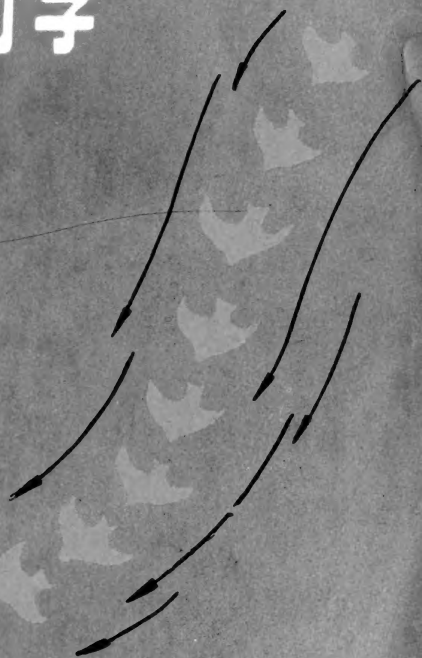


陶祖莱编著



# 生物流体力学



科学出版社





58.17111

474

内容简介

# 生物流体力学

陶祖莱 编著



科学出版社

中科院植物所图书馆



S0011811

238620

## 内 容 简 介

生物流体力学是近二十年来兴起的一门边缘学科,对生物学、医学、生理学及生物工程的发展有着重要意义,故近年来发展很快。

作者从力学观点出发,用系统学观点阐明了生命现象中的流体力学问题及其理论基础,较系统地介绍了60—70年代生物流体力学的几个主要分支的进展,并从方法学上阐明了生物流体力学在认识生理规律中的作用。书中还包括了作者自己的工作。

本书可供有志于生物力学的力学、生物学、生理学、生物医学工程等方面的科技工作者,及其有关大专院校教师、研究生及高年级学生参考。

## 生 物 流 体 力 学

陶 祖 莱 编著  
责任编辑 马素卿

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1984年9月第一版 开本:787×1092 1/32

1984年9月第一次印刷 印张:27 1/8

印数:0001—4,800 字数:621,000

统一书号:13031·2681

本社书号:3685·13-10

定价: 4.20 元

# 目 录

<b>第一章 生理流动及其流体力学问题</b> .....	1
§ 1 生命现象和流体运动 .....	1
§ 2 心血管流动概述 .....	2
§ 3 泊肃叶流及其在心血管系统的应用 .....	13
§ 3-1 泊肃叶流动 .....	13
§ 3-2 分支管系流动阻力及切变率的分布 .....	15
§ 3-3 血管分支形态的优化分析 .....	19
§ 4 呼吸系统的流动 .....	24
§ 4-1 人体呼吸气动力学问题概述 .....	26
§ 4-2 鸟肺的呼吸流 .....	33
§ 5 植物体内的流动 .....	35
§ 5-1 蒸腾流 .....	36
§ 5-2 易位流 .....	37
§ 6 原生质流动 .....	39
§ 7 生理流动的流体力学问题 .....	41
参考文献 .....	44
<b>第二章 连续介质力学基础</b> .....	46
§ 1 引言 .....	46
§ 2 连续假设 .....	46
§ 3 拉格朗日方法和欧拉方法 .....	48
§ 4 应力与应力张量 .....	50
§ 4-1 应力张量 $\tau_{ij}$ 的对称性 .....	52
§ 4-2 主方向与不变量 .....	53
§ 4-3 欧拉应力、拉格朗日应力和基尔霍夫应力 .....	56

§ 5	应变 .....	58
§ 6	应变率 .....	60
§ 7	弹性体及其简单模型 .....	62
§ 7-1	胡克体 .....	62
§ 7-2	完全弹性体有限变形与应变位能 .....	63
§ 8	粘弹性概念与线性粘弹性模型 .....	64
§ 8-1	玻耳兹曼叠加原理 .....	65
§ 8-2	粘弹性-弹性相当原理 .....	66
§ 8-3	线性粘弹性在定态谐振时的特性 .....	67
§ 8-4	几种简单的线性粘弹体 .....	69
§ 9	牛顿流体和非牛顿流体 .....	71
§ 9-1	牛顿流体 .....	71
§ 9-2	非牛顿流体 .....	73
§ 10	流体运动的基本方程 .....	75
§ 10-1	连续方程 .....	75
§ 10-2	运动方程 .....	77
§ 10-3	流体运动的能量方程 .....	78
§ 10-4	不可压缩牛顿流体运动方程组的一般形式 .....	80
§ 11	粘性流动概述 .....	80
§ 12	低雷诺数流动 .....	85
§ 12-1	低雷诺数下物体运动的流场 .....	86
§ 12-2	缝隙流动-润滑理论 .....	91
§ 12-3	多孔介质内的渗流 .....	93
§ 13	高雷诺数流动 .....	94
§ 13-1	二维平板定常流动边界层 .....	97
§ 13-2	二维振荡流动边界层 .....	98
§ 13-3	层流与湍流 .....	100
§ 14	流动分离 .....	102
§ 14-1	二维或轴对称定常流动分离 .....	103
§ 14-2	表面流线和三维定常流动分离 .....	104

参考文献	105
<b>第三章 血液的流变性质</b>	<b>107</b>
§ 1 引言	107
§ 2 血液	108
§ 3 血液的非牛顿性状	111
§ 3-1 应力-应变率关系非线性	111
§ 3-2 屈服应力	113
§ 3-3 Casson 方程	114
§ 3-4 假塑性流体模型	115
§ 3-5 血液的粘弹性	116
§ 3-6 Fåhræus-Lindqvist 效应	117
§ 4 血液非牛顿性状的若干说明	118
§ 4-1 红细胞的聚集	118
§ 4-2 红细胞及细胞串的变形	120
§ 4-3 红细胞的相对运动	121
§ 4-4 有形元素间的相互作用	123
§ 4-5 血浆因素	124
§ 5 血液的本构方程	126
§ 5-1 定常状态	126
§ 5-2 非定常状态	128
§ 6 血液的微连续介质模型	130
§ 7 有关血液的两相系统模型	133
§ 7-1 能量法	133
§ 7-2 颗粒间的相互作用	136
§ 7-3 刚性颗粒浓悬浮系统	138
§ 7-4 Burger 法	140
§ 7-5 胶性颗粒悬浮系统	142
§ 7-6 低切变率下血液非牛顿行为的简单理论分析	143
§ 7-7 液滴悬浮模型	147
§ 8 红细胞的力学性质	149

§ 8-1 红细胞的几何形状 .....	149
§ 8-2 红细胞形状的力学说明 .....	151
§ 8-3 红细胞膜的力学特性 .....	155
§ 8-4 红细胞膜的本构方程 .....	157
参考文献 .....	158
<b>第四章 血管的力学性质</b> .....	<b>161</b>
§ 1 引言 .....	161
§ 2 血管的构造 .....	162
§ 3 血管壁内的张力 .....	166
§ 3-1 拉普拉斯定律 .....	167
§ 3-2 弹性张力与主动张力 .....	167
§ 3-3 弹性薄壁圆管的应力 .....	169
§ 4 大血管的力学性质——实验结果 .....	172
§ 4-1 大血管的静力学特性 .....	172
§ 4-2 血管的粘弹性 .....	174
§ 4-3 血管力学特性的热力学说明 .....	179
§ 5 增量化理论与线性粘弹性模型 .....	180
§ 5-1 增量化理论 .....	180
§ 5-2 血管的线性粘弹性模型 .....	183
§ 6 拟弹性假说 .....	187
§ 6-1 冯元桢的拟弹性模型 .....	188
§ 6-2 应变位能 .....	191
§ 6-3 组合模型 .....	194
§ 7 准线性理论 .....	198
§ 8 非线性粘弹性模型 .....	201
§ 9 小动脉的力学性质 .....	204
§ 10 毛细血管的力学性质 .....	206
参考文献 .....	207
<b>第五章 肌肉力学基础</b> .....	<b>209</b>



§ 1	引言 .....	209
§ 2	横纹肌的结构和收缩机理 .....	209
§ 3	Hill 方程和 Hill 模型理论 .....	213
§ 3-1	Hill 方程 .....	213
§ 3-2	Hill 模型 .....	217
§ 3-3	线性记忆理论 .....	219
§ 4	纤维滑移理论 .....	223
§ 5	松弛状态下心肌的力学性质 .....	229
§ 6	Hill 模型应用于心肌 .....	233
§ 6-1	串联弹性元的性质 .....	236
§ 6-2	收缩元的性质 .....	238
§ 7	心肌本构方程的新形式 .....	240
§ 8	左心室的流变模型 .....	242
§ 8-1	力平衡方程 .....	243
§ 8-2	本构方程 .....	245
§ 9	心脏功能的评价问题 .....	248
§ 9-1	左心室壁内的应力 .....	251
§ 9-2	心肌收缩特性 .....	253
§ 10	平滑肌力学性质简述 .....	254
	参考文献 .....	260
<b>第六章</b>	<b>心脏内的血液流动</b> .....	<b>262</b>
§ 1	引言 .....	262
§ 2	心脏的构造和功能 .....	262
§ 3	心脏血流的动力学问题 .....	267
§ 3-1	心脏血流的相似性 .....	269
§ 3-2	心室射血流动理想模型 .....	271
§ 3-3	瓣关闭的流体力学机理 .....	272
§ 4	主动脉瓣膜流动分析 .....	276
§ 4-1	主动脉瓣关闭过程的一维理论 .....	276

§ 4-2	开启过程中主动脉瓣膜的运动 .....	285
§ 4-3	瓣膜几何形状和压力的关系 .....	289
§ 4-4	瓣膜形状和运动速度对流动的影响 .....	290
§ 5	瓣膜运动和流场的相互作用 .....	292
§ 5-1	数值计算方法 .....	294
§ 5-2	二尖瓣流场的数值解 .....	295
	参考文献 .....	297
<b>第七章</b>	<b>大血管中的脉动流</b> .....	<b>298</b>
§ 1	引言 .....	298
§ 2	大血管内血液流动的物理特点和数学描述 .....	300
§ 3	管道内小扰动的传播与脉搏波 .....	304
§ 4	可变形管内流动的特性 .....	312
§ 4-1	可膨胀圆柱管内的定常流动 .....	312
§ 4-2	三种流动的比较 .....	314
§ 4-3	可坍管内的一维定常流动 .....	320
§ 4-4	结语 .....	329
§ 5	动脉血流相似性和线性化理论基础 .....	330
§ 5-1	动脉血液流动相似性 .....	332
§ 5-2	动脉血流线性理论的基础 .....	339
§ 6	可膨胀圆管内脉动流的线性理论 .....	351
§ 6-1	Womersley 理论 .....	352
§ 6-2	厚壁管模型 .....	369
§ 6-3	波动模式 .....	372
§ 6-4	有限位移模型 .....	375
§ 6-5	初始应力的影响 .....	379
§ 7	传输线理论 .....	382
§ 7-1	一维运动方程及其线性化 .....	383
§ 7-2	有限长度弹性管内的理想流动 .....	386
§ 7-3	有限长度弹性管内的粘性流动 .....	395
§ 7-4	传输线理论应用于管系 .....	399



§ 7-5	积分变换法 .....	405
§ 7-6	Ridout 差分-微分方法与电模拟 .....	407
§ 7-7	心血管系统模拟计算概述 .....	412
§ 8	非线性理论 .....	412
§ 8-1	一维非线性方程及其特性 .....	414
§ 8-2	关于动脉血流的特征线法 .....	416
§ 8-3	有限幅度波传播特性及激波 .....	428
§ 8-4	动脉血流非线性分析 .....	436
§ 8-5	左心室-动脉血流综合分析 .....	441
§ 9	静脉血流的流体力学问题 .....	443
§ 9-1	可坍管定常流动的特点 .....	445
§ 9-2	可坍管定常流动的集中参数模型 .....	448
§ 9-3	静脉脉动流 .....	452
§ 10	大血管流动的实验研究 .....	455
§ 10-1	动物试验的若干结果 .....	456
§ 10-2	水力模型实验 .....	458
§ 11	波的传播与血管力学性质 .....	460
	参考文献 .....	461
<b>第八章</b>	<b>大血管和气管里的流场和壁面剪应力</b> .....	<b>464</b>
§ 1	引言 .....	464
§ 2	动脉疾病和血液流动的力学性状的关系 .....	465
§ 2-1	主动脉 P.S.D. 与血液湍流 .....	465
§ 2-2	脑动脉血管瘤 .....	467
§ 2-3	动脉粥样硬化与当地血液流动特性 .....	468
§ 3	动脉血流的湍流问题 .....	473
§ 4	直圆柱管内的进口流动 .....	476
§ 4-1	刚性圆管定常进口流动 .....	478
§ 4-2	脉动进口流动的有限元分析 .....	481
§ 5	弯曲管内的流动 .....	485

§ 5-1	曲管流动方程和相似参数 .....	487
§ 5-2	充分发展的弯曲管流动 .....	489
§ 5-3	曲管内发展中的定常流 .....	496
§ 6	分支管道流动 .....	506
§ 6-1	分支管道流的实验观测 .....	506
§ 6-2	分流效应的理论分析 .....	512
§ 6-3	分支管道流的数值分析 .....	519
§ 7	管腔表面不规则时的流动 .....	530
§ 7-1	狭窄管道内的定常流动 .....	530
§ 7-2	狭窄管道内的脉动流 .....	535
§ 7-3	分布斑块引起的血管壁组织缺氧 .....	541
§ 8	血管分支、弯曲、截面积突变部位红细胞和血 小板的运动 .....	544
§ 8-1	涡环内的血细胞 .....	545
§ 8-2	T形分支处的流动 .....	549
	参考文献 .....	550
<b>第九章</b>	<b>微循环流体力学</b> .....	<b>553</b>
§ 1	微循环中的流体力学问题 .....	553
§ 2	小管血流异常现象及其物理本质 .....	557
§ 2-1	边缘血浆层和红细胞径向迁移 .....	558
§ 2-2	小管血流的速度分布及塞子流 .....	566
§ 2-3	Fahraeus 效应及其逆效应 .....	569
§ 2-4	管壁表面性质的影响 .....	575
§ 3	小管血液定常流动的理论分析 .....	578
§ 3-1	Casson 流体定常圆管层流 .....	578
§ 3-2	双层流体运动模型 .....	581
§ 3-3	微极性流体模型 .....	585
§ 3-4	低雷诺数定常进口流动 .....	590
§ 4	毛细血管内的血液流动 .....	595
§ 4-1	毛细血流模型实验 .....	596

§ 4-2	刚性颗粒模型 .....	597
§ 4-3	可变形颗粒模型与润滑理论 .....	610
§ 5	毛细血管壁构造与物质运输 .....	617
§ 5-1	通过半透膜的扩散和对流 .....	618
§ 5-2	孔隙传输理论 .....	620
§ 5-3	Starling 假说 .....	622
§ 5-4	溶质透壁运输与毛细血流 .....	622
§ 6	毛细血流与周围组织的液体交换 .....	624
§ 6-1	组织液压力、浓度均匀时的毛细血流 .....	625
§ 6-2	毛细血流与组织液流动 .....	631
§ 6-3	组织液流动与透壁流体交换 .....	636
§ 6-4	流体交换引起的毛细血管内血液表观粘度的变化 .....	642
§ 7	肺微循环 .....	644
§ 7-1	肺毛细血管组织构造及片流模型 .....	645
§ 7-2	肺泡片的弹性 .....	647
§ 7-3	肺毛细血管内血液的表观粘度 .....	647
§ 7-4	肺毛细血流问题的数学描述 .....	650
§ 7-5	一维理论 .....	653
§ 7-6	二维理论 .....	656
§ 8	毛细血流的随机性 .....	660
	参考文献 .....	664
<b>第十章</b>	<b>生理流动中的传质问题</b> .....	<b>667</b>
§ 1	生理流动中的物质输运方程 .....	667
§ 1-1	化学势和扩散 .....	667
§ 1-2	流动中的对流扩散 .....	670
§ 1-3	物质输运方程的一般形式 .....	672
§ 2	通过细胞膜的物质输运 .....	676
§ 2-1	膜的化学组分 .....	677
§ 2-2	细胞膜的结构 .....	678

§ 2-3 通过细胞膜的物质运输形式 .....	680
§ 3 通过细胞膜的扩散和渗透 .....	680
§ 3-1 水的渗透 .....	681
§ 3-2 非电解质的扩散 .....	684
§ 3-3 电解质的扩散 .....	685
§ 4 载体扩散 .....	687
§ 5 能动运输 .....	691
§ 5-1 推进运输 .....	691
§ 5-2 囊泡运输 .....	693
§ 6 体循环系统氧及二氧化碳的运输 .....	693
§ 6-1 氧与血红蛋白的结合 .....	694
§ 6-2 氧在血红蛋白溶液中的运输 .....	699
§ 6-3 红细胞与血浆间的氧交换 .....	701
§ 6-4 透过毛细血管壁的氧交换 .....	706
§ 6-5 二氧化碳在血液中的运输 .....	711
§ 7 肺内的气体交换 .....	713
§ 7-1 末端支气管-肺泡内的气体混合 .....	714
§ 7-2 肺泡与肺毛细血管间的气体交换 .....	718
§ 7-3 肺通风量与血流量的关系 .....	725
参考文献 .....	728
<b>第十一章 其他生理流动</b> .....	<b>729</b>
§ 1 引言 .....	729
§ 2 淋巴流动 .....	729
§ 3 小管内溶质浓度梯度不变的流动 .....	737
§ 3-1 量纲分析 .....	738
§ 3-2 数学模型 .....	740
§ 3-3 近似解及其意义 .....	743
§ 4 蠕动流 .....	748
§ 4-1 蠕动流方程及相似参数 .....	749

§ 4-2 低雷诺数蠕动流 .....	752
参考文献 .....	756
<b>第十二章 生理流动与系统分析</b> .....	<b>758</b>
§ 1 引言 .....	758
§ 2 系统分析方法 .....	759
§ 3 循环系统动力学 .....	762
§ 3-1 概述 .....	762
§ 3-2 组元模型 .....	764
§ 3-3 单开口系统分析 .....	766
§ 3-4 双开口系统分析 .....	770
§ 3-5 心血管系统分析 .....	774
§ 4 心血管流动和体液平衡——循环系统的长期调 节 .....	779
§ 4-1 体液对心血管血液流动的影响 .....	779
§ 4-2 循环系统对组织液流动特性的影响 .....	782
参考文献 .....	787
<b>第十三章 水生动物泳动的流体动力学</b> .....	<b>788</b>
§ 1 引言 .....	788
§ 2 低雷诺数下动物泳动的力学原理 .....	790
§ 2-1 抗力理论 .....	790
§ 2-2 流体运动方程基本解 .....	796
§ 2-3 用基本解确定 $K_N$ 和 $K_T$ .....	799
§ 2-4 有机体泳动的细长体理论(低雷诺数) .....	802
§ 3 纤毛推进的流体动力学问题 .....	804
§ 4 水生动物高雷诺数泳动的细长体理论 .....	811
§ 4-1 虚质量估算 .....	815
§ 4-2 反作用力计算 .....	816
§ 4-3 转弯问题 .....	819
§ 4-4 泳动推进的鳗鲡目模式和鲹科模式 .....	820

§ 5 新月形尾鳍推进的二维理论 .....	823
§ 5-1 推进原理 .....	824
§ 5-2 二维理论 .....	825
§ 6 动物泳动的阻力 .....	830
参考文献 .....	832
<b>第十四章 动物飞行的空气动力学问题</b> .....	<b>833</b>
§ 1 引言 .....	833
§ 2 持续飞行 .....	834
§ 2-1 昆虫的持续飞行 .....	835
§ 2-2 鸟类的持续飞行 .....	837
§ 2-3 鸟类的滑翔 .....	839
§ 2-4 信天翁的翱翔 .....	840
§ 3 飞行的动力 .....	841
§ 4 飞行动物的尺度 .....	843
§ 5 悬停飞行的空气动力学原理 .....	846
参考文献 .....	853

## 第一章 生理流动及其流体力学问题

### §1 生命现象和流体运动

新陈代谢是生命运动的基本形式。其前提是不断地从外界吸取同化作用(把外界物质变为和生物体自身同样的物质)所需要的原料,不断地排除异化作用(自身物质分解产生进行生命活动所需要的能量)所产生的废物。这种物质交换和内部输运往往是以流体运动的形式进行的。原生物通过体表膜层直接和环境进行交换。植物根系从土壤中吸取水和养分,通过木质部的导管输送给叶;叶吸收二氧化碳,利用太阳能通过光合作用制成糖,再经韧皮部的导管输送到全身,促使自身生长。高等动物通过呼吸系统吸进氧;通过消化系统摄取食物;由循环系统将代谢活动所必需的氧和养料输送到全身各组织,并将代谢产物带走,经呼吸道、消化系统和泌尿系统排出体外。一旦上述种种流动过程之一中止,生命就无法维持。

不仅如此,生物体的基本构造单位——细胞本身是由细胞核、细胞质、细胞膜构成的,细胞质时刻都在流动,为代谢活动正常进行创造条件。细胞分裂(生长过程)时细胞质的运动尤为激烈。对于某些单细胞生物(如变形虫)来说,正是细胞质的流动,使它能作出适宜的反应,避开伤害,捕获食物。

据估计<sup>[1]</sup>,人体重量 70% 是液体,50% 在细胞内,5% 在血液中,其余 15% 分布于组织间隙内,使代谢过程环境的物理化学条件保持稳定,以获最佳功能。

可见,生物体的生命运动和有关的流动过程有着密切的

关系。不掌握这些流动过程的规律,就不可能对生命现象有深刻、完整的认识。

另一方面,生理流动又为流体力学的发展提供了新天地。无论是介质物性、运动动力、边界条件还是流动参数变化范围,生理流动和工程问题很不一样。仅仅把已有的流体力学理论和方法推广于生物体是不够的,需要作新的探索。

下面举几个例子,说明生理流动的特点。

## § 2 心血管流动概述

高等动物循环系统由心脏、动脉、毛细血管、静脉构成。左心室收缩,将新鲜血液注入主动脉,经动脉系输送到全身各组织的毛细血管中,在那里进行物质交换,供给氧和养料,带走二氧化碳和废物;再经静脉系统流回右心房;由右心室泵入

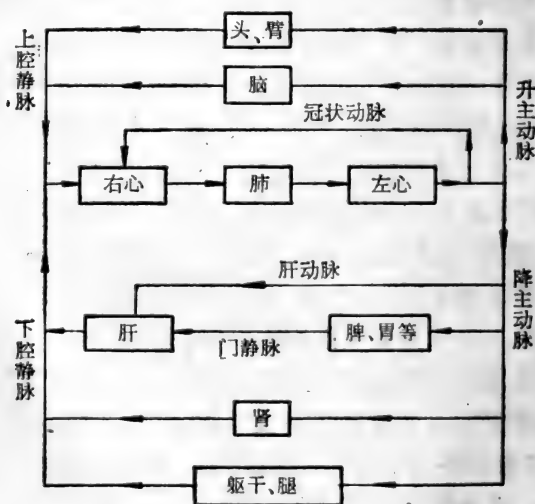


图 1-1 大循环功能模型<sup>[2]</sup>



肺动脉,在肺内进行气体交换,吸进氧,排出二氧化碳;鲜血经肺静脉流入左心房,再通过二尖瓣进入左心室。从左心室—右心房,生理学上称为体循环;从右心室—左心房则称为肺循环。

从流体力学观点来看,心血管流动又有大循环和微循环之分。大循环从心脏—动脉—组织(负载)—静脉—心脏,把组织看作纯负载,对其内部血流细节不予深究。如图 1-1 示。微循环从小动脉—毛细血管—小静脉,研究毛细血流和通过管壁的物质交换。示意如图 1-2。

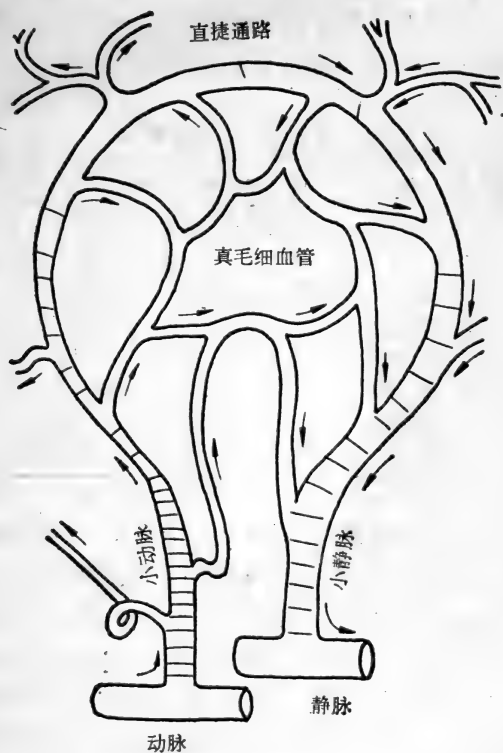


图 1-2 微循环示意图<sup>[3]</sup>

循环系统的工质——血液,是一种特殊流体。它由血浆(约占全血体积 50% 左右)、红细胞(约占全血体积 50% 弱)、白细胞(不高于  $\frac{1}{600}$ )、血小板(不高于  $\frac{1}{800}$ )混合组成。正常状态下,血液比重约为 1.056,粘度约为 3.0 厘泊(37℃,高切变率),pH 值在 7.35—7.40 之间,稍呈碱性。对心血管流动来说,除血液物性外,体内总血量也是一个重要的参数。它和心肌收缩能力一起决定了血循环的最大流量。人体血容量因体重、体型、性别、年龄而异,且随季节、气候、气压等略有变化。一般人血量在 5—6l 之间,身体各组织所需的血量取决于代谢水平。表 1-1 是常态下人体血流量分配。

表 1-1<sup>(4)</sup> 人体血量分配

组 织、器 官	血流量(ml/min)	%
肝、脾、肠、胃	1400	24
肾	1100	19
脑	750	13
心脏	250	4
骨骼、肌肉	1200	21
皮 肤	500	9
其它器官	600	10
总 计	5800	100

血液依靠心脏收缩的能量周流全身。心脏收缩-舒张时心脏壁内应力分布及心腔内部血液流动极其复杂,目前还没有准确的定量结果。一般来说,左、右心房收缩并不同步,右心房比左房早 0.02s 左右。但左、右心室的收缩基本上是同步的。心室收缩之初,主动脉瓣、房室瓣均处于关闭状态,此时心肌收缩仅改变心室形状,容积不变,称为等容收缩。当心室压力高于主动脉血压时,瓣膜打开,开始射血,整个收缩期约

0.3s。当心室压力等于主动脉压力时,主动脉瓣关闭;心室舒张,房室瓣开启,血液自心房注入心室。舒张期末,心室压力略有升高,房室瓣关闭,开始另一次收缩。一般人常态下心律在 70 次/分左右,每搏输出量约 70ml,每分输出量约 5 l。

当心室收缩射出的高速、高压血流进入主动脉时,心肌收缩所作的功一部分直接推动动脉系中运动着的血柱,使之加速,变成动能;另一部分使主动脉扩张,变为可逆的弹性位能贮存起来,这样既减少了能量耗损,又可在间歇性输入的条件下,保证全身各组织获得稳定的灌注。

由左心室射出的血液经动脉系输送到全身,又经静脉系统回右心房。在此过程中,血液通过动脉壁、静脉壁的渗透量与它们所输运的血量相比微不足道,故动脉和静脉可看作纯导管。但这种导管系统的构造十分复杂,其几何参数的准确测定本身就是一大难题,需用专门的造形术。表 1-2 是动物实验(狗)数据,由此可得一量级的概念。

表 1-2 血管系参数(狗)<sup>[1]</sup>

	直径 (mm)	长度 (cm)	速度 (cm/s)	$Re = \frac{UD}{\nu}$	数 目
主动脉	10	40	50	2500	1
大动脉	3	20	13.4	200	40
主要支动脉	1	10	8	40	600
支动脉	0.6	1.0	6	5	1800
小动脉	0.02	0.2	0.32	$3 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^7$
毛细血管	0.008	0.1	0.07	$3 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^9$
小静脉	0.03	0.2	0.07	$10^{-2}$	$8 \times 10^7$
支静脉	1.5	1.0	1.3	5	1800
主要支静脉	2.4	10	1.48	20	600
大静脉	6.0	20	3.6	100	40
腔静脉	12.5	40	33.4	2000	2

各级血管由于功能不同，其构造也不一样。大动脉含有大量弹力纤维和胶原纤维，故能承受高压，并具有良好的弹性。静脉流压力很小，脉动性亦小，故静脉壁很薄，刚性差。为防止重力等引起倒流，静脉血管内有一系列瓣膜。小动脉壁主要由平滑肌构成，易于在神经脉冲刺激下扩张、收缩，控制流向有关组织的血流量；此外，平滑肌的能动收缩还为血液

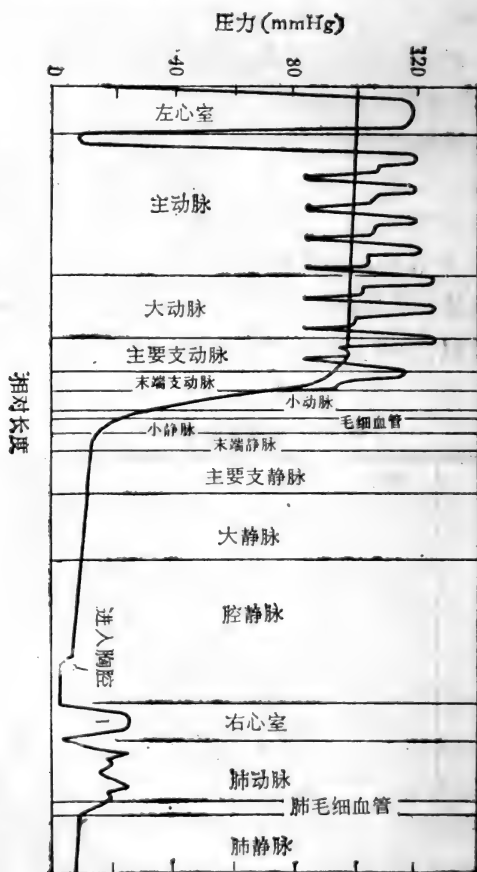


图 1-3 各级血管中压力的变化<sup>[6]</sup>

流动提供了辅助动力(蠕动泵)。毛细血管壁仅有一薄层内皮细胞,渗透性好,利于物质交换。

从主动脉到毛细血管,有20—30级分支。各级分支血管中流动参数变化相当大。压力变化如图1-3示。可见循环系统压力损失主要发生于微循环,其中小动脉压力损失占60%,毛细血管占15%,小静脉占15%。大循环压力损失很小,仅占10%,主要发生于静脉系。

据测量,在正常人心脏出口水平线上,动脉平均血压约100mmHg,静脉平均血压约2mmHg。卧姿时(见图1-4a)头部和足部动脉平均血压均为95mmHg,静脉平均压为5mmHg。按静力学公式,

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

( $p$ :静压, $\rho$ :血液密度, $\Delta h$ :高程差)可算出立姿时人体各部位

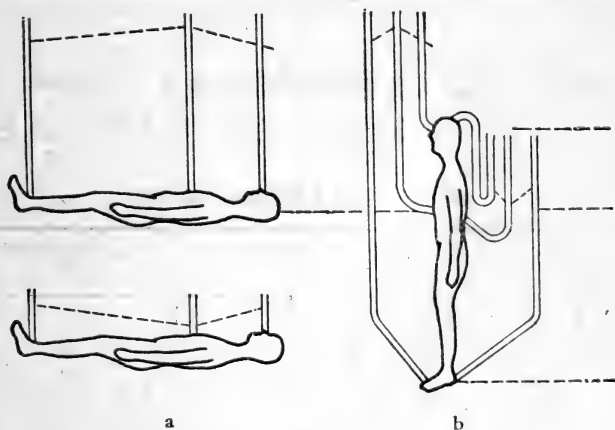


图1-4 循环系统静力学问题<sup>[1]</sup>(a) 卧姿,(b) 立姿。

动脉和静脉平均血压。设头部高于心脏2英尺,足部低于心脏4英尺,则所得结果如图1-4b示。显然,头部静脉血管承

负压(外压高于内压),管子是可瘪的,其内流动特性和动脉不一样。

表 1-3 给出了人体各级血管血流平均速度、雷诺数的测量结果。表 1-4 是根据上述结果,按泊肃叶律(见后)算出的流动平均切变率和壁面切变率。

表 1-3 人体循环系统流动参数<sup>[2]</sup>

	直径 (cm)	流速(cm/s)	$Re = \frac{UD}{\nu}$
升主动脉	2.0—3.2	63*	3600—5800
降主动脉	1.6—2.0	27*	1200—1500
大动脉	0.2—0.6	20—50*	110—850
毛细血管	0.0005—0.001	0.05—0.1	0.0007—0.003
大静脉	0.5—1.0	15—20	210—570
腔静脉	2.0	11—16	630—900

\* 平均峰速度。

由表 1-3 可见,人体主动脉血流雷诺数可达 3600—5800,这大大超过了刚性圆管定常层流的临界雷诺数(2300 左右)。

表 1-4<sup>[2]</sup> 人体血管流动切变率分布

	壁面切变率 ( $s^{-1}$ )	平均切变率 ( $s^{-1}$ )
升主动脉	190	130
降主动脉	120	80
大动脉	700	470
毛细血管*	800	530
大静脉	200	130
腔静脉	60	40

\* 此值没有实际意义,因此时不能再把血液看作均质连续介质。

因此,很自然产生一个问题,人体心血管中是否发生湍流?有人根据染色流谱观察结果认为主动脉存在所谓“早期湍流”。但是,对于强脉冲流来说,染色流谱观察往往是靠不住的,且早期湍流本身就是一个含糊的概念。七十年代初, Seed<sup>[7]</sup> 等用热丝测量了人体主动脉瓣附近的速度分布。结果证明,正常生理条件下,人体循环系统内不会发生持续的湍流。在左心室出口附近,在射血减速期,有时会出现瞬态湍流斑,但在舒张期很快就衰减消失了,得不到发展。只有在异常条件下,如主动脉瓣闭锁不全,动脉壁局部隆起形成收缩-扩张通道时,形成血液射流,才可能发生湍流。这将引起严重的病理反应。

除了平均流动参数外,压力波和(平均)速度波的波形也

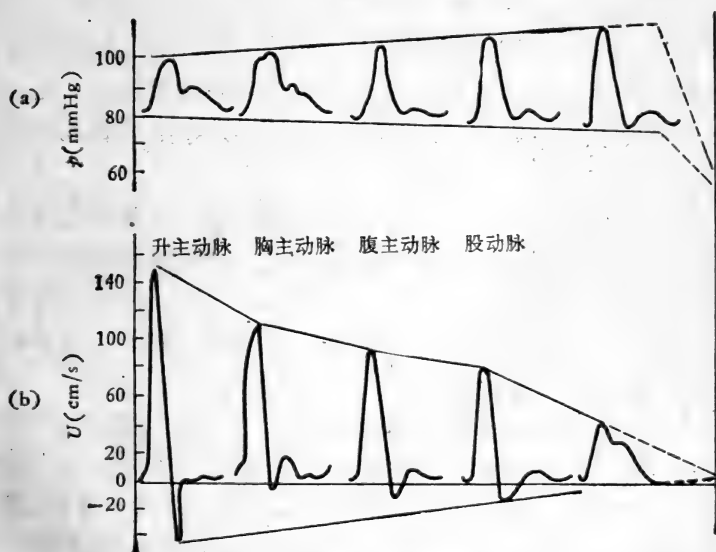


图 1-5 沿动脉脉冲波形的畸变<sup>[4]</sup>  
 (a) 压力波, (b) 速度波。

发生畸变。图 1-5 是人体主要动脉中脉冲波形的变化。可见从心脏到远端支动脉,压力脉冲波幅增大,分布变窄,切迹消失,形成重搏波;而速度脉冲则相反,波幅减小,分布变宽,负脉冲趋于消失(即末端血液灌注趋于平稳)。波形畸变和分支反射,血管壁弹性及几何非均匀性等有密切关系。

综上所述,与一般工程流动相比较,心血管流动有以下特点。

### 1. 异常的流体

血液是多种细胞(充液、大变形薄壳颗粒)与血浆(牛顿流体)组成的特殊两相系统,颗粒特征尺度约  $8\mu\text{m}$ 。其运动特性比一般固体颗粒或液滴悬浮液复杂得多。此外,循环系统流场特征尺度变化极大,从  $3\mu\text{m}$  到  $3 \times 10^5\mu\text{m}$ 。二者结合,产生了一系列新问题。

当血管内径不小于  $1\text{mm}$  时,细胞个性并不直接影响流动,血液可看作均质连续介质,但为非牛顿粘弹性流体。此时主要问题是建立这种连续介质的应力-应变关系,或称本构方程。

当血管内径小于  $1\text{mm}$  大于  $3 \times 10^5\mu\text{m}$  时,不能再把血液看作均质连续介质,细胞自身的运动细胞之间以及细胞与壁面之间的相互作用直接影响血液的流动,出现一系列异常现象,统称为 Segma 效应,必须建立合适的两相模型,才有可能阐明这种异常现象的规律。

当血管内径与红细胞尺度同量级时,细胞“排队”从血管里挤过去,细胞-管壁之间形成一变动的血浆润滑层,存在复杂的水力-弹性相互作用;同时,血浆和细胞运动速度不同,相对于细胞,血浆作环流。此外,管壁是可渗透的,管内、外有物质运输。这些效应耦合在一起,问题很复杂。



## 2. 异常的管壁特性

血管是可变形的,血液流动和管壁运动相互耦合,故流动规律和管壁特性有密切关系。这表现在两方面:

