



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

5941

Alexander Zivex

Preis eines jeden Heftes im Jahresabonnement 30 Pfennig.

830.6
 319
 n. s. v. 5
 Heft 112/113

**Sammlung
 gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge,**

begründet von
 Rud. Virchow und Fr. von Holtendorff,
 herausgegeben von
 Rud. Virchow und Wilh. Wattenbach.

Neue Folge. Fünfte Serie.
 (Heft 97-120 umfassend.)

Heft 112/113.

**Gemeinverständliches
 über die
 sogenannte vierte Dimension.**

Vortrag,

gehalten bei dem Stiftungsfest des mathem. naturw. Vereins
 der technischen Hochschule in Stuttgart am 8. Dezember 1888;
 mit Erweiterungen und Citaten

von

Dr. Carl Graub,

an der technischen Hochschule in Stuttgart.

Mit zehn Abbildungen.

Hamburg.

Verlagsanstalt und Druckerei A. G. (vormals J. F. Richter).

1890.

Diesem Hefte liegt ein Prospekt von Hermann Gurrwih & Co. in Berlin, betit. „Dachographie“ bei, der Beachtung der Leser besonders empfohlen.

Es wird gebeten, die anderen Seiten des Umschlages zu beachten.

Notiz.

Die Redaktion der naturwissenschaftlichen Vorträge dieser Sammlung besorgt Herr Professor **Rudolf Virchow** in Berlin W., Schellingstr. 10, diejenige der historischen und litterarhistorischen Herr Professor **Wattenbach** in Berlin W., Corneliustr. 5.

Einsendungen für die Redaktion sind entweder an die Verlagsanstalt oder je nach der Natur des abgehandelten Gegenstandes an den betreffenden Redakteur zu richten.

Vollständige Verzeichnisse über alle bis Oktober d. J. in der „Sammlung“ erschienenen 590 Hefte sind durch alle Buchhandlungen oder direkt von der Verlagsanstalt unentgeltlich zu beziehen.

Verlagsanstalt und Druckerei A. G. (vormals J. F. Richter) in Hamburg.

Sieben ist erschienen:

Ragn i.

Roman von Björnstjerne Björnson.

Autorisirte Uebersetzung.

2 Bände. Eleg. geh. Mf. 9.—, eleg. geb. Mf. 11.—.

Aus den Urtheilen der Presse:

Die Hauptgestalten sind von jener herben Wichtigkeit, wie sie die Heimath des Dichters selbst in der Wirklichkeit kennt. Dieser Zug geht selbst auf jene Menschen über, die eingeführt sind, um die Fähigkeiten und Eigenschaften der Hauptgestalten schärfer zu betonen — sei es nach oben, dem Lichte zu, sei es hinunter, entlang die Pfabe der Vererbung. Tadel ist die Wildlichkeit gewahrt, wie seit desselben Dichters, vor mehr als einem halben Jahrhundert geschriebenen Meisternovelle „Syndee Solbatten“ nicht. **(Hamburger Nachrichten.)**

Björnson hat sich in seinem neuesten Roman „Ragn i“ als Dichter bewährt. Einzelnen erwielet. Wer fühlt sich nicht gepakt und durchschauert von seiner Schilf... erweiligen Kasse. mit ihren Schroffen und Hjorden, mit dem ewig bewirten, droh... dem gefälligen Reigen von Schnee und Sturm? Wer sieht nicht die Figuren, die... Schultknoten. Wadische, bald wieder die Studenten... schäbter lebhaft... nur ein edler Dichter, der aus lebendiger Phantasie... mag unser Eind... beleben, und wer „Ragn i“ gelesen, der wird die... den lächlichen Ac... Seelsorger, die weltliche Frau Bjarrerin, die... wellende Doktor... vor seinen Augen schweben sehen und über de... grübeln.

Der berühmte Norweger Björnson hat die... Schöpfung, h... grüblerischen Darstellungsart grad... läre für den... psychologisch und sittlich interessant... trotz ihrer... vorführt, ein voll durchlehtes Kunst... hernen Real... leben und stimmungsvoll poetischer... Helden un... ausstattet. Wir haben es mit einer... thun, der... Sittlichkeitsbeuchelei gerichtet ist, die... tonirende „Thomas Mendalen“. Björnson hat... in den Art... Grundlagen zu stellen. Ihn genügt... in seinen... sondern er legt sittlichen Werth da... ermaßen... Charakterentwicklung der beiden Helden... an als... der Haupthandlung dem Leser zu erzä... (H.)

Unter allen Umständen ein beb... der... mit padender Wahrheit zur Darstellung...

Es kann kaum ein so charakter... als ein Werk des besagtenen Norwege. Er hält sich von den schmügigen Albert... durchaus fern. — Er besitzt die hohe... und Stimmungsbildneri in gleich... Blut leben in seinen Geschichten; bei ihm... Wirklichkeit. Die Wahrheit hat seine... hohen Vollendung.

5941

Alexander Zivert

Gemeinverständliches
über die
fogenannte vierte Dimension.

Vortrag,

gehalten bei dem Stiftungsfest des mathem. naturw. Vereins
der technischen Hochschule in Stuttgart am 8. Dezember 1888;
mit Erweiterungen und Citaten

von

Dr. Carl Kranz,

Dozent an der technischen Hochschule in Stuttgart.

Mit zehn Abbildungen.

Hamburg.

Verlag von A. G. (vormals J. F. Richter).

1890.

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen wird vorbehalten.

**Druck der Verlagsanstalt und Druckerei Actien-Gesellschaft
(vormals J. F. Richter) in Hamburg.**

From the Estate of
Prof. Züst
4-7-30

Der mathematischen Wissenschaft der neueren Zeit ist eigenthümlich das Streben nach Verallgemeinerung, nach Zusammenfassung des Einzelnen unter allgemeinere Gesichtspunkte, und daneben speciell unserem Jahrhundert der Trieb nach tieferer Einsicht in die Grundlagen unseres Wissens. Vereint haben diese extensiven und intensiven Tendenzen unter anderem die modernen Raumtheorien hervorgebracht. Schon im siebzehnten und achtzehnten Jahrhundert von vereinzelt Philosophen und Theologen gefaßt, hat die Idee einer Erweiterung unseres Raumbegriffs erst im ersten Drittel unseres Jahrhunderts angefangen, Gemeingut der Mathematiker zu werden, und bildet jetzt für dieselben ein nutzbringendes Prinzip der Verallgemeinerung. Auf anderen Gebieten wurden die Resultate der exakten mathematischen Forschung benutzt, um gewissen längst kultivirten Phantastereien und Spekulationen neuen Nahrungstoff zu geben. Eben die letzteren Anwendungen sind es vor allem, welche dem Begriff der vierten Dimension seine Popularität in nicht-mathematischen Kreisen, aber auch zahlreiche Mißverständnisse eingetragen haben, — Mißverständnisse der Art, daß dieselben das Ansehen der Mathematik in den Augen mancher Laien zu schädigen im stande waren; daß man in den siebziger Jahren das Wort hören konnte, an jenen Phantastereien trage eine „erkenntnißkrank gewordene Mathematik“ die Schuld.

Im Hinblick einerseits auf die Popularität der sogenannten vierten Dimension, andererseits auf die mannigfachen irrigen Auffassungen, welche die Aufstellung dieses Begriffs zur Folge hatte, möchte ich einen raschen Gang durch die Theorie der höheren Räume und ihre mannigfachen Anwendungen unternehmen und am Schlusse mit kritischem Blick auf das durchwanderte Gebiet zurückblicken; — wobei ich die Nichtmathematiker daran erinnere, daß kein „μηδεις ἀγεωμέτρητος εἰσέλτω“ über der Eingangsthüre des Saales irgend Einem den Eintritt wehren wollte, sondern die Versicherung gebe, daß die geometrischen Schultreminiscenzen es Jedem ermöglichen werden, mir auf jenem Gange zu folgen.

Ich gestatte mir, drei Strömungen zu unterscheiden, welche auf die Konzeption mehrdimensionaler Räume hinführten; die erste liegt in den jahrhundertlangen vergeblichen Versuchen der Mathematiker, das Parallelenaxiom der Euklidischen Geometrie zu beweisen, und in den Forschungen, welche sich an die durch Gauß erreichte Lösung des Räthfels anschlossen; die zweite in dem unglücklichen Bestreben einiger Naturforscher und Philosophen, gewisse metaphysische, speciell kosmologische Fragen zu lösen und aus gewissen Widersprüchen zu enttrinnen; es sind dies die Fragen nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit des Universums, Zahl der Fixsterne, Weltanfang und Weltende, Konstitution der Materie, Beziehung zwischen den Erscheinungen in der sinnlich wahrnehmbaren Welt zu den unbekanntem Dingen an sich; endlich die dritte in den Versuchen zu einer Erklärung der (behaupteten) spiritistischen Wahrnehmungen, Geistermaterialisationen, Hellsehen der Somnambulen und Hypnotisirten, Wirkung in die Ferne zc.

Diese Eintheilung in Transcendentalgeometrie, Transcendentalphysik und Transcendentalpsychologie soll übrigens nur dazu dienen, einige Ordnung in die Betrachtung und nachherige Beurtheilung des Ganzen zu bringen.

1. Man kann sagen, jede Wissenschaft ist vorzugsweise durch die peinigenen Räthsel und Schwierigkeiten groß geworden, die sich ihren Vertretern entgegenstellten. Solche Räthsel bildeten unter anderen für die Geometrie die Axiome. Bekanntlich liefert die Euklidische Geometrie das glänzendste Beispiel für die deduktive Methode, wonach ein Satz um den anderen durch Kombination aus den vorhergehenden abgeleitet, deduzirt wird. Ursprünglich bloße Regeln und Vorschriften für die Praxis, die durch Probiren oder durch Zufall gefunden waren (vgl. Diodor, Hero, Strabo) und in Aegypten bei der Herstellung der Hochbauten, Wasserbauten und den immer wiederkehrenden Landesvermessungen ihre Verwendung fanden, wurden die geometrischen Sätze erst von den Griechen wissenschaftlich zu jenem System verarbeitet, welches wegen der Schärfe der Logik und der Vollendung der Form immer wieder von neuem unsere verdiente Bewunderung erregt. Ein Glied der Kette reiht sich an das andere; den Anfang aber bildet eine Gruppe von mehr oder weniger selbstverständlich klingenden Sätzen, die unbewiesen blieben. Die eigentlich geometrischen Axiome, die Euklid der Geometrie voranstellt — mögen sie nun mit *ἀκρίματα* oder *κοινὰ ἔννοια*¹ bezeichnet sein — sind die folgenden:

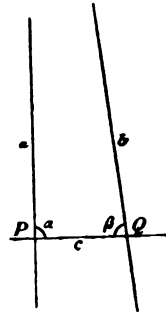


Fig. 1.

8. Was einander deckt, ist einander gleich.
11. Zwei gerade Linien a und b , die von einer dritten c so geschnitten werden, daß die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel α β zusammen kleiner sind als zwei Rechte, treffen, genügend verlängert, an derselben Seite zusammen (Fig. 1).
12. Zwei Gerade schließen keinen (endlichen) Raum ein.

Besonders das elfte, das sogenannte Parallelen-Axiom, besitzt durchaus nicht denjenigen Grad von Selbstverständlichkeit, daß es nicht zum Beweise reizen sollte. Aber merkwürdig, mehr als zweitausend Jahre widerstand es allen Anstrengungen der Mathematiker, dasselbe zu beweisen; d'Alembert, der sich ebenfalls daran versuchte, nennt es „l'écueil et le scandale des éléments de géométrie;“ in der „Encyclopädie der Wissenschaften und Künste“ zählt Sohne nicht weniger als 92 Scheinbeweise für diesen Satz auf. Besonders lange quälte sich Legendre damit; er zeigte, daß diese Voraussetzung gleichwerthig ist mit einer der drei folgenden:

a. Durch einen Punkt Q außerhalb einer Geraden a (Fig. 1) läßt sich nur eine einzige Parallele zu a ziehen, d. h. nur eine einzige Gerade, die, so weit man sie auch verlängert, a nicht schneidet — oder wie man jetzt, um mehrere Sätze zusammenfassen zu können, lieber sagt, nur eine Gerade b , welche die Gerade a in deren „unendlich fernem Punkte“ schneidet —; denn gäbe es zwei voneinander verschiedene Parallelen b und zöge man die Senkrechte c von Q auf a , so wären die Winkel α und β zusammen entweder größer oder kleiner als zwei Rechte, also müßten sich nach Satz 11 die Geraden a und b entweder auf der einen oder der anderen Seite von c in einer endlichen Entfernung begegnen; zweitens mit der Voraussetzung:

b. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die inneren Wechselwinkel einander gleich, oder

c. Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt zwei Rechte, — wie beidemal ebenso leicht zu sehen ist.

Eine dieser Voraussetzungen mußte unbewiesen bleiben. Es half auch nichts, die Parallele anders zu definiren, etwa als die Linie, deren Punkte von der Geraden a überall den gleichen Abstand haben; denn dann beweise man, daß diese Linie eine Gerade ist.

„Was ist es nun mit diesen Axiomen, die das Fundament der Geometrie bilden, was sind und was sollen diese Sätze, unbeweisbar und doch unzweifelhaft richtig? Sind sie ein Erbtheil aus der göttlichen Quelle unserer Vernunft, wie die idealistischen Philosophen meinen, oder ist der Scharfsinn der bisher aufgetretenen Generationen von Mathematikern nur noch nicht ausreichend gewesen, den Beweis zu finden?“

Gauß scheint als Erster, und zwar schon in sehr früher Zeit, 1792, den wahren Grund erkannt zu haben, wie sich aus einigen Andeutungen und aus seinen hinterlassenen Schriften ergab; aber die Wahrheit blieb noch längere Zeit verborgen, da er selbst nichts darüber veröffentlichte. Er kam auf die Entdeckung durch seine Untersuchungen über die Krümmung der Oberflächen. Die einfache Lösung des Räthfels ist die, daß jene Sätze nicht bewiesen werden können, weil sie überhaupt nicht unumgänglich nothwendig sind; daß also die Axiome keine Anschauungs-, noch weniger Denknothwendigkeiten vorstellen; daß auch ohne sie widerspruchsfreie Geometrien sich entwickeln lassen. Letzteres geschah durch Boljai und Lobatschewsky, Schüler von Gauß, etwa im Jahr 1832. Wie ein solcher Aufbau einer Geometrie mit Verzicht auf eines oder mehrere jener Axiome möglich ist, darf ich kurz zeigen, da dies die Grundlage für das Verständniß des Folgenden bildet.

Bleiben wir zunächst bei der Planimetrie, der Geometrie auf der Fläche, also bei den Raumanschauungen, welche für zweidimensional veranlagte Wesen, die nur von Länge und Breite, nicht aber von der Höhe etwas wüßten, die alleinigen wären, — um erst nachher zur Stereometrie überzugehen. }?

Bekanntlich spielen in der Euklidischen Geometrie die Kongruenzsätze eine wichtige Rolle; man pflegt die Richtigkeit aller geometrischen Konstruktionen durch den Nachweis der Kongruenz an Strecken, Winkeln, Flächenstücken *z.* zu zeigen. Die Kongruenz

zweier geometrischer Gebilde aber, z. B. die zweier Dreiecke A und B (Fig. 2), wird dadurch nachgewiesen, daß man sich das eine A in der Zeichenfläche fortbewegt denkt, bis es mit dem anderen B vollständig zur Deckung gebracht ist. Dieses Zur-Deckungbringen zweier kongruenter Dreiecke durch Verschiebung in der Zeichenebene ist in allen Fällen ausführbar, mit der Ausnahme, wenn die Dreiecke symmetrisch liegen wie A_1 und B, wovon später.

Eine stillschweigende Voraussetzung bei diesem Verfahren ist, daß während der Verschiebung des Flächenstücks innerhalb der Zeichenfläche dasselbe seine Gestalt und seine Dimen-

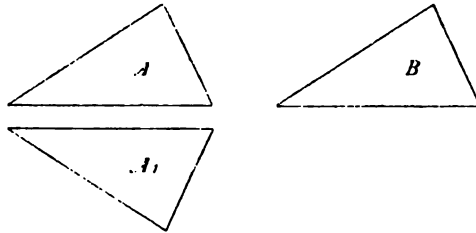


Fig. 2.

sionen nicht ändern. Diese Voraussetzung ist allerdings erfüllt, z. B. wenn die Zeichenfläche eine Ebene ist; in dieser kann ein Dreieck in Gedanken beliebig

verschoben werden, ohne daß die Winkel, Seiten und der Flächeninhalt eine Aenderung erleiden. Dies gilt auch noch, wenn wir uns die Zeichenebene zu einer Cylinderfläche oder Kegelfläche aufgerollt denken; auf der so entstandenen Kegelfläche z. B. läßt sich das Dreieck zwar mit Biegung, aber ohne Dehnung oder Zusammenziehung, also ohne Aenderung von Gestalt und Inhalt beliebig fortbewegen. Anders dagegen bei einer Eisfläche; auf einem Ei würde ein darauf gepaßtes Flächenstück Faltung erfahren müssen, wenn man es nach der Spitze des Eis hin so bewegen wollte, daß es stets ganz auf der Fläche aufliegt.

Man sieht also, daß die Möglichkeit, durch Aufeinanderlegen zweier Flächenstücke ihre Kongruenz zu beweisen, durchaus keine

unbeschränkte ist, daß in jenem Verfahren ein wirkliches Postulat sich verbirgt. Eben hiervon handelt nun das achte Axiom; dieses stellt folglich keine Nothwendigkeit dar und ist also unbeweisbar; es sagt uns, daß nur auf bestimmten Flächen (z. B. der Ebene, Cylinder- oder Kegelfläche) die Forderung 8 erfüllt wird; wollten wir uns die Aufgabe stellen, eine Geometrie auf der Eifläche auszubilden, so müßte die Forderung 8 in Wegfall kommen.

Solcher Flächen nun, welche diese Eigenschaft haben, daß Flächenstücke in ihnen ohne Dehnung oder Zusammenziehung verschoben werden können, giebt es unzählig viele; es sind die in sich kongruenten, in sich gleichartig gekrümmten Flächen, die sogenannten „Flächen von konstantem Maß der Krümmung“ (dabei unter Krümmungsmaß einer Fläche in einem Punkt verstanden das Produkt der Krümmungen nach gewissen zwei zu einander senkrechten Richtungen). Man unterscheidet dreierlei Arten solcher

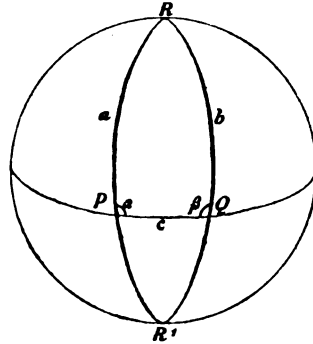


Fig. 3.

