This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Sammlung
combinatoriſch-analytiſcher
Abhandlungen

herausgegeben
von
Carl Friedrich Hindenburg

Zweyte Sammlung

Leipzig, bey Gerhard Fleiſcher dem Jüngern
1800.

W. W. Beman
gt.
6-1-1923

Dem Herrn

Profeſſor Klügel

in Halle

und

dem Herrn

Profeſſor Pfaff

in Helmſtädt

widmet

dieſe zweyte Sammlung

combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen

zu Bezeugung

ſeiner Freundſchaft und Hochachtung

der Herausgeber.

Vorbericht.

Ich liefere hier die zweyte Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen. Sie ſind eine Fortſetzung jener Schrift: Polynomiſcher Lehrſatz rc., die man als die erſte Sammlung anſehen kann; weshalb ich auch dafür einen Haupttitel hier habe abdrucken laſſen, den man ihr vorſetzen kann.

Dieſe zweyte Sammlung hat gleiche Abſicht mit der erſten: Vervollkommung und weitere Ausbreitung der Combinationslehre und ihrer Anwendung auf die Analyſis, durch Beyhülfe der lokalen und combinatoriſchen Zeichen und Functionen, deren Werthe durch äuſſerſt ſimple, größtentheils involutoriſche Darſtellungen ſich ſo leicht ergeben. Auch ſtellt die zweyte der folgenden Abhandlungen ein neues ſehr merkwürdiges Beyſpiel auf, wie ſehr man ſich den combinatoriſchen Formen nähert, ſie auch wohl dem Inhalte, wenn ſchon nicht der geſchmeidigen Anordnung nach, ganz erreicht, indem man die Auflöſung der Aufgabe, durch eine weiter als gewöhnlich, getriebene Analyſe möglichſt zu ſimplificiren und zu erleichtern ſucht. Die dortigen Reihen der Coefficienten der einzelnen Glieder ſind nichts anders als combinatoriſche Involutionen, wo die höhern alle vorhergehende niedrigern in ſich enthalten. Nur die Subſtitutionen, durch welche ſie dort hergeleitet werden, machen ihre Auffindung weitläuftig und zum Theil beſchwerlich; das combinatoriſche Geſetz hingegen, das ſie befolgen, iſt ganz einfach und leicht. Da bei den Gliedern jener Reihen die Boscowichſche Folge der Complexionen zum Vorſchein kommt, ſo hat das Veranlaſſung gegeben, dieſe Anordnung von neuem vorzunehmen, ſie wie die Moivriſche, rein-combinatoriſch darzuſtellen, und auf unbeſtimmte Summen zu erſtrecken

Mehrere der folgenden Aufſätze ſind vorlängſt in meinen Händen geweſen. Einige derſelben hätten ſogar in der erſten Sammlung abgedruckt werden können, wenn es der Raum verſtattet hätte. Alle würden ſie, nach den von mir getroffenen Anſtalten, längſt im Publicum erſchienen ſeyn, hätte nicht ihre Ausfertigung durch den Druck mannigfaltige Schwierigkeiten und unvorhergeſehene Hinderniſſe gefunden. Dieſe hier aufzuzählen, kann die Leſer nicht intereſſiren. Dagegen, hoffe ich, ſollen Inhalt und Ausführung der Abhandlungen die Verzögerung ihrer Mittheilung hinlänglich vergüten.

Man wird mit Vergnügen bemerkt haben, daß die combinatoriſche Analyſis immer mehr und mehr an Ausdehnung gewinnt. Auch auswärtige, der deutſchen Sprache unkundige, Leſer können ſich nun näher von ihr, nach ihrem itzigen ſehr erweiterten Zuſtande, aus zwey neuerlich erſchienenen lehrreichen, und, für die Analyſis überhaupt, wichtigen Werken unterrichten. Herr Profeſſor Pfaff hat nähmlich in ſeinen ſehr gründlichen, tiefeindringenden Disquiſitionibus analyticis, in der dortigen dritten Abhandlung, durch eigene Bearbeitung der combinatoriſchen Operationen und ihrer Anwendung, nach den von mir eingeführten lokalen und combinatoriſchen Zeichen, um dieſen neuen Zweig der Analyſis ſich verdient gemacht. Auch hat Herr Doctor und Profeſſor Kramp zu Cölln in ſeinem claſſiſchen Werke: Analyſe des Réfractions aſtronomiques et terreſtres (bey den daſelbſt im dritten Capitel neu aufgeführten algebraiſchen tranſcendentiſchen Functionen, facultés numériques, aus welchen ſo viele und wichtige Wahrheiten hergeleitet werden) die combinatoriſche Analyſis bey ſeinen Forſchungen, nach einer eigenen, mit ſeinen übrigen Zeichen mehr übereinſtimmenden, Bezeichnung häufig angewendet, und dadurch ihren großen Nutzen bey verwickelten Unterſuchungen aufs neue beſtätiget und auſſer Zweifel geſetzt. Vielleicht, daß auch nun Herrn Profeſſor Bürmanns in Cölln vielumfaſſender Eſſai de Calcul fonctionnaire, wovon zu anderer Zeit im mathematiſchen Archive geſprochen worden, bereits abgedruckt iſt; da, einer mir zugekommenen ſichern Nachricht zufolge, das Inſtitut national zu Paris, welchem dieſe Schrift von dem biedern Lalande zur Prüfung vorgelegt worden war, den Druck derſelben, mit rühmlicher Meldung ihres Verfaſſers, ſchon ſeit einiger Zeit verordnet hat. In dieſem Werke wird Herr B. der vornehmlich dahin arbeitet, die Functionen-Analyſis mit der combinatoriſchen in die engſte Verbindung zu ſetzen, nicht ermangelt haben, dieſe neben jener zu empfehlen, auch mehrmals von ihr Gebrauch zu machen. „Die Functionen-Analyſis (ſagt dieſer vortrefliche Ana„lyſt in einem ſeiner Briefe an mich) lehrt, meiſterhaft „was zu thun iſt, übernimmt aber, in verwickelten Fäl-

„len, nur ſelten die Ausführung, ſondern überläßt ſolche „der combinatoriſchen; wodurch alſo ein großer Theil „der ganz allgemeinen Formeln erſt wirkliche Brauchbar„keit erhält, und ſolche ſonach aufhören, bloße Spiele „des Witzes und des Scharfſinns ihrer Erfinder zu ſeyn.“

Der Wunſch, den man bereits mehrmals geäuſſert hat, ein eigenes Lehrbuch der combinatoriſchen Analyſis zu haben, welches von den erſten und einfachſten Gründen an, die Hauptſätze und ihre Anwendung wiſſenſchaftlich geordnet, faßlich vorgetragen und deutlich entwickelt enthielte; ein Lehrbuch, in welchem alles, was zur Sache gehört, beiſammen anzutreffen wäre, worinn nichts, als anderswoher bekannt, vorausgeſetzt würde, wo alſo Berufungen und Verweiſungen auf andre Schriften, ausgenommen in hiſtoriſcher und litterariſcher Rückſicht, ganz wegfielen — dieſer Wunſch iſt wahrſcheinlich bereits itzt, da ich dieſes ſchreibe, in Erfüllung gegangen. Es haben nähmlich, Herr Profeſſor Stahl in Jena und Herr Conrector Weingärtner in Erfurt, ſich ſchon ſeit einiger Zeit mit Ausfertigung eines ſolchen Werks, nach meiner Theorie und in meinen Zeichen, beſchäftigt. Ihre gründlichen Kenntniſſe und Einſichten in die Sache bürgen für den guten Erfolg dieſer Unternehmung, durch welche ſie ſich ein bleibendes Verdienſt um die Wiſſenſchaft erwerben werden, die ſie ſchon vorher, durch akademiſche Vorleſungen mehr auszubreiten und zu erweitern bemüht geweſen ſind. Beyder Schriften, wenn ſie nicht ſchon itzt abgedruckt ſind, werden gewiß in der nächſt bevorſtehenden Oſtermeſſe zu haben ſeyn.

Von mehrern Aufſätzen, die wegen Mangel an Raum in dieſer zweyten Sammlung nicht Platz finden konnten, hätte ich ſehr gern noch einen, „betreffend eine „nähere Betrachtung meiner combinatoriſchen Zeichen,

„um ſelbige in der Zeit von einer halben Stunde je„dem Analyſten lesbar und verſtändlich zu ma„chen *), nebſt der Vergleichung dieſer Zeichen mit „andern, neuerlich in Vorſchlag gebrachten“ vorgelegt, wenn letzteres durch den Druck bequem hätte geſchehen können.

Es hat nähmlich Herrn Profeſſor Bürmann bey ſeiner ernſtlichen und gründlichen Beſchäftigung mit der combinatoriſchen Analyſis wünſchenswerth geſchienen, daß die Kenntniß von ihr auch im Auslande ſich baldmöglichſt verbreiten möchte. Bey der Vorarbeit zu einer künftigen Analyſe combinatoire, die Herr B. ſogleich unternahm, kam es nun wegen der lettres gothiques, deren hier in der Anmerkung erwähnt worden iſt, recht eigentlich zur Sprache. Die Folgen der dadurch veranlaßten Discuſſion ſind merkwürdig und verdienen hier nicht übergangen zu werden.

*) Noch immer hört man die Aeuſſerung, dieſe Zeichen ſeyen fremd und unverſtändlich. Vi dirò con franchezza (ſagt einer von Herrn Bürmanns ausländiſchen Correſpondenten) che non ho ſtudiato l'Analiſi combinatoria. La notazione troppo eterogenea ſempre mi faceva paura — und ein Anderer: La notation differe trop et trop peu de la notation analytique. Ces lettres gothiques (die deutſchen Buchſtaben) auxquelles je ne me puis accoutumer — La choſe peut être excellente, mais une autre notation eſt indiſpenſable. So ſchlimm dürfte es denn doch wohl um die Sache nicht ſtehen! — In dem obenangeführten Aufſatze rede ich blos vom Leſen und Verſtehen der Zeichen. Nur dabey kann man anfangs anſtoſſen. Denn, was die Ausführung derſelben nach ihren Zahlen- oder Buchſtabenwerthen anbetrift, ſo weiß man ſich entweder ſchon ſelbſt zu helfen, oder man verfährt nach angewieſenen ſehr einfachen Regeln; und dabei fällt ſogar jeder Vorwand von Schwierigkeit hinweg, weil die combinatoriſchen Operationen ihrer Natur nach leichter ſind, als die arithmetiſchen: die Zahlen ſich leichter permutiren, combiniren und variiren, als addiren, multipliciren und dividiren laſſen.

Die Unbekanntſchaft der Ausländer mit unſern deutſchen Buchſtaben, deren ich mich zu Bezeichnung der Binomial- und Polynomialcoefficienten bediene; ja, was noch mehr auf ſich hat, ihre entſchiedene Abneigung dafür, und eine gewiſſe, ich weis nicht ſoll ich ſagen natürliche oder erkünſtelte (übertrieben delicate) Perhorreſcenz derſelben, die Herr B. der ſich lange Zeit im Auslande aufgehalten hat, aus Erfahrung kennt, und die ſelbſt ein Euler durch häufigen Gebrauch dieſer Buchſtaben in ſeinen claſſiſchen ganz unentbehrlichen Werken gleichwohl nicht hat tilgen können; dies zuſammen genommen, wünſchte Herr B. (der übrigens meine Grundſätze der Bezeichnung [Erſte Samml S. 284] vollkommen billigt) die deutſchen Buchſtaben gegen andere Zeichen auszutauſchen. Die Sache hat keine Schwierigkeit, und man kann — ſtans pede in uno — wohl zehn paſſende Vorſchläge thun, den Anſtoß aus dem Wege zu räumen, und ſich [illegible] beſonders einer Nation gefällig zu bezeigen, bey welcher

la plus noble penſée
Ne peut plaire à l'eſprit, quand les yeux ſont bleſſés.

Bey dieſer Gelegenheit — wie es ſo beym Bauen zu geſchehen pflegt, wenn man einmal anfängt einzureiſſen — kamen noch zwey andere Fragen in Antrag: „ob nicht, wenn einmal die deutſchen Alphabete wegfielen, auch die Buchſtabenzeichen der übrigen lateiniſchen Alphabete (deren Bedeutſamkeit im einzelnen, ſo „wie ihre Harmonie in der Zuſammenſetzung übrigens „vollkommen anerkannt wären) aufzuheben, und dieſe „Vortheile auf einem andern Wege zu erreichen ſeyen? „und, ob es überhaupt nicht rathſam ſey, den Zeichen „der Combinationslehre, als Grundwiſſenſchaft, „eine, von dem in der Algebra und Analyſis vorkommenden

„Zeichen, die gewöhnlich Buchſtaben ſind, *ganz abwei*-
„*chende Form* zu geben?“

Was Herr Profeſſor Bürmann von ſeinem Plan d'une notation purement combinatoire, ſeinem Dévelopement des Fonctions combinatoires, ſeiner Application aux combinaiſons arithmétiques des Séries, und ſpäterhin, von ſeinem Syſtême de Notation und ſeinen Fonctions combinatoires pour la langue univerſelle, dite Idéographie analytique (Arch. der Math. H. VIII. S. 510) mir zugeſendet hat, verdient alle Aufmerkſamkeit, zeigt großen Scharfſinn und eine gereifte Ueberſicht des Ganzen. Die kurzen und expreſſiven Zeichen, die vielleicht Herr B. ſchon itzt weiter vervollkommnet hat, können, mit ihren verſchiedenen Modificationen, hier nicht mitgetheilt werden, weil es für ſie in der Druckerey keine Typen giebt.

Ich will gleichwohl verſuchen, von der *Hauptſache*, der Notation combinatoire und den fonctions combinatoires, hier ſoviel im Allgemeinen beyzubringen, als, ohne Nachweiſung auf Figuren, davon zu begreifen möglich iſt; für Leſer, verſteht ſich, denen meine Zeichen ſchon bekannt ſind. Nur dieſen kann ich mich *in der Kürze* verſtändlich machen.

Bey mir deuten bekanntermaßen die großen lateiniſchen, gerade und ſchiefſtehenden, Buchſtaben, mit ihren beſtimmten Abzeichen, *combinatoriſche Operationen*, mit oder ohne Wiederholung, ſchlechthin oder zu beſtimmten Summen, claſſenweiſe oder lexikographiſch geordnet, an; die *Klaſſen* oder *Ordnungen* ſelbſt, werden durch die *Folge der Buchſtaben* nachgewieſen; der übergeſchriebene *Diſtanzexponent* macht, daß es dem Alphabete nie an Buchſtaben fehlen kann, ſo viel man ihrer auch nöthig hat, auch können durch ihn beſtimmte und unbeſtimmte Klaſſen und Ordnungen durcheinander ausgedrückt werden; beyzufügende Polynomial- oder Binomialcoefficienten werden durch vorgeſetzte kleine oder große, im leztern Falle mit ihren Potenzexponenten verſehene, deutſche Buchſtaben angedeutet; die combinatoriſchen Operationen aber auf die im Zeiger befindlichen Elemente bezogen; die Involutionen insbeſondere, dieſe vor allen andern ſich ſo vortheilhaft auszeichnende Formen der Zuſammenſetzung, werden durch eigene beſondere Zeichen dargeſtellt.

Herr Profeſſor Bürmann hingegen wählt für gewiſſe Hauptbegriffe und Operationen: Einzelne Dinge, Reihe, Complexion, Combination, Discerption, einzelne beſtimmte Grundzeichen; die, durch Veränderung der Lage; durch kleine Abſtufung der urſprünglichen Form; durch Verlängerung der Grundſtriche; durch Beyfügung horizontaler und verticaler Doppelſtriche, oben, unten und zur Seite des Zeichens; durch ein- und übergeſchriebene Zahlen und Buchſtaben, weiter modificirt werden, um die, bey meinen Zeichen ſo eben angeführten, beſondern Beſtimmungen, beſtimmt nachzuweiſen.

Die Bürmanniſchen Zeichen ſind ſprechende; ſo etwas, wie meine

$$P(1,2,3\ldots n);\quad C(1,2,3\ldots n);\quad V(1,2,3\ldots n)$$

für die combinatoriſchen Hauptoperationen (Syſt. Perm. p. XLI, 12) oder, wie meine

$$\underset{(1,2,3\ldots n)}{[P]}\qquad \underset{(1,2,3\ldots n)}{[C]}\qquad \underset{(1,2,3\ldots n)}{[V]}$$

(Arch. d. Math. H. IV. S. 416, 417 und die dort. No-

e) wo man auch die Klammern [ ] weglaſſen kann, wenn man, wie hier, den Zeiger (1, 2, 3 … n) überall interſetzt; wodurch ſich die complexen Zeichen P, C, V, ſchon hinlänglich von gemeinen Buchſtaben unterſcheiden; oder endlich, wie meine

J, *J*, 𝔍, 𝕵, mit und ohne Summenexponenten,

für Klaſſen- und lexikographiſche Involutionen (Erſte Samml. S. 176, 32) — nur ſind es keine Buchſtaben, wie bey mir, ſondern blos buchſtabenähnliche Figuren (wie das verzogene r bey √, dem Radical- oder Wurzelzeichen; dahin man auch meine Coefficienten und Gliederzeichen ϰ, 7 rechnen, und ſolche als verzogene c, t anſehen kann).

Die einfachſten Bürmanniſchen Monogrammata, aus welchen die übrigen, durch obenerwähnte Veränderung und Beyfügung beſtimmter Abzeichen, gebildet werden, ſind

⊓ Série; ⊏ Combinaiſon; ⊐ Diſcerption;

Die Variations ſind hier den Combinaiſons, als Combinaiſons permutées, untergeordnet. Eine Menge einzelner, zuweilen auch verbundener Dinge, heißt Série; die einzelnen Dinge werden Individus (nicht choſes oder élémens) genennt, weil jenes zu viel Bedeutungen hat, dieſes zu oft vorkommt.

Noch charakteriſtiſcher wäre folgende Zeichnung:

⊓ Permutation; ⊏ Combinaiſon; ⊔ Variation; ⊐ Diſcerption

für die combinatoriſchen Hauptoperationen. Es iſt beſſer, die Combinationen und Variationen, jede für ſich zu betrachten, und nicht, jene als beſchränkte Variationen oder dieſe als erweiterte Combinationen, anzuſehen (Erſte Samml. S. 214. Note). Die Diſcerptionen werden hier nicht (wie die Permutationen, Combinationen und Variationen) als eine beſondere combinatoriſche Operation aufgeführt; ſie ſind von den Combinationen und Variationen nur der Betrachtungs- und Entwickelungsart nach unterſchieden; in ſoferne man bey dieſen das Ganze als aus ſeinen Theilen zuſammengeſetzt, bey jenen, als in ſeine Theile zerlegt ſich denkt. Meine beyden Discerptionsprobleme (Inf. Dign. p. 73. ſeq. und p. 129 ſeq. *)), beſonders die dortigen Vorſchriften der Auflöſung, zeigen das ſehr deutlich. Die Série könnte man durch Klammern, runde ( ) oder eckichte [ ] welche die einzelnen Dinge eingeſchloſſen enthielten, darſtellen. Dieſe wären zugleich, wegen der Aehnlichkeit, der erſten mit dem alten, der zweyten mit dem neuen, griechiſchen großen Sigma, ſprechende Zeichen, wie die obigen; und ſo hätte man in allem nur vier Grundzeichen, oder, wenn man ſo will, nur ein Einziges, aber in vier verſchiedenen Lagen, für die Form; und eben ſo ein Eigenes für die Materie.

Ich eröffne hier blos meine Gedanken in Abſicht auf das Ganze, wie ich es jetzt kenne. Was Herr B. weiterhin für Veränderungen im Einzelnen vorgenommen hat, kann ich nicht ſagen, da mir ſeine neuſten Verſuche hierüber nicht bekannt ſind. Auch dürfte der Vorſchlag, die gegebenen einzelnen Dinge der Série, nicht einzuſchreiben, ſondern, in Klammern eingeſchloſſen, dem combinatoriſchen Zeichen unterzuſetzen, von Herrn B. wohl ſchwerlich genehmiget werden, da das Einſchreiben oder Einſetzen derſelben, welches die Form ſeiner

---

*) In den beyden dortigen Problemen (p. 73 und p. 129), nähmlich in dem Satze ſelbſt, ſtünde ſtatt Numerus componendus, beſſer diſcerpendus.

Grundzeichen verſtattet, ſonſt viel Empfehlendes vor ſich hat.

Den Schriftzügen ⊓, ⊏, ⊔, ⊐, Namen zu geben, um ſolche, wie Buchſtaben, bequem damit ausſprechen und leſen zu können: ſo dürften wohl die beyden erſten Buchſtaben Pe, Co, Va, Di, als Sylben der lateiniſchen Benennungen der combinatoriſchen Operationen, die ſie bezeichnen, oder auch nur die Anfangsbuchſtaben derſelben, mit ihren bekannten gewöhnlichen Benennungen, Pe, Ce, Vav, De, die ſchicklichſten ſeyn; um ſo mehr, da die Namen dieſer Operationen ſchon vorlängſt in andere Sprachen übergegangen und allgemein im Gebrauche ſind.

Mehrere der Bürmanniſchen combinatoriſchen Zeichen haben Aehnlichkeit mit hebräiſchen Schriftzügen, mit denen ſie auch das gemein haben, daß ſie ſich, wie die Finalbuchſtaben dieſer Sprache, ohne unkenntlich zu werden, in die Länge dehnen (auch in die Höhe und Tiefe ſtrecken) laſſen; welches bey mehrern ein- über- und unterzuſchreibenden Nachweiſungen (Zeigern, Summen- und Klaſſenexponenten, und darnach beſtimmt entwickelten Complexionen) mit Nutzen geſchieht. Wegen des einfachen Baues dieſer Zeichen aus geraden Linien, die unter rechten Winkeln zuſammenſtoßen, ließen ſich mehrere derſelben, und, wären die Einſchreibungen nicht, alle insgeſamt, ohne weitere Vorbereitung, durch Typen darſtellen, wie ſie in jeder Druckerey vorhanden ſind. Dies wird das Eckichte dieſer Zeichen entſchuldigen, bey denen Herr B. die ſchöne Form ſelbſt vermißt, aber auch zugleich richtig bemerkt: L'élégance de la ſimplicité eſt la ſeule, qui convient aux ſciences; celle d'ornement, eſt pour les arts. Daß eckichte Schriftzüge ſich weniger bequem und geſchwind ſchreiben laſſen als runde, iſt ſehr wahr; aber man kann ja im Schreiben die Züge ſo viel abründen, als man nur immer für bequem findet. Ich male die, zu auffallender Unterſcheidung von mir gewählten, blumichten gedruckten Buchſtaben A, B, C ... und J, der lexikographiſchen Ordnungen und Involutionen, beym Schreiben auch nicht nach; ganz gewöhnliche Buchſtaben, mit einem kleinen Striche zum Abzeichen, ſtellen ſie mir dar.

Der Ausführbarkeit dieſer Zeichen im Drucke hält ſich ihr Urheber mit wenigem Koſtenaufwande verſichert. Dieſer könnte gleichwohl geſpart, und alles ſogleich in Gang gebracht werden, wenn Herr B. des Einſetzens von Zahlen und Buchſtaben in die Grundzeichen (das auch für die Zeiger zuweilen Schwierigkeit haben wird) ſich zu begeben, und meine Abzeichen für die Buchſtaben, ſo wie den Zeiger mit der Klammer, auch für ſeine Symbole beyzubehalten ſich entſchließen wollte. Die Klaſſen- und Ordnungszahlen würden hier (wie meine Diſtanzexponenten) über das combinatoriſche Zeichen geſetzt. So würde z. B.

$$\underset{\begin{pmatrix}\gamma, & \eta, & \iota, & \varkappa\ldots\\ 3. & 7, & 9, & 10\ldots\end{pmatrix}}{p-q\;\overset{r}{\sqcup}\;m+n}$$

das hier nebenſtehende Symbol mit ſeinen Abzeichen „die $(m+n)$te Potenz, der $r$ten Variationsclaſſe, zur „Summe $p-q$, für den Zeiger aus „den Buchſtaben $\gamma, \eta, \iota, \varkappa \ldots$ nach den beigefügten „Zahlenwerthen $3, 7, 9, 10 \ldots$ ausdrücken.“ Bey den Variationscomplexionen wären hier Widerholungen verſtattet, weil das Abzeichen des Gegentheils fehlt.

Dieſe ſo eben aufgeführte ſymboliſche Anordnung, die von der Bürmanniſchen (wenn auch bey ihr die Einſchreibungen beybehalten werden) nicht weſentlich verſchieden iſt, gewährt, auſſer der Leichtigkeit, mit welcher ſie ſich ſogleich und ohne alle Vorbereitung im Druck ausführen läßt, noch den Vortheil, daß ſie ein bequemes Mittel an die Hand giebt, wie man auf dem kürzeſten Wege, eine der Bürmanniſchen ähnliche Darſtellung in meinen Zeichen ausdrücken kann. Man darf nehmlich nur, ſtatt des Bürmanniſchen $\sqcup$ mein V, mit oder ohne Klammern (nach der Erinnerung auf Seite XIII, oben) ſetzen, alle übrigen Nebenbeſtimmungen aber, wie ſie daſtehen, beibehalten. Der Unterſchied dieſer Zeichnung von der ſonſt von mir gebräuchlichen, beruht einzig und allein darauf: daß die Variationsclaſſen hier nicht, wie bey mir ſonſt, durch die Folge der Buchſtaben $A, B, C, D, \overset{r-1}{A}\ldots$ ſondern durch $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}, \overset{3}{V}, \overset{4}{V} \ldots \overset{r}{V}$, alſo durch die Diſtanzexponenten, 1, 2, 3, 4 … r über dem V (dem Zeichen der nach Variation) gewieſen werden, welche, als Claſſenexponenten, ſich hier auf die Gränze o beziehen, von welcher der Anfang zu rechnen wäre. Eben ſo wäre, bey den Combinationen, ſtatt $\sqsubset$ nun C zu ſetzen, auch würden hier, ſtatt der Combinationsclaſſen $A, B, C, D \ldots \overset{r-1}{A}$ nun $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \overset{3}{C}, \overset{4}{C} \ldots \overset{r}{C}$, und ſtatt der Combinationsclaſſen zu beſtimmten Summen n, deren Complexionen die Polynomialcoefficienten beyzufügen wären, oder ſtatt a^nA, b^nB, c^nC, $b^nD \ldots$ nun $\overset{1}{c^nC}$, $\overset{2}{c^nC}$, $\overset{3}{c^nC}$, $\overset{4}{c^nC} \ldots$ zu ſetzen ſeyn.

Das nur auf den Fall, wenn man die Bürmanniſche Darſtellung ſo nahe als möglich in meinen Zeichen nachbilden wollte; auſſerdem würde ich doch lieber, bey Uebertragung jener Zeichnung in die meinige, den eingeführten Gebrauch, die Combinations- und Variations-Claſſen durch die Folge der Buchſtaben anzudeuten, beybehalten. Dadurch werden die Ordnungsexponenten 1, 2, 3, 4 ... über die C und V zu ſchreiben erſpart, jedem der groſſen Claſſenbuchſtaben A, B, C, D ... wird der gleichnamige Polynomialcoefficient a, b, c, d ... beygefügt, welche wieder zu den Binomialcoefficienten $^m\mathfrak{A}$, $^m\mathfrak{B}$, $^m\mathfrak{C}$, $^m\mathfrak{D}$ ... genau paſſen.

Sollen aber einmal Koſten aufgewendet werden, ſo wären unſtreitig, aus dem Ganzen gegoſſene Grundzeichen, denen ſich die weitern Modificationen bequem ein- und anfügen lieſſen, bey weitem die beſten. Freylich könnte man dazu nur dann erſt ſchreiten, wenn ſich hoffen lies, die darauf zu verwendenden anſehnlichen Koſten in der Folge mit Vortheil wieder zu erlangen.

Man könnte dabey das Aeuſſere der Charactere gefälliger machen, und das Eckichte der Formen abründen, woran ſich die Augen der analytiſchen Elégants jenes revolutionären Volkes, welchem vornehmlich zu gefallen auch dieſe literariſche Umwälzung in Vorſchlag gebracht worden iſt, doch immer ſtoſſen würden. Zugleich würde dadurch viel Zeit und Unluſt beym Setzen des Drucks erſpart werden.

Die Forderung betreffend, daß die combinatoriſchen Zeichen von allen andern analytiſchen ſich gut unterſcheiden, und daher auch Buchſtaben dafür vermieden werden möchten; ſo geht die Abſicht derſelben vornehmlich dahin, daß combinatoriſche Symbole mit andern, ohne Abbruch der Deutlichkeit und ohne alle Zweydeutigkeit ſich könnten vermiſchen laſſen. Meine a^nA, b^nB ... j^nJ, und andere combinatoriſche Functionen, thun unſtreitig der Forderung, wegen ihrer beſondern Form, vollkommen Genüge; aber freilich iſt der Abſtand derſelben von den gewöhnlichen nicht ſo groß, als bey nachfolgender Gleichung Herrn Bürmanns

$$a+\frac{3+c}{17}\;\overset{v}{\underline{\overline{x}}}\Big\|^{m+n} = 5a^3-12^3\,\Big|\overset{r}{\underline{\overline{\overline{m+n}}}}\,.\;\overset{r}{\underline{\overline{|m-n}}}$$

Solche Vermiſchungen finden ſich bey analytiſchen Unterſuchungen häufig ein, wenn man das, was bey ihnen combinatoriſch ſich entwickeln läßt, auch ſofort combinatoriſch zeichnet. Dies zugleich als ein Beweis, wie ſich etwa ſolche Symbole, ohne weitere Vorbereitung, im Druck ausführen laſſen.

Das iſt ein kurzer Abriß der Bürmanniſchen combinatoriſchen Semiotik, ſo weit ich ſie itzt kenne, und ſoweit ſich ſolche, ohne die Zeichen ſelbſt mit ihren Modificationen figürlich vorzulegen, überſehen läßt. Dieſe Zeichen ſind, wie Herr B. ſelbſt erinnert, eine getreue Ueberſetzung meiner Alphabete, mit denen ſie daher, in Abſicht auf harmoniſche Darſtellung gleichen Schritt halten; ſie ſind nicht kürzer aber einfacher, und daher nach Herrn B's Bemerkung, für Ausländer und Nicht-Gelehrte leichter und faßlicher. Jene dürfen nehmlich nicht zwey ihnen verhaßte Alphabete (das deutſche, große und kleine) erſt leſen und ſchreiben lernen, und dieſe, wenn ſie auch zu den uncultivirten Nationen der Erde gehörten, brauchen überhaupt gar keins zu wiſſen, weil ihnen die Zeichen, deren Grundzüge ſo einfach ſind, unmittelbar mit der Sache ſelbſt vorgelegt werden können; weshalb ſie auch Anſpruch auf eine allgemeine combinatoriſche ideographirte Zeichenſprache machen können. Was ich von uncultivirten, wenigſtens nicht ſo helle wie wir erleuchteten, Nationen hier ſage, dafür könnte Manchem vielleicht das Ziel zu weit geſteckt ſcheinen. Ich habe aber dabey folgende merkwürdige

Stelle aus einem von Herrn Bürmanns Briefen (von 15. Sept. 1798) vor Augen gehabt. „Ich wünſchte die Analyſis auſſer Europa bekannt zu machen. Die Zeit iſt da, wo unſere Wiſſenſchaften gemeiner werden wollen, und Bonapartens Heldenzug *) wird nicht wenig dazu beytragen. Es ſcheint mir darum nöthig zu ſeyn, auf eine allgemeine, ſyſtematiſch einfache Bezeichnung zu dencken. In Conſtantinopel, in Perſien, in Peking, in Japan und Indoſtan, ſind die franzöſiſchen Anfangsgründe der Mathematik in die Landesſprache überſetzt worden. Gott weis, welche Formen unſere meiſt ſchweren Europäiſchen Buchſtaben da bekommen haben, und wie ſehr eine ohnehin ſchwere Wiſſenſchaft dadurch erſchwert worden iſt!“

Der Beyfall, welchen ich jenen neuvorgeſchlagenen Zeichen hier ertheilt habe, kann den meinigen keinen Eintrag thun. Herr Bürmann erkennt ſie für die vollkommenſten ſchlechterdings, die ſich durch Buchſtaben angeben und darſtellen laſſen. Sie werden alſo immer fortdauern, um ſo mehr, da uns das Leſen und Schreiben der Buchſtaben, ſo wie ihre alphabetiſche, ſo gut zu benutzende, Folge ſo geläufig iſt. Auch kann die Einführung und der Gebrauch doppelter Zeichen gar nichts ſchaden; ſelbſt die Unbequemlichkeit, die einige, die ſich meiner Zeichen bereits bedienen, von daher befürchten, iſt nur ſcheinbar, nicht reell, indem der Ueberblick einer einzigen Octavſeite, worauf die Zeichen verglichen werden, den Kenner der meinigen ſogleich in den Stand ſetzt, die andern zu leſen und zu verſtehen. Es iſt ja nicht das erſte mal, daß bey einer Wiſſenſchaft, gleich von ihrem Urſprunge an, doppelte Zeichen, ohne Nachtheil

---

*) Obgleich, wie wir nun wiſſen, jener Zug nach Egypten in politiſcher Hinſicht ganz verunglückt iſt, ſo wird er doch für die Wiſſenſchaften, für Künſte und Gewerbe, nicht ohne erſpriesliche Folgen ſeyn. H.

ſind gebraucht worden; und ſo werden die beyderley combinatoriſchen in vollkommenem Einverſtändniſſe mit und neben einander beſtehen können. Was das künftige Schickſal dieſer Symbole ſeyn, und ob die eine Art derſelben vor der andern ein merkliches Uebergewicht im Gebrauche bekommen werde? das kann die Urheber derſelben wenig kümmern, die dabey nicht auf ſich, blos auf die Sache ſehen — wenn nur die Wiſſenſchaft dadurch gewinnt; und das wird ſie gewiß, wenn Herr B. ſeinen Plan verfolgt, und das Publikum recht bald mit ſeiner Analyſe combinatoire beſchenkt.

Wegen meiner Lokalzeichen und Formeln hat ſich Herr B. nicht erklärt. Der ſchnelle Ueberblick, den ſie gewähren, indem ſie die Beſtandtheile des zuſammenzuſetzenden Ganzen kurz darſtellen; der enge Zuſammenhang mit den combinatoriſchen Functionen, durch welche ſie ſich bequem ausführen laſſen; der Umſtand, daß, wenn man ohne ihre Beyhülfe ſogleich zu den combinatoriſchen Ausdrücken ſchreitet, man nicht ſelten in unnöthige und verdrüßliche Weitläuftigkeiten verfällt (Toepf. comb. An. S. 176 — 180; Arch. d. Math. H. VII. S. 374, 375; 10). — dies zuſammengenommen, macht ihren Gebrauch wichtig, zum Theil unentbehrlich. Will man auch hier Buchſtaben im eigentlichen Sinne vermeiden, ſo darf man nur ſtatt meiner gewöhnlichen Reihenbuchſtaben p, q, r, s, t . . ., ſtatt der Glieder- und Coefficientenzeichen 7, x, andere willkührliche Zeichen oder buchſtabenähnliche Figuren wählen. Die Sache hat nicht die geringſte Schwierigkeit.

Dieſer lange Vorbericht wird hoffentlich keiner Entſchuldigung bedürfen. Die vergleichende Betrachtung der Zeichen ſteht an ihrem rechten Orte: an der Spitze einer Schrift, bey welcher auf leichte und vielumfaſſende

Symbole ſo viel ankommt. Der Nutzen ſolcher Zeichen iſt ſehr groß und mannigfaltig. Sie beziehen ſich auf ganz einfache Darſtellungen, dienen zu bequemer Auffaſſung derſelben, kürzen die Vorträge, Schlüſſe und Beweiſe ab, erleichtern dadurch das Nachdenken, und ſchaffen, wie ſchon Herr Profeſſor Pfaff bemerkt hat, den weſentlichen Vortheil, daß ſie Unterſuchungen veranlaſſen, an die man ſonſt nicht ſo leicht gedacht hätte —

Ce n'eſt qu'en généraliſant les combinaiſons et en Simplifiant leurs Symboles, que l'ame diſtingue les parties d'un Tout immenſe. C'eſt en ſoulageant ainſi la memoire, que l'imagination diſpoſe de toutes ſes forces, que l'homme concentre, pour ainſi dire, l'Univers au foyer de ſon eſprit. *Eſſai de Calcul fonct. Sect. I.*

Leipzig, im April 1800.

Carl Friedrich Hindenburg.

I.

Entwickelung gebrochener Functionen, in lokal- und combinatoriſchen Zeichen dargeſtellt, in Tafeln geordnet, und mit hiſtoriſchen Erläuterungen verſehen,

von

Carl Friedrich Hindenburg.

Vorerinnerung.

Dieſe Abhandlung iſt durch die folgende des Herrn Profeſſor Trembley's veranlaßt worden. Beyde enthalten dieſelbe Aufgabe, nur unter verſchiedenen Namen und Formen, und auf verſchiedenen Wegen aufgelößt. Die Evolution gebrochener Functionen führt auf wiederkehrende Reihen, und dieſe ſind alſo ein Reſultat von jener. Wie wichtig eine verbeſſerte Theorie ſolcher Reihen, ſowohl an ſich als wegen ihres ausgebreiteten Einfluſſes auf andere Aufgaben ſey, iſt bekannt. Um ſo mehr wird die möglichſte Simplification derſelben durch die **combinatoriſche Methode**, in ihren darſtellenden leicht auflößlichen Zeichen, den Analyſten willkommen ſeyn.

Herrn Trembley's Verſuch einer neuen Behandlung dieſer Reihen war ſchon damals, als ich die **erſte Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen** [a]) abdrucken ließ, in meinen Händen. Ich war wil-

---

a) Dieſe Schrift iſt bisher unter dem (nur auf den größten Theil nicht auf den ganzen Inhalt derſelben paſſenden Titel: **Polynomiſcher Lehrſatz** ꝛc. citirt worden. Hier und in der Folge aber werde ich ſelbige immer unter den obigen anlens, ſie daſelbſt einzurücken, und hatte dieſerhalb ſchon die dortige Aufgabe (§. 215. S. 289, 290) nach meinem Verfahren und in meinen Zeichen, zur Vergleichung aufgeſtellt; nur die Enge des noch übrigen Raumes hinderte das Vorhaben. Beyde Abhandlungen folgen nun; die meinige, nach ihren beyden, von einander weſentlich verſchiedenen, Formen: die Trembleyiſche, mit einigen Erläuterungen und Bemerkungen von mir verſehen, die man hoffentlich nicht überflüſſig finden wird.

1. Aufgabe. Das Entwickelungsgeſetz für gebrochene Functionen

$$\frac{p^r}{q^s} = \frac{(ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+ \text{etc.})^r}{(\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+ \text{etc.})^s} = P$$

in Lokal- und combinatoriſchen Zeichen ausgedrückt, darzuſtellen.

2. Aufloſung. I. Der obigen, in Lokalzeichen ausgedrückten, Reihen (1)

$$p = p\varkappa 1 x^{\mu}+p\varkappa 2 x^{\mu+\delta}+p\varkappa 3 x^{\mu+2\delta}+ \text{etc.}$$

$$q = q\varkappa 1 x^{\nu}+q\varkappa 2 x^{\nu+\delta}+q\varkappa 3 x^{\nu+2\delta}+ \text{etc.}$$

Potenzen

$$p^r = p^r\varkappa 1 x^{r\mu}+p^r\varkappa 2 x^{r\mu+\delta}+p^r\varkappa 3 x^{r\mu+2\delta}+ \text{etc.}$$

$$q^s = q^s\varkappa 1 x^{s\nu}+q^s\varkappa 2 x^{s\nu+\delta}+q^s\varkappa 3 x^{s\nu+2\delta}+ \text{etc.}$$

ſind, nach dem polynomiſchen Lehrſatze, für jeder r und s gegeben (Erſte Samml. c. a. Abh. S. 291).

---

gemeſſenern Titel: Erſte Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen anführen. Darinn iſt (S. 99. Note h) Herrn Trembley's Schrift bereits erwähnt worden, die ich ſo eben erhalten hatte.

II. Für P nehme man eine Reihe, die mit $q^s = q^s\varkappa 1 x^{s\nu} + q^s\varkappa 2 x^{s\nu+\delta} +$ etc. multiplicirt, dieſelben Potenzen von x darſtellt, wie p^r. Man ſetze alſo

$$P = P\varkappa 1 x^{r\mu - s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu - s\nu + \delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu - s\nu + 2\delta} + \text{etc.}$$

und ſuche der angenommenen Reihe P und der Potenzen p^r, q^s, Coefficienten

$$P\varkappa 1,\ P\varkappa 2,\ P\varkappa 3 \ldots P\varkappa\,(n+1)$$
$$p^r\varkappa 1,\ p^r\varkappa 2,\ p^r\varkappa 3 \ldots p^r\varkappa\,(n+1)$$
$$q^s\varkappa 1,\ q^s\varkappa 2,\ q^s\varkappa 3 \ldots q^s\varkappa\,(n+1)$$

durch einander auszudrücken.

III. Das geſchieht entweder ſo, daß die geſuchten Coefficienten der angenommenen Reihe P unabhängig von einander, blos durch die Coefficienten der Potenzen $p^r . q^s$, die durch die Coefficienten der Reihen p. q gegeben ſind (I) dargeſtellt (directe independente Form) oder, daß zugleich folgende oder ſpätere Coefficienten von ihren vorhergehenden oder frühern abhängig gemacht werden (recurrirende dependente Form).

Die Auflöſungsformeln beyder Formen der Hauptaufgabe (I) und einiger ſpeciellern davon abgeleiteten, will ich in folgenden Tafeln aufſtellen. So laſſen ſich die Formeln am bequemſten überſehen und mit einander vergleichen. Die Rechtfertigung derſelben durch Beweis, nebſt einigen Bemerkungen, ihre Einrichtung und den Gebrauch betreffend, ſollen hinterher nachgeholt werden.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

A. Recurrirende dependente Form.

α) Combinatoriſche Grundlage in Variationsklaſſen.

3, a. Für

$$\frac{p^r}{q^s} = \frac{(ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.})^r}{(\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{etc.})^s} = P$$

iſt $P = P\varkappa 1 x^{r\mu-s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu-s\nu+\delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = \dfrac{p^r\varkappa 1}{q^s\varkappa 1}$

$$P\varkappa 2 = \frac{p^r\varkappa 2 - {}^{2}\overset{q^sP}{B}}{q^s\varkappa 1}$$

$$P\varkappa 3 = \frac{p^r\varkappa 3 - {}^{3}\overset{q^sP}{B}}{q^s\varkappa 1}$$

$$P\varkappa 4 = \frac{p^r\varkappa 4 - {}^{4}\overset{q^sP}{B}}{q^s\varkappa 1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P\varkappa(n+1) = \frac{p^r\varkappa(n+1) - {}^{n+1}\overset{q^sP}{B}}{q^s\varkappa 1}$$

$q^s\ [q^s\varkappa 1,\ q^s\varkappa 2,\ q^s\varkappa 3 \ldots\ldots q^s\varkappa(n+1)]$
$P\ [\ :\ ,\ P\varkappa 1\ ,\ P\varkappa 2 \ldots\ldots P\varkappa n\ ]$
$\ [\ :\ ,\ 1\ ,\ 2 \ldots\ldots n\ ]$

Die Zahlen 1, 2...n im Zeiger beziehen ſich auf die überſtehenden Coefficienten von P und q^s, deren Verbindung mit einander die beſtimmten Variationsklaſſen beſtimmt nachweiſen. Infin. Dign. p. 172. Tab. VIII; Nov. Syſt. Perm. p. LX. Tab. IV. Was die Zerlegung dieſer Klaſſen giebt, zeigt Seite 6.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

B. Directe independente Form.

α) Combinatoriſche Grundlage in Variationsklaſſen.

3, b. Für

$$\frac{p^r}{q^s} = \frac{(ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+ \text{ etc.})^r}{(\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+ \text{ etc.})^s} = P$$

iſt $P = P\varkappa 1 x^{r\mu-s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu-s\nu+\delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = (q^{-s}p^r)\varkappa 1 = {}^{2}\overset{q^{-s}p^r}{B}$

$$P\varkappa 2 = (q^{-s}p^r)\varkappa 2 = {}^{3}\overset{q^{-s}p^r}{B}$$

$$P\varkappa 3 = (q^{-s}p^r)\varkappa 3 = {}^{4}\overset{q^{-s}p^r}{B}$$

$$P\varkappa 4 = (q^{-s}p^r)\varkappa 4 = {}^{5}\overset{q^{-s}p^r}{B}$$

: : : : :

$$P\varkappa(n+1) = (q^{-s}p^r)\varkappa(n+1) = {}^{n+2}\overset{q^{-s}p^r}{B}$$

alſo P d. i.

$$q^{-s}p^r = [\,{}^{2}\overset{q^{-s}p^r}{B} + {}^{3}\overset{q^{-s}p^r}{B}x^{\delta} + {}^{4}\overset{q^{-s}p^r}{B}x^{2\delta} + \text{etc.}\,]\, x^{r\mu-s\nu}$$

$$\begin{array}{llll} p^r & [p^r\varkappa 1, & p^r\varkappa 2, & p^r\varkappa 3 \ldots] \\ q^{-s} & [q^{-s}\varkappa 1, & q^{-s}\varkappa 2, & q^{-s}\varkappa 3 \ldots] \\ & [\;1, & 2, & 3 \ldots] \end{array}$$

Wegen der Zahlen 1, 2, 3 . . . im Zeiger, gilt dieſelbe Erinnerung wie auf Seite 4 unten. Was die Zerlegung der hier aufgeführten Variationsklaſſen giebt, zeigt Seite 7.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

A. Recurrirende dependente Form.

β) Zerlegte Variationsklaſſen (3 a) in ihre Theile.

4, a. Für die Aufgabe (1 oder 3, a)

iſt $P\varkappa 1 = p^r\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$

$$P\varkappa 2 = (p^r\varkappa 2 - q^s\varkappa 2 . P\varkappa 1) : q^s\varkappa 1$$

$$P\varkappa 3 = \left(p^r\varkappa 3 - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2 . P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 3 . P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$P\varkappa 4 = \left(p^r\varkappa 4 - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2 . P\varkappa 3 \\ q^s\varkappa 3 . P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 4 . P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

ꝛ ꝛ ꝛ ꝛ

$$P\varkappa(n+1) = \left(p^r\varkappa(n+1) - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2 . P\varkappa n \\ q^s\varkappa 3 . P\varkappa(n-1) \\ \text{ꝛ} \quad \text{ꝛ} \\ q^s\varkappa n \; . \; P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa(n+1) . P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$p\,[\,a \;,\; b \;,\; c \;,\; d \;,\; e \ldots\ldots]$$

$$q\,[\,\alpha \;,\; \beta \;,\; \gamma \;,\; \delta \;,\; \varepsilon \ldots\ldots]$$

Das Zeichen — afficirt hier alle Glieder zwiſchen den Klammern [ ] vor welchen es ſteht; und $q^s\varkappa 1$ iſt ein gemeinſchaftlicher Diviſor überhaupt in alle Glieder. Weil p^r, q^s durch p und q gegeben ſind (2) ſo iſt auch $p^r\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$ d. i. $P\varkappa 1$ gegeben, und dadurch $P\varkappa 2$, und $P\varkappa 3$ u. ſ. w.

Es erhellet, daß die Recurrenz lediglich auf den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3 \ldots$ beruhet; da die $p^r\varkappa 1$, $p^r\varkappa 2 \ldots$ und $q^s\varkappa 1$, $q^s\varkappa 2 \ldots$ durch p und q gegeben ſind.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

B. Directe independente Form.

β) Zerlegte Variationsklaſſen (3, b) in ihre Theile.

4, b. Für die Aufgabe (1 oder 3, b)

iſt $P\varkappa 1 = (p^r q^{-s})\varkappa 1 = p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 1$

$$P\varkappa 2 = (p^r q^{-s})\varkappa 2 = \left\{\begin{array}{l} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 1 \end{array}\right\}$$

⸗ ⸗ ⸗ ⸗

Alſo P d. i.

$$\begin{aligned} p^r q^{-s} = {} & [p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 1]\, x^{r\mu - s\nu} \\ & + \left\{\begin{array}{l} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^{r\mu - s\nu + \delta} \\ & + \left\{\begin{array}{l} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 3 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 3 . q^{-s}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^{r\mu - s\nu + 2\delta} \\ & \quad ⸗ \quad ⸗ \quad ⸗ \quad ⸗ \\ & + \left\{\begin{array}{l} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa (n+1 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa n \\ \quad ⸗ \qquad ⸗ \\ p^r\varkappa n . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa (n+r) . q^{-s}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^{r\mu - s\nu + n\delta} \end{aligned}$$

$$p\,[\,a,\ b,\ c,\ d,\ c\ldots]$$
$$q\,[\,\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ldots]$$

Die Coefficienten der hier untergeſetzten Scalen p, q, ſind einerley mit denen der Reihen p, q der Aufgabe (3, b). Die hieſigen Lokal-Functionen laſſen ſich leicht in combinatoriſche umſetzen. (E. S. c. a. A. S. 235, 291.)

Tafel II. Aufloͤſungsformeln fuͤr einzelne Faͤlle.

A. Recurrirende dependente Form.

5, a. Fuͤr

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{ etc.}}{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{ etc.}} = P$$

iſt $P = P\varkappa 1 x^{\mu-\nu}+P\varkappa 2 x^{\mu-\nu+\delta}+P\varkappa 3 x^{\mu-\nu+2\delta}+\text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = p\varkappa 1 : q\varkappa 1$

$P\varkappa 2 = (p\varkappa 2 - q\varkappa 2 . P\varkappa 1) : q\varkappa 1.$

$$P\varkappa 3 = \left(p\varkappa 3 - \left\{\begin{matrix} q\varkappa 2 . P\varkappa 2 \\ q\varkappa 3 . P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q\varkappa 1$$

⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗

$$p\,[\,a,\ b,\ c,\ d,\ e\ldots]$$
$$q\,[\,\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\ldots]$$

Alles wie in (4, a) wenn man dort $r = s = 1$ ſezt. Eben ſo haͤtte man (aus 3, a) $\frac{p}{q}$ durch Variationsklaſſen ausdruͤcken koͤnnen. Auch kann man hier α ſtat $q\varkappa 1$ und a, b, c … ſtatt $p\varkappa 1$, $p\varkappa 2$, $p\varkappa 3$ … ſetzen.

6, a. Fuͤr

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{ etc.}}{\alpha x^{\nu}-\beta x^{\nu+\delta}-\gamma x^{\nu+2\delta}-\text{ etc.}} = P$$

Haben die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ … in allen ihren Gliedern das Zeichen +. Man darf alſo in (5, a) nur uͤberall, wo — ſteht, das Zeichen + ſetzen. Auch in der Scale q, haben hier die β, γ, δ, ε … das Zeichen + (wie in 5, a) den $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-\varepsilon$ … im Nenner entgegengeſezt.

Die Aufloͤſungsformel fuͤr das $\frac{p}{q}$ (hier in 6, a) iſt unten (23) ausgefuͤhrt. Wegen der Umſetzung der Zeichen — in + (Ebend. und 21).

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

5, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{ etc.}} = pq^{-1}$$

iſt

$$pq^{-1} = a\frac{1}{\alpha}x^{\mu-\nu}$$

$$\left.\begin{array}{r} -\,a\,\dfrac{\mathfrak{a}^{1}A}{\alpha^{2}} \\ +\,b\,\dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+\delta}$$

$$\left.\begin{array}{r} -\,a\left(\dfrac{\mathfrak{a}^{2}A}{\alpha^{2}}-\dfrac{\mathfrak{b}^{2}B}{\alpha^{3}}\right) \\ -\,b\,\dfrac{\mathfrak{a}^{1}A}{\alpha^{2}} \\ +\,c\,\dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+2\delta}$$

$$\left.\begin{array}{r} -\,a\left(\dfrac{\mathfrak{a}^{3}A}{\alpha^{2}}-\dfrac{\mathfrak{b}^{3}B}{\alpha^{3}}+\dfrac{\mathfrak{c}^{3}C}{\alpha^{4}}\right) \\ -\,b\left(\dfrac{\mathfrak{a}^{2}A}{\alpha^{2}}-\dfrac{\mathfrak{b}^{2}B}{\alpha^{3}}\right) \\ -\,c\,\dfrac{\mathfrak{a}^{1}A}{\alpha^{2}} \\ +\,d\,\dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+3\delta}$$

= = = = = =

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

6, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{ etc.}}{\alpha x^{\nu}-\beta x^{\nu+\delta}-\gamma x^{\nu+2\delta}-\text{ etc.}}$$

haben alle Glieder und ihre Theile das Zeichen + daher man hier (für 6, b) überall + ſtatt — in den Coefficienten (in 5, b) ſetzen muß. Der Zeiger iſt dennoch hier (wie in 5, b) derſelbe; nehmlich

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta \ldots \\ 1, & 2, & 3 \ldots \end{pmatrix}$$

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

7, a. Für

$$\frac{1}{q^s} = \frac{1}{(\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = Q$$

iſt $Q = Q\varkappa 1 x^{-s\nu} + Q\varkappa 2 x^{-s\nu+\delta} + Q\varkappa 3 x^{-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $Q\varkappa 1 = 1 : q^s\varkappa 1$

$$Q\varkappa 2 = -\frac{\overset{q^sQ}{{}^{2}B}}{q^s\varkappa 1} = -q^s\varkappa 2 \,.\, Q\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$$

$$Q\varkappa 3 = -\frac{\overset{q^sQ}{{}^{3}B}}{q^s\varkappa 1} = -\left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2 . Q\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 3 . Q\varkappa 1 \end{matrix}\right\} : q^s\varkappa 1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$Q\varkappa(n+1) = -\frac{\overset{q^sQ}{{}^{n+1}B}}{q^s\varkappa 1} = -\left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2 \,.\, Q\varkappa n \\ q^s\varkappa 3 . Q\varkappa(n-1) \\ \cdot \quad \cdot \\ q^s\varkappa(n+1) . Q\varkappa 1 \end{matrix}\right\} : q^s\varkappa 1$$

(Der Zeiger wie in 3, a, nur Q für P
Die Scale für q wie in 4, a)

Folgt aus 3, a und 4, a, wenn man dort $P = Q$; $a = p^r\varkappa 1 = 1$; $b = c = d = \text{etc} = 0 = \mu$; und $p^r\varkappa 2 = p^r\varkappa 3 = p^r\varkappa 4 = \text{etc} = 0$ ſetzt.

8, a. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}} = Q$$

Darf man nur in 7, a das dortige $s = 1$ ſetzen. Eben das gilt auch für den Zeiger; die Scale für q iſt hier mit der in 7, a übereinſtimmend.

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

7, b. Für

$$\frac{1}{q^s} = \frac{1}{(\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = q^{-s}$$

iſt $q^{-s} = q^{-s}\varkappa 1 x^{-s\nu} + q^{-s}\varkappa 2 x^{-s\nu+\delta} + \text{etc.}$

alſo
$$q^{-s} = \frac{1}{\alpha^s} x^{-s\nu}$$
$$+ \frac{{}^{-s}\mathfrak{A}\mathfrak{a}^1 A}{\alpha^{s+1}} x^{-s\nu+\delta}$$
$$+ \left[\frac{{}^{-s}\mathfrak{A}\mathfrak{a}^2 A}{\alpha^{s+1}} + \frac{{}^{-s}\mathfrak{B}\mathfrak{b}^2 B}{\alpha^{s+2}}\right] x^{-s\nu+2\delta}$$
$$+ \left[\frac{{}^{-s}\mathfrak{A}\mathfrak{a}^3 A}{\alpha^{s+1}} + \frac{{}^{-s}\mathfrak{B}\mathfrak{b}^3 B}{\alpha^{s+2}} + \frac{{}^{-s}\mathfrak{C}\mathfrak{c}^3 C}{\alpha^{s+3}}\right] x^{-s\nu+3\delta}$$

= = = = = =

$$\left(\begin{matrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon\ldots\\ 1, & 2, & 3, & 4\ldots\end{matrix}\right)$$

Erſte Sammł. c. a. Abh. S. 235, für das dortige m hier — s, und für die kleinen lateiniſchen Buchſtaben, die zugehörigen griechiſchen geſchrieben. Obiger Werth für q^{-s} anders ausgedruckt, (42).

8, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}} = q^{-1}$$

iſt
$$q^{-1} = \frac{1}{\alpha} x^{-\nu} - \frac{\mathfrak{a}^1 A}{\alpha^2} x^{-\nu+\delta} - \left[\frac{\mathfrak{a}^2 A}{\alpha^2} - \frac{\mathfrak{b}^2 B}{\alpha^3}\right] x^{-\nu+2\delta}$$
$$- \left[\frac{\mathfrak{a}^3 A}{\alpha^2} - \frac{\mathfrak{b}^3 B}{\alpha^3} + \frac{\mathfrak{c}^3 C}{\alpha^4}\right] x^{-\nu+3\delta} \text{ u. ſ. w.}$$

Nähmlich für $s = 1$, iſt ${}^{-s}\mathfrak{A} = -1$; ${}^{-s}\mathfrak{B} = +1$; ${}^{-s}\mathfrak{C} = -1$; ${}^{-s}\mathfrak{D} = +1$; … alſo (8, a)

$$q^{-1}\varkappa(n+1) = -\frac{\mathfrak{a}^n A}{\alpha^2} + \frac{\mathfrak{b}^n B}{\alpha^3} - \frac{\mathfrak{c}^n C}{\alpha^4} + \frac{\mathfrak{d}^n D}{\alpha^5} - \text{etc.}$$

$$\left(\begin{matrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon\ldots\\ 1 & 2 & 3 & 4\ldots\end{matrix}\right)$$

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

9, a Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = Q$$

iſt $Q = Q\varkappa 1 x^{-\nu} + Q\varkappa 2 x^{-\nu+\delta} + Q\varkappa 3 x^{-\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $Q\varkappa 1 = \frac{1}{\alpha}$

$$Q\varkappa 2 = + \frac{\overset{qQ}{{}^2B}}{\alpha} = + \beta . Q\varkappa 1 : \alpha$$

$$Q\varkappa 3 = + \frac{\overset{qQ}{{}^3B}}{\alpha} = + \left\{ \begin{matrix} \beta . Q\varkappa 2 \\ \gamma . Q\varkappa 1 \end{matrix} \right\} : \alpha$$

$$Q\varkappa 4 = + \frac{\overset{qQ}{{}^4B}}{\alpha} = + \left\{ \begin{matrix} \beta . Q\varkappa 3 \\ \gamma . Q\varkappa 2 \\ \delta . Q\varkappa 1 \end{matrix} \right\} : \alpha$$

= = = = =

Alles, wie in 7, a; nur s = 1, und ſtatt der dortigen − hier überall + geſetzt. Für die dortigen $q\varkappa 1$, $q\varkappa 2$, $q\varkappa 3$, $q\varkappa 4 \ldots$ ſtehen hier α, β, γ, $\delta \ldots$ Man vergleiche (21. 22).

10, a. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - \beta x^{\delta} - \gamma x^{2\delta} - \delta x^{3\delta} - \text{etc.}} = Q$$

iſt $Q = Q\varkappa 1 + Q\varkappa 2 x^{\delta} + Q\varkappa 3 x^{2\delta} + \text{etc.}$

und $Q\varkappa 1 = 1$

$$Q\varkappa 2 = \overset{qQ}{{}^2B} = \beta . Q\varkappa 1$$

$$Q\varkappa 3 = \overset{qQ}{{}^3B} = \beta . Q\varkappa 2 + \gamma . Q\varkappa 1$$

= = = = =

$$\begin{array}{ll} q & [\; 1, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta \ldots \;] \\ Q & [\; = \quad Q\varkappa 1, \quad Q\varkappa 2, \quad Q\varkappa 3 \ldots \;] \\ & [\; = \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots \;] \end{array}$$

Man ſehe (43)

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

9, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = q^{-1}$$

iſt
$$q^{-1} = \frac{1}{\alpha} x^{-\nu}$$
$$+ \frac{\mathfrak{a}^1 A}{\alpha^2} x^{-\nu+\delta}$$
$$+ [\frac{\mathfrak{a}^2 A}{\alpha^2} + \frac{\mathfrak{b}^2 B}{\alpha^3}] x^{-\nu+2\delta}$$
$$+ [\frac{\mathfrak{a}^3 A}{\alpha^2} + \frac{\mathfrak{b}^3 B}{\alpha^3} + \frac{\mathfrak{c}^3 C}{\alpha^4}] x^{-\nu+3\delta}$$

= = = = = =

$$\left(\begin{array}{cccc} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{array}\right)$$

Alles, wie in 8, b; nur überall das Zeichen + ſtatt — vor die Combinationsklaſſen geſetzt.

10, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - \beta x^{\delta} - \gamma x^{2\delta} - \delta x^{3\delta} - \text{etc.}} = q^{-1}$$

iſt
$$q^{-1} = 1 + \mathfrak{a}^1 A x^{\delta} + [\mathfrak{a}^2 A + \mathfrak{b}^2 B] x^{2\delta}$$
$$+ [\mathfrak{a}^3 A + \mathfrak{b}^3 B + \mathfrak{c}^3 C] x^{3\delta} + \text{etc.}$$
$$\left(\begin{array}{cccc} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{array}\right)$$

Alles, wie in 9, b; nur $x = 1$ und $\nu = 0$ geſetzt. Eine andere Darſtellung in involutoriſchen Zeichen J und $\mathfrak{J}$ in der Folge (44, 45).

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

11, a. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{1 - \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \text{etc.}} = P$$

iſt

$$\begin{aligned} P = {} & a \\ & + (b + \beta . P\varkappa 1)\, x \\ & + (c + \beta . P\varkappa 2 + \gamma . P\varkappa 1)\, x^2 \\ & + (d + \beta . P\varkappa 3 + \gamma . P\varkappa 2 + \delta . P\varkappa 1)\, x^3 \end{aligned}$$

= = = = = =

Alles, wie in 6, a und in 23, wenn man dort $\mu = \nu = 0$ und $\alpha = \delta = 1$ ſetzt.

B. Directe independente Form.

11, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{1 - \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

iſt

$$\begin{aligned} pq^{-1} = {} & a \\ & + [b + a\mathfrak{a}^1 A]\, x \\ & + [c + b\mathfrak{a}^1 A + a(\mathfrak{a}^2 A + \mathfrak{b}^2 B)]\, x^2 \end{aligned}$$

= = = = = =

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots, \end{pmatrix}$$

Alles, wie in 6, b, wenn man nehmlich in 5, b überall + ſtatt —, auch $\mu = \nu = 0$ und $\alpha = \delta = 1$ ſetzt, und die einzelnen Glieder von unten herauf ſchreibt, alſo hier nach … c, b, a, wie dort nach a, b, c … ordnet.

Eine andere Darſtellung in involutoriſchen Zeichen J und $\mathfrak{J}$ in der Folge (45).

Tafel III. Combinatoriſch-involutoriſche Formeln für die beyden einfachſten Formen (10, b und 11, b) zu unmittelbarer Vergleichung der Auflöſung nach dieſen Formeln mit dem Verfahren nach den Trembleyiſchen in der nächſtfolgenden Abhandlung.

12. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1-ax-bx^2-cx^3-\text{ etc.}} = q^{-1}$$

iſt $\frac{1}{q}\,7(n+1) = q^{-1}\varkappa(n+1)x^n = j^n J x^n = j^n \mathfrak{J} x^n$

alſo (für n nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . geſetzt)

$$q^{-1}\begin{cases} = q^{-1}\varkappa 1 + q^{-1}\varkappa 2.x^1 + q^{-1}\varkappa 3.x^2 + q^{-1}\varkappa 4\; x^3 + \text{ etc.} \\ = 1 + j\,{}^1J x^1 + j\,{}^2J\, x^2 + j\,{}^3J x^3 + \text{ etc.} \\ = 1 + j^1\mathfrak{J} x^1 + j^2\mathfrak{J} x^2 + j^3\mathfrak{J} x^3 + \text{ etc.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d\ldots\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Erhellet aus 10, b, wenn man die dortigen a^1A durch $j^1J = j^1\mathfrak{J}$; die $a^2A + b^2B$ durch $j^2J = j^2\mathfrak{J}$; die $a^3A + b^3B + c^3C$ durch $j^3J = j^3\mathfrak{J}$; u. ſ. w. (E. S. c. a. A. S. 267) ausdrückt, und ſtatt der dortigen Coefficienten β, γ, δ, ε, . . . im Nenner, hier die Trembleyiſchen a, b, c, d . . . ſetzt. Ein directer Beweis der Formel für q^{-1} (49).

1) Die ${}^nJ$ ſind Claſſeninvolutionen, die ${}^n\mathfrak{J}$ lexikographiſche. Darſtellungen von beyden und ihre Regeln (Ebendaſ. S. 183 f. S. 200-204; S. 280, 281).

2) Die a, b, c . . . im Zeiger für q^{-1} haben entgegengeſetzte Zeichen mit denen im Nenner q für den Bruch $\frac{1}{q}$. Wäre des Bruches Nenner $1-ax+bx^2-cx^3+dx^4\ldots$ ſo müßte man dafür im Zeiger $+a, -b, +c, -d\ldots$ ſetzen. Mit dem Zeiger verhält ſich's wegen der Zeichen, wie mit der Beziebungsſcale (27).

Ein Paar Beyſpiele zur Erläuterung (60, 61).

Tafel III. Combinatoriſch-involutoriſche Formeln für die beyden einfachſten Formen ꝛc. ſ. Seite 15.

13. **Für**

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

$$\text{iſt } \frac{p}{q} 7 (n+1) \begin{cases} = (pq^{-1}) \varkappa (n+1)\, x^n \\ = (\alpha j^n J + \beta j^{n-1} J \ldots + \overset{n-1}{\alpha}\, j^1 J + \overset{n}{\alpha})\, x^n \\ = (\alpha j^n \mathfrak{J} + \beta j^{n-1} \mathfrak{J} \ldots + \overset{n-1}{\alpha}\, j^1 \mathfrak{J} + \overset{n}{\alpha})\, x^n \end{cases}$$

Daraus (für n nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 … geſetzt) wird $pq^{-1} = (pq^{-1}) \varkappa 1 + (pq^{-1}) \varkappa 2 . x^1 + (pq^{-1}) \varkappa 3 . x^2 + \text{etc.}$ das iſt

$$\begin{aligned} pq^{-1} = {} & \alpha \\ & + (\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta)\, x \\ & + (\alpha j^2 \mathfrak{J} + \beta j^1 \mathfrak{J} + \gamma)\, x^2 \\ & + (\alpha j^3 \mathfrak{J} + \beta j^2 \mathfrak{J} + \gamma j^1 \mathfrak{J} + \delta)\, x^3 \\ & + (\alpha j^4 \mathfrak{J} + \beta j^3 \mathfrak{J} + \gamma j^2 \mathfrak{J} + \delta j^1 \mathfrak{J} + \varepsilon)\, x^4 \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

ſtatt der $j^1 \mathfrak{J}$, $j^2 \mathfrak{J}$, $j^3 \mathfrak{J}$ … in pq^{-1} kann man auch $j^1 J$, $j^2 J$, $j^3 J$ … ſetzen, wie auch aus dem obenſtehenden allgemeinen Gliede $\frac{p}{q} 7 (n+1)$ zu erſehen.

Alles folgt hier eben ſo aus (11, b) wie 12 aus (10, b) nach der Nachweiſung in (12). Statt der a, b, c … β, γ, δ … in (11, b) ſtehen hier α, β, γ … a, b, c … wie bey Herrn Trembley. Ein directer Beweis de Formel für pq^{-1} (50).

Die Erinnerungen 1) 2) in (12) wegen der ${}^n J$ und ${}^n \mathfrak{J}$ und wegen der entgegengeſetzten Vorzeichen der a, b, c, d … im Nenner und Zeiger, gelten auch hier.

Einige Beyſpiele zur Erläuterung (62 — 65).

Tafel IV. Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung der combinatoriſchen Involution $^{n}\mathfrak{J}\binom{a,b,c,d,e\ldots}{1,2,3,4,5\ldots}$

14.

etc a a a a a a a
a a a a a b
a a a a c
a a a b b
a a a d
a a b c
a a e
etc. a b b b
a b d
a c c
a f
b b c
b e
c d
g

15.

$a^{n-1}[a]$
$a^{n-2}[b]$
$a^{n-3}[c]$
$a^{n-4}[b\ ,d]$
$a^{u-5}[bc,e]$
$a^{n-6}[b^3,bd,c^2,f]$
$a^{n-7}[b^2c,be,cd,g]$
$a^{n-8}[b^4,b^2d,bc^2,bf,ce,d^2,h]$
$a^{n+9}[b^3c,b^2e,bcd,bg,c^3,cf$
$de,i]$
$a^{n-10}[b^5,b^3d,b^2c^2,b^2f,bce,bd^2,bh,$
$c^2d,cg,df,e^2,k]$

etc. etc. u. ſ. w. f.

Beyde Anordnungen ſind lexikographiſch und rein-combinatoriſch. Die erſte (14) geht von niedrigern Involutionen auf die nächſt höhern fort, und umgekehrt; die zweyte (15) enthält die Complexionen zur unbeſtimmten Summe n allgemein. Beyder Darſtellungen gehören zu den Involutionen der vollkommenſten Art.

Von beyden (E. S. c. a. A. an mehrern Orten); namentlich von der erſten (daſ. S. 183-185); von der zweyten (S. 199-203); ein Paar einzelne Fälle, für n = 10 und wenn der Zeiger mit a, b, c, d abbricht (S. 280, 281). Wegen der Benennung: Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung, unten (74).

Von der allgemeinen Claſſeninvolution ^{n}J, aus Complexionen zur unbeſtimmten Summe n (S. 204-206).

Tafel IV. Boscowich = Hindenburgiſche Darſtellung der Complexionen von ${}^{n}\mathfrak{J}\binom{a,b,c,d,e\ldots}{1,2,3,4,5\ldots}$ für beſtimmte Werthe von n.

16. Darſtellung für n = 9.

111111111	$aaaaaaaaa = a^9$
11111112	$aaaaaaab = a^7b$
1111122	$aaaaabb = a^5b^2$
111222	$aaabbb = a^3b^3$
12222	$abbbb = ab^4$
1111113	$aaaaaac = a^6c$
111123	$aaaabc = a^4bc$
11223	$aabbc = a^2b^2c$
2223	$bbbc = b^3c$
11133	$aaacc = a^3c^2$
1233	$abcc = abc^2$
333	$ccc = c^3$
111114	$aaaaad = a^5d$
11124	$aaabd = a^3bd$
1224	$abbd = ab^2d$
1134	$aacd = a^2cd$
234	$bcd = bcd$
144	$add = ad^2$
11115	$aaaae = a^4e$
1125	$aabe = a^2be$
225	$bbe = b^2e$
135	$ace = ace$
45	$de = de$
1116	$aaaf = a^3f$
126	$abf = abf$
36	$cf = cf$
117	$aag = a^2g$
27	$bg = bg$
18	$ah = ah$
9	$i = i$

Von der Boscowichſchen Anordnung ausführlich (unten Abh. III. §. 10. u. f.) Wegen der Benennung Boscowich-Hindenburgiſche Darſtellung (Ebend. 11. Anm.)

Die Rechtfertigung der Formeln in dieſen Tafeln durch Beweis, und was ſonſt noch darüber zu ſagen oder dabey zu erinnern ſeyn möchte, will ich in Folgendem, unter der allgemeinen Rubrik ihrer Formen, zuſammenfaſſen.

A. Recurrirende dependente Form.

Beweis der Formeln 3, a und 4, a Taf. I. S. 4. 6.

18. Der Satz (1) giebt $\frac{p^r}{q^s} = P$. In dieſe Gleichung ſetze man, ſtatt der gegebenen Reihen p^r, q^s, und der angenommenen P, ihre Lokalwerthe (2), multiplicire die Reihe für q^s (2, I) mit der für P (2, II) und bringe die Glieder der Reihe für p^r (2, I) auf die andere Seite, zu q^sP. Dieſes giebt $0 = q^sP - p^r$. In dieſer Gleichung ſetze man die einzelnen, zu einerley Potenz von x gehörigen, Coefficienten, einen nach dem andern $= 0$. Dadurch findet man die Werthe der einzelnen Coefficienten der Reihe P; die Werthe nehmlich von $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ . . . nach der Ordnung, wie ſie in der Tafel (3, a, S. 4) ſtehen. Die dort vorkommenden Variationsklaſſen ${}^{2}\overset{q^sP}{B}$, ${}^{3}\overset{q^sP}{B}$ . . . ſind bequeme Ausdrücke der zuſammengehörigen Producte aus der Multiplication der Reihe q^s (von $q^s\varkappa 2$ an) in P. Sie machen die **combinatoriſche Grundlage** aus, durch welche, mit Beyhülfe der Lokalwerthe für p^r, q^s, es möglich wird, die Auflöſungsformel für eine ſo verwickelte Aufgabe in einen ſo ſimpeln und, ohne Abbruch der Deutlichkeit, kurzen Ausdruck, als

$$P\varkappa(n+1) = \frac{p^r\varkappa(n+1) - {}^{n+1}\overset{q^sP}{B}}{q^s\varkappa 1}$$

darſtellt, zuſammenzufaſſen.

Daraus kann man nun ſehr leicht, vermittelſt des (S. 4, unten) beygefügten Zeigers, die Werthe der Coefficienten von P, für den Gebrauch herleiten, und das ſo einfache Verbindungsgeſetz ſelbſt anſchaulich darſtellen, wie ſolches (4, a, S. 6) ausführlich geſchehen iſt.

19. Das analytiſche Verfahren für die Auflöſung und den Beweis in 18, iſt das ſchon ſonſt oft und vielfach gebrauchte; aber die dabey angewendeten Mittel, die *Lokal-* und *combinatoriſchen Functionen*, ſind von den gewöhnlichen ganz verſchieden. Daher eben die ſo große Abweichung der hier beygebrachten Auflöſungsformeln dieſer Aufgabe von andern; wovon in der Folge (am Ende dieſer Rubrik) mehr vorkommen wird.

20. Für

$$\left(\frac{(ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc.})^{r}}{(\alpha x^{\nu} + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^{s}}\right)^{f}$$

$$=$$

$$P^{f}\varkappa 1 x^{f(r\mu - s\nu)} + P^{f}\varkappa 2 x^{f(r\mu - s\nu) + \delta} + \text{etc.}$$

findet man die Werthe von $P^{f}\varkappa 1$, $P^{f}\varkappa 2$, $P^{f}\varkappa 3$, u. ſ. w. wenn man durchgängig

ſtatt P, r, s in (3, a; 4, a)
hier P^{f}, fr, fs ſetzt.

21. Die Vorzeichen der Coefficienten a, b, c . . . ; α, β, γ . . . der Reihen p, q (in 3, a; 4, a; 5, a) ſind ſämmtlich +. Daſſelbe Zeichen müſſen alſo auch die Coefficienten der einzelnen Glieder ihrer Potenzen p^{r} und q^{s} (ohne Rückſicht auf die Beſchaffenheit der Exponenten r und s) haben. Was alſo in den Werthen von $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$, $P\varkappa 4$ u. ſ. w. Negatives vorkommt, beruht auf dem den Klammern [ ] vorgeſetzten Zeichen —. Anders verhält es ſich, wenn die

Coefficienten von p und q nicht ſämtlich das Zeichen + haben. Da kommen poſitive und negative Glieder unter den Klammern vermengt vor, die durch das vorgeſetzte Zeichen — wieder umgeſetzt werden müſſen. Um nun nicht auf dieſe zweyerley Zeichen Rückſicht nehmen zu dürfen, iſt es bequem, der Aufgabe, an welcher man die Auflöſung zeigen will, eine ſolche Geſtalt und Einrichtung zu geben, durch welche das vor den Klammern geſetzte Zeichen nicht — ſondern + wird. Das würde z. B. hier (in 5, a) der Fall ſeyn, wenn man daſelbſt durchgängig $-\beta, -\gamma, -\delta, \ldots$ im Nenner annähme, die Glieder aber bey der Entwickelung der Werthe von $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3, \ldots$ ſo anſähe, als ob ſie zu der Scale $+\beta, +\gamma, +\delta, \ldots$ gehörten [b].

22. In 6, a (S. 8) iſt das wirklich der Fall. Da ſtehen nehmlich $-\beta, -\gamma, -\delta, \ldots$ im Nenner, und alle Glieder deſſelben, auſſer dem erſten, haben das Vorzeichen —. Den Erfolg den dieſes, nach der Bemerkung (in 21) auf die Auflöſungsformel hat, wird folgende Darſtellung zeigen, die der noch übrige Raum auf Seite 8 aufzuführen nicht verſtattete. Zur Abwechslung will ich hier a, b, c, ... ſtatt $p\varkappa 1$, $p\varkappa 2$, $p\varkappa 3, \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ſtatt $q\varkappa 1$, $q\varkappa 2$, $q\varkappa 3, \ldots$ ſetzen.

23. Für (6, a)

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc.}}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = P$$

---

[b] Hieher die Euleriſche Erinnerung wegen der Form $\frac{a + bx + cx^2 + \text{etc.}}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \text{eto.}}$: primum denominatoris terminum pono = 1, huc enim ſemper fractio reduci poteſt, niſi is ſit = 0; reliquos autem denominatoris terminos omnes tanquam negativos contemplor, vt Seriei hinc formatae omnes termini fiant affirmatiui (Intr. in An. Inf. T. I. art. 63.)

iſt $P = P\varkappa 1 x^{\mu-\nu} + P\varkappa 2 x^{\mu-\nu+\delta} + P\varkappa 3 x^{\mu-\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = \frac{a}{\alpha}$

$$P\varkappa 2 = \frac{b + \overset{qP}{{}^2B}}{\alpha} = (b + \beta . P\varkappa 1) : \alpha$$

$$P\varkappa 3 = \frac{c + \overset{qP}{{}^3B}}{\alpha} = \left(c + \left\{\begin{matrix} \beta . P\varkappa 2 \\ \gamma . P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : \alpha$$

$$P\varkappa 4 = \frac{d + \overset{qP}{{}^4B}}{\alpha} = \left(d + \left\{\begin{matrix} \beta . P\varkappa 3 \\ \gamma . P\varkappa 2 \\ \delta . P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : \alpha$$

$$\begin{array}{lcccccc} & : & : & : & : & : & \\ q\,[& \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots &] \\ P\,[& :, & P\varkappa 1, & P\varkappa 2, & P\varkappa 3, & P\varkappa 4 \ldots &] \\ \;[& :, & 1, & 2, & 3, & 4 \ldots &] \end{array}$$

Hier werden nähmlich (in 3, a und 4, a) die Zeichen — durchgängig in + verwandelt (21). Auch erheller ohne Schwierigkeit, daß alle Glieder des obigen Quotienten $\frac{P}{q}$ poſitiv kommen müſſen. Man kann daher (in 4, a) in jedem Gliede hinter der Klammer [ ] das Zeichen — der negativen Factoren, $q\varkappa 2$ oder $-\beta$; $q\varkappa 3$ oder $-\gamma$; $q\varkappa 4$ oder $-\delta$; . . . aus dem Nenner q, auf das Vorzeichen — vor der Klammer wirken, und ſolches in + umſetzen laſſen. Das iſt eben ſo viel, als ob man, für die gleichfalls poſitiv gezeichneten Variationsklaſſen $+\overset{qP}{{}^2B}, + \overset{qP}{{}^3B}$ u. ſ. w. dann

$$q\,[+\alpha, +\beta, +\gamma, +\delta, +\varepsilon \ldots]$$

im Zeiger ſetzte, daß alſo die Coefficienten im Nenner q denen im Zeiger, von β an, entgegengeſetzt wären.

24. Wenn p und q, wie bisher iſt vorausgeſetzt worden, unendliche Reihen ſind, ſo hat jeder folgende Coefficient von P oder Q ein Beſtimmungsſtück mehr, als der vorhergehende, und die Zahl dieſer Stücke (der einzelnen Glieder) dieſer Coefficienten wächſt unendlich. Wenn aber p und q, wie nicht ſelten der Fall iſt, irgendwo abbrechen, z. B. p mit den vierten Coefficienten d, und q mit dem dritten γ, ſo haben, wenn der ebenerwähnte Fall für $\frac{p}{q}$ in (23) angenommen wird, nur die erſten vier Coefficienten von P vorgeſetzte a, b, c, d nach der Ordnung, und, wo dieſe Buchſtaben ausfallen, von da an (alſo mit dem fünften Coefficienten $P\varkappa 5$) giebt es für dieſen und alle übrigen nur drey Beſtimmungsſtücke oder Glieder, in denen α, β, γ, nach der Ordnung, als Factoren vorkommen c).

Was für $Q = \frac{1}{q}$ auf den Fall gilt, wenn die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ für q irgendwo abbrechen, zeigt unter andern die Formel (9, a) mit einem Blicke.

25. Solche Reihen, wie bisher ſind betrachtet worden, werden recurrirende oder wiederkehrende genennt, weil jeder folgende Coefficient derſelben, aus einem oder mehrern der nächſtvorhergehenden, durch Beyhülfe gewiſſer beſtändigen Größen gebildet wird, welche nach de Moivre, der ſich mit der Unterſuchung ſolcher Reihen zuerſt und vorzüglich beſchäftigt hat, die Beziehungsſcale (ſcala re-

---

c) Niſi Numerator in infinitum progrediatur, additio (numerorum ex Numeratore) mox ceſſabit, atque quiuis terminus ſecundum legem conſtantem ex aliquot praecedentibus determinabitur. (Eul. Introd. in Anal. Infin. T. I. ſ. 63.)

lationis) ausmachen. Ich will Moivre's eigene Worte hierüber aus der Schrift Miſcellanea analytica (p. 27) in welcher er ſeine Sätze über dieſe Reihen am ausführlichſten vorgetragen und erwieſen hat, hier anführen:

26. Si Series aliqua ita ſit conſtituta, vt aſſumtis in ea ad libitum terminis quotlibet, terminus quisque ſubſequens ad eundem ſemper antecedentium numerum habeat rationes datas, talem ſeriem voco *recurrentem*: huiusmodi eſt ſubjecta Series:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ 1+ & 2x+ & 3x^2+ & 10x^3+ & 34x^4+ & 97x^5+\text{ etc.} \end{array}$$

in qua

$$\begin{array}{lcl} D & = & 3Cx-2Bx^2+5Ax^3 \\ E & = & 3Dx-2Cx^2+5Bx^3 \\ F & = & 3Ex-2Dx^2+5Cx^3 \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}$$

Quantitates autem $3x-2x^2+5x^3$ vel etiam $3-2+5$, ſimul ſumtas ſubque propriis ſuis ſignis connexas, voco *Indicem ſeu Scalam relationis*.

Ebendaſelbſt (S. 35) beweißt de Moivre den Satz, die Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1-fx+gx^2-hx^3+kx^4-\text{ etc.}}$ gebe eine wiederkehrende Reihe, und ſetzt (S. 36) hinzu: *Scala* (relationis) conficitur ex Diviſore $1-fx+gx^2-hx^3+kx^4-$ etc., deleta vnitatē, mutatis ſignis, diuiſisque terminis reliquis per x, x^2, x^3, x^4 etc., adeo vt Scala relationis fiat $f-g+h-k+$ etc.; iam vero cum haec Scala reſpiciat tantummodo Coefficientes terminorum Seriei, ſi deſideres Scalam, qua termini ipſi ad antecedentes referantur, nihil aliud faciendum erit, quam vt Unitas deleatur ex denominatore, mutenturque Signa terminorum reliquorum, ſeruatis poteſtatibus quantitatis x, adeo vt Relationis Scala, quae terminos ipſos ſpectat, futura ſit $fx - gx^2 + hx^3 - kx^4 +$ etc.

27. Wäre alſo eine Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} = S$$

ſo beſchaffen,

daß $E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A$

und $F = \alpha E + \beta D + \gamma C + \delta B$

u. ſ. w. f.

ſo wäre S als eine recurrirende Reihe gegeben, die ſcala relationis wäre nähmlich $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, oder, die Factoren $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$ machten zuſammen ihre Beziehungsſcale aus, und der Nenner der gebrochenen Function, durch deſſen Diviſion S entſtanden, wäre $1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4$. Das Fortgangsgeſetz der Reihe beruht alſo auf der Beziehungsſcale, und dieſe giebt augenblicklich den Nenner des Bruchs, durch deſſen Entwickelung die recurrirende Reihe entſteht. Die Vorzeichen der α, β, γ, δ ... ſind nehmlich im Nenner und in der Beziehungsſcale einander immer entgegengeſetzt, und es verhält ſich mit der Beziehungsſcale, wie in (22) mit dem Zeiger. Für die Beziehungsſcale $-\alpha - \beta - \gamma - \delta$ etc. wäre der Nenner $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc.; für jene $+\alpha - \beta + \gamma - \delta +$ etc., wäre dieſer $1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 -$ etc. Wenn alſo mit einer Reihe zugleich ihre Beziehungsſcale gegeben iſt, ſo hat die Beſtimmung der gebrochenen Function, deren Evolution die Reihe giebt, keine Schwierigkeit.

28. Die Beziehunsſcalen, und folglich auch die Nenner der Brüche, durch deren Entwickelung die Reihen entſpringen, beſtehen gewöhnlich aus einer beſtimmten Anzahl von Gliedern. Ich habe aber die Gliederzahl der Scalen und Nenner, ſo wie der Zähler, nicht gleich anfangs beſchränkt, und wiederkehrende Reihen, in einem weitläufti-

gern Sinne ſo genommen, wie ich ſie (im Anfange von 24, 25) beſchrieben habe. Inzwiſchen hat man bereits, nach jener Beſchränkung, die wiederkehrenden Reihen in Ordnungen abgetheilt; nennt Reihen der erſten, zweyten, dritten ... Ordnuug, nachdem ihre Beziehungsſcalen aus eins, zwey, drey... Gliedern beſtehen, die Nenner alſo der zugehörigen Brüche, in ihrer einfachſten Form, $1 - \alpha x$ oder $1 - \alpha x - \beta x^2$ oder $1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3$, u. ſ. w. ſind; wobey man zugleich feſtgeſetzt hat (wie auch Herr Trembley in der folgenden Abhandlung durchgängig beobachtet) die Zähler dieſer Brüche ſeyen, in Abſicht auf die veränderliche Größe (x) wenigſtens um einen Grad niedriger, als die zugehörigen Nenner; dergleichen Brüche man eigentliche, ächte zu nennen pflegt. Wiederkehrende Reihen, in der Ausdehnung wie ich ſolche hier anfangs genommen habe, würden, in Abſicht auf Ordnung, an ſich ganz unbeſtimmt ſeyn, jede Reihe von beſtimmter Ordnung aber in ſich begreifen, und ſolche durch augenblickliche Nachweiſung, welche Glieder oder Producte bey ihr wegfallen, mit größter Leichtigkeit ſogleich darſtellen.

29. Noch unterſcheidet man ſeriem recurrentem puram von der impura, und nennt puram diejenige, wo alles blos durch die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ der Beziehungsſcale beſtimmt wird, wie bey $\frac{1}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \text{etc.}}$; impura heißt, wo außer den $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, der Beziehungsſcale, auch noch andere Größen a, b, c, d... wenigſtens in den erſten Gliedern der Reihe, vorkommen, wie die Entwickelung von $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 \ldots}$ (II, a) zeigt. Bey der pura iſt alſo das erſte Glied 1, wenn der Nenner mit 1, oder $\frac{1}{\alpha}$, wenn er mit α anfängt: alle übrigen Glieder werden von

dieſem, vermittelſt der einzelnen Theile der Beziehungsſcale, nach der Ordnung, gebildet. Kommen im Nenner Sprünge bey den Potenzen von x vor, ſo muß auch bey der Scale Rückſicht darauf genommen werden, und umgekehrt bey dem Nenner. So gäbe $\frac{1}{1+\alpha x+\gamma x^3}$ eine ſeriem recurrentem puram, deren Scale $-\alpha-o-\gamma$ wäre; und zu der Scale $o+\beta+o-\delta$ gehörte der Bruch $\frac{1}{1-\beta x^2+\delta x^4}$.

30. Das Anfangsglied 1 im Nenner der gebrochenen Function wird zum gemeinſchaftlichen Diviſor aller Glieder der entwickelten, und die Beziehungsſcale fängt mit des zweyten Gliedes im Nenner Coefficienten α an. Eben ſo verhält es ſich, wenn im Nenner q, ſtatt 1 jede andere Zahl $q^s\varkappa 1$ den Anfang macht. Dann iſt $q^s\varkappa 1$ der durchgängige Diviſor in alle Glieder der evolvirten Function, und die Beziehungsſcale $-\frac{q^s\varkappa 2}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 3}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 4}{q^s\varkappa 1}-$ etc. fängt von dem zweyten Coefficienten $q^s\varkappa 2$ des Nenners an. Die Vorzeichen ſind auch hier bey beyden die entgegengeſetzten (4, a; 7, a). So befolgen die gebrochenen Functionen, die im erſten Gliede des Nenners nicht 1 haben, einerley Geſetz mit denen, die mit 1 anfangen; und ſo ſind die Reihen (7, a; 9, a) wirkliche Series purae, die nur allein von ihren Beziehungsſcalen ($-\frac{q^s\varkappa 2}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 3}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 4}{q^s\varkappa 1}\ldots$ bey 7, a; und $+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\ldots$ bey 9, a) abhangen, obſchon ihre Nenner nicht mit 1 anfangen. Eben ſo ſind die Reihen (4, a; 5, a) impurae, weil die Formirung ihrer Glieder, neben der Beziehungsſcale ($-\frac{q^s\varkappa 2}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 3}{q^s\varkappa 1}-\ldots$ in

4, a; und $-\frac{q\varkappa 2}{q\varkappa 1} - \frac{q\varkappa 3}{q\varkappa 1} - \ldots$ in 5, a) noch die Beyhülfe anderer Größen ($p^r\varkappa 1$, $p^r\varkappa 2 \ldots$ für 4, a, oder $p\varkappa 1$, $p\varkappa 2 \ldots$ das iſt a, b ... für 5, a) erfordert; jene giebt der Nenner, dieſe der Zähler an die Hand.

31. Weil der erſte Theil des Nenners der Function den gemeinſchaftlichen Diviſor in alle Glieder der zu entwickelnden Reihe giebt (30) ſo darf dieſer nicht $= 0$ ſeyn. Denn wäre $q^s\varkappa 1$ oder $q\varkappa 1$ d. i. hier α^s oder $\alpha = 0$, ſo würden dadurch das erſte und alle folgende Glieder der Reihen (4, a; 5, a; 7, a; 9, a) unendlich. Wie man dieſer ſcheinbaren Schwierigkeit begegnen, und ſie leicht heben könne, hat Euler (Introd. in Anal. Inf. L. 1. ſ. 69) gezeigt. Eine andere wichtige Bemerkung, in Beziehung auf ächte und unächte gebrochene Functionen, und wie, bey dem Gebrauche der letztern, die ganze darinn enthaltene Function, in den Gliedern, in welche ſie kommt, das Fortſchreitungsgeſetz unterbricht (Ebend. ſ. 63).

32. Die Hauptaufgabe (1 oder 3, a) hat Euler in der Geſtalt

$$\frac{(A+Bx+Cx^2+\text{ etc.})^m}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{ etc.})^n} = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\text{ etc.}$$

aufgelößt (Inſt. Calc. Diff. P. II. Cap. VIII. ſ. 207)

Die Euleriſchen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots$
ſind meine $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$, $P\varkappa 4 \ldots$

aber das dortige Fortſchreitungsgeſetz für die Werthe der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots$ iſt nicht ſo leicht und einfach [d]) als das hieſige

---

[d]) Euler, der vorher mehrere Geſetze, in weniger zuſammengeſetzten Fällen, wörtlich ausgedrückt und angegeben hat, ſagt daher a. a. O. von dieſem: Lex, qua iſtae formulae (für die Werthe der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} \ldots$) vlterius continuantur ex inſpectione facilius apparet, quam verbis deſcribi queat.

(4, a) für die $Px1$, $Px2$, $Px3$ u. ſ. w. Durch die Auflöſung dieſer Aufgabe, behauptet dieſer große Analyſt (a. a. O. ſ. 208) die Lehre von der Evolution der Functionen und der recurrirenden Reihen erweitert zu haben. Eben das gilt von der Auflöſung hier (4, a) und noch mehr von der andern (in B).

33. Ueberhaupt hat Euler von der Evolution der Functionen in Reihen, und den wiederkehrenden Reihen insbeſondere (Introd. in Anal. Infin. L. I. Cap. IV. und XIII. ingl. Inſt. Calc. Differ. L. II. Cap. VIII.) ausführlich gehandelt. Unter den letztern ſchienen ihm vor andern diejenigen Reihen, die aus Brüchen entſpringen, deren Nenner eine *Dignität* oder *Potenz einer Reihe* iſt, einer beſondern Betrachtung werth zu ſeyn. Bey Potenzen von Binomien hatte auch die Auffindung eines allgemeinen Geſetzes (Introd. L. I. ſ. 64 - 67) keine Schwierigkeit; aber die *Potenzen* der *Polynomien* (hier 7, a) zeigten, auf dem gewöhnlichen Wege, deſto größere, die ſich noch um Vieles vermehrten, und ſo das Geſetz noch weit zuſammengeſetzter machten, wenn auch der Zähler eine Potenz eines Polynomiums iſt (wie hier in 1). Daher auch dort (Introd. ſ. 68) die Behandlung ſolcher Reihen und die Auffindung ihrer Geſetze, als für die Analyſis endlicher Größen zu ſchwierig, in die Differenzialrechnung (Lib. II. Cap. VIII. ſ. 198 - 207) verwieſen wird. Die Unterſuchung daſelbſt ſchließt mit folgenden Worten: Hoc igitur modo doctrina de ſeriebus recurrentibus *amplificatur*, dum iſtum defectum ſuppleuimus, atque legem coefficientium definiuimus, ſi non ſolum denominator fractionis fuerit poteſtas quaecunque (hier 7, a) ſed etiam numerator ex quotlibet terminis conſtet (3 und 4, a); ad quam legem detegendam ſola inductio non ſufficiebat (a. a. O. ſ. 208). Das wird hoffentlich die hier beygebrachte *etwas ausführliche* Auseinanderſetzung entſchuldigen, um ſo mehr,

da alles durch ganz einfache, auffallend leichte, in Lokalfunctionen ausgedrückte, Geſetze dargeſtellt und gegeben iſt. Dieſe Geſetze ſucht Euler für jeden einzelnen Fall insbeſondere auf, und ſteigt ſo vom Speciellen auf das Allgemeine. Hier hingegen fließt alles aus der allgemeinen Aufgabe (1) und ihrer Auflöſung (3 und 4, a) durch leichte Interpretation, und man hat nicht nöthig zu Logarithmen und ihren Differenzialien ſeine Zuflucht zu nehmen. Die Analyſis endlicher Größen iſt allein hinreichend, alle vorkommende Schwierigkeiten gründlich zu heben. Man darf nur an die Stelle der Logarithmen und ihrer Differenzialien, die gebraucht werden, das negotium perquam laborioſum (a. a. O. ſ. 200) der Potenziirung der Polynomien zu vermeiden, das combinatoriſche Verfahren ſetzen, das auch hier, wie anderwärts (Arch. H. III. S. 334, 23) als ein longe praeſtantiſſimum et fructuoſiſſimum compendium ſich bewährt. Für gegebene Reihen p und q, ſind nehmlich ihre Potenzen p^r und q^s, mithin $p^r \varkappa (m+1)$; $q^s \varkappa (n+1)$ folglich auch $\frac{p^r}{q^s}$, und $\frac{p^r}{q^s} \varkappa (n+1)$ durch die combinatoriſche Methode mit Leichtigkeit gegeben (E. S. c. a. A. S. 235. §. 138, 139 ingl. §. 143, 144).

34. Auf dieſen und ähnlichen Forderungen (Ebend. S. 150. §. 15) gründen ſich die ſchönen, in Lokalzeichen durchgängig ausgedrückten, Auflöſungen verſchiedener, für die gewöhnliche Analyſis ſchwierigen, Aufgaben Herrn Prof. Pfaffs (Ebend. S. 123 - 152; vergl. die Anmerk. S. 125, 126). Mehrere, noch verwickeltere Aufgaben dieſer Art ſind von Herrn Prof. Pfaff auch in dieſer zweyten Sammlung mitgetheilt worden.

35. Da die $p^r \varkappa 1$, $p^r \varkappa 2$, $p^r \varkappa 3$ u. ſ. w. in den Auflöſungsformeln (3, a; 4, a) der Hauptaufgabe (1) unabhängig von einander gegeben ſind, ſo beruht alle Recurrenz lediglich

auf den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ u. ſ. w. Wie man auch dieſe aufheben, und ſo die Glieder independent von einander darſtellen und finden könne, das zeigen die Formeln (3, b; 4, b) für welche die Lokalfunction $q^{-s}\varkappa\ (n+1)$ durch q eben ſo wie die $p^r\varkappa\ (n+1)$ durch p gegeben iſt. Hieher gehört Folgendes.

B. Directe independente Form.

Beweis der Formeln 3, b und 4, b Taf. I. S. 5, 7.

36. I. Für $\frac{p^r}{q^s} = P$ iſt (2, II.)

$$P = P\varkappa 1 x^{r\mu-s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu-s\nu+\delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$$

II. Um nun die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ . . . nicht (wie in 3, 4) durcheinander, ſondern unabhängig von einander, auszudrücken, ſetze man $q^{-s}p^r = P$, alſo $P\varkappa 1 = (q^{-s}p^r)\ \varkappa 1$ und $P\varkappa 2 = (q^{-s}p^r)\ \varkappa 2$ und $P\varkappa 3 = (q^{-s}p^r)\ \varkappa 3$ u. ſ. w. Dadurch läßt ſich die Evolution der gebrochenen Function $\frac{p^r}{q^s}$ auf die Aufloͤſung des allgemeinen Productenproblems (Arch. der Math. Heft II. S. 224 u. f.) reduciren, wenn man ſtatt der dortigen a, b hier r, — s ſetzt.

III. Demnach iſt (a. a. O. S. 227, 8)

$$P\varkappa(n+1) = (q^{-s}p^r)\varkappa(n+1) = {}^{n+2}\overset{q^{-s}p^r}{B}$$

Daraus findet man den combinatoriſchen Ausdruck der Coefficienten für $q^{-s}p^r$ in einzelnen Variationsklaſſen (wie in 3, b) wenn man in die obige Formel nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . ſtatt n ſetzt; und hieraus ergiebt ſich, ſtatt der Variationsklaſſen ihre Werthe nach dem dortigen Zeiger für p^r und q^{-s} geſetzt, die Reihe für P oder $p^r q^{-s}$, wie ſolche, mit der untergeſetzten Scale für p und q, (in 4, b) befindlich iſt.

IV. Weil für gegebene Reihen p, q, auch ihre Potenzen p^r, q^{-s}, durch die combinatoriſche Methode, und zwar von vorhergehenden Gliedern ganz unabhängig, gegeben ſind, ſo iſt durch die Formel (4, b) für $p^r\ q^{-s}$ die Evolution von $\frac{p^r}{q^s}$, auch von aller Abhängigkeit der Glieder von einander befreyt, und alſo die geforderte, und hier (in II) wiederholte, Bedingung vollſtändig erfüllt.

37. Was (in 18) von dem vortheilhaften Gebrauche der dortigen Variationsklaſſen und der Lokalwerthe für p^r, q^s, geſagt worden iſt, das gilt auch von den hieſigen. Der Ausdruck für $P\varkappa\ (n+1)$ nach der hieſigen independenten Form (36, III) iſt ſogar einfacher, als der dortige (18) für die dependente.

38. Die Auflöſung (4, b) dieſer Aufgabe habe ich vorlängſt (Infin. Dign. §. XXVI. p. 120 ſeq.) gegeben. Die hier gebrauchten Lokalausdrücke $p^r\varkappa 1$, $p^r\varkappa 2$ ... $q^{-s}\varkappa 1$, $q^{-s}\varkappa 2$ ... ſind bequemer als die dortigen, willkührlich gewählten, ${}^{I}A^m$, ${}^{II}B^m$ ... ${}^{I}A^{-\mu}$, ${}^{II}B^{-\mu}$ ... (p. 122, 4; 123, 6). Die durch die Combinationsmethode bewürkte ganz einfache Darſtellung in den gegebenen Coefficienten und Exponenten, ſteht daſelbſt (p. 123, 124, 8) und die recurrirende ſehr verwickelte Euleriſche Formel zur Vergleichung (p. 125, 126, 9)

39. In der Lokalformel (4, b) ſind zwey große Vortheile mit einander vereinigt: 1) iſt ſelbige frey von aller Recurrenz, 2) führt ſie die durch andere Verfahren ſo ſchwierige Evolution der gebrochenen Function $\frac{p^r}{q^s}$ auf Summen von

Producten zurück, deren Factoren $f^m\varkappa\,(n+1)$ für jedes m, alſo auch für r und — s, durch combinatoriſche Verfahren, auſſer der Ordnung bequem ſich darſtellen laſſen (E. S. c. a. A. S. 235). Dieſe Reduction iſt vornehmlich wichtig; denn auf ihr beruht die große Leichtigkeit der Auflöſung der, ſelbſt nach Eulers Urtheile, ſo verwickelten Aufgabe (1) und dann giebt ſie nicht ſelten beträchtliche Verkürzungen an die Hand, wo andere Vorſchriften in unnöthige, oft in unüberſehliche Weitläuftigkeiten führen. Die Fälle, wo dergleichen Verkürzungen eintreten, ſind dieſelben, wie ich bereits für die combinatoriſche Reverſionsformel (Arch. d. Math. H. VII. S. 374; 10) angegeben habe.

Die Formel für $p^r\,q^{-s}$ (4, b) iſt eben ſo mannichfaltiger Veränderungen, nach den verſchiedenen Beſtimmungen von $p, q, \mu, \nu, \delta, r, s$, fähig, als jene für P (3, a; 4, a). Um $\left(\frac{p^r}{q^s}\right)^f$ ohne Recurrenz (die recurrirende Formel ſteht in 20) zu entwickeln, darf man nur $p^{fr}\,q^{-fs}$ darſtellen, d. h. in der Formel für $p^r\,q^{-s}$ (4, b) überall fr, fs ſtatt r, s ſetzen.