(1) 血管壁的力学性质对脉冲波传播及血液流动有显著影响。和其他生物材料一样,血管壁也是非均匀、各向异性的非线性粘弹体,其力学性质很难准确测定,准确的本构方程目前尚未建立。

(2) 血管壁有两种受力状态,一种是内压高于外压,周向受拉,变形时截面积变化,形状基本不变,这称为可膨胀管。另一种情况是内压低于外压,周向受压,当截面刚度不大时,不仅截面积改变,截面形状也改变,称为可坍管。这两种管道流动规律及脉冲波传播特性很不一样。一般,动脉流及下肢静脉流属于前者,上肢静脉流属于后者。后者比前者复杂得多。

## 3. 异常的分支系统

动脉系有 20—30 级分枝,来自主动脉的一股血流最后被分成数十亿股。初级分支,支管数目不多,但流动扰动大(因为雷诺数较高),引起强烈的二次流、局部分离、旋涡等,流场复杂。流场的这些特性和血浆中血脂的沉积、血小板的生化反应、血管内皮层的受力状况、凝血和血栓形成等有密切关系。另一方面,高级分支雷诺数低,流动扰动不大,但支管数量很大( $10^2$ — $10^9$ ),亦难于处理。

## 4. 异常的脉冲性

由图 1-5 可见,流动的低频分量相当大。若作傅里叶展开,头几级谐波的幅值和时均运动同量级。因而诸分量之间相互作用相当强,系统是非线性的,传统的小扰动理论不适

用。

### 5. 异常的雷诺数范围

循环系统内血流雷诺数变化范围很大( $10^3-10^{-3}$ ), 流动特性很不一样。从大雷诺数层流到渗流同时并存。低雷诺数流动问题与血液特性有关, 已述于前。高雷诺数层流管流的主要问题是:

(1) 由于雷诺数较高, 层流边界层发展缓慢, 进口段距离相当长。主动脉及各大动脉中血流几乎都是发展中的流动, 损失比充分发展的流动高。整个循环系统有许许多多分支, 因而有许多进口段, 它们的影响是不容忽视的。而发展中的层流脉冲流理论研究得还很不够。

(2) 血管弯曲和分支部分会引起二次流, 高雷诺数层流区这种作用尤为强烈。而且, 心血管中的二次流发生在未充分发展的主流中, 弯曲效应和进口效应相耦合, 问题更为复杂。

### 6. 系统的整体性和可调节性

心脏—动脉—毛细血管—静脉—心脏构成一闭环系统\*, 每一环节都以前一环节的输出为进口条件, 而以下一环节为负载。各环节之间存在强烈的相互作用。例如, 心脏输出影响动脉流动, 反过来动脉系的特性也影响心脏的输出; 又如动脉血流决定了组织毛细血管的灌注, 而毛细血流又制约着静脉回流, 从而影响心输出量, 影响动脉流。目前, 总是把心脏输出看作边界来分析动脉血流的, 综合研究做得不够。不仅如此, 生物的特性之一就是其功能可以自行调节。心血管流动

---

\* 指流动过程而言, 从热力学观点来看它是开放系统。

也是如此。要真正认识循环生理机制，必须将血液流动和控制过程结合起来进行研究。

这些问题都是以工程为对象的流体力学理论所未曾处理过或者研究得很不够的。它们的解决必定会促进流体力学理论的发展。

### §3 泊肃叶流及其在心血管系统的应用

§2 概述了心血管流动提出的新问题，说明要真正掌握心血管流动的规律，单靠已有的流体力学理论是不够的，需要作新的探索。但这仅是事情的一方面。另一方面，应用已有的力学方法和理论能够对一系列生理流动现象作一些定量分析，加深对有关生理现象的认识。现以粘性流动理论中最简单的泊肃叶 (Poiseuille) 流动为例，来说明这一点。

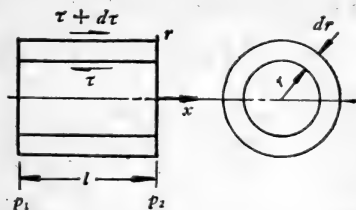


图 1-6 坐标和控制体

#### §3-1 泊肃叶流动

考察无限长刚性直圆管内，不可压缩牛顿流体的定常层流运动。取柱坐标  $(r, \theta, x)$ ，流动是轴对称的，速度场为  $(v, 0, u)$ 。因为管无限长，所考察的流动是充分发展的，速度分布沿轴向不变，故  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 。

流动连续,满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0 \quad (3-1)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0$$

$$vr = \text{常数}$$

又因为管壁不能渗透,故

$$r = R \text{ 时, } v = 0$$

所以整个流场  $v = 0$ 。

取控制体如图 1-6 示,由于  $v = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,故流体惯性力为零。这样作用于控制体上的力只有压力  $p$  和粘性应力  $\tau$ , 流体粘度为  $\mu$ ,管长为  $L$ ,半径为  $R$ 。力的平衡要求:

$$F_v + F_p = 0$$

$$F_p = (p_1 - p_2) 2\pi r dr$$

$$F_v = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 2\pi r L \right] \cdot dr$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{p_1 - p_2}{\mu L} \cdot r \quad (3-2)$$

由于流动轴对称,  $r = 0$  时  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ 。积分(3-2)

$$\text{得: } \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu L} \cdot r \quad (3-3)$$

又因为壁面无滑流,即

$$r = R \text{ 时, } u = 0 \quad (3-4)$$

故由(3-3)积分得速度分布:

$$u = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3-5)$$

即泊肃叶分布律,速度沿断面的分布呈抛物型,中心速度最大,

$$u_{\max} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\mu L} \quad (3-6)$$

由(3-5)可得流量  $Q$ ,

$$Q = \int_0^R 2\pi r \cdot u dr = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\mu L} \quad (3-7)$$

平均流速  $U$  为:

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{8\mu L} \quad (3-8)$$

显然,

$$U = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (3-9)$$

定义流动平均切变率  $\bar{\gamma}$  为

$$\bar{\gamma} = \frac{\tau_w}{\mu} \quad \tau_w: \text{壁面剪应力} \quad (3-10)$$

则由  $\pi R^2(p_1 - p_2) = \tau_w \cdot 2\pi R \cdot L = 2\pi RL \cdot \mu \bar{\gamma}$  可得:

$$\bar{\gamma} = \frac{4Q}{\pi R^3} = \frac{(p_1 - p_2)R}{2\mu L} \quad (3-11a)$$

若用直径  $D = 2R$  表示,则(3-11a)变为

$$\bar{\gamma} = \frac{32Q}{\pi D^3} = \frac{8U}{D} \quad (3-11b)$$

### § 3-2 分支管系流动阻力及切变率的分布

动脉系当地壁面剪应力(或当地流动平均切变率)及压力损失的分布,对于循环的生理和病理现象有重要意义。

假设:

- (1) 血液是不可压缩牛顿流体。
- (2) 动脉系可用分支管系代表,每个管段都是刚性直圆

管,各管段直径可不同。

(3) 流动是充分发展的轴对称定常层流。

(4) 分支节点压力连续,流动连续,流动不分离。

这样,每个分支管段中的流动可用泊肃叶定律来分析。

显然,上述假设与动脉系中的真实流动有很大出入。但这种分析仍能说明一些基本问题。因为,首先,就血流和血管内皮层相互作用而言,最要紧的是局部流量最大时刻的流动参数(如流动切变率等)。而局部流量最大时,流动随时间的变化率最小,可近似看作是准定常的。若所考察的定常流动的参数和局部流量最大时刻的参数一样,那么定常流动的分析结果就可用来说明一些生理、病理现象。其次,脉冲流的压力损失大部分来自其时均分量,若不考虑时均分量与诸谐波分量的相互作用,则定常流动分析结果可以给出脉冲流时均分量阻力分布的近似。

考察任一级分支,母管截面积  $A_0 = \pi R_0^2 = \frac{\pi D_0^2}{4}$ ,分为  $n$  个

支管,每个支管面积为  $A_i = \pi R_i^2 = \frac{\pi D_i^2}{4}$ 。设

$$\beta = \frac{\sum_1^n A_i}{A_0} = \frac{\sum_1^n R_i^2}{R_0^2} = \frac{\sum_1^n D_i^2}{D_0^2} \quad (3-12)$$

若  $n$  个支管截面积彼此相等,均为  $A = \frac{1}{n} \pi D^2$ ,或者,取  $A$  为  $n$  个支管的平均截面积

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{n} \sum_1^n A_i \\ D^2 &= \frac{1}{n} \sum_1^n D_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

这样, 
$$\beta = \frac{nA}{A_0} = \frac{nD^2}{D_0^2}$$

设: 
$$b = \frac{D}{D_0} \quad (3-14)$$

则 
$$\left. \begin{aligned} \beta &= nb^2 \\ b &= \left(\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

动脉血管每一次分支,都使支管面积变小,但总的流通截面积增大,因而,

$$\left. \begin{aligned} \beta &> 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} < b < 1 \text{ 或 } n > \frac{1}{b^2} > 1 \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

雷诺数较高时,为避免分支引起流动分离,  $\beta$  不大于 1.2。

由于节点流动连续,有

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \sum_1^n Q_i \\ U_0 A_0 &= \sum_1^n U_i A_i \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

若  $A_i = A$ , 则  $U_i = U$ , 得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_0} &= \frac{1}{\beta} \quad \therefore U < U_0 \\ \frac{Re}{(Re)_0} &= (n\beta)^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore Re \leq (Re)_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

因为  $n \geq 2$ ,  $\beta > 1$ , 故支管雷诺数永远小于母管。生理测量表明,头几级分支由于流动雷诺数较高,分支  $\beta$  值确实不大于 1.2。随着分支级数增高,雷诺数愈来愈小,当  $Re \leq 10$  时,流动惯性相当小,不会因扩张过度而分离,故高级分支  $\beta$  一般都大于 1.2。

若每一支管单位长度上压降为  $\Delta p$ , 母管单位长度上压降为  $(\Delta p)_0$ , 则由泊肃叶公式(3-7)得:

$$\frac{\Delta p}{(\Delta p)_0} = \frac{n}{\beta^2} = \frac{1}{nb^4} \quad (3-19)$$

定义流动阻力  $K$  为:

$$K = \frac{\Delta p}{Q} \quad (3-20)$$

则

$$\frac{K}{K_0} = \frac{\Delta p}{(\Delta p)_0} \cdot \frac{Q_0}{Q} = \left(\frac{n}{\beta}\right)^2$$

$$\therefore \frac{K}{K_0} = \frac{1}{b^4} \quad (3-21)$$

分支后支管总阻力为  $nK = \frac{n}{b^4} \cdot K_0$ 。因为  $b < 1, n \geq 2$  所以

$K > K_0, nK > K_0$ 。

根据(3-21), 动脉血管直径从 1cm (量级) 变为 1mm (量级) 时, 单管流阻增大 10000 倍。生理测量表明流动压力损失 90% 以上来自直径 1mm 以下的小血管。换言之, 心血管流动阻力主要产生于低雷诺数流动。

同时, 由(3-11)可得分支后流动平均切变率的变化。

$$\therefore \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} = \frac{Q}{Q_0} \cdot \frac{D_0^3}{D^3}$$

$$\therefore \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0} = \left(\frac{n}{\beta^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{nb^3} \quad (3-22)$$

可见,

$$\left. \begin{aligned} \beta < \sqrt[3]{n} \text{ 或 } n < \frac{1}{b^3} \text{ 时, } \bar{\gamma} > \bar{\gamma}_0 \\ \beta = \sqrt[3]{n} \text{ 或 } n = \frac{1}{b^3} \text{ 时, } \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0 \\ \beta > \sqrt[3]{n} \text{ 或 } n > \frac{1}{b^3} \text{ 时, } \bar{\gamma} < \bar{\gamma}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$



$n$  为大于或等于 2 的正整数, 头几级分支  $\beta \leq 1.2$ , 故近端(接近心脏)大动脉平均切变率较低, 而远端较高。

### § 3-3 血管分支形态的优化分析

现存生物是 20 亿年来自然选择的结果。一定环境中长期生存的生物, 必具有最适应该环境的结构。即其构造符合某种最佳设计。同样, 生物体内各系统的构造也具有限定条件下获得所需功能的最佳形态。心血管系统也不例外。问题在于合理的衡量指标——目标泛函是什么?

从二十年代以来, 人们就对心血管分支构造作了最优化分析。所据原理有三种, (1)最小能耗原理; (2)最小阻抗原理; (3)最小容量原理。不管那种原理, 具体分析时都或多或少应用了泊肃叶定律。

Murray 和 Rosen<sup>[8]</sup> 认为心血管系统的构造满足一定流量下能量消耗最小这一要求。能量损失来自: (1)流动阻力引起的机械能损耗; (2)维持血管自身代谢所需要的能量。

为简单起见, 假设:

(1) 系统是线性的, 各管段之间相互作用可以不计。因此, 系统能耗最小与每个管段能耗最小是等价的。

(2) 系统只有一个能源, 而且没有耗能集中的‘能汇’(energy sink)。心血管系统流动能量几乎完全由心脏提供。

(3) 血管变形的弹性能是可逆的, 不消耗流动机械能。故作最优化分析时, 可把管壁看作是刚性的。

(4) 血液脉冲流的能量损耗主要来自定常分量。故作最优化分析时, 可以把流动看作是定常的。

(5) 血液是牛顿流体, 流动是充分发展的轴对称层流。故流动遵循泊肃叶定律。

设血管段长为  $l$ , 半径为  $R$ , 单位时间内流动摩擦损失  $W_f$

为:

$$W_f = Q\Delta p \quad (3-24)$$

应用(3-7)得:

$$W_f = \frac{8\mu l}{\pi R^4} \cdot Q^2 \quad (3-25)$$

又若血管自身代谢所消耗的能量与其体积成正比, 单位时间内所需代谢能  $W_m$  为:

$$W_m = k\pi R^2 l \quad k = \text{常数} \quad (3-26)$$

$$\therefore W = W_f + W_m = \frac{8\mu l}{\pi R^4} \cdot Q^2 + k\pi R^2 l \quad (3-27)$$

可见能耗是  $R, l, Q$  的函数。但管长  $l$  取决于组织部位, 故  $l$  是一定的; 流量  $Q$  是由组织代谢水平所决定的, 亦可看作不变量。这样可供选择的只有  $R$ 。

$$\frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{8\mu l Q^2}{\pi} 4R^{-5} + 2k\pi l R = 0$$

故最佳半径为:

$$R = \left( \frac{16\mu}{\pi^2 k} \right)^{\frac{1}{4}} Q^{\frac{1}{4}} \quad (3-28)$$

此时损失的功率为:

$$W = \frac{3}{2} \pi k R^2 l \quad (3-29)$$

进而考察图 1-7 所示分支管系, 每一管段的半径均符合最小能耗要求, 即满足(3-28), 故分支系统机械能损耗率为

$$W = \frac{3}{2} \pi k (R_0^2 l_0 + R_1^2 l_1 + R_2^2 l_2) \quad (3-30)$$

血管起点  $O(x_0, y_0)$  和两个终点  $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$  位置是给定的,  $R_0, R_1, R_2$  亦由(3-28)确定, 现改变  $l_0, l_1, l_2$ , 使  $W$  最小。

则:

$$dW = \frac{3\pi k}{2}(R_0^3 dl_0 + R_1^3 dl_1 + R_2^3 dl_2) = 0 \quad (3-31)$$

有三种可能,如图 1-8 示。

(a)  $dl_0 = \delta$ , 则  $dl_1 = -\delta \cos \theta_1$ ,  $dl_2 = -\delta \cos \theta_2$  由 (3-31)得:

$$R_0^2 - R_1^2 \cos \theta_1 - R_2^2 \cos \theta_2 = 0 \quad (3-32a)$$

(b)  $dl_1 = \delta$ , 则  $dl_0 = -\delta \cos \theta_1$ ,  $dl_2 = \delta \cos(\theta_1 + \theta_2)$  由(3-31)得:

$$-R_0^2 \cos \theta_1 + R_1^2 + R_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (3-32b)$$

(c)  $dl_2 = \delta$ , 故  $dl_0 = -\delta \cos \theta_2$ ,  $dl_1 = \delta \cos(\theta_1 + \theta_2)$  由(3-31)得:

$$-R_0^2 \cos \theta_2 + R_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + R_2^2 = 0 \quad (3-32c)$$

另一方面,质量守恒,

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

而按(3-28),  $Q \propto R^3$

$$\therefore R_0^3 = R_1^3 + R_2^3 \quad (3-33)$$

这样得最佳分支角:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{R_0^4 + R_1^4 - (R_0^3 - R_1^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_1^2} \\ \cos \theta_2 &= \frac{R_0^4 + R_2^4 - (R_0^3 - R_2^3)^{\frac{4}{3}}}{2R_0^2 R_2^2} \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{(R_1^3 + R_2^3)^{\frac{4}{3}} - R_1^4 - R_2^4}{2R_0^2 R_2^2} \end{aligned} \right\} (3-34)$$

可见:

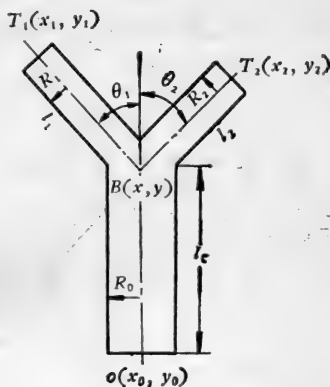
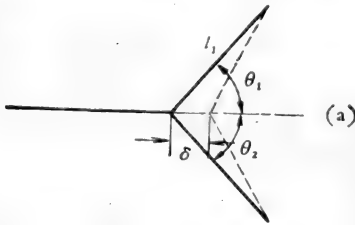


图 1-7 分管管最优化分析

(1) 若  $R_1 = R_2$ , 则  $\theta_1 = \theta_2$ 。且

$$\because R_0^3 = 2R_1^3, \therefore \frac{R_1}{R_0} = \frac{R_2}{R_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.794$$

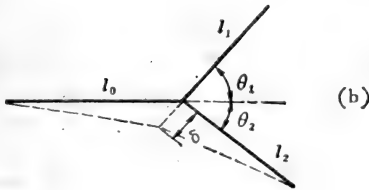
$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 0.629, \therefore \theta_1 = \theta_2 \approx 51^\circ$$



这和 Cohn 测量结果相当吻合。

如果从主动脉(半径  $R_a$ )开始, 每级分支都是一分为二, 若第  $m$  级支管为毛细血管(半径  $R_c$ ) 则

$$R_c = (0.794)^m R_a \quad (3-35)$$



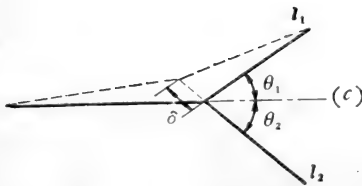
以狗为例,  $R_a \approx 1.25\text{cm}$ ,

$$R_c \approx 4 \times 10^{-5}\text{cm},$$

$$\therefore m \approx 30$$

毛细血管数目为  $2^m \approx 10^9$ 。

据 Rashevsky 观测, 狗毛细血管约为  $1.2 \times 10^9$  根, 二者相符。



(2) 若  $R_1 \ll R_2, R_2 \approx R_0$  则

$$\theta_1 \approx \frac{\pi}{2}, \theta_2 \approx 0^\circ$$

图 1-8 三种可能情况

(3) 若  $R_2 > R_1$ , 则  $\theta_1 > \theta_2$ 。即较小的支管与母管的夹角较大。这和观察结果也是一致的。

Kamiya 和 Togawa<sup>[9]</sup>(1972) 提出了一种新模型。循环的目的是在毛细血管中实现物质交换, 动脉血管只是供血导管,

管系终点的压力、流量取决于组织灌注情况，是一定的；管系起点的压力、流量则决定于心脏能力。对于毛细血管内的物质交换来说，动脉树的容量相当于死空间，但它是维持血液不断流动必不可少的。动脉树容量越小，则耗能越少。因此 Kamiya 等认为动脉树的形态满足给定始、终点位置、压力、流量时容量最小这一要求。

考察图 1-7 所示分支， $B(x, y)$  是节点。

$$\left. \begin{aligned} l_0^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ l_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ l_2^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

分支总容积为：

$$V = \pi(R_0^2 l_0 + R_1^2 l_1 + R_2^2 l_2) \quad (3-37)$$

节点位置必须满足

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial R_0} = 0 \quad (3-38)$$

由(3-37)与(3-38)得：

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_0 \frac{R_0^2}{l_0} + x_1 \frac{R_1^2}{l_1} + x_2 \frac{R_2^2}{l_2}}{R_0^2/l_0 + R_1^2/l_1 + R_2^2/l_2} \\ y &= \frac{y_0 \frac{R_0^2}{l_0} + y_1 \frac{R_1^2}{l_1} + y_2 \frac{R_2^2}{l_2}}{R_0^2/l_0 + R_1^2/l_1 + R_2^2/l_2} \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

此外，按泊肃叶公式(3-7)

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_1 = p_1 - p_0 &= \frac{8\mu}{\pi} \left( \frac{Q_0 l_0}{R_0^4} + \frac{Q_1 l_1}{R_1^4} \right) \\ \Delta p_2 = p_2 - p_0 &= \frac{8\mu}{\pi} \left( \frac{Q_0 l_0}{R_0^4} + \frac{Q_2 l_2}{R_2^4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

因为  $p_1, p_2, p_0; Q_1, Q_2, Q_0$  是一定的，应用连续方程，得：

$$\frac{R_0^6}{Q_0} = \frac{R_1^6}{Q_1} + \frac{R_2^6}{Q_2} \quad (3-41)$$

已知  $p_1, p_2, p_0; Q_1, Q_2, Q_0; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_0, y_0)$  由方程(3-36)、(3-39)、(3-40)、(3-41)八个独立方程,可求得  $R_0, R_1, R_2; l_0, l_1, l_2; (x, y)$  八个未知量,但需作数值计算。

可以证明,满足最小能耗的管系,一定能满足最小容量要求,反则不然。故后者要求更低,适用性更广些。

若考虑血流的脉冲性,则优化面积比应满足无反射条件。按 Karreman 计算,不计粘性时对称分支无反射面积比为  $\beta \approx 1.15$ 。Womersley 考虑了粘性得  $1.15 < \beta < 1.20$ 。

#### § 4 呼吸系统的流动

脊椎动物呼吸过程涉及两种运动: (i) 动物体内外气体交换——呼气与吸气。这是呼吸肌驱动的气体迁移运动,雷诺数较高。(ii) 动物体内氧气与二氧化碳的交换,是雷诺数较低的迁移扩散运动。呼吸系统气体动力学的任务,就是探索这两种流动的规律,认识呼吸系统生理及病理机制。

从力学观点来看,进化序列不同的脊椎动物呼吸过程的原理有很大差别,它们所提出的流体力学问题也不一样。

鱼类用鳃呼吸。鳃内水流的动力来自: (i) 嘴巴闭合后,颊肌收缩的挤压作用; (ii) 腮空腔的抽吸作用。(ii) 与 (i) 相位不同,使 (i) 引起的间歇性强迫流动变得平滑。因而鳃流是连续的,这和哺乳类呼吸器管内的流型很不一样,后者是间歇型流动。此外,气体交换区的流型也不同,鳃内水流和血流方向恰好相反,如图 1-9(a) 示,称为逆流式。这大大提高了交换效率。如图所示,前部水含氧量较高,但血管里的血液已部分氧化;后部水含氧少,但那里血液含氧量更低。因而整个管路

交换表面两侧氧和二氧化碳的浓度差，几乎与管轴纵向位置无关，效率最佳。

为了提高呼吸效能，相当一部分鱼有鳃。其中有些种类的鱼的鳃已成为肺泡状或肺状组织。这表明，在石炭纪中进化出现的两栖类动物的肺就是由鳃进化形成的。

从两栖类、爬虫类到哺乳类，呼吸系统基本流型没有质的变化。体内、外气体交换通过树状的分支气管系统进行，流动是间歇的——呼、一吸。体内二氧化碳和氧的交换在堵头管道的终端表面进行，最小单位是肺泡。肺的容积和交换面积在呼吸过程中是变化的。交换流型如图 1-9(c) 示。

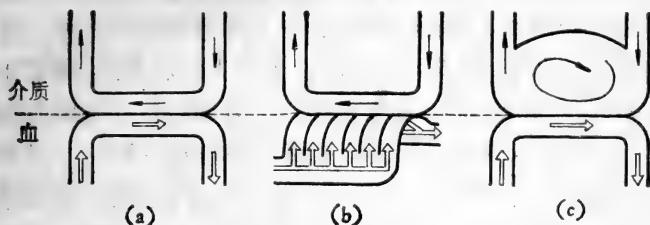


图 1-9 鱼类、鸟类、哺乳类动物呼吸时气体交换的不同流型<sup>[10]</sup>

- (a) 鱼鳃(逆流式)，(b) 飞禽肺(横流式)，  
(c) 哺乳动物的肺。

由爬虫类进化而来的鸟类，具有独特的呼吸方式。除气管系统和肺外，鸟体内有若干气囊，一般有五个，前三后二，后面两个气囊的容量比前面大得多。气囊收缩——膨胀，驱动气流作呼吸运动。肺的容量基本上不变，其突出优点是：单位体积内气体交换表面积大，达  $250\text{mm}^{-1}(\text{mm}^2/\text{mm}^3)$ ，比哺乳动物高一个量级。

鸟类呼吸流型的特点有二。(i)与哺乳动物不同，通过肺内支气管的气流是单向的，不因呼吸而改变流向。(ii)鸟气管

系统,不是树状分支系统,而由许许多多闭合迴路组成。O<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>交换呈横流式,如图 1-9(b)示。

由于构造和流型差异,这三类动物呼吸过程的流体力学问题很不一样。

#### § 4-1 人体呼吸气动力学问题概述

人体呼吸道分三大部分: (i)上呼吸道。口、鼻至喉部。(ii)气管系统,由内径大于 0.05cm 的气管和支气管构成。(iii)肺内气体交换区,由末端支气管和肺泡构成。

正常、平静的呼吸,呼气结束时,呼吸肌放松,肺处于弹性平衡状态,其内气体静止(指没有宏观迁移)。此时肺内空气容量称为功能余积(简称 FRC),约为肺总体积的一半。身高 1.7m 的人, FRC 约  $6 \times 10^{-3} \text{m}^3$ 。当呼吸肌收缩时,胸腔体积增大,肺膨胀,通过口、鼻吸进空气。外部空气和胸膜空隙的压差,由肺弹性恢复力及气管系统气流阻力平衡。一旦呼吸肌开始放松,由于弹性恢复作用,肺体积缩小,废气通过呼吸道排出。肺弹性恢复力与气管系统内呼气阻力平衡。平静呼吸时,每一次吸入气量约为  $0.45 \times 10^{-3} \text{m}^3$ 。呼气终了时,气管内残存气体容积为  $0.15 \times 10^{-3} \text{m}^3$  (如果  $\text{FRC} = 6 \times 10^{-3} \text{m}^3$  的话)。

人肺交换膜面积约  $70 \text{m}^2$ ,构成  $3 \times 10^8$  个肺泡,肺泡间为肺毛细血管网络。肺毛细血流呈片状。厚约  $7 \mu\text{m}$ ,而交换膜厚约  $2-3 \mu\text{m}$ 。

除上呼吸道外,从主气管到气体交换区,气管系统约有 20 级分支,每级分支都是一分为二,而且基本上是对称的。表 1-5 列出了各级分支气管的直径、长度,以及在平静吸气( $Q = 0.5 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$ )和深呼吸( $Q = 2.0 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$ )时,吸气流体的平均速度和雷诺数。



表 1-5 气管尺寸和速度<sup>[11]</sup>

	$D_i$ (cm)	$l_i$ (cm)	$Q = 0.5 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$		$Q = 2.0 \times 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$	
			$U$ (cm/s)	$Re = \frac{RU}{\nu}$	$U$ (cm/s)	$Re = \frac{RU}{\nu}$
主气管	1.80	12.0	197	2325	790	9300
1#	1.22	4.76	215	1719	859	6876
2#	0.83	1.90	235	1281	941	5124
3#	0.56	1.76	250	921	1002	3684
4#	0.45	1.27	202	594	809	2376
5#	0.35	1.07	161	369	643	1476
10#	0.13	0.46	38	32	151	127
15#	0.066	0.20	4.4	1.9	17.8	7.6
20#	0.045	0.083	0.3	0.09	1.2	0.37

若令

$$a_i = \frac{l_i}{l_{i-1}}, \quad b_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}, \quad c_i = \frac{l_i}{D_i} \quad (4-1)$$

则由表 1-5 可见,  $i > 2$  后

$$a_i \approx a \approx 0.84$$

$$b_i \approx b \approx 0.78$$

$$c_i \approx c \approx 3.5$$

新鲜空气自上呼吸道进入, 在气管系统内和原有气体混合, 再经毛细支气管, 进入肺泡, 和其中残存气体混合, 然后通过肺泡膜-肺毛细血管壁和血液进行气体交换, 吸收氧气, 排出二氧化碳。整个过程的流体力学问题很多, 主要有四个。

### 1. 气管系统内的流型分析

分析气管系统内气流的流场目的在于: (i) 准确地计算气管系统内, 气流的阻力; (ii) 分析吸进的新鲜空气怎样和气管内原有的气体混合, 为肺泡内气体混合及交换过程的研究,

提供边界条件；(iii)研究气流方向交替变换(呼一吸)时颗粒在气管分支部的沉积。

由表 1-5 可见，呼吸道气流雷诺数变化范围很大，从  $10^4$ — $10^{-1}$ ，这和心血管内血液流动相似。确实，大血管内血液流动和气管内的气体流动的流体力学问题，有许多共同之处，二者都是粘弹性分支管系内的非定常流动，流体都可看作是牛顿流体，因而流动服从纳维-司托克斯方程。但呼吸道流动有自己的特殊问题。

首先，气管树分支管长与管径之比较小，流动雷诺数又较高，因而分支对于流场的扰动很大，产生强烈的二次流，甚至局部分离。Schroter 和 Sudlow 根据头十级几何参数，做了吸气流模拟试验。模型如图 1-10 示， $\frac{D_1}{D_0} = \frac{D_2}{D_0} = 0.78$ ， $L_1 = 3.5D_1 = L_2$ ， $\theta = 35^\circ$ 。母管(0#)为泊肃叶流时，支管测得的

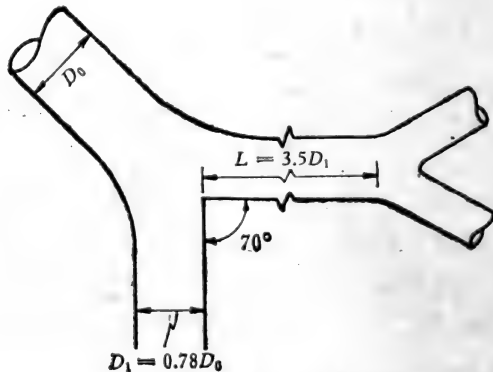


图 1-10 气管分支模型<sup>[10]</sup>

速度剖面(分别在分支下游  $D_1$ 、 $2D_1$ 、 $3D_1$  处)如图 1-11 示。可见，支管进口速度剖面远非均匀，歪扭得很厉害，在弯曲内侧附近，有很高的速度峰。而且，在整个支管长度上这种扭曲

速度剖面没有多大改观。可以设想,在下一级分支管内,流型扰动更甚。

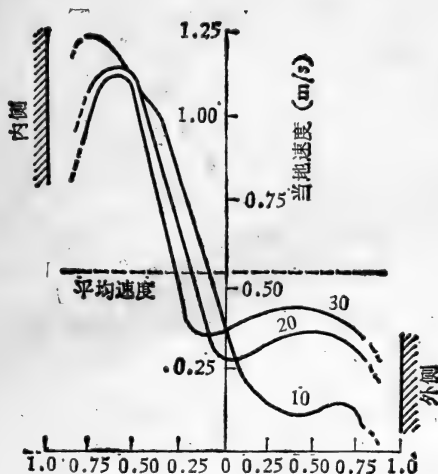


图 1-11 支管速度剖面<sup>[10]</sup>

这种流动的压力损失比泊肃叶流高得多。Pedley 等<sup>[11]</sup>根据测得的速度剖面计算了吸气时的流动阻力,并与相应的泊肃叶流的阻力作了比较,典型结果如图 1-12 示。有如下经验公式:

$$\Delta p = K \mu^{1-m} \rho^{m-1} Q^m \quad (4-2)$$

$K$ 是常数,量纲为 $[L^{-(m+2)}]$ , $m$ 因气管而异,主气管  $m = \frac{7}{4}$ ,

支气管  $m = \frac{3}{2}$ 。

支气管气流雷诺数不大于 2000(平静呼吸),基本上是层流,这时压力损失与相应泊肃叶流的差异是速度剖面不同所致。据 Pedley 等计算,实际流动摩擦功率  $\varepsilon$  与相应泊肃叶流

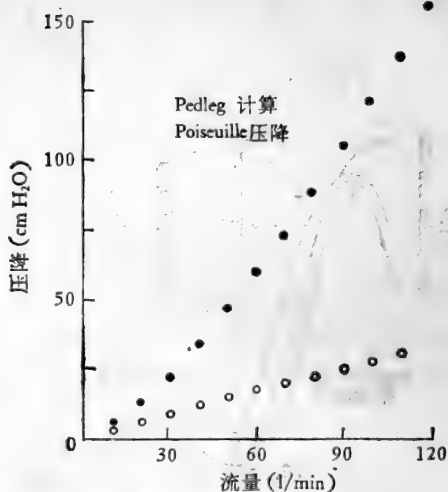


图 1-12 分支管气流阻力<sup>[11]</sup>

的能耗率  $\varepsilon_p$  相比,有

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \approx 0.33 \left( Re \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-3)$$

这可以用边界层概念来说明。实际流动能量损失集中于速度梯度最大的区域——边界层,设其厚度为  $\delta$ , 则该区平均速度梯度为  $\frac{U}{\delta}$ ,

$$\therefore \varepsilon \sim \mu \frac{U}{\delta} \cdot \pi DL \cdot U \sim \mu U^2 L \left( \frac{D}{\delta} \right)$$

而

$$\varepsilon_p \sim \mu \cdot \frac{32Q}{\pi D^3} \cdot \pi DL \cdot U \sim \mu U^2 L$$

$$\therefore \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \sim \frac{D}{\delta} \quad (4-4)$$

层流边界层,

$$\frac{\delta}{L} \sim (Re_L)^{-\frac{1}{2}}, \quad Re_L = \frac{UL}{\nu} \quad (4-5)$$

$$\therefore \frac{D}{\delta} \sim \frac{D}{L} (Re_L)^{\frac{1}{2}} \sim \left( Re \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-6)$$

$$\therefore \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \sim \left( Re \cdot \frac{D}{L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

但主气管流动雷诺数相当高,扰动又大,流动可能是湍流或过渡流,此时压力损失与泊肃叶流的差异是由于流态变化所致。

显然,气管系统流动损失与雷诺数有密切关系,雷诺数高,损失大。计算表明,气管头十级分支( $D > 1\text{mm}$ )的损失占主导地位。即气管流动阻力主要来自大管(大于 $1\text{mm}$ )高雷诺数损失,和心血管流动阻力有本质差别。因此,高雷诺数流分支流场特性及其与进口效应的耦合作用也是呼吸道流体动力学的重要课题。与心血管流不同的是,气管流既有层流,又有过渡流和湍流,问题更为复杂。

气管流动的另一特点是呼气流和吸气流方向相反。同一分支对这两种流动的扰动很不一样,后者是一分为二,是扩张型流动;前者合二为一,是收敛型流动。不仅如此,从呼气到吸气,或从吸气到呼气,改变的频率对于气管系统内流型扰动和发展,对于颗粒沉积都有很大影响。这些问题,目前研究得还很不够。

## 2. 气管系统形态的最优化分析

和心血管分支构造一样,气管树的形态也是某种条件下的最优设计。Horsfield 等<sup>[12]</sup>根据最小容量原理,应用泊肃叶定律算出最优分支直径比  $b \approx 0.79$ ,最佳分支角(与母管轴线

夹角) $\theta = 35^\circ$ 。Wanner 等<sup>[13]</sup>进一步分析了分支系统端点分布的性质,所得最优分支长度与分支角 $\theta$ 有关, $\theta = 35^\circ$ 时,最佳 $a \approx 0.85$ 。图 1-13 表明,上述分析结果与测量值大体上一致。

鉴于气管系统内层流,过渡流,湍流并存, Uylings<sup>[14]</sup>从最小功原理出发进行分析。所得最佳分支管径比为

$$b = \frac{D_n}{D_{n-1}} = 2^{-\frac{(j-2)}{j+2}} \quad 4 \leq j \leq 5 \quad (4-7)$$

$j = 4$  为完全层流, $j = 5$  为完全湍流。不同  $j$  值下,有如下结果

$$j = 4.00, 4.25, 4.50, 4.75, 5.00$$

$$b = 1.260, 1.283, 1.306, 1.326, 1.346。$$

最优分支角和(3-34)一样,只是  $R_1 = R_2$ 。

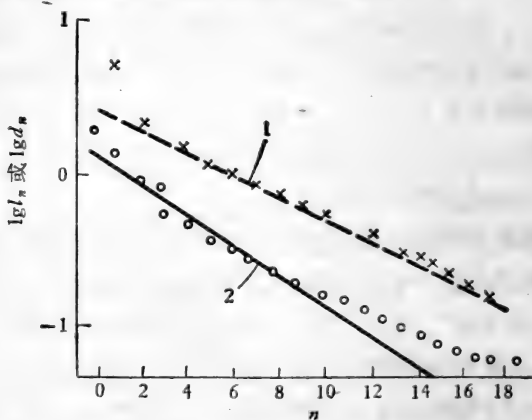


图 1-13 气管树分支管径比与长度比分布<sup>[13]</sup>

1.  $l_n = (0.84)^n l_0,$
2.  $d_n = (0.79)^n d_{00}.$

### 3. 肺内气体交换

包括气管内的空气怎样和肺泡内的气体的混合过程;肺

泡内气体与肺毛细血管内的血液的气体交换过程；肺各区域气体交换不均匀性；颗粒在肺内的沉积等问题。是当前呼吸系统流体力学的中心课题。

#### 4. 病肺的交换及流动特性

研究正常人的呼吸机制，是为了认识呼吸道病变的病理原理，并将它应用于临床。目前有三种常见的慢性病，它们都引起肺的机械功能障碍。(i)哮喘。一些支气管壁肌肉痉挛，堵塞通道，使流动阻力剧增；(ii)支气管炎。小支气管由于炎症或其它原因而变窄，甚至堵塞，使气流受到障碍；(iii)肺气肿。某些肺泡或毛细支气管壁受到损伤，发生变异，不能进行气体交换。这三种病的病理原理不同，治疗方法亦不同，但它们的症状却很相似，难以区别，尤其是初期。寻找一种可靠而灵敏的诊断方法，是呼吸道流体力学的一个重要任务。目前尚在探索之中。

#### § 4-2 鸟肺的呼吸流

鸟类呼吸系统的流动特性和人的很不一样。其特点是：(i)鸟肺与气囊相连接，气囊的收缩-膨胀使气流通过容量基本上不变的肺。(ii)气管系统不是树形构造，而形成许多迴路，如图 1-14(a)示。因此，鸟呼吸系统内气体的流动，是肺-气囊系统中的循环流动，气囊起着泵的作用，但气囊没有任何瓣膜构造。(iii)鸟肺的气体交换方式如图 1-9(b)示，气流通过直径约 3—10 $\mu\text{m}$  的刚硬的薄壁毛细气管，和横流的毛细血流进行交换。

据 Duncker 对 155 个样品所作肺-气囊造型研究，鸟肺有两种气体交换区：(i)古肺 (Paleopulmo)。通过它的气流是单向的，不因气囊膨胀、收缩而改变。这种构造为一切鸟类所

共有。(ii)新生肺。随着气囊胀缩,气体在该区域中来回流动。原始鸟类没有这种构造。从力学观点来看,新生肺中的流动是对气囊压力脉冲的线性响应,而古肺中的单向流动则是气囊压力脉冲引起的强烈的非线性响应,它起整流作用。后者是为了满足飞行时对呼吸量的高要求;前者则有利于满足非飞行状态的要求。

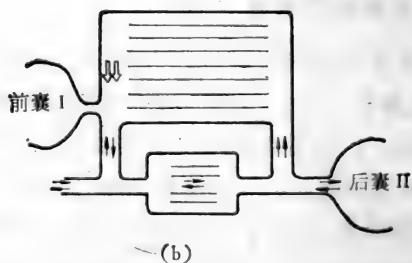
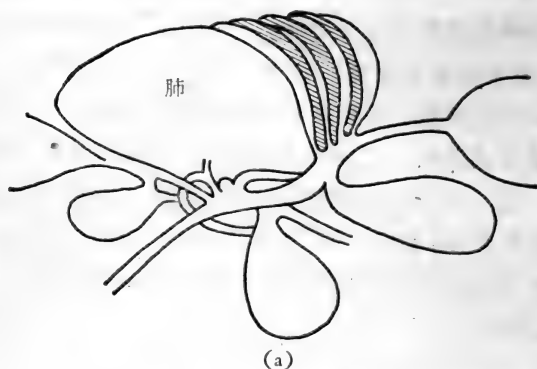


图 1-14<sup>[10]</sup>

(a)鸟呼吸系统构造模式,(b)鸟呼吸系统功能模型(略作修改)。

鸟呼吸系统流动提出的主要的流体力学问题是:没有瓣膜的气囊如何维持肺(或古肺区)内的单向流动?

