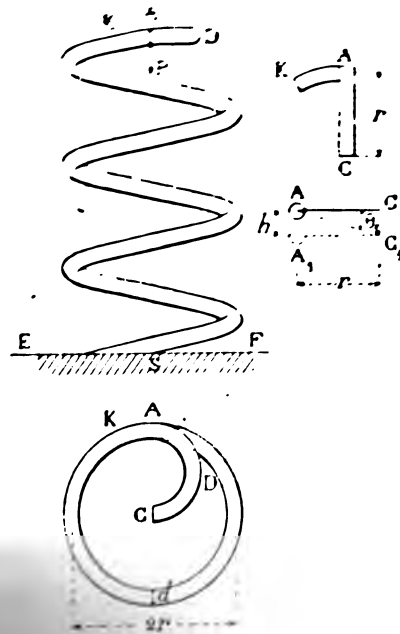


Fig. 325

la longueur du développement de l'hélice) et la demi-force vive susceptible d'être éteinte par la déformation du système est égale à

$$\int M' \times d\theta = V \times \frac{R'''^2}{4G}$$

fil, et R''' ayant, ainsi que G , la même signification (§ 214). Quant à l'effort maximum P auquel il faut

soumettre le ressort pour le faire travailler à la charge R''' , il est donné par les formules générales de la torsion (§ 90)

$$G' \times r' = R''' = \frac{16. M'}{\pi. d^3} = \frac{16. P. r}{\pi. d^3}$$

D'où

$$P = \frac{\pi. d^3}{16 r} \cdot R'''$$

Enfin la flèche correspondante h du ressort est donnée par la relation

$$h = r. \theta_1$$

et comme (§ 90)

$$\theta_1 = \frac{2 L. r'}{d}$$

ainsi que

$$r' = \frac{16. P. r}{\pi. G'. d^3}$$

on en déduit

$$h = \frac{2 L. r}{d} \cdot \frac{R'''}{G'}$$

Cette formule se met souvent sous une autre forme : si l'on appelle n le nombre des spires, on a

$$L = 2 \pi. r \times n$$

D'où

$$h = \frac{4 \pi. n. r^3}{d} \cdot \frac{R'''}{G'}$$

Ces diverses relations donnent tous les renseignements dont on a besoin pour l'établissement d'un ressort de ce genre; il est à peine besoin d'ajouter qu'elles s'appliquent tout aussi bien au cas où la force P , au lieu d'être de compression comme sur la figure 325, agit au contraire par traction.

§ 217. — **Ressorts de torsion enroulés à section non circulaire).**

Dans le paragraphe qui précède, nous avons supposé que la section du ressort spiral est un cercle; cette forme, qui est d'égale résistance, est en effet celle qui convient le mieux pour la torsion; mais, dans la pratique, on emploie assez souvent d'autres types de sections, par exemple un carré. L'étude complète que nous avons faite dans le chapitre VI permet de résoudre sans difficulté le problème qui se présente ainsi; nous avons vu en effet (§ 95) que, pour un ressort à section constante, les formules qui donnent l'une l'angle de torsion et l'autre la fatigue maximum R''' de la matière sont

$$K \cdot \frac{G \cdot \theta}{L} \cdot \frac{D^4}{J} = M'$$

$$K' \cdot R''' \cdot \sqrt{D^3} = M'$$

K et K' étant les coefficients numériques dont les valeurs sont connues grâce aux travaux de de Saint-Venant et ont été données au paragraphe 95 pour un assez grand nombre de sections.

Au moyen des deux formules ci-dessus, l'étude qui vient d'être faite (§ 216) peut être reprise sans difficulté et on arrive ainsi immédiatement aux relations suivantes qui donnent la solution du problème actuel et dans lequel les différentes lettres ont la même signification que tout à l'heure :

$$P = \frac{K' \cdot \sqrt{D^3}}{r} \cdot R'''$$

$$\lambda = \frac{K' \cdot L \cdot r \cdot J \cdot R'''}{K \cdot \sqrt{D^3} \cdot G}$$

$$\int M' \cdot d\theta = v \cdot \frac{K' \cdot J \cdot R'''}{2 \cdot K \cdot D^2} \cdot \frac{R'''}{G}$$

v étant le volume du ressort, D sa section transversale et J le moment d'inertie polaire de cette dernière autour de son centre de gravité.

§ 218. — **Mouvement oscillatoire d'un poids suspendu à l'extrémité d'une tige élastique.**

Soit AB une tige verticale prismatique de section constante, fixée à son extrémité supérieure A; un poids P qu'on laisse tomber du point C, descend sans frottement le long de la tige et vient heurter en B un petit plateau ou un ressort quelconque qui fait corps avec celle-ci et sur lequel il est supposé venir se fixer d'une manière invariable de façon à ne pouvoir s'en séparer. Quand le poids arrive en B avec une vitesse $\sqrt{2g.h}$, il se produit un choc dans lequel interviennent les valeurs relatives des masses et la tige s'allonge en développant un certain travail moléculaire. Pour simplifier le problème, nous supposons que la masse de la tige AB est nulle ou du moins infiniment petite par rapport à celle du corps choquant et nous admettrons en outre, comme toujours, que l'élasticité n'est altérée en aucun point. Dans ces conditions l'ébranlement communiqué à l'extrémité B peut être considéré comme se transmettant instantanément dans toute la tige dont tout l'ensemble concourt ainsi efficacement à éteindre la force vive du poids P.