41. Für $r = s = 1$, oder für die Function $\frac{p}{q}$, enthält (5, b) die Entwickelung in combinatoriſchen Zeichen. Die dortige Formel iſt nach a, b, c, d . . . geordnet, und ihr Fortgangsgeſetz fällt ohne Schwierigkeit in die Augen. Dieſelbe, nur aber nach $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}$ . . . geordnete, Formel habe ich bereits (Nov. Syſt. Comb. p. LXXX) bekannt gemacht; die daſigen $\overset{0}{n}, \overset{-1}{n}, \overset{-2}{n}$ . . . ſind den $p\varkappa n$, $p\varkappa\,(n-1)$, $p\varkappa\,(n-2)$ . . . gleichgeltend. Die Darſtellung (5, b) zeigt zugleich (augenſcheinlicher, als jene andere Nov. Syſt. a. a. O.), daß in jedem folgenden Gliede alle

Combinationsklaſſen des nächſtvorhergehenden Gliedes enthalten ſind, und daß man alſo, was man von dieſen Claſſen für irgend ein Glied berechnet hat, für alle vorhergehende Glieder gebrauchen kann; nur werden die in einem ſpätern Gliede in $\mathfrak{b}$, c, d, e, f, g . . . multiplicirten Combinationselemente $\left(\frac{\mathfrak{a}^n A}{\alpha^2}, \frac{\mathfrak{b}^n B}{\alpha^3}, \ldots\right)$, im nächſtvorhergehenden in a, b, c, d, e, f . . . multiplicirt. Und umgekehrt, wenn in einem Gliede die Combinationselemente $(\mathfrak{a}^{n-1}A, \mathfrak{b}^{n-1}B, \ldots \overset{-1}{n}{}^{n-1} \overset{-1}{N})$ oder ihre Stellvertreter $q^{-1}\varkappa n$, $q^{-1}\varkappa(n-1) \ldots q^{-1}\varkappa 1$, in a, b . . . $\overset{n-1}{a}$ multiplicirt vorkommen: ſo kommen im nächſtfolgenden Gliede dieſelben Elemente, aber in b, c . . . $\overset{n-1}{b}$, und noch überdies $q^{-1}\varkappa(n+1)$ in a multiplicirt, vor; wie aus (4, b) erhellet, wenn man dort $r = s = 1$ ſetzt. Hier zeigt ſich alſo auch eine Recurrenz, aber keine der gemeinen ſo läſtigen und beſchwerlichen, ſondern eine combinatoriſch-involutoriſche der zuſammenzuſetzenden Elemente [e]), durch welche man jeden verlangten Coefficienten auſſer der Ordnung mit Leichtigkeit ſchaffen kann, und zugleich, wie er mit den vorhergehenden und folgenden zuſammenhängt, mit Deutlichkeit überſieht.

42. Die Formel für q^{-s} (in 7, b) läßt ſich in Abſicht auf die dortigen Binomialcoefficienten $^{-s}\mathfrak{A}$, $^{-s}\mathfrak{B}$, $^{-s}\mathfrak{C}$ . . ., noch anders ausdrücken. Denn weil

---

[e]) Von ſolchen combinatoriſchen Dependenzen folgender Werthe oder Glieder von vorhergehenden, die aber, vermöge der ganz eigenen Art von Zuſammenſetzung der Elemente, abſoluten Independenzen vollkommen gleichgültig ſind, habe ich bereits anderwärts (Arch. der Math. H. III. S. 324) geſprochen und Beyſpiele gegeben.

$$
\begin{aligned}
{}^{-s}\mathfrak{A} &= -\,{}^{s}\mathfrak{A} = -\,s\\
{}^{-s}\mathfrak{B} &= +\,{}^{s+1}\mathfrak{B} = +\,\frac{s\,{}^{s+1}\mathfrak{A}}{2}\\
{}^{-s}\mathfrak{C} &= -\,{}^{s+2}\mathfrak{C} = -\,\frac{s\,{}^{s+2}\mathfrak{B}}{3}\\
{}^{-s}\mathfrak{D} &= +\,{}^{s+3}\mathfrak{D} = +\,\frac{s\,{}^{s+3}\mathfrak{C}}{4}\\
{}^{-s}\mathfrak{E} &= -\,{}^{s+4}\mathfrak{E} = -\,\frac{s\,{}^{s+4}\mathfrak{D}}{5}:
\end{aligned}
$$

u. ſ. w.

ſo ergiebt ſich daraus, wenn man z. B. die letzten Coefficienten ſtatt der erſten in die Formel (7, b) ſetzt, und den gemeinſchaftlichen Factor abſondert,

$$
\begin{aligned}
q^{-s} = &\ \frac{1}{\alpha^{s}}\,x^{-s\nu}\\
&- \frac{s}{\alpha^{s+1}}\,a^{1}Ax^{-s\nu+\delta}\\
&- \frac{s}{\alpha^{s+1}}\left[a^{2}A - \frac{{}^{s+1}\mathfrak{A}b^{2}B}{2\alpha}\right]x^{-s\nu+2\delta}\\
&- \frac{s}{\alpha^{s+1}}\left[a^{3}\grave{A} - \frac{{}^{s+1}\mathfrak{A}b^{3}B}{2\alpha} + \frac{{}^{s+2}\mathfrak{B}c^{3}C}{3\alpha^{2}}\right]x^{-s\nu+3\delta}\\
&⸗ \quad ⸗ \quad ⸗ \quad ⸗ \quad ⸗ \quad ⸗
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}
$$

43. Für die Evolution des Quotienten $\frac{1}{1-\beta x^{\delta}-\gamma x^{2\delta}-\text{etc.}}$ (10, a, b) hat unter andern auch Herr de la Grange eine Formel gegeben (Mem. de l'Ac. de Berlin, année 1768, p. 285, 286; vergl. Toepf. comb. Anal. S. 116—118).

Sie iſt zuſammengeſetzter, als die hieſige (10, a), hat aber eine etwas weiter getriebene Analyſe der dabey vorkommenden Coefficienten zum Zweck, die gleichwohl auf Subſtitutionen und Reductionen, wie die gewöhnliche, führt. Herr de la Grange empfiehlt daher in der Folge (Mem. §. 22. p. 291, 292) wegen des unendlichen Nutzens dieſer Coefficienten bey ſo vielen Unterſuchungen, ihre ausführliche Berechnung und Darſtellung in den gegebenen ganz einfachen Coefficienten β, γ, δ, ε ... Dies zeigt die große Wichtigkeit der ſo ſimpeln, von allen Subſtitutionen und Reductionen ganz freyen und unabhängigen combinatoriſchen Formel (10, b). Zur beſſern Ueberſicht des hier Geſagten vergleiche man Toepfer a. a. O. S. 119 — 123 und Arch. der Math. H. VII. S. 363, 364; 366, 367.

44. Die a^nA, b^nB, c^nC ... bedeuten überhaupt, nach Claſſen zur Summe n combinatoriſch geordnete, mit ihren Verſetzungszahlen verbundene, Complexionen, ſie mögen in ihrer Folge auf einander involutoriſch dargeſtellt ſeyn, oder nicht. Verlangt man nun nicht blos combinatoriſche ſondern zugleich involutoriſche Anordnungen dieſer Coefficienten, ſo kann man dafür die j^nJ oder $j^n\mathfrak{J}$ gebrauchen, jene für die Claſſen- dieſe für die lexikographiſchen Involutionen (E. S. c. a. A. S. 266, 267). Das giebt für die involutoriſchen Formeln (10, b):

$$q^{-1} = 1 + j^1Jx^{\delta} + j^2Jx^{2\delta} + j^3Jx^{3\delta} + \text{etc. oder}$$

$$q^{-1} = 1 + j^1\mathfrak{J}x^{\delta} + j^2\mathfrak{J}x^{2\delta} + j^3\mathfrak{J}x^{3\delta} + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Entwickelung der Claſſeninvolution ${}^nJ$ und der lexikographiſchen ${}^n\mathfrak{J}$ (und zwar der leztern auf zwey verſchiedene Arten) für beſtimmte und unbeſtimmte Summenexponenten n, zeigen (E. S. c. a. A. S. 183. f. und S. 202, 204). Auch in dieſer zweyten Sammlung wird Mehreres davon vorkommen.

45. Daraus folgt für (II, b) oder

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + \text{etc.}}{1 - \beta x - \gamma x^2 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

$$\begin{aligned} pq^{-1} = {} & a \\ & + [b + aj^1J]\,x \\ & + [c + bj^1J + a\,j^2J]\,x^2 \\ & + [d + ej^1J + bj^2J + aj^3J]\,x^3 \\ & = \quad = \quad = \quad = \quad = \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \dots \end{pmatrix}$$

Für $j^1J, j^2J \dots$ kann man auch ſetzen $j^1\mathfrak{J}, j^2\mathfrak{J} \dots$

46. Für die Evolution der Elementarfunction $\frac{1}{1 - bx - cx^2 - \text{etc.}}$ hat auch de Moivre zwo Formeln gegeben: eine recurrirende dependente (Miſc. anal. p. 35, 36) die mit der hieſigen (10, a) bis auf die Zeichnung vollkommen übereinſtimmt, und eine directe independente durch die Coefficienten b, c, d ... des Nenners unmittelbar ausgedrückte (ibid. p. 89. Coroll. I). Die Zuſammenſetzung der letzten folgt keinesweges, wie doch zu erwarten war, der unmittelbar vorher (auf derſelben Seite) angegebenen Regulae producta literalia ex praecedentibus colligendi; auch hat de Moivre, welch anderes Geſetz dabey zum Grunde liege, nicht angegeben. Die Sache iſt eine literariſche Merkwürdigkeit, über welche ich in der Folge Aufſchluß geben werde.

47. Auch hat Herr Profeſſor Trembley zu Berlin in der folgenden Abhandlung über die wiederkehrenden Reihen

durch Evolution von $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - \text{etc.}}$. (worinn $\frac{1}{1 - ax + bx^2 - \text{etc.}}$ als Element enthalten iſt) mit vielem Scharfſinn eine Formel aufgefunden, deren Entwickelung, wie ich in der Folge zeigen werde, eine combinatoriſche Anordnung darſtellt. Sie begreift zufälligerweiſe das oben (46) vermißte, von de Moivre nicht angegebene, Geſetz der Zuſammenſetzung jener Coefficienten vollſtändig in ſich, und enthält ſo eine weitere Analyſe der Moivriſchen Anordnung jener Coefficienten. Aus dem ganzen Vortrage der Abhandlung ſelbſt erhellet jedoch augenſcheinlich, daß Herr Trembley, dem die nurerwähnte de Moivriſche Zuſammenſetzung der b, c, d . . . vermuthlich gar nicht bekannt geweſen iſt, ſeinen eigenen Weg eingeſchlagen und verfolgt hat.

Zu unmittelbarer, in der Folge anzuſtellenden, Vergleichung der Trembleyiſchen Formeln und ihrer Auflöſung, mit den combinatoriſch-involutoriſchen, habe ich letztere (in 12, 13. Tafel III) vorgelegt, auch dieſelben Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; $a, b, c \ldots$ im Zähler und Nenner der gebrochenen Function $\frac{p}{q}$, wie bey Herrn Trembley, beybehalten. Da hier, wegen der Rechtfertigung der Formeln (12, 13) auf andere vorhergehende (36, III) von welchen ſie abhängen, verwieſen wird: ſo wird es hoffentlich nicht überflüſſig ſeyn, einen directen Beweis dieſer Formeln hier beyzubringen. Bey aller Strenge läßt er ſich ganz kurz faſſen, und ſchafft den Vortheil, daß, wem blos um die Einſicht und Vergleichung der beyderley Formeln (der meinigen und der von Herrn Trembley) und ihres Gebrauchs in der Anwendung zu thun iſt, dieſer das Bisher Vorgetragene ganz übergehen, und ſich nur mit dem zunächſt Folgenden bekannt machen darf.

C. Directer Beweis der Formeln für q^{-1} und pq^{-1} (12, 13) nebſt einigen Beyſpielen zur Erläuterung.

a) Beweis der Formel für q^{-1} (12. Taf. III.)

49. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = q^{-1}$$

ſetze man $\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - {}'q}$, wo alſo ${}'q = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$

Nun iſt

$$\frac{1}{1 - {}'q} = 1 + {}'q^1 + {}'q^2 + {}'q^3 + \text{etc.} = q^{-1}$$

$${}'q\,[a,\ b,\ c\ .\ .\ .\ .]$$

folglich, ſtatt der Potenzen ${}'q^1$, ${}'q^2$, ${}'q^3$ . . . ihre einzelnen in Combinationsclaſſen ausgedrückten Glieder (E. S. c. a. A. S. 232 §. 130) geſetzt,

$$\frac{1}{1 - {}'q} = 1 + a^1Ax + \left.\begin{array}{l} a^2A \\ +b^2B \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l} a^3A \\ +b^3B \\ +c^3C \end{array}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

$$\left(\begin{array}{llll} a, & b, & c, & d\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4\ldots \end{array}\right)$$

woraus

$$q^{-1} \left\{\begin{array}{l} = 1 + i^1Jx^1 + i^2Jx^2 + i^3Jx^3 + \text{etc.} \\ = 1 + i^1\mathfrak{J}x^1 + i^2\mathfrak{J}x^2 + i^3\mathfrak{J}x^3 + \text{etc.} \end{array}\right.$$

(wie in 12, Taf. III) folgt, wenn man, nach der dortigen Erinnerung, ſtatt der $a^nA + b^nB + c^nC + \text{etc.}$ die zugehörigen involutoriſchen Functionen i^nJ, $i^n\mathfrak{J}$, ſetzt (Ebend. S. 267).

b) Beweis der Formel für pq^{-1} (13, Taf. III)

50. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

iſt $pq^{-1} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}).\ (1 + i^1\mathfrak{J}' x^1 + i^2\mathfrak{J}' x^2 + \text{etc})$ wenn man q^{-1} durch involutoriſche Zeichen (nach 12 oder 49) ausdrückt. Daraus folgt, beyde Reihen mit einander multiplicirt,

$$pq^{-1} = \alpha + (\alpha i^1\mathfrak{J}' + \beta)\,x^1 + \text{etc. (wie in 13)}$$

Statt der $i^1\mathfrak{J}'$, $i^2\mathfrak{J}'$ ... hätte man hier auch die $i^1 J$, $i^2 J$ ... ſetzen können. Auch iſt das Fortſchreitungsgeſetz der Glieder für die Werthe von q^{-1} und pq^{-1} [in a) b)] ſo deutlich und einleuchtend, daß ſich daraus die Werthe für die allgemeinen Glieder $q^{-1}\,7(n+1)$ und $(pq^{-1})\,7(n+1)$ in (12, 13) ſogleich ergeben.

51. Man hat hier in wenig Zeilen einen bündigen vollſtändigen Beweis der Grundformeln für die Entwickelung und Darſtellung der Glieder in wiederkehrenden Reihen. Ein neues Beyſpiel, wie ſehr nicht ſelten die Combinationslehre die Beweiſe zuſammenzieht und verkürzt!

c) Einige Beyſpiele zur Erläuterung.

52. Vorerinnerung. Es giebt mehrere Wege, auf welchen ſich die involutoriſchen Functionen ^{n}J und $^{n}\mathfrak{J}'$ ausführen und in ihren Werthen darſtellen laſſen. Von dieſen will ich hier nur beyſpielsweiſe die drey Anordnungen anführen, die man (E. S. c. a. A. S. 183) zu unmittelbarer Vergleichung neben einander geſtellt, findet: die Claſſeninvolution nehmlich und die beyden lexikographiſchen (die Moivriſche und Boscowichſche). Die Dar-

ſtellung iſt dort zwar nur für $n = 7$ gegeben, aber die dafür beygebrachten Regeln ſind allgemein.

53. Von dieſen drey Anordnungen werde ich hier die erſte und letzte (die Claſſeninvolution und die lexikographiſche Boscowichſche) nicht gebrauchen: jene nicht, weil ich von ihr in meinen frühern Schriften und auch in der erſten Sammlung c. a. A. häufigen Gebrauch gemacht habe, und ſelbige unter den übrigen ſchon am meiſten bekannt iſt; dieſe nicht, weil ſie bey der folgenden Abhandlung von Herrn Trembley am ſchicklichſten ihre Anwendung finden wird.

54. Anbetreffend die combinatoriſche Anordnung, deren ich mich hier zu Entwicklung der Complexionen für die Involution ${}^{n}\mathfrak{J}$ bedienen werde: ſo findet man (Tafel IV, 14, 15) zwey verſchiedene Darſtellungen davon, wo man wegen der erſten (14), außer den dort angeführten Stellen, auch im Arch. d. Math. H. IV. S. 393 nachſehen kann. Die zweyte (15) anlangend, ſo gehört hieher folgende Aufgabe.

55. Aufgabe. Die Involution $\overset{{}^{n}\mathfrak{J}}{\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}}$ auszuführen.

Aufl. 1) Man ſetze die drey erſten Complexionen a^{n-1} [a], a^{n-2} [b], a^{n-3} [c], als für ſich gegeben, unter einander, und continuire die a^{n-4}, a^{n-5}, a^{n-6} . . . im Voraus nach der Ordnung. Die Complexionen der zugehörigen Klammern werden nach einander beſtimmt, wie folget:

2. Allen in der vorletzten Klammer ſtehenden Complexionen ſetze man b vor

3. in denjenigen Complexionen der letzten Klammer, die entweder nur einen Buchſtaben oder zwey ungleiche An=

fangsbuchſtaben haben, verwechſele man den erſten Buchſtaben mit dem nächſtfolgenden des Zeigers.

So geben (2 und 3 zuſammen) die Complexionen einer neuen oder folgenden Klammer, aus den beyden nächſtvorhergehenden.

4. Führte die Verwechslung (3) auf einen Buchſtaben der nicht im Zeiger ſteht (der hier nur a, b, c, d nicht aber e, f ... enthält) ſo übergeht man die Complexion ganz.

56. Das giebt für die Involution $\overset{n}{\mathfrak{J}}\binom{a,\ b,\ c,\ d}{1,\ 2,\ 3,\ 4}$ folgende Complexionen

a^{n-1} [a]
a^{n-2} [b]
a^{n-3} [c]
a^{n-4} [b^2, d]
a^{n-5} [bc]
a^{n-6} [b^3, bd, c^2]
a^{n-7} [b^2c, cd]
a^{n-8} [b^4, b^2d, bc^2, d^2]
a^{n-9} [b^3c, bcd, c^3]
a^{n-10} [b^5, b^3d, b^2c^2, bd^2, c^2d]
u. ſ. w.

Dieſe Involution, wo n allgemein jede ganze poſitive Zahl vorſtellen kann, iſt zwar in Abſicht des Zeigers (der hier mit d abbricht) beſchränkt; die oben gegebenen Regeln aber ſind allgemein, wie Folgendes zeigen wird.

57. Die Complexionen der Involution $\overset{n}{\mathfrak{J}}\binom{a,b,c,d,e\ldots}{1,2,3,4,5\ldots}$ zu finden, für welche die Menge der Buchſtaben a, b, c, d ... eben ſo, wie der Summenexponent n, ganz unbeſtimmt iſt,

bedient man ſich der Vorſchriften 1, 2, 3 der vorigen Aufgabe (55) mit Uebergehung von No. 4; weil der dort angegebene Fall hier, wo es keinen letzten Buchſtaben giebt, nicht eintreten kann. Die Ausführung einer ſolchen Involution (hier Taf. IV. 15. und E. S. c. a. A. S. 202). Ein beſonderer Fall davon, für n = 10 (Ebendaſ. S. 280). Dort habe ich aus der Involution für eine unbeſtimmte Menge von Elementen, die für eine beſtimmte abgeleitet. Hier habe ich umgekehrt; die Menge der Elemente a, b, c, d erſt beſtimmt angenommen (55), und gezeigt, wie die Regel, durch Aufhebung der Beſchränkung, für jede unbeſtimmte Menge paſſe.

58. Aus ${}^{n}\mathfrak{J}$ und ihren Complexionen folgen unmittelbar die für ${}^{n-1}\mathfrak{J}$, ${}^{n-2}\mathfrak{J}$, ${}^{n-3}\mathfrak{J}$ ... oder für ${}^{n+1}\mathfrak{J}$, ${}^{n+2}\mathfrak{J}$, ${}^{n+3}\mathfrak{J}$ ... wenn man in der ${}^{n}\mathfrak{J}$ Potenzen von a, durchgängig $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... oder $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... ſtatt n ſetzt, die nebenſtehenden Complexionen in den Klammern aber ganz unverändert beybehält. Eben ſo folgen, für beſtimmte n, z. B. aus ${}^{10}\mathfrak{J}$ (Ebend. S. 280, 281) die ${}^{9}\mathfrak{J}$, ${}^{8}\mathfrak{J}$, ... oder die ${}^{11}\mathfrak{J}$, ${}^{12}\mathfrak{J}$, ... durch ſucceſſive Hinwegnahme oder Hinzuthuung eines oder mehrerer a zu den Potenzen von a in ${}^{10}\mathfrak{J}$, mit Beybehaltung der nebenſtehenden Complexionen in den Klammern. Ueberall muß man dieſe Veränderung ſo weit treiben, bis man auf a^{0} verfällt; die in der Klammer neben a^{0} ſtehenden Complexionen ſind nehmlich jederzeit die letzten der Involution. Die Darſtellung einer einzelnen Involution kann ſo zur Grundlage von unzählich viel andern dienen, die man vorwärts und rückwärts daraus finden kann.

59. Die einzelnen Complexionen von ${}^{n}\mathfrak{J}$, mit den zugehörigen Verſetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten z verſehen, geben $j\,{}^{n}\mathfrak{J}$. Von dieſen Zahlen (Infin. Dign.

§. XIII. auch Arch. d. Math, H. IV, S. 388, 4). Die Vorzeichen der einzelnen Complexionen beurtheilt man aus den Vorzeichen der einzelnen a, b, c, d ... im **Zeiger**, die denen im Nenner entgegen gesetzt sind (23).

60. Exempel 1. Das 10de Glied des Bruches

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4} = q^{-1},$$

zu finden, ſetze man (12) $n+1 = 10$, alſo $n = 9$; das giebt

$$\frac{1}{q}\, 7\, (9+1) = \underset{\begin{pmatrix} +a, & -b, & +c, & -d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}}{{}^{9}\mathfrak{J}' x^9}$$

Die Vorzeichen der a, b, c, d im Zeiger der Involution ſind nehmlich denen im Nenner des Bruchs, wie ſo eben erinnert worden iſt (59), entgegengeſetzt.

Das verlangte Glied aus der involutoriſchen Function zu entwickeln, befolge man

1) wegen der einzelnen Complexionen für ${}^{9}\mathfrak{J}'$; die Vorſchriften 1, 2, 3, 4 in (55) nach welchen man aus a^8a, a^7b, a^6c die übrigen findet; oder, man ſetze $n = 9$ in (56) und nehme alles, bis mit $a^{9-9} = a^0$, und was daneben in der Klammer ſteht (58)

2) wegen der beyzufügenden Verſetzungszahlen; die bekannten und (59) nachgewieſenen Regeln;

3) wegen der Vorzeichen der einzelnen Complexionen; die Bemerkung ebendaſelbſt. Das giebt zuſammen $q^{-1} \varkappa 10, x^9$ d. i.

$$q^{-1}\urcorner 10 = \left\{\begin{matrix} +1a^9 - 8a^7b + 7a^6c + 21a^5b^2 - 6a^5d - 30a^4bc \\ -20a^3b^3 + 20a^3bd + 10a^3c^2 + 30a^2b^2c - 12a^2cd + 5a^1b^4 \\ -12a^1b^2d - 12a^1bc^2 + 3a^1d^2 - 4a^0b^3c + 6a^0bcd + 1a^0c^3 \end{matrix}\right\} x^9$$

61. Eben ſo fände man, für eben den Zeiger, $j^8\mathfrak{J}^{r}x^8$ oder $q^{-1}\varkappa 9 . x^8$ d. i.

$$q^{-1}\urcorner 9 = \left\{\begin{matrix} +1a^8 - 7a^6b + 6a^5c + 15a^4b^2 - 5a^4d \\ -20a^3bc - 10a^2b^3 + 12a^2bd + 6a^2c^2 + 12ab^2c \\ -6acd + 1a^0b^4 - 3a^0b^2d - 3a^0bc^2 + 1a^0d^2 \end{matrix}\right\} x^8$$

entweder unmittelbar (aus 55; 1, 2, 3, 4 und 59) oder mittelbar aus $q^{-1}\urcorner 10$ (58, 60)

62. Exempel 2. Das 10de Glied des Bruchs

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4} = pq^{-1}$$

zu finden.

Man ſetze (13) $n+1 = 10$, alſo $n = 9$; das giebt

$$\frac{p}{q}\urcorner(9+1) = (\alpha j^9\mathfrak{J}^{r} + \beta j^8\mathfrak{J}^{r} + \gamma j^7\mathfrak{J}^{r} + \delta j^6\mathfrak{J}^{r})\, x^9$$

$$\left(\begin{matrix} +a, & -b, & +c, & -d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{matrix}\right)$$

Die Entwickelung von $j^9\mathfrak{J}^{r}$, $j^8\mathfrak{J}^{r}$ ſteht im vorigen Exempel, (60, 61) und gilt auch für $j^7\mathfrak{J}^{r}$, $j^6\mathfrak{J}^{r}$. Mehrere involutoriſche Functionen können hier nicht vorkommen, weil die Coefficienten im Zähler des Bruchs mit dem vierten (δ) abbrechen. Die Multiplication in α, β, γ, δ hat keine Schwierigkeit; auch wäre es überflüſſig (wegen deſſen, was ſchon im Ex. 1 ſteht) die einzelnen Complexionen von $\frac{p}{q}\urcorner 10$ hier beſonders abzuſetzen.

63. Exempel 3. Das 7de Glied der gebrochenen Function

$$\frac{p}{q} = \frac{1+3x+3x^2}{1+x-2x^2-2x^3}$$ zu finden.

Für $\frac{p}{q} = \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1+ax-bx^2-cx^3}$ wäre (13) für $n=6$

$$(pq^{-1})\,7(6+1) = (\alpha j^6\,{}_{,}\mathfrak{J}' + \beta j^5\,{}_{,}\mathfrak{J}' + \gamma j^4\,{}_{,}\mathfrak{J}')\,x^6$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -a, & +b, & +c \\ 1, & 2, & 3 \end{array}\right)$$

folglich, die involutoriſchausgedrückten Glieder gehörig entwickelt (55 oder 56 und 59)

$$\begin{array}{ccc}
\alpha j^6\,{}_{,}\mathfrak{J}' & \beta j^5\,{}_{,}\mathfrak{J}' & \gamma j^4\,{}_{,}\mathfrak{J}' \\
= & = & = \\
\left.\begin{array}{l} +1a^6 \\ +5a^4b \\ -4a^3c \\ +6a^2b^2 \\ -6a^1bc \\ +1a^0b^3 \\ +1a^0c^2 \end{array}\right\}\alpha &
\left.\begin{array}{l} -1a^5 \\ -4a^3b \\ +3a^2c \\ -3a^1b^3 \\ +2a^0bc \end{array}\right\}\beta &
\left.\begin{array}{l} +1a^4 \\ +3a^2b \\ -2a^1c \\ +1a^0b^2 \end{array}\right\}\gamma
\end{array}$$

Setzt man hier, in Beziehung auf den gegebenen Bruch, $\alpha=1$; $\beta=3$; $\gamma=3$; und $a=1$; $b=2$; $c=2$; ſo findet man

$$(pq^{-1})\,77 = (15.1 - 7.3 + 7.3)\,x^6 = 15x^6$$

Es iſt auch wirklich $\frac{1+3x+3x^2}{1+x-2x^2-2x^3} = 1+2x+3x^2$ $+3x^3+7x^4+5x^5+15x^6+9x^7+31x^8+17x^9$ $+63x^{10}+$ etc.

64. Bey der Anwendung auf beſtimmte Fälle, kann man entweder (wie in vorhergehendem Exempel 3) die Vorzeichen der einzelnen Buchſtabencomplexionen gleich ſo abändern, wie ſie die Zeichen der Coefficienten im Zähler und Nenner beſtimmen, oder man kann allen Buchſtabencomplexionen das Vorzeichen + laſſen (wie es ſich für poſitive $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ im Zähler und für den Nenner $1 - ax - bx^2 - cx^3 -$ etc. gehört [21]) und die Aenderung der Zeichen erſt mit der Subſtitution der Zahlen (wie in folgenden Exempel 4) vornehmen; wobey man nicht vergeſſen muß: die Zeichen der Zahlen im Zähler unverändert beyzubehalten, ſtatt der Zeichen im Nenner aber die entgegengeſetzten zu nehmen, und ſo die Zahlen zu ſubſtituiren. Wenn im Zähler oder Nenner des gegebenen Bruchs ein Zwiſchenglied fehlt, ſo wird der zugehörige Coefficient Null geſetzt.

65. Exempel 4. Für die gebrochene Function

$$\frac{p}{q} = \frac{2 + x^2 - 3x^3}{1 - 5x + x^2},$$

wäre das 6te Glied von $\frac{p}{q}$ d. i. $(pq^{-1})\,7\,(5+1)$

$$= (\alpha \mathfrak{i}^5 \mathfrak{J}^r + \beta \mathfrak{i}^4 \mathfrak{J}^r + \gamma \mathfrak{i}^3 \mathfrak{J}^r + \delta \mathfrak{i}^2 \mathfrak{J}^r)\, x^5$$

$$= \left(2 \left\{\begin{matrix} a^5 \\ 4a^3b \\ 3ab^2 \end{matrix}\right\} + 0 + 1 \left\{\begin{matrix} a^3 \\ 2ab \end{matrix}\right\} - 3 \left\{\begin{matrix} a^2 \\ b \end{matrix}\right\}\right) x^5$$

$$= [2(3125 - 500 + 15) + 1(125 - 10) - 3(25 - 1)]\, x^5$$

$$= (5280 + 115 - 72)\, x^5 = 5323 x^5$$

wenn man nämlich $\alpha = 2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\delta = -3$; und $a = 5$; $b = -1$ gehörig ſubſtituirt.

66. Das 6te Glied, das man hier (nach 55 oder durch Beyhülfe von 56) von den vorhergehenden unabhängig ge-

funden hat, fände man dependent von dieſen, auf dem gewöhnlichen Wege, vermittelſt der Beziehungsſcale +5 —1 (27) eben ſo. Es iſt nämlich (II, a)

$$\begin{array}{lcl} Px1 & = & 2 \\ +(\ 0+5Px1)x & = & +10x \\ +(\ 1+5Px2-1Px1)x^2 & = & +49x^2 \\ +(-3+5Px3-1Px2)x^3 & = & +232x^3 \\ +(\ 0+5Px4-1Px3)x^4 & = & +1111x^4 \\ +(\ 0+5Px5-1Px4)x^5 & = & +5323x^5 \\ +\quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

Segner, der dieſes Exempel unter mehrern (Elem. Anal. Infin. P. II. §. 568) nach der Beziehungsſcale +5—1 berechnet, aufführt, hat durch einen Rechnungsfehler $4444x^5$ ſtatt $5323x^5$ geſetzt.

Ferner: Der *unächte* Bruch des Exempels $\frac{-3x^3+x^2+2}{x^2-5x+1}$ enthält die *ganze Function* $-3x-14$ und den *eigentlichen* Bruch $\frac{16-67x}{1-5x+x^2}=16+13x+49x^2+232x^3+1111x^4+5323x^5+$ etc. Jene und dieſer zuſammen, geben $2+10x+49x^2+232x^3+1111x^4+5323x^5$ + etc., wie vorhin.

67. Ich habe in dieſer Abhandlung durchgängig, die *recurrirende dependente* Form, von der *directen independenten*, unterſchieden. Nun kommen zwar in der letztern auch *Recurrenzen* vor (41), aber der Umſtand, daß ſie *combinatoriſch-involutoriſcher* Art ſind, macht ſie ganz unſchädlich und *abſoluten Independenzen* vollkommen gleichgültig. Es wird der Mühe werth ſeyn, zum Schluſſe noch die unmittelbare Verglei-

chung der beyderley Recurrenzen, der gemeinen und combinatoriſchen, an einem Beyſpiele vorzulegen.

68. Für $\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = P$

wäre

in dependenter Form u. gemein. Recurrenz	in independenter Form u. combinat. Recurrenz
P oder	pq^{-1}
$= \alpha$	$= \alpha q^{-1}\varkappa 1$
$+[\beta + aP\varkappa 1]x^1$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 2 + \beta q^{-1}\varkappa 1]x^1$
$\left.\begin{array}{r} +[\gamma + aP\varkappa 2 \\ + bP\varkappa 1 \end{array}\right\} x^2$	$\left.\begin{array}{r} +[\alpha q^{-1}\varkappa 3 + \beta q^{-1}\varkappa 2 \\ + \gamma q^{-1}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^2$
$\left.\begin{array}{r} +[\delta + aP\varkappa 3 \\ + bP\varkappa 2 \\ + cP\varkappa 1 \end{array}\right\} x^3$	$\left.\begin{array}{r} +[\alpha q^{-1}\varkappa 4 + \beta q^{-1}\varkappa 3 \\ + \gamma q^{-1}\varkappa 2 \\ + \delta q^{-1}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^3$

⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗

nach 4, a; 4, b; wenn man dort $r = s = 1$, und $p\varkappa 1 = \alpha$; $p\varkappa 2 = \beta$; $p\varkappa 3 = \gamma$; ... und $q\varkappa 1 = 1$; $q\varkappa 2 = a$; $q\varkappa 3 = b$; ... ſetzt.

69. Die Vergleichung beyder Darſtellungen zeigt folgendes:

1) In dem Werthe für P kommen, auſſer den a, b, c... des Nenners, als den einzelnen Gliedern der Moivriſchen Beziehungsſcale (27) auch noch die α, β, γ, δ... des Zählers vor. Der Ausdruck für P ſtellt demnach eine ſeriem recurrentem impuram (29) dar.

Der gleichgültige Ausdruck für pq^{-1} hingegen, hat ganz die Form von einer ſerie recurrente pura, wobey die α, β, γ, δ... gleichſam die Stelle der einzelnen Glieder einer

Beziehungsſcale vertreten, die man auch die **Beziehungsſcale für die combinatoriſche Recurrenz** nennen könnte.

2) Der Ausdruck für P iſt demnach zuſammengeſetzter, als der für pq^{-1}, und wird es dadurch noch mehr, daß in den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... die α, β, γ ... und a, b, c, ... unter einander gemengt vorkommen, die in den einzelnen Gliedern von pq^{-1} aufs deutlichſte von einander geſondert ſind. Von den hierbey aufgeführten Producten iſt immer der **erſte** Factor einer der Buchſtaben α, β, γ ... aus der Reihe p, der **andere** Factor, als Coefficient von q^{-1}, bezieht ſich **blos** auf 1, a, b, c ... und enthält nichts von α, β, γ ...

3) Dieſe größere Einfachheit im letztern Falle, hat ihren Grund vornehmlich in der weiter getriebenen Analyſe der Reihe für pq^{-1}. Der Ausdruck für P zeigt nämlich blos, wie folgende Glieder der Reihe von vorhergehenden **derſelben Reihe** abhängig ſind. Eine ähnliche Dependenz der Glieder, aber auf die **Elementarreihe** q^{-1} **bezogen**, zeigt der Werth für pq^{-1}, der alſo weiter zerlegt iſt, als jener für P. Endlich

4) Kann man die Coefficienten $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... für P, nach **gemeiner Recurrenz**, nicht anders als einen nach dem andern, keinen aber außer der Ordnung, durch die gegebenen α, β, γ ... a, b, c ... ausdrücken. Die $q^{-1}\varkappa 1$, $q^{-1}\varkappa 2$, $q^{-1}\varkappa 3$ ... hingegen für pq^{-1}, laſſen ſich, nach **combinatoriſcher Recurrenz**, durch die $1, i^1\mathfrak{J}^r, i^2\mathfrak{J}^r \ldots$ (12; Taf. III) unabhängig von einander darſtellen.

70. Setzt man die involutoriſchen Functionen (69, 4) ſtatt jener Lokalzeichen in (68) ſo erhält man

$$
\begin{aligned}
pq^{-1} = {} & \alpha \\
& + [\alpha j^{1}\mathfrak{J}^{r} + \beta]x^{1} \\
& + [\alpha j^{2}\mathfrak{J}^{r} + \beta i^{1}\mathfrak{J}^{r} + \gamma]x^{2} \\
& + [\alpha j^{3}\mathfrak{J}^{r} + \beta i^{2}\mathfrak{J}^{r} + \gamma i^{1}\mathfrak{J}^{r} + \delta]x^{3}
\end{aligned}
$$

= = = =

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

alles, wie in 13; Taf. III. Für $j^{0}\mathfrak{J}^{r}$, das hier auch in ſeiner Ordnung mit vorkommen könnte, iſt überall ſein Werth 1 geſetzt worden.

71. Die Vergleichung des Ausdrucks für P (68) mit dem für pq^{-1} (70) giebt

$$
\begin{aligned}
P\varkappa 1 &= \alpha & \qquad P\varkappa 4 &= a(\alpha j^{2}\mathfrak{J}^{r} + \beta i^{1}\mathfrak{J}^{r} + \gamma) \\
P\varkappa 2 &= a(\alpha) & &+ b(\alpha j^{1}\mathfrak{J}^{r} + \beta) \\
&+ \beta & &+ c(\alpha) \\
P\varkappa 3 &= a(\alpha j^{1}\mathfrak{J}^{r} + \beta) & &+ \delta \\
&+ b(\alpha) & & \\
&+ \gamma & & \text{u. ſ. w.}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

So ließen ſich alſo auch die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... (in 68) involutoriſch zerlegen und independent darſtellen. Dies nur, um zu zeigen, was man zu dieſer Abſicht für die dortigen $P\varkappa n$ thun könne; denn ſonſt wird man wohl keinen Augenblick anſtehen, die viel kürzere Formel (70) der obigen weitläuftigern Zerlegung der höhern Summen in niedrigere in der Ausübung vorzuziehen.

Setzt man (in 68) $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta =$ etc. $= 0$, alſo $\frac{p}{q} = \frac{1}{q}$, ſo fällt in dem Ausdrucke für P die ganze erſte Verticalreihe (das Glied $\varkappa = 1$ ausgenommen) und in dem Werthe für q^{-1} die ganze zweyte Verticalreihe der Coeſſicienten weg. Im letztern Falle kommt pq^{-1}, das iſt hier,

$$q^{-1} \begin{cases} = q^{-1}\varkappa 1 + q^{-1}\varkappa 2 . x^1 + q^{-1}\varkappa 3 . x^2 + \text{etc.} \\ = \quad 1 \quad + i^1\mathfrak{J}^r x^1 \quad + \quad i^2\mathfrak{J}^r x^2 + \text{etc.} \end{cases}$$

vollkommen, wie in 12; Taf. III.

73. Für die combinatoriſche Anordnung der einzelnen Complexionen von $^n\mathfrak{J}^r$ habe ich bisher durchgängig die Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung (15; Taf. IV) benutzt; man kann aber auch dafür die Boscovich-Hindenburgiſche (16; Taf. IV, und Taf. V. Abh. III) gebrauchen. Davon mit mehrerm bey Gelegenheit der folgenden Abhandlung von Herrn Trembley.

74. Die Benennung Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung rührt von Herrn Prof. Pfaff her, der ſelbige in ſeinen vortreflichen Disquiſitionibus analyticis (p. 300, 6 ſeq.) eingeführt und durchgängig gebraucht hat. Ich habe nehmlich das Moivriſche Geſetz [f]) der Buchſtabenproducte bey den Coefficienten des Polynomialtheorems weiter analyſirt und gezeigt, wie ſolches lexikographiſch ſich anordnen und involutoriſch vereinfachen (14; Taf. IV) auch zu einer Involution der vollkommenſten Art (15; Ebendaſ.) verarbeiten und erheben laſſe; und in dieſer eben ſo einfachen als allgemeinen Geſtalt verherrlicht ſich die LEX NATVRAE, wie ſie de Moivre nennt, durch ihre wunderthätige Kraft am meiſten.

---

f) Eine deutliche Darſtellung des Moivriſchen Geſetzes in der Kürze; Arch. der Math. H. IV. S. 387, 3. Eine weitere Analyſe deſſelben führt auf die involutoriſchen Darſtellungen (14, 15, Taf. IV).

75. Statt Boscowich-Hindenburgiſche, könnte man auch Boscowich-Trembleyiſche Darſtellung ſagen; denn ich werde in der Folge zeigen, daß das Reſultat der Trembleyiſchen Operationen mit dem der Boscovichſchen combinatoriſchen Anordnung Glied für Glied übereinſtimme, und nothwendig damit übereinſtimmen müſſe.

76. Jch habe (Nov. Syſt. Comb. p. LXXXI, 4) gezeigt, wie man auch gebrochene Functionen, wie

$$\frac{p}{q} = \frac{az^{a} + bz^{b} + cz^{c} + \text{etc.}}{\alpha z^{\alpha} + \beta z^{\beta} + \gamma z^{\gamma} + \text{etc.}} = pq^{-1}$$

vermittelſt der $^{n}Az^{*}$, $^{n}Bz^{*}$, $^{n}Cz^{*}$ u. ſ. w. (Ebend. p. XLIV, 18) combinatoriſch darſtellen, und in Reihen entwickeln könne. Jener Quotient läßt ſich nehmlich auf

$$\frac{p}{q} = \frac{a + b + c + d + e + \text{etc.}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.}} = pq^{-1}$$

zurückführen (Ebend. p. LXIV, 6 und Infin. Dign. p. 148 — 150). Jch will mich aber hier dabey nicht aufhalten.

II.

Verſuch eines leichten und bequemen Verfahrens, das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihen zu finden; von Herrn Johann Trembley, ordentl. Mitgliede der Königl. Akad. der Wiſſenſch. zu Berlin.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Gegenwärtige Abhandlung eines ſcharfſinnigen, durch mehrere gründliche Schriften und einzelne akademiſche Abhandlungen rühmlichſt bekannten Analyſten, iſt ein wichtiges Aktenſtück für das Archiv der combinatoriſchen Analyſis. Sie verdient um ſo mehr ſorgfältig darinn aufbewahrt zu werden, da ſie eine höchſt ſeltene Erſcheinung darſtellt; indem aus der Art, wie hier der Gegenſtand behandelt wird, deutlich erhellet, daß der Verfaſſer derſelben zu den wenigen Geometern gehöre, welche den combinatoriſchen Involutionen mehr oder weniger nahe gekommen ſind, ſolche auch wohl, ohne im geringſten etwas davon zu ahnden, ſchon erreicht haben [a]). Auch haben Schriften dieſer Art, neben ihren eigenthümlichen Vorzügen, noch das beſondere Verdienſt, daß ſie recht dazu geeignet ſind, die Vortreflichkeit

---

a) Von dieſem äußerſt merkwürdigen Phänomen habe ich an verſchiedenen Orten ausführlich gehandelt. Die dahin gehörigen Stellen findet man (Erſte Samml. comb. anal. Abh. S. 303, 304) beyſammen angeführt. Die Reihen, die Herr Trembley für das allgemeine Glied findet, geben, wie ich zeigen werde, eine combinatoriſche Anordnung in aller Form.

der combinatoriſch-analytiſchen Methode und ihrer Zeichnung, in das helleſte Licht zu ſetzen, und alle Zweifel, die man wider ſie, theils aus Unkunde theils aus nicht gnüglicher Bekanntſchaft mit ihr, erhoben hat, zu tilgen und gänzlich zu zerſtreuen. Zu vollſtändiger Erreichung dieſer Abſicht habe ich dieſer Abhandlung verſchiedene Erläuterungen, Vergleichungen und Nachweiſungen, theils in Anmerkungen unmittelbar unter dem Text, theils in einem beſondern Aufſatze (III) beygefügt; vornehmlich ſolchen Leſern zugefallen, welchen combinatoriſche Behandlungen, Darſtellungen und Entwickelungen, noch nicht recht geläufig ſind.

Der Hauptzweck, den Herr Profeſſor Trembley in ſeinem Aufſatze über die widerkehrenden Reihen beabſichtiget, iſt eben derſelbe, den Herr Etatsrath Tetens in ſeiner Formula Polynomiorum b) ſich vorgeſetzt hatte: „Auffindung eines allgemeinen Gliedes der Reihe, auf einem leichtern und bequemern Wege, als die vorherbekannten; durch Abwerfung der Feſſeln der Dependenz folgender Glieder von vorhergehenden, welche, wie die Erfahrung lehrt, beſonders bey Reihen mit Buchſtabencoefficienten, ſo läſtig und drückend ſind; mit Vermeidung der gewöhnlichen ſo beſchwerlichen Subſtitutionen und Reductionen, vermittelſt regelmäßiger leicht zu formirender Reihen.“ Auch iſt Herrn Trembley's Verfahren, in dem Sinne, in welchem Herr Tetens das Wort nimmt (E. S. c. a. A. S. 2, 3) völlig und durchaus analytiſch; indem es keine beſonderen, von den bisher üblichen analytiſchen Opera-

---

b) Ich habe ſie, mit vielen erläuternden Anmerkungen verſehen, in die Erſte Sammlung comb. anal. Abhandlungen (S. 1—47) eingerückt Auch iſt ſolche aus dem Däniſchen von Herrn Degen überſetzt, neuerlich wieder abgedruckt worden. (Phyſik. chem. naturhiſt. mathem. Abhandl. aus der neuen Sammlung der Schriften der Königl. Dän. Geſellſch. der Wiſſ. erſt. Band. erſte Abth. (S. 111—152) Kopenh. 1798).

tionen ganz verſchiedenen Arbeiten (dahin Herr Tetens die combinatoriſchen Operationen und Involutionen rechnet) erfordert.

Bey dieſer Uebereinſtimmung in dem Hauptzwecke, unterſcheiden ſich doch beyde Abhandlungen in zwey Stücken ſehr merklich von einander: Einmal, daß nach Herrn Trembley (was bey der Tetenſchen formula polynomiorum nicht geſchieht) zwey weſentlich von einander verſchiedene Elemente, Buchſtabencomplexionen und ihre Verſetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten, ausdrücklich von einander geſchieden, beyder Geſetze und Entwickelungen einzeln beſtimmt, und ſo, durch eine weiter eindringende Analyſe, die Endreſultate, hier leichter als dort, gefunden werden und ſich darſtellen laſſen. — Dann, daß in gegenwärtiger Abhandlung nirgends eine Vergleichung des darinn vorkommenden Verfahrens, mit dem combinatoriſchen angeſtellt, noch viel weniger nachtheilig darüber abgeſprochen wird c). Herr Profeſſor Trembley hat vermuthlich von meiner bereits 1781 bekanntgemachten combinatoriſchen Auflöſung des Problems

---

c) Wie Herr Etatsrath Tetens in ſeinem Aufſatze gethan hat, in welchem (E. S. c. a. A. S. 4) ausdrücklich behauptet wird, die Combinationsmethode ſey bey dem Polynomial- und andern analytiſchen Problemen, wo man ſeine Zuflucht zu ihr genommen habe, ganz entbehrlich. Ein anmaßendes, aus unzulänglicher Bekanntſchaft mit der Sache gefälltes Urtheil! wie ich (E. S. c. a. A. S. 241 u. f.) unwiderſprechlich dargethan habe, und jedem Kenner der combinatoriſchen Methode ohne Schwierigkeit von ſelbſt einleuchtet. Man vergleiche (Arch. der Math. H. VII. S. 348, 349 und H. VIII. S. 495, 509, 510) die Aeuſſerungen dreyer ſcharfſinnigen Analyſten, die meine Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis mit kritiſchen Augen geprüft und mit voller Ueberzeugung ihrer Güte und ihres Nutzens gebilliget haben. Herr Prof. Pfaff hat nachher, durch eigene Darſtellung und Bearbeitung der erſten Gründe dieſes neuen Zweigs der Analyſis, ſelbſt dazu beygetragen, die Kenntniß dieſer Theorie und ihrer Zeichen, der lokalen ſo wie der combinatoriſchen, weiter zu verbreiten. Disquiſitiones analyticae etc. pag. 260 — 333.

(Nov. Syſt. Comb. p. LXXX, 3 et LXXXII, 6) nichts erfahren, hat alſo ſelbige bey ſeiner im Jahre 1783 aufgeſetzten Abhandlung (die Herr Director Bernoulli aus deſſen franzöſiſcher Handſchrift überſetzt mir mitgetheilt hat) auch nicht vor Augen haben und vergleichen können.

Hindenburg.

Es iſt bekännt, daß das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe, die aus der Entwickelung des Bruches $\frac{\alpha}{1 - ax}$ entſtehet $= \alpha a^n x^n$ iſt. Man weiß auch, daß, um das allgemeine Glied einer jeden wiederkehrenden Reihe zu finden, folgendes zu beobachten iſt: „Man „macht den Nenner des Bruches, aus welchem ſie entſtehet „$= 0$; ſucht die Wurzeln dieſer Gleichung; erhebet jede „derſelben zu der Poteſtät n; multiplicirt jede mit einer „ſchicklichen beſtändigen Größe; und addirt alle dieſe Pro„ducte zuſammen“ [d]). Dieſe Methode iſt aber allen mit der Erforſchung der Wurzeln von Gleichungen verbundenen Unbequemlichkeiten unterworfen; und überdies kann die Geſtalt dieſer Wurzeln von der Art ſeyn, daß die Erhöhung derſelben zu der Poteſtät n ſehr beſchwerlich fällt [e]).

d) Dieſelbe Vorſchrift (Eul. Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 225. vergl. mit §. 215) Das analytiſche Verfahren dafür hat de Moivre zuerſt angegeben (Miſcell. anal. L. II. p. 35).
Hindenburg.

e) Dieſe Beſchwerlichkeit lieſſe ſich allenfalls durch die combinatoriſche Methode bey dergleichen Potenzen, wenn auch nicht ganz heben, doch ſehr beträchtlich erleichtern; aber der erſte Umſtand, wegen Auffindung der Wurzeln, macht ein weniger ſchwieriges, keinem ſolchen Anſtoß ausgeſetztes, Verfahren wünſchenswerth. H.

Ich werde hier eine Methode mittheilen, welche zu demſelben Zweck führet, ohne daß nöthig iſt die ſo eben erwähnten Wurzeln oder einfachen Factoren einzeln zu kennen [f]), und welche ſogleich, mittelſt regelmäßiger und leicht zu formirenden Reihen [g]) das geſuchte allgemeine Glied an die Hand giebt.

§. 1. Es ſey der Bruch $\frac{\alpha+\beta x}{1-ax+bx^2}$ gegeben, als der allgemeine urſprüngliche Bruch aller wiederkehrenden Reihen der zweyten Ordnung, das iſt, aller ſolchen, wo ein jegliches Glied mittelſt der zwey vorhergehenden gebildet wird. Es ſeyen m und p die Wurzeln der Gleichung $1-ax+bx^2=0$. Man mache, nach der gewöhnlichen Weiſe, die Brüche zu zergliedern,

$$\frac{\alpha+\beta x}{1-ax+bx^2}=\frac{A}{1-mx}+\frac{B}{1-px}$$

ſo folgt daraus

---

f) Denſelben Zweck hat ſchon Walmesley in ſeiner Maniere nouvelle de trouver le terme général des Séries recurrentes (Mem. de l'Ac. roy. de Berlin, année 1758. p. 271) ſich vorgeſetzt, wo (p. 281) das Problem vorkommt: Trouver le terme général d'une Série recurrente, ſans avoir recours aux facteurs du nominateur de la fraction d'où elle tire ſon origine. Die dort angegebene Auflöſung aber führt zu ſolchen Weitläuftigkeiten, daß ich zweifle, ob irgend ein Analyſt jemals von ihr Gebrauch gemacht und ein Glied der wiederkehrenden Reihe darnach geſucht habe; daher ich auch das Walmsleyiſche Verfahren, unter den verſchiedenen (I, 43-47) erwähnten Verſuchen, nicht mit angeführt habe. H.

g) Sehr wahr! die leichte Formation der Trembleyiſchen Reihen gründet ſich darauf, daß das dafür vorgeſchriebene Verfahren, die Glieder in einer combinatoriſchen Anordnung der leichteſten Art darſtellt. Kein Wunder alſo, wenn Herrn Trembley ſolches das geſuchte allgemeine Glied ſogleich, das heißt hier, zwar nicht frey von aller, doch aber ohne beſchwerliche, Subſtitution giebt. H.

$$A=\frac{\beta+\alpha m}{m-p},\ B=-\frac{(\beta+\alpha p}{m-p}$$

Auch hat man $m+p=a$, und $mp=b$.

Da nun das allgemeine $(n+1)$te Glied von ſolcher Art Reihen $=Am^n+Bp^n$ iſt, wo n eine jegliche Zahl bedeutet, ſo mache ich, um das **erſte Glied** der Reihe zu finden, $n=0$, und daſſelbe wird $=A+B=\frac{\alpha(m-p)}{m-p}=\alpha$.

Das **zweyte Glied** zu finden, ſetze ich $n=1$, und daſſelbe wird $=Am+Bp=\frac{\alpha(m^2-p^2)+\beta(m-p)}{m-p}$
$=\alpha(m+p)+\beta=\alpha a+\beta$.

Das **dritte Glied** zu finden, ſetze ich $n=2$, und daſſelbe wird $=Am^2+Bp^2=\frac{\alpha(m^3-p^3)+\beta(m^2-p^2)}{m-p}$
$=\alpha(m^2+mp+p^2)+\beta(m+p)$
$=\alpha(m+p)^2-mp)+\beta(m+p)=\alpha(a^2-b)+\beta a$.

Das **vierte Glied** zu finden, ſetze ich $n=3$, und daſſelbe wird $=Am^3+Bp^3=\frac{\alpha(m^4-p^4)+\beta(m^3-p^3)}{m-p}$
$=\alpha(m^3+m^2p+mp^2+p^3)+\beta(m^2+mp+p^2)$
$=\alpha((m+p)^3-2(m+p)mp)+\beta((m+p)^2-mp)$
$=\alpha(a^3-2ab)+\beta(a^2-b)$.

Auf gleiche Weiſe wird man finden

Das fünfte Glied $=Am^4+Bp^4$
$=\alpha(a^4-3a^2b+b^2)+\beta(a^3-2ab)$.

Das ſechſte Glied, $=Am^5+Bp^5$
$=\alpha(a^5-4a^3b+3ab^2)+\beta(a^4-3a^2b+b^2)$

Das ſiebente Glied $= Am^6 + Bp^6$

$$= \alpha(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3) + \beta(a^5 - 4a^3b + 3ab^2).$$

Das achte Glied $= Am^7 + Bp^7$

$$= \alpha(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3) + \beta(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3).$$

Das neunte Glied $= Am^8 + Bp^8$

$$= \alpha(a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4)$$
$$+ \beta(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3).$$

Das Geſetz, welches dieſe Glieder befolgen, liegt nun am Tage; man ſiehet klar, daß überhaupt das $(n+1)$te Glied $= Am^n + Bp^n$

$$= [\alpha(a^n - (n-1)a^{n-2}b + \frac{(n-3)(n-2)}{1.2}a^{n-4}b^2$$
$$- \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}a^{n-6}b^3$$
$$+ \frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3.4}a^{n-8}b^4 + \text{etc.}]x^n$$
$$+ [\beta(a^{n-1} - (n-2)a^{n-3}b + \frac{(n-4)(n-3)}{1.2}a^{n-5}b^2$$
$$- \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3}a^{n-7}b^3$$
$$+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2.3.4}a^{n-9}b^4 + \text{etc.}]x^n$$

Dieſe Reihen ſetzt man fort, bis man zu Gliedern gelangt, welche $= 0$ ſind. Man bemerkt ſogleich, daß die zweyte Reihe, welche mit β multiplicirt iſt, dieſelbe als die erſte mit α multiplicirte iſt, wenn man nur $n-1$ anſtatt n ſetzt. Demnach hat man, mit Rückſicht auf dieſe Bemerkung, alles, was ich von der erſten Reihe ſagen werde, auch auf die zweyte anzuwenden[h].

Das Geſetz der Glieder ſelbſt der erſten Reihe, iſt ſehr einfach, wenn man von den Coefficienten abſtrahiret; indem der Exponent von a bey jedem Gliede um 2 abnimmt, und dagegen der von b um 1 zunimmt. Was die numeriſchen Coefficienten anbetrifft, ſo ſind dieſe ſo leicht zu bilden, daß man nicht nöthig hat, dieſelben in der allgemeinen Formel hinzuſchreiben; indem eine einzige Regel zu Formirung derſelben hinreicht. Dieſe Regel iſt, daß, wenn man das Glied $a^{\mu}b^{\nu}$ hat, der Coefficient dieſes Gliedes gleich ſeyn wird, der Anzahl der Permutationen von $\mu+\nu$ Buchſtaben, von denen μ die gleichen, und die übrigen ν auch die gleichen ſind; welches durch die Lehre der Permutationen giebt $\frac{1.2.3 \ldots\ldots \mu+\nu}{1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu}$, das iſt

$$\frac{\mu+1.\mu+2\ldots\mu+\nu}{1.2.3\ldots\nu} = \frac{\nu+1.\nu+2\ldots\mu+\nu}{1.2.3\ldots\mu}$$ [i]

---

[h] Und in der Folge auch auf die dritte, vierte, fünfte ... Reihe, wenn man n-2, n-3, n-4, ... ſtatt n in die erſte ſetzt (§. 3). Die Glieder welche hier den Factor α vor ſich haben, geben die erſte; eben ſo die, welche den Factor β oder den Factor γ vor ſich haben, die zweyte oder die dritte Reihe; u. ſ. w. bey den übrigen Factoren und Reihen. Herrn Trembley's Bemerkung, wie leicht alle folgende Reihen aus der erſten ſich ableiten laſſen, iſt wichtig, und heiſst eigentlich ſoviel: die erſte Reihe involvire alle übrigen. Wie und woher das komme, zeigen die combinatoriſchen Anordnungen und Entwickelungen vorzüglich deutlich. Man vergleiche hiermit, was (I. 58) von der Involution ${}^{n}\mathfrak{J}$ geſagt wird, aus der ſich die ${}^{n-1}\mathfrak{J}$, ${}^{n-2}\mathfrak{J}$ ... oder auch die ${}^{n+1}\mathfrak{J}$, ${}^{n+2}\mathfrak{J}$ ... mit größter Leichtigkeit ableiten und beſtimmen laſſen. Wegen der Trembleyiſchen Involutionen insbeſondere, ſehe man die folgende Abhandlung (III. §. 16). H.

[i] Von der Formel für die Verſetzungszahlen mehrerer, gleicher oder ungleicher, Factoren $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots$ einer Comple-

So iſt z. B. der Coefficient des 4ten Gliedes $a^{n-6}b^3 =$

$$\frac{1.2 \ldots\ldots n-3}{1.2 \ldots n-6 \times 1.2.3} = \frac{n-5.n-4.n-3}{1.2.3} = \frac{4.5 \ldots n-3}{1.2 \ldots n-6}$$

Der Coefficient des 5ten Gliedes $a^{n-8}b^4 =$

$$\frac{1.2 \ldots\ldots n-4}{1.2 \ldots n-8 \times 1.2.3.4} = \frac{n-7.n-6.n-5.n-4}{1.2.3.4}$$

u. ſ. w. welches mit den Gliedern der weiter oben angebrachten Reihe übereinſtimmt, die ich zuerſt aus der Betrachtung hergeleitet hatte, daß die Coefficienten des erſten Gliedes die figurirten Zahlen der erſten Ordnung; die Coefficienten des 2ten Gliedes, die figurirten Zahlen der 2ten Ordnung, und überhaupt die Coefficienten des nten Gliedes die figurirten Zahlen der nten Ordnung ſeyen.

Wir können demnach bey Aufſuchung der allgemeinen Formel die Zahlencoefficienten aus der Acht laſſen k), da ſie allezeit durch die obige Regel für jedes Glied

---

xion, dergleichen auch hier in der Folge (§. 3 u. f.) vorkommen, meine Infinit. Dign. (§. XIII. p. 31. 32). Wie ſich der numeriſche Werth dieſer Formel für beſtimmte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ ſogleich aus der Tafel der figuritten Zahlen (Inf. Dign. p. 162—165) nehmen laſſe (Ebendaſ. p. 34, 35). Eine Tafel, wo bis mit der zehnten Dignität die Verſetzungszahlen neben ihren Factoren ſtehen (Daſ. p. 168, 169). Von den Moivriſchen Unzen für die Buchſtabencomplexionen des Polynomialtheorems (Arch. der Math. H. IV. S. 388). Schon Leibnitz, ſo wie Jac. und Joh. Bernoulli haben die Formel gekannt und gebraucht. Man ſehe die von mir (Infin. Dign. §. XII.) citirten Stellen. H.

k) In zuſammengeſetztern Fällen, wo Producte, nicht blos, wie hier, von a und b, ſondern von a, b, c, d... vorkommen, iſt das noch weit vortheilhafter; daher auch Herr Trembley (§. 3) ausdrücklich erinnert: „wenn man die Verſetzungszahlen „einſtweilen weglaſſe, werde man das Geſetz der Glieder bequem ausdrücken, und die Glieder ſelbſt ohne Mühe finden können.“ Dieſe Abſonderung der Zahlen- oder Polynomialcoefficienten von den Buchſtabenproducten aus a, b, c, d... iſt ſehr wichtig (Arch. der Math. H. IV. 387, 2). Auf ihr beruht hier vornehmlich die große Leichtigkeit der Formirung der erſten und aller übrigen davon abhängenden leicht können gefunden werden; und man bekommt, wenn $A^{(n)} = a^n - a^{n-2}b + a^{n-4}b^2 - a^{n-6}b^3 + a^{n-8}b^4 -$ etc. geſetzt wird, das $(n+1)$te **Glied** der wiederkehrenden Reihe der **zweyten Ordnung** $= (\alpha A^{(n)} + \beta A^{(n-1)})x^n$. 1)

(Note h) Reihen. Herrn **Trembley** ſind hierinn bereits **Jac. Bernoulli, Leibnitz, de Moivre** (Arch. a. a. O. und H. VII. S. 368) vorangegangen; auch ich pflege bey analytiſchen Unterſuchungen, wo dergleichen vorkommen, ſo, und nicht anders, zu verfahren. In meiner Darſtellung des Polynomialtheorems iſt Beydes deutlich von einander abgeſondert und durch beſondre Zeichen angedeutet und ausgedrückt. Daher eben die große Leichtigkeit in der Entwickelung durch ganz ſimple Combinationsverfahren. Herr Etatsrath **Tetens**, der in ſeiner formula Polynomiorum (E. S. c. a. A. S. 1 u. f.) den Schritt, deſſen wichtige Folgen er nicht ganz überſehen hatte, wieder **zurück that**, und Buchſtabencomplexionen nebſt den zugehörigen Verſetzungszahlen, wieder mit einander verbunden darſtellte, verdunkelte dadurch ſeine Formel (Ebend. §. 8. S. 12, 13) und erſchwerte ihren Gebrauch in der Anwendung. Eine Beſtätigung dieſes Ausſpruchs von mehrern Analyſten (Arch. der Math. H. VII. S. 348, 349 und die dortigen Anmerkungen). Das empfielt Herrn **Trembley's** Verfahren von dieſer Seite um ſo mehr, da ihm zu der Zeit, wo er dieſe Abhandlung aufgeſetzt hat, meine combinatoriſch-analytiſche Methode, und die Behandlung ſeines Problems nach ihr, gar nicht bekannt geweſen iſt. H.

1) Meine **combinatoriſch-involutoriſchen** Zeichen ſtatt der **Trembleyiſchen** geſetzt, wäre, für

$$\frac{\alpha + \beta x}{1 - ax - bx^2} = \frac{p}{q}, \text{ das allgemeine } (n+1) \text{ te Glied, oder}$$

$$(pq^{-1})\,7\,(n+1) = \underset{\begin{pmatrix} a\,, & b \\ 1\,, & 2 \end{pmatrix}}{(\alpha j^{n}\mathfrak{J} + \beta j^{n-1}\mathfrak{J})x^n}$$

und ſtatt der Gleichung für $A^{(n)}$ im Texte, käme bey mir

$$\underset{\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J}} = {}^{n}\mathfrak{J} + {}^{n-2}\mathfrak{J}\,b \underset{\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}{+} {}^{n-4}\mathfrak{J}\,b^2 + {}^{n-6}\mathfrak{J}\,b^3 + \text{etc.}$$

Es ſind nämlich die hier und in der Folge vorkommenden Zeichen, nach

Dieſe letztere Form iſt zwar in dem gegenwärtigen Falle, wo $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$ ſo leicht durch a, b ſich ausdrücken laſſen, entbehrlich; ſie wird uns aber in mehr zuſammengeſetzten Fällen nützlich ſeyn.

§. 2. Ein Beyſpiel[m]) von unſerer Formel zu geben, nehme ich (aus **Eulers** Introd. in Anal. inf. T. I. p. 179) die wiederkehrende Reihe

Trembley	$A^{(n)}$	$B^{(n)}$	$C^{(n)}$	$D^{(n)}$	etc.
und meine	$j^{n}\mathfrak{J}$	$j^{n}\mathfrak{J}$	$j^{n}\mathfrak{J}$	$j^{n}\mathfrak{J}$	etc.
	$\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}$	etc.

gleichgeltend, und kann man (nach I. 52) für die ${}^{n}\mathfrak{J}$ die lexikographiſchen, Moivre-Hindenburgiſche (I. 14, 15, Taf. IV; 55—57 und mehrere Beyſpiele 60—65) oder die Boscowich-Hindenburgiſche (Daſ. 16, Taf. IV. und auch Abh. III, Taf. V) Darſtellung gebrauchen.

Gewöhnlich braucht Herr Trembley ſeine $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$ ... für die bloßen Buchſtabencomplexionen ${}^{n}\mathfrak{J}$, ohne die Verſetzungszahlen j; ſollen dieſe beygefügt (die $j^{n}\mathfrak{J}$ ausgedrückt) werden, wie bey Anwendung der allgemeinen Formel auf Beyſpiele nothwendig geſchehen muß, ſo wird ſolches allemal ausdrücklich erinnert. Meine Zeichen weiſen das, ohne alle weitere Erinnerung, jederzeit deutlich nach. Eben ſo auch der Zeiger, wie weit die Buchſtaben a, b, c, d ... bey den Complexionen in Betrachtung zu ziehen ſind. Eine nähere Vergleichung der ungleich leichtern Auflöſung meiner Zeichen, als der Trembleyiſchen, in der folgenden Abhandlung §. 30. am Ende. H.

---

[m]) Um das Trembleyiſche Verfahren für dieſes und alle folgende Beyſpiele vorläufig mit der Boscowichſchen Anordnung unmittelbar vergleichen zu können, habe ich (S. 18. Taf. IV) die Darſtellung für ${}^{9}\mathfrak{J}$ und den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & b, & c \dots i \\ 1, & 2, & 3 \dots 9 \end{pmatrix}$ gegeben, die alle niedrigern Involutionen ${}^{8}\mathfrak{J}$, ${}^{7}\mathfrak{J}$ ... in ſich begreift, und für alle hier vorkommende Beyſpiele hinreicht. Man darf nehmlich nur die Trembleyiſchen Zeichen in die meinigen überſetzen (Note l) und die zugehörigen Com-

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5$$

$$+29z^6+47z^7+\text{etc.}=\frac{1+2z}{1-z-zz}$$

Vergleicht man die Glieder dieſes Urbruchs, mit den Gliedern unſers allgemeinen Bruches, ſo hat man

$$\alpha=1,\ \beta=2;\ a=1,\ b=-1$$

Um nun das 7te Glied zu finden, ſetze man $n+1=7$, demnach $n=6$; und wir haben

$$A^{(6)}=a^6-a^4b+a^2b^2-b^3$$

Kommen itzt die Coefficienten hinzu, ſo iſt

$$A^{(6)}=a^6-5a^4b+6a^2b^2-b^3=1+5+6+1=13$$

$$A^{(5)}=a^5-4a^3b+3ab^2=1+4+3=8$$

Folglich das 7de Glied

$$(13\alpha+8\beta)z^6=(13+16)z^6=29z^6$$

wie es wirklich in obiger Reihe ſteht.

Desgleichen, das 8te Glied zu finden, machen wir $n=7$, und dann iſt

---

plexionen aus ebenangeführter Tafel nehmen. So z. E. um hier $A^{(7)}=\mathrm{j}^{7}\,{}^{\prime\prime}\mathfrak{J}^{r}$ aus ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$ zu nehmen, darf man

$$\binom{a,\ b}{1,\ 2}\qquad\binom{a,\ b\ \ c\ .\ .\ .\ i}{1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ 9}$$

von den dortigen Complexionen, die ſich mit a oder b endigen (aber nicht weiter) und mit zwey oder mehrern a anfangen, zwey a vorn weglaſſen (weil $7=9-2$) und die Verſetzungszahlen beyfügen; das giebt $A^{(7)}=\mathrm{j}^{7}\,{}^{\prime\prime}\mathfrak{J}^{r}=a^7+6a^5b+10a^3b^2+4ab^3$, wie oben im Texte; nur alles poſitiv, wenn der Nenner des Bruchs, wie bey mir $1-ax-bx^2$ (Note l). Wie man jede Involution nach Boscowich unabhängig darſtellen könne (Arch. der Math. H. IV. S. 404, 405 und hier, Abh. III, 11, 12, und Taf. V, VI, am Ende).

$$A^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 = 1 + 6 + 10 + 4 = 21;$$

Demnach, und weil $A^{(7)} = 21$; $A^{(6)} = 13$; iſt das 8te Glied

$$(21\alpha + 13\beta)z^7 = (21 + 26)z^7 = 47z^7$$

vollkommen, wie in obiger Reihe.

Der Vortheil dieſer Methode beſteht zugleich darinn, daß ſie dieſelbe iſt, die Wurzeln mögen gleich oder ungleich ſeyn [n]. Sucht man die Glieder mittelſt des allgemeinen Gliedes, das Euler findet, ſo wird man bemerken, daß die Methode wenigſtens um den ganzen Theil der Arbeit, die man braucht die Wurzeln der Beziehungsſcale zu beſtimmen, weitläufiger wird; und vergleicht man die Generalform, welche aus Eulers Methode (p. 180) entſpringt, und nach unſeren Benennungen dieſe iſt:

$$\left(\frac{\alpha(\sqrt{aa+4ab}+a) + 2\beta}{2\sqrt{aa+4b}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{aa+4b}}{2}\right)^n z^n$$
$$+\left(\frac{\alpha(\sqrt{aa+4b}-a) - 2\beta}{2\sqrt{aa+4b}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{aa+4b}}{2}\right)^n z^n$$

ſo wird man ſie gewiß verwickelter und unbequemer finden.

§. 3. Es ſey der Urbruch $\dfrac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - ax + bx^2 - cx^3}$, aus welchem alle wiederkehrenden Reihen der dritten Ordnung entſtehen; wo nemlich jedes Glied mittelſt der drey vorhergehenden gebildet wird. Es ſeyen m, p, q die Wurzeln der Gleichung $1 - ax + bx^2 - cx^3 = 0$; ſo mache ich nach dem gewöhnlichen Verfahren

---

n) Wie man ſich bey zwey oder mehrern gleichen Wurzeln, nach der gewöhnlichen Vorſchrift zu verhalten habe (Eul. Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 225 vergl. mit §. 218, 45.) H.

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - ax + bx^2 - cx^3} = \frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px} + \frac{C}{1-qx},$$

und erhalte daraus $A = \frac{\gamma + \beta m + \alpha m^2}{(m-p)\ (m-q)}$;

$$B = \frac{-(\gamma + \beta p + \alpha p^2)}{(m-p)(p-q)};\ C = \frac{\gamma + \beta q + \alpha q^2}{(m-q)\ (p-q)}.$$

Auch iſt

$$m + p + q = a;\ mp + mq + pq = b;\ mpq = c.$$

Das allgemeine Glied ſolcher Reihen iſt $Am^n + Bp^n + Cq^n$. Um nun das erſte Glied der Reihe zu erlangen, mache ich $n = 0$, und ſo wird dieſes Glied

$$= A + B + C$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \gamma p + \beta mp + \alpha m^2p + \gamma q + \beta pq \\ + \alpha p^2q + \gamma m + \beta mq + \alpha mq^2 \\ - [\gamma p + \beta pq + \alpha pq^2 + \gamma q + \beta mq] \\ - [\alpha m^2q + \gamma m + \beta mp + \alpha mp^2] \end{array}\right\}}{(m-p)(m-q)(p-q)}$$

$$= \frac{\alpha \left\{\begin{array}{l} m^2p - m^2q - mp^2 \\ + p^2q + mq^2 - pq^2 \end{array}\right\}}{(m-p)\ (m-q)\ (p-q)} = \alpha.$$

Das zweyte Glied zu finden, ſetze ich $n = 1$, und daſſelbe wird

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \alpha[m^3p - m^3q - mp^3 + p^3q + mq^3 - pq^3] \\ + \beta[m^2p - m^2q - mp^2 + p^2q + mq^2 - pq^2] \end{array}\right\}}{(m-p)\ (m-q)\ (p-q)}$$

$$= \alpha(m + p + q) + \beta = \alpha a + \beta$$

Das dritte Glied zu finden, wird n = 2 geſetzt, und es wird

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \alpha[m^4p - m^4q - mp^4 + p^4q + mq^4 - pq^4] \\ +\beta[m^3p - m^3q - mp^3 + p^3q + mq^3 - pq^3] \\ +\gamma[m^2p - m^2q - mp^2 + p^2q + mq^2 - pq^2] \end{array}\right\}}{(m - p)(m - q)(p - q)}$$

$$= \alpha(m^2 + mp + mq + p^2 + pq + q^2) + \beta(m + p + q) + \gamma$$

$$= \alpha[(m + p + q)^2 - (mp + mq + pq)]$$

$$+ \beta(m + p + q) + \gamma = \alpha(a^2 - b) + \beta a + \gamma$$

Das vierte Glied zu finden, ſetze ich n = 3, und daſſelbe wird

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} \alpha[m^5p - m^5q - mp^5 + p^5q + mq^5 - pq^5] \\ +\beta[m^4p - m^4q - mp^4 + p^4q + mq^4 - pq^4] \\ +\gamma[m^3p - m^3q - mp^3 + p^3q + mq^3 - pq^3] \end{array}\right\}}{(m - p)(m - q)(p - q)}$$

$$= \alpha(m^3 + m^2p + mp^2 + p^3 + m^2q + mpq + p^2q + mq^2 + pq^2 + q^3)$$

$$+ \beta(m^2 + mp + mq + p^2 + pq + q^2) + \gamma(m + p + q)$$

$$= \alpha([m + p + q]^3 - 2(m + p + q)(mp + mq + pq) + mpq)$$

$$+ \beta([m + p + q]^2 - (mp + mq + pq]) + \gamma(m + p + q)$$

$$= \alpha(a^3 - 2ab + c) + \beta(a^2 - b) + \gamma a$$

Eben ſo wird man das Vte, VIte, VIIte, VIIIte, IXte Glied finden:

Das Vte Glied $= Am^4 + Bp^4 + Cq^4$

$$= \alpha(a^4 - 3a^2b + b^2 + 2ca) + \beta(a^3 - 2ab + c) + \gamma(a^2 - b)$$

Das VIte Glied $= Am^5 + Bp^5 + Cq^5$

$$= \alpha(a^5 - 4a^3b + 3ab^2 + c(3a^2 - 2b))$$

$$+ \beta(a^4 - 3a^2b + b^2 + 2ca) + \gamma(a^3 - 2ab + c)$$

Das VIIte Glied $= Am^6 + Bp^6 + Cq^6$

$$= \alpha(a^6-5a^4b+6a^2b^2-b^3+c(4a^3-6ab+c))$$
$$+\beta(a^5-4a^3b+3ab^2+c(3a^2-2b))+\gamma(a^4-3a^2b+b^2+2ca)$$

Das VIIIte Glied $= Am^7 + Bp^7 + Cq^7$

$$= \alpha(a^7-6a^5b+10a^3b^2-4ab^3+c(5a^4-12a^2b+3b^2+3ca))$$
$$+\beta(a^6-5a^4b+6a^2b^2-b^3+c(4a^3-6ab+c))$$
$$+\gamma(a^5-4a^3b+3ab+c(3a^2-2b))$$

Das IXte Glied $= Am^8 + Bp^8 + Cq^8$

$$= \alpha(a^8-7a^6b+15a^4b^2-10a^2b^3+b^4+c(6a^5$$
$$-20a^3b+12ab^2+c^2(6a^2-3b))+\beta(a^7-6a^5b$$
$$+10a^3b^2-4ab^3+c(5a^4-12a^2b+3b^2+3c^2a))$$
$$+\gamma(a^6-5a^4b+6a^2b^2-b^3+c(4a^3-6ab+c))$$

u. ſ. w. Anitzt kann man ſchon das Geſetz der Glieder entdecken °), und man wird im Allgemeinen finden

Das (n+1)te Glied $= Am^n + Bp^n + Cq^n$

$$= \alpha\Big(a^n - \frac{(n-1)}{1}a^{n-2}b + \frac{(n-3)(n-2}{1.\,2}a^{n-4}b^2$$
$$- \frac{(n-5)(n-4)(n-3}{1.\,2.\,3}a^{n-6}b^3$$
$$+ \frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4}a^{n-8}b^4 + \text{etc.}\Big)$$

---

o) Der Weg zu dieſer Induction, durch die vorhergehenden weitläuftigen Rechnungen, iſt nicht gering, und doch werden hier nur a, b, c mit einander verbunden. Das läßt auf die Verwickelung aus mehrern Buchſtaben a, b, c, d... ſchließen; wovon auch in der Folge die Zwiſchenrechnungen nicht mit vorgelegt werden konnten, ſondern (wie § 6 ausdrücklich erinnert wird) der Kürze halber wegbleiben mußten. Das empfiehlt um ſo mehr den ſo ſimpeln directen Beweis der ganz allgemeinen Formel für $\underset{(a,b,c,d,e\ldots)}{pq^{-1}}$ in (I. 50). Wie wohlthätig zeigt ſich hier die combinatoriſche Methode! H.

$$+ c[(n-2)a^{n-3} - (n-4)(n-3)a^{n-5}b$$

$$+ \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2}a^{n-7}b^2 - \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2.3}a^{n-9}b^3 + etc]$$

$$+ c^2\Big[\frac{(n-5)(n-4)}{1.2}a^{n-6} - \frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2}a^{n-8}b$$

$$+ \frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)}{1.2.1.2}a^{n-10}b^2$$

$$- \frac{(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)}{1.2.1.2.3}a^{n-12}b^3 \text{ etc.}]$$

$$+ c^3\Big[\frac{[(n-8)(n-7)(n-6)}{1.2.3}a^{n-9} - \frac{(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)}{1.2.3}a^{n-11}b$$

$$+ \frac{(n-12)(n-11)(n-10)(n-9)(n-8}{1.2.3.1.2}a^{n-13}b^2 + \text{ etc.}]$$

$+ c^4$ (etc.) + etc.)

+ β (Die Glieder, die mit β multiplicirt werden müſſen, ſind dieſelben als die vorigen, mit Verwandlung von n in n−1)

+ γ (Die mit γ zu multiplicirenden Glieder ſind dieſelben als die vorigen, wenn man nur n in n−2 verwandelt)[p]

Man ſetzt die Glieder dieſer Reihen, fort bis man zu 0 gelangt.

Das Geſetz der Zahlencoefficienten dieſer Reihen der dritten Ordnung iſt eben dasjenige, welches wir für die Reihen der zweyten Ordnung gefunden haben[q]; wie man

---

[p] Wegen der hier in β und γ zu multiplicirenden Reihen, ſehe man die Note h. H.

[q] Man ſehe §. 1 und die dortige Note i. H.

ſogleich ſehen wird. Wir wollen z. B. das Glied $a^{n-13}b^2c^3$ nehmen, ſo iſt die Anzahl der Permutationen =

$$\frac{1.2.3 \;.\;.\;.\;.\;.\; n-8}{1.2.3.\;.\,n-13\times1.2\times1.2.3} = \frac{n-12.n-11.n-10\;n-9.n-8}{1.2.3\times1.2}, \text{ſo}$$

wie man in unſerer Formel bemerkt; deshalben kann man von den Zahlencoefficienten abſtrahiren, da ſie ſich leicht für jedes Glied beſtimmen laſſen, und wenn dies geſchehen, wird man ohne Mühe das Geſetz der Glieder ſelbſt finden [r]. Dieſes darzuthun, wollen wir wieder den in der vorigen Aufgabe angegebenen Werth von $A^{(n)}$ zur Hand nehmen, und dann haben wir im Allgemeinen,

für das (n+1)te Glied der Reihen der dritten Ordnung

$$\alpha(A^{(n)} + cA^{(n-3)} + c^2A^{(n-6)} + c^3A^{(n-9)} + \text{etc.})$$
$$+\beta(A^{(n-1)} + cA^{(n-4)} + c^2A^{(n-7)} + c^3A^{(n-10)} + \text{etc.})$$
$$+\gamma(A^{(n-2)} + cA^{(n-5)} + c\,A^{(n-\;)} + c^3A^{(n-11)} + \text{etc.})$$

Man ſetzt die Werthe von $A^{(n)}$ fort, bis daß die Exponenten verneinend werden. Nunmehro mache man

$$B^{(n)} = A^{(n)} + A^{(n-3)}c + A^{(n-6)}c^2 + A^{(n-9)}c^3 + \text{etc.}$$

ſo entſtehet
für das (n+1)te Glied der wiederkehrenden Reihen der dritten Ordnung die Formel

$$(\alpha B^{(n)} + \beta B^{(n-1)} + \gamma B^{(n-2)})x^n. \text{[s]}$$

---

r) Man vergleiche die Note k. H.

s) Dieſe Formel, in meinen Zeichen (Note l) ausgedrückt, giebt für $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1-ax-bx^2-cx^3} = \frac{p}{q}$, das (n+1)te Glied, oder

$$(pq^{-1})\,7\,(n+1) = (\alpha\mathfrak{i}^n\mathfrak{J}^r + \beta\mathfrak{i}^{n-1}\mathfrak{J}^r + \gamma\mathfrak{i}^{n-2}\mathfrak{J}^r)\,x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

Eben ſo kommt, ſtatt der Trembleyiſchen Gleichung für $B^{(n)}$, bey mi

Man braucht demnach nur die Glieder $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$ etc. zu formiren, ſodann nach Anleitung dieſer die Glieder $B^{(n)}$, $B^{(n-1)}$, $B^{(n-2)}$, etc, und im Fortſchreiten den Zahlencoefficienten jedes Gliedes, nach der oben gegebenen Regel, zu bilden.

§. 4. Ein Beyſpiel auch von dieſer Formel zu geben, nehme ich in dem angeführten Euleriſchen Werke p. 180, die wiederkehrende Reihe

$$1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6$$

$$+ 4z^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1 - z - zz + z^3}.$$

Vergleicht man den Urbruch mit dem unſrigen, ſo ergiebt ſich $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$. Um nun das 7te Glied zu finden t), mache ich $n + 1 = 7$,

---

$$\underset{\begin{pmatrix}a, b, c\\ 1, 2, 3\end{pmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J}^{r}} = {}^{n}\mathfrak{J}^{r} + \underset{\begin{pmatrix}a\ , & b\\ 1\ , & 2\end{pmatrix}}{{}^{n-3}\mathfrak{J}^{r}c} + {}^{n-6}\mathfrak{J}^{r}c^2 + {}^{n-9}\mathfrak{J}^{r}c^3 + \text{etc.}$$

eine ähnliche Zerlegung der höhern Involutionen und Reihenordnungen in niedrigere, wie die (Arch. H. IV. S. 418, d) welcher ſich Herr Trembley (ähnliche Reductionsformeln kommen bey den folgenden Ordnungen vor) dazu bedient, das Verfahren, durch Anwendung der Formeln der vorhergehenden Ordnungen, für die der folgenden, dadurch zu leiten.

Ich habe die c, c^2, c^3 ... hinter die ${}^{n-3}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{n-6}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{n-9}\mathfrak{J}^{r}$ ... geſetzt, die hier im Texte (§. 3. 4. 5) bald vor bald hinter den Involutionszeichen ſtehen. Das iſt bey Herrn Trembley's Verfahren, der immer die Reductionsformeln im Auge hat, ganz gleichgültig; bey dem combinatoriſchen hingegen, wo die Functionen ${}^{n}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{n-m}\mathfrak{J}^{r}$ ſich eben ſo leicht unabhängig darſtellen laſſen, muß man eins von beyden feſtſetzen. H.

t) Das 7te Glied der Reihe im Texte zu finden, wo $\alpha = 1$; $\beta = \gamma = 0$; iſt nach der Formel (Note s) für $p = 1$ u. $n = 6$

$$(q^{-1})7(6+1) = \underset{\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ 1, & 2, & 3\end{pmatrix}}{j^6\mathfrak{J}^{r}z^6}$$

alſo $n = 6$, und unſere Formel wird

$$\alpha B^{(6)} = B^{(6)} = A^{(6)} + A^{(3)}c + c^2.$$

Da nun

$$A^{(6)} = a^6 - a^4b + a^2b^2 - b^3;\quad A^{(3)} = a^3 - ab,$$

ſo iſt

$$B^{(6)} = a^6 - a^4b + a^2b^2 - b^3 + a^3c - abc + c^2,$$

und, wenn jetzt die Coefficienten hinzugebildet werden,

$$B^{(6)} = a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3 + 4a^3c - 6abc + c^2$$
$$= 1 + 5 + 6 + 1 - 4 - 6 + 1 = 4;$$

welches wirklich das 7te Glied iſt.

§. 5. Ein zweytes Beyſpiel zu geben, nehme ich die wiederkehrende Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 9x^7$$
$$+ 31x^8 + 17x^9 + 63x^{10} + \text{etc.} = \frac{1 + 3x + 3x^2}{1 + x - 2x^2 - 2x^3}$$

Die Vergleichung dieſes Urbruches mit dem unſrigen, giebt

$$\alpha = 1,\ \beta = 3,\ \gamma = 3;\ a = -1,\ b = -2,\ c = 2.$$

Das 10te Glied zu finden, mache ich $n + 1 = 10$, demnach $n = 9$, und die Formel reducirt ſich auf dieſe

---

und $B^{(6)}$ d. i. ${}^{6}\mathfrak{J}^{r}$ oder auch (Note l) $j^{6}\mathfrak{J}^{r} = a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3 + 4a^3c + 6abc + c^2$, wie man (Note m) entweder unabhängig, oder von der Anordnung (I. 16. Taf. IV) dependent, findet, wenn man von den dortigen Complexionen für ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$, die ſich auf a, b oder c endigen (aber nicht weiter) und mit drey oder mehrern a anfangen, drey a vorn wegläßt (weil $6 = 9 - 3$) und die Verſetzungszahlen beyſchreibt. Für $a = 1$; $b = 1$; $c = -1$; kommt $j^{5}\mathfrak{J}^{r} = 1 + 5 + 6 + 1 - 4 - 6 + 1 = 4$, wie im Texte. Eine andere Anordnung für $j^{6}\mathfrak{J}^{r}$ ſteht in (I. 63). Die Trembleyiſche Anordnung kommt mit der Boscowichiſchen überein, deren rein-combinatoriſche Darſtellung (III, 12) ſteht. H.

$$\alpha B^{(\,)} + \beta B^{(8)} + \gamma B^{(7)}$$
$$= B^{(9)} + 3B^{(9)} + 3B^{(7)}$$ [u]).

Nun finde ich $B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)}c + A^{(3)}c^2 + c^3$;
$B^{(8)} = A^{(\,)} + A^{(5)}c + A^{(2)}c^2$; $B^{(7)} = A^{(7)} + A^4c + A^{(1)}c^2$;
$A^{(9)} = a^9 - a^7b + a^5b^2 - a^3c^3 + ab^4$;
$A^6 = a^6 - a^4b + a^2b^2 - b^3$; $A^3 = a^3 - ab$.
Folglich $B^{(9)} = a^9 - a^7b + a^5b^2 - a^3b^3 + ab^4 + a^6c$
$- a^4bc + a^2b^2c - b^3c + a^3c^2 - abc^2 + c^3$
oder (wenn die Coefficienten formirt werden)
$= a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4 + 7a^6c$
$- 30a^4bc + 30a^2b^2c - 4b^3c + 10a^3c^2 - 12abc^2 + c^3$
$= -1 - 16 - 84 - 160 - 80 + 14 + 120 + 240$
$+ 64 - 40 - 96 + 8 = -31.$
Eben ſo bekommen wir $A^{(8)} = a^8 - a^6b + a^4b^2 - a^2b^3 + b^4$;
$A^{(5)} = a^5 - a^3b + ab^2$; $A^{(2)} = a^2 - b$; demnach, und

---

u) In meinen Zeichen (Note l) für $n = 9$; $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $\gamma = 3$; iſt

$$(pq^{-1})7(9+1) = ({}^{i9}\mathfrak{J} + 3\,{}^{i8}\mathfrak{J} + 3\,{}^{i7}\mathfrak{J})x^9$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

Hier kann nun ${}^9\mathfrak{J}$ geradezu aus (I. 16; Taf. IV) genommen werden, wenn man blos die auf a, b und c ſich endenden Complexionen, mit Uebergehung der übrigen, beybehält, wie ſie dort auf einander folgen. Die Beyfügung der Verſetzungszahlen und die Beſtimmung der Zeichen der einzelnen Complexionen, aus $a = -1$; $b = 2$; $c = 2$, giebt alles ſo, wie im Texte für $B^{(9)}$ ſteht. Daraus, wenn man, in den Complexionen die mit a anfangen, ein a wegläßt, findet man die Complexionen für $B^{(8)} = {}^8\mathfrak{J}$, und daraus weiter, auf eben dem Wege (durch abermalige Weglaſſung eines a) die Complexionen für $B^{(7)} = {}^7\mathfrak{J}$ (Note h, m, t, alles, wie im Texte.

H.

wenn ſofort die Coefficienten mitgebildet werden,

$$B^{(8)} = a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4$$
$$+ 6a^5c - 20a^3bc + 12ab^2c + 6a^2c^2 - 3bc^2 = 1 + 14 + 60$$
$$+ 80 + 16 - 12 - 80 - 96 + 24 + 24 = 31.$$

Endlich haben wir auch

$A^{(7)} = a^7 - a^5b + a^3b^2 - ac^3$; $A^{(4)} = a^4 - a^2b + b^2$;
$A^{(\ )} = a$. Demnach $B^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3$
$+ 5a^4c - 12a^2bc + 3b^2c + 3ac^2 = -1 - 12 - 40 - 32 + 10$
$+ 48 + 24 - 12 = -15$.

Das 10te Glied wird daher $= -31 + 3.31 - 3.15$ $= 93 - 76 = 17$, wie es in der That ſeyn ſoll.

§. 6. Man habe $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4}$, welches der Urbruch aller wiederkehrenden Reihen der vierten Ordnung iſt, das heißt, aller derjenigen, wo jedes Glied mittelſt der vier vorhergehenden gebildet wird, ſo findet man, durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren (welches ich aber Kürze halber hier weglaſſe) daß, wenn man für $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$ die obigen Werthe beybehält, und $C^{(n)} = B^{(n)} - B^{(n-4)}d + B^{(n-8)}d^2 - B^{(n-12)}d^3 + B^{(n-16)}d^4$ etc. macht, ſodann im Allgemeinen, das (n+1)te Glied einer wiederkehrenden Reihe der 4ten Ordnung =

$(\alpha C^{(n)} + \beta C^{(n-1)} + \gamma C^{(n-2)} + \delta C^{(n-3)})x^n$ wird. v)

---

v) In meinen Zeichen (Note l) und

für $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4} = \frac{p}{q}$, iſt

$$(pq^{-1})\rceil(n+1) = (\alpha \mathfrak{j}^n \mathfrak{J} + \beta \mathfrak{j}^{n-1} \mathfrak{J} + \gamma \mathfrak{j}^{n-2} \mathfrak{J} + \delta \mathfrak{j}^{n-3} \mathfrak{J})x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}.$$

Dieſes auf ein Beyſpiel [w]) anzuwenden, ſey die Reih

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7$$

$$+ 7x^8 + 8x^9 + \text{etc} = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1-3x+4x^2-3x+x^4},$$

ſo giebt die Vergleichung dieſes Urbruches mit unſrem allg meinen Bruche, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$; $a = 3$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 1$.

Das 10te Glied zu finden, ſetzen wir $n + 1 = 10$, ode $n = 9$, und dieſes Glied wird $= C^{(9)} - 2C^{(8)} + 2C^{(7)}$. Nu haben wir $C^{(9)} = B^{(9)} - B^{(5)}d + B^{(1)}d^2$; $C^{(8)} = B^{(8)} - B^{(4)}d + d^2$; $C^{(7)} = B^{(7)} - B^{(3)}d$.

und ſtatt der Gleichung für $C^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$$ {}^{n}\mathfrak{J}^{r} = {}^{n}\mathfrak{J}^{r} + {}^{n-4}\mathfrak{J}^{r}d + {}^{n-8}\mathfrak{J}^{r}d^2 + {}^{n-12}\mathfrak{J}^{r}d^3 + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix}a, b, c, d\\ 1, 2, 3, 4\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}a, & b, & c,\\ 1, & 2, & 3,\end{pmatrix}$$

Meine Zeichen vor den involutoriſchen Functionen ſind nicht abwechſelnd, wie in Herrn Trembley's Werthe von $C^{(n)}$, weil bey mir in dem Nenner $1 - ax - bx^2 - cx^3 \ldots$ die a, b, c. . keine abwechſelnden Zeichen haben. Warum Herr Trembley den Gliedern der Nenner ſeiner Urbruche abwechſelnde Zeichen gegeben hat; davon die Note zu §. 28 der folgenden Abhandlung. H.

---

w) Dieſes Beyſpiel wird in dem folgenden Aufſatze (III, §. 3) als Muſter des Trembleyiſchen Verfahrens ausführlich betrachtet werden. Hier genügt es anzumerken, daß man, wie im vorhergehenden Exempel (Note u) für $B^{(9)}$ geſchehen, auch hier die Complexionen für $C^{(9)}$ unmittelbar aus ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (I, 16; Taf. IV, nehmlich hier die auf a, b, c und d ſich endenden) nehmen, und daraus weiter $C^{(8)} = {}^{8}\mathfrak{J}^{r}$ und $C^{(7)} = {}^{7}\mathfrak{J}^{r}$, wie im ſo eben angeführten Exempel, aus den mit a anfangenden Complexionen, durch ſucceſſive Weglaſſung von a, ſchaffen und herleiten kann. H.

Man hat aber ferner, wie in der vorigen Aufgabe,

$B^{(9)} = a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4$
$+ 7a^6c - 30a^4bc + 30a^2b^2c - 4b^3c + 10a^3c^2 - 12abc^2 + c^3$,
$B^{(5)} = a^5 - a^3b + ab^2 + a^2c - bc$;

Demnach (mit Bildung der Coefficienten)

$B^{(5)}d = 6a^5d - 20a^3bd + 12ab^2d + 12a^2cd - 6bcd$;
$B^{(1)} = a$, und $B^{(1)}d^2 = 3ad^2$; folglich,
$C^{(9)} = a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4$
$+ 7a^6c - 30a^4bc + 30a^2b^2c - 4b^3c + 10a^3c^2 - 12abc^2$
$+ c^3 - 6a^5d + 20a^3bd - 12ab^2d - 12a^2cd + 6bcd + 3ad^2$
$= 19683 - 69984 + 81648 - 34560 + 3840 + 15309$
$- 29160 + 12960 - 768 + 2430 - 1296 + 27 - 1458$
$+ 2160 - 576 - 324 + 72 + 9 = 12$.

Auch iſt $B^{(8)} = a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4$
$+ 6a^5c - 20a^3bc + 12ab^2c + 6a^2c^2 - 3bc^2$;
$B^{(4)} = a^4 - a^2b + b^2 + ac$; daher
$B^{(4)}d = 5a^4d - 12a^2bd + 3b^2d + 6acd$; demnach
$C^{(8)} = a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4 + 6a^5c - 20a^3bc$
$+ 12ab^2c + 6a^2c^2 - 3bc^2 - 5a^4d + 12a^2bd - 3b^2d - 6acd + d^2$
$= 6561 - 20412 + 19440 - 5760 + 256 + 4374 - 6480$
$+ 1728 + 486 - 108 - 405 + 432 - 48 - 54 + 1 = 11$.

Endlich hat man

$B^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 + 5a^4c - 12a^2bc + 3b^2c + 3ac^2$,
$B^{(3)} = a^3 - ab + c$; daher $B^{(3)}d = 4a^3d - 6abd + 2cd$; demnach
$C^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 + 5a^4c - 12a^2bc + 3b^2c$
$+ 3ac^2 - 4a^3d + 6abd - 2cd$
$= 2187 - 5852 + 4320 - 768 + 1215 - 1296$
$+ 144 + 81 - 108 + 72 - 6 = 9$.

Demnach $C^{(9)} - 2\ C^{(8)} + 2C^{(7)} = 12 - 22 + 18 = 8$; und dies iſt wirklich das 10te Glied.

§. 7. Man habe $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{1-ax+bx^2-cx^3+dx^4-ex^5}$ als den Urbruch aller wiederkehrenden Reihen der fünften Ordnung: man laſſe $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ die oben gefundenen Werthe, und ſetze

$$D^{(n)} = C^{(n)} + C^{(n-5)}e + C^{(n-10)}e^2 + C^{(n-15)}e^3 + \text{etc.},$$

ſo findet man überhaupt das $(n+1)$te Glied einer wiederkehrenden Reihe der fünften Ordnung =

$$(\alpha D^{(n)} + \beta D^{(n-1)} + \gamma D^{(n-2)} + \delta D^{(n-3)} + \varepsilon D^{(n-4)})x^n. \text{ x)}$$

Ein Beyſpiel davon zu berechnen, nehme ich (aus Eulers Introd. in Anal. Inf. p. 188) die Reihe

$$1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7$$
$$+7z^8+8z^9+\text{etc.} = \frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}.$$

---

x) In meinen Zeichen (Note l) iſt, für

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{1-ax-bx^2-cx^3-dx^4-ex^5} = \frac{p}{q},$$

$$(pq^{-1})\,\underline{7}\,(n+1)$$
$$=$$
$$\Big(\alpha \mathfrak{j}^{n}\mathfrak{J} + \beta\mathfrak{j}^{n-1}\mathfrak{J} + \gamma\mathfrak{j}^{n-2}\mathfrak{J} + \delta\mathfrak{j}^{n-3}\mathfrak{J} + \varepsilon\mathfrak{j}^{n-4}\mathfrak{J}\Big)x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}$$

und, ſtatt der Gleichung für $D^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$$\underset{\begin{pmatrix}a,b,c,d,e\\1,2,3,4,5\end{pmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J}} = {}^{n}\mathfrak{J} + {}^{n-5}\mathfrak{J}e + {}^{n-10}\mathfrak{J}e^2 + {}^{n-5}\mathfrak{J}e^3 + \text{etc.}$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

Was das im Text aufgeführte Beyſpiel anbetrifft, ſo gilt hier für die $D^{(9)}$, $D^{(8)}$, $D^{(7)}$, was (Note w) von $C^{(9)}$, $C^{(8)}$, $C^{(7)}$ iſt erinnert worden. Für jene werden alle Complexionen aus (I, 16; Taf. IV) nach der Ordnung aufgeführt, die ſich mit a, b, c, d, e endigen, mit Weglaſſung aller übrigen.

G.

Die Vergleichung dieſes Urbruches mit unſerm allgemeinen, giebt $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\delta=0$, $\varepsilon=0$; $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=-1$, $e=-1$. Das 10te Glied zu finden, wird $n+1=10$, oder $n=9$ geſetzt, und das geſuchte Glied durch $D^{(9)}+D^{(8)}+D^{(7)}$ ausgedrückt. Nun haben wir

$D^{(9)}=C^{(9)}+C^{(4)}e$; $D^{(8)}=C^{(8)}+C^{(3)}e$; $D^{(7)}=C^{(7)}+C^{(2)}e$.

Es iſt aber $C^{(9)}=B^{(9)}-B^{(5)}d+B^{(1)}d^2$; $C^{(4)}=B^{(4)}-d$;

$$B^{(9)}=A^{(9)}=a^9;\ B^{(4)}=A^{(4)}=a^4;$$

folglich $C^{(9)}=a^9-a^5d+ad^2$; $C^{(4)}e=a^4e-de$; und

$D^{(9)}=a^9-6a^5d+3ad^2+5a^4e-2de=1+6+3-5-2=3$.

Zugleichem hat man $C^{(8)}=B^{(8)}-B^{(4)}d+d^2=a^8-a^4d+d^2$;

$$C^{(3)}=B^{(3)}=a^3;\ C^{(3)}e=a^3e;$$ demnach

$D^{(8)}=a^8-5a^4d+d^2+4a^3e=1+5+1-4=3$. Endlich

$C^{(7)}=B^{(7)}-B^{(3)}d=a^7-a^3d$; $C^{(2)}=B^{(2)}=a^2$; daher

$D^{(7)}=a^7-4a^3d+3a^2e=1+4-3=2$. Das 10te Glied wird demnach ſeyn $=D^{(9)}+D^{(8)}+D^{(7)}=3+3+2=8$, wie es auch wirklich iſt.