取功能模型如图 1-14(b)示,维持单向流的原理如下。吸



气时,气囊 I、II 同时膨胀,由于 II 的容量比 I 大得多,故大部分气体经主气管流向后部,其中一部分贮存于 II,另一部分空气经背部支气管到肺毛细支气管(在那里进行气体交换),再由腹支气管流进气囊 I;小部分气体在主气管前部直接吸入气囊 I。呼气时,气囊 I、II 同时收缩。II 排出的气体相当大一部分自背部支气管到肺毛细支气管,由腹支气管排出;另一部分则直接从主气管排出;同时气囊 I 将所存废气排出。这样在肺毛细气管内气流总是单向的。

这仅仅是定性说明,定量的理论分析和实验研究还很不够。但有一点可以肯定,这种流动和分支管系统内的流动特性不同,它更接近射流理论。Scheid 和 Piiper 曾用射流模型作过尝试。这种流动的研究,将会使生物流体力学别开生面。

## § 5 植物体内的流动

§ 2, § 4 讨论了与动物生命攸关的循环及呼吸过程中的流体力学问题,作为生理流动的另一个侧面,再来看看高等植物(例如树)生命活动所涉及的流体力学问题。

树由根系、干、枝、叶等组成。其生命活动最活跃的部分是叶。叶的功能是利用太阳能,由二氧化碳和水合成糖并释放出氧,即光合作用。其反应中心是叶绿体。 $\text{CO}_2$  分三步进入叶绿体:(i)通过叶表面小孔进入细胞间隙,这是气相扩散;(ii)在叶细胞外溶于水;(iii)液相扩散,进入细胞内的叶绿体。与此同时,水从叶内细胞表面蒸发,以相反的方向扩散,进入外界空气。扩散的速度可通过打开或关闭叶面气孔来控制。

发生于叶细胞的这两个物理化学过程——水分蒸发和糖的制成,引起了树体内两个主要的传输运动:(i)水从根部向叶部输送,以补偿蒸发的损失,同时提供生长所必要的养料。

这种运动称为蒸腾；(ii)糖从叶向枝、干、根部输送，变为机体材料，不断长出新枝、新叶，树干变粗，根系伸展，不断成长壮大。这种运动称为易位。水的蒸腾流和糖溶液(树汁)的易位流是在不同的专门组织中发生的。前者通过木质部外缘的导管，壁面光滑，内部没有原生质；后者通过韧皮内侧的筛管。这两种流动的共同之处是：(i)水和树汁都可看作牛顿流体；(ii)流动速度很低，蒸腾流速在  $10^{-1}$ — $1\text{cm/s}$  之间。易位流速不超过  $10^{-2}\text{cm/s}$ ；导管和筛管管径很小，不超过  $100\ \mu\text{m}$ 。故流动雷诺数远低于 1，惯性力(不管是迁移惯力还是非定常惯力)可不计，流动服从渗流规律。但是，这两种流动的动力来源不同，管道结构也很不一样，因而它们提出的流体力学问题有本质的差别。

### § 5-1 蒸腾流

大量观测证明，植物体导管内水柱是连续的，因而蒸腾流是一种毛细管流动。流动所需动力由叶和根部水的化学势差提供。设植物体内水的化学势为  $\phi(z)$ ，同样温度下自由(例如  $p_0 = 1$  大气压)纯水的化学势为  $\phi_0$ ，则压差为：

$$\phi(z) = p(z) - p_0 = \frac{1}{V_w}[\phi(z) - \phi_0] \quad (5-1)$$

$\phi(z)$  为植物体内任一高度上的水位， $V_w$  为植物体内水的偏克分子容积， $p_0$  是自由态压力。若忽略流体惯性力，阻力与流速  $U$  成比例，流动方程为

$$\frac{d\phi}{dz} = fU + \rho g \quad (5-2)$$

若导管为光滑圆柱管，则按泊肃叶公式，

$$f = \frac{8\mu}{D} \quad (5-3)$$

根据(5-2)、(5-3),植物体内蒸腾流所需压力梯度为0.8—2.0大气压/米。这样,大树树叶中导管口压力可达—80大气压。在植物体内这种高负压是否真的存在?人们作了测量。把大树顶部的细枝或树叶切下,水面从切口内凹。将切下的细枝或叶放在密闭容器内,让切口露在容器外。增大容器内压力,直至水恰好从切口流出。这样测得的压力和计算所需负压,量值大体相符。因此,蒸腾流的动力来自根部和叶部的水位差,这一假设是正确的。

另一个重要问题是,在这样高的负压下,水柱所受张力很大,达—100大气压,为什么导管内水柱不破裂?尽管水的理论强度高达1000大气压,但一般实验室里0.5—50大气压下水滴就会破碎。一般认为植物体内的水经根细胞过滤,特别纯净,而且导管壁也非常洁净,浸润性特别好。因此,尽管所受张力很大,水柱也不会破裂。一旦水柱破裂,流阻将急剧增大。在一定条件下,有可能借助于根压而修复。

到目前为止,蒸腾流的特点已大体弄清。按照这种理论,根—叶水位差决定了蒸腾流速。自然状态下,叶细胞的水分损失决定了蒸腾流量。反过来,通过强迫渗流,提高根压,也应有同样效果。这对于植物生长将起什么样的作用呢?尚需探讨。

## § 5-2 易位流

光合作用制成的糖从叶细胞集中于叶脉的韧皮部,通过筛管经叶、枝、干送到各组织。测量表明,叶、枝、干韧皮部的传输率大体上一致,每平方厘米、每小时输送5g左右干糖。若树汁糖浓度为25%,则易位流速约 $10^{-2}$ cm/s;若糖浓度为10%,则易位流速约 $2 \times 10^{-2}$ cm/s。

从组织学观点来看,易位传输的特点是:(i)它必须在连

续的活细胞组成的通道内进行。韧皮局部损伤或坏死,会使通过这一区域的糖的传输中断。(ii)易位传输通道里有许多筛板,每厘米管长上约有20—50块。板厚约 $5\mu\text{m}$ ,板上有许多筛孔,孔面积占板面积一半以上。筛孔大小因植物种类而异。阔叶树孔径约 $8\mu\text{m}$ ,针叶树则为 $0.08\text{—}0.4\mu\text{m}$ 。筛孔中衬有特种碳氢聚合物,其作用是,筛管一旦破损,它立即起反应,将孔眼堵塞,以免糖过多流失。

从流体力学观点来看,易位流也是一种渗流。问题是这种渗流的动力来自何方?一种自然的设想是树内糖分布不均匀引起的化学势差推动了易位渗流。如果是这样,则可用(5-2)、(5-3)估计这种流动所需的动力。树汁粘度约 $1.5 \times 10^{-2}$ 泊,筛管直径约 $12\mu\text{m}$ ,流速取 $0.02\text{cm/s}$ 。则在无筛板管内,所需压力梯度为0.25大气压/米。筛板存在使阻力剧增,阔叶树所需压力梯度为3大气压/米;针叶树则高达800大气压/米,而树内糖浓度差所能形成的压力梯度在0.2大气压/米左右,差1—3个量级。显然,糖分布的不均匀性不大可能是易位渗流的主要动力。

另一方面,如前所述,易位渗流必须在活组织内进行。这启示我们,这种流动与管内的代谢活动有关。我国学者娄成后、郭季芳<sup>[15]</sup>观测到南瓜筛管中各种不定形的粘液体和堆积在筛板上的粘液中都有强烈的三磷酸腺苷酶反应。因而推测筛管里的原生质,尤其是粘液体内含有一种特殊的收缩性蛋白,它能与三磷酸腺苷(ATP)起作用,利用化学能,引起原生质的收缩运动,从而推动糖和有机物通过筛孔。后来,国外把这种蛋白称为P蛋白。大多数植物生理学家认为这种主动运动构成了易位传输的基础。

但是,Canny<sup>[16]</sup>认为,筛管中产生这种主动运动的可能性很小。因为,筛管结构的活性已经衰退,而产生上述主动运

动需要比正常结构更强烈的活动性。而且，P 蛋白是否具有肌球蛋白的特性？尚不清楚。

总之，植物体内糖易位流动的机理还是个谜。如果它是某种物理因素引起的被动流，那么，一定具有某种目前尚未为人所知的特殊规律；如果它和原生质的主动运动有关，那首先要确定提供这种能源的物质和生化反应，然后研究这种化学能是怎样变为流动机械能的。是特殊的燃烧过程？还是某种特殊的‘泵’？还是类似于动物肌肉收缩的过程？这是一个值得探索的课题。

## §6 原生质流动

原生质流动也是生物运动的一种形式。近年来，研究得较多的是水生植物细胞内原生质的环流和变形虫、粘菌体等体内原生质的往复运动。

现以水生植物节间细胞为例。它呈圆筒形，纵剖面如图 1-15(a) 示，中间是液泡，细胞质分布于四周。分两层：外层是凝胶状物质，称为外质；内层是溶胶状物质，称为内质。

图 1-15 (b) 是在  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$  纵剖面上观测到的原生质流动速度分布。图(c)是速度沿周向的变化。可见，整个来说原生质在细胞内作环流，在  $0^{\circ}$  和  $165^{\circ}$  处，流动方向发生突变，完全相反。内质和外质界面处，流速最高，中心流速为零。

细胞内原生质环流的动力来自何处？起初，人们认为这种动力和液泡存在有关。但实验证明，抽去液泡后，细胞质照样流动，且流动特点和未抽取液泡前一样。故可断言，流动的动力和液泡无关。

由于内质和外质界面上原生质流速最大，且在  $165^{\circ}$  和  $0^{\circ}$  处流向突变，因此神谷宣郎<sup>[17]</sup>等认为细胞内原生质环流动力

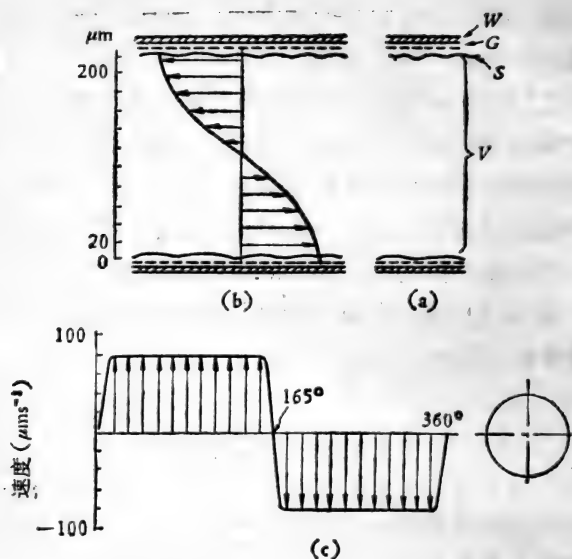


图 1-15<sup>[17]</sup>

(a)节间细胞纵剖面, (b)节间细胞原生质流动速度剖面(90°—270°纵剖面), (c)周向速度分布。

来自内质与外质界面物理-化学反应产生的平行于壁面但方向相反的力。

不仅如此, 还可以观察到细胞核、叶绿体的旋转运动, 旋转一周所需时间约 1—2.5 s, 而且最外侧的原生质流动方向和细胞核、叶绿体旋转方向相反。显然, 颗粒的旋转不是周围原生质流动引起的, 而是原生质-颗粒界面的化学-物理效应所致。

现在的问题是: 原生质的凝胶质-溶胶质界面具备什么样的化学条件和构造条件, 才能产生推动环流所需要的切向力? 表面化学能怎样变为机械能? 遵循什么样的定量规律?

Jarosch 发现细胞质内有许多极其细微的纤维构造, 它们

不断地离散、集合，短暂的多角形束状构造不断地形成，又不断地解体，在原生质内部形成向一定方向传播的波。这种现象和原生质的流动肯定有密切的关系。但具体的机理、合理的模型、定量规律等问题还有待研究。

粘菌体没有植物细胞那样的细胞壁，故原生质流动的同时，体的外形也改变，并作整体运动。观测表明，体内原生质的流动速度的大小、方向均随时间作周期性变化。时均速度剖面呈截头抛物线状。这种运动的动力是怎样产生的？目前还不清楚。

## §7 生理流动的流体力学问题

上面概述了哺乳动物血液循环、脊椎动物呼吸气流、高等植物体内水分和糖的输运过程以及水生植物细胞内和粘菌体内原生质运动过程中的流体力学问题。这些仅仅是生理流动的一小部分。其他如淋巴循环，肾内渗滤和尿在尿道内的流动，胆汁分泌和在胆道内的流动，肠道蠕动和吸收、排泄，精子泳动，阿米巴运动，细胞分裂过程中的流动与变形规律……等等，它们都有自己的特殊问题，也都有各自的理论和实践意义。

这里，作者试图在力所能及的范围内，从现有流体力学基础出发，对生理流动提出的流体力学问题，作一简单概括，并扼要指出它们不同于传统流体力学问题的特色。作为一个新兴学科分支的入门向导，这样做或许是有益的。

### 1. 粘弹性边界内的连续介质运动

生理流体一般是多相系统，但在许多场合下，仍可当作均一的连续介质处理。同时，生理流动总是以固态的生物组织

为边界的,它们都是粘弹性材料。而生理流动又往往是非定常的,因此流体运动总是和边界运动相耦合的。

两种运动均可用连续介质力学的方法处理,根据质量守恒定律,动量守恒定理及热力学第一定律,分别建立流动和边界运动的连续方程、运动方程及能量方程。此外,还需要流体和边界介质材料的本构方程(规定介质应力-应变的关系)、状态方程(给出介质热力学参数间的关系),以及描述边界几何形状的方程。两种运动耦合作用则由适当的边界条件规定。一般生理流动问题中,流体总可看作是**不可压缩的,且不考虑传热**,故一般不需要用能量方程和状态方程。

这类生理流体力学问题的特点是:

(1) 流体及边界材料的本构方程很难准确建立。尤其是后者;

(2) 边界形状复杂,特别是分支繁复;

(3) 高度非线性。非线性效应的来源是多方面的,主要是材料物性非线性、几何形状变化引起的非线性效应、壁面大变形非线性及强脉冲引起的诸分量间的相互作用。

本书第三章讨论血液的流变特性;第四章阐述大血管的力学性质;第七章以大血管内血液流动为对象讨论脉冲流和脉冲波传播的规律;第八章则以动脉血管和呼吸道为目标,研究弯曲、狭窄、分支对流场的扰动。这些都属于这类问题。

## 2. 固定边界内的两相流动

在一定条件下,必须考虑悬浮颗粒(或液滴)自身相对于连续相的运动,颗粒的相互作用,以及颗粒与界面的相互作用。这类生理流动问题的特点是:

(1) 颗粒是柔性的,可以大变形,且内部充满粘性流体。因而颗粒本身的流变特性很复杂。



(2) 流场尺度很小,可达微米量级,必须考虑许多微水动力学特有的问题。

本书第九章讨论的小血管 Segma 效应问题及毛细血管中红细胞的运动,即属此类。

### 3. 能动边界内连续介质的流动

边界生物材料作规律性的、能动的收缩,推动内部流体的运动。如心脏内部的血液流动,小动脉及尿管中的蠕动流均属此例。将于本书第五、六、十一章作简单介绍。

### 4. 可渗透固定边界内的两相流动

毛细血流是个典型例子。

### 5. 通过生物膜、毛细血管壁的物质交换

从力学观点来看,生物体内物质交换有如下几种形式:

- (1) 静压差引起的、通过孔隙介质的迁移流;
- (2) 渗透压差引起的扩散流;
- (3) 借助于化学泵的有源输运。

生物输运过程的最大特点是:具有强烈的选择性。选择准则是:保证细胞内的代谢活动获得最佳环境。第十章讨论通过细胞膜的物质输运及气体交换。

### 6. 生物渗流

渗流的特点是流动惯性可以忽略不计。生物系统中渗流类型很多,有如下几种:

(1) 静压梯度引起的渗流。如组织内体液的流动、淋巴液的流动,器官及组织各种分泌液的流动等。本书第九、十一两章中,将讨论这类流动(与化学势梯度引起的流动相结合)。

(2) 化学势差引起的毛细渗流。例如植物体内的蒸腾流；

(3) 有源渗流。在流动过程中有化学能和机械能的转换,即有特殊的燃烧过程或泵作用加入能量,推动运动。植物体内的易位流可能就属此类。

## 7. 生物动力场问题

生物组织或细胞破坏后在培养液中能重新组织起来;淋巴流经正常细胞时‘视若无睹’,而一遇外来入侵者或异常细胞就发动攻击,使之破碎或围绕它旋转;植物体内养分从贮存处向生长点自动集中(象源-汇流一样);阿米巴的定向运动、变形虫的趋避反应等等。这些都说明,微生物、细胞、亚细胞组织,在流体介质中,能作有识别的主动运动。识别的机理涉及到生物大分子的拓扑构造,属于分子生物学的范畴;运动的动力也各种各样。但有一个共同之处,就是其宏观运动具有某种场的特性,可以建立生物动力场模型,来研究其运动规律。

## 8. 生理流动的系统分析及控制调节

高度的自动调节能力是生命现象的特点,生理流动的规律必须和系统的调节、控制结合起来,才有意义,这将概述于第十一章。

由于生物力学还处于发展阶段,许多新的现象有待探索,有的还不知道应该怎样提出问题才正确。生物流体力学的研究,必将推动流体力学理论的发展。

## 参 考 文 献

[1] Wiederhilm, C. A.: Biomechanics Its Foundations and Objects Ed.

- by Y. C. Fung, N. Perrone, M. Anliker, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [ 2 ] Cooney, D. O.: *Biomedical Engineering Principles*, Marcel Dekker, Inc., 1976.
  - [ 3 ] Halmilton, D.: *Handbook of Physiology*, Section II, Circulation Vol. I, American Physiological Society, Washinton. D. C., 1962.
  - [ 4 ] McDonald, D. A.: *Blood Flow in Arteries*, Arnold, London, 1974.
  - [ 5 ] Fung, Y. C.: *Advances in Applied Mechanics*, **11**, 65, 1971.
  - [ 6 ] 岡小天: レオロジー-生物レオロジー-裳華房, 1976.
  - [ 7 ] Attinger, E. O., Attinger, F. M.: *Ann. Rev. Biophysics and Bioengineering*, **2**, 7, 1973.
  - [ 8 ] Rosen, R.: *Optimality Principles in Biology*, Butterworth, London, 1967.
  - [ 9 ] Kamiya, I., Togawa, H.: *Bull. Math. Biophysics*, **34**, 431, 1972.
  - [ 10 ] Lighthill, J.: *Mathematical Biofluidynamics*, S.I.A.M., Philadelphia., 1975.
  - [ 11 ] Pedley, T. J.: *Ann. Rev. of Fluid Mechanics*, **9**, 229, 1977.
  - [ 12 ] Horsfield, H. et al.: *Bull. Math. Biophysics*, **29**, 245, 1967.
  - [ 13 ] Wanner, W. H. et al.: *Bull. Math. Biology*, **38**(3), 219, 1976.
  - [ 14 ] Uylings, H. B. M.: *Bull. Math. Biology*, **39**(5), 509, 1977.
  - [ 15 ] 娄成后, 郭季芳: *植物学报*, **14**(1), 28, 1966.
  - [ 16 ] Canny, M. J.: *Ann. Rev. of Fluid Mechanics*, **9**, 275, 1977.
  - [ 17 ] 神谷宣郎: *蛋白质·核酸·酵素*, **7**(7), 74, 1962.

## 第二章 连续介质力学基础

### §1 引言

如前章 §7 所述,生理流动所涉及到的流体力学问题类别很多。但总的说来,不外乎连续介质力学问题,和离散系统力学问题;热力学平衡系统问题,和开放的非平衡热力学系统问题。然而,目前生物流体力学所处理的问题,大都属于连续介质力学范畴,或者是它的某种延伸(如微连续介质理论等)。且大都视作热力学平衡系统。

因此,作为讨论各类生物流体力学问题的基础,这里简单介绍一些连续介质力学的基本概念和基本方程。

### §2 连续假设

连续介质是现实物质的一种理想模式,它不管物质的真实结构如何,假设物质是由充满某一规定空间的质点构成,每个质点和物质整体性质相同。这样,物质的状态和运动可以用时间和空间的连续函数来表示。由于某些描述物质运动的物理量(如加速度)是另一些物理量(如速度)的微商,故一般地说,表示连续介质运动和状态的物理量,具有 $n$ 阶连续微商, $n$ 是任意正整数。

实际上,物质都是由分子、原子组成的,生命体还多了个中间层次——细胞(当然,细胞也是由分子、原子构成的)。它们的微观结构都是不连续的。以速度这个物理量为例,分子、

原子、电子及原子核的速度等是可以理解的,但电子与核之间空间里某一点的速度就没有物理意义。因此,描述连续介质宏观运动的物理量,应看作物质构造基本单元(原子、分子或细胞)微观运动的某种统计平均。

仍以速度为例,设介质由  $n$  个组元构成。现在分子一级进行考察。在空间任一点附近,任取一微元体,其尺度为  $\delta$ 。与整个介质运动空间的特征尺度  $\Delta$  相比,  $\delta$  很小 ( $\frac{\delta}{\Delta} \rightarrow 0$ ); 但与物质分子运动尺度  $\lambda$  相比,  $\frac{\delta}{\lambda} \rightarrow \infty$ 。若微元体内含有  $N_i$  个  $i$  组元 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的分子,该组元分子量为  $m_i$ 。其中第  $j$  个分子在所考察时刻的运动速度为  $\mathbf{v}(i, j)$ , 定义连续介质在该点上的宏观运动瞬时速度为  $\mathbf{v}$ , 它满足:

$$\mathbf{v} \cdot \sum_{i=1}^n m_i N_i = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{v}(i, j) \right]$$

$$\therefore \mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ m_i \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{v}(i, j) \right]}{\sum_{i=1}^n m_i N_i} \quad (2-1)$$

要指出,取平均的方法有很多种,(2-1)是动量平均;亦可取算术平均  $\mathbf{v}'$

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{v}(j), \quad N = \sum_{i=1}^n N_i \quad (2-2)$$

或动能平均等。显然,当物质为单组元,或各组元分子量差不多时,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ , 即动量平均等于算术平均。

某时刻连续介质某一点上运动速度为零,意味着该点附近物质分子运动是完全随机的,因而平均动量为零。而分子随机运动的动能表现为该点的温度。可以说,连续介质宏观运动的动量是物质分子运动“规则”程度的量度。

在连续介质力学中,宏观运动和微观运动的联系,用本构方程和状态方程确定,前者给出介质应力-应变(或应变率)的关系,后者规定介质热力学参数间的关系。它们和质量守恒定律、动量守恒定理(牛顿第二定律)、能量守恒定律一起,构成整个连续介质力学的基础。

对于气体、水、低分子溶液等典型流体来说,在常态下,连续假设是成立的。以气体为例,标准状态下,任何气体克分子体积为 22.4 升,内含  $6.024 \times 10^{23}$  个分子,故  $1\text{cm}^3$  内含  $2.687 \times 10^{19}$  个分子。分子运动平均自由程  $\lambda \approx 6 \times 10^{-6}\text{cm} = 6 \times 10^{-2}\mu\text{m}$ 。只要流场特征尺度不小于微米量级,常温常压下,气体可以看作连续介质。

但生理流体一般是多种细胞(有形元素)在水样电介质、非电介质溶液里的悬浮体。水分子、电介质分子与生物大分子相比小得多,与细胞相比更是无法比拟。此时,所谓微观与宏观,有好几个等级(层次),关系极为复杂。以血液为例,主要有形元素是血红细胞,典型尺度为  $10\mu\text{m}$ ,而血液微循环流场尺度量级为  $1-10^2\mu\text{m}$ ,此时连续性假设不成立。

### § 3 拉格朗日方法和欧拉方法

描述连续介质运动有两种方法。

拉格朗日方法考察某一介质微元的位置、速度等物理量随时间的变化,即某一微元运动的历史过程。给定空间内,所有微元的历史过程的总和,构成了该空间内介质运动的规律。

。作为数学描述,取固定于空间的坐标系  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $t=0$  时刻每个质点的位置为  $(c_1, c_2, c_3)$ 。取曲面  $c_i = \text{常数}(i=1, 2, 3)$ , 不管介质怎样运动,组成这些曲面的质点始终是不

变的。这三族曲面的交线就是固联于介质质点的坐标系  $\{c_i\}$ ，称为物质坐标，或迁移坐标，以此来识别不同的质点。 $t > 0$  时，质点的空间位置  $(X_1, X_2, X_3)$ ——相对于固定于空间的坐标系  $\{x_i\}$ ——及其他物理量是时间  $t$  和迁移坐标  $(c_1, c_2, c_3)$  的函数。

$$X_i = X_i(t, c_1, c_2, c_3) \quad (3-1)$$

$$i = 1, 2, 3。$$

质点的速度  $\mathbf{v} = \{u_1, u_2, u_3\}$ 、加速度  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  分别为：

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{\partial X_i}{\partial t} \\ a_i &= \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3。 \quad (3-2)$$

与此不同，欧拉法给出每一时刻、每一空间点上的速度或其他物理量，从而给出每一时刻给定空间内介质运动的图象。这种图象在整个时间过程内的演变确定了介质的运动。

但是，速度和加速度仍然是对质点而言的，加速度是指同一质点速度随时间的变化率。设时间间隔  $dt$  内，质点位移为  $dX_j$ ，相应的速度改变为  $du_i$ ，它来自两部分：(i) 当地速度随时间的变化， $\frac{\partial u_i}{\partial t}(x_j, t) \cdot dt$ ；(ii) 空间位置改变带来的速度变化  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_j, t) dx_j = \frac{du_i}{dx_1} dx_1 + \frac{du_i}{dx_2} dx_2 + \frac{du_i}{dx_3} dx_3$ 。今约定，

附标重复表示求和，除非另作说明。

$$\therefore du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3-3)$$

然而，这里的  $dx_j$  是  $dt$  时间内，同一质点的位移所引起的，故  $dx_j = dX_j$

$$\therefore du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dX_j \quad (3-4)$$

取直角坐标系, 则

$$dX_j = u_j dt \quad (3-5)$$

故加速度  $a_i$  有:

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{Du_i}{Dt} \quad (3-6)$$

这里,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3-7)$$

称物质导数或迁移导数。

#### § 4 应力与应力张量

介质运动时, 内部各点都处于不同的受力状态。若在介质中任取一分离面, 则分离面一侧的介质对另一侧的介质有一作用力, 而另一侧的介质也给对方施加一个大小相等、方向相反的反作用力。若分离面的单位法向量为  $\mathbf{n}$ , 以向外为正, 并规定正面介质对反面介质的作用为正, 反面介质对正面介质的作用则为负。

取固定于空间的坐标系  $\{x_i\}$ , 取分离面面积为  $S$ , 正面介质对另一边的介质作用力为  $\mathbf{f}$ , 其分量为  $f_i$ 。若

$$F_i = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{f_i}{S} \quad (4-1)$$

存在, 则称  $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$  为空间任一点上、任一时刻的应力。

取分离体  $V$  如图 2-1, 界面为  $S$ 。  $V$  内任一点  $P$  处加速度为  $\mathbf{a} = \{a_i\}$ ,  $P$  点邻近微元体  $dV$  内介质质量为  $\rho dV$ ,  $\rho$  是密



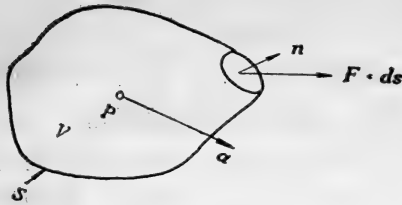


图 2-1 分离体

度。由力平衡条件(忽略体积力)

$$\int_V \rho a_i dV = \oint_S F_i dS \quad (4-2)$$

若分离体特征尺度为  $l$ , 则  $V \sim \mathcal{O}(l^3)^*$ ,  $S \sim \mathcal{O}(l^2)$ 。

$$\therefore \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l^2} \oint_S F_i dS = 0 \quad (4-3)$$

这说明介质运动时,内部各点应力永远局部地保持平衡。

(4-3)中封闭曲面  $S$  是任意的,若取图 2-2 所示的四面体,设  $\tau_{ij}$  为作用于与  $x_j$  垂直的坐标面上,指向  $x_i$  方向的应

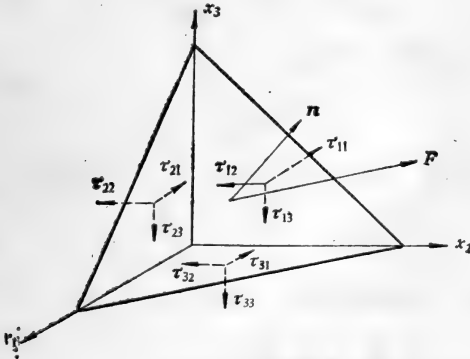


图 2-2 应力张量

力,三角形面积为  $\Delta S$ , 则按(3-3),

\*  $\mathcal{O}(P)$ 表示量级为  $P$

$$F_i \Delta S - \tau_{ij} \Delta S \cdot n_j = 0$$

$$\therefore F_i = \tau_{ij} n_j \quad (4-4)$$

这表明任一时刻作用于面元  $\Delta S$  上任一点的应力  $F_i$ ，可以用面元单位法向量  $n_j$  的线性函数来表示。

量  $\tau_{ij}$  有三个要素(i)大小，(ii)力的方向  $x_i$ ，(iii)力作用的表面的法线方向  $x_j$ ，称为二阶张量\*。它有九个分量

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

$i = j$  时为正应力， $i \neq j$  时为切应力。

由(4-2)、(4-4)得：

$$\int_V \rho a_i dV = \oint_S \tau_{ij} n_j dS \quad (4-6)$$

若  $V$  内及边界  $S$  上， $\rho$ ， $a_i$ ， $\tau_{ij}$ ， $n_j$  都是连续的， $V$  内无空洞，则应用高斯定理，(3-6)变为

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (4-7)$$

而控制体  $V$  是任意的，所以：

$$\rho a_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4-8)$$

若计及体积力  $G_i$ ，则(4-7)改为

$$\rho a_i = G_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4-9)$$

此即连续介质力学运动方程一般形式。

#### § 4-1 应力张量 $\tau_{ij}$ 的对称性

考察分离体  $V$  内介质的转动。  $P$  点附近微元体转动运动

\*  $\tau_{ij}$  的张量特性见 § 4-2。

的动量矩为 $\{(x_i u_j - x_j u_i)\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ 。作用于  $dS$  上的力矩为 $\{(x_i F_j - x_j F_i)\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。因动量矩守恒, 故

$$\frac{D}{Dt} \int_V (x_i u_j - x_j u_i) \rho dV = \oint_S (x_i F_j - x_j F_i) dS \quad (4-10)$$

应用高斯定理及(4-4):

$$\begin{aligned} \oint_S (x_i F_j - x_j F_i) dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i \tau_{jk} - x_j \tau_{ik}) dV \\ &= \int_V \left( x_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right) dV - \int_V (\tau_{ij} - \tau_{ji}) dV \end{aligned}$$

另一方面, 
$$\frac{D}{Dt} \int_V (x_i u_j - x_j u_i) \rho dV$$

$$= \int_V (x_i a_j - x_j a_i) \rho dV$$

结合(4-2), 由(4-10)得:

$$\int_V (\tau_{ij} - \tau_{ji}) dV = 0 \quad (4-11)$$

$\therefore V$  是任意的,

$$\therefore \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (4-12)$$

即: 应力张量是对称二阶张量, 故只有六个独立分量。

## § 4-2 主方向与不变量

坐标系 $\{x_1, x_2, x_3\}$ , 设有三个单值、连续可微函数

$$\bar{x}_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4-13)$$

若这三个函数彼此独立, 则  $\varphi_\alpha$  定义了一个新的坐标系 $\{\bar{x}_\alpha\}$ 。

保证  $\bar{x}_\alpha$  彼此独立的必要、充分条件是偏微商  $\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i} = a_{\alpha i}$  构成

的雅可比行列式不等于 0。

$$J = \left\| \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \|a_{\alpha i}\| \neq 0 \quad (4-14)$$

这时存在单值的连续可微的反函数

$$x_i = \phi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4-15)$$

若  $\{x_i\}$  与  $\{\bar{x}_\alpha\}$  均为正交坐标系, 则

$$\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_\alpha}, \quad \text{即 } a_{\alpha i} = a_{i\alpha} \quad (4-16)$$

任一向量  $\mathbf{A}$  在坐标变换时, 有

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_\alpha &= a_{\alpha i} A_i \\ A_i &= a_{i\alpha} \bar{A}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

应用(4-4), 应力在坐标变换时有

$$\begin{aligned} F_i &= \tau_{ij} n_j = a_{i\alpha} \bar{F}_\alpha \\ &= a_{i\alpha} \bar{\tau}_{\alpha\beta} \bar{n}_\beta = a_{i\alpha} a_{\beta j} \bar{\tau}_{\alpha\beta} n_j \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \tau_{ij} &= a_{i\alpha} a_{\beta j} \bar{\tau}_{\alpha\beta} \\ \text{或 } \bar{\tau}_{\alpha\beta} &= a_{\alpha i} a_{j\beta} \tau_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

(4-18)证明应力  $\tau_{ij}$  具有张量的特征。

现在我们选择  $\{\bar{x}_\alpha\}$ , 使得

$$\bar{\tau}_{\alpha\beta} = \tau \delta_{\alpha\beta} \quad (4-19)$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (4-20)$$

即使得剪应力  $\bar{\tau}_{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta)$ , 只有正应力。这时  $\bar{x}_\alpha$  称为应力主轴, 其方向称主方向,  $\tau_1 = \bar{\tau}_{11}$ ,  $\tau_2 = \bar{\tau}_{22}$ ,  $\tau_3 = \bar{\tau}_{33}$  称为主应力。