Traçons la ligne BK dont les ordonnées représentent les tensions qui sont développées dans la barre AB par ses allongements pris comme abscisses, et soit AD la longueur qu'aurait la tige sous l'action du poids P agissant sans vitesse; on a évidemment $P=DD'$. Dans sa chute le poids augmente de vitesse jusqu'en D puisque la force motrice P est alors supérieure à la résistance présentée par la tige; le mouvement devient ensuite retardé et il y a arrêt en M par exemple. A partir de ce moment la barre tend à reprendre la longueur AD, de sorte qu'elle remonte avec le poids P, dépasse le point D en vertu de la vitesse acquise et remonte jusqu'en M' où se produit un second arrêt suivi d'une nouvelle descente et ainsi de suite.

La loi de ces phénomènes est facile à étudier : soit en effet S un

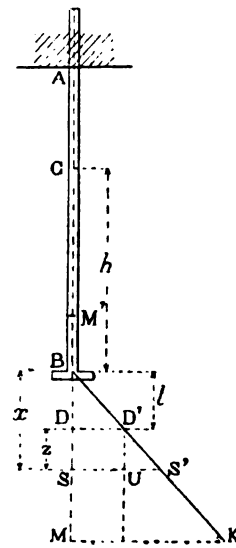


Fig. 326

point quelconque du parcours; la force motrice est $SU = P$ et la force retardatrice $SS' = P \times \frac{x}{l}$; l'équation du mouvement est donc

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = P - \frac{P \cdot x}{l} = P \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

ou, en prenant pour origine des abscisses le point D au lieu de B,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot z$$

C'est l'équation du mouvement d'un pendule ayant une longueur l , c'est-à-dire $\frac{P \cdot L}{E \cdot \Omega}$, Ω étant la section de la barre. Le problème proposé est donc résolu.

En intégrant l'équation précédente, ce qui se fait en posant $\frac{dz}{dt} = v$, on obtient

$$v \cdot dv = -\frac{g}{l} \cdot z \cdot dz$$

$$v^2 = 2g \cdot h + g \cdot l - \frac{g}{l} \cdot z^2$$

v étant la vitesse du point B pour l'abscisse z ; cette équation résulte d'ailleurs immédiatement de l'application du théorème des forces vives.

Pour déterminer les points d'arrêt M et M', il suffit de faire $v = 0$ dans la relation ci-dessus, ce qui donne

$$DM = DM' = \sqrt{l(2h + l)}$$

L'allongement maximum BM a par conséquent pour valeur

$$BM = l + \sqrt{l(2h + l)}$$

tandis que le raccourcissement BM' est égal à

$$BM' = \sqrt{l(2h + l)} - l$$

Comme on le voit, l'allongement maximum éprouvé par la tige, $l + \sqrt{l(2h+l)}$, est très notablement supérieur à l ; même pour $h=0$, on a $BM=2l$; ce cas est celui où le poids P placé sans vitesse sur le plateau B est brusquement abandonné à lui-même. On comprend par là quelle importance considérable ont, au point de vue de la solidité d'une construction, les forces vives qu'il s'agit d'éteindre.

Au lieu de supposer le poids P invariablement fixé au plateau B et faisant corps avec lui, on pourrait supposer qu'il repose simplement sur celui-ci. Les phénomènes de la descente se passeraient alors de la même manière que tout à l'heure, ainsi que ceux de la montée jusqu'à C . Au moment où la tige AB (étant supposée avoir une certaine élasticité) s'arrêtera brusquement puisque le poids P exercera sur elle de la compression; ce dernier, étant animé d'une vitesse $\sqrt{2g.h}$, remontera donc jusqu'en C pour retomber ensuite et donner lieu indéfiniment à la même série de phénomènes.

Des considérations et des calculs analogues sont applicables au cas d'une barre ou d'une tige qui est soumise à un choc la faisant travailler soit par flexion, soit par torsion.

§ 219. — Vibrations des tiges ou des poutres, dans le cas où l'on tient compte de la masse du corps choqué.

Dans l'étude qui précède, nous avons supposé que le corps choquant a une masse infiniment grande par rapport à celle de la barre choquée; or il s'en faut de beaucoup que, dans la pratique, les choses se passent de cette façon. Le problème à résoudre devient alors beaucoup plus complexe : l'ébranlement communiqué au point touché ne se transmet pas alors instantanément dans toute la masse, en outre il faut commencer d'admettre que les réactions élastiques de la barre ne sont pas les mêmes à l'état de mouvement qu'à l'état statique : il faut donc enfin de tenir compte des vibrations secondaires qui se superposent aux vibrations principales et doivent avoir une influence appréciable. Eu égard à la complexité de la question qui n'a pas encore reçu d'ailleurs de

solution complète, nous nous bornerons à renvoyer aux savantes recherches de de Saint-Venant et à celles de M. Boussinesq ; on les trouvera exposées dans la Théorie de l'élasticité des corps solides par Clebsch et de Saint-Venant ainsi que dans le Traité de Résistance des Matériaux de M. Flamant, page 588 et suivantes.

5
24

1

2

JUN 7 - 1943