§. 8. Der Bruch $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\varphi x^5}{1-ax+bx^2-cx^3+dx^4-ex^5+fx^6}$ iſt der Urbruch aller wiederkehrenden Reihen der ſechſten Ordnung. Behält man die vorigen Werthe von $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$ und ſetzt

$$E^{(n)}=D^{(n)}-D^{(n-6)}f+D^{(n-12)}f^2-D^{(n-18)}f^3+\text{etc.}$$

ſo wird das $(n+1)$te Glied einer ſolchen wiederkehrenden Reihe

$$=(\alpha E^{(n)}+\beta E^{(n-1)}+\gamma E^{(n-2)}$$
$$+\delta E^{(n-3)}+\varepsilon E^{(n-4)}+\varphi E^{(n-5)})x^n.$$ y)

---

y) In meinen Zeichen (Note l) iſt, für

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\varphi x^5}{1-ax-bx^2-cx^3-dx^4-ex^5-fx^6}=\frac{p}{q},$$

Ein Beyſpiel zu geben, nehme ich in dem angezeigten Werke von Euler, (p. 186) die Reihe

$$1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 7z^6 + 8z^7$$

$$+ 10z^8 + 12z^9 + \text{etc} = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6}$$

Vergleichen wir dieſen Urbruch mit unſerm allgemeinen, ſo iſt $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varphi = 0$; $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 1$, $e = -1$, $f = -1$.

Das 10te Glied zu finden, wird $n = 9$ geſetzt, und daſſelbe wird $= E^{(9)}$. Allein $E^{(9)} = D^{(9)} — D^{(3)} f$; $D^{(9)} = C^{(9)} + C^{(4)} e$; $D^{(3)} = C^{(3)}$; $C^{(9)} = B^{(9)} — B^{(5)} d + B^{(1)} d^2$; $C^{(4)} = B^{(4)} - d$; $C^{(3)} = B^{(3)}$, $B^{(9)} = A^{(9)}$; $B^{(5)} = A^{(5)}$; $B^{(1)} = A^{(1)}$; $B^{(4)} = A^{(4)}$; $B^{(3)} = A^{(3)}$; daher $C^{(9)} = a^9 — a^7b + a^5b^2 — a^3b^3 + ab^4 — a^5d + a^3bd — ab^2d + ad^2 =$ (mit Zuziehung der Coefficienten) $a^9 — 8a^7b + 21a^5b^2 — 20a^3b^3 + 5ab^4 — 6a^5d + 20a^3bd — 12ab^2d + 3ad^2$.

$$(pq^{-1})7(n+1) = \underset{\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}}{\left\{ \begin{array}{l} \alpha i^{n}\mathfrak{J}' + \beta i^{n-1}\mathfrak{J}' + \gamma i^{n-2}\mathfrak{J}' \\ + \delta i^{n-3}\mathfrak{J}' + \varepsilon i^{n-4}\mathfrak{J}' + \varphi i^{n-5}\mathfrak{J}' \end{array} \right\}} x^{n}$$

und ſtatt der Gleichung für $E^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$$\underset{\begin{pmatrix} a,b,c,d,e,f \\ 1,2,3,4,5,6 \end{pmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J}'} = \underset{\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J}' + {}^{n-6}\mathfrak{J}' f + {}^{n-12}\mathfrak{J}' f^2 + {}^{n-18}\mathfrak{J}' f^3} + \text{etc.}$$

Warum bey mir im letzten Ausdrucke für ${}^{n}\mathfrak{J}'$, nicht wie bey Herrn Trembley für $E^{(n)}$, die Zeichen abwechſeln (Note v). Für das folgende Exempel im Texte können, wegen $n = 9$, die Complexionen für $E^{(9)}$ ſogleich aus (I, 16; Taf. IV) nach der Ordnung genommen werden, die ſich auf a, b, d, e, f endigen, mit Weglaſſung derer, in welchen c (weil hier $c = 0$) oder g, h, i vorkommt.

H.

Eben ſo erhält man $C^{(4)}e = 5a^4e - 12a^2be + 3b^2e - 2de$. Endlich iſt auch $D^{3)}f = 4a^3f - 6abf$. Dieſe Werthe vereinigt, geben

$$E^{(9)} = a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4 - 6a^5d + 20a^3bd$$
$$- 12ab^2d + 3ad^2 + 5a^4e - 12a^2be + 3b^2e - 2de - 4a^3f + 6abf$$
$$= 1 + 8 + 21 + 20 + 5 - 6 - 20 - 12 + 3 - 5 - 12 - 3 + 2 + 4 + 6 = 12$$

wie auch wirklich herauskommen ſollte.

§. 9. Das allgemeine Glied der Reihen von der ſiebenden Ordnung, von welchen der Urbruch

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \varphi x^5 + \chi x^6}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - ex^5 + fx^6 - gx^7}$$

iſt, zu finden, muß man (mit Beybehaltung aller vorigen Benennungen)

$$F^{(n)} = E^{(n)} + E^{(n-7)}g + E^{(n-14)}g^2 + E^{(n-21)}g^3 + \text{etc.}$$

ſetzen, und hat dann im Allgemeinen das (n+1)te Glied einer wiederkehrenden Reihe der ſiebenden Ordnung

$$= (\alpha F^{(n)} + \beta F^{(n-1)} + \gamma F^{(n-2)} + \delta F^{(n-3)}$$
$$+ \varepsilon F^{(n-4)} + \varphi F^{(n-5)} + \chi F^{(n-6)})x^n. \quad z)$$

---

z) Das iſt, in meinen Zeichen (Note I) und wenn

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \varphi x^5 + \chi x^6}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - ex^5 - fx^6 - gx^7} = \frac{p}{q};$$

$$(pq^{-1})\ 7\ (n+1)$$

$$=\!=$$

$$(\alpha j^{n}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r} + \beta j^{n-1}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r} + \gamma j^{n-2}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r} + \delta j^{n-3}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}$$
$$+ \varepsilon j^{n-4}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r} + \varphi j^{n-5}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r} + \chi j^{n-6}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r})x^{n}$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & g \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \end{pmatrix}$$

§. 10. Das Geſetz dieſer Progreſſionen liegt nun am Tage, und man ſiehet klar, daß, wenn man fortfährt nach eben dem Geſetze Quantitäten zu bilden, man das allgemeine Glied einer jeden Reihe haben werde. Es ſey demnach der Urbruch aus welchem ſie entſtehet

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \;.\;.\;.\;.\;.\; + \pi x^{m-1}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 \;.\;.\;.\;.\;.\; \pm px^m}$$

(wo das Zeichen + ſtatt findet wenn m gerade, und das Zeichen — wenn m ungerade iſt); und man formire nun die im nachſtehenden Schema vorgeſtellten Quantitäten,

$$A^{(n)} = a^{(n)} - a^{(n-2)}b + a^{(n-4)}b^2 - a^{(n-6)}b^3 + \text{etc}$$
$$B^{(n)} = A^{(n)} + A^{(n-3)}c + A^{(n-6)}c^2 + A^{(n-9)}c^3 + \text{etc}$$
$$C^{(n)} = B^{(n)} - B^{(n-4)}d + B^{(n-8)}d^2 - B^{(n-12)}d^3 + \text{etc}$$
$$D^{(n)} = C^{(n)} + C^{(n-5)}e + C^{(n-10)}e^2 + C^{(n-15)}e^3 + \text{etc}$$
$$E^{(n)} = D^{(n)} - D^{(n-6)}f + D^{(n-12)}f^2 - D^{(n-18)}f^3 + \text{etc}$$

⁂

$$M^{(n)} = K^{(n)} \pm K^{(n-m)}p + K^{(n-2m)}p^2 \pm K^{(n-3m)}p^3 + \text{etc}$$ [aa])

und ſtatt der Gleichung für $F^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$$\underset{\binom{a,b,c,d,e,f,g}{1,2,3,4,5,6,7}}{{}^{n}\mathfrak{J}} = \underset{\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J} + {}^{n-7}\mathfrak{J}g + {}^{n-14}\mathfrak{J}g^2 + {}^{n-21}\mathfrak{J}g^3 + \text{etc.}} \quad §.$$

aa) Die obigen Reductionsgleichungen für $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$, $E^{(n)}$, $F^{(n)}$, der höhern Ordnungen auf niedrigere, in meinen ${}^{n}\mathfrak{J}$ ausgedrückt, ſind ſchon in den Noten (l, s, v, x, y, z) einzeln vorhanden. Hier fände man noch für die Gleichung der unbeſtimmten Ordnung m

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \;.\;.\;.\;.\; + \overset{m-1}{\alpha}\; x^{m-1}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - ex^5 - \;.\;.\;.\; - \overset{m-1}{a}\; x^m} = \frac{p}{q},$$

Ich nenne hier $K^{(n)}$ die Größen, welche den wiederkehrenden Reihen der Ordnung $m - 1$ entſprechen. Wenn m ungerade iſt, ſind alle Glieder bejahend; iſt m gerade, ſo ſind ſie wechſelsweiſe bejahend und verneinend. Dies habe ich durch die unbeſtimmten doppelten Zeichen bb) des Wer-

das allgemeine (n+1)te Glied, oder

$$(pq^{-1})7(n+1)$$

$$=$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha j^{n}\mathfrak{J} + \beta j^{n-1}\mathfrak{J} + \gamma j^{n-2}\mathfrak{J} + \partial j^{n-3}\mathfrak{J} \\ + \varepsilon j^{n-4}\mathfrak{J} \ldots\ldots + \overset{m-1}{\alpha}\; j^{n-m+1}\mathfrak{J} \end{matrix}\right\} x^{n}$$

$$\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e \ldots\ldots & \overset{m-1}{a} \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots\ldots & m \end{matrix}\right)$$

und der Werth für $M^{(n)}$, die Reductionsgleichung der mten auf die (m — 1)te Ordnung, d. i.

$$^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}\mathfrak{J} + {}^{u-m}\mathfrak{J}\overset{m-1}{a} + {}^{n-2m}\mathfrak{J}(\overset{m-1}{a})^{2} + {}^{n-3m}\mathfrak{J}(\overset{m-1}{a})^{3} + etc$$

$$\left(\begin{matrix} a,b,c,d,e\ldots \overset{m-1}{a} \\ 1,2,3,4,5\ldots m \end{matrix}\right) \qquad \left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e & \ldots & \overset{m-2}{a} \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & \ldots & m-1 \end{matrix}\right) \quad §.$$

Der im folgenden Beyſpiele angenommene Werth für m=7, giebt $\overset{m-1}{\alpha} = \chi$; $\overset{n-1}{a} = g$; daraus folgen $(qq^{-1})7(n+1)$ und $i^{n}\mathfrak{J}$, beyde wie in Note z. Für $m = 10 = n+1$ oder $n=9$, kämen für $^{9}\mathfrak{J}$, auf den Zeiger $\left(\begin{matrix} a, b, c \ldots h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 9, 10 \end{matrix}\right)$ bezogen, nach Herrn Trembley's Verfahren, vermittelſt

---

bb) Wegen meines Nenners $1 - ax - bx^{2} - etc$ wechſeln bey mir in dem Werthe für $^{n}\mathfrak{J}$ die Zeichen nicht ſo, wie für $A^{(n)}$, $C^{(u)}$, $E^{(n)} \ldots M^{(n)}$ oben im Texte, ab (Note y). Das erſpart Aufmerkſamkeit, und ſchafft Bequemlichkeit, weil ſich, wenn es zur Anwendung kommt, alles auf die leichte Regel reducirt: „Die Vorzeichen der einzelnen a, „b, c, d . . . im Zeiger, denen im Nenner q der gegebe„nen gebrochenen Function $\frac{p}{q}$ entgegengeſetzt zu neh„men." (I. 23, 59 und die Exempel 60—64) thes von $M^{(n)}$ angezeigt, welches die den wiederkehrenden Reihen der Ordnung m entſprechende Größe iſt.

Nunmehro hat man überhaupt das $(n+1)$te Glied einer ſolchen Reihe von der $m$ten Ordnung

$$= (\alpha M^{(n)} + \beta M^{(n-1)} + \gamma M^{(n-2)}$$
$$+ \delta M^{(n-3)} \; . \; . \; . \; . \; . \; + \pi M^{(n-m+1)}) x^n$$

Z. B. wenn $m = 7$ geſetzt wird, hat man

$\pi = \chi$, $p = g$, $K^{(n)} = E^{(n)}$; $M^{(n)} = F^{(n)}$; daher

$F^{(n)} = E^{(n)} + E^{(n-7)} g + E^{(n-14)} g^2 + E^{(n-21)} g^3 + E^{(n-28)} g^4 + \text{etc}$

und das $(n+1)$te Glied wird im Allgemeinen

$$= (\alpha F^{(n)} + \beta F^{(n-1)} + \gamma F^{(n-2)}$$
$$+ \delta F^{(n-3)} + \; . \; . \; . \; . \; . \; + \chi F^{(n-6)}) x^n$$

welches eben die weiter oben (§. 9) gefundene Formel iſt. Dieſe einzige allgemeine Formel kann uns demnach dienen alle Particularformeln zu finden, indem man von m bis 1 herabgehet.

§. 11. Das Verfahren, welches ich in dieſer Abhandlung befolgt habe, dünkt mir das einzigeſchickliche zu ſeyn, um einen allgemeinen Ausdruck für das allgemeine Glied einer widerkehrenden Reihe, von welcher Ordnung ſie ſey, zu ſchaffen, nach welchem jedes verlangte Glied eines gegebenen Bruchs ſich leicht finden und darſtellen laſſe [cc].

ſeiner Rednctionsformeln dieſelben Complexionen in derſelben Ordnung und Lage, wie ſie in (I, 16; Taf. IV) ſtehen. H.

[cc] Der Trembleyiſche Ausdruck für das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihen jeder Ordnung iſt in der That ſo kurz und expreſſiv, als möglich; auch befolgen die zugehörigen Reductioasgleichungen ein ſehr einfaches Geſetz, nach welchem man das verlangte Glied durch leichte Subſtitutionen findet. Könnte man dieſe Subſtitutionen, die freylich für etwas hohe Gliedet und Ordnungen ſehr zahlreich ſind, beträcht-

Denn weil die gewöhnliche Methode erfordert, daß man die Wurzeln der Beziehungsſcale finde, ſo liegt am Tage, daß man mittelſt derſelben einen ſolchen allgemeinen Ausdruck nicht finden kann, indem man zu dem Ende die Gleichungen von allen Graden müßte auflöſen können, welches ein in dem dermaligen Zuſtande der Analyſis annoch unauflösbares Problem iſt. dd)

---

lich vermindern, oder wohl gar aufheben: ſo bliebe dabey nichts weiter zu hoffen und zu wünſchen übrig. Was die Combinationslehre durch eine weiter getriebene Analyſe hier vermag, erhellet zum Theil aus (I, 14, 15; Taf. IV und 55, 56 und den dortigen Exempeln 60—64), und wird in der Folge (Abh. III) noch umſtändlicher dargelegt werden. H.

dd) Eine Anwendung ſeiner Methode und Formeln für das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihen, hat Herr Prof. Trembley durch Auflöſung eines Problems aus der Wahrſcheinlichkeitsrechnung gegeben, die im 10den Hefte des Archivs der reinen und angewandten Mathematik (S. 123. u. f.) eingerückt befindlich iſt. H.

III.

Das Trembleyiſche Reductionsverfahren (Abh. II) iſt mit der Boscowichſchen combinatoriſchen Anordnung, in Abſicht auf Inhalt und Folge der Complexionen, vollkommen gleichgültig. Allgemeines Glied der Boscowichſchen Involution und rein-combinatoriſche Darſtellung derſelben. Vergleichung der Moivriſchen und Boscovichſchen Formeln und ihrer Entwickelung; hierbey eine literariſche Merkwürdigkeit; Convergenz und Divergenz der entwickelten Reihen; Entwickelung ſolcher Brüche, die keine veränderliche Größe enthalten; von C. F. Hindenburg.

I.

Bey Vergleichung der Trembleyiſchen und Boscowichſchen Entwickelung der Complexionen muß ich vorausſetzen, daß die dabey vorkommenden Zeichen aus der vorhergehenden Abhandlung und den Anmerkungen bekannt ſeyen.

Herrn Trembley's Subſtitutionsverfahren für das allgemeine Glied bey wiederkehrenden Reihen [a]).

2. Es beruht auf folgendem:

---

a) Ich habe hier vornehmlich auf die Ausdrücke durch die Trembleyiſchen Ordnungszeichen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$... und dieſer Zeichen Verhalten gegen einander, geſehen. Das Weſentliche der ganzen Methode, vom Anfange herein, ha-

I. Die zu entwickelnde gebrochene Function ſey

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - ex^5 + \text{etc}}$$

das allgemeine (n+1)te Glied aller Ordnungen der wiederkehrenden Reihen iſt: für die

erſte $= \alpha\, a^n x^n$

zweyte $= (\alpha A^{(n)} + \beta A^{(n-1)})\, x^n$

dritte $= (\alpha B^{(n)} + \beta B^{(n-1)} + \gamma B^{(n-2)})\, x^n$

vierte $= (\alpha C^{(n)} + \beta C^{(n-1)} + \gamma C^{(n-2)} + \delta C^{(n-3)})\, x^n$

u. ſ. w. für die übrigen Ordnungen.

II. Die $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . . (in I) werden durch folgende Reductionsgleichungen beſtimmt:

$$A^{(n)} = a^{(n)} - a^{(n-2)} b + a^{(n-4)} b^2 - a^{(n-6)} b^3 + \text{etc}$$
$$B^{(n)} = A^{(n)} + A^{(n-3)} c + A^{(n-6)} c^2 + A^{(n-9)} c^3 + \text{etc}$$
$$C^{(n)} = B^{(n)} - B^{(n-4)} d + B^{(n-8)} d^2 - B^{(n-12)} d^3 + \text{etc}$$
$$D^{(n)} = C^{(n)} + C^{(n-5)} e + C^{(n-10)} e^2 + C^{(n-15)} e^3 + \text{etc}$$
$$\text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc}$$

(Abh. II. §. 1, 3, 6, 7, 10). Durch dieſe Formeln laſſen ſich die Reihen höherer Ordnungen auf die der niedrigern bringen, jene durch dieſe ausdrücken.

III. Die Reihe für $A^{(n)}$ (II) iſt durch a und b auf die leichteſte Art gegeben. Daraus werden $B^{(n)}$, und aus beyden $C^{(n)}$ u. ſ. w. durch Beyhülfe von c, d; u. ſ. w. ohne Schwierigkeit abgeleitet. Wegen der Reihen für ſpätere Ordnungen muß man daher die aller frühern und vorhergefundenen (z. B. wegen $D^{(n)}$, die vorherbeſtimmten $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$; Ebend. §. 7) beybehalten und benutzen.

---

be ich unten (28) wo ich es nöthig brauchte, in möglichſter Kürze, aufgeſtellt.

IV. Wenn, nach Vorſchrift dieſer Reihen, zuletzt alles, in den gegebenen einfachen a, b, c, d . . . und ihren Potenzen, ausgedrückt worden iſt, ſo werden den daher entſtandenen einzelnen Complexionen oder Gliedern die zugehörigen numeriſchen Coefficienten oder Verſetzungszahlen (Ebend. §. 1. 3) beygefügt, und die Factoren α, β, γ . . ., gehörig (nach I) vorgeſetzt.

3. Exempel. Dafür will ich Herrn Trembley's Beyſpiel (§. 6 ſeiner Abh.) wählen:

Das 10te Glied der Reihe für $\frac{1-2x+2x^2}{1-3x+4x^2-3x^3+x^4}$ zu finden.

Hier iſt $n+1=10$, alſo $n=9$; $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=2$, $\delta=0$; $a=3$, $b=4$, $c=3$, $d=1$; und der gegebene Bruch führt auf eine Reihe der vierten Ordnung, für welche alſo (2, I)

$$\text{Das 10de Glied} = (C^{(9)}-2C^{(8)}+2C^{(7)})x^9.$$

Die Reihen für C werden dann, nach obigen Reductionsformeln, mittelbar durch B und A ausgedrückt. Am beſten und bequemſten auf die Art, wie nachſtehende Entwürfe zeigen. Es ſind nähmlich

a) für $n=9$ (2, II)

$$\begin{array}{l}
C^{(9)}=B^{(9)}-B^{(5)}d+B^{(1)}d^2\\
\hline
B^{(9)}=A^{(9)}+A^{(6)}c+A^{(3)}c^2+A^{(0)}c^3\\
B^{(5)}=A^{(5)}+A^{(2)}c\\
B^{(1)}=A^{(1)}\\
\hline\hline
A^{(m)}=a^m-a^{m-2}b+a^{m-4}b^2-a^{m-6}b^3+\text{etc}
\end{array}$$

b) Für $n=8$ (2, II)

$$C^{(8)} = B^{(8)} - B^{(4)} d + B^{(0)} d^2$$

$$\begin{aligned} B^{(8)} &= A^{(8)} + A^{(5)} c + A^{(2)} c^2 \\ B^{(4)} &= A^{(4)} + A^{(1)} c \\ B^{(0)} &= A^{(0)} = 1 \end{aligned}$$

$A^{(m)} =$ wie vorher

c) Für $n=7$ (2, II)

$$C^{(7)} = B^{(7)} - B^{(3)} d$$

$$\begin{aligned} B^{(7)} &= A^{(7)} + A^{(4)} c + A^{(1)} c^2 \\ B^{(3)} &= A^{(3)} + A^{(0)} c \end{aligned}$$

$A^{(m)} =$ wie vorher

Setzt man hier überall die a, b, c, d, oder ihre obigen Werthe 3, 4, 3, 1, in die für C entwickelten einzelnen Glieder von A, B, nach vorſtehendem Schema, mit Beyfügung der zugehörigen Verſetzungszahlen, ſo kommt alles wie bey Herrn Trembley a. a. O. Die Sache hat keine Schwierigkeit; ich will mich alſo dabey nicht aufhalten.

4. Eben ſo wäre, für eine Reihe der 5ten Ordnung und $n=9$ (2, II)

$$D^{(9)} = C^{(9)} + C^{(4)} e$$

$$\begin{aligned} C^{(9)} &= B^{(9)} - B^{(5)} d + B^{(1)} d^2 \\ C^{(4)} &= B^{(4)} - B^{(0)} d \end{aligned}$$

$$B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)} c + A^{(3)} c^2 + A^{(0)} c^3$$

$$\begin{array}{l|l} B^{(5)} = A^{(5)} + A^{(2)} c & B^{(1)} = A^{(1)} = a \\ B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)} c & B^{(0)} = A^{(0)} = 1 \end{array}$$

$$A^{(m)} = a^m - a^{m-2} b + a^{m-4} b^2 - \text{etc}$$

Für das Trembleyiſche Exempel (dort §. 7) wo $b = c = 0$, fielen alle Glieder und Reihen weg, in denen b und c als Factoren vorkommen, und ſo wäre, mit Beyfügung der Verſetzungszahlen,

$$D^{(9)} = a^9 - 6a^5d + 3ad^2 + 5a^4e - 2de$$

hier vollkommen ſo, wie dort.

5. Aus der gegebenen Reihe für $A^{(m)}$, ſind die für B, und aus dieſen die für C, und ſo weiter für D, ꝛc. beſtimmt; und ſo legen die Schemata (3, 4) aufs deutlichſte dar, was man zu ſuchen und woraus man es zu finden habe. Auch wird man ohne Schwierigkeit zugeben, daß die dabey vorkommenden Subſtitutionen ſo leicht ſind, als man nur immer erwarten kann. Die Combinationslehre macht gleichwohl alle dieſe Subſtitutionen, die bey höhern Ordnungen und ſpätern Gliedern immer zahlreicher werden, durchaus entbehrlich, und ſo wird das Trembleyiſche Verfahren, durch weitere combinatoriſche Analyſe deſſelben, ganz ſimplificirt.

6. Eine genauere Betrachtung der Entwürfe (3, 4) verglichen mit Note I der vorhergehenden Abhandlung, dient hierbey als Vorbereitung, die Folgendes lehrt:

I. Wenn man die Buchſtaben a, b, c, d . . . zeigermäßig auf 1, 2, 3, 4 . . . bezieht, wie bey combinatoriſchen Verfahren gewöhnlich iſt, ſo ſtellen die Buchſtaben der einzelnen Glieder der Reihen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . . ſämtlich Complexionen dar, die zur Summe n gehören.

II. Enthalten $A^{(n)}$, alle auf a und b,
$B^{(n)}$, alle auf a, b und c,
$C^{(n)}$, alle auf a, b, c und d,
u. ſ. w.

nach der Folge der Buchſtaben, ſich endenden, zur gedachten Summe gehörigen, Complexionen.

III. Werden, unter den überhaupt
in b ſich endenden, auch die in b^2, b^3, b^4...
„ c „ „ „ c^2, c^3, c^4...
„ d „ „ „ d^2, d^3, d^4...

u. ſ. w. ſich endenden, nach der Ordnung ihrer Potenzen, ſo weit die Summenzahl n es verſtattet, mit begriffen ſeyn. Hierdurch ſind alſo die Complexionen nach Summe und Inhalt der einzelnen Elemente beſtimmt.

7. Das führt auf nachſtehende combinatoriſche Verkürzung der Darſtellung für $D^{(9)}$ (4), die hier ſtatt aller übrigen als Beyſpiel dienen mag. In dieſer hat man nicht, D auf C; und C auf B, und B auf A, von oben herab, zerfällt, ſondern alles durch A, von unten heraufgehend, ausgedrückt. Die auf a, b, c, d, e ſich endenden Complexionen ſind zugleich, der Deutlichkeit wegen, durch Querſtriche von einander geſondert. Man findet ſo

$$D^{(9)} = \left\{ \begin{array}{l} A^{(9)} \\ \hline A^{(6)}c;\ A^{(3)}c^2;\ A^{(0)}c^3 \\ \hline A^{(5)}d,\ A^{(2)}cd;\ A^{(1)}d^2 \\ \hline A^{(4)}e,\ A^{(1)}ce,\ A^{(0)}de \end{array} \right.$$

Dieſe Darſtellung von $D^{(9)}$ iſt offenbar viel weniger zuſammengeſetzt und verwickelt, als die durch C, B, A (in 4) ausgedrückte. Auch bezieht ſie ſich nicht (wie jene in 4) auf den Nenner $1 - ax + bx^2 - cx^3 + \text{etc}$ (2, 1) mit abwechſelnden Zeichen, ſondern auf $1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}$ Dadurch wird (und das iſt ein zweyter Vortheil) die an ſich ſchon kürzere Formel, auch von abwechſelnden Zeichen befreyt. Von dieſer Bequemlichkeit und ihren Folgen ſehe man die Note bb) der vorhergehenden Abhandlung und die dort citirten Stellen.

8. Das combinatoriſche Geſetz des in A dargeſtellten Werthes von $D^{(9)}$ (in 7) für den Zeiger $\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{matrix}\right)$ iſt folgendes:

I. Wie $A^{(6)}c$; $A^{(3)}c^2$; $A^{(0)}c^3$ aus $A^{(9)}$ folgt, iſt für ſich klar; und man kann überhaupt $A^{(n)}$, $A^{(n-3)}c$, $A^{(n-5)}c^2$, $A^{(n-9)}c^3$, ... (2, II) als gegeben anſehen.

II. Aus den auf c ſich endenden Verbindungen der zweyten Abtheilung, entſtehen die auf d, d^2, d^3, d^4, ... ſich endenden der dritten, auf folgende Art:

a) Für die auf Ein d ſich endenden Verbindungen, vermindert man in den auf c ſich endenden den Summenexponenten von A um 1 (ſo lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und ſtatt des letzten c ſetzt man nun d. Aus $A^{(6)}c$ wird $A^{(5)}d$; aus $A^{(3)}cc$ wird $A^{(2)}cd$. Hingegen läßt ſich $A^{(0)}ccc$ nicht weiter ſo verändern, da $A^{(-1)}c^2d$ keine Bedeutung hat.

b) Aus denen in d ſich endenden Verbindungen findet man die in dd; aus denen in d^3 die in dddd; u. ſ. w. ſich endenden Verbindungen derſelben (dritten) Abtheilung, wenn man den Summenexponenten von A der zugehörigen vorhergefundenen Verbindungen um 4 (wegen d) vermindert (ſo lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und ſtatt d nun d^2, ſtatt d^2 nun d^3, ſtatt d^3 nun d^4 u. ſ. w. ſetzt. Aus $A^{(5)}d$ folgt $A^{(1)}d^2$; aber $A^{(2)}cd$ darf man nicht in $A^{(-2)}cd^2$ umſetzen. Eben ſo wenig darf man $A^{(1)}d^2$ in $A^{(-3)}d^3$ verändern. Die dritte Abtheilung von $D^{(9)}$ bricht alſo mit $A^{(1)}d^2$ ab, und von Verbindungen, die ſich auf d^3, d^4 ..., endeten, kann hier nichts vorkommen.

II. Eben ſo findet man, aus der dritten Abtheilung die vierte, aus der vierten die fünfte ... aus der (n–1)ten die nte. Aus $A^{(5)}d$ wird $A^{(4)}e$; aus $A^{(2)}cd$ wird $A^{(1)}ce$; aus $A^{(1)}dd$ wird $A^{(0)}de$, wenn man mit d für e eben ſo verfährt, wie vorher (II, a) mit c für d. Auf e^2, e^3, ... ſich endende Verbindungen giebt's hier nicht, weil der Abzug der Zahl 5 (wegen e) auf eine negative Zahl führen, $A^{(4)}e$ z. B. $A^{(-1)}ee$ geben) würde; folglich (II, b) ſich hier nicht anwenden läßt.

9. Die combinatoriſche Verkürzung (7) nach welcher man für jede höhere Ordnung $\mathcal{M}^{(n)}$, alle Zwiſchenordnungen B, C, D, E, u. ſ. w. entbehren, und alles durch A unmittelbar ausdrücken kann, iſt wichtig. Könnte man auch noch dieſe vorläufige Darſtellung in A überſpringen, und $\mathcal{M}^{(n)}$ ſogleich in den einfachen a, b, c, d.... ſelbſt ausdrücken: ſo würde man dadurch ungleich mehr gewinnen. Dies bewirkt unter andern

Boscovich's combinatoriſche Anordnung für Complexionen zu beſtimmten Summen.

10. **Aufgabe.** Die Complexionen einer gegebenen Summe, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen zu finden.

11. Erſte Auflöſung, in Zahlen [b]), als Stellvertretern der Buchſtaben: z. B. die Summe 9 aus den Zahlen

---

b) Die folgende Auflöſung in Zahlen iſt von Boscovich ſelbſt, der die Aufgabe ſo angiebt: Trovare tutte le maniere, nelle quali poſſa un numero dato eſſer formato di parti, che contengano numeri interi. (Arch. d. Math. H. IV. S. 403 u. f.) Ich habe dieſe Auflöſung in Zahlen des Zuſammenhangs wegen hier wiederholt, und die Buchſtabencomplexionen unmittelbar daneben geſetzt. Die letztern ſind nicht etwa aus den Zahlencomplexionen überſetzt, ſondern ſind unab-

1, 2, 3, 4, 5 darzuſtellen; oder, in meinen Zeichen ausgedrückt:

Auflöſung für ${}^{9}\mathfrak{J}$
(1, 2, 3, 4, 5)

$$\left.\begin{array}{r}
111111111 = a^9 \\ \hline
11111112 = a^7b \\
1111122 = a^5b^2 \\
111222 = a^3b^3 \\
12222 = a^1b^4
\end{array}\right\} = A^{(9)} \quad c)$$

$$\left.\begin{array}{r}
111113 = a^6c \\
111123 = a^4bc \\
11223 = a^2b^2c \\
2223 = b^3c
\end{array}\right\} = A^{(6)}c$$

$$\left.\begin{array}{r}
11133 = a^3c^2 \\
1233 = abc^2
\end{array}\right\} = A^{(3)}c^2$$

$$333 = c^3 \;] = A^{(0)}c^3$$

$$\left.\begin{array}{r}
111114 = a^5d \\
11124 = a^3bd \\
1224 = ab^2d
\end{array}\right\} = A^{(5)}d$$

$$\left.\begin{array}{r}
1134 = a^2cd \\
234 = bcd
\end{array}\right\} = A^{(2)}cd$$

$$144 = ad^2 \;] = A^{(1)}d^2$$

---

hängig von jenen gefunden worden, wie die Auflöſung (12) zeigt. Dies rechtfertigt die Benennung Boscowich-Hindenburgiſche (S. 18) Involution.

c) Wegen der hier zugleich mit beygefügten Ausdrücke durch A ſehe man (15). Die daneben ſtehenden Complexionen geben zuſammen das Trembleyiſche D$^{(9)}$, wie aus (7) erhellet.

$$\left.\begin{array}{r} 11115 = a^4e \\ 1125 = a^2be \\ 225 = b^2e \end{array}\right\} = A^{(4)}e$$

$$135 = ace\ ] = A^{(1)}ce$$

$$45 = de\ ] = A^{(0)}de$$

I. Man ſchreibe für die erſte Complexion ſo viel Einheiten (Einſen) in einer Reihe nach einander, als die gegebene Zahl (hier 9) enthält.

II. Darunter ſchreibe man für die zweyte Complexion rechter Hand am Ende, eine 2 mit den übrigen Einheiten zur Linken, und für die folgende zwey 2en mit den übrigen Einheiten, und dann drey 2en u. ſ. w. ſo lange ſich die gegebene Summe auf dieſe Art durch Setzung von 2en und 1ſen hervorbringen und darſtellen läßt.

III. Sind die 2en abgelaufen, ſo ſchreibe man für die folgenden Complexionen rechter Hand am Ende, eine 3 nebſt den übrigen Einheiten zur Linken; dann eine 3 nebſt zwey 2en und den übrigen Einheiten; u. ſ. w. dann zwey 3en und die übrigen Einheiten; und zwey 3en nebſt einer 2 . . . und ſo geht es weiter auf die 4 und 5 (und folgende Zahlen, wenn mehrere gegeben ſind) fort, nach Beſchaffenheit der Summe; ſo, daß man immer bey der Complexion, wo eine Zahl zum erſtenmale rechter Hand am Ende vorkommt (von den niedrigſten Zahlen jedesmal anfangend) erſt lauter Einſen zur Linken als Ergänzung nimmt, dann für die folgenden Complexionen neben dieſer Endzahl eine 2, dann zwey, und ſo mehrere 2en, beyfügt, und, wenn und was noch übrig bleibt, mit Einſen ergänzt; dann weiter eine, und ſo in der Folge mehrere 3en damit verbindet, und ſo ferner andere Zahlen, nur keine Zahl die größer wäre, als die Endzahl der Complexion, die man eben bearbeitet.

Die vorſtehende Darſtellung zeigt die leichte Anwendung der ganz einfachen Regel, nach welcher jede folgende Complexion aus der nächſtvorhergehenden ſich ableiten läßt, ſehr deutlich. Sie bricht mit der Endzahl 5 (der höchſten nehmlich der gegebenen Zahlen) ab, hätte aber eben ſo leicht auch auf die höhern Zahlen 6, 7, 8, 9 weiter erſtreckt werden können. Dieſe will ich in der nächſtfolgenden Auflöſung mitnehmen, und darinn die Buchſtabencomplexionen zugleich ſo aufführen, wie ſie ſich, mit ihren Wiederholungsexponenten verſehen, nach einander beſtimmen laſſen; wodurch die Darſtellung gegen die vorige (11) zugleich an Kürze und Deutlichkeit gewinnt.

12. Zweyte Auflöſung. Für dieſelbe Summe 9, in Buchſtaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In meinen Zeichen:

$$\text{Auflöſung für} \quad {}^{9}\underset{\begin{pmatrix} a, b, c \ldots g, h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 7, 8, 9 \end{pmatrix}}{\mathfrak{J}}$$

Sie befolgt genau das von mir bereits in (8) angegebene combinatoriſche Geſetz, wenn man, was dort von A und den zugehörigen Summenexponenten geſagt wird, hier auf a und den zugehörigen Potenzexponenten anwendet. Auch will ich die Befolgung des Geſetzes hier noch frühzeitiger (vom erſten Gliede a^9 an, das man ſich als $a^8.a$ vorſtellen kann) nachweiſen, ohne weiter etwas als gegeben anzunehmen. Nämlich

I. Als erſte Complexion ſetze man $a^9 = a^8a$, die einzige auf a ſich endende Verbindung oder Complexion.

II. Die auf b, b^2, b^3 … ſich endenden Complexionen findet man ſo:

a) Man vermindert in a^8a den Exponenten von a^8 um 1, und ſchreibt ſtatt des folgenden a nun b. Das giebt a^7b, die einzige auf Ein b ſich endende Verbindung.

b) Das gefundene a^7b giebt weiter, wenn man den Exponenten von a um 2 vermindert, und ſtatt b nun b^2 ſchreibt, a^5b^2; und daraus findet man auf eben die Art (den Exponenten von a^5 wieder um 2 vermindert und dafür ein b mehr geſchrieben) a^3b^3; und daraus weiter a^1b^4.

Das giebt zuſammen a^7b, a^5b^2, a^3b^3, a^1b^4, für die zweyte Abtheilung, aller auf b, b^2, b^3 ... ſich endenden Verbindungen.

III. Durch weitere Anwendung des Verfahrens (in II) und Erſtreckung der Regeln von b auf c (wo, wie vorher b auf die Zahl 2, ſich nun c auf 3, und in der Folge d auf 4, und e auf 5, u. ſ. w. bezieht) findet man alle, auf c, c^2, c^3 ... ſich endenden Verbindungen; und ſo auch alle auf die folgenden Buchſtaben und ihre Potenzen ſich endenden Complexionen der folgenden Abtheilungen.

Die Anwendung der Vorſchriften (a, b in II) erſtreckt ſich blos auf die mit einem oder mehrern a anfangenden Complexionen, alle übrigen, die kein a haben, werden dabey übergangen. Da aber die Verminderung der Exponenten von a, bis auf und mit a^0 ſtatt hat, ſo können dieſe Regeln, ob ſie ſchon auf Verbindungen die kein a enthalten, nicht angewendet werden, gleichwohl dergleichen geben.

13. Die ſämtlichen Complexionen der Auflöſung (12) nach der Ordnung ſind folgende:

IV. Wenn, nach Vorſchrift dieſer Reihen, zuletzt alles, in den gegebenen einfachen a, b, c, d ... und ihren Potenzen, ausgedrückt worden iſt, ſo werden den daher entſtandenen einzelnen Complexionen oder Gliedern die zugehörigen numeriſchen Coefficienten oder Verſetzungszahlen (Ebend. §. 1, 3) beygefügt, und die Factoren $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, gehörig (nach I) vorgeſetzt.

3. Exempel. Dafür will ich Herrn Trembley's Beyſpiel (§. 6 ſeiner Abh.) wählen:

Das 10te Glied der Reihe für $\frac{1-2x+2x^2}{1-3x+4x^2-3x^3+x^4}$ zu finden.

Hier iſt $n+1=10$, alſo $n=9$; $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=2$, $\delta=0$; $a=3$, $b=4$, $c=3$, $d=1$; und der gegebene Bruch führt auf eine Reihe der vierten Ordnung, für welche alſo (2, I)

Das 10de Glied $= (C^{(9)} - 2C^{(8)} + 2C^{(7)})x^9$.

Die Reihen für C werden dann, nach obigen Reductionsformeln, mittelbar durch B und A ausgedrückt. Am beſten und bequemſten auf die Art, wie nachſtehende Entwürfe zeigen. Es ſind nähmlich

a) für $n=9$ (2, II)

$$C^{(9)} = B^{(9)} - B^{(5)}d + B^{(1)}d^2$$

$$B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)}c + A^{(3)}c^2 + A^{(0)}c^3$$

$$B^{(5)} = A^{(5)} + A^{(2)}c$$

$$B^{(1)} = A^{(1)}$$

$$A^{(m)} = a^m - a^{m-2}b + a^{m-4}b^2 - a^{m-6}b^3 + \text{etc}$$

b) Für n=8 (2, II)

$$\begin{array}{l}
C^{(8)} = B^{(8)} - B^{(4)}d + B^{(0)}d^2 \\
\hline
B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)}c + A^{(2)}c^2 \\
B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}c \\
B^{(0)} = A^{(0)} = 1 \\
\hline\hline
A^{(m)} = \text{wie vorher}
\end{array}$$

c) Für n=7 (2, II)

$$\begin{array}{l}
C^{(7)} = B^{(7)} - B^{(3)}d \\
\hline
B^{(7)} = A^{(7)} + A^{(4)}c + A^{(1)}c^2 \\
B^{(3)} = A^{(3)} + A^{(0)}c \\
\hline\hline
A^{(m)} = \text{wie vorher}
\end{array}$$

Setzt man hier überall die a, b, c, d, oder ihre obigen Werthe 3, 4, 3, 1, in die für C entwickelten einzelnen Glieder von A, B, nach vorſtehendem Schema, mit Beyfügung der zugehörigen Verſetzungszahlen, ſo kommt alles wie bey Herrn Trembley a. a. O. Die Sache hat keine Schwierigkeit; ich will mich alſo dabey nicht aufhalten.

4. Eben ſo wäre, für eine Reihe der 5ten Ordnung und n=9 (2, II)

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{D^{(9)} = C^{(9)} + C^{(4)}e} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{C^{(9)} = B^{(9)} - B^{(5)}d + B^{(1)}d^2} \\
\multicolumn{2}{l}{C^{(4)} = B^{(4)} - B^{(0)}d} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)}c + A^{(3)}c^2 + A^{(0)}c^3} \\
B^{(5)} = A^{(5)} + A^{(2)}c & B^{(1)} = A^{(1)} = a \\
B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}c & B^{(0)} = A^{(0)} = 1 \\
\hline\hline
\multicolumn{2}{l}{A^{(m)} = a^m - a^{m-2}b + a^{m-4}b^2 - \text{etc}}
\end{array}$$

Für das Trembleyiſche Exempel (dort §. 7) wo $b = c = 0$, fielen alle Glieder und Reihen weg, in denen b und c als Factoren vorkommen, und ſo wäre, mit Beyfügung der Verſetzungszahlen,

$$D^{(9)} = a^9 - 6a^5d + 3ad^2 + 5a^4e - 2de$$

hier vollkommen ſo, wie dort.

5. Aus der *gegebenen* Reihe für $A^{(m)}$, ſind die für B, und aus dieſen die für C, und ſo weiter für D, ꝛc. beſtimmt; und ſo legen die Schemata (3, 4) aufs deutlichſte dar, *was* man zu ſuchen und *woraus* man es zu finden habe. Auch wird man ohne Schwierigkeit zugeben, daß die dabey vorkommenden Subſtitutionen ſo leicht ſind, als man nur immer erwarten kann. Die Combinationslehre macht gleichwohl alle dieſe Subſtitutionen, die bey höhern Ordnungen und ſpätern Gliedern immer zahlreicher werden, durchaus entbehrlich, und ſo wird das Trembleyiſche Verfahren, durch weitere combinatoriſche Analyſe deſſelben, ganz ſimplificirt.

6. Eine genauere Betrachtung der Entwürfe (3, 4) verglichen mit Note I der vorhergehenden Abhandlung, dient hierbey als Vorbereitung, die Folgendes lehrt:

I. Wenn man die Buchſtaben a, b, c, d . . . *zeigermäßig* auf 1, 2, 3, 4 . . . bezieht, wie bey combinatoriſchen Verfahren gewöhnlich iſt, ſo ſtellen die Buchſtaben der einzelnen Glieder der Reihen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . . ſämtlich Complexionen dar, die zur Summe n gehören.

II. Enthalten $A^{(n)}$, alle auf a und b,
$B^{(n)}$, alle auf a, b und c,
$C^{(n)}$, alle auf a, b, c und d,
u. ſ. w.

nach der Folge der Buchſtaben, ſich endenden, zur gedachten Summe gehörigen, Complexionen.

III. Werden, unter den überhaupt
in b ſich endenden, auch die in $b^2, b^3, b^4\ldots$
= c = = = $c^2, c^3, c^4\ldots$
= d = = = $d^2, d^3, d^4\ldots$

u. ſ. w. ſich endenden, nach der Ordnung ihrer Potenzen, ſo weit die Summenzahl n es verſtattet, mit begriffen ſeyn. Hierdurch ſind alſo die Complexionen nach Summe und Inhalt der einzelnen Elemente beſtimmt.

7. Das führt auf nachſtehende combinatoriſche Verkürzung der Darſtellung für $D^{(9)}$ (4), die hier ſtatt aller übrigen als Beyſpiel dienen mag. In dieſer hat man nicht, D auf C; und C auf B, und B auf A, von oben herab, zerfällt, ſondern alles durch A, von unten heraufgehend, ausgedrückt. Die auf a, b, c, d, e ſich endenden Complexionen ſind zugleich, der Deutlichkeit wegen, durch Querſtriche von einander geſondert. Man findet ſo

$$D^{(9)} = \left\{ \begin{array}{l} A^{(9)} \\ \hline A^{(6)}c;\ A^{(3)}c^2;\ A^{(0)}c^3 \\ \hline A^{(5)}d,\ A^{(2)}cd;\ A^{(1)}d^2 \\ \hline A^{(4)}e,\ A^{(1)}ce,\ A^{(0)}de \end{array} \right.$$

Dieſe Darſtellung von $D^{(9)}$ iſt offenbar viel weniger zuſammengeſetzt und verwickelt, als die durch C, B, A (in 4) ausgedrückte. Auch bezieht ſie ſich nicht (wie jene in 4) auf den Nenner $1 - ax + bx^2 - cx^3 + \text{etc}$ (2, 1) mit abwechſelnden Zeichen, ſondern auf $1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}$ Dadurch wird (und das iſt ein zweyter Vortheil) die an ſich ſchon kürzere Formel, auch von abwechſelnden Zeichen befreyt. Von dieſer Bequemlichkeit und ihren Folgen ſehe man die Note bb) der vorhergehenden Abhandlung und die dort citirten Stellen.

8. Das combinatoriſche Geſetz des in A dargeſtellten Werthes von $D^{(9)}$ (in 7) für den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}$ iſt folgendes:

I. Wie $A^{(6)}c$; $A^{(3)}c^2$; $A^{(0)}c^3$ aus $A^{(9)}$ folgt, iſt für ſich klar; und man kann überhaupt $A^{(n)}$, $A^{(n-3)}c$, $A^{(n-5)}c^2$, $A^{(n-9)}c^3$, ... (2, II) als gegeben anſehen.

II. Aus den auf c ſich endenden Verbindungen der zweyten Abtheilung, entſtehen die auf d, d^2, d^3, d^4, ..., ſich endenden der dritten, auf folgende Art:

a) Für die auf Ein d ſich endenden Verbindungen, vermindert man in den auf c ſich endenden den Summenexponenten von A um 1 (ſo lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und ſtatt des letzten c ſetzt man nun d. Aus $A^{(6)}c$ wird $A^{(5)}d$; aus $A^{(3)}cc$ wird $A^{(2)}cd$. Hingegen läßt ſich $A^{(0)}ccc$ nicht weiter ſo verändern, da $A^{(-1)}c^2d$ keine Bedeutung hat.

b) Aus denen in d ſich endenden Verbindungen findet man die in dd; aus denen in d^3 die in dddd; u. ſ. w. ſich endenden Verbindungen derſelben (dritten) Abtheilung, wenn man den Summenexponenten von A der zugehörigen vorhergefundenen Verbindungen um 4 (wegen d) vermindert (ſo lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und ſtatt d nun d^2, ſtatt d^2 nun d^3, ſtatt d^3 nun d^4 u. ſ. w. ſetzt. Aus $A^{(5)}d$ folgt $A^{(1)}d^2$; aber $A^{(2)}cd$ darf man nicht in $A^{(-2)}cd^2$ umſetzen. Eben ſo wenig darf man $A^{(1)}d^2$ in $A^{(-3)}d^3$ verändern. Die dritte Abtheilung von $D^{(9)}$ bricht alſo mit $A^{(1)}d^2$ ab, und von Verbindungen, die ſich auf d^3, d^4 ..., endeten, kann hier nichts vorkommen.

II. Eben ſo findet man, aus der dritten Abtheilung die vierte, aus der vierten die fünfte . . . aus der $(n-1)$ten die $n$te. Aus $A^{(5)}d$ wird $A^{(4)}e$; aus $A^{(2)}cd$ wird $A^{(1)}ce$; aus $A^{(1)}dd$ wird $A^{(0)}de$, wenn man mit d für e eben ſo verfährt, wie vorher (II, a) mit c für d. Auf e^2, e^3, . . . ſich endende Verbindungen giebt's hier nicht, weil der Abzug der Zahl 5 (wegen e) auf eine negative Zahl führen, $A^{(4)}e$ z. B. $A^{(-1)}ee$ geben) würde; folglich (II, b) ſich hier nicht anwenden läßt.

9. Die combinatoriſche Verkürzung (7) nach welcher man für jede höhere Ordnung $\mathcal{M}^{(n)}$, alle Zwiſchenordnungen B, C, D, E, u. ſ. w. entbehren, und alles durch A unmittelbar ausdrücken kann, iſt wichtig. Könnte man auch noch dieſe vorläufige Darſtellung in A überſpringen, und $\mathcal{M}^{(n)}$ ſogleich in den einfachen a, b, c, d. . . ſelbſt ausdrücken: ſo würde man dadurch ungleich mehr gewinnen. Dies bewirkt unter andern

Boscovich's combinatoriſche Anordnung für Complexionen zu beſtimmten Summen.

10. Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen zu finden.

11. Erſte Auflöſung, in Zahlen [b]), als Stellvertretern der Buchſtaben: z. B. die Summe 9 aus den Zahlen

---

b) Die folgende Auflöſung in Zahlen iſt von Boscovich ſelbſt, der die Aufgabe ſo angiebt: Trovare tutte le maniere, nelle quali poſſa un numero dato eſſer formato di parti, che contengano numeri interi. (Arch. d. Math. H. IV. S. 403 u. f.) Ich habe dieſe Auflöſung in Zahlen des Zuſammenhangs wegen hier wiederholt, und die Buchſtabencomplexionen unmittelbar daneben geſetzt. Die letztern ſind nicht etwa aus den Zahlencomplexionen überſetzt, ſondern ſind unab-

1, 2, 3, 4, 5 darzuſtellen; oder, in meinen Zeichen ausgedrückt:

Auflöſung für ${}^{9}\mathfrak{J}$
(1, 2, 3, 4, 5)

$$\left.\begin{array}{r} 111111111 = a^9 \\ \hline 11111112 = a^7b \\ 1111122 = a^5b^2 \\ 111222 = a^3b^3 \\ 12222 = a^1b^4 \end{array}\right\} = A^{(9)} \quad \text{c)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1111113 = a^6c \\ 111123 = a^4bc \\ 11223 = a^2b^2c \\ 2223 = b^3c \end{array}\right\} = A^{(6)}c$$

$$\left.\begin{array}{r} 11133 = a^3c^2 \\ 1233 = abc^2 \end{array}\right\} = A^{(3)}c^2$$

$$333 = c^3 \;] = A^{(0)}c^3$$

$$\left.\begin{array}{r} 111114 = a^5d \\ 11124 = a^3bd \\ 1224 = ab^2d \end{array}\right\} = A^{(5)}d$$

$$\left.\begin{array}{r} 1134 = a^2cd \\ 234 = bcd \end{array}\right\} = A^{(2)}cd$$

$$144 = ad^2 \;] = A^{(1)}d^2$$

---

hängig von jenen gefunden worden, wie die Auflöſung (12) zeigt. Dies rechtfertigt die Benennung Boscowich-Hindenburgiſche (S. 18) Involution.

c) Wegen der hier zugleich mit beygefügten Ausdrücke durch A ſehe man (15). Die daneben ſtehenden Complexionen geben zuſammen das Trembleyiſche $D^{(9)}$, wie aus (7) erhellet.

$$\left.\begin{array}{r} 11115 = a^4e \\ 1125 = a^2be \\ 225 = b^2e \end{array}\right\} = A^{(4)}e$$

$$\left.135 = ace\right] = A^{(1)}ce$$

$$\left.45 = de\right] = A^{(0)}de$$

I. Man ſchreibe für die *erſte* Complexion ſo viel Einheiten (*Einſen*) in einer Reihe nach einander, als die gegebene Zahl (hier 9) enthält.

II. Darunter ſchreibe man für die *zweyte* Complexion rechter Hand am Ende, eine 2 mit den übrigen Einheiten zur Linken, und für die *folgende* zwey 2en mit den übrigen Einheiten, und dann drey 2en u. ſ. w. ſo lange ſich die gegebene Summe auf dieſe Art durch Setzung von 2en und 1ſen hervorbringen und darſtellen läßt.

III. Sind die 2en abgelaufen, ſo ſchreibe man für die *folgenden* Complexionen rechter Hand am Ende, eine 3 nebſt den übrigen Einheiten zur Linken; dann eine 3 nebſt zwey 2en und den übrigen Einheiten; u. ſ. w. dann zwey 3en und die übrigen Einheiten; und zwey 3en nebſt einer 2 . . . und ſo geht es weiter auf die 4 und 5 (und folgende Zahlen, wenn mehrere gegeben ſind) fort, nach Beſchaffenheit der Summe; ſo, daß man immer bey der Complexion, wo eine Zahl zum *erſtenmale* rechter Hand am Ende vorkommt (von den niedrigſten Zahlen jedesmal anfangend) erſt lauter Einſen zur Linken als Ergänzung nimmt, *dann* für die folgenden Complexionen neben dieſer Endzahl eine 2, *dann* zwey, und ſo mehrere 2en, beyfügt, und, wenn und was noch übrig bleibt, mit Einſen ergänzt; *dann* weiter eine, und ſo in der Folge mehrere 3en damit verbindet, und ſo ferner andere Zahlen, nur keine Zahl die größer wäre, als die *Endzahl* der Complexion, die man eben bearbeitet.

Die vorſtehende Darſtellung zeigt die leichte Anwendung der ganz einfachen Regel, nach welcher jede folgende Complexion aus der *nächſtvorhergehenden* ſich ableiten läßt, ſehr deutlich. Sie bricht mit der Endzahl 5 (der höchſten nehmlich der *gegebenen* Zahlen) ab, hätte aber eben ſo leicht auch auf die höhern Zahlen 6, 7, 8, 9 weiter erſtreckt werden können. Dieſe will ich in der nächſtfolgenden Auflöſung mitnehmen, und darinn die *Buchſtabencomplexionen* zugleich ſo aufführen, wie ſie ſich, mit ihren *Wiederholungsexponenten* verſehen, nach einander beſtimmen laſſen; wodurch die Darſtellung gegen die vorige (11) zugleich an Kürze und Deutlichkeit gewinnt.

12. Zweyte Auflöſung. Für dieſelbe Summe 9, in Buchſtaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre *Lokalwerthe* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In meinen Zeichen:

Auflöſung für $${}^{9}\mathfrak{J}\begin{pmatrix} a, b, c \ldots g, h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 7, 8, 9 \end{pmatrix}$$

Sie befolgt genau das von mir bereits in (8) angegebene combinatoriſche Geſetz, wenn man, was dort von A und den zugehörigen Summenexponenten geſagt wird, hier auf a und den zugehörigen Potenzexponenten anwendet. Auch will ich die Befolgung des Geſetzes hier noch frühzeitiger (vom erſten Gliede a^9 an, das man ſich als $a^8.a$ vorſtellen kann) nachweiſen, ohne weiter etwas als *gegeben* anzunehmen. Nämlich

I. Als *erſte* Complexion ſetze man $a^9 = a^8a$, die einzige auf a ſich endende Verbindung oder Complexion.

II. Die auf b, b^2, b^3 … ſich *endenden* Complexionen findet man ſo:

a) Man vermindert in a^8a den Exponenten von a^8 um 1, und ſchreibt ſtatt des folgenden a nun b. Das giebt a^7b, die einzige auf Ein b ſich endende Verbindung.

b) Das gefundene a^7b giebt weiter, wenn man den Exponenten von a um 2 vermindert, und ſtatt b nun b^2 ſchreibt, a^5b^2; und daraus findet man auf eben die Art (den Exponenten von a^5 wieder um 2 vermindert und dafür ein b mehr geſchrieben) a^3b^3; und daraus weiter a^1b^4.

Das giebt zuſammen a^7b, a^5b^2, a^3b^3, a^1b^4, für die zweyte Abtheilung, aller auf b, b^2, b^3 ... ſich endenden Verbindungen.

III. Durch weitere Anwendung des Verfahrens (in II) und Erſtreckung der Regeln von b auf c (wo, wie vorher b auf die Zahl 2, ſich nun c auf 3, und in der Folge d auf 4, und e auf 5, u. ſ. w. bezieht) findet man alle, auf c, c^2, c^3 ... ſich endenden Verbindungen; und ſo auch alle auf die folgenden Buchſtaben und ihre Potenzen ſich endenden Complexionen der folgenden Abtheilungen.

Die Anwendung der Vorſchriften (a, b in II) erſtreckt ſich blos auf die mit einem oder mehrern a anfangenden Complexionen, alle übrigen, die kein a haben, werden dabey übergangen. Da aber die Verminderung der Exponenten von a, bis auf und mit a^0 ſtatt hat, ſo können dieſe Regeln, ob ſie ſchon auf Verbindungen die kein a enthalten, nicht angewendet werden, gleichwohl dergleichen geben.

13. Die ſämtlichen Complexionen der Auflöſung (12) nach der Ordnung ſind folgende:

$${}^{9}\mathfrak{J}\left(\begin{matrix} a, & b, & c \ldots g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3 \ldots 7, & 8, & 9 \end{matrix}\right)$$

$$a^8 a$$

$$a^7 b;\ a^5 b^2;\ a^3 b^3;\ a^1 b^4$$

$$a^6 c,\ a^4 bc,\ a^2 b^2 c,\ b^3 c;$$

$$a^3 c^2,\ abc^2;$$

$$c^3$$

$$a^5 d,\ a^3 bd,\ ab^2 d,\ a^2 cd,\ bcd;$$

$$ad^2$$

$$a^4 e,\ a^2 be,\ b^2 e,\ ace,\ de$$

$$a^3 f,\ abf,\ cf$$

$$a^2 g,\ bg$$

$$ah$$

$$i$$

14. Eine leichtere Darſtellung durch Ableitung der Complexionen, oder ihrer *Ordnungen*, von einander, läßt ſich nicht gedenken. Sie bedarf keiner Vorbereitung (wie die in 3, 4, 7) ſtellt die Buchſtaben, ſogleich mit ihren Exponenten verſehen, auf, und iſt frey von allen Subſtitutionen complexer Zeichen. Ihre *rein-combinatoriſche* Anordnung beruht ganz auf einer äußerſt leichten Umtauſchung der Buchſtaben und ihrer Potenzen, die nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, ihre Glieder zu ſchreiben. Alles wird gleich ſo und an dem Orte, ohne etwas weiter dabey zu ändern oder zu verrücken, zuſammengeſetzt, *wie* und *wo* man es zum Gebrauch nützlich findet; gleichviel, ob man die einzelnen Complexionen unter oder neben einander oder in welcher andern Lage man ſie ſchreiben will.

Hier habe ich ſie mit Fleiß, etwas weitläuftiger, ſo abgeſetzt, wie man das Geſetz ihrer Ableitung und Abhängigkeit von einander am deutlichſten überſieht. So werde ich mich auch für ähnliche Fälle in der Folge verhalten. Es iſt eine übel angebrachte Sparſamkeit, mit Aufopferung ſolcher Vortheile — periturae parcere chartae. --

15. Die Entwickelung der Complexionen (in 13) enthält die (hier in 5 und S. 84, 85 Note cc) verſprochene Simplification des Trembleyiſchen Subſtitutionsverfahrens (3, 4). Den Uebergang von dieſem auf jene macht die (in 7) aufgeſtellte, und durch A ausgedrückte, combinatoriſche Verkürzung, die aber von der (in 13) noch weit übertroffen wird. Zur unmittelbaren Vergleichung und Nachweiſung, daß die Boscovichſche Darſtellung die Complexionen vollkommen in eben der Ordnung und Folge aufeinander, wie das Trembleyiſche Subſtitutionsverfahren, giebt, habe ich in dem Schema (11) dafür, den Ausdruck durch A den in a, b, c, d, e entwickelten Gliedern, rechter Hand beygefügt. Bey andern Entwickelungen, in der Folge, werde ich ihn (wie auch ſchon hier in (13) geſchehen iſt) als vollkommen entbehrlich, weglaſſen.

Mehrere Darſtellungen verſchiedener Summen, in Zahlen und Buchſtaben, ſind zu unmittelbarem Gebrauche in der Anwendung, am Ende der Abhandlung beſonders (in Tafel V) aufgeſtellt.

16. Bey der Moivriſchen Entwickelung der Involution $^{n}\mathfrak{J}$, iſt (S. 43. §. 58) erinnert und gezeigt worden, wie ſich daraus die Involutionen $^{n-1}\mathfrak{J}$ und $^{n+1}\mathfrak{J}$ und anderer Summen, rück- und vorwärts finden laſſen. Es werden aber die niedrigern Summen aus höhern, bey der Boscovichſchen Darſtellung aus eben denſelben Complexionen (der

Ordnungen a oder a^2 oder a^3 . . .) wie bey der Moivriſchen, abgeleitet, auch kommen Exempel und Nachweiſungen davon in der vorhergehenden Abhandlung (Note h, m, t, u, w) vor. Das Verfahren, die Complexionen niedrigerer Summen aus denen für höhere abzuleiten, hat auch Herr Trembley S.60, 61 §. 1 und die dortige Note h) bemerkt. Es wird alſo nicht überflüſſig ſeyn, auch den entgegengeſetzten Fall zu berühren, und zu zeigen, wie man aus den Complexionen für ${}^{n}\mathfrak{J}$ die für ${}^{n+1}\mathfrak{J}$ finde, zumal da die Boscowichſche Anordnung dafür von der Moivriſchen hier ganz abweichend iſt.

17. Aufgabe. Die Complexionen der Summe n + 1 aus den gegebenen Complexionen der nächſtvorhergehenden Summe n zu finden. [d]

Auflöſung. I. Man ſetze allen einzelnen Complexionen der Summe n den Buchſtaben a vor.

II. Man vertauſche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe n, bey denen die beyden erſten Buchſtaben nicht einerley, ſondern verſchieden ſind) den erſten Buchſtaben ſolcher Complexionen, mit dem nächſtfolgenden ſpätern, und füge ſolchem die übrigen Buchſtaben der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen, die I und II geben, miſche man ſo unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I, die aus II ſetzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nämlich der Complexion zur Summe n erſte beyde Buchſtaben nicht verſchieden ſind) ſo ſetzt man blos die aus I, nud geht gleich zur folgenden Complexion der Summe n fort.

---

[d] Dieſe Aufgabe und ihre Auflöſung in Buchſtabencomplexionen, iſt mit der (im Arch. d. Math. H. IV. S. 405, 406) für die Zahlencomplexionen gleichgültig. Sie ſteht auch (C. S. e. a. A. S. 185).

18. Exempel für n=9; oder, aus den gegebenen Complexionen für $^{9}\mathfrak{J}$ (13) die für $^{10}\mathfrak{J}$ abzuleiten.

Hier iſt (nach 17, 18, aus 13)

$$^{10}\mathfrak{J}\binom{a,\ b,\ c\ \ldots\ldots\ h,\ i,\ k}{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ 8,\ 9,\ 10}$$

$$=$$

$a^9\,a$

$a^8b;\ a^6b^2;\ a^4b^3;\ a^2b^4;\ b^5$

$a^7c,\ a^5bc,\ a^3b^2c,\ ab^3c;$
$a^4c^2,\ a^2bc^2,\ b^2c^2;$
ac^3

$a^6d,\ a^4bd,\ a^2b^2d,\ b^3d,\ a^3cd,\ abcd,\ c^2d;$
$a^2d^2,\ bd^2$

$a^5e,\ a^3be,\ ab^2e,\ a^2ce,\ bce,\ ade;$
e^2

$a^4f,\ a^2bf,\ b^2f,\ acf,\ df$

$a^3g,\ abg,\ cg$

$a^2h,\ bh$

ai

k

alles *rein-combinatoriſch* abgeleitet und dargeſtellt.

Weil hier, um $^{10}\mathfrak{J}$ aus $^{9}\mathfrak{J}$ (13) anzuordnen, allen Complexionen in $^{9}\mathfrak{J}$ (nach Aufl. I) a vorgeſetzt wird, und (Aufl. II) keine mit a anfangenden (zur Ordnung a gehörigen) Complexionen geben kann: ſo rechtfertigt dies zugleich die Vorſchrift (16), nach welcher man, um $^{9}\mathfrak{J}$ aus $^{10}\mathfrak{J}$

(die Complexionen einer niedrigern Summe aus denen der nächſthöhern) zu finden, alle Complexionen der Ordnung a der letztern, um ein a vermindert, die übrigen aber ganz übergeht.

Combinationen zu unbeſtimmten Summen n.

19. Die Darſtellungen (13, 18) führen unmittelbar darauf.

Hierher gehören die beyden Formeln:

$$
{}^{n}\mathfrak{J}\begin{pmatrix} a, b, c \ldots\ldots & a^{m-3}, & a^{m-2}, & a^{m-1} \\ 1, 2, 3 \ldots\ldots & m\text{-}2, & m\text{-}1, & m \end{pmatrix}
$$

$$
=
$$

$$
\begin{matrix} {}^{n-1}\mathfrak{J}a + & {}^{n-2}\mathfrak{J}b + & {}^{n-3}\mathfrak{J}c + & {}^{n-4}\mathfrak{J}d + \text{etc} \\ (a) & (a, b) & (a, b, c) & (a, b, c, d) \ldots \end{matrix}
$$

$$
=
$$

$$
\begin{matrix} {}^{n}\mathfrak{J} & + {}^{n-2}\mathfrak{J}b & + {}^{n-4}\mathfrak{J}b^2 & + {}^{n-6}\mathfrak{J}b^3 & + \text{etc } (a) \\ & + {}^{n-3}\mathfrak{J}c & + {}^{n-6}\mathfrak{J}c^2 & + {}^{n-9}\mathfrak{J}c^3 & + \text{etc } (a, b) \\ & + {}^{n-4}\mathfrak{J}d & + {}^{n-8}\mathfrak{J}d^2 & + {}^{n-12}\mathfrak{J}d^3 & + \text{etc } (a, b, c) \\ \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} \end{matrix}
$$
[*]

die weitere Fortſetzung hat keine Schwierigkeit und findet ſich in Tafel VI am Ende dieſer Abhandlung.

20. Zu bemerken:

---

[*] Raum zu erſparen, ſind hier die (a); (a, b); (a, b, c) . . . neben den combinatoriſchen Gliedern, nicht wie ſonſt gewöhnlich darunter, geſetzt, auch den Buchſtaben a, b, c . . . nicht ihre Lokalwerthe beygefügt worden; welches um ſo füglicher geſchehen konnte, da ſie oben unter ${}^{n}\mathfrak{J}$ im Zeiger beyſammen ſtehen.

I. Die erſte Formel gründet ſich darauf, daß nach der Boscovichſchen Anordnung, die auf einerley Buchſtaben ſich endenden Complexionen durchgängig beyſammen ſtehen, und nach der Ordnung der Buchſtaben a, b, c, d . . . auf einander folgen (11, 13, 18); die zweyte Formel unterſcheidet hierbey noch die Potenzen b, b^2, b^3 . . .; c, c^2, c^3 . . . u. ſ. w. der Endbuchſtaben (Ebendaſ. und 6, III). Durch ſie werden die einzelnen Glieder der erſten weiter zerlegt.

Die Aehnlichkeit dieſer zweyten Formel mit den Trembleyiſchen Reductionsformeln (2, II) fällt in die Augen; nur werden hier, ſtatt jener complexen von einander abhängigen Zeichen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . ., die ſimpeln, unabhängigen, combinatoriſch leicht auszuführenden ${}^{n}\mathfrak{J}$, ${}^{n-2}\mathfrak{J}$, ${}^{n-3}\mathfrak{J}$ u. ſ. w. gebraucht. Die Reduction der Trembleyiſchen Gleichungen (2, II) auf die hieſigen combinatoriſchen Formeln, erhellt aus Note l der vorhergehenden Abhandlung. Man vergleiche ferner Note s, v, x, y, z, aa, die mehrere Beyſpiele enthalten.

II. In der erſten Formel ſind die Buchſtaben a, b, c . . . unter die involutoriſchen Zeichen zeigermäßig untergeſetzt; in der zweyten am Ende jeder Reihe beygefügt. Jene gehören zu dem Gliede, unter welchem; dieſe, zu der Reihe, neben welcher, ſie ſtehen.

III. Das mte Glied der erſten Formel, iſt

$$ {}^{n-m}\mathfrak{J}^{m-1}_{a} \left(a,\ b,\ c\ .\ .\ .\ \overset{m-2}{a},\ \overset{m-1}{a} \right) $$

Die (m−1)te Horizontalreihe der zweyten Formel, iſt

$$\underset{\left(a,\ b,\ c\ \ldots,\ \overset{m-3}{a},\ \overset{m-2}{a}\right)}{{}^{n-m}\mathfrak{J}\overset{m-1}{a} + {}^{n-2m}\mathfrak{J}\left[\overset{m-1}{a}\right]^2 + {}^{n-3m}\mathfrak{J}\left[\overset{m-1}{a}\right]^3 \ldots + {}^{n-rm}\mathfrak{J}\left[\overset{m-1}{a}\right]^r}$$

IV. In der Anwendung, wofür die Darſtellungen (13, 18) als Beyſpiele (für $n=9$; $n=10$) dienen können, fallen viele von den in der allgemeinen (zweyten) Formel aufgeführten Potenzen der Endbuchſtaben weg, in ſofern ſelbige durch die Größe der Summenzahl n beſchränkt und ausgeſchloſſen wrrden (6, III). So kommen (für $n=9$, in 13) keine Endpotenzen b^5, c^4, d^3, und noch viel weniger höhere vor; eben ſo fallen bey den Buchſtaben e, f, g, h, i, alle Potenzen, außer der erſten, ganz weg.

V. Auch die zeigermäßig unter und neben den involutoriſchen Zeichen geſchriebenen Buchſtaben a, b, c ... (II) kommen in der Anwendung bey beyden Formeln nicht immer alle vor. Auf den Fall nämlich, wenn der Summenexponent $n-m$ oder $n-rm$ *kleiner* iſt, als die im Zeiger angegebene Menge der Buchſtaben, werden *nur ſo viel* Buchſtaben a, b, c ... gebraucht, als der kleinere Summenexponent Einheiten hat.

Das in IV und V) Geſagte iſt blos nachrichtlich hier beygebracht, und ſoll keinesweges dem Gedächtniſſe zur Laſt fallen. Denn wenn es zur wirklichen Anwendung kommt, ergiebt ſich das alles von ſelbſt, ohne Schwierigkeit. So z. B. iſt

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix} a,\ b,\ \ldots\ i,\ k \\ 1,2,\ldots 9,10 \end{smallmatrix}\right)}{{}^{10}\mathfrak{J}} = \underset{(a)}{{}^{9}\mathfrak{J}a} + \underset{(a,b)}{{}^{8}\mathfrak{J}b} + \underset{(a,b,c)}{{}^{7}\mathfrak{J}c} + \underset{(a,b,c,d)}{{}^{6}\mathfrak{J}d} + \underset{(a,b,c,d,e)}{{}^{5}\mathfrak{J}e}$$

$$+ \underset{(a,b,c,d)}{{}^{4}\mathfrak{J}f} + \underset{(a,b,c)}{{}^{3}\mathfrak{J}g} + \underset{(a,b)}{{}^{2}\mathfrak{J}h} + \underset{(a)}{{}^{1}\mathfrak{J}i} + \underset{(1)}{{}^{0}\mathfrak{J}k}$$

Es können nehmlich im Zeiger keine Buchſtaben vorkommen, deren Lokalwerthe größer wären, als der oben linker Hand ſtehende Summenexponent von $\mathfrak{J}'$.

VI. Die Formeln (19) geben jede Abtheilung der auf beſtimmte Buchſtaben ſich endenden Complexionen, von allen übrigen unabhängig.

21. Aufgabe und Exempel. Die Complexionen der Endordnung d von $^{12}\mathfrak{J}'$ für den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ anzugeben.

Aufl. Für den Lokalwerth 4 von d iſt, nach der erſten Formel (19), $^{12-4}\mathfrak{J}'d$, oder

$$\underset{(a,b,c,d)}{^{8}\mathfrak{J}'d} = \begin{Bmatrix} a^8, & a^6b, & a^4b^2, & a^2b^3, & b^4 \\ a^5c, & a^3bc, & ab^2c. & a^2c^2, & bc^2 \\ a^4d, & a^2bd, & b^2d, & acd, & d^2 \end{Bmatrix} d$$

Die andere Formel gäbe eben das ſo:

$$^{8}\mathfrak{J}'d + {}^{4}\mathfrak{J}'d^2 + {}^{0}\mathfrak{J}'d^3 \ (a,\ b,\ c)$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} a^8, & a^6b, & a^4b^2, & a^2b^3, & b^4 \\ a^5c, & a^3bc, & ab^2c, & a^2c^2, & bc^2 \end{pmatrix} d$$

$$(a^4,\ a^2b,\ b^2,\ ac)\ d^2,\ 1.d^3$$

Die Complexionen für $^{8}\mathfrak{J}'$, $^{4}\mathfrak{J}'$ kann man entweder (nach 11 oder 12) unmittelbar conſtruiren, oder vermittelſt (13) nach (16) herſtellen, oder endlich aus Tafel V, hier am Ende, abſchreiben.

22. Die Boscovichſche Darſtellung giebt die Complexionen in rückwärts-lexikographiſcher Ord-

nung [f]). Man könnte aber auch die ${}^{n-m}\mathfrak{J}'$ z. B. die ${}^{8}\mathfrak{J}'$ und ${}^{4}\mathfrak{J}'$ (in 21) nach de Moivre (S. 41-43) entwickeln, und den einzelnen Complexionen den Endfactor d, oder die d, d^2, d^3 zuletzt beyfügen. Dadurch würde die ganze Abtheilung der in d ſich endenden Complexionen in direct lexikographiſcher Ordnung erſcheinen.

Vergleichung der Moivriſchen involutoriſchen Anordnung mit der Boscovichſchen.

23. Etwas darüber findet ſich bereits (Arch. der Math. H. IV, S. 409, 410). Hier kann man nun aus Vergleichung von Taf. III, IV, V, VI und den zugehörigen Erläuterungen im Texte, die Sache noch genauer überſehen:

a) Die Regeln für beyde Verfahren, die Complexionen für beſtimmte Summen zu finden, ſind unſtreitig gleich leicht. Ihre Complexionen ſind beyderſeits lexikographiſch, vorwärts die einen, rückwärts die andern, nach Anfangs- und Endbuchſtaben, und ihren Potenzen, geordnet.

b) Die Boscovichſche Vorſchrift (hier 11) iſt gleichwohl nicht rein-combinatoriſch, wie die Moivriſche (E. S. c. a. A. S. 184, 43). Beyde Darſtellungen ſtehen (Ebend. S. 183) neben einander.

---

[f] Nach der gewöhnlichen (Arch. d. Math. H. IV. S. 404, a, b) auch hier (in 11 und anderwärts) durchgängig beobachteten Anordnung. In der Folge hat Boscovich ſelbſt die größern Zahlen vorangeſtellt, und dadurch die rückwärts-lexikographiſche Folge der Complexionen in eine direct-lexikographiſche verwandelt (Arch. a. a. O. S. 421; Exempel davon, Ebend. S. 409, 410). Die Involution (S. 409) zeigt zugleich, wie man jede Complexion aus der nächſtvorhergehenden ableiten könne, wenn man die äußerſte höchſte Zahl als abgeſondert betrachtet, und mit den übrigen nach Boscovichs Regel (11) verfährt.

c) Es läßt ſich zwar, wie ich (in 12) gezeigt habe, die Boscovichſche Folge der Complexionen auch rein-combinatoriſch anordnen. Aber die Darſtellung ſelbſt iſt doch von der Beſchaffenheit, daß ſich aus ihr, nicht ſo unmittelbar wie aus der Moivriſchen, die Involutionen niedrigerer Summen durch bloße Winkel abſondern und ausſchneiden, ſo, wie die der höhern Summen durch bloßes Anſetzen des Ermangelnden an die niedrigern, hervorbringen laſſen. Im letztern Falle muß man, bey Befolgung der Vorſchrift (17) die höhere Summe nothwendig beſonders abſetzen.

d) Eben ſo iſt auch die Handhabung der Formeln (19) für die unbeſtimmte Summe n nach Boscovichs Anordnung, nicht ſo einfach und geſchmeidig, wie die der Moivriſchen (E. S. c. a. A. S. 202 und hier Abh. I. S. 17. Taf. IV, 15).

e) Eine Folge (aus c und d) iſt: Die Boscovichſche Darſtellung iſt, in Abſicht auf höhere und niedrigere Summen, nicht in ſo hohem Grade involutoriſch, als die Moivriſche.

f) Die lexikographiſchen Complexionen nach de Moivre laſſen ſich ſogleich, nach meiner Anordnung, in Claſſen zuſammenfaſſen, und ſo eine Involution in die andere umformen (E. S. c. a. A. S. 195, 60). Nicht ſo die Complexionen nach Boscovich 8).

---

8) Eine ähnliche Umformung meiner Claſſeninvolution in die Boscovichſche Anordnung und umgekehrt, hatte ich (a. a. O. und Arch. d. Math. H. IV. S. 408) angegeben. Dagegen hat Herr Prof. Pfaff (Disquiſ. anal. p. 296) drey Inſtanzen aufgeſtellt. Es hätten nehmlich in jenen beyden Stellen nicht meine Claſſen (deren Complexionen wie Zahlen wachſen) ſondern die Boscovichſchen (die nach fallenden Endzahlen fortgehen) genannt werden ſollen. An dieſen Unterſchied, den ich doch (Arch. S. 411; 34) ausdrücklich nachgewieſen, ſelbſt (in der dortigen Note) eines der drey Beyſpiele angeführt habe, die Herr Prof. Pfaff gegen mich gebraucht, hatte ich dort nicht gedacht! Zum Ueberfluß will ich noch die von mir (E. S. c. a. S. 264) aufgeſtellten Anordnungen α, β, γ aufführen, wo meine Claſſendarſtellung α, und die Boscovichſche β, nebſt der rückwärts umgekehrten γ von letzterer, zur

g) Die Boscowichſche Darſtellung dagegen involvirt die Complexionen für die ſucceſſive wachſenden Zeiger: a; und a, b; und a, b, c; und a, b, c, d; u. ſ. w. aufs vollkommenſte. Ein anderer eigenthümlicher, nicht unwichtiger Vorzug dieſer Anordnung beſteht auch darinn, daß ſie die zuſammengehörigen Complexionen für Zeiger aus Zahlen (und dadurch auch aus Buchſtaben) die nicht nach der Ordnung, ſondern ſprungweiſe, fortgehen, ohne alle Umſchweife mit Leichtigkeit darſtellt (E. S. c. a. A. S. 261, 262). Ein Umſtand von bedeutender Wichtigkeit für die Anwendung!

Hieher gehört das Trembleyiſche Exempel (Abh. II. §. 7) für das 10de Glied des dortigen Bruchs und den Zeiger $\begin{pmatrix}a, & d, & e\\ 1, & 4, & 5\end{pmatrix}$

Für das dortige $D^{(9)}$ hätte man nämlich $\overset{{}^{9}\mathfrak{J}}{\begin{pmatrix}a, & d, & e\\ 1, & 4, & 5\end{pmatrix}}$

d. i. die Summe 9 aus 1, 4, 5 oder a, d, e zuſammenzuſetzen. Die Complexionen dafür können (nach 11) keine andern, als folgende ſeyn, die man ſogleich in ihrer Ordnung findet:

$$\begin{array}{rcl|l}
111111111 & = & a^9 & \text{Daraus fände man (nach 16)}\\
111114 & = & a^5d & \\
144 & = & ad^2 & D^{(8)} = a^8 + a^4d + d^2 + a^3e\\
11115 & = & ae & \text{und } D^{(7)} = a^7 + a^3d + a^2e.\\
45 & = & de &
\end{array}$$

unmittelbaren Vergleichung neben einanderſtehend befindlich ſind.

Beyſpiel der Boscovichſchen Anordnung vor Boscovich; eine literariſche Merkwürdigkeit.

24. I. De Moivre (Miſcell. anal. p. 86) ſtellt folgende Aufgabe auf:

PROBLEMA IV. Inuenire Terminum quemlibet, cuius locus aſſignetur in Serie nata ex diuiſione Unitatis per Multinomium quodcunque.

II. In der Auflöſung (Ebendaſ.) bezieht er ſich auf ſeinen der Societät in London am 6ten Jun. 1697 übergebenen und in den Philoſ. Transact. No. 230 eingerückt befindlichen allgemeinen Lehrſatz, den er auch (Miſcell. S. 87) mittheilt, wie folget:

III. THEOREMA. Si multinomium $a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+$ etc ad poteſtatem quamlibet datam n ſit attollendum, erit poteſtas requiſita. — Hier folgen die 6 erſten Glieder der Formel nach der Ordnung, bis mit z^5; wie ſie auch von mir (Arch. d. Math. H. IV. S. 386) aufgeführt ſind, für das dortige z^m hier überall 1, und n für m geſetzt.

IV. Bey den Coefficienten ſeiner Reihe unterſcheidet de Moivre ausdrücklich zweyerley Geſetze: [illegible] der Producte aus a, b, c, d . . . und 2) der ihnen vorzuſetzenden Unzen oder Zahlen. Von beyden handelt er (S. 87-89) umſtändlich; insbeſondere von Formirung der Buchſtabenproducte (S. 89) deren Geſetz nach de Moivre ich auch (Arch. a. a. O. S. 387, 3) kurz und faßlich vorgelegt habe. Unmittelbar nach Angabe dieſes Geſetzes folgt:

V. COROLLARIUM I. Si ponatur $n=-1$ et $a=1$, tunc erit quotiens oriundus ex diuiſione Vnitatis per

Multinomium $1 - bz - cz^2 - dz^3 - etc =$ (Hier folgen die entwickelten 9 erſten Glieder des Quotienten bis mit z^8, in ihrer Ordnung auf einander).

VI. Die Worte (in V) Si ponatur $n = -1$ et $a = 1$ beziehen ſich offenbar auf das Theorem (III) und wird dadurch der Quotient $\frac{1}{1-bz-cz^2-dz^3-etc}$ (I) auf die Potenz $(1 - bz - cz^3 - dz^4 - etc)^{-1}$ reducirt. Die Producte der Buchſtaben b, c, d, e . . . ſollten alſo doch wohl dem unmittelbar vorher beſchriebenen (in IV erwähnten) Geſetze folgen [h]. Statt deſſen giebt de Moivre folgende, von jenem Geſetze ganz abweichende, Entwickelung:

---

[h] Das Natürliche, und (wenn weiter nichts dabey erinnert wird) Nothwendige dieſer Vorausſetzung iſt auch Urſache geweſen, daß ich die de Moivriſche ausführliche Entwickelung von $(1 - bz - cz^2 - dz^3 \text{ etc})^{-1}$ nicht weiter mit jenem Geſetze zuſammengehalten, und die Abweichung davon bemerkt habe, ob ich gleich mehrmals darauf geſtoßen bin. Nur erſt neuerlich iſt mir ſelbige, durch eine zufällige Veranlaſſung bemerklich geworden, ſo wenig verſteckt auch übrigens dieſe Abweichung iſt.

VII. Es iſt nehmlich die (a. a. O. S. 89) mitgetheilte Entwickelung des Quotienten (I) oder der ihm gleichgültigen (VI) Potenz $(1-bz-cz^2-dx^3-\text{etc})^{-1} =$

1	$+\ bz$	$+\ b^2z^2$	$+\ b^3z^3$	$+\ b^4z^4$	$+\ b^5z^5$	$+\ b^6z^6$	$+\ b^7z^7$	$+\ b^8z^8$	$+$ etc
		$+\ c$ „	$+\ 2bc$ „	$+\ 3b^2c$ „	$+\ 4b^3c$ „	$+\ 5b^4c$ „	$+\ 6b^5c$ „	$+\ 7b^6c$ „	
				$+\ c^2$ „	$+\ 3bc^2$ „	$+\ 6b^2c^2$ „	$+\ 10b^3c^2$ „	$+\ 15b^4c^2$ „	
						$+\ c^3$ „	$+\ 4bc^3$ „	$+\ 10b^2c^3$ „	
								$+\ c^4$ „	
			$+\ d$ „	$+\ 2bd$ „	$+\ 3b^2d$ „	$+\ 4b^3d$ „	$+\ 5b^4d$ „	$+\ 6b^5d$ „	
					$+\ 2cd$ „	$+\ 6bcd$ „	$+\ 12b^2cd$	$+\ 20b^3cd$ „	
							$+\ 3c^2d$ „	$+\ 12bc^2d$ „	
						$+\ d^2$ „	$+\ 3bd^2$ „	$+\ 6b^2d^2$ „	
								$+\ 3cd^2$ „	
				$+\ e$ „	$+\ 2be$ „	$+\ 3b^2e$ „	$+\ 4b^3e$ „	$+\ 5b^4e$ „	
						$+\ 2ce$ „	$+\ 6bce$ „	$+\ 12b^2ce$ „	
							$+\ 2de$ „	$+\ 3c$ [illegible]	
								$+\ 6bde$ „	
								$+\ e^2$ „	
					$+$ f etc				

Die Litteralproducte zu z^6, z^7, z^8 hat de Moivre hier nur von den Buchſtaben b, c, d, e, nicht weiter, mitgetheilt. Dabey hat er, aus Verſehen, zwey Glieder, 2de für z^7 und 6bde für z^8, weggelaſſen, die ich hier gehörigen Orts eingeſchaltet habe.

VIII. Die combinatoriſche Formel für den Quotienten oder die Potenz (VII) iſt bekanntermaßen (S. 15)

$$1+i^{1}\mathfrak{J}z^{1}+i^{2}\mathfrak{J}z^{2}+i^{3}\mathfrak{J}z^{3}+i^{4}\mathfrak{J}z^{4}+i^{5}\mathfrak{J}z^{5}+\text{etc}$$

$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7; & 8\ldots \end{pmatrix}$$

Die Complexionen für die ${}^{m}\mathfrak{J}$ hier in (VII) ſtellen aber nicht, wie man vermuthen ſollte, die Moivriſche, ſondern — die Boscovichſche Anordnung dar. Eine merkwürdige Erſcheinung! die eine ausführliche Auseinanderſetzung, wie ich ſie hier gegeben habe, wohl verdiente.

IX. Nun entſteht die Frage, wie de Moivre auf dieſe Anordnung verfallen ſey? da ihm doch die Reduction (V) vielmehr auf ſein ſo eben (unmittelbar vorher) bekannt gemachtes und (p. 89) ausführlich von ihm beſchriebenes Geſetz verwies. Darauf läßt ſich folgendes erwiedern:

X. Die Entwickelung (VII) enthält lauter beſtimmte Zahlen und Exponenten, keine unbeſtimmten, wie die für III. Dieſen Umſtand benutzt de Moivre, für die Bequemlichkeit der Leſer, folgendergeſtalt:

a) Im COROLLARIO I. (p. 89), drückt er, unmittelbar nach der Entwickelung (VII) die numeriſchen Coefficienten oder Verſetzungszahlen ſo aus, wie ſie durch die beſtimmten Exponenten gegeben ſind.

b) Im COROLLARIO II (p. 90) erinnert er, man ſolle in dem vorliegenden Falle, die Zählung der Buchſtaben a, b, c, d . . . nicht von a, ſondern von b anfangen, das heißt, in meiner Sprache, man ſolle $\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$ nicht $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$ zum *Zeiger* nehmen; dadurch werde der Vortheil geſchafft, daß die Summe der Exponenten der einzelnen Buchſtaben der zu z^1 gehörigen Litteralproducte, dem Potenzexponenten 1 durchgängig gleich ſey.

c) Im COROLLARIO III (p. 90) wird bemerkt, die zu einer und derſelben Potenz von z gehörigen Litteralproducte (in VII) ſeyen von der Auflöſung der beyden Gleichungen $z+y+x+$ etc $=a$ und $\alpha z+\beta y+\gamma x+$ etc $=b$, für *ganze, poſitive* z, y, x . . . abhängig. Die ganze ausführliche Stelle habe ich (E. S. c. a. A; S. 119) bey einer andern Gelegenheit angeführt.

XI. Hierinn wäre alſo die Antwort auf die Frage (in IX) zu ſuchen. Aber man ſieht nicht ein, wie die Auflöſung jener *unbeſtimmten* Aufgabe, unter ſo vielen andern gleichmöglichen, geradezu auf die Ordnung der Litteralproducte in VII führe. Man muß alſo annehmen, de Moivre habe dieſe Ordnung bey der Gelegenheit *zufällig* bemerkt, und aus mehrern *ausgehoben*. Befremdend bleibt es gleichwohl immer, daß er nichts darüber erinnert hat.

Die Combinationslehre führt die Auflöſung analytiſcher Aufgaben gewöhnlich zu ihrer urſprünglichen Simplicität zurück.

25. Auf die Frage (24, IX) läßt ſich auch folgende Auskunft geben. Vielleicht hat de Moivre den Quotienten VII durch *wirkliche Diviſion* der 1 durch die Reihe $1-bz-cz^2-dz^3-$ etc geſucht. Die Schwierigkeit

die der vielgliedrige Diviſor hier macht, wird gehoben, wenn man die jedesmaligen Glieder der Reſte und die daraus erfolgenden ſucceſſiven Quotiententheile, an eine ſtrenge Ordnung bindet, um nichts dabey zu überſehen; und vielleicht hat de Moivr'n die Folge dieſer Glieder nach den Endbuchſtaben b, c, d, e . . . und ihren Potenzen — die Boscovichſche Ordnung — auf die ihn die Diviſion ſelbſt leicht leiten konnte, vor andern vorzüglich geſchienen, oder wenigſtens ſeine Aufmerkſamkeit auf ſich gezogen.

26. Wie aber auch nun immer die Sache beſchaffen ſeyn mag, ſo bleibt die Benennung Boscovichſche Ordnung dennoch feſtſtehen, weil Boscovich (was de Moivre nicht gethan hat) eine leichte beſtimmte Regel (11) dafür zuerſt angegeben hat.

27. Man begreift leicht, daß das Verfahren, die Quotiententheile aus ſolchen vielgliedrigen Nennern oder Diviſoren zu finden, nur erſt durch combinatoriſche Vorſchriften ſicher und bequem gemacht wird, und daß man, blos in Ermangelung ſolcher Regeln, oder aus Unkunde derſelben, auf Abwege gerathen, und das auf Umwegen geſucht hat, was man ganz in der Nähe hätte finden können. Dahin gehört auch die, in anderer Rückſicht wichtige, Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache; die aber hier zu unnöthigen und unnatürlichen Verwickelungen führt.

28. Noch will ich das Trembleyiſche Verfahren für das allgemeine (n+1)te Glied der wiederkehrenden Reihen ausheben und etwas näher betrachten, das vor andern doch noch auf leichte Reſultate und Entwickelungen führt.

Für dieſes wird der Urbruch $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + \text{etc}}$ (für die Wurzeln m, p, q . . . des Nenners, als Gleichung betrachtet) der Summe der einfachen Brüche

$$\frac{A}{1-mx}+\frac{B}{1-px}+\frac{C}{1-qx}+\text{etc}$$ gleichgeſetzt, daraus die Werthe von A, B, C ...., und durch ſie das allgemeine $(n+1)$te Glied $Am^n+Bp^n+Cq^n+\text{etc}$ in α, β, γ ... und m, p, q ... ausgedrückt, woraus ſich weiter ($n=0$, 1, 2, 3 ... ſucceſſive geſetzt) jedes beſtimmte Glied herleiten, die Wurzeln m, p, q ... aber aus dieſen Werthen, ohne ſie ſelbſt einzeln zu kennen, vermittelſt der bekannten Gleichungen aus den Verbindungen der Wurzeln: $m+p+q+\text{etc}=a$; $mp+mq+pq+\text{etc}=b$; $mpq+\text{etc}=c$; u. ſ. w. [i]) wieder wegſchaffen laſſen. Wie dabey die Trembleyiſchen Ordnungszeichen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ ... in Umlauf kommen, und wie die vorhergefundenen, als Grundlage für die folgenden dienen, zeigt (2, I, II und 3, 4) ausführlich im Zuſammenhange.

29. Dieſe Einführung der Wurzeln, in Verbindung mit der nachherigen Wiederwegſchaffung derſelben, iſt wirklich ſinnreich, führt aber ſchon bey Reihen der dritten Ordnung, wo doch für die Gleichung $1-ax+bx^2-cx^3=0$, aus dem Nenner, nur drey Wurzeln m, p, q vorkommen, zu großen Weitläuftigkeiten, wie aus §. 3 der vorhergehenden Trembleyiſchen Abhandlung deutlich erhellet; ſo, daß man daraus auf die übergroße Verwickelung bey höhern Ordnungen und mehrern Wurzeln ſicher ſchließen

---

i) In dieſen Gleichungen haben alle Glieder das Vorzeichen +, welches bey Wegſchaffung der Wurzeln m, p, q ... durch ſie Bequemlichkeit giebt. Dies hängt mit den abwechſelnden Zeichen im Nenner $1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}$ zuſammen, und man ſieht hieraus, warum Herr Trembley einen ſolchen Nenner in ſeinen Urbrüchen eingeführt hat. Jene Bequemlichkeit iſt indeſſen mit der Unbequemlichkeit der abwechſelnden Zeichen in den Werthen für $A^{(n)}$, $C^{(n)}$, $E^{(n)}$ ... verbunden. Man ſehe die vorh. Abh. S. 83. Note bb).

kann. Der Zweck des Verfahrens iſt, die Coefficienten der Glieder der Reihe durch α, β, γ ... und a, b, c ...: d. i. die geſuchten Dinge durch die gegebenen auszudrücken, wobey hier die Einführung und Wiederwegſchaffung der Wurzeln als Mittel gebraucht werden.

30. I. Die Combinationslehre zeigt, wie man dieſen Zweck unmittelbar auf dem leichteſten Wege erreichen könne, wenn man die Trembleyiſche Aufgabe von der Seite anſieht, wo ſie ſich am einfachſten darſtellt:

„Die Functionen

$$\frac{1}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}}; \quad \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc}}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}}$$

„ſind bloße Diviſionsausdrücke; die Reihen alſo, „die ihre Entwickelung, in Gliedern durch a, b, c...; α, β, „γ ... und x dargeſtellt, geben ſoll, müſſen mit ihren „Quotienten übereinkommen."

II. Dieſe Quotienten zu finden, ſetze man

$$\frac{1}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}} = (1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc})^{-1}$$

und verfahre mit der reducirten Form nach der Vorſchrift (S. 39. 44). Man vergleiche die Formeln (S. 15, 16)

III. Die Ausdrücke, die man hier erhält, ſind combinatoriſche, nicht blos durch Induction abgeleitete, ſondern in aller Schärfe demonſtrirte. Ihr Vorzug vor andern beſteht, nach dem Ausſpruche zweener Analyſten von Bedeutung [k]) darinn:

a) „daß ſie nicht eine blos in Worten weitläuftig „auszudrückende Regel, ſondern eine deutlich gezeichnete „allgemeine Formel geben."

---

[k]) Arch. d. Math. H. VII. S. 348, 349 die beyden Anmerk. *)

b) „Daß ſie Formen von bekannter ſehr einfacher „Structur darſtellen, die man alſo mit der größten Klarheit ſogleich anwenden kann; welches ſich mit Subſtitutionen, die bald auf dieſe bald auf jene Art gemacht werden, ganz anders verhält.“

IV. Daraus, daß die gewöhnlichen Subſtitutionen den combinatoriſchen ganz einfachen Formen ſo weit nachſtehen (III. b), erwächſt die große Beſchwerlichkeit für jene, daß man, bey etwas verwickelten Aufgaben und Vorſchriften, die man nicht immer auszuüben Veranlaſſung hat, faſt jedesmal die ganze Abhandlung oder doch einen großen Theil derſelben, aufmerkſam überleſen muß, ehe man mit Sicherheit zur Anwendung auf den vorkommenden Fall ſchreiten kann. Mit den combinatoriſchen Formen und Formeln hingegen, deren Einrichtung und Entwickelung man bald überſieht, und wenn man ſie vergeſſen hätte, durch Nachleſung weniger Zeilen ſich wieder erneuert, iſt das nicht der Fall.

Ein Beyſpiel zur unmittelbaren Vergleichung wird hier nicht überflüſſig ſeyn.

V. Aufgabe. „Man ſoll prüfen, ob die für den Quotienten

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - bz - cz^2 - dz^3 - \text{etc}} = q^{-1}$$

„von de Moivre der Potenz z^8 (24, VII) beygefügten, bis „mit den Endbuchſtaben e reichenden, Litteralproducte, mit „ihren numeriſchen Coefficienten, richtig ſeyen; zugleich „wird verlangt, die übrigen von de Moivre dort übergangenen Producte der Buchſtaben f, g, h, i, nebſt ihren Verſetzungszahlen, mit anzugeben.“

Auflöſung mit Bemerkungen.

A. Combinatoriſches Verfahren.

a). Das verlangte Glied des Quotienten iſt in der Ordnung das 9te. Für $n+1=9$ iſt alſo $n=8$; folglich $q^{-1}7(8+1)=q^{-1}\varkappa(8+1)x^8$ und (S. 15, 45).

$$q^{-1}\varkappa\,(8+1) = \underset{\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \end{pmatrix}}{i\,{}^{8}\mathfrak{J}'}$$

Das combinatoriſche Zeichen $i\,{}^{8}\mathfrak{J}'$ giebt hier die Form, der untergeſetzte Zeiger die zu bearbeitende Materie an. Die Wichtigkeit einer ſolchen Angabe fällt in die Augen.

b) Dafür muß man zweyerley wiſſen 1) die Bedeutung der Zeichen ${}^{8}\mathfrak{J}'$ und j; und die Darſtellung ihrer Werthe. Das erſte, wenn man es einmal weis, kann man nie vergeſſen; das zweyte, wenn man es vergeſſen hätte, läßt ſich in leichten Regeln nachweiſen, die man ſogleich befolgen kann, ohne etwas weiter von der Abhandlung, die ſie enthält, nachleſen zu dürfen.

c) Von den beyden lexikographiſchen Anordnungen der Complexionen zu beſtimmten Summen (S. 42, 96) und zwar namentlich hier für ${}^{8}\mathfrak{J}'$, muß man, nach der Bemerkung (24, VIII) die Boscovichſche Anordnung wählen, wenn man anders die Litteralproducte in derſelben Ordnung, hier wie dort, haben will. Für ${}^{8}\mathfrak{J}'$ befolge man demnach die Vorſchriften, wie ſie (in 11 oder 12 für ${}^{9}\mathfrak{J}'$) gegeben ſind; oder man nehme die Complexionen aus Tafel V hier am Ende, wie ſie daſelbſt für die Summe 8 ſchon vollendet untereinander ſtehen. In allen drey Fällen muß man jedoch, nach dem obigen Zeiger, hier b, c, d . . . ſtatt der dortigen a, b, c . . . ſetzen.

d) Wegen des j vor $^{8}\mathfrak{J}$ muß man allen (nach c) gefundenen einzelnen Complexionen oder Buchſtabenproducten von $^{8}\mathfrak{J}$, noch die zugehörigen Verſetzungszahlen vorſchreiben. Dafür befolge man die Vorſchriften (S. 61, 62) im Texte oder der dortigen Nachweiſung Note i.

e) Vergleicht man die (nach c und d) gefundenen Buchſtabenproducte und zugehörigen Zahlen, mit denen (in 24, VII) neben z^8 ſtehenden, ſo findet man alles mit einander übereinſtimmend; bis auf die Complexionen $4b^3f$, $6bcf$, $2df$, $3b^2g$, $2cg$, $2bh$, i, welche von de Moivre übergangen worden ſind. So iſt alſo den beyden Forderungen der Aufgabe (V) vollkommen, und zugleich auf dem leichteſten und kürzeſten Wege Genüge geſchehen.

B. Trembleyiſches Subſtitutionsverfahren.

α) Der erſte Theil der Aufgabe (V, S. 117) die Prüfung nehmlich der Coefficienten zu z^8 betreffend, ſo weit ſelbige von de Moivre (nach 24, VII) mitgetheilt worden ſind, hängt von der Entwickelung der Function $\dfrac{1}{1-bx-cx^2-dx^3-ex^4}$ ab, und führt ſo auf eine Reihe der vierten Ordnung, deren 9tes Glied man zu beſtimmen hat.

β) Für $n+1=9$ iſt alſo auch hier $n=8$; und die Vergleichung des Trembleyiſchen Urbruchs für Reihen der vierten Ordnung (S. 75. §. 6) mit der obigen Function (α) giebt ſtatt der

dortigen α, β, γ, δ; a, b, c, d
hier 1, 0, 0, 0; b, $-c$, d, $-e$

Der geſuchte Coefficient zu z^8 iſt alſo $C^{(8)}$, dafür man aber die vorher (S. 63. §. 1 und S. 71. §. 3) nachgewieſenen Werthe für $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ beybehalten muß.

γ) Die Verarbeitung derſelben (wie S. 89 3, b) und die Umſetzung der a, b, c, d in b, —c, d, —e, giebt

$$C^{(8)} = B^{(8)} + B^{(4)} e + B^{(0)} e^2$$

$$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)} d + A^{(2)} d^2$$

$$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)} d$$

$$B^{(0)} = A^{(0)} = 1$$

$$A^{(m)} = b^m + b^{m-2} c + b^{m-4} c^2 + \text{etc}$$

wo alſo die Zeichen in den Werthen für $C^{(8)}$, $A^{(m)}$ hier nicht abwechſeln.

δ) Nimmt man hier nach und nach für m die Werthe 8, 5, 4, 2, 1 und drückt dadurch die $B^{(8)}$, $B^{(4)}$ in den zugehörigen $A^{(m)}$ und d aus, ſo findet man daraus $B^{(8)} + B^{(4)} e + B^{(0)} e^2 = C^{(8)}$, die geſuchten Litteralproducte zu z^8, denen man nur noch einzeln die Verſetzungszahlen (S. 61, 62) vorſetzen darf, um alles mit (24, VII) vollkommen übereinſtimmend zu finden.

ε) Eben das findet man, wenn man in den Werth von $C^{(8)}$, den Herr Trembley (S, 77) für ein anderes Beyſpiel berechnet hat, ſtatt der dortigen a, b, c, d, hier b, —c, d, —e ſetzt.