怎样确定应力的主轴? 如果  $\{\bar{x}_\alpha\}$  是  $\tau_{ij}$  的主轴, 则:

$$a_{\alpha k} \bar{\tau}_{\alpha \beta} = a_{\alpha k} \delta_{\alpha \beta} \tau = a_{\beta k} \tau$$

又由(4-18):  $a_{\alpha k} \bar{\tau}_{\alpha \beta} = a_{\alpha k} a_{\alpha i} a_{j \beta} \tau_{ij}$  因为是正交变换, 故

$$a_{\alpha i} a_{j \beta} = \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_{\beta}} = \delta_{\alpha \beta} \quad (4-21)$$

$$\begin{aligned} a_{\beta k} \tau &= a_{\alpha k} a_{\alpha i} a_{j \beta} \tau_{ij} = a_{\beta j} \delta_{k i} \tau_{ij} \\ a_{\beta k} \tau &= a_{\beta j} \tau_{k \beta} \end{aligned} \quad (4-22)$$

对每一个  $\beta, k = 1, 2, 3$ , (3-22)可写为

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{11} - \tau) a_{\beta 1} + \tau_{12} a_{\beta 2} + \tau_{13} a_{\beta 3} &= 0 \\ \tau_{21} a_{\beta 1} + (\tau_{22} - \tau) a_{\beta 2} + \tau_{23} a_{\beta 3} &= 0 \\ \tau_{31} a_{\beta 1} + \tau_{32} a_{\beta 2} + (\tau_{33} - \tau) a_{\beta 3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

由此, 对每一个  $\beta (= 1, 2, 3)$  求解得  $\{a_{\beta j}\}$ , 从而确定应力主轴  $\{\bar{x}_{\alpha}\}$ 。

方程(4-23)解存在的必要条件是:

$$D(\tau) = \begin{vmatrix} \tau_{11} - \tau & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \tau & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \tau \end{vmatrix} = 0 \quad (4-24)$$

且  $\tau$  有实根。

展开(4-24), 得

$$\tau^3 - I_1 \tau^2 + I_2 \tau - I_3 = 0 \quad (4-25)$$

$I_1, I_2, I_3$  是坐标变换时应力张量的三个不变量。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \quad \dots \dots \dots \\ I_2 &= \tau_{11} \tau_{22} + \tau_{22} \tau_{33} + \tau_{33} \tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21} - \tau_{23} \tau_{32} - \tau_{13} \tau_{31} \\ &= \tau_{11} \tau_{22} + \tau_{22} \tau_{33} + \tau_{33} \tau_{11} - \tau_{12}^2 - \tau_{23}^2 - \tau_{31}^2 \quad \dots \dots \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

方程(4-25)的三个根  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  就是主应力。

通常取

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = -3p \quad (4-27)$$

$p$  称为介质任一点上的静压。

对于流体,  $p$  是介质的热力学状态变量之一, 它与介质密度  $\rho$ 、绝对温度  $T$  之间的关系

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (4-28)$$

称为状态方程。

### § 4-3 欧拉应力、拉格朗日应力和基尔霍夫应力

应力张量和它所作用的面积元有关。上面所述的应力  $\tau_{ij}$ , 是以变形后的状态为参考的, 即

$$dT_i = \tau_{ij} n_j dS \quad (4-29)$$

$dS$  是微元体在力  $dT_i$  作用下变形后的表面积,  $n_j$  是变形后界面的单位法向量, 这种应力称为欧拉应力。

若以微元体初始状态 (见图 2-3) 为参考, 则得拉格朗日应力

$$dT_{0i} = T_{ij} n_{0j} dS_0 = dT_i \quad (4-30)$$

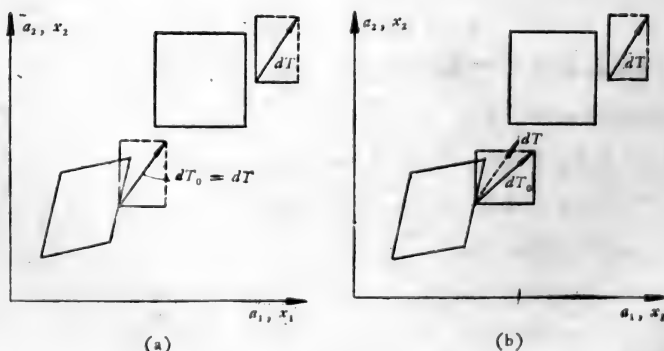


图 2-3 微元体受力情况

设微元体初始状态为 $\{dX_i\}$ , 变形后状态为 $\{dx_i\}$ , 则

$$n_i dS = e_{ijk} dx_j dx_k \quad (4-31)$$

$$\begin{aligned} n_{0i} dS_0 &= e_{ijk} dX_j dX_k \\ &= e_{ijk} \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta \end{aligned} \quad (4-32)$$

这里

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & (i, j, k) = (1, 2, 3) \\ -1, & (i, j, k) = (1, 3, 2) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4-33)$$

由此结合(4-29)、(4-30)得:

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \tau_{mj} \\ \tau_{ij} &= \frac{\partial x_j}{\partial X_i} T_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (4-34)$$

显然, 拉格朗日应力张量是不对称的, 应用起来不方便。为此 Kirchhoff 引进:

$$\left. \begin{aligned} d\mathcal{F}_{oi} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} dT_\alpha \\ d\mathcal{F}_{oi} &= \mathcal{F}_{ij} n_{0j} dS_0 \end{aligned} \right\} \quad (4-35)$$

$\mathcal{F}_{ij}$  称为 Kirchhoff 应力, 由(4-35)、(4-29)、(4-30)可知:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial x_\beta} \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (4-36a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &= \frac{\partial X_j}{\partial x_\alpha} T_{ia} \\ T_{ij} &= \mathcal{F}_{il} \frac{\partial x_j}{\partial X_l} \end{aligned} \right\} \quad (4-36b)$$

可见, Kirchhoff 应力是对称二阶张量, 应用起来更为方便。

## § 5 应 变

在同一直角坐标系内考察相邻两点  $P_0$ 、 $Q_0$  连线  $PQ$  的变形(图 2-4)。变形前,  $P_0$  点坐标为  $\{X_i\}$ , 变形后  $P$  点为  $\{x_i\}$ ;  $Q_0$  点变形前坐标为  $\{X_i + dX_i\}$ , 变形后  $Q$  为  $\{x_i + dx_i\}$ 。变形前、后, 点  $P$  的位移为  $\{\xi_i\}$ ,

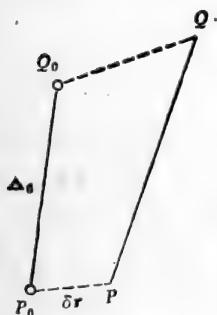


图 2-4 变形

$$\therefore x_i = X_i + \xi_i \quad (5-1)$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j =$$

$$\left( \delta_{ij} + \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} \right) dX_j$$

$$(5-2)$$

若将位移  $\{\xi_i\}$  看作  $\{X_i\}$  的函数, 并

将  $\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}$  分解为对称和反对称两部分, 令

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} \right) \\ \bar{\Omega}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

则 
$$dx_i = (\delta_{ij} + \bar{\gamma}_{ij} - \bar{\Omega}_{ij}) dX_j \quad (5-4)$$

若将位移  $\{\xi_i\}$  看作  $\{x_i\}$  的函数, 同样将  $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$  分解为对称和

反对称两部分, 令

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

则:



$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j = (\delta_{ij} - \gamma_{ij} + Q_{ij}) dx_j \quad (5-6)$$

由(5-6)、(5-4)得:

$$d\xi_i = dx_i - dX_i = (\bar{\gamma}_{ij} - \bar{Q}_{ij}) dX_j = (\gamma_{ij} - Q_{ij}) dx_j \quad (5-7)$$

另一方面,可设变形前 $|P_0Q_0| = ds_0$ ,变形后 $|PQ| = ds$ ,则

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i$$

定义格林 (Green) 应变张量  $\epsilon_{ij}$  和 Almansi 应变张量  $e_{ij}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \xi_k}{\partial X_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} \right] \end{aligned} \quad (5-8)$$

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (5-9)$$

则:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij} dX_i dX_j = 2e_{ij} dx_i dx_j \quad (5-10)$$

以(5-3)(5-5)代入(5-8)(5-9)得:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \bar{\gamma}_{ij} + \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_{ki} - \bar{Q}_{ki})(\bar{\gamma}_{kj} - \bar{Q}_{kj}) \\ e_{ij} &= \gamma_{ij} - \frac{1}{2} (\gamma_{ki} - Q_{ki})(\gamma_{kj} - Q_{kj}) \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

当变形很小时,(5-11)变为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \bar{\gamma}_{ij} \\ e_{ij} &= \gamma_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

$\gamma_{ij}$  为无限小变形时的应变,称为柯西 (Cauchy) 应变。当  $i = j$  时为线应变,  $i \neq j$  时为切应变。而  $Q_{ij}$  为微元体的角

位移。

由此可知，无限小变形既可用柯西应变张量描述，亦可用格林应变张量确定。但对有限变形，只能用格林应变或 Almansi 应变张量描述。但无论  $\gamma_{ij}$ 、 $\epsilon_{ij}$  或  $\varepsilon_{ij}$ ，都是对称二阶张量。

类似于应力张量，亦有应变主轴、应变不变量、主应变等。设应变主轴为  $\{x_\alpha\}$ ， $\alpha = 1, 2, 3$ ，则可用类似于(4-25)的方程求出主应变  $\gamma_\alpha$ ， $\epsilon_\alpha$ ， $\varepsilon_\alpha$  等。设伸长比为  $\lambda$ ，则

$$\lambda_\alpha = \frac{ds_\alpha}{ds_{0\alpha}} = 1 + \gamma_\alpha \quad (5-13)$$

由(5-10)可得：

$$\varepsilon_\alpha^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1) \quad (5-14)$$

应用伸长比，应变不变量可写为：

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

## §6 应 变 率

连续介质运动时，两邻质点一般发生相对位移，因而同一组质点构成的几何图形在运动过程中不断变化。现考察相邻两点之间的速度关系。用欧拉方法，速度场为  $\{u_i(x_j, t)\}$ ，相邻两点  $P(x_j)$   $Q(x_j + dx_j)$  的速度差为：

$$\delta u_i = u_i(x_j + dx_j) - u_i(x_j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \mathcal{O}(dx_j^2)$$

$$\therefore \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (6-1)$$

可以证明,速度梯度  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  也是二阶张量。作正交变换,

$\{x_j\} \rightarrow \{\bar{x}_\alpha\}$ , 则有:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_\alpha &= a_{\alpha i} u_i \\ u_i &= a_{i\alpha} \bar{u}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

而

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\beta} = a_{\beta j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\beta} \quad (6-3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= a_{\beta j} \frac{\partial (a_{\alpha i} \bar{u}_\alpha)}{\partial \bar{x}_\beta} \\ &= a_{\beta j} a_{i\alpha} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} \end{aligned} \quad (6-4)$$

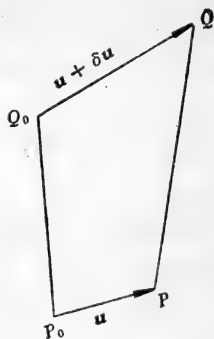


图 2-5 相邻两点的速度关系

可见,速度梯度具有二阶张量特性。它可以分解为对称部分和反对称部分:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6-5)$$

定义:

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \omega_{ij} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

$$\therefore \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} - \omega_{ij} \quad (6-7)$$

显然:  $e_{ij} = e_{ji}$ ,  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  (6-8)

$e_{ij}$  为应变率, 是对称二阶张量。而  $\omega_{ij}$  实际上是一个向量:

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (6-9)$$

$\nabla \times \mathbf{u}$  为涡量,  $\boldsymbol{\omega}$  为角速度。

$$\begin{aligned} \therefore d\xi_i &= u_i dt \\ \therefore \left. \begin{aligned} e_{ij} dt &= \gamma_{ij} \\ \omega_{ij} dt &= \Omega_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6-10) \end{aligned}$$

## § 7 弹性体及其简单模型

人们通常把物质分为固体、液体与气体,液体和气体又统称为流体。固体材料自身能维持一定的形状,除非外力足够大;流体则不然,它不能依靠自身的能力维持一定的形状,均质的流体,各部分之间可自由地相互置代而不改变宏观性质。然而,应当指出,固体与流体之间并无绝然的界限。许多物质都具有两重性。就通常意义上的固体而言,又有弹性体、塑性体、粘弹体等之别。生理流动问题中,流体运动和固体边界的运动耦合在一起,因而生物固体材料的力学性质是研究生理流动的基础。这里简述一下有关概念和最简单的一些模型。

### § 7-1 胡克体

除刚体外,最简单的固体模型是胡克体。

假设:

(1) 介质是完全弹性体,使物体变形所作的功完全变成了介质的弹性位能。

(2) 应力是应变的线性函数,与角位移无关。这样

$$\tau_{ij} = E_{ijkl} \gamma_{kl} + B_{ij} \quad (7-1)$$

$E_{ijkl}$  称为弹性模数。因为  $\gamma_{kl} = 0$  时,  $\tau_{ij} = 0$ ,

$$\therefore B_{ij} = 0$$

又因为对称性,  $E_{ijkl}$  中只有 21 个是独立的。

如果介质是各向同性的,那么本构方程应与坐标系的选

择无关。此时

$$\left. \begin{aligned} E_{1111} = E_{2222} = E_{3333} = E, \quad E_{1122} = E_{2233} = E_{3311} \\ E_{1212} = E_{2323} = E_{3131} = G, \quad E_{1111} = E_{1122} + 2E_{1212} \end{aligned} \right\} (7-2)$$

这样,只有两个独立的弹性模数。常用杨氏模量  $E$ , 剪切模数  $G$ , 体积模数  $K$  及泊松比  $\sigma$  中任意两个。这里

$$K = E_{1122} + \frac{2}{3}E_{1212} \quad (7-3)$$

它们之间关系如下:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1 + \sigma)} \\ K &= \frac{E}{3(1 - 2\sigma)} \\ E &= \frac{9KG}{3K + G} \\ \sigma &= \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \end{aligned} \right\} (7-4)$$

也有人用拉梅(Lame)系数  $\mu_1, \mu_2$ ,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= E_{1212} \\ \mu_2 &= E_{1122} \end{aligned} \right\} (7-5)$$

显然,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= G \\ \mu_2 + \frac{2}{3}\mu_1 &= K \end{aligned} \right\} (7-6)$$

但即使完全弹性体,只有变形无限小时,线弹性模型才成立。而生物材料在生理状态下往往变形较大。

## § 7-2 完全弹性体有限变形与应变位能

材料变形不是无限小时,变形情况不能用柯西应变描述,需用格林应变  $\epsilon_{ij}$  或 Almansi 应变  $\epsilon_{ijo}$ 。

对于完全弹性体,材料变形所作的功完全变为介质的弹

性能,过程是可逆的,应力完全决定于应变的状态,与过程无关,当外力撤除后,材料恢复到唯一的自然状态。这时,可引进应力势或应变位能函数。

设单位质量材料的应变能(又称应变能密度)为  $\tilde{W}$ , 密度为  $\rho$ , 则

$$\frac{D\tilde{W}}{Dt} = \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t} + u_i \frac{\partial\tilde{W}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \epsilon_{ij} \quad (7-7)$$

若用拉格朗日方法表示,则

$$\frac{D\tilde{W}}{Dt} = \frac{\partial\tilde{W}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \mathcal{L}_{ij} \cdot \frac{\partial\epsilon_{ij}}{\partial t} \quad (7-8)$$

$\rho_0$  为初始密度。

如果材料密度不变,且各向同性,则应变能密度是应变不变量  $I_k (k=1, 2, 3)$  的函数

$$\tilde{W} = \tilde{W}(I_1, I_2, I_3) \quad (7-9)$$

此时拉格朗日主应力  $T_i$  与  $W$  有如下关系:

$$T_i = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\tilde{W}}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \lambda_i} \quad (7-10)$$

因  $\rho = \text{常数}$ , 故可引进单位体积内的应变能函数  $W$ , 则(7-10)可改写为

$$T_i = \frac{\partial W}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \lambda_i} \quad (7-11)$$

应变位能法只适用完全弹性体, 即应力与应变之间存在一一对应关系。然而, 生物材料大多不是完全弹性体, 而是粘弹体。

## § 8 粘弹性概念与线性粘弹性模型

弹性体的特点是介质内任一点、任一时刻的应力, 完全取

决于当时、当地的应变，与应变的历史无关。但与此不同，还有一类材料，其中任一点任一时刻的应力状态，不仅取决于当时、当地的应变，而且与应变的历史过程有关，即材料是有“记忆”的。这称为粘弹性介质。这里讨论一种最简单的粘弹性体——线性粘弹体，其特点是变形与载荷（即应力与应变）之间的关系是线性的，但与时间有关。换言之，线性粘弹体的记忆比较简单，它只‘记得’其初始状态。为简化，下面讨论一维应力作用下的变形问题（简单拉伸）。

### § 8-1 玻耳兹曼叠加原理

若线性粘弹性物体在应力  $\tau_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 单独作用下，应变分别为  $\gamma_i(t)$ ，则材料在应力

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^N \tau_i(t) \quad (8-1)$$

作用下，应变为

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(t) \quad (8-2)$$

反之亦然。

设应力  $\tau(t)$  是连续可微函数，在时刻  $\zeta$  与  $\zeta + d\zeta$  期间，应力增量为  $\frac{d\tau}{dt}(\zeta) \cdot d\zeta$ ，它引起的应变增量为  $d\gamma(t)$ 。按线性粘弹体定义， $\frac{d\tau}{dt}d\zeta$  与  $d\gamma(t)$  之比为一取决于时间间隔  $(t - \zeta)$  的函数  $J(t - \zeta)$ ，

$$d\gamma(t) = J(t - \zeta) \frac{d\tau}{dt}(\zeta) d\zeta \quad (8-3)$$

应用叠加原理，得（设  $t < 0, \tau = 0$ ）

$$\gamma(t) = \int_0^t J(t-\zeta) \frac{d\tau}{d\zeta}(\zeta) d\zeta \quad (8-4)$$

同样,若  $t < 0$  时,  $\gamma(t) = 0$ , 则

$$\tau(t) = \int_0^t G(t-\zeta) \frac{d\gamma}{d\zeta}(\zeta) d\zeta \quad (8-5)$$

函数  $G(t)$  称为松弛函数, 物理上, 它表示  $t = 0$  时刻单位阶跃应变:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (8-6)$$

引起的应力。

函数  $J(t)$  称为蠕变函数, 物理上表示  $t = 0$  时刻单位阶跃应力

$$\tau(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (8-7)$$

引起的应变。

$G(t)$  和  $J(t)$  是表征材料物性的函数。这种材料又称玻耳兹曼体。显然, 按(8-4)、(8-5),  $t$  时刻以后的应力(或应变)不会影响  $t$  时刻的应变(或应力)。

同样道理, 线性粘弹体的力学行为, 可以看作若干弹性元和若干粘性元行为的某种叠加。各种线性粘弹性模型就是建立在这个基础上的。

## § 8-2 粘弹性-弹性相当原理

松弛函数  $G(t)$  和蠕变函数  $J(t)$  是表征线性粘弹性材料物性的一种方法, 但不是唯一的方法。例如, 在周期性载荷作用下材料的力学行为用复弹性模量更为方便。一般情况(不限于线性材料)下, 复弹性模量可应用下述粘弹性-弹性相当原理确定:



经过拉普拉斯变换的粘弹性问题的解，可以直接从相应的弹性问题的解给出，只要将弹性系数代之以拉普拉斯变量  $s$  的某一函数即可。此函数的具体形式，取决于所用的物理模型。

若材料是线性的、不可压缩的，且各向同性，则弹性问题只有一个物性系数，应力-应变关系的一般形式为

$$\sum_{n=0}^P d_n \frac{\partial^n \tau_{ij}}{\partial t^n} = \sum_{n=0}^Q c_n \frac{\partial^n \gamma_{ij}}{\partial t^n} \quad (8-8)$$

$c_n$ 、 $d_n$  为常数，初值为 0。作拉普拉斯变换，得：

$$\left( \sum_{n=0}^P d_n s^n \right) T_{ij} = \left( \sum_{n=0}^Q c_n s^n \right) \Gamma_{ij} \quad (8-9)$$

这样得复弹性模量

$$E_c = \frac{\sum_{n=0}^Q c_n s^n}{\sum_{n=0}^P d_n s^n} \quad (8-10)$$

实用中，(8-10)常写作

$$E_c(s) = E_s \frac{\prod_1^M b_n \prod_1^N (s + a_n)}{\prod_1^N a_n \prod_1^M (s + b_n)} \quad (8-11)$$

$\Pi$  表示连乘， $E_s$  为静弹性模量。令  $s = j\omega$ ， $j = \sqrt{-1}$ ，即得谐振载荷作用下的复弹性模量。

### § 8-3 线性粘弹体在定态谐振时的特性

设谐振载荷作用于材料的时间为无限长，一切瞬态反应均已衰减掉。令  $\xi = t - \zeta$ ，这样，(8-4)、(8-5)变为：

$$\left. \begin{aligned} \tau(t) &= \int_0^\infty J(\xi) \frac{d\tau}{dt}(t - \xi) d\xi \\ \gamma(t) &= \int_0^\infty G(\xi) \frac{d\gamma}{dt}(t - \xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

$$\text{设 } \tau(t) = \tau_0 e^{j\omega t} \quad (8-13)$$

则:

$$\gamma(t) = j\omega\tau_0 e^{j\omega t} \int_0^{\infty} J(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi$$

$\because t < 0$  时  $J(\xi) = 0$ , 故可用傅里叶变换

$$\tilde{J}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi \quad (8-14)$$

则有:

$$\gamma(t) = j\omega\tau_0 \tilde{J}(\omega) e^{j\omega t} \quad (8-15)$$

若

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{j\omega t} \quad (8-16)$$

则

$$E_c = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} = \frac{1}{j\omega \tilde{J}(\omega)} \quad (8-17)$$

同样, 由(8-12b)可得:

$$E_c = \frac{\tau}{\gamma} = j\omega \tilde{G}(\omega). \quad (8-18)$$

$\tilde{G}(\omega)$  是  $G(t)$  的傅里叶变换, 故

$$-\omega^2 \tilde{J}(\omega) \tilde{G}(\omega) = 1 \quad (8-19)$$

$$E_c = |\omega \tilde{G}(\omega)| e^{i\delta} = \mu e^{i\delta} \quad (8-20)$$

$\mu$  为复模量的幅值,  $\delta$  是应变落后于应力的相位角。若  $\delta \neq 0$ , 则  $\tau$ - $\gamma$  图如图 2-6 示, 形成一滞后环。若加载时, 介质从状态 1 变为 2, 此时对单位体积介质所作的功为

$$W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \tau d\gamma \quad (8-21)$$

一周期内, 所作变形功为:

$$W = \oint \tau d\gamma = \pi \tau_0^2 |\omega \tilde{J}(\omega)| e^{-i\delta} \quad (8-22)$$

$\delta > 0$  时,

$$\Re[W] = \pi \tau_0^2 |\omega \tilde{J}(\omega)| \sin \delta > 0 \quad (8-23)$$

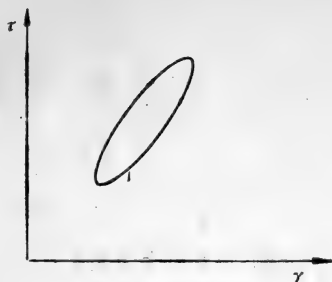


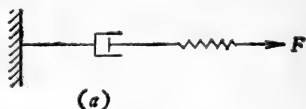
图 2-6 滞后环

$\mathcal{R}$ 表示实部。它表示介质粘性引起的机械能损失。若为完全弹性体,则  $\delta = 0$ ,  $\mathcal{R}[W] = 0$ , 此时变形功是单值函数,可引进应变位能。

由此可见,  $\delta$  表示介质内摩擦。

#### § 8-4 几种简单的线性粘弹性体

下面介绍几种简单的线性粘弹性模型。



##### 1. 麦克斯韦(Maxwell)模型

弹性元  $k$  与粘性元  $\mu$  串联,如图 2-7(a)示,总应变为二者之和,而总应力等于二者各自的应力。

$$\therefore \dot{\gamma}(t) = \frac{1}{k} \dot{\tau} + \frac{\tau}{\mu} \quad (8-24)$$

这里,  $\dot{\cdot}$  表示  $\frac{d}{dt}$ 。故:

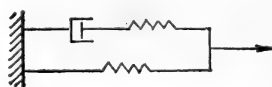
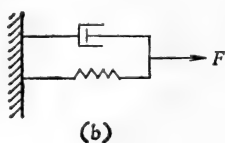


图 2-7

(a)麦克斯韦模型, (b)佛克脱模型, (c)标准线性固体模型。

$$\left. \begin{aligned}
 J(t) &= \left[ \frac{1}{\mu} + \frac{t}{k} \right] I(t) \quad \text{这里: } I(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \\
 G(t) &= \mu e^{-\frac{\mu t}{k}} \cdot I(t) \\
 E_c &= \frac{1}{k^2 + \omega^2 \mu^2} (\omega^2 \mu^2 k + j\omega \mu k^2) \\
 \delta(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{k}{\mu \omega}
 \end{aligned} \right\} (8-25)$$

## 2. 佛克脱 (Voigt) 模型

弹性元  $k$  与粘性元  $\mu$  并联, 如图 2-7(b) 示, 因而总应力为二者之和, 而总应变等于二者各自的应变。这样:

$$\tau = k\gamma + \mu\dot{\gamma} \quad (8-26)$$

故:

$$\left. \begin{aligned}
 J(t) &= \frac{1}{\mu} \left[ 1 - e^{-\frac{\mu t}{k}} \right] I(t) \\
 G(t) &= k\delta(t) + \mu I(t) \\
 E_c &= k + j\omega\mu \\
 \delta &= \operatorname{arctg} \frac{\omega\mu}{k}
 \end{aligned} \right\} (8-27)$$

这里  $\delta(t)$  是狄喇克 (Dirac) 函数

$$\left. \begin{aligned}
 \delta(t) &= 0 \quad t \neq 0 \\
 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\delta(t)dt &= f(0) \quad \varepsilon > 0
 \end{aligned} \right\} (8-28)$$

$f(t)$  为在  $t = 0$  连续的任意函数。

## 3. 标准线性固体模型

如图 2-7(c) 示, 有

$$\tau + \nu_\epsilon \dot{\tau} = E_R(\gamma + \nu_\sigma \dot{\gamma}) \quad (8-29)$$

$\nu_\epsilon$ ,  $\nu_\sigma$ ,  $E_R$  均为常数。这样

$$\left. \begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{E_R} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\nu_\epsilon}{\nu_\sigma} \right) e^{-\frac{t}{\nu_\sigma}} \right] I(t) \\ G(t) &= E_R \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\nu_\sigma}{\nu_\epsilon} \right) e^{-\frac{t}{\nu_\epsilon}} \right] I(t) \end{aligned} \right\} \quad (8-30)$$

$$\left. \begin{aligned} E_c &= \frac{1 + j\omega\nu_\sigma E_R}{1 + j\omega\nu_\epsilon} \\ \therefore |E_c| &= \mu = \sqrt{\frac{1 + \omega^2\nu_\sigma^2}{1 + \omega^2\nu_\epsilon^2}} \cdot E_R \\ \delta &= \arctg \frac{\omega(\nu_\sigma - \nu_\epsilon)}{1 + \omega^2\nu_\sigma\nu_\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

$\nu_\epsilon$  是在应变不变的条件下, 应力松弛时间,  $\nu_\sigma$  是在常应力下, 应变迟后时间,  $E_R$  则为松弛弹性模量。

## § 9 牛顿流体和非牛顿流体

流体的本构关系是研究流体运动规律的前提。就其力学性质而言, 流体可分为牛顿流体和非牛顿流体两大类。

### § 9-1 牛顿流体

根据对自然界流动的大量观测经验, 斯托克斯假设:

- (1) 流体应力  $\tau_{ij}$  是应变率  $e_{ij}$  的函数, 与  $\omega_{ij}$  无关;
- (2) 应力与应变率线性相关;
- (3) 流体均匀且各向同性。

根据假设(2), 有

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} e_{kl} + C_{ij} \quad (9-1)$$

由于对称性,  $i$  与  $j$ ,  $k$  与  $l$ ,  $(i, j)$  与  $(k, l)$  均可交换顺序, 故

(9-1)中共有  $21+6=27$  个常数。另一方面,本构方程是流体的属性,与坐标选择无关,即(9-1)应满足坐标交换不变性原理。而且它又是各向同性的。可以证明,  $\mu_{ijkl}$  可减少到两个,(9-1)变为

$$\tau_{ij} = D\delta_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (9-2)$$

这里  $\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ ,  $\mu$ 、 $\lambda$  是两个物性参数。

当流体静止时,  $e_{ij} = 0$ ,  $\tau_{ii} = 3D = -3p$ ,  $p$  为流体静压。故(9-2)可改为:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (9-3)$$

据此,流体运动时平均主应力应为:

$$\frac{1}{3}\tau_{ii} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\Theta \quad (9-4)$$

但是,在不可压缩条件下,流体无论运动与否,平均应力总等于静压  $p$ ; 而在可压缩流体中,  $p$  是热力学状态变量  $T$  (温度) 和  $\rho$  (密度) 的函数,与  $\Theta = e_{ii}$  无关。因此,斯托克斯进一步假设:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (9-5)$$

这样,流体本构方程变为

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu\Theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (9-6)$$

$\mu$  为流体的动力学粘度,量纲为  $[ML^{-1}T^{-1}]$ 。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (9-7)$$

称为流体的运动粘度,是动量扩散系数。量纲为  $[L^2T^{-1}]$ 。

若流动是一维的,则(9-6)变为:

$$\tau_{12} = \mu \frac{du_1}{dx_2} = 2\mu e_{12} \quad (9-8)$$

此即牛顿公式。

## § 9-2 非牛顿流体

应力-应变率呈线性关系,且应变率趋于零时应力亦趋于零的流体称为牛顿流体,凡不满足此条件者均为非牛顿流体。

非牛顿流体可分为两大类:

### 1. 与时间无关的非牛顿流体

这类流体的应力取决于当时、当地的应变率,亦即取决于当时、当地的流动状态,与流动的历史过程无关。它又可以分为两种:

(1) 有屈服应力的流体。这种流体呈现出固体的特性,只有当压力梯度超过某一确定的值——屈服应力时,流动才能发生。著名的宾汉 (Bingham) 体即为一例,它是不可压缩的,本构关系为

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + (1 - \delta_{ij})\tau_0 \quad (9-9)$$

一维情况下,剪应力随速度梯度的变化如图 2-8 示

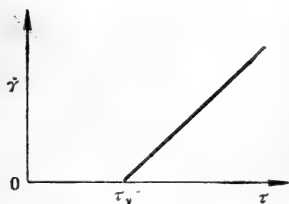


图 2-8 宾汉体应力-应变率关系

$$\tau = \mu \frac{du_1}{dx_2} + \tau_0 \quad (9-10)$$

$\tau_0$  即为屈服应力。

另一个例子是 Casson 体,一维状态下满足:

$$\tau^{\frac{1}{2}} = b + k e_{12}^{\frac{1}{2}} \quad (9-11)$$

$b^2 = \tau_0$  为屈服应力,  $k$  = 常数。在相当宽的应变率范围内, 血液近似满足 Casson 方程(9-11)

(2)无屈服应力的非牛顿流体。其中实用中广泛应用的一种模型是所谓幂次律模型,即切应力  $\tau$  与切变率  $e_{12}$  满足幂次律:

$$\tau = 2k e_{12}^n = k \left( \frac{du_1}{dx_2} \right)^n \quad (9-12)$$

$k, n$  为物性常数,均大于 0。

这类流体若仍用牛顿公式, 则需引进表观粘度( $\mu_a$ )的概念

$$\mu_a = \frac{\tau}{\frac{du_1}{dx_2}} \quad (9-13)$$

显然,表观粘度不是流体的物性参数,而与流动状态(应变率)有关。以幂次律流体为例

$$\mu_a = k \left( \frac{du_1}{dx_2} \right)^{n-1} \quad (9-14)$$

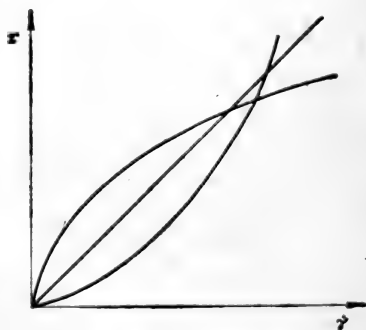


图 2-9 三种流体

显然有三种情况(见图 2-9):



当  $0 < n < 1$  时, 表现粘度随切变率增高而下降, 称为假塑性流体;

当  $n = 1$  时, 即为牛顿流体;

当  $n > 1$  时, 表现粘度随切变率增大而上升, 称为膨胀流体。

因而应力-应变率满足幂次律的流体又称为广义牛顿流体。

## 2. 粘弹性流体

这类流体的应力不仅取决于当时、当地的应变率, 而且与历史有关。即流体对于机械信息是有记忆的。目前研究较多的是线性粘弹性流体, 其本构关系的一般形式为:

$$\tau_{ij}(x_k, t) = \int_{-\infty}^t G(t-t')[e_{ij}(x_k, t) - e_{ij}(x_k, t')] dt' + 2\mu e_{ij} - p\delta_{ij} \quad (9-15)$$

函数  $G(t)$  表示流体的“记忆”, 由具体物理模型决定。

生理流动问题中所遇到的流体往往是非牛顿流体, 甚至是粘弹性流体。只是在一定条件下可按牛顿流体近似处理。

## § 10 流体运动的基本方程

流体力学基本方程基于三大守恒定律

### § 10-1 连续方程

在流场内任取分离体如图 2-10 示。由于质量守恒, 流动过程中, 分离体内流体质量不变,

$$\therefore \oint_S \rho u_j n_j dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (10-1)$$

$V$  内无空穴或奇点,按高斯定理

$$\oint_S \rho u_j n_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) dV$$

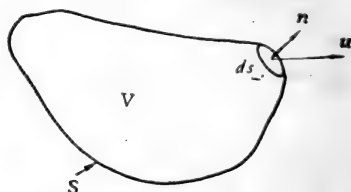


图 2-10

而  $V$  是固定的,故

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ \therefore \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right] dV &= 0 \end{aligned} \quad (10-2)$$

$V$  为任意的,故

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (10-3)$$

此即连续方程。

若流体不可压缩而且均匀,则连续方程简化为:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (10-4)$$

$$\rho = \text{常数} \quad (10-5)$$

若流体不可压缩,但不均匀,则连续方程变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (10-6)$$

生理流体一般不可压缩,且均匀。故生理流动问题中,连续方程常用(10-4)。

## § 10-2 运动方程

取分离体如图 2-7, 根据动量定理,  $V$  内流体动量变化, 应等于通过表面的动量流与  $S$  以外界质作用于  $V$  的表面力及体积力冲量之和

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dV = \int_V \rho f_i dV + \oint_S F_i dS - \oint_S (\rho u_i) u_j n_j dS \quad (10-7)$$

$f_i$  为单位质量上的体积力。应用高斯定理,

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i \right] dV = 0 \quad (10-8)$$

应用连续方程(7-3), 得

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] &= \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \text{或 } \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (10-9)$$

若流体是均质、不可压缩牛顿流体, 则应用(9-6)得纳维-司托克斯方程:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i \quad (10-10)$$

若流体为可压缩、均质牛顿流体, 则运动方程为

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (10-11)$$

若流体粘性可以忽略不计, 则为理想流体, 此时, (10-11)变为:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (10-12)$$

生理流动问题中,常用(10-10)。

### § 10-3 流体运动的能量方程

运动流体的质点的总动能为其平均动能和微观运动动能之和,后者称为内能。设单位质量流体内能为 $E$ (它可包括平移动能 $E_t$ ,转动能 $E_r$ ,振动能 $E_v$ ,电离能 $E_e$ 等等),则单位质量流体总动能为:  $\frac{1}{2}u_i u_i + E$ 。

若流体在外力和热源(化学反应、辐射等)作用下运动,则根据能量守恒定律,任意分离体内,流体总动能的变化必须等于外加体积力所作之功、表面应力所作之功、通过表面传导的热流、通过表面的总动能流以及从外界接受的总热量之和。故

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} u_i u_i + E \right) dV &= \int_V \rho f_i u_i dV + \oint_S u_i \tau_{ijn_j} dS \\ &\quad - \oint_S q_i n_i dS - \oint_S \left( \frac{1}{2} u_i u_i + E \right) \\ &\quad \times \rho u_i n_i dS + \oint_V Q dV \end{aligned} \quad (10-13)$$

这里 $Q$ 为单位时间从外界接受的热量, $q_i$ 是由于温度梯度引起的通过表面的热流量。

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (10-14)$$

$T$ 为流体绝对温度, $k$ 是热传导系数。

因为

$$\oint_S u_i \tau_{ijn_j} dS = \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ij} dV + \int_V \rho u_i \left( \frac{Du_i}{Dt} - f_i \right) dV$$

故应用连续方程、运动方程,(10-13)变为

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q \quad (10-15)$$

方程右端第一项是使流体变形所作的应力功，第二项是由于温度梯度传入的热，第三项是外力能源。

对于牛顿流体，有

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi + Q \quad (10-16)$$

$\Phi$  是粘性应力引起的机械能消耗，

$$\Phi = \mu \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + 2e_{ij} \right] e_{ij} \quad (10-17)$$