Flächen. Erstens die Flächen mit sogenanntem konstantem positiven Krümmungsmaß; dies sind solche allenthalben gleichmäßig gekrümmte Flächen, die überall nach derselben Seite hohl sind, wie z. B. die Kugelflächen; zweitens die Flächen mit konstantem negativen Krümmungsmaß, die nach derselben Seite hin theils konkav, theils konvex gebogen sind, nach Art von Sattelflächen; endlich die Flächen mit konstantem Krümmungsmaß Null, wie z. B. Ebene, Kegel, Cylinder.

Es läßt sich beweisen, daß innerhalb irgend einer der drei Gattungen jede Fläche auf eine beliebige der gleichen Gattung

ohne Dehnung oder Zusammenziehung aufgebogen werden kann; so lassen sich alle denkbaren Kegelflächen, Cylinderflächen, abwickelbaren Schraubenflächen u. s. w., wenn man sie sich nöthigenfalls nach einer Geraden aufgeschnitten denkt, sämmtlich in eine Ebene umbiegen.

Wir haben daher nur nöthig, drei Haupttypen zu betrachten: die Kugelfläche (Fig. 3) als Typus der Flächen konstanten positiven Krümmungsmaßes; die Traktrixfläche (Figur 5), gestaltet etwa in Form eines umgekehrten geschweiften Champagnerkells mit unendlich verlängerter Spitze, als besonders

einfache unter den Flächen mit konstantem negativen Krümmungsmaß; endlich die Ebene als Repräsentantin der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß Null.

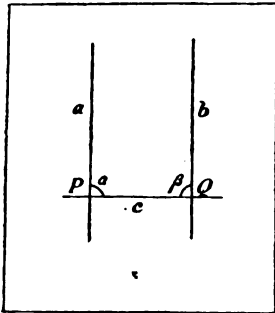


Fig. 4.

Für alle diese drei Flächen trifft die Voraussetzung 8 zu, daß sie in sich verschiebbar sind; oder anders ausgedrückt: wenn man sich verstandbegabte zweidimensionale Wesen denkt, welche eine solche Fläche

bewohnen und welche nicht von den Gebilden außerhalb ihres flächenhaften Raumes, sondern nur von denen innerhalb ihrer Fläche Wahrnehmungen haben können, von letzteren aber in ähnlicher Weise, wie wir Menschen von denen unseres Raumes, so müssen diese Wesen ihren zweidimensionalen Raum als einen gleichartig gekrümmten erkennen, wenigstens falls ihre eigene Bewegung innerhalb der Fläche eine ungehinderte ist.

Die geraden Linien auf einer solchen Fläche werden für jene Wesen die kürzesten Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten der Fläche darstellen, also die Linien, welche von Fäden gebildet werden, die ohne Reibung auf der Fläche gespannt

werden, oder die sogenannten geodätischen Linien; diese sind identisch mit denjenigen, welche ein mit feiner Bewegung an die Fläche gebundener Massenpunkt auf Grund einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit beschreibt, falls keine äußeren Kräfte auf ihn wirken. Wir werden diese Linien künftig einfach mit „Kürzeste“ oder „Geradeste“ bezeichnen (ohne übrigens Gerade durch Kürzeste definieren zu wollen).

Suchen wir uns nun der Reihe nach von der Geometrie auf der Kugelfläche und der Traktrixfläche einen Begriff zu machen, um sie derjenigen auf der Ebene gegenüberzustellen und damit den tieferen Sinn zu erfahren, der den Voraussetzungen 11 und 12 unterliegt.

Zunächst die Geometrie auf der Kugelfläche (Figur 3); also die Raumanschauungen, welche intelligente zweidimensionale Wesen ausbilden würden, die mit ihren Bewegungen auf diese Fläche beschränkt

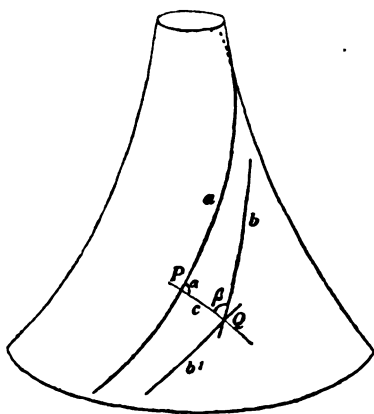


Fig. 5.

wären. Die kürzesten Linien sind Großkreisbögen. Parallele Geradeste gibt es überhaupt nicht; bzw. die Punkte, welche von einer Geradesten überall die gleiche kürzeste Entfernung haben, liegen auf einem Kleinkreis (Parallelkreis); ferner trifft nicht allein das Axiom 8 zu, sondern auch die Voraussetzung 11; denn wenn zwei Geradeste a und b von einer dritten c geschnitten werden, so begegnen sie sich stets in endlichem Abstand (in R und R^1), mag Winkel α mit β zusammen mehr oder weniger als zwei Rechte oder auch zwei

Rechte selbst betragen. Wenn also zwei jener Wesen von zwei Punkten P und Q einer Geraden c senkrecht zu letzterer abgehen und auf der (beliebig groß zu denkenden) Kugelfläche mit gleichen Geschwindigkeiten auf Geraden a und b wandern, so werden sie anfangs nicht hoffen, sich jemals wieder zu begegnen, — wie es auf der Ebene (Figur 4) in der That nicht der Fall wäre —, und doch trafen sie sich in zwei Punkten, in R und R^1 .

Dadurch, daß sie wieder zu den Ausgangspunkten P und Q zurückgelangen, wäre für sie der Nachweis geliefert, daß ihr flächenartiger Raum nicht der unendliche ist, für den sie ihn vielleicht anfangs hielten, sondern daß er endlich, begrenzt ist, — ähnlich wie nach der ersten Erdumsegelung für die Bewohner der Erde bewiesen war, daß diese nicht die unendlich große Scheibe der antiken Weltanschauung ist. Uebrigens gilt diese Bemerkung² natürlich nur dann, wenn jene Wesen innerhalb ihres zweidimensionalen Raumes ungehinderte Eigenbewegung besäßen. Wären sie an die Bewegung anderer zweidimensionaler Körper (Planeten) gebunden, so gäbe es für sie keinen absolut fixen Punkt in ihrem Raum, von dem sie behaupten könnten, daß sie zu ihm als Ausgangspunkt wieder zurückkehrten; ihr Raum müßte ihnen daher unbegrenzt erscheinen, während wir wissen, daß er endlich ist.

Die Summe der Winkel in einem Dreieck auf der Kugelfläche beträgt mehr als zwei Rechte, das Dreieck PQR z. B. besitzt in P und Q zwei rechte Winkel, wozu noch der Winkel bei R kommt. Ferner schließen zwei Geraden stets eine endliche Fläche ein; es gilt also das Axiom 8 und 11, jedoch nicht das Axiom 12.

Andererseits läßt sich hinsichtlich der Geometrie auf der Traktrixfläche zeigen, daß zwei Kürzeste keinen endlichen Flächenraum einschließen (Axiom 12), und daß ein Dreieck ohne Aenderung der Dimensionen [in der Fläche verschoben werden kann (Axiom 8). Dagegen sind durch einen Punkt Q außerhalb

einer Kürzesten a nicht nur eine, sondern unzählig viele dieselbe niemals schneidende Kürzeste möglich; diese alle sind begrenzt von zwei b und b' , welche die Geradeste a in deren zwei voneinander verschiedenen unendlich fernen Punkten treffen; also auch, wenn α und β zusammen kleiner als zwei Rechte sind, brauchen sich a und b nicht nothwendig in einem endlich entfernten Punkt zu begegnen.

Hier haben wir also die Geometrie vor uns, welche auf das Parallelenaxiom 11 verzichtet, die sogenannte „nicht-Euklidische“ Geometrie: die Winkelsumme im Dreieck ist für dieselbe kleiner als zwei Rechte.

Beltrami hat die Geometrie auf der Traktrixfläche dadurch auf die Ebene abgebildet, daß er (Fig. 6) den unendlich fernen Punkten der Fläche die Punkte einer Kreislinie zuordnet; eine Gerade a besitzt dann zwei unendlich ferne Punkte U und U' ; durch einen Punkt Q außerhalb lassen sich zwei die erste in deren

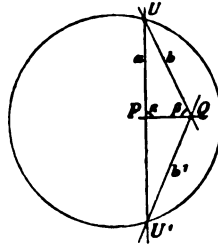


Fig. 6.

unendlich fernen Punkten schneidende Geraden b und b' legen, dazwischen liegen unzählig viele nicht Schneidende. (Interessant ist, daß die imaginäre Einheit i , die Quadratwurzel aus -1 , hier eine Rolle spielt. Die nicht-Euklidische Geometrie läßt sich als eine solche auf einer imaginären Kugelfläche auffassen; man braucht nur die Seiten a , b , c eines Kugeldreiecks durch ai , bi , ci zu ersetzen; die auf diese Weise sich ergebende Geometrie besitzt die Eigenschaften der nicht-Euklidischen, mit der Ausnahme, daß ihr keine Anschaulichkeit zukommt; dagegen lassen sich auf einer solchen imaginären Kugelfläche Dreiecke nicht nur ohne Dehnung oder Zusammenziehung, sondern auch ohne Biegung verschieben, wie auf der reellen Kugel. Aus den erwähnten Gründen spricht man statt von nicht-Euklidischer Geo-

metrie auch oft von „pseudosphärischer“ oder „imaginärer“ Geometrie.)

Kurz, stellt man nur das achte Axiom als Voraussetzung auf, so heißt dies: wir treiben Geometrie auf irgend einer Fläche von gleichmäßiger Krümmung, also um nur die Haupttypen zu nennen, entweder auf der Kugel oder auf der Pseudosphäre oder auf der Ebene; läßt man das elfte Axiom hinzutreten, so heißt dies: wir treiben Geometrie auf der Kugel oder der Ebene; endlich mit Hinzunahme noch des zwölften Axioms wird auch die Kugelgeometrie ausgeschlossen, und es heißt: wir treiben Geometrie auf einer Fläche vom konstanten Krümmungsmaß Null, etwa speciell auf der Ebene.

Die Euklidische Geometrie steht also in einer gewissen Weise in der Mitte zwischen der sphärischen und der pseudosphärischen Geometrie; in der ersteren ist die Winkelsumme eines Dreiecks größer, in letzterer kleiner als zwei Rechte, in der Euklidischen Geometrie gerade gleich zwei Rechten. Die Geometrie Euklids kann also als ein Grenzfall sowohl der einen als der andern jener Geometrien aufgefaßt werden; wie der Kreis als Grenzfall der einbeschriebenen oder der umbeschriebenen regulären Polygone, oder wie die Parabel als Grenzfall von Ellipse oder Hyperbel.

Die große Wichtigkeit dieser Untersuchungen liegt darin, daß damit das alteingewurzelte Vorurtheil abgeschüttelt wurde, als sei die Euklidische Geometrie die einzig denkbare, nicht vielmehr nur ein specieller Fall aus einer unendlichen Zahl von Geometrien, die ebenso widerspruchsfrei aufgebaut werden können.

Analog kann daran gedacht werden, eine Stereometrie unter dem Gesichtspunkt auszubilden, daß der dreidimensionale Erfahrungsraum unseres Gesichts- und Tastsinns als ein specieller

wirklicher Fall aus einer unendlichen Anzahl von denkbaren Fällen einer mehrfachen quantitativen Mannigfaltigkeit betrachtet wird. —

Wir sind in keiner Weise im Stande, einen Raum von mehr Dimensionen oder von anderen Eigenschaften uns vorzustellen, als die Raumform besitzt, in welcher sich für uns die Gegenstände ordnen, oder — wie Professor Kummer in seiner Vorlesung sich ausdrückte — als „der Raum, welchen unser lieber Herrgott für uns erschaffen hat“. Wohl aber vermögen wir eine andere derartige Mannigfaltigkeit zu definiren, zu denken. Unmöglich ist ja für den Mathematiker nur, was sich selbst widerspricht, wie eine krumme Gerade oder eine cylinderförmige Kugel. Eine Reihe von Gedankendingen, mit denen wir operiren als mit ganz vertrauten Dingen, sind für uns ebenso unvorstellbar; das Unendlichgroße, das Unendlichkleine, die unendliche Punktmannigfaltigkeit auf der Strecke, die Grenze eines unendlichen Dezimalbruchs, die imaginären Kreispunkte der Ebene, die Wirkung von Kräften in die Ferne, das Ding an sich, — alles das sind bloße Erzeugnisse unseres Denkens und unvorstellbar.

Definiren wir uns also „Räume“ von drei Dimensionen mit anderen Eigenschaften, als der Euklidische Erfahrungsraum besitzt, sämtlich enthalten in ein und demselben vierdimensionalen, und allgemeiner Räume von beliebig vielen Dimensionen. Dies geschieht durch folgende Ueberlegung.

Wenn wir, mit unseren Vorstellungen herabsteigend, ein Gerade als einen Raum niederer Ordnung betrachten, so müssen wir demselben eine Dimension zuschreiben; denn ein veränderlicher Punkt desselben ist in seiner jedesmaligen Lage durch ein einziges Merkmal bestimmt, die Angabe der bezüglichen Entfernung des Punktes von einem bestimmten Anfangspunkt nach Länge und Richtung, oder, wenn wir unter Zugrundelegung einer

Länge als Maßeinheit die Entfernungen durch die Anzahl der Maßeinheiten angeben, ist der Punkt durch eine mit einem Vorzeichen versehene Zahl bestimmt. (Jene variable Entfernung des Punkts von dem Anfangspunkt heißt die „Koordinate“ desselben, rein analytisch diese Zahl eine „Variable“.)

Analog ist die Ebene als zweidimensionaler Raum anzusehen; denn ein variabler Punkt derselben ist durch Angabe zweier Merkmale, nämlich durch die Entfernungen desselben von zwei Grundgeraden (Koordinatenachsen) bestimmt. Aus der zweidimensionalen Ebene lassen sich beliebig viele Linien (eindimensionale Räume), speciell Gerade, Kreise zc. ausscheiden. Analytisch können wir eine beliebige Gleichung zwischen zwei Variablen aufstellen; diese repräsentirt, falls noch gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind, geometrisch eine Kurve; und zwar eine Gerade, falls die Variablen nur in der ersten Potenz vorkommen; eine Hyperbel oder Parabel oder Ellipse, speciell Kreis, wenn die Variablen auch in der zweiten Potenz vorkommen zc. Also durch Aufstellung einer Gleichung zwischen zwei Variablen scheiden wir aus dem zweidimensionalen Raum einen eindimensionalen, eine Linie aus, durch Aufstellung zweier solcher Gleichungen den Schnitt zweier Linien, einen Punkt.

Endlich aus dem dreidimensionalen ebenen Raum können wir in Gedanken beliebig viele Ebenen, Kugeln, Cylinder zc., ferner krumme und grade Linien, also beliebig viele zwei- und eindimensionale Räume herausheben; analytisch geschieht dies, indem eine beliebige Gleichung zwischen drei Variablen vorausgesetzt wird; enthält diese die drei Variablen nur in der ersten Potenz, so ist damit eine Ebene ausgeschieden; durch zwei gleichzeitig bestehende derartige Gleichungen wird der Schnitt zweier Ebenen, eine Gerade definiert u. s. f.

Versuchen wir, dieses Verfahren fortzusetzen, so läßt uns die Anschauung im Stich. Nichts hindert uns aber, eine

Gleichung zwischen vier Variablen aufzustellen und damit einen vierdimensionalen Raum zu definieren. Falls in der Gleichung die vier Variablen nur in der ersten Potenz erscheinen, so ist durch dieselbe ein ebener dreidimensionaler, unser Euklidischer Erfahrungstraum ausgeschieden; kommen die Variablen nur in der zweiten Potenz vor, so handelt es sich, unter gewissen Bedingungen, um einen kugelförmigen dreidimensionalen Raum u. s. w. In einem vierdimensionalen Raum sind also unendlich viele ebene und gekrümmte dreidimensionale enthalten, wie in unserem Raum unendlich viele ebene und krumme Flächen. Die Eigenschaften speciell eines kugelförmigen dreidimensionalen Raumes hat Helmholtz³ näher besprochen; ein solcher Raum wird sich zu unserem ebenen Erfahrungstraum verhalten wie die Kreislinie zur Geraden, die Kugel zur Ebene; alle Geraden in einem solchen Raum führen daher wieder in sich zurück, der Raum selbst ist also endlich.

Die Theorie der vier-, fünf-, überhaupt mehrdimensionalen Räume wurde von Riemann, Helmholtz, Kroneder, dann von Klein, Schlegel, Brill, Killing, Wez ausgebaut; es wurde die Lehre von den Raumkurven und Flächen, die Krümmungstheorie, die Sätze von Euler und Dupin, das Dreikörperproblem, der Satz über die Anzahl der regulären Körper u. a. auf einen Raum mit n Dimensionen ausgedehnt.

Der Hauptanstoß, dem man bei Laien immer wieder begegnet, liegt darin, daß gesagt wird, es sei ein Unding, diese mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten noch „Räume“ zu nennen. Dem gegenüber ist festzuhalten, daß für den Mathematiker jene mehrdimensionalen Räume nichts anderes sein sollen als analytische Fiktionen, denen erst dann etwas Vorstellbares entspricht, wenn die Dimensionenzahl $n = 3$ ist. Wer es vorzieht, einen vagen Ausdruck wie „Mannigfaltigkeit“ oder „Ordnungssystem“ (Loze) oder

die Bezeichnung durch einen Buchstaben mit Index R_n dafür zu verwenden, dem kann dies unbenommen bleiben. Ob jene höheren Räume existiren oder nicht, darnach fragt der Mathematiker gar nicht, da sie bloß Erzeugnisse seines eigenen Denkens sind. Wenn der Mathematiker z. B. von dem Krümmungsmaß eines n -dimensionalen Raumes spricht, so ist er sich bewußt, daß es sich dabei um einen bloßen Rechnungsausdruck handelt, dem keine Anschaulichkeit mehr zukommt, wenn n größer als 2 ist. Von der Berechtigung und dem Nutzen jener Begriffserweiterungen wird später des Näheren die Rede sein.