ζ) Dem zweyten Theile der Aufgabe V (die von de Moivre übergangenen Complexionen [e, S. 119] betreffend) und hiermit zu gleicher Zeit dem erſten (α) eine Genüge zu leiſten, müßte man das 9te Glied der Function

$$\frac{1}{1 - bx - cx^2 - dx^3 - ex^4 - fx^5 - gx^6 - hx^7 - ix^8}$$

entwickeln, welches $G^{(8)} x^8$ ſeyn wird; wobey man die $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$, $E^{(n)}$, $F^{(n)}$ als bekannt, oder vorher gefunden, vorausſetzt (S. 87, III)

η) Nun iſt (2, II), und wenn man ſetzt, ſtatt der
dortigen a, b, c, d, e, f, g, h
hier, b, −c, d, −e, f, −g, h, −i

$$\begin{array}{l}
G^{(8)} = F^{(8)} + F^{(0)} i \\ \hline
F^{(8)} = E^{(8)} + E^{(1)} h \\ \hline
E^{(8)} = D^{(8)} + D^{(2)} g \\ \hline
D^{(8)} = C^{(8)} + C^{(3)} f \\ \hline
C^{(8)} = B^{(8)} + B^{(4)} e + B^{(0)} e^2 \\ \hline
B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)} d + A^{(2)} d^2 \\
B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)} d \\
B^{(0)} = A^{(0)} = 1 \\ \hline
A^{(m)} = b^m + b^{m-2} c + b^{m-4} c^2 + \text{etc}
\end{array}$$

Auch hier haben die Glieder der Werthe für $A^{(m)}$, $C^{(8)}$, $E^{(8)}$, $G^{(8)}$ ſämmtlich das Vorzeichen +, wie in (γ). Von dem Werthe an für $C^{(8)}$, kommt hier alles mit dem, was dafür in (γ) ſteht, überein.

ϑ) Aus den Gleichungen (η) fließt folgende

$$G^{(8)} = F^{(0)} i + E^{(1)} h + D^{(2)} g + C^{(3)} f + C^{(8)}$$

Da nun $C^{(8)}$, nach (δ) berechnet, die Litteralproducte nebſt ihren Verſetzungszahlen, ſämtlich ſo giebt, wie ſie, nach de Moivre, in (24, VII) neben z^8 ſtehen, ſo müſſen die von ihm übergangenen nothwendig in

$$F^{(0)} i + E^{(1)} h + D^{(2)} g + C^{(3)} f$$

enthalten ſeyn.

ι) Es iſt auch wirklich $F^{(0)} = 1$; $E^{(1)} = D^{(1)} = C^{(1)} = B^{(1)} = A^{(1)} = b$; $D^{(2)} = C^{(2)} = B^{(2)} = A^{(2)} = (b^2 + c)$; $C^{(3)} = B^{(3)} = A^{(3)} + A^{(0)} d = (b^3 + bc + d)$;

alſo $F^{(0)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f = i + bh + (b^2 + c)g + (b^3 + bc + d)f$. Dieſe Buchſtabenproducte geben, mit ihren Verſetzungszahlen verbunden, $4b^3f + 6bcf + 2df + 3b^2g + 2cg + 2bh + i$; alles, wie oben (in e, S. 119).

C. Abgekürztes Subſtitutionsverfahren.

Wenn man $G^{(n)}$, mit Ueberſpringung aller Zwiſchenordnungen $F^{(n)}$, $E^{(n)}$, $D^{(n)}$, $C^{(n)}$, $B^{(n)}$, durch $A^{(n)}$ nach (7) ausdrückt, ſo kömmt, $n = 7$, und $b, -c, d, -e, f, -g, h, -i$, ſtatt a, b, c, d, e, f, g, h, geſetzt,

$$G^{(8)} = \begin{array}{l} A^{(8)} \\ \overline{A^{(5)}d,\ A^{(2)}d^2} \\ \overline{A^{(4)}e,\ A^{(1)}de,\ A^{(0)}e^2} \\ \overline{A^{(3)}f,\ A^{(0)}df} \\ \overline{A^{(2)}g} \\ \overline{A^{(1)}h} \\ \overline{A^{(0)}i} \end{array}$$

Dieſe beträchtliche Abkürzung giebt, vermittelſt der ſo eben (7) angeführten Gleichung $A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$,

alles für den Coefficienten von z^8 d. i. $G^{(8)}$ hier ſo, wie oben (S. 119. e)

D. Endliche, ganz einfache Darſtellung.

a) Man erhält ſie, wenn man auch $A^{(n)}$ (in C) wegſchafft, und $G^{(8)} = {}^{8}\mathfrak{J}^{r}$ ſogleich in den einfachen $a, b, c \ldots h$, oder, wie hier erfordert wird, in $b, c, d \ldots i$ durchgängig (nach 12) ausdrückt. Das führt auf das obige ſehr kurze combinatoriſche Verfahren A (S. 118)

b) Von den Vortheilen ſolcher combinatoriſcher Darſtellungen, und wie eine aus der andern abgeleitet wird, ſehe man (14) und die angeführten Stellen in (16).

c) Vergleicht man die Zeichnung des (S. 117, V) ge-orderten Coefficienten zu x^8 nach Trembley (S. 119, β) und mir (S. 118, A, a) ſo findet man

$$G^{(8)} = i^8 \mathfrak{J}\binom{b,\ c,\ d\ .\ .\ g,\ h,\ i}{1,\ 2,\ 3\ .\ .\ 6,\ 7,\ g}$$

wie auch aus der (S. 64, Note l) befindlichen Zuſammenſtellung beyderley Zeichen erhellet. Hier iſt zwar das Trembleyiſche Zeichen, aber nicht die Auflöſung deſſelben und das dadurch bezeichnete Verfahren, kürzer und leichter als das combinatoriſche; wie man ſogleich überſieht, wenn man die (S. 121, η) befindliche verwickelte Reduction des Zeichens $G^{(8)}$ auf die F, E, D, C, B, A, mit der äuſſerſt leichten Darſtellung der Involution $^8\mathfrak{J}$ in b, c, d, e, f, g, h, i, nach der Vorſchrift (12) vergleicht.

d) Noch mehr: wüßte man dieſe Vorſchrift nicht, oder hätte man ſie vergeſſen, ſo darf man nichts weiter als die wenigen Zeilen nachleſen, die ſie enthalten; der obige Zeiger weiſt zugleich nach, daß man hier b, c, d, e . . . für die dortigen a, b, c, d . . . gebrauchen müſſe. Ganz anders verhält es ſich, wenn man die Bedeutung von $G^{(8)}$ nicht wüßte, oder ſie vergeſſen hätte. Wie viel müßte man nicht in der ſonſt ſo deutlich abgefaßten Trembleyiſchen Abhandlung nachleſen, um ſich bey der wirklichen Auflöſung dieſes Zeichens und der endlichen Darſtellung ſeines Werthes in den einfachen b, c, d, e . . . nicht zu verirren! Die Schuld liegt nicht an dem Verfaſſer jener Abhandlung, ſondern an der Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Zeichen, die nicht, wie die combinatoriſchen, die Elemente der Zuſammenſetzung, und mit ihnen Form und Materie, ſo klar und deutlich vorlegen. Man vergleiche E. S, c. a. A. S. 288. §. 215.

31. Dieſe unmittelbare Vergleichung der verſchiedenen Verfahren (A, B, C, S. 118-122) auf ein und daſſelbe Bey-

ſpiel (S. 117, V) angewendet, zeigt das Uebergewicht der combinatoriſch-analytiſchen Behandlung dieſer und ähnlich Aufgaben am augenſcheinlichſten. Alles wird hier, wornach man gewöhnlich ſtrebt, auf dem kürzeſten und zugleich leichteſten Wege gefunden, auf den man dadurch geleitet wird, daß man die Aufgabe von der Seite betrachtet, wo ſie ſich am einfachſten (als Diviſionsausdruck) darſtellt, und zu der Auflöſung die einfachſten Mittel (die combinatoriſchen Anordnungen und Involutionen) gebraucht und verwendet.

32. Freylich kann man nicht jede Anſicht, die ſich uns darſtellt, ſogleich weiter verfolgen, inſofern es an Mitteln fehlt, ſich ihr gehörig zu nähern, um ſie zu bennutzen. So liegt bey der Aufgabe, von der hier die Rede iſt, die Diviſionsform ſo unverkennbar vor Augen, daß man ſie nicht überſehen kann; aber der vieltheilige Diviſor macht hier die große Schwierigkeit. Dieſe hat Herrn Trembley auf die Einführung mit Wiederwegſchaffung der einfachen Wurzeln des Nenners, als Gleichung betrachtet, geleitet. So ſinnreich dieſes Verfahren an ſich iſt, indem man die Wurzeln nicht einmal einzeln zu kennen braucht: ſo veranlaßt gleichwohl dieſer Theil der Auflöſung, den die combinatoriſche Analyſis ganz überſpringt, weitläuftige Rechnungen und Reductionen (29) die, außer der Induction, die ſie geben, ſich ſchwerlich allgemein durch Beweis würden rechtfertigen laſſen. Der übrige Theil der Auflöſung hingegen, die aus erſterm von Herrn Trembley gezogenen Formeln und Relationen, ſind merkwürdig, und für Leſer, die ſich mit der combinatoriſchen Analyſis näher bekannt machen wollen, lehrreich. Die Annäherung derſelben zu den combinatoriſchen Formen, hat mir Veranlaſſung gegeben, ſie weiter zu ſimplificiren, und endlich ganz in combinatoriſche Verfahren und Operationen aufzulöſen. Herr

Trembley hat hier alles geleiſtet, was, ohne combinatoriſche Hülfsmittel anzuwenden, möglich war.

Convergenz und Divergenz der entwickelten Reihen im Allgemeinen; Evolution ſolcher Functionen, die nicht nach Potenzen einer veränderlichen Gröſſe geordnet ſind.

33. In den beyden vorhergehenden Abhandlungen iſt bey Entwickelung der Reihen blos auf die Form geſehen worden, die ſie nach den dortigen Vorſchriften annehmen, und wie ſich daraus die Potenzen von x beſtimmen laſſen. Ob dieſe Reihen für gewiſſe Werthe von x convergiren oder divergiren, und für welche Werthe ſie das thun, und wie ſchnell? davon iſt dort die Frage nicht geweſen. Dies Verfahren läßt ſich durch das Beyſpiel der größten Analyſten rechtfertigen, welche die Beantwortung der Frage, die Convergenz der aufgefundenen Reihen betreffend, als eine Sache der Anwendung, dem Leſer beym Gebrauche gewöhnlich ſelbſt überlaſſen, oder, als eine eigene Unterſuchung, von jener allgemeinen der Form und Coefficientenbeſtimmung getrennt, vorgetragen haben.

34. In ſofern hier die Convergenz der Reihe auf den Werthen von x, nicht auf den Coefficienten, beruhen ſoll, muß man dabey drey Fälle, für

$$x < 1; \quad x > 1; \quad x = 1$$

unterſcheiden, die ich nach der Ordnung vornehmen, und an dem Beyſpiele

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

erläutern will. Die allgemeine Form, unter welcher ſich die Entwickelung der gebrochenen Functionen in meiner Abhandlung darüber vorgetragen habe, erleichtert die gegenwärtige Unterſuchung ungemein.

35. Erſter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (i 34) für $x < 1$ convergiren ſoll.

Man ſetze

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = \dot{P}$$

und $\dot{P} = P\varkappa 1 + P\varkappa 2x^1 + P\varkappa 3x^2 + etc = pq^{-1}$

Die Coefficienten für die hieſige Reihe P oder pq^{-1} ſind mi denen (S. 8; 5, a und S. 9; 5, b) ganz einerley; wi daraus erhellet, weil, die dortigen Exponenten $\mu = \nu = 0$ und $\delta = 1$ geſetzt, das hieſige P beſtimmen.

Die Reihe für P geht hier nach x^0, x^1; x^2 . . . nac ſteigenden Potenzen von x fort. Iſt alſo $x < 1$, ode ein eigentlicher Bruch, ſo ſind die höhern Potenzen von x immer kleiner und kleiner, und die Reihe convergirt.

36. Zweyter Fall. Wenn die Reihe für den Bruc (in 34) für $x > 1$ convergiren ſoll.

Man kehre den Zähler und Nenner des gegebene Bruchs um, und ſetze

$$\frac{p}{q} = \frac{cx^2 + bx + a}{\delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha} = \dot{P}$$

und $P = \dot{P}\varkappa 1x^{-1} + P\varkappa 2x^{-2} + P\varkappa 3x^{-3} + etc = pq^{-1}$

wie man findet, wenn man (S. 8; 5, a oder S. 9; 5, b) $\mu = 2$; $\nu = 3$; $\delta = -1$ ſetzt.

Um nun die einzelnen Glieder der Reihe für $\dot{P}$ oder pq^{-1} aus den dortigen Formeln zu finden, darf man, außer der obigen Beſtimmung für μ, ν, δ nur noch

1) für Seite 8; 5, a

$p\varkappa 1 = c$; $p\varkappa 2 = b$; $p\varkappa 3 = a$

$q\varkappa 1 = \delta$; $q\varkappa 2 = \gamma$; $q\varkappa 3 = \beta$; $q\varkappa 4 = \alpha$

oder, anſtatt der dortigen Scalen, hier

$$p\,[\,c\,,\quad b\,,\quad a\,]$$
$$q\,[\,\delta\,,\quad \gamma\,,\quad \beta\,,\quad \alpha\,]$$

2) für Seite 9; 5, b, anſtatt der

dortigen a, b, c; α, β, γ, δ

hier c, b, a; δ, γ, β, α

alſo auch, ſtatt des dortigen Zeigers, hier den Zeiger

$$\begin{pmatrix} \gamma\,, & \beta\,, & \alpha \\ 1\,, & 2\,, & 3 \end{pmatrix}$$

ſetzen und gebrauchen. Die Reihe für den zweyten Fall folgt hieraus eben ſo leicht, wie die für der erſten.

Die Reihe für P oder pq^{-1} geht hier nach x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} ... nach fallenden Potenzen von x fort. Iſt alſo $x > 1$, alſo eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch, ſo nehmen die Potenzen x^{-1}, x^{-2}. x^{-3} ... immer mehr und mehr ab, und die Reihe convergirt.

37. Die Bequemlichkeit, mit welcher ſich hier die Formeln für beyde Fälle (35, 36) behandeln, und durch eine leichte Interpretation auf einander beziehen laſſen, verſchafft die allgemeine Geſtalt, unter welcher ich in jener Abhandlung die Entwickelung vorgetragen habe.

Couſin, in ſeinem neuerlich herausgegebenen Traité élementaire de l'Analyſe mathématique (Paris 1797) der bey dem Exempel (36) auf keine ſo allgemeine Form verweiſen konnte, hat daher (p. 69. 70) für dieſen zweyten Fall, die Verwandlung des gegebenen Bruchs im erſten Falle er-was weitläuftiger darſtellen und nachweiſen müſſen. Die Vergleichung ſeiner dort aufgefundenen Formeln für beyde Fälle zeigt gleichfalls den wechſelſeitigen Zuſammenhang und die Abhängigkeit beyder. Um nehmlich den zweyten Fall aus dem erſten abzuleiten, darf man nur dort

die A, B, C, D, E, F; a, b, c; m, n, p, q
in M, N, P, Q, R, S; c, b, a; q, p, n, m

d. i. die Couſin'ſchen erſt geſetzten Buchſtaben für den erſten Fall, in die hier darunterſtehenden Buchſtaben für den zweyten Fall, umſetzen und verwandeln.

38. Dritter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (In 34) für $x = 1$ convergiren ſoll.

Hier fällt alſo x gar weg, und der Bruch

$$\frac{a + b + c}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

ſo wie die daraus zu entwickelnde Reihe, iſt weder nach ſteigenden noch fallenden Potenzen von x geordnet.

Die ſchon für den erſten und zweyten Fall (35, 36) citirten Formeln (S. 8, 9) geben gleichwohl auch hier vollkommene Auskunft, nur muß man in dieſem Falle, wegen der Convergenz, auf die Größe der a, b, c und der α, β, γ, δ unter einander Rückſicht nehmen, und im Zähler und Nenner die Glieder ſo ordnen, daß die größern vorangehen, die kleinern folgen.

Es ſey

$$\frac{p}{q} = \frac{h + i + k}{m + n + p + q} = P$$

ein ſo geordneter Bruch, worinn alſo $h > i$; $i > k$ und $m > n$; $n > p$; $p > q$.

Die Entwickelung für $P' = pq^{-1}$ geben die oben (35) angeführten Formeln, der erſten Abhandlung, wenn man darinn $x = 1$, und für die

dortigen a, b, c; α, β, γ, δ
hier h, i, k; m, n, p, q

für die übrigen dortigen lateiniſchen und griechiſchen Buchſtaben aber, die hier durch nichts repräſentirt werden, 0 ſetzt. Man braucht die Formel (S. 8) oder (S. 9) nachdem man die Glieder von P in recurrirender dependenter, oder in directer independenter Geſtalt darſtellen will.

Nach Seite 9; 5, b fände man ſo, für

$$\frac{p}{q} = \frac{h+i+k}{m+n+p+q} = pq^{-1}$$

$$\begin{aligned} pq^{-1} = & \frac{h}{m} \\ & + \frac{i}{m} - \frac{h}{m} \cdot \frac{n}{m} \\ & + \frac{k}{m} - \frac{i}{m} \cdot \frac{n}{m} - \frac{h}{m}\left(\frac{p}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right) \\ & + 0 - \frac{k}{m} \cdot \frac{n}{m} - \frac{i}{m}\left(\frac{p}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right) - \frac{h}{m}\left(\frac{q}{m} - \frac{2np}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}\right) \\ & + \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \end{aligned}$$

Die einzelnen Theile der Glieder für die obige Entwickelung von pq^{-1} ſind von unten auf (der mit + bezeichnete Theil voran) rangirt. Da in den folgenden Gliedern immer dieſelben Combinationsclaſſen der vorhergehenden Glieder (nur in andere Factoren multiplicirt) wieder vorkommen: ſo erhellt daraus die groſze Leichtigkeit der Entwickelung des gegebenen Bruchs.

39. Couſin (a. a. O. S. 68) geht bey Entwickelung des obigen Bruchs einen ziemlichen Umweg. Er ſetzt

$$\frac{i}{h} = ax;\ \frac{k}{h} = bx^2;\ \frac{n}{m} = cx,\ \frac{p}{m} = dx^2,\ \frac{q}{m} = ex^3,$$

verwandelt dadurch den Bruch

$$\frac{h+i+k}{m+n+p+q} \text{ in } \frac{h}{m}.\ \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3}$$

und ſucht ſodann, aus

$$\frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc}$$

die A, B, C, D etc, vermittelſt der a, b, c, d, e, auf dem gewöhnlichen Wege, durcheinander auszudrücken. Aus den dafür gefundenen Formeln, werden dann für die wirkliche Anwendung 1) die A, B, C, D, E . . . in a, b, c, d, e, und 2) die a, b, c, d, e in h, i, k, m, n, p, q wieder umgeſetzt, und 3) was (2) gegeben, in $\frac{h}{m}$ multiplicirt. Das iſt weitläufig; und bleibt hinter der bequemen combinatoriſchen Entwickelung (38) weit zurück 1)

40. In den Urbrüchen der Trembleyiſchen Ordnungen für wiederkehrende Reihen (ſ. die vorhergehende Abhandlung) wird durchgehends angenommen, die höchſte Potenz der veränderlichen Größe (x) im Nenner, ſey wenigſtens um einen Grad höher, als die im Zähler. Solche Functionen ſtellen

---

1) Aehnliche Abkürzungen, Verbeſſerungen, Erweiterungen, laſſen ſich, durch Beyhülfe der combinatoriſchen Methode und Zeichen, mehrere bey dieſen Couſinſchen Anfangsgründen der Analyſis häufig anbringen. Ich habe die Ueberſetzung dieſes nützlichen Werkes Herrn Profeſſor Rothen empfohlen, der nicht ermangeln wird, das Nöthige, theils in Anmerkungen unter den Text, theils in einem beſondern Anhange, beyzufügen.

eigentliche Brüche vor; und andere, denen dieſe Bedingung fehlt, laſſen ſich darauf zurückführen.

Es ſey

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4} = \frac{p}{q}$$

gegeben. Man dividire den umgekehrten Zähler durch den umgekehrten Nenner, und ſetze den Reſt mit dem Diviſor als Bruch zu dem gefundenen Quotienten $\frac{\varepsilon}{e}$. Das giebt

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon}{e} + \frac{(\delta e - \varepsilon d)x^3 + (\gamma e - \varepsilon c)x^2 + (\beta e - \varepsilon b)x + (\alpha e\ \ \varepsilon a)}{e^2x^4 + dex^3 + cex^2 + bex + ae}$$

In dem Bruche neben $\frac{\varepsilon}{e}$ iſt die höchſte Potenz, im Zähler x^3, im Nenner x^4, alſo die obenangeführte Bedingung erfüllt. Man vergleiche S. 28.

41. In (34) ſind die gebrochene Function und die Werthe von x willkührlich angenommen worden. Ein wirkliches Beyſpiel, das auf eine ſolche Function führt, und wo x nur gewiſſe, nicht jede beliebige, Werthe annehmen (eine beſtimmte Gränze nicht überſteigen) darf, giebt, unter andern, die Rectification elliptiſcher Bögen.

42. Es ſeyen einer Ellipſe um den Mittelpunct C, Brennpuncte F, halbe große Axe $AC = a$, halbe kleine $DC = c$, Eccentricität $CF = e$, Coordinaten aus dem Mittelpuncte $CP = x$, $PM = y$, und der Bogen $DM = s$, ſo iſt bekanntermaaßen

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)};\ ds^2 = dy^2 + dx^2;\ e^2 = a^2 - c^2$$

alſo $ds = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4 - (a^2 - c^2)\,x^2}{a^2 - x^2}\right)} = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4 - e^2x^2}{a^2 - x^2}\right)}$

oder $ds = \frac{dy}{a}\sqrt{\left(\frac{c^4 + (a^2 - c^2)\,y^2}{c^2 - y^2}\right)} = \frac{dy}{c}\sqrt{\left(\frac{c^4 + e^2y^2}{c^2 - y^2}\right)}$

Hier hat man alſo mehrere Ausdrücke für den Bogen $s = \int ds$ zur Auswahl.

43. Geſetzt man wollte s durch a, c und x ausdrücken, ſo diente hierzu die erſte Formel $ds = dx\,\frac{(a^4 - [a^2 - c^2]\,x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^4 - a^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Für dieſe könnte man, Zähler und Nenner des Bruchs, jeden in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe, nach dem binomiſchen Lehrſatze, verwandeln, und ſolche dadurch auf die gebrochene Form (S. 8, 9) zurückführen. Die Reihe aus dieſer Form würde dann mit dx multiplicirt und integrirt, s geben.

44. I. Kürzer aber kommt man zum Zweck, wenn man $a^4 - (a^2 - c^2)\,x^2$ durch $a^4 - a^2x^2$ dividirt, und die daraus entſtehende Reihe zur Potenz $\frac{1}{2}$ erhebt.

Nun iſt

$$\frac{a^4 - (a^2 - c^2)x^2}{a^4 - a^2x^2} = 1 + \frac{c^2x^2}{a^4 - a^2x^2} = 1 + \frac{c^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2}{a^6}x + \text{etc}$$

Alſo $ds = dx\,\left(1 + \frac{c^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2}{a^6}x^4 + \frac{c^2}{a^8}x^6 + \text{etc}\right)^{\frac{1}{2}}$

Und (E. S. c. a. A. S. 233. §. 131) die dortigen $a = 1$; $m = \frac{1}{2}$; $z = x^2$; geſetzt

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dx} = 1 &+ {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}a^1Ax^2 \\ &+ ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}a^2A + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}b^2B)x^4 \\ &+ ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}a^3A + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}b^3B + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}c^3C)x^6 \\ &+ ({}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{A}a^4A + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}b^4B + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C}c^4C + {}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}d^4D)x^8 \\ &+ \text{etc} \qquad + \text{etc} \qquad + \text{etc}\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{c^2}{a^4}, & \frac{c^2}{a^6}, & \frac{c^2}{a^8}, & \frac{c^2}{a^{10}}, & \frac{c^2}{a^{12}} & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & \ldots \end{matrix}\right\}$$

II. Da nun ${}^m\mathfrak{A} = m$; ${}^m\mathfrak{B} = \frac{m-1}{2}\,{}^m\mathfrak{A}$; ${}^m\mathfrak{C} = \frac{m-2}{3}\,{}^m\mathfrak{D}$; ${}^m\mathfrak{D} = \frac{m-3}{4}\,{}^m\mathfrak{C}$; etc ſo iſt, $m = \frac{1}{2}$ geſetzt, $\mathfrak{A} = +\frac{1}{2}$; ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B} = -\frac{1}{4.2}$; ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{C} = +\frac{3.1}{6.4.2}$; ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = -\frac{5.3.1}{8.6.4.2}$; ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{E} = +\frac{7.5.3.1}{10.8.6.4.2}$; u. ſ. w.

III. Folglich $\frac{ds}{dx} = 1$

$$\begin{aligned}&+ \frac{c^2}{2a^4}x^2 \\ &+ \left(\frac{c^2}{2a^6} - \frac{c^4}{8a^8}\right)x^4 \\ &+ \left(\frac{c^2}{2a^8} - \frac{c^4}{4a^{10}} + \frac{c^6}{16a^{12}}\right)x^6 \\ &+ \left(\frac{c^2}{2a^{10}} - \frac{3c^4}{8a^{12}} + \frac{3c^6}{16a^{14}} - \frac{5c^8}{128a^{16}}\right)x^8 \\ &+ \text{etc} \qquad + \text{etc} \qquad + \text{etc}\end{aligned}$$

IV. Und, gehörig integrirt, $DM = \int ds$

oder $s = x$

$$+ \frac{c^2}{6a^4} x^3$$

$$+ \left(\frac{c^2}{10a^6} - \frac{c^4}{40a^8} \right) x^5$$

$$+ \left(\frac{c^2}{14a^8} - \frac{c^4}{28a^{10}} + \frac{c^6}{112a^{12}} \right) x^7$$

$$+ \left(\frac{c^2}{18a^{10}} - \frac{c^4}{24a^{12}} + \frac{c^6}{48a^{14}} - \frac{5c^8}{1152a^{16}} \right) x^9$$

⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗

45. Ich habe unter den vier Formeln für ds (42) die erſte gewählt, um die Kürze und Leichtigkeit, welche die combinatoriſche Methode hier (44) gewährt, mit der ungemeinen Weitläuftigkeit, mit welcher Wolff (Elem. Anal. Infin. §. 172) die Aufgabe behandelt hat, in Parallele zu ſtellen.

Dort wird nämlich 1) b^2 (mein e^2 in 42) ſtatt a^2-c^2 in der erſten Formel für ds ſubſtituirt; dann 2) ſowohl $\surd(a^4-b^2x^2)$ als $a \surd(a^2-x^2)$ in Reihen aufgelöſt, und

$$ds = \left\{ \frac{a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} - \text{etc}}{a^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6} - \text{etc}} \right\} dx$$

gefunden; hierauf wird 3) die auf dem gewöhnlichen Wege ſo beſchwerliche wirkliche Diviſion der untern Reihe in die obere vorgenommen, mit Angabe des ſucceſſive gefundenen

Quotienten, Producte und Reſte; weiter werden 4) aus dem in a, b, x ausgedrückten Quotienten die b^2, b^4, b^6 . . . vermittelſt der $b^2 = a^2 - c^2$ wieder weggeſchafft, um alles in a, c und x ausgedrückt zu haben; zuletzt 5) wird ſds durch Integration, und dadurch s (wie in 44) gefunden — calculo, wie Wolff ſelbſt ſagt, ſatis prolixo (von mehrern Seiten) quem tamen diſtincte explicari conſultum fuit, vt ſit exemplar in caſibus ſimilibus. Ein in der That mehr abſchreckendes als einladendes Beyſpiel!

46. Die Hauptſchwierigkeit bey dem Wolffiſchen Verfahren (45) macht die wirkliche gemeine Diviſion der einen Reihe in die andere, und die Wiederwegſchaffung der b^2, b^4, b^6 . . . durch a^2-c^2; $(a^2-c^2)^2$; $(a^2-c^2)^3$; . . . aus dem gefundenen Quotienten. Nun könnte man zwar die gebrochene Function für ds (in 45) viel leichter und beſſer nach den Formeln (S. 8 und 9) behandeln und evolviren, wie auch ſchon in (43) iſt erinnert worden. Weit vorzüglicher aber iſt das ganz kurze und leichte Verfahren (44).

47. Ueber die Rectification elliptiſcher Bögen durch unendliche Reihen, hat man eine ſchätzbare Abhandlung von Lambert (Beytr. zum Gebr. der Mathem. Th. III. S. 35 f.).

Lambert ſetzt (in 42), Kürze halber, $a=1$; $\sqrt{\left(\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\right)} = P$

und ds oder (bey ihm) $dv = Pdx$. Um P zu beſtimmen, dividirt er nicht, wie Wolff, die Reihe für $\sqrt{(1-e^2x^2)}$ durch die Reihe für $\sqrt{(1-x^2)}$, ſondern multiplicirt ſie (a. a. O. §. 5) durch die Reihe für $1 : \sqrt{(1-x^2)}$, welches in der That viel leichter iſt. Nähme man hier (wie in 44. I) den Quotienten

$$\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\left\{\begin{array}{l}=1+(1-e^2)x^2+(1-e^2)x^4+(1-e^2)x^6+\text{etc}\\=1+c^2x^2+c^2x^4+c^2x^6+\text{etc}\end{array}\right\}$$

ſo könnte man für P die combinatoriſche Formel für $\frac{ds}{dx}$ (Ebend), aber auf den Zeiger

$$\begin{pmatrix}(1-e^2), & (1-e^2), & (1-e^2)\ldots \\ 1 & 2 & 3\ldots\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}c^2, & c^2, & c^2\ldots \\ 1, & 2, & 3\ldots\end{pmatrix}$$

bezogen, gebrauchen. Für den letztern Zeiger fände man $P = \frac{ds}{dx}$ vollkommen ſo, wie in (44, III), wenn man dort überall $a = 1$ ſetzt.

48. Lambert hat (a. a. O. §. 7) einen Ausdruck für P, und dadurch auch (§. 9) für $\int Pdx$ oder s angegeben, bey welchem keine abwechſelnden Zeichen in den Coefficienten vorkommen. Das iſt bequem für die Anwendung; auch kann man die hieſigen Formeln (44, III und IV) ſogleich auf die Lambertiſchen reduciren, wenn man darinn 1) überall $a = 1$ ſetzt 2) die Theile jedes einzelnen Coefficienten auf gleiche Nenner bringt, 3) Von dieſen Theilen, c^2, als gemeinſchaftlichen Factor in den ganzen Coefficienten, abſondert. 4) Die übrigen Potenzen aber von c, vermittelſt der Gleichungen $c^2 = 1 - e^2$; $c^4 = 1 - 2e^2 + e^4$; $c^6 = 1 - 3c^2 + 3e^4 - c^6$; u. ſ. w. in e ausdrückt, und alles gehörig reducirt. So fände man z. B. für die Formel (44. IV) und die gemeinſchaftlichen Nenner; 6, 40, 112, 1152 … den Bogen $DM = \int ds$ oder

$$\begin{aligned} s = & \; x \\ & + \frac{c^2}{6} x^3 \\ & + \frac{(3 + e^2) c^2}{40} x^5 \\ & + \frac{(5 + 2e^2 + e^4) c^2}{112} x^7 \\ & + \frac{(35 + 15e^2 + 9e^4 + 5e^6) c^2}{1152} x^9 \end{aligned}$$

. . . .

Daraus erhielte man rückwärts $\frac{ds}{dx}$ oder P, wie bey Lambert (§. 7). Einige Coefficienten (wie hier der 4te und 5te) erſcheinen nach der Differentiation, in kleinern Zählern und Nennern als bey Lambert (§. 7); reducirt aber auf die größern Lambertiſchen Nenner, findet man ſie mit ihnen ganz übereinſtimmend. Dort ſind nehmlich die gemeinſchaftlichen Nenner, des Geſetzes wegen, welches (daſ. §. 8) für die Coefficienten nachgewieſen wird, oft größer als ſonſt nöthig wäre.

49. Für $c = 0$ und $e = 1$, alſo für den Kreis, wäre der Bogen DM oder

$$s = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \text{etc}$$

Das giebt, $x = 1$ geſetzt, die bekannte Newtoniſche Reihe $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \text{etc}$ für den Quadranten, auf den Halbmeſſer 1 bezogen. Für $e = 1$, alſo $c = 0$, verwandelt ſich die Ellipſe in die gerade Linie $s = x$.

50. Die Reihen (44, IV und 48) convergiren, aber nur ſehr langſam, beſonders für etwas größere e,

Dies macht ihren Gebrauch für die Anwendung unbequem. Mehrere Verwandlungen derſelben, durch Beyhülfe von trigonometriſchen auf die Ellipſe ſich beziehenden Functionen, um ſchnellere Convergenz zu bewürken, hat Lambert in der angeführten Abhandlung vorgenommen.

51. Schlüßlich will ich zwey (in 15 und 19 erwähnte) Tafeln, zum bequemen Gebrauche in der Anwendung, hier noch aufſtellen. Ich zähle ſie als Vte und VIte Tafel, mit jenen vieren (S. 4 - 18) zu welchen ſie als Ergänzung gehören, in eine Reihe fort. Was die IIIte für die Moivriſchen Involutionen iſt, das ſind die IVte Vte und VIte für die Boscovichſchen. Ein Nachtrag zu Tafel II. (S. 8 und 9) und ein anderer zu 12 (S. 96, 97) machen den Beſchluß.

Tafel V. Boscovich-Hindenburgiſche Involutionen zu beſtimmten Summen für den Zeiger $\left(\begin{matrix} a, b, c, d, e, f, g, h \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \end{matrix}\right)$

${}^{1}\mathfrak{J}$

1,	a

${}^{2}\mathfrak{J}$

11,	a^2
2,	b

${}^{3}\mathfrak{J}$

111,	a^3
12,	ab
3,	c

${}^{4}\mathfrak{J}$

1111,	a^4
112,	a^2b
22,	b^2
13,	ac
4,	d

${}^{5}\mathfrak{J}$

11111,	a^5
1112,	a^3b
122,	ab^2
113,	a^2c
23,	bc
14,	ad
5,	e

${}^{6}\mathfrak{J}$

111111,	a^6
11112,	a^4b
1122,	a^2b^2
222,	b^3
1113,	a^3c
123,	abc
33,	c^2
114,	a^2d
24,	bd
15,	ae
6,	f

${}^{7}\mathfrak{J}$

1111111,	a^7
111112,	a^5b
11122,	a^3b^2
1222,	ab^3
11113,	a^4c
1123,	a^2bc
223,	b^2c
133,	ac^2
1114,	a^3d
124,	abd
34,	cd
115,	a^2e
25,	be
16,	af
6,	g

${}^{8}\mathfrak{J}$

11111111,	a^8
1111112,	a^6b
111122,	a^4b^2
11222,	a^2b^3
2222,	b^4
111113,	a^5c
11123,	a^3bc
1223,	ab^2c
1133,	a^2c^2
233,	bc^2
11114,	a^4d
1124,	a^2bd
224,	b^2d
134,	acd
44,	d^2
1115,	a^3e
125,	abe
35,	ce
116,	a^2f
26,	bf
17,	ag
8,	h

Die Involution zur Summe 9, oder die Complexionen für ${}^{9}\mathfrak{J}$, (S. 18 Taf. IV. und hier 13) die für ${}^{10}\mathfrak{J}$ (18); die Benennung Boscovich-Hindenburgiſche Involution rechtfertigen die Auflöſungen (11, 12). Herrn Trembley's A(n), B(n), C(n), D(n) ... für beſtimmte n, ſogleich auf die Tafel zu reduciren, vergleiche man (6, II) oder Note I der vorhergehenden Abhandlung.

Tafel VI. Combinationen zu unbeſtimmten Summen n für den Zeiger $\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & g & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 & \ldots \end{matrix}\right)$

$$\begin{gathered} {}^{n}\mathfrak{J}' \\ \left(\begin{matrix} a, & b, & c & \ldots\ldots & \overset{m-3}{a}, & \overset{m-2}{a}, & \overset{m-1}{a} \\ 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & m-2, & m-1, & m \end{matrix}\right) \end{gathered}$$

$$=$$

$$\underset{(a)}{{}^{n-1}\mathfrak{J}'a} + \underset{(a,\,b)}{{}^{n-2}\mathfrak{J}'b} + \underset{(a,\,b,\,c)}{{}^{n-3}\mathfrak{J}'c} + \underset{(a,\,b,\,c,\,d)}{{}^{n-4}\mathfrak{J}'d} + \text{etc}$$

$$=$$

$$\begin{aligned} {}^{n}\mathfrak{J}' &+ {}^{n-2}\mathfrak{J}'b + {}^{n-4}\mathfrak{J}'b^2 + {}^{n-6}\mathfrak{J}'b^3 + \text{etc}\ (a) \\ &+ {}^{n-3}\mathfrak{J}'c + {}^{n-6}\mathfrak{J}'c^2 + {}^{n-9}\mathfrak{J}'c^3 + \text{etc}\ (a,b) \\ &+ {}^{n-4}\mathfrak{J}'d + {}^{n-8}\mathfrak{J}'d^2 + {}^{n-12}\mathfrak{J}'d^3 + \text{etc}\ (a,b,c) \\ &+ {}^{n-5}\mathfrak{J}'e + {}^{n-10}\mathfrak{J}'e^2 + {}^{n-15}\mathfrak{J}'e^3 + \text{etc}\ (a,b,c,d) \\ &+ {}^{n-6}\mathfrak{J}'f + {}^{n-12}\mathfrak{J}'f^2 + {}^{n-18}\mathfrak{J}'f^3 + \text{etc}\ (a,b,c,d,e) \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &+ {}^{n-m}\mathfrak{J}'\overset{m-1}{a} + {}^{n-2m}\mathfrak{J}'\left(\overset{m-1}{a}\right)^2 + {}^{n-3m}\mathfrak{J}'\left(\overset{m-1}{a}\right)^3 \ldots + {}^{n-rm}\mathfrak{J}'\left(\overset{m-1}{a}\right)^r \\ &\qquad \left(a,\ b,\ c,\ \ldots\ \overset{m-3}{a},\ \overset{m-2}{a}\right) \end{aligned}$$

Der hier zuletzt ſtehende allgemeine Ausdruck ſtellt die (m−1)te Horizontalreihe der zweyten Formel vor. ${}^{n}\mathfrak{J}'$ gehört nicht mit in das Geſetz dieſer Reihen, und ſteht auch daher abgeſondert für ſich. Die Werthe von m fangen von 2 an.

Das mte Glied der erſten Formel, vom erſten ${}^{n-1}\mathfrak{J}'a$ an gerechnet, iſt

$$\begin{gathered} {}^{n-m}\mathfrak{J}'\overset{m-1}{a} \\ \left(a,\ b,\ c\ \ldots\ldots\ \overset{m-2}{a},\ \overset{m-1}{a}\right) \end{gathered}$$

Mehr hiervon, nebſt Beyſpielen zur Anwendung (19, 20, 21)

Nachtrag zu Tafel II Seite 9 und 13.

S. 9; 6, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc}}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc}} = pq^{-1}$$

$$\text{iſt } pq^{-1} = \frac{a}{\alpha}\, x^{\mu-\nu}$$

$$+\left(\frac{a}{\alpha}\,\frac{i^{1}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*}} + \frac{b}{\alpha}\right)x^{\mu-\nu+\delta}$$

$$+\left(\frac{a}{\alpha}\,\frac{i^{2}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*}} + \frac{b}{\alpha}\,\frac{i^{1}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*}} + \frac{c}{\alpha}\right)x^{\mu-\nu+2\delta}$$

$$+\left(\frac{a}{\alpha}\,\frac{i^{3}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*}} + \frac{b}{\alpha}\,\frac{i^{2}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*}} + \frac{c}{\alpha}\,\frac{i^{1}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*}} + \frac{d}{\alpha}\right)x^{\mu-\nu+3\delta}$$

= = = = =

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta, & +\varepsilon \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \dots \end{pmatrix}$$

S. 13; 9, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc}} = q^{-1}$$

$$\text{iſt } q^{-1} = \frac{x^{-\nu}}{\alpha} + \frac{i^{1}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*+1}}x^{-\nu+\delta} + \frac{i^{2}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*+1}}x^{-\nu+2\delta} + \frac{i^{3}\,{}_{a}\mathfrak{J}^{r}}{\alpha^{*+1}}x^{-\nu+3\delta} + \text{etc}$$

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta, & +\varepsilon \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \dots \end{pmatrix}$$

Der Zahlenwerth des Zeichens * in α^{*} und α^{*+1} wird, nach der bereits feſtgeſetzten Bedeutung, durch die Anzahl der Factoren $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ in den einzelnen Complexionen der darüber ſtehenden Involution ${}^{1}{}_{a}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{2}{}_{a}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{3}{}_{a}\mathfrak{J}^{r} \dots$ beſtimmt, und iſt für die Complexionen von zwey Buchſtaben, 2; von dreyen, 3; u. ſ. w. (Arch. d. Math. H. IV. S. 389, 7; 379. E. S. c. a. A. S. 265)

Die Involutionen, ſo wie die Zeichen vor $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ im Nenner und Zeiger betreffend, ſehe man die Bemerkungen, hier S. 15.

Nachtrag zu der zweyten Auflöſung (12) Seite 96, 97.

Bey dieſer Auflöſung habe ich mich auf ein bereits in (8) angegebenes combinatoriſches Geſetz berufen, das auch in (12) befolgt wird; und das iſt Urſache geweſen, daß ich von der hier nöthigen Entwickelung und Ableitung der Complexionen nicht ſo ausführlich gehandelt habe, als es die Wichtigkeit der Involution erfordert. Ich will alſo itzt, ohne Beziehung auf jenes Verfahren (das man nach Gefallen hinterher für ſich vergleichen kann) und zugleich mit einiger Abänderung im Vortrage, die Aufgabe mit ihrer Auflöſung noch einmal vornehmen.

Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe n, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen, zu finden (10; S. 93).

Erſte Auflöſung für die Summe 9, nach Boscowich, in Zahlen (11; S. 93—95).

Zweyte Auflöſung für die Summe n, nach Hindenburg, in Buchſtaben.

I. Als erſte Complexion ſetze man $a^n = a^{n-1}a$; die einzige auf a ſich endende Verbindung der erſten Abtheilung.

Die auf b, c, d . . . nach der Ordnung ſich endenden Verbindungen der übrigen Abtheilungen; überhaupt jede folgende Abtheilung aus der unmittelbar vorhergehenden, (die $m$te aus der $[m-1]$ten) zu entwickeln, befolge man nachſtehende Vorſchriften.

II. Die auf den mten Buchſtaben des Zeigers ſich endenden Complexionen, oder die mte Abtheilung zu finden

α) Vermindere man alle Complexionen der nächſtvorhergehenden (m − 1)ten Abtheilung, die a enthalten, um Ein a, und ſtatt des letzten Buchſtabens jeder ſo verminderten Complexion, ſetze man nun den nächſtfolgenden (ſtatt des [m−1]ten, den mten des Zeigers).

β) Von den ſo (nach α) gefundenen Complexionen vermindere man diejenigen, die m oder mehrere a enthalten, um mmal a, und ſetze dafür, am Ende jeder ſo verminderten Complexion, einen, dem letzten gleichen Buchſtaben (den mten des Zeigers) hinzu; oder, man erhöhe den Exponenten des letzten Buchſtabens um 1.

γ) Auf die Complexionen die (β) gegeben hat wende man das Verfahren (β), und ebendaſſelbe noch weiter auf die dadurch erhaltenen neuen Complexionen, und ſofort immer weiter an, ſo lange ſich dadurch noch Complexionen erzeugen, die m oder mehrere a enthalten. Unter dieſen können auch ſolche ſich ergeben und mit vorkommen, die weniger a, auch gar keins, enthalten; dieſe werden aber, bey weiterer Anwendung der Vorſchriften (α, β) ſogleich übergangen.

Beyſpiel für $n = 9$ und $m = 1, 2, 3 \ldots$ oder,

Auflöſung für die Summe 9, in Buchſtaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; d. i.

In meinen combinatoriſchen Zeichen ausgedrückt,

Auflöſung für

$$ {}^{9}\mathfrak{J}\begin{pmatrix} a, b, c \ldots g, h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 7, 8, 9 \end{pmatrix} $$

1) Für die erſte Abtheilung kommt

Die Verbindung $a^9 = a^8 a$, als erſte und einzige Complexion (I)

2) Für die zweyte Abtheilung, wo $m = 2$, kommen,

Die Verbindung $a^7 b$ (II, α)

und daraus $a^5 b^2$; und daraus $a^3 b^3$; und daraus $a^1 b^4$ (II, β, γ)

3) Für die dritte Abtheilung, wo $m = 3$, kommen,

Die Verbindungen $a^6 c$, $a^4 bc$, $a^2 b^2 c$, $b^3 c$ (II, α)

und daraus $a^3 c^2$, $a^1 bc^2$ (II, β)

und daraus c^3 (II, γ)

und ſo weiter, für die übrigen Complexionen der übrigen Abtheilungen, oder für $m = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, wie ſolche in (13) Seite 98 ſtehen.

Die letzte (hier die 9te) Abtheilung beſteht wieder, wie die erſte, nur aus einer einzigen Complexion (hier aus i, dem 9ten Buchſtaben des Zeigers)

IV.

Erläuterungen über den Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes (Erſte Samml. comb. anal. Abhandl. S. 68-74) von dem Verfaſſer des Beweiſes, G. S. Klügel, Profeſſor zu Halle.

Eine Aeuſſerung des Recenſenten gedachter Sammlung in der Allgem. Literaturzeitung 1796, No. 380 und 381, und einige mir ſchriftlich zugekommene Bemerkungen des Herrn Prof. Rothe in Leipzig, veranlaſſen mich dieſe Erläuterungen über den von mir gegebenen Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für jede Art von Exponenten aufzuſetzen.

Die Recenſion der Sammlung von Abhandlungen über den polynomiſchen Lehrſatz in der A. L. Z. iſt mit Fleiß und Einſicht gemacht; nur eine Bemerkung in derſelben möchte eine Berichtigung nöthig haben. Es iſt die Stelle, S. 587, wo von meinem Beweiſe der Allgemeinheit jenes Lehrſatzes die Rede iſt. Der Recenſent ſagt, meine Schlußart laſſe nichts zu wünſchen übrig, als höchſtens, daß der letzte Satz (ohne Zweifel der Schluß §. 19) mathematiſch in völliger Strenge dargethan, und man gehörig verſichert würde, daß nicht etwa mit dem ſo dunklen Begriffe von Form ein Sprung im Beweiſe verdeckt werde.

Der Recenſent hält alſo die von mir gebrauchte Schlußart (Raiſonnement) für mißlich, und möchte den Satz durch Formeln, welche die Gleichheit ausſagen, bewieſen haben. Sollte aber der Begriff von Form in der Mathematik ſo dunkel ſeyn, als er es hier ſich vorſtellt?

In der Philoſophie mögen die Begriffe, Form und Formal, Dunkelheit haben; und ich geſtehe, daß die Ausdrücke, formaler Grundſatz, formale Wiſſenſchaft, formaler Begriff, mir immer einiges Beſinnen nöthig machen. Wenn Form in der Philoſophie auch nicht vieldeutig iſt, ſo iſt es doch ein ſo vielbefaſſender Begriff, daß man Mühe hat, eine beſtimmte, deutliche Vorſtellung jedesmal davon zu faſſen. Aber in der Mathematik iſt ja Form ein ganz geläufiger, völlig beſtimmter Begriff: Art der Zuſammenſetzung einer Größe aus andern Größen. So iſt der binomiſche Lehrſatz die Form der Potenz einer zweytheiligen Größe, als eines Aggregats von Producten aus den Potenzen der beyden Theile der Wurzel. Die Cardaniſche Regel iſt die Form der Wurzel einer cubiſchen Gleichung, ſo fern dieſe Wurzel nur eine einzige iſt; und enthält auch drey mögliche Wurzeln in einer unmöglichen Form verhüllt. Form einer Reihe, Form der Glieder einer Reihe, ſind gewöhnliche Ausdrücke. Ja die ganze Mathematik, auf das Kürzeſte und treffendſte erklärt, iſt Wiſſenſchaft der Formen der Größen. Form iſt der Begriff, wodurch Mathematik möglich iſt. Die formloſe Größe gehört der Metaphyſik zu.

In meinem Beweiſe habe ich ausdrücklich die Erklärung mit einfließen laſſen: „Die Formen der α, β, γ, etc ſind „dieſelben mit den Formen der a, b, c, etc; das heißt, je„ne werden aus a, b, c . . . und dem Exponenten m, auf „eine ähnliche Art beſtimmt, als wie a, b, c . . . aus „α, β, γ . . . und dem Exponenten n.“ Gleich darauf erkläre ich noch für einen beſtimmten Fall, was es heiße, einerley Form haben.

Eine Form kann ſchwer zu faſſen ſeyn, wie z. B. die Form des polynomiſchen Satzes, allein der Erweis von der Uebereinſtimmung der Formen wird durch die verwickelte Beſchaffenheit derſelben nicht erſchwert oder unſicher.

Der von mir vorgetragene Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für bejahte gebrochne Exponenten a) beruht auf dem Princip der Aehnlichkeit, wenn ich mich des jetzt von den Philoſophen häufig gebrauchten Ausdrucks, Princip, bedienen darf, oder deutlicher, es kommt bey dieſem Beweiſe alles auf Aehnlichkeit, nicht auf Gleichheit an. Iſt die Aehnlichkeit der Functionen erwieſen, ſo iſt der Satz ſtreng mathematiſch erwieſen. Das von mir angewandte Verfahren iſt in dem Geiſte der Geometrie, die häufig Uebereinſtimmung der Form, ohne Gleichheit der Größe, darlegt. dagegen in der Analyſis faſt immer Verſchiedenheit der Form, bey Gleichheit der Größe, dargethan wird. Daher kann meine Schlußart überraſchend ſcheinen, wie ſie es dem Recenſenten in der A. L. Z. geweſen iſt. Euler nennt es ſchon ein ratiocinium non vulgare, daß bey der Multiplication von $1 + \frac{m}{1}. x + \frac{m.m-1}{1.2} x^2 +$ etc. durch $1 + \frac{n}{1}. x + \frac{n.n-1}{1.2} x^2 +$ etc. die ratio compoſitionis (d. i. Form) der Coefficienten in dem Producte nicht von der Beſchaffenheit der Größen, m, n, abhange, ſie mögen gan-

---

a) Der Beweis des Lehrſatzes für negative ganze Exponenten, in der Sammlung von Abhandlungen §. 18. S. 71, iſt weſentlich derſelbe mit dem, welchen ich in dem Anhange zu meiner analytiſchen Trigonometrie, 1770, für den binomiſchen Lehrſatz vorgetragen habe. Aber der Bewais für bejahte gebrochne Exponenten iſt ganz anders gefaßt, als der a. a. O. für den binomiſchen Lehrſatz, welches der Herr Verf. der Recenſion, der des ältern Beweiſes gedenkt, nicht bemerkt zu haben ſcheint.

ze oder irgend andere Zahlen bedeuten: De theoremate binomiali §. 6. Comm. Petrop. novi. T. XIX. a. a. 1774.

Bey dem Beweiſe der Form des polynomiſchen Lehrſatzes für negative ganze Exponenten, weiß ich keine Schwierigkeit zu erdenken. Es wird dabey nur, wie bey dem Beweiſe für gebrochne Exponenten, der Satz als bekannt und erwieſen vorausgeſetzt, daß zwey gleiche Functionen von einer veränderlichen z, die von den unveränderlichen Größen in denſelben unabhängig iſt, auch identiſch ſind, das heißt, daß die zu derſelben Potenz von z gehörigen Coefficienten einander gleich ſind b)). Aus den Gleichungen für die Coefficienten in dem Quotienten zweyer Potentialgrößen laſſen dieſe Coefficienten ſich durch die gewöhnliche Buchſtabenrechnung finden. Die Rechnung aber würde weitläufig werden, und nur eine Induction gewähren. Darum muß man ſie entbehrlich zu machen ſuchen, welches auf eine völlig einleuchtende Art in §. 18. geſchehen iſt.

Dieſer leichte Fall mag aber dienen es deutlich zu machen, wie man aus der Aehnlichkeit der Größen, wodurch andere beſtimmt werden, die Form der letztern herleiten könne. Es ſey

$$\frac{(a+bz+cz^2+\text{etc})^p}{(a+bz+cz^2+\text{etc})^q} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$$

und p ſowohl als q ganze poſitive Zahlen. Man ſetze

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^q = \alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc}$$

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^p = \alpha'+\beta' z+\gamma' z^2+\delta' z^3+\text{etc}$$

---

b) In Kästners Analyſis endlicher Größen §. 624 der 3ten Aufl. ſind zweyerley Beweiſe dieſes Satzes gegeben.

wo α, β, γ, etc; α', β', γ', etc durch den polynomiſchen Lehrſatz gegeben werden. Nun iſt

$$\begin{array}{l} A\alpha + B\alpha.\,z + C\alpha.\,z^2 + D\alpha.\,z^3 + \text{etc} \\ \quad + A\beta.\text{〃} + B\beta.\text{〃} + C\beta.\text{〃} \\ \qquad\quad + A\gamma.\text{〃} + B\gamma.\text{〃} \\ \qquad\qquad\quad + A\delta.\text{〃} \\ = \alpha' + \beta' z + \gamma' z^2 + \delta' z^3 + \text{etc} \end{array}$$

Die Coefficienten, die in beyden Theilen der Gleichung zu einerley Potenz von z gehören, ſind gleich, daher A, B, C etc, aus den Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc beſtimmt werden.

Die Größen α, β, γ etc ſind denen α', β' γ' etc ähnlich, das heißt, jene werden aus a, b, c etc und q, eben ſo zuſammengeſetzt, als wie dieſe aus a, b, c etc und p. Wird nun der obige Bruch umgekehrt, ſo werden in dem Werthen von A, B, C etc die Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc gegenſeitig vertauſcht. Da dieſe ſich ähnlich, und bloß durch die Werthe von q und p verſchieden ſind, ſo ſind die Coefficienten A, B, C etc in dem Werthe des gegebenen und des umgekehrten Bruchs auch nur allein durch die Vertauſchung von p und q verſchieden. Alſo hat
$(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{p-q}$ einerley Form mit
$(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{q-p}$; oder $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^{m}$ hat dieſelbe Form mit $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^{-m}$.

Dieſer Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für negative ganze Exponenten iſt dem in §. 18. S. 71 der Sammlung ꝛc. aus dem Grunde vorzuziehen, weil er mit dem Beweiſe für gebrochene poſitive Exponenten gleichartig iſt. Wer die hier gebrauchte Schlußart noch nicht einleuchtend findet, der ſtelle die Coefficienten A, B, C, D etc nur involutoriſch hin, z. B. $D = \frac{\delta'}{\alpha} - \frac{C\beta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{x} - \frac{A\delta}{\alpha}$, und bezeichne die Coefficienten für den Quotienten aus dem umgekehrten Bruche durch A', B', C', D' etc ſo iſt $D' = \frac{\delta}{\alpha'} - \frac{C'\beta'}{\alpha'} - \frac{B'\gamma'}{\alpha'} - \frac{A'\delta'}{\alpha'}$. In dieſem Coefficienten und in D ſind die geſtrichelten und ungeſtrichelten Coefficienten aus beyden Potentialgrößen gegenſeitig vertauſcht; beyde ſind alſo nur durch die Vertauſchung der Exponenten p und q verſchieden.

An dem Beweiſe des polynomiſchen Lehrſatzes für bejahte gebrochne Exponenten finde ich nichts weſentliches zu ändern. Inzwiſchen will ich ihn mit einigen kleinen Erweiterungen des Vortrags wiederholen, wenn vielleicht bey dem Beſtreben nach Kürze gerade etwas ausgelaſſen ſeyn ſollte, was einem andern nöthig iſt, um den rechten Geſichtspunct zu treffen.

Die Potentialgröße $(a+bz+cz^2+dz^3+\text{etc})^m$ läßt ſich in eine andere $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc})^n$ verwandeln, wenn m und n ganze Zahlen ſind, wie hier noch angenommen werden muß. Denn jede dieſer Potentialgrößen verwandle man in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe, zufolge des polynomiſchen Lehrſatzes für ganze bejahte Exponenten. Setzt man die Coefficienten derſelben Potenz in beyden Reihen ſich gleich, ſo ſind die beyden Reihen, alſo auch die Potenzialgrößen gleich. Die particularen Gleichungen ſind

$$a^m = \alpha^n$$
$$^m\mathfrak{A}a^{m-1}b = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\beta$$
$$^m\mathfrak{A}a^{m-1}c + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2 = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\gamma + {}^n\mathfrak{B}\alpha^{n-2}\beta^2$$
u. ſ. w.

Hieraus läßt ſich die Potenzialgröße $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$ durch eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe darſtellen; allein das Geſetz der Coefficienten würde nur auf einer Induction beruhen. Darum iſt es auch hier nöthig, dieſe nicht genugthuende Rechnung zu vermeiden. Inzwiſchen iſt es nützlich, die erſtern Glieder jener Größe zu berechnen, um das hier gebrauchte Verfahren ſich deutlicher zu machen.

Die Formen der Coefficienten α, β, γ etc ſind dieſelben mit den Formen der Coefficienten a, b, c etc, nach der vorher gegebenen Erklärung dieſes Ausdrucks, wie es die Gleichungen zur wechſelſeitigen Beſtimmung dieſer Größen zeigen. Oder, die Größen α, β, γ etc und a, b, c etc ſind, in ihrer Folge genommen, ſich analytiſch ähnlich. Alſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$, einerley Form mit $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, folglich auch mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, wenn man nämlich nur auf die Art der Zuſammenſetzung, nicht auf die Quantität, das iſt, wenn man bloß auf die analytiſche Aehnlichkeit ſieht. Beyde Functionen von z, nämlich die erſte und dritte, entwickelt, unterſcheiden ſich nur dadurch, daß in den Coefficienten und Exponenten von a die Größen m und n mit einander vertauſcht ſind. Setzt man $n = 1$, ſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^m$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{1}{m}}$, die Potenz mit der Wurzel.

Die erſtere ſey $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$
die zweyte $= A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \text{etc.}$

ſo ſind die Coefficienten derſelben Potenz ſich ähnlich, und nur durch die Größen m und $\frac{1}{m}$, welche mit einander vertauſcht ſind, verſchieden. Erhebt man beyde Functionen auf dieſelbe Potenz mit dem ganzen Exponenten p, ſo ſind die Coefficienten der entwickelten Potenz $(A+Bz+Cz^2+\text{etc})^p$ und $(A'+B'z+C'z^2,+\text{etc})^p$ nur durch die gegenſeitig verwechſelten Größen m und $\frac{1}{m}$ verſchieden. Alſo hat

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{mp}$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$, ſo daß in den entwickelten Poteuzialgrößen, in dieſer $\frac{p}{m}$ ſteht, wo in jener mp ſich findet. Setzt man ſtatt mp irgend eine andere ganze Zahl r, ſo wird zwar die Größe, aber nicht die Form geändert, und es hat folglich
$(a+bz+cz^2+\text{etc})^r$ eiuerley Form mit
$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$

Der Beweis für negative gebrochne Exponenten, bleibt ſo wie er in §. 20 meines Aufſatzes gegeben iſt.

Ein paar Erläuterungen über die beyden Formeln des polynomiſchen Lehrſatzes mögen bey dieſer Gelegenheit noch Platz finden.

Die Formel für $(a+b+c+d+\text{etc})^m$, wo m eine ganze bejahte Zahl iſt, in §. 16. S. 67 meines Aufſatzes in der erſten Sammlung, bricht ab, wenn der Exponent von a Null iſt. Das Glied, worin a^0 der Factor iſt, enthält alle Partialproducte von m Factoren, unter welchen kein a vorkommt. Alle übrigen Partialproducte, die a enthalten, ſind unter den vorhergehenden Gliedern der Formel befindlich, in dem erſten Gliede der Formel, a^m; in dem zweyten diejenigen, welche a^{m-1} enthalten; und ſo ferner, bis auf das vorletzte, worinn a mit $m-1$ Factoren aus der Reihe, b, c, d etc befindlich iſt.

Das Polynomium ſey $a+bz+cz^2 \ldots . + kz^r = Z$. Wird dieſes auf die mte Potenz erhoben, ſo iſt die höchſte Potenz von z in derſelben, die mit dem Exponenten mr, und die Reihe bricht mit dem $(mr+1)$ten Gliede ab. Ein Glied dieſer Reihe ſey Lz^{λ}. Es enthält L alle die Partialproducte von m Factoren aus den Größen a, b, c etc, in welchen die Summe der Abſtände von a dem Exponenten λ gleich iſt, wobey alſo für a ſelbſt der Abſtand als Null gerechnet wird. Je weniger Factoren aus der Reihe b, c, d . . . . k genommen werden, deſto entferntere müſſen es ſeyn, um die Summe der Abſtände voll und ſo groß als die Zahl λ zu machen. Iſt $\lambda < r$, und bezeichnet man den Coefficienten von z^{λ} in Z durch $\varkappa(\lambda+1)$, ſo iſt das erſte Glied von $L = \mathfrak{A}a^{m-1}. \varkappa(\lambda+1)$. Das letzte Glied iſt $\overset{\lambda-1}{\mathfrak{A}}a^{m-\lambda}b^{\lambda}$, wenn $m > \lambda$ iſt. Es bedeutet $\overset{\lambda-1}{\mathfrak{A}}$ den λten Binomialcoefficienten, oder den $(\lambda-1)$ten nach dem erſten $\mathfrak{A}$. Wenn man nemlich von den Größen c, d etc keine zu Factoren nimmt, ſo muß man λ Factoren b nehmen, mehr als wenn von jenen eine oder mehrere aufgenommen werden. Iſt $m < \lambda$, ſo bricht der Coefficient L mit dem Gliede ab, das den Factor a^0 hat, oder welches alle die Partialproducte befaßt, in welchen kein a als Factor vorkommt. Die Summe der Abſtände der Factoren in jedem Partialproducte von dem Anfangsgliede a kann den Exponenten m der Potenz nicht überſchreiten.

Der Fall iſt noch zu betrachten, da der Exponent r des letzten Gliedes in Z kleiner iſt als λ. Alsdann fallen vom Anfange in L eins oder mehrere Glieder weg. Iſt $\lambda > r$, ſo fehlt wenigſtens das erſte Glied in L. In dem zweyten Gliede beſtehen die Producte aus $m-2$ Factoren a, und den Größen $b, c \ldots k$. Die dazu gehörige Potenz von z iſt, wenn ſie am niedrigſten iſt, z^2, am höchſten, z^{2r}. Iſt nun $\lambda > 2r$, ſo fehlt das zweyte Glied von L. Auf eine ähnliche Art erhellt, daß das dritte Glied von L fehlt, wenn $\lambda > 3r$ iſt; das vierte, wenn $\lambda > 4r$ iſt. u. ſ. w.

V.

Localformeln für höhere Differentiale; von J. F. Pfaff Profeſſor der Mathematik zu Helmſtädt. [a]

— — Leges, quae in differentialibus omnium ordinum obſervantur, per ſe ſunt notatu digniſſimae, atque ad alias inventiones deducere poſſunt (L. Euler Inſtitt. Calc. Diff. P. I. Cap. V. §. 177.)

§. 1. Satz.

Es iſt $d^n(z^m) = 1.2.3..n.\ p^m \varkappa (n+1)$;
für die Scale:

$$p\left(z, \frac{dz}{1}, \frac{d^2z}{1.2}, \frac{d^3z}{1.2.3}, \ldots\right)$$ [b]

---

[a] Ich erhielt dieſen lehrreichen Aufſatz gegen das Ende des Jahres 1796, alſo für die erſte Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen zu ſpät; er folgt alſo nun in der zweyten Sammlung. H.

[b] Die Bedeutung der hier gebrauchten Zeichen und Worte ſetze ich hier, als bereits hinlänglich bekannt, voraus.

Beweis. 1) Für $n = 1$ iſt der Satz einleuchtend, da $p^m\varkappa 2 = mz^{m-1}dz = d(z^m)$.

2) Nun iſt $d^n(z^{m+1}) = d^{n-1}(dz^{m+1})$ $= (m+1)\, d^{n-1}(z^m dz)$. Sieht man hier z^{m+1} und $z^m dz$ als Producte von z^m in z und dz an, und differentiirt ſolche nach der bekannten Regel, ſo wird

$$zd^nz^m + ndzd^{n-1}z^m + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2zd^{n-2}z^m$$

$$+ \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}d^3zd^{n-3}z^m + \ldots = (m+1)dzd^{n-1}z^m$$

$$+(m+1)(n-1)d^2zd^{n-2}z^m + (m+1)\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}d^3zd^{n-3}z^m + \ldots,$$

oder $zd^nz^m = (m+1-n)\,dzd^{n-1}z^m$

$$+ \frac{(n-1)}{1.2}(2m+2-n)\,d^2zd^{n-2}z^m$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}(3m+3-n)\,d^3zd^{n-3}z^m + \ldots$$

Vermittelſt dieſer Gleichung wird das nte Differential von z^m auf alle vorhergehende reducirt c).

3) Gilt nun der Satz für $d^{n-1}z^m$, $d^{n-2}z^m$, … dz^m, und werden demſelben gemäß dieſe Differentialien ausgedrückt, ſo ergiebt ſich

$$\frac{zd^nz^m}{1.2\ldots n-1} = (m+1-n)\,p\varkappa 2.p^m\varkappa n + (2m+2-n)\,p\varkappa 3.p^m\varkappa(n-1)$$

$$+(3m+3-n)\,p\varkappa 4.\,p^m\varkappa(n-2) + \ldots\ldots$$

---

c) Dieſe Gleichung enthält alſo für die höhern Differentiale von z^m eine recurrirende Formel, welche auch neben der im Satze ausgedrückten ſogenannten independenten, ihren Nutzen hat.

Was rechter Hand des Gleichheitszeichens ſteht, iſt nach der bekannten in Localzeichen ausgedrückten Formel für das Infinitinomium, $= np\varkappa 1 . p^m\varkappa (n+1)$ d); alſo wird

$$\frac{d^n z^m}{1.2..n} = p^m\varkappa(n+1),$$

d. i. der Satz gilt auch für n, folglich allgemein e).

§. 2. **Satz.** Für eine beliebige Anzahl von Größen, u, v . . w, x, iſt

$$\frac{d^n\,(u^\alpha v^\beta\;.\;.\;.\;w^\gamma x^\delta)}{1.2.3\,.\,.\,n} = (p^\alpha q^\beta\,.\,.\,.\,r^\gamma s^\delta)\,\varkappa(n+1),$$

für die Scalen:

$$p\left(u, du, \frac{d^2u}{1.2}, \frac{d^3u}{1.2.3}, \ldots\right)$$

$$q\left(v, dv, \frac{d^2v}{1.2}, \frac{d^3v}{1.2.3}, \ldots\right)$$

; ; ; ; ;

---

d) Käſtners Analyſ. d. Unendl. §. 56. XI; E. S. c. a. A. S. 291.

e) Das iſt wieder ein Beyſpiel, da man, anſtatt, wie in dem bekannten Schluſſe geſchieht, einen Satz für n anzunehmen, ſolchen bis n annehmen muß. Vergl. E. S. c. a. A. S. 145. In jenem Schluſſe ſind die Prämiſſen einfach, hier ſind ſie zuſammengeſetzt, nehmlich aus ſo viel einzelnen Sätzen, als n Einheiten enthält. Die Concluſion geht beydemal auf n+1. Daher auch in dieſer Form, der Schlußart die Benennung zukäme, welche ihr Oechliz beylegte (Käſtner über die geometriſche Axiome; in Eberhards philoſoph. Magaz. II. B. 4. St.) Durch einen Druckfehler ſteht dort (S. 428) Orchliz. Ohne Zweifel iſt aber die hier gewählte Leſart die richtige Oechlizens Namen haben einige vortreffliche Aufſätze, und noch mehr, ſein Freund, erhalten. (Hamburg. Magaz. XVII, B)

$$r\left(w,\ dw,\ \frac{d^2w}{1.2},\ \frac{d^3w}{1.2.3},\ldots\right)$$

$$s\left(x,\ dx,\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ldots\right)$$

Beweis. Sieht man den letzten Factor x^δ als den zweyten, und alle vorhergehende zuſammen als den erſten an, ſo iſt

$$d^n(u^\alpha.y^\beta..w^\gamma.x^\delta) = u^\alpha v^\beta..w^\gamma.d^n x^\delta$$

$$+nd(u^\alpha v^\beta..w^\gamma)d^{n-1}x^\delta + \frac{n(n-1)}{1,2}\,d^2(u^\alpha v^\beta..w^\gamma)d^{n-2}x^\delta + \ldots$$

Gilt nun der Satz für das Product $u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma$, ſo wird jenes nte Differential, mit Zuziehung des erſten Satzes (§. 1.),

$$= 1..n \left\{ \begin{array}{l} (p^\alpha q^\beta..r^\gamma)\varkappa 1.s^\delta\varkappa(n+1) + (p^\alpha q^\beta..r^\gamma)\varkappa 2.s^\delta\varkappa(n) \\ +(p^\alpha q^\beta..r^\gamma)\varkappa 3\, s^\delta\varkappa(n-1)+\ldots \end{array} \right\}$$

$$= 1.2..n.\ (p^\alpha q^\beta..r^\gamma.s^\delta)\varkappa\ (n+1),$$

nach der bekannten Localformel für Producte von Reihen. So kann man demnach von den vorhergehenden Factoren auf jeden folgenden ſchließen, und da der Satz für einen gilt (§. 1), ſo gilt er allgemein.

§. 3. **Anmerkung.** Dieſe allgemeine Formel (§. 2) hat Herr Prof. **Rothe** aus dem Tayloriſchen Satze abgeleitet (Math. Archiv. II. Hft. S. 230; die dortigen Buchſtaben ſind zur Vergleichung auch hier beybehalten). Einen andern Beweis aufzuſuchen, veranlaßte mich folgende Betrachtung. In dem Tayloriſchen Satze wird 1) ein Differential (dz, l. c) als beſtändig vorausgeſetzt; 2) werden die Größen u, v, . . . w, x, angenommen als Functionen einer Größe z, wodurch ſie auch Functionen von einander ſelbſt werden. Nun gilt aber der Satz (2) allgemein, ohne Rückſicht auf irgend ein beſtändiges Differential, und wenn auch die Größen u, v, . . . w, x, von einander ganz unabhängig ſind. Es iſt zwar wahr, theils, daß das Verhalten jener Größen gegen z, alſo auch unter ſich, unbeſtimmt gelaſſen wird, theils, daß, wo höhere Differentiale in der Anwendung vorkommen, irgend ein beſtändiges zum Grunde liegt. Indeſſen läßt ſich das Differentiiren auch bloß als eine nach den Regeln eines eigenen Algorithmus anzuſtellende analytiſche Operation betrachten, wobey man an die Bedeutung, wie Anwendungen, z. B. geometriſche, mechaniſche, ſie erfordern, nicht zu denken hat [f]. Aus dieſem nicht unfruchtbaren, und auch ſchon von Leibniz gefaßten Geſichtspuncte, ſchien es mir nicht überflüſſig, den Satz (3) allein aus den Grundregeln des Differentiirens, in Verbindung mit den Fundementalſätzen von Reihenpotenzen und Producten, herzuleiten.

§. 4. **Aufgabe.** X ſey irgend eine Function von x, aus ihren Differentialien, wenn dx beſtändig iſt, dieſelbigen herzuleiten, wenn kein beſtändiges Differential angenommen wird.

Auflöſung. 1) Es werde jede Function von x durch folgende Reihe ausgedrückt:

---

[f] Es würde ein großes Misverſtändnis ſeyn, wenn man in dieſer Behauptung eine Empfehlung des blos maſchinenmäßigen Rechnens fände, oder bey dem Vortrag der Gründe der Differenzialrechnung, von der hier erwähnten Vorſtellungsart ausgehen wollte, und nicht vielmehr ſolche Begriffe vom Unendlichen, von Gränzen u. ſ. w., zum Grunde legte, dergleichen insbeſondere aus H. HR. Käſtners Schriften hinlänglich bekannt ſind. Ein neues Werk hierüber von H. L'Huilier (Princ. Calc. Diff. et Int. Expoſ. elem.) iſt als ein Muſter ächter geometriſcher Schärfe und Methode, auf Analyſis angewandt, zum Studium vorzüglich zu empfehlen.

$$X = ax^{\alpha} + a'x^{\alpha+\beta} + a''x^{\alpha+2\beta} + \ldots .$$

ſo iſt $d^nX = ad^n(x^{\alpha}) + a'd^n(x^{\alpha+\beta}) + a''d^n(x^{\alpha+2\beta}) +$ etc,

oder nach (§. 1),

$$= 1.2..n\,(ap^{\alpha}\varkappa(n+1) + a'p^{\alpha+\beta}\varkappa(n+1) + a''p^{\alpha+2\beta}\varkappa(n+1) + \text{etc},$$

für die Scale

$$p\left(x,\ \frac{dx}{1},\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right)$$

2) Nun nehme man folgende andere Scale an:

$$P\left(\frac{dx}{1},\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right)$$

ſo iſt, für jeden Exponenten r,

$$p^r\varkappa(n+1) = rx^{r-1}P\varkappa n + \frac{r(r-1)}{1.2}x^{r-2}P^2\varkappa(n-1) + \ldots.$$ g)

Vermittelſt dieſer Formel läßt ſich jedes Glied der Reihe für d^nX (1) in mehrere auflöſen; ordnet man nun nach dieſer Verwandlung diejenigen Glieder zuſammen, worinn einerley Potenz von P vorkommt, ſo laſſen ſich dieſe Glieder für ſich ſummiren, und ſo ergiebt ſich die Summe jener Reihe, durch ein Verfahren, demjenigen ähnlich, deſſen Anwendungen bey Summationen ich anderswo zu entwickeln verſucht habe.

g) Unter Annahme der beyden Scalen $p(a, b, c, d \ldots)$; $P(b, c, d \ldots)$ iſt immer $p^r\varkappa\,(n+1) = \overset{r}{\mathfrak{A}}a^{r-1}P\varkappa n + \overset{r}{\mathfrak{B}}a^{r-2}P^2\varkappa(n-1) + \overset{r}{\mathfrak{C}}a^{r-3}P^3\varkappa(n-2) + \ldots$ Dieſe Relation folgt ſogleich aus der Localformel für das Polynomium (C. S. c. a. A. S. 13. Anm. k)

3) Es wird nehmlich $\frac{d^n X}{1.2\,..\,n} =$

$$\begin{array}{l} a\alpha x^{\alpha-1} \\ + a'(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1} \\ + a''(\alpha+2\beta)x^{\alpha+2\beta-1} \\ + \ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P\varkappa n + a\alpha \frac{(\alpha-1)}{1.2} x^{\alpha-2} \\ + a' \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.\,2} x^{\alpha+\beta-2} \\ + a'' \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)}{1.\,2} \\ \qquad\qquad (x^{\alpha+2\beta-2} \\ + \ldots\ldots \end{array} \right\} P^2\varkappa(n-1)+\ldots$$

Nun iſt $a\alpha x^{\alpha-1} + a'(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}$

$$+ a''(\alpha+2\beta)x^{\alpha+2\beta-1} + \ldots = \frac{dX}{dx},$$

$$a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a'(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2}$$

$$+ a''(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)x^{\alpha+2\beta-2} + \ldots = \frac{d^2X}{dx^2}$$

das Differential dx als beſtändig angenommen. Setzt man dieſe Differentiation fort, und bezeichnet das erſte, zweyte . . . nte Differentialverhältniß von X, für ein beſtändiges dx, durch X', X'', . . X''', ſo erhält man

$$\frac{d^n X}{1.2\,..\,n} = X'.P\varkappa n + \frac{X''}{1.2} P^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{X'''}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \ldots + \frac{X^n}{1.2\,..\,n} .P^n\varkappa 1 .$$

4) Gebraucht man anſtatt der Localzeichen die combinatoriſchen, ſo iſt für

den Zeiger

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{dx}{1}, & \frac{d^2x}{1.2}, & \frac{d^3x}{1.2.3}, & \cdots \end{matrix} \right\},$$

$P\varkappa n = \mathfrak{a}^n A$, $P^2\varkappa(n-1) = \mathfrak{b}^n B$,
$P^3\varkappa(n-2) = \mathfrak{c}^n C$, u. ſ. w.; [h]) alſo

$$\frac{d^nX}{1.2..n} = X'.\mathfrak{a}^nA + \frac{X''}{1.2}\mathfrak{b}^nB$$

$$+ \frac{X'''}{1.2.3}\mathfrak{c}^nC + \ldots + \frac{X^n}{1.2..n}\mathfrak{n}^n\mathcal{N}$$

§. 5. Zuſatz; $d^n \log x$ und $d^n e^x$

Von der nur gefundenen Formel laſſen ſich mannichfaltige Anwendungen machen. Am einfachſten werden dieſe für $X = \log x$, und $= e^x$.

1) Es iſt nehmlich

$$\frac{d^r \log x}{dx^r} = \pm 1.2.3..(r-1)x^{-r},$$

wenn dx als beſtändig betrachtet wird. Alſo wird, ohne Rückſicht auf eim beſtändiges Differential

$$\frac{d^n \log x}{1.2\ldots n} = \frac{1}{x}P\varkappa n - \frac{1}{2x^2}P^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{1}{3x^3}P^3\varkappa(n-2)\ldots \pm \frac{1}{nx^n}P^n\varkappa(1),$$

oder

$$= \frac{1}{x}\mathfrak{a}^nA - \frac{1}{2x^2}\mathfrak{b}^nB + \frac{1}{3x^3}\mathfrak{c}^nC - \ldots \pm \frac{1}{nx^n}\mathfrak{n}^n\mathcal{N},$$

---

[h]) C. S. c. a. A. S. 230.

für Scale und Zeiger:

$$P\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3 & \ldots \\ dx, & \frac{d^2x}{1.2}, & \frac{d^3x}{1.2.3}, & \ldots \end{matrix}\right\}$$ [i]

2) Für $X = e^x$ iſt $\frac{d^r e^x}{dx^r}$, im erſten Sinn $(1) = e^x$, alſo, im zweyten Sinne, $\frac{d^n e^x}{1.2..n}$

$$= e^x\left(P x n + \frac{1}{1.2} P^2 x (n-1) + \frac{1}{1.2.3} P^3 x (n-2) + .. + \frac{1}{1.2..n} P^n x 1\right)$$

$$= e^x\left(a^n A + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + .. + \frac{n^n \mathcal{N}}{1.2..n}\right),$$

wo Scale und Zeiger, wie in (1), bleiben.

§. 6. Anmerkung. Die erſte Formel des vorhergehenden Zuſatzes, in combinatoriſchen Zeichen ausgedrück iſt in der Fortſetzung der vorerwähnten Abhandlung (Archiv IV. Heft. S. 431) aus andern Gründen abgeleitet; die zweyte folgt aus der ebendaſelbſt (S. 433. §. 14) vermittelſ des Tayloriſchen Satzes erwieſenen Formel, wenn das dortige $z = e^x$, alſo $\log z = x$ geſetzt wird.

Noch iſt mir folgendes Verfahren beygefallen, wodurch beyde Formeln auf den erſten Satz (§. 1) reducirt werden. Es iſt nehmlich $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, für $i = \infty$. [k]

---

i) Nach der von Herrn Prof. Hindenburg gebrauchten Bezeichnung: Probl. max. univerſ. ad ſerier. reverſ. paralipom. p. IV. not. b.

k) L. Euler Introductio etc. Cap. VII. §. 115.

Alſo iſt nach (§. 1), für die Scale:

$$p\left(1+\frac{x}{i}, \frac{dx}{i}, \frac{d^2x}{1.2.i}, \frac{d^3x}{1.2.3.i}, \dots\right),$$

$\frac{d^ne^x}{1.2.3..n} = p^i\varkappa(n+1).$ Nun ſey

$$p = 1 + \frac{x}{i} + \frac{udx}{i} + \frac{u^2d^2x}{1.2.i} + \dots$$

$$= 1+\frac{x}{i}+\frac{P}{i},\ \text{ſo iſt}\ p^i = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$$

$$+ i\left(1+\frac{x}{i}\right)^{i-1}\frac{P}{i} + i\frac{(i-1)}{1.2}\left(i+\frac{x}{i}\right)^{i-2}\frac{P^2}{i^2}+\dots,$$

oder, wenn für $i-1$, $i-2$, u. ſ. w. geſetzt wird i, und e^x für

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^i;\ p^i = e^x\left(1+P+\frac{P^2}{1.2}+\frac{P^3}{1.2.3}+\dots\right),$$

folglich $\frac{d^ne^x}{1.2..n} = p^i\varkappa(n+1) =$

$$e^x\left(P\varkappa n + \frac{1}{1.2}P^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3}P^3\varkappa(n-2)+\dots\right),$$

wie vorhin.

Eben ſo wird $d^n\log x$ gefunden, wenn man den Ausdruck: $\log x = i\left(x^{\frac{1}{i}} - 1\right)$ gebraucht 1)

§. 7. **Aufgabe. Das nte Differential von ſin x und coſ x zu finden, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential.**

---

1) L. Euler I. c. §. 119.

Auflöſung. 1) Setzt man in der allgemeinen Formel (§. 4) $X = \sin x$, ſo iſt, wenn dx beſtändig iſt, $\frac{d^{2r-1}X}{dx^{2r-1}} = \pm \cos x$; $\frac{d^{2r}X}{dx^{2r}} = \mp \sin x$, wo die obern Zeichen für ein ungerades, die untern für ein gerades r gelten. Alſo wird, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential,

$$\frac{d^n \sin x}{1.2..n} = \cos x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-4) - \ldots\right)$$

$$- \sin x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1.2.3.4} P^4\varkappa(n-3)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1..6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots\right),$$

für die Scale $P\left(\frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots.\right)$.

Die Glieder dieſer Ausdrücke werden fortgeſetzt, bis man auf $\varkappa 2$ und $\varkappa 1$ kommt.

2) Für $X = \cos x$, iſt $\frac{d^{2r-1}X}{dx^{2r-1}} = \mp \sin x$, $\frac{d^{2r}X}{dx^{2r}} = \mp \cos x$, für ein beſtändiges dx; alſo allgemein,

$$\frac{d^n \cos x}{1.2.3..n} = -\sin x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-4) - \ldots\right)$$

$$- \cos x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \frac{1}{1..6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots\right)$$

für die vorige Scale.

§. 8. **Anmerkung.** Die vorhergehenden beyden Formeln laſſen ſich auch aus §. (5) herleiten, mit Hülfe der Ausdrücke:

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$ [m]).

So wird nehmlich

$$d^n \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d^n(e^{x\sqrt{-1}} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d^n\,(e^{-x\sqrt{-1}}).$$

Für die Scale

$$p\left(dx\sqrt{-1},\ \frac{d^2x}{1.2}.\sqrt{-1},\ \frac{d^3x}{1.2.3}.\sqrt{-1},\ \ldots .\right)$$

$$\text{iſt}\ \frac{d^n\,(e^{x\sqrt{-1}})}{1.2.3\ldots n}$$

$$= e^{x\sqrt{-1}}\left(p\varkappa n + \frac{1}{1.2}\,p^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3}\,p^3\varkappa(n-2) + \ldots .\right);$$

eben ſo für die Scale

$$\pi\left(-dx.\sqrt{-1},\ -\frac{d^2x}{1.2}.\sqrt{-1},\ -\frac{d^3x}{1.2.3}.\sqrt{-1},\ \ldots\right),$$

$$\text{iſt}\ \frac{d^n\,(e^{-x\sqrt{-1}})}{1.2\ldots n}$$

$$= e^{-x\sqrt{-1}}\left(\pi\varkappa n + \frac{1}{1.2}\,\pi^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3}\,\pi^3\varkappa(n-2) + \ldots\right).$$

Nimmt man nun folgende Scale an:

$$P\left(dx,\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right),$$ ſo iſt

---

m) Käſtner Anal. d. Unendl. §. 320.

$p^r\varkappa\rho = (\sqrt{-1})^r . P^r\varkappa\rho$ [n] $= \pm\sqrt{-1} . P^r\varkappa\rho$, oder $= \mp P^r\varkappa\rho$ [n], je nachdem r ungerad oder gerad iſt; eben ſo

$\pi^r\varkappa\rho = (-\sqrt{-1})^r . P^r\varkappa\rho = \mp\sqrt{-1} . P^r\varkappa\rho$, oder $= \mp P^r\varkappa\rho$.

Folglich wird $d^n(e^{\pm x\sqrt{-1}})$

$$= e^{\pm x\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \pm\sqrt{-1} . P\varkappa n - \frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) \\ \mp \frac{\sqrt{-1}}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \ldots \end{array} \right\}$$

Daraus ergiebt ſich $\frac{d^n \sin x}{1.2.3\ldots n}$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-1} . P\varkappa n - \frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) \\ - \frac{\sqrt{-1}}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) - \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-1} . P\varkappa n + \frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) \\ - \frac{\sqrt{-1}}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= \cos x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-5) - \ldots \right)$$

$$- \sin x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \frac{1}{1..6} P^5\varkappa(n-5) - \ldots \right)$$

Eben ſo erhält man den Ausdruck für $d^n \cos x$, welcher auch

---

[n] Für die beyden Scalen; $p(a, b, c, d, \ldots)$ $P(ma, mb, mc, md, \ldots)$ iſt $p^r\varkappa n = m^r . P^r\varkappa n$.

aus dem nur gefundenen folgt, wenn für x, $\frac{\pi}{2} - x$ geſetzt wird.

§. 9. **Aufgabe. Das nte Differential von Atang x zu finden, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential.**

Auflöſung. 1) Nach der Formel (§. 4) kömmt es nur darauf an, die höhern Differentialien von A tang x zu finden, wenn dx beſtändig iſt. Nun iſt $\frac{d.\,A\,\mathrm{tang}\,x}{dx}$

$$= \frac{1}{1+x^2},$$ alſo $$\frac{d^{r+1} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^{r+1}} = \frac{d^r \frac{1}{1+x^2}}{dx^r}.$$ Um

ie Differentialien von $\frac{1}{1+x^2}$ unter der erwähnten Vorausſetzung, zu finden, entwickele man $\frac{1}{1+(x+u)^2}$ nach Potenzen von u, ſo wird der r+1te Coefficient dieſer Reihe

$$= \frac{d^r \frac{1}{1+x^2}}{1.2..r.dx^r}$$

ſeyn. Es iſt aber $\frac{1}{1+x^2+2xu+u^2} =$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{(2x+u)u}{(1+x^2)^2} + \frac{(2x+u)^2u^2}{(1+x^2)^3} - \ldots \pm \frac{(2x+u)^r u^r}{(1+x^2)^{r+1}} \mp \ldots,$$

alſo der Coefficient von u^r, =

$$\pm\left(\frac{2^r x^r}{(1+x^2)^{r+1}} - (r-1)\frac{2^{r-2}x^{r-2}}{(1+x^2)^r} + \frac{(r-2)(r-3)}{1.2}\frac{2^{r-4}x^{r-4}}{(1+x^2)^{r-1}} \ldots\right)$$

2) Daraus folgt, für die Scale

$$P\left(dx,\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right);$$

$$d^n \,\mathrm{A\,tang}\,x$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\,P\varkappa n$$

$$-\ \tfrac{1}{2}\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}\ P^2\varkappa(n-1)$$

$$+\ \tfrac{1}{3}\ \frac{2^2x^2}{(1+x^2)^3}\left\{1-1.\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)\right\}P^3\varkappa(n-2)$$

$$-\ \tfrac{1}{4}\ \frac{2^3x^3}{(1+x^2)^4}\left\{1-2\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)\right\}P^4\varkappa(n-3)$$

$$+\ \tfrac{1}{5}\ \frac{2^4x^4}{(1+x^2)^5}\left\{1-3\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)+\frac{2.1}{1.2}\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)^2\right\}P^5\varkappa(n-4)$$

$$-\ \tfrac{1}{6}\ \frac{2^5x^5}{(1+x^2)^6}\left\{1-4\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)+\frac{3.2}{1.2}\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)^2\right\}P^6\varkappa(n-5$$

$$+\ \text{etc.}$$

Das Geſetz, nach welchem die Glieder dieſes Ausdrucks fortgehen, iſt aus dem allgemeinen Coefficienten in (1) erſichtlich.

3) Dieſe Glieder laſſen ſich auf folgende Weiſe einfacher darſtellen:

Es iſt $\text{ſin.}\,rz = \text{ſin}\,z \left\{\begin{matrix} 2^{r-1}\text{coſ}\,z^{r-1} - (r-2)\,2^{r-3}\text{coſ}\,z^{r-3} \\ + \dfrac{(r-3)(r-4)}{1\,.\,2}\,2^{r-4}\text{coſ}\,z^{r-4} - \ldots \end{matrix}\right\}$ °)

---

o) L. Euler Iutroductio etc. Cap. XIV. §. 234. p. 198. Klügel analytiſche Trigonometrie. S. 56. No. 72.

Setzt man hier für z, $\frac{\pi}{2} - \zeta$, ſo wird ſin $\left(r\frac{\pi}{2} - r\zeta\right) =$

$$\text{coſ}\,\zeta.\,\text{ſ}\,\zeta^{r-1}\left\{\begin{matrix} 2^{r-1} - (r-2)\,2^{r-3}\,\frac{1}{\text{ſu}\,\zeta^2} - \\ + \frac{(r-3)(r-4)}{1\,.\,2}\,2^{r-4}\,\frac{1}{\text{ſu}\,\zeta 4} - \ldots \end{matrix}\right\},$$

wo für ein gerades r, ſin $\left(\frac{r\pi}{2} - r\zeta\right) = \pm\,\text{ſin}\,r\zeta$, für ein ungerades r, ſin $\left(r\frac{\pi}{2} - r\zeta\right) = \pm\,\text{coſ}\,r\zeta$. Nun ſey in (2) $A\,\text{tang}\,x = \zeta$, ſo iſt $\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \text{ſin}\,\zeta$,

und $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \text{coſ}\,\zeta$. Folglich wird $d^n\,A\text{tang}x =$

$$\text{coſ}\,\zeta.\text{coſ}\,\zeta.P\kappa n - \tfrac{1}{2}\text{coſ}\,\zeta^2.\ \text{ſin}\,2\zeta.\,P^2\kappa\,(n-1)$$
$$- \tfrac{1}{3}\text{coſ}\,\zeta^3.\text{coſ}\,3\zeta.\,P^3\kappa\,(n-2) + \tfrac{1}{4}\text{coſ}\,\zeta^4.\,\text{ſin}\,4\zeta.\,P^4\kappa(n-3)$$
$$+ \tfrac{1}{5}\text{coſ}\,\zeta^5.\text{coſ}.\,5\zeta.\,P^5\kappa\,(n-4) - \ldots.$$

§. 10. **Zuſatz.** Der gefundene Ausdruck läßt ſich noch auf folgende Art verändern. Bekanntlich enthält von $(\cos\zeta + \text{ſin}\,\zeta)^r$ der Coſinus von rz die ungeraden, der ſin rz die geraden Glieder, beyde mit abwechſelnden Zeichen + — [p]. Wird nun in dem ſo gebildeten Werthe von ſin rz, für z, $\frac{\pi}{2} - \zeta$, und ſtatt $\frac{\text{coſ}\,\zeta}{\text{ſin}\,\zeta}$, $\frac{1}{x}$ geſetzt; ſo ergiebt ſich aus §. (9. 3)

---

[p] Kaeſtner Analyſis des Endl. §. 176.

$$d^n \mathrm{A\,tang}\,x$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\, P\varkappa n$$

$$- \frac{x}{(1+x^2)^2} \,.\, 1 \,.\, P^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\left(1 - \frac{2.1}{2.3}\,\frac{1}{x^2}\right) P^3\varkappa(n-2)$$

$$- \frac{x^3}{(1+x^2)^4}\left(1 - \frac{3.2}{2.3}\,\frac{1}{x^2}\right) P^4\varkappa(n-3)$$

$$+ \frac{x^4}{(1+x^2)^5}\left(1 - \frac{4.3}{2.3}\,\frac{1}{x^2} + \frac{4.3.2.1}{2.3.4.5}\,\frac{1}{x^4}\right) P^5\varkappa(n-4)$$

$$- \frac{x^5}{(1+x^2)^6}\left(1 - \frac{5.4}{2.3}\,\frac{1}{x^2} + \frac{5.4.3.2}{2.3.4.5}\,\frac{1}{x^4}\right) P^6\varkappa(n-5)$$

$$+ \ldots.$$

Wenn dx beſtändig iſt, ſo wird

$$\frac{d^{r+1}\,\mathrm{A\,tang}\,x}{1.2.3..(r+1).dx^{r+1}} = \frac{d^r\,\frac{1}{1+x^2}}{1.2..(r+1)dx^r}$$

$$= \mp\,\frac{x^r}{(1+x^2)^{r+1}}\left\{\begin{array}{l} 1 - r\,\frac{(r-1)}{2.\,3}\,\frac{1}{x^2} \\ + r\,\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.\,3.4.5}\,\frac{1}{x^4} - \ldots \end{array}\right\}$$

§. 11. Zuſatz. Da $\mathrm{A\,cotang}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{A\,tang}\,x$, ſo wird, dx als beſtändig angenommen,

$$\frac{d^n A\,\mathrm{cotang}\,x}{dx^n} = \mp 1.2\ldots(n-1)\cos\zeta^n.\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right) \text{ (§.9)}$$

$= \mp 1.2..(n-1).\sin z^n.\sin nz$, wo $z = A\,\mathrm{cotang}\,x$. Ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential wird demnach $d^n A\,\mathrm{cotang}\,x = d^n z = -\sin z.\sin z.P\varkappa n$
$+\frac{1}{2}\sin z^2.\sin 2z.P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{3}\sin z^3.\sin 3z.P^3\varkappa(n-2)$
$+\frac{1}{4}\sin z^4.\sin 4z.P^4\varkappa(n-3) - \ldots.$

§. 12. Anmerkung. Wenn dx als beſtändig betrachtet wird, ſo iſt

$$\frac{d^{2r-1} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^{2r-1}} = \pm 1.2.3..(2r-2)\cos\zeta^{2r-1}\cos(2r-1)\zeta,$$

und

$$\frac{d^{2r} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^{2r}} = \mp 1.2.3..(2r-1).\cos\zeta^{2r}\sin 2r\zeta;$$ oder

für jedes n, $\dfrac{d^n A\mathrm{tang}x}{dx^n} = \pm 1.2.3..(n-1)\mathrm{eos}\,\zeta^n.\sin n\left(\dfrac{\pi}{2}-\zeta\right)$,

wo $\zeta = A\,\mathrm{tang}\,x$, und die obern Zeichen für ungerade r und n, die untern für gerade gelten. Die Allgemeinheit dieſer vorhin (§. 9) analytiſch gefundenen Formeln läßt ſich nun auch auf andere Art, ſynthetiſch, durch den Schluß von n auf n+1, darthun. Es iſt nehmlich

$$\frac{d^{n+1} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^n} = \pm 1.2\ldots(n-1).d\left\{\cos\zeta^n\sin.n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\right\}$$

$$= \mp 1.2\ldots(n-1)\left\{\begin{array}{l} n\cos\zeta^{n-1}d\zeta\sin\zeta.\sin.n\left(\dfrac{\pi}{2}-\zeta\right) \\ +nd\zeta.\cos n\left(\dfrac{\pi}{2}-\zeta\right)\cos\zeta^n \end{array}\right\}$$

$$= \mp 1.2\ldots n.\,d\zeta \cos\zeta^{n-1} \cos\left((n+1)\zeta - n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$= \mp 1.2\ldots n.\,dx \cos\zeta^{n+1} \sin(n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),$$

weil $dx = d\,\tang\zeta = \dfrac{d\zeta}{\cos\zeta^2}$.

§. 13. Anmerkung. Die allgemeine Formel fü $d^n A\,\tang x$ (§. 9) läßt ſich auch aus der vorhin (§. 5) e wieſenen für $d^n \log x$ herleiten, vermittelſt des Ausdruck

$$A\,\tang x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(\frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}\right)$$ q)

So wird nehmlich $d^n A\,\tang x =$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d^n\log(1 + x\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d^n\log(1 - x\sqrt{-1}),$$

Nun iſt $d^n\log(1 \pm x\sqrt{-1}) =$

$$\frac{1}{1 \pm x\sqrt{-1}}\,.\,p\varkappa n - \frac{1}{2(1 \pm x\sqrt{-1})^2}\,.\,p^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{1}{3(1 \pm x\sqrt{-1})^3}\,p^3\varkappa(n-2) - \ldots\ldots,$$

für die Scale:

$$p\left(\pm dx.\sqrt{-1},\ \pm\frac{d^2x.\sqrt{-1}}{1.2},\ \pm\frac{d^3x.\sqrt{-1}}{1.2.3},\ldots\right)$$

Nimmt man aber folgende Scale an:

$$p\left(dx,\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right),$$ ſo

---

q) Käſtner Anal. d. Unendl. §. 328.

ird $p^r\varkappa n = (\pm\sqrt{}-1)^r . P^r\varkappa n$ (vergl. §. 8);

rner iſt $\frac{1}{(1\pm x\sqrt{}-1)^r} = \frac{\cos\zeta^r}{(\cos\zeta\pm\sin\zeta.\sqrt{}-1)^r}$

$=\cos\zeta^r.(\cos r\zeta\mp\sin r\zeta.\sqrt{}-1)$. Daraus

lgt $d^n\log(1\pm x\sqrt{}-1) =$

$$\pm\sqrt{}-1.\cos\zeta(\cos\zeta\mp\sin\zeta.\sqrt{}-1)\,P\varkappa n$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\cos\zeta^2(\cos 2\zeta\mp\sin 2\zeta.\sqrt{}-1)\,P^2\varkappa(n-1)$$
$$+\tfrac{1}{3}\sqrt{}-1.\cos\zeta^3(\cos 3\zeta\mp\sin 3\zeta.\sqrt{}-1)\,P^3\varkappa(n-2)-\ldots$$

ſen Werth ſubſtituirt, ergiebt ſich für $d^n A\tan g\, x$ der obi- Ausdruck.

§. 14. Anmerkung. (zu §. 9. n. 3) Für ſin mz und ſmz ſind außer denen (§. 10) erwähnten Ausdrücken fol- nde beyde bekannt:

$$)\ \sin mz = \sin z.\left\{\begin{matrix}(2^{m-1}\cos z^{m-1}-(m-2)\,2^{m-3}\cos z^{m-3}\\ +\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\,2^{m-5}\cos z^{m-5}-\ldots\end{matrix}\right\}$$

$$)\ \cos mz = 2^{m-1}\cos z^m - \frac{m}{1}\,2^{m-3}\cos z^{m-2}$$

$$+m\frac{(m-3)}{1.2}\,2^{m-5}\cos z^{m-4}-m\frac{(m-4)(m-5)}{1.2.3}\,2^{m-7}\cos z^{m-6}+\ldots\text{ r})$$

Setzt man in dem erſten derſelben für z, $\frac{\pi}{2}-\zeta$, und ſchreibt ie Glieder in umgekehrter Ordnung, ſo wird.

---

r) Euler l. c. §. 234. 243. Klügel n. 72. S. 56, n. 84. S. 80. Vergl. L'Hospital Traité analytique des ſections coniques p. 436 etc.

1. a) für ein **gerades** m,

$$\text{ſin}\, m\zeta = \text{coſ}\,\zeta.\left\{ \begin{array}{l} m\,\text{ſ}\zeta - m\,\dfrac{(m^2-4)}{1.2.3}\,\text{ſ}\zeta^3 \\ +m\,\dfrac{(m^2-4)\,(m^2-16)}{1.2.3.4}\,\text{ſ}\zeta^4 - \dots \end{array} \right\}$$

1. b) für ein **ungerades** m,

$$\text{coſ}\, m\zeta = \text{coſ}\,\zeta.\left(1 - \frac{(m^2-1)}{1.2}\,\text{ſ}\zeta^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4}\,\text{ſ}\zeta^4 - \dots\right)$$

Durch eben dieſes Verfahren ergiebt ſich aus der zweyte Formel für coſ mz:

2. a) für ein **gerades** m,

$$\text{coſ}\, m\zeta = 1 - \frac{m^2}{1.2}\,\text{ſ}\zeta^2 + m^2\,\frac{(m^2-4)}{1.2.3.4}\,\text{ſ}\zeta^4 - m^2\,\frac{(m^2-4)\,(m^2-16)}{1.2..6}\,\text{ſ}\zeta^6 + \dots$$

2. b) für ein **ungerades** m,

$$\text{ſin}\, m\zeta = m\,\text{ſ}\zeta - m\,\frac{(m^2-1)}{1.2.3}\,\text{ſ}\zeta^3 + m\,\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\,\text{ſ}\zeta^5 - \dots$$

Von dieſen 4 Formeln finden ſich die 1. a und 2. b bey den erwähnten Schriftſtellern, aus andern Gründen abgeleitet [s]. Ich weiß nicht, ob ſonſt die Bemerkung iſt gemacht worden, daß dieſe beyden Formeln unmittelbar aus (1) und (2) durch obige Subſtitution folgen. Die Formel (2. a) kommt erſt in **Eulers** Integralrechnung vor [t], aber die

---

[s] **Euler**, §. 238. 236; **Klügel** S. 65. n. 76. S. 62. n. 74.

[t] Inſtitt. Calc. Integr. Vol. I. §. 181.

1. b) erinnere ich mich nicht ſonſt wo gefunden zu haben. lebrigens kann man auch (1) aus (2), ſo wie (1. a) und 1. b) aus (2. a) und (2, b), durch Differentiation her-
iten.

§. 15. Aufgabe. Das nte Differential von Aſin x zu finden, ohne Rückſicht auf ein beſtän-iges Differential.