若流体不可压缩， $\rho = \text{常数}$ ，则(10-16)变为：

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi + Q \quad (10-18)$$

内能  $E$  一般是  $T$  的函数。

定义熵为  $S$ ，

$$T \frac{DS}{Dt} = \frac{DE}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (10-19)$$

则由(10--16)可知，若  $Q = 0$ ，则表面绝热，此时

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho S dV = \int_V \frac{\Phi}{T} dV + \int_V \frac{k}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 dV \quad (10-20)$$

$$\therefore \Phi = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2e_{ij} \right]^2 > 0$$

$$\therefore \frac{D}{Dt} \int_V \rho S dV > 0 \quad (10-21)$$

此结论符合热力学第二定律。

一般情况下，要使得连续方程、动量方程、能量方程能确切地描述流体运动，即在数学上构成一完备的方程组，除了本构方程外，还需要确定流体热力学状态变量  $E$ 、 $T$ 、 $p$ 、 $\rho$  等之间关系的状态方程。

对于生理流动,  $\rho$  可看作常数, 若不考虑化学能-机械能转换及传热问题, 一般可不用能量方程。但若考虑化学能及传热等问题, 则必须计及能量方程。此时, 流体的状态方程又是一个令人头疼的问题。

#### § 10-4 不可压缩牛顿流体运动方程组的一般形式

前述流体力学方程组是在笛卡尔坐标系中用分量形式给出的, 坐标变化时, 形式亦随之改变。若用向量形式表示, 则与所取坐标性质无关。此时连续方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (10-22)$$

这里 
$$\nabla = \mathbf{g}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (10-23)$$

$\{x_k\}$  是任意正交曲线坐标,  $\mathbf{g}_k$  是坐标系  $\{x_k\}$  的基本向量。

纳维-司托克斯方程可写为

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (10-24)$$

能量方程可写为

$$\rho \frac{DE}{Dt} = k \nabla^2 T + \Phi + Q \quad (10-25)$$

此时,

$$\Phi = 2\mu c_{ij} \cdot c_{ij} = 2\mu \hat{D} : \hat{D} \quad (10-26)$$

$\hat{D}$  表示张量,  $\hat{D}$  为应变率张量,  $:$  表示二阶张量的标量积。

#### § 11 粘性流动概述

生理流动介质通常是多种电解质、生物大分子物质的水溶液, 及其与细胞(如红细胞、淋巴细胞等)组成的悬浮系统, 其压缩性与水相近。水的压缩系数为  $4.9 \times 10^{-11} \text{cm}^2/\text{dyn}$ ,

而生理范围内压力梯度约  $10^5 \text{ dyn/cm}^2/\text{cm}$ , 故生理流动介质均可视作不可压缩流体。作为近视, 设为牛顿流体, 则其运动服从纳维-司托克斯方程。

若流场特征尺度为  $L$ , 特征速度为  $U$ , 参考压力为  $p_0$ , 且若流动无特定的时间尺度, 则令:

$$x'_j = \frac{x_j}{L}, \quad t' = \frac{tU}{L}, \quad u'_j = \frac{u_j}{U}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2} \quad (11-1)$$

则(10-4)、(10-10)无量纲化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} &= 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'_j \partial x'_j} \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (11-3)$$

$Re$  称为雷诺数, 某种意义上它是惯性力与所受粘性力的相对量度, 是表征粘性流动特性的主要的动力学参数。不同雷诺数范围内, 流动具有不同特色。人体生理流动的雷诺数范围为  $10^{-3} - 10^4$ , 因而它所提出的粘性流动问题是各色各样的。本节和 § 12、§ 13 均以生理流动为目标。介绍一些问题的处理方法和一般结论。

求粘性流动解的根本困难在于运动方程是非线性的, 只有在少数简单情况下才能求得精确解。一种特别简单的情况是均匀轴向流, 即流动是一维的, 速度方向处处一样, 而且沿流动方向上, 速度分布不变, 因而方程(10-24)中迁移惯性项  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  可以忽略不计, 方程可线性化。下面举三个例子。

第一个例子是长圆管内、压差驱动的定常流动, 即有名的泊肃叶流动(详见第一章 § 3)。当初泊肃叶正是为了了解血管内血液流动的规律, 做了大量实验研究, 得出了泊肃叶定

律:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l} \Delta p \quad (11-4)$$

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) \quad (11-5)$$

这里  $Q$  是流量,  $\Delta p$  是管两端压差,  $R$  是管半径。泊肃叶定律虽未解决血管内血液流动的问题, 却成为粘性流体力学的发轫点, 推动了流体力学的发展。至今, 它不仅为流体粘度的测定提供理论基础, 而且还可用以说明(至少是定性的)一些生理现象的物理机理(见第一章)。

作为第二个例子, 考察一无限平板在自身平面内振荡运动时附近的流场。取坐标系  $\{x, y\}$ ,  $x$  在平板运动方向上, 上半平面充满流体, 流动满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11-6)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} y = 0: & \quad u(0, t) = U \cos \omega t \\ y \rightarrow \infty: & \quad u \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-7)$$

因方程线性, 可分离变量, 设

$$u(y, t) = \mathcal{R}[e^{j\omega t} f(y)] \quad (11-8)$$

$\mathcal{R}$  表示实部。代入(11-6)得

$$j\omega f = \nu \frac{d^2 f}{dy^2} \quad (11-9)$$

满足无穷远边界条件的唯一解为:

$$f(y) = A \exp\left\{-(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \cdot y\right\} \quad (11-10)$$

代入边界条件(11-7a)得:  $A = U$

$$\therefore u(y, t) = U \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right\} \cos\left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right] \quad (11-11)$$



这种速度剖面相当于一在  $y$  方向传播的阻尼行波，相速度为  $\sqrt{2\nu\omega}$ ，波长为  $2\pi\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ ，振幅衰减系数为

$$\exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right]。$$

因为方程是线性的，因此作任意周期运动的刚性平板附近的流场，均可由(11-11)叠加构成。

第三个例子，考察圆管内的起始流动。流体充满一长直圆管，一开始流体是静止的，从  $t = 0$  时刻开始在管两端突然加上一个压差，它所引起的压力梯度  $-G$  是均匀的，且不随时间变化。取柱坐标，运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{G}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (11-12)$$

边界条件和初始条件为：

$$\left. \begin{aligned} r = R: u = 0, \text{ 任意 } t \\ t = 0: u = 0, 0 \leq r \leq R \end{aligned} \right\} \quad (11-13)$$

因为定常情况下速度剖面满足泊肃叶定律，故可以非定常剖面与泊肃叶剖面之差为新变量：

$$w(r, t) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2) - u \quad (11-14)$$

这样(11-12)变为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \quad (11-15)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} w(R, t) = 0 \\ w(r, 0) = \frac{G}{4\mu}(R^2 - r^2) \end{aligned} \right\} \quad (11-16)$$

方程(11-15)满足壁面边界条件的特解为

$$J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{\nu t}{R^2}\right)$$

$$\therefore w(r, t) = \frac{G}{\Delta\mu} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{\nu t}{R^2}\right)$$

(11-17)

$J_0$  是零阶贝塞尔函数,  $\alpha_n$  是  $J_0(\alpha) = 0$  的正根,  $A_n$  由初始条件确定:

$$R^2 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)$$

$$\therefore A_n = \frac{8R^2}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \quad (11-18)$$

$$\therefore u(r, t) = \frac{G}{\Delta\mu} (R^2 - r^2) - \frac{2GR^2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\times \frac{J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{\nu t}{R^2}\right) \quad (11-19)$$

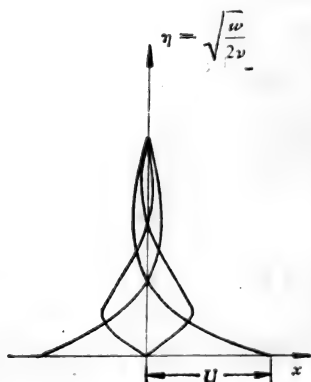


图 2-11 圆管起始流动速度剖面的发展

由此可得诸时刻(以无因次参数  $\frac{vt}{R^2}$  给出)管截面上速度剖面  
 的发展,如图 2-11 示。可见,一开始时整个流体的加速度是  
 $\frac{G}{\rho}$ , 但当速度增高时,壁面约束作用逐渐深入流体,当  $t \sim$   
 $\frac{R^2}{\nu \alpha_1^2}$  ( $\alpha_1 = 2.41$ ) 时,整个管截面上的流体都受到壁面的影响,  
 管心速度不再增长,整个速度分布趋于泊肃叶剖面。

## § 12 低雷诺数流动

人体内低雷诺数流动现象相当普遍。作为入门,这里讨论低雷诺数流动的特征和一般处理方法。

低雷诺数流动的共同特点是:与流体所受粘性力相比,惯性力可以忽略不计,因而流动取决于粘性力和外力(包括压差、体积力)的平衡。这样,方程(10-22)、(10-24)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{p} &= \mu \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (12-1)$$

若引起流动的边界条件只涉及  $\mathbf{u}$ , 则问题变为求下述方程的解,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-2)$$

压力  $p$  则由(10-4)求出。此时

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{u}}{U} &= F_1\left(\frac{\mathbf{x}}{L}, \text{边界条件的几何特性}\right) \\ \frac{p - p_0}{\rho U^2} &= \frac{\mu}{\rho L U} F_2\left(\frac{\mathbf{x}}{L}, \text{边界几何特性}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12-3)$$

若引起流体运动的边界条件以  $p$  的形式给出,则可将(12-1b)变为

$$\nabla^2 p = 0 \quad (12-4)$$

再由(12-1)求出速度场  $\mathbf{u}$ , 此时解的形式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{u}}{U} &= \frac{\rho L U}{\mu} \cdot F_3\left(\frac{\mathbf{x}}{L}, \text{边界几何特性}\right) \\ \frac{p - p_0}{\rho U^2} &= F_4\left(\frac{\mathbf{x}}{L}, \text{边界几何特性}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12-5)$$

Batchelor<sup>[4]</sup>证明, 当惯性力可以忽略时, 一定区域内满足边界上规定的速度分布的流动速度场是唯一的。而且, 对不可压缩流体来说, 惯性可忽略的流动的能量消耗率, 低于同样边界条件下, 惯性不可忽略的流动。

下面讨论几种与生理流动现象有关的粘慢流。

### § 12-1 低雷诺数下物体运动的流场

考察固体颗粒或异种液滴在粘性流体中运动时所受的力和周围的流场, 物体特征尺度为  $d$ , 特征速度为  $U$ , 因  $d$  非常小,  $U$  亦相当低, 故  $Re = \frac{\rho U d}{\mu} \ll 1$ , 其流场可用方程(12-1)

确定。掌握这种流动的规律, 对于血液流变性质、血液红细胞聚集沉降(血沉)、溶血、呼吸道内尘埃颗粒的沉积等问题的研究有重要意义。

设远离物体处流体压力为  $p_0$ , 则(12-1)可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \left( \frac{p - p_0}{\mu} \right) &= \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-6)$$

这里  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  是涡量。由此可得:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p &= 0 \\ \nabla^2 \boldsymbol{\omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-7)$$

取坐标系固联于离物体无穷远处的流体。

对于以速度  $\mathbf{U}$  运动的刚性颗粒, 边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{在物体表面上: } \mathbf{u} = \mathbf{U} \\ |\mathbf{x}| \rightarrow \infty: \mathbf{u} \rightarrow 0, (p - p_0) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (12-8)$$

考虑最简单的情况——刚性球形颗粒, 其半径为  $a$ 。取球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$ , 坐标原点位于球心, 在  $\mathbf{U}$  方向上  $\theta = 0$ 。 $\mathbf{u}$  及  $\frac{p - p_0}{\mu}$  的分布必定对称于通过球心并与  $\mathbf{U}$  平行的轴,  $u_\varphi = 0$ 。因为方程(12-6)与坐标系的选择无关, 故  $\mathbf{u}, \frac{p - p_0}{\mu}$  只是  $\mathbf{x}$  的函数; 又因为方程是线性的, 且边界条件与  $\mathbf{U}$  的关系是线性的, 故  $\mathbf{u}, \frac{p - p_0}{\mu}$  的解也与  $\mathbf{U}$  呈线性关系。又因  $(p - p_0), \omega$  满足拉普拉斯方程, 且在无穷远处趋于 0, 故得解

$$\frac{p - p_0}{\mu} = \frac{C\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \quad (12-9)$$

$$\omega = \frac{C\mathbf{U} \times \mathbf{x}}{r^3} \quad (12-10)$$

$C$  是常数。

引进流函数  $\phi$ , 使得

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (12-11)$$

而

$$\omega_\phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (12-12)$$

应用(12-11)(12-12), 从(12-10)得:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\frac{CU \sin^2 \theta}{r} \quad (12-13)$$

设其解为:

$$\phi = U \sin^2 \theta f(r) \quad (12-14)$$

代入之得:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^2} = \frac{C}{r} \quad (12-15)$$

$$\left. \begin{aligned} r \rightarrow \infty: \frac{f}{r^2} &\rightarrow 0 \\ r = a: f(a) &= \frac{1}{2}a^2 \quad (\because \text{此时 } u_r = U \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (12-16)$$

解之得:

$$f(r) = \frac{1}{2}Cr + Br^{-1} + Kr^{-2} \quad (12-17)$$

由(12-16)得:

$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \\ B &= \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}Ca^2 \end{aligned} \right\} \quad (12-18)$$

由边界条件:

$$r = a: u_\theta = -U \sin \theta$$

得:

$$C = \frac{3}{2}a \quad (12-19)$$

$$\therefore \phi = Ur^2 \sin^2 \theta \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (12-20)$$

所得流线如图 2-12 示。速度场为:

$$\mathbf{u} = U \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} \right) + \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}}{r^2} \left( \frac{2f}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} \right) \quad (12-21)$$

值得指出的是: 忽略惯性效应后, 颗粒运动引起扰动所及的范围相当大, 大  $r$  值下速度以  $\frac{1}{r}$  的形式趋于零。因此边界或其它颗粒的存在必将使流场发生可观的改变。

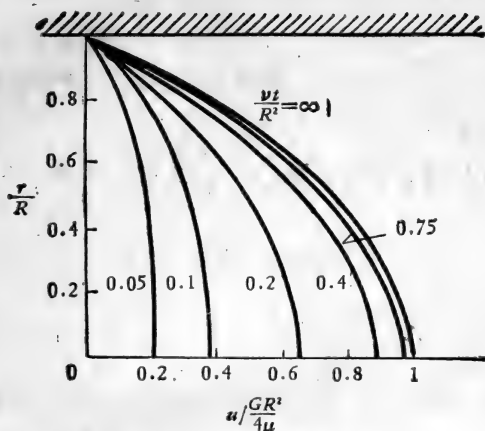


图 2-12 斯托克斯解流场

有了速度场，就可以求出流体作用于颗粒表面的力。单位面积上的力为：

$$\begin{aligned}
 n_j(\tau_{ij})_{r=a} &= n_j \left[ -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]_{r=a} \\
 &= -p_0 n_i - \frac{3\mu U_j}{2a} \quad (12-22)
 \end{aligned}$$

因式中右端第一项是无穷远处流体的压力，对作用于球形颗粒上的总力没有影响。而我们感兴趣的是颗粒在运动方向上所变的阻力  $D$ ，由(12-22)可得：

$$\left. \begin{aligned}
 D &= 6\pi a \mu U \\
 C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{Re} \quad (12-23)
 \end{aligned} \right\}$$

此即著名的斯托克斯公式。

若颗粒质量密度为  $\bar{\rho}$ ，则沉降速度  $V$  由下式给出：

$$\mathbf{V} = \frac{2}{9} \frac{a^2 \mathbf{g}}{\nu} \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho} - 1 \right) \quad (12-24)$$

$g$  为重力加速度。

上述结果是在忽略惯性力的条件下获得的。但是若流场中处处均满足此条件呢？应用所得的解(12-20)可得如下量级估计(在远离颗粒的地方)，

$$\begin{aligned} \rho(-\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) &\sim \left( \frac{\rho U^2 a^2}{r^2} + \frac{\rho U^2 a^2}{r^3} \right) \sim \frac{\rho U^2 a}{r^2} \\ \mu \nabla^2 \mathbf{u} &\sim \frac{\mu U a}{r^3} \\ \therefore \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} &\sim \frac{1}{2} Re \cdot \frac{r}{a} \end{aligned} \quad (12-25)$$

可见当  $Re \ll 1$  时，颗粒附近流场中惯性效应确实可以不计；但当  $r \sim \frac{a}{Re}$  时，惯性力(非定常惯性力)与粘性力同量级，不可忽略。

鉴于此，Oseen 考虑了小雷诺数下非定常惯性力的作用，从下述方程(Oseen 方程)出发求解。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\rho(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12-26)$$

边界条件仍为(12-8)。

对于刚性球形颗粒 Lamb 得如下近似解：

$$\begin{aligned} \psi &= U a^2 \left[ -\frac{1}{4} \frac{a}{r} \sin^2 \theta + 3(1 - \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 - \exp \left\{ -\frac{1}{4} Re (1 + \cos \theta) \frac{r}{a} \right\}}{Re} \right] \end{aligned} \quad (12-27)$$

这里  $Re = \frac{2aU\rho}{\mu} = \frac{dU\rho}{\mu}$ 。当  $r \rightarrow a$  时，(12-27)变为

$$\psi = U a^2 \sin^2 \theta \left\{ -\frac{1}{4} \frac{a}{r} + \frac{3}{4} \frac{r}{a} + U \left( Re \frac{r}{a} \right) \right\}$$



(12-28)

和(12-20)一致。

由(12-27)可见,当  $r \gg \frac{a}{Re}$  时,  $(1 + \cos\theta)$  与 1 相比是小量或者不是小量,流场具有质的差异。此时,在  $(1 + \cos\theta)$  与 1 同量级的地方(如颗粒前方),有

$$\phi \sim Ua^2 \frac{3}{Re} (1 - \cos\theta) \quad (12-29)$$

流动相当于发自球心的源,流出流量约  $\frac{12\pi a^2 U}{Re}$ ;而在颗粒下游,  $(\pi - \theta) \lesssim \sqrt{\frac{8a}{r \cdot Re}}$  处,

$$\phi \sim Ua^2 \frac{6}{Re} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{Re}{8} \frac{r}{a} (\pi - \theta)^2\right\} \right] \quad (12-30)$$

流动相当于流向球心的汇。

按照 Oseen 解,取二级近似,颗粒所受阻力为:

$$\left. \begin{aligned} D &= 6\pi a U \mu \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right) \\ C_D &= \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right) \frac{24}{Re} \end{aligned} \right\} \quad (12-31)$$

## §12-2 缝隙流动-润滑理论

讨论如图 2-3 所示的缝隙内的流动,取坐标系固联于上面的物体,下表面以速度  $U$  沿  $x$  方向运动,上、下表面间夹角为  $\alpha$ ,  $\alpha$  很小,缝隙高度为  $h(x)$ ,  $\frac{dh}{dx} \simeq \alpha$ ,流动定常,压力梯度  $\left(\frac{dp}{dx} = -G\right)$  沿  $x$  方向不变。

若  $\frac{\rho U d}{\mu} \ll 1$ , 则惯性效应可以忽略不计,流动满足下

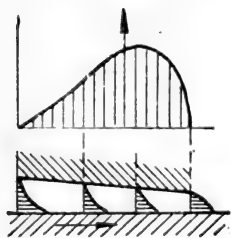


图 2-13 缝隙流动

述方程:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{G}{\mu} \quad (12-32)$$

$$\left. \begin{aligned} y=0: u=U \\ y=h: u=0 \end{aligned} \right\} \quad (12-33)$$

解之得速度剖面:

$$u = \frac{G}{2\mu}y(h-y) + U\left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (12-34)$$

流量为:

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{Gh^3}{12\mu} + \frac{1}{2}Uh \quad (12-35)$$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = -G = 6\mu\left(\frac{U}{h^2} - \frac{2Q}{h^3}\right) \quad (12-36)$$

若  $x=0$  时  $h=h_1$ ,  $p=p_0$ ;  $x=l$  时,  $h=h_2$ ,  $p=p_0$ , 则(12-35)、(12-36)变为:

$$\left. \begin{aligned} Q &= U \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \\ p - p_0 &= \frac{6\mu U}{\alpha} \cdot \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1 + h_2)} \end{aligned} \right\} \quad (12-37)$$

此时作用于上、下边界的法向力(即它所能承受的载荷)均为:

$$F_n = \int_0^l (p - p_0) dx = \frac{6\mu U}{\alpha^2} \left\{ \ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \left( \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right) \right\} \quad (12-38)$$

上表面所受的切向力

$$F_{t1} = - \int_0^l \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} dx = \frac{2\mu U}{\alpha} \left\{ 3 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} - 2 \ln \frac{h_1}{h_2} \right\} \quad (12-39)$$

下表面所受的切向力

$$F_{t2} = \int_0^l \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \frac{2\mu U}{\alpha} \left\{ 3 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} - 2 \ln \frac{h_1}{h_2} \right\}$$

可见  $F_{11} \neq F_{12}$ , 且只有当  $h_2 < h_1$  时, 即流体从宽端流向窄端时,  $(p - p_0) > 0$ , 因而  $F_n > 0$ , 故能承载。这时  $F_{11} > F_{12}$ 。

生理流动中缝隙流问题比此复杂得多, 因为边界(生物材料)不是刚性的, 因而缝隙形状与缝隙内的流动强烈耦合, 必须处理复杂的、非线性的水力-弹性问题。毛细血管内红细胞的运动即为一例。

### §12-3 多孔介质内的渗流

多孔介质内压差驱动的渗流问题, 最初是为认识土壤中地下水流动规律而提出的。其特点是水是通过不同的通道流动的, 而且通道本身是不规则分布的土壤颗粒间隙。

如前所述, 人体重量 70% 是体液, 除血液, 淋巴液、细胞液外, 细胞间隙之间也充满着液体, 它们也是不断地但缓慢地运动的。流动的通道由不规则分布的细胞间隙组成。因而和地下水渗流问题有相似之处, 但更为复杂。因为组织间液和细胞液之间, 组织间液和淋巴液及血液之间, 不断进行物质交换, 涉及到一系列复杂的物理-化学效应; 而且细胞是可变形的, 组织中的肌肉纤维还有能动的收缩等等。尽管如此, 作为借鉴, 土壤中水渗流规律的讨论, 对于认识生物渗流的规律, 依然十分有益。

设间隙特征尺度为  $d$ , 渗流特征速度为  $U$ , 若  $\frac{\rho d U}{\mu} \ll 1$  则

惯性力可以忽略不计, 流动服从方程(12-1)。

由于间隙形状并不确知, 每个间隙内流动速度  $u$  本身是随机的, 因而必须定义一个统计平均的局部速度  $\bar{u}$  来描述渗流流场。在多孔介质内任一点邻近取微元体积, 其线尺度  $l$  远大于间隙线尺度  $d$ , 但远小于流场线尺度  $L$ 。定义该微元

体积内孔隙容积与总体积之比为介质在该点的孔隙度  $\theta(\mathbf{x})$ ，则可定义

$$\bar{\mathbf{u}} = \theta \mathbf{u} \quad (12-40)$$

这样连续方程可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\theta \mathbf{u}) = 0 \quad (12-41)$$

若设想将孔隙通过许多小圆管，则据泊肃叶定律，可以设想  $|\bar{\mathbf{u}}| \propto |\nabla \bar{p}|$ ， $|\bar{\mathbf{u}}| \propto \frac{1}{\mu}$ ，且与整个介质的可渗透性有关，引进渗透性系数  $k$ ，则

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{k}{\mu} \nabla \bar{p} \quad (12-42)$$

此即著名的达西 (Darcy) 定律。系数  $k$  取决于孔隙的形状及大小。对于可变形介质， $k$ 、 $\theta$  是压力  $\bar{p}$  的函数。生物渗流就是如此。

### § 13 高雷诺数流动

当雷诺数很高时，惯性力占主导地位，粘性效应可以忽略不计，流动特性取决于惯性力与外力的平衡。按方程(11-2)  $Re \gg 1$  时，可作为理想流体处理。

但这仅仅是问题的一方面。实际流体都是有粘性的，因此，在固边界上流体运动速度总是等于边界运动速度，此即无滑流条件。这样，除非边界和整个流体介质以同样的速度运动，否则在固边界附近总有一个尺度为  $\delta_0$  的过渡区域，其间流体运动速度从固边界速度逐渐变为无粘流场的速度，在该区域内有涡量扩散，粘性起着重要作用。这一区域称为(粘性)边界层。因此，高雷诺数流场总的特色是：在边界层以外，流动是无粘性的，而在边界层内则必须考虑粘性作用。

为说明边界层概念，讨论图 2-14 所示二维流动，边界曲率很小。取正交坐标系  $\{x, y\}$ ， $x$  沿边界顺流动方向， $y$  与边

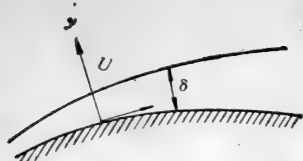


图 2-14 二维边界层概念

界垂直。由于边界层存在，流动  $y$  向尺度为  $\delta_0$ ， $x$  方向尺度为  $L$ ，纵向特征速度为  $U$ ， $y$  向特征速度为  $V$ 。流动连续性要求

$$V = \frac{\delta_0 U}{L} \quad (13-1)$$

这表明流动的法向惯性力与纵向惯性力之比为  $\frac{\delta_0}{L}$ 。若无特定的

的时间尺度，可取  $\frac{L}{U}$  为参考时间，则

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \frac{\rho U^2}{L}$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\mu U}{\delta_0^2}$$

这样，惯性力与粘性力之比为  $\left( \frac{\delta_0}{L} \right)^2 Re$ ，只有当

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_0^2}{L^2} Re &\sim 1 \\ \text{即 } \frac{\delta_0}{L} &\sim Re^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (13-2)$$

时，粘性效应才是不可忽略的。由(13-1)可知； $\frac{V}{U} \sim Re^{-\frac{1}{2}}$ 。

当  $Re \gg 1$  时， $\frac{\delta_0}{L} \ll 1$   $\frac{V}{U} \ll 1$ 。

设

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, \quad y' = Re^{\frac{1}{2}} \frac{y}{L}, \quad t' = \frac{tU}{L} \\ u' &= \frac{u}{U}, \quad v' = Re^{\frac{1}{2}} \frac{v}{U}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2} \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

这样流动方程无量纲化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right] &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \quad (13-4)$$

在高雷诺数( $Re \gg 1$ )时, 取近似即得普朗德尔(Prandtl)边界层方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (13-5)$$

即沿边界层内法向压力分布是均匀的, 等于外部理想流动在该点的压力。

显然, 局部边界层厚度  $\delta$  是  $x$  的函数, 由(13-2)不难推测

$$\delta(x) \propto \left( \frac{\nu x}{U} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13-6)$$

即随  $x$  增大而增厚。

还应指出, 由于边界层厚度取决于粘性扩散, 在  $y$  方向上流速从边界速度到外部理想流场的速度的过渡是渐近的, 因而边界层厚度  $\delta(x)$  具有一定任意性。为此, 引进位移厚度的概念

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (13-7)$$

这里  $U$  是当地理想流场速度,  $u$  是边界层内速度分布。  $\delta_1$  表示粘性效应引起的流线偏移。

如果流体运动在其法向受一封闭固边界的约束, 比如管流, 则由于四周边界层沿流向增长, 无粘流动区域越来越小, 最后整个流动都受粘性效应制约, 这称为充分发展了的粘性流动。从进口 (边界层开始形成) 到四周边界层开始充满整个流动空间这段距离称为进口长度, 这一段流动称为发展中的流动。

人体气管及主动脉中的流动, 在相当一段距离上是发展中的流动, 也存在边界层问题, 但由于流动的脉冲性、边界的可变形性及几何形状复杂, 问题变得很复杂。作为认识这类生理流动现象的入门, 下面简述定常平板边界层及振动边界层的分析方法和结果。

### § 13-1 二维平板定常流动边界层

流动遵循普朗德方程, 压力梯度为零, 故

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} y = 0: & \quad u = 0, \quad v = 0 \\ \frac{y}{\delta_0} \rightarrow \infty: & \quad u \rightarrow U \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq L \quad (13-9)$$

引进流函数  $\phi(x, y)$ ,

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (13-10)$$

并设:

$$\eta = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} y \quad (13-11)$$

因为  $v' = x'^{-\frac{1}{2}} \cdot F(\eta)$ , 故可设

$$\phi(x, y) = (\nu U x)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \quad (13-12)$$

这样

$$u = Uf(\eta) \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U}{x}\right)^{\frac{1}{2}} (\eta f' - f) \quad (13-13)$$

代入(13-8)得

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0 \quad (13-14)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: f = f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: f' \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (13-15)$$

Blasius 首先求出了级数解, 而后又用数值积分方法求出了更准确的  $f$  函数表。根据数值积分结果, 得局部壁面摩擦力为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_w(x) &= 0.33 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \\ \therefore C_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.66 Re_x^{-\frac{1}{2}} \\ Re_x &= \frac{Ux}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (13-16)$$

位移厚度为:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \\ \text{即 } \frac{\delta_1}{x} &= 1.72 Re_x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (13-17)$$

## § 13-2 二维振荡流动边界层

振荡边界层可以是周期性压差引起的周期性流动引起



的,也可以是外力迫使固边界作周期性运动所致,或两种作用的耦合。这里考察最简单的情况,

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right| \gg |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| \quad (13-18)$$

因而,无论边界层内,还是边界层外流动方程都可线性化。任意周期性边界层流动都可看作一系列谐振边界层流动的叠加。

设边界层外部流速为  $\Re[Ue^{j\omega t}]$ ,  $\Re$  表示实部。则按理想流动方程

$$\frac{\partial}{\partial t} [Ue^{j\omega t}] + (Ue^{j\omega t}) \frac{\partial}{\partial x} [Ue^{j\omega t}] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

应用线性化假设,

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (Ue^{j\omega t})$$

这样,边界层方程(13-5)变为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (Ue^{j\omega t}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (13-19)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} y \rightarrow 0: u \rightarrow Ue^{j\omega t} \\ y = 0: u = 0 \end{array} \right\} \quad (13-20)$$

引进

$$w(x, y, t) = Ue^{j\omega t} - u \quad (13-21)$$

则问题变为求无限介质中以当地速度  $\Re[Ue^{j\omega t}]$  振荡的无限平板附近的流场。应用(11-10)得:

$$w = U \exp \left\{ -(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right\}$$

$$\therefore u(x, y, t) = Ue^{j\omega t} \left\{ 1 - \exp \left[ -(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \right\} \quad (13-22)$$

Lighthill 曾将此关系应用于主动脉进口段流动。

### § 13-3 层流与湍流

自然界发生的流动以及工程技术中遇到的流动，有两种截然不同的流动形态。一种流动是规则的，在同样外部条件下，在同一时刻、同一空间位置上，用同样方法测得的流动物理量是一定的(在测量精度范围内)。如果流动是定常的，那么引入染色剂可以观察到规则的染色纤维。这种流动称为层流。另一种流动是不规则的、混乱的，在同样外部条件下，在同一时刻、同一空间位置上，用同样方法测得的流动物理量都不一样，呈现不规则的脉动。如果流动定常，则引入染色剂所观察到的染色图象是杂乱无章的。这种流动称为湍流。

雷诺首先对这两种流动形态作了系统的实验研究，他发现，流动状态的改变主要取决于雷诺数。当雷诺数小于某一值时，流动是层流；而当雷诺数高于某一值时，流动则变为湍流，这个阈值称为转捩雷诺数( $Re_t$ )。

湍流现象和层流现象的差异是十分明显的，但要给湍流下一个确切的、科学的定义却很困难。这里就湍流的物理特性作一简述。

(1)湍流是不规则的，随机的。因此，描述湍流的一切物理量都是某种统计平均值。以速度  $\mathbf{u}$  为例，设任一时-空点  $(\mathbf{x}, t)$  上速度的概率分布为  $P(\mathbf{u})$ ， $P(\mathbf{u})d\mathbf{u}$  是某点  $\{\mathbf{x}\}$  上、某时刻  $(t)$  速度取  $\mathbf{u} - \frac{1}{2} d\mathbf{u} \sim \mathbf{u} + \frac{1}{2} d\mathbf{u}$  之间值的概率，定义该点、该时刻湍流运动的平均速度即为

$$\overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}P(\mathbf{u})d\mathbf{u} \quad (13-23)$$

同样，任何流动物理量  $f$  有

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} fP(f)df \quad (13-24)$$

因此,任一物理量都可分为平均量和脉动量两部分,有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \\ f(\mathbf{x}, t) &= \bar{f}(\mathbf{x}, t) + f'(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right\} \quad (13-25)$$

显然脉动量的统计平均值等于零。

(2) 湍流本身是有旋的、三维的、由无数具有不同尺度的涡元随机叠加而构成的。涡元尺度连续分布,大者与流场(最小的)特征尺度同量级,通过强烈的非线性相互作用,涡元尺度连续变小,随着尺度变小,粘性引起的机械能消耗越来越大,最后在某一尺度 $\eta$ ,机械能完全消耗变为热能, $\eta$ 称 Kormogorov 微尺度,取决于流体的粘度和单位质量流体的能量消耗率 $\epsilon$ ,

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (13-26)$$

$\eta$ 比分子尺度大得多,因此连续性假设依然成立。

(3) 湍流具有强烈的扩散性。流体微团的急剧的随机运动,使质量、动量、能量传输率的提高,要比分子热运动引起的输运能力高几个量级。正是湍流的高动量传输,产生了雷诺应力,它比流体粘性应力高得多。

(4) 湍流的能量消耗率很高。湍流时,流体微元的局部、瞬时应变率很高,故粘性消耗率也很高,需要不断供给能量,湍流才能维持。自然界中湍流的能源有二:一是剪切流动,通过涡旋的非线性作用,不断把平均运动的动能,转化为湍流动能;二是通过温度梯度引起的对流,维持持续的湍流。

(5) 湍流是连续的。其运动依然服从纳维-司托克斯方程和连续方程。按(13-25)将速度、压力等分为平均量和脉动量,代入方程(10-10)(10-4),取统计平均,得湍流运动方程

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (13-27)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) \quad (13-28)$$

$-\rho \overline{u'_i u'_j}$  是湍流脉动引起的、单位面积上的动量传输率,具有应力的量纲,称为雷诺应力,

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (13-29)$$

由于雷诺应力是未知的,故方程组(13-27)(13-28)是不封闭的,这正是分析湍流的困难所在,目前还无法解决,只能依靠一些经验或半经验的关系,来解决一些实际问题。

湍流在自然界和工程问题中是普遍存在的。但生理流动中是否也存在呢?据目前所知的观测结果来看,大的气管中可能发生湍流;主动脉进口处在正常条件下不会发生持续的湍流。可以说,在正常生理范围内,生理流动中湍流是不多见的。但病理状态下,湍流可能发生。而一旦湍流发生,后果将是严重的(详见第八章)。

## § 14 流动分离

流动分离是流体力学中经常碰到的一个概念,生理流动也不例外。但何谓流动分离?怎样确定分离位置?都不易回答。

佐藤浩<sup>[9]</sup>把流动分离和规定流动的边界联系起来,当流动边界从固体边界变为流体边界时,称为流动分离;而当流动边界从流体边界变为固体边界时,称为流动附体。这个定义很直观,而且具有一般性,可包括种种流动分离现象。但这仅仅是一种唯象的描述,无法由此得出判别流动分离位置的准

则,而这一点在流体力学问题中是十分重要的。

下面分别就几种情况进行讨论

### § 14-1 二维或轴对称定常流动分离

经典流动分离概念起源于二维(或轴对称)定常边界层流动。层内流体运动受三个因素支配:(i)主流自边界层外缘进入,使层内流体动量增加;(ii)克服摩擦,不断消耗动量;(iii)外部流动是加速(压力梯度为负)还是减速(压力梯度为正),前者推动边界层内流体向前运动,后者起滞止作用。当边界附近流体微团的动量不足以克服逆压差而被滞止时,流体壅积。为保持流动的连续性,滞止流体必然从壁面脱离,此即流动分离。因此,在分离点上,壁面附近有:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (14-1)$$

对牛顿流体,(14-1)意味着:

$$\tau_w = 0 \quad (14-2)$$

可见,流动分离有两个要素:(i)存在粘性作用;(ii)主流减速。两者缺一不可,Förthinger 的实验(见图 2-15)说明了这一点,图 2-15.