Vorstellbar sind, wie erwähnt, jene höheren Räume nicht, und Kant sucht geradezu die Frage zu lösen, weshalb mehrdimensionalen Räumen gegenüber die menschliche Vorstellungskraft versagt („Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte“, Ges. Werke Band V., § 9—11): „. . . Demzufolge halte ich dafür, daß die Substanzen in der existirenden Welt, wovon wir ein Theil sind, wesentliche Kräfte von der Art haben, daß sie in Vereinigung miteinander nach dem doppelten umgekehrten Verhältniß der Weiten ihre Wirkungen von sich ausbreiten; zweitens, daß das Ganze, das daraus entspringt, vermöge dieses Gesetzes die Eigenschaft der dreifachen Dimension habe; drittens, daß dieses Gesetz willkürlich sei und daß Gott dafür ein anderes, zum Exempel des umgekehrten dreifachen Verhältnisses hätte wählen können, daß endlich viertens aus einem andern Gesetz auch eine Ausdehnung von andern Eigenschaften und Abmessungen geschlossen wäre Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumarten wäre unfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte Die Unmöglichkeit, die wir bei uns bemerken, einen Raum von mehr als 3 Abmessungen uns vorzustellen, scheint mir daher zu rühren, daß unsere Seele ebenfalls nach dem Gesetz des umgekehrten doppelten

Verhältnisses der Weiten die Eindrücke von draußen empfängt⁴ und daß ihre Natur selber dazu gemacht ist, nicht allein so zu leiden, sondern auch auf diese Weise außer sich zu wirken.“ Nimmt man noch die kurz darauf folgenden Worte Kants hinzu: „Wenn es möglich ist, daß es Ausdehnungen von andern Abmessungen (Dimensionen) gebe, so ist es auch sehr wahrscheinlich, daß sie Gott irgendwo angebracht hat,“ so sehen Sie, daß wir uns auf einmal mitten in den metaphysischen Fragen befinden.

Wenn wir also jetzt den sichern Boden der mathematischen Forschung verlassen und dem nebelhaften Gebiet der Transscendentalphysik uns zuwenden, so möge gleich anfangs ausdrücklich hervorgehoben werden, daß es sich im folgenden zunächst um eine bloße Darlegung der wichtigsten, im Laufe der Zeit aufgestellten, diesbezüglichen Theorien und erst weiterhin um eine kritische Beleuchtung derselben handeln soll.

Ich persönlich verwerfe die meisten der folgenden Theorien als Phantastereien; aber auch auf diesem Standpunkt bietet es ein großes philosophisches, mitunter auch psychiatrisches Interesse, anzusehen, wie, nachdem der Raumbegriff jene ungeahnte Erweiterung erfahren hatte, diese auf die tiefgehendsten metaphysischen und psychologischen Fragen angewandt wurde.

2. Böllner⁵ war durch seine astrophysikalischen Untersuchungen, besonders über die Natur der Kometen, auf die Frage nach der Zahl der Fixsterne und damit nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit des Raumes und des im Universum enthaltenen Stoffes geführt worden.

Ist der Raum und die Materie endlich oder nicht?

Verhältnißmäßig einfach war die Frage für die alten griechischen Philosophen.⁶ Ueber der großen Scheibe, auf der die Menschen wohnten, wölbten sich, wie bewegliche große Glas- kugeln, die sieben Sphären der Planeten; auf einer weiteren

achten Kugel, dem *primum mobile*, waren die unzählig vielen Fixsterne angebracht; und oben auf diesem Treibhaus saßen die Götter Griechenlands und „amüfirten sich köstlich über das wunderliche Treiben der Menschen darunter“. Für diese Kosmologie war somit der Raum endlich, wenn auch unermeslich groß.

Aber die neue astronomische Lehre zerstörte diesen ganzen Bau, und ein endloser Himmel mit einer endlosen Schar gewaltiger Weltkörper öffnete sich dem geistigen Blick. Der Mond bewegt sich um die Erde, diese um die Sonne; Millionen von Sonnensystemen erfüllen den Milchstraßenring, der selbst wieder nur ein Individuum in einem größeren Ganzen zu sein scheint. Gibt es da ein Ende? Beides, sowohl daß die Zahl der Sonnen endlich, als daß sie unendlich sei, läßt sich scheinbar zeigen. Gestatten Sie mir, daß ich beides beweise.

Erstens der vorhandene Stoff ist unendlich. Denn wäre er endlich, so könnte die endliche Gasmasse auf Grund des Mariotteschen und Newtonschen Gesetzes nicht im Gleichgewicht sein. Bei dem Bestreben der Gase, sich im Raum auszudehnen, müßten sich die größten endlichen Massen in dem unbegrenzten Raum fortbauend bis zum Verschwinden verflüchtigen, in ein Aggregat diskreter Gasmoleküle von konstanter und gradliniger Geschwindigkeit auflösen, deren mittlerer Abstand unendlich groß ist. Die Dichtigkeit des Gases würde nach unendlich langer Zeit unendlich klein geworden sein und der Raum für unser Auge als eine nicht mit Materie erfüllter, als vollkommen leer erscheinen. Dies ist nicht der Fall; durch die Existenz der uns sinnlich vernehmbaren Welt sind wir empirisch zur Annahme einer wenigstens partiellen materiellen Raumerfüllung gezwungen. Folglich ist die Voraussetzung unrichtig und somit die Materie unendlich.

Die Ausflucht, durch den umgebenden Aether werde auf die äußere Grenzschicht der endlichen Gasmasse der erforderliche

Druck ausgeübt, ist unzulässig, da der Aether alle Körper, also auch die Luft durchdringt. Ebenso die Annahme einer so niedrigen Temperatur jener Grenzsicht, daß die Gase ihre elastische Kraft vollständig verlieren und tropfbar flüssig werden, entfällt durch die Ueberlegung, daß die endliche Luftmasse von den Wärmestrahlen der Sonnen allenthalben in endlicher Entfernung getroffen würde.

Es bliebe übrig die Hypothese einer Begrenzung der Zeit, welche seit der Existenz der Welt bis auf die Gegenwart verfloßen ist, also die Annahme eines Schöpfungsaktes, durch welchen zu einer in endlicher Vergangenheit liegenden Zeit ein bestimmter Anfangszustand der Welt begonnen hat, der sich nun fortdauernd in einer für unsere Sinne und Zeiträume unmerklichen Weise dem vorhin erwähnten Endzustand der Stoffverflüchtigung und allmählichen Auflösung der Welt in Nichts nähert. Eine solche Voraussetzung würde (für Böllner) keine logische, sondern nur eine willkürliche Begrenzung der Kausalreihe einschließen, gegen welche sich der Verstand auf Grund des ihm innewohnenden Kausalitätsbedürfnisses sträubt.

Zweitens, der vorhandene Stoff ist aber auch nicht unendlich, sondern endlich. Denn wäre er unendlich, so müßte an jeder Stelle des materiell erfüllten Raumes der Druck der Materie unendlich groß sein. Denkt man sich nämlich eine endliche Quantität gasförmiger oder flüssiger oder fester Masse, welche unter dem Einfluß ihrer Kräfte die Gestalt einer Kugel angenommen hat, so ist der Druck im Centrum der Kugel proportional dem Radius der Kugel. Soll also die Masse eine unendliche sein, so müßte auch der Radius der Kugel einen unendlich großen Werth besitzen, und an jeder vom Centrum gleich weit entfernten Stelle wäre der Druck gleich und unendlich. Eine unendlich hohe Atmosphäre würde mit unendlichem Druck auf uns lasten und uns zu Steinen pressen.

Noch mehr; Olbers' wies darauf hin, daß die Annahme einer unendlichen Zahl von Licht und Wärme ausstrahlenden Körpern (Fixsternen) nothwendig zu dem Schluß führt, daß das ganze Himmelsgewölbe überall mit einem Glanz und einer Wärme strahlen müßte, wie gegenwärtig die Sonnenscheibe. Wir hätten scheinbar nur eine einzige ungeheure Sonne. Man könnte einwenden, daß in dem zwischen den Weltkörpern befindlichen Medium die Lichtstrahlen absorbiert werden; dann würden aber auch die Wärmestrahlen absorbiert und jenes Medium würde unendlich erwärmt sein, was nicht der Fall ist. Also ist der Stoff endlich. Er ist aber auch nicht endlich; denn wäre er endlich . . . und so fort, zurück zum Anfang, in infinitum.

Aus diesem Labyrinth von scheinbaren Widersprüchen weiß sich Böllner nur durch die Hintertüre der vierten Dimension zu retten.

Die Eigenschaften, die wir dem Raum beilegen, sind wesentlich empirischen Ursprungs. In dem primitiven Zustand der unbewußten Verstandsthätigkeit des Menschen werden die durch sinnliche Empfindungen erzeugten Bilder der Netzhaut auf eine Fläche, also einen zweidimensionalen Raum bezogen. Zwei Objekte, welche hintereinander sich bewegen, scheinen in dieser Fläche in eigenthümlicher Weise sich gegenseitig zu verschieben, zu verdecken, auch ihre Gestalt zu ändern. Um diese auf jener Entwicklungsstufe räthselhaften Erscheinungen zu erklären, sah sich nach der Ansicht Böllners der Verstand zu einer Hypothese über die Beschaffenheit des Raumes genöthigt, und zu den zwei Dimensionen des Raumes wurde die dritte gefügt. Die fortwährend bestätigte Richtigkeit dieser Hypothese bei Erklärung der Einwirkungen der Außenwelt erhob diese Hypothese zu einer solchen Gewißheit, daß wir gar nicht mehr im Stande sind, von dieser Beschaffenheit des Raumes abzugehen.

Derselbe Vorgang zeigte sich in der astronomischen Erkenntniß. Zur Erklärung der scheinbar auf einer Kugelfläche vor sich gehenden Bewegungen der Himmelskörper, welche z. Th. regellose Bahnen am Himmel zu beschreiben scheinen („Planeten“), war man genöthigt, eine Tiefendimension des Himmelsgewölbes anzunehmen, und die komplizirten Bewegungen im zweidimensionalen Raum, auf der Kugel, verwandelten sich in höchst einfache Bewegungen im dreidimensionalen.

Es genügt, einen Schritt weiter zu gehen und eine zweite Eigenschaft unseres Raumes anzunehmen, um mit einem Male die vorhin geschilderten Widersprüche entfallen zu sehen. Bei jenen Beweisen war stillschweigend vorausgesetzt, daß unser Raum der unbegrenzte ebene Euklidische sei. Machen wir die Hypothese, daß er ein kugelförmiger Raum sei, also ein solcher dreidimensionaler, der sich zu einem ebenen dreidimensionalen Raum ebenso verhält, wie die Kugel zur Ebene, also ein Raum, dessen Krümmungsmaß nicht den Werth Null, sondern einen wenn auch noch so kleinen positiven Werth besitzt. In einem solchen sind die geraden Linien durch Kreislinien ersetzt zu denken, deren Radius beliebig groß sein kann. Zwei Massenpunkte, welche sich voneinander entfernen, begegnen sich wieder und zwar periodisch wiederkehrend in endlichen Zeiträumen, deren Größe von der Geschwindigkeit der Bewegung und dem Krümmungsmaß des Raumes abhängt; periodisch wird lebendige Kraft in Spannkraft bei Annäherung und Spannkraft in lebendige Kraft bei Entfernung verwandelt. Dasselbe gilt für beliebige Massen. Welten, die an einer Stelle des Raumes vergehen, trennen sich, um an einer anderen Stelle mit anderen Massen zu neuen Welten zusammenzutreten. Die Gefahr der allgemeinen Stoff- und Energie-Zerstreuung und damit des Weltstillsandes, die so vielen Schrecken verbreitete, seit Thomson⁸ mit allerdings wenig Recht auf Grund des Carnotischen

Sages⁹ seine bekannte Hypothese aufstellte, wäre glücklich abgewendet.

Den Anstoß zu diesen Ideen erhielt Böllner durch Niemann,¹⁰ der unter anderem in folgender Weise sich äußerte: „Setzt man voraus, daß die Körper unabhängig vom Ort existiren, so ist das Krümmungsmaß überall konstant, und es folgt dann aus den astronomischen Messungen (an Stern-Dreiecken), daß es nicht von Null verschieden sein kann; jedenfalls müßte sein reciproker Werth eine Fläche sein, gegen welche das unseren Teleskopen zugängliche Gebiet verschwinden müßte.“ In neuerer Zeit scheinen jene Böllnerschen Anwendungen dieser Idee auffallenderweise auch in Mathematikerkreisen sich manche Freunde erworben zu haben. Most¹¹ führt aus — und R. Beez¹² hat dem gegenüber ein anerkennendes Wort —: „Nicht unwahrscheinlich ist es, daß sich noch in dem ablaufenden Jahrhundert allmählich in den Vorstellungskreis der Gebildeten eine Neuerung drängt, welche in Art und Bedeutung jener Vorstellungsänderung gleichsteht, welche vor wenigen Jahrhunderten in Bezug auf die Gestalt der Erde und die Stellung derselben im Weltall zum Abschluß kam. Es handelt sich darum, den Weltenraum als unbegrenzt und doch endlich nach Art der Kreislinie und der Kugelfläche zu erkennen und damit die drohende Sphinx, welche dem armen Erdenwanderer unablässig das verwirrende Räthsel von dem unendlichen Raume vorhält, zu stürzen; es handelt sich darum, die grausige Konsequenz von der Zerstreung der Energie des Weltalls zu brechen und damit eine Vorstellung zu bannen, welche wie ein Alpdruck ebenso stark auf der dualistischen, wie auf der monistischen Weltanschauung lastet; wird doch als Ziel der Welt eine Verkümmernng in Erstarrung und Monotonie gesetzt. Und sollte es auch nicht gelingen, darzulegen, daß man für das Weltall die endliche, sphärische Raumform denken muß, so wird es jenen bedrückenden

Fragen gegenüber schon als Wohlthat empfunden werden, daß man sich diese endliche Form mit demselben Rechte wie die übliche nach seiner Wahl denken darf.“

Von einem kugelförmigen Raum zu sprechen, hat aber erst dann einen Sinn, wenn der Begriff eines vierdimensionalen Raumes definirt und acceptirt ist, in welchem unendlich viele dreidimensionale Räume, ebene und gekrümmte, enthalten sind, wie in unserem dreidimensionalen Raum unendlich viele Flächen.

Dieser Gedanke, daß unser Raum nur ein Theil eines größeren Ganzen höherer Ordnung sei, ließ Böllner nicht mehr frei; um so mehr als ihm damit Aufklärung über eine Reihe wichtiger Fragen der Ontologie — nach dem Verhältniß der Erscheinungen zu den Dingen an sich, nach der Konstitution der Materie u. s. w. — gebracht schien.

Er glaubte geradezu gewisse Thatsachen entdeckt zu haben, welche die Existenz höherer Räume beweisen. Um die Böllnerschen Anschauungen¹³ kurz zu skizziren, ist es nöthig, etwas weiter auszuholen.

Die Thatsache, daß wir überhaupt räumlich vorstellen, d. h. daß wir Empfindungen auf Ursachen beziehen können und müssen, ist eine vor aller Erfahrung, d. i. apriorisch unserem Verstande innewohnende Fähigkeit. Insofern ist der Raum, das Erzeugniß dieser sich bethätigenden Fähigkeit zum räumlichen Vorstellen überhaupt, eine „Anschauungsform a priori“. Dagegen ist für Böllner — und er glaubt hierin, wie in den meisten der folgenden Fragen Kant an seiner Seite zu finden — der specielle Inhalt dieser Anschauungsform, z. B. der von uns Menschen angeschaute Raum ein Produkt der Erfahrung. Denn diese specielle Raumesart konnte nur aus denjenigen Eindrücken und Empfindungen erzeugt werden, welche die uns verliehene Organisation unseres Leibes von der Gesamtheit der in der Welt überhaupt existirenden Ursachen (der Dinge an sich)

empfangen konnte. (Es verhält sich der Raumbegriff als solcher zu jeder speciellen Vorstellung desselben wie ein Kollektivbegriff, z. B. der eines Dreiecks, zu den Einzelvorstellungen, welche dieser Begriff umfaßt. Will man eine diesem Begriff entsprechende Vorstellung erzeugen, so tritt uns ein ganz bestimmtes Dreieck, dessen Seiten und Winkel diese oder jene bestimmte Größe besitzen, vor die Seele; und diese specielle Anschauung ist empirischen Ursprungs, ist nur möglich für Jemand, der einmal ein Dreieck gesehen hat.)

Ist aber der uns anschauliche Raum aus Thatfachen der Erfahrung entsprungen, die unserem Verstand durch die Sinne zugeführt werden, so ist es denkbar und daher auch möglich, daß es Thatfachen der Erfahrung im Gebiet unseres räumlichen Vorstellens gebe, die sich nicht beweisen, nicht aus dem Begriff unseres dreidimensionalen Raumes herleiten lassen.

Eine solche Thatfache erblickt Zöllner in dem Wunder der Symmetrie. Es ist eine der Thatfachen, die uns alltätlich umgeben, und über welche sich ihrer Trivialität wegen früher Niemand gewundert hatte, wie vor Newton Niemand über das Herabfallen des Apfels vom Baum sich erstaunte.

Die Entdeckung dieses Wunders vindiziert Zöllner für Kant. „Wir wollen darthun,“ sagt Kant,¹⁴ „daß der vollständige Bestimmungsgrund einer körperlichen Gestalt nicht lediglich auf dem Verhältniß und der Lage seiner Theile gegeneinander beruhe, sondern noch überdies auf einer Beziehung gegen den allgemeinen absoluten Raum, so wie ihn die Maßkünstler denken, — doch so, daß dieses Verhältniß nicht unmittelbar kann wahrgenommen werden, aber wohl diejenigen Unterschiede der Körper, die einzig und allein auf diesem Grunde beruhen: Wenn zwei Figuren, auf einer Ebene gezeichnet, einander gleich und ähnlich sind, so decken sie einander (können sie zur Deckung gebracht werden). Allein mit der körperlichen

Ausdehnung oder auch den Linien und Flächen, die nicht in einer Ebene liegen, ist es oft ganz anders bewandt. Sie können völlig gleich und ähnlich, jedoch an sich selbst so verschieden sein, daß die Grenzen der einen nicht zugleich die Grenzen der anderen sein können. Das gemeinste und klarste Beispiel haben wir an den Gliedmaßen des menschlichen Körpers, welche gegen die Vertikalfläche desselben symmetrisch geordnet sind. Die rechte Hand ist der linken ähnlich und gleich, und wenn man bloß auf eine derselben allein sieht, so muß eine vollständige Beschreibung der einen in allen Stücken auch von der anderen gelten. Weil aber gar kein Unterschied in dem Verhältniß der Theile derselben unter sich stattfindet, sie mag eine rechte oder linke sein, so würde diese Hand in Ansehung einer solchen Eigenschaft gänzlich unbestimmt sein, denn sie würde auf jede Seite des menschlichen Körpers passen, welches unmöglich ist.“ Ferner an anderer Stelle:¹⁵ „Was kann wohl meiner Hand oder meinem Ohr ähnlicher und in allen Stücken gleicher sein, als ihr Bild im Spiegel? Und dennoch kann ich eine solche Hand, als im Spiegel gesehen wird, nicht an die Stelle ihres Urbildes setzen; denn wenn dieses eine rechte Hand war, so ist jene im Spiegel eine linke. Man kann den Handschuh der einen Hand (ohne ihn umzustülpen) nicht auf der anderen brauchen u. s. f.“

Die Erklärung dieser Widersprüche findet Kant in dem Verhältniß der Erscheinungen zu den dahinter liegenden Dingen an sich: „Was ist nun die Auflösung: Diese Gegenstände sind nicht etwa Vorstellungen der Dinge, wie sie an sich selbst sind, und wie sie der pure Verstand erkennen würde, sondern es sind sinnliche Anschauungen, d. i. Erscheinungen, deren Möglichkeit auf dem Verhältniß gewisser an sich unbekannter Dinge zu etwas anderem, nämlich unserer Sinnlichkeit beruht.“ Darunter ist des Näheren wohl folgendes zu verstehen.