Aufloͤſung. 1) Es kommt wieder, wie in (9), nur arauf an, die höhern Differentialien von A ſin x zu finden, venn dx als beſtändig angenommen wird. Nun iſt $\frac{d\,A\sin x}{dx}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad \text{alſo} \quad \frac{d^{r+1}A\sin x}{dx^{r+1}} = \frac{d^r \frac{1}{\sqrt{(1-x^2}}}{dx^r}$$

Die Differentialien von $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ erhält man durch das in (9) gebrauchte Verfahren. Entwickelt man nehmlich

$$[1-(x+u)^2]^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2-2xu-u^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}u(2x+u) + \frac{1.\ 3}{2^2.\ 1.\ 2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}u^2(2x+u)^2$$

$+\ldots$ nach Potenzen von u, ſo wird

$$\frac{d^r \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}{dx^r} = 1.3.5\ldots(2r-1)\ \frac{x^r}{(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}}$$

$$\left\{1+\frac{r(r-1)}{2r-1}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\right)+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.(2r-1)(2r-3)}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\right)^2+\ldots\right\}$$

$$= \frac{d^{r+1} A \sin x}{dx^{r+1}} = X^{r+1} \text{ (vergl. §. 4.)}$$

2) Daraus folgt, ohne Rückſicht auf ein beſtändige Differential, $d^n A \sin x$

$$= X' P \varkappa n + \frac{X''}{1 . 2} P^2 \varkappa (n-1) + \frac{X'''}{1 . 2 . 3} P^3 \varkappa (n-2) + \ldots$$

Da $A \cos x = \frac{\pi}{2} - A \sin x$, ſo ergiebt ſich daraus leich auch $d^n A \cos x$.

§. 16. Zuſatz. **Euler** giebt [u]) für $d^r \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = d^r y$, wenn dx beſtändig iſt, folgenden Ausdruck:

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \frac{1 . 2 . 3 . . r}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} x^r + \frac{1}{2} r \frac{(r-1)}{1 . 2} x^{r-2} \\ + \frac{1 . 3}{2 . 4} \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1 . 2 . 3 . 4} x^{r-4} + \ldots \end{array} \right\}$$

Dieſer Ausdruck, der dort nicht allgemein erwieſen iſt, er giebt ſich durch eben das Verfahren, wie der vorhin (§. 14. 2) gefundene, wenn man nur $(1-(x+u)^2)^{-\frac{1}{2}}$ auf andere Art entwickelt. Es iſt nehmlich dieſe Größe

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{xu}{1-x}\right)^2 + \frac{u^2}{(1-x^2)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

---

u) Inſtit. Calc. Diff. P. I. Cap. V. §. 177.

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \left(1-\frac{xu}{1-x^2}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{xu}{1-x^2}\right)^{-3}\left(\frac{u^2}{(1-x^2)^2}\right) \\ +\frac{1.\,3}{2.\,4}\left(1-\frac{xu}{1-x^2}\right)^{-5}\frac{u^4}{(1-x^2)^4} - \ldots \end{array} \right\}$$

Aus der Auflöſung der Potenzen von $1 - \frac{xu}{1-x^2}$ folgt das übrige. Auch läßt ſich die Formel für $d^r \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ſo darſtellen:

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \frac{1.\,2.\,3\ldots r}{(1-x^2)^{1+\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} x^r + \frac{r(r-1)}{2^2}\,x^{r-2} \\ + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{(2\,.\,4)^2}\,x^{r-4} + \ldots \end{array} \right\}$$

Für ein gerades r ergiebt ſich, wenn man die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung ſchreibt,

$$\frac{d^r y}{dx^r} = [1.3.5\ldots(r-1)]^2.\,\frac{1}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{r^2}{1.\,2}\,x^2 + \frac{r^2(r-2)^2 x^4}{1.\,2.\,3.\,4} \\ + \frac{r^2(r-2)^2(r-4)^2 x^6}{1.\,2.\,3\ldots 6} + \ldots \end{array} \right\}$$

eben ſo für ein ungerades r,

$$\frac{d^r y}{dx^r} = (1.3.5..r)^2\,\frac{x}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{(r-1)^2}{2.\,3}\,x^2 \\ + \frac{(r-1)^2(r-3)^2}{2.\,3.\,4.\,5}\,x^4 + \ldots \end{array} \right\}$$

§. 17. Lehnſatz. Die Summe folgender unendlichen Reihe:

$$p \cdot 1^n + p^2 \cdot 2^n + p^3 \cdot 3^n + p^4 \cdot 4^n + \ldots\ldots,$$

iſt $= \dfrac{A'p + A''p^2 + A'''p^3 \,..+ A^{N}p^n}{(1-p)^{n+1}}$,

wo $A^{I} = 1^n$

$A^{II} = 2^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}$

$A^{III} = 3^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}\, 2^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}$

$A^{IV} = 4^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}\, 3^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}\, 2^n - {}^{n+1}\mathfrak{C}$

u. ſ. w. v).

§. 18. Aufgabe. Das nte Differential vom tang. x zu finden, wenn dx, oder kein Differential als beſtändig angenommen wird.

Aufloſung. 1) Es iſt $\text{tang}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-}}}{\sqrt{-1}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{2}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}\right)$$

alſo $d^n \text{tang}\,x = - \dfrac{2}{\sqrt{-1}}\, d^n \left(\dfrac{1}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}\right)$

$$= - \frac{2}{\sqrt{-1}}\, d^n \left(1 - e^{2x\sqrt{-1}} + e^{4x\sqrt{-1}} - e^{6x\sqrt{-1}} + \ldots\right)$$

---

v) Dieſe Summation habe ich anderswo bewieſen. (Verſuch einer neuen Summationsmethode. S. 71) Sie iſt eine Folge aus einer allgemeinen, welche ebendaſelbſt (S. 69) vorkommt. Ueber die Größen A^{I}, A^{II}, A^{III}, . . . , welche auch ſonſt bey Summationen gebraucht werden, vergl. L. Euler Inſtitt. Calc. Diff. P. II. Cap. VII. §. 173. Die hieſigen Ausdrücke ſind von den dortigen verſchieden, durch die Hindenburgiſchen Zeichen der Binomialcoefficienten.

Wird nun dx als beſtändig angenommen, ſo iſt $d^n e^{\alpha x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x\sqrt{-1}} (\alpha\sqrt{-1})^n dx^n$, folglich unter eben dieſer Vorausſetzung,

$$\frac{d^n \mathrm{tang}\, x}{dx^n} = \frac{2}{\sqrt{-1}} (\sqrt{-1})^n (2^n e^{2x\sqrt{-1}} - 4^n e^{4x\sqrt{-1}} + 6^n e^{6x\sqrt{-1}} - \ldots)$$

$$= 2^{n+1} (\sqrt{-1})^{n+1} (-e^{2x\sqrt{-1}} + 2^n e^{4x\sqrt{-1}} - 3^n e^{6x\sqrt{-1}} + \ldots)$$

2) Die unendliche Reihe, durch welche $\frac{d^n \mathrm{tang}\, x}{dx^n}$ ausgedrückt iſt, läßt ſich nach dem vorhergehenden Lehnſatze (§. 17) ſummiren: wenn das dortige $p = -e^{2x\sqrt{-1}}$ geſetzt wird, ſo iſt $\frac{1}{1-p} = \frac{1}{1+e^{2x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{-x\sqrt{-1}}+e^{x\sqrt{-1}}}$

$= \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2\cos x}$; alſo $\frac{d^n \mathrm{tang}\, x}{dx^n} =$

$\frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{\cos x^{n+1}.(-1)^n} . e^{-(n+1)x\sqrt{-1}}$ multiplicirt in

$$(A^N e^{2nx\sqrt{-1}} - A^{N-1} e^{2(n-1)x\sqrt{-1}} + A^{N-2} e^{2(n-2)x\sqrt{-1}} - \ldots)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{-1})^{n-1}.\cos x^{n+1}} \left(\begin{array}{l} A^N e^{(n-1)x\sqrt{-1}} - A^{N-1} e^{(n-3)x\sqrt{-1}} \\ + A^{N-2} e^{(n-5)x\sqrt{-1}} - \ldots \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{-1})^{n-1}.\cos x^{n+1}} \left\{ \begin{array}{l} A^N \cos(n-1)x - A^{N-1} \cos(n-3)x \\ + A^{N-2} \cos(n-5)x - \ldots \\ + \sqrt{-1}\, [A^N \sin(n-1)x \\ - A^{N-1} \sin(n-3)x \\ + A^{N-2} \sin(n-5)x - \ldots] \end{array} \right\}$$

3) Um dieſe Ausdrücke auf eine mögliche Form zu bringen, iſt zuerſt zu bemerken, daß in der Reihe der Größen A^{I}, A^{II}, A^{III}, . . A^N, je zwey Glieder einander gleich

ſind, deren eins vom Anfang ſo weit abſteht, als das andre vom Ende: alſo $A^{I} = A^{N}$, $A^{II} = A^{N-1}$, $A^{III} = A^{N-2}$, u. ſ. w. Zugleich ſind die Bögen, deren Sinuſſe oder Coſinuſſe bey der Formel für $d^{n} \text{tang}\, x$ (2) in zwey ſolche Größen multiplicirt ſind, einander entgegengeſetzt, ſonſt gleich. Nun ſind zwey Fälle zu unterſcheiden.

a) Es ſey n eine ungerade Zahl $= 2r - 1$, ſo heben ſich in (2) die Glieder, welche Sinuſſe enthalten, gegenſeitig auf: wenn man dagegen die Glieder mit Coſinuſſen, je zwey und zwey verbindet, da denn das mittlere allein übrig bleibt, ſo ergiebt ſich

$$\frac{d^{2r-1}\,\text{tang}\, x}{dx^{2r-1}} = \pm \frac{\begin{pmatrix} 2A'\,\text{coſ}\,2(r-1)x - 2A''\,\text{coſ}\,2(r-2)x \\ +2A'''\,\text{coſ}\,2(r-3)x \ldots \mp 2A^{r-1}\,\text{coſ}\,x \pm A^{r} \end{pmatrix}}{\text{coſ}\,x^{2r}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} A^{r} - 2A^{r-1}\,\text{coſ}\,2x + 2A^{r-2}\,\text{coſ}\,4x \\ -2A^{r-3}\,\text{coſ}\,6x \ldots \pm 2A'\,\text{coſ}\,2(r-1)x \end{pmatrix}}{\text{coſ}\,x^{2r}}$$

4) Es ſey.

b) n eine gerade Zahl $= 2r$, ſo heben ſich die Glieder mit Coſinuſſen gegenſeitig auf, und die mit Sinuſſen laſſen ſich combiniren; ſo wird

$$\frac{d^{2r}\,\text{tang}\, x}{dx^{2r}} = \pm 2 \frac{\begin{pmatrix} A'\,\text{ſin}\,(2r-1)x - A''\,\text{ſin}\,(2r-3)x \\ + A'''\,\text{ſin}\,(2r-5)x \ldots \pm A^{r}\,\text{ſin}\,x \end{pmatrix}}{\text{coſ}\,x^{2r+1}}$$

$$= \frac{2\begin{pmatrix} A^{r}\,\text{ſin}\,x - A^{r-1}\,\text{ſin}\,3x + A^{r-2}\,\text{ſin}\,5x \\ - \ldots \pm A'\,\text{ſin}\,(2r-1)x \end{pmatrix}}{\text{coſ}\,x^{2r+1}}$$

Die Coefficienten A', A'', A''', ... mit ihrem Geſetz, ſind aus §. (17) bekannt, wo für (a), $n = 2r - 1$; für (b), $n = 2r$; zu ſetzen iſt.

5) Nachdem auf dieſe Weiſe die höhern Differentiale von $\mathrm{tang}\, x$ beſtimmt ſind, für ein beſtändiges dx, ſo folgt, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential,

$$d^n \mathrm{tang}\, x = X' P\varkappa n + \frac{X''}{1.2} P^2\varkappa (n-1) + \frac{X'''}{1.2.3} P^3\varkappa (n-2) + \ldots \text{(§. 4)}$$

§. 19. Zuſatz. Von $\mathrm{cotang}\, x$ laſſen ſich die höhern Differentialien aus den vorhergehenden Formeln leicht ableiten, wenn man $\frac{\pi}{2} - x$ anſtatt x ſetzt: ſo verwandeln ſich $\cos x$; $\cos 2x$; $\cos 4x$; $\cos 6x$; ... in $\sin x$; $-\cos 2x$; $+\cos 4x$; $-\cos 6x$; .... und $\sin x$; $\sin 3x$; $\sin 5x$; ... in $\cos x$; $-\cos 3x$; $+\cos 5x$; ... Folglich wird, dx als beſtändig angenommen,

$$\text{a)}\quad \frac{d^{2r-1}\,\mathrm{cotang}\, x}{dx^{2r-1}} = \frac{-\begin{pmatrix} A^r + 2A^{r-1}\cos 2x + 2A^{r-2}\cos 4x \\ + 2A^{r-3}\cos 6x \ldots + 2A'\cos 2(r-1)x \end{pmatrix}}{\sin x^{2r}}$$

$$\text{und}\quad \text{b)}\quad \frac{d^{2r}\,\mathrm{cotang}\, x}{dx^{2r}} = \frac{2\begin{pmatrix} A^r\cos x + A^{r-1}\cos 3x + A^{r-2}\cos 5x \\ + \ldots + A'\cos(2r-1)x \end{pmatrix}}{\sin x^{2r+1}}$$

§. 20. **Aufgabe. Das nte Differential von coſec. x und ſec. x zu finden, wenn dx, oder kein Differential als beſtändig angenommen wird.**

Auflöſung. 1) Es iſt $\mathrm{tang}x + \mathrm{cotang}x = \frac{1+\mathrm{tang}^2x}{\mathrm{tang}\,x}$

$$= \frac{\mathrm{tang}\,x}{\sin x^2} = \frac{1}{\sin x . \cos x} = \frac{2}{\sin 2x},\ \text{alſo}\ \frac{1}{\sin x} = \mathrm{cosec}\,x$$

$= \frac{1}{2}(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}x + \mathrm{cotang}\,\frac{1}{2}x)$.

Vermittelſt dieſer Gleichung iſt gegenwärtige Aufgabe auf die vorhergehende (§. 18) reducirt. Es wird demnach, für ein beſtändiges dx,

a) $$\frac{2^{2r}d^{2r-1}\mathrm{cosec.}\,x}{dx^{2r-1}}$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{l} A^r - 2A^{r-1}\cos x + 2A^{r-2}\cos 2x \\ - 2A^{r-3}\cos 3x \ldots \pm 2A'\cos(r-1)x \end{array}\right)}{(\cos\frac{1}{2}x)^{2r}}$$

$$- \frac{\left(\begin{array}{l} A^r + 2A^{r-1}\cos x + 2A^{r-2}\cos 2x \\ + 2A^{r-3}\cos 3x + \ldots + 2A'\cos(r-1)x \end{array}\right)}{(\sin\frac{1}{2}x)^{2r}}$$

b) $$\frac{2^{2r}d^{2r}\mathrm{cosec}\,x}{dx^{2r}} =$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} A^r \sin\frac{x}{2} - A^{r-1}\sin\frac{3x}{2} + A^{r-2}\sin\frac{5x}{2} \\ - A^{r-3}\sin\frac{7x}{2} + \ldots \pm A'\sin\left(\frac{2r-1}{2}\right)x \end{array}\right\}}{(\cos\frac{1}{2}x)^{2r+1}}$$

$$+\frac{\left\{\begin{matrix}A^{r}\,\text{coſ}\,\frac{x}{2}+A^{r-1}\,\text{coſ}\,\frac{3x}{2}+A^{r-2}\,\text{coſ}\,\frac{5x}{2}\\ +\ldots+A'\,\text{coſ}\,\frac{(2r-1)\,x}{2}\end{matrix}\right\}}{(\text{ſ}\,\frac{1}{2}x)^{2r+1}}$$

ndere gleichgeltende Ausdrücke folgen aus der Gleichung: oſec. $x = \text{cotang}\,\frac{1}{2}x - \text{cotang}\,x$.

2) Setzt man für x, $\frac{\pi}{2} - x$, ſo ergiebt ſich aus (1) ſec. x, für ein beſtändiges dx.

3) Von coſec. x und ſec. x laſſen ſich dann ferner die hern Differentialien, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges, urch die Formel §. (4) ausdrücken.

VI.

Auflöſung einiger verwickelteren Coefficientengleichungen [a].

§. 1. Aufgabe.

Zwiſchen den Coefficienten zweyer Reihen p, q, und Potenzen der letztern, finde für jedes unbeſtimmte n folg des Verhalten ſtatt:

$$p\varkappa n = q\varkappa n + \frac{1}{1 \, . \, 2} q^2\varkappa (n-1) + \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa (n-2) + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} q^n\varkappa 1$$

Man ſoll die Coefficienten von q durch die Coefficienten d Reihe p und ihrer Potenzen ausdrücken: oder die gegeb ne Coefficientengleichung nach q auflöſen.

Auflöſung. 1) Um den Sinn dieſer Aufgabe deutl cher einzuſehen, beſonders ſich zu überzeugen, daß und w ſie beſtimmt ſey: wird es nicht undienlich ſeyn, die erſt Coefficienten von q durch Hülfe des folgenden recurrirend Verfahrens zu beſtimmen. Zuerſt iſt für n = 1, $p\varkappa 1 = q\varkappa$ alſo $q\varkappa 1$ beſtimmt.

---

[a] Man vergleiche C. S. c. a. A. S. 144—152, ingl. Arch. Math. H. VII. S. 350, 351. H.

Ferner wird für $n = 2$, $p\varkappa 2 = q\varkappa 2 + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 1$, alſo $q\varkappa 2 = p\varkappa 2 - \frac{1}{1.2} q\varkappa 1$. Aber aus dem gefundenen $q\varkappa 1$ folgt $q^2\varkappa 1 = (q\varkappa 1)^2 = (p\varkappa 1)^2 = p^2\varkappa 1$; demnach wird $q\varkappa 2 = p\varkappa 2 - \frac{1}{2} p^2\varkappa 1$. So iſt der 2te Coefficient beſtimmt. Für $n = 3$ ergiebt ſich $p\varkappa 3 = q\varkappa 3 + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 2$

$$+ \frac{1}{1,2,3} q^3\varkappa 1,$$ oder $$q\varkappa 3 = p\varkappa 3 - \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 2 - \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 1.$$

Aber durch die beyden erſten Coefficienten von q ſind eben ſo viel jeder Potenz von q beſtimmt b). Es iſt nehmlich

$$q^3\varkappa 1 = (q\varkappa 1)^3 = (p\varkappa 1)^3 = p^3\varkappa 1; \quad q^2\varkappa 2 = \frac{2q\varkappa 2\, q^2\varkappa 1}{q\varkappa 1}$$
$$= 2q\varkappa 2.\, q\varkappa 1 = (2p\varkappa 2 - p^2\varkappa 1)\, p\varkappa 1 = 2p\varkappa 2.\, p\varkappa 1 - p^2\varkappa 1.\, p\varkappa 1$$
$$= p^2\varkappa 2 - p^3\varkappa 1;$$ folglich wird $$q\varkappa 3 = p\varkappa 3 - \tfrac{1}{2}(p^2\varkappa 2 - p^3\varkappa 1)$$
$$- \frac{1}{2.3} p^3\varkappa 1 = p\varkappa 3 - \tfrac{1}{2} p^2\varkappa 2 + \tfrac{1}{3} p^3\varkappa 1.$$

So läßt ſich fortfahren, und es erhellt leicht, daß auf dieſe Art nach und nach jeder Coefficient der Reihe q nach der Ordnung durch p beſtimmt werde. Man ſetze, es ſeyen die Coefficienten von q, vom 1ſten bis zum $(n-1)$ten bereits gefunden, ſo folgen daraus eben ſo viel Coefficienten der Potenzen von q, und es ergiebt ſich dann auch der nte Coefficient von q, nehmlich aus der angenommenen Gleichung,

---

b) Weil nach der Localformel für das Polynomium q,

$$q^m\varkappa(n+1) = \left\{\begin{matrix} (m-n+1)q\varkappa 2.\, q^m\varkappa n \\ +(2m-n+2)q\varkappa 3.\, q^m\varkappa(n+1) \\ +\ldots+ mnq\varkappa(n+1).\, q^m\varkappa 1 \end{matrix}\right\} : nq\varkappa 1$$

$$q\varkappa n = p\varkappa n - \frac{1}{1.2}\, q^2\varkappa\,(n-1)$$

$$-\frac{1}{1.2.3}\, q^3\varkappa\,(n-2) \ldots - \frac{1}{1\ldots n}\, q^n\varkappa 1$$

wo rechts des Gleichheitszeichens alles gegeben iſt.

3) Anſtatt dieſes weitläufigen Verfahrens dient folgendes ungleich kürzeres, wodurch man auf einmal einen allgemeinen Ausdruck für $q\varkappa n$ erhält. Da es willkührlic iſt, nach welcher veränderlichen Größe, und nach welche Exponenten (in arithmetiſcher Progreſſion) die Reihe q fortgebe, ſo ſetze man

$$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^2 + q\varkappa 3.x^3 + \ldots + q\varkappa n.x^n + \ldots$$

Daher wird $q^r = q^r\varkappa 1.x^r + q^r\varkappa 2.x^{r+1} + q^r\varkappa 3.x^{r+2} + \ldots + q^r\varkappa n.x^{r+n-1} + \ldots$

Nun betrachte man folgende Reihe:

$$q + \frac{q^2}{1.2} + \frac{q^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{q^n}{1.2..n} + \ldots$$

deren Summe bekanntlich $= e^q - 1$ iſt, ſo wird, q durch x ausgedrückt,

$$e^q - 1 = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^2 + q\varkappa 3.x^3 + \ldots + q\varkappa n.x^n + \ldots$$

$$+\frac{1}{1.2}q^2\varkappa 1 + \frac{1}{1.2}q^2\varkappa 2 + \ldots + \frac{1}{1.2}q^2\varkappa(n-1) + \ldots$$

$$+\frac{1}{1.2.3}q^3\varkappa 1 + \ldots + \frac{1}{1\ldots 3}q^3\varkappa(n-2)$$

$$+\ldots+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{1\ldots n}q^n\varkappa 1$$

$$(e^q-1)\varkappa n = q\varkappa n + \frac{1}{1.\,2} q^2\varkappa(n-1) + \ldots + \frac{1}{1..n} q^n\varkappa 1$$

$= p\varkappa n$. Man darf daher die andere Reihe $p = e^q - 1$ en c). So wird $e^q = p + 1$, und $q = \log(p+1)$ $p - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{4}p^4 + \ldots$ Setzt man hier für q und die Reihen nach x, ſo erhält man ſogleich $q\varkappa n = p\varkappa n$

$$\tfrac{1}{2}p^2\varkappa(n-1) + \tfrac{1}{3}p^3\varkappa(n-2) - \ldots \pm \frac{1}{n} p^n\varkappa 1,$$ welches

verlangte Ausdruck für einen unbeſtimmten Coefficienten Reihe q iſt: womit auch die in (1) berechneten Beyſpie- ür $n = 1, 2, 3$ übereinſtimmen.

§. 2. Zuſatz. Für die Scale und den Index

$$p\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4\ldots \end{pmatrix}$$

alſo $q\varkappa n = a^nA - \frac{1}{2}b^nB + \frac{1}{3}c^nC - \frac{1}{4}d^nD \ldots \pm \frac{1}{n}n^n\mathcal{N}$

mmt man bey der vorigen Scale den Index

$$\begin{pmatrix} -a, & -b, & -c, & -d\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4\ldots \end{pmatrix}$$

wird $-q\varkappa n = a^nA + \frac{1}{2}b^nB + \frac{1}{3}c^nC \ldots + \frac{1}{n}n^n\mathcal{N}$

$$= \frac{i^n\mathfrak{J}}{n}$$ d).

---

c) Nicht, man muß. Die angenommene Coefficientengleichung iſt nehmlich gar nicht mit der Reihengleichung $e^q - 1 = p$ identiſch, weil ja p und q nach andern Exponenten, als die hier angenommeuen ſind, ſelbſt nach verſchiedenen veränderlichen Größen fortſchreiten können. Aber was aus einer ſpeciellen Reihengleichung in Rückſicht des Coefficienten hergeleitet wird, gilt allgemein von der Coefficientengleichung.

d) Von dieſem Hindenburgiſchen Zeichen, H. v. Praſſe, Uſus Log. Infinit. in Theor. aequat. §. XX. p. 19.

§. 3. **Aufgabe.** Die Coefficientengleichung:

$$p\varkappa n = q\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2..5} q^5\varkappa(n-2) \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2...2n-1} q^{2n-1}\varkappa 1$$

nach q aufzulöſen.

Auflöſung. 1) Anſtatt das weitläufige Verfa (§. 2; 1, 2) hier zu wiederholen, welches doch nur zur läuterung gebraucht worden, kann man ſogleich ein dem dern (3) ähnliches Verfahren gebrauchen.

Man ſetze alſo

$$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^3 + q\varkappa 3.x^5 + \ldots + q\varkappa n.x^{2n-1} + \ldots$$

folglich $q^r = q^r\varkappa 1.x^r + q^r\varkappa 2.x^{r+2} + q^r\varkappa 3.x^{r+4} + \ldots + q^r\varkappa n.x^{r+2n-2} +$

Nun betrachte man die Reihe

$$\sin q = q - \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^5}{1..5} - \frac{q^7}{1..7} + \ldots \pm \frac{q^{2n-1}}{1.2.3..2n-1} \mp \ldots$$

ſo wird q durch x ausgedrückt

$$\sin q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^3 + q\varkappa 3.x^5 + \ldots + q\varkappa n.x^{2n-1}$$

$$- \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 1 - \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 2 - \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa(n-1) + e$$

$$+ \frac{1}{1..5} q^5\varkappa 1 + \frac{1}{1..5} q^5\varkappa(n-2)$$

. . . .

. . . .

$$+ \frac{1}{1.2..2n-1} q^{2n-1}\varkappa 1$$

alſo $(\sin q)\varkappa n = p\varkappa n$.

2) Man darf daher p = ſin q ſetzen. Daraus wird

$$= \text{Arc. ſin. } p = p + \tfrac{1}{2}\,\frac{p^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{p^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{p^7}{7}$$

$$+ \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n-2}\,\frac{p^{2n-1}}{2n-1},$$

ſo, q und p durch x ausgedrückt,

$$= p\varkappa n + \frac{1}{2,3}\,p^3\varkappa(n-1) + \frac{1.3}{2.4.5}\,p^5\varkappa(n-2)$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\,p^7\varkappa(n-3) + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)(2n-1)}\,p^{2n-1}\varkappa 1$$

§. 4. Zuſatz. Für Scale und Zeiger

$$p\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4\ldots \end{pmatrix}$$

alſo $q\varkappa n = \mathfrak{a}^n A + \frac{1}{2.3}\,\mathfrak{c}^{n+1}C + \frac{1.3}{2.4.5}\,\mathfrak{d}^{n+2}D$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\,\mathfrak{e}^{n+3}E + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)(2n-1)}\;\overset{n-1}{n}\;{}^{2n+1}\overset{n-1}{\mathcal{N}}$$

o die Diſtanzexponenten n — 1 im letztern Gliede
ber $\mathcal{N}$ und n, die (n−1)te Combinationsclaſſe nach
er nten, d. i. die (2n−1)te Claſſe, und den (2n−1)ten Po-
nomialcoefficienten andeuten. Man könnte auch ſo ſchrei-
en: $\frac{n-1}{n^{n}\mathcal{N}}$ wo der Diſtanzexponent ſich auf alle drey, den
olynomialcoefficienten, die Claſſe und die Summe be-
bge.

§. 5. **Aufgabe.** Die Coefficientengleichung

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1.\, q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2.\, q^{a+d}\varkappa(n-1) + Q\varkappa 3.\, q^{a+2d}\varkappa(n-2) +$$
$$+ Q\varkappa n.\, q^{a+(n-1)d}{}_{\varkappa 1}$$

nach q aufzulöſen.

Auflöſung. 1) Da die veränderlichen Größen, n welchen die Reihen p. q, Q fortgehen, ſo wie die Ex nenten willkährlich können angenommen werden, ſo ſ man

$$p = p\varkappa 1.x^{a} + p\varkappa 2.x^{a+d} + p\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots + p\varkappa n.x^{a+(n-1)d} +$$
$$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^{1+d} + q\varkappa 3.x^{1+2d} + \ldots + q\varkappa n.x^{1+(n-1)d} +$$
$$Q = Q\varkappa 1.q^{a} + Q\varkappa 2.q^{a+d} + Q\varkappa 3.q^{a+2d} + \ldots + Q\varkappa n.q^{a+(n-1)d} +$$

2) Drückt man in der dritten Reihe die Potenzen v q durch x nach der 2ten Reihe aus, da nehmlich

$$q^{r} = q^{r}\varkappa 1.x^{r} + q^{r}\varkappa 2.x^{r+d} + q^{r}\varkappa 3.x^{r+2d} + \ldots\ldots$$

ſo wird

$$\begin{aligned} Q = Q\varkappa 1.\, q^{a}\varkappa 1.x^{a} &+ Q\varkappa 1.\, q^{a}\varkappa 2.\, x^{a+d} + Q\varkappa 1.\, q^{a}\varkappa 3.\, x^{a+2d} + \\ &+ Q\varkappa 2.\, q^{a+d}\varkappa 1 \quad + Q\varkappa 2.\, q^{a+d}\varkappa 2 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + Q\varkappa 3.\, q^{a+2d}{}_{\varkappa 1} \end{aligned}$$

d. i. wenn man, was in einerley Potenz von x multiplicir iſt, vermöge der angenommenen Gleichung verändert,

$$Q = p\varkappa 1.x^{a} + p\varkappa 2.x^{a+d} + p\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots = p.$$

3) Nun wird aus der dritten Reihe in (1) durch Umkehrung

$$q^{s} = \frac{s}{s}\, Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.\, Q^{\frac{s}{a}} + \frac{s}{s+d}\, Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.\, Q^{\frac{s+d}{a}}$$
$$+ \frac{s}{s+2d}\, Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3.\, Q^{\frac{s+2d}{a}} + \ldots.$$

$$\text{alſo} = \frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.p^{\frac{s}{a}} + \frac{s}{s+d}\,Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.p^{\frac{s+d}{a}}$$

$$+ \frac{s}{s+2d}\,Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3.p^{\frac{s+2d}{a}} + \ldots.$$

Setzt man hier für die Potenzen von p ihre Reihen nach x, ſo

$$p^{\varrho} = p^{\varrho}\varkappa 1.x^{a\varrho} + p^{\varrho}\varkappa 2.x^{a\varrho+d} + p^{\varrho}\varkappa 3.x^{a\varrho+2d} + \ldots.$$

ergiebt ſich

$$q^s = \frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.p^{\frac{s}{a}}\varkappa 1.x^s$$

$$\begin{array}{l|l}
+\frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.p^{\frac{s}{a}}\varkappa 2.x^{s+d} & +\frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.p^{\frac{s}{a}}\varkappa 3.x^{s+2d} \\
+\frac{s}{s+d}\,Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa 1 & +\frac{s}{s+d}\,Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa 2 \\
 & +\frac{s}{s+2d}\,Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3.p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa 1
\end{array}$$

Alſo wird $q^s\varkappa n =$

$$\frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.p^{\frac{s}{a}}\varkappa n + \frac{s}{s+d}\,Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{s}{s+2d}\,Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3.p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa(n-2) + \text{etc}\ldots$$

$$+\ldots.+ \frac{s}{s+(n-1)d}\,Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}}\varkappa n.p^{\frac{s+(n-1)d}{a}}\varkappa 1$$

So iſt mithin der unbeſtimmte Coefficient nicht bloß von q, ſondern von jeder Potenz von q durch bekannte Größen ausgedrückt. Ob nun gleich dieſer Ausdruck aus der ſpeciellen Vorausſetzung (1) hergeleitet worden, ſo gilt er doch allgemein.

§. 6. **Aufgabe.** Die vorige Gleichung nach Q aufzulöſen.

Auflöſung. 1) Den vorigen Schlüſſen gemäß, ſe man wieder $p = Q$, ſo wird $p^s = Q^s$

d. i. $p^s \varkappa 1 . x^{sa} + p^s \varkappa 2 . x^{sa+d} + p^s \varkappa 3 . x^{sa+2d} + \ldots\ldots$

$= Q^s \varkappa 1 . q^{sa} + Q^s \varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s \varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots\ldots$

2) Nun wird aus der für q angenommenen Reihe du Umkehrung

$$x^\sigma = \frac{\sigma}{\sigma} q^{-\sigma} \varkappa 1 . q^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma+d} q^{-\sigma-d} \varkappa 2 . q^{\sigma+d} + \frac{\sigma}{\sigma+2d} q^{-\sigma-2d} x 3 . q^{\sigma+2d}$$

Drückt man demnach die Potenzen von x in der Gleichung (1) durch q aus, ſo wird

$$p^s \varkappa 1 . \frac{sa}{sa} q^{-sa} \varkappa 1 . q^{sa}$$

$$\begin{array}{l|l} + p^s \varkappa 1 . \frac{sa}{sa+d} q^{-sa-d} \varkappa 2 . q^{sa+d} & + p^s \varkappa 1 . \frac{sa}{sa+2d} q^{-sa-2d} \varkappa 3 . q^{sa+2d} \\ + p^s \varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+d} q^{-sa-d} \varkappa 1 & + p^s \varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+2d} q^{-sa-2d} \varkappa 2 \\ & + p^s \varkappa 3 . \frac{(sa+2d)}{sa+2d} q^{-as2d} \varkappa 1 \end{array}$$

$$= Q^s \varkappa 1 . q^{sa} + Q^s \varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s \varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots\ldots$$

Was zu einerley Potenz von q gehört, beyderſeits gleichgeſetzt, ergiebt ſich

$$Q^s\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d} \text{ multiplicirt in}$$

$$\left\{\begin{array}{l} sa.\,p^s\varkappa 1.\,q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n+(sa+d)p^s\varkappa 2.\,q^{-sa-(n-1)d}\varkappa(n-1) \\ \qquad +(sa+2d)p^s\varkappa 3.\,q^{-sa-(n-1)d}\varkappa(n-2) \\ \qquad + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \qquad +[sa+(n-1)d]\,p^s\varkappa n.\,q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1 \end{array}\right\}$$

§. 7. Zuſatz. In der Gleichung §. 6, 1 drücke man die Potenzen von q durch x aus, da nehmlich

$$q^\varrho = q^\varrho\varkappa 1\,.\,x^\varrho + q^\varrho\varkappa 2\,.\,x^{\varrho+d} + q^\varrho\varkappa 3\,.\,x^{\varrho+2d} + \ldots\ldots,$$

ſo wird

$$p^s\varkappa 1\,.\,x^{sa} + p^s\varkappa 2\,.\,x^{sa+d} + p^s\varkappa 3\,.\,x^{sa+2d} + \ldots\ldots$$

$$= Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 1.x^{sa} \left|\begin{array}{l} +Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 2.x^{sa+d} \\ +Q^s\varkappa 2\,.\,q^{sa+d}\varkappa 1 \\ \end{array}\right|\begin{array}{l} +Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 3.x^{sa+2d}+\ldots \\ +Q^s\varkappa 2\,.\,q^{sa+d}\varkappa 2 \\ +Q^s\varkappa 3\,.\,q^{sa+2d}\varkappa 1 \end{array}$$

folglich,

$$p^s\varkappa n = Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa n + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa(n-1) + Q^s\varkappa 3.q^{sa+2d}\varkappa(n-2) + \ldots + Q^s\varkappa n.q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

Es läßt ſich demnach aus der angenommenen Gleichung für $p\varkappa n$ folglich eine ähnliche Formel für den unbeſtimmten Coefficienten jeder Potenz von p herleiten. Aus §. 5, 6, 7, ergiebt ſich folgender Satz.

§. 8. Satz. Wenn zwiſchen den Coefficienten dreyer Reihen p, q, Q, für jedes n, folgendes Verhalten ſtatt findet:

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1 \,.\, q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2 \,.\, q^{a+d}\varkappa\,(n-1) + Q\varkappa 3 \,.\, q^{a+2d}\varkappa(n-2) + \ldots + Q\varkappa n \,.\, q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

ſo wird auch ſeyn für jeden Exponenten s,

$$1)\quad p^{s}\varkappa n = Q^{s}\varkappa 1 \,.\, q^{sa}\varkappa n + Q^{s}\varkappa 2 \,.\, q^{sa+d}\varkappa(n-1) + Q^{s}\varkappa 3 \,.\, q^{sa+2d}\varkappa(n-2) + \ldots + Q^{s}\varkappa n \,.\, q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

$$2)\quad q^{s}\varkappa n = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1 \,.\, p^{\frac{s}{a}}\varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2 \,.\, p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa(n-1$$

$$+ \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3 \,.\, p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa(n-2) + \ldots$$

$$+ \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}}\varkappa n \,.\, p^{\frac{s+(n-1)d}{a}}\varkappa 1$$

$$3)\quad Q^{s}\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d}\ \textbf{multiplicirt in}$$

$$\left\{\begin{array}{l} sap^{s}\varkappa 1 \,.\, q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)\,p^{s}\varkappa 2 \,.\, q^{-sa-(n-1)d}\varkappa(n-1) \\ + (sa+2d)\,p^{s}\varkappa 3 \,.\, q^{-sa-(n-1)d}\varkappa(n-2) + \ldots \\ + [sa+(n-1)d]\,p^{s}\varkappa n \,.\, q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1. \end{array}\right\}$$

VII.

Entwickelung des Beweiſes für die Reverſionsformel von La Grange, in ſeiner Théorie des fonctions analytiques §. 97 u. f. nebſt einigen Zuſätzen; von M. Johann Wilhelm Pfaff.

Inhaltsanzeige.

§. 1. Erklärung einiger Zeichen.
§. 2. Erſtes Problem. $z=x+yfz$; man ſucht z. Auflöſung von La Grange.
§. 2 — 5. Entwickelung obiger Auflöſung.
§. 6. Zweytes Problem. Man ſucht φz, wenn z aus §. 2 bekannt iſt. Auflöſung von La Grange §. 98.
§. 7—8. Entwickelung dieſer Auflöſung.
§. 9. Auflöſung vermittelſt des polynomiſchen Lehrſatzes.
§. 10. 11. Zuſätze.
§. 12. 13. Drittes Problem. Man ſucht φz ohne daß z als bekannt aus §. 2. angenommen wird. Auflöſung von La Grange und Entwickelung §. 99.
§. 15. 16. Viertes Problem. $z=t+xfz+yFz$. Man ſucht φz.
§. 17 18. 19. Probleme aus der Differentialrechnung, vermittelſt der combinatoriſchen Analyſis auflösbar, welche im Zuſammenhange mit dem Reverſionsproblem ſtehen.
§. 20. Das Allgemeine in dem Verf. von La Grange. §. 100 ſqq.
§. 21. Allgemeineres Problem, nebſt einem Beyſpiele aus La Grange §. 165. 166.

§. 1.

Ich habe mich im Folgenden der gewöhnlichen Zeichen der Differentialrechnung bedienet. Sie hängen, wie es ſcheint, mit den Begriffen, auf welchen gewöhnlich jene Rechnung gegründet wird, gut zuſammen: Lagrange, der jene Begriffe verläßt, hat auch die Zeichen in ſeiner Schrift nicht beybehalten. Zur Vergleichung, ohne die Theorie darzuſtellen, dient alſo Folgendes.

Wenn $y = \varphi x$; ſo iſt

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi' x = (\varphi x)'$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \varphi'' x = (\varphi x)''$$

Eben ſo, wenn $z = \varphi(x,y)$ ſo iſt

$$z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi'(x,y) = \varphi'(x)$$

$$z_, = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \varphi_,(x,y) = \varphi'(y)$$

Ueberhaupt

$$\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^{m} dy^{n}}\right) = z^{m}\underset{n}{n} = \varphi^{m}\underset{n}{n}(x,y) \,;$$

Ferner ſey $Q = F(x, y, z)$ einer Function von x, y und z, ſo iſt, wenn x, y, z unabhängig von einander ſind

$$dQ = \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta x} . dx + \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta z} . dy + \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta z} . dz$$

Und es bedeutet $\frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta x}$ das Differential jener Function in ſo fern x, unabhängig von den übrigen allein ſich ändert: welches man auch durch $\left(\frac{d . F'(x,y,z)}{dx}\right)$ ausdrückt, wenn x, y, z von einander unabhängig ſind:

Es ſey nun

$z = f(x, y)$; z abhängig von x und y, ſo iſt

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

d. h. differentiirt in ſofern x, zugleich aber auch z, das von ihm abhängt, ſich ändert.

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{\delta. F'(x,y,z)}{\delta y} + \frac{\delta. F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und $$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = \left(\frac{d f(x,y)}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\delta. f(x,y)}{\delta y} = \left(\frac{d f(x,y)}{dy}\right)$$

da x und y von einander unabhängig ſind; und man erhält die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x}}{\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{\delta. F'(x,y,z)}{\delta y}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Zugleich habe ich in der vollſtändigen Entwicklung der Darſtellung, als vorzüglich bequem, die Zeichen der combinatoriſchen Analyſis gebraucht, wodurch die Ueberſicht der Sätze höchſt vereinfacht und erleichtert wird.

§. 2. Erſtes Problem.

Wenn

$$z = x + y f z$$

wo fz eine Function von z bedeutet, und man verlangt z durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen von y fortſchreitet; (Lagrange l. c. §. 97) ſo wird man annehmen

$$z = x + y fx + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \dot{D}y^4 + \ldots\ldots$$

Anſtatt hier nun fz durch die unbekannten Coefficienten auszudrücken, und dieſen Werth in der obigen Gleichung zu ſubſtituirten, eliminirt man fz vermittelſt der Differentiation. Es iſt nämlich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 1 + y \left(\frac{dz}{dx}\right) . \frac{dfz}{dz}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = fz + y \left(\frac{dz}{dy}\right) . \frac{dfz}{dz}$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) - fz . \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Und wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$fz = \frac{z - x}{y} \text{ ſubſtituirt}$$

erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) . (z - x) - \left(\frac{dz}{dy}\right) y = 0$$

Aus dieſer Gleichung, mit der angenommenen für z, verbunden, erhält man, wenn fx = A,

$$\begin{array}{r|r|l}
\dot{A} + 1\dot{B} & y + 1\dot{C} & y^2 + \ldots = 0 \\
- \dot{A} + \frac{d\dot{A}}{dx} . \dot{A} & + \frac{d\dot{A}}{dx} . \dot{B} & \\
- 2\dot{B} & + \frac{d\dot{B}}{dx} . \dot{A} & \\
 & - 3\dot{C} &
\end{array}$$

Hieraus folgt

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \dot{A}. \frac{d\dot{A}}{dx} = \tfrac{1}{2} \frac{d\dot{A}^2}{dx}$$

$$2\dot{C} = \dot{B}. \frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{A}. \frac{d\dot{B}}{dx}; \quad \dot{C} = \tfrac{1}{2} \frac{d(\dot{A}\dot{B})}{dx}$$

$$3\dot{D} = \dot{C}. \frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{B} \frac{d\dot{B}}{dx} + \dot{A} \frac{d\dot{C}}{dx}; \quad \dot{D} = \tfrac{1}{3} \frac{d(\dot{A}\dot{C} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{B})}{dx}$$

dieſe Ausdrücke finden ſich einfacher

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \tfrac{1}{2}. \frac{d. \dot{A}^2}{dx}$$

$$\dot{C} = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^2. \dot{A}^3}{dx^2}$$

$$\dot{D} = \frac{1}{1.2.3.4}. \frac{d^3. \dot{A}^4}{dx^3}$$

Alſo überhaupt

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{1.2} \frac{d.(fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3} \frac{d^2.(fx)^3}{dx^2} + \ldots.$$

§. 3. Dies ließe ſich ſo darſtellen und erweiſen; Nach der Formel für die Multiplication zweyer Reihen, verglichen mit obigem, erhält man, von A angezählt

$$(z-x)xn = \frac{1}{n-1} . \tfrac{1}{2}. \frac{d. \mathfrak{b}^n B}{dx}$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot d. \left\{ \begin{matrix} \varkappa 1 . \varkappa(n-1) \\ \varkappa 2 . \varkappa(n-2) \\ \vdots \quad \vdots \\ \varkappa r . \varkappa(n-r) \\ \vdots \quad \vdots \\ \varkappa(n-1).\varkappa 1 \end{matrix} \right\} : dx$$

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ \varkappa 1, & \varkappa 2, & \varkappa 3, & \varkappa 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Oder,

$$(z-x)\varkappa n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{d.(z-x)^2 \varkappa(n-1)}{dx}$$

eine allgemeine Localformel für die Coefficienten, ihrer Form nach merkwürdig. So iſt beym Tayloriſchen Satze $\varkappa n = \frac{1}{n} d.\varkappa(n-1)$. In einem Problem bey Euler. Inſt. Calc. Int. Tom. I. §. 656.

$$\varkappa n = \left(\frac{d.\varkappa(n-1)}{dx}\right) + V. \left(\frac{d.\varkappa(n-1)}{dy}\right)$$

§. 3. Man nehme das Geſetz als wahr an, was eben gefunden worden, ſo folgt, aus der Gleichung (§. 2)

$$\frac{d^{n-1}(fx)^n}{1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{1}{2.(n-1)} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \begin{matrix} fx. \dfrac{d.^{n-2}.(fx^{n-r})}{dx^{n-2}.1.2\ldots n-1} \\ + \dfrac{d.(fx^2)}{1.2\,dx^2} \cdot \dfrac{d^{n-3}.(fx^{n-2})}{dx^{n-3}1.2\ldots n-2} \\ \vdots \qquad \vdots \\ + \dfrac{d^{r-1}(fx^r)}{1.2.3\ldots r} \cdot \dfrac{d^{n-r-1}(fx^{n-r})}{dx^{n-r-1}1.2\ldots n-r} \\ \vdots \qquad \vdots \end{matrix} \right\}$$

Oder anders

$$
\begin{aligned}
&2.(n-1)\, d^{n-2}.\,(fx^n) \\
&= {}^{n}\mathfrak{A}.\ fx\ .\ \frac{d^{n-2}.\,(fx^{n-1})}{dx^{n-2}} \\
&+ {}^{n}\mathfrak{B}.\ \frac{d.(fx^2)}{dx}\ \frac{d^{n-3}\,(fx^{n-2})}{dx^{n-3}} \\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
&+ {}^{n}\mathfrak{R}.\ \frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}}\ \frac{d^{n-r-1}(fx^{n-r})}{dx^{n-r-1}} \\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \\
&+ {}^{n}\mathfrak{N}^{-1}.\ \frac{d^{n-2}\,(fx^{n-1})}{dx^{n-2}}.\ fx
\end{aligned}
$$

§. 4. Man ſetze die Scale und den Zeiger

$$
p \left\{ \begin{array}{ccccc} fx, & \frac{dfx}{1}, & \frac{d^2fx}{1.2}, & \frac{d^3fx}{1.2.3}, & \frac{d^4fx}{1.2.3.4} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right\}
$$

ſo iſt, nach H. Prof. **Rothe** (Archiv II. H. VIII, p. 228 ſqq. IV H. IV, p. 431.)

$$
\frac{d^{n-2}\,(fx^n)}{1.2.3\ldots.n-2.\,dx^{n-2}} = p^n\,\mathfrak{x}(n-1)
$$

Alſo wird die erſte Formel des 3ten §phs

$$\frac{2}{n} \cdot p^n \varkappa(n-1) = \tfrac{1}{2} \cdot p\varkappa 1 \cdot \frac{p^{n-1}\varkappa(n-1)}{n-1}$$
$$+ \frac{p^2\varkappa 2}{2} \cdot \frac{p^{n-2}\varkappa(n-2)}{n-2}$$
$$+ \frac{p^3\varkappa 3}{3} \cdot \frac{p^{n-3}\varkappa(n-3)}{n-3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ \frac{p^{n-1}\varkappa(n\text{-}1)}{n-1} \cdot p\varkappa 1.$$

Von der Wahrheit dieſer Formel überzeugt man ſich, wenn man bey Herrn Prof. **Rothe** (formulae de Reverſione Serierum demonſtratio univerſalis §. VI.) in der Formel A, ſetzt $s = 1$, $c = 0$, $h = 1$, $f = 1$, d = ſ. Folglich iſt die erſte Formel wahr, folglich das Geſetz der Reihe allgemein erwieſen.

§. 5. Da $z = x + yfz$;

und $z = x + y\left[fx + \frac{y}{1.2} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + ..\right]$

So folgt hieraus:

$$fz = fx + \frac{y}{1.2} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots$$

§. 6. Zweytes Problem. Wenn man die gefundene Reihe für z als bekannt annimmt, eine Reihe für φz, nach Potenzen von y fortſchreitend, zu finden (La Grange §. 98).

Es ſey $\varphi z = u$;

ſo iſt $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}.$$

dieſen Werth in der Gleichung §. 3. ſubſtituirt, erhält man:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(z-x) = y\left(\frac{du}{dy}\right)$$

eine Gleichung ohne φz

Man ſetze

$$u = \dot{P} + \dot{Q}y + \dot{R}y^2 + \dot{S}y^3 + \ldots\ldots$$

ſo folgt:

$$0 = \left[\frac{d\dot{P}}{dx} + \frac{d\dot{Q}}{dx}y + \frac{d\dot{R}}{dx}y^2 + \frac{d\dot{S}}{dx}y^3 + \ldots\right]$$

$$\left(fx + \frac{y}{2}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots\right)$$

$$-\dot{Q} \quad -2\dot{R}y \quad -3\dot{S}y^2 \quad -4\dot{T}y^3$$

daraus, nach wirklicher Multiplication

$$0 = \left.\begin{array}{l} \frac{d\dot{P}}{dx}\, fx + \frac{d\dot{Q}}{dx}\, fx \\ -\dot{Q} + \frac{d\dot{P}}{dx}\, \frac{d\,(fx^2)}{1,2} \\ \quad -2\dot{R} \end{array}\right\} y + \left.\begin{array}{l} \frac{d\dot{R}}{dx}\, fx \\ + \frac{d\dot{Q}}{dx}\, \frac{d\,(fx^2)}{1.2} \\ + \frac{d\dot{P}}{dx}\, \frac{d^2(fx^3)}{1.2.3} \\ \quad -3\dot{S} \end{array}\right\} y^2 + \ldots$$

Folglich

$$\dot{Q} = \frac{d\dot{P}}{dx} .\, fx$$

$$2\dot{R} = \frac{d\dot{Q}}{dx} .\, fx + \frac{d\dot{P}}{dx} .\, \frac{d\,(fx)^2}{1.2}$$; und ſubſtituirt

$$= \frac{d^2\dot{P}}{dx^2}\, fx^2 + \frac{d\dot{P}}{dx}\, \frac{dfx}{dx}\, fx + \frac{d\dot{P}}{dx}\, \frac{dfx}{dx} .\, fx$$

$$\dot{R} = \frac{d.\left\{\frac{d\dot{P}}{dx}\, (fx)^2\right\}}{2.\, dx}$$

$$3\dot{S} = \frac{d\dot{R}}{dx} .\, fx = \frac{d^2.\left\{\frac{d\dot{P}}{dx}\, (fx^2)\right\}}{1.\,2.\, dx^2}\, fx$$

$$+ \frac{d\dot{Q}}{dx}\, \frac{d(fx^2)}{1.2} + \frac{d\left\{\frac{d\dot{P}}{dx}\, fx.\right\}}{dx}\, \frac{d\,(fx^2)}{1.2}$$

$$+ \frac{d\dot{P}}{dx} . \frac{d^2 (fx^3)}{1.2.3}$$

Und nach Entwicklung

$$\dot{S} = \frac{d^2 \left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx)^3 \right\}}{1.2.3.\ dx^2} \quad \Bigg| \quad \text{eben ſo } \dot{T} = \frac{d^3 \frac{d\dot{P}}{dx} (fx^4)}{1.2.3.4.dx^3}$$

Folglich, da man $\dot{P} = \varphi x$ hat, wegen

$$\varphi z = \varphi [x + yfz + \ldots]$$

ſo erhält man

$$\varphi z = \varphi x + \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} fx \right\} y + \frac{d \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} (fx)^2 \right\}}{1.2\ \ dx^2} y^2 + \ldots$$

wo das allgemeine Glied

$$\varphi z . \kappa (n+1) y^n = \frac{d^{n-1} \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} fx^n \right\}}{1.2.3\ldots n-1.dx^{n-1}} . \ y^n$$

§. 7. Dies ließe ſich allgemein ſo darſtellen und erweiſen:

Man erhält aus der erſten Formel

$$n\varphi z\,.\,\varkappa(n+1)$$

$$= \tfrac{1}{1}\,\frac{d.\,\varkappa n}{dx}\,.\,fx$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{d.\varkappa(n-1)}{dx}\,.\,\frac{d\,(fx^2)}{dx}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{1}{1.2..r}\,\frac{d.\,\varkappa(n+1-r)}{dx}\,.\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3..n}\,.\,\frac{d\dot{P}}{dx}\,.\,\frac{d^{n-1}(fx^n)}{dx^{n-1}}$$

dieſer Ausdruck ſoll, nach der Vorausſetzung, gleich ſeyn

$$\frac{d^{n-1}.\left\{\frac{d\dot{P}}{dx}\,(fx^n)\right\}}{1.2.3\ldots n-1.\,dx^{n-1}}\ .$$

Entwickelt man nach dem bekannten Satze für $\frac{d^n.PQ}{dx^n}$ letzteres Differential nach der Form

$$A\,\frac{d^nP}{dx^n} + B.\,\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} + C.\,\frac{d^{n-2}P}{dx^{n-2}}\ \text{u. ſ. w.}$$

wo A, B, C ... bekannt ſind; ebenfalls nach dem nämlichen Satze die Differentiale von $\varkappa n$; $\varkappa(n-1)$ ... (deren Geſetz, der Vorausſetzung gemäs, als bekannt angenommen wird) ſo muß, was in beyden entwickelten Ausdrücken einerley Factor $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ hat, gleich ſeyn; und man erhält, die Hindenburgiſchen Binomialzeichen gebraucht;

$$\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-1)}\, d^{r}(fx^{n-1})\ .\ fx \quad = \frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\, d^{r}(fx)^{n}$$

$$\frac{{}^{n-2}\overset{-1}{\mathfrak{R}}}{1.2.3..(n-2)}\, d^{r-1}(fx^{n-2})\ \frac{d.(fx^{2})}{1.2}$$

$$\frac{{}^{n-3}\overset{-2}{\mathfrak{R}}}{1.2.3..(n-3)}\, d^{r-2}(fx^{n-3})\ \frac{d^{2}.(fx^{3})}{1.2.3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-l-1}\overset{-l}{\mathfrak{R}}}{1.2.3..(n-l-1)}\, d^{r-l}(fx^{n-l-r})\ \frac{d^{l}fx\,(^{l+1})}{1.2.3..l+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-r}\overset{-r+1}{\mathfrak{R}}}{1.2.3..(n-r)}\, d.(fx^{n-r})\ \frac{d^{r-1}(fx^{r})}{1.2.3..r}$$

$$\frac{1}{1.2.3..(n-r-1)}\, fx^{n-r-1}\ \frac{d^{r}(fx^{r+1})}{1.2.3..r+1}$$

Durch Reduction wird das allgemeine $(l+1)$te Glied

$$\frac{1}{l+1}\cdot\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\cdot {}^{r}\mathfrak{L}\, d^{r-l}(fx^{n-l-1})\, d^{l}(fx^{l+1})$$

Oder

$$\frac{1}{l+1}\cdot\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\cdot 1.2.3..r.\ \frac{d^{r-l}(fx^{n-l-1})}{1.2.3...r-l}\cdot\frac{d^{l}(fx^{l+1})}{1.2.3..l}$$

Daraus folgt, den Satz (§. 4) zu Hülfe genommen, aus obiger Formel

$$\frac{1}{1} p^{n-1} . \varkappa(r+1) p \varkappa 1$$
$$+ \frac{1}{2} p^{n-2} \varkappa r \; p^2 \varkappa 2$$
$$+ \frac{1}{3} p^{n-3} \varkappa(r-1) \; p^3 \varkappa 3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ \frac{1}{l+1} p^{n-l-2} \varkappa(r-l) \; p^{l+1} \varkappa(l+1)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ \frac{1}{r+1} p^{n-r-1} \varkappa 1 p^{r+1} \varkappa(r+1)$$
$$= p^n \varkappa(r+1)$$

Von der Wahrheit dieſer Formel überzeugt man ſich leicht aus dem Satze bey Hrn. Prof. **Rothe** l. c. in der Formel B.

§. 8. Demnach iſt, wenn man

$$\varphi z \varkappa(n+1) = \frac{d^{n-1}. \left(\frac{dP}{dx} fx^n \right)}{1.2.3 \ldots n-1 \, dx^{n-1}} = \Sigma$$

(wo Σ die recurrirende Formel für dieſen Coefficienten §. 7 bedeutet) ſezt, ſodann Σ und $\frac{d^{n-1} \left(\frac{dP}{dx} fx^n \right)}{1 \ldots n-1 \, . \, dx^{n-1}}$ nach den Differentialen $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^3P}{dx^3}$ und $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ entwickelt, in jedem dieſer beyden Ausdrücke allgemein der Coefficient von $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ derſelbe, wie ſo eben erwieſen; alſo überhaupt

$$\Sigma = \frac{d^{n-1}\left(\frac{dP}{dx}\,fx^n\right)}{1 \ldots n-1 .\, dx^{n-1}}. \quad \text{W. z. E.}$$

§. 9. Wenn man $z = x + yfx + \frac{y^2}{1.2}\,d.(fx^2) + \ldots$

als bekannt annimmt, aus §. 2, ſo iſt nach dem Tayloriſchen Satze

$$\varphi z = \varphi x + y\,\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{y^2}{1.2}\,\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\varphi x}{dx^3} + \ldots.$$

wenn man ſetzt mit Scale und Index

$$y = \left\{\begin{matrix} yfx + \frac{y^2}{1.2}.\,\frac{d(fx^2)}{dx} + y^3.\,\frac{d^2\,(fx^3)}{1.2.3\,dx^2} \ldots \\ 1 \quad 2 \qquad\qquad\qquad 3 \ldots \end{matrix}\right\}$$

Entwickelt man nach Potenzen von y, vermittelſt des Polynomialtheorems, ſo erhält man

$$\varphi z = \varphi x + y\,\frac{d\varphi x}{dx}.\,\mathfrak{a}^1 A + \left.\begin{matrix} \frac{d\varphi x}{dx}\,\mathfrak{a}^2 A \\ + \frac{d^2\varphi x}{1.2..dx^2}\,\mathfrak{b}^2 B \end{matrix}\right|\, y^2 + \ldots.$$

Vergleicht man dieſe Reihe mit der in §. 6 gefundenen, ſo erhält man

$$\frac{d^{n-1}\left[\frac{d\varphi x}{dx}\,fx^n\right]}{1,2,3..,n-1,n.\ dx^{n-r}} = \frac{d\varphi x}{dx}\,\mathfrak{a}^n A$$

$$+\frac{d^2\varphi x}{2.dx^2}\,\mathfrak{b}^n B$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+\frac{d^r\varphi x}{1.2.3..\,rdx^r}\,.\ \mathfrak{r}^n R$$

$$\vdots$$

$$+\frac{d^n\varphi x}{1.2.3..\,ndx^n}\,.\ \mathfrak{n}^n N$$

Entwickelt man linker Hand nach der bekannten Formel für die Differentiale von Producten, und vergleicht die Factoren von $d^r\varphi x$ in beyden Ausdrücken, welche gleich ſeyn, müſſen, ſo erhält man

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{n}}.\ \frac{d^{n-r}.\ [fx^n]}{1.2.3...\,n-r} = \mathfrak{r}^n R$$

das heißt, wieder nach dem Satze §. 4. Wenn man die Reihen nimmt und Scalen

$$p = fx,\quad \frac{dfx}{dx},\quad \frac{d^2fx}{1.\,2},\quad \frac{d^3fx}{1.\,2.\,3},\ \ldots$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$q\ [\ p\varkappa 1,\ \tfrac{1}{2}p^2\varkappa 2,\ \tfrac{1}{3}p^3\varkappa 3,\ \tfrac{1}{4}p^4\varkappa 4\ \ldots\ ]$$

ſo erhält man die Formel

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{n}}\ p^{\mathfrak{n}}\varkappa(\mathfrak{n}-\mathfrak{r}+\mathfrak{r}) = q^{\mathfrak{r}}\varkappa(\mathfrak{n}-\mathfrak{r}+1)$$

welches ein bekannter Satz aus der Lehre der Reverſion iſt; und der allgemein für jede Reihe p gilt.

Wenn man nämlich aus der Gleichung

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots = p$$

findet

$$x 7 n = \frac{1}{n}\ p^{-n} \varkappa n.\ y^n$$

So kann man

$$x^m 7 n = \frac{m}{m+n-1}\ p^{-(m+n-1)} \varkappa n\, y^n$$

auf zweyerley Art ausdrücken, wodurch man obige Formel erhält. (E. S. a. c. Abh. und darinn die Abhandl. meines Bruders: über Producte und Potenzen gewiſſer Reihen. 1 Satz, 2 Zuſatz. Verglichen Ebendaſ. §. 18. 1, 2, 4.

§. 10. Die Formel §. 7 anfangs iſt an ſich merkwürdig, und iſt, wenn das Geſetz der Coefficienten erwieſen iſt, folgende:

$$\frac{d^{n-1}.\left\{\frac{d\varphi x}{dx}.\ fx^n\right\}}{1.2.3\ldots n-m.dx^{n-1}}$$

$$= \frac{d^{n-1}.\left\{\frac{d\varphi x}{dx}\ fx^{n-1}\right\}\ fx}{1.2.3\ldots n-1}$$

$$+ \frac{d^{n-2}.\left\{\frac{d\varphi x}{dx}\ fx^{n-2}\right\}\ \frac{d\,[fx^2]}{1.2.\,dx^2}}{1.2.3\ldots n-2.}$$

$$+ \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc}$$

§. 11. Uebrigens laſſen ſich aus der Formel

$$\varphi z = \varphi x + y \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} fx \right\} + \frac{y^2}{1.2} . d \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} fx^2 \right\} : dx$$

auf die nämliche Art, wie aus dem Tayloriſchen Satze, (Rothe Archiv II. H.) Folgerungen ziehen. Z. B. $(\varphi z)^m$ kann man daraus, vermittelſt des polynomiſchen Lehrſatzes, und vermittelſt der Veränderung der bloſen $\frac{d\varphi' x}{dx}$ in $m\varphi x^{m-1}$ identiſche Gleichungen erhalten, alſo daß

$$m d^{n-1} \left\{ \frac{\varphi x^{m-1} . fx^n}{1.2.3 \ldots n dx^{n-1}} \right\}$$

$$= \begin{matrix} {}^m\mathfrak{A}\varphi x^{m-1} a^n A \\ {}^m\mathfrak{B}\varphi x^{m-2} b^n B \\ {}^m\mathfrak{C}\varphi x^{m-3} c^n C \\ \vdots \quad \vdots \end{matrix}$$

für den Zeiger $\left\{ \begin{matrix} \varphi' x fx, & \frac{d(\varphi' x fx^2)'}{1.2} & \ldots \\ 1 & 2 & \ldots \end{matrix} \right\}$

§. 12. Drittes Problem. Eine Reihe für $u = \varphi z$, ohne daß z (wie im 2ten Problem §. 6) als bekannt angenommen wird, nach Potenzen von y fortſchreitend, zu finden. (La Grange §. 99)

Man habe §. 2. die Gleichung

1) $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) fz$; und §. 6

2) $$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$$ Hieraus folgt

3) $$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) fz;$$

Betrachtet man alſo u als eine Function von y, x; ſo kann man jedes Differential derſelben nach y durch Differentiale nach x ausdrücken.

Es iſt aber, nach dem Tayloriſchen Satze (Archiv II. H. V. p. 201 ſqq. La Grange l. c. §. 45.)

$$u = \psi y + y \left(\frac{d\psi y}{dy}\right) + y^2 \frac{d^2\psi y}{1.2.\, dy^2} + \ldots$$

wenn u = ψy geſetzt, und nach der Differentiation y = o ſubſtituirt wird;

Es iſt (no. 3)

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) fz = \left(\frac{dz}{dx}\right) \left(\frac{d.\,\varphi z}{dz}\right) .\ fz$$

Wenn man y = o ſetzt

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) .\ fx$$

Ferner, wenn man weiter nach y in x differentiirt in 3)

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) fz + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right),$$ und nach x,

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) fz + \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) \left(\frac{dfz}{dz}\right)$$

Subſtituirt man dieſen Werth von $\frac{d^3u}{dxdy}$ und den Werth von $\frac{dz}{dy}$ aus 1) ſo erhält man

$$4)\quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \left\{\frac{d\left\{\left(\frac{du}{dx}\right) fz^2\right\}}{dx}\right\}$$

Ferner wird

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2.\left\{\frac{du}{dx}\, fz^2\right\}}{dxdy}$$

Es iſt aber

$$\left\{\frac{d\left(\frac{du}{dx}\, fz^2\right)}{dy}\right\} = \left\{\frac{d\left(\frac{du}{dx}\, fz^3\right)}{dx}\right\}$$

vermittelſt ähnlicher Subſtitutionen, wie 4) erwieſen wurde; alſo

$$5)\quad \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) = \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right) fz^3}{(dx^2)}$$

Ueberhaupt

$$\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right) = \frac{d^{n-1}.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right) fz^n\right\}}{dx^{n-1}}$$

Und wenn man nach der Differentiation $y = 0$, alſo $z = x$; $fz = fx$; $u = \varphi x$, ſetzt;

$$\varphi z = \varphi x + y.\frac{d\varphi x}{dx} fx + \frac{y^2}{1.2} \frac{d\left(\frac{d\varphi x}{dx} fx^2\right)}{dx} + \ldots$$

wie oben. §. 6.

§. 13. Daß aber allgemein

$$\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) = \frac{d^{n-1}.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right) fz^n\right\}}{dx^{n-1}}$$

folgt ſogleich; wenn nämlich

$$\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right) = \frac{d^{n-2}.\left(\frac{du}{dx} fz^{n-1}\right)}{dx^{n-2}}$$

ſo iſt

$$\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) = \frac{d^{n-2}.\left\{\frac{d.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)(fz)^{n-1}\right\}}{dy}\right\}}{dx^{n-2}}$$

Es iſt aber

$$\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right) fz^{n-1}}{dy} = \frac{d^2u}{dxdy} fz^{-n-1} + (n-1)\left(\frac{du}{dx}\right) fz^{-n-2} \left(\frac{dz}{dy}\right) \left(\frac{dfz}{dz}\right)$$

und die Werthe von

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right); \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ no. 1}$$

ſubſtituirt,

$$\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)fz^{-n-1}}{dy} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(fz)^n + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)(fz)$$

$$+ (n-1)\left(\frac{dfz}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)fz$$

$$= \frac{d.\left(\frac{du}{dx} . fz^n\right)}{dx}$$

folglich die obige Formel; alſo der Satz wahr.

§. 14. Dieſer letzteren Methode bedient ſich Couſ in der Auflöſung der Gleichung $x = \varphi(x, y, z)$; nach wenn φ in eiue Function von y allein übergeht, für z = Introduction a l'étude de l'aſtron. phyſique p. 302 f Und es reducirt ſich das Problem darauf, das Differenti von u nach y dnrch Differentiale nach x auszudrücke welches Problem ſo ſich ausdrücken läßt: Wenn z ei Functlon zweyer veränderlichen Größen iſt (x, y) das Diffe rential jeder Function von z nach jeder Function von durch Differentiale nach Functionen von y auszudrücke (S. Meiues Bruders Disquiſit. analyticae etc.)

§. 15. Viertes Problem. Erweitert man das Tay loriſche Theorem auf die Functionen von zwey, drey u. ſ. w veränderlichen Größen, ſo werden durch ähnliche Schlüſſe, wie §. 12, 13, erhalten:

Wenn $z = t + xfz + yFz$; ſo iſt

$$\varphi z = \varphi t + x ft.\ d.\frac{\varphi t}{dt} + \frac{x^2}{1.2}.\ \frac{d.\left(ft^2.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt} + \ldots$$

$$+ y.Ft.\ d.\frac{\varphi t}{dt} + \frac{y^2}{1.2}.\ \frac{d.\left(Ft^2.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt} + \ldots$$

$$+ xy.\ \frac{d.\left(Ft.\ ft.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt} + \ldots$$

So überhaupt das allgemeine Glied ſeyn wird.

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.\ \frac{d^{n-1}.\left(ft^n.\ \frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{y^n}{1.2.3\ldots n}\ \frac{d^{n-1}\left(Ft^n\ \frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{x^{n-1}.y}{1.2.3\ldots n-1.1}\ \frac{d^{n-1}\left(ft^{n-1}.Ft.\ \frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{x^{n-2}y^2}{1.2.3\ldots n-2.1.2}\ \frac{d^{n-1}\left(ft^{n-2}\ .Ft^2.\ \frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

u. ſ. w., nach der bekannten Formel des Tayloriſchen Satzes.

§. 16. Sucht man den Werth von z durch den Weg der Elimination, wie §. 2, ſo erhält man, durch Vergleichung einer Menge identiſcher Formeln z. B.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n}{1.2.3\ldots n.dt^n}(ft^{n+1}.\,Ft) \\
&= \frac{d^n}{1.2\ldots(n+1)dt^n}(ft^{n+1}.)\ Ft \\
&+ \frac{d^{n-1}}{2\ldots n,\,dt^{n-1}}(ft^n.)\,\frac{d}{dt}(Ft,\ ft) \\
&+ \frac{d^{n-2}}{2.3\ldots n-1.\,dt^{n-2}}(ft^{n-1})\,\frac{d^2}{1.2.dt^2}(Ft\,ft^2) \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{d^{n-r}}{2.3..(n-r+1)\,dt^{n-r}}(ft^{n-r+1})\,\frac{d^r}{2.3..\,rdt^r}(Ft.\ ft^r) \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad ft.\ \frac{d^n}{2.3..\,ndt^n}(Ft\,ft^n)
\end{aligned}
$$

welches für den Coefficienten von $x^{n+1}.y$ die Glieder ſind.

Aus dieſen Formeln werden ſich, wie §. 4. Coefficientengleichungen ergeben, z. B.

$$
\begin{aligned}
(P^{n+r}Q)\,\varkappa(n+1) = {} & \frac{P^{n+1}}{n+1} \cdot \varkappa(n+1).\ Q\varkappa 1 \\
& + \frac{P^{n}}{n}\ \varkappa n.\ PQ.\ \varkappa 2 \\
& + \frac{P^{n-1}}{n-1}\ \varkappa(n-1).\ P^2Q.\ \varkappa 3 \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{P^{n-r+1}}{n-r+1}\ \varkappa(n-r+1).\ P^rQ.\varkappa(r+1) \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& + P\varkappa 1.\ P^nQ.\ \varkappa(n+1)
\end{aligned}
$$

von deſſen Wahrheit man ſich ſogleich überzeugt, wenn man $P^rQ\ \varkappa(r+1)$ entwickelt. Vergl. Archiv V. Heft IX. p. 67, 97.

Wollte man für den Coefficienten von x^my^2 ſolch eine Gleichung finden; ſo würde ſich ergeben

$$
\begin{aligned}
& [P^mQ^2]\ \varkappa(m+1) \\
& = \frac{P^m}{m}\ \varkappa m.\ \frac{Q^2\varkappa^2}{1.2} \\
& + \frac{P^{m-1}}{m-1}\ \varkappa(m-1)\ 2.\ \frac{PQ^2}{1.2}\ \varkappa 3 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& + \frac{P\varkappa 1}{1}\ m.\ P^{m-1}\ \frac{Q^2}{1.2} \cdot \varkappa(m+1) \\
& + \alpha\ Q\varkappa 1.\ \ [P^mQ]\ \varkappa(m+1) \\
& + \beta\ QP\varkappa 2.\ [P^{m-1}Q]\ \varkappa m \\
& + \gamma\ QP^2\varkappa 3.\ [P^{m-2}Q]\ \varkappa(m-1) \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Um das Geſetz dieſer Formel zu entdecken, muß folgendes Problem, gleichſam das allgemeine des bekannten Diſcerptionsproblems, aufgelöſt werden: Es iſt ein Product zweyer Größen (Potenzen) $a^r \times b^m$ von der n-ten Dimenſion gegeben; Man ſoll dies Product zerlegen, oder als zuſammengeſetzt darſtellen, aus zwey (oder mehrern) Factoren, deren Dimenſionen zuſammen den gegebenen gleich, die Dimenſion der Größe a aber immer $= r$, der Größe b immer $= m$ werde; z. B. a^3b^2; wird zerlegt in $a^3 \times b^2$; $a^2 \times b^2 a$, $a \times b^2 a^2$; $a^3 b \times b$; $a^2 b \times ba$; Setzt man hier $a = b$; ſo hat man das bekannte Diſcerptionsproblem: die Binionen zu finden.

§. 17. Es kam in §. 12 und 14 darauf an, Differentiale einer Function von veränderlichen Größen, nach einer derſelben, durch Differentiale nach der andern auszudrücken. Das heißt, wenn $F(x, y, z) = 0$ gegeben, wo z eine Function von x und y; ſo iſt (wie bekannt, La Grange §. 92)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{\delta. F(x,y,z)}{dx}\right)}{\left(\frac{\delta. F(x,y,z)}{dy}\right)} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und es fragt ſich (Fünftes Problem) nach dem weitern Geſetz für $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)$. Die Darſtellung ſolcher Geſetze vermittelſt der combinatoriſchen Analyſis, ſcheint allein zum Zweck zu führen, in leichter Ausübung. S. §. 14.

§. 18. So, um ein Beyſpiel anzuführen, das hieher gehört; wenn [Lambert. Mémoires de Berlin 1770. Obſervations analytiques §. 15 [a]] die Gleichung gegeben iſt:

---

[a] Ein für die Geſchichte des Reverſionsproblems ſehr intereſſanter Aufſatz: Es erhellet daraus, daß Lambert zuerſt die

$$Fz + yfz = \varphi x$$

Man ſoll Fz, durch eine Reihe nach y fortſchreitend, ausdrücken:

So iſt fz als eine gegebene Function von Fz anzuſehen, $= f'z$; und ſo erhält man $FZ = z$ und $\varphi x = X$ geſetzt, die Gleichung:

$$Z + yf'Z = X; \text{ alſo nach §. 2.}$$

$$Z\varkappa(n+1).y^n = \frac{\pm y^n}{1.2.3..n} \cdot \frac{d^n.f'X}{dX^n}.$$

Sechſtes Problem. Und es fragt ſich, $\frac{d^n.f'X}{dX^n}$ auszudrücken, durch Differentiation nach x; wo übrigens als gegeben ebenfalls angenommen werden die Differentiale von X nach x. Vermittelſt der combinatoriſchen Reverſionsformel, angewandt auf das Verfahren das Lagrange l. c. §. 200 wo er das nämliche Problem auflöſt, erhält man ſehr leicht

$$\frac{d^n.f'X}{1..ndx^n} = \frac{df'X}{dx}\,\frac{1}{n}\,p^{-1}\varkappa n$$
$$+ \frac{d^2.f'X}{1.2...dx^2}\,\frac{1}{n-1}\,p^{-2}\varkappa(n-1)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ \frac{d^r.f'X}{1.2..r.dx^r}\,\frac{1}{n+1-r}\,p^{-r}\varkappa(n+1-r).$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Veranlaſſung an Euler und Lagrange gab, das Problem zu behandeln.

Wenn man für die Reihe p annimmt

$$p\left[\frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{1.\,2.\,dx^2}, \frac{d^3X}{1.2.3.dx^3}, \ldots\right]$$

An einem andern Ort §. 63 zeigt **Lagrange** wie man da allgemeine Geſetz überſehen könnte, nämlich. Es iſt bekanntlich;

$$\frac{d.\varphi X}{dx} = \frac{d.\varphi X}{dx}\cdot\frac{dX}{dX}$$; alſo

$$\frac{\frac{d.\,\varphi X}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{d.\,\varphi X}{dX}$$, folglich den nämlichen Schluſ fortgeſetzt;

$$\frac{d.\frac{\frac{d.\,\frac{\varphi X}{dx}}{\frac{dX}{dx}}}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{d^2.\,\varphi X}{dX^2}$$

Alſo erhält man überhaupt, das nte Differential von φX nach X, wenn man φX nach x differentiirt und durch $\frac{dX}{dx}$ dividirt; dieſen Quotienten nach x differentiirt und auf Neue durch $\frac{dX}{dx}$ dividirt; kurz nach jeder Differen tiation wieder dividirt: obige Formel, welche ſich noch mannichfaltig umwandeln läßt. (S. Meines Bruders Disquiſitt. analyt.) zeigt das Geſetz viel deutlicher; und es läßt ſich übrigens blos aus der Theorie der combinatoriſchen Involutionen[b]), auf Differentiation angewandt, zeigen; daß, wenn Q eine Function von x, und man differentiirt $\frac{1}{Q}$ nach x, dividirt mit Q, differentiirt wieder den Quotienten nach x, und dividirt aufs Neue, u. ſ. f. man nach einer nmal wiederholten Differentiation und Diviſion erhalte, in combinatoriſchen Zeichen,

$$1.2.3\ldots n + \frac{{}^{-(n+1)}\mathfrak{A}a^{n}A}{Q^{n+3}} + \frac{{}^{-(n+1)}\mathfrak{B}b^{n}B}{Q^{n+3}} + \ldots$$

oder in Lokalzeichen

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ p^{-(n+1)}\varkappa(n+1)$$

für Scale und Zeiger

$$p\left\{\begin{matrix}\dfrac{dQ}{1.2.dx}, & \dfrac{d^{2}Q}{1.2.3.dx^{2}}, & \dfrac{d^{3}Q}{1..4.dx^{3}}, & \ldots\\ 1, & 2, & 3 & \ldots\end{matrix}\right\}$$

So hängen dieſe Probleme mit dem Reverſionsproblem zuſammen; und ich füge folgende Auflöſung noch hinzu, welche ſich auf §. 14 und 17 bezieht.

§. 19. Siebentes Problem. Es ſey $Q = F[x,y,z]$ einer Function von x und y und z; wo z ebenfalls eine

---

[b] Dahin gehören Probleme; wie ſie Hr. Prof. Rothe oben §. 4. aufgelöſt hat: ſolche, wie Hr. D. Kramp, E. S. c. a. A. S. 44 ſqq.; die Vte und VIte Aufgabe; ſolche, wie hier das VIte und VIIte: davon in meinem Aufſatze. Wie auch das bekannte ∂^{n}, xy, deſſen Geſetz Leibnitz gegeben. Aeußerſt intereſſant in Hinſicht auf dergleichen Probleme aus der Differentialrechnung iſt ein Aufſatz von Lagrange Memoires de Berlin 1772. Sur une nouvelle eſpece de Calcul relatif à la differentiation et à l'integration des quantités variables.

Function von x und y ſey; Es bedeute §. 1. $\frac{\delta Q}{\delta z}$ den Werth der Function, wenn man differentiirt und z allein als veränderlich annimmt; eben ſo $\frac{\delta Q}{\delta y}$, $\frac{\delta Q}{\delta x}$, nach y und x differentiirt, in ſofern nicht zugleich z ſich mit ändert; aber $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ u. ſ. w. den Werth, in ſo fern x und auch z ſich ändert: So fragt man, wie läßt ſich der Werth von $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ das heißt der Werth nach nmaliger Differentiation nach x, indem hiebey ſich zugleich z ändert, ausdrücken durch Werthe, aus Differentiationen blos nach x und z, (indem jede dieſer Größen als unabhängig betrachtet wird) und $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. Es wird, wie aus blos combinatoriſchen Conſtructionen folgt,

$$\begin{array}{l|l}
\left[\frac{d^nQ}{1.2..ndx^n}\right] = \frac{\delta^nQ}{1..n.\delta x^n} & + \frac{\delta^{n-2}Q}{\delta z.2..n-3\ \delta x^{n-3}}\ a^3A \\
+ \frac{\delta^nQ}{\delta z.1.2..n-1.\delta x^{n-1}}\ a^1A & + \frac{\delta^{n-1}Q}{1.2.\delta z^2.2..n\text{-}3\delta x^{n-3}}\ b^3B \\
+ \frac{\delta^{n-1}Q}{\delta z.1.2..n-2.\delta x^{n-2}}\ a^2A & + \frac{\delta^nQ}{1.2.3.1.2..n\text{-}3.\delta z^3\delta x^{n-3}}\ c^3C \\
+ \frac{\delta^nQ}{1.2.\delta z^2 2.3..n\text{-}2.\delta z^{n-2}}\ b^2B & + \quad \text{etc} \quad \text{etc} \quad \text{etc}
\end{array}$$

+ etc, wo das (r+1)te Glied wird

$$\frac{1}{1.2.3...n-r}\left\{\begin{array}{l|l} \frac{\partial^{n-r+1}.Q}{\partial z.\,\partial x^{n-r}}.\,\frac{\mathfrak{a}^r A}{1} & +\frac{\partial^{n-r+3}.Q}{\partial z^3.\partial x^{n-r}}.\,\frac{\mathfrak{c}^r C}{1.2.3}+\ldots \\ +\frac{\partial^{n-r+2}.Q}{\partial z^2\,\partial x^{n-r}}.\,\frac{\mathfrak{b}^r B}{1.2} & \ldots\pm\frac{d^n Q}{\partial z^n.\partial x^{n-r}}.\,\mathfrak{r}^r R \end{array}\right\}$$

und die Reihe mit dem (n+1)ten Gliede abbricht. Es erhellet aus dieſer Formel, daß man auch fragen könne

Achtes Problem; $\frac{d^n z}{dx^n}$ auszudrücken

durch $\left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right)$ und $\frac{\partial^s\partial^r Q}{\partial x^r\partial z^s}$ allgemein;

Oder, Neuntes Problem; $\frac{\partial^n Q}{\partial x^n}$ auszudrücken

durch $\frac{d^m\partial^n Q}{dx^m\partial z^n}$ und $\frac{d^s\partial^r z}{dx^s\partial z^r}$.

Das zweyte Problem hat, wie ſich zeigen ließe, der Darſtellung und Form nach, einige allgemeine Aehnlichkeit mit dem combinatoriſchen Reverſionsproblem, weswegen ich es hier aufführe.

Nämlich, wenn

$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$

$x = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \ldots;$ So iſt

$$y = a\mathfrak{a}^1 Az + \left.\begin{array}{r} a\mathfrak{a}^2 A \\ b\mathfrak{b}^2 B \end{array}\right\} z^2 + \left.\begin{array}{r} a\mathfrak{a}^3 A \\ b\mathfrak{b}^3 B \\ c\mathfrak{c}^3 C \end{array}\right\} z^3 + \ldots$$

Man nehme an, es ſey eine Gleichung von letzterer Form gegeben; und man verlangt, man ſoll daraus $\mathfrak{a}^1 A$; $\mathfrak{a}^2 A\ldots$; $\mathfrak{b}^2 B$; $\mathfrak{b}^3 B\ldots$ u. ſ. w. finden. So wird ſich dies

Problem, wie man ſieht, darauf reduciren, x durch z auszudrücken: denn alsdann hat man $\alpha, \beta, \gamma . \delta .$; Man wird aus der erſten Gleichung y ſubſtituiren und vermittelſt der Reverſion x durch z aus der dritten Gleichung finden.

In der 3ten Gleichung, iſt a der allgemeine Factor von der erſten horizontalen Reihe; eben ſo b der gemeinſchaftliche Factor aller Coefficienten, welche aus der zweyten Potenz da ſind, u. ſ. w.; Nun denke man ſich eine Gleichung wie §. 18, wo für jeden Coefficienten ein verſchiedenes a und b wird; ferner daß y ſelbſt mehrere Werthe, nach einander bekomme, von welchen wieder die a und b und c abhangen: ſo wird dies gleichſam ein allgemeines Problem, mit dem obigen ſeyn.

Es ſeyen $a1, a2, a3 ..; b1, b2, b3, ..$ gewiſſe gegebene Coefficienten; eben ſo, A, B, C, ... 𝔄, 𝔅, ℭ,... Die a und b, u. ſ. w. ändern ſich mit den A, B, C, ... und dieſer ihre Werthe, in ſofern ſie von B abhangen, zeichne man

$$\overset{2}{a1}, \quad \overset{2}{a2} \;\ldots\ldots\; \overset{2}{b1}, \quad \overset{2}{b2} \ldots$$

in ſofern ſie von C abhangen, durch

$$\overset{3}{a1}, \quad \overset{3}{a2}, \quad \overset{3}{a3}. \text{ u. ſ. w.}$$

Nun habe man nach einander folgende Gleichungen, wo p irgend eine Reihe

$$A = \mathfrak{A} + a1.\ p\varkappa 1$$

$$B = \mathfrak{B} + \overset{2}{a}1.\ p\varkappa 1 + \overset{2}{a}2.\ p\varkappa 2$$
$$+ \overset{2}{b}1.\ p^2\varkappa 1$$

$$C = \mathfrak{C} + \overset{3}{a}1.\ p\varkappa 1 + \overset{3}{a}2.\ p\varkappa 2 + \overset{3}{a}3.\ p\varkappa 3$$
$$+ \overset{3}{b}1.\ p^2\varkappa 1 + \overset{3}{b}2.\ p^2\varkappa 2$$
$$+ \overset{3}{c}1.\ p^3\varkappa 1$$

So iſt das VII Problem des §. 18 folgendes, allgemein dargeſtellt:

Es ſind $\overset{n}{a}$, $\overset{n}{b}$, $\overset{n}{c}$ .. allgemein gegeben, ſo wie auch p; daraus hat man alſo $\mathcal{N}$

Oder es ſind

$\overset{n}{A}$, $\overset{n}{\mathfrak{A}}$, $\overset{n}{a}$, $\overset{n}{b}$, $\overset{n}{c}$ . . . gegeben; Man ſoll aus jenen Gleichungen

$p\varkappa n$

finden.

Letzteres Problem hat Aehnlichkeit mit dem Problem des Herrn D. Kramp c). Nur kommen dort keine höhern Potenzen von p vor. Blos die combinatoriſche Analyſis wird jenes Problem vorlegen und auflöſen.

---

c) De Aequationum decrementalium primi ordinis solutione generali, §. 18.

§. 20. Das Allgemeine des Eliminationsproceſſes, welcher §. 2 und 6 uns auf eine einfachere Gleichung führte, ſtellt Lagrange §. 100 ſqq. dar.

Es ſey nämlich

$F(x, y, z) = \varphi p$. wo φp eine willkührliche Function iſt; $p = f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ aber gegebene Functionen ſind; überdies iſt z eine Function von x und y. Man betrachte y als eine ſolche Function von x, daß das Differential von p verſchwinde; ſo erhält man, indem man das Differenſial wirklich 0 ſetzt, einen Werth von $\frac{dy}{dx}$ der unbeſtimmten Größe; Nämlich in dem man nach x differenziirt, erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{dz}{dx}\right) \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dy}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dz}{dx} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{dy}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0$$

daraus folgt, durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$, welches durch die zweyte Gleichung beſtimmt wird,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{dz}{dx}\right) \left\{\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$
$$+ \left(\frac{dz}{dy}\right) \left\{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

Dies iſt zugleich die allgemeine Form, für alle Gleichungen vom erſten Grade, welche zum Integral eine Gleichung wie obige iſt, haben, wo φ unbeſtimmt iſt, welches eliminirt worden.

In unſerm Falle für die Gleichung

$$\frac{z-x}{y} = fz,\ \text{erhalten wir}\ F(x,y,z) = \frac{(z-x)}{y};\ p=z;\ \varphi p=fz$$

Alſo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{(z-x)}{y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Nach dieſen Subſtitutionen erhalten wir die Gleichung wie oben §. 2:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)(z-y)-y\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

§. 21. Anmerkung. Das Reverſionsproblem, in der Geſtalt, wie es hier, in der Theorie der Functionen, ſo wie in der erſten Auflöſung von Lagrange (Memoires de Berlin 1768), und in der weit allgemeinern Behandlung von Lambert (ebend. 1770) auftritt, läßt ſich vielleicht zum einzigen Problem der ganzen Functionentheorie ausdehnen. Wenigſtens ſcheint es, daß Lambert, aus Gelegenheit ſeiner

Auflöſungen, ſolch eine allgemeine Ausſicht im Sinne hatte[d]. –

Gewiß ſah er die Auflöſung der Differentialgleichungen vom erſten Grade zwiſchen zwey veränderlichen Größen, als ein Exempel jenes Problems an, wenn er die Gleichung

$$0 = \varphi y.\ \psi x.\ \int F(x,\ y)\, dx - \int \pi(x,\ y)\, dy + C$$

vermittelſt deſſelben auflöſt: und ſo ſey es erlaubt, inzwiſchen folgendes allgemeine Problem (ohne Integration und Differentiation) vorzulegen:

Es ſind m veränderliche Größen gegeben, (x, y . . s) und zwiſchen ihnen (m — r) Gleichungen von der Form

$$f(x,\ y,\ z\ .\ .\ s\ .\ .) = F(x,\ y,\ z\ .\ .\ .\ s)$$

Man ſoll 1) Jede Function von jeder Größe unter denſelben, durch willkührliche gegebene Functionen von r Größen aus den m, welche man will, z. B. $\psi s = F(x,\ z,\ r,\ t\ .\ .\ .)$ ausdrücken.

Aus Lagrange l. c. §. 165, 166 ließe ſich folgendes Problem vorlegen. Es ſind Größen gegeben, p, q, r, s, t.. Man conſtruire aus ihnen alle [illegible] mit Wiederholungen,

---

d) Er ſagt §. 1. Voila un probleme

$$f(x,\ y) = F(x,\ y);$$

d'une generalité peu commune, et dont la ſolution paroit promettre de nouveaux progres a l'Analyſe; und §. 2. Je regarde la theorie des fonctions, dont on n'a encore que des parties iſolecs — Je dirai peut etre une autre fois, ſous quel point de vue je l'enviſage.

und verſehe jede ſolcher mtionen mit einen Coefficienten; die Summe aller dieſer mtionen ſeye

$$Q = \varphi(p, q, r, s, t\,.\,.)$$

Nun habe man die Gleichungen

$$\left(\frac{dQ}{dp}\right) = 0; \left(\frac{dQ}{dq}\right) = 0, \left(\frac{dQ}{dr}\right) = 0$$

u. ſ. w., ſo viel, weniger eine, als Größen da ſind; Was iſt

$$Q' = \varphi' t$$

wenn alle jene Größen, außer einer, eliminirt worden?

VIII.

Auflöſung des Elevationsproblems für Gleichungen, von M. K. F. Hauber.

§. 1.

Die im ſechſten Hefte des Archivs für reine und angew. Mathem. S. 184, 195, erwähnte Lambertiſche ſowohl, als auch die zweyte von Herrn Prof. Fiſcher S. 193 ebendaſ. angegebene Methode, führen, weiter verfolgt, auf folgenden Satz:

Wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung vom $r$ten Grade

$$x^r - \left(ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \ldots + \overset{r-1}{a}\right) = 0$$

alle auch in der $n$mal höhern:

$$x^{nr} + Ax^{n(r-1)} + Bx^{n(r-2)} + Cx^{n(r-3)} + \ldots + \overset{r-2}{A}x^n + \overset{r-1}{A} = 0$$

enthalten, leztere mithin durch erſtere theilbar ſeyn ſoll; ſo müſſen die Coefficienten jener, A, B, C ... $\overset{r-1}{A}$, ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie folgenden r Gleichungen Genüge leiſten:

$${}^{nr}\mathfrak{J}^{r}+A.^{n(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+B.^{n(r-2)}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}.{}^{n}\mathfrak{J}^{r}+\overset{r-1}{A}=0$$

$${}^{nr-1}\mathfrak{J}^{r}+A.^{n(r-1)-1}\mathfrak{J}^{r}+B.^{n(r-2)-1}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}.{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r}=0$$

$${}^{nr-2}\mathfrak{J}^{r}+A.^{n(r-1)-2}\mathfrak{J}^{r}+B.^{n(r-2)-2}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}.{}^{n-2}\mathfrak{J}^{r}=0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$${}^{nr-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+A^{n(r-1)-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+B^{n(r-2)-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}{}^{n-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}=0$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & r \\ a & b & c & \ldots\ldots & \overset{r-1}{a} \end{matrix}\right\}$$

indem man unter ${}^{1}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{2}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{3}\mathfrak{J}^{r}$ u. ſ. w. Größen

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & \overset{r-1}{a} \end{matrix}\right\}$$

verſteht, die durch folgende Gleichungen beſtimmt werden:

$${}^{1}\mathfrak{J}^{r} = a$$

$${}^{2}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{1}\mathfrak{J}^{r} + b$$

$${}^{3}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{2}\mathfrak{J}^{r} + b.{}^{1}\mathfrak{J}^{r} + c$$

$$\vdots$$

$${}^{r}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{r-1}\mathfrak{J}^{r}+b.{}^{r-2}\mathfrak{J}^{r}+c.{}^{r-3}\mathfrak{J}^{r}+\ldots\ldots+\overset{r-1}{a}$$

$$\vdots$$

$${}^{r+m}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{r+m-1}\mathfrak{J}^{r}+b.{}^{r+m-2}\mathfrak{J}^{r}+c.{}^{r+m-3}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-1}{a}.{}^{m}\mathfrak{J}^{r}$$

Dies ergiebt ſich durch die erwähnte Lambertiſche Methode, vermöge welcher man die nmal höhere der obigen Gleichungen, dem Produkt der gegebenen durch die Gleichung vom (n−1)rten Grade, wie

$$x^{(n-1)r}+\alpha x^{(n-1)r-1}+\beta x^{(n-1)r-2}+\ldots+\overset{(n-1)r-1}{\alpha}=0,$$

gleichſetzt, wo ſodann von den durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x in jener nmal höhern Gleichung und in dieſem entwickelten Produkte ſich ergebenden Gleichungen, durch die (n−1)r erſten die Werthe der angenommenen Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots \overset{(n-1)r-1}{\alpha}$, wenn man will, von einander-unabhängig durch A, B, C ... und

$$^{1}\mathfrak{J},\ {}^{2}\mathfrak{J},\ {}^{3}\mathfrak{J} \ldots$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2. & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{matrix}\right\}$$

ausgedrückt werden mögen, die r letzten aber gerade die r oben angeführten ſeyn werden. Eben daſſelbe kann durch die erwähnte Fiſcheriſche Methode erhalten werden, unter Vorausſetzung der Auflöſung der Aufgabe: den Quotienten $\dfrac{+Ay^{\alpha}+By^{\beta}+\ldots+My^{\mu'}}{\left(1-(ay+by^2+\ldots+\overset{r-1}{a}\ y^r\right)}$ in einer nach poſitiven Potenzen von y fortlaufenden Reihe, nebſt deren Ergänzung oder dem Reſte, mit independent ausgedrückten Coefficienten anzugeben. Auf daſſelbe Reſultat gelangt man auch, wenn man vermittelſt des Satzes, daß, wenn r und m ganze poſitive Zahlen ſind, und

$$x^r=ax^{r-1}+bx^{r-2}+cx^{r-3}+\ldots+\overset{r-1}{a}\text{, alsdenn}$$

$${}^{r+m} = \left.\begin{array}{l} a.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +b.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \\ +c.{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r} \\ \vdots \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-(r-1)}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} \times x^{r-1} + \left.\begin{array}{l} b.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +c.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \\ +d.{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r} \\ \vdots \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-(r-2)}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} \times x^{r-2}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} c.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +d.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \\ \vdots \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-(r-3)}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} \times x^{r-3} + \ldots + \left.\begin{array}{l} \overset{r-2}{a}.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} x + \overset{r-1}{a}.{}^{m}\mathfrak{J}^{r}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & \overset{r-1}{a} \end{array}\right\}$$

(welcher Satz, wie man leicht finden wird, für $n=1$, $=2$, und wenn für irgend ein n, auch für $n+1$, mithin allgemein gilt) ſtatt der Potenzen von x in der n mal höhern Gleichung ihre Werthe in den niedrigern Potenzen $x^{r-1}, x^{r-2}, \ldots x$ ſubſtituirt, und nach dieſer Verwandlung jedes Gliedes Coefficienten $= 0$ ſetzt. Hiebey gelegentlich folgende Relation:

$${}^{m+n}\mathfrak{J}^{r} = {}^{m}\mathfrak{J}^{r} . {}^{n}\mathfrak{J}^{r} + b.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} + c.\left\{\begin{array}{l} +{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-2}\mathfrak{J}^{r} \\ {}^{m-2}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\}$$

$$+d\left\{\begin{array}{l} {}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\;{}^{n-3}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r}\;{}^{n-2}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-3}\mathfrak{J}^{r}\;{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} + \ldots + \overset{r-1}{a}.\left\{\begin{array}{l} {}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\;{}^{n-(r-1)}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r}\;{}^{n-(r-2)}\mathfrak{J}^{r} \\ + \ldots \\ +{}^{m-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}\;{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & \overset{r-1}{a} \end{array}\right\}$$

welche man leicht für n = 1, = 2 u. ſ. w., und überhaupt, wenn für n, auch für n+1 wahr finden wird.

Man kann bemerken, daß zu bequemerer Entwickelung von Produkten, wie ${}^{m}\mathfrak{J}' \cdot {}^{n}\mathfrak{J}'$, vermittelſt vorher conſtruirter Involution zur Summe m + n (den Zeiger geſetzt wie bisher) oft, die übrigens nicht ſchwierige Auflöſung folgender Aufgabe dienen mag:

Für eine gegebene Buchſtabencomplexion zur Summe m + n, den Zahlencoefficienten zu finden, der ihr zukommt, wenn ſie unter die Theile des entwickelten Produkts ${}^{m}\mathfrak{J}' \cdot {}^{n}\mathfrak{J}'$ gehören ſoll. — So auch für Produkte wie ${}^{m}\mathfrak{J}'' \cdot {}^{n}\mathfrak{J}' \cdot {}^{p}\mathfrak{J}'$ u. ſ. f.

§. 2. Bey Betrachtung der zweyten von Lambert in ſeinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, II Theil, S. 222 flg. angegebenen Methode, unſer Elevationsproblem aufzulöſen, wird man, ſtatt des daſelbſt angeführten Newtoniſchen Satzes, die independenten Ausdrücke der Summe jeder Potenzen der Wurzeln einer Gleichung aus deren Coefficienten oder den verſchiedenen Klaſſen der Combinationen jener Wurzeln ſimpliciter ohne Wiederholungen (Hindenburgs Polyn. Lehrſ. S. 290), und umgekehrt der letztern aus den erſtern (S. 110. 278. flgg.) vorausgeſetzt, von ſelbſt auf folgenden Schluß geleitet:

Da, die gegebene Gleichung

$x^r - (ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \dots + \overset{r-1}{a}) = 0$, deren Wurzeln α, β, γ u. ſ. w., ferner $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \text{etc} = S(m)$, und die nmal höhere $x^{nr} + Ax^{n(r-1)} + Bx^{n(r-2)} + Cx^{n(r-3)} + \dots + \overset{r-1}{A} = 0$ geſetzt, vermöge der beyden Sätze für die vorhin genannten independenten Ausdrücke, die Größen A, B, C … durch S(n), S(2n), S(3n) …, dieſe S(n), S(2n), S(3n) … aber, durch die Coefficienten a, b, c … independent ſich ausdrücken laſſen; ſo folgt, daß die Coefficienten A, B, C … der nmal erhöhten Gleichung ſich aus den gegebenen a, b, c … independent ausdrücken laſſen.

So iſt z. B. für $r = 5$, $n = 6$,

$$\frac{S(6)}{1} = 6\left\{\frac{\mathfrak{f}^6 F}{6} - \frac{\mathfrak{e}^6 E}{5} + \frac{\mathfrak{d}^6 D}{4} - \frac{\mathfrak{c}^6 C}{3} + \frac{\mathfrak{b}^6 B}{2}\right\}$$

$$\frac{S(12)}{2} = 6\left\{\frac{\mathfrak{m}^{12} M}{12} - \frac{\mathfrak{l}^{12} L}{11} + \frac{\mathfrak{k}^{12} K}{10} - \ldots - \frac{\mathfrak{c}^{12} C}{3}\right\}$$

$$\frac{S(18)}{3} = 6\left\{\frac{\mathfrak{s}^{18} S}{18} - \frac{\mathfrak{r}^{18} R}{17} + \frac{\mathfrak{q}^{18} Q}{16} - \ldots + \frac{\mathfrak{d}^{18} D}{4}\right\}$$

u. ſ. w. $\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{array}\right\}$

und $A = -\frac{\mathfrak{a}^1 A}{1}$

$$B = -\frac{\mathfrak{a}^2 A}{1} + \frac{\mathfrak{b}^2 B}{2}$$

$$C = -\frac{\mathfrak{a}^3 A}{1} + \frac{\mathfrak{b}^3 B}{2} - \frac{\mathfrak{c}^3 C}{3}$$ u. ſ. w.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{S(6)}{1}, & \frac{S(12)}{2}, & \frac{S(18)}{3}, & \frac{S(24)}{4}, & \frac{S(30)}{5} \end{array}\right\}$$

Anmerkung. Die in dieſem §. angegebenen Formeln findet man auch, wenn man aus den beyden Gleichungen

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^6 - v = 0$$

§. 20. Das Allgemeine des Eliminationsproceſſes, welcher §. 2 und 6 uns auf eine einfachere Gleichung führte, ſtellt Lagrange §. 100 ſqq. dar.

Es ſey nämlich

$F(x, y, z) = \varphi p$, wo φp eine willkührliche Function iſt; $p = f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ aber gegebene Functionen ſind; überdies iſt z eine Function von x und y. Man betrachte y als eine ſolche Function von x, daß das Differential von p verſchwinde; ſo erhält man, indem man dies Differential wirklich o ſetzt, einen Werth von $\frac{dy}{dx}$ der unbeſtimmten Größe; Nämlich indem man nach x differentiirt, erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dy}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\right] = o$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{dy}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right] = o$$

daraus folgt, durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$, welches durch die zweyte Gleichung beſtimmt wird,

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x} \\ & + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right\} \\ & + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial x}\right\} \end{aligned}$$

Dies iſt zugleich die allgemeine Form, für alle Gleichungen vom erſten Grade, welche zum Integral eine Gleichung wie obige iſt, haben, wo φ unbeſtimmt iſt, welches eliminirt worden.