(a)所示的流动,虽然  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ,但因  $x$  方

向无粘性作用,流动不分离。但若沿  $x$  方向插一平板(图 b),则流动立即发生分离。

还可以证明,边界层分离的必要条件是速度剖面有拐点。这是因为,分离只能发生在  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$  的区域,在此区域

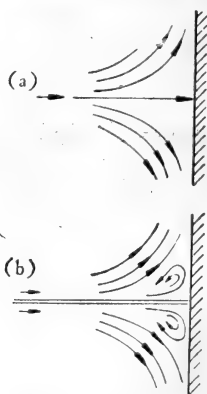


图 2-15 二维流动分离概念

内,按边界层方程,有

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{\rho\nu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

另一方面,  $y = \delta$  时,  $\tau = 0$ , 即  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$ ; 而  $y < \delta$  时,  $\tau > 0$ ,

即  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ ; 故在  $y = \delta$  附近,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  是  $y$  的降函数, 即  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=\delta} < 0$ 。

因而  $0 < y < \delta$  之间, 必有一点  $(y^*) \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=y^*} = 0$ , 此即速度剖面的拐点。当  $y^* = 0$  时, 流动就发生分离。

上述分离概念及准则只适于二维或轴对称定常流动。三维流动分离必须引进新的概念。

## § 14-2 表面流线和三维定常流动分离

为说明三维流动分离, Maskell 引进了表面流线(亦称极限流线)概念。

取坐标如图 2-16 示。表面曲率很小, 因而在  $y = \varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{\delta} \ll 1 \right)$  处,

$$\left. \frac{v}{u} \right|_{y=\varepsilon} \sim 0, \quad \left. \frac{v}{w} \right|_{y=\varepsilon} \sim 0$$

故  $y = \varepsilon$  处流线满足方程:

$$\left( \frac{dz}{dx} \right) = \frac{w}{u}$$



图 2-16 边界层坐标

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 即得表面流线方程

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{w}{u} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 / \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \quad (14-3)$$

$$\therefore \left. \frac{dz}{dx} \right|_{y=0} = \frac{\tau_{wz}}{\tau_{wx}} \quad (14-4)$$

按照质量守恒定律, 流线不能中止于流体之中, 它们或始于无穷、终于无穷, 或形成封闭曲线。因此表面流线必定相遇。这有两种形式: (i) 表面流线收敛并相遇于  $s$ , 在其下游合而为一: 此时, 若  $s$  为边缘点或角点, 则收敛相遇后的流线进入流体, 可自由扩张以保持流动的连续性; 若  $s$  不是边缘点, 则表面流线收敛相遇后, 流管不能自由扩张, 流体壅积, 为维持流动连续性, 合成后的表面流线只能从壁面脱离。(ii) 表面流线相遇于一点, 在其下游再分开, 此时流动附体。

据此 Maskell 提出三维定常流动分离的定义为: 两条(或两条以上)表面流线收敛并相遇于一点(或一条线)。若收敛的表面流线彼此相切, 则为正常分离, 分离线即表面流线的包线, 分离流线面与物面相切; 若收敛的表面流线彼此相交而不相切, 则为奇异分离。二维边界层分离即属后者。

显然, Maskell 的三维流动分离概念无法推广于非定常流, 因为非定常流中流线是随时间而变的。目前, 对于非定常流流动分离的定义还没有确切的数学表达方法, 只能暂时满足于唯象的描述, 而无法建立确切的判据。生理流动中遇到的流动分离问题正是三维、非定常分离。

### 参 考 文 献

- [1] 郭永怀: 边界层理论(讲义), 中国科学院力学研究所, 1963.
- [2] Fung, Y. C.: A. First Course in Continuum Mechanics Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [3] Yih, C. S.: Fluid Mechanics, McGraw-Hill, Book Company, 1969.

- [ 4 ] Batchelor. G. K.: An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Uni. Press, 1970.
- [ 5 ] Fung, Y. C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [ 6 ] Schëlischtig, H.: Grenzschicht-Theorie, G. Braun, Karlsruhe, 1965.
- [ 7 ] Tennekes. H., Lumley, J. L.: A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- [ 8 ] Chang P. K.: Separation of Flow Pergamon, Oxford, 1970.
- [ 9 ] 佐藤浩: 日本航空宇宙学会誌, **20**, 594, 1972.



## 第三章 血液的流变性质

### §1 引言

如第一章§7所述,生理流动不同于传统流体力学问题的根源之一,就在于流体物性异常。

人体生理流动的介质大体有三类,一是气体,如呼吸道内部的流动,和传统流体力学所处理的介质没有什么不同;二是生物大分子稀溶液,溶剂为水,如淋巴液、尿、胆汁等;三是高分子稀溶液与多种细胞构成的悬浮液,血液即属于此,这类流体的物性最为复杂。本章以血液流变特性为代表,说明生理流动的复杂性。

另一方面,由于血液和整个生理活动有密切关系,疾病的病理过程必然会改变血液的生化、物理状态,而这往往会在血液的流变性质上有所反映。例如,急性心肌梗死患者血液的表观粘度,在低切变率下,为正常人的5—10倍<sup>[1]</sup>。因此,血液流变性质的变异,有可能用于某些疾病的诊断和防治。近十多年来,国外从事这方面工作的医生和学者很多,临床血液流变学已成为生物流变学领域的一个重要方面。在国内,近年来也有一些医务工作者试图从血液流变学的角度,来探索中医传统治疗方法——活血化瘀的物理机理。

此外,人工脏器及其他人造代用品的研制,体外循环设备的运行等,必然涉及凝血、溶血等问题。而这些和血液中红细胞、血小板等有形元素与固壁边界之间的相互作用有密切关系。这也是血液流变学的重要课题。

本章着重于从力学观点阐述血液的异乎寻常的流变特性,建立一些定量关系(半经验的),为分析循环系统的流体力学问题、寻求可能供临床应用的血象指标提供必要的基础。

## § 2 血 液

血液由红细胞、白细胞、血小板和血浆组成,红细胞等称为有形元素。全血稍呈碱性, pH 值在 7.35—7.40 之间,比重约为 1.056(4°C)。

血浆占血液总体积的 55% 弱,它是蛋白质、盐类等的水溶液, pH = 7.3—7.5, 比重约 1.024(4°C), 胶体渗透压约为 330 mmHg。血浆中水占 91%(重量百分比), 蛋白质占 7%, 其它有机物和无机物各占 1%, 详见表 3-1

表 3-1 血浆化学组成(mg/100ml)<sup>[1]</sup>

组 分		含 量
蛋 白 质	白蛋白	4800
	球蛋白	2500
	血纤维蛋白原	300
	其它	618
其 它 有 机 物	碳水化合物	577
	有机酸	96
	非蛋白质氮化物	79.5
	自由酯	30
	维生素	28
	激素	0.11
	酶	少量
电解质		745

对血浆力学性质影响最大的是各种蛋白质。其中白蛋白分子量最小,约 69,000,但含量最高,主要作用是调节血浆容

量及 pH 值。球蛋白种类繁多，分子量在 35,000—1,000,000 之间，它主要参与各种反应，如抗体-抗原反应等。血纤维蛋白原是长链大分子，分子量达 1,300,000，但含量最少，在凝血过程中起重要作用。从血浆中把血纤维蛋白原去掉，就是血清。

有形元素占血液体积的 45% 强，各种有形元素的形状、尺寸及含量见表 3-2。

表 3-2 有形元素含量<sup>[3]</sup>

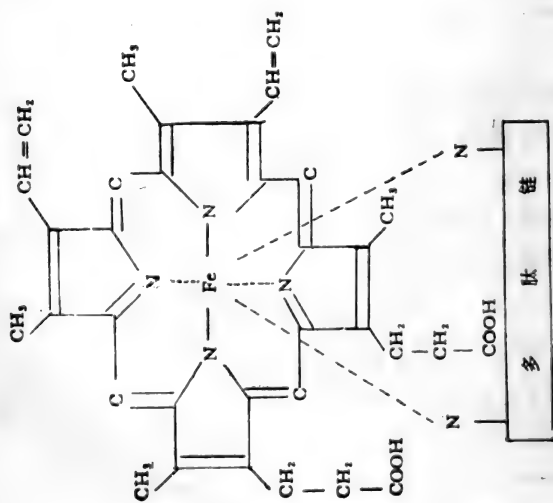
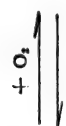
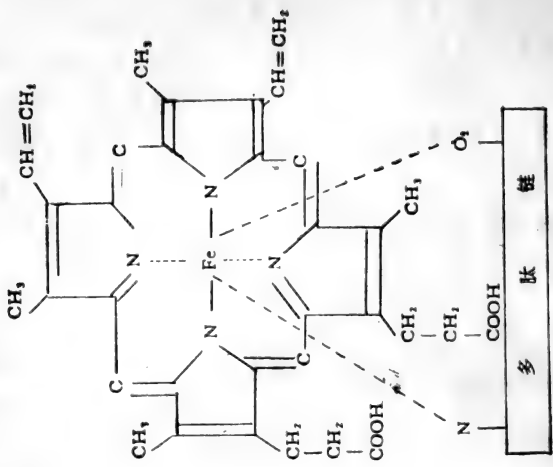
	红细胞	白细胞	血小板
几何形状	双凹圆盘形	球形或蛋形	薄双凸圆盘形
直径 ( $\mu\text{m}$ )	7.65*	10—22	2—4
细胞数量(个/ml)	4.5—5.5 $\times 10^9$	5—10 $\times 10^6$	2.5—5 $\times 10^8$
细胞体积 ( $\mu\text{m}^3$ )	85—100	500—4000	5—10
占血液的体积(%)	45	<0.1	0.3
占有形元素总体积(%)	99.1	<0.2	0.7

影响血液流变性质的主要是红细胞，它可以看作高度可变形的充液弹性薄壳体，细胞膜很薄，约  $3-7 \times 10^{-7} \text{cm}$ ，细胞质是血红蛋白的水溶液，浓度约 33%， $\text{pH} = 7.4$ 。整个红细胞比重约 1.098(4°C)，故血液可看作红细胞与血浆组成的、浮力中性的悬浮液。

红细胞是  $\text{O}_2$  和  $\text{CO}_2$  的载体，这主要靠血红蛋白来完成，它由四个如下图所示的单元组成：

正常情况下，血红蛋白携氧能力是血浆的 60 倍，运载  $\text{CO}_2$  的能力是血浆的 20 倍。

\* 取 Evans 和 Fung<sup>[4]</sup>在 300 mosm 等渗液中测得的平均值。



分子量 68,000

血红蛋白的化学结构

### § 3 血液的非牛顿性状

从流体力学观点来看,血液是有形元素(主要是红细胞)和血浆组成的多相系统。当流场特征尺度(如血管直径)远大于有形元素尺度(红细胞直径)时,可以看作均质的连续介质。其流变行为取决于各相的物性及其间的相互作用。

大量实验证明,血浆可以看作牛顿流体<sup>[5]</sup>,室温下粘度约为 1.2cP(厘泊)。影响血浆粘度的主要是温度和血浆组分。

据 Chmiel<sup>[6]</sup>测量,温度为  $t^{\circ}\text{C}$  时,血浆粘度  $\mu_P$  可按下述经验公式计算:

$$\mu_P = \mu_0 \exp \frac{a(t - t_0)}{(t + b)(t_0 + b)} \quad (3-1)$$

$$\mu_0 = 1.2\text{cP}, t_0 = 23^{\circ}\text{C}, a = 420^{\circ}\text{C}, b = 111^{\circ}\text{C}$$

血浆粘度与蛋白质含量有关, Bayliss<sup>[6]</sup>给出如下经验关系

$$\frac{\mu_P}{\mu_W} = [1 - mc]^{-1} \quad (3-2)$$

$\mu_W$  为水的粘度,  $m$  为常数,  $c$  为血浆蛋白总含量(g/ml)。

各种血浆蛋白中,血纤维蛋白原对粘度的影响最大,它使血浆粘度比血清粘度高约 20%。

与此相对照,血液的流变行为是非牛顿的,主要表现在以下几个方面。

#### § 3-1 应力-应变率关系非线性

如果我们用粘度计来测量血液的流变性质,就会发现在平衡状态下,剪应力  $\tau$  与切变率  $\dot{\gamma}$  的关系是非线性的。若仍用牛顿公式来描述:

$$\tau = \mu_s \dot{\gamma} \quad (3-3)$$

则  $\mu_a$  不是常数。如图 3-1 所示,它随  $\dot{\gamma}$  增大而变小,这种现象称为剪切稀化。此时,  $\mu_a$  不能再看作介质的物性参数,称为表观粘度。

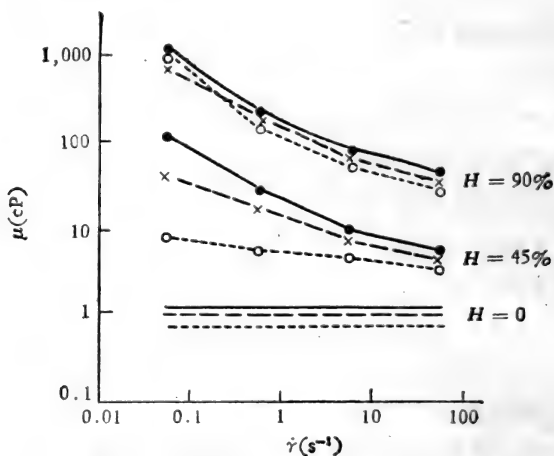


图 3-1 不同  $H$  值下,  $\mu_a$  随  $\dot{\gamma}$  的变化<sup>[7]</sup>

图 3-1 表明: (i) 血液的粘度和红细胞浓度有密切关系, 生理上常用红细胞压积  $H^*$  来表示红细胞浓度。可见  $H$  愈高, 粘度(同样切变率下)愈高, 非牛顿行为愈显著; (ii) 随着  $\dot{\gamma}$  增大, 血液的流变性状渐趋于牛顿流体,  $\mu_a \rightarrow$  常数。正常人血液  $H \sim 0.45$ , 故  $\dot{\gamma} > 100s^{-1}$  时可近似看作牛顿流体。回顾表 1-4 所列人体主要血管中流动的平均切变率, 可见大血管(除腔静脉外)内血液可按牛顿流体处理。

图 3-2 是  $H = 0.44$  时, 人血粘度随温度的变化。同样切变率下, 温度越高, 粘度越大。

\*  $H$  是用离心机, 在一定转速下将红细胞压缩、分离后, 细胞体积占全血的百分比。

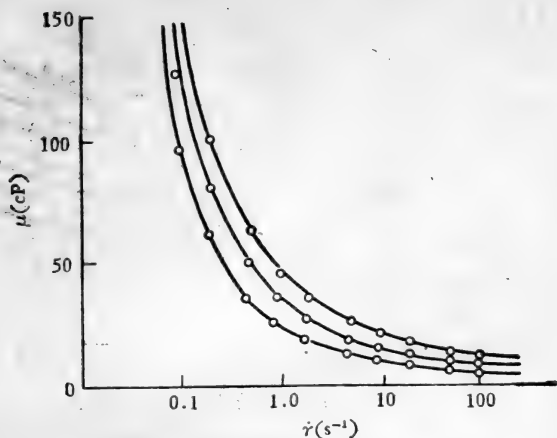


图 3-2 温度对  $\mu_a$  的影响<sup>[8]</sup>  
 自左至右三条线温度分别为 37°C, 20°C, 10°C。

### § 3-2 屈服应力

应变率很低、接近于零时,血液的流变性质是个有趣的问题。Cokelet 等<sup>[9]</sup>用具有快速响应能力的旋转粘度计,测量了转子突然停止时扭矩随时间变化的过程,并将血液的瞬态响应和陶土悬浮液的瞬态响应作了比较,发现二者很相似,而后者已确知具有有限屈服应力。另一方面,若将低切变率下测的  $\tau$ 、 $\dot{\gamma}$  数据绘成  $\sqrt{\tau} - \sqrt{\dot{\gamma}}$  图,外插时不通过原点(如图 3-3 示)。这样所得的屈服应力和 Cokelet 等测得的值一致,在 0.0484—0.0586 dyn/cm<sup>2</sup> 之间。

Merrill 等<sup>[10]</sup>用毛细粘度计证明,毛细管中的血液可以承受一定的压力梯度而没有显著的流动,这个压力差和 Cokelet 测得的屈服应力一致。

以上实验结果表明,血液具有屈服应力  $\tau_y$ , 只有当所受

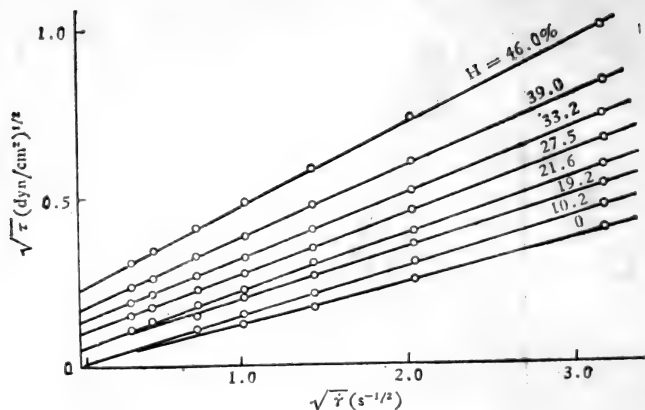


图 3-3  $\sqrt{\tau} - \sqrt{\dot{\gamma}}$  曲线及其外插结果<sup>[9]</sup>

应力高于此值时,才会发生流动。但钱煦等<sup>[7]</sup>认为血液没有屈服应力,应力-应变率曲线经适当处理,可以外插通过原点。

### § 3-3 Casson 方程

图 3-3 表明,在相当宽的  $\dot{\gamma}$  范围内,  $\sqrt{\tau} - \sqrt{\dot{\gamma}}$  线性相关,即血液的流变性质可用下述方程近似地描述:

$$\tau^{\frac{1}{2}} = k\dot{\gamma}^{\frac{1}{2}} + k_0 \quad (3-4)$$

因为  $\dot{\gamma} = 0$  时,  $\tau = \tau_y$ , 故  $k_0 = \sqrt{\tau_y}$ , (3-4) 可改为:

$$\tau^{\frac{1}{2}} = k\dot{\gamma}^{\frac{1}{2}} + \tau_y^{\frac{1}{2}} \quad (3-5)$$

(3-5) 称为 Casson 方程。

Scott-Blair 曾将 Casson 方程与大量实验数据作了比较,结果表明,只要适当选取  $k$  和  $\tau_y$ , 在相当宽的  $H$  值及流动切变率范围 ( $1 - 10^5 \text{s}^{-1}$ ) 内, Casson 方程和测量数据相当一致,但低于  $1 \text{s}^{-1}$  时,用 Casson 方程不佳。

在一定温度下,  $k$  主要取决于  $H$  及血浆粘度  $\mu_p$ , Merrill 等<sup>[10]</sup> 得如下经验关系:



$$k = (1 - H)^{\frac{-(c\beta - 1)}{2}} \sqrt{\mu_P} \quad (3-6)$$

$c$  是与红细胞方位分布有关的参数,  $\beta$  则与红细胞串轴比、流动切变率关系有关, 通常取  $\frac{1}{2}(c\beta - 1) = 0.4655$ 。

$\tau_y$  取决于  $H$  及血浆中血纤维蛋白原的浓度  $c_F$  (gm/100 ml), Merrill 等<sup>[10]</sup>根据实验结果(见图 3-4)得:

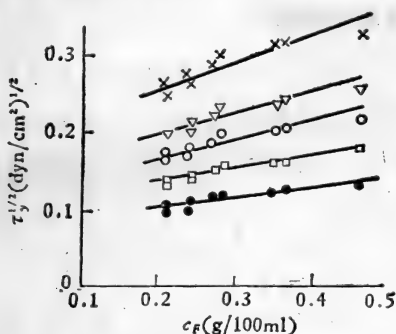


图 3-4  $\tau_y$  与  $c_F, H$  关系<sup>[10]</sup>

$$\tau_y^{\frac{1}{2}} = (H - 0.10)(c_F + 0.5) \quad (3-7)$$

此式适用范围为:  $H > 0.10$ ,  $0.21 < c_F < 0.46$  (gm/100ml)。

### § 3-4 假塑性流体模型

从测量结果来看, 平衡状态下血液也可以当作具有屈服应力的假塑性流体,  $\tau - \dot{\gamma}$  服从以下方程

$$\tau = K \dot{\gamma}^n + \tau_y \quad (3-8)$$

$K, n, \tau_y$  由实验确定。近来, Walbrum<sup>[11]</sup>根据 200 个人血样试验的结果, 用多重回归分析得以下经验关系:

$$K = c_1 \exp \left[ c_2 H + c_4 \frac{f}{H^2} \right] \quad (3-9)$$

$$n = 1 - c_3 H \quad (3-10)$$

$$\tau_y = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$$

$f$  为除白蛋白以外的血浆蛋白的含量 (gm/100ml), 在 C.G.S 制中, 常数取值如下:

$$c_1 = 0.0797 \quad c_2 = 0.0608$$

$$c_3 = 0.00499 \quad c_4 = 145.585 \text{ dl/gm}_0 \quad (1 \text{ dl} = 100 \text{ ml})_0$$

与 Casson 方程相比, (3-8) 有其方便之处, 但目前应用较广的仍是 Casson 方程。

### § 3-5 血液的粘弹性

Thurston<sup>[12-15]</sup>、钱煦<sup>[16]</sup>等在非定常流动条件下, 观测了血液的流变性状, 发现血液具有粘弹性, 即应力不仅取决于当地瞬时应变率, 且与历史过程有关。这时血液的力学性质可以用动力粘度  $\mu_d$  来表示,

$$\mu_d = \mu' - j\mu'' = \mu e^{-i\phi} \quad (3-11)$$

$\mu'$  为粘性分量,  $\mu''$  为弹性分量。

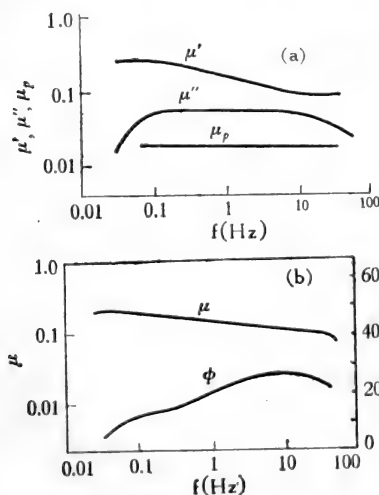


图 3-5<sup>[6]</sup>  $\mu, \phi$  随频率的变化  
0.001S; (iv)  $\mu_d$  与  $H$  密切相关。

图 3-5 是钱煦等用锥板粘度计测得的典型结果, 频率范围:  $6.0 \times 10^{-4} - 60 \text{ Hz}$ 。结果可见: (i) 频率低于 0.1 Hz 时, 弹性分量  $\mu'' \rightarrow 0$ , 粘性分量趋于静态表观粘度  $\mu_s$ ; (ii) 频率高于 0.1 Hz 时,  $\mu', \mu''$  均随频率增高而增大, 在 0.1—50 Hz 范围内,  $\mu''$  不容忽视; (iii) 松弛时间谱相当宽, 在 0.5—50 Hz 之间, 松弛时间变化范围为 0.5—

生理上，血流都是非定常的，应该计及血液的粘弹性。为简化，分析大血管流动时通常不计粘弹性。但血管较小时（如冠状动脉），血液粘弹性效应似应考虑。

### § 3-6 Fåhræus-Lindqvist 效应

等截面直圆管内，牛顿流体定常层流服从泊肃叶定律，流量  $Q$  与压差  $\Delta p$  满足：

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad (3-12)$$

$L$  为管长， $R$  为内半径。

对均质非牛顿流体圆管定常层流，可假设它遵从(3-12)，通过测定  $\Delta p$ 、 $Q$  来确定表观粘度  $\mu_a$ ，所得  $\mu_a$  与管径无关。

但血液的流动性质却与此不同，如图 3-6 示，当  $(2R) > 1\text{mm}$  时， $\mu_a$  与  $R$  无关，但当  $(2R) < 1\text{mm}$  时， $\mu_a$  随  $R$  变小而降低，这就是有名的 Fåhræus-Lindqvist 效应。

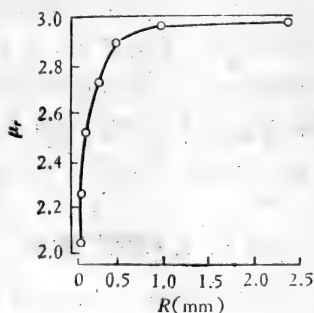


图 3-6  $\mu_a$  与管径的关系<sup>[1]</sup>

Barbee 和 Cokelet<sup>[18]</sup>的实验证明，Fåhræus-Lindqvist 效应在内径为  $29\mu\text{m}$  的小管内依然存在。

造成这种现象的物理原因，在于血液不是均质流体，而是有结构的。当流场尺度足够大时，微结构的运动并不直接影响宏观流动；但当流场尺度小于某一值（譬如说，管径小于  $1\text{mm}$ ）时，微结构与边界的相互作用就会直接影响流动特性。这将在第九章中详述。

\* \* \*

综上所述，血液流变实验告诉我们：

(1) 管径大于 1mm 时, 血液可以看作均质非牛顿流体, 有屈服应力, 有粘弹性。但当频率低于 0.1Hz 时, 粘弹性可忽略, Casson 方程可作为良好的近似。

(2) 管径大于 1mm、流动切变率高于  $100\text{s}^{-1}$  时, 血液可近似看作牛顿流体。

(3) 管径小于 1mm 时, 血液不能看作均质流体。

## § 4 血液非牛顿性状的若干说明

任何多相系统的力学性质取决于: (i) 离散的有形元素的浓度、尺寸、形状、变形能力以及表面物理、化学性质; (ii) 连续相的物理、化学性质, 尤其是粘性; (iii) 离散的有形元素之间的相互作用, 有形元素与连续相之间的相互作用。因此, 要说明血液非牛顿行为的原因, 必须考察血浆剪切流中, 红细胞的形态、变形、运动以及各种相互作用。

### § 4-1 红细胞的聚集

图 3-7 是静止状态下血液的微结构, 红细胞在血浆中成串, 并形成网络。这种网络结构具有一定的强度, 只有当切应力高于其强度时, 网络被破坏, 血液才会流动。此即血液屈服应力的来由。

当流动切变率较低时, 红细胞依然成串地结合而存在, 此现象称为聚集, 聚集体呈缙钱状。聚集的机理还不清楚, 但有一点是肯定的, 集合体的大小和形状, 取决于细胞表面大分子的引力、表面静电作用、氢键作用和流动剪应力四者的平衡。当应力增大时, 聚集体逐渐裂解, 尺寸变小, 因而表观粘度亦减小。当应力达到一定值 (约  $2\text{dyn}/\text{cm}^2$ , 相当于  $\dot{\gamma} \simeq 50\text{s}^{-1}$ ) 时, 缙钱状结构几乎完全裂解为单个红细胞, 应力-应变关系

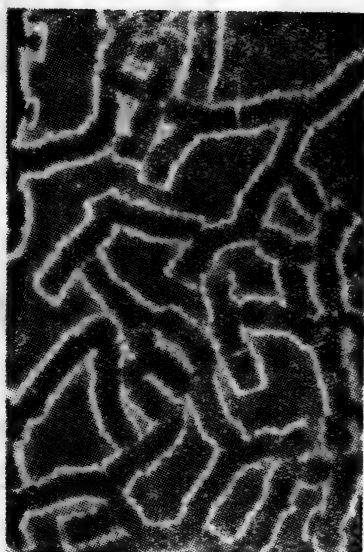


图 3-7 静止状态下血液的网络结构<sup>[3]</sup>

亦渐趋于线性。

为查明红细胞聚集对血液粘度的影响，钱煦<sup>[19]</sup>测量了正常血液 (NP)、正常红细胞在含 11% 白蛋白介质中的悬浮液 (NA) 以及固化红细胞在含 11% 白蛋白的介质中的悬浮液 (HA) 的粘度，介质粘度都是 1.2cP，所得结果用相对粘度  $\mu_r$  表示，

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_p} \quad (4-1)$$

正常红细胞在含 11% 白蛋白的介质中不聚集，故图 3-8 中，

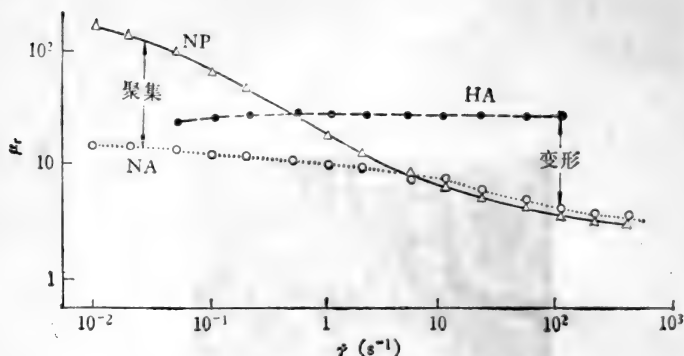


图 3-8 相对粘度 $\mu_r$ 随 $\dot{\gamma}$ 的变化<sup>[67]</sup>

低切变率 ( $\dot{\gamma} < 50\text{s}^{-1}$ ) 时 NP 曲线与 NA 曲线的差异反映了红细胞聚集作用对血液粘度的影响, 可见  $\dot{\gamma} > 50\text{s}^{-1}$  时, 这种影响即趋消失。

以上是静态性状。当应力从一个状态变为另一状态时, 细胞串达到相应的统计平衡尺度需要一定时间, 此即松弛时间。钱煦等<sup>[46]</sup>分别测量了全血和红细胞单体悬浮液的粘弹性, 典型结果见图 3-9。可见细胞浓度很高时 ( $> 80\%$ ), 二者的  $\mu''$  值趋于一致; 当浓度不太高时, 二者  $\mu''$  值差异很大。这种差异是红细胞聚集所致。

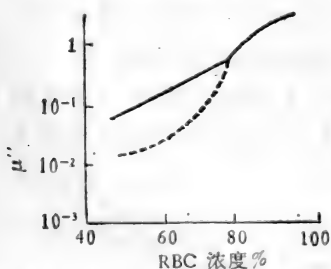


图 3-9 全血(—)和红细胞单体悬浮液(---)弹性系数 $\mu''$ 与浓度的关系<sup>[46]</sup>

由此看来, 红细胞聚集是低切变率下血液非牛顿行为的主要原因。

#### § 4-2 红细胞及细胞串的变形

一旦血液流动, 红细胞及细胞串就在流体动力作用下变

形。据观察,应力很小( $\sim 10^{-7}$  dyn/cm<sup>2</sup>)时,细胞串象柔性纤维一样弯曲;当应力达 1 dyn/cm<sup>2</sup> 时,红细胞就有明显的变形。这种变形需要一定的能量和时间,因而影响血液的粘性和弹性。

在流动切变率较高,细胞串完全裂解的情况下,红细胞的变形能力决定了它的形变、体积以及应力改变时形状改变的速率,从而决定了血液粘度和松弛时间。

钱煦<sup>[9]</sup>用戊二醛使红细胞固化,测量了它的悬浮液的粘度(图 3-8 中 HA 曲线),可见此时粘度不随切变率改变,且粘度高于 NA 及 NP (当  $\dot{\gamma} > 1\text{s}^{-1}$ )。切变率较高时,HA 线与 NP 线的差异说明了红细胞变形对血液粘度的影响。

另外,据观测当红细胞从细针管射出后,形状恢复到自然状态所需时间约为  $\frac{1}{3}$  秒,这和高切变率下血液的松弛时间同

量级。

以上实验说明:红细胞变形是切变率较高时血液流变性状的决定因素。

#### § 4-3 红细胞的相对运动

血液流动时,红细胞除了和血浆一起作平均运动外,还有相对于血浆的运动,包括移动、转动和布朗运动。这些运动引起细胞与血浆之间的相互作用,从而影响血液的宏观力学性质。不仅如此,红细胞运动还和红细胞之间的相互作用有关,这表现在:(i) 每个红细胞的运动都以其余红细胞的存在和运动为边界条件,即每个红细胞的运动都受到其余红细胞流场的影响,而它自身诱导的流场又影响别的红细胞的运动。(ii) 细胞碰撞时的能量和动量交换取决于碰撞细胞的动量、动量矩和能量,亦和细胞运动的轨迹、相对方位等有关。

Goldsmith<sup>[20,21]</sup>等用血影细胞 (ghost cell) 法细致观察了泊肃叶流中红细胞串及红细胞的运动和变形, 典型结果如图 3-10 示。

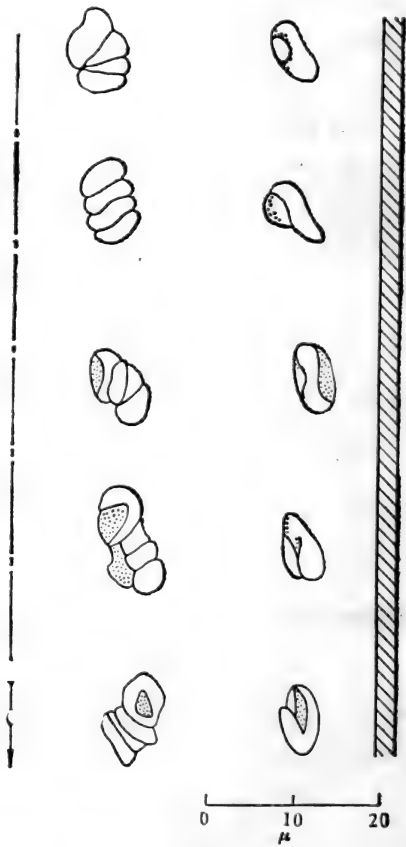


图 3-10 红细胞在泊肃叶流中的旋转与变形<sup>[21]</sup>

图 3-11 是正常红细胞、固化红细胞的方位角  $\phi$  (主轴和流动方向间的夹角) 随流动平均切变率的变化, 图中实线是  $r_c = 0.38$  的刚性圆盘方位角与平均切变率的理论关系。显



然,当切变率提高时,红细胞主轴趋于和流动方向一致。而固化红细胞的行为则和刚性圆盘相似,  $\phi < 20^\circ$  的概率与流动切变率无关。这说明刚性颗粒在剪切流中方位大体上不变,而红细胞由于其可变形,当切变率较高( $\dot{\gamma} > 100\text{s}^{-1}$ )时,主轴大体上取流动方向。

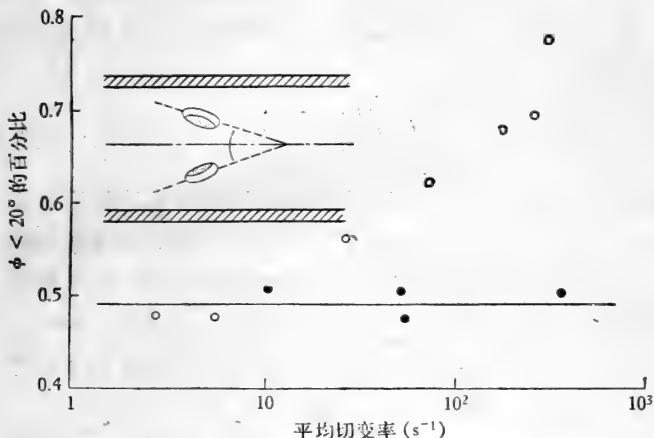


图 3-11 红细胞方位角 $\phi$ 分布随平均切变率的改变<sup>[20]</sup>

布朗运动的影响主要是改变红细胞移动的轨迹,并使细胞旋转轴方位发生摄动。

#### § 4-4 有形元素间的相互作用

有形元素之间的相互作用包括:

(1) 每个有形元素的诱导流场间的干扰,这是一种远距离作用。

(2) 有形元素相互碰撞引起的动量、能量交换以及迁移扩散。据估计,  $\dot{\gamma} = 20\text{s}^{-1}$  时,碰撞引起的血小板的迁移扩散,比布朗运动引起的扩散率高两个数量级,这使血小板与管壁

碰撞的概率大大增加。

(3)范德瓦耳斯引力、表面静电作用及长链大分子的连接作用,这些只有当有形元素间距极小时,才起作用,且与血浆的物理、化学性质有密切关系。

对于碰撞来说,一个重要参数是碰撞频率 $f$ 。考虑最简单的情况,设有形元素为半径等于 $b$ 的刚性小球, $b$ 远小于流场尺度,且浓度很低,因而只发生二体碰撞,则在泊肃叶流中碰撞频率为:

$$f = \frac{32}{3} \dot{\gamma} \cdot n \cdot b^3 \quad (4-2)$$

$\dot{\gamma}$ 是不存在有形元素时,当地流场的切变率, $n$ 是单位体积内有形元素的数目。作为例子,McDonald曾估算过在内径为2mm的动脉中,平均速度为15cm/s时,红细胞、血小板的碰撞概率为1%。 $b$ 分别取 $2.4\mu\text{m}$ 、 $1.2\mu\text{m}$ ,且只有一种有形元素存在,这时按(4-2)算出红细胞、血小板的碰撞频率分别为 $4.4 \times 10^8$ 和 $2.7 \times 10^8$ 。

实际情况远为复杂,不是简单的刚体碰撞,更不是二体碰撞。

#### § 4-5 血浆因素

除了血浆粘度直接影响全血粘度外,血浆对血液流变性质的影响还表现为以下三方面。

##### 1. 血浆蛋白质影响红细胞的聚集能力

这有两种作用。一是起搭桥作用,加强聚集能力,这主要是血纤维蛋白原所致,球蛋白次之;二是改变红细胞表面的电特性,血纤维蛋白原、球蛋白等接近于中性,它们包围红细胞,削弱红细胞表面之间的静电斥力,促进聚集;而白蛋白带负

电,加强排斥作用,削弱聚集。

## 2. 血浆渗透压影响红细胞的力学性质

红细胞膜两侧的渗透压差一定程度上决定了它的形状和尺寸,并影响膜弹性,从而改变红细胞的变形能力,其作用相当复杂。

(1) 血浆渗透压升高时,红细胞内部液体粘度增大,变形阻尼增大。反则相反。

(2) Ponder 根据测量结果得红细胞体积  $V_c$  与悬浮介质渗透压之间的经验关系为:

$$\frac{V_c}{V_{iso}} = \text{const} \times \left[ \frac{1}{J} - 1 \right] + 1 \quad (4-3)$$

$V_{iso}$  是等渗条件下红细胞体积,  $J = \frac{\text{血浆渗透压}}{\text{等渗液渗透压}}$ 。在高渗

溶液中  $J > 1$ , 故  $V_c < V_{iso}$ , 故单位体积内红血球数目相同时,  $H$  变小, 粘度亦降低; 反之, 在低渗条件下, 红细胞数目不变时,  $H$  增大, 粘度也增大。

(3) Rand 和 Burton 实验表明, 高渗溶液中膜变形能力降低, 因而粘度增大; 低渗液中则相反。

显然, (1) 和 (2)、(3) 的影响相反, 哪个占优势, 尚无定论。按 Meiselman 实验, 单位体积内红细胞数目不变时, 从高渗到低渗,  $\tau_y$  增大而  $\mu_a$  降低; 但据 Dintenfass 测量, 高渗和低渗时,  $\mu_a$  均高于等渗。

## 3. 血浆 pH 值影响

按 Dintenfass 测量<sup>[1]</sup>, pH 值在 6.85—7.35 范围内, 当 pH 值升高时, 表观粘度降低。

## § 5 血液的本构方程

血液流变学的中心课题之一,就是建立血液的本构方程。处理这个问题的方法有三种:

(1) 把血液看作均质的连续介质,通过一些简单的实验,建立应力与应变率的经验关系。然后借助于一些不变性原理将它推广于一般情况。这类方程除了经验性外,应用时还受到流场尺度的限制。

(2) 把血液看作具有微结构的连续介质,用微极性流体理论处理,其问题是引进了一系列物理意义不甚明确又无法测定的系数。

(3) 以各种刚性颗粒、弹性颗粒或液滴作为红细胞的模型,把血液看作这些颗粒在牛顿流体中的悬浮液,分析颗粒与悬浮介质之间、颗粒之间的流体力学相互作用,取统计平均,把宏观流变性状和微结构联系起来。这种方法的困难在于:(i)红细胞的力学性质不确定,其他物理、化学作用更不清楚;(ii)多颗粒系统的流体力学问题高度非线性,迄今尚未解决。但是,如果作一些简单的近似,这种分析方法有助于我们认识血液异常流变性质的物理本质,并为建立合理的经验本构方程提供线索。

本节介绍用方法一所得的一些半经验结果。§ 6 和§ 7 分别介绍方法二、三,重点在于阐明方法,而不是提供结论。

### § 5-1 定常状态

定常状态下血液是非牛顿粘性流体,弹性可以不计。§ 3-4、§ 3-5 通过简单剪切流动实验,建立了切应力与切应变率之间的经验关系。这些关系能否、怎样推广应用于一般流动?