Wenn wir bei Sonnen- oder Kerzenlicht das Schattenbild unserer rechten Hand auf einer gegenüberliegenden Wand entwerfen, so sind wir im Stande, den auf der Wandfläche erzeugten Schattenriß unmittelbar durch Umkehrung der schattenwerfenden Hand in sein symmetrisches Gegenstück zu verwandeln, ohne daß hierbei an der Hand etwas anderes verändert würde, als ihr räumliches Verhältniß zur Projektionsfläche. Gegenüber den Schattenercheinungen in der zweidimensionalen Wandebene ist hier die Hand das Ding an sich, das „hinter die Oberfläche der Erscheinungen zurücktritt“. Analog könnte ein und dasselbe Objekt im vierdimensionalen Raum durch Projektion symmetrische Körper in unserem dreidimensionalen erzeugen (rechtshemiebrische Kristalle — Rechtsstraubensäure; linkshemiebrische Kristalle — Linkstraubensäure).

Es liegt nahe, nun überhaupt die ganze uns sinnlich gegebene dreidimensionale Welt als ein Projektionsphänomen einer anderen Welt „an sich“ von vier Dimensionen nach Analogie einer Schattenprojektion aufzufassen, also als bloßes Schattenbild einer uns nicht direkt wahrnehmbaren Welt von Objekten, welche im Vergleich zu der uns gegenwärtigen Körperwelt um ebenso viel realer sind, wie die dreidimensionalen Körper realer sind als ihre Schatten auf der Wand, oder ihre Bilder auf der Fläche der Netzhaut oder der camera obscura.

Die Vorstellung der ganzen sichtbaren Welt mit ihren drei Dimensionen ist ja erst vom Verstande lediglich auf Grund von Bildern erzeugt worden, welche auf der Bildfläche der Netzhaut, also in einem Gebiet von zwei Dimensionen sich darstellten, ist also ein Werk unseres Verstandes, zu dem er durch die Widersprüche angetrieben wurde, welche ihm bei Annahme von nur zwei Dimensionen die perspektivischen Verzerrungen, Verdeckungen, Verkleinerungen der Objekte darbieten

würden. (In der That, wenn ein Kind seine Hand vor dem Auge bewegt, dieselbe dreht, nähert oder entfernt, so erhält dasselbe nacheinander die verschiedenartigsten Eindrücke in der Fläche der Netzhaut von einem und demselben Objekte, von dessen Identität und Unveränderlichkeit es doch durch sein Gefühl fortwährend überzeugt wird. Hielte das Kind die veränderliche Projektion der Hand in der Fläche der Netzhaut für ein reales Objekt, nicht vielmehr die dahinter liegende Hand, so müßten sich beständig Widersprüche ergeben.)

Einmal also hat, nach Hölners Ansicht, jeder Mensch schon zu der ursprünglich zweidimensionalen Raumanschauung, durch Widersprüche getrieben, eine dritte Dimension hinzugefügt, indem er sich daran gewöhnte, die auf der Netzhautfläche zweidimensional erscheinenden Gegenstände dreidimensional vorzustellen. Die weitere Erkenntniß, die Auffassung der materiellen Welt als Schattenbild einer realeren vierdimensionalen Welt, wird, verkündet Hölner, für die Männer des zwanzigsten Jahrhunderts ebenso eine Trivialität darstellen, wie seit Copernikus für uns die Erklärung der Bewegungen der Himmelskörper mit Hilfe dreidimensionaler Anschauungen

Grenzen der Naturerkenntniß existiren für Hölner nicht.¹⁶ Wir müssen die Widersprüche zu lösen suchen. Das durchweg angewendete Verfahren hierbei giebt ihm das Riemannsche Prinzip an die Hand, „unerwartete Wahrnehmungen durch Ergänzung oder Verbesserung des Begriffssystems zu erklären.“

Man sollte kaum vermuthen, daß er bei dieser Auffassung der Erscheinungswelt Gauß und Plato als Gesinnungsgenossen entdeckt zu haben glaubte.

Von Gauß erzählt sein Biograph Waltershausen:¹⁷ er habe öfters als seine innerste Ansicht ausgesprochen, die drei Dimensionen des Raumes seien nur eine spezifische Eigenthümlichkeit

der menschlichen Seele; Leute, welche dieses nicht einsehen könnten, bezeichnete er einmal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen „Böotier“. Wir können uns, sagte er, in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewußt sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken; und er habe, fuhr er scherzend fort, „gewisse Probleme hier auf die Seite gelegt, die er in einem höheren Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte.“

Das Beispiel Platons von der Höhle der Gefesselten im siebenten Buch des „Staats“ soll zwar nicht auf eine bewußte Anticipation der Gesetze höherer Räume, aber auf eine Ahnung ähnlicher Raumanschauungen hindeuten. Der im Dialog zwischen Sokrates und Glaukon gehaltene Passus ist, kurz dargestellt, folgender:

Man denke sich Menschen in einem höhlenartigen Raum, dessen Ausgang nach dem Lichte zu offen ist, von Kindheit auf so gefesselt gehalten, daß sie nur nach dem Innern der Höhle zu blicken vermögen. Die Beleuchtung komme von einem hinter ihnen in der Ferne brennenden Feuer. Zwischen dem Feuer und den Gefesselten, am Ausgang der Höhle vorbei, führe ein Weg, auf dem Gegenstände getragen werden, auch Menschen gehen, theils sprechend, theils schweigend. Die Gefesselten werden von sich und von jenen Menschen nichts anderes sehen, als die vom Feuer auf die gegenüberstehende Wand der Höhle geworfenen Schatten; von dem Gesprochenen werden sie nur das Echo an der Höhlenwand vernehmen. Natürlich werden die Gefesselten, wenn sie sich untereinander unterreden, diesen allein von ihnen bemerkten Schatten die Namen der Gegenstände selbst geben und die Schatten der wirklichen Gegenstände für das allein Wahre halten. Wenn nun einer der Gefesselten entfesselt und zum Lichte aufzublicken genöthigt würde, wäre er, geblendet von dem Glanze, nicht im stande, die Gegenstände zu sehen;

und wenn ihm gesagt würde, jetzt sehe er richtiger, daß früher Gesehene sei nur Gaukelwerk gewesen, so würde er anfangs vorziehen, jenes doch für wahr zu halten, nicht die Gegenstände selbst, und erst nach längerer Gewöhnung die Wahrheit erkennen. Dann aber würde er wegen der Veränderung sich glücklich preisen und lieber wünschen, einem dürstigen Manne ohne Erbe das Feld als Tagelöhner zu bestellen, als unter den Gefesselten Derjenige zu sein, der die erschauten Schatten der Gegenstände am schärfsten erkennen und im Gedächtniß bewahren würde, auch wenn es unter ihnen Ehrenbezeugungen und Belohnungen hierfür gäbe. Und wenn ein solcher wieder in die Höhle hinabstiege und den früheren Sitz einnähme, so würde ihm, da seine Augen mit Dunkelheit erfüllt wären, gesagt werden, er sei mit verderbten Augen herabgekommen. „Und würden die Gefesselten,“ fragt Sokrates, „nicht Den, der Jemanden zu entfesseln und hinaufzuführen versuchte, könnten sie irgendwie seiner habhaft werden, sogar wohl tödten?“ Glaukon: „Ganz gewiß, beim Zeus.“ Sokrates: „Wenn du aber das Aufsteigen nach oben und die Betrachtung des oben Befindlichen mit dem Sich-erheben der Seele zu dem Bereiche des Gedenkbaren zusammenstellst, so wirst du das, was ich hoffe, nicht verfehlen, aber nur ein Gott weiß wohl, ob es mit der Wahrheit zusammentrifft.“

Die Platonischen Ideen und die Kantischen Dinge an sich betrachtet somit Zöllner als räumliche Objekte von mehr als drei Dimensionen, die in demselben Sinn das „wahrhaft Seiende“ darstellen, wie die Körperwelt gegenüber den Bildern auf der Netzhaut. (Man wird sagen dürfen, daß Zöllner bei seinem Suchen nach Gesinnungsgenossen hierin zu weit geführt wird, und daß Plato selbst der Erstaunteste wäre, wenn er von diesen feinen vierdimensionalen Raumanschauungen Kunde erhalten könnte.)

Suchen wir (immer noch scheinbar Zöllner folgend) die neu

gewonnene Anschauung auf die rein physikalischen Probleme anzuwenden. Nach Gauß lassen sich alle Wirkungen eines Magnets auf andere Körper durch magnetische Fluida erklären, welche auf seiner Oberfläche (einem zweidimensionalen Raum) in bestimmter Weise vertheilt sind. Die Entdeckung der Beziehungen des Magnetismus zur Elektrizität legte es nahe, die Vertheilung der magnetischen Fluida an der Oberfläche der Körper zu ersetzen durch Bewegungen elektrischer Molekularströme im Inneren der Körper, also in einem dreidimensionalen Raum. Aber wenn auch die magnetischen Erscheinungen auf die elektrischen zurückgeführt sind, so ist doch das Wesen der Elektrizität noch so räthselhaft wie zuvor. Wäre es nicht denkbar, die Kraft der Elektrizität und der Schwere auf mechanische Druck- und Stoßkräfte zu reduzieren, indem ein weiterer Schritt gewagt wird? Daß wir es mit einer wenigstens schon diskutirten Frage zu thun haben, möge man daraus ersehen, daß einer der zugleich nüchternsten und schärfsten Beurtheiler naturphilosophischer Probleme, Professor Mach¹⁸ in Prag, sich nicht scheute, die Ansicht auszusprechen: daß „der Grund, warum es bisher nicht gelungen, eine befriedigende Theorie der Elektrizität herzustellen, vielleicht mit daran liege, daß man sich die elektrischen Erscheinungen durchaus durch Molekularevorgänge in einem dreidimensionalen Raum erklären wollte“.

Riemann betrachtete, nach den Mittheilungen eines seiner Schüler, „jedes materielle Atom als einen Eintrittspunkt der vierten Dimension in den dreidimensionalen Raum.“ Er sagt:¹⁹ „Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, daß der Weltraum von einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort aus der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet. In jedes ponderable Atom tritt in jedem Augenblick eine bestimmte, der Gravitationskraft proportionale Stoffmenge ein und erscheint

dort. Die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisterwelt in die Körperwelt eingreift.“

Die diesbezüglichen Gedanken Böllners und Niemanns sind wohl durch folgende Analogie am einfachsten klar zu machen. In einer Ebene denke man sich zwei Massenpunkte, welche durch den Einfluß einer gegenseitigen Anziehungskraft sich zu nähern streben. Verbindet man die beiden Punkte durch starre Geraden mit einem Punkt im Raum und denkt sich den Winkel dieser Geraden zusammengebrückt, so ist die Anziehungskraft zwischen den Punkten in der zweidimensionalen Ebene auf einen mechanischen Druck im dreidimensionalen Raum zurückgeführt.

In der Atomtheorie der Chemie hat sich der Uebergang von der zweidimensionalen zur dreidimensionalen Raumanschauung schon vollzogen; das chemische Molekül wird als ein Aggregat von Elementaratomen gedacht, die in bestimmter Weise im Raum, nicht mehr wie früher in der Ebene gruppiert sind. Wislicenus²⁰ z. B. wurde durch eine Arbeit über die Paramilchsäure veranlaßt, die Verschiedenheit isomerer Moleküle von gleicher Strukturformel durch verschiedene Lagerung ihrer Atome im Raum zu erklären.

Die Atome aber existiren doch nur in unserem Verstand. Dingen, die wir nie gesehen und nie getastet haben, legen wir die Beschränkungen des Gesehenen und Getasteten auf, dazu liegt keine Nothwendigkeit vor. Im Gegentheil entstehen, sagt Mach, Nachteile durch diese Beschränkungen. Wenn wir die chemischen Atome nur nach drei Dimensionen nebeneinander gelegt denken, so ist die Zahl der denkbaren Entfernungen größer, als die Zahl der in diesem Raum möglichen Entfernungen. In der That, ein Molekül bestehe z. B. aus fünf Atomen A, B, C, D, E, so sind zwischen ihnen $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ oder 10 Entfernungen denkbar, aber

nur 9 unabhängige Entfernungen möglich (Fig. 7); d. h. die zehnte noch denkbare Entfernung DE ist vermöge der Eigenschaft dieses Raumes schon mitbestimmt, man kann über dieselbe nicht mehr frei verfügen. Es ist nicht möglich, die Entfernung DE allein abzuändern, ohne dadurch die übrigen Entfernungen zu ändern, also nicht möglich, sich mehrere fünfatomige isomere Moleküle zu denken, die sich nur durch die Beziehung zwischen D und E unterscheiden. Wohl aber sind in einem vierdimensionalen Raum für fünfatomige Moleküle zehn unabhängige Entfernungen nicht nur denkbar, sondern auch herstellbar.

Wenn hier von diskreten Molekülen und Atomen die Rede ist, die einen Körper un stetig erfüllen, so werden Anziehungs-

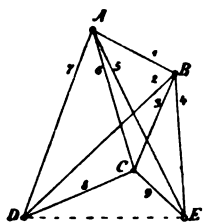


Fig. 7.

und Abstoßungskräfte zwischen den Atomen, also unvermittelte Fernwirkungen nicht als undenkbar angenommen werden müssen. Der Gedanke von Fernwirkungen ohne vermittelndes Medium hat für Böllner so wenig als für Newton, Kant und Mach etwas Erschreckendes. Wo existirt denn der Körper A, der auf einen anderen Körper B wirkt? fragt Böllner — über-

einstimmend mit Mach. Wenn die Antwort lautet: dort, wo unser Verstand einen Theil der von ihm erzeugten und von uns wahrgenommenen Wirkungen hinversetzt, so existirt z. B. der Mond an der Erdoberfläche, insofern er die Fluthwelle des Meeres erzeugt. Statt des alten scholastischen Grundsatzes: ein Körper kann nicht da wirken, wo er nicht ist, ließe sich vielmehr sagen: ein Körper wirkt nicht da, wo er ist, sondern er wirkt da, wo er nicht ist. Wenn die Lichtstrahlen eines neuauflammenden und nach Monaten wieder verlöschenden Sterns, wie z. B. des Sterns von 1885 im Nebel der Andromeda, unser Auge treffen, so wirkt auf der Netzhaut desselben

ein Körper, der wohl vor vielen Tausend Jahren durch Zusammenstoß mit einem anderen in Trümmer gegangen, der also gar nicht mehr als solcher existirt. Von dem bestimmten Orte, an dem sich ein Regenbogen befindet, kann nicht wohl die Rede sein, da dieser jedem Beschauer an anderem Ort erscheint u. a.

Auch Berührungswirkung ist nur ein specieller Fall von Fernwirkung, wo der Abstand zu klein ist, um gemessen werden zu können. Außerdem, wenn eine Kugel meine Hand drückt, so kann nicht behauptet werden, daß der ganze Körper da existire, wohin ich die Druckempfindung verlege, nämlich an der Berührungsstelle; derselbe Raum, den ein Körper einnimmt, kann nicht gleichzeitig von einem zweiten Körper eingenommen werden.

Also, Fernwirkungen zwischen Atomen haben wenigstens nicht mehr Räthselhaftes an sich, als unmittelbare Druckwirkungen.

3. Aber diese Atome oder Monaden oder Kraftcentren, wie wir sie heißen mögen, sind für Böllner empfindende Wesen, mit Lust- und Unlustgefühlen; alle Bewegungen der Atome und ihrer Aggregate, der Körper, gehen so vor sich, als ob sie den unbewußten Zweck verfolgten, die Summe der Unlustempfindungen zu einem Minimum zu machen.

Oder vielmehr, logischerweise muß Böllner schließen: nicht die Atome selbst besitzen Empfindungen, sondern die hinter ihnen stehenden vierdimensionalen „Dinge an sich“, von welchen sie die dreidimensionalen Projektionen sind; ähnlich, wie wir nicht den an einer Wand sichtbaren Schatten zweier miteinander streitenden Menschen Empfindungen beilegen, sondern diesen selbst.