In unſerm Falle für die Gleichung

$\frac{z-x}{y} = fz$, erhalten wir $F(x,y,z) = \frac{(z-x)}{y}$; $p = z$; $\varphi p = fz$

Alſo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{(z-x)}{y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Nach dieſen Subſtitutionen erhalten wir die Gleichung wie oben §. 2:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)(z-y) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

§. 21. Anmerkung. Das Reverſionsproblem, in der Geſtalt, wie es hier, in der Theorie der Functionen, ſo wie in der erſten Auflöſung von Lagrange (Memoires de Berlin 1768), und in der weit allgemeinern Behandlung von Lambert (ebend. 1770) auftritt, läßt ſich vielleicht zum einzigen Problem der ganzen Functionentheorie ausdehnen. Wenigſtens ſcheint es, daß Lambert, aus Gelegenheit ſeiner

Auflöſungen, ſolch eine allgemeine Ausſicht im Sinne hatte [d]). –

Gewiß ſah er die Auflöſung der Differentialgleichungen vom erſten Grade zwiſchen zwey veränderlichen Größen, als ein Exempel jenes Problems an, wenn er die Gleichung

$$0 = \varphi y.\ \psi x.\ \int F(x,\ y)\, dx - \int \pi(x,\ y)\, dy + C$$

vermittelſt deſſelben auflöſt: und ſo ſey es erlaubt, inzwiſchen folgendes allgemeine Problem (ohne Integration und Differentiation) vorzulegen:

Es ſind m veränderliche Größen gegeben, (x, y . . s) und zwiſchen ihnen (m — r) Gleichungen von der Form

$$f(x,\ y,\ z\ .\ .\ s\ .\ .) = F(x,\ y,\ z\ .\ .\ .\ s)$$

Man ſoll 1) Jede Function von jeder Größe unter denſelben, durch willkührliche gegebene Functionen von r Größen aus den m, welche man will, z. B. $\psi s = F(x,\ z,\ r,\ t\ .\ .\ .)$ ausdrücken.

Aus Lagrange l. c. §. 165, 166 ließe ſich folgendes Problem vorlegen. Es ſind Größen gegeben, p, q, r, s, t.. Man conſtruire aus ihnen alle [illegible]ationen mit Wiederholungen,

---

[d]) Er ſagt §. 1. Voila un probleme

$$f(x,\ y) = F(x,\ y);$$

d'une generalité peu commune, et dont la ſolution paroit promettre de nouveaux progres à l'Analyſe; und §. 2. Je regarde la theorie des fonctions, dont on n'a encore que des parties iſolées — Je dirai peut etre une autre fois, ſous quel point de vue je l'enviſage.

und verſehe jede ſolcher mtionen mit einen Coefficienten; die Summe aller dieſer mtionen ſeye

$$Q = \varphi(p,\ q,\ r,\ s,\ t\,.\,.)$$

Nun habe man die Gleichungen

$$\left(\frac{dQ}{dp}\right) = 0;\ \left(\frac{dQ}{dq}\right) = 0,\ \left(\frac{dQ}{dr}\right) = 0$$

u. ſ. w., ſo viel, weniger eine, als Größen da ſind; Was iſt

$$Q = \varphi' t$$

wenn alle jene Größen, außer einer, eliminirt worden?

VIII.

Auflöſung des Elevationsproblems für Gleichungen,

von M. K. F. Hauber.

---

§. 1.

Die im ſechſten Hefte des Archivs für reine und angew. Mathem. S. 184, 195, erwähnte Lambertiſche ſowohl, als auch die zweyte von Herrn Prof. Fiſcher S. 193 ebendaſ. angegebene Methode, führen, weiter verfolgt, auf folgenden Satz:

Wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung vom $r$ten Grade

$$x^r - \left(ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \ldots + \overset{r-1}{a}\right) = 0$$

alle auch in der $n$mal höhern:

$$x^{nr} + Ax^{n(r-1)} + Bx^{n(r-2)} + Cx^{n(r-3)} + \ldots + \overset{r-2}{A}x^n + \overset{r-1}{A} = 0$$

enthalten, leztere mithin durch erſtere theilbar ſeyn ſoll; ſo müſſen die Coefficienten jener, A, B, C . . . $\overset{r-1}{A}$, ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie folgenden r Gleichungen Genüge leiſten:

$${}^{nr}\mathfrak{J}^{r}+A.{}^{n(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+B.{}^{n(r-2)}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}.{}^{n}\mathfrak{J}^{r}+\overset{r-1}{A}=0$$

$${}^{nr-1}\mathfrak{J}^{r}+A.{}^{n(r-1)-1}\mathfrak{J}^{r}+B.{}^{n(r-2)-1}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}.{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r}=0$$

$${}^{nr-2}\mathfrak{J}^{r}+A.{}^{n(r-1)-2}\mathfrak{J}^{r}+B.{}^{n(r-2)-2}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}.{}^{n-2}\mathfrak{J}^{r}=0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$${}^{nr-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+A{}^{n(r-1)-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+B{}^{n(r-2)-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-2}{A}{}^{n-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}=0$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & r \\ a & b & c & \ldots\ldots & \overset{r-1}{a} \end{array}\right\}$$

indem man unter ${}^{1}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{2}\mathfrak{J}^{r}$, ${}^{3}\mathfrak{J}^{r}$ u. ſ. w. Größen

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & \overset{r-1}{a} \end{array}\right\}$$

verſteht, die durch folgende Gleichungen beſtimmt werden:

$${}^{1}\mathfrak{J}^{r} = a$$

$${}^{2}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{1}\mathfrak{J}^{r} + b$$

$${}^{3}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{2}\mathfrak{J}^{r} + b.{}^{1}\mathfrak{J}^{r} + c$$

$$\vdots$$

$${}^{r}\mathfrak{J}^{r} = a.{}^{r-1}\mathfrak{J}^{r}+b.{}^{r-2}\mathfrak{J}^{r}+c.{}^{r-3}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-1}{a}$$

$$\vdots$$

$${}^{r+m}\mathfrak{J}^{r}=a.{}^{r+m-1}\mathfrak{J}^{r}+b.{}^{r+m-2}\mathfrak{J}^{r}+c.{}^{r+m-3}\mathfrak{J}^{r}+\ldots+\overset{r-1}{a}.{}^{m}\mathfrak{J}^{r}$$

Dies ergiebt ſich durch die erwähnte Lambertiſche Methode, vermöge welcher man die nmal höhere der obigen Gleichungen, dem Produkt der gegebenen durch die Gleichung vom (n−1)rten Grade, wie

$$x^{(n-1)r}+\dot{\alpha}x^{(n-1)r-1}+\dot{\beta}x^{(n-1)r-2}+\ldots+\overset{(n-1)r-1}{\dot{\alpha}}=0,$$

gleichſetzt, wo ſodann von den durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x in jener nmal höhern Gleichung und in dieſem entwickelten Produkte ſich ergebenden Gleichungen, durch die (n−1)r erſten die Werthe der angenommenen Coefficienten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, ..., $\overset{(n-1)r-1}{\dot{\alpha}}$, wenn man will, von einander-unabhängig durch A, B, C ... und

$${}^{1}\mathfrak{J},\ {}^{2}\mathfrak{J},\ {}^{3}\mathfrak{J}\ \ldots$$

$$\left\{\begin{matrix}1 & 2. & 3 & \ldots\\ a & b & c & \ldots\end{matrix}\right\}$$

ausgedrückt werden mögen, die r letzten aber gerade die r oben angeführten ſeyn werden. Eben daſſelbe kann durch die erwähnte Fiſcheriſche Methode erhalten werden, unter Vorausſetzung der Auflöſung der Aufgabe: den Quotienten

$$\frac{+Ay^{\alpha}+By^{\beta}+\ldots+My^{\mu}}{\left(1-(ay+by^{2}+\ldots+\overset{r-1}{a}y^{r}\right)}$$

in einer nach poſitiven Potenzen von y fortlaufenden Reihe, nebſt deren Ergänzung oder dem Reſte, mit independent ausgedrückten Coefficienten anzugeben. Auf daſſelbe Reſultat gelangt man auch, wenn man vermittelſt des Satzes, daß, wenn r und m ganze poſitive Zahlen ſind, und

$$x^{r}=ax^{r-1}+bx^{r-2}+cx^{r-3}+\ldots+\overset{r-1}{a},$$ alsdenn

$$^{r+m} = \left.\begin{array}{l} a.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +b.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \\ +c.{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r} \\ \vdots \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-(r-1)}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} \times x^{r-1} + \left.\begin{array}{l} b.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +c.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \\ +d.{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r} \\ \vdots \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-(r-2)}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} \times x^{r-2}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} c.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +d.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \\ \vdots \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-(r-3)}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} \times x^{r-3} + \ldots + \left.\begin{array}{l} \overset{r-2}{a}.{}^{m}\mathfrak{J}^{r} \\ +\overset{r-1}{a}.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} x + \overset{r-1}{a}.{}^{m}\mathfrak{J}^{r}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & \overset{r-1}{a} \end{array}\right\}$$

(welcher Satz, wie man leicht finden wird, für $n=1$, $=2$, und wenn für irgend ein n, auch für $n+1$, mithin allgemein gilt) ſtatt der Potenzen von x in der n mal höhern Gleichung ihre Werthe in den niedrigern Potenzen $x^{r-1}, x^{r-2}, \ldots x$ ſubſtituirt, und nach dieſer Verwandlung jedes Gliedes Coefficienten = 0 ſetzt. Hiebey gelegentlich folgende Relation:

$${}^{m+n}\mathfrak{J}^{r} = {}^{m}\mathfrak{J}^{r}.{}^{n}\mathfrak{J}^{r} + b.{}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} + c.\left\{\begin{array}{l} {}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-2}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\}$$

$$+d\left\{\begin{array}{l} {}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-3}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-2}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-3}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\} + \ldots + \overset{r-1}{a}.\left\{\begin{array}{l} {}^{m-1}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-(r-1)}\mathfrak{J}^{r} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-(r-2)}\mathfrak{J}^{r} \\ + \ldots \\ +{}^{m-(r-1)}\mathfrak{J}^{r}\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & \overset{r-1}{a} \end{array}\right\}$$

welche man leicht für n = 1, = 2 u. ſ. w., und überhaupt, wenn für n, auch für n+1 wahr finden wird.

Man kann bemerken, daß zu bequemerer Entwickelung von Produkten, wie ${}^{m}\mathfrak{J}^{r} \cdot {}^{n}\mathfrak{J}^{r}$, vermittelſt vorher conſtruirter Involution zur Summe m + n (den Zeiger geſetzt wie bisher) oft, die übrigens nicht ſchwierige Auflöſung folgender Aufgabe dienen mag:

Für eine gegebene Buchſtabencomplexion zur Summe m + n, den Zahlencoefficienten zu finden, der ihr zukommt, wenn ſie unter die Theile des entwickelten Produkts ${}^{m}\mathfrak{J}^{r} \cdot {}^{n}\mathfrak{J}^{r}$ gehören ſoll. — So auch für Produkte wie ${}^{m}\mathfrak{J}^{r} \cdot {}^{n}\mathfrak{J}^{r} \cdot {}^{p}\mathfrak{J}^{r}$ u. ſ. f.

§. 2. Bey Betrachtung der zweyten von Lambert in ſeinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, II Theil, S. 222 flg. angegebenen Methode, unſer Elevationsproblem aufzulöſen, wird man, ſtatt des daſelbſt angeführten Newtoniſchen Satzes, die independenten Ausdrücke der Summe jeder Potenzen der Wurzeln einer Gleichung aus deren Coefficienten oder den verſchiedenen Klaſſen der Combinationen jener Wurzeln ſimpliciter ohne Wiederholungen (Hindenburgs Polyn. Lehrſ. S. 290), und umgekehrt der letztern aus den erſtern (S. 110. 278. flgg.) vorausgeſetzt, von ſelbſt auf folgenden Schluß geleitet:

Da, die gegebene Gleichung

$x^r - (ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \ldots + \overset{r-1}{a}) = 0$, deren Wurzeln α, β, γ u. ſ. w., ferner $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + etc = S(m)$, und die nmal höhere $x^{nr} + Ax^{n(r-1)} + Bx^{n(r-2)} + Cx^{n(r-3)}$ $+ \ldots + \overset{r-1}{A} = 0$ geſetzt, vermöge der beyden Sätze für die vorhin genannten independenten Ausdrücke, die Größen A, B, C ... durch S(n), S(2n), S(3n) ..., dieſe S(n), S(2n), S(3n) ... aber, durch die Coefficienten a, b, c ... independent ſich ausdrücken laſſen; ſo folgt, daß die Coefficienten A, B, C ... der nmal erhöhten Gleichung ſich aus den gegebenen a, b, c ... independent ausdrücken laſſen.

So iſt z. B. für $r = 5$, $n = 6$,

$$\frac{S(6)}{1} = 6\left\{\frac{\mathfrak{f}^6 F}{6} - \frac{\mathfrak{e}^6 E}{5} + \frac{\mathfrak{d}^5 D}{4} - \frac{\mathfrak{c}^6 C}{3} + \frac{\mathfrak{b}^6 B}{2}\right\}$$

$$\frac{S(12)}{2} = 6\left\{\frac{\mathfrak{m}^{12} M}{12} - \frac{\mathfrak{l}^{12} L}{11} + \frac{\mathfrak{k}^{12} K}{10} - \ldots - \frac{\mathfrak{c}^{12} C}{3}\right\}$$

$$\frac{S(18)}{3} = 6\left\{\frac{\mathfrak{s}^{18} S}{18} - \frac{\mathfrak{r}^{18} R}{17} + \frac{\mathfrak{q}^{18} Q}{16} - \ldots + \frac{\mathfrak{d}^{18} D}{4}\right\}$$

u. ſ. w. $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} & \mathfrak{e} \end{matrix}\right\}$

und $A = -\frac{\mathfrak{a}^1 A}{1}$

$$B = -\frac{\mathfrak{a}^2 A}{1} + \frac{\mathfrak{b}^2 B}{2}$$

$$C = -\frac{\mathfrak{a}^3 A}{1} + \frac{\mathfrak{b}^3 B}{2} - \frac{\mathfrak{c}^3 C}{3} \text{ u. ſ. w.}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{S(6)}{1}, & \frac{S(12)}{2}, & \frac{S(18)}{3}, & \frac{S(24)}{4}, & \frac{S(30)}{5} \end{matrix}\right\}$$

Anmerkung. Die in dieſem §. angegebenen Formeln findet man auch, wenn man aus den beyden Gleichungen

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$
$$x^6 - v = 0$$

die x, nach der von Lagrange in den Memoires de Berlin 1769 vorgetragenen Methode, eliminirt, und eine Gleichung in v erhält. In der That wird man auch finden, daß das Verfahren nach dieſer Methode, die Ableitungen der beyden independenten Ausdrücke für die Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung aus ihren Coefficienten, und dieſer aus jenen, vermittelſt des Logarithmen eines Polynomiums und des Ausdrucks für die Erhebung der Baſis des natürlichen Logarithmenſyſtems auf eine Potenz, deren Exponent ein Infinitinomium iſt, ſo wie man dieſe Ableitungen in der angeführten Schrift des Herrn v. Praſſe findet, in ſich ſchließt.

§. 3. Den Beweis der beyden erwähnten Sätze (Polynom. Lehrſ. S. 110. Uſus Logarithm. infinitin. auctore de Praſſe §. XXIX) betreffend, bemerke ich, daß dieſelben aus dem angeführten Newtoniſchen Satze direkt und unmittelbar hergeleitet, mithin auch, wenn man will, wofern der letztere elementariſch erwieſen iſt, wie dies z. B. in Maclaurin's Algebra, in Eulers Opuſc. anal. Tom. I. p. 337. ſqq., und in Käſtner's Analyſis endlicher Größen geſchieht, als elementariſch erweislich (vgl. Polyn. Lehrſ. S. 279.) betrachtet werden können. Zu dieſer Ableitung dient die Betrachtung folgender Involutionen (I und II)

I.

A	a	a	a	a	
	B	a	a	a	
	A	b	a	a	
		C	a	a	
	A	a	b	a	
		B	b	a	
		A	c	a	
			D	a	etc
	A	a	a	b	
		B	a	b	
		A	b	b	
			C	b	
		A	a	c	
			B	c	
			A	d	
				E	

etc

II.

αa	βa	γa	δa	εa	
	βb	γa	δa	εa	
	αa	γb	δa	εa	
		γc	δa	εa	
	αa	βa	δb	εa	
		βb	δb	εa	
		αa	δc	εa	
			δd	εa	etc
	αa	βa	γa	εb	
		βb	γa	εb	
		αa	γb	εb	
			γc	εb	
		αa	βa	εc	
			βb	εc	
			αa	εd	
				εe	

etc

III.

a	a	a	a	a	
	b	a	a	a	
	a	b	a	a	
		c	a	a	
	a	a	b	a	
		b	b	a	
		a	c	a	
			d	a	etc
	a	a	a	b	
		b	a	b	
		a	b	b	
			c	b	
		a	a	c	
			b	c	
			a	d	
				e	

etc

deren Conſtruction und Unterſchied von der gewöhnlichen (III) durch den Augenſchein erhellen wird, und die Auflöſung folgender ſich auf dieſelbe beziehender Aufgaben:

Es ſey $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ irgend eine Complexion, welche in der Involution (III) kmal enthalten ſey (mithin K ihre Verſetzungszahl). Die Summe der Complexionen zu finden, welche die Stellen der genannten in der Involution (I) beſetzen.

Sie iſt $\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \times$

$(\alpha. Abcd + \beta. aBcd + \gamma. abCd + \delta. abcD)\, a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}d^{\delta-1}$;

(woraus ſich der in des Herrn v. Pfaſſe angeführter Schrif §. XXIII, XXIV. erwieſene Satz ergiebt)

Für eine gegebene Complexion aus den Elemente a, b, c . . . in der Involution (II) die Summe der ihr be ihren Verſetzungen darinne zukommenden Coefficienten au α, β, γ . . . zu finden.

Es ſey z. B. die Complexion a^3b gegeben, welcher für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & b & \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)$ die Zahlencomplexion 1112 entſpricht. Man bilde folgendes Schema:

a^3b	1112	1235	$\alpha\beta\gamma\varepsilon$
1112	1121	1245	$\alpha\beta\delta\varepsilon$
	1211	1345	$\alpha\gamma\delta\varepsilon$
	2111	2345	$\beta\gamma\delta\varepsilon$

Man mache nämlich von der letztern alle Verſetzungen, und bilde aus jeder derſelben eine neue Zahlencomplexion, deren erſtes, zweytes, drittes, . . . letztes Element dem erſten, den zwey, den drey erſten, allen Elementen der genannten Verſetzung gleich ſey; ſubſtituire alsdenn für jede dieſer neuen Zahlencomplexionen, die ihr für den Zeiger

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdots \end{matrix}\right\}$$ entſprechende Buchſtabencomplexion;

die Summe dieſer letztern wird der geſuchte Coefficient ſeyn. Für das gegebene Beyſpiel iſt derſelbe $= \alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon$; welches, wenn $\alpha = \frac{1}{1}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $\delta = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{5}$ iſt; $= \frac{1}{1.2.3.5} + \frac{1}{1.2.4.5} + \frac{1}{1.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3 \times 1.1.1.2}$ wird. Ueberhaupt dient für den Fall der ſo eben erwähnten Beſtimmungen von α, β, γ . . ., welcher gerade bey der auf den obigen Gegen

and zu machenden Anwendung eintritt, der Satz: daß,
enn $\varphi(a^m b^n c^p \ldots l^s)$ eine Summe von Brüchen bedeutet,
ren ſo viele ſind, als von der Complexion $a^m b^n c^p \ldots l^s$
erſetzungen gemacht werden können, die ferner alle zum
hler 1 haben, zum Nenner aber jede ein Produkt, das ei-
r jener Verſetzungen ſo entſpricht, daß deſſen

rſter Factor	dem erſten Elemente der Verſetzung,
er zweyte	der Summe der zwey erſten,
er dritte	der Summe der drey erſten
er letzte	der Summe aller Elem. der Verſ. gleich ſey,

sdenn

$$(a^m b^n c^p \ldots l^s) = \frac{1}{1.2..m \times 1.2..n \times 1.2..p \times .. 1.2..s \times a^m b^n c^p \ldots l^s},$$

); woraus z. B. ſogleich $\varphi(1112)$ (welches für den Fall
$= \frac{1}{1}$, $p = \frac{1}{2}$, u. ſ. w. der Coefficient vom obigen $a^3 b$
rden muß); $= \dfrac{1}{1.2.3 \times 1.1.1.2}$ folgt.

Ohne Vorausſetzung des Newtoniſchen Satzes läßt ſich
 independente Ausdruck der Summen von Potenzen der
urzeln einer Gleichnng durch ihre Coefficienten unmittelbar
f folgende Art herleiten:

Es ſeyen der Gleichung $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc}$
o, Wurzeln α, β, γ, etc; ſo iſt

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{etc}}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc}}$$

$$\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \text{etc},$$ wie ſich durch Diffe-
ziiren oder auch durch Reduction der Brüche rechter Hand
f einerley Benennung ergiebt. Wenn man nun nach ne-
tiven Potenzen von x auf beyden Seiten entwickelt und

ordnet, ſo findet ſich $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc}=m.{}^{n}\mathfrak{J}-(m-1$
${}^{n-1}\mathfrak{J}.A+(m-2).{}^{n-2}\mathfrak{J}.B-(m-3).{}^{n-3}\mathfrak{J}.C+(m-4$
${}^{n-4}\mathfrak{J}.D-\text{etc}$; für den Zeiger $\begin{cases} A & B & C & D & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{cases}$

als Coefficient von $\frac{1}{x^{n+1}}$ auf beyden Seiten. Hier

iſt alsdenn leicht zu beweiſen, daß, wenn z. B. $A^p B^q C^r D$ eine der Complexionen vorſtellt, durch welche die Grö $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc}$ vermittelſt A, B, C . . . ausgedrü wird, ihr Zahlencoefficient in dieſem Ausdruck

$$=n\times\frac{1.2\dots(p+q+r+s-1)}{1\dots p\times 1\dots q\times 1\dots r\times 1\dots s}$$ ſeyn werde.

§. 4. Die Bemerkung vorausgeſchickt, daß für ei gegebene Gleichung, wie

$$z=a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x^2}+c\sqrt[n]{x^3}+\dots+\overset{n-2}{a}\sqrt[n]{x^{n-1}},$$ die n höhere in Abſicht auf ihre Buchſtabencoefficienten ſich du folgende Formel mit combinatoriſchen Ausdrücken darſtell laſſe:

$$z^n+K\left(\begin{matrix} {}^{n}B.z^{n-2} \\ +{}^{n}C.z^{n-3} \\ +{}^{n}D.z^{n-4} \\ \vdots \\ +{}^{n}\overset{-1}{N}.z \\ +{}^{n}N \end{matrix}\right)x+K\left(\begin{matrix} {}^{2n}Cz^{n-3} \\ +{}^{2n}Dz^{n-4} \\ +{}^{2n}Ez^{n-5} \\ \vdots \\ +{}^{2n}\overset{-1}{N}.z \\ +{}^{2n}N \end{matrix}\right)x^2$$

$$+\dots+K.\left\{\begin{matrix} {}^{(n-2)n}\overset{-1}{N}.z \\ +{}^{(n-2)n}N \end{matrix}\right\}x^{n-2}+K.{}^{(n-1)n}N.x^{n-1}$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ a & b & c & \dots & \overset{n-2}{a} \end{matrix}\right\}$$

wo der für jede Buchſtabencomplexion beſonders zu findende Zahlencoefficient inzwiſchen durch das unbeſtimmte K be-eichnet wird; läßt ſich aus §. 2. eine Regel herleiten, um ieſen Zahlencoefficienten für jede gegebene Buchſtabencomplexion durch ein ziemlich einfaches independentes Verfahren u finden.

Es ſey z. B. n = 6, und die Buchſtabencomplexion c^2e^2 gegeben, welche zu ^{18}F gehört. Den ihr zugehöri-en Zahlencoefficienten ſucht man nach folgendem Schema:

			I.	II.	III.	IV.	V.
$a^2\ c^2\ e^2$			3. 5. 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{1}$	− 6	−3. 5. 6
c^2	$a^2\ e^2$		1 × 6	$\frac{1}{2.4}$	$\frac{1}{1}$	+ 6. 6	+ 3. 3. 3
ae	ae c^2		2×3. 4	$\frac{1}{2.4}$	$\frac{1}{1}$	+ 6. 6	+ 3. 6. 6
ae	ae	c^2	2×2×1	$\frac{1}{2.2.2}$	$\frac{1}{1.2}$	− 6. 6. 6	− 9. 6
							− 9

s wird nämlich die gegebene Buchſtabencomplexion ($a^2c^2e^2$ r Summe 18) in ſo viele Binionen, Ternionen u. ſ. w. n Complexionen, deren Summenexponenten n oder viel-che von n (6,12) ſind, als möglich, zerfällt. Von den beygefüg-n fünf Zahlencolumnen aber enthält die erſte die Verſetzungs-hl der Union, oder der gegebenen Buchſtabencomplexion, d die Produkte der Verſetzungszahlen der Theile jeder Bi-on, Ternion, in welche dieſelbe zerfällt worden iſt. Die weyte enthält Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner e Dimenſions- oder Klaſſenexponenten derſelben Theile ſind; die dritte ſodann Brüche, deren Zähler ebenfalls 1, und deren Nenner 1, 1.2, 1.2.3 u. ſ. w. ſind, jenachdem in einer Binion, Ternion u. ſ. w. ein und derſelbe Theil einmal, zweymal (ſo wie hier ae in der Ternion) dreymal u. ſ. w. vorkommt; die vierte $-n, +n^2, -n^3$ u. ſ. w. (hier $-6, +6.6, -6.6.6$) mit abwechſelnden Zeichen für die Union, für jede der Binionen, Ternionen u. ſ. w. Die fünfte endlich enthält die Produkte aus den Horizontalreihen; von welchen Produkten alsdenn die Summe (hier -9) der geſuchte Zahlencoefficient ſeyn wird.

§. 5. Aus Waring's Satz über die Summe aller Produkte irgend welcher Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, zu zwey und zwey, drey und drey u. ſ. w. combinirt, (Probl. III. in deſſen Meditationibus algebraicis, wovon die dritte Ausgabe zu Cambridge 1782 erſchienen iſt), namentlich auf die Gleichung $x^n - 1 = 0$ angewandt (Lemma XX ebendaſelbſt), ergiebt ſich zunächſt ein etwas verſchiedenes, für die Ausübung meiſt etwas weitläufigeres Verfahren zu Beſtimmung der Zahlencoeficienten, von welchen die Rede iſt: von deſſen Reſultaten übrigens die Identität aus dénen des erſtern Verfahrens ſich leicht wird darthun laſſen. Zu Darſtellung dieſes Verfahrens nur ein Beyſpiel, ebenfalls an der Complexion $a^2 c^2 e^2$, vermittelſt folgenden Schema's:

$a^2\ c^2\ e^2$			1.2.3.4.5	− 6	1	− 3.5.6
c^2	a^2e^2		1 × 1.2.3	1	2.2.2	+ 3.9
ae	$a'e'c^2$		1 × 1.2.3			+ 3.3.3
ae'	$a'ec^2$		1 × 1.2.3	+ 6.6		+ 3.3.3
$a'e$	$ae'c^2$		1 × 1.2.3			+ 3.3.3
$a'e'$	aec^2		1 × 1.2.3			+ 3.3.3
c^2	ae	$a'e'$	1 × 1 × 1	− 6.6.6		− 3.3.3
c^2	$a'e$	ae'	1 × 1 × 1			− 3.3.3
						− 9

Die am Ende beygefügte Formel für die ſechsfache Erhöhung iſt nach beyderley Verfahren berechnet worden, und ſomit hinlänglich verificirt.

§. 6. Die Mühe der Beſtimmung der Zahlencoefficienten läßt ſich beynahe um die Hälfte vermindern, wenn man bemerkt, welches ſich auch a priori erweiſen läßt, daß immer in den Coefficienten gleichweit von den äußerſten abſtehender Potenzen von x in der elevirten Gleichung, ſowohl von denſelben Zahlencoefficienten, begleitete, als auch ſich nach einer gewiſſen Regel entſprechende und auseinander herzuleitende Buchſtabencomplexionen vorkommen müſſen; daher, wenn für eine $2n+1$ oder $2n+2$fache Erhöhung die Buchſtaben- und zugehörige Zahlencoefficienten der $n+1$erſten Potenzen von x in der erhöhten Gleichung beſtimmt ſind, die Coefficienten der übrigen Potenzen ſich leicht aus dieſen herleiten laſſen.

§. 7. Die obenangeführte Formel Waring's (Medit. Algebr. Probl. III.) betreffend, habe ich mich mit Auseinanderſetzung des Beweiſes derſelben beſchäftigt, aus derſelben, ohne Zuziehung von Lemm. XX, noch ein drittes, von den beyden vorhergehenden verſchiedenes Verfahren zu Beſtimmung der Zahlencoefficienten hergeleitet; und allgemeiner, aus dieſer Formel, welche, um mich Kürze halber au Cramer's Introd. à l'anal. des lignes courbes, appendice n. III. zu beziehen, wenn man ſtatt der p. 663 daſelbſt vorkommenden Zahlencomplexionen, die ihnen entſprechende Facteurs-ſeconds denkt, aus den Gliedern der erſten Verticalreihe die Glieder aller übrigen Reihen ausdrücken lehrt, ein Verfahren hergeleitet, um aus den Gliedern der erſte Horizontalreihe (welches immer die Coefficienten einer geg benen Gleichung ſind) alle Glieder der übrigen Reihen au zudrücken; und zwar wiederum ein independentes Verfahren durch welches für jede der leichtzufindenden Buchſtabencomplexionen auch der zugehörige Zahlencoefficient beſtimm werden kann. Ich glaube ferner der Crameriſchen Reg im angeführten Anhang, „pour ſupputer le produit de deux facteurs-ſeconds quelconques" eine Vervollſtändigung gegeben zu haben, deren ſie bedurfte, und habe Gebrauch davon gemacht, um das Fermatiſche Problem der Wegſchaffung der Irrationalitäten aus einer Gleichung wie $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}\pm\sqrt{e}\pm\sqrt{f}=0$ aufzulöſen. Bey einer zweyten Auflöſung ebendeſſelben Problems habe ich ein der obigen analoges Zerfällungsverfahren zu Beſtimmung der Zahlencoefficienten gebraucht. Man ſehe die folgende Abhandlung IX.

Man hat im obigen (§. 2, 4) ein Beyſpiel, wie Größen dargeſtellt werden können, welche durch Complexionen zu gewiſſen Summen nach Zeigern beſtimmt werden, in welchen die den Zahlen entſprechenden Elemente ſelbſt wiederum complexe Ausdrücke ſind, die ebenfalls durch Complexionen zu gewiſſen Summen nach andern Zeigern beſtimmt werden; oder, mit andern rein-analytiſchen Ausdrücken, ein Beyſpiel, wie Größen independent gefunden werden können, die das Reſultat recurrirender Ausdrücke ſind, deren Relationsſcalen ſelbſt durch andere recurrirende Ausdrücke beſtimmt werden. Es mag oft von Nutzen ſeyn, der obigen

aloge Methoden für ſolche Fälle zu haben. So habe ich
n Verfahren gefunden, um für jede Buchſtabencomplexion
den Formeln S. 122. von Lagrange's neu mit Zuſätzen
rausgekommener Abhandlung de la réſolution des èqua-
ons numériques den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten
dependent zu finden, obgleich jedes Glied in dieſen For-
eln, nach p. 49. ebendaſelbſt, von mehrern recurrirenden
sdrücken abhängt, deren einer die Relationsſcale des an-
rn beſtimmt.

Die weitere Ausführung eines und des andern dieſer
genſtände vielleicht ein andermal.

Hier folgt die (§. 5. S. 245) verſprochene Erhöhungs-
mel, nach der daſelbſt angegebenen Verification:

Formel für die ſechsfache Erhöhung:

Wenn $z = a\sqrt[6]{x} + b\sqrt[6]{x^2} + c\sqrt[6]{x^3} + d\sqrt[6]{x^4} + e\sqrt[6]{x^5}$, ſo

$$z^6 \left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}-6ae\\-6bd\\-3c^2\end{array}\right) z^4\\
\left.\begin{array}{l}-6a^2d\\-12abc\\-2b^3\end{array}\right) z^3\\
\left.\begin{array}{l}-6a^3c\\-9a^2b^2\end{array}\right\} z^2\\
-6a^4bz\\
-a^6
\end{array}\right\} x
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}-6be^2\\-12cde\\-2d^3\end{array}\right) z^3\\
\left.\begin{array}{l}+9a^2e^2\\+0.abde\\+0.ac^2e\\-18acd^2\\-18b^2ce\\+9b^2d^2\\+0.bc^2d\\+3c^4\end{array}\right\} z^2\\
\left.\begin{array}{l}+12a^3de\\+0.a^2bce\\+0.a^2bd^2\\-18a^2c^2d\\-12ab^3e\\+0.ab^2cd\\+6b^4d\\-6b^3c^2\end{array}\right\} z\\
+6a^4ce\\
+3a^4d^2\\
-6a^3b^2e\\
-2a^3c^3\\
-12a^3bcd\\
+6a^2b^3d\\
+9a^2b^2c^2\\
-6ab^4c\\
+b^6
\end{array}\right\} x^2
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}-6ce^3\\-9d^2e^2\end{array}\right\} z^2\\
\left.\begin{array}{l}+12abe^3\\+0.acde^2\\+0.b^2de^2\\-12ad^3e\\-18bc^2e^2\\+0.bcd^2e\\+6bd^4\\+12c^3de\\-6c^2d^3\end{array}\right\} z\\
-2a^3e^3\\
+18a^2bde^2\\
-9a^2c^2e^2\\
+0.a^2cd^2e\\
-3a^2d^4\\
-18ab^2d^2e\\
+0.ab^2ce^2\\
+0.abc^2de\\
+12abcd^3\\
+6ac^4e\\
-6ac^3d^2\\
-3b^4e^2\\
+12b^3cde\\
+2b^3d^3\\
-6b^2c^3e\\
-9b^2c^2d^2\\
-6bc^4d\\
-c^6
\end{array}\right\} x^3
\left.\begin{array}{l}
-6de^4z\\
+6ace^4\\
-6ad^2e^3\\
+3b^2e^4\\
-12bcde^3\\
+6bd^3e^2\\
-2c^3e^3\\
+9c^2d^2e^2\\
-6cd^4e\\
+d^6
\end{array}\right\} x^4$$

IX.

Auflöſung einer andern, die Wegſchaffung der Irrationalitäten aus Gleichungen, betreffenden Aufgabe; von

M. K. F. Hauber.

§. 1.

Dieſe Aufgabe iſt: Gleichungen, wie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$; von ihren Wurzelgrößen zu befreyen.

§. 2. Es wird dienlich ſeyn, gleich anfangs folgende Bemerkung zu machen: Da die Größen a, b, c, d, e in jeder der gegebenen Gleichungen auf einerley Art vorkommen, ſo werden ſie auch in den geſuchten Gleichungen, welche lauter rationale Ausdrücke enthalten ſollen, auf einerley Art vorkommen müſſen. Wenn z. B. in einer der geſuchten Gleichungen ab^7 mit einem gewiſſen Zahlencoefficienten vorkommen ſollte, ſo werden auch ba^7, ac^7, ca^7 u. ſ. w. mit demſelben Zeichen und Zahlencoefficienten darinne vorkommen müſſen.

§. 3. Man ſetze in der Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$, x ſtatt $\sqrt{c}$, und gedenke ſich die geſuchte Gleichung nach Potenzen von x geordnet; ſo kann man $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ als Auflöſung derſelben, oder $x=-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ als eine ihrer Wurzeln anſehen. Man weiß aber, daß, wenn $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ die Auflöſung einer Gleichung vorſtellt, zugleich auch $x+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, $x-\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$,

$x - \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, Aufloͤſungen derſelben ſeyn werden; und da dieſelbe mithin vier Wurzeln hat, wovon uͤbrigens je zwey gleich ſind, aber entgegengeſetzte Zeichen haben, ſo kann man hieraus ſchließen, daß gedachte Gleichung von der Form

$$x^4 + Ax^2 + B = 0$$

$$(\text{oder} \quad c^2 + Ac + B = 0)$$

naͤmlich vom vierten Grade ſeyn, aber lauter gerade Potenzen von x enthalten werde.

Auf aͤhnliche Art wird man ſchließen, daß fuͤr die Gleichung $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0$, die geſuchte folgende Form:

$$d^4 + A'd^3 + B'd^2 + C'd + D' = 0;$$

und fuͤr die gegebene $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = 0$, die geſuchte Form;

$$e^8 + A''e^7 + B''e^6 + C''e^5 + D''e^4 + E''e^3 + F''e^2 + G''e + H'' = 0$$

haben wird.

Ich werde zweyerley Arten vortragen, die Groͤßen $A, B; A' \ldots D'; A'' \ldots H''$; zu beſtimmen.

Erſte Art. §. 4. Fuͤr die Gleichung $x^4 + Ax^2 + B = 0$, oder $c^2 + Ac + B = 0$, iſt eine ihrer Wurzeln, oder einer der Werthe von $x = -\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$; mithin $\sqrt{a} + \sqrt{b} + x$ (oder $+\sqrt{c}$) $= 0$, ein Factor jener Gleichung. Eben ſo finden ſich aus den uͤbrigen Wurzeln die uͤbrigen Factoren, $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$; $-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$; daher iſt $c^2 + Ac + B =$ dem Producte $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = (c - [\sqrt{a} + \sqrt{b}]^2) \times (c - [\sqrt{a} - \sqrt{b}]^2) = c^2 - 2(a+b)c + (a-b)^2$; mithin $A = -2(a+b)$, $B = (a-b)^2$.

§. 5. Eben ſo findet ſich, daß $d^4+A'd^3+B'd^2+C'd+D'$, die ſo eben gemachten Beſtimmungen von A, B vorausgeſetzt, ſeyn muß = dem Producte

von $(\sqrt{d}+\sqrt{c})^4+A.(\sqrt{d}+\sqrt{c})^2+B$
durch $(\sqrt{d}-\sqrt{c})^4+A.(\sqrt{d}-\sqrt{c})^2+B$

das iſt,

$$=(d-c)^4+(A+\Sigma 1)\times A.(d-c)^2+(B+A.\Sigma 1+\Sigma 2)\times B$$

wenn $(\sqrt{d}+\sqrt{c})^2+(\sqrt{d}-\sqrt{c})^2$, d. i. $2(d+c)=\Sigma 1$,
$(\sqrt{d}+\sqrt{c})^4+(\sqrt{d}-\sqrt{c})^4$, d. i. $2(d^2+6cd+c^2)=\Sigma 2$

geſetzt wird; und hieraus findet ſich nach gehöriger Entwickelung

$$A'=-4(a+b+c)$$

$$B'=6(a^2+b^2+c^2)+4(ab+ac+bc)$$

$$C'=-4(a^3+b^3+c^3)+4(a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2)$$
$$-40abc$$

$$D'=a^4+b^4+c^4-4(a^3b+a^3c+b^3c+ab^3+ac^3+bc^3)$$
$$+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+4(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$$

§. 6. Und, dieſe Bedeutungen von A', B', C', D' beybehalten, findet ſich ferner $e^8+A''e^7+B''e^6+C''e^5+D''e^4+E''e^3+F''e^2+G''e+H''$ = dem Producte

von $(\sqrt{e}+\sqrt{d})^8+A'(\sqrt{e}+\sqrt{d})^6+B'(\sqrt{e}+\sqrt{d})^4$
$+C'(\sqrt{e}+\sqrt{d})^2+D'$
durch $(\sqrt{e}-\sqrt{d})^8+A'(\sqrt{e}-\sqrt{d})^6+B'(\sqrt{e}-\sqrt{d})^4$
$+C'(\sqrt{e}-\sqrt{d})^2+D'$,

d. i. $=(e-d)^8+(A'+\Sigma' 1)\times A'\times(e-d)^6$
$+(B'+A'.\Sigma 1'+\Sigma 2')\times B'\times(e-d)^4$
$+(C'+B'.\Sigma 1'+A'.\Sigma 2'+\Sigma 3')\times C+(e-d)^2$
$+(D'+C'.\Sigma 1'+B'.\Sigma 2'+A'.\Sigma 3'+\Sigma 4')\times D$; [α]

indem $(\sqrt{e}+\sqrt{d})^2+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^2=\Sigma 1'$

$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^4+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^4=\Sigma 2'$

$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^6+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^6=\Sigma 3'$

$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^8+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^8=\Sigma 4'$ geſetzt werden,

wo offenbar iſt, daß die Werthe $\Sigma 1' \ldots \Sigma 4'$, entwickelt, keine Wurzelgrößen mehr enthalten.

Die Entwickelung des Ausdrucks [α] könnte ſehr mühſam ſcheinen, wegen dazu erforderlicher Multiplication ziemlich zuſammengeſetzter Ausdrücke in einander; inzwiſchen bin ich damit, und ſonach mit Herleitung der im §. 11. für dieſen Fall anzugebenden Formel, doch ziemlich leicht zu Stande gekommen, und zwar mit Hülfe gewiſſer Regeln „pour ſupputer le produit de deux facteurs-ſeconds quelconques", um mich Kürze halber auf die ſchon im vorigen Aufſatz angeführte Stelle in Cramer's Introd. à l'anal. des lig. courb. App. N. III. zu beziehen; von welchen Regeln ich ein andermal zu reden gedenke.

§. 7. So wäre noch weiter, die nach dem vorhergehenden §. zu machenden Beſtimmungen von $A'' \ldots H''$ vorausgeſetzt, für $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}=0$, die geſuchte, von Wurzelgrößen freye Gleichung, folgende: Das Product

von $(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{16}+A''(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{14}+B''(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{12}+\ldots+H''$

durch

$(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{16}+A''(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{14}+B''(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{12}+\ldots+H''$,

$$\begin{aligned}
&= (f-e)^{16} + (A'' + \Sigma 1'').A''.(f-e)^{14} \\
&+ (B'' + A''\Sigma 1'' + \Sigma 2'').B''.(f-e)^{12} \\
&+ (C'' + B''.\Sigma 1'' + A''\Sigma 2'' + \Sigma 3'').C''.(f-e)^{10} \\
&+ (D'' + C''.\Sigma 1'' + B''.\Sigma 2'' + A''.\Sigma 3'' + \Sigma 4'').D''.(f-e)^{8} \\
&+ (E'' + D''.\Sigma 1'' + C''.\Sigma 2'' + B''.\Sigma 3'' + A''.\Sigma 4'' + \Sigma 5'').E''.(f-e)^{6} \\
&+ (F'' + E''.\Sigma 1'' + D''.\Sigma 2'' + C''.\Sigma 3'' + B''\Sigma 4'' + A''\Sigma 5'' + \Sigma 6'')F''.(f-e)^{4} \\
&+ (G'' + F''.\Sigma 1'' + E''.\Sigma 2'' + D''.\Sigma 3'' + C''.\Sigma 4'' + B''.\Sigma 5'' \\
&\qquad + A''.\Sigma 6'' + \Sigma 7'').G''.(f-e)^{2} \\
&+ (H'' + G''.\Sigma 1'' + F''.\Sigma 2'' + E''.\Sigma 3'' + D''.\Sigma 4'' + C''.\Sigma 5'' \\
&\qquad + B''.\Sigma 6'' + A''.\Sigma 7'' + \Sigma 8'').H'' \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
\Sigma 1'' &= (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{2} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{2} \\
\Sigma 2'' &= (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{4} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{4} \\
&\vdots \\
\Sigma 8'' &= (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{16} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{16}
\end{aligned}$$

Und ſo könnte man noch bey einer größern Anzahl gegebener Radicalien fortgehen.

Uebrigens kann man ſich vermittelſt der §. 2 gemachten Bemerkung ein gut Theil von der Mühe der Entwicklung dieſer Ausdrücke erſparen; und ich habe gefunden, daß durch dieſe Bemerkung, mit den im vorhergehenden §. angeführten Hülfsmitteln zu Abkürzung der Rechnung verbunden, dieſe erſte Art, die verlangten Gleichungen zu finden, für die Praxis kürzer iſt und geſchwinder zum Ziele führt, als die nun vorzutragende zweyte Methode, welche dazu dient, für jede gegebene Buchſtabencomplexion in der verlangten Gleichung, den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten durch ein Verfahren zu finden, deſſen Ausübung zwar nicht ſchwierig, aber oft ſehr langwierig iſt.

Zweyte Art. §. 8. Für die gegebene Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$, um ſogleich mit dieſem Fall anzufangen, hatten wir die geſuchte geſetzt

$$e^8+A''e^7+B''e^6+C''e^5+D''e^4+E''e^3+F''e^2+G''e+H''=0,$$

und dieſe Gleichung wird, wenn man e als eine unbekannte Größe anſieht, den obigen Bemerkungen gemäß, folgende acht Wurzeln haben:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$

Man ſetze die Summe dieſer Wurzeln $= S(1)$, die Summe ihrer Quadrate $= S(2)$, ihrer Würfel $= S(3)$ u. ſ. w., ſo iſt, wie ſich leicht aus dem polynomiſchen Lehrſatz ergiebt;

$$S(1)=8(a+b+c+d)$$

$$S(2)=8(a^2+b^2+c^2+d^2+6[ab+ac+ad+bc+bd+cd])$$

$$\begin{aligned}S(3)=8(a^3+b^3+c^3+d^3+15[&a^2b+a^2c^2+a^2d+b^2a+b^2c\\&+b^2d+c^2a+c^2b+c^2d+d^2a+d^2b+d^2c]\\&+6.\ 15[abc+abd+acd+bcd])\end{aligned}$$

u. ſ. w.

Wo der jeder Buchſtabencomplexion vorangeſetzte Zahlencoefficient nichts anders iſt, als die Verſetzungszahl einer Complexion, worinn jeder Buchſtabe eine doppelt ſo hohe Dimenſion hat.

Ferner iſt vermöge der im vorhergehenden Aufſatz angeführten Formel für den independenten Ausdruck der Coefficienten einer Gleichung aus den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln

$$A'' = -\frac{a^1 A}{1}$$

$$B'' = -\frac{a^2 A}{1} + \frac{b^2 B}{1.2}$$

$$C'' = -\frac{a^3 A}{1} + \frac{b^3 B}{1.2} - \frac{c^3 C}{1.2.3}$$

u. ſ. w.

für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 \\ \frac{S(1)}{1}, & \frac{S(2)}{2}, & \frac{S(3)}{3} & \ldots, & \frac{S(8)}{8} \end{array}\right\}$$

§. 9. Man ſieht hieraus, daß die Buchſtabencomplexionen in S(1) und A'', die einfachen Größen a, b, c, d, in S(2) nnd A'', Producte aus denſelben zu zwey Dimenſionen, oder Binionen mit Wiederholungen, in S(3) und A'', alle Producte zu drey Dimenſionen u. ſ. w. ſeyn werden (daher denn, wie im polynomiſchen Lehrſatz, die Darſtellung aller Arten von unähnlichen Complexionen, die zu B'', oder C'' oder etc. gehören, von der Conſtruction von Combinationsklaſſen zu einer gegebenen Summe abhängt). Was aber die Zahlencoefficienten betrifft, ſo läßt ſich aus den Formeln des vorhergehenden §. ein Verfahren herleiten, um für jede gegebene Buchſtabencomplexion in der geſuchten Gleichung, ihren zugehörigen Zahlencoefficienten zu beſtimmen, welches ich an einem Beyſpiel zeigen will.

Es ſey die Buchſtabencomplexion bc^3e^4 gegeben, wo alſo bc^3 einen Theil von D'' ausmacht. Man bilde folgendes Schema:

ner, aus dieſer Formel, welche, um mich Kürze halber auf Cramer's Introd. à l'anal. des lignes courbes, appendice, n. III. zu beziehen, wenn man ſtatt der p. 663 daſelbſt vorkommenden Zahlencomplexionen, die ihnen entſprechenden Facteurs-ſeconds denkt, aus den Gliedern der erſten Verticalreihe die Glieder aller übrigen Reihen ausdrücken lehrt, ein Verfahren hergeleitet, um aus den Gliedern der erſten Horizontalreihe (welches immer die Coefficienten einer gegebenen Gleichung ſind) alle Glieder der übrigen Reihen auszudrücken; und zwar wiederum ein independentes Verfahren, durch welches für jede der leichtzufindenden Buchſtabencomplexionen auch der zugehörige Zahlencoefficient beſtimmt werden kann. Ich glaube ferner der Crameriſchen Regel im angeführten Anhang, „pour ſupputer le produit de deux facteurs-ſeconds quelconques" eine Vervollſtändigung gegeben zu haben, deren ſie bedurfte, und habe Gebrauch davon gemacht, um das Fermatiſche Problem der Wegſchaffung der Irrationalitäten aus einer Gleichung wie $\sqrt{}a \underline{\pm} \sqrt{}b \underline{\pm} \sqrt{}c \underline{\pm} \sqrt{}d \underline{\pm} \sqrt{}e \underline{\pm} \sqrt{}f = 0$ aufzulöſen. Bey einer zweyten Auflöſung ebendeſſelben Problems habe ich ein der obigen analoges Zerfällungsverfahren zu Beſtimmung der Zahlencoefficienten gebraucht. Man ſehe die folgende Abhandlung IX.

Man hat im obigen (§. 2, 4) ein Beyſpiel, wie Größen dargeſtellt werden können, welche durch Complexionen zu gewiſſen Summen nach Zeigern beſtimmt werden, in welchen die den Zahlen entſprechenden Elemente ſelbſt wiederum complexe Ausdrücke ſind, die ebenfalls durch Complexionen zu gewiſſen Summen nach andern Zeigern beſtimmt werden; oder, mit andern rein-analytiſchen Ausdrücken, ein Beyſpiel, wie Größen independent gefunden werden können, die das Reſultat recurrirender Ausdrücke ſind, deren Relationsſcalen ſelbſt durch andere recurrirende Ausdrücke beſtimmt werden. Es mag oft von Nutzen ſeyn, der obigen naloge Methoden für ſolche Fälle zu haben. So habe ich in Verfahren gefunden, um für jede Buchſtabencomplexion den Formeln S. 122. von Lagrange's neu mit Zuſätzen erausgekommener Abhandlung de la réſolution des èquaions numériques den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten dependent zu finden, obgleich jedes Glied in dieſen Foreln, nach p. 49. ebendaſelbſt, von mehrern recurrirenden usdrücken abhängt, deren einer die Relationsſcale des anern beſtimmt.

Die weitere Ausführung eines und des andern dieſer egenſtände vielleicht ein andermal.

Hier folgt die (§. 5. S. 245) verſprochene Erhöhungsormel, nach der daſelbſt angegebenen Verification:

Formel für die ſechsfache Erhöhung:

Wenn $z = a\sqrt[6]{x} + b\sqrt[6]{x^2} + c\sqrt[6]{x^3} + d\sqrt[6]{x^4} + e\sqrt[6]{x^5}$, ſo i

$$
\left.\begin{array}{l}
z^6 \left.\begin{array}{l}-6ae\\-6bd\\-8c^2\end{array}\right) z^4\\
\left.\begin{array}{l}-6a^2d\\-12abc\\-2b^3\end{array}\right) z^3\\
\left.\begin{array}{l}-6a^3c\\-9a^2b^2\end{array}\right\} z^2\\
-6a^4bz\\
-a^6
\end{array}\right\}
x \left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}-6be^2\\-12cde\\-2d^3\end{array}\right) z^3\\
\left.\begin{array}{l}+9a^2e^2\\+0.abde\\+0.ac^2e\\-18acd^2\\-18b^2ce\\+9b^2d^2\\+0.bc^2d\\+3c^4\end{array}\right\} z^2\\
\left.\begin{array}{l}+12a^3de\\+0.a^2bce\\+0.a^2bd^2\\-18a^2c^2d\\-12ab^3e\\+0.ab^2cd\\+6b^4d\\-6b^3c^2\end{array}\right\} z\\
+6a^4ce\\
+3a^4d^2\\
-6a^3b^2e\\
-2a^3c^3\\
-12a^3bcd\\
+6a^2b^3d\\
+9a^2b^2c^2\\
-6ab^4c\\
+b^6
\end{array}\right\}
x^2 \left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}-6ce^3\\-9d^2e^2\end{array}\right\} z^2\\
\left.\begin{array}{l}+12abe^3\\+0.acde^2\\+0.b^2de^2\\-12ad^3e\\-18bc^2e^2\\+0.bcd^2e\\+6bd^4\\+12c^3de\\-6c^2d^3\end{array}\right\} z\\
-2a^3e^3\\
+18a^2bde^2\\
-9a^2c^2e^2\\
+0.a^2cd^2e\\
-3a^2d^4\\
-18ab^2d^2e\\
+0.ab^2ce^2\\
+0.abc^2de\\
+12abcd^3\\
+6ac^4e\\
-6ac^3d^2\\
-3b^4e^2\\
+12b^3cde\\
+2b^3d^3\\
-6b^2c^3e\\
-9b^2c^2d^2\\
-6bc^4d\\
-c^6
\end{array}\right\}
x^3 \left.\begin{array}{l}
-6de^4z\\
+6ace^4\\
-6ad^2e^3\\
+3b^2e^4\\
-12bcde^3\\
+6bd^3e^2\\
-2c^3e^3\\
+9c^2d^2e^2\\
-6cd^4e\\
+d^6
\end{array}\right\}
x^4 -
$$

IX.

Auflöſung einer andern, die Wegſchaffung der Irrationalitäten aus Gleichungen, betreffenden Aufgabe; von

M. K. F. Hauber.

§. 1.

Dieſe Aufgabe iſt: Gleichungen, wie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$; von ihren Wurzelgrößen zu befreyen.

§. 2. Es wird dienlich ſeyn, gleich anfangs folgende Bemerkung zu machen: Da die Größen a, b, c, d, e in jeder der gegebenen Gleichungen auf einerley Art vorkommen, ſo werden ſie auch in den geſuchten Gleichungen, welche lauter rationale Ausdrücke enthalten ſollen, auf einerley Art vorkommen müſſen. Wenn z. B. in einer der geſuchten Gleichungen ab^7 mit einem gewiſſen Zahlencoefficienten vorkommen ſollte, ſo werden auch ba^7, ac^7, ca^7 u. ſ. w. mit demſelben Zeichen und Zahlencoefficienten darinne vorkommen müſſen.

§. 3. Man ſetze in der Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$, x ſtatt $\sqrt{c}$, und gedenke ſich die geſuchte Gleichung nach Potenzen von x geordnet; ſo kann man $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ als Auflöſung derſelben, oder $x=-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ als eine ihrer Wurzeln anſehen. Man weiß aber, daß, wenn $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ die Auflöſung einer Gleichung vorſtellt, zugleich auch $x+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, $x-\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$,

$x - \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, Auflöſungen derſelben ſeyn werden; und da dieſelbe mithin vier Wurzeln hat, wovon übrigens je zwey gleich ſind, aber entgegengeſetzte Zeichen haben, ſo kann man hieraus ſchließen, daß gedachte Gleichung von der Form

$$x^4 + Ax^2 + B = 0$$

$$(\text{oder } c^2 + Ac + B = 0)$$

nämlich vom vierten Grade ſeyn, aber lauter gerade Potenzen von x enthalten werde.

Auf ähnliche Art wird man ſchließen, daß für die Gleichung $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0$, die geſuchte folgende Form:

$$d^4 + A'd^3 + B'd^2 + C'd + D' = 0;$$

und für die gegebene $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = 0$, die geſuchte Form:

$$e^8 + A''e^7 + B''e^6 + C''e^5 + D''e^4 + E''e^3 + F''e^2 + G''e + H'' = 0$$

haben wird.

Ich werde zweyerley Arten vortragen, die Größen $A, B; A' \ldots D'; A'' \ldots H''$; zu beſtimmen.

Erſte Art. §. 4. Für die Gleichung $x^4 + Ax^2 + B = 0$, oder $c^2 + Ac + B = 0$, iſt eine ihrer Wurzeln, oder einer der Werthe von $x = -\sqrt{a} - \sqrt{b}$; mithin $\sqrt{a} + \sqrt{b} + x$ (oder $+\sqrt{c}$) $= 0$, ein Factor jener Gleichung. Eben ſo finden ſich aus den übrigen Wurzeln die übrigen Factoren, $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$; $-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$; daher iſt $c^2 + Ac + B =$ dem Producte

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = (c - [\sqrt{a} + \sqrt{b}]^2) \times (c - [\sqrt{a} - \sqrt{b}]^2) = c^2 - 2(a+b)c + (a-b)^2;$$ mithin $A = -2(a+b)$, $B = (a-b)^2$.

§. 5. Eben ſo findet ſich, daß $d^4 + A'd^3 + B'd^2 + C'd + D'$, die ſo eben gemachten Beſtimmungen von A, B vorausgeſetzt, ſeyn muß = dem Producte

$$\text{von } (\sqrt{d}+\sqrt{c})^4 + A.(\sqrt{d}+\sqrt{c})^2 + B$$
$$\text{durch } \underline{(\sqrt{d}-\sqrt{c})^4 + A.(\sqrt{d}-\sqrt{c})^2 + B}$$

das iſt,

$$= (d-c)^4 + (A + \Sigma 1) \times A.(d-c)^2 + (B + A.\Sigma 1 + \Sigma 2) \times B$$

wenn $(\sqrt{d}+\sqrt{c})^2 + (\sqrt{d}-\sqrt{c})^2$, d. i. $2(d+c) = \Sigma 1$,

$(\sqrt{d}+\sqrt{c})^4 + (\sqrt{d}-\sqrt{c})^4$, d. i. $2(d^2+6cd+c^2) = \Sigma 2$

geſetzt wird; und hieraus findet ſich nach gehöriger Entwickelung

$$A' = -4(a+b+c)$$
$$B' = 6(a^2+b^2+c^2) + 4(ab+ac+bc)$$
$$C' = -4(a^3+b^3+c^3) + 4(a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2) - 40\,abc$$
$$D' = a^4+b^4+c^4 - 4(a^3b+a^3c+b^3c+ab^3+ac^3+bc^3) + 6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + 4(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$$

§. 6. Und, dieſe Bedeutungen von A', B', C', D' beybehalten, findet ſich ferner $e^8 + A''e^7 + B''e^6 + C''e^5 + D''e^4 + E''e^3 + F''e^2 + G''e + H''$ = dem Producte

$$\text{von } (\sqrt{e}+\sqrt{d})^8 + A'(\sqrt{e}+\sqrt{d})^6 + B'(\sqrt{e}+\sqrt{d})^4 + C'(\sqrt{e}+\sqrt{d})^2 + D'$$
$$\text{durch } (\sqrt{e}-\sqrt{d})^8 + A'(\sqrt{e}-\sqrt{d})^6 + B'(\sqrt{e}-\sqrt{d})^4 + C'(\sqrt{e}-\sqrt{d})^2 + D',$$

$$\text{d. i.} = (e-d)^8 + (A' + \Sigma' 1) \times A' \times (e-d)^6 + (B' + A'.\Sigma 1' + \Sigma 2') \times B' \times (e-d)^4 + (C' + B'.\Sigma 1' + A'.\Sigma 2' + \Sigma 3') \times C + (e-d)^2 + (D' + C'.\Sigma 1' + B'.\Sigma 2' + A'.\Sigma 3' + \Sigma 4') \times D,$$ [α]

indem $(\sqrt{e}+\sqrt{d})^2+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^2=\Sigma 1'$

$$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^4+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^4=\Sigma 2'$$

$$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^6+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^6=\Sigma 3'$$

$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^8+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^8=\Sigma 4'$ geſetzt werden, wo offenbar iſt, daß die Werthe $\Sigma 1' \ldots \Sigma 4'$, entwickelt, keine Wurzelgrößen mehr enthalten.

Die Entwickelung des Ausdrucks [α] könnte ſehr mühſam ſcheinen, wegen dazu erforderlicher Multiplication ziemlich zuſammengeſetzter Ausdrücke in einander; inzwiſchen bin ich damit, und ſonach mit Herleitung der im §. 11. für dieſen Fall anzugebenden Formel, doch ziemlich leicht zu Stande gekommen, und zwar mit Hülfe gewiſſer Regeln „pour ſupputer le produit de deux facteurs-ſeconds quelconques“, um mich Kürze halber auf die ſchon im vorigen Aufſatz angeführte Stelle in Cramer's Introd. à l'anal. des lig. courb. App. N. III. zu beziehen; von welchen Regeln ich ein andermal zu reden gedenke.

§. 7. So wäre noch weiter, die nach dem vorhergehenden §. zu machenden Beſtimmungen von $A'' \ldots H''$ vorausgeſetzt, für $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}=0$, die geſuchte, von Wurzelgrößen freye Gleichung, folgende: Das Product

von $(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{16}+A''(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{14}+B''(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{12}+\ldots+H''$

durch

$$(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{16}+A''(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{14}+B''(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{12}+\ldots+H'',$$

$$
\begin{aligned}
&= (f-e)^{16} + (A'' + \Sigma 1'') . A'' . (f-e)^{14} \\
&+ (B'' + A'' \Sigma 1'' + \Sigma 2'') . B'' . (f-e)^{12} \\
&+ (C'' + B'' . \Sigma 1'' + A'' \Sigma 2'' + \Sigma 3'') . C'' . (f-e)^{10} \\
&+ (D'' + C'' . \Sigma 1'' + B'' . \Sigma 2'' + A'' . \Sigma 3'' + \Sigma 4'') . D'' . (f-e)^{8} \\
&+ (E'' + D'' . \Sigma 1'' + C'' . \Sigma 2'' + B'' . \Sigma 3'' + A'' . \Sigma 4'' + \Sigma 5'') . E'' . (f-e)^{6} \\
&+ (F'' + E'' . \Sigma 1'' + D'' . \Sigma 2'' + C'' . \Sigma 3'' + B'' \Sigma 4'' + A'' \Sigma 5'' + \Sigma 6'') F'' . (f-e)^{4} \\
&+ (G'' + F'' . \Sigma 1'' + E'' . \Sigma 2'' + D'' . \Sigma 3'' + C'' . \Sigma 4'' + B'' . \Sigma 5'' \\
&\qquad + A'' . \Sigma 6'' + \Sigma 7'') . G'' . (f-e)^{2} \\
&+ (H'' + G'' . \Sigma 1'' + F'' . \Sigma 2'' + E'' . \Sigma 3'' + D'' . \Sigma 4'' + C'' . \Sigma 5'' \\
&\qquad + B'' . \Sigma 6'' + A'' . \Sigma 7'' + \Sigma 8'') . H'' \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
\Sigma 1'' &= (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{2} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{2} \\
\Sigma 2'' &= (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{4} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{4} \\
&\vdots \\
\Sigma 8'' &= (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{16} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{16}
\end{aligned}
$$

Und ſo könnte man noch bey einer größern Anzahl gegebener Radicalien fortgehen.

Uebrigens kann man ſich vermittelſt der §. 2 gemachten Bemerkung ein gut Theil von der Mühe der Entwicklung dieſer Ausdrücke erſparen; und ich habe gefunden, daß durch dieſe Bemerkung, mit den im vorhergehenden §. angeführten Hülfsmitteln zu Abkürzung der Rechnung verbunden, dieſe erſte Art, die verlangten Gleichungen zu finden, für die Praxis kürzer iſt und geſchwinder zum Ziele führt, als die nun vorzutragende zweyte Methode, welche dazu dient, für jede gegebene Buchſtabencomplexion in der verlangten Gleichung, den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten durch ein Verfahren zu finden, deſſen Ausübung zwar nicht ſchwierig, aber oft ſehr langwierig iſt.

Zweyte Art. §. 8. Für die gegebene Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$, um ſogleich mit dieſem Fall anzufangen, hatten wir die geſuchte geſetzt

$$e^8+A''e^7+B''e^6+C''e^5+D''e^4+E''e^3+F''e^2+G''e+H''=0,$$

und dieſe Gleichung wird, wenn man e als eine unbekannte Größe anſieht, den obigen Bemerkungen gemäß, folgende acht Wurzeln haben:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$

Man ſetze die Summe dieſer Wurzeln $= S(1)$, die Summe ihrer Quadrate $= S(2)$, ihrer Würfel $= S(3)$ u. ſ. w., ſo iſt, wie ſich leicht aus dem polynomiſchen Lehrſatz ergiebt;

$$S(1)=8(a+b+c+d)$$
$$S(2)=8(a^2+b^2+c^2+d^2+6[ab+ac+ad+bc+bd+cd])$$
$$\begin{aligned}S(3)=8(a^3+b^3+c^3+d^3+15[&a^2b+a^2c^2+a^2d+b^2a+b^2c\\&+b^2d+c^2a+c^2b+c^2d+d^2a+d^2b+d^2c]\\&+6.15[abc+abd+acd+bcd])\end{aligned}$$

u. ſ. w.

Wo der jeder Buchſtabencomplexion vorangeſetzte Zahlencoefficient nichts anders iſt, als die Verſetzungszahl einer Complexion, worinn jeder Buchſtabe eine doppelt ſo hohe Dimenſion hat.

Ferner iſt vermöge der im vorhergehenden Aufſatz angeführten Formel für den independenten Ausdruck der Coefficienten einer Gleichung aus den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln

$$A'' = -\frac{a^1 A}{1}$$

$$B'' = -\frac{a^2 A}{1} + \frac{b^2 B}{1.2}$$

$$C'' = -\frac{a^3 A}{1} + \frac{b^3 B}{1.2} - \frac{c^3 C}{1.2.3}$$

u. ſ. w.

für den Zeiger

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 \\ \frac{S(1)}{1}, & \frac{S(2)}{2}, & \frac{S(3)}{3} & \ldots, & \frac{S(8)}{8} \end{array}\right\}$$

§. 9. Man ſieht hieraus, daß die Buchſtabencomplexionen in S(1) und A'', die einfachen Größen a, b, c, d, in S(2) nnd A'', Producte aus denſelben zu zwey Dimenſionen, oder Binionen mit Wiederholungen, in S(3) und A'', alle Producte zu drey Dimenſionen u. ſ. w. ſeyn werden (daher denn, wie im polynomiſchen Lehrſatz, die Darſtellung aller Arten von unähnlichen Complexionen, die zu B'', oder C'' oder etc. gehören, von der Conſtruction von Combinationsklaſſen zu einer gegebenen Summe abhängt). Was aber die Zahlencoefficienten betrifft, ſo läßt ſich aus den Formeln des vorhergehenden §. ein Verfahren herleiten, um für jede gegebene Buchſtabencomplexion in der geſuchten Gleichung, ihren zugehörigen Zahlencoefficienten zu beſtimmen, welches ich an einem Beyſpiel zeigen will.

Es ſey die Buchſtabencomplexion bc^3e^4 gegeben, wo alſo bc^3 einen Theil von D'' ausmacht. Man bilde folgendes Schema:

				I.	II.	III.	IV.	V.
bc^3				4· 7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1}$	− 8	−7·8
b	c^3			1× 1	$\frac{1}{1.3}$	$\frac{1}{1}$	+ 8·8	$+\frac{8\cdot 8}{3}$
bc	c^2			6× 1	$\frac{1}{2.2}$	$\frac{1}{1}$		+6·4·4
c	bc^2			1× 15	$\frac{1}{1.3}$	$\frac{1}{1}$		+5·8·8
b	c	c^2		1× 1× 1	$\frac{1}{1.1.2}$	$\frac{1}{1}$	−8·8·8	−4·8·8
c	c	bc		1× 1×6	$\frac{1}{1.1.2}$	$\frac{1}{1.2}$		−3·4·8·8
b	c	c	c	1×1×1×1	$\frac{1}{1.1.1.1}$	$\frac{1}{1.2.3}$	+8·8·8·8	$+\frac{4\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{3}$
								+ 40

Die Complexion bc^3 wird nämlich auf alle mögliche Arten in Binionen, Ternionen u. ſ. w. zerfällt. Von den neben jeder Union, Binion, Ternion u. ſ. w. beygeſetzten Zahlen ſind die in der erſten Columne immer die Verſetzungszahlen, nicht der Theile der Binionen, u. ſ. w. ſelbſt, ſondern der Complexionen von der doppelten Dimenſion (z. B. dem Theil bc correſpondirt in I. die Zahl 6, welches die Verſetzungszahl von b^2c^2 iſt). Die zweyte Zahlencolumne enthält Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner die Dimenſionsexponenten jener Buchſtabencomplexionen ſind. Die dritte enthält Brüche, deren Zähler ebenfalls 1, und deren Nenner 1, 1. 2, 1. 2. 3 u. ſ. w. ſind, je nachdem ein Theil einer Binion, Ternion u. ſ. w. 1mal, 2mal, 3mal u. ſ. w. vorkommt; die vierte endlich enthält -8, $+8^2$, -8^3, $+8^4$

für die Union, Binionen, Ternionen, Quaternionen. Die fünfte enthält die Producte aus den Horizontalreihen der vorhergehenden Zahlencolumnen; und die Summe dieſer Producte iſt der geſuchte Zahlencoefficient. Der Complexion bc^3e^4 kommt demnach in der geſuchten Gleichung der Zahlencoefficient $+40$ zu

Man könnte dieſen Zahlencoefficienten (nach §. 2) noch auf andere Art ſuchen, indem man ihn für ab^4e^3, oder a^3b^4e mittelſt eines ähnlichen Verfahrens beſtimmte: allein das Verfahren würde weitläufiger werden, als wenn man die Complexion bc^3e^4 oder ab^3e^4 nimmt, wo e^4 die höchſte Dimenſion hat. Man mag den Zahlencoefficienten für eine Buchſtabencomplexion zu ſuchen haben, für welche man will, ſo laſſe man immer den Buchſtaben, der die höchſte Dimenſion in derſelben hat, mit ſeinem Exponenten weg, und verfahre mit dem Reſt nach Art des vorigen Schema's.

So reduciren ſich in unſerm Falle, wo $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$, die gegebene Gleichung iſt, alle dergleichen verkürzte Complexionen, für deren jede beſonders ihr Zahlencoefficient vermittelſt des angezeigten Verfahrens zu ſuchen iſt, auf folgende: a; a^2, a^3, a^4; ab, ab^2, ab^3, a^2b^2, a^2b^3; abc, abc^2, abc^3, ab^2c^2, $a^2b^2c^2$; $abcd$, $abcd^2$, abc^2d^2.

§. 10. Die verlangte Gleichung ſelbſt braucht übrigens nicht mehr nach Potenzen von e oder irgend einer andern von den Größen a, b, c, d, e geordnet zu werden; ſondern man faßt in derſelben immer alle ähnliche Buchſtabencomplexionen mit ihren gemeinſchaftlichen Zahlencoefficienten zuſammen. Im gegenwärtigen Falle zerfälle man die Zahl 8 in die

Binionen	Ternionen	Quaternionen	Quinionen
17	116	1115	11114
26	125	1124	11123
35	134	1133	11222
44	224	1223	
	233	2222	

ſo ſind folgendes die Aggregate ähnlicher Buchſtabencomplexionen in der verlangten Gleichung:

$\varphi(8) = a^8+b^8+c^8+d^8+e^8 = \text{ſ}a^8$, wenn man will, nach Klügels Bezeichnungsart im Polynom. Lehrſatz.

$$\begin{aligned}\varphi(1,7) = {} & a^7(b+c+d+e)+b^7(a+c+d+e)+c^7(a+b+d+e)\\ & +d^7(a+b+c+e)+e^7(a+b+c+d) = \text{ſ}a^7b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(2,6) = {} & a^6(b^2+c^2+d^2+e^2)+b^6(a^2+c^2+d^2+e^2)\\ & +c^6(a^2+b^2+d^2+e^2)+d^6(a^2+b^2+c^2+e^2)\\ & +e^6(a^2+b^2+c^2+d^2) = \text{ſ}a^6b^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(3,5) = {} & a^5(b^3+c^3+d^3+e^3)+b^5(a^3+c^3+d^3+e^3)\\ & +c^5(a^3+b^3+d^3+e^3)+d^5(a^3+b^3+c^3+e^3)\\ & +e^5(a^3+b^3+c^3+d^3) = \text{ſ}a^5b^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(4,4) = {} & a^4b^4+a^4c^4+a^4d^4+a^4e^4+b^4c^4+b^4d^4+b^4e^4\\ & +c^4d^4+c^4e^4+d^4e^4 = \text{ſ}a^4b^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1,1,6) = {} & a^6(bc+bd+be+cd+ce+de)+b^6(ac+ad+ae\\ & +cd+ce+de)+c^6(ab+ad+ae+bd+be+de)\\ & +d^6(ab+ac+ae+bc+be+ce)+e^6(ab+ac\\ & +ad+bc+bd+cd) = \text{ſ}a^6bc,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1,2,5) = {} & a^5 \left(\begin{array}{l} bc^2 + bd^2 + be^2 + cd^2 + ce^2 + de^2 \\ + b^2c + b^2d + b^2e + c^2d + c^2e + d^2e \end{array}\right) \\
& + b^5 \left(\begin{array}{l} ac^2 + ad^2 + ae^2 + cd^2 + ce^2 + de^2 \\ + a^2c + a^2d + a^2e + c^2d + c^2e + d^2e \end{array}\right) \\
& + c^5 \left(\begin{array}{l} ab^2 + ad^2 + ae^2 + bd^2 + be^2 + de^2 \\ + a^2b + a^2d + a^2e + b^2d + b^2e + d^2e \end{array}\right) \\
& + d^5 \left(\begin{array}{l} ab^2 + ac^2 + ae^2 + bc^2 + be^2 + ce^2 \\ + a^2b + a^2c + a^2e + b^2c + b^2e + c^2e \end{array}\right) \\
& + e^5 \left(\begin{array}{l} ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 + cd^2 \\ + a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d \end{array}\right) \\
& = \int a^5b^2c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1,3,4) = {} & a^4 \left(\begin{array}{l} bc^3 + bd^3 + be^3 + cd^3 + ce^3 + de^3 \\ + b^3c + b^3d + b^3e + c^3d + c^3e + d^3e \end{array}\right) \\
& + b^4 \left(\begin{array}{l} ac^3 + ad^3 + ae^3 + cd^3 + ce^3 + de^3 \\ + a^3c + a^3d + a^3e + c^3d + c^3e + d^3e \end{array}\right) \\
& + c^4 \left(\begin{array}{l} ab^3 + ad^3 + ae^3 + bd^3 + be^3 + de^3 \\ + a^3b + a^3d + a^3e + b^3d + b^3e + d^3e \end{array}\right) \\
& + d^4 \left(\begin{array}{l} ab^3 + ac^3 + ae^3 + bc^3 + be^3 + ce^3 \\ + a^3b + a^3c + a^3e + b^3c + b^3e + c^3e \end{array}\right) \\
& + e^4 \left(\begin{array}{l} ab^3 + ac^3 + ad^3 + bc^3 + bd^3 + cd^3 \\ + a^3b + a^3c + a^3d + b^3c + b^2d + c^3d \end{array}\right) \\
& = \int a^4b^3c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(2,2,4) = {} & a^4(b^2c^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2) \\
& + b^4(a^2c^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2) \\
& + c^4(a^2b^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + d^2e^2) \\
& + d^4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2e^2 + b^2c^2 + b^2e^2 + c^2e^2) \\
& + e^4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\
& = \int a^4b^2c^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(2,3,3) = {} & a^2(b^3c^3 + b^3d^3 + b^3e^3 + c^3d^3 + c^3e^3 + d^3e^3) \\ & + b^2(a^3c^3 + a^3d^3 + a^3e^3 + c^3d^3 + c^3e^3 + d^3e^3) \\ & + c^2(a^3b^3 + a^3d^3 + a^3e^3 + b^3d^3 + b^3e^3 + d^3e^3) \\ & + d^2(a^3b^3 + a^3c^3 + a^3e^3 + b^3c^3 + b^3e^3 + c^3e^3) \\ & + e^2(a^3b^3 + a^3c^3 + a^3d^3 + b^3c^3 + b^3d^3 + c^3d^3) \\ & = \int a^3b^3c^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1,1,1,5) = {} & a^5(bcd + bce + bde + cde) + b^5(acd + ace \\ & + ade + cde) + c^5(abd + abe + ade + bde) \\ & + d^5(abc + abe + ace + bce) + e^5(abe + abd \\ & + acd + bcd) = \int a^5bcd,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1,1,2,4) = {} & (a^2b^4 + a^4b^2)(cd + ce + de) + (a^2c^4 + a^4c^2) \\ & (bd + be + de) + (a^2d^4 + a^4d^2)(bc + be + ce) \\ & + (a^2e^4 + a^4e^2)(bc + bd + cd) + (b^2c^4 + b^4c^2) \\ & (ad + ae + de) + (b^2d^4 + b^4d^2)(ac + ae + ce) \\ & + (b^2e^4 + b^4e^2)(ac + ad + cd) + (c^2d^4 + c^4d^2) \\ & (ab + ae + be) + (e^2c^4 + c^4e^2)(ab + ad + bd) \\ & + (d^2e^4 + d^4e^2)(ab + ac + bc) = \int a^4b^2cd,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1,1,3,3) = {} & a^3b^3(cd + ce + de) + a^3c^3(bd + be + de) \\ & + a^3d^3(bc + be + ce) + a^3e^3(bc + bd + cd) \\ & + b^3c^3(ad + ae + de) + b^3d^3(ac + ae + ce) \\ & + b^3e^3(ac + ad + cd) + c^3d^3(ab + ae + be) \\ & + c^3e^3(ab + ad + bd) + d^3e^3(ab + ac + bc) \\ & = \int a^3b^3cd,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1,2,2,3) = {} & (ab^3 + a^3b)(c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2) + (ac^3 + a^3c) \\ & (b^2d^2 + b^2e^2 + d^2e^2) + (ad^3 + a^3d)(b^2c^2 + b^2e^2 \\ & + c^2e^2) + (ae^3 + a^3e)(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\ & + (bc^3 + b^3c)(a^2d^2 + a^2e^2 + d^2e^2) + (bd^3 \\ & + b^3d)(a^2c^2 + a^2e^2 + c^2e^2) + (be^3 + b^3e) \\ & (a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2) + (cd^3 + c^3d)(a^2b^2 + a^2e^2 \\ & + b^2e^2) + (ce^3 + c^3e)(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2) \\ & + (de^3 + d^3e)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \int a^3b^2c^2d,\end{aligned}$$

$$\Phi(2,2,2,2) = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + b^2c^2d^2e^2$$
$$= \text{ſ}a^2b^2c^2d^2,$$

$$\Phi(1,1,1,1,4) = a^4bcde + ab^4cde + abc^4de + abcd^4e + abcde^4$$
$$= \text{ſ}a^4bcde,$$

$$\Phi(1,1,1,2,3) = abc(d^2e^3+d^3e^2)+abd(c^2e^3+c^3e^2)+abe(c^2d^3$$
$$+c^3d^2)+acd(b^2e^3+b^3e^2)+ace(b^2d^3+b^3d^2)$$
$$+ade(b^2c^3+b^3c^2)+bcd(a^2e^3+a^3e^2)$$
$$+bce(a^2d^3+a^3d^2)+bde(a^2c^3+a^3c^2)$$
$$+cde(a^2b^3+a^3b^2) = \text{ſ}a^3b^2cde,$$

$$\Phi(1,1,2,2,2) = a^2b^2c^2de + a^2b^2d^2ce + a^2b^2e^2cd + a^2c^2d^2be$$
$$+a^2c^2e^2bd + a^2d^2e^2bc + b^2c^2d^2ae + b^2c^2e^2ad$$
$$+b^2d^2e^2ac + c^2d^2e^2ab = \text{ſ}a^2b^2c^2de$$

§. 11. Ich ſetze nun die geſuchte von Wurzelgrößen befreyte Gleichungen hieher, wie ich ſie durch die beyden vorgetragenen Methoden gefunden habe. Sie ſind

1. für die gegebene $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$,
$$a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)=0$$

2. für $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$,
$$a^4+b^4+c^4+d^4$$
$$-4(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+a^3d+ad^3+b^3c+bc^3+b^3d$$
$$+bd^3+c^3d+cd^3)$$
$$+6(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)$$
$$+4(a^2(bc+bd+cd)+b^2(ac+ad+cd)+c^2(ab+ad+bd)$$
$$+d^2(ab+ac+bc))$$
$$-40abcd=0$$

3. für $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$,

$$\int a^8-8\int a^7b+4.7\int a^6b^2-7.8\int a^5b^3+70\int a^4b^4+40\int a^6bc-9.8\int a^5b^2c+40\int a^4b^3c+4.9\int a^4b^2c^2+16\int a^3b^3c^2-11.16\int a^5bcd+43.8\int a^4b^2cd-13.4.8\int a^3b^3cd-17.16\int a^3b^2c^2d+251.8\int a^2b^2c^2d^2-47.16\int a^4bcde+4.8.29\int a^3b^2cde-95.16\int a^2b^2c^2de=0.$$

§. 12. Von der Geſchichte dieſer Aufgabe gedenke ich an einem andern Orte zu reden; inzwiſchen mag es genug ſeyn, in Beziehung auf dieſelbe, hier den dritten Band der Briefe Descartes's, und Waring's Meditationes algebraicas anzuführen.

X.

Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente. Anwendung der daraus abgeleiteten Sätze auf das Eliminationsproblem; von

H. A. Rothe, Prof. zu Leipzig.

Stellenexponenten bey Permutationen, nebſt den daraus ſich ergebenden Zeichen.

1. Erklärung.

Man ſchreibe unter jedes Element, irgend einer Permutation, die ſich aus den r verſchiedenen Elementen $1, 2, 3, \ldots r$ machen läßt, deren Anzahl bekanntlich $r(r-1)(r-2)\ldots 3.2.1$ iſt, diejenige Zahl, welche anzeigt, das wievielſte es iſt, wenn man das Element ſelbſt, nebſt allen weiter zur Rechten folgenden, ihrer natürlichen Folge nach, ſetzt. Z. B. für $r = 10$ giebt es eine Permutation

$$6,\ 4,\ 3,\ 9,\ 8,\ 10,\ 1,\ 7,\ 2,\ 5$$

Um zu finden was unter die 8 zu ſtehen kommt, ſetze man die 8, nebſt allen noch zur Rechten folgenden Elementen, in ihrer natürlichen Folge

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10$$

ſo erhellet, daß die 8 hier in der fünften Stelle, von der Linken nach der Rechten zu gehend, ſteht, folglich kommt unter die 8 eine 5 zu ſtehen. Setzt man nach eben der Regel unter jedes Element, die gehörige Zahl, ſo bekommt man

$$\begin{array}{cccccccccc} 6 & 4 & 3 & 9 & 8 & 10 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ \hline 6 & 4 & 3 & 6 & 5 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

Dieſe darunter geſchriebenen Zahlen, mögen **Stellenexponenten** heißen; ſo iſt 5 der Stellenexponent von 8, und 3 der Stellenexponent von 7.

Schreibt man die Stellenexponenten nicht **unter**, ſondern **neben** die Permutationen, ſo haben die 24 Verſetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Stellenexponenten:

Verſetzungen	Stellenexponenten
1, 2, 3, 4	1, 1, 1, 1
1, 2, 4, 3	1, 1, 2, 1
1, 3, 2, 4	1, 2, 1, 1
1, 3, 4, 2	1, 2, 2, 1
1, 4, 2, 3	1, 3, 1, 1
1, 4, 3, 2	1, 3, 2, 1
2, 1, 3, 4	2, 1, 1, 1
2, 1, 4, 3	2, 1, 2, 1
2, 3, 1, 4	2, 2, 1, 1
2, 3, 4, 1	2, 2, 2, 1
2, 4, 1, 3	2, 3, 1, 1
2, 4, 3, 1	2, 3, 2, 1
3, 1, 2, 4	3, 1, 1, 1
3, 1, 4, 2	3, 1, 2, 1
3, 2, 1, 4	3, 2, 1, 1
3, 2, 4, 1	3, 2, 2, 1
3, 4, 1, 2	3, 3, 1, 1
3, 4, 2, 1	3, 3, 2, 1
4, 1, 2, 3	4, 1, 1, 1
4, 1, 3, 2	4, 1, 2, 1
4, 2, 1, 3	4, 2, 1, 1
4, 2, 3, 1	4, 2, 2, 1
4, 3, 1, 2	4, 3, 1, 1
4, 3, 2, 1	4, 3, 2, 1

wo das bey den Stellenexponenten vorkommende Geſetz, der Evolutionen wegen, leicht zu überſehen iſt. Es ſind nehmlich Variationen an ſich, wo in der letzten Stelle zur Rechten blos 1, in der vorletzten blos 1, 2, in der vorvorletzten 1, 2, 3 u. ſ. w. vorkommen kann.

2. Hieraus ergiebt ſich

1) Der Stellenexponent eines jeden Elements iſt um ſo viel kleiner als das Element ſelbſt, als kleinere Elemente weiter zur Linken ſtehen. Stehen daher keine kleinern Elemente zur Linken, ſo iſt der Stellenexponent, dem Elemente ſelbſt gleich. Daher iſt der Stellenexponent des erſten Elements allemal mit dem Elemente ſelbſt einerley; und das gilt auch bey allen folgenden Elementen, ſo lange ſie abnehmen.

2) Der Stellenexponent eines jeden Elements iſt um 1 größer, als die Menge der zur Rechten ſtehenden kleinern Elemente. Stehen daher zur Rechten keine kleineren Elemente, ſo iſt er 1. So lange alſo die letzten Elemente, von der Rechten nach der Linken zugehend, abnehmen, ſo ſind ihre Stellenexponenten, 1, ſo lange ſie aber zunehmen, nach der Reihe die Zahlen 1, 2, 3, u. ſ. w.

Beyſpiel. Für $x = 14$

hat die Verſetzung 10, 7, 6, 3, 8, 1, 12, 9. 2, 13, 5, 14, 4, 11

die Stellenexponenten 10, 7, 6, 3, 5, 1, 6, 4, 1, 4, 2, 3, 1, 1

Weil hier die erſten vier Elemente 10, 7, 6, 3 immer abnehmen, ſo ſind ihre Stellenexponenten, mit den Elementen ſelbſt einerley; die beyden letzten Elemente 11, 4 nehmen ab, alſo haben ſie 1; dem Element 9, ſtehen fünf kleinere Elemente, nehmlich 7, 6, 3, 8, 1 zur Linken, folglich iſt ſein Stellenexponent $9 - 5 = 4$; dem Elemente 13 ſtehen drey kleinere Elemente, 5, 4, 11 zur Rechten, folglich iſt ſein Stellenexponent $3+1=4$.

3. **Willkührlicher Satz.** Jede Permutation der Elemente 1, 2, 3, . . . r, werde mit dem Zeichen + verſehen, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge gerader Zahlen, unter ihren Stellenexponenten vorkommt; mit dem Zeichen — hingegen, wenn die Menge der geraden Zahlen, unter den Stellenexponenten ungerade iſt.

Auf dieſe Art bekommt jede Permutation eins der Zeichen + oder —, z. B. die Permutation in 1 bekommt —, weil 3 gerade Stellenexponenten 6, 4, 6, dabey vorkommen, hingegen hat die Permutation in (2) das Zeichen +, weil 6 gerade Stellenexponenten, nehmlich 10, 6, 6, 4, 4, 2 vorkommen.

4. Setzt man ſtatt jedes Stellenexponenten die um 1 kleinere Zahl, ſo geht jede gerade Zahl darunter in eine ungerade, und jede ungerade in eine gerade über. Es bekommt alſo eine Permutation das Zeichen +, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge ungerader Zahlen, unter den um 1 verminderten Stellenexponenten vorkommen, — hingegen, wenn die Menge der ungeraden Zahlen, darunter ungerade iſt. Im erſten Falle aber iſt die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten ſelbſt gerade, im zweyten ungerade. Man kann alſo auch die Regel ſo ausdrücken: Jede Permutation bekommt das Zeichen + wenn die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten gerade, — hingegen, wenn ſie ungerade iſt. Die Null wird dabey als gerade Zahl betrachtet.

5. **Erklärungen.** Man hat für einerley r zwo Permutationen, welche ſich nur dadurch unterſcheiden, daß

zwey Elemente in ihnen verſetzt ſind; alle andern aber ihre Stellen behalten, z. B. für r = 24

$$20,\ \dot{9},\ \dot{14},\ 18,\ \underset{.}{4},\ 24,\ \dot{16},\ 21,\ \overset{*}{7},\ \underset{.}{6},\ 19,\ \dot{8},\ \dot{15},\ 22,$$

$$\dot{10},\ \underset{.}{3},\ \dot{11},\ \overset{*}{17},\ \underset{.}{5},\ \underset{.}{2},\ \dot{13},\ \underset{.}{1},\ 23,\ \dot{12}$$

und

$$20\ \ 9\ \ 14\ \ 18\ \ 4\ \ 24\ \ 16\ \ 21\ \ \overset{*}{17}\ \ 6,\ 19,\ 8,\ 15,\ 22,$$

$$10,\ 3,\ 11,\ \overset{*}{7},\ 5,\ 2,\ 13,\ 1,\ 23,\ 12$$

wo die beyden verſetzten Elemente 7 und 17 beyderſeits mit Sternen bezeichnet ſind. Die Bedeutung der Puncte bey der erſten Permutation ergiebt ſich aus den folgenden Definitionen in 3).

1) Die beyden zu verſetzenden Elemente (hier 7 und 17) mögen *Hauptelemente* heißen, und die Stellen worinnen ſie ſtehen (hier die 9te und 18te von der Linken an gerechnet) die *Hauptſtellen*.

2) Diejenige Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptſtelle ſteht, heiße die *erſte Permutation*, und die andere die *zweyte*.

3) Diejenigen Elemente, die kleiner ſind als das kleinere Hauptelement, (hier 1–6) heißen *niedrige Zahlen* und mögen durch *unter* ſie geſetzte Puncte, wie bey der erſten Permutation geſchehen iſt, bezeichnet werden; diejenigen Elemente, deren Werth zwiſchen die beyden Hauptelemente fällt, (hier 8–16) heißen *mittlere Zahlen*, und werden durch *über* ſie geſetzte Puncte bezeichnet; diejenigen Elemente, die größer ſind, als das größere Haupt-

element, (hier 18—24) heißen hohe Zahlen, und bleiben ohne alles Abzeichen.

4) Derjenige Theil der Permutation von der Linken an, bis zur linken Hauptſtelle heiße der Anfang; der Theil zwiſchen beyden Hauptſtellen das Mittel; der Theil von der rechten Hauptſtelle bis zum letzten Elemente zur Rechten, das Ende. Die beyden Hauptſtellen ſelbſt werden zu keinen dieſer Theile gerechnet, ſondern beſonders betrachtet. Alſo haben beyde Permutationen einerley Anfang, Mittel und Ende.

6. Aufgabe. Zu unterſuchen, wie die Stellenexponenten zwoer Permutationen, von der Beſchaffenheit wie in 5, voneinander abhängen.

Auflöſung.

1) Die Stellenexponenten des Anfangs und Endes ſind bey beyden Permutationen einerley, wegen 2.

2) Da jedes Hauptelement größer als jede niedrige, und kleiner als jede hohe Zahl iſt, ſo ſind auch wegen 2 die Stellenexponenten aller hohen und niedrigen Zahlen, in dem Mittel bey beyden Permutationen einerley.

3) Jede mittlere Zahl in dem Mittel, hat bey der erſten Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptſtelle ſteht (5. Def. 2) ein Element, das kleiner iſt als ſie, weniger zur Rechten ſtehen, als bey der zweyten Permutation; folglich ſind, wegen (2 2]) die Stellenexponenten der mittlern Zahlen im Mittel, bey der erſten Permutation um eins kleiner als bey der zweyten.

4) Setzt man

das kleinere Hauptelement = A (hier = 7)
das größere Hauptelement = B (hier = 17)

$$\text{die Menge der niedrigen Zahlen} \left(\begin{array}{l}\text{im Mittel} = c \ (\text{hier} = 2)\\ \text{im Ende} = f \ (\text{hier} = 3)\end{array}\right.$$

$$\text{die Menge der mittlern Zahlen} \left(\begin{array}{l}\text{im Mittel} = d \ (\text{hier} = 4)\\ \text{im Ende} = e \ (\text{hier} = 2)\end{array}\right.$$

(wo ſich c f d e ſehr leicht durch Abzählung der unter und über den Zahlen ſtehenden Puncte, nach 5. Def. 3, beſtimmen laſſen); ſo iſt wegen (2 2])

α) bey der erſten Permutation der Stellenexponent der linken Hauptſtelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 1 alſo $= c + f + 1$; der Stellenexponent der rechten Hauptſtelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Ende + 1 alſo $= e + f + 1$.

β) bey der zweyten Permutation, der Stellenexponent der linken Hauptſtelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 2 (weil noch überdies das Hauptelement A, welches kleiner iſt als B, dem B zur Linken ſteht) alſo $= c + d + e + f + 2$; der Stellenexponent der rechten Hauptſtelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Ende + 1 alſo $= f + 1$

5) Man findet alſo die Stellenexponenten der zweyten Permutation, aus den Stellenexponenten der erſten

α) wenn man zu dem Stellenexponenten der linken Hauptſtelle $d + e + 1$ addirt, β) von dem Stellenexponenten der rechten Hauptſtelle, e ſubtrahirt,

γ) den Stellenexponenten jeder mittlern Zahl im Mittel um 1 vermehrt,

δ) die Stellungsexponenten aller übrigen Zahlen ungeändert läßt.

So finden ſich z. B. aus den Stellenexponenten der erſten Permutation in 5

$$20,9,13,16,4,19,13.15,\overset{*}{6},5,12,\overset{|}{5},\overset{|}{9},10,\overset{|}{5},3,\overset{|}{4},\overset{*}{6},3,2,3,1,2,1$$

die Stellenexponenten der zweyten

$$20,9,13,16,4.19,13,15,\overset{*}{13},5,12,\overset{|}{6},\overset{|}{10},10,\overset{|}{6},3,\overset{|}{5},\overset{*}{4},3,2,3,1,2,1$$

wo die Stellenexponenten der Hauptſtellen durch Sterne, und der mittlern Zahlen im Mittel, durch über ſie geſetzte Striche beyderſeits bezeichnet ſind

7. Permutationen von der Beſchaffenheit wie in 5, haben allemal verſchiedene Zeichen. Denn da nach (6 5]) der Stellenexponent der linken Hauptſtelle um $d+e+1$ vermehrt, der rechten Hauptſtelle um e vermindert, und aller mittlern Zahlen im Mittel, deren Menge d iſt, um 1 vermehrt werden muß, um aus den Stellenexponenten der erſten Permutation, die der zweyten zu bekommen, ſo iſt die Summe der Stellenexponenten der zweyten Permutation um $d+e+1-e+d$ oder um $2d+1$ größer, als bey der erſten Permutation; folglich gilt das auch bey der Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten, da bey beyden Permutationen r einerley iſt. Alſo iſt die eine Summe gerade, die andere ungerade, folglich haben nach 4 beyde Permutationen verſchiedene Zeichen.

1) **Zuſatz.** Da man durch ſucceſſive Vertauſchung zweyer Elemente, von jeder Permutation auf jede kommen kann, ſo wird man zu beſtimmen im Stande ſeyn, ob zwey gegebene Permutationen einerley oder verſchiedene Zeichen haben, nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl Vertauſchungen dazu erfordert wird. Geſetzt man ſollte unterſuchen, ob die beyden Permutationen für $r = 10$

$$2,\ 10,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 4,\ 5,\ 8,\ 6$$

und

$$6,\ 2,\ 7,\ 10,\ 5,\ 3,\ 9,\ 8,\ 1,\ 4$$

einerley oder verſchiedene Zeichen haben, ſo leite man die letztere aus der erſtern, durch ſucceſſive Vertauſchung zweyer Elemente (die allemal hier mit Puncten bezeichnet werden mögen) alſo ab:

$$\dot{2},\ 10,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 4,\ 5,\ 8,\ \dot{6}$$

$$6,\ \dot{10},\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 4,\ 5,\ 8,\ \dot{2}$$

$$6,\ 2,\ \dot{9},\ 3,\ 1,\ \dot{7},\ 4,\ 5,\ 8,\ 10$$

$$6,\ 2,\ 7,\ \dot{3},\ 1,\ 9,\ 4,\ 5,\ 8,\ \dot{10}$$

$$6,\ 2,\ 7,\ 10,\ \dot{1},\ 9,\ 4,\ \dot{5},\ 8,\ 3$$

$$6,\ 2,\ 7,\ 10,\ 5,\ \dot{9},\ 4,\ 1,\ 8,\ \dot{3}$$

$$6,\ 2,\ 7,\ 10,\ 5,\ 3,\ \dot{4},\ 1,\ 8,\ \dot{9}$$

$$6,\ 2,\ 7,\ 10,\ 5,\ 3,\ 9,\ \dot{1},\ \dot{8},\ 4$$

$$6,\ 2,\ 7,\ 10,\ 5,\ 3,\ 9,\ 8,\ 1,\ 4$$

Da man alſo durch 8 Vertauſchungen aus der erſten die zweyte ableiten kann, ſo haben beyde einerley Zeichen, nehmlich —

2) **Zuſatz.** Entſteht eine Permutation dergeſtalt aus einer andern, daß ein einziges Element aus ſeiner Stelle genommen, und in eine andere Stelle geſetzt wird, ſo haben beyde Permutationen einerley Zeichen, wenn der Unterſchied der Stellen gerade, und verſchiedene, wenn er ungerade iſt, weil man durch ſo viel Vertauſchungen, als der Unterſchied der Stellen beträgt, aus der einen auf die andere kommen kann. So haben alſo die beyden Permutationen

$$4 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 1 \quad 9 \quad 5 \quad 2 \quad 6 \quad 3$$

und

$$4 \quad 8 \quad 10 \quad 1 \quad 9 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 3$$

einerley Zeichen, weil blos das Element 7 bey der einen in der zweyten, bey der andern in der achten Stelle ſteht, denn man kann durch ſechs Vertauſchungen aus der erſten Permutation die zweyte ableiten.

$$4,\ \dot{7},\ \dot{8},\ 10,\ 1,\ 9,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3$$

$$4,\ 8,\ \dot{7},\ \dot{10},\ 1,\ 9,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3$$

$$4,\ 8,\ 10,\ \dot{7},\ \dot{1},\ 9,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3$$

$$4,\ 8,\ 10,\ 1,\ \dot{7},\ \dot{9},\ 5,\ 2,\ 6,\ 3$$

$$4,\ 8,\ 10,\ 1,\ 9,\ \dot{7},\ \dot{5},\ 2,\ 6,\ 3$$

$$4,\ 8,\ 10,\ 1,\ 9,\ 5,\ \dot{7},\ \dot{2},\ 6,\ 3$$

$$4,\ 8,\ 10,\ 1,\ 9,\ 5,\ 2,\ 7,\ 6,\ 3$$

3) **Zuſatz.** Da die Permutation 1, 2, 3, 4, ... r allemal das Zeichen + hat, ſo wird eine Permutation, worinnen blos das m in der Stelle n, alle übrigen Elemente aber ihrer natürlichen Folge nach ſtehen, das Zeichen + haben, wenn der Unterſchied zwiſchen n und m gerade, und —, wenn er ungerade iſt; oder, welches einerley iſt, + wenn

$n+m$ gerade, und —, wenn $n+m$ ungerade iſt; ſo hat z. B. für $r = 10$, die Permutation

$1, 6, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 +$ weil $6 = m$ und $2 = n$
$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 5, 10 +$ weil $5 = m$ und $9 = n$
$1, 2, 3, 7, 4, 5, 6, 8, 9, 10 -$ weil $7 = m$ und $4 = n$
$1, 3, 4, 5, 2, 6, 7, 8, 9, 10 -$ weil $2 = m$ und $5 = n$

8. Wenn man die Permutationen von 1, 2, 3, ... r nach der Ordnung darſtellt wie Hindenburg (E.S.c.a.A.S. 163-167) daß ſie nehmlich wie wachſende Zahlen folgen, oder unter ſich gut geordnet ſind, ſo haben zwey aufeinander folgende Permutation einerley Zeichen, wenn die erſte Veränderung, in der $(4n+3)$ten oder $(4n+4)$ten Stelle geſchieht, (wenn nehmlich n entweder 0, oder eine ganze poſitive Zahl bedeutet, und die Stellen hier von der Rechten nach der Linken gezählt werden), und verſchiedene Zeichen, wenn die erſte Veränderung, in der $(4n+1)$ten, oder $(4n+2)$ten Stelle geſchieht. Z. B. für $r = 10$ haben die beyden aufeinander folgenden Permutationen

$$8\ 4\ 9\ \dot{3}\ 10\ 7\ 6\ 5\ 2\ 1$$

und

$$8\ 4\ 9\ \dot{5}\ 1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 10$$

einerley Zeichen, weil die erſte Veränderung in der 7ten Stelle geſchieht, welche deshalb mit einem Puncte bezeichnet iſt; und die beyden aufeinander folgenden Permutationen

$$10\ \dot{6}\ 9\ 8\ 7\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$$

$$10\ \dot{7}\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9$$

haben, weil die erſte Veränderung in der 9ten Stelle vorfällt, verſchiedene Zeichen.