我们知道,本构方程是介质物性的客观描述,因而与坐标系的选取无关。故要将(3-4)或(3-8)推广于一般,只消将它们写成适当的张量形式即可。

在生理条件下血液是不可压缩的,而且除非切变率很低,血液流变行为偏离牛顿流体并不太远,因此,很自然设想把不可压牛顿流体的本构方程略作修改,用于血液。

不可压缩牛顿流体的本构方程为

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (5-1)$$

$\mu$  为常数,

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ e_{ii} &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

$u_i$  为流动速度。

血液的粘性与应变率有关,故其本构方程可写为:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij})e_{ij} \quad (5-3)$$

$\mu(e_{ij})$  是  $e_{ij}$  的标量函数,应与坐标选择无关,故可写成应变不变量的函数:

$$\mu = \mu(I_1, I_2, I_3) \quad (5-4)$$

这里  $I_1, I_2, I_3$  是应变不变量。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{33} & e_{31} \\ e_{13} & e_{11} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

按(5-2),  $I_1 = 0$ ;  $I_3$  一般很小,可以不计,故  $\mu = \mu(I_2)$ 。但  $I_2$  通常为负,使用不便,故引进新的不变量  $J_2$ 。

$$J_2 = 3I_1^2 - I_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad (5-6)$$

这样(5-3)可写为:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(J_2)e_{ij} \quad (5-7)$$

$\mu(J_2)$ 由经验关系确定。

若用 Casson 方程,则因简单剪切流中除  $e_{12} \neq 0$  外,其余分量均为 0, 故

$$J_2 = e_{12}^2, \text{ 而 } \dot{\gamma} = 2e_{12}$$

$$\therefore \dot{\gamma} = 2\sqrt{J_2} \quad (5-8)$$

按(5-7),此时有

$$\tau_{12} = \mu(J_2) \cdot 2\sqrt{J_2} \quad (5-9)$$

由(3-4)可得:

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= [k\dot{\gamma}^{\frac{1}{2}} + \tau_y]^2 \\ \therefore \mu(J_2) &= \frac{[k(2\sqrt{J_2})^{\frac{1}{2}} + \tau_y]^2}{2\sqrt{J_2}} \end{aligned} \quad (5-10)$$

此时血液本构方程为:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{[k(2\sqrt{J_2})^{\frac{1}{2}} + \tau_y]^2}{\sqrt{J_2}} \cdot e_{ij} \quad (5-11)$$

方程(5-11)适用于  $J_2 \neq 0$ , 且不太大的时候, 若  $J_2$  很大, 则  $\mu = \text{常数}$ 。

若用 Walbrum 经验方程(3-8),则方程(5-7)中  $\mu(J_2)$ 变为:

$$\mu(J_2) = \frac{K \cdot (2\sqrt{J_2})^n + \tau_y}{2\sqrt{J_2}} \quad (5-12)$$

所有常数  $k, K, n, \tau_y$  均用 § 3 中的值。

## § 5-2 非定常状态

实际上血液是粘弹性流体,在非定常情况下,弹性效应会显示出来。这方面的研究远不如血液粘性充分,即使在简单

条件下,也还没有一个公认的经验关系可遵循,只能借鉴于其他非牛顿流体的粘弹性模型。

多年前,Fröhlich 和 Sack 用胡克弹性小球和牛顿流体组成的悬浮液,做了一系列简单剪切流动试验,得以下经验关系

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{12} = 2\mu_0 \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) e_{12} \quad (5-13)$$

$\mu_0$  是悬浮液的静态粘度,  $\lambda_1$  是应力松弛时间,  $\lambda_2$  是弹性迟后时间。

Oldroyd<sup>[24,25]</sup> 应用客观性原理将(5-13)推广于一般,得弹性小球悬浮液的本构方程。

$$\begin{aligned} \tau_{ij} + \lambda_1 \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tau_{kj} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tau_{ik} \right) \\ = 2\mu_0 e_{ij} + 2\mu_0 \lambda_2 \left( \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} e_{kj} \right. \\ \left. - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} e_{ik} \right) \end{aligned} \quad (5-14)$$

若计及小球有限变形引起的弹性非线性效应,则取二级近似可得:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} + \lambda_1 \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tau_{kj} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tau_{ik} \right) \\ + \nu_0 \tau_{kk} e_{ij} - \nu_1 (\tau_{ik} e_{kj} + \tau_{ki} e_{ik}) + \nu_2 \tau_{kl} e_{kl} \delta_{ij} \\ = 2\mu_0 e_{ij} + 2\mu_0 \lambda_2 \left( \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} e_{kj} \right. \\ \left. - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} e_{ik} \right) - 2\nu_3 e_{ik} e_{ki} + \nu_4 e_{kl} e_{kl} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5-15)$$

这里  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  是附加时间常数。

如果把弹性颗粒(有限变形)-牛顿流体组成的悬浮液当

作血液的模型(这是合理的),那么血液的粘弹性行为就可以用 Oldroyd 方程(5-15)来描述。最早提出这一看法的是 Phyllips<sup>[26]</sup>。最近, Deutsch<sup>[27]</sup> 等用上述模型求出了 Couette 粘度计起动过程中流动的数值解,再现了实验时观测到的瞬时过载现象。

应该指出,分析血液流动时,大都不考虑血液的弹性,一者那样做太复杂,再者,在正常循环生理条件下,血液的粘弹性似乎并不重要;但在病理条件下,可能十分重要。因此,血液粘弹性的研究主要是寻求灵敏、可靠的血液流变物性质参数,以供临床应用。

## § 6 血液的微连续介质模型

为了在连续介质前提下,计及血液中有形元素相互作用的影响,有人试图将 Eringen 等提出的微结构理论 (microstructural theory) 应用于血液。

按照连续介质微结构理论,空间任一点上,介质运动速度等于该点邻近某一小区内微结构运动速度的统计平均值。这个区域的尺度与流场特征尺度相比很小,但与微结构尺度相比却很大。流场中任一点上的速度梯度规定了整个流体运动的宏观旋度和应变率,但是,当地有形元素的旋转角速度、应变率却不等于该点流场的宏观角速度和应变率。因而,应力是不对称的,存在偶应力。这样就可以在连续介质运动方程中,直接计入有形元素相对运动及变形对于宏观流动的作用。

种种微连续介质模型中,最简单的是微极性流体,它只计及微结构旋转及转动惯量对宏观流动的影响。血液非牛顿性在低切变率下最为显著,此时,红细胞变形的影响不大。



Mahalingam 和 Poon<sup>[28]</sup>从热力学观点论证,有形元素的旋转角速度是个重要参数。因此,可用微极性流体作为血液的模型。这时,为描述血液流动,除连续方程、运动方程外,还需要动量矩方程,因为应力张量不对称。所以,基本方程为:

$$\text{连续方程} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6-1)$$

$$\text{运动方程} \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (6-2)$$

动量矩方程:

$$\rho r^2 \frac{D\omega_i}{Dt} = \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} + 2\eta_1(\Omega_i - \omega_i) + \rho \Phi_i \quad (6-3)$$

这里,  $\{\omega_i\}$  为流体角速度,  $\{\Omega_i\}$  为有形元素旋转角速度,  $f_i$  是作用于单位质量流体的体积力,  $\Phi_i$  是相应的体积力矩,  $\{M_{ik}\}$  为偶应力,  $r$  是有形元素的旋转半径。  $\{\tau_{ik}\}$ 、 $\{M_{ik}\}$  满足下述本构方程:

$$\tau_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\eta_0 e_{ik} + \eta_1(\Omega_j - \omega_j) e_{ikj} \quad (6-4)$$

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & i, k, j \text{ 以顺序 } 1, 2, 3 \text{ 循环} \\ -1, & i, k, j \text{ 以顺序 } 1, 3, 2 \text{ 循环} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$M_{ik} = \eta_2 \left( \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) + \eta_3 \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \quad (6-5)$$

$\eta_0$  相当于通常的粘性系数,  $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta_3$  均为物性常数。

用微极性流体作模型处理血液流动时,主要问题在于:

(1) 引进了五个物性常数:  $\eta_0$ 、 $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta_3$ 、 $r$ , 其中除  $\eta_0$  外, 物理意义不甚明确, 很难用实验方法确定。

(2)  $\omega$ 、 $\Omega$  的边界条件难于确知。通常设固定边界上  $\omega = 0$ ,  $\Omega = 0$ 。但观测表明, 固边界邻近  $\Omega$  不一定消失。故

Tuck 和 Ariman 设边界上  $|\mathbf{\Omega}| = \text{常数}$ , 但  $\nabla \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ ; 而 Kang 则假设边界上  $\mathbf{\Omega} = \varepsilon \boldsymbol{\omega}$ ,  $\varepsilon$  为未知常数。

(3) 只有当微结构尺度  $l \left[ l \sim \left( \frac{\eta_3}{4\eta_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$  与流场尺度  $L$  相比很小时, 理论才有效。当  $l \sim L$  时(如毛细血流)时, 微极性流体模型失效。

(4) 用微极性流动理论无法解释壁面附近有形元素的径向迁移现象。

Kang、Eringen 及 Popel<sup>[30]</sup>等针对问题(4)作了改进, 引进有形元素浓度  $c$ , 并把它和有形元素的转动、偶应力场联系起来。

$$\rho \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \quad (6-6)$$

$$q_k = a_{kj} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + b_{kj} (\text{rot} \mathbf{\Omega})_k \quad (6-7)$$

$\phi$  为化学势, 它服从下述方程:

$$\beta \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \rho D_j \left( \frac{\partial c}{\partial x_k} + D_p \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \quad (6-8)$$

$D_j$  是扩散系数,  $D_j \cdot D_p$  是压力梯度引起的迁移。 $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$ ,  $\beta$  为物性参数。

相应地方程(6-3)中,  $M_{ik}$  代之以  $\tilde{M}_{ik}$ ,

$$\tilde{M}_{ik} = M_{ik} + M'_i \quad (6-9)$$

$M_{ik}$  仍由方程(6-5)给出,  $M'_i$  则和  $c$  有关:

$$M'_i = f_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + d_{ik} (\text{rot} \mathbf{\Omega})_k \quad (6-10)$$

$f_{ik}$ ,  $d_{ik}$  为常数。

应用上述修正, 原则上可以预计有形元素与边界相互作用引起的迁移, 但  $c-\mathbf{\Omega}$  关系带有任意性, 且引进了许多难以

测定的物性系数。

目前,对于用微连续介质模型来处理血液流动问题的前景,存在争议。

## §7 有关血液的两相系统模型

比较理想的血液模型,是把它当作充液、大变形弹性薄壳颗粒和牛顿流体组成的两相系统。但是,除了红细胞物性外,用这种模型处理血液流动所遇到的数学障碍,目前尚不能逾越。因此,不得不退而求其次,用刚性或胶性颗粒或液滴作为红细胞膜模型,对血液流变性状的某些方面进行定量分析。这里主要介绍分析问题的方法。

### §7-1 能量法

设有一均质流体系统,当观测距离比颗粒(固态的或液态的)尺寸大得多时,它和某一悬浮系统的运动一样;但当观测距离和颗粒尺度同量级时,二者运动有显著不同。这种均质流体系统称为该悬浮系统的运动等效系统,它代表悬浮系统的宏观运动。

若外力使悬浮系统所作的功率为  $W$ ,而使纯流体等效系统运动所消耗的功率为  $W_0$ ,显然,

$$W^* = W - W_0 \quad (7-1)$$

是颗粒存在引起的附加的机械能损耗率。现定义悬浮系统的粘度为  $\mu$ ,有:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{W}{W_0} = 1 + \frac{W^*}{W_0} \quad (7-2)$$

$\mu_0$  是运动等效系统流体的粘度。

由于颗粒很小,其动能可以不计;若认为系统不受体积力

影响,位能不变。这样,外力所作的功等于流体界面上的应力功。设悬浮系统速度场为  $u_i$ , 应力场为  $\tau_{ij}$ , 压力场为  $p$ ; 相应的等效系统的速度、应力、压力场为  $u_i^{(0)}$ 、 $\tau_{ij}^{(0)}$ 、 $p^{(0)}$ 。系统边界面积为  $S_0$ , 第  $n$  个颗粒表面积为  $S_n$ , 体积为  $\sigma_n$ , 总的流体界面面积为  $S_0 + \Sigma S_n$ ; 则悬浮系统机械能消耗率为

$$W = \int_{S_0 + \Sigma S_n} \tau_{ij} u_i dS_j \quad (7-3)$$

$$i, j = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, \dots, N_0$$

$N$  为边界内所含颗粒的总数。

相应的纯流体等效系统的能耗率为

$$W_0 = \int_{S_0} \tau_{ij}^{(0)} u_i^{(0)} dS_j \quad (7-4)$$

因为两个系统宏观运动一样, 故在边界面  $S_0$  上  $u_{ij} = u_{ij}^{(0)}$ , 故

$$W = \int_{S_0 + \Sigma S_n} \tau_{ij} u_i^{(0)} dS_j + \int_{\Sigma S_n} \tau_{ij} [u_i - u_i^{(0)}] dS_j$$

应用互易原理(见[31]):

$$\int_{S_0 + \Sigma S_n} \tau_{ij} u_i^{(0)} dS_j = \int_{S_0 + \Sigma S_n} \tau_{ij}^{(0)} u_i dS_j \quad (7-5)$$

这样, 颗粒存在引起的附加能耗率为

$$W^* = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{S_n} \tau_{ij}^{(0)} u_i dS_j + \int_{S_n} \tau_{ij} [u_i - u_i^{(0)}] dS_j \right\} \quad (7-6)$$

设第  $n$  个颗粒移动速度为  $U_n$ , 旋转角速度为  $\Omega_n$ , 中心矢径为  $r_n$ , 则该颗粒表面上流体运动速度为:

$$u = U_n + \Omega_n \times r_n \quad (7-7)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{S_n} \hat{\tau}^{(0)} \cdot u \cdot dS &= \left[ \int_{S_n} \hat{\tau}^{(0)} \cdot dS \right] \cdot U_n \\ &\quad - \left[ \int_{S_n} (\hat{\tau}^{(0)} \times r_n) \cdot dS \right] \cdot \Omega_n \end{aligned} \quad (7-8)$$

这里  $\hat{\tau} = \{\tau_{ij}\}$ 。

在空间  $\sigma_n$  内  $\hat{\tau}^{(0)}$  无奇点, 且因颗粒雷诺数很小, 惯性力可

忽略,即

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(0)} = 0$$

故应用高斯定理可得:

$$\begin{aligned} \int_{S_n} \hat{\mathbf{t}}^{(0)} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_{\sigma_n} \nabla \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(0)} d\sigma = 0 \\ \int_{S_n} (\hat{\mathbf{t}}^{(0)} \times \mathbf{r}_n) \cdot d\mathbf{S} &= - \int_{\sigma_n} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{t}}^{(0)} \times \mathbf{r}_n) d\sigma \\ &= - \int_{\sigma_n} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{t}}^{(0)}) \times \mathbf{r}_n d\sigma = 0 \\ \therefore W^* &= \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \hat{\mathbf{t}} \cdot [\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(0)}] \cdot d\mathbf{S} \quad (7-9) \end{aligned}$$

(7-9)表明: 由于颗粒绕流雷诺数很小, 因而使颗粒移动、旋转所作的功可以忽略不计, 附加能耗产生于使颗粒附近流体变形所作的功。

这样求悬浮系统粘性的问题就归结为怎样用(7-9)求出  $W^*$ , 这因具体模型而异。

考虑最简单的情形——球形刚性颗粒稀悬浮液。设球半径为  $a$ , 平均间距  $l$ , 流场特征尺度  $L$ 。假设: (i)  $\frac{a}{l} \ll 1$ ,  $\frac{l}{L} \ll 1$ ; (ii) 颗粒间相互作用可忽略不计; (iii) 颗粒绕流雷诺数很小, 惯性可忽略; (iv) 颗粒表面无滑流。这样, 流体运动满足下列方程:

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (7-10)$$

$$\nabla p - \mu_0 \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (7-11)$$

$\mu_0$  是悬浮介质粘度。边界条件是: 在第  $n$  个颗粒表面上

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_n \quad (7-12)$$

不计颗粒间相互作用, 故求解时只要求满足任一颗粒表面的边界条件。Lamb 给出了上述问题的解(见文献[31]), 将这个解代入(7-9)积分之得

$$W^* = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{4\pi a^3}{3} e_{ij_n}^{(0)} e_{ij_n}^{(0)} \right\} \quad (7-13)$$

$e_{ij_n}^{(0)}$  是纯流体等效系统中与第  $n$  个颗粒相应处的应变率。显然, 等效系统相应于该颗粒处单位体积内局部能耗率为:

$$\Phi_n^{[0]} = e_{ij_n}^{(0)} e_{ij_n}^{(0)} \quad (7-14)$$

$$\therefore W^* = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n \cdot \Phi_n^{(0)} \quad (7-15)$$

若颗粒体积浓度为  $\phi$ , 则(7-15)可写作:

$$W^* = \frac{5}{2} \int_{\sigma_0} \phi \Phi^{[0]} d\sigma \quad (7-16)$$

$$\therefore \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2} \frac{\int_{\sigma_0} \phi \Phi^{[0]} d\sigma}{\int_{\sigma_0} \Phi^{[0]} d\sigma} \quad (7-17)$$

如果颗粒均匀分布,  $\phi = \text{常数}$ , 则

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2} \phi \quad (7-18)$$

如果颗粒分布不均匀, 则可取平均体积浓度  $\bar{\phi}$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\sigma_0} \int_{\sigma_0} \phi d\sigma \quad (7-19)$$

这样可得:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2} \bar{\phi} \quad (7-20)$$

(7-18)就是有名的爱因斯坦公式。

## § 7-2 颗粒间的相互作用

上述分析没有考虑颗粒之间的相互作用, 实际上即使浓度很低, 颗粒间的流体力学干扰也不能忽视。作为第一步, 先

讨论  $N$  个颗粒在无界粘性流体中运动时的相互作用, 这种相互作用取决于颗粒形状和大小、颗粒间距、颗粒相对方位、颗粒相对于悬浮介质的移动速度和旋转角速度、颗粒转轴相对于系统宏观运动方向的方位等。

忽略惯性力, 颗粒绕流服从方程(7-10) (7-11), 颗粒表面无滑流, 所不同的是对任一颗粒求解时, 必须同时在所有颗粒表面满足无滑流条件,

$$\mathbf{u}|_n = \mathbf{U}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7-21)$$

到目前为止, 只有当  $N = 2$  且为球形颗粒时, 上述定解系统才有准确解。当  $N > 2$  或  $N = 2$  但非球形颗粒时, 找不到一个坐标系, 能使全部边界条件同时满足。只能逐次叠代求近似解。

设

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{u}^{(3)} + \dots \\ p &= p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$

$\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)}$  满足方程(7-10)(7-11)及无穷远处的边界条件。现以颗粒 1# 为例来说明求解方法。

令  $\mathbf{u}^{(1)}, p^{(1)}$  在颗粒 1# 表面满足边界条件

$$\mathbf{u}^{(1)}|_1 = \mathbf{U}_1 \quad (7-23)$$

其余  $(N - 1)$  个颗粒对场  $\mathbf{u}^{(1)}$  的扰动为

$$\mathbf{u}^{(2)} = \sum_{k=2}^N \mathbf{u}_k^{(2)} \quad (7-24)$$

$\mathbf{u}^{(2)}$  满足方程((7-10)(7-11)及颗粒  $k$  表面边界条件:

$$\mathbf{u}_k^{(2)} = \mathbf{U}_k - \mathbf{u}^{(1)} \quad (7-25)$$

颗粒 1# 引起的场  $\mathbf{u}^{(2)}$  的扰动  $\mathbf{u}^{(3)}$ , 代表颗粒 1# 与其它所有颗粒相互作用的一级效应。 $\mathbf{u}^{(3)}$  亦服从方程(7-10)(7-11), 且在颗粒 1# 表面上满足条件

$$\mathbf{u}^{(3)}|_1 = -\mathbf{u}^{(2)}|_1 \quad (7-26)$$

依次取颗粒 2、3、… $N$ ，即得整个系统内颗粒相互作用的一级近似。以此类推，可得任意级近似。对于球形颗粒稀悬浮系统，考虑颗粒间流体动力相互作用的一级效应后可得：

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \alpha_0 \phi + \alpha_1 \phi^2 + \alpha_2 \phi^3 + \dots \quad (7-27)$$

$$\alpha_0 = 2.5, \alpha_1 = 14.1, \dots$$

从(7-27)出发，Ford 总结了一系列实验结果，得刚性颗粒稀悬浮系统粘性的一般公式：

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1 - \alpha \phi} \quad (7-28)$$

$\alpha$  是颗粒形状决定的，对球  $\alpha = 2.5$ 。

### § 7-3 刚性颗粒浓悬浮系统

假如颗粒碰撞、聚集等效应可以不计，则§ 7-2 所述方法原则上亦可用于高浓度悬浮系统，但不胜其繁。有两种简化方法。

#### 1. Simha-Happel 方法

当颗粒表面积之和远大于系统边界表面积时，边壁的影响可以不计。因颗粒数量很大，且随机分布，故可认为对每个颗粒来说，只有邻近颗粒才会明显地影响其运动，其它颗粒的作用由于它们的随机性近乎抵销。这样，可假设半径为  $a$  的任一球形颗粒的流体动力效应仅限于以它为中心的  $a < r < b$  的球壳区域内， $r = b$  是无摩擦的流体界面，其上流动法向速度为 0。进而设该区域内颗粒体积浓度和整个系统一样，

$$\therefore \phi = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (7-29)$$

在区域  $a < r < b$  内，流体运动服从方程(7-10)、(7-11)、



(7-21),且在  $r = b$  处满足

$$u \frac{r}{r} = 0 \quad (7-30)$$

据此, Happel<sup>[31]</sup>得:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 5.5\phi \quad (7-31)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{4\beta^7 - \frac{84}{11}\beta^2 + 10}{10(1 - \beta^{10}) - 25\beta^3(1 - \beta^4)} \\ \beta &= \frac{a}{b} = \phi^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (7-32)$$

## 2. Brinkman 方法

另一种更为一般的方法是把悬浮系统看作稀悬浮系统颗粒浓度逐步增加的结果,每次增量为  $\delta\phi$ ,每增加一个  $\delta\phi$  都把原来的系统看作是粘度为  $\mu(\phi)$  的均质流体。由于  $\delta\phi$  很小,新系统的粘度可用稀悬浮系统的方法处理。

设稀悬浮系统的粘度为

$$\mu(\phi) = \mu_0 [1 + g(\mu_0, \dots) \cdot \phi] \quad (7-33)$$

$g(\mu_0, \dots)$  是  $\mu_0$  等参数的已知函数。当颗粒体积浓度增加  $\delta\phi$  时,把原系统看作均质流体,则新系统的浓度为  $\frac{\delta\phi}{1 + \delta\phi}$ ,而实际浓度为  $\phi^*$

$$\phi^* = \frac{\phi + \delta\phi}{1 + \delta\phi} \quad (7-34)$$

按 Brinkman 方法

$$\mu(\phi^*) = \mu(\phi) \left[ 1 + g \frac{\delta\phi}{1 + \delta\phi} \right] \quad (7-35)$$

$$\therefore d\mu = \mu(\phi^*) - \mu(\phi) = \mu(\phi) \cdot g \frac{\delta\phi}{1 + \delta\phi}$$

而颗粒浓度增量为

$$d\phi = \phi^* - \phi = \frac{(1 - \phi)\delta\phi}{1 + \delta\phi}$$

$$\therefore \frac{d\mu}{d\phi} = \frac{\mu(\phi)g(\mu_0, \dots)}{1 - \phi} \quad (7-36)$$

解此方程,即可得浓悬浮系统的粘度。

若以刚性球形颗粒组成的浓悬浮系统为例,按爱因斯坦公式(7-18),  $g = 2.5$

$$\therefore \frac{d\mu}{\mu} = \frac{2.5d\phi}{\phi} \quad (7-37)$$

因为  $\phi = 0$  时,  $\mu = \mu_0$ , 故

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (7-37)$$

此即 Cokelet 公式。

#### § 7-4 Burger 法

从物理上来看,悬浮系统的粘度应该是系统运动时,颗粒与悬浮介质之间及颗粒之间动量传输的统计变量。它固然和机械能的消耗密切相关,但二者并不等价。因此,能量法只能提供悬浮系统粘度的部分信息。准确的本构关系,应该直接从颗粒和悬浮介质的运动方程出发,求统计平均而建立。此法最早由 Burger 提出。

纯流体等效系统流场任一点的速度等于悬浮系统内相应点附近某一体积  $\Sigma$  内,颗粒运动速度的平均值。 $\Sigma$  的尺度远小于流场特征尺度,但远大于颗粒尺度。设  $\Sigma$  的表面积为  $S$ , 含有  $N$  个颗粒,第  $n$  个颗粒表面积为  $S_n$ , 体积为  $\sigma_n$ ; 流体所占体积为  $\Sigma'$ , 其界面表面积为  $S'$ 。这样,任一物理量  $q$  有两种平均值

$$\left. \begin{aligned} \langle q \rangle &= \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} q d\sigma \\ \bar{q} &= \frac{1}{\Sigma'} \int_{\Sigma'} q d\sigma' \end{aligned} \right\} \quad (7-38)$$

设悬浮介质运动速度为 $\{u_i\}$ ，密度为 $\rho_0$ ；颗粒速度为 $\{v_i\}$ ，密度为 $\rho_p$ ；流体应力为 $\{\tau_{ij}\}$ ，单位质量体积力为 $\{f_i\}$ ，则悬浮介质运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma'} \rho_0 u_i d\sigma &= f_i \int_{\Sigma'} \rho_0 d\sigma + \int_{\Sigma'} \tau_{ij} dS_j \\ &+ \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \tau_{ij} dS_j \end{aligned} \quad (7-39)$$

第 $n$ 个颗粒运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\sigma_n} \rho_p v_i d\sigma &= f_i \int_{\sigma_n} \rho_p d\sigma - \int_{S_n} \tau_{ij} dS_j \\ \frac{D}{Dt}, \frac{d}{dt} &\text{为 } S', S_n \text{ 不变时的时间导数。} \end{aligned} \quad (7-40)$$

按(7-38)取平均，由(7-39)(7-40)可得：

$$\begin{aligned} (1 - \phi) \rho_0 \frac{Du_i}{Dt} + \phi \rho_p \left\langle \frac{dv_i}{dt} \right\rangle \\ = [(1 - \phi) \rho_0 + \phi \rho_p] f_i + \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma'} \tau_{ij} dS_j \\ + \frac{1}{\Sigma} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \tau_{ij} dS_j \end{aligned} \quad (7-41)$$

如果悬浮介质是牛顿流体，则(7-41)变为：

$$\begin{aligned} \rho_0 (1 - \phi) \frac{Du_i}{Dt} + \phi \rho_p \left\langle \frac{dv_i}{dt} \right\rangle \\ = [(1 - \phi) \rho_0 + \phi \rho_p] f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\mu_0 \bar{e}_{ij} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (7-42)$$

$\{\mathcal{T}_{ij}\}$ 是悬浮颗粒产生的诱导应力张量，

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{\Sigma} \sum_{n=1}^N \int_{s_n} (\tau_{ij} + \bar{p}\delta_{ij} - 2\mu_0 \bar{e}_{ij}) dS_j \quad (7-43)$$

$\bar{p}$ 、 $\bar{e}_{ij}$ 满足下述关系

$$\left. \begin{aligned} \int_{s'} a \bar{p} dS &= \int_{s'} a p dS \\ \int_{s'} a \bar{e}_{ij} dS &= \int_{s'} a e_{ij} dS \end{aligned} \right\} \quad (7-44)$$

欲从(7-42)导出悬浮系统的本构方程，需将诱导应力张量及惯性项用  $\langle p \rangle$ 、 $\langle u_i \rangle$ 、 $\phi$  等表示，这取决于具体的颗粒模型。Lew<sup>[32]</sup>给出了刚性球形颗粒的解。此时有：

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_{ij} &= 3\phi\mu_0 \bar{e}_{ij} \\ \langle \rho \rangle &= (1 - \phi)\rho_0 + \phi\rho_p \end{aligned} \right\} \quad (7-45)$$

这样(7-42)变为：

$$\langle \rho \rangle \frac{D\langle u_i \rangle}{Dt} = \langle \rho \rangle f_i + \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{1 + \frac{3}{2}\phi}{1 - \phi} \nabla^2 \langle u_i \rangle \quad (7-46)$$

$$\therefore \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1 + \frac{3}{2}\phi}{1 - \phi} \quad (7-47)$$

当  $\phi$  很小时，(7-47)与爱因斯坦公式很接近。

## § 7-5 胶性颗粒悬浮系统

鉴于红细胞聚集对血液流变性质影响重大，可以把血液当作胶性颗粒悬浮系统。观测表明，低切变率下，红细胞聚集集体呈串状；而且，在定常条件下，细胞串尺寸随流动切变率改

变。作为血液的模型,可按 Smoluchowski 胶体絮凝理论,假设每一颗粒有一个大小一定的影响区域,其外的颗粒不影响该颗粒的运动;但一旦进入该区域,立即就粘结成链状体。与此同时,流体切应力使链裂解,尺寸变小。因此,在一定切变率下,链的尺寸具有一定分布,亦即具有一定的统计平均尺寸。由此可导出系统的本构方程。

作为一个例子,介绍冈小天模型<sup>[33]</sup>。设颗粒间由键连接成链状组织,在切应力  $\tau$  作用下,单位体积内有  $n$  个键。 $\tau$ — $n$  遵从下述微分方程:

$$-\frac{dn}{n} = A_1 \frac{d\tau}{(\tau + \theta)^\alpha} \quad (7-48)$$

$A_1$ 、 $\theta$ 、 $\alpha$  均为常数,  $\alpha < 1$ 。

因为  $\tau$  与  $\dot{\gamma}$  是一一对应的,故相应于(7-48),  $n$  与剪应变率  $\dot{\gamma}$  之间有:

$$-\frac{dn}{n} = A_2 \frac{d\dot{\gamma}}{(\dot{\gamma} + \epsilon)^\alpha} \quad (7-49)$$

$$\therefore \frac{d\tau}{(\tau + \theta)^\alpha} = k \frac{d\dot{\gamma}}{(\dot{\gamma} + \epsilon)^\alpha} \quad k = \frac{A_2}{A_1} \quad (7-50)$$

积分之,得:

$$\left. \begin{aligned} (\tau + \theta)^{1-\alpha} &= k_0 + k(\dot{\gamma} + \epsilon)^{1-\alpha} \\ k_0 &= \theta^{1-\alpha} - k_1 \epsilon^{1-\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (7-51)$$

$k_1$ 、 $\theta$ 、 $\alpha$ 、 $\epsilon$  均为常数。

(7-51)可视为 Casson 方程的一般化。若取  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\theta = 0$ ,

$\epsilon = 0$ ,即假定链的轴比(=  $\frac{\text{长度}}{\text{直径}}$ )与切变率的平方根成正比,则

方程 (7-51)变为 Casson 方程

## § 7-6 低切变率下血液非牛顿行为的简单理论分析

Murata<sup>[35]</sup>用简单的胶性颗粒模型分析了低切变率下血液

的流变性状。假设：(i)红细胞是半径为  $a$  的小球。(ii)颗粒两两相碰，在相碰的一刹那，粘结形成聚集体，其形状是轴比为  $k$  的旋转椭球。在低剪切率下， $k \gg 1$ 。(iii)在流动剪切作用下，聚集体可裂解为相等的两部分(iv)不考虑布朗运动的影响。

设  $n(k)dk$  是单位体积内、轴比在  $k-k+dk$  之间的颗粒的数目， $n(k)$ 是连续函数。单位体积内颗粒总数为  $N$

$$N = \int_0^{\infty} n(k)dk \quad (7-52)$$

若系统是均匀的，那么颗粒平均轴比  $\langle k \rangle$  为：

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} kn(k)dk \quad (7-53)$$

按假设(ii)(iii)，单位体积内轴比为  $k$  的聚集体的数目的变化遵循下列方程：

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = & \frac{1}{2} \int_0^k K(k-k', k')n(k-k')n(k')dk' \\ & - \int_0^{\infty} K(k, k')n(k)n(k')dk' \\ & + \int_k^{\infty} W(k, k')n(k')dk' \\ & - \frac{1}{2} \int_0^k W(k, k')n(k)dk' \end{aligned} \quad (7-54)$$

$K(k, k')$ 是轴比为  $k$  和  $k'$  的颗粒相碰的概率密度， $W(k, k')$ 是轴比为  $k$  的颗粒裂解为轴比为  $k'$  及  $(k-k')$  的颗粒的概率密度。显然，按假设(iii)，有

$$W(k, k') = W(k, k-k') \quad (7-55)$$

方程(7-54)右端第一项表示由于较小的颗粒碰撞，轴比为  $k$  的颗粒的增长率；第二项是  $k$  颗粒和其他颗粒碰撞而减

少的数目；第三项是较大颗粒裂解而引起的  $k$  颗粒的增长；第四项则是剪切裂解引起  $k$  颗粒的减少率。

问题在于如何确定  $K(k, k')$  及  $W(k, k')$ 。Murata 用 Smoluchowski 的结果作为其近似，在  $k \gg 1$  的条件下，求得：

$$\left. \begin{aligned} K(k, k') &= \frac{4\alpha\lambda BT}{3\mu_0} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) + \frac{32}{3} \lambda^3 a^3 \dot{\gamma} \\ W(k, k') &= \beta \dot{\gamma} \cdot \delta \left( k' - \frac{k}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-56)$$

$\delta \left( k' - \frac{k}{2} \right)$  是以  $\left( k' - \frac{k}{2} \right)$  为变量的狄喇克 (Dirac) 函数； $B$

是玻耳兹曼常数； $T$  是绝对温度； $\lambda$  是每个颗粒的作用半径，其余颗粒一旦进入此范围，立即粘结形成新的颗粒； $\alpha$  是数值常数； $\beta$  是表示裂解程度的参数，它和红细胞表面吸附的大分子数目有关。

将(7-56)代入(7-54)，在定常状态下求积得

$$-\frac{8\alpha\lambda BT N_0}{3\mu_0} \frac{1}{\langle k \rangle} \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle - \frac{32\lambda^3 a^3 \dot{\gamma} N_0}{3\langle p \rangle} + \beta \dot{\gamma} = 0 \quad (7-57)$$

这里：

$$N_0 = \int_0^{\infty} k n(k) dk$$

$$\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \frac{1}{k} n(k) dk$$

求  $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$  很困难，取近似，设

$$\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle \approx \frac{1}{\langle k \rangle} \quad (7-58)$$

这样(7-57)变为：

$$\langle k \rangle^2 - \frac{8\lambda^3 \phi}{\pi\beta} \langle k \rangle - \frac{2\alpha\lambda \phi BT}{\pi\beta a^3 \mu_0 \dot{\gamma}} = 0 \quad (7-59)$$

$\phi$  为颗粒体积浓度, 显然

$$\phi = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot N \quad (7-60)$$

解方程(7-59)得:

$$\langle k \rangle = \frac{\lambda^3}{2} \left( \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon M}{\lambda^5}} \right) \quad (7-61)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{8\phi}{\pi\beta} \\ M &= \frac{\alpha BT}{a^3 \mu_0 \dot{\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (7-62)$$

低剪切率下方程(7-61)可简化为

$$\langle k \rangle = \frac{\lambda^3}{2} \left[ \varepsilon + \left( \frac{\varepsilon \alpha BT}{\lambda^5 a^3 \mu_0 \dot{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7-63)$$