Der letzte Schritt, den vierdimensionalen Raum mit intelligenten Wesen (Geistern, Spirits, transcendentalen Subjekten, Astralwesen) zu bevölkern, zu denen die Menschen in bestimmter Beziehung stehen und die gelegentlich in unseren

Erfahrungsraum eingreifen, war somit für Böllner nur ein kleiner. Anfangs zögernd, trat er später, eingenommen von den Vorführungen des Mediums Slade, welches Askatow aus Amerika hatte kommen lassen, mit dem ganzen Gewicht seiner Persönlichkeit für die seit etwa 1840 neuerdings in Schwung gekommenen Lehren des Spiritismus ein, unterstützt von Ulrich, J. G. Fichte u. A. Wie durch die Lösung metaphysischer Widersprüche die Existenz des vierdimensionalen Raumes, so schien ihm durch die spiritistischen Experimente die Existenz der ihn bewohnenden vierdimensionalen Geister bewiesen zu sein und gelegentlich ein Lieblingswunsch des großen Königsberger Philosophen in Erfüllung gegangen. Kant, der gegenwärtig mit einer gewissen Emsigkeit von den Spiritisten als Vorläufer des modernen Psychismus in Anspruch genommen wird, sagt in den „Träumen eines Geistessehers“:²¹ „Ich gestehe, daß ich sehr geneigt bin, das Dasein immaterieller Naturen in der Welt zu behaupten und meine Seele selbst in die Klasse dieser Wesen zu versetzen. Es scheint, ein geistiges Wesen sei der Materie innigst gegenwärtig, mit der es verbunden ist, und wirkte nicht auf diejenigen Kräfte der Elemente, womit diese untereinander in Verhältnissen sind, sondern auf das innere Prinzipium ihres Zustandes. Es wird künftig — ich weiß nicht wo und wann — noch bewiesen werden, daß die menschliche Seele auch in diesem Leben in einer unaufhörlich verknüpften Gemeinschaft mit allen immateriellen Naturen der Geisterwelt stehe, daß sie wechselweise in diese wirke und von ihnen Eindrücke empfangen, deren sie sich aber als Mensch nicht bewußt ist, so lange alles wohl steht. Es würde schön sein, wenn eine dergleichen systematische Verfassung der Geisterwelt, wie wir sie vorstellen, nicht lediglich aus dem Begriffe von der geistigen Natur überhaupt, der gar zu sehr hypothetisch ist, sondern aus

einer wirklichen und allgemein zugestandenen Beobachtung könnte geschlossen oder auch nur wahrscheinlich vermuthet werden.“

Die vielumstrittene Frage, ob diese Aeußerungen Kants, sowie die noch auffallenderen in den Vorlesungen über Psychologie“²² in seine vorkritische, bezw. nachkritische Periode zu rechnen sind, und ob das „transcendentale Subjekt“ von ihm vierdimensional gemeint war oder nicht, endlich die Frage über seine Stellung gegenüber dem Seher Swedenborg muß hier unerörtert bleiben. Genug, die vierte Dimension erwies sich für Phantasten wie Böllner u. s. w. als sehr geeignet, auf die Erklärung der behaupteten übersinnlichen Wahrnehmungen aller Art überraschendes Licht zu werfen.

Die spiritistischen Phänomene lassen sich in physikalische und intellektuelle scheiden.²³ Zu den ersteren ist zu rechnen: Bewegung von Tischen, Stühlen; Beleben von Spazierstöcken, Pantoffeln und Besenstielen; wunderbares Werfen von Gegenständen; Geisterklopfen (Luther vernahm auf der Wartburg einen Lärm, „als würde man ein Schock Fässer die Stiegen herab“); ekstatisches Schweben von Personen über dem Boden (S. Agnes, Luitgarbis, Peter von Alcantara, der sich während des Messelesens bis an das Kirchengewölbe erhob); Verminderung der Schwere (die schwimmende Art des Propheten Elisa); Hegenproben; Herbringen gewünschter Gegenstände; Ablenkung der Magnetnadel durch eine entfernte Person; Lösung von Knoten in einem geschlossenen Faden; Unempfindlichkeit und Unverletzbarkeit gegenüber von glühenden Kohlen, Kreuzigung, Foltern und Tragen von heißem Eisen; unsichtbare Geistermusik; Erscheinungen („Materialisationen“) von Geistern oder wenigstens einzelner Gliedmaßen derselben (die weiße Hand beim Gastmahl des Belsazar, Buch Daniel; Fußabdrücke bei den Experimenten Elades, photographirt von Böllner); doppelte

Erscheinung derselben Person („doppeltes Gesicht“, Florence Cook, Katie King, Sensitive von Prof. Crookes); Durchdringung der Materie (geschlossener Thüren, Fenster 2c.). Von intellektuellen Phänomenen seien erwähnt: Geisterschreiben („Emanulektor“, Instrument erfunden von Hare zur Erleichterung des Verkehrs mit den Geistern); Hellsehen und Weissagen von Somnambulen, Visionären, Ekstatikern und Hypnotisirten, — befördert oder erweckt u. a. durch Narkotika (Somatrank der Brahminen, Haschisch der Orientalen, Nepenthes Homers, Moly), durch Tempelschlaf, Musik und Tanz (Prozessionen der Astarte, Melitta, Helate; Sabäismus der Kanaaniter, tanzende und heulende Derwische), durch abgesondertes Leben und Aufenthalt in unwirthlichen Gegenden, durch Ausströmungen des Bodens und der Gewässer (Orakel zu Delphi, Sibylle Delphobe in der Höhle am Avernensee), durch Anschauen von Edelsteinen (Urim und Thummim), von Ringen (Daktylomantie), glänzenden Metallbechern, Spiegeln und reinem Wasser (Katoptromantie, Hydromantie), durch Bestreichen der Fingernägel mit geweihtem Oel (Onimantie). Ferner: Erhöhung der Beredsamkeit, Sprechen in fremden Sprachen; Erscheinung derselben Vision bei vielen Personen zu gleicher Zeit (kämpfende Scharen in der Luft, Maklabbäer Kap. 5; Zeichen vor der Zerstörung Jerusalems), räthselhafte Verbreitung von Nachrichten (Persersiege bei Plataä und Mykale, Franzosentag 1848); geistiges Wirken in die Ferne („Telepathie“), Festbannen, Willensübertragungen u. s. w.

Dabei ist der Spiritismus so alt und so verbreitet wie die Menschheit; die Berichte von den Experimenten Glades, vom Doktor Faust, der weißen Frau, den Hexenproben, der Wunschelruthe und dem Tischlein-deck-dich finden sich in anderer Form in dem Märchen von dem Zauberstab der Circe, Arons blühendem Stab, dem Medizinsack des Amerikaners und in den Erzählungen von den ägyptischen Zauberern und den Wundern

des heil. Ambrosius wieder; das Tischrücken ist bei den Chinesen und den Indianern von Iowa ebenso im Schwung, wie es in Europa um die Mitte des Jahrhunderts Gesellschaftsunterhaltung bildete. Der moderne Spiritismus soll 8—11 Millionen Anhänger, besonders unter den gebildeten Ständen, umfassen, die ihre Erlebnisse und Ansichten in 25 periodischen Zeitschriften und hundert und aber hundert selbständigen Werken niederlegen.

Nichts leichter für Höllner, als z. B. das Hellsehen und die geistige Fernwirkung zu erklären. Zunächst zwei Beispiele. Goethe²⁴ sagt: „Unter Liebenden ist diese magnetische Kraft besonders stark und wirkt sogar in die Ferne. Ich habe in meinen Jünglingsjahren Fälle genug erlebt, wo mich auf einsamen Spaziergängen ein mächtiges Verlangen nach einer Geliebten überfiel, und wo ich so lange an sie dachte, bis sie mir wirklich entgegenkam. Es wurde mir in meinem Stübchen unheimlich, sagte sie, ich konnte mir nicht mehr helfen, ich mußte hierher.“ Professor Sepp in München erzählte mir einmal folgende von ihm selbst wenigstens für eine Thatfache gehaltene Episode aus seinem Leben, die ich nachher in seinem Werk über Palästina nachlas: Er litt Schiffbruch im Mittelmeer, schwamm auf den Wellen und war jeden Augenblick gewärtig, „aus der großen Schale zu trinken“; da, in höchster Todesnoth erfaßte ihn der lebhafteste Wunsch, den geliebten Eltern in der fernsten Heimath durch Fernwirkung des Geistes in Folge nervösester Anspannung der Energie den letzten Gruß zu übermitteln; eine Welle warf ihn ohnmächtig, aber lebend ans Ufer, und als er nach Jahr und Tag zurückkehrte, erfuhr er, daß seine Eltern, Beide und gleichzeitig, durch lebhafteste Ahnungen von seiner Gefahr in Kenntniß gesetzt waren.

Denken wir uns, wir erheben uns aus einer Ebene (zweidimensionaler Raum) in einem Luftballon in die Höhe (dritte Dimension), so genießen wir einen weiteren Ueberblick, als die in

der Ebene Stehenden; wir vermögen in betreff eines erwarteten Eisenbahnzugs auf längere Zeit vorauszusagen, daß er herannah, wir sind im Stande in weite Ferne Zeichen zu geben und gegebene Zeichen zu bemerken; kurz, der zweidimensionale Raum ist, von der dritten Dimension aus betrachtet, nach allen Seiten hin ein offener. Analog müßten uns dreidimensionale umschlossene Räume, aus der Richtung der vierten Dimension betrachtet, als offen erscheinen, und zwar in einem um so größeren Abstand von dem Ort unseres Körpers, je höher sich die Seele nach der vierten Dimension erhebt. Es findet hierbei mit wachsender Erhebung nach dieser vierten Dimension in ähnlicher Weise eine Erweiterung des dreidimensional überschauten Raumes statt, wie bei der Erhebung über die Erdoberfläche nach geometrischen Gesetzen eine Erweiterung der zweidimensional überschauten Horizontalfläche stattfindet. So erhob sich also in dem angeführten Beispiel die Seele Sepps in die vierte Dimension, und von hier aus war es ihr eine Kleinigkeit, über das Mittelmeer, Italien und die Schweiz weg nach Deutschland zu blicken.

Es ist zu erwarten, bemerkt Böllner, daß von Beginn des hellsehenden Zustandes mit wachsender Entwicklung desselben successiv eine Erweiterung des geistigen Gesichtskreises eintreten müßte, d. h. die körperlichen Dinge müßten für die Seele in immer größerem Abstand durchsichtig werden; ja, man könnte sogar ein Maß für die Größe der Erhebung in die vierte Dimension ermitteln, falls meßbare Beobachtungen über die radial nach allen Dimensionen wachsende Fernsicht einer allmählich in den magnetischen Schlaf versetzten, hellsehenden Somnambule angestellt werden könnten.

In der That beschreibt der amerikanische Hellseher Davis seine behaupteten Wahrnehmungen im magnetischen Schlaf unter anderem mit den Worten: . . . „Der Kreis meines Schauens begann sich jetzt zu erweitern. Zunächst konnte ich die Mauern des

Hauseß deutlich wahrnehmen. Anfangs erschienen sie mir dunkel und finster; aber bald wurden sie heller und dann durchscheinend. Ich konnte jetzt die Gegenstände, das Hausgeräth und die Personen in dem angrenzenden Hause ebenso leicht sehen, wie die in dem Zimmer, in welchem ich mich befand. Aber meine Wahrnehmungen flossen noch weiter. Die weite Oberfläche der Erde wurde viele Hunderte von Meilen vor meinen umherschweifenden Blicken, die beinahe einen Halbkreis beschrieb, durchsichtig wie Wasser, und ich sah die Gehirne, die Eingeweide und die vollständige Anatomie der Thiere, welche in den Wäldern der östlichen Hemisphäre umherstreiften, Hunderte und Tausende von Meilen von dem Zimmer entfernt, in welchem ich diese Beobachtungen anstellte.“

Stellt man sich ferner vor, man betrachte das Treiben auf einer belebten Straße in einer camera obscura, so scheinen alle Veränderungen der Gegenstände in einer Ebene vor sich zu gehen; Personen, die sich nähern, vergrößern sich; solche, die sich entfernen, verkleinern sich; würde eine sehr dünne Platte in der Richtung gegen sie her getragen und während des Tragens mannigfach bewegt, so würde, je nachdem die Ebene der Platte gegen die Bildebene der camera geneigt ist, dieselbe einmal größer, einmal kleiner zu werden, zeitweise sogar zu verschwinden scheinen. • Es würden sich, falls wir die wirklichen Verhältnisse nicht kennen, für uns Widersprüche mit dem Gesetz von der Erhaltung der Masse ergeben: diese lösen sich aber durch die Annahme, daß jene scheinbar in der zweidimensionalen Ebene vor sich gehenden Bewegungen in Wirklichkeit im dreidimensionalen Raum erfolgen. Analog erklärt sich, für Böllner und seine Partei unter den (ehrlichen) Spiritisten, das unvermittelte Erscheinen und Verschwinden von Gegenständen oder Personen oder einzelner Gliedmaßen derselben durch geeignete Stellung dieser in Wirklichkeit vierdimensionalen

Gegenstände oder Personen gegen unseren dreidimensionalen Raum.

Z. B. für die Erklärung des Herausbringens der Schrotkugel aus der geschlossenen Glaskugel ohne Brechen der letzteren ist folgende, wenn auch etwas triviale Ueberlegung sehr bekannt: Man denke sich intelligente Wesen, welche in einer Ebene leben und von einer Höhe nichts wissen; ihr Raum ist die Ebene, und ein Punkt A kann für sie nach einem anderen Ort B in der Ebene nur gelangen durch Verschiebung in der Ebene. In der Ebene sei (Fig. 8) ein Kreis und darin ein (zweidimensionaler) Körper A. Wenn nun der Körper plötzlich aus dem Kreis verschwunden ist und sich außerhalb

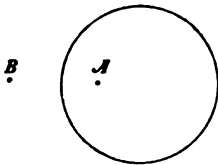


Fig. 8.

halb in dem Punkt B der Ebene vorfindet, und wenn sämtliche die Kreisperipherie bewohnende Wesen versichern, daß der Kreis von dem Körper nicht passirt worden sei, so wird allgemein unter jenen Wesen angenommen werden, es liege Betrug oder Zauberei vor. Ein besonderes intelligentes Individuum wird dann vielleicht auf den Gedanken kommen, daß der Körper von einem Wesen in der dritten Dimension in der Richtung nach der letzteren versetzt und dann außerhalb des Kreises wieder in die Ebene zurückgelegt sei. Wir sind solche, einen dreidimensionalen Raum bewohnende Wesen; nichts leichter für uns, als diese Zauberei auszuführen. Steigen wir eine Stufe auf und denken uns eine Glaskugel und ein Schrotkorn darin, so genügt es, um das Schrotkorn daraus zu entfernen, daß ein Wesen in einem vierdimensionalen, den unserigen allseitig umgebenden Raum in unseren dreidimensionalen Raum eingreife, die Glaskugel samt Schrotkorn nach der vierten Dimension entrücke und beides so zurückführe, daß sich nachher das Schrotkorn außerhalb befindet.

Das Innere einer Schleife, wie in Fig. 9 b, wäre für solche zweidimensionale Wesen ein geschlossener Raum. Aus einem Faden a läßt sich dieselbe herstellen, erstens innerhalb der Ebene, indem der eine Theil BC um 360° um B gedreht wird (und von jenen gedachten Wesen nur auf diese Weise), zweitens innerhalb des dreidimensionalen Raumes, indem der Faden a zuerst in die Lage c, dann durch Herausdrehen aus der Ebene in die Lage b übergeführt wird, wobei in letzterem Fall das Ende C in derselben Richtung bleibt. Analog ließe sich der Knoten d erstens im dreidimensionalen Raum durch Drehen von BC um 360° , zweitens und einfacher in einem vierdimensionalen ohne Aenderung der Richtung BC schürzen und lösen; — ein Gedanken- gang, der sich mit Zuhülfe- nahme von vier Variablen auch in aller Strenge in die Sprache der Mathematik übersetzen läßt (Simony, Klein, Hoppe, Schürlein), womit aber natürlich kein mathematischer Beweis für die Möglichkeit des Schleifenexperiments gegeben sein soll.²⁵

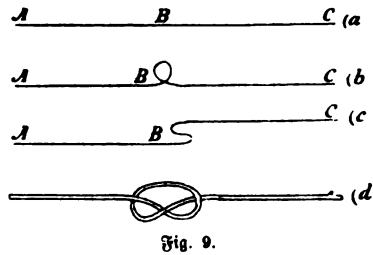


Fig. 9.

Die Bedingungen — sagt Böllner —, unter welchen unsere Erkenntniß von der Welt fortschreitet, liegen in den Widersprüchen des Denkens mit den Thatsachen der Beobachtung. Die erwähnten spiritistischen Wahrnehmungen, wie Verminderung der Schwere, Durchdringung der Materie, totale oder partielle Geistererscheinungen, beweisen das Vorfisgehen gewisser Veränderungen an unserer Körperwelt, indem „die Geisterwelt in die Körperwelt eingreift“. Gesezt es säßen in der Gondel eines Luftballons zwei Personen sich gegenüber, in so dichtem Nebel, daß die Insaßen jedes Blickes auf die Erde und den bewülkten

Himmel beraubt wären, und sie empfänden plötzlich einen Druck, der sie mit unsichtbarer Gewalt voneinander zu trennen suchte, und sie bemerkten zugleich, wie ein an einem spiralförmig gewundenen Draht aufgehängtes Gewicht sich zu heben suchte, so würde ein Wesen, dem die absoluten Raumverhältnisse des Ballons bekannt wären, den letzteren in schneller Rotation um seine Längsachse und in Abwärtsbewegung begriffen erkennen. Hätte Galilei oder Newton an der Luftreise theil genommen, so würden sie, vermuthet Böllner, ohne jemals die Erde gesehen zu haben, auf die Existenz dieser ihnen unsichtbaren Welt aus jenen Erscheinungen geschlossen haben, wie Leverrier und Adams auf die Existenz des Neptun aus Ortsveränderungen des Uranus schlossen, bevor ihn ein sterbliches Auge erblickt hatte. Ebenso müssen wir auf die Existenz einer andern, mit intelligenten Wesen bevölkerten vierdimensionalen Welt, die vielleicht eine größere Realität als unsere Sinnenwelt besitzt, aus den spiritistischen Phänomenen schließen.

Was berechtigt uns überhaupt, der Welt unserer Sinne allein absolute Realität zuzuschreiben? Der Unterschied zwischen den Bildern der Träume und Hallucinationen, die ohne Vermittlung des physiologischen Gesichtsinns, ausgestattet mit allen Attributen der Sinnlichkeit, in unserer Seele entstehen, gegenüber den im gewöhnlichen Leben durch Vermittlung des Gesichtsinns in uns erzeugten besteht nur in der größeren Lebhaftigkeit, Gesetzmäßigkeit und Beständigkeit der letzteren. Auch in der Seele eines Anderen vermag, wie die bekannten hypnotischen Versuche beweisen, der individuelle Wille eines einzelnen Menschen Vorstellungen zu erzeugen, mit allen Symptomen derselben Realität, wie wir sie der uns umgebenden sogenannten realen Welt beilegen. In ähnlicher Weise wird als Ursache unserer real genannten Vorstellungswelt ein individuelles, mit Intelligenz und Willen begabtes Wesen vorausgesetzt werden

müssen, gleichgültig, wie weit in quantitativer Hinsicht die Intelligenz und Stärke jenes individuellen Willens den menschlichen überragt.

In welcher Beziehung steht nun jene vierdimensionale Geisterwelt zu der Welt unserer Sinnlichkeit?