Beweis. Eine Permutation, die A heißen mag, endige ſich mit $\alpha qpo \ldots mlk \ldots cba$, oder die Permutation A ſey

$$\ldots\ldots \alpha qpo \ldots mlk \ldots\ldots cba$$

und es ſey darinnen $a<b$, $b<c$, u. ſ. w. $k<l$, $l<m$, u. ſ. w. $o<p$, $p<q$, und α falle zwiſchen l und k oder es ſey $\alpha>k$ und $\alpha<l$, ſo iſt die nachfolgende Permutation, welche B heißen mag,

$$\ldots\ldots labc \ldots k\alpha m \ldots opq$$

wo die am weiteſten zur Linken bey A und B ſtehenden Puncte, die zur Linken ungeändert gebliebenen Elemente bedeuten. Die erſte Veränderung fällt alſo in der Stelle vor, wo bey der Permutation A das α, oder bey B das l ſtand. Es ſey dieſes von der Rechten an gerechnet, die $(2m+2)$te oder $(2m+1)$te, wo m eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo iſt $2m+1$ oder $2m$ die Menge der Buchſtaben $a, b, c, \ldots, p, q$, und man kommt durch m Vertauſchungen, nehmlich des a mit q, des b mit p, des c mit o u. ſ. w. von der Permutation A auf die Permutation

$$\ldots\ldots \alpha abc \ldots klm \ldots opq$$

welche C heißen mag. Vertauſcht man hier in C die Elemente α und l mit einander, ſo erhält man die Permutation B, und man kann demnach von A auf B durch $m+1$ Vertauſchungen kommen. Iſt nun m ungerade, oder $m=2n+1$, geſchieht alſo die erſte Veränderung in der $(4n+4)$ten oder $(4n+3)$ten Stelle, ſo iſt die Anzahl der Vertauſchungen oder $(m+1)$ gerade, und es haben die beyden aufeinander folgenden Permutationen A und B (7, 1 Zuſ.) einerley Zeichen; iſt aber m gerade, oder $m=2n$, das heißt, geſchieht die erſte Veränderung in der $(4n+2)$ten oder $(4n+1)$ten Stelle, ſo iſt $m+1$ ungerade, und es haben A und B verſchiedene Zeichen.

1. *Zuſatz.* Wenn man nach der Hindenburgiſchen Art, oder unter ſich gut geordnet, alle mögliche Permutationen, ſowohl der Elemente 1, 2, 3 . . . (r−1) als auch der Elemente 1, 2, 3 . . . r darſtellt, die erſte Darſtellung A, die andere B nennt, und in der Darſtellung B alle Permutationen, deren erſtes Element 1, 2, 3 . . . m . . . r iſt, Permutationen von der Ordnung 1, 2, 3 . . . m . . . r nennt, ſo hat man in B hintereinander, erſt alle Permutationen von der Ordnung 1, dann alle von der Ordnung 2 u. ſ. w. zuletzt alle von der Ordnung r. Jede Ordnung in B hat ſo viel Permutationen, als in A vorkommen, oder (r−1) (r−2) . . . 3. 2. 1. Geſchieht nun in A, zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation die erſte Veränderung in der Stelle g, die Stellen von der Rechten an gerechnet, ſo wird auch zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation bey jeder Ordnung in B, die erſte Veränderung in der Stelle g geſchehen, folglich findet zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation ſowohl in A, als auch jeder Ordnung in B, eine *Folge* der Zeichen ſtatt, wenn g durch 4 dividirt, nichts oder 3 zum Reſte läßt, und eine *Abwechslung* der Zeichen, wenn g durch 4 dividirt 2 oder 1 zum Reſte läßt. Dies gilt für jedes f; alſo erhellet, daß jede Ordnung in B der Reihe nach entweder eben die Zeichen wie A, oder die entgegengeſetzten hat. Da nun die erſte Permutation in A allemal das Zeichen + hat, ſo hat eine Ordnung von B *dieſelben* Zeichen wie A, wenn die erſte Permutation dieſer Ordnung + hat, und die entgegengeſetzten, wenn ſie — hat. Es hat aber in B die erſte Permutation der Ordnung

1 welche 1, 2, 3, 4, 5 . . . . r iſt, das Zeichen +
2 „ „ 2, 1, 3, 4, 5 . . . . r „ „ „ —
3 „ „ 3, 1, 2, 4, 5 . . . . r „ „ „ +
4 „ „ 4, 1, 2, 3, 5 . . . . r „ „ „ —
5 „ „ 5, 1, 2, 3, 4 . . . . r „ „ „ +

u. ſ. w. (wegen 7. 3 Zuſ. für n=1) folglich haben alle ungeraden Ordnungen in B dieſelben Zeichen, wie in A, und alle geraden Ordnungen, die entgegengeſetzten.

2 Zuſ. Stellt man alle Permutationen der $r-1$ verſchiedenen Elemente, 1, 2, 3 . . . r, jedoch mit Auslaſſung des m, unter ſich gut geordnet dar, und ſchiebt bey jeder Permutation, zwiſchen die $(n-1)$te und nte Stelle das Element m ein, ſo hat man alle Permutationen in B, welche das Element m in der Stelle n haben, unter ſich gutgeordnet, und ihre Anzahl iſt ſo groß, als die Anzahl der Permutationen in A. Aber auch die Zeichen ſind der Reihe nach entweder eben dieſelben wie in A, oder die entgegengeſetzten. Denn, ſtünde das m in der erſten Stelle, oder wäre $n=1$ ſo erhellet es aus 1 Zuſ. Schiebt man nun das m aus der erſten Stelle durchgängig in die nte, ſo ändern ſich entweder die Zeichen aller Permutationen, oder ſie bleiben alle einerley, jenachdem n gerade oder ungerade iſt; nach 7, 2 Zuſ. Iſt nun $n+m$ gerade, ſo hat die erſte dieſer Permutationen das Zeichen +, iſt aber $n+m$ ungerade, das Zeichen — (nach 7. 3 Zuſ.), folglich haben aus eben dem Grunde wie im 1 Zuſ. alle Permutationen der Reihe nach, im erſten Falle eben dieſelben Zeichen wie in A, im andern, die entgegengeſetzten. Es ſey z. B. $r=5$; $n=3$; $m=2$ ſo iſt

A	diejenigen Permutationen in B, welche in der 3ten Stelle, das Element 2 haben.
+ 1, 2, 3, 4	− 1, 3, 2, 4, 5
− 1, 2, 4, 3	+ 1, 3, 2, 5, 4
− 1, 3, 2, 4	+ 1, 4, 2, 3, 5
+ 1, 3, 4, 2	− 1, 4, 2, 5, 3
+ 1, 4, 2, 3	− 1, 5, 2, 3, 4
− 1, 4, 3, 2	+ 1, 5, 2, 4, 3
− 2, 1, 3, 4	+ 3, 1, 2, 4, 5
+ 2, 1, 4, 3	− 3, 1, 2, 5, 4
+ 2, 3, 1, 4	− 3, 4, 2, 1, 5
− 2, 3, 4, 1	+ 3, 4, 2, 5, 1
− 2, 4, 1, 3	+ 3, 5, 2, 1, 4
+ 2, 4, 3, 1	− 3, 5, 2, 4, 1
+ 3, 1, 2, 4	− 4, 1, 2, 3, 5
− 3, 1, 4, 2	+ 4, 1, 2, 5, 3
− 3, 2, 1, 4	+ 4, 3, 2, 1, 5
+ 3, 2, 4, 1	− 4, 3, 2, 5, 1
+ 3, 4, 1, 2	− 4, 5, 2, 1, 3
− 3, 4, 2, 1	+ 4, 5, 2, 3, 1
− 4, 1, 2, 3	+ 5, 1, 2, 3, 4
+ 4, 1, 3, 2	− 5, 1, 2, 4, 3
+ 4, 2, 1, 3	− 5, 3, 2, 1, 4
− 4, 2, 3, 1	+ 5, 3, 2, 4, 1
− 4, 3, 1, 2	+ 5, 4, 2, 1, 3
+ 4, 3, 2, 1	− 5, 4, 2, 3, 1

weil nehmlich hier $n+m=5$, oder ungerade iſt, ſo haben die fünftheiligten Permutationen, die entgegengeſetzten Zeichen von denen viertheiligten in A.

Verwandte Permutationen.

9. **Erklärung.** Sind zwo Permutationen der Elemente 1, 2, 3, ... r ſo beſchaffen, daß jede aus der andern entſteht, wenn man die Elemente mit ihren Stellen verwechſelt, alſo, daß wenn bey der einen das Element m in der nten Stelle ſteht, dafür bey der andern das Element n in der mten Stelle ſteht, ſo mögen ſolche Permutationen **verwandte** heißen; z. B. für r=10,

ſind 3, 8, 5, 10, 9, 4, 6, 1, 7, 2
und 8, 10, 1, 6, 3, 7, 9, 2, 5, 4

verwandte Permutationen.

10. Man conſtruire ein Quadrat, deſſen Seite r Abtheilungen hat, zähle die Fächer der Horizontalreihen, und die ganzen Verticalreihen, von der Linken nach der Rechten, und die Fächer der Verticalreihen, ſo wie auch die ganzen Horizontalreihen von oben herab, und ſetze in dasjenige Fach der erſten, zweyten u. ſ. w. rten Horizontalreihe, deſſen Zahl dem erſten, zweyten u. ſ. w. rten Elemente einer Permutation gleich iſt, einem Punct, ſo erhält man das erſte, zweyte u. ſ. w. rte Element der verwandten Permutation, wenn man nachſieht, in welchem Fache der erſten, zweyten u. ſ. w. rten Verticalreihe der Punct ſtehet. Z. B. für die erſte der in 9 angeführten Permutationen hat das Quadrat folgende Geſtalt:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			●							
2								●		
3					●					
4										●
5									●	
6				●						
7						●				
8	●									
9							●			
10		●								

Da in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein Punct, aber auch nur ein einziger Punct befindlich ſeyn muß, ſo ſetze man in jedes Fach, das den mit ihr in einer Horizontalreihe befindlichen Punct zur Rechten, und den mit ihr in einer Verticalreihe befindlichen Punct unter ſich ſtehen hat, ein Sternchen oder ein Andreaskreuz,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	×	×	●							
2	×	×		×	×	×	×	●		
3	×	×		×	●					
4	×	×		×		×	×		×	●
5	×	×		×		×	×		●	
6	×	×		●						
7	×	×				●				
8	●									
9		×					●			
10		●								

ſo giebt, wie ſich ſehr leicht aus 2 folgern läßt, die Menge der, in der erſten, zweyten u. ſ. w. Horizontalreihe befindlichen Sternchen, den erſten, zweyten u. ſ. w. um 1 verminderten Stellenexponenten, der erſten Permutation, von welcher die Stelle der Puncte beſtimmt worden war, und welches im gegenwärtigen Beyſpiele die erſte der Permutationen in 9 iſt; und die Menge der in der erſten, zweyten u. ſ. w. Verticalreihe befindlichen Sternchen den erſten, zweyten, u. ſ. w. um 1 verminderten Stellenexponenten der verwandten Permutation, welches alſo hier die zweyte der Permutationen in 9 iſt. Weil nun in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein einziger Punct ſtehet, ſo erhält man die Stellenexponenten ſelbſt, wenn man die Puncte mit zu den Sternen zählt, und es iſt klar, daß bey beyden verwandten Permutationen, die Summe der Stellenexponenten einander und der Menge der im Quadrat vorkommenden Puncte und Sternchen zuſammengenommen gleich ſey, folglich iſt auch bey beyden Permutationen, die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten einander, und der Menge der Sternchen allein gleich. Es haben alſo verwandte Permutationen wegen 4 allemal einerley Zeichen, nehmlich + wenn die Menge der Sternchen gerade, und — wenn ſie ungerade iſt. Im gegenwärtigen Beyſpiel, hat, wie aus den Horizontalreihen ſich ergiebt die erſte der Permutationen in 9 die Stellenexponenten

3, 7, 4, 7, 6, 3, 3, 1, 2, 1

die andere ihr verwandte, wie ſich aus den Verticalreihen ergiebt, die Stellenexponenten.

8, 9, 1, 5, 2, 4, 4, 1, 2, 1

die Summe der Stellenexponenten iſt beyderſeits 37, alſo der um 1 verminderten einzelnen Stellenexponenten 27, und beyde Permutationen haben das Zeichen —.

Anmerkung. Die verwandten Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 ſtehen hier neben einander

1, 2, 3, 4	1 2 3 4
1, 2, 4, 3	1 2 4 3
1, 3, 2, 4	1 3 2 4
1, 3, 4, 2	1 4 2 3
1, 4, 2, 3	1 3 4 2
1, 4, 3, 2	1 4 3 2
2, 1, 3, 4	2 1 3 4
2, 1, 4, 3	2 1 4 3
2, 3, 1, 4	3 1 2 4
2, 3, 4, 1	4 1 2 3
2, 4, 1, 3	3 1 4 2
2, 4, 3, 1	4 1 3 2
3, 1, 2, 4	2 3 1 4
3, 1, 4, 2	2 4 1 3
3, 2, 1, 4	3 2 1 4
3, 2, 4, 1	4 2 1 3
3, 4, 1, 2	3 4 1 2
3, 4, 2, 1	4 3 1 2
4, 1, 2, 3	2 3 4 1
4, 1, 3, 2	2 4 3 1
4, 2, 1, 3	3 2 4 1
4, 2, 3, 1	4 2 3 1
4, 3, 1, 2	3 4 2 1
4, 3, 2, 1	4 3 2 1

alſo giebt es mehrere Permutationen, die ſich ſelbſt verwandt ſind, z. B. hier ſind die Permutationen

1, 2, 3, 4
1, 2, 4, 3
1, 3, 2, 4
1, 4, 3, 2
2, 1, 3, 4
2, 1, 4, 3
3, 2, 1, 4
3, 4, 1, 2
4, 2, 3, 1
4, 3, 2, 1

ſich ſelbſt verwandt. Die Menge der ſich ſelbſt verwandten Permutationen, für $r = 1, 2, 3, 4, 5$, u. ſ. w. ſey $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, u. ſ. w. ſo hat man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= \alpha + 1 = 2 \\
\gamma &= \beta + 2\alpha = 4 \\
\delta &= \gamma + 3\beta = 10 \\
\varepsilon &= \delta + 4\gamma = 26 \\
\zeta &= \varepsilon + 5\delta = 76 \\
\eta &= \zeta + 6\varepsilon = 232 \\
\vartheta &= \eta + 7\zeta = 764 \\
\iota &= \vartheta + 8\eta = 2620 \\
\varkappa &= \iota + 9\vartheta = 9496
\end{aligned}$$

u. ſ. w.

Das Eliminationsproblem und andere verwandte Sätze.

11. **Aufgabe.** Es ſeyen für r unbekannte Größen $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \overset{3}{x} \ldots \overset{r}{x}$, folgende r Gleichungen gegeben

$$\begin{array}{l}
\overset{1}{s} = 11\overset{1}{x} + 12\overset{2}{x} + 13\overset{3}{x} \dots + 1m\overset{m}{x} \dots + 1r\overset{r}{x} \\
\overset{2}{s} = 21\overset{1}{x} + 22\overset{2}{x} + 23\overset{3}{x} \dots + 2m\overset{m}{x} \dots + 2r\overset{r}{x} \\
\overset{3}{s} = 31\overset{1}{x} + 32\overset{2}{x} + 33\overset{3}{x} \dots + 3m\overset{m}{x} \dots + 3r\overset{r}{x} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\overset{n}{s} = n1\overset{1}{x} + n2\overset{2}{x} + n3\overset{3}{x} \dots + nm\overset{m}{x} \dots + nr\overset{r}{x} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\overset{r}{s} = r1\overset{1}{x} + r2\overset{2}{x} + r3\overset{3}{x} \dots + rm\overset{m}{x} \dots + rr\overset{r}{x}
\end{array}$$ [a]

wo n und m eine von den Zahlen 1, 2, 3 . . . r bedeuten; man ſoll die unbekannten Größen beſtimmen.

Vorbereitung zur Auflöſung.

1) Man mache alle Permutationen der verſchiedenen Elemente 1, 2, 3, . . . r, und verſehe jede nach dem vorhergehenden mit ihren Zeichen.

2) Die Stellen, von der Linken an gerechnet, ſchreibe man

1 vor jedes Element in der 1ſten Stelle
2 „ „ „ 2ten Stelle u. ſ. w. allgemein
m „ „ „ mten Stelle.

Was dadurch herauskommt, heiße *N*, z. B. für r = 4 iſt

---

[a] Die Ausdrücke 11, 12, 13, u. ſ. w. ſind hier ſtatt Buchſtaben geſetzt, und ſtellen Lokalzeichen vor. Es zeigt nehmlich die erſte Zahl die Gleichung, die zweyte die unbekannte Größe an, wozu ein ſolcher Coefficient gehört. So iſt alſo nm der Coefficient, der in der nten Gleichung zur mten unbekannten Größe gehört, alſo von mn unterſchieden. Hindenburg Nov. Syſtem. Perm. p. XXXV.

N =

+ 11. 22. 33. 44	+ 13. 21. 32. 44
— 11. 22. 34. 43	— 13. 21. 34. 42
— 11. 23. 32. 44	— 13. 22. 31. 44
+ 11. 23. 34. 42	+ 13. 22. 34. 41
+ 11. 24. 32. 43	+ 13. 24. 31. 42
— 11. 24. 33. 42	— 13. 24. 32. 41
— 12. 21. 33. 44	— 14. 21. 32. 43
+ 12. 21. 34. 43	+ 14. 21. 33. 42
+ 12. 23. 31. 44	+ 14. 22. 31. 43
— 12. 23. 34. 41	— 14. 22. 33. 41
— 12. 24. 31. 43	— 14. 23. 31. 42
+ 12. 24. 33. 41	+ 14. 23. 32. 41

3) Die Summe aller Complexionen in N, welche den Factor nm haben, werde ausgedrückt durch nm. ſnm; z. B. für r = 4; n = 3; m = 2 iſt

32. ſ32 = — 11.23.32.44 also ſ32 = — 11.23.44
\+ 11.24.32.43 + 11.24.43
\+ 13.21.32.44 + 13.21.44
— 13.24.32.41 — 13.24.41
— 14.21.32.43 — 14.21.43
\+ 14.23.32.41 + 14.23.41

Betrachtungen.

4) Jede Complexion in N beſteht aus r Factoren, wo ſowohl in den vordern als auch hintern Ziffern der Factoren, alle die Zahlen 1, 2, 3, . . . r vorkommen, und jede Complexion die dieſe Eigenſchaft hat, muß in N vorkommen. Denn ſtellt man die Factoren dieſer Complexion in der Ordnung, daß die vordern Ziffern, der Reihe nach, 1, 2, 3, ... r

ſind, ſo bilden die hintern Ziffern eine Permutation von 1, 2, 3, . . . r; da nun nach 1) alle Permutationen von 1, 2, 3, . . . r dargeſtellt werden müſſen, ſo muß auch diejenige vorkommen, die die hintern Ziffern bildeten, folglich die ganze Complexion, und die gedachte Permutation beſtimmt zugleich das Zeichen der Complexion. Man kann aber auch die Factoren ſo ſtellen, daß die hintern Ziffern der Reihe nach 1, 2, 3, . . . r ſind, dann bilden die vordern Ziffern eine Permutation 1, 2, 3, . . . r und zwar diejenige, die der erſtern verwandt (9) iſt. Da nun das Zeichen der erſtern Permutation das Zeichen der Complexion ſelbſt beſtimmte, und verwandte Permutationen einerley Zeichen haben, (10) ſo iſt es bey Beſtimmung des Zeichens einer Complexion, die in N vorkommt, einerley, ob man die vordern Ziffern der Factoren nach der Reihe ſtellt, und die Permutation der hintern Ziffern in Betrachtung zieht, wie in 1) und 2) oder ob man die hintern Ziffern nach der Reihe ſtellt, und die Permutation der vordern Ziffern in Betrachtung zieht. Z. B. 79.95.24.68.47.82.51.16.33 iſt eine Complexion in N für $r = 9$. Man ſtelle die Factoren ſo, daß die vordern Ziffern nach ihrer natürlichen Folge kommen

16. 24. 33. 47. 51. 68. 79. 82. 95

ſo bilden die hintern Ziffern die Permutation

6, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 2, 5

Nun ſtelle man die Factoren ſo, daß die hintern Ziffern nach ihrer Ordnung kommen

51.82.33.24.95.16.47.68.79

ſo geben die vordern Ziffern die Permutation

5, 8, 3, 2, 9, 1, 4, 6, 7

Dieſe beyden Permutationen ſind verwandt, haben alſo einerley Zeichen, nehmlich beyde —, folglich hat auch die ganze Complexion —. Hieraus ergiebt ſich, daß man den Werth für N auch erhält, wenn man alle Permutationen von 1, 2, 3, . . . r darſtellt, jede mit ihren Zeichen verſieht, und, die Stellen von der Linken an gerechnet, 1, 2, 3, . . . m, . . . hinter jedes Element in der Stelle 1, 2, 3, . . . m, . . . ſchreibt. So iſt alſo für r=4

$$N =$$

$$\begin{array}{l|l}
+\ 11.\ 22.\ 33.\ 44 & +\ 31.\ 12.\ 23.\ 44 \\
-\ 11.\ 22.\ 43.\ 34 & -\ 31.\ 12.\ 43.\ 24 \\
-\ 11.\ 32.\ 23.\ 44 & -\ 31.\ 22.\ 13.\ 44 \\
+\ 11.\ 32.\ 43.\ 24 & +\ 31.\ 22.\ 43.\ 14 \\
+\ 11.\ 42.\ 23.\ 34 & +\ 31.\ 42.\ 13.\ 24 \\
-\ 11.\ 42.\ 33.\ 24 & -\ 31.\ 42.\ 23.\ 14 \\
 & \\
-\ 21.\ 12.\ 33.\ 44 & -\ 41.\ 12.\ 23.\ 34 \\
+\ 21.\ 12.\ 43.\ 34 & +\ 41.\ 12.\ 33.\ 24 \\
+\ 21.\ 32.\ 13.\ 44 & +\ 41.\ 22.\ 13.\ 34 \\
-\ 21.\ 32.\ 43.\ 14 & -\ 41.\ 22.\ 33.\ 14 \\
-\ 21.\ 42.\ 13.\ 34 & -\ 41.\ 32.\ 13.\ 24 \\
+\ 21.\ 42.\ 33.\ 14 & +\ 41.\ 32.\ 23.\ 14
\end{array}$$

welches eben derſelbe Werth iſt wie in 2), außer daß die Ordnung der Factoren in den Complexionen, und der Complexionen unter einander, anders iſt.

5) Der Werth von ſnm beſteht aus allen möglichen, aus (r − 1) Factoren beſtehenden Complexionen, wo in den vordern Ziffern der Factoren, alle die Elemente 1, 2, 3, . . . r, das n ausgenommen, und in den hintern Ziffern auch alle die Elemente 1, 2, 3, . . . r, jedoch mit Ausnahme des m, vorkommen. Das Zeichen jeder ſolcher Complexion findet ſich, wenn man ſie mit nm multiplicirt, und nachſieht, was die dadurch entſtehende Permutation in dem Werthe für N

für ein Zeichen hat. Hieraus ergeben ſich die Regeln zur Beſtimmung des Werthes für ſnm.

α) Man ſchreibe alle Elemente 1, 2, 3, ... r, mit Ausſchluß des n, in die vordern Stellen, und alle Elemente 1, 2, 3, ... r, mit Ausſchluß des m, in die hintern Stellen der Factoren, ſo ergiebt ſich die erſte Complexion.

β) Permutire man entweder alle hintere Stellen und laſſe die vordern ungeändert, oder man permutire alle vordern Stellen und laſſe die hintern ungeändert.

γ) Im erſten Falle ſchiebe man in Gedanken, zwiſchen der (n−1)ten und nten Stelle der Permutation, welche die hintern Ziffern der Factoren einer Complexion bilden, ein m ein, ſo giebt das Zeichen der dadurch entſtehenden Permutation der Elemente 1, 2, 3 ... r das Zeichen der Complexion. Im andern Falle ſchiebe man in Gedanken zwiſchen der (m−1)ten und mten Stelle der Permutation, welche die vordern Ziffern der Factoren einer Complexion bilden, ein n ein, ſo beſtimmt die dadurch entſtehende Permutation, der Elemente 1, 2, ... r das Zeichen der Complexion. Auf dieſe Art iſt für r=5, n=3, m=2

nach der erſten Art	nach der andern Art
ſ32 = − 11. 23. 44. 55	ſ32 = − 11. 23. 44. 55
+ 11. 23. 45. 54	+ 11. 23. 54. 45
+ 11. 24. 43. 55	+ 11. 43. 24. 55
− 11. 24. 45. 53	− 11. 43. 54. 25
− 11. 25. 43. 54	− 11. 53. 24. 45
+ 11. 25. 44. 53	+ 11. 53. 44. 25
+ 13. 21. 44. 55	+ 21. 13. 44. 55
− 13. 21. 45. 54	− 21. 13. 54. 45
− 13. 24. 41. 55	− 21. 43. 14. 55
+ 13. 24. 45. 51	+ 21. 43. 54. 15
+ 13. 25. 41. 54	+ 21. 53. 14. 45
− 13. 25. 44. 51	− 21. 53. 44. 15
− 14. 21. 43. 55	− 41. 13. 24. 55
+ 14. 21. 45. 53	+ 41. 13. 54. 25
+ 14. 23. 41. 55	+ 41. 23. 14. 55
− 14. 23. 45. 51	− 41. 23. 54. 15
− 14. 25. 41. 53	− 41. 53. 14. 25
+ 14. 25. 43. 51	+ 41. 53. 24. 15
+ 15. 21. 43. 54	+ 51. 13. 24. 45
− 15. 21. 44. 53	− 51. 13. 44. 25
− 15. 23. 41. 54	− 51. 23. 14. 45
+ 15. 23. 44. 51	+ 51. 23. 44. 15
+ 15. 24. 41. 53	+ 51. 43. 14. 25
− 15. 24. 43. 51	− 51. 43. 24. 15

Beyde Darſtellungen geben einerley, außer daß die Ordnung der Factoren in den Complexionen, und der Complexionen unter einander, anders iſt. Es giebt die Complexion 14. 23. 41. 55 in der erſten Darſtellung, wenn man zwiſchen die zweite und dritte Stelle eine 2 einſchaltet, die Permutation 4, 3, 2, 1, 5 deren Zeichen + iſt, folglich hat auch die Complexion +. Eben ſo giebt die Complexion 41. 53. 14. 25. in der andern Darſtellung, wenn man zwiſchen der erſten und zweyten Stelle eine 3 einſchaltet, die Permutation 4, 3, 5, 1, 2, deren Zeichen — iſt, folglich hat die Complexion auch —. Die mit Puncten bezeichneten Ziffern ſind hier die eingeſchobenen. [b])

6) Aus der Natur der Permutationen iſt klar, daß

$$1n.\, ſ1n + 2n.\, ſ2n + 3n.\, ſ3n. + \ldots + rn.\, ſrn = N$$
$$n1.\, ſn1 + n2.\, ſn2 + n3.\, ſn3 + \ldots + nr.\, ſnr = N$$

Denn in jeder Complexion in N muß einer der Factoren 1n, 2n, ... rn vorkommen, aber es kann auch nur einer davon in jeder Complexion vorkommen. Eben ſo muß in jeder Complexion in N einer der Factoren n1, n2, n3 ... vorkommen, aber es kann auch davon nur einer in jeder Complexion vorkommen.

7) Wenn n und m verſchieden ſind, ſo iſt

$$1n.\, ſ1m + 2n.\, ſ2m + 3n.\, ſ3m + 4n.\, ſ4m + \ldots + rn.\, ſrm = 0$$

Denn die ganze Reihe enthält lauter Complexionen von r Factoren, wo in den vordern Stellen der Factoren alle Zahlen von 1 ... r vorkommen, in den hintern Stellen aber, die Zahl m fehlt, dagegen aber n zweymal vorkommt. Jede Complexion die dieſe Eigenſchaft hat, muß in der Reihe zweymal vorkommen; denn man ordne die Factoren

---

b) Die Zeichen in dem Werthe von ſnm für $r = k$, ſind der Reihe nach bey beyden Arten, eben dieſelben wie in dem Werthe von N für $r = k - 1$, wenn $n + m$ gerade iſt, und die umgekehrten, wenn $n + m$ ungerade iſt, wie hier. Es verſteht ſich nehmlich, daß die Permutationen unter ſich gut geordnet ſind. Daher hat die erſte Complexion, welche bey beyden Arten einerley iſt + wenn $n + m$ gerade, und — wenn $n + m$, wie hier, ungerade iſt, und das Zeichen jeder folgenden Permutation, oder die zugehörige Complexion, läßt ſich aus den Zeichen der vorhergehenden, nach eben der Regel wie in (8) beſtimmen. Der Beweis gründet ſich auf 8. 2 Zuſ. Für $r = 8$ ſind die Zeichen in ſ57 nach der Reihe eben ſo, wie in N für $r = 7$ und in ſ54 die umgekehrten.

ſo, daß die vordern Ziffern davon der Reihe nach 1, 2, 3 ... r ſind, ſo bilden die hintern Ziffern eine Permutation der r Elemente 1, 2, 3, ... r, worinnen aber m fehlt, und dagegen n zweymal vorkommt. Es komme das n vor in der pten und qten Stelle, von der Linken an gerechnet, und es ſey $q > p$, oder die Complexion ſey

.... pm ... qn ....

ſo kommt dieſe Complexion vor einmal in pn.ſpm und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

.... pm .... qn ....

das anderemal in qn.ſqm, hier hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

... pn ... qm ....

Beyde Complexionen aber haben verſchiedene Zeichen, weil bey den Permutationen, die die hintern Ziffern bilden, blos die Elemente n und m in den Stellen p und q vertauſcht ſind. Es heben ſich alſo beyde Complexionen auf, und ſonſt kann dieſe Complexion, welche alle darſtellt, weiter nicht vorkommen. Es ſey z. B. $r = 9$; $n = 1$; $m = 4$ ſo iſt für die Complexion

15. 23. 31. 47. 51. 66. 72. 89. 98

$p = 3$, $q = 5$, und ſie kommt vor, einmal in 31.ſ34, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

15. 23. 34. 47. 51. 66. 72. 89. 98

oder wie die Permutation

$$5,\ 3,\ \dot{4},\ 7,\ \dot{1},\ 6,\ 2,\ 9,\ 8$$

das anderemal in 51.ſ54, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

15. 23. 31. 47. 54. 66. 72. 89. 98

oder wie die Permutation

$$5,\ 3,\ \dot{1},\ 7,\ \dot{4},\ 6,\ 2,\ 9,\ 8$$

Beyde Permutationen aber haben verſchiedene Zeichen, weil blos die Elemente 1 und 4 in den Stellen 3 und 5 vertauſcht ſind (wegen 7), mithin heben ſich die beyden Complexionen auf. Eben ſo iſt für $r = 4$; $n = 2$; $m = 3$

$$\left\{\begin{matrix} 12.\ \text{ſ}\,13 \\ 22.\ \text{ſ}\,23 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 32.\ \text{ſ}\,33 \\ 42.\ \text{ſ}\,43 \end{matrix}\right\} = 0$$

d. i.

$$\begin{array}{r|r}
+\ 12.\ 21.\ 32.\ 44 & +\ 11.\ 22.\ 32.\ 44 \\
-\ 12.\ 21.\ 34.\ 42 & -\ 11.\ 24.\ 32.\ 42 \\
-\ 12.\ 22.\ 31.\ 44 & -\ 12.\ 21.\ 32.\ 44 \\
+\ 12.\ 22.\ 34.\ 41 & +\ 12.\ 24.\ 32.\ 41 \\
+\ 12.\ 24.\ 31.\ 42 & +\ 14.\ 21.\ 32.\ 42 \\
-\ 12.\ 24.\ 32.\ 41 & -\ 14.\ 22.\ 32.\ 41 \\
 & \\
-\ 11.\ 22.\ 32.\ 44 & -\ 11.\ 22.\ 34.\ 42 \\
+\ 11.\ 22.\ 34.\ 42 & +\ 11.\ 24.\ 32.\ 42 \\
+\ 12.\ 22.\ 31.\ 44 & +\ 12.\ 21.\ 34.\ 42 \\
-\ 12.\ 22.\ 34.\ 41 & -\ 12.\ 24.\ 31.\ 42 \\
-\ 14.\ 22.\ 31.\ 42 & -\ 14.\ 21.\ 32.\ 42 \\
+\ 14.\ 22.\ 32.\ 41 & +\ 14.\ 22.\ 31.\ 42
\end{array}$$

$$= 0$$

8) Wenn n und m verſchieden ſind ſo iſt

$$n1.\ \text{ſ}m1 + n2.\ \text{ſ}m2 + n3.\ \text{ſ}m3 + \ldots\ldots + nr.\ \text{ſ}mr = 0$$

Denn die ganze Reihe enthält lauter Complexionen von r Factoren, wo in den hintern Stellen der Factoren alle Zahlen von 1 . . . r vorkommen, in den vordern Stellen aber die Zahl m fehlt, dagegen aber n zweymal vorkommt. Jede Complexion, die dieſe Eigenſchaft hat, muß in der Reihe zweymal vorkommen. Denn man ordne die Factoren ſo, daß die hintern Ziffern davon, der Reihe nach 1, 2, 3 ... r ſind, ſo bilden die vordern Ziffern eine Permutation der r Elemente 1, 2, 3 ... r, worinnen aber m fehlt, und dagegen n zweymal vorkommt. Es komme das n vor in der pten und qten Stelle, von der Linken an gerechnet, und es ſey q > p, oder die Complexion ſey

.... np .... nq ....

ſo kommt dieſe Complexion vor, einmal in np.ſmp, und da hat ſie das Zeichen, wie die Complexion in N

.... mp .... nq ....

das anderemal in nq.ſmq, und da hat ſie das Zeichen, wie die Complexion in N

.... np .... mq ....

Beyde Complexionen aber haben verſchiedene Zeichen, weil bey den Permutationen, die die vordern Ziffern bilden, blos die Elemente n und m, in den Stellen p und q vertauſcht ſind. Es heben ſich alſo beyde Permutationen auf, und ſonſt kann dieſe Complexion, welche alle darſtellt, weiter nicht vorkommen. Es ſey z. B. r = 9, n = 7, m = 5 ſo kommt die Complexion

41. 72. 33. 84. 15. 26. 97. 78. 69.

vor, einmal in 72.ſ52, und hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

41. 52. 33. 84. 15. 26. 97. 78. 69

oder wie die Permutation

4, 5, 3, 8, 1, 2, 9, 7, 6

das anderemal in 78.ſ58, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

41. 72. 33. 84. 15. 26. 97. 58. 69

oder wie die Permutation

4, 7, 3, 8, 1, 2, 9, 5, 6

Beyde Permutationen aber haben verſchiedene Zeichen, weil die Elemente 5 und 7 in den Stellen 2 und 8 vertauſcht ſind (wegen 7), mithin heben ſich die beyden Complexionen auf. Eben ſo iſt für $r=4$; $m=4$; $n=1$.

$$\begin{Bmatrix}11\ f\ 41\\12\ f\ 42\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\ f\ 43\\14\ f\ 44\end{Bmatrix}=0$$

d. i.

− 11. 12. 23. 34	− 11. 22. 13. 34
+ 11. 12. 33. 24	+ 11. 32. 13. 24
+ 11. 22. 13. 34	+ 21. 12. 13. 34
− 11. 22. 33. 14	− 21. 32. 13. 14
− 11. 32. 13. 24	− 31. 12. 13. 24
+ 11. 32. 23. 14	+ 31. 22. 13. 14
+ 11. 12. 23. 34	+ 11. 22. 33. 14
− 11. 12. 33. 24	− 11. 32. 23. 14
− 21. 12. 13 34	− 21. 12. 33. 14
+ 21. 12. 33. 14	+ 21. 32. 13. 14
+ 31. 12. 13. 24	+ 31. 12. 23. 14
− 31. 12. 23. 14	− 31. 22. 13. 14

$$= 0$$

Aufløſung.

9) $\overset{m}{x}=(\overset{1}{s}.f1m+\overset{2}{s}.f2m+\overset{3}{s}.f3m+\ldots+\overset{n}{s}.fnm+\ldots+\overset{r}{s}.frm):N$

Beweis.

Wegen der gegebenen Gleichungen iſt

$$\overset{1}{s}.\text{ſ}1m = 11.\text{ſ}1m.\overset{1}{x} + 12.\text{ſ}1m.\overset{2}{x} + 13.\text{ſ}1m.\overset{3}{x}$$
$$+ \ldots + 1m.\text{ſ}1m.\overset{m}{x} + \ldots + 1r.\text{ſ}1m.\overset{r}{x}$$
$$\overset{2}{s}.\text{ſ}2m = 21.\text{ſ}2m.\overset{1}{x} + 22.\text{ſ}2m.\overset{2}{x} + 23.\text{ſ}2m.\overset{3}{x}$$
$$+ \ldots + 2m.\text{ſ}2m.\overset{m}{x} + \ldots + 2r.\text{ſ}2m.\overset{r}{x}$$
$$\overset{3}{s}.\text{ſ}3m = 31.\text{ſ}3m.\overset{1}{x} + 32.\text{ſ}3m.\overset{2}{x} + 33.\text{ſ}3m.\overset{3}{x}$$
$$+ \ldots + 3m.\text{ſ}3m.\overset{m}{x} + \ldots + 3r.\text{ſ}3m.\overset{r}{x}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\overset{n}{s}.\text{ſ}nm = n1.\text{ſ}nm.\overset{1}{x} + n2.\text{ſ}nm.\overset{2}{x} + n3.\text{ſ}nm.\overset{3}{x}$$
$$+ \ldots + nm.\text{ſ}nm.\overset{m}{x} + \ldots + nr.\text{ſ}nm.\overset{r}{x}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\overset{r}{s}.\text{ſ}rm = r1.\text{ſ}rm.\overset{1}{x} + r2.\text{ſ}rm.\overset{2}{x} + r3.\text{ſ}rm.\overset{3}{x}$$
$$+ \ldots + rm.\text{ſ}rm.\overset{m}{x} + \ldots + rr.\text{ſ}rm.\overset{r}{x}$$

Die Summe der mten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens iſt wegen 6) gleich $N\overset{m}{x}$, aller übrigen, wegen 7) gleich 0; folglich

$$\overset{1}{s}.\text{ſ}1m + \overset{2}{s}.\text{ſ}2m + \overset{3}{s}.\text{ſ}3m + \ldots + \overset{n}{s}.\text{ſ}nm + \ldots + \overset{r}{s}.\text{ſ}rm = N\overset{m}{x}$$

woraus die gegebene Auflöſung folgt.

Anderer Beweis.

Man ſubſtituire die in der Auflöſung gegebenen Werthe für $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{r}{x}$, in irgend einer der gegebenen Gleichungen, z. B. in der nten, ſo erhält man:

$$\begin{aligned}
n1 \, x \, \overset{1}{N} &= n1.f11.\overset{1}{s} + n1.f21.\overset{2}{s} + n1.f31.\overset{3}{s} \\
&\quad + \ldots + n1.fn1.\overset{n}{s} + \ldots + n1.fr1.\overset{r}{s} \\
n2 \, x \, \overset{2}{N} &= n2.f12.\overset{1}{s} + n2.f22.\overset{2}{s} + n2.f32.\overset{3}{s} \\
&\quad + \ldots + n2.fn2.\overset{n}{s} + \ldots + n2.fr2.\overset{r}{s} \\
n3 \, x \, \overset{3}{N} &= n3.f13.\overset{1}{s} + n3.f23.\overset{2}{s} + n3.f33.\overset{3}{s} \\
&\quad + \ldots + n3.fn3.\overset{n}{s} + \ldots + n3\,fr3.\overset{r}{s} \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
nm \, x \, \overset{m}{N} &= nm.f1m.\overset{1}{s} + nm.f2m.\overset{2}{s} + nm.f3m.\overset{3}{s} \\
&\quad + \ldots + nm.fnm\,\overset{n}{s} + \ldots + nm.frm\,\overset{r}{s} \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
nr \, x \, \overset{r}{N} &= nr.f1r.\overset{1}{s} + nr.f2r.\overset{2}{s} + nr.f3r.\overset{3}{s} \\
&\quad + \ldots + nr.fnr.\overset{n}{s} + \ldots + nr.frr.\overset{r}{s}
\end{aligned}$$

Hier iſt die Summe der nten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens, $= \overset{n}{N}s$ nach 6), aller übrigen, nach 8) gleich 0; folglich

$n1.x\overset{1}{N} + n2.x\overset{2}{N} + n3.x\overset{3}{N} + \ldots + nr\,x\,\overset{r}{N} = \overset{n}{N}s$; woraus die nte von den gegebenen Gleichungen folgt.

Zuſätze.

10) Es ſeyen gegeben für r unbekannte Größen $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}, \ldots \overset{r}{y}$, folgende r Gleichungen.

$$\overset{1}{v}=11\overset{1}{y}+21\overset{2}{y}+31\overset{3}{y}+\ldots+n1\overset{n}{y}+\ldots+r1\overset{r}{y}$$

$$\overset{2}{v}=12\overset{1}{y}+22\overset{2}{y}+32\overset{3}{y}+\ldots+n2\overset{n}{y}+\ldots+r2\overset{r}{y}$$

$$\overset{3}{v}=13\overset{1}{y}+23\overset{2}{y}+33\overset{3}{y}+\ldots+n3\overset{n}{y}+\ldots+r3\overset{r}{y}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\overset{m}{v}=1m\overset{1}{y}+2m\overset{2}{y}+3m\overset{3}{y}+\ldots+nm\overset{n}{y}+\ldots+rm\overset{r}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{r}{v}=1r\overset{1}{y}+2r\overset{2}{y}+3r\overset{3}{y}+\ldots+nr\overset{n}{y}+\ldots+rr\overset{r}{y}$$

ſo iſt

$$\overset{n}{y}=(\overset{1}{v}.\text{ſn}1+\overset{2}{v}.\text{ſn}2+\overset{3}{v}.\text{ſn}3+\ldots+\overset{1}{\overset{m}{v}}.\text{ſn}m+\ldots+\overset{r}{v}.\text{ſn}r):N$$

Beweis.

$$\overset{1}{v}.\text{ſn}1=11.\text{ſn}1.\overset{1}{y}+21.\text{ſn}1.\overset{2}{y}+31.\text{ſn}1.\overset{3}{y}\ldots+n1.\text{ſn}1.\overset{n}{y}\ldots+r1.\text{ſn}1.\overset{r}{y}$$

$$\overset{2}{v}.\text{ſn}2=12.\text{ſn}2.\overset{1}{y}+22.\text{ſn}2.\overset{2}{y}+32.\text{ſn}2.\overset{3}{y}\ldots+n2.\text{ſn}2.\overset{n}{y}\ldots+r2.\text{ſn}2.\overset{r}{y}$$

$$\overset{3}{v}.\text{ſn}3=13.\text{ſn}3\overset{1}{y}+23.\text{ſn}3.\overset{2}{y}+33\ \text{ſn}3.\overset{3}{y}\ldots+n3.\text{ſn}3.\overset{n}{y}\ldots+r3.\text{ſn}3\overset{r}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{m}{v}.\text{ſn}m=1m.\text{ſn}m.\overset{1}{y}+2m.\text{ſn}m.\overset{2}{y}+3m.\text{ſn}m.\overset{3}{y}$$

$$\vdots \qquad \ldots+nm.\text{ſn}m.\overset{n}{y}\ldots+rm.\text{ſn}m.\overset{r}{y}$$

$$\overset{r}{v}.\text{ſn}r=1r.\text{ſn}r.\overset{1}{y}+2r.\text{ſn}r.\overset{2}{y}+3r.\text{ſn}r.\overset{3}{y}\ldots+nr.\text{ſn}r.\overset{n}{y}\ldots+rr.\text{ſn}r.\overset{r}{y}$$

Hier iſt die Summe der nten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens $= N\overset{n}{y}$ nach 6), aller übrigen $=0$, nach 8) folglich

$$\overset{1}{v}.\text{ſn}1+\overset{2}{v}.\text{ſn}2+\overset{3}{v}.\text{ſn}3\ldots+\overset{m}{v}.\text{ſn}m\ldots+\overset{r}{v}.\text{ſn}r=N\overset{n}{y}$$

woraus die gegebene Aufloͤſung folgt.

Ein anderer Beweis ließe ſich wie in 9) vermittelſt 6) und 7) geben, wenn man die in der Auflöſung für $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots \overset{r}{y}$ gegebenen Werthe, in irgend einer der gegebenen Gleichungen z. B. in der mten ſubſtituirte.

Ein dritter Beweis ließe ſich ſo führen:

Vertauſcht man die erſte und zweyte Stelle jedes Coefficienten mit einander, oder ſetzt man überall ſtatt des Coefficienten pq den Coefficient qp, ſo bleibt N ungeändert, wie leicht aus der doppelten Darſtellung von N nach 2) und 4) erhellet, und ſnm geht über in ſmn, und umgekehrt, welches daraus erhellet, wenn man ſnm nach der erſten Art von 5) und ſmn nach der zweyten Art entwickelt.

Da nun die Gleichungen in 10) aus denen zu Anfange gegebenen entſtehen, wenn man überall

ſtatt s x und allgemein pq
ſetzt v y „ „ qp

ſo entſteht durch die gedachte Subſtitution, aus der dortigen Auflöſung

$$\overset{m}{x} = (\overset{1}{s}.\,\text{ſ}1m + \overset{2}{s}.\,\text{ſ}2m + \overset{3}{s}.\,\text{ſ}3m \ldots + \overset{r}{s}.\,\text{ſ}rm) : N$$

dann für den Fall für 10) die Auflöſung

$$\overset{m}{y} = (\overset{1}{v}.\,\text{ſ}m1 + \overset{2}{v}.\,\text{ſ}m2 + \overset{3}{v}.\,\text{ſ}m3 \ldots + \overset{r}{v}.\,\text{ſ}mr) : N$$

welches die hier gegebene iſt, nur daß m und n vertauſcht ſind.

11) **Erläuterung.** Es ſeyen gegeben für 4 unbekannte Größen, die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha)\ \overset{1}{s} &= a\overset{1}{x} + b\overset{2}{x} + c\overset{3}{x} + d\overset{4}{x}\\
\overset{2}{s} &= e\overset{1}{x} + f\overset{2}{x} + g\overset{3}{x} + h\overset{4}{x}\\
\overset{3}{s} &= i\overset{1}{x} + k\overset{2}{x} + l\overset{3}{x} + m\overset{4}{x}\\
\overset{4}{s} &= n\overset{1}{x} + o\overset{2}{x} + p\overset{3}{x} + q\overset{4}{x}
\end{aligned}$$

ſo iſt

$$\begin{aligned}
\beta)\ \overset{1}{x} &= A\overset{1}{s} + B\overset{2}{s} + C\overset{3}{s} + D\overset{4}{s}\\
\overset{2}{x} &= E\overset{1}{s} + F\overset{2}{s} + G\overset{3}{s} + H\overset{4}{s}\\
\overset{3}{x} &= I\overset{1}{s} + K\overset{2}{s} + L\overset{3}{s} + M\overset{4}{s}\\
\overset{4}{x} &= N\overset{1}{s} + O\overset{2}{s} + P\overset{3}{s} + Q\overset{4}{s}
\end{aligned}$$

wo A, B, . . . Q blos durch a, b, . . . q beſtimmt ſind. Wäre nun auch

$$\begin{aligned}
\gamma)\ \overset{1}{v} &= a\overset{1}{y} + e\overset{2}{y} + i\overset{3}{y} + n\overset{4}{y}\\
\overset{2}{v} &= b\overset{1}{y} + f\overset{2}{y} + k\overset{3}{y} + o\overset{4}{y}\\
\overset{3}{v} &= c\overset{1}{y} + g\overset{2}{y} + l\overset{3}{y} + p\overset{4}{y}\\
\overset{4}{v} &= d\overset{1}{y} + h\overset{2}{y} + m\overset{3}{y} + q\overset{4}{y}
\end{aligned}$$

ſo iſt auch

δ) $\overset{1}{y} = A\overset{1}{v} + E\overset{2}{v} + I\overset{3}{v} + N\overset{4}{v}$

$\overset{2}{y} = B\overset{1}{v} + F\overset{2}{v} + K\overset{3}{v} + O\overset{4}{v}$

$\overset{3}{y} = C\overset{1}{v} + G\overset{2}{v} + L\overset{3}{v} + P\overset{4}{v}$

$\overset{4}{y} = D\overset{1}{v} + H\overset{2}{v} + M\overset{3}{v} + Q\overset{4}{v}$

wenn alſo bey den gegebenen Gleichungen, Horizontalreihen der Coefficienten in Verticalreihen, und umgekehrt, übergeben, ſo findet das auch bey den Auflöſungsgleichungen ſtatt.

Beyſpiel. Es ſey gegeben

$$\overset{1}{s} = \overset{1}{x} + 2\overset{2}{x} + 5\overset{3}{x} + 11\overset{4}{x} + 7\overset{5}{x}$$

$$\overset{2}{s} = 19\overset{1}{x} + 15\overset{2}{x} + 27\overset{3}{x} - 18\overset{4}{x} - 13\overset{5}{x}$$

$$\overset{3}{s} = -4\overset{1}{x} + 6\overset{2}{x} - 10\overset{3}{x} + 24\overset{4}{x} + 9\overset{5}{x}$$

$$\overset{4}{s} = 8\overset{1}{x} - 17\overset{2}{x} - 3\overset{3}{x} + 20\overset{4}{x} + 12\overset{5}{x}$$

$$\overset{5}{s} = -13\overset{1}{x} + 16\overset{2}{x} - 21\overset{3}{x} + 14\overset{4}{x} + 26\overset{5}{x}$$

ſo findet ſich durch angeſtellte Berechnung

$$2578855\overset{1}{x} = -283650\overset{1}{s} + 133135\overset{2}{s} + 74805\overset{3}{s} + 153835\overset{4}{s} + 46040\overset{5}{s}$$

$$2578855\overset{2}{x} = -46568\overset{1}{s} + 60897\overset{2}{s} + 82487\overset{3}{s} - 42350\overset{4}{s} + 33979\overset{5}{s}$$

$$2578855\overset{3}{x} = +315468\overset{1}{s} - 36187\overset{2}{s} - 93397\overset{3}{s} - 65755\overset{4}{s} - 40349\overset{5}{s}$$

$$2578855\overset{4}{x} = +53503\overset{1}{s} - 10102\overset{2}{s} + 117383\overset{3}{s} - 12370\overset{4}{s} - 54379\overset{5}{s}$$

$$2578855\overset{5}{x} = +112824\overset{1}{s} + 5304\overset{2}{s} - 152001\overset{3}{s} + 56530\overset{4}{s} + 97988\overset{5}{s}$$

Wäre aber gegeben

$$\overset{1}{v} = \overset{1}{y} + 19\overset{2}{y} - 4\overset{3}{y} + 8\overset{4}{y} - 13\overset{5}{y}$$

$$\overset{2}{v} = 2\overset{1}{y} + 15\overset{2}{y} + 6\overset{3}{y} - 17\overset{4}{y} + 16\overset{5}{y}$$

$$\overset{3}{v} = 5\overset{1}{y} + 27\overset{2}{y} - 10\overset{3}{y} - 3\overset{4}{y} - 21\overset{5}{y}$$

$$\overset{4}{v} = 11\overset{1}{y} - 18\overset{2}{y} + 24\overset{3}{y} + 20\overset{4}{y} + 14\overset{5}{y}$$

$$\overset{5}{v} = 7\overset{1}{y} - 13\overset{2}{y} + 9\overset{3}{y} + 12\overset{4}{y} + 26\overset{5}{y}$$

folgte auch, ohne eine neue Rechnung vorzunehmen

$$2578855\overset{1}{y} = -283650\overset{1}{v} - 46568\overset{2}{v}$$
$$+315468\overset{3}{v} + 535035\overset{4}{v} + 112824\overset{5}{v}$$

$$2578855\overset{2}{y} = +133135\overset{1}{v} + 60897\overset{2}{v}$$
$$-36187\overset{3}{v} - 10102\overset{4}{v} + 5304\overset{5}{v}$$

$$2578855\overset{3}{y} = +74805\overset{1}{v} + 82487\overset{2}{v}$$
$$-93397\overset{3}{v} + 117383\overset{4}{v} - 152001\overset{5}{v}$$

$$2578855\overset{4}{y} = +153835\overset{1}{v} - 42350\overset{2}{v}$$
$$-65755\overset{3}{v} - 12370\overset{4}{v} + 56530\overset{5}{v}$$

$$2578855\overset{5}{y} = +46040\overset{1}{v} + 33979\overset{2}{v}$$
$$-40349\overset{3}{v} - 54379\overset{4}{v} + 97988\overset{5}{v}$$

12) Iſt endlich für jedes p und q, $pq = qp$, oder iſt bey den gegebenen Gleichungen, für jedes m die $m$te Horizontalreihe der Coefficienten, mit der $m$ten Verticalreihe derſelben einerley; die Horizontalreihen nehmlich von oben herab, und die Verticalreihen, von der Linken nach der Rechten zu gerechnet, ſo iſt auch allgemein $\mathfrak{s}pq = \mathfrak{s}qp$, oder die $m$te Horizontalreihe der Coefficienten, mit der $m$ten Verticalreihe derſelben, auch bey den Auflöſungsgleichungen einerley. Es ſey z. B. für ſechs unbekannte Größen:

$$\overset{1}{s} = a\overset{1}{x} + b\overset{2}{x} + c\overset{3}{x} + d\overset{4}{x} + e\overset{5}{x} + f\overset{6}{x}$$
$$\overset{2}{s} = b\overset{1}{x} + g\overset{2}{x} + h\overset{3}{x} + i\overset{4}{x} + k\overset{5}{x} + l\overset{6}{x}$$
$$\overset{3}{s} = c\overset{1}{x} + h\overset{2}{x} + m\overset{3}{x} + n\overset{4}{x} + o\overset{5}{x} + p\overset{6}{x}$$
$$\overset{4}{s} = d\overset{1}{x} + i\overset{2}{x} + n\overset{3}{x} + q\overset{4}{x} + r\overset{5}{x} + t\overset{6}{x}$$
$$\overset{5}{s} = e\overset{1}{x} + k\overset{2}{x} + o\overset{3}{x} + r\overset{4}{x} + u\overset{5}{x} + v\overset{6}{x}$$
$$\overset{6}{s} = f\overset{1}{x} + l\overset{2}{x} + p\overset{3}{x} + t\overset{4}{x} + v\overset{5}{x} + w\overset{6}{x}$$

ſo iſt auch

$$\overset{1}{x} = A\overset{1}{s} + B\overset{2}{s} + C\overset{3}{s} + D\overset{4}{s} + E\overset{5}{s} + F\overset{6}{s}$$
$$\overset{2}{x} = B\overset{1}{s} + G\overset{2}{s} + H\overset{3}{s} + I\overset{4}{s} + K\overset{5}{s} + L\overset{6}{s}$$
$$\overset{3}{x} = C\overset{1}{s} + H\overset{2}{s} + M\overset{3}{s} + N\overset{4}{s} + O\overset{5}{s} + P\overset{6}{s}$$
$$\overset{4}{x} = D\overset{1}{s} + I\overset{2}{s} + N\overset{3}{s} + Q\overset{4}{s} + R\overset{5}{s} + T\overset{6}{s}$$
$$\overset{5}{x} = E\overset{1}{s} + K\overset{2}{s} + O\overset{3}{s} + R\overset{4}{s} + U\overset{5}{s} + V\overset{6}{s}$$
$$\overset{6}{x} = F\overset{1}{s} + L\overset{2}{s} + P\overset{3}{s} + T\overset{4}{s} + V\overset{5}{s} + W\overset{6}{s}$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, E . . . W blos durch a, b, c . . . w beſtimmt werden. Eine Anwendung dieſes Satzes findet ſich in meiner anderwärts aufgeführt befindlichen Abhandlung über die Summen der Combinationen der Wurzeln in höhern Gleichungen.

13) Für diejenigen, denen der Gebrauch der Permutationen noch nicht geläufig iſt, läßt ſich die in 11) gegebene Erläuterung, unabhängig von den Permutationen, ſo erweiſen.

Subſtituirt man die Gleichungen β) in denen von α) ſo ergeben ſich folgende Gleichungen zur Beſtimmung der unbekannten Coefficienten A, B, C . . . , Q:

$$\gamma)\quad \begin{array}{ll} aA+bE+cI+dN=1 & aB+bF+cK+dO=0 \\ eA+fE+gI+hN=0 & eB+fF+gK+hO=1 \\ iA+kE+lI+mN=0 & iB+kF+lK+mO=0 \\ nA+oE+pI+qN=0 & nB+oF+pK+qO=0 \\ & \\ aC+bG+cL+dP=0 & aD+bH+cM+dQ=0 \\ eC+fG+gL+hP=0 & eD+fH+gM+hQ=0 \\ iC+kG+lL+mP=1 & iD+kH+lM+mQ=0 \\ nC+oG+pL+qP=0 & nD+oH+pM+qQ=1 \end{array}$$

Subſtituirt man hingegen die Gleichungen in α) in denen in β) ſo ergeben ſich folgende Gleichungen, zur Beſtimmung der unbekannten Coefficienten A, B . . . Q.

$$\delta)\quad \begin{array}{ll} aA+eB+iC+nD=1 & aE+eF+iG+nH=0 \\ bA+fB+kC+oD=0 & bE+fF+kG+oH=1 \\ cA+gB+lC+pD=0 & cE+gF+lG+pH=0 \\ dA+hB+mC+qD=0 & dE+hF+mG+qH=0 \\ & \\ aI+eK+iL+nM=0 & aN+eO+iP+nQ=0 \\ bI+fK+kL+oM=0 & bN+fO+kP+oQ=0 \\ cI+gK+lL+pM=1 & cN+gO+lP+pQ=0 \\ dI+hK+mL+qM=0 & dN+hO+mP+qQ=1 \end{array}$$

Sind nun die Gleichungen in γ) gegeben, ſo läßt ſich die Richtigkeit der Gleichungen in δ) leicht ſo erweiſen: Man multiplicire, die vier Gleichungen in γ, nach der Reihe mit, A, E, I, N, ſo iſt

$$A\overset{1}{v} = aA\overset{1}{y} + eA\overset{2}{y} + iA\overset{3}{y} + nA\overset{4}{y}$$

$$E\overset{2}{v} = bE\overset{1}{y} + fE\overset{2}{y} + kE\overset{3}{y} + oE\overset{4}{y}$$

$$I\overset{3}{v} = cI\overset{1}{y} + gI\overset{2}{y} + lI\overset{3}{y} + pI\overset{4}{y}$$

$$N\overset{4}{v} = dN\overset{1}{y} + hN\overset{2}{y} + mN\overset{3}{y} + qN\overset{4}{y}$$

Addirt man dieſe vier Gleichungen zuſammen, ſo iſt, wie aus den Gleichungen in ε) erhellet, die erſte Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens = $\overset{1}{y}$; alle übrigen = 0, folglich

$A\overset{1}{v} + E\overset{2}{v} + I\overset{3}{v} + N\overset{4}{v} = \overset{1}{y}$, und dies iſt die erſte Gleichung in δ). Eben ſo laſſen ſich die übrigen Gleichungen in δ) erweiſen.

Oder, man ſubſtituire die Gleichungen in δ), in jeder der Gleichungen in γ), z. B. in der erſten, ſo erhält man

$$\begin{aligned}\overset{1}{v} = {} & aA\overset{1}{v} + aE\overset{2}{v} + aI\overset{3}{v} + aN\overset{4}{v} \\ & + eB\overset{1}{v} + eF\overset{2}{v} + eK\overset{3}{v} + eO\overset{4}{v} \\ & + iC\overset{1}{v} + iG\overset{2}{v} + iL\overset{3}{v} + iP\overset{4}{v} \\ & + nD\overset{1}{v} + nH\overset{2}{v} + nM\overset{3}{v} + nQ\overset{4}{v}\end{aligned}$$

Hier iſt, wie aus den Gleichungen in ζ erhellet, die Summe der erſten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens = $\overset{1}{v}$, aller übrigen = 0, folglich iſt die Gleichung richtig. Eben ſo kann man die Gleichungen in δ) in der zweyten, dritten und vierten Gleichung von γ) ſubſtituiren, und es trifft allemal ein.

Was von vier unbekannten Größen gilt, läßt ſich eben ſo, von mehrern erweiſen, alſo überſieht man, auch ohne Permutationen zu Hülfe zu nehmen, daß, wenn bey den gegebenen Gleichungen, Horizontalreihen der Coefficienten in Verticalreihen, und umgekehrt, übergehen, ſo muß dies auch bey den Auflöſungsgleichungen ſtatt finden, und hiervon iſt wiederum der Satz in 12) eine unmittelbare Folge.

Anmerkung. Daß die Auflöſung dieſes Problems von Permutationen abhange, haben ſchon bemerkt: Bezout (Théorie générale des Equations algébriques) und Cramer (Introduction à l'Analyſe des lignes courbes, Num. I et II de l'Evanouiſſement des Inconnues). Ueber dieſe beyden Verfahrungsarten ſehe man vorzüglich Herrn Prof. Hindenburgs Vorrede zu Rüdigeri Specimen analyticum de lineis curvis ſecundi ordinis. In dieſer Vorrede findet man die Auflöſungsformeln für das Eliminationsproblem verſchiedentlich combinatoriſch geordnet und deutlich dargeſtellt. *) Die Richtigkeit der daſelbſt von Hindenburg gegebenen Regel zu Beſtimmung der Zeichen (Praef. p. XLIII.) erhellet hier aus 8, 1 Zuſ. Die Richtigkeit der von Cramern gegebenen Regel (Ebendaſ. p. XXXIX, XL) folgt aus 10; denn für jedes dérangement, wie es Cramer nennt, kommt hier im Quadrat ein Kreuzchen zu ſtehen.

---

*) Meine Auflöſung des Eliminationsproblems a. a. O. iſt, ſowohl in Anſehung der combinatoriſchen Anordnung und Folge der Permutationen, als auch in Beziehung auf die denſelben vorzuſetzenden, nach einem beſtimmten Anfange in beſtimmter Abwechſelung auf einander folgenden Zeichen, + + und — —, oder umgekehrt, ſo leicht, daß die ganze Darſtellung des Werthes jeder beliebigen unbekannten Größe nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, die Buchſtaben und Zeichen zu ſchreiben. Herr Prof. Rothe hat hier alles aus bloß combinatoriſchen Begriffen abgeleitet und gerechtfertigt, auch das Eliminationsproblem noch auf andere verwandte Sätze erſtreckt. Hindenburg.

XI.

Relationen der Lokalausdrücke von Potenzen beſonderer merkwürdiger Reihen; von H. A. Rothe, Prof. zu Leipzig.

1.

So wichtig und nützlich auch ſolche Formeln ſeyn mögen, worinnen Relationen von Lokalausdrücken **allgemeiner Reihen**, oder ſolcher, bey denen die **Scalen** allgemein angenommen werden, enthalten ſind (dergleichen z. B. in meiner Abhandlung: Formulae de Serierum Reverſione demonſtratio univerſalis, und in Herrn Prof. **Pfaffs** Aufſätzen im erſten Bande des Archivs der reinen und angewandten Mathematik, ingleichen in der erſten und zweyten Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen ſich finden), ſo giebt es doch außer dieſen allgemeinen Formeln, für **beſondere Reihen** oder Scalen noch beſondere, welche vorzüglich dann, wenn es zu der numeriſchen Berechnung ſolcher Lokalausdrücke kommt, vorzüglich brauchbar und nützlich ſind.

2. In dem dritten Paragraph meiner nur erwähnten Abhandlung, iſt die, für die **allgemeine** Scale

$$\mathrm{p}\,[\,a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \ldots\,]$$

geltende Lokalformel

$$s\,a\,\mathrm{p}^{m}x\,(\mathrm{n}+1) + (\mathrm{s}+\mathrm{d})\,b\,\mathrm{p}^{m}x\mathrm{n} + (\mathrm{s}+2\mathrm{d})\;c\,\mathrm{p}^{m}x\,(\mathrm{n}-1)$$

$$\ldots + (s+rd)\overset{r}{a}\,p^m\varkappa\,(n-r+1)\ldots + (s+nd)\overset{n}{a}\,p^m\varkappa 1$$

$$= \frac{s(m+1)+nd}{m+1}\,p^{m+1}\varkappa(n+1)$$ bewieſen worden.

Man ſetze in dieſer Formel

ſtatt

b q x d e I

nun

$$\frac{af}{g},\ \frac{af(f+c)}{g(g+e)},\ \frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)(g+2e)},\ \frac{af(f+c)(f2+c)(f+3c)}{g(g+e)(g+2e)(g+3e)}\ldots$$

und ſtatt s, d, n, einmal $g-e$, e, l; das anderemal f, c, $l-1$, und man bekommt die beyden Formeln

$$a(g-e)p^m\varkappa(l+1)+afp^m\varkappa l+\frac{af(f+c)}{g}p^m\varkappa(l-1)$$

$$+\frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)}p^m\varkappa(l-2)\ldots+\frac{af(f+c)(f+2c)\ldots(f+(l-1)c)}{g(g+e)(g+2e)\ldots(g+(l-2)c)}p^m\varkappa 1$$

$$=\frac{(g-e)(m+1)+le}{m+1}p^{m+1}\varkappa(l+1)$$

und

$$afp^m\varkappa l+\frac{af(f+c)}{g}p^m\varkappa(l-1)+\frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)}p^m\varkappa(l-2)$$

$$\ldots+\frac{af(f+c)(f+2c)\ldots(f+(l-1)c)}{g(g+e)(g+2c)\ldots(g+(l-2)c)}p^m\varkappa 1$$

$$=\frac{f(m+1)+(l-1)c}{m+1}p^{m+1}\varkappa l$$

Man ziehe die letzte Formel von der erſten ab, und man erhält

$$a(g-e)p^{m}\varkappa(l+1) = \frac{(g-e)(m+1)+le}{m+1}\,p^{m+1}\varkappa(l+1)$$

$$-\frac{f(m+1)+(l-1)c}{m+1}\,p^{m+1}\varkappa l$$

oder, wenn man ſtatt l durchgängig n ſchreibt,

I. $(m+1)a(g-e)p^{m}\varkappa(n+1)+[f(m+1)+(n-1)c]\,p^{m+1}\varkappa n$

$$= [(g-e)(m+1)+ne]\,p^{m+1}\varkappa(n+1)$$

und $a(g-e)p^{-1}\varkappa(n+1)+(n-1)c\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa n = ne\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa(n+1)$ [a]

für die Scale

$$p\left[a, \frac{af}{g}, \frac{af(f+c)}{g(g+e)}, \frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)(g+2e)}, \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{g(g+e)(g+2e)(g+3e)}, \ldots\right]$$

3. Man ſetze in den Formeln I) $g = e$, und man hat

A) $[f(m+1)+(n-1)c]\,p^{m+1}\varkappa n = ne\,p^{m+1}\varkappa(n+1)$ und

$(n-1)c\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa n = ne\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa(n+1)$ für die Scale

$$p\left[a, \frac{af}{e}, \frac{af(f+c)}{e.\,2e}, \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\,2e.\,3e}, \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{e.\,2e.\,3e.\,4e}, \ldots\right]$$

und hieraus folgt, für eben dieſe Scale,

---

[a] Denn der Werth von $\frac{p^{m}\varkappa(n+1)}{m}$, wo n eine ganze poſitive Zahl bedeutet, verwandelt ſich für $m = 0$, in $\mathrm{Log}\,p.\varkappa(n+1)$. Da ſowohl in meiner Abhandlung (Formulae de ſerierum reverſione demonſtratio univerſalis) Seite 36 unten, als auch in gegenwärtigem Aufſatze, logarithmiſche Lokalausdrücke vorkommen, ſo iſt zu Ende dieſes Aufſatzes eine Erläuterung derſelben beygefügt worden, welche, im Falle man hier anſtieße, vorher nachgeleſen werden kann.

$$p^m\varkappa 1 = a^m;\ p^m\varkappa 2 = \frac{mf}{e}a^m;\ p^m\varkappa 3 = \frac{mf(mf+c)}{e.\ 2e}a^m;$$ u. allgemein

$$p^m\varkappa(n+1) = \frac{mf(mf+c)(mf+2c)(mf+3c)\ldots(mf+(n-1)c)}{e.\ 2e.\ 3e.\ 4e.\ \ldots\ ne}a^m;$$

und

$$L.p.\varkappa 2 = \frac{f}{e};\ L.p.\varkappa 3 = \frac{cf}{2e^2};\ \mathrm{Log}\,p.\varkappa 4 = \frac{c^2f}{3e^3};\ \mathrm{Log}\,p.\varkappa 5 = \frac{e^3f}{4e^4};$$

allgemein, $\mathrm{Log}\,p.\varkappa\,(n+1) = \frac{c^{n-1}f}{ne^n}$

Es iſt demnach

$$\left(ax^\alpha + \frac{af}{e}x^{\alpha+\beta} + \frac{af(f+c)}{e.\ 2e}x^{\alpha+2\beta} + \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\ 2e.\ 3e}x^{\alpha+3\beta} + \ldots\right)^m$$

$$= a^m x^{m\alpha} + \frac{mf}{e}a^m x^{m\alpha+\beta} + \frac{mf(mf+c)}{e.\ 2e}a^m x^{m\alpha+2\beta} + \ldots$$

und

$$\mathrm{Log}\left(ax^\alpha + \frac{af}{e}x^{\alpha+\beta} + \frac{af(f+c)}{e.\ 2e}x^{\alpha+2\beta} + \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\ 2e.\ 3e}x^{\alpha+3\beta}\ldots\right)$$

$$= \mathrm{Log}\,(ax^\alpha) + \frac{f}{e}x^\beta + \frac{cf}{2e^2}x^{2\beta} + \frac{c^2f}{3e^3}x^{3\beta} + \frac{c^3f}{4e^4}x^{4\beta} + \ldots$$

Hieraus ergeben ſich folgende beſondere Fälle:

1) Für $a = y^h$, $c = -d$, $e = \beta = 1$, $f = h$, $x = \frac{z}{y}$, $\alpha = 0$

$$\left(y^h + \frac{h}{1}y^{h-1}z + \frac{h(h-d)}{1.\ 2}y^{h-2}z^2 + \frac{h(h-d)(h-2d)}{1.\ 2.\ 3}y^{h-3}z^3 + \ldots\right)^m$$

$$= y^{mh} + \frac{mh}{1} y^{mh-1}z + \frac{mh(mh-d)}{1.\ 2} y^{mh-2}z^2$$

$$+ \frac{mh(mh-d)(mh-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{mh-3}z^3 \ldots$$

und

$$\mathrm{Log}\left(y^h + \frac{h}{1} y^{h-1}z + \frac{h(h-d)}{1.\ 2} y^{h-2}z^2 + \frac{h(h-d)(h-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{h-3}z^3 + \ldots\right)$$

$$= \mathrm{Log}(y^h) + \frac{hz}{y} - \frac{dhz^2}{2y^2} + \frac{d^2hz^3}{3y^3} - \frac{d^3hz^4}{4y^4} + \ldots \quad {}^{b)}$$

2) Für $f = 1,\ c = -1$

$$(ax^\alpha + \frac{a}{e} x^{\alpha+\beta})^m = a^m x^{m\alpha} + \frac{m}{e} a^m x^{m\alpha+\beta}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{e.\ 2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m(m-1)(m-2)}{e\ 2e.\ 3e} a^m x^{m\alpha+3\beta}$$

$$+ \ldots = a^m x^{m\alpha} + \frac{m}{1} \cdot \frac{a^m}{e} x^{m\alpha+\beta} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \frac{a^m}{e^2} x^{m\alpha+2\beta}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{a^m}{e^3} x^{m\alpha+3\beta} + \ldots$$ und

$$\mathrm{Log}(ax^\alpha + \frac{a}{e} x^{\alpha+\beta}) = \mathrm{Log}(ax^\alpha) + \frac{x^\beta}{e} - \frac{x^{2\beta}}{2e^2} + \frac{x^{3\beta}}{3e^3} - \frac{x^{4\beta}}{4e^4} \ldots$$

oder das Binomialtheorem

---

b) Siehe mein Programm (Theorema binomiale ex ſimpliciſſimis Analyſeos finitorum fontibus vniuerſaliter demonſtratum) §. VIII Formel 8) Seite 14.

3) Für $c = 0$

$$(ax^{\alpha} + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af^2}{e.2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af^3}{e.2e.3e} x^{\alpha+3\beta}$$

$$+ \frac{af^4}{e.2e.3e.4e} x^{\alpha+4\beta} \ldots)^m = a^m x^{m\alpha} + \frac{mf}{e} a^m x^{m\alpha+\beta}$$

$$+ \frac{m^2f^2}{e.2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m^3f^3}{e.2e.3e} a^m x^{m\alpha+3\beta} + \ldots$$

und

$$\text{Log}\,(ax^{\alpha} + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af^2}{e.2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af^3}{e.2e.3e} x^{\alpha+3\beta}$$

$$+ \frac{af^4}{e.2e.3e.4e} x^{\alpha+4\beta} \ldots) = \text{Log}\,(ax^{\alpha}) + \frac{f}{e} x^{\beta}$$ oder

die Exponentialreihen.

4. Man ſetze in den Formeln I) $a = f = 1$, $e = e = 2$, $g = 3$ und man hat

$$\text{B)}\ (m+1)p^m x(n+1) + (m+2n-1)p^{m+1} 1xn = (m+2n+1)p^{m+1} x(n+1)$$

$$\text{und } p^{-1} x(n+1) + 2(n-1)\,\text{Log}\,p.\,xn = 2n\,\text{Log}\,p.\,x(n+1)$$

für die Scale

$$p.[1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{9} \ldots\ldots]$$

Dieſe Formel dient zur leichten Berechnung der Coefficienten die herauskommen, wenn man die logarithmiſche Reihe

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

und die, zur Rectification des Kreiſes gehörige,

$$\text{Arc. tang}\, x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 \ldots$$

zu Potenzen erhebt. Denn man ſetze in der erſten Formel von B) m = 1 und man hat

$2p^1\varkappa(n+1) + 2np^2\varkappa n = (2n+2)p^2\varkappa(n+1)$, oder $p^1\varkappa(n+1) + np^2\varkappa n = (n+1)p^2\varkappa(n+1)$; alſo, wenn man ſtatt n, der Reihe nach 1, 2, 3, 4 ... ſetzt

$$2\,p^2\varkappa 2 = p^2\varkappa 1 + p^1\varkappa 2 = 1 + \tfrac{1}{3}$$
$$3\,p^2\varkappa 3 = 2p^2\varkappa 2 + p^1\varkappa 3 = 2p^2\varkappa 2 + \tfrac{1}{5}$$
$$4\,p^2\varkappa 4 = 3p^2\varkappa 3 + p^1\varkappa 4 = 3p^2\varkappa 3 + \tfrac{1}{7}$$
$$5\,p^2\varkappa 5 = 4p^2\varkappa 4 + p^1\varkappa 5 = 4p^2\varkappa 4 + \tfrac{1}{9} \text{ u. ſ. w.}$$

Man findet alſo

$$2\,p^2\varkappa 2 = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}$$
$$3\,p^2\varkappa 3 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{23}{15}$$
$$4\,p^2\varkappa 4 = \frac{23}{15} + \tfrac{1}{7} = \frac{176}{3\cdot5\cdot7}$$
$$5\,p^2\varkappa 5 = \frac{176}{3\cdot5\cdot7} + \tfrac{1}{9} = \frac{563}{3^2\cdot5\cdot7}$$
$$6\,p^2\varkappa 6 = \frac{563}{3^2\cdot5\cdot7} + \tfrac{1}{11} = \frac{6508}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11}$$
$$7\,p^2\varkappa 7 = \frac{6508}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11} + \tfrac{1}{13} = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$
$$8\,p^2\varkappa 8 = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} + \tfrac{1}{15} = \frac{91072}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$
$$9\,p^2\varkappa 9 = \frac{91072}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} + \tfrac{1}{17} = \frac{1593269}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}$$
$$10\,p^2\varkappa 10 = \frac{1593269}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17} + \tfrac{1}{19} = \frac{31037876}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}$$

$$11\,p^2\varkappa\,11 = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19} + \frac{1}{21} = \frac{31730711}{3^2.5.7.11.13.17.19}$$

$$12\,p^2\varkappa\,12 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11.13.17.19} + \frac{1}{23} = \frac{744355888}{3^2.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$13\,p^2\varkappa\,13 = \frac{744355888}{3^2.5.7.11.13.17.19.23} + \frac{1}{25} = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13.17.19.23}$$

$$14\,p^2\varkappa\,14 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13.17.19.23} + \frac{1}{27} = \frac{115520032628}{3^3.5^2.7.11.13.17.19.23}$$

alſo

$$p^2\varkappa\;1 = 1$$

$$p^2\varkappa\;2 = \tfrac{4}{3} : 2 = \tfrac{2}{3}$$

$$p^2\varkappa\;3 = \frac{23}{3.5} : 3 = \frac{23}{3^2.5}$$

$$p^2\varkappa\;4 = \frac{176}{3.5.7} : 4 = \frac{44}{3.5.7}$$

$$p^2\varkappa\;5 = \frac{563}{3^2.5.7} : 5 = \frac{563}{3^2.5^2.7}$$

$$p^2\varkappa\;6 = \frac{6508}{3^2.5.7.11} : 6 = \frac{3254}{3^3.5.7.11}$$

$$p^2\varkappa\;7 = \frac{88069}{3^2.5.7.11.13} : 7 = \frac{88069}{3^2.5.7^2.11.13}$$

$$p^2\varkappa\;8 = \frac{91072}{3^2.5.7.11.13} : 8 = \frac{11384}{3^2.5.7.11.13}$$

$$p^2\varkappa\;9 = \frac{1593269}{3^2.5.7.11.13.17} : 9 = \frac{1593269}{3^4.5.7.11.13.17}$$

$$p^2\varkappa 10 = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 10 = \frac{15518938}{3^2.5^2.7.11.13.17.19}$$

$$p^2\varkappa 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11^2.13.17.19}$$

$$p^2\varkappa 12 = \frac{744355888}{3^2.5.7.11.13.17.19.23} : 12 = \frac{186088972}{3^3.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$p^2\varkappa 13 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13.17.19.23} : 13 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13^2.17.19.23}$$

$$pa\varkappa 14 = \frac{11552032628}{3^3.5^2.7.11.13\ 17.19.23} : 14 = \frac{5776016314}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19.23}$$

Hieraus erhellet auch, daß
$p^2\varkappa 1 = \frac{1}{1} : 1$; $p^2\varkappa 2 = (\frac{1}{1} + \frac{1}{3}) : 2$; $p^2\varkappa 3 = (\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) : 3$ u. ſ. w.

Man ſetze nun in der erſten Formel von B) $m = 2$, und man hat
$3p^2\varkappa(n+1) + (2n+1)p^3\varkappa n = (2n+3)p^3\varkappa(n+1)$ oder

$$p^2\varkappa(n+1)\ \frac{2n+1}{3}.\ p^3\varkappa n = \frac{2n+3}{3}.\ p^3\varkappa(n+1)$$

alſo, wenn man ſtatt n nach und nach 1, 2, 3, 4 … ſetzt

$\frac{5}{3}\ p^3\varkappa 2 = \frac{3}{3}\ p^3\varkappa 1 + p^2\varkappa 2 = 1 + p^2\varkappa 2$

$\frac{7}{3}\ p^3\varkappa 3 = \frac{5}{3}\ p^3\varkappa 2 + p^2\varkappa 3$

$\frac{9}{3}\ p^3\varkappa 4 = \frac{7}{3}\ p^3\varkappa 3 + p^2\varkappa 4$

$\frac{11}{3}\ p^3\varkappa 5 = \frac{9}{3}\ p^3\varkappa 4 + p^2\varkappa 5$ u. ſ. w.

Man findet alſo

$$p^3\varkappa 2 = 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3}$$

$$p^3\varkappa 3 = \tfrac{5}{3} + \frac{23}{3^2.5} = \frac{98}{3^2.5}$$

$$p^3\varkappa 4 = \frac{98}{3^2.5} + \frac{44}{3.5.7} = \frac{818}{3^2.5.7}$$

$$\frac{11}{3}\, p^3\varkappa 5 = \frac{818}{3^2.5.7} + \frac{563}{3^2.5^2.7} = \frac{4653}{3^2.5^2.7}$$

$$\frac{13}{3}\, p^3\varkappa 6 = \frac{4653}{3^2.5^2.7} + \frac{3254}{3^3.5.7.11} = \frac{169819}{3^3.5^2.7.11}$$

$$\frac{15}{3}\, p^3\varkappa 7 = \frac{169819}{3^3.5^2.7.11} + \frac{88069}{3^2.5.7^2.11.13} = \frac{16774564}{3^3.5^2.7^2.11.13}$$

$$\frac{17}{3}\, p^3\varkappa 8 = \frac{16774564}{3^3.5^2.7^2.11.13} + \frac{11384}{3^2.5.7.11.13} = \frac{17969884}{3^3.5^2.7^2.11.13}$$

$$\frac{19}{3}\, p^3\varkappa 9 = \frac{17969884}{3^3.5^2.7^2.11.13} + \frac{1593269}{3^4.5.7.11.13.17} = \frac{972228499}{3^4.5^2.7^2.11.13.17}$$

$$\frac{21}{3}\, p^3\varkappa 10 = \frac{972228499}{3^4.5^2.7^2.11.13.17} + \frac{15518938}{3^2.5^2.7.11.13\ 17.19}$$

$$= \frac{19450034575}{3^4.5^2.7^2.11.13.17.19}$$

$$\frac{23}{3}\, p^3\varkappa 11 = \frac{19450034575}{3^4.5^2.7^2.11.13.17.19} + \frac{31730711.}{3^2.5.7.11^2.13.17.19}$$

$$= \frac{223945554290.}{3^4.5^2.7^2.11^2.13.17.19}$$

$${}^{\bullet 5}_{\;3}\,p^3x\,12 = \frac{223945554290}{3^4.5^2.7^2.11^2.13\,17.19} + \frac{186088972}{3^3.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$= \frac{536568051133 0}{3^4.5^2.7^2.11^2.13.17.19.23}$$

$${}^{\bullet 7}_{\;3}\,p^3x13 = \frac{5365680511330}{3^4.5^2.7^2.11^2.13.17.19.23} + \frac{378870 7301}{3^2.5^2.7.11.13^2.17.19.23}$$

$$= \frac{72379420806883}{3^4.5^2.7^2.11^2.13^2.17.19.23}$$

alſo

$$p^3x\ 1 = 1$$

$$p^3x\ 2 = 1$$

$$p^3x\ 3 = \frac{14}{3.5}$$

$$p^3x\ 4 = \frac{818}{3^3.5.7}$$

$$p^3x\ 5 = \frac{141}{5^2.7}$$

$$p^3x\ 6 = \frac{13063}{3^2.5^2.7.11}$$

$$p^3x\ 7 = \frac{16774564}{3^3.5^3.7^2.11.13}$$

$$p^3x\ 8 = \frac{1057052}{3^2.5^2.7^2.11.13}$$

$$p^3x\ 9 = \frac{4651811}{3^3.5^2.7^2.13.17}$$

$$p^3\varkappa\,10 = \frac{778001383}{3^4.7^3.11.13.17.19}$$

$$p^3\varkappa\,11 = \frac{1947352646}{3^3.5.7^2.11^2.13.17.19}$$

$$p^3\varkappa\,12 = \frac{1073136102266}{3^3.5^3.7^2.11^2.13.17.19.23}$$

$$p^3\varkappa\,13 = \frac{72379420806883}{3^6.5^2.7^2.11^2.13^2.17.19.23}$$

Auf dieſe Art kann man alle Coefficienten ganzer poſitiven Potenzen von der gedachten Reihe ohne Schwierigkeit berechnen. Zur Probe, daß man ſich nicht verrechnet hat, kann die Bemerkung, deren Richtigkeit leicht in die Augen fällt, dienen, daß in dem Werthe des (n+1)ten Coefficienten jeder ganzen poſitiven oder negativen Potenz der Nenner keine Primzahl als Factor enthalten kann, welche 2, oder höher als 2n+1 iſt. So fand ſich z. B. bey der Berechnung der Coefficienten der 3ten Potenz, daß

$$\frac{19}{3}\,p^3\varkappa\,9 = \frac{972228499}{3^4.5^2.7^2.11.13.17}.$$ Hieraus folgt, daß

$$p^3\varkappa\,9 = \frac{972228499}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19}.$$ Da aber, nach der gedachten Regel im Nenner keine Primzahl höher als 17 vorkommen kann, ſo muß der Zähler des gedachten Bruches, oder die Zahl 972228499, ſich durch 19 ohne Reſt dividiren und dadurch die 19 aus dem Nenner wegſchaffen laſſen.

5. Um die Coefficienten ganzer negativer Potenzen zu berechnen, ſtelle man folgende Betrachtung an:

alſo

$p^{-5}\varkappa 1 = p^{-4}\varkappa 1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-5}\varkappa 2 = \frac{2}{4} p^{-4}\varkappa 2 - \frac{4}{4} p^{-4}\varkappa 1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$ für $n = 1$

$p^{-5}\varkappa 3 = -\frac{2}{4} p^{-4}\varkappa 2 = \frac{2}{3}$ für $n = 2$, und wenn man in der Formel (☿) $n = 3$ ſetzt

$$p^{-5}\varkappa\, 4 = -\frac{p^{-5}\varkappa 3}{2^6 - 1} = -\frac{2}{3^3 . 7}$$

Nun ſetze man in B) $n = 3$, ſo iſt

$$\frac{m+1}{m+7} p^m \varkappa 4 + \frac{m+5}{m+7} p^{m+1}\varkappa 3 = p^{m+1}\varkappa\, 4$$ alſo

für $m = -5, -4, -3, -2,$

$$p^{-4}\varkappa 4 = -\frac{4}{2} p^{-5}\varkappa 4 = \frac{4}{3^3 . 7}$$

$$p^{-3}\varkappa 4 = -\frac{3}{3} p^{-4}\varkappa 4 + \frac{1}{3} p^{-3}\varkappa 3 = -\frac{4}{3^3 . 7} + \frac{1}{3^2 . 5} = \frac{1}{3^3 . 5 . 7}$$

$$p^{-2}\varkappa 4 = -\frac{2}{4} p^{-3}\varkappa 4 + \frac{2}{4} p^{-2}\varkappa 3 = -\frac{1}{2 . 3^3 . 5 . 7} - \frac{1}{2 . 3 . 5} = -\frac{32}{3^3 . 5 . 7}$$

$$p^{-1}\varkappa 4 = -\frac{1}{5} p^{-2}\varkappa 4 + \frac{3}{5} p^{-1}\varkappa 3 = \frac{32}{3^3 . 5^2 . 7} - \frac{4}{3 . 5^2} = -\frac{44}{3^3 . 5 . 7}$$

Man ſetze nun in B) $m = -6$ ſo hat man

$$p^{-6}\varkappa (n+1) = -\frac{2n-5}{5} p^{-5}\varkappa (n+1) + \frac{2n-7}{5} p^{-5}\varkappa n$$

alſo für $n = 0, 1, 2, 3$

$p^{-6}\varkappa 1 = p^{-5}\varkappa 1 = 1$

$p^{-6}\varkappa 2 = \frac{3}{5} p^{-4}\varkappa 2 - p^{-5}\varkappa 1 = -1 - 1 = -2$

$$p^{-6}x3 = \tfrac{1}{5} p^{-5}x3 - \tfrac{3}{5} p^{-5}x2 = \frac{2}{3 \cdot 5} + 1 = \frac{17}{3 \cdot 5}$$

$$p^{-6}x4 = -\tfrac{1}{5} p^{-5}x4 - \tfrac{1}{5} p^{-5}x3 = \frac{2}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2}{3 \cdot 5} = -\frac{124}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Man ſetze nun in B) $m = -7$ ſo hat man

$$p^{-7}x(n+1) = -\frac{2n-6}{6} p^{-6}x(n+1) + \frac{2n-8}{6} p^{-6}xn$$ alſo für

$n = 0, 1, 2, 3$

$$p^{-7}x\,1 = p^{-6}x\,1 = 1$$

$$p^{-7}x\,2 = \tfrac{4}{6} p^{-6}x\,2 - p^{-6}x\,1 = -\tfrac{4}{3} - 1 = -\tfrac{7}{3}$$

$$p^{-7}x\,3 = \tfrac{2}{6} p^{-6}x\,3 - \tfrac{4}{6} p^{-5}x\,2 = \frac{17}{3^2 \cdot 5} + \tfrac{4}{3} = \frac{77}{3^2 \cdot 5}$$

$$p^{-7}x\,4 = -\tfrac{2}{6} p^{-6}x\,3 = -\frac{17}{3^2 \cdot 5}$$

Man ſetze nun in (☿) $n = 4$ ſo iſt

$$p^{-7}x\,5 = -\frac{p^{-7}x\,4}{2^8 - 1} = \frac{1}{3^3 5^2}$$

Man ſetze nun in B) $n = 4$ ſo iſt

$$\frac{m+1}{m+9} p^m x\,5 + \frac{m+7}{m+9} p^{m+1}x\,4 = p^{m+1}x\,5$$ und für

$m = -7, -6, -5, -4, -3, -2$

$$p^{-6}x\,5 = -\tfrac{6}{2} p^{-7}x\,5 = -\frac{1}{3^2 \cdot 5^2}$$

$$p^{-5}x\,5 = -\tfrac{5}{3} p^{-6}x\,5 + \tfrac{1}{3} p^{-5}x\,4 = \frac{1}{3^3 \cdot 5} - \frac{2}{3^4 \cdot 7} = \frac{11}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-4}\varkappa 5 = -\tfrac{4}{4}p^{-5}\varkappa 5 + \tfrac{2}{4}p^{-4}\varkappa 4 = -\frac{11}{3^4\cdot 5\cdot 7} + \frac{2}{3^3\cdot 7} = \frac{19}{3^4\cdot 5\cdot 7}$$

$$p^{-3}\varkappa 5 = -\tfrac{3}{5}p^{-4}\varkappa 5 + \tfrac{3}{5}p^{-3}\varkappa 4 = -\frac{19}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2\cdot 7} = -\frac{16}{3^3\cdot 5^2\cdot 7}$$

$$p^{-2}\varkappa 5 = -\tfrac{2}{6}p^{-3}\varkappa 5 + \tfrac{4}{6}p^{-2}\varkappa 4 = \frac{16}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} - \frac{64}{3^4\cdot 5\cdot 7} = -\frac{304}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

$$p^{-1}\varkappa 5 = -\tfrac{1}{7}p^{-2}\varkappa 5 + \tfrac{5}{7}p^{-1}\varkappa 4 = \frac{304}{3^4\cdot 5^2\cdot 7^2} - \frac{44}{3^3\cdot 7^2} = -\frac{428}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

Man ſetze in B) $m = -8$, ſo iſt

$$p^{-8}\varkappa(n+1) = -\frac{2n-7}{7}p^{-7}\varkappa(n+1) + \frac{2n-9}{7}p^{-7}\varkappa n$$ alſo für

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

$p^{-8}\varkappa 1 = p^{-7}\varkappa 1 = 1$

$p^{-8}\varkappa 2 = \tfrac{5}{7}p^{-7}\varkappa 2 - p^{-7}\varkappa 1 = -\tfrac{5}{3} - 1 = -\tfrac{8}{3}$

$$p^{-8}\varkappa 3 = \tfrac{3}{7}p^{-7}\varkappa 3 - \tfrac{5}{7}p^{-7}\varkappa 2 = \frac{11}{3\cdot 5} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{12}{5}$$

$$p^{-8}\varkappa 4 = \tfrac{1}{7}p^{-7}\varkappa 4 - \tfrac{3}{7}p^{-7}\varkappa 3 = -\frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7} - \frac{11}{3\cdot 5} = -\frac{248}{3^2\cdot 5\cdot 7}$$

$$p^{-8}\varkappa 5 = -\tfrac{1}{7}p^{-7}\varkappa 5 - \tfrac{1}{7}p^{-7}\varkappa 4 = -\frac{}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} + \frac{17}{3^2\cdot 5\cdot 7} = \frac{254}{3^3\cdot 5^2 7}$$

Man ſetze in B) $m = -9$, ſo iſt

$$p^{-9}\varkappa(n+1) = -\frac{2n-8}{8}p^{-8}\varkappa(n+1) + \frac{2n-10}{8}p^{-8}\varkappa n$$ alſo

für $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$p^{-9}\varkappa 1 = p^{-8}\varkappa 1 = 1$

$$p^{-9}\varkappa 2 = \tfrac{6}{8}p^{-8}\varkappa 2 - p^{-8}\varkappa 1 = -2 - 1 = -3$$

$$p^{-9}\varkappa 3 = \tfrac{4}{8}p^{-8}\varkappa 3 - \tfrac{6}{8}p^{-8}\varkappa 2 = \tfrac{6}{5} + 2 = \tfrac{16}{5}$$

$$p^{-9}\varkappa 4 = \tfrac{2}{8}p^{-8}\varkappa 4 - \tfrac{4}{8}p^{-8}\varkappa 3 = -\frac{62}{3^2.5.7} - \tfrac{6}{5} = -\frac{88}{3^2.7}$$

$$p^{-9}\varkappa 5 = -\tfrac{2}{8}\,p^{-8}\varkappa 4 = \frac{62}{3^2.5.7}$$

Man ſetzn nun in (☿) $n=5$ und man hat

$$p^{-9}\varkappa 6 = -\frac{p^{-9}\varkappa 5}{2^{10}-1} = -\frac{2}{3^3.5.7.11}$$

Man ſetze nun auch in B) $n=5$ ſo erhält man

$$\frac{m+1}{m+11}\,p^{m}\varkappa 6 + \frac{m+9}{m+11}\,p^{m+1}\varkappa 5 = p^{m+1}\varkappa 6,$$ und für

$m = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2,$

$$p^{-8}\varkappa 6 = -\tfrac{8}{2}\,p^{-9}\varkappa 6 = \frac{8}{3^3.5.7.11}$$

$$p^{-7}\varkappa 6 = -\tfrac{7}{3}p^{-8}\varkappa 6 + \tfrac{1}{3}p^{-7}\varkappa 5 = -\frac{8}{3^4.5.11} + \frac{1}{3^4.5^2} = -\frac{29}{3^4.5^2.11}$$

$$p^{-5}\varkappa 6 = -\tfrac{6}{4}p^{-7}\varkappa 6 + \tfrac{2}{4}p^{-6}\varkappa 5 = \frac{29}{2.3^3.5^2.11} - \frac{1}{2.3^2.5^2} = -\frac{2}{3^3.5^2.11}$$

$$p^{-5}\varkappa 6 = -\tfrac{5}{5}p^{-6}\varkappa 6 + \tfrac{3}{5}p^{-5}\varkappa 5 = \frac{2}{3^3.5^2.11} + \frac{11}{3^3.5^2.7} = \frac{1}{5.7.11}$$

$$p^{-4}\varkappa 6 = -\tfrac{4}{6}p^{-5}\varkappa 6 + \tfrac{4}{6}p^{-4}\varkappa 5 = -\frac{2}{3.5.7.11} + \frac{38}{3^5.5.7} = \frac{256}{3^5.5.7.11}$$

$$p^{-3}\varkappa 6 = -\tfrac{3}{7}p^{-4}\varkappa 6 + \tfrac{5}{7}p^{-3}\varkappa 5 = -\frac{256}{3^4.5.7^2.11} - \frac{16}{3^3.5.7^2} = -\frac{16}{3^4.5.11}.$$

$$p^{-2}\varkappa 6 = -\tfrac{2}{8}p^{-3}\varkappa 6 + {}^{6}p^{-2}\varkappa 5 = \frac{4}{3^4.5.11} - \frac{76}{3^3.5^2.7} = -\frac{2368}{3^4.5^2.7.11}$$

$$p^{-1}\varkappa 6 = -\tfrac{1}{5}p^{-2}\varkappa 6 + \tfrac{7}{5}p^{-1}\varkappa 5 = \frac{2368}{3^6.5^2.7.11} - \frac{428}{3^6.5^2} = -\frac{10196}{3^5.5^2.7.11}$$

Das Geſetz des Fortgangs iſt nun deutlich einzuſehen. Hat man nehmlich von der Potenz -1, -2, -3 u. ſ. w. bis $3-2r$ (wo r eine ganze poſitive Zahl iſt) den erſten, zweyten, dritten u. ſ. w. bis rten Coefficienten berechnet, ſo berechnet man nach der Formel B) aus dem gefundenen Werthe von $p^{3-2r}\varkappa 1$, $p^{3-2r}\varkappa 2 \ldots p^{3-2r}\varkappa r$, die Werthe $p^{2-2r}\varkappa 1$, $p^{2-2r}\varkappa 2$, $p^{2-2r}\varkappa 3 \ldots p^{2-2r}\varkappa r$, und aus dieſen nach eben der Formel die Werthe $p^{1-2r}\varkappa 1$, $p^{1-2r}\varkappa 2$, $p^{1-2r}\varkappa 3 \ldots p^{1-2r}\varkappa r$; durch Umwendung der Formel (☿) berechnet man dann aus dem gefundenen $p^{1-2r}\varkappa r$, den Werth von $p^{1-2r}\varkappa\,(r+1)$, und nachher nach der Reihe die Werthe $p^{2-2r}\varkappa\,(r+1)$, $p^{3-2r}\varkappa\,(r+1)$, $p^{4-2r}\varkappa\,(r+1) \ldots p^{-1}\varkappa\,(r+1)$, wieder vermöge der Formel B. Bey der Anwendung der Formel (☿) in dieſer Rechnung, iſt die zu Ende von (4) gegebene Regel als Probe, ob man richtig gerechnet hat, vorzüglich brauchbar.

6. Aus den berechneten Coefficienten der Potenz -1 laſſen ſich nun auch ſehr leicht die logarithmiſchen Coefficienten beſtimmen. Denn nach der zweiten Formel unter B iſt

$$p^{-1}\varkappa\,(n+1) + 2\,(n-1)\ \text{Log}\ p.\varkappa n = 2n\ \text{Log}\ p.\varkappa\,(n+1)$$

Nun iſt offenbar $\text{Log}\ p.\varkappa 2 = \frac{1}{3}$ alſo, wenn man in der vorigen Formel ſtatt n nach der Reihe 2, 3, 4 u. ſ. w. ſetzt

$$4\ \text{Log}\ p.\varkappa 3 = 2\ \text{Log}\ p.\varkappa 2 + p^{-1}\varkappa 3$$

$$6\ \text{Log}\ p.\varkappa 4 = 4\ \text{Log}\ p.\varkappa 3 + p^{-1}\varkappa 4$$

$$8\ \text{Log}\ p.\varkappa 5 = 6\ \text{Log}\ p.\varkappa 4 + p^{-1}\varkappa 5,$$ u. ſ. w.

alſo

$$4 \operatorname{Log} p. \varkappa 3 = \tfrac{2}{3} - \frac{4}{3^2 . 5} = \frac{26}{3^2 . 5}$$

$$6 \operatorname{Log} p. \varkappa 4 = \frac{26}{3^2 . 5} - \frac{44}{3^3 . 5 . 7} = \frac{502}{3^3 . 5 . 7}$$

$$8 \operatorname{Log} p. \varkappa 5 = \frac{502}{3^3 . 5 . 7} - \frac{428}{3^4 . 5^2 . 7} = \frac{7102}{3^4 . 5^2 . 7}$$

$$10 \operatorname{Log} p. \varkappa 6 = \frac{7102}{3^4 . 5^2 . 7} - \frac{10196}{3^5 . 5^2 . 7 . 11} = \frac{224170}{3^5 . 5^2 . 7 . 11}$$

alſo

$$\operatorname{Log} p. \varkappa 2 = \tfrac{1}{3}$$

$$\operatorname{Log} p. \varkappa 3 = \frac{13}{2 . 3^2 . 5}$$

$$\operatorname{Log} p. \varkappa 4 = \frac{251}{3^4 . 5 . 7}$$

$$\operatorname{Log} p. \varkappa 5 = \frac{3551}{2^2 . 3^4 . 5^2 . 7}$$

$$\operatorname{Log} p. \varkappa 6 = \frac{22417}{3^5 . 5^2 . 7 . 11}$$

7. Bey der in (5) gezeigten Berechnung der Coefficienten negativer Potenzen, findet man zugleich die Bernoulliſchen Zahlen mit. Aus folgender Betrachtung ergeben ſich aber noch zwey weit leichtere Arten die Bernoulliſchen Zahlen zu berechnen: Man nenne q die Scale, deren Coefficienten aus der Reihe genommen ſind, welche die Cotangente durch den Bogen ausdrückt, oder es ſey

$$q \left[1, -\frac{2^2 \mathfrak{A}}{1 . 2}, -\frac{2^4 \mathfrak{B}}{1 . 2 . 3 . 4}, -\frac{2^6 \mathfrak{C}}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} \ldots \right]$$

ſo folgt aus der Reverſionsformel

$$q^s\varkappa\,(n+1) = (-1)^n.\ \frac{s}{s-2n}\ p^{s-2n}\varkappa\ (n+1);\ \ p^t\varkappa\ (n+1)$$

$$= (-1)^n.\ \frac{t}{t+2n}\ q^{t+2n}\varkappa\ (n+1);\ \text{ferner Log } q.\ \varkappa\ (n+1)$$

$$= (-1)^{n+1}.\ \frac{1}{2n}\,p^{-2n}\varkappa(n+1);\ L.p.\varkappa\,(n+1) = (-1)^n.\ \frac{1}{2n}\,q^{2n}\varkappa\,(n+1)$$

mithin da nach B)

$$(m+1)p^m\varkappa(n+1) + (m+2n-1)p^{m+1}\varkappa n = (m+2n+1)p^{m+1}\varkappa(n+1)$$

auch

$$(-1)^n.\ \frac{(m+1)m}{m+2n}\ q^{m+2n}\varkappa\ (n+1) + (-1)^{n-1}\,(m+1)\,q^{m+2n-1}\varkappa n$$

$$= (-1)^n\,(m+1)\,q^{m+2n+1}\varkappa\ (n+1)$$

oder, durch $(-1)^n(m+1)$ dividirt,

$$\frac{m}{m+2n}\ q^{m+2n}\varkappa\,(n+1) - q^{m+2n-1}\varkappa n = q^{m+2n+1}\varkappa\,(n+1)$$

oder, wenn man ſtatt m durchgängig $m-2n$ ſchreibt,

$$\text{C)}\ \ (m-2n)\,q^m\varkappa\,(n+1) = mq^{m-1}\varkappa n + mq^{m+1}\varkappa\,(n+1) \text{ und}$$

$$-2n \operatorname{Log} q.\ \varkappa\,(n+1) = q^{-1}\varkappa n + q^1\varkappa\,(n+1)$$

auch iſt überdies, wie aus (5) erhellet,

$$q^1\varkappa\,(n+1) = -\ \frac{2^{2n}\ \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4\ \ldots\ 2n}$$

$$q^{-1}\varkappa\,n = \frac{2^{2n}\ (2^{2n}-1)\ \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4\ \ldots\ 2n}$$

alſo $q^{-1}\varkappa n = -(2^{2n}-1)\,q^1\varkappa\,(n+1)$

und nach der zweyten Formel unter C)

$$\mathrm{Log}\, q.\, \mathfrak{x}\,(n+1) = -\frac{2^{2n+1}\,(2^{2n-1}-1)\,\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3\ldots.(2n-1).2n.2n}$$

Hieraus iſt klar, daß die Bernoulliſchen Zahlen, entweder aus den Coefficienten der Potenz -1, oder den Coefficienten der Potenz $+1$, oder den logarithmiſchen Coefficienten, für die Scale q, berechnet werden können.