Hier besonders setzt die Theorie Karl du Prels an²⁸ diejenige Böllners an: Hinter jedem Ding der Sinnlichkeit steht ein realeres transcendentales (vierdimensionales) „Ding an sich“, welches sich in jenem gleichsam auf dem Erfahrungsraum projicirt. Auch mit der irdischen Person jedes Menschen ist ein transcendentales Subjekt gleichzeitig; nur mit einem Theil unseres Wesens sind wir in die irdische Ordnung versenkt. Die Trennung des irdischen Leibes von dem „geistigen Leib“ tritt ein, erstens im Leben, sowohl unwillkürlich (Doppelgänger, doppeltes Gesicht), als durch fremden Willenszwang (Citation, Hypnotisirung); zweitens im Sterben; drittens nach dem Tod als willkürliche Darstellung des transcendentalen „Astralleibes“ (Geister, Gespenster) und als veranlaßte Darstellung (Materialisation, Nekromantie). Die Existenz dieses gleichzeitigen transcendentalen Ichs oder Astralleibes, dieses Dämoniums, das uns stets begleitet, zeigt sich unter anderen in den Zuständen des tiefen Schlafs, des Somnambulismus und Mediumismus, welchen das Merkmal einer Verlegung der Empfindungsschwelle gemeinschaftlich ist, ferner in dem Doppelgefühl der Fieberkranken und Wahnsinnigen, in dem Zucken in amputirten Gliedern. Bei den Somnambulen ist die Empfindungsschwelle dauernd verlegt, also die Trennung des Substanzleibes vom Astralleib jederzeit möglich; eine Somnambule ist z. B. im Stande, in wenigen Sekunden geistig eine Reise von Orleans nach Meunh zu unternehmen, um dort eine sterbende Schwester zu besuchen, und findet dabei noch Zeit, sich unterwegs einige Städte anzusehen, die sie noch nicht kennen gelernt (du Prel). Die Wunder der

Seherin von Prevorst (Justinus Kerner), die Luftreisen der Zauberer und Hexen u. erklären sich so von selbst.

Bei der Wichtigkeit, welche diese Theorien für die Fragen nach dem Verhältniß von Seele und Leib und dem Fortleben nach dem Tod haben müssen, läßt sich denken, daß die Theologie nicht gleichgültig denselben gegenüberstand.

Nach dem englischen Theosophen Henry More²⁷ (1614 bis 1687) — der die Ansicht aufstellte, alle Körper der Sinnenwelt seien mit drei, die Geister mit vier Dimensionen begabt, weshalb für die Geister keine Undurchdringlichkeit stattfinde — war in Deutschland der württembergische Pfarrer Joh. Ludw. Fricker²⁸ (1729—1761) aus Dettingen bei Urach der erste, welcher, und zwar, wie es scheint, unabhängig von More, die Konzeption einer durch eine Dimension erweiterten Raumanschauung gewann und auf die Erklärung von Bibelstellen verwandte.

Die zwei Stellen, über welche sich eine umfangreiche Literatur angesammelt hat, sind: Epheserbrief Kap. 3, B. 18: „Auf daß ihr begreifen möget mit allen Heiligen, welches da sei die Breite und die Länge und die Tiefe und die Höhe“; sowie das alttestamentalische Vorbild dazu, Hiob, Kap. 11, 9. 7—9: „Meinest du, daß du so viel wissest, als Gott weiß, und wollest alles so vollkommen treffen als der Allmächtige; er ist höher denn der Himmel, was willst du thun; tiefer denn die Hölle, was kannst du wissen; länger denn die Erde und breiter denn das Meer.“

Frickers Philosophie ist von Dettinger²⁹ eingehend beschrieben. Letzterer wandte die Frickersche Raumtheorie außerdem an auf die Erklärung von Visionen der Propheten und die Beschreibung des neuen Jerusalems in der „Offenbarung Johannis“; dasjenige, was auf dieser Welt die Länge ausmache, sei in solcher Stadt unmeßbar, sie habe folglich eine vierte Dimension, wovon sich freilich ohne Eröffnung eines besonderen

Sensorii kein Begriff formiren lasse. Von Detinger ist bekannt, daß er, durchdrungen von der Realität einer uns umgebenden unsichtbaren Geisterwelt, nachts in die Wälder und Felder oder auch seine Kirche ging, um den abgeschiedenen Geistern zu predigen. Zu dem Buchhändler Fues in Tübingen sagte er, die Luft sei „so voll von Geistern, daß Viele, wenn sie es wüßten, oder sehen könnten, bei Nacht sich fürchten würden, ein Fenster aufzumachen.“

Als gegen das Ende der siebziger Jahre die spiritistische Bewegung unter Anführung von Crookes, Wallace, Böllner, Fichte und Ulrici besonders lebhaft im Gange war, konnte man die widersprechendsten Urtheile aus dem theologischen Lager hören. Der „Liberale Protestant“ und die „Protestantische Kirchenzeitung“ äußerten sich: „es ist ein häßlicher Hegenabbath, den wir die Koryphäen der Naturwissenschaft aufführen sehen; aber es ist die nothwendige Ergänzung zu jenem Mangel an Vertiefung in echte Philosophie und wissenschaftliche Theologie, welche jenen Kreisen eigen ist.“ Andererseits Böllner, Prof. der Theologie, Redakteur der Zeitschrift „Beweis des Glaubens“: „Der schweren, vielleicht tödtlichen Wunde, die dem Materialismus unserer Tage durch diese neue Erkenntniß aller Wahrscheinlichkeit nach geschlagen werden wird, darf sich der Christ gewiß freuen.“ Und Prof. Luthard, Redakteur der „Ergänzungsblätter zur allgemeinen evang. - luth. Kirchenzeitung“ schrieb 1879 eine lange anerkennende Abhandlung über Böllners Theorie der vierdimensionalen Raumwesen, beginnend: „Dem stoffvergötternden Materialismus ist seit kurzem im Heerlager der bisher ihm ergebenen Naturforscher selbst eine nicht zu verachtende Gegnerschaft erwachsen; ein Idealismus kühnster Art hat sich aus eben derselben atomistischen Naturbetrachtung herangebildet, welche dem Materialismus zur Grundlage diente.“

Böllner³⁰ selbst machte aufmerksam unter anderem auf die charakteristische Uebereinstimmung der von Christus berichteten

Wunder mit dem „neuen Licht“, das nach seiner Ueberzeugung durch die Begründung der Transcendentalphysik auf Grund spiritistischer Phänomene angebrochen sei: Zerreißung des Tempelvorhangs bei der Kreuzigung, Auferstehung und Himmelfahrt, Verkörperung, das Sprechen in vielerlei Zungen bei Ausgießung des heiligen Geistes; ferner auf die Worte Christi, in denen er seine Jünger zu wiederholten Malen auf die Unmöglichkeit hinweist, denjenigen Ort zu veranschaulichen, wohin er bei seinem Verschwinden gehe, und von wo er wiederkommen würde. (Joh. 13, 33; 13, 36; 14, 2 u. 3; 14, 28; 16, 5; 16, 13;) „Ihr werdet mich suchen, und wie ich zu den Juden sagte: Wo ich hingehe, da könnt ihr nicht hinkommen. Spricht Petrus zu ihm: Herr wo gehst du hin? Jesus antwortete ihm: Da ich hingehe, kannst du mich diesmal nicht folgen, aber du wirst mir hernachmals folgen“ u. s. w.

Die Episode 17, 19 erscheint Büllner wie die Schilderung einer spiritistischen Materialisationsfiktion; er berichtet, wie er und Prof. Crookes mehr als einmal gesehen haben, wie sich Medien (Home, Eglinton u. A.) frei in die Luft erhoben. Heutzutage könne Niemand mehr die Möglichkeit der leiblichen Wiederkunft Christi in Abrede stellen. Mit derselben innersten Ueberzeugung wie Detinger erblickt er in jenen Bestrebungen der Transcendentalgeometrie einen prophetischen Hinweis auf die dereinstige Erweiterung unserer Raumanschauung und die dadurch bedingte vollkommeneren Erkenntniß gegenüber allen letzten Fragen, welche die denkende Menschheit peinigen.

Es lohnt nicht die Mühe, auf derartige lächerliche Einmischungen in theologische Fragen weiter einzugehen.

Runmehr gestatte ich mir, meine persönlichen Ansichten über die im vorhergehenden geschilderte Theorie der höheren Räume,

der Eintheilung folgend, zu entwickeln und das Ergebniß des folgenden Gedankengangs sogleich zusammenfassend vorwegzunehmen: Der menschliche Erfahrungsraum ist der einzige Maßstab, unter dessen Voraussetzung über ausgedehnte Mannigfaltigkeiten Untersuchungen angestellt werden können; die Axiome der Geometrie charakterisiren diesen Raum als einen ebenen, gleichförmigen. Die sogenannten mehrdimensionalen Räume sind nichts weiter als Gedankenbilde, analytische Fiktionen, welche dazu dienen, Sätze der Analysis oder Geometrie allgemeiner auszusprechen, mehrere Sätze in einen einzigen zusammenzufassen, Ausnahmen zu vermeiden. Alle übrigen Anwendungen der sogenannten vierten Dimension sind gegenstandslos, weil auf Trugschlüssen beruhend.

Ein Standpunkt, von welchem aus eine logische Beurtheilung jener Theorien geschehen kann, wird gewonnen durch Zurückgehen auf das Wesen der Raumanschauung. Das Erste, was dem Menschen von der Außenwelt entgegentritt, sind Affektionen der Sinne, Reizungen der Nervenenden durch Aether- und Körper-Schwingungen. Diese Reize haben Empfindungen zur Folge. Ueberzeugt von der Existenz einer von uns unabhängigen realen Außenwelt und unterstützt vorzugsweise durch den Tastsinn lokalisiren wir diese Empfindungen, finden, daß dieselben in irgend einer Form, welche vor allen Empfindungen existiren muß, sich ordnen. Diese Form, in welcher sich für uns die Gegenstände einreihen, oder vermittelt derer wir die Dinge außer uns vorstellen, ist der Erfahrungsraum. Die Struktur dieser Raumform kann aber noch irgendwie beschaffen sein.

Von jenen Reizen und den darauffolgenden Empfindungen bleiben in der Seele Erinnerungen zurück, welche uns in den Stand setzen, jeden Augenblick die Vorstellung der

Gegenstände im Gemüth wiederherzustellen; wir betrachten dann die Gegenstände, welche vorhin auf unsere Sinne wirkten, in „innerer Anschauung“. Die Grundgebilde des Raumes, die kaum a priori mit der Raumanschauung gegeben waren, sind der Punkt, die Gerade und die Ebene. Den Anlaß zur Bildung dieser Elementarbegriffe erhalten wir in der Erfahrung. Z. B. von einem Stab, einem gespannten Faden oder dergleichen denken wir alle Unvollkommenheiten weg und gelangen so durch Abstraktion zur reinen Vorstellung einer „Geraden“, die aber selbst nicht definirt werden kann; alle Definitionen der Geraden müssen letzteren Begriff selbst mehr oder weniger versteckt einschließen; ein leitendes Prinzip bei jener Begriffsbildung ist uns in der Deckung dreier Punkte innerhalb der Sehlinie gegeben.

Mit diesen Grundbegriffen und einigen daraus abgeleiteten operiren wir in der elementaren Geometrie. Die geometrischen Gebilde konstruiren wir uns dabei in der inneren Anschauung auf Grund der Erinnerung, welche wir von den durch Abstraktion genommenen zurückbehalten haben; und wenn wir die Gebilde empirisch auf Papier konstruiren, so ist dies nur eine Erleichterung der inneren Anschauung. Uebrigens ist die geometrische Wissenschaft durchaus keine rein logische. Wie Gerken²⁹ mit Recht betont, ist bei dem Aufbau dieses Systems außer dem Syllogismus stets noch eine Bethätigung der Anschauung zu bemerken. Wenn drei Punkte A B C vorgestellt werden und zwischen A und B, ebenso zwischen A und C eine Gerade möglich ist, so lehrt uns erst die Anschauung den Winkel B A C kennen; sie erst zeigt, daß Raum zwischen beiden Geraden ist, der eine Verbindung der Punkte B und C durch eine Gerade von gleicher Art wie zwischen A und B und zwischen A und C gestattet; sie lehrt zugleich, daß diese Möglichkeit für alle Punkte auf A B und A C besteht und erzeugt so das dritte Element der Raumvorstellung, die Ebene (Loge, Metaphysik Seite 245).

Wenn wir beweisen wollen, daß die Summe der Winkel im Viereck vier Rechte ist, und zu diesem Zweck eine Diagonale ziehen, so sagt mir nicht das logische Denken, sondern die Anschauung, daß die Summe der Winkel in den beiden so entstehenden Dreiecken dieselbe bleibt wie in dem zuvor angeschauten Viereck.

Die Frage, wie viel Dimensionen unser Erfahrungsraum besitze, ist eine sekundäre und läßt sich verschieden beantworten, je nachdem ein Element dem Raum als erzeugendes zu Grunde gelegt wird. Ursprünglich ist die Dreifachheit der Dimensionen: Länge, Breite, Höhe, ein unbestimmter „Nachhall der konkreten Welteinrichtung“; bestimmt scheint die Dreifachheit erst aufzutreten, seit der Koordinatenbegriff eingeführt war: Wird der Raum als Gesamtheit seiner Punkte erzeugt, so sind zur Orientirung eines Punktes drei Abmessungen, etwa die drei mit Richtungsmerkmalen versehenen Abstände des Punktes von drei Grundebenen erforderlich. Der Raum erscheint dann als eine dreifach ausgebehnte Mannigfaltigkeit. Mit dem gleichen Recht könnten wir ihn als eine vierfach ausgebehnte Mannigfaltigkeit betrachten, falls nämlich die Gerade (oder die Kugel) als Grundelement des Raumes vorausgesetzt wird, worauf schon Plücker aufmerksam machte. Nämlich denken wir uns z. B. die Gerade als erzeugendes Element des Raumes, so bilden die Geraden in einer Ebene, die von einem Punkte ausgehen, eine einfache Unendlichkeit; die Geraden von allen Punkten der Ebene aus bilden somit eine zweifache Unendlichkeit. Um alle Gerade im Raum zu erhalten, d. h. letzteren mit Geraden zu erfüllen, genügt es, zwei Ebenen anzunehmen und von jedem Punkt der einen Ebene nach jedem Punkt der anderen Ebene eine Gerade zu ziehen, also die zweifache Unendlichkeit der einen mit der zweifachen Unendlichkeit der anderen vollständig zu kombiniren; so betrachtet, stellt sich der Raum als eine zweimalzwei- oder vierfache Unendlichkeit

dar. (Irrthümlich ist natürlich, wenn Loze bemerkt, deshalb könne z. B. die Ebene auch als dreidimensional angesehen werden, weil es freistehe, statt zwei rechtwinkligen Koordinatenachsen drei sich unter 60° schneidende Achsen anzunehmen. Allerdings wird ein solches System bei den sogenannten Dreieckskoordinaten benutzt, aber dann besteht zwischen den drei Abständen eines Punktes von den drei Geraden eine Relation.)

Die Struktur des Raumes ist angegeben in den Axiomen, den Grundwahrheiten der Geometrie, die eben deshalb nicht zu beweisen sind. Sie sagen aus, daß unser Raum den Charakter einer „ebenen“ gleichförmigen Form besitze, in welchem die festen Gebilde ohne Dehnung oder Zusammenziehung sich bewegen lassen; sie sind insofern empirisch, als die Menschheit diese Grundwahrheiten erst erlernen mußte, wie jeder Mensch seine Sprache lernt, — was nicht hindert, daß die Axiome von uns unabhängige Eigenschaften unseres Erfahrungsraumes darstellen, in welchem nun einmal Punkt, Gerade, Ebene die einfachsten Elemente bilden.

Diese Behauptungen werden besonders klargelegt, wenn wir in ein Gebiet herabsteigen, das wir leichter beherrschen. Stellen wir uns wieder zweidimensionale Wesen W vor, welche auf einer Kugelfläche K leben, ohne von einer dritten Dimension eine Anschauung zu besitzen. Diese Kugelfläche ist ihr a priori gegebener Raum, endlich und unbegrenzt, da ein Kugelgroßkreis für ein Wesen W dasselbe ist wie für uns eine unbegrenzte Gerade. Dieser Raum besitzt Eigenschaften, welche sich in anderen, von jenem Wesen W zu erlernenden Grundwahrheiten, Axiomen, zeigen müssen. Um die Winkelsumme im Dreieck zu konstruieren, werden sie sich eine Maßeinheit zur Winkelmessung herstellen, etwa indem sie zwei aufeinander senkrechte Geraden (Kugelgroßkreise) ziehen; sie finden, daß jedes Dreieck (z. B. $\triangle P Q P$ Fig. 3) eine Winkelsumme ergiebt, die um eine Kon-

stante größer ist als zwei ihrer rechten Winkel. Sie erkennen ferner, daß zwei Geraden sich in zwei Punkten R und R^1 schneiden u. s. f. Nichts hindert dann jene Wesen W , Betrachtungen in der Hinsicht anzustellen, welche Empfindungen sie erfahren würden, falls ihr Raum ein anders beschaffener zweidimensionaler, ein anderes Raumoid wäre, — um damit einen trefflichen Ausdruck von Liebe zu acceptiren, der ihn „seinen Gegnern zum Geschenke macht, als das Einzige, was er für ihre Sache thun könne“.

Dabei ist jedoch noch Folgendes zu erwägen. Um die Analogie vollständig durchzuführen, müßten wir für jene Wesen vollkommen freie Bewegung in ihrem Raum ausschließen und ihre Eigenbewegung an diejenige von anderen zweidimensionalen Gebilden gebunden denken, wie die unserige an diejenige von Planeten. Es ist deshalb sehr unwahrscheinlich, ob die W es jemals in Wirklichkeit konstatiren könnten, wenn sie wieder denselben absoluten Raumpunkt R erreicht haben. Außerdem sind ihre Messungen ebenfalls mit Fehlern behaftet vorauszusetzen.

Um unser Denken, auch die Entwicklung der analytischen Geometrie ist an die Raumanschauung gebunden. Es steht uns nichts im Wege, eine Beziehung zwischen n Variablen aufzustellen, aber eine Anschaulichkeit kommt derselben nicht mehr zu, wenn n größer als drei ist; und wenn gesagt wird, durch Aufstellung einer linearen Gleichung zwischen vier Variablen sei ein ebener vierdimensionaler Raum definirt, so ist sich der nüchterne Mathematiker bewußt, daß dies nichts weiter als eine Nebenart ist, dazu dienend, geometrische Beziehungen als Specialfälle eines allgemeineren Gesetzes auszudrücken oder gewisse Sätze zusammenzufassen. Das „Rümmungsmaß eines n -dimensionalen Raumes“ ist eine analytische Formel, der eine geometrische Bedeutung nur für $n = 1$ und $n = 2$ entspricht.

Daß die Erweiterung des Begriffs „Raum“ zum Zweck

der Zusammenfassung und zur Vermeidung von Ausnahmen einige Dienste leisten kann, zeigt sich deutlich in der Analysis³¹ und läßt sich nur sehr unvollkommen durch einige elementare Beispiele zeigen:

Schon Kant und Möbius wiesen darauf hin, daß zwei kongruente Dreiecke in einer Ebene nicht in jedem Fall durch Verschiebung innerhalb der Ebene zur Deckung gebracht werden können. Die Dreiecke in Figur 10a lassen sich nur dann decken,

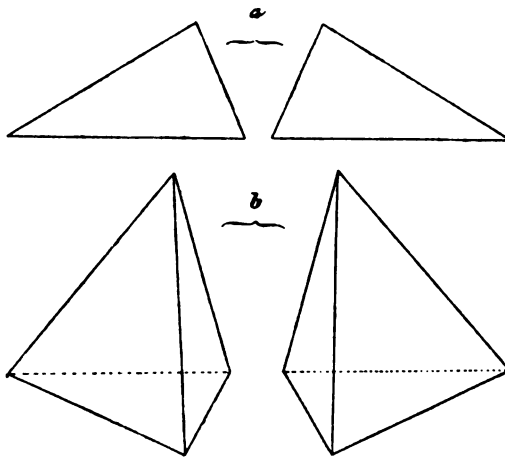


Fig. 10.

wenn wir die dritte Dimension zu Hülfe nehmen, also das eine Dreieck um eine Seite umklappen. Analog können wir sagen: zwei kongruente Pyramiden — die alle Seiten und Winkel gleich haben — lassen sich in jedem

Fall zur Deckung bringen; denn wenn sie liegen wie diejenigen von Figur 10b, so denken wir uns vorher die eine in einem fingierten vierdimensionalen Raum umgeklappt. — Ferner ist bekanntlich bei der Anwendung der Maßbestimmungen auf die Geometrie a eine Strecke, a^2 ein Quadrat, a^3 ein Kubus; was aber ist a^4 , a^5 ? Zunächst geometrisch nicht deutbar. Aber nach Zulassung des Begriffs mehrdimensionaler Räume entfällt auch diese Ausnahme, und es stellt z. B. a^4 das Resultat der Inhaltsbestimmung in einem vierdimensionalen Raum vor. — Schlegel hat ferner die regulären

Polyeder in einem mehrfach ausgedehnten Raum untersucht und gefunden, daß der Satz: es giebt nur 5 reguläre Körper (Koskaeder, Dodekaeder . . .), das Anfangsglied einer gewissen einfach gesetzmäßigen Reihe von Sätzen ist; im vierdimensionalen Raum gäbe es sechs reguläre Körper zc. — Schon Ende des vorigen Jahrhunderts versuchte Lagrange die Mechanik als eine Geometrie von vier Dimensionen aufzufassen, indem die Zeit als vierte Koordinate hinzukommt. U. a. m.

Von einigen Mißverständnissen Locke möge noch kurz die Rede sein (Locke, Metaphysik 1879, 2. Buch Kosmologie, 2. Kap., Deduktionen des Raumes, Seite 246 Schluß, 248 Mitte, 256 Anfang und Mitte, 262 Schluß, 264 Mitte; Logik 1874, über Begrenzung der Begriffe, Seite 217). Er ermahnt seine Fachgenossen, auf dem Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie ihres Amtes zu warten und die schweren Bedenken geltend zu machen, welche sie im Namen der Philosophie gegen manche mathematische Spekulationen der Gegenwart erheben sollten. Er selbst legt gegen die Erweiterung des Begriffs „Raum“ auf mehrfach ausgedehnte Systeme heftige Verwahrung ein: „Es ist durchaus unzulässig, Namen und Begriff des Raumes auf Gebilde zu übertragen, die mit ihm unter den gemeinsamen Oberbegriff eines anschaulichen Ordnungssystems fallen würden. . . , aus diesem gefährlichen Sprachgebrauch entstehen die Folgen, die wir vor uns sehen: die Annahme, eben der Raum, in welchem wir leben, habe wirklich außer seinen drei Dimensionen eine vierte und sei nur tückisch genug, sie uns nicht merken zu lassen, vielleicht aber gelinge es uns in Zukunft, auch in sie hinein einen Blick zu thun; dann würden wir durch sie symmetrische Körper ebenso zur Deckung bringen können, wie in den dreien die symmetrischen Figuren der Ebene. . . Was hätten wir übrigens dann für ein Gut gewonnen, wenn wir uns mit dem Umklappen symmetrischer Raumfiguren beschäftigen könnten,

und was geht uns jetzt ab, da wir es nicht können, und außerdem, muß denn das alles sein, was schön wäre, wenn es wäre?" und an die Träume der Fourieristen erinnernd: „dann wird es freilich schön sein, wenn gezähmte Walfische uns durch die vierte Dimension des Zuckermeeres tragen werden.“ „So gewiß der Name des Raumes für uns nur ein Ordnungssystem bedeutet, in welchem wir diese ursprüngliche, aus arithmetischen Betrachtungen allein gar nicht ableitbare Anschauung haben, so gewiß ist es logische Spielerei, ein System von vier oder fünf Dimensionen noch Raum zu nennen. Gegen alle solche Versuche muß man sich wehren; sie sind Grimassen der Wissenschaft, die durch völlig nutzlose Paradoxien das gewöhnliche Bewußtsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe täuschen.“ Unter anderem bemerkt Locke: „Reden von einer Geraden, die als heimlicher Kreis von unendlichem Durchmesser in sich zurückkehre, ohne ihre Richtung verändert zu haben, sind nicht Theile einer esoterischen Wissenschaft, sondern Zeugnisse einer logischen Barbarei. Nichts anderes bezeugen die Phrasen von Parallelen, die sich in unendlicher Entfernung schneiden sollen, sie schneiden sich in keiner endlichen Entfernung, und da jede Entfernung, wenn man sie erreicht dächte, wieder eine endliche sein würde, so thun sie es überhaupt in keiner; ganz unzulässig aber ist die Verkehrung dieser Verneinung in die positive Behauptung, im Unendlichen gebe es einen Ort, wo ihr Durchschritt stattfände. Das ist pomphafter Kalkül, durch den vollständiger Widersinn empfohlen wird.“ u. s. f.

Ähnliche Erweiterungen wie diejenige des Begriffs Raum sind in vielen Zweigen der Mathematik üblich und von großem Nutzen:

Aus dem ursprünglichen Begriff der Zahl, als Resultat der wiederholten Setzung eines Objekts, die Berechti-

gung von Zahlen wie $2 + 3\sqrt{-1}$, -5 , $7^{3/4}$ direkt nachzuweisen, wird Niemand gelingen. — 5 wird als Zahl erst dadurch eingeführt, daß die Definition der Subtraktion, $(a - b) + b = a$, auch auf solche Differenzen $a - b$ ausgedehnt wird, in denen der Minuendus kleiner ist als der Subtrahendus; und hierzu ist eine Erweiterung des Begriffs der Zahl in dem Sinne erforderlich, daß auch solche uneigentliche Differenzenformen als Zahlen in der Arithmetik zugelassen werden. Jedermann aber weiß, welche Vortheile für die Vereinfachung arithmetischer Sprachweise durch diese Zulassung erlangt worden ist; es ist damit möglich, die Subtraktion unter die Addition, weiterhin die Division unter die Multiplikation u. zu subsummieren.

Ähnlich verhält es sich mit Begriffen wie „unendlich ferner Punkt“, „unendlich ferne Ebene“, „imaginäre Kreispunkte“ u. s. w. Der unendlich ferne Punkt einer Schar von Parallelen ist offenbar kein „Punkt“ im ursprünglichen Sinne dieses Wortes. Seine Einführung beruht aber auch auf nichts anderem, als einer analytischen oder geometrischen Festsetzung, welche ermöglicht, Sätze zusammenzufassen. Statt zu sagen: 1) zwei Gerade schneiden sich im allgemeinen in einem Punkt, 2) in dem speciellen Fall, wo sie parallel sind, schneiden sie sich nicht, vereinbaren wir zu sagen: zwei Gerade schneiden sich stets in einem Punkt, (nämlich wenn sie parallel sind, in einem uneigentlichen, dem sogenannten unendlich fernen Punkt). Daraus folgt dann mit Nothwendigkeit, die unendlich fernen Punkte aller Richtungen auf einer (uneigentlichen) Geraden zu denken. Keinem vernünftigen Mathematiker fällt es daher ein, die „unendlich fernen Geraden“ in einer bestimmten Lage auffuchen zu wollen. Dies sind alles nur nützliche Redensarten, Hülfsmittel der Ausdrucksweise. Eine metaphysische Spekulation ist hinter dem Begriff „unendlich“ in der Mathematik nur für Denjenigen

verborgen, welcher die Entstehung desselben unrichtig erfaßt hat.

Wenn Loze fragt: was gewinnen wir für ein Gut, wenn wir in jedem Falle symmetrische Figuren zur Deckung bringen könnten? so dürfte er mit demselben Recht fragen: was haben wir für ein Gut gewonnen, wenn wir die erwähnten Sätze der Geometrie in einen zusammenfassen? Antwort: Einfachheit des Denkens. Und vorausgesetzt, daß die Nachsage Definition von Wissenschaft als „Ökonomie des Denkens“ für zutreffend anerkannt wird, ist jenes Verfahren der Begriffserweiterung durchaus wissenschaftlich.

Die heftige Abneigung mancher Philosophen gegenüber der Erweiterung des Raumbegriffs läßt sich übrigens leichter verstehen, wenn man die tatsächlichen Uebergriffe sich vergegenwärtigt, die auch von mathematischer Seite nicht selten sind. Dr. Gustav Beller mann veröffentlicht eine wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königstädtischen Realgymnasiums zu Berlin, Ostern 1889 mit dem Thema: „Beweis aus der neueren Raumtheorie für die Realität von Zeit und Raum und für das Dasein Gottes“, Programmnummer 95. So sicher es ist, daß jede Anwendung des mathematischen Kalküls auf die Physik nur ein der Qualität, nicht der Quantität nach neues Resultat bringen, daß inhaltlich nichts weiter herausgerechnet werden kann, als vorher durch die Voraussetzungen hineingelegt wurde, so gewiß ist durch Rechnung das Dasein Gottes weder zu beweisen, noch zu bestreiten; auch nicht durch Herrn Dr. Gustav Beller mann.

Weniger harmlos ist ein an jene interessanten Untersuchungen über die regulären vierdimensionalen Polyeder sich anschließender Versuch des Herrn Schlegel,³² die Verhältnisse des vierdimensionalen Raumes durch Projektion dieser Polyeder auf den dreidimensionalen Raum der menschlichen Anschauung

näher zu bringen: „und nachdem wir in der Projektion dieser Gebilde auf den dreidimensionalen Raum auch ein Hilfsmittel der Anschauung gewonnen haben, wie wir es in analoger Weise auch in der Stereometrie benützen, so sehen wir, daß die wissenschaftliche Entwicklung einer solchen vierdimensionalen Geometrie keineswegs außer dem Bereich der Möglichkeit liegt. Diese Zukunftsgeometrie wird allerdings niemals die Wichtigkeit und Bedeutung der Geometrie der Ebene und des Raumes erlangen, und auch in ihrer Eigenschaft als formales Bildungsmittel unseren Schulen fern bleiben, es müßte denn sein, daß in einer künftigen Generation die Entlastung von einem unmodernen Lehrstoff eine noch ungeahnte Steigerung des Vorstellungs- und Abstraktionsvermögens zur Folge hätte.“

Höhere Räume sind im Princip unvorstellbar, da auch die allen menschlichen Vorstellungen zu Grunde liegenden Empfindungen an die einzige dreidimensionale Form gebunden sind, in welcher sich für uns die Dinge ordnen. Um zum letzten Mal die Helmholtz'schen zweidimensionalen Wesen zu Hilfe zu rufen, — glaubt Herr Schlegel in der That sich überzeugen zu können, daß solche Wesen, falls sie die zweidimensionale Grundrißebene E eines dreidimensionalen Gebäudes G bewohnen, allein durch den Anblick des rechteckigen Grundrisses G sich in ihrer Vorstellung von dem Gebäude G selbst gefördert finden? Nur ein neues Räthsel wird damit für sie auftreten. Ohne das Gebäude G selbst einmal geschaut zu haben, mögen sie ihren Geist beliebig zermartern und ihre Vorstellungskraft vervollkommen, sie werden von dem dreidimensionalen Gebilde G , das nach der dritten Dimension in beliebige Entfernung sich ausdehnen kann, niemals eine richtige Anschauung gewinnen. Auf meinem Standpunkt kann ich den Schlegel'schen Untersuchungen kein weiteres Interesse als ein analytisches entgegenbringen.

Für mich sind, wie bemerkt, die sogenannten höheren Räume bloße analytische Fiktionen. Sie scheinen mir Ähnliches zu sein im Gebiet des zwar Denkbaren, aber nicht Vorstellbaren, wie der Aether oder die Atome im Gebiet des zwar Vorstellbaren, aber nicht Wahrnehmbaren. Auch die Atome sind doch zunächst bloße gedankliche Hülfsmittel zur Zusammenfassung. Mich ergreift jedesmal eine Art Wehmuth, wenn ich in einem populär-physikalischen Vortrag den staunenden Zuhörern mittheilen höre, diese oder jene Schicht z. B. einer dünnen Seifenblase sei so ungemein dünn, daß höchst wahrscheinlich nur ein einziges Molekül neben dem anderen sich befindet. Weshalb nicht ebensogut 2 oder $17\frac{1}{2}$ Moleküle? Und wie wäre es, wenn uns die Materie gar nicht den Gefallen thun wollte, aus Atomen zu bestehen? Wer es unternimmt, über die absolute Größe oder das Gewicht (nicht die Struktur) eines Moleküls Untersuchungen anzustellen, vergißt, daß man es hier mit einem bloßen Erzeugniß unseres Denkens zu thun hat, und gleicht einem Mann, der so lange davon träumte, wie schön es für ihn wäre, an einer bestimmten Stelle seines Acker einen Schatz zu finden, bis er in der That nach dem Schatz grub. Wenn jedem Produkt unseres Verstandes oder unserer Phantasie eine Realität entsprechen müßte, so wäre die Zahl der Erfahrungswissenschaften Legion; die Ausbildung einer physikalischen Bakteriologie wäre in naher Aussicht.

So weit der eine mathematische Theil. Den Anwendungen der Theorie höherer Räume auf Transcendentalphysik und Transcendentalpsychologie stehe ich völlig ablehnend gegenüber. Die Schlußfolgerungen Zöllners über die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Materie, welche zu Widersprüchen des Denkens führen sollen, leiden an mancherlei Mängeln. U. a. wird den theoretischen Untersuchungen das Mariottesche Gesetz zu Grunde gelegt. Selbst zugegeben, daß wir nach der 3. regula

philosophandi Newtons die physikalischen Eigenschaften (Temperatur, Masse, Ausdehnung u.) der uns in der Nähe bekannten Körper auf die in beliebiger Ferne auf uns wirkenden mittelst der Analogie übertragen müssen, so ist die Anwendbarkeit jenes Gesetzes doch nicht eine unbeschränkte; das Mariottesche Gesetz ist ein bloßes Näherungsgesetz unserer bisherigen Erfahrung; schon bei dem Druck von Pulvergasen ist es nicht mehr in aller Strenge gültig. Also auch diese Erfahrungen über die Beschränktheit der Anwendbarkeit dieses Gesetzes müßten mittelst Analogie übertragen werden. Uebrigens, auch wenn vom Endlichen aufs Unendliche geschlossen werden dürfte, als wäre Letzteres eine feste, bestimmte Größe, wenn also jene Widersprüche in der That mit zwingender Nothwendigkeit sich ergeben würden, hätte Böllner die Warnung Kants, den er so oft zu Hülfe ruft, auch hier beherzigen müssen. Für Kant (Kritik der reinen Vernunft) ist das Unendliche eine der Antinomien, von denen stets eine Behauptung und ihr Gegentheil mit derselben Wahrscheinlichkeit sich ergeben und über die der endliche Mensch nicht weiter nachgrübeln solle, da sie für unseren Verstand zu groß oder zu klein seien.

Wie erwähnt, betrachtet Böllner die ganze Erscheinungswelt als Schattenprojektion einer realeren vierdimensionalen Welt, und in einer allerdings weit nüchterneren Weise hoffte Mach über gewisse ungelöste Probleme der Physik durch Hinzunahme einer vierten Dimension Licht verbreiten zu können. Es ist zuzugeben, daß auf Grund jener Böllnerschen Anschauung mit einiger Phantasie so ziemlich jeder räthselhafte Naturvorgang erklärt werden kann. Aber in letzter Instanz werden auch hier die Schwierigkeiten einfach in ein anderes Gebiet zurückverlegt; ähnlich wie bei der Erklärung der Erscheinungen durch Atome oder derjenigen der Entstehung des Lebens durch Uebertragung von Keimen in Meteorsteinen. Soll ein zweidimensionales

Bild die Projektion eines räumlichen Gegenstandes sein, so muß das Projektionscentrum eine bestimmte Lage gegenüber der Bildebene besitzen, es muß in Beziehung auf letztere hinter dem Objekt liegen. Hierin liegt eine wirkliche Voraussetzung, und analog ist es bei der Böllnerschen Anschauungsweise. Je mehr Voraussetzungen zur Erklärung eines Vorgangs willkürlich eingeführt werden, desto leichter ist selbstverständlich die „Erklärung“.

Die behaupteten spiritistischen Wahrnehmungen sind vollends nicht Sache der Naturwissenschaft. Oder besser, wenn Naturerklärung zu definiren ist als möglichst einfache Beschreibung der Naturerscheinungen, so ist das Herausbringen des Schrotkorns aus der geschlossenen Glaskugel durch gewandtes Vertauschen der Glaskugel mit einer anderen, oder das Freiwerden einer gebundenen Person durch Anspannung der Muskeln während des Bindens in weit einfacherer Weise erklärt, als durch Vorgänge in einem wirklich existirenden vierdimensionalen Raum.