Man ſetze in der Formel C) $m = -1$ ſo hat man

$-(1+2n)\ q^{-1}\mathfrak{x}\ (n+1) = -\ q^{-2}\mathfrak{x}n - q^{0}\mathfrak{x}\,(n+1)$ alſo für

$n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$

$q^{-1}\mathfrak{x}\ 1 = 1$

$3\,q^{-1}\mathfrak{x}\ 2 = q^{-2}\mathfrak{x}\ 1$

$5\,q^{-1}\mathfrak{x}\,3 = q^{-2}\mathfrak{x}\,2$; und allgemein wenn n größer als 0 iſt

$(1+2n)\ q^{-1}\mathfrak{x}\,(n+1) = q^{-2}\mathfrak{x}\ n$

Dadurch iſt man im Stande, die Coefficienten der Potenz -1, zur Scale q, gehörig zu berechnen. Denn, hat man einmal $q^{-1}\mathfrak{x}\ 1$, $q^{-1}\mathfrak{x}\ 2$, $q^{-1}\mathfrak{x}\ 3, \ldots\, q^{-1}\mathfrak{x}\ n$ gefunden, ſo hat man nach der letzten Formel

für ein gerades n

$$(1+2n)\ q^{-1}\mathfrak{x}\ (n+1) = q^{-2}\mathfrak{x}\,n = 2q^{-1}\mathfrak{x}\,1\ \ q^{-1}\mathfrak{x}\,n$$
$$+2q^{-1}\mathfrak{x}\,2\ q^{-1}\mathfrak{x}\ (n-1)\ldots + 2q^{-1}\mathfrak{x}\left(\frac{n}{2}\right).\ q^{-1}\mathfrak{x}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

für ein ungerades n

$$(1+2n)\,q^{-1}\mathfrak{x}\ (n+1) = 2q^{-1}\mathfrak{x}\,1\,q^{-1}\mathfrak{x}\,n + 2q^{-1}\mathfrak{x}\,2\,q^{-1}\mathfrak{x}\,(n-1)\ldots$$
$$+\,2q^{-1}\mathfrak{x}\left(\frac{n-1}{2}\right).\ q^{-1}\mathfrak{x}\left(\frac{n+3}{2}\right) + \left[q^{-1}\mathfrak{x}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{2}.$$

Es ſey

$z = T^{-1} - \frac{1}{3}T^{-3} + \frac{1}{5}T^{-5} - \frac{1}{7}T^{-7} + \frac{1}{9}T^{-9} \ldots$ ſo iſt nach der Umkehrungsformel

$$T = p^{1}\varkappa 1\, z^{-1} + p^{-1}\varkappa 2\, z - \frac{1}{3}p^{-3}\varkappa 3 z^{3} + \frac{1}{5}p^{-5}\varkappa 4 z^{5} \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} . \frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\varkappa (n+1) z^{2n-1} \ldots ; T^{-1} = p^{-1}\varkappa 1 z - \frac{1}{3}p^{-3}\varkappa 2 z^{3}$$

$$+ \frac{1}{5}p^{-5}\varkappa 3 z^{5} \ldots + (-1)^{n+1} . \frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\varkappa (n)\, z^{2n-1} \ldots$$

Nun iſt T die Cotangente, und T^{-1} die Tangente von z, mithin, wie man aus andern Gründen weis,

$$T = z^{-1} - \frac{2^{2}\mathfrak{A}}{1.2} z - \frac{2^{4}\mathfrak{B}}{1.2.3.4} z^{3} \ldots - \frac{2^{2n}\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3\ldots2n} z^{2n-1} \ldots$$

$$T^{-1} = \frac{2^{2}(2^{2}-1)\mathfrak{A}}{1.2} z + \frac{2^{4}(2^{4}-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} z^{3} + \frac{2^{6}(2^{6}-1)\mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6} z^{5} \ldots$$

$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3\ldots2n} z^{2n-1} \ldots$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ die Bernoulliſchen Zahlen bedeuten. Alſo iſt

$$(-1)^{n+1} . \frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\varkappa (n+1) = - \frac{2^{2n} . \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3\ldots2n} \text{ und}$$

$$(-1)^{n+1} . \frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\varkappa\, n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\, \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3\ldots2n}$$

mithin $p^{1-2n}\varkappa (n+1) = - \frac{p^{1-2n}\varkappa\, n}{2^{2n}-1}$ (☿)

Nun überſieht man ohne Schwierigkeit daß

$p^{-1}\varkappa\ 1 = 1,\quad p^{-2}\varkappa\ 1 = 1,\quad p^{-3}\varkappa\ 1 = 1$

$p^{-1}\varkappa\ 2 = -\frac{1}{3},\quad p^{-2}\varkappa\ 2 = -\frac{2}{3},\ p^{-3}\varkappa\ 2 = -1$, alſo, wenn man in der Formel (☿) $n = 2$ ſetzt

$$p^{-3}\varkappa\ 3 = -\frac{p^{-3}\varkappa 2}{15} = \frac{1}{3 \cdot 5}$$

Setzt man nun in der erſten Formel von B) in (4) $n = 2$, ſo hat man

$$\frac{m+1}{m+5}\, p^{m}\varkappa\ 3 + \frac{m+3}{m+5}\, p^{m+1}\varkappa\ 2 = p^{m+1}\varkappa\ 3, \text{ alſo}$$

$$p^{-2}\varkappa\ 3 = -\ p^{-3}\varkappa\ 3 = -\ \frac{1}{3 \cdot 5} \text{ für } m = -3$$

$$p^{-1}\varkappa 3 = -\tfrac{1}{3}p^{-2}\varkappa 3 + \tfrac{1}{3}p^{-1}\varkappa 2 = \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^2} = -\frac{4}{3^2 \cdot 5} \text{ für}$$

$m = -2$

Man ſetze in der erſten Formel von B) $m = -4$ ſo iſt

$$p^{-4}\varkappa\,(n+1) = -\frac{2n-3}{3}\, p^{-3}\varkappa\,(n+1) + \frac{2n-5}{3}\, p^{-3}\varkappa\, n \text{ alſo}$$

$p^{-4}\varkappa 1 = p^{-3}\varkappa 1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-4}\varkappa 2 = \frac{1}{3} p^{-3}\varkappa 2 - p^{-3}\varkappa 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{3}{4}$, für $n = 1$

$$p^{-4}\varkappa 3 = -\tfrac{1}{3}p^{-3}\varkappa 3 - \tfrac{1}{3}p^{-3}\varkappa 2 = -\frac{1}{3^2 \cdot 5} + \tfrac{1}{3} = \frac{14}{3^2 \cdot 5} \text{ für } n = 2$$

Man ſetze in der erſten Formel von B) $m = -5$ ſo iſt

$$p^{-5}\varkappa\,(n+1) = -\frac{2n-4}{4}\, p^{-4}\varkappa\,(n+1) + \frac{2n-6}{4}\, p^{-4}\varkappa\, n$$

alſo

$p^{-5}\varkappa\, 1 = p^{-4}\varkappa\, 1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-5}\varkappa\, 2 = \frac{2}{4} p^{-4}\varkappa\, 2 - \frac{4}{4} p^{-4}\varkappa\, 1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$ für $n = 1$

$p^{-5}\varkappa\, 3 = -\frac{2}{4} p^{-4}\varkappa\, 2 = \frac{2}{3}$ für $n = 2$, und wenn man in der Formel (☿) $n = 3$ ſetzt

$$p^{-5}\varkappa\, 4 = -\frac{p^{-5}\varkappa\, 3}{2^6 - 1} = -\frac{2}{3^3 \cdot 7}$$

Nun ſetze man in B) $n = 3$, ſo iſt

$$\frac{m+1}{m+7} p^m\varkappa\, 4 + \frac{m+5}{m+7} p^{m+1}\varkappa\, 3 = p^{m+1}\varkappa\, 4 \text{ alſo}$$

für $m = -5, -4, -3, -2,$

$$p^{-4}\varkappa\, 4 = -\frac{4}{2} p^{-5}\varkappa\, 4 = \frac{4}{3^3 \cdot 7}$$

$$p^{-3}\varkappa\, 4 = -\frac{3}{3} p^{-4}\varkappa\, 4 + \frac{1}{3} p^{-3}\varkappa\, 3 = -\frac{4}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-2}\varkappa\, 4 = -\frac{2}{4} p^{-3}\varkappa\, 4 + \frac{2}{4} p^{-2}\varkappa\, 3 = -\frac{1}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{32}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-1}\varkappa\, 4 = -\frac{1}{5} p^{-2}\varkappa\, 4 + \frac{3}{5} p^{-1}\varkappa\, 3 = \frac{32}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{4}{3 \cdot 5^2} = -\frac{44}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Man ſetze nun in B) $m = -6$ ſo hat man

$$p^{-6}\varkappa\, (n+1) = -\frac{2n-5}{5} p^{-5}\varkappa\, (n+1) + \frac{2n-7}{5} p^{-5}\varkappa\, n$$

alſo für $n = 0, 1, 2, 3$

$p^{-6}\varkappa\, 1 = p^{-5}\varkappa\, 1 = 1$

$p^{-6}\varkappa\, 2 = \frac{3}{5} p^{-4}\varkappa\, 2 - p^{-5}\varkappa\, 1 = -1 - 1 = -2$

$$p^{-6}x3 = \tfrac{1}{5}p^{-5}x3 - \tfrac{3}{5}p^{-5}x2 = \frac{2}{3\cdot5} + 1 = \frac{17}{3\cdot5}$$

$$p^{-6}x4 = -\tfrac{1}{5}p^{-5}x4 - \tfrac{1}{5}p^{-5}x3 = \frac{2}{3^2\cdot5\cdot7} - \frac{2}{3\cdot5} = -\frac{124}{3^3\cdot5\cdot7}$$

Man ſetze nun in B) $m = -7$ ſo hat man

$$p^{-7}x(n+1) = -\frac{2n-6}{6}p^{-6}x(n+1) + \frac{2n-8}{6}p^{-6}xn$$ alſo für

$n = 0, 1, 2, 3$

$$p^{-7}x\,1 = p^{-6}x\,1 = 1$$

$$p^{-7}x\,2 = \tfrac{4}{6}p^{-6}x\,2 - p^{-6}x\,1 = -\tfrac{4}{3} - 1 = -\tfrac{7}{3}$$

$$p^{-7}x\,3 = \tfrac{2}{6}p^{-6}x\,3 - \tfrac{4}{6}p^{-5}x\,2 = \frac{17}{3^2\cdot5} + \tfrac{4}{3} = \frac{77}{3^2\cdot5}$$

$$p^{-7}x\,4 = -\tfrac{2}{6}p^{-6}x\,3 = -\frac{17}{3^2\cdot5}$$

Man ſetze nun in (☿) $n = 4$ ſo iſt

$$p^{-7}x\,5 = -\frac{p^{-7}x\,4}{2^8-1} = \frac{1}{3^3\cdot5^2}$$

Man ſetze nun in B) $n = 4$ ſo iſt

$$\frac{m+1}{m+9}p^{m}x\,5 + \frac{m+7}{m+9}p^{m+1}x\,4 = p^{m+1}x\,5$$ und für

$m = -7, -6, -5, -4, -3, -2$

$$p^{-6}x\,5 = -\tfrac{6}{2}p^{-7}x\,5 = -\frac{1}{3^2\cdot5^2}$$

$$p^{-5}x\,5 = -\tfrac{5}{3}p^{-6}x\,5 + \tfrac{1}{3}p^{-5}x\,4 = \frac{1}{3^3\cdot5} - \frac{2}{3^4\cdot7} = \frac{11}{3^4\cdot5\cdot7}$$

$$p^{-4}\varkappa 5 = -\tfrac{4}{4}p^{-5}\varkappa 5 + \tfrac{2}{4}p^{-4}\varkappa 4 = -\frac{11}{3^4.5.7} + \frac{2}{3^3.7} = \frac{19}{3^4.5.7}$$

$$p^{-3}\varkappa 5 = -\tfrac{3}{5}p^{-4}\varkappa 5 + \tfrac{3}{5}p^{-3}\varkappa 4 = -\frac{19}{3^3.5^2.7} + \frac{1}{3^2.5^2.7} = -\frac{16}{3^3.5^2.7}$$

$$p^{-2}\varkappa 5 = -\tfrac{2}{6}p^{-3}\varkappa 5 + \tfrac{4}{6}p^{-3}\varkappa 4 = \frac{16}{3^4.5^2.7} - \frac{64}{3^4.5.7} = -\frac{304}{3^4.5^2.7}$$

$$p^{-1}\varkappa 5 = -\tfrac{1}{7}p^{-2}\varkappa 5 + \tfrac{5}{7}p^{-1}\varkappa 4 = \frac{304}{3^4.5^2.7^2} - \frac{44}{3^3.7^2} = -\frac{428}{3^4.5^2.7}$$

Man ſetze in B) $m = -8$, ſo iſt

$$p^{-8}\varkappa(n+1) = -\frac{2n-7}{7}p^{-7}\varkappa(n+1) + \frac{2n-9}{7}p^{-7}\varkappa n$$ alſo für

$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$p^{-8}\varkappa 1 = p^{-7}\varkappa 1 = 1$

$p^{-8}\varkappa 2 = \tfrac{5}{7}p^{-7}\varkappa 2 - p^{-7}\varkappa 1 = -\tfrac{5}{3} - 1 = -\tfrac{8}{3}$

$$p^{-8}\varkappa 3 = \tfrac{3}{7}p^{-7}\varkappa 3 - \tfrac{5}{7}p^{-7}\varkappa 2 = \frac{11}{3.5} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{12}{5}$$

$$p^{-8}\varkappa 4 = \tfrac{1}{7}p^{-7}\varkappa 4 - \tfrac{3}{7}p^{-7}\varkappa 3 = -\frac{17}{3^2.5.7} - \frac{11}{3.5} = -\frac{248}{3^2.5.7}$$

$$p^{-8}\varkappa 5 = -\tfrac{1}{7}p^{-7}\varkappa 5 - \tfrac{1}{7}p^{-7}\varkappa 4 = -\frac{}{3^3.5^2.7} + \frac{17}{3^2.5.7} = \frac{254}{3^3.5^2 7}$$

Man ſetze in B) $m = -9$, ſo iſt

$$p^{-9}\varkappa(n+1) = -\frac{2n-8}{8}p^{-8}\varkappa(n+1) + \frac{2n-10}{8}p^{-8}\varkappa n$$ alſo

für $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$p^{-9}\varkappa 1 = p^{-8}\varkappa 1 = 1$

$$p^{-9}x\,2 = \frac{6}{8}p^{-8}x\,2 - p^{-8}x\,1 = -2 - 1 = -3$$

$$p^{-9}x\,3 = \frac{4}{8}p^{-8}x\,3 - \frac{6}{8}p^{-8}x\,2 = \frac{6}{5} + 2 = \frac{16}{5}$$

$$p^{-9}x\,4 = \frac{2}{8}p^{-8}x\,4 - \frac{4}{8}p^{-8}x\,3 = -\frac{62}{3^2.5.7} - \frac{6}{5} = -\frac{88}{3^2.7}$$

$$p^{-9}x\,5 = -\frac{2}{8}\,p^{-8}x\,4 = \frac{62}{3^2.5.7}$$

Man ſetzn nun in (☿) $n=5$ und man hat

$$p^{-9}x\,6 = -\frac{p^{-9}x5}{2^{10}-1} = -\frac{2}{3^3.5.7.11}$$

Man ſetze nun auch in B) $n=5$ ſo erhält man

$$\frac{m+1}{m+11}\,p^m x\,6 + \frac{m+9}{m+11}\,p^{m+1}x\,5 = p^{m+1}x\,6,$$ und für

$m = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2,$

$$p^{-8}x\,6 = -\frac{8}{2}\,p^{-9}x\,6 = \frac{8}{3^3.5.7.11}$$

$$p^{-7}x6 = -\frac{7}{3}p^{-8}x6 + \frac{1}{3}p^{-7}x5 = -\frac{8}{3^4.5.11} + \frac{1}{3^4.5^2} = -\frac{29}{3^4.5^2.11}$$

$$p^{-5}x6 = -\frac{6}{4}p^{-7}x6 + \frac{2}{4}p^{-6}x5 = \frac{29}{2.3^3.5^2.11} - \frac{1}{2.3^2.5^2} = -\frac{2}{3^3.5^2.11}$$

$$p^{-5}x6 = -\frac{5}{5}p^{-6}x6 + \frac{3}{5}p^{-5}x5 = \frac{2}{3^3.5^2.11} + \frac{11}{3^3.5^2.7} = \frac{1}{5.7.11}$$

$$p^{-4}x6 = -\frac{4}{6}p^{-5}x6 + \frac{4}{6}p^{-4}x5 = -\frac{2}{3.5.7.11} + \frac{38}{3^5.5.7} = \frac{256}{3^5.5.7.11}$$

$$p^{-3}x6 = -\frac{3}{7}p^{-4}x6 + \frac{5}{7}p^{-3}x5 = -\frac{256}{3^4.5.7^2.11} - \frac{16}{3^3.5.7^2} = -\frac{16}{3^4.5.11}.$$

$$p^{-2}\varkappa 6 = -\tfrac{2}{8}p^{-3}\varkappa 6 + {}^{6}p\cdot 2\varkappa 5 = \frac{4}{3^4.5.11} - \frac{76}{3^3.5^2.7} = -\frac{2368}{3^4.5^2.7.11}$$

$$p^{-1}\varkappa 6 = -\tfrac{1}{9}p^{-2}\varkappa 6 + \tfrac{7}{9}p^{-1}\varkappa 5 = \frac{2368}{3^6.5^2.7.11} - \frac{428}{3^6.5^2} = -\frac{10196}{3^5.5^2.7.11}$$

Das Geſetz des Fortgangs iſt nun deutlich einzuſehen. Hat man nehmlich von der Potenz -1, -2, -3 u. ſ. w. bis $3-2r$ (wo r eine ganze poſitive Zahl iſt) den erſten, zweyten, dritten u. ſ. w. bis rten Coefficienten berechnet, ſo berechnet man nach der Formel B) aus dem gefundenen Werthe von $p^{3-2r}\varkappa 1$, $p^{3-2r}\varkappa 2 \ldots p^{3-2r}\varkappa r$, die Werthe $p^{2-2r}\varkappa 1$, $p^{2-2r}\varkappa 2$, $p^{2-2r}\varkappa 3 \ldots p^{2-2r}\varkappa r$, und aus dieſen nach eben der Formel die Werthe $p^{1-2r}\varkappa 1$, $p^{1-2r}\varkappa 2$, $p^{1-2r}\varkappa 3 \ldots p^{1-2r}\varkappa r$; durch Anwendung der Formel (☿) berechnet man dann aus dem gefundenen $p^{1-2r}\varkappa r$, den Werth von $p^{1-2r}\varkappa(r+1)$, und nachher nach der Reihe die Werthe $p^{2-2r}\varkappa(r+1)$, $p^{3-2r}\varkappa(r+1)$, $p^{4-2r}\varkappa(r+1) \ldots p^{-1}\varkappa(r+1)$, wieder vermöge der Formel B. Bey der Anwendung der Formel (☿) in dieſer Rechnung, iſt die zu Ende von (4) gegebene Regel als Probe, ob man richtig gerechnet hat, vorzüglich brauchbar.

6. Aus den berechneten Coefficienten der Potenz -1 laſſen ſich nun auch ſehr leicht die logarithmiſchen Coefficienten beſtimmen. Denn nach der zweiten Formel unter B iſt

$$p^{-1}\varkappa(n+1) + 2(n-1)\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa n = 2n\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa(n+1)$$

Nun iſt offenbar $\mathrm{Log}\,p.\varkappa 2 = \frac{1}{3}$ alſo, wenn man in der vorigen Formel ſtatt n nach der Reihe 2, 3, 4 u. ſ. w. ſetzt

$$4\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa 3 = 2\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa 2 + p^{-1}\varkappa 3$$

$$6\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa 4 = 4\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa 3 + p^{-1}\varkappa 4$$

$$8\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa 5 = 6\,\mathrm{Log}\,p.\varkappa 4 + p^{-1}\varkappa 5,$$ u. ſ. w.

alſo

$$4\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,3 = \tfrac{2}{3} - \frac{4}{3^2.5} = \frac{26}{3^2.5}$$

$$6\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,4 = \frac{26}{3^2.5} - \frac{44}{3^3.5.7} = \frac{502}{3^3.5.7}$$

$$8\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,5 = \frac{502}{3^3.5.7} - \frac{428}{3^4.5^2.7} = \frac{7102}{3^4.5^2.7}$$

$$10\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,6 = \frac{7102}{3^4.5^2.7} - \frac{10196}{3^5.5^2.7.11} = \frac{224170}{3^5.5^2.7.11}$$

alſo

$$\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,2 = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,3 = \frac{13}{2.3^2.5}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,4 = \frac{251}{3^4.5.7}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,5 = \frac{3551}{2^2.3^4.5^2.7}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa\,6 = \frac{22417}{3^5.5^2.7.11}$$

7. Bey der in (5) gezeigten Berechnung der Coefficienten negativer Potenzen, findet man zugleich die Bernoulliſchen Zahlen mit. Aus folgender Betrachtung ergeben ſich aber noch zwey weit leichtere Arten die Bernoulliſchen Zahlen zu berechnen: Man nenne q die Scale, deren Coefficienten aus der Reihe genommen ſind, welche die Cotangente durch den Bogen ausdrückt, oder es ſey

$$q\ \left[1,\ -\frac{2^2\,\mathfrak{A}}{1.2},\ -\frac{2^4\,\mathfrak{B}}{1.2.3.4},\ -\frac{2^6\,\mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6}\ldots.\right]$$

ſo folgt aus der Reverſionsformel

$$q^s\varkappa\,(n+1) = (-1)^n.\,\frac{s}{s-2n}\,p^{s-2n}\varkappa\,(n+1);\;\; p^t\varkappa\,(n+1)$$

$$= (-1)^n.\,\frac{t}{t+2n}\,q^{t+2n}\varkappa\,(n+1);\text{ ferner } \mathrm{Log}\,q.\,\varkappa\,(n+1)$$

$$= (-1)^{n+1}.\,\frac{1}{2n}\,p^{-2n}\varkappa(n+1);\,\mathrm{L.p.}\varkappa\,(n+1) = (-1)^n.\,\frac{1}{2n}\,q^{2n}\varkappa\,(n+1)$$

mithin da nach B)

$$(m+1)p^m\varkappa(n+1) + (m+2n-1)p^{m+1}\varkappa n = (m+2n+1)p^{m+1}\varkappa(n+1)$$

auch

$$(-1)^n.\,\frac{(m+1)m}{m+2n}\,q^{m+2n}\varkappa\,(n+1) + (-1)^{n-1}(m+1)\,q^{m+2n-1}\varkappa n$$
$$= (-1)^n(m+1)\,q^{m+2n+1}\varkappa\,(n+1)$$

oder, durch $(-1)^n(m+1)$ dividirt,

$$\frac{m}{m+2n}\,q^{m+2n}\varkappa\,(n+1) - q^{m+2n-1}\varkappa n = q^{m+2n+1}\varkappa\,(n+1)$$

oder, wenn man ſtatt m durchgängig m − 2n ſchreibt,

$$\text{C)}\;\; (m-2n)\,q^m\varkappa\,(n+1) = mq^{m-1}\varkappa n + mq^{m+1}\varkappa\,(n+1) \text{ und}$$
$$-2n\,\mathrm{Log}\,q.\,\varkappa\,(n+1) = q^{-1}\varkappa n + q^1\varkappa\,(n+1)$$

auch iſt überdies, wie aus (5) erhellet,

$$q^1\varkappa\,(n+1) = -\frac{2^{2n}\,\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4\ldots 2n}$$

$$q^{-1}\varkappa n = \frac{2^{2n}\,(2^{2n}-1)\,\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4\ldots 2n}$$

alſo $q^{-1}\varkappa n = -(2^{2n}-1)\,q^1\varkappa\,(n+1)$

und nach der zweyten Formel unter C)

$$\text{Log}\, q.\, \varkappa\, (n+1) = - \frac{2^{2n+1}\,(2^{2n-1}-1)\,\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3\ldots.(2n-1).2n.2n}$$

Hieraus iſt klar, daß die Bernoulliſchen Zahlen, entweder aus den Coefficienten der Potenz -1, oder den Coefficienten der Potenz $+1$, oder den logarithmiſchen Coefficienten, für die Scale q, berechnet werden können.

Man ſetze in der Formel C) $m = -1$ ſo hat man
$-(1+2n)\, q^{-1}\varkappa\, (n+1) = -\, q^{-2}\varkappa n - q^{0}\varkappa\, (n+1)$ alſo für
$n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots.$

$q^{-1}\varkappa\, 1 = 1$

$3\, q^{-1}\varkappa\, 2 = q^{-2}\varkappa\, 1$

$5\, q^{-1}\varkappa\, 3 = q^{-2}\varkappa\, 2$; und allgemein wenn n größer als 0 iſt

$(1+2n)\, q^{-1}\varkappa\, (n+1) = q^{-2}\varkappa\, n$

Dadurch iſt man im Stande, die Coefficienten der Potenz -1, zur Scale q, gehörig zu berechnen. Denn, hat man einmal $q^{-1}\varkappa\, 1$, $q^{-1}\varkappa\, 2$, $q^{-1}\varkappa\, 3, \ldots$ $q^{-1}\varkappa\, n$ gefunden, ſo hat man nach der letzten Formel

für ein gerades n

$$(1+2n)\; q^{-1}\varkappa\; (n+1) \;=\; q^{-2}\varkappa\, n = 2q^{-1}\varkappa\, 1\;\; q^{-1}\varkappa\, n$$
$$+\, 2q^{-1}\varkappa\, 2\; q^{-1}\varkappa\, (n-1) \ldots + 2q^{-1}\varkappa\left(\frac{n}{2}\right).\; q^{-1}\varkappa\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

für ein ungerades n

$$(1+2n)\, q^{-1}\varkappa\, (n+1) = 2q^{-1}\varkappa\, 1\, q^{-1}\varkappa\, n + 2q^{-1}\varkappa\, 2\, q^{-1}\varkappa\, (n-1) \ldots$$
$$+\, 2q^{-1}\varkappa\left(\frac{n-1}{2}\right).\; q^{-1}\varkappa\left(\frac{n+3}{2}\right) + \left[q^{-1}\varkappa\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{2}$$

Aus dieſen Coefficienten der Potenz − 1, findet man die Coefficienten der Potenz + 1, nach der Formel

$$q^1\varkappa\,(n+1) = -\frac{q^{-1}\varkappa\, n}{2^{2n}-1}$$

und, da der Nenner von $q^1\varkappa\,(n+1)$ keine andern Primzahlen unter ſeinen Factoren enthalten kann als ſolche, die nicht 2, und nicht höher als $2n+1$ ſind, ſo dient dieſe Formel zugleich zur Probe, ob man richtig gerechnet hat. Hieraus finden ſich nun die Bernoulliſchen Zahlen nach der Formel

$$\overset{n-1}{\mathfrak{A}} = -\frac{1.2.3.4\ldots\, 2n}{2^{2n}}\, q^1\varkappa\,(n+1)$$

und hieraus die logarithmiſchen Coefficienten nach der Formel

$$\text{Log}\; q.\,\varkappa(n+1) = -\frac{2^{2n+1}\,(2^{2n-1}-1)\,\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4\ldots 2n.\,2n}$$

Es iſt demnach

$q^{-1}\varkappa\,1 = 1$ alſo $q^1\varkappa\,2 = -\frac{1}{3}$

$3q^{-1}\varkappa 2 = 1$ alſo $q^{-1}\varkappa\,2 = \frac{1}{3}$ und $q^1\varkappa\,3 = -\frac{1}{3^2\cdot5}$

$5q^{-1}\varkappa3 = 2q^{-1}\varkappa1\, q^{-1}\varkappa2 = \frac{2}{3}$ alſo $q^{-1}\varkappa3 = \frac{2}{3\,5}$ und $q^1\varkappa4 = -\frac{2}{3^3\cdot5\cdot7}$

$7q^{-1}\varkappa4 = 2q^{-1}\varkappa1\, q^{-1}\varkappa3 + (q^{-1}\varkappa2)^2 = \frac{4}{3\cdot5} + \frac{1}{3^2} = \frac{17}{3^2\cdot5}$ alſo

$q^{-1}\varkappa4 = \frac{17}{3^2\cdot5\cdot7}$ und $q^1\varkappa\,5 = -\frac{1}{3^3\cdot5^2\cdot7}$

$9q^{-1}\varkappa5 = 2q^{-1}\varkappa1\, q^{-1}\varkappa4 + 2q^{-1}\varkappa2\, q^{-1}\varkappa3 = \frac{34}{3^2\cdot5\cdot7} + \frac{4}{3^2\cdot5} = \frac{62}{3^2\cdot5\cdot7}$

alſo $q^{-1}x5 = \frac{62}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$ und $q^1 x 6 = -\frac{2}{3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

$$11 q^{-1}x6 = 2q^{-1}x1 q^{-1}x5 + 2q^{-1}x2 q^{-1}x4 + (q^{-1}x3)^2 = \frac{124}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$+ \frac{34}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{4}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}$$ alſo $q^{-1}x6 = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$

und $q^1 x 7 = -\frac{1382}{3^6 \cdot 5' \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$$13 q^{-1}x7 = 2q^{-1}x1 q^{-1}x6 + 2q^{-1}x2 q^{-1}x5 + 2q^{-1}x3 q^{-1}x4$$

$$= \frac{2764}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{124}{3^5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{68}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$$ alſo

$q^{-1}x7 = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$ und $q^1 x 8 = -\frac{4}{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$

$$15 q^{-1}x8 = 2q^{-1}x1 q^{-1}x7 + 2q^{-1}x2 q^{-1}x6 + 2q^{-1}x3 q^{-1}x5 + (q^{-1}x4)^2$$

$$= \frac{43688}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{2764}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{248}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{289}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{929569}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

alſo $q^{-1}x8 = \frac{929569}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$ und $q^1 x 9 = -\frac{3617}{3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

Auf dieſe Art habe ich berechnet

$q^{-1}x1 = 1 = p^{-1}x1$

$q^{-1}x2 = \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} p^{-3}x2$

$q^{-1}x3 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5} p^{-5}x3$

$q^{-1}x4 = \frac{17}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{1}{7} p^{-7}x4$

$$q^{-1}\varkappa 5 = \frac{62}{3^4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{9} p^{-9}\varkappa 5$$

$$q^{-1}\varkappa 6 = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} = -\frac{1}{11} p^{-11}\varkappa 6$$

$$q^{-1}\varkappa 7 = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{1}{13} p^{-13}\varkappa 7$$

$$q^{-1}\varkappa 8 = \frac{929569}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} = -\frac{1}{15} p^{-15}\varkappa 8$$

$$q^{-1}\varkappa 9 = \frac{6404582}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{1}{17} p^{-17}\varkappa 9$$

$$q^{-1}\varkappa 10 = \frac{443861162}{3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} = -\frac{1}{19} p^{-19}\varkappa 10$$

$$q^{-1}\varkappa 11 = \frac{18888466084}{3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} = \frac{1}{21} p^{-21}\varkappa 11$$

$$q^{-1}\varkappa 12 = \frac{113927491862}{3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23} = -\frac{1}{23} p^{-23}\varkappa 12$$

$$q^{-1}\varkappa 13 = \frac{58870668456604}{3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} = \frac{1}{25} p^{-25}\varkappa 13$$

$$q^{-1}\varkappa 14 = \frac{8374643517010684}{3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} = -\frac{1}{27} p^{-27}\varkappa 14$$

$$q^{-1}\varkappa 15 = \frac{689005380505609448}{3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29} = \frac{1}{29} p^{-29}\varkappa 15$$

$$q^{-1}\varkappa 16 = \frac{129848163681107301953}{3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31} = -\frac{1}{31} p^{-31}\varkappa 16$$

$$q^{-1}\varkappa 17 = \frac{1736640792209901647222}{3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31} = \frac{1}{33} p^{-33}\varkappa 17$$

$$q^{-1}\varkappa\ 18 = \frac{418781231495293038913922}{3^{15}\cdot 5^{8}\cdot 7^{5}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 17^{2}\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = -\tfrac{1}{33}\,p^{-35}\varkappa\ 18$$

und hieraus findet ſich

$$q^{1}\varkappa\ 1 = 1 = p^{1}\varkappa\ 1$$

$$q^{1}\varkappa\ 2 = -\tfrac{1}{3} = p^{-1}\varkappa\ 2$$

$$q^{1}\varkappa\ 3 = -\frac{1}{3^{2}\cdot 5} = -\tfrac{1}{3}\,p^{-3}\varkappa\ 3$$

$$q^{1}\varkappa\ 4 = -\frac{2}{3^{3}\cdot 5\cdot 7} = \tfrac{1}{5}\,p^{-5}\varkappa\ 4$$

$$q^{1}\varkappa\ 5 = -\frac{1}{3^{3}\cdot 5^{2}\cdot 7} = -\tfrac{1}{7}\,p^{-7}\varkappa\ 5$$

$$q^{1}\varkappa\ 6 = -\frac{2}{3^{5}\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \tfrac{1}{9}\,p^{-9}\varkappa\ 6$$

$$q^{1}\varkappa\ 7 = -\frac{1382}{3^{6}\cdot 5^{3}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13} = -\tfrac{1}{11}\,p^{-11}\varkappa\ 7$$

$$q^{1}\varkappa\ 8 = -\frac{4}{3^{6}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 11\cdot 13} = \tfrac{1}{13}\,p^{-13}\varkappa\ 8$$

$$q^{1}\varkappa\ 9 = -\frac{3617}{3^{7}\cdot 5^{4}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13\cdot 17} = -\tfrac{1}{15}\,p^{-15}\varkappa\ 9$$

$$q^{1}\varkappa\ 10 = -\frac{87734}{3^{9}\cdot 5^{3}\cdot 7^{3}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = \tfrac{1}{17}\,p^{-17}\varkappa\ 10$$

$$q^{1}\varkappa\ 11 = -\frac{349222}{3^{9}\cdot 5^{5}\cdot 7^{2}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = -\tfrac{1}{19}\,p^{-19}\varkappa\ 11$$

$$q^{1}\varkappa\ 12 = -\frac{310732}{3^{10}\cdot 5^{4}\cdot 7^{3}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \tfrac{1}{21}\,p^{-21}\varkappa\ 12$$

$$q^{1}\varkappa 13 = -\frac{472728182}{3^{11}.5^{5}.7^{4}.11^{2}.13^{2}.17.19.23} = -\tfrac{1}{21}\, p^{-23}\varkappa\ 13$$

$$q^{1}\varkappa 14 = -\frac{2631724}{3^{11}.5^{6}.7^{3}.11^{2}.13.17.19.23} = \tfrac{1}{23}\, p^{-25}\varkappa\ 14$$

$$q^{1}\varkappa 15 = -\frac{13571120588}{3^{14}.5^{7}.7^{3}.11^{2}.13^{2}.17.19.23.29} = -\tfrac{1}{27}\, p^{-27}\varkappa\ 15$$

$$q^{1}\varkappa 16 = -\frac{1378534604l608}{3^{15}.5^{6}.7^{5}.11^{3}.13^{2}.17.19.23.29.31} = \tfrac{1}{29}\, p^{-29}\varkappa\ 16$$

$$q^{1}\varkappa 17 = -\frac{7709321041217}{3^{15}.5^{8}.7^{4}.11^{2}.13^{2}.17^{2}.19.23.29.31} = -\tfrac{1}{31}\, p^{-31}\varkappa\ 17$$

$$q^{1}\varkappa 18 = -\frac{303257395102}{3^{16}.5^{7}.7^{4}.11^{3}.13^{2}.17.19.23.29.31} = \tfrac{1}{33}\, p^{-33}\varkappa\ 18$$

$$q^{1}\varkappa 19 = -\frac{52630543106106954746}{3^{18}.5^{9}.7^{6}.11^{3}.13^{3}.17^{2}.19^{2}.23.29.31.37} = -\tfrac{1}{35}\, p^{-35}\varkappa 19$$

Um ein Beyſpiel von einer ſolchen Rechnung zu geben, ſuche man, aus $q^{-1}\varkappa\ 1$, $q^{-1}\varkappa\ 2 \ldots q^{-1}\varkappa\ 15$, den Werth von $q^{-1}\varkappa\ 16$. Es iſt erſtlich

$$31\, q^{-1}\varkappa\ 16 = q^{-2}\varkappa\ 15 = 2q^{-1}\varkappa\ 1\ q^{-1}\varkappa\ 15 + 2q^{-1}\varkappa\ 2\ q^{-1}\varkappa\ 14$$
$$+ 2q^{-1}\varkappa\ 3\ q^{-1}\varkappa\ 13 + 2q^{-1}\varkappa\ 4\ q^{-1}\varkappa\ 12 + 2q^{-1}\varkappa\ 5\ q^{-1}\varkappa\ 11$$
$$+ 2q^{-1}\varkappa\ 6\ q^{-1}\varkappa\ 10 + 2q^{-1}\varkappa\ 7\ q^{-1}\varkappa\ 9 + (q^{-1}\varkappa 8)^{2}$$

Nun iſt, $3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29 = m$ geſetzt,

$$\left.\begin{array}{rcr}
2\,q^{-1}\varkappa\,1\;q^{-1}\varkappa\,15 & = & 20670161415168283440\\
2\,q^{-1}\varkappa\,2\;q^{-1}\varkappa\,14 & = & 17000526339531688520\\
2\,q^{-1}\varkappa\,3\;q^{-1}\varkappa\,13 & = & 16778846958153619248\\
2\,q^{-1}\varkappa\,4\;q^{-1}\varkappa\,12 & = & 16757201728134656100\\
2\,q^{-1}\varkappa\,5\;q^{-1}\varkappa\,11 & = & 16754887287089437200\\
2\,q^{-1}\varkappa\,6\;q^{-1}\varkappa\,10 & = & 16754633366751516600\\
2\,q^{-1}\varkappa\,7\;q^{-1}\varkappa\,9 & = & 16754605314296698800\\
q^{-1}\varkappa\,8\;q^{-1}\varkappa\,8 & = & 8377301271981402045
\end{array}\right\} : m\,,$$

$$\text{und } 31\,q^{-1}\varkappa\,16 = \frac{129848163681107301953}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19,23.29}$$

$$\text{alſo } q^{-1}\varkappa\,16 = \frac{129848163681107301953}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29.31}$$

und da $2^{32}-1 = 4294967295 = 3.5.17.16843009$, ſo iſt

$$q^1\varkappa\,17 = -\frac{q^{-1}\varkappa\,16}{2^{32}-1} = -\frac{77093210412 17}{3^5.5^8.7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31}\,.$$

Daß nehmlich der Zähler von $q^{-1}\varkappa\,16$ durch den Factor 16843009 von $2^{32}-1$ ſich ohne Reſt dividiren läßt, dient zur Probe, daß $q^{-1}\varkappa\,16$ richtig berechnet worden iſt. Der Quotient von der gedachten Diviſion iſt der Zähler von $q^1\varkappa\,17$. Bey dieſer Art die Coefficienten von q^{-1} zu berechnen, zeigt ſich der merkwürdige Umſtand, daß jede zwo zunächſt auf einander folgende Zahlen der Verhältniß 1:1 immer näher und näher kommen, oder immer mehr Ziffern, von der Linken nach der Rechten zu gerechnet, mit einander gemein haben, je weiter man herunterkommt. Die letzte Zahl hat die mehrſten Ziffern mit der vorhergehenden, oder (wenn wie hier ein gerader Coefficient geſucht wird) mit der Hälfte der vorhergehenden Zahl gemein. Uebrigens iſt die hier angezeigte Methode die Coefficienten von q^{-1} zu berechnen einerley mit der, welcher ſich Herr Eſchenbach in ſeinem Aufſatze: Commentatio in locum Kaeſtnerianum de multipli angulorum tangentibus Seite 13 und 14 bedient hat.

Eine andere Art die Coefficienten von q^1, mithin auch von q^{-1}, zu berechnen ergiebt ſich aus der Formel C) wenn man darinnen $m = 1$ ſetzt, man erhält dann

$$q^2 \varkappa (n+1) = (1-2n)\, q^1 \varkappa (n+1) - q^0 \varkappa\, n$$

alſo für $n = 0$

$$q^2 \varkappa\, 1 = q^1 \varkappa\, 1 \text{ mithin } q^1 \varkappa\, 1 = 1$$

für $n = 1$

$$q^2 \varkappa\, 2 = - q^1 \varkappa\, 2 - q^0 \varkappa\, 1$$

oder

$$2\, q^1 \varkappa 1\; q^1 \varkappa 2 = - q^1 \varkappa 2 - 1 \text{ und da } q^1 \varkappa\, 1 = 1$$

$$2\, q^1 \varkappa 2 = - q^1 \varkappa 2 - 1 \text{ oder } 3\, q^1 \varkappa 2 = -1 \text{ und } q^1 \varkappa 2 = -\tfrac{1}{3}$$

Für jedes n das größer als 1 iſt, hat man aber

$q^2 \varkappa (n+1) = (1-2n)\, q^1 \varkappa (n+1)$ alſo,

für ein gerades n

$$(1-2n) q^1 \varkappa (n+1) = 2 q^1 \varkappa (n+1) + 2 q^1 \varkappa 2 .\, q^1 \varkappa\, n + 2 q^1 \varkappa 3 .\, q^1 \varkappa (n-1) \ldots + 2 q^1 \varkappa \frac{n}{2} .\, q^1 \varkappa \left(\frac{n}{2} + 2\right) + \left[q^1 \varkappa \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right]^2 \text{ und}$$

$$-(1+2n)\, q^1 \varkappa (n+1) = 2 q^1 \varkappa 2 .\, q^1 \varkappa\, n + 2 q^1 \varkappa 3 .\, q^1 \varkappa (n-1) + 2 q^1 \varkappa 4 .\, q^1 \varkappa (n-2) \ldots + 2 q^1 \varkappa \frac{n}{2} .\, q^1 \varkappa \left(\frac{n}{2} + 2\right) + \left\{ q^1 \varkappa \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right\}^2$$

für ein ungerades n

$$(1-2p)q^{I}\varkappa(n+1)=2q^{I}\varkappa(n+1)+2q^{I}\varkappa 2.q^{I}\varkappa n+2q^{I}\varkappa 3.q^{I}\varkappa(n-1)$$

$$\ldots+2q^{I}\varkappa\left(\frac{n+1}{2}\right).q^{I}\varkappa\left(\frac{n+3}{2}\right)$$ und

$$-(1+2n)q^{I}\varkappa(n+1)=2q^{I}\varkappa 2.q^{I}\varkappa n+2q^{I}\varkappa 3.q^{I}\varkappa(n-1)$$

$$+2q^{I}\varkappa 4.q^{I}\varkappa(n-2)\ldots+2q^{I}\varkappa\left(\frac{n+1}{2}\right).q^{I}\varkappa\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

Vermittelſt dieſer Formeln kann man aus den Werthen von $q^{I}\varkappa 2$, $q^{I}\varkappa 3$, $q^{I}\varkappa 4$, $q^{I}\varkappa 5,\ldots q^{I}\varkappa n$, den Werth von $q^{I}\varkappa(n+1)$ berechnen. Z. B. Man ſuchte $q^{I}\varkappa\, 17$ ſo hat man für $n=16$

$$-33q^{I}\varkappa 17=2q^{I}\varkappa 2.q^{I}\varkappa 16+2q^{I}\varkappa 3.q^{I}\varkappa 15+2q^{I}\varkappa 4.q^{I}\varkappa 14$$

$$+2q^{I}\varkappa 5.q^{I}\varkappa 13+2q^{I}\varkappa 6.q^{I}\varkappa 12+2q^{I}\varkappa 7.q^{I}\varkappa 11$$

$$+2q^{I}\alpha 8.q^{I}\varkappa 10+(q^{I}\varkappa 9)^{2}$$

Nun iſt, $3^{16}.5^{8}.7^{5}.11^{3}.13^{2}.17^{2}.19.23.29.31=r$ geſetzt,

$$\left.\begin{array}{lcr}
2q^{I}\varkappa 2\; q^{I}\varkappa 16 & = & 11717544135366800 \\
2q^{I}\varkappa 3\; q^{I}\varkappa 15 & = & 7709835032766328 \\
2q^{I}\varkappa 4\; q^{I}\varkappa 14 & = & 7246954535380560 \\
2q^{I}\varkappa 5\; q^{I}\varkappa 13 & = & 7152457757450940 \\
2q^{I}\varkappa 6\; q^{I}\varkappa 12 & = & 7130499109734000 \\
2q^{I}\varkappa 7\; q^{I}\varkappa 11 & = & 7125172413627912 \\
2q^{I}\varkappa 8\; q^{I}\varkappa 10 & = & 7123876129986000 \\
q^{I}\varkappa 9\; q^{I}\varkappa 9 & = & 3561815182884651
\end{array}\right\}:r$$

alſo $$q^{I}\varkappa\, 17=-\frac{58768154297197191}{3^{17}.5^{8}.7^{5}.11^{4}.13^{2}.17^{2}.19.23.29.31}$$

$$=-\frac{7709321041217}{3^{15}.5^{8}.7^{4}.11^{2}.13^{2}.17^{2}.19.23.29.31}$$

Vergleicht man dieſe Rechnung mit der obern, durch welche eben dieſe Bernoulliſche Zahl wie hier beſtimmt wird, ſo erhellet, daß man zwar hier nicht mit ſo großen Zahlen wie dort zu rechnen hat, dagegen hat aber jene Methode den Vorzug, daß man nach geendigter Rechnung eine ſo leichte Probe von der Richtigkeit derſelben machen kann, welche hier nicht ſtatt findet.

8. Aus dieſen berechneten Werthen der Coefficienten von q^{-1} oder q^{1} findet man nun für die Bernoulliſchen Zahlen folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2.3}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{42} = \frac{1}{2.3.7}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{5}{66} = \frac{5}{2.3.11}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{691}{2730} = \frac{691}{2.3\ 5.7.13}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{7}{6} = \frac{7}{2.3}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{510} = \frac{3617}{2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{I} = \frac{43867}{798} = \frac{43867}{2.3.7.19}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{174611}{330} = \frac{174611}{2.3.5.11}$$

$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{138} = \frac{11.77683}{2.3.23}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{236364091}{2730} = \frac{236364091}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{8553103}{6} = \frac{13.657931}{2.3}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{23749461029}{870=2.3.5.29}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{14322} = \frac{5.1723168255201}{2.3.7.11.31}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{7709321041217}{510=2.3\ 5.17}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{2577687858367}{6} = \frac{17.151628697551}{2.3}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{26315271553053477373}{1919190=2.3.5.7.13.19.37}$$

alſo noch 3 Bernoulliſche Zahlen mehr, als Euler berechnet hat, und daraus findet man für die Coefficienten von log q folgende Werthe

$$2 \log q.\ \varkappa\ 2 = -\tfrac{2}{3} = p^{-2}\varkappa.2$$

$$4 \log q.\ \varkappa\ 3 = -\frac{14}{3^2.5} = -\ p^{-4}\varkappa\ 3$$

$$6 \log q.\ \varkappa\ 4 = -\frac{124}{3^3.5.7} = p^{-6}\varkappa\ 4$$

$$8 \log q. \varkappa 5 = - \frac{254}{3^3.5^2.7} = - p^{-8} \varkappa 5$$

$$10 \log q. \varkappa 6 = - \frac{292}{3^5.5.11} = p^{-10} \varkappa 6$$

$$12 \log q. \varkappa 7 = - \frac{5657908}{3^6.5^3.7^2.11.13} = - p^{-12} \varkappa 7$$

$$14 \log q. \varkappa 8 = - \frac{65528}{3^6.5^2.7.11.13} = p^{-14} \varkappa 8$$

$$16 \log q. \varkappa 9 = - \frac{33862354}{3^7.5^4.7.11.13.17} = - p^{-16} \varkappa 9$$

$$18 \log q. \varkappa 10 = - \frac{22998766228}{3^9.5^3.7^3.11.13.17.19} = p^{-18} \varkappa 10$$

$$20 \log q. \varkappa 11 = - \frac{366185109428}{3^9.5^5.7^2.11^2.13.17.19} = - p^{-20} \varkappa 11$$

$$22 \log q. \varkappa 12 = - \frac{26598037736}{3^{10}.5^4.7.11.13.17.19.23} = p^{-22} \varkappa 12$$

Mehrere ſolche logarithmiſche Coefficienten von q könnte man entweder aus den vorhin angegebenen Bernoulliſchen Zahlen nach der Formel

$$2n \log q. \varkappa (n+1) = - \frac{2^{2n+1}(2^{2n-1}-1)\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4 \ldots . 2n}$$

oder aus dem Coefficienten von q^1 nach der Formel

$$2n \log q. \varkappa (n+1) = (2^{2n}-2) q^1 \varkappa (n+1)$$

berechnen.

(Mehrere Anwendungen auf Potenzen beſonderer merkwürdiger Reihen, künftig.)

Erläuterung über logarithmiſche Lokalausdrücke.

Es iſt $\mathrm{Log}\,(ax^\alpha + bx^{\alpha+\beta} + cx^{\alpha+2\beta} + dx^{\alpha+3\beta} \ldots)$

$$= \mathrm{Log}\,(ax^\alpha) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{bx^\beta + cx^{2\beta} + dx^{3\beta} \ldots}{a}\right)$$

$$= \mathrm{Log}\,(ax^\alpha) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{y}{a}\right)$$

$$= \mathrm{Log}\,(ax^\alpha) + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + \ldots$$

wenn man $y = bx^\beta + cx^{2\beta} + dx^{3\beta} + ex^{4\beta} \ldots$ ſetzt.

In dieſem Falle iſt für den Zeiger

$$\begin{pmatrix} b & c & d & e & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{\mathfrak{a}^1 A}{a} x^\beta + \frac{\mathfrak{a}^2 A}{a} x^{2\beta} + \frac{\mathfrak{a}^3 A}{a} x^{3\beta} + \frac{\mathfrak{a}^4 A}{a} x^{4\beta} + \frac{\mathfrak{a}^5 A}{a} x^{5\beta} + \ldots$$

$$-\frac{y^2}{2a^2} = -\frac{\mathfrak{b}^2 B}{2a^2} x^{2\beta} - \frac{\mathfrak{b}^3 B}{2a^2} x^{3\beta} - \frac{\mathfrak{b}^4 B}{2a^2} x^{4\beta} - \frac{\mathfrak{b}^5 B}{2a^2} x^{5\beta} - \ldots$$

$$+\frac{y^3}{3a^3} = +\frac{\mathfrak{c}^3 C}{3a^3} x^{3\beta} + \frac{\mathfrak{c}^4 C}{3a^3} x^{4\beta} + \frac{\mathfrak{c}^5 C}{3a^3} x^{5\beta} + \ldots$$

$$-\frac{y^4}{4a^4} = -\frac{\mathfrak{d}^4 D}{4a^4} x^{4\beta} - \frac{\mathfrak{d}^5 D}{4a^4} x^{5\beta} - \ldots$$

$$+\frac{y^5}{5a^5} = +\frac{\mathfrak{e}^5 E}{5a^5} x^{5\beta} + \ldots$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

alſo $\mathrm{Log}\,(ax^\alpha + bx^{\alpha+\beta} + cx^{\alpha+2\beta} + dx^{\alpha+3\beta} + \ldots)$

$$= \mathrm{Log}\,(ax^\alpha) + \frac{\mathfrak{a}^1 A}{a} x^\beta + \left(\frac{\mathfrak{a}^2 A}{a} - \frac{\mathfrak{b}^2 B}{2a^2}\right) x^{2\beta} +$$

$$+\left(\frac{\mathfrak{a}^3A}{a}-\frac{\mathfrak{b}^3B}{2a^2}+\frac{\mathfrak{c}^3C}{3a^3}\right)x^{3\beta}+\ldots$$

$$+\left(\frac{\mathfrak{a}^nA}{a}-\frac{\mathfrak{b}^nB}{2a^2}+\frac{\mathfrak{c}^nC}{3a^3}-\frac{\mathfrak{d}^nD}{4a^4}\ldots\mp\frac{\mathfrak{n}^n\mathcal{N}}{na^n}\right)x^{n\beta}+\ldots$$

wofür man kurz ſetzen kann

$$\text{Log}\,(ax^\alpha+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}+\ldots)$$

$$=\text{Log}\,(ax^\alpha)+\text{Log p.}\,\varkappa 2\,x^\beta+\text{Log p.}\,\varkappa 3\,x^{2\beta}$$

$$+\ldots+\text{Log p.}\,\varkappa\,(n+1).\,x^{n\beta}+\ldots$$

für die Scale $p[\,a,\ b,\ c,\ d,\ e\ldots]$

Es erhellet hieraus, daß Log p. $\varkappa 1$ niemals vorkommt, ſondern blos Log p. $\varkappa 2$, Log p. $\varkappa 3$ u. ſ. w. und daß für den Zeiger und die Scale

$$p\begin{bmatrix}a, & b, & c, & d, & e, & \ldots\\ , & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\end{bmatrix}$$

$$Lp\varkappa(n\dagger 1)\begin{cases}=\dfrac{\mathfrak{a}^nA}{a}-\dfrac{\mathfrak{b}^nB}{2a^2}+\dfrac{\mathfrak{c}^nC}{3a^3}-\dfrac{\mathfrak{d}^nD}{4a^4}+\ldots\mp\dfrac{\mathfrak{n}^n\mathcal{N}}{na^n}\\[2ex] =\dfrac{\mathfrak{a}^nA}{a}\dagger\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}^nB}{2a^2}\dagger\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{c}^nC}{3a^3}\dagger\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{d}^nD}{4a^4}\dagger\ldots\dagger\dfrac{{}^{-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}\mathfrak{n}^n\mathcal{N}}{na^n}\end{cases}$$

Nun iſt

$$\frac{p^m\varkappa\,(n+1)}{m}=a^m\left(\frac{\mathfrak{a}^nA}{a}\dagger\frac{{}^{m-1}\mathfrak{A}\mathfrak{b}^nB}{2a^2}\dagger\frac{{}^{m-1}\mathfrak{B}\,\mathfrak{c}^nC}{3a^3}\dagger\ldots\dagger\frac{{}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}\mathfrak{n}^n\mathcal{N}}{n\,a^n}\right).$$

welcher Ausdruck, für $m=0$, in Log p. $\varkappa\,(n+1)$ übergeht.

XII.

Verſchiedene combinatoriſch-analytiſch bearbeitete Aufgaben; von Herrn D. Chriſtian Kramp[a]).

Vorerinnerung des Herausgebers.

Nachfolgende Aufgaben waren ſchon im May 1796, alſo noch vor dem Abdrucke der erſten Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen, in meinen Händen. Sie konnten aber dort (a. a. O. S. 118, 1) nicht Platz finden, und ſollten daher im mathematiſchen Archive nachgeliefert werden. Jetzt führe ich ſie, als Fortſetzung jener Aufgaben in der erſten Sammlung, nun in der zweyten auf, wo ſie auch eigentlich hingehören.

Hindenburg.

VII. Aufgabe.

1.

Mit Beybehaltung (E. S. c. a. A. S. 114, V) von

$$\frac{dy}{dx} = p;\quad \frac{dp}{dx} = 2q;\quad \frac{dq}{dx} = 3r;\quad \frac{dr}{dx} = 4s \text{ u. ſ. w.}$$

ſey auch

---

[a]) Jetzt Profeſſeur de Chymie et de Phyſique expérimentale à l'école centrale du Département de la Roer zu Cölln. H.

$$\frac{dx}{dy} = \mathfrak{p}; \quad \frac{d\mathfrak{p}}{dy} = 2\mathfrak{q}; \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dy} = 3\mathfrak{r}; \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dy} = 4\mathfrak{s} \text{ u. ſ. w.}$$

Die Glieder beyder Reihen ſeyen Functionen von x, nicht von y. Die Glieder p, q, r, s . . . der erſtern Reihe werden als gegeben vorausgeſetzt; man ſucht $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ die Glieder der letztern.

Auflöſung.

2. Es iſt [b])

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{dx}{dy} = \mathfrak{p} = \overset{0}{p} = \frac{\Pi^{-1} \varkappa 1}{1}$$

$$\frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = \mathfrak{q} = \overset{1}{p} = \frac{\Pi^{-2} \varkappa 2}{2}$$

$$\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3x}{dy^3} = \mathfrak{r} = \overset{2}{p} = \frac{\Pi^{-3} \varkappa 3}{3}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4x}{dy^4} = \mathfrak{s} = \overset{3}{p} = \frac{\Pi^{-4} \varkappa 4}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{1.2.3.4 \ldots n} \cdot \frac{d^nx}{dy^n} = \overset{n-1}{p} = \frac{\Pi^{-n} \varkappa n}{n}$$

für die Scale Π [p, q, r, s . . .]

---

[b]) Was hier (in 2 und 3) ſteht, habe ich der Auflöſung, die Herr Prof. Kramp ſogleich mit (4) beginnt, vorangeſetzt. Die Lokalzeichen (in 2) ſind nichts anders als bequem Ausdrücke für die Coefficienten, wie ſie Herr K. (in 7) fordert: Coefficienten nähmlich der Glieder $x^0, x^1, x^2 \ldots x^{n-1}$, der Potenzen $-1, -2, -3 \ldots -n$, des Infinitinomi $p + qx + rx^2 + sx^3 \ldots$ durch die Gliederzahlen, $1, 2, 3 \ldots n$ dividirt; welche Coefficienten ſich combinatoriſch (nach 3) leicht finden und angeben laſſen. Es wird für manche Leſer nützlich ſeyn, die Norm der Entwickelung (in 2 und 3) voraus angegeben zu haben, welche nachher (in 6, 7) bewieſen wird. H

3. Für dieſe Scale, oder, wenn man $\Pi = (p + qx^1 + rx^2 + sx^3 + \text{etc})^{-n}$ ſetzt, findet man leicht die Werthe der Lokalausdrücke für die $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ ... in (2). Hierzu dient unter andern die combinatoriſche Formel (C. S. c. a. A. S. 233) für p^m, wenn man für

die dortigen p, m, a, b, c, d ... z

– hier Π, $-n$, p, q, r, s ... x

und für n, nach und nach 1, 2, 3, 4 ... ſetzt.

4. Daraus ergiebt ſich

$$p\mathfrak{p} = 1$$

$$p^3\mathfrak{q} = - q$$

$$p^5\mathfrak{r} = - pr + 2qq$$

$$p^7\mathfrak{s} = - p^2s + 5pqr - 5q^3$$

$$p^9\mathfrak{t} = - p^3t + p^2(6qs + 3rr) - 21pq^2r + 14q^4$$

$$p^{11}\mathfrak{u} = - p^4u + p^3(7qt + 7rs) - p^2(28q^2s + 28qr^2) + 84pq^3r - 42q^5$$

$$p^{13}\mathfrak{v} = - p^5v + p^4(8qu + 8rt + us^2) - p^3(36q^2t + 72qrs + 12r^3)$$
$$+ p^2(120q^3s + 180q^2r^2) - 330pq^4r + 132q^6$$

$$p^{15}\mathfrak{w} = - p^6w + p^5(9qv + 9ru + 9st) - p^4(45q^2u + 90qrt$$
$$+ 45qs^2 + 45r^2s) + p^3(165q^3t + 495q^2rs + 165qr^3)$$
$$- p^2(495q^4s + 999q^3r^2) + p(1287q^5r) - 429q^7$$

etc etc etc etc

5. Und nun das allgemeine Geſetz: für das Differentialverhältniß vom Grade n; oder für

$$\frac{1}{1.2.3.4.5 \ldots n} \cdot \frac{d^n x}{dy^n}$$

Es iſt daſſelbe =

$$\pm\int\frac{n+1.n+2\ldots.n+(\beta+\gamma+\delta+\text{etc})-1}{\beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \text{etc.}}\cdot\frac{q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}t^{\varepsilon}\ \text{etc}}{p^{n+\beta+\gamma+\delta+\ \text{etc}}}\ ^{c)}$$

wo die unbeſtimmte Gleichung iſt $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-1$.

Setzt man hier den Faktoren im Zähler des Coefficienten noch den Faktor n vor, ſo wird aus ihm der Polynomial-Coefficient des Gliedes $\frac{q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}t^{\varepsilon}\ \text{etc}}{p^{n+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ \text{etc}}}$; mit der einzigen Modification, die der verneinte Zuſtand des Exponenten von p nothwendig macht. Der Beweis dieſes Satzes iſt folgender:

6. Der Exponent von p, den wir ſonſt a genannt haben, iſt hier $-(n+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc})$. Folglich die Summe der Exponenten, oder $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc}$, die in der erſten Aufgabe (E. S. c. a. A. S. 102. 3. Zuſ.) m hieß, iſt hier $-n$. Man ſetze daher $-m$ an die Stelle von n, ſo erhält der vorher mit n multiplicirte Coefficient folgende Form:

$$\frac{\pm(-m)(-m+1)(-m+2)\ldots.(-m+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}-1)}{\beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \text{etc}}$$

Und da hier das obere Zeichen + für diejenigen Fälle gilt,

---

c) Dieſer Ausdruck iſt mit jenem (E. S. c. a. A. S. 114. Auflöſ.) durch das dortige $a=n+\beta+\gamma+\text{etc}$ (daſ. no. 2) verkürzten, einerley. Beyde Aufgaben nähmlich, die dortige und die hieſige (1) ſind vollkommen dieſelben; nur iſt, was dort blos angegeben iſt, hier mehr auseinandergeſetzt und erwieſen worden. H.

wo $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc eine gerade Zahl iſt; das untere Zeichen — für diejenigen, wo eben dieſes $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc ungerade wird; in den erſten Fällen aber, die ſämmtlichen verneinten Faktoren des Zählers ein wirklich bejahtes, in den letzten aber ein verneintes Produkt ausmachen müſſen, ſo iſt folglich der aufgeſtellte Coefficient weder mehr noch weniger, als

$$\frac{m(m-1)\ldots.(\alpha+1)}{\beta'\,\gamma'\,\delta'\,\varepsilon'\,\zeta'\,\eta'\,\text{etc}} = \frac{m(m-1)\ldots.3.2.1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\eta'\,\text{etc}};\ \text{alſo}$$

der wirkliche Polynomialcoefficient des Produkts $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. Bezeichnet man dieſen Polynomialcoefficienten, wie oben (E. S. c. a. A. S. 102. 2. Aufl.) mit K, ſo wird das geſuchte Differentialverhältniß vom Grade n gleich

$$\frac{1}{n}\int K p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon\ \text{etc (daſ. 103. 5)}$$

$$\text{wobey } \alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=-n$$

$$\text{und da zugleich } \beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=n-1$$

$$\text{ſo folgt daraus, } \alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+\text{etc}=-1$$

7. Allein, für den beſondern Fall, wo $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=-n$, und $\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=n-1$, iſt $\int K p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon$ etc offenbar der Coefficient des Gliedes x^{n-1}, in der unbeſtimmten Potenz des Infinitinoms

$$(p+qx+rx^2+sx^3+\text{etc})^{-n}.$$

Folglich iſt das geſuchte Differentialverhältniß vom Grade n, oder $\frac{1}{1.2.3.4.5\ldots n}\cdot\frac{d^n x}{dy^n}$ gleich dem Coefficienten des Gliedes x^{n-1} in der unbeſtimmten Potenz des Infinitinoms $(p+qx+rx^2+\text{eto})^{-n}$, durch n dividirt. [d])

8. Die gegenwärtige Aufgabe dient überhaupt dazu, wenn y eine gegebene, algebraiſche oder tranſcendente Function von x iſt, dieſer letztern Größe die Geſtalt einer functionis explicitae von y, oder einer allgemeinen Reihe zu geben, die nach den Potenzen von y fortgeht. In den Fällen wo $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc}$; oder $y = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc}$, findet die gegebene Formel auf der Stelle ihre Anwendung. Sollte aber $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \text{etc}$ ſeyn, ſo machte die Umkehrung der Reihe eine Modification jener Formel nöthig, um anwendbar zu ſeyn. Ich behalte mir dieſes auf eine andere Zeit vor [e]). Hier noch einige ganz leichte Beiſpiele.

I. Wenn $y = x + qx^2$, ſo iſt $x = y - qy^2 + 2qqy^3 - 5q^3y^4 + 14q^4y^5 - 42q^5y^6 + 132q^6y^7 - 429q^7y^8 + 1430q^8y^9 - 4862q^9y^{10} + 16796q^{10}y^{11} - 58786q^{11}y^{12} + \text{etc}$. Der Ter

---

[d]) Das Glied, worinn x^{n-1} vorkommt, iſt offenbar das nte; und ſo kommt für den nten Coefficienten mein obiger (1) Lokalausdruck $\frac{\Pi^{-n} x n}{n}$.

[e]) Man kann die obige allgemeine Reihe

$$y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \text{etc}$$

nach der Formel (E. S. c. a. A. S. 298, 7) für das (n+1)te Glied von x^s, für x^s7 (n+1) umkehren, indem man ſtatt l, r hier i, m ſetzt. Das nte Glied für x (wie oben in 7) zu haben, müßte man in jener Formel minus Generalis iſt $\frac{n+2.\,n+3\ldots2n}{1,\,2,\,3.\,4,\ldots.\,n}\,q^n y^{n+1}$

II. Für $y = x + rx^3$ iſt $x = y - ry^3 + 3r^2y^5 - 12r^3y^7 + 55r^4y^9 - 273r^5y^{11} + 1428r^6y^{13} - \text{etc.}$ Der Terminus Generalis iſt $\frac{2n+2.\,2n+3\ldots3n}{1.\,2.\,3.\,4.\ldots.\,n}\,r^n y^{2n+1}$

III. Für $y = x + sx^4$ iſt $x = y - sy^4 + 4s^2y^7 - 22s^3y^{10} + 140s^4y^{13} - 969s^5y^{16} + 7084s^6y^{19} - \text{etc.}$ Der Terminus Generalis iſt $\frac{3n+2.\,3n+3\ldots4n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots.\,n}\,s^n y^{3n+1}$

IV. Und im Allgemeinen, für $y = x + \theta x^m$ iſt $x = y - A\theta y^m + B\theta^2y^{2m-1} - C\theta^3y^{3m-2} + D\theta^4y^{4m-3} - E\theta^5y^{5m-4} + F\theta^6y^{6m-5} - \text{etc etc.}$ Der Coefficient für das allgemeine

ſtatt	l,	r,	s,	n
hier	1,	m,	1,	n-1

ſetzen; und ſo käme

$$x7n = \frac{1}{1+(n-1)d}\,q^{-\frac{1+(n-1)d}{m}}\,xn.\,y^{\frac{1+(n-1)d}{m}}$$

wo man für q, wenn man will, auch Π ſetzen kann, wie oben (1) vorkommt.

H.

Glied $\theta^n y^{nm-n+1}$ iſt $\dfrac{(m-1)n+2\ (m-1)n+3.(m-1)n+4\ ..mn}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ ....\ n}$

VIII. Aufgabe.

1. Mit Beybehaltung der ſchon oben (E. S. c. a. A. S. 115, VI, 1) gegebenen **Erklärung**, ſind die beyden

Reihen p, q, r, s, t etc
und P, Q, R, S, T etc

gegeben. Man ſucht die dritte $\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y}, \overset{4}{Y}, \overset{5}{Y}$ etc.

Oder, die beyden veränderlichen Größen Y und y ſind bekannte Functionen einer dritten veränderlichen Größe x. Nun ſoll x ſo **eliminirt** werden, daß von jenen beyden, die eine durch die andere, vermittelſt einer unendlichen Reihe beſtimmt werde. Hier, Y durch y.

2. Es iſt f)

$$\overset{1}{Y} = \tfrac{1}{1}\ P\Pi^{-1}x1$$

$$\overset{2}{Y} = \tfrac{1}{2}\ P\Pi^{-2}x2 + \tfrac{2}{2}Q\Pi^{-2}x1$$

$$\overset{3}{Y} = \tfrac{1}{3}\ P\Pi^{-3}x3 \div \tfrac{2}{3}Q\Pi^{-3}x2 + \tfrac{3}{3}\ R\Pi^{-3}x1$$

$$\overset{4}{Y} = \tfrac{1}{4}\ P\Pi^{-4}x4 + \tfrac{2}{4}\ Q\Pi^{-4}x3 + \tfrac{3}{4}\ R\Pi^{-4}x2 + \tfrac{4}{4}\ S\Pi^{-4}x1$$

etc etc etc etc etc etc

---

f) Ich habe hier (in 2) aus eben der Urſache, wie bey der Auflöſung der vorigen Aufgabe (S. 342, 2), die **Norm** der Entwikkelung, die Herr Profeſſor **Kramp** ſogleich mit (3) beginnt, in Lokalausdrücken vorausgeſchickt, die das ſchon etwas complicirte Geſetz der $\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y} \ldots \overset{n}{Y}$ deutlich vor Augen legen. H.

Die Scale iſt hier, wie bey der Auflöſung (2) der vorigen Aufgabe (S. 342)

$$\Pi\ [p, q, r, s, t, u, v \ldots]$$

Auch kann man, zu leichter Auffindung der durch p, q, r, s... zu beſtimmenden Werthe der obigen Lokalausdrücke, ſich der (in 3, S. 343) angeführten combinatoriſchen Formel, nach der dort aufgeſtellten Vergleichung, bedienen.

3. Daraus ergiebt ſich

$$p\overset{1}{Y} = P$$

$$p^{3}\overset{2}{Y} = -Pq+Qp$$

$$p^{5}\overset{3}{Y} = P(-pr+2qq)+Q(-2pq)+R(pq)$$

$$p^{7}\overset{4}{Y}=P(-p^{2}s+5pqr-5q^{3})+Q(-2p^{2}r+5pq^{2})+R(-3p^{2}q)+Sp^{3}$$

$$p^{9}\overset{5}{Y}=P(-p^{3}t+6p^{2}qs+3p^{2}r^{2}-21pq^{2}r+14q^{4})+Q(-2p^{3}s$$
$$+12p^{2}qr-14pq^{3})+R(-3p^{3}r+9p^{2}q^{2})+S(-4p^{3}q)$$
$$+T(p^{4}).$$

$$p^{11}\overset{6}{Y}=P(-p^{4}u+7p^{3}qt+7p^{3}rs-28p^{2}q^{2}s-28p^{2}qr^{2}$$
$$+84pq^{3}r-42q^{5})+Q(-2p^{4}t+14p^{3}qs+7p^{3}r^{2}-56p^{2}q^{2}r$$
$$+42pq^{4})+R(-3p^{4}s+21p^{3}qr-28p^{2}q^{3})+S(-4p^{4}r+14p^{3}q^{2})$$
$$+T(-5p^{4}q)+U(p^{5}).$$

$$p^{13}\overset{7}{Y}=P(-p^{5}v+8p^{4}qu+8p^{4}rt+4p^{4}s^{2}-36p^{3}q^{2}t-72p^{3}qrs$$
$$-12p^{3}r^{3}+120p^{2}q^{3}s+180p^{2}q^{2}r^{2}-330pq^{4}r+132q^{6})$$
$$+Q(-2p^{5}u+16p^{4}qt+16p^{4}rs-72p^{3}q^{2}s-72p^{3}qr^{2}$$
$$+240p^{2}q^{3}r-132pq^{5})+R(-3p^{5}t+24p^{4}qs+12p^{4}r^{2}$$

$$-108p^3q^2r+90p^4q^4)+S(-4p^5s+32p^4qr-48p^3q^3)$$
$$+T(-5p^5r+20p^4q^2)+U(-6p^5q)+V(p^6)$$

etc etc etc etc etc etc

4. Was die vorgeſetzten Zeichen der Produkte $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc anbetrift, ſo fällt es ſogleich auf, daß die Glieder bejaht ſind, wo $\beta+\gamma+\delta+$ etc eine gerade Zahl; diejenigen hingegen verneint ſind, wo $\beta+\gamma+\delta+$ etc eine ungerade Zahl iſt. In Rückſicht auf alles übrige, iſt folgendes das allgemeine Geſetz der Reihe, die $\overset{n}{Y}$ ausdrücken ſoll, und wo durchgehends a ſtatt $n+\beta+\gamma+\delta+$ etc geſetzt iſt:

$$\overset{n}{Y} = P\int \frac{n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$
$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-1)$$

$$+ Q\int \frac{2.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$
$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-2)$$

$$+ R\int \frac{3.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$
$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-3)$$

$$+ S\int \frac{4.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$
$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-4)$$

$$+ T\int \frac{5.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$
$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-5)$$

$$+ U\int \frac{6.\,n+1.\,n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\ \text{etc}}\ p^{-a}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}\ \text{etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-6)$$

etc etc etc etc etc etc g)

5. So viel iſt es, was ich bisher, indem ich ganz meinen eigenen Weg gieng, ohne alle Kenntniß Ihrer Lokalzeichen h) in der Combinationenlehre geleiſtet habe. Ich habe ſehr vieles weggelaſſen. Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf beſondere Fälle bleiben dem eigenen Fleiße jedes Leſers anheimgeſtellt, der dieſelben bis ins Unendliche vervielfältigen kann. Den weitern Gebrauch der Combinationenlehre in der allgemeinen und vollſtändigen Auflöſung der Equations aux différences finies, worinn ich ſchon eini-

---

g) In meinen Lokalausdrücken wäre (nach 2)

$$\overset{n}{Y} = \frac{1}{n} P\Pi^{-n}\varkappa n + \frac{2}{n} Q\Pi^{-n}\varkappa(n-1) + \frac{3}{n} R\Pi^{-n}\varkappa(n-2)\ldots$$

$$\ldots + \frac{n-1}{n}\ \overset{n-2}{P}\,\Pi^{-n}\varkappa 2 + \frac{n}{n}\ \overset{n-1}{P}\,\Pi^{-n}\varkappa 1$$

$$\Pi\,[\,p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\ldots.\,]$$

wo die Buchſtaben P, Q, R... deutliche Nachweiſung geben, welche, Lokalausdrücke in dieſer Formel, und combinatoriſche Integrale oder Aggregate oben im Texte, mit einander übereinſtimmen, und, gehörig entwickelt, einerley Werthe geben. H.

h) Ich trage gewöhnlich, der Kürze und bequemern Ueberſicht wegen, die Auflöſungsformeln in Lokalzeichen vor, die ſich auf combinatoriſche Functionen beziehen, deren Entwickelung durch bekannte Anordnungen und Involutionen der Elemente gegeben iſt. Herr Profeſſor Kramp legt ſogleich die, nach ſeiner Art gezeichneten, combinatoriſchen Aggregate ſelbſt vor, die, gewöhnlich eine, zuweilen zwey unbeſtimmte Gleichungen von einer beliebigen Anzahl unbekannter Größen vorausſetzen, und nur eine beſtimmte Anzahl von Auflöſungen, in ganzen poſitiven Zahlen, zulaſſen. H.

ge nicht unbedeutende Fortſchritte gethan habe, behalte ich mir auf eine andere Zeit vor.

6. Anmerkung des Herausgebers. Man darf, wegen deſſen, was hier (in 5) geſagt worden iſt, nicht vergeſſen, was ich gleich zu Anfange dieſes Aufſatzes (S. 341) erinnert habe, daß mir derſelbe, nebſt dem, was in der erſten Sammlung (S. 109-117) ſteht, ſchon im May 1796 von dem Verfaſſer überſchickt worden iſt. Von ſeinen weitern Fortſchritten im combinatoriſchen Fache habe ich gelegentlich im mathematiſchen Archive, vom fünften Hefte an, aus Briefen Nachricht gegeben. Die ausführlichſte Anwendung der Combinationslehre auf die Analyſis hat Herr K. nachher in ſeiner gründlichen Analyse der von ihm ſogenannten facultés numériques gemacht, wovon ich ſo oft im Archive geſprochen habe, und welche nunmehr in ſeinem claſſiſchen Werke, Analyse des Réfractions aſtronomiques et terreſtres (Straßburg und Leipzig bey Schwickert 1799) erſchienen iſt, und daſelbſt das dritte Kapitel (von S. 46-113) ausmacht.

XIII.

Ueber die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlenreihe, vermittelſt der Combinationenlehre [a]; von

Herrn D. Chriſtian Kramp.

Lehrſatz I.

1.

Die Summe der Potenzen vom Grade n, der Glieder in der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis y, exclusive, oder $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \ldots + (y-1)^n$, iſt gleich dem combinatoriſchen Integrale:

$$\int \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots\ldots(y-t)n}{(t+1)\beta'\gamma'\delta' \text{ etc } 1^{\beta} 2^{\gamma} 6^{\delta} 24^{\varepsilon} 120^{\zeta} \text{ etc}}$$

wobey

1) der Verbindungen von $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ etc ſo viele ſind, als die unbeſtimmte Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon +$ etc $= n$, mögliche Auflöſungen in ganzen und bejahten Zahlen zuläßt:

---

[a] Aus einer Beylage zu einem Schreiben vom 30 May 1796. Eine kurze Ueberſicht des Inhalts habe ich bereits im mathematiſchen Archive (Heft V. S. 107-109) gegeben. Hier liefere ich den Aufſatz ſelbſt, mit Beybehaltung der Zeichnung im Manuſcripte, weil dieſe mit der im Archive und den beyden Sammlungen bisher gebrauchten, übereinſtimmt, es alſo überflüſſig ſeyn würde, die neuen Zeichen der Analyſe des facultés numériques hier erſt aufzuführen. H.

2) die jedesmalige Summe dieſer Größen, in jedem beſondern Falle, oder $\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc} = t$ geſetzt iſt: und

3) die Zeichen n', β', γ', δ', ε' ... die bekannten Produkte (E. S. c. a. A. S. 102, 2; 114, 2) bedeuten.

Erklärung.

2. Bey der Auseinanderſetzung desjenigen, was nunmehr geſagt werden ſoll, kömmt alles auf eine geſchickte, und ſoviel möglich kurze Bezeichnung an. Ich erkläre daher, daß ich durch NT anzeigen werde, die Summe der aus Zahlenprodukten in Zähler und Nenner beſtehenden Brüche, $\frac{n'}{\beta'.\,\gamma'.\,\delta'.\,\varepsilon'.\text{etc}\;1^{\beta}\,2^{\gamma}\,6^{\delta}\,24^{\varepsilon}\,\text{etc}}$; wobey die beyden unbeſtimmten Gleichungen

$$\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \text{etc} = n$$

und $$\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc} = t$$

zum Grunde gelegt ſind, und der Verbindungen der Größen β, γ, δ, ε, etc ſo viele ſeyn müſſen, als die beyden erſt erwähnten Gleichungen Auflöſungen in ganzen und bejahten Zahlen zulaſſen.

Erklärung.

3. Ich werde das Produkt $y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-t+1)$ mit y_t bezeichnen. Dieſer Bezeichnung zufolge iſt

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y(y-1)$$
$$y_3 = y(y-1)(y-2)$$
$$y_4 = y(y-1)(y-2)(y-3)$$
$$y_5 = y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)$$

Folgeſatz.

4. Die geſammte Zahl der möglichen Auflöſungen der unbeſtimmten Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon +$ etc $= n$ läßt ſich folgendergeſtalt in Klaſſen eintheilen. Ich rechne zur erſten Klaſſe diejenigen Auflöſungen, wo $t = n$ iſt. Zur andern Klaſſe diejenigen Auflöſungen, wo $t = n - 1$. Zur dritten Klaſſe diejenigen, wo $t = n - 2$. Die letzte Klaſſe wird diejenigen Auflöſungen enthalten, wo $t = 1$, und die alſo nur aus einem einzigen Gliede beſtehen.

Folgeſatz.

5. Demzufolge iſt $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (y-1)^n$ oder

$$\int y^n = \frac{y^{n+1}}{n+1} + N(N-1)\frac{y^n}{n} + N(N-2)\frac{y^{n-1}}{n-1}$$

$$+ N(N-3)\frac{y^{n-2}}{n-2} + N(N-4)\frac{y^{n-3}}{n-3} + \ldots + N3\frac{y^4}{4}$$

$$+ N2\frac{y^3}{3} + N1\frac{y^2}{2}.$$

Beyſpiel.

6. Man verlangt den allgemeinen Ausdruck für $\int y^7$ oder $1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 + 5^7 + \ldots + (y-1)^7$?

Die allgemeine Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + 5\zeta + 6\eta + 7\theta = 7$, läßt 15 Auflöſungen in ganzen und bejahten Zahlen zu, die nach ihren Klaſſen (4) geordnet, folgende ſind:

t	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ
7	7	0	0	0	0	0	0
6	5	1	0	0	0	0	0
5	4	0	1	0	0	0	0
5	3	2	0	0	0	0	0
4	3	0	0	1	0	0	0
4	2	1	1	0	0	0	0
4	1	3	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0	0	0
3	1	0	2	0	0	0	0
3	0	2	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 \end{pmatrix}$$

Dieſer Tafel und der allgemeinen Formel

$$\frac{n'}{\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}\ 1^{\beta}\,2^{\gamma}\,6^{\delta}\,24^{\varepsilon}\ \text{etc}}$$

(2) zufolge, erhalten die Coefficienten folgende Werthe:

$NN = 1$

$N(N-I) = 21$

$N(N-II) = 140$

$N(N-III) = 350$

$N(N-IV) = 301$

$N(N-V) = 63$

$N(N-VI) = 1$

Und es wird demnach

$$1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\ldots+(y-1)^7=\frac{y_8}{8}+\frac{21y_7}{7}+\frac{140y_6}{6}$$

$$+\frac{350y_5}{5}+\frac{301y_4}{4}+\frac{63y_3}{3}+\frac{y_2}{2}.$$

8. Wendet man die gleiche Berechnung auch auf andere Exponenten an, ſo ergiebt ſich daraus folgende Tabelle:

$$\Sigma y^0 = y_1$$

$$\Sigma y^1 = \tfrac{1}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^2 = \tfrac{1}{3}y_3+\tfrac{3}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^3 = \tfrac{1}{4}y_4+\tfrac{6}{3}y_3+\tfrac{7}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^4 = \tfrac{1}{5}y_5+\tfrac{10}{4}y_4+\tfrac{25}{3}y_3+\tfrac{15}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^5 = \tfrac{1}{6}y_6+\tfrac{15}{5}y_5+\tfrac{65}{4}y_4+\tfrac{90}{3}y_3+\tfrac{31}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^5 = \tfrac{1}{7}y_7+\tfrac{21}{6}y_6+\frac{140}{5}y_5+\frac{350}{4}y_4+\frac{301}{3}y_3$$

$$+\tfrac{63}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^7 = \tfrac{1}{8}y_8+\tfrac{28}{7}y_7+\frac{266}{6}y_6+\frac{1050}{5}y_5+\frac{1701}{4}y_4$$

$$+\frac{966}{3}y_3+\frac{127}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^8 = \tfrac{1}{9}y_9+\tfrac{36}{8}y_8+\frac{462}{7}y_7+\frac{2646}{6}y_6+\frac{6951}{5}y_5$$

$$+\frac{7770}{4}y_4+\frac{3025}{3}y_3+\frac{255}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^9 = \tfrac{1}{10} y_{10} + \tfrac{45}{9} y_9 + \frac{750}{8} y_8 + \frac{5880}{7} y_7 + \frac{22827}{6} y_6$$

$$+ \frac{42525}{5} y_5 + \frac{34105}{4} y_4 + \frac{9330}{3} y_3 + \frac{511}{2} y_2 + y_1$$

9. Vermittelſt einer leichten Modification, die ich dem eigenen Forſchungsgeiſte der Leſer überlaſſe, iſt durch dieſe Formeln das Integral Σy^n ſo beſtimmt, daß es nicht, wie vorhin mit $(y-1)^n$ aufhört, ſondern das allerletzte Glied y^n noch mit einſchließt. Sollte hingegen jener erſtere Sinn beibehalten werden, ſo dienen zwar die nämlichen Coefficienten, aber für ſolche Potenzen Summen, die um einen Grad höher ſind, auf folgende Weiſe:

$$\Sigma y^1 = \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^2 = \tfrac{1}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^3 = \tfrac{1}{4} y_4 + \tfrac{3}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^4 = \tfrac{1}{5} y_5 + \tfrac{6}{4} y_4 + \tfrac{7}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^5 = \tfrac{1}{6} y_6 + \tfrac{10}{5} y_5 + \tfrac{25}{4} y_4 + \tfrac{15}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^6 = \tfrac{1}{7} y_7 + \tfrac{15}{6} y_6 + \tfrac{65}{5} y_5 + \tfrac{90}{4} y_4 + \tfrac{31}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^7 = \tfrac{1}{8} y_8 + \frac{21}{7} y_7 + \frac{140}{6} y_6 + \frac{350}{5} y_5 + \frac{301}{4} y_4$$

$$+ \frac{63}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^8 = \tfrac{1}{9} y_9 + \frac{28}{8} y_8 + \frac{266}{7} y_7 + \frac{1050}{6} y_6 + \frac{1701}{5} y_5$$

$$+ \frac{966}{4} y_4 + \frac{127}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^9 = \tfrac{1}{10} y_{10} + \frac{36}{9} y_9 + \frac{462}{8} y_8 + \frac{2646}{7} y_7$$

$$+ \frac{6951}{6} y_6 + \frac{7770}{5} y_5 + \frac{3025}{4} y_4 + \frac{255}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^{10} = \tfrac{1}{11} y_{11} + \frac{45}{10} y_{10} + \frac{750}{9} y_9 + \frac{5880}{8} y_8$$

$$+ \frac{22827}{7} y_7 + \frac{42525}{6} y_6 + \frac{34105}{5} y_5 + \frac{9330}{4} y_4$$

$$+ \frac{551}{3} y_3 + {}^{1}\, y_2.$$

10. Zieht man die Σy^n der zweyten Tabelle, von den Σy^n der erſten Tabelle ab, ſo giebt der Unterſchied den wahren Werth eben dieſes letzten Gliedes y^n zu erkennen, das bey dem zweyten ausgeſchloſſen, und bey dem erſtern mit eingerechnet war. Es iſt

$$x^1 = x_1$$

$$x^2 = x_1 + x_2$$

$$x^3 = x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$x^4 = x_1 + 7x_2 + 6x_3 + x_4$$

$$x^5 = x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 10x_4 + x_5$$

$$x^6 = x_1 + 31x_2 + 90x_3 + 65x_4 + 15x_5 + x_6$$

$$x^7 = x_1 + 63x_2 + 301x_3 + 350x_4 + 140x_5 + 21x_6 + x_7$$

$$x^8 = x_1 + 127x_2 + 966x_3 + 1701x_4 + 1050x^5 + 266x_6$$
$$+ 28x_7 + x_8$$

$$x^9 = x_1 + 255x_2 + 3025x_3 + 7770x_4 + 6951x^5 + 2646x_6$$
$$+ 462x_7 + 36x_8 + x_9$$

$$x^{10} = x_1 + 551x_2 + 9330x_3 + 34105x_4 + 42525x_5 + 22827x_6 + 5880x_7 + 750x_8 + 45x_9 + x_{10}$$

11. Einem erfahrnen Analyſten ſollen die hier nach einander hervortretenden Coefficienten nichts Neues ſeyn. Sie ſind offenbar nichts anders, als die erſten Glieder der aufeinander folgenden Differenzenreihen, der Potenzen natürlicher Zahlen, mit den Gliedern der hypergeometriſchen Reihe 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 etc multiplicirt. Ein Beyſpiel wird dieſes anſchaulich machen. Man nehme die Reihe der ſechſten Potenzen von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

1						
64	63					
729	665	602				
4096	3367	2702	2100			
15625	11529	8262	5460	3360		
46656	31031	19502	11340	5880	2520	
117649	70993	39962	20460	9120	3240	720

12. Man vergleiche die erſten Glieder dieſer Reihen, 1, 63, 602, 2100, 3360, 2520, 720, mit den Coefficienten der Reihe die x^7 ausdrückt, nämlich 1, 63, 301, 350, 140, 21, 1, ſo ergiebt ſich, daß

$$1 = 1$$

$$63 = \frac{63}{1}$$

$$301 = \frac{602}{1.2}$$

$$350 = \frac{2100}{1.2.3}$$

$$140 = \frac{3360}{1.2.3.4}$$

$$21 = \frac{2520}{1.2.3.4.5}$$

$$1 = \frac{720}{1.2.3.4.5.6}$$

13. Und überhaupt, wenn angenommen wird,

$$x^{n+1} = x_1 + Ax_2 + Bx_3 + Cx_4 + Dx_5 + Ex_6 + Fx_7 + \dots + x_{n+1}$$

ſo iſt

$$1\,A = 2^n - 1^n$$
$$1.2.B = 3^n - 2.2^n + 1^n$$
$$1.2.3C = 4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1^n$$
$$1.2.3.4D = 5^n - 4.4^n + 6.3^n - 4.2^n + 1^n$$
$$1.2.3.4.5.E = 6^n - 5.5^n + 10.4^n - 10.3^n + 5.2^n - 1^n$$
$$1.2.3.4.5.6.F = 7^n - 6.6^n + 15.5^n - 20.4^n + 15.3^n - 6.2^n + 1^n.$$

14. Da nun ferner $\Delta x_n = nx_{n-1}$; folglich Σx_n, mit Weglaſſung des letzten Gliedes x_n, oder $1_n + 2_n + 3_n + 4_n + 5_n + \dots + (x-1)_n = \frac{x_{n+1}}{n+1}$; und eben dieſes Σx_n, mit Einſchließung des lezten Gliedes x_n, oder $1_n + 2_n + 3_n + 4_n + 5_n + \dots + (x-1)_n + x_n = \frac{(x+1)_{n+1}}{n+1}$ iſt, ſo laſſen ſich aus der einzigen Reihe für x_n, die beiden andern, oben erwähnten für Σx_n, unmittelbar herleiten, wo die bey der erſtern derſelben nothwendige Reduction, vermittelſt des an ſich ſelbſt auffallenden Lehrſatzes, $x.x_n = nx_n + x_{n+1}$, ſehr leicht bewerkſtelligt wird.

15. Das bisher Geſagte ſetzt weiter nichts als die ganz gemeine Theorie der figurirten Zahlen, ohne einige Kenntniß

höherer Analyſis, voraus. Allein, daß eben jene Coefficienten A, B, C, D etc., auf welchen hier alles beruht, auch unabhängig von der Berechnung der Potenzen, durch die Combinationenlehre allein, gefunden werden können, dies iſt eine neue und für die künftigen Fortſchritte der Wiſſenſchaft wichtige Wahrheit.

16. Dem bisher geſagten zufolge iſt, die noch nie ſummirte Reihe $y^n - \frac{(y-1)}{1}(y-1)^n + \frac{(y-1)(y-2)}{1.2}(y-2)^n$

$$- \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3}(y-3)^n + \ldots \pm 1^n$$

gleich 1.2.3.4...(y−1), multiplicirt mit der Summe aller Produkte $\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots 1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}\ldots 1^\beta 2^\gamma 6^\delta 24^\epsilon \text{ etc}}$, wobey die beyden Gleichungen

$$\beta + \gamma + \delta + \epsilon + \text{etc} = y$$
$$\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\epsilon + \text{etc} = n+1$$

zum Grunde gelegt ſind.

17. Und wenn, n+1 = m geſetzt, und dann, wie oben, ein ſolches Integral mit MY bezeichnet wird, wobey ſtatt Y auch die numeriſchen Werthe, die y in beſondern Fällen haben kann, nur zur Deutlichkeit in vergrößerter Form, geſetzt werden können, ſo wird

$$2^n - 1^n = M2$$
$$3^n - 2.2^n + 1^n = 2M3$$
$$4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1^n = 6M4$$
$$5^n - 4.4^n + 6.3^n - 4.2^n + 1^n = 24M5$$
$$6^n - 5.5^n + 10.4^n - 10.3^n + 5.2^n - 1^n = 120M6$$
$$7^n - 6.6^n + 15.5^n - 20.4^n + 15.3^n - 6.2^n + 1^n = 720M7$$
$$8^n - 7.7^n + 21.6^n - 35.5^n + 35.4^n - 21.3^n + 7.2^n - 1^n = 5040M8$$

etc. etc. etc. etc. etc.

18. Die unmittelbare Folge der hier aufgeſtellten Gleichungen iſt folgende Reihe von Wahrheiten:

$1^n = M1$

$2^n = M1 + M2$

$3^n = M1+2M2+2.1M3$

$4^n = M1+3M2+3.2M3+3.2.1M4$

$5^n = M1+4M2+4.3M3+4.3.2M4+4.3.2.1M5$

$6^n = M1+5M2+5.4M3+5.4.3M4+5.4.3.2M5+5.4.3.2.1\,M6$

$7^n = M1+6M2+6.5M3+6.5.4M4+6.5.4.3M5+6.5.4.3.2M6$
$+6.5.4.3.2.1M7$

etc etc etc etc etc

19. Und überhaupt

$$y^n = M1 + (y-1)\,M2 + (y-1)\,(y-2)\,(y-3)\,M3$$
$$+(y-1)\,(y-2)\,(y-3)\,(y-4)M4+\ldots$$
$$\ldots+(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1)\,MP+\ldots\ldots$$
$$\ldots+(y-1)(y-2)\ldots 5.4\,3.2.1\,MY.$$

20. Der allgemeine Ausdruck aller der einzelnen Glieder, woraus MP beſteht, iſt

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2\ldots 3.2.1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.etc\,1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}etc}\ldots\left(\begin{matrix}\beta+2\gamma+3\delta+etc=m;\\ \beta+\gamma+\delta+etc=p;\end{matrix}\right)$$

Dieſer, mit $(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1)$ oder $\frac{y'}{y(y-p)(y-p-1)\ldots3.2.1}$ multiplicirt, und zugleich $y-p$, oder $y-(\beta+\gamma+\delta+etc)=\alpha$ geſetzt, giebt $\frac{m'.\,y'}{y.\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.etc\ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\ etc}$ für den allgemeinen Ausdruck aller der einzelnen Glieder, aus welchen das geſammte combinatoriſche Integral beſteht, das y^n oder y^{m-1} gleich ſeyn ſoll. Es iſt demnach

$$y^m = \int \frac{m',\,y'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.etc\,1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\ etc.}$$

wobey die beyden unbeſtimmten Gleichungen

$$\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=m$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=y$$

zum Grunde liegen.

Beyſpiel.

21. Es ſey $m=6$; $y=10$; die Gleichung $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+5\zeta+6\eta=6$ läßt eilf Auflöſungen in ganzen und bejahten Zahlen zu; für deren jede der Exponent α, vermöge der zweyten Gleichung $\alpha+\beta+\gamma+\delta=10$, und dann auch der Bruch $\dfrac{m'.\,y'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\,\text{etc}\ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\,\text{etc}}$. ſeinen beſondern Werth erhält, nämlich:

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	Bruch
4	6						151200
5	4	1					453600
6	3		1				100800
6	2	2					226800
7	2			1			10800
7	1	1	1				43200
7		3					540
8	1				1		10800
8			2				900
8		1		1			1350
9						1	10
						Summe $=$	$1000000=y^m=10^6$.

22. Die gleich anfangs aufgeworfene Aufgabe, die Summe von $1^m+2^m+3^m+4^m+\ldots+y^m$, durch die Combinationenlehre zu beſtimmen, läßt ſich, ſo wie noch unendlich viele andere, vermöge der erſt angegebenen allgemeinen Ausdrücke von 1^m, 2^m, 3^m, 4^m etc unmittelbar

aufſuchen; und man wird, auf dieſem ganz verſchiedenen Wege, obigen Ausdruck beſtätigt finden. Es iſt nämlich, das lezte Glied y^n mit eingeſchloſſen,

$$\Sigma 1^n = M1$$

$$\Sigma 2^n = 2M1 + M2$$

$$\Sigma 3^n = 3M1 + 3M2 + 2M3$$

$$\Sigma 4^n = 4M1 + 6M2 + 8M3 + 6M4$$

$$\Sigma 5^n = 5M1 + 10M2 + 20M3 + 39M4 + 24M5$$

$$\Sigma 6^n = 6M1 + 15M2 + 40M3 + 90M4 + 144M5 + 120M6$$

$$\Sigma 7^n = 7M1 + 21M2 + 70M3 + 210M4 + 504M5 + 840M6 + 720M7$$

etc etc etc etc etc etc

und überhaupt

$$\Sigma y^n = \Sigma y^{m-1} = yM1 + \frac{y(y-1)}{2}M2 + \frac{y(y-1)\ (y-2)}{3}M3$$

$$+ \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4}M4 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)}{5}M5$$

$$+ \ldots \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots\ldots(y-p+1)}{p}MP \ldots\ldots$$

$$+ (y-1)(y-2)(y-3)\ldots\ldots 3.2.1\,MY$$

23. Der allgemeine Ausdruck aller der einzelnen Glieder, woraus MP beſteht, iſt wieder

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots 3.2.1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}\ 1^\beta 2^\gamma 6^\delta\ \text{etc}}; \quad \left(\begin{matrix}\beta + 2\gamma + 3\delta + \text{etc} = m \\ \beta + \gamma + \delta + \text{etc} = p\end{matrix}\right)$$

Dieſer, mit

$$\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-p+1)}{p} \text{ oder } \frac{y'}{p(y-p)(y-p-1)\ldots\ldots 3.2.1}$$

oder $\frac{y'}{(y-\alpha)\alpha'}$ multiplicirt, giebt

$$\frac{m'.\,y'}{(y-\alpha)\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\text{ etc }\; 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{ etc}}$$

Die Summe dieſer Produkte iſt Σy^{m-1}.

Der hier gegebene allgemeine Ausdruck für y^n, wobey beyde, ſowohl y als n, als veränderliche Größen angeſehen werden können, iſt für die Fortſchritte der Wiſſenſchaft deswegen wichtig, weil durch ihn die veränderliche Größe, die ſo viele Schwierigkeit macht, wenn ſie als Exponent vorkömmt, aus demſelben ganz oder zum Theil weggeſchafft, und unter die Coefficienten verſetzt wird. Die Sache iſt um ſo viel unerwarteter, da der einzige, einigermaßen hieher gehörige Ausdruck von y^n, den die höhere Analyſis bisher gelehrt hat, Erſtens, die Kenntnis der Baſis des hyperboliſchen Logarithmen-Syſtems vorausſetzt: ſodann, derſelbe Ausdruck eine unendliche Reihe iſt, und alle Beſchwerden unendlicher Reihen mit ſich führt; und drittens derſelbe Ausdruck nur in den allerwenigſten Fällen, und nur alsdann brauchbar iſt, wenn der Exponent einen Bruch, kleiner als die Einheit, vorſtellt, indem in allen andern Fällen die Reihe mehr oder weniger divergirt.

Von ſo erheblichen Vorzügen und Folgen iſt die combinatoriſche Auflöſung dieſer Aufgabe vor andern nicht-combinatoriſchen!

Schlußerinnerung des Herausgebers.

1. Von den Potenzſummen der Zahlen 1, 2, 3 .... nach der Ordnung, hat unter andern Euler in ſeinen Inſtitt. Calc. Differ. ausführlich gehandelt, und (Vol. I. art. 61, 62 und Vol. II. art. 132) zwey Formeln, für

$$S x^n = 1+2^n+3^n+4^n+5^n \dots + x^n$$

für die Summe nähmlich der Potenzen n der natürlichen Zahlen von 1 bis x, incluſiue, gegeben. Wie dabey die

Bernoullischen Zahlen, $\frac{1}{6} = A$; $\frac{1}{30} = B$; $\frac{1}{42} = C$; u. ſ. w. und die Binomialcoefficienten, ${}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\mathfrak{C}$, ${}^{n}\mathfrak{E}$ .... concurriren, erhellet ſehr deutlich aus der zweyten Formel, nach welcher, die beyderley Zeichen darinn ſubſtituirt,

$$
\begin{aligned}
Sx^{n} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \tfrac{1}{2} x^{n} & \\
+ \frac{A \; {}^{n}\mathfrak{A}}{2} x^{n-1} & \\
- \frac{B \; {}^{n}\mathfrak{C}}{4} x^{n-3} & \\
+ \frac{C \; {}^{n}\mathfrak{E}}{6} x^{n-5} & \\
- \frac{D \; {}^{n}\mathfrak{G}}{8} x^{n-7} & \\
\text{u. ſ. w.} &
\end{aligned}
$$

wo, vom dritten Gliede an, die Bernoulliſchen Zahlen nach der Ordnung, die Binomialcoefficienten aber (ſo wie die Diviſoren und die Exponenten von x) ſprungweiſſe fortgehen. Die Werthe der Bernoulliſchen Zahlen A, B, C, D .... bis mit der achtzehnden S, findet man auch hier (S. 336, 337) von Herrn Prof. Rothe berechnet angegeben.

2. Da die Binomialcoefficienten an ſich combinatoriſcher Herkunft ſind, auch die Bernoulliſchen Zahlen, ſowohl durcheinander als unabhängig von einander, combinatoriſch ſich darſtellen laſſen, ſo leuchtet es deutlich ein, daß auch jene Potenzſumme $1 + 2^{n} + 3^{n}$ ...., auf combinatoriſchem Wege ſich finden und beſtimmen laſſen müſſe. Dies war, wie auch die Ueberſchrift (S. 353) ausſagt, die eigentliche Abſicht, der nächſte Zweck, der vorſtehenden Unterſuchung. Wie ſich die Summen der **Producte** der natürlichen Zahlen von 1 bis m − 1 incluſive, durch Summen der Potenzen eben dieſer Zahlen ausdrücken laſſen, davon in der Analyſe des facultés numériques, art. 165 (Anal. des Refr. p. 96).