Uebrigens wird das Treiben der heutigen Spiritisten selbst phantastische Naturforscher nicht leicht veranlassen, ihren Spekulationen näher zu treten. Die Anschauungsweisen Böllners und Dupre's haben wenigstens ihren guten Sinn; im übrigen aber reiht sich eine Theorie des Spiritismus an die andere, ohne daß stets die erwähnte Eigenschaft hinzutrete. Da ist von „Kreuzung von Kraftschwingungsrythmen“, von Ausströmungen des „Ods“ (eines letzten räthselhaften Fluidums) die Rede; Schlagworte, wie Atom, Aether, Kraft, werden, unklar erfaßt, aus der Naturwissenschaft herübergenommen und unbarmherzig gehandhabt. Zumal die „Kraft“ ist einigen Spiritisten ein ebenso geläufiger Begriff, wie einem Bubenbesitzer des Cannstadter Volksfestes von 1888, der „Naturkräfte aller Art um den billigen Preis von 25 Pfennigen“ Jedermann zum Kaufe bot; — so geläufig, daß scheinbar dieser Begriff gar nicht mehr der

Definition bedarf. Der Professor an der k. k. Hochschule für Bodenkultur in Wien, Schlesinger, führt aus: „Jeder Körper besteht aus einem sinnlich erkennbaren Theil und einem ihn umgebenden immateriellen Kräftesystem; ein Blatt Papier wird beschrieben eine andere Kraftsphäre besitzen, als wenn es unbeschrieben ist, und eine Sonnambulante vermag den Unterschied dieser Kraftsphären wahrzunehmen und damit ein geschlossenes Papier zu lesen.“ (Zu bedauern ist nur, daß das beschriebene Papier seine höhere Kraftsphäre nicht in der Richtung geltend zu machen weiß, über die manchmal darauf niedergelegten Sätze deutlich seine Ungeduld erkennen zu geben.)

Wer sich die Mühe nimmt, einige Jahrgänge der spiritistischen Zeitschrift „Sphinx“ durchzulesen, mit all den Aufsätzen über Mystik und Okkultismus Offenbarungen über das Fortleben und das Jenseits, Nekromantie, Zauberei und Weissagungen aller Art, wird sich in die dunkelsten Zeiten des Mittelalters versetzt fühlen. Wahrhaft erfrischend inmitten dieser dumpfen Atmosphäre von Okkultismus, wirkt die neulich in den Zeitungen berichtete heitere Episode von Resau, wo „es“ so lange und intensiv mit Kartoffeln und Bratpfannen warf, ohne selbst den Geistlichen des Orts zu verschonen, bis sich schließlich die Bewohner in ihrer Verlegenheit an den Physiker Helmholtz um Rath wandten, wie einst die Delier in ähnlicher Noth an das Orakel von Delphi; zu früh für die Nachwelt wurden die naturwissenschaftlichen Studien der Resauer dadurch unterbrochen, daß „es“ sich als ein Hausknecht entpuppte.

Die Wirkungen, welche sich Ulrichi³³ von der spiritistischen Lehre für die Kräftigung des Glaubens an eine höchste sittliche Weltordnung und an die Unsterblichkeit der Seele verspricht, dürften sehr zweifelhafter Natur sein; möge uns ein anderes Fortleben nach dem Tod beschieden sein, als die spiritistischen Phänomene es kundgeben. 1) „Physisch gerathen die Seelen

unserer Verstorbenen — sagt Wundt³⁴ — in die Sklaverei gewisser lebender Menschen, der sog. Medien. Diese Medien sind, gegenwärtig wenigstens, nicht sehr verbreitet und scheinen fast ausschließlich der amerikanischen Nationalität anzugehören. Auf Befehl derselben führen die Seelen mechanische Leistungen aus, welche durchgängig den Charakter der Zwecklosigkeit an sich tragen, sie klopfen, heben Tische und Stühle, bewegen Betten, spielen Harmonikas u. 2) Intellektuell verfallen die Seelen in einen Zustand, der, soweit ihre in Schieferschriften niedergelegten Leistungen auf ihn schließen lassen, nur als ein beklagenswerther bezeichnet werden kann. Diese Schieferschriften gehören durchgängig dem Gebiet des höheren oder niederen Blödsinns an, namentlich aber dem niederen, d. h. sie sind völlig inhaltsleer. 3) Am relativ günstigsten scheint der moralische Zustand der Seelen beschaffen zu sein. Nach allen Zeugnissen läßt sich ihnen nämlich der Charakter der Harmlosigkeit nicht absprechen. Für brutalere Handlungen, wie z. B. Zerstörung eines Bettenschirms, entschuldigen sich die Geister aufs höflichste . . .“ Wundt findet eine entfittlichende Wirkung des Spiritismus in der Entfremdung von einer ernsten, dem Dienst der Wissenschaft oder eines praktischen Berufs gewidmeten Arbeit. Noch höher anzuschlagen sind die unwürdigen Vorstellungen von dem Zustand des Geistes nach dem Tod; am verderblichsten erscheint das Zerrbild, welches das spiritistische System von dem Walten einer höheren Weltordnung entwirft, indem es Menschen von mindestens höchst gewöhnlicher geistiger und sittlicher Begabung zu auserlesenen Werkzeugen der Vorsehung stempelt.

Die Versuche, theologische Fragen mit Zuhilfenahme naturwissenschaftlicher Theorien, speciell der Böllnerschen Theorie mehrdimensionaler Räume, zu beantworten, gehören einem glücklicherweise fast überwundenen Standpunkt an. Man gewöhnt

sich mehr und mehr, die Naturwissenschaft und Theologie als getrennte Disciplinen zu betrachten, die nichts miteinander zu thun haben, und von denen nicht die eine zu Zwecken der anderen verwendet werden darf.

Dies scheint eine Folge der modernen Definirung von Naturerklärung. So lange man hoffte, die Naturvorgänge selbst erklären, d. h. auf ihre letzten Ursachen zurückführen zu können, mußten theologische Fragen durch alles angeregt werden. Die drei letztvergangenen Jahrhunderte weisen eine für unsere jetzigen Anschauungen auffallende Vermischung von Theologie und Naturwissenschaft auf. Neper,³⁵ der Erfinder der Logarithmen, war nebenbei ein eifriger Theologe; er schrieb eine Auslegung der Apokalypse mit Propositionen und mathematischen Beweisen. Otto v. Guericke, der Erfinder der Luftpumpe, beschäftigte sich zu Anfang seines Buchs mit dem Wunder des Josua, welches er mit dem Kopernikanischen System in Einklang zu bringen sucht, und mitten in Untersuchungen über den leeren Raum und die Natur der Luft finden sich Fragen über den Ort des Himmels und den Ort der Hölle erörtert. Das Prinzip der kleinsten Wirkung, das für die Lösung einiger specieller Aufgaben gute Dienste leistet, wurde zu einem halb theologischen, — das Licht wählt in demselben Mittel das Minimum des Wegs, beim Uebergang von einem Mittel in ein anderes das Minimum der Zeit, der Kiel einer Feder eines Vogels ist ein Körper kleinsten Widerstandes zc. — Nach der heutigen Vorstellung bewegt sich das Licht auf allen Wegen, aber nur auf den Wegen kleinster Zeit verstärken sich die Lichtwellen derart, daß ein merkliches Resultat zu stande kommt. Das Prinzip der „Sparfamkeit der Natur“, sagt Mach, drücken wir lieber weniger erhaben, aber viel aufklärender und richtiger aus: Es geschieht immer nur so viel, als vermöge der Kräfte und Umstände geschehen kann. Die Kettenlinie weist den tiefsten

Schwerpunkt auf, weil nur bei dem tiefsten Schwerpunkt kein weiteres Fallen der Kettenglieder möglich ist.

Laplace gab Napoleon auf dessen Frage, warum in seiner *mécanique céleste* nicht wie in den Schriften Newtons der Name Gottes vorkomme, zur Antwort: „Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse“, und den Glauben Newtons an einen persönlichen, allmächtigen, allgegenwärtigen Gott suchte er damit zu erklären, daß Newton damals nicht bei gesunden Sinnen gewesen sei. Jener Ausspruch Laplaces ist gewiß ein frivoles Wort, das unter Halbgebildeten viel Unheil gestiftet hat, das aber der Uebergangsperiode trefflich entspricht.

Heutzutage definiren wir Naturerklärung als Zerlegung der komplizirten Thatsachen in möglichst wenige und möglichst einfache; es gilt also, erstens möglichst viele Beobachtungen in einer übersichtlichen Form zusammenzufassen und zweitens die einzelnen Beobachtungen in möglichst einfache zu zerlegen. Einmal müssen wir diese Zerlegung einstellen. An welchem Punkt dies der Fall ist, also wann wir sagen wollen, jetzt sei ein Naturvorgang auf die einfachste Weise beschrieben, bleibt uns überlassen.

Die Atomtheorie oder die Theorie des Aethers sind daher, wie schon erwähnt, nur vorläufige Hülfsmittel, von unserem Verstand für Zwecke der Zusammenfassung erfunden. Selbst wenn es schon gelungen wäre, alle physikalischen Erscheinungen der Gravitation, der Electricität, des Magnetismus u., ja selbst die feinsten Vorgänge auf Bewegungen von Atomen oder auf Aetherschwingungen zurückzuführen, — was hätten wir damit für ein anderes Ziel erreicht, als Vereinfachung des Denkens; irgend ein thatsächliches Geheimniß wäre der Natur nicht abgetrotzt; nur komplizirtere Räthsel auf einfachere Räthsel reducirt. Wer anders denkt, verwechselt Naturwissenschaft mit naiver Bewunderung der Triumphe heutiger Forschung. Sehr

oft bringt größere Erkenntniß größere Selbstbeschränkung mit sich.

Demjenigen Naturforscher, welcher behauptet, die Richtigkeit der materialistischen Weltanschauung dadurch beweisen zu können, daß er den Wechsel der Naturerscheinungen in ein Zufallsspiel von Molekülen auflöst, muß vorher die Aufgabe gestellt werden, die Existenz der Moleküle zu beweisen; — eine Aufgabe, die stets ungelöst bleiben wird, da das Letzte, was hinter den Erscheinungen liegt, immer nur Erzeugniß unseres subjektiven Denkens ist; es ist nicht ausgeschlossen, daß die jetzigen physikalischen Hülfsvorstellungen einmal durch andere würden verdrängt werden.

Unbeeinflusst durch alle Resultate der exakten Forschung sind und bleiben daher die theologischen Ansichten Jedermanns Privatsache, die er freilich am besten nicht vor die Oeffentlichkeit bringt. „Die höchste Natur-Philosophie ist, eine unvollendete Weltanschauung zu ertragen und einer scheinbar abgeschlossenen, aber unzureichenden vorzuziehen“.

Die Naturwissenschaft selbst hat es nur mit den Beobachtungsthatsachen zu thun, und nur durch das Festhalten an den Thatfachen wird sich dieselbe entwickeln. Sehen wir daher von Spekulationen ab, welche, nicht auf dem Grund der Empirik ruhend, sich ins Nebelhafte verlieren. Jedermann darf, ja soll sich die höchsten Ziele stecken; aber auch für den nüchternen Mathematiker und Naturforscher liegt ein weites Gebiet frei und offen nach allen Seiten vor — sehr im Gegensatz zu manch anderen Disciplinen —, Probleme, umfassend genug, die ernste Arbeit eines Menschenlebens zu füllen.

Anmerkungen.

- ¹ Näheres s. Beez, Gymnasialprogramm, Plauen 1888, Nr. 514.
- ² Als Ergänzung zu einer Bemerkung von Mach, „Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt“, 1883, S. 465 Anmerkung.
- ³ Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorträge, 4. Heft: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.“
- ⁴ Vgl. hierüber auch: Dillmann, „Die Mathematik, die Fackelträgerin einer neuen Zeit,“ Stuttgart 1889, sowie eine Besprechung dieser Schrift von A. Schmidt, Mathem.-naturw. Mittheilungen, herausgegeben von Dr. D. Böhlen, Band III. 1. Heft.
- ⁵ Böllner († 1882 als Professor an der Universität in Leipzig), „Ueber die Natur der Kometen“, 1872.
- ⁶ Ueber das folgende vgl. das Werk Wilhelm Meyers, des bekannten astronomischen Feuilletonisten, „Die Entstehung der Erde und des Irdischen“, 1888.
- ⁷ Olbers, „Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums“, 1826.
- ⁸ Vgl. darüber z. B. Wehrauch, „Das Prinzip von der Erhaltung der Energie seit Robert Meyer“, 1885.
- ⁹ Dieses Prinzip ist nur die Folgerung aus der Erfahrungsthatfache, daß die Wärme niemals ohne Kompensationen von Körpern niederer zu solchen höherer Temperatur übergehen kann, sondern nur umgekehrt, darf also auch nicht apodiktische Beweisraft erhalten.
- ¹⁰ Riemann, gesamm. Werke „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen.“
- ¹¹ Most, „Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Weltraums“, Programm 1883.
- ¹² Beez, Rich., „Ueber die Euklidische und nicht-Euklidische Geometrie“, Programm 1888, S. 12.
- ¹³ Böllner, „Wissenschaftliche Abhandlung“, Bd. 1.

¹⁴ Kant, „Von dem ersten Unterschied der Gegenden im Raum“ 1768, Gesamm. Werke Bb. V. S. 298 ff.

¹⁵ Kant, „Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik“, Ges. Werke Bb. III. S. 40 ff.

¹⁶ Böllner, „Wissenschaftliche Abhandlungen“, Bb. I., „Ueber Emil du Bois Reymonds Grenzen des Naturerkennens“. Vgl. auch Kant, Kritik der reinen Vernunft, S. 366.

¹⁷ Sartorius von Waltershausen, „Gruß zum Gedächtniß“, Leipzig 1856, S. 81.

¹⁸ Mach, „Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“. 1872.

¹⁹ Riemann, Ges. Werke, „Neue mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“.

²⁰ „La chimie dans l'espace“ von van't Hoff, 1875, Vorrede von J. Wislicenus.

²¹ Kant, „Träume eines Geistersehers, erläutert durch Träume der Metaphysik.“ 1766, Gesam. Werke, Bb. VII. S. 32 ff.

²² Kant, „Vorlesungen über Psychologie“, neu herausgegeben und mit einer längeren Einleitung versehen von Karl du Prel.

²³ Kirchner, „Der Spiritismus, die Narrheit unseres Zeitalters“; „Deutsche Zeit- und Streitfragen“, herausgegeben von Fr. v. Holzendorff, Jahrgang XII. Heft 186/187.

²⁴ Erdmann, „Gespräche mit Goethe“, III. 133–139.

²⁵ Du Prel, s. besonders die erwähnte Einleitung „Kants mystische Weltanschauung“ zu Kants Vorlesungen über Psychologie, sowie viele Aufsätze in der „Sphinx“, Monatschrift für übersinnliche Weltanschauung, 3. B. Jahrgang 1886, Aprilheft, „Der Astral-Leib“. U. a. Hauptvertreter des modernen Spiritismus: Crookes, Urici, J. S. Fichte, Hoffmann, Bertz, Wallace, Alsatow, du Prel, Hellenbach, Ed. v. Hartmann, Reichenbach, Hübbe-Schleiden, Kiesewetter, Maaf.

²⁶ Ueber die Gesetze des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihrer Theile im Raum vgl. Oskar Simon, Sitzungsberichte der Kais. Ak. d. Wiss. in Wien, Band 88, Abthl. 2, S. 967, 1883, ferner Joh. Ven. Lißing, „Vorstudien zur Topologie“, Göttinger Studien 1847, 1. Abthl., S. 814; aus der neuesten Zeit: Dingeldey, „Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde“, Leipzig, Teubner 1890.

²⁷ Henry More, „Enchiridium metaphysicum“, 1671.

²⁸ Frickers Lebensbild von Ehmann, Pfarrer in Unterjesingen (Württemberg).

Der Hypnotismus und die verwandten Zustände

vom Standpunkte der gerichtlichen Medizin

von
Dr. Gilles de la Tourette

Chef de clinique de maladies du système nerveux à la Salpêtrière, ancien préparateur du cours de médecine légale à la Faculté de Paris.

Autorisirte deutsche Uebersetzung.

Mit einem Vorwort von Professor J. M. Charcot (de l'Institut).

Gr. 8° (IV u. 546 S.). Preis 9 Mk. geh., 11 Mk. eleg. geb.

Inhalt:

I. Die hypnotischen Zustände.

Von Mesmer bis Braid. — Braid und Charcot. Die verschiedenen hypnotischen Zustände. — Die hypnotischen Suggestionen.

II. Die dem Hypnotismus verwandten Zustände.

Der natürliche Somnambulismus. — Der pathologische Somnambulismus, soweit es sich nicht um Hysterie handelt. — Erscheinungen der Hysterie. — Der zweite Zustand.

III. Nutzen und Gefahren des Hypnotismus.

Anwendung des Hypnotismus zu Heilzwecken. — Gefahren des Hypnotismus.

IV. Der Hypnotismus vor dem Gesetz.

Der Hypnotismus bei Ausführung von Verbrechen und Vergehen. — Die Ausbeutung des Magnetismus. — Der Magnetismus als Gewerbe und das Gesetz. — Das gerichtsarztliche Gutachten in Fällen, wo es sich um Hypnotismus und verwandte Zustände handelt.

Urtheil der Presse:

Dr. Gilles de la Tourette, ein Schüler Charcots, hat in dem uns vorliegenden Werke die in dem Titel angebeuteten Zustände vom gerichtsarztlichen Standpunkte einer sehr genauen und ausführlichen Betrachtung unterworfen, und die Verlagsanstalt und Druckerei A.-G. (vormals J. F. Richter) in Hamburg vermittelt uns diese Arbeit in deutscher Uebersetzung, die, wie wir hier gleich anfügen wollen, dem anonymen Uebersetzer vollständig gelungen ist. Prof. Charcot giebt in einem kurzen Vorworte der Arbeit seines Schülers eine gewichtige Empfehlung mit auf den Weg, und man muß gestehen, daß diese Empfehlung vollberechtigt ist. Das Werk von Gilles de la Tourette ist eine überaus fleißige Studie, die mit Benützung der gesamten, sehr umfangreichen Litteratur über den fraglichen Gegenstand eine erschöpfende Darstellung der Einzelheiten des Hypnotismus liefert. (Bohemia.)

Ähnlich sprechen sich über das Werk aus:

Nord und Süd, Vom Fels zum Meer, Reform, Hamburger Fremdenblatt, Neues Wiener Abendblatt, Bund, Deutscher Reichsanzeiger, Breslauer Zeitung, Frankfurter Zeitung, Fränkischer Kurier, Vierteljahresschrift für gerichtliche Medicin u. a. m.