有了颗粒的平均轴比 $\langle k \rangle$ , 就可以把胶性颗粒悬浮系统看作轴比为 $\langle k \rangle$ 的刚性椭球与牛顿流体组成的悬浮系统。首先考虑低浓度情况, 按 Eisenschitz 分析, 有

$$\tau = \mu_0 [1 + f(\langle k \rangle) \cdot \phi] \dot{\gamma} \quad (7-64)$$

$$f(\langle k \rangle) = 2 + \frac{\frac{k}{\pi} - 1}{\ln(2k) - 1.5} \quad (7-65)$$

当  $\dot{\gamma} \ll 1$  时,  $\langle k \rangle \gg 1$ , 取近似得

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \mu_0 [1 + g(\mu_0, \varepsilon) \phi] \dot{\gamma} \\ g(\mu_0, \varepsilon) &= \frac{A\lambda^3}{2} \left[ \varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon M}{\lambda^5}} \right] + C \end{aligned} \right\} \quad (7-66)$$

$A, C$  均为常数。

应用 Brinkmann 方法, 将(7-66)推广于浓悬浮系统, 即得

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\mu_0}{(1 + \phi)^{\alpha_1}} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left[ (1 - \phi)^{-\frac{\alpha_1}{2}} - 1 \right] \dot{\gamma}^{\frac{1}{2}} \quad (7-67)$$



$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{A}{2} \frac{\alpha \lambda \varepsilon B T}{a^3} \\ \alpha_1 &= \frac{A}{2} \lambda^3 \varepsilon + C \end{aligned} \right\} \quad (7-68)$$

这样,在低切变率下,血液的本构方程可写为:

$$\tau^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\mu_0}{(1-\phi)^{\alpha_1}} \right]^{\frac{1}{2}} \dot{\gamma}^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left[ (1-\phi)^{-\frac{d_1}{d_2}} - 1 \right] \quad (7-69)$$

此方程形式上和 Casson 方程一样,只是系数不同。

### § 7-7 液滴悬浮模型

无论刚性颗粒模型,还是胶性颗粒模型,都没有考虑红细胞的变形能力,而红细胞是高度可变形的,即令体积浓度高达 90% 以上,依然具有良好的流动性。鉴于此,有人设想以悬浮液滴来模拟红细胞的行爲。

设液滴为球形,本身粘度为  $\mu_i$ , 当浓度很低时,悬浮系统的粘度由泰勒(Taylor)公式给出

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 2.5\phi\psi \quad (7-70)$$

$$\psi = \frac{\nu + 0.4}{\nu + 1} \quad \nu = \frac{\mu_i}{\mu_0}$$

用 Brinkmann 方法将(7-70)推广于高浓度情况,则

$$\frac{\mu}{\mu_0} = (1-\phi)^{-2.5\psi} \quad (7-71)$$

Dintenfass 基于上述设想,综合许多实验的结果,提出以下经验方程

$$\frac{\mu}{\mu_0} = (1 - a\phi H)^{-2.5} \quad (7-72)$$

这里  $H$  是红细胞压积,  $a$  表示红细胞聚集的影响,  $\phi$  则为与切变率  $\dot{\gamma}$  有关的经验函数

$$\phi = c_1 - c_2 \lg \dot{\gamma} \quad (7-73)$$

$$c_1 = 0.85 - 0.95$$

$$c_2 = 0.045 - 0.060$$

$$\lg a = \begin{cases} -0.284 \lg \dot{\gamma} - 2.066, & 10^{-3} \text{s}^{-1} \leq \dot{\gamma} \leq 1 \text{s}^{-1} \\ -0.257 \lg \dot{\gamma} - 2.066, & 1 \text{s}^{-1} \leq \dot{\gamma} \leq 10^3 \text{s}^{-1} \end{cases} \quad (7-74)$$

\* \* \*

现有两相模型都只能描述血液的部分流变行为。图 3-12 是 25°C 时, 刚性颗粒悬浮液、液滴悬浮液、正常血液及镰状

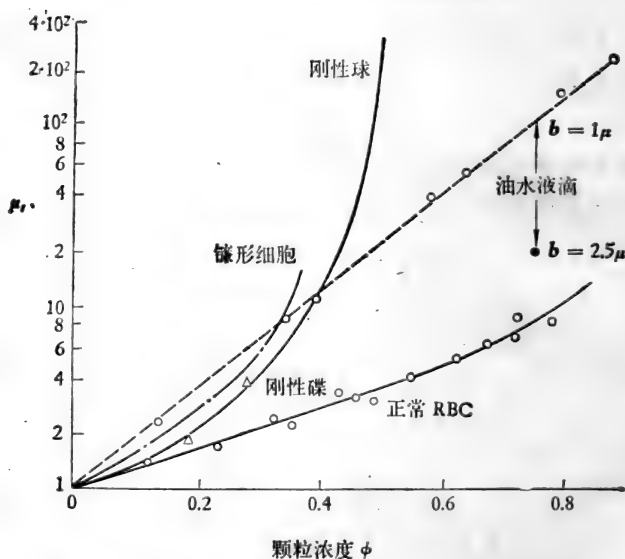


图 3-12 各种悬浮液和血液相对粘度随体积浓度的变化<sup>[36]</sup>

细胞贫血症患者的血液的相对粘度随体积浓度的变化, 可见高浓度时, 正常血液的流动性比颗粒悬浮液、液滴悬浮液高得多, 而血液的这种惊人的流变性质来源于红细胞的弹性变形。

## § 8 红细胞的力学性质

研究红细胞的几何形状和变形能力不仅是认识血液流变性质的关键，也为了解一般细胞和细胞膜的力学性质提供范例，因此在生物学上具有重要意义。

人血的红细胞十分规则，在等渗溶液中呈双凹圆盘形，如图 3-13 所示。当红细胞在骨髓里形成、生长时，其形状是不规则的，且有细胞核。但当它进入血液时就失去核，形状亦变为规则。通常红细胞寿命在 120 天左右。当它变‘老’时，就膨胀为球形，在脾脏中被消灭。这表明红细胞所以取图 3-13

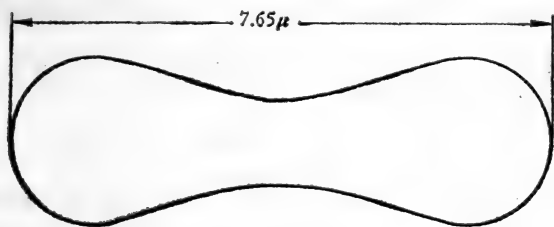


图 3-13 红细胞在等渗液中的形状<sup>[37]</sup>

所示的形状，是为了便于在各种尺寸的血管中流动。下面分别讨论红细胞的几何形状，细胞液的力学性质及膜弹性。

### § 8-1 红细胞的几何形状

虽然红细胞的形状不难用显微镜观察，准确地确定其几何形状却非容易。因为红细胞厚度约  $2\mu\text{m}$ ，和可见光波长同量级。光波和细胞的相互作用，使得观察到的红细胞边界模糊，无法测准。为解决这个难题，冯元桢和 Evans<sup>[37]</sup>根据物理光学原理，应用干涉仪精确测定了红细胞的几何形状。他们

的方法是：根据已有观测资料，提出红细胞形状的解析表达形式，其中系数待定。然后，按物理光学原理算出可见光通过这个理想红细胞所成的象，将此与实测的象相比较，从而确定未知系数。这样就得到红细胞的准确的几何形状。

Evans 和冯元桢<sup>[4]</sup>假设红细胞厚度分布为：

$$D(r) = \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ C_0 + C_2 \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 + C_4 \left( \frac{r}{R_0} \right)^4 \right] \quad (8-1)$$

$R_0$ 、 $C_0$ 、 $C_2$ 、 $C_4$  由实验确定， $2R_0$  为红细胞直径，据 Evans 和冯元桢测量，在 300mOsm 的等渗溶液中，

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 3.91 \mu\text{m}, & C_0 &= 0.81 \mu\text{m} \\ C_2 &= 7.83 \mu\text{m} & C_3 &= -4.39 \mu\text{m} \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

测量精度在  $0.02 \mu\text{m}$  之内，即半径误差为 0.5—1%，厚度误差为 1%。Evans 的测量取样数为 50。后来庄宜第和冯元桢<sup>[38]</sup>扩大取样范围， $N = 1581$ ，在等渗溶液中测得人血红细胞的几何尺寸如表 3-3 示。

表 3-3 人血红细胞几何尺寸<sup>[4]</sup>

	直径 ( $\mu\text{m}$ )	最小厚度 ( $\mu\text{m}$ )	最大厚度 ( $\mu\text{m}$ )	表面积 ( $\mu\text{m}^2$ )	体积 ( $\mu\text{m}^3$ )	球形指数
平均值	7.65	1.44	2.84	129.95	97.91	0.792
均值误差	$\pm 0.02$	$\pm 0.01$	$\pm 0.01$	$\pm 0.40$	$\pm 0.41$	$\pm 0.001$
准标差 $\sigma$	0.67	0.47	0.46	15.86	16.16	0.055
最小值	5.77	0.01	1.49	86.32	47.82	0.505
最大值	10.09	3.89	4.54	205.42	167.69	0.909

观察活体微循环时，一个显著的特色就是流动的间歇性。除了心脏搏动引起的脉动外，还有随机的不稳定性。要分析这种随机特色必须知道血管尺寸、红细胞大小、白细胞和其他细

胞尺寸的随机分布,以及小血管分支的类型。对毛细血管流动来说,最大的红细胞迂到的阻力最大。因此知道血样中最大红细胞的分布是有意义的。Chen 和冯元桢<sup>[39]</sup>用 Gumbel 极值分布原理测量、分析了红细胞的极值分布。按 Gumbel 原理,凡概率密度  $f(x)$  为连续函数,且当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  至少和  $e^{-x}$  一样快地趋于 0,那么样品中最大值等于或小于  $x$  的概率为:

$$F(x) = e^{-e^{-y}} \quad (8-2)$$

这里

$$y = \alpha(x - u) \quad (8-3)$$

$u$  为  $x$  的最可几值,称为模,  $\alpha$  称为 Gumbel 斜率。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \\ u &= \bar{x} - \frac{0.57722}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

$\sigma$  为标准差,  $\bar{x}$  为均值。据 Chen 和冯元桢观测,红细胞最大直径的分布服从方程(8-2),模为  $9.083 \mu\text{m}$ ,  $\frac{1}{\alpha} = 0.5204$  (置信度为 95%)。据此,一亿个红细胞内,最大红细胞直径可达  $15.66-17.06 \mu\text{m}$ ,为正常红细胞的两倍。

## § 8-2 红细胞形状的力学说明

为什么红细胞呈双凹圆盘形?从红细胞形成、生存、死亡过程中形状的变化来看,所以取这种形状,是为了获得最佳变形能力。

红细胞的变形能力决定于细胞膜和细胞内的血红蛋白。血红蛋白是固态的还是液态的?Cokelet 和 Meiselman<sup>[40]</sup> 的实验证明,血红蛋白的流变行为象不可压粘性流体,粘度为 6cP。因此,红细胞的变形能力取决于其膜。

图 3-12 表明,同样浓度下血液相对粘度低于油-水乳剂,



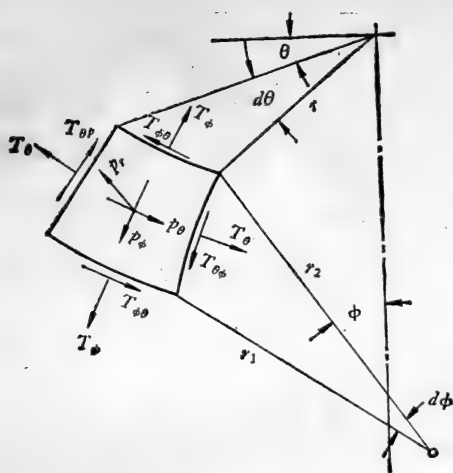


图 3-15 受力分析

考察图 3-14 所示膜上  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的受力情况。 $A$  是对称轴与膜的交点,  $r_1 = r_2$ ;  $B$  是拐点,  $r_1 \rightarrow 0$ ;  $C$  是最大厚度点,  $r_2 \rightarrow \infty$ 。这样:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-2T_\phi}{|r_1|_A} &= p_i - p_o \\ -\frac{T_\theta}{|r_2|_B} &= p_i - p_o \\ \frac{T_\phi}{|r_1|_C} &= p_i - p_o \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

故当  $p_i > p_o$  时, 在  $C$  点膜受张力作用, 而在  $A$ 、 $B$  两点受压力作用。

再考虑壳体上以  $A$  点为中心的一块圆形膜, 如图 3-16 示, 作用于其上的垂直载荷为  $(p_i - p_o) \cdot \pi r^2$ , 它与  $T_\phi$  引起的垂直分量  $2\pi r \cdot T_\phi \sin \phi$  平衡,

$$\therefore T_{\phi} = \frac{p_i - p_o}{2} \cdot \frac{r}{\sin \phi} \quad (8-8)$$

在C点  $r \neq 0$ ,  $\phi = 0$ , 故若  $(p_i - p_o) \neq 0$ , 那么,  $(T_{\phi})_C \rightarrow \infty$ , 即在C点膜张力无穷大, 这是不可能的。因此, 在自然状态下必有:

$$p_i - p_o = 0 \quad (8-9)$$

可见红细胞取双凹碟形时, 膜应力处处为零,

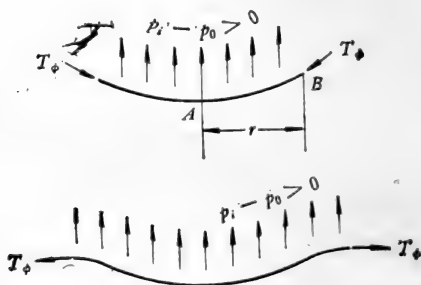


图 3-16 以A为中心圆形膜的力平衡

$$T_{\theta} = T_{\phi} = 0 \quad (8-10)$$

这就是红细胞比液滴更容易变形的原因。

另一方面, 从几何上来说, 双凹碟形体表面是可展开的可贴合 (applicable) 曲面, 它能够连续地改变形状, 变成另一种可贴合曲面, 既不撕裂, 也不发生拉伸和折叠。在可贴合变形过程中, 曲面的固有尺度张量不变, 因而膜应力不变。如上所述, 在自然状态下, 膜应力为零, 故不必费劲, 红细胞就能从双凹碟形变为其他种种形状, 以适合环境的需要。这就是红细胞呈双凹碟形的力学原因。

冯元桢还用球壳和长圆柱薄壳理论分析了红细胞自然形状的稳定性。由于在循环过程中红细胞膜每一部分变形的机



会均等，故可以认为膜弹性是均匀各向同性的。当  $p_i > p_0$  时，A 点受压，按充液球壳理论得临界压力(压差) $p_{cr}$  为：

$$p_{cr} \cong 1.2E \left( \frac{h}{R} \right)^2 \quad (8-11)$$

$h$  是膜厚度， $R$  为红细胞半径， $E$  为膜的杨氏模量。通常  $h \cong 100\text{nm}$ ， $E \cong 10^5\text{dyn/cm}^2$ ， $R = 10\mu\text{m}$ ，

$$\therefore p_{cr} = 0.12\text{dyn/cm}^2$$

当  $p_i < p_0$  时，红细胞外侧受压，按充液圆柱壳体理论。得临界压差为：

$$p_{cr} = -\frac{E}{4(1-\sigma^2)} \cdot \left( \frac{h}{R} \right)^3 \quad (8-12)$$

$\sigma$  是泊松比，取  $\sigma = 0.5$ ，可得如下估计

$$p_{cr} = -0.02\text{dyn/cm}^2$$

### § 8-3 红细胞膜的力学特性

要研究红细胞膜的应力-应变关系，必须使得膜的变形超过可贴合曲面变换的许可限度，即使红细胞的载荷处于非‘设计’状态。当前，测量红细胞膜力学性质的方法主要有以下几种。

(1) 改变溶液渗透压，使红细胞膨胀，测量其变形，从而得膜的力学性质。Evans 和冯元桢分别在 300mOsm、217mOsm、131mOsm 下测量了红血球几何形状的改变，结果见表 3-4。

131mOsm 时，红血球呈球形，处于溶血边缘。由表可见，即使是濒于破裂的红细胞，体积增大 74%，表面积却仅增加 7%。据 Evans 后来观测，如果追踪同一红细胞在渗透压改变时的变形，则在破裂前夕，面积仅改变 2%。这表明，尽管红细胞的形状、体积很容易改变，红细胞膜的表面积却近乎不变。设自

表 3-4 红细胞尺寸随渗透压的改变<sup>[37]</sup>

渗透压 (mOsm)	直径 ( $\mu\text{m}$ )	最小厚度 ( $\mu\text{m}$ )	最大厚度 ( $\mu\text{m}$ )	表面积 ( $\mu\text{m}^2$ )	体积 ( $\mu\text{m}^3$ )
300	7.82	0.81	2.58	135	94
217	7.59	2.10	3.30	135	116
131	6.78			545	164

然状态下表面积为  $A_0$ , 面积改变量为  $\Delta A$ , 则

$$T = K \frac{\Delta A}{A_0} \quad (8-13)$$

$K$  称为面积弹性模量。据 Evans 等<sup>[42]</sup>测量, 在  $25^\circ\text{C}$  时

$$K \approx 450 \text{ dyn/cm} \quad (8-14)$$

此外, 在渗透压刚开始降低时, 几何形状改变很大, 此时膜的弯曲刚度的作用不可忽略。因此, 膨胀实验可提供红细胞膜弯曲刚度的信息。

(2) 用微型玻璃管吸红细胞, 改变压力, 测量膜的变形。这种方法既可以测量膜的面积弹性模量, 亦可测膜的剪切弹性模量。还可以测量膜的粘弹性和粘塑性。据 Evans 测量<sup>[21]</sup> 红细胞膜的剪切模量为  $6.6 \times 10^{-3} \text{ dyn/cm}$ , 粘性系数为  $10^{-3} \text{ dyn} \cdot \text{s/cm}$ 。

(3) 将红细胞粘在玻璃渠道壁上, 当流体流动时, 细胞受剪切而拉长, 由此可得膜的剪切弹性模量, Hochmuth 曾用此法测得其值约为  $10^{-2} \text{ dyn/cm}$ , 和 Evans 所得结果同量级。

(4) 用多碳酸酯 (poly carbonate) 分子筛在小压差下, 测红细胞通过能力。Gregersen 等曾用此法确定红细胞能够通过而不致破裂的通道直径下限为  $2.3 \mu\text{m}$ 。一般‘筛子’厚度为  $12 \mu\text{m}$ , 平均孔径  $2.84-6.80 \mu\text{m}$ , 压差常用  $1-2 \text{ cmH}_2\text{O}$ 。

此外, 还可以测量细胞膜弹性反应的热效应, 或用化学方

法改变膜的构造,观测其弹性的改变。等等。

总之,红细胞膜力学性质的最大特色是: 面积弹性模量 ( $K$ ) 远高于剪切弹性模量 ( $S$ ),  $\frac{S}{K} \sim 10^{-4}$ 。因此, 只要红细胞不破裂,它在变形时,表面积不变。这也是红细胞变形和液滴变形的根本差别。

#### § 8-4 红细胞膜的本构方程

根据上述实验结果,红细胞变形的两个根本特点是: (i) 形状改变很大,但膜表面积基本不变,如果认为膜材料是不可压缩的,那么膜厚度也不变。(ii)在平衡状态下红细胞总是呈双凹碟形,应力和应变的历史过程对此没有影响,这表明红细胞膜是弹性体。膜的本构方程应能概括上述特点。

最初,冯元桢和董平<sup>[43]</sup>用各向同性介质二维平面应力场理论导出红细胞膜的应力-应变的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_1 + \nu e_2) \\ \tau_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_2 + \nu e_1) \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

$\tau_1$ 、 $\tau_2$  是主应力,  $e_1$ 、 $e_2$  是主应变,  $E$ 、 $\nu$  是弹性系数, 它们是应变不变量  $(e_1 + e_2)$ 、 $e_1 \cdot e_2$  的函数。因为变形很大,故取

$$e_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) \quad e_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) \quad (8-16)$$

$\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  为主伸长比。

(8-15)未能体现上述第一个特点,故 Evans 和 Skalak<sup>[43]</sup>提出如下本构关系

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= K(\lambda_1\lambda_2 - 1) + \mu \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1^2\lambda_2^2} \\ T_2 &= K(\lambda_1\lambda_2 - 1) - \mu \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1^2\lambda_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (8-17)$$

$T_1$ 、 $T_2$  为膜的张力。 $(\lambda_1\lambda_2 - 1)$  为膜的面积应变, 故  $K$  为面积弹性模量。显然平均膜应力  $T_m$  为:

$$T_m = \frac{1}{2} (T_1 + T_2) = K(\lambda_1\lambda_2 - 1) \quad (8-18)$$

故方程(8-17)右端第一项为平均膜应力。

在 Mohr 圆上, 主应变和的一半等于最大剪应变  $\gamma_{\max}$ , 即

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) = \frac{1}{4}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \quad (8-19)$$

故方程(8-17)右端第二项与最大剪应力  $S_{\max}$  有关。

$$S_{\max} = \frac{4\mu}{\lambda_1^2\lambda_2^2} \gamma_{\max} \quad (8-20)$$

$\mu$  是膜的剪切模量。

冯元桢将(8-17)进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= K(\lambda_1\lambda_2 - 1) + \frac{\mu'}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ T_2 &= K(\lambda_1\lambda_2 - 1) - \frac{\mu'}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

这样物理意义更为明确。

方程(8-17)或(8-21)中,  $K$ 、 $\mu$  或  $\mu'$  都是应变不变量的函数, 因而应力-应变关系是非线性的。但作为初步近似, 可取  $K$ 、 $\mu$  或  $\mu'$  为常数。例如, 取  $K = 450 \text{ dyn/cm}$ ,  $\mu' = 6.6 \times 10^{-3} \text{ dyn/cm}$ 。

## 参 考 文 献

- [1] Dintenfass, L.: Blood Microrheology, Butterworths, London 1971. 1971.
- [2] Cooney, D. O.: Biomedical Engineering Principles; Marcel Dekker Inc., 1976.

- [ 3 ] Skalak, R., Goldsmith, H. L.: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 7, 213, 1975.
- [ 4 ] Evans, E. Fung, Y. C.: *Microvascular Research*, 4, 335, 1972.
- [ 5 ] Merrill, E. W. et al.: *J. Appl. Physiol*, 20, 954, 1965.
- [ 6 ] Chimiel, H.: *Biorheology*, 11(1), 87, 1974.
- [ 7 ] Chien, S. et al.: *J. Appl. Physiol*, 21, 81, 1966.
- [ 8 ] Merrill, E. W.: *Circulation Research*, 13, 48, 1963.
- [ 9 ] Cokelet, G. R. et al.: *Trans. Soc. Rheology*, 7, 303, 1963,
- [10] Merrill, E. W. et al.: Proceedings of the 4th International Congress of Biorhology, 135, Ed. by Copley, A. L., Intersci. Publ, 1965.
- [11] Walburn, F. J. et al.: *Biorheology*, 13(3), 201, 1976.
- [12] Thurston, G. B.: *Biophysical J.*, 12, 1205, 1972.
- [13] Thurston, G. B.: *Biorheology*, 13, 191, 1976.
- [14] Thurston, G. B.: *Biorheology*, 15, 239, 1978.
- [15] Thurston, G. B.: *Biorheology*, 10, 375, 1973.
- [16] Chien, S. et al.: *Biorheology*, 12(6), 341, 1975.
- [17] Fung, Y. C.: *Advance in Appl. Mech.*, 11, 65, 1971.
- [18] Barbee, J. H., Cokelet, G. R.: *Microvascular Research*, 3, 1971.
- [19] Chien, S. et al.: *Science*, 168, 977, 1970.
- [20] Goldsmith, H. L.: *Biorheology*, 7, 235, 1971.
- [21] Goldsmith, H. L., Marlow, J.: *Proc. Roy. Soc. B(London)*, 182, 351, 1972.
- [22] Goldsmith, H. L.: Theoretical and Applied Mechanics Proc. 13th IUTAM, North-Holland Publ. Co. 1972.
- [23] Charm, S. E., Kurland, G. S.: *Blood Flow and Microcirculation*, Wiley, New York, 1974.
- [24] Oldroyd, J. C.: *Proc. Roy. Soc. A (London)*, 200 (1063), 523, 1950.
- [25] Oldroyd, J. G.: *Rheologica. Acta*, 1, 337, 1961.
- [26] Phillips, P.: *Biorheology*, 12, 383, 1975.
- [27] Deutch, S. et al.: *Biorheology*, 13, 297, 1976.
- [28] Mahalingam, R., Poon, T. K.: *Biorheology*, 10(3), 329, 1973.
- [29] Casson, M.: *Rheology of Disperse Systems*, Ed. by Mill. C. C., Pergaman Press, New York, 1959.
- [30] Popel, A. S. et al.: *Biorheology*, 11(6), 427, 1974.
- [31] Happel, J., Brenner, H.: *Low Reynolds number hydrodynamics*, Noordhoff International Pub., Leyden. 1965.
- [32] Lew, H. S.: *Biophysical J.*, 9(2), 235, 1969.
- [33] 岡小天: ヲオロジ——生物ヲオロジ裳華房, 1976.
- [34] 岡小天: *Japanese J. Appl. Physics*, 10(3), 287, 1971.

- [35] Murata. T.: *Biorheology*, **13**, 287, 1976.
- [36] Goldsmith, H. L.: *Advances in Hemostasis and Thrombosis*, **1**, 97, 1972.
- [37] Evans, E. A., Hochmuth, R. M.: *Biophysical J.*, **16**, 1, 1976.
- [38] Tsang, W. C. O.: The size and shape of human red blood cells, M. S. Thesis, UCSD, 1975.
- [39] Chen, P., Fung, Y. C.: *Microvascular Research*, **6**, 32, 1973.
- [40] Cokelet, G. R., Meiselman, H. J.: *Science*, **162**, 275, 1968.
- [41] Fung, Y. C.: *Federation Proceedings*, **25** (6), Part J. 1761, 1966.
- [42] Evans, E. A.: *Biophysical J.*, **16**(6), 585, 1977.
- [43] Evans, E. A., Skalak, R.: Mechanics and Thermodynamics of Biomembranes, CRC Critical Reviews in Bioengineering vol 3, CRC Press, Boca Raton. Fla, 1979.

## 第四章 血管的力学性质

### §1 引言

生理流动总是以固态生物材料——软组织为边界的，它的力学行为和生理流体的运动相耦合，是生理流动的一大特色。因此，了解软组织的力学性质，是认识生理流动规律的必要前提。

就力学性状而言，软组织可分为被动与能动两类，前者只能承受载荷，如皮肤、腱等；后者不仅能承载，而且能够将化学能直接转化为机械能而作功，各种肌肉即属此列。本章以血管为主要对象，讨论被动软组织的力学性质。应该指出，‘被动’二字并非绝对，例如大血管亦含有一定数量的平滑肌细胞，它们也能主动收缩而产生力，只是含量较少，不占主导地位。

研究血管材料的力学性质，不仅因为它是血液流动理论的基石，还因为一些严重威胁人类健康的心血管病，如动脉粥样硬化等，从病理机理，到诊断、治疗，无不与血管壁的物性密切相关。另外，人造代用品的研制和评价也需要知道天然血管的力学性能。因此，血管力学性质的研究是生物力学的一大课题，历来受到人们的重视。

血管壁是由多种生物纤维、生物膜组成的复合材料，其物性取决于各组元的性质、比例及排列方式。而各种生物纤维、生物膜的物性又取决于构成它的大分子的构造、排列以及环境的物理、化学参数(如温度，pH值等)。因此，理想的方法，

是从血管壁的微观(分子级)结构确定其本构方程。目前,大量研究工作是用传统的固体力学方法,做各种血管的应力试验,用现象学方法建立合理的经验、半经验应力-应变关系。实验可分两大类:在体和离体。

在体试验直接在动物身上测量血管内压及外径的变化。优点是试验接近于真实的生理条件,问题是试验条件无法准确控制,因而测量精度低,不能准确重复。

离体试验的主要问题是:

(1) 试验条件不可能和真实生理条件一样。一般,试样从活体取下后,立即浸于和活体环境温度、pH 值相当的等渗生理盐水中,24 小时内做实验,实验就在生理盐水中进行。

(2) 生物材料没有唯一的自然状态,卸载后不可能回到原样。为此,试样必须按一定方式预调制 (preconditioning),直至反应可重复。只有这样,不同试验的结果才可以相比较。

(3) 试样小,变形大(可达 70%),三维应力试验很困难。而血管材料又是各向异性的,一维试验的结果不能贸然推广于三维。

本章主要介绍一些实验结果及由此导出的经验本构关系。

## § 2 血管的构造

血管的构造因其功能而异。动脉和静脉血管壁由内、中、外三层构成。内层主要由内皮细胞和基质膜构成;中层可分为若干同心的、具有弹性的薄层,每层均由弹性蛋白、胶原和平滑肌纤维交织构成。对于大动脉来说,层数随壁厚而增加,每层厚度与管径之比近乎不变。在较小的动脉中,弹性蛋白含量减少。在远支动脉中,仅在管壁中层内、外侧才有弹性蛋



白。平滑肌呈螺旋结构,如图 4-1(a)示,从主动脉到周缘血管,平滑肌含量增多,螺旋结构的节间距越来越小。弹性蛋白纤维呈网络结构,其纵向有若干裂隙(见图 4-1(b))。胶原纤维则构成另一种网络(图 4-1c),当应力较小时,这种网络皱缩成波纹状。

Roach 和 Burton<sup>[2]</sup>用甲酸或胰蛋白酶浸蚀血管,以除去胶原或弹性蛋白,然后分别测量其应力-应变关系。结果表明,在低应力区,血管膨胀曲线的斜率和用胰蛋白酶处理后的血管一样;而在高应力区,血管的弹性则和用甲酸处理后的血管相似。这

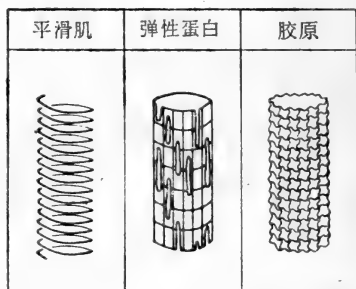


图 4-1 血管壁内三种主要组分构造示意图<sup>[33]</sup>

说明载荷较小时,承载的主要是弹性蛋白纤维,而载荷较高时,承载的主要是胶原纤维。

血管壁的外层是松弛的结缔组织。

除了最小的动、静脉血管外,血管壁本身也是由称为血管滋养管(vasa vasorum)的血管组织供血的。静脉血管对血管滋养管的依赖比动脉更大。

显然,血管的力学性质与其各组元的力学性质有密切关系。内皮膜的渗透性很强,对于血管的力学性质没有什么影响,但其完整性对于防止凝血有重大作用。基质是一些亲水的胶质,起粘合成形作用,其性质以及它对血管力学性状的影响尚不清楚。目前所知影响血管力学行为的组元是弹性蛋白、胶原及平滑肌。图 4-2 是这三种组分自身的应力-应变曲线,图 4-3 则是它们的应力松弛曲线。可见,弹性蛋白由纤维的杨

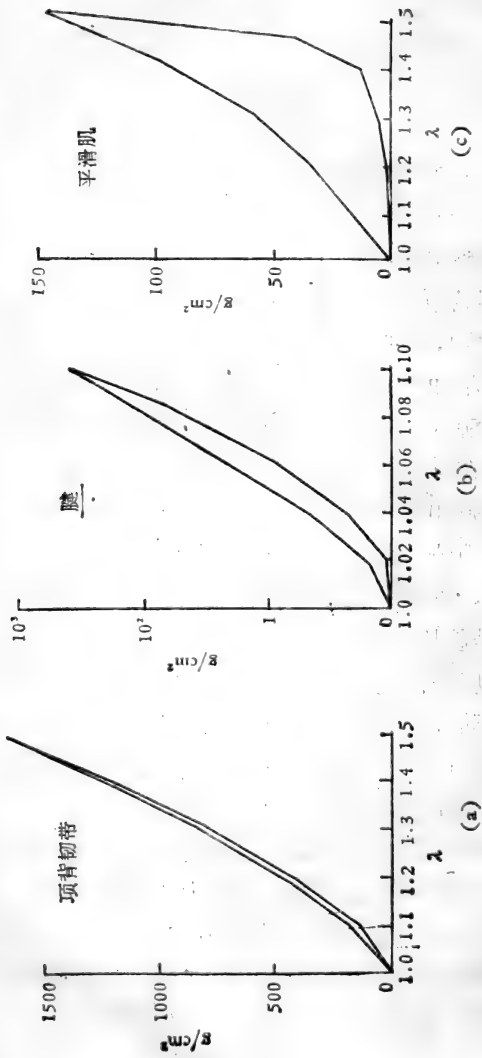


图 4-2 弹性蛋白、胶原、平滑肌纤维的应力-应变关系<sup>[11]</sup>

- (a) 弹性蛋白纤维,
- (b) 胶原纤维,
- (c) 平滑肌纤维。

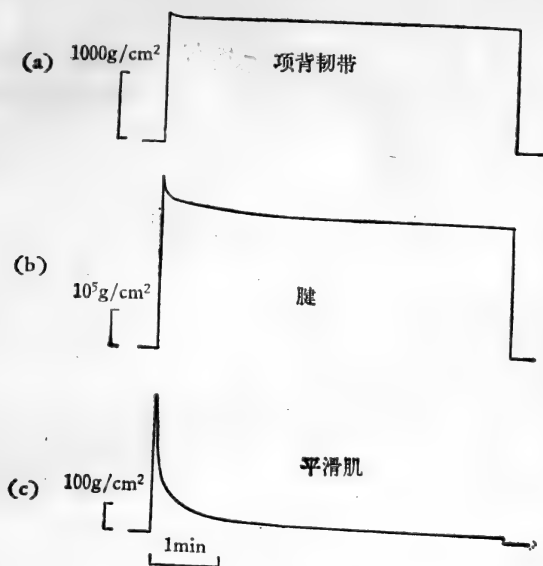


图 4-3 应力松弛曲线<sup>[21]</sup>  
 (a) 弹性蛋白纤维, (b) 胶原纤维,  
 (c) 平滑肌纤维。

氏模量较小, 约为  $3-6 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ , 抗张强度较低, 滞后迴线很小, 应力松弛也不显著, 很接近于完全弹性体。胶原纤维的杨氏模量约为  $10^{10} \text{ dyn/cm}^2$ , 抗张强度很高, 约为  $5-10 \times 10^8 \text{ dyn/cm}^2$ , 滞后环和应力松弛现象均较弹性蛋白纤维显著。平滑肌纤维由细长的、纺锤形细胞构成, 细胞长约  $20-50 \mu\text{m}$ , 直径约  $5-10 \mu\text{m}$ 。在松弛状态下, 应力-应变曲线有很大的滞后环, 应力松弛现象十分显著, 可趋于 0。在神经刺激下, 会能动地收缩, 产生的主动张力可达  $10^6 \text{ dyn/cm}^2$  以上。

据 Harkness 等研究, 胸腔内的主动脉和其他动脉血管的组分有明显差异。弹性蛋白含量与胶原含量之比, 前者为 2, 后者约为  $\frac{1}{2}$ 。静脉血管胶原含量更高, 上述比值为  $\frac{1}{3}$ 。

血管的力学性质不仅取决于它的组分及各组分的含量，而且取决于它的构造和超微结构。相对地说，确定血管壁材料的组成、含量并非太难，但对其构造作定量的测量却非常困难，还有待将来解决。

### § 3 血管壁内的张力

设管内压力为  $p_1$ ，内半径为  $R_1$ ，外半径为  $R_2$ ，壁外压力为  $p_2$ ，则作用于内壁的挤压力 (transmural pressure) 为：

$$p = p_1 - p_2 \quad (3-1)$$

它在单位管长上引起的周向张力为  $T_c$ 。如图 4-4 所示。截面上力平衡，故

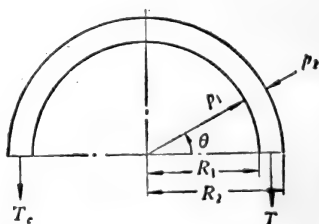


图 4-4 薄壁圆管受力情况

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_1 R_1 \sin \theta d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_2 R_2 \sin \theta d\theta = -2T_c$$

$$\therefore T_c = p_1 R_1 - p_2 R_2 \quad (3-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{令 } d &= \frac{R_2 - R_1}{R_2} = \frac{h}{R_2}, \quad h \text{ 为壁厚} \\ k &= \frac{p_1}{p_2} \\ m &= 1 - \frac{k}{k-1} d \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

则(3-2)变为

$$T_C = mpR_2 \quad (3-4)$$

由轴向力平衡可得轴向张力  $T_L$

$$T_L = \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_1 + R_2} \quad (3-5)$$

### § 3-1 拉普拉斯定律

若管壁极薄,  $h \rightarrow 0$ ,  $R_2 = R_1 = R$ , 则(3-2)变为

$$T_C = pR \quad (3-6)$$

此即生理学上常用的拉普拉斯定律。由(3-5)可知:

$$T_L = \frac{1}{2} pR = \frac{1}{2} T_C \quad (3-7)$$

若血管是弯曲的, 轴线曲率半径为  $\rho$ , 则拉普拉斯定律可写为

$$p = T_C \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R} \right) \quad (3-8)$$

### § 3-2 弹性张力与主动张力

血管组织是有生命的, 可以能动地收缩。因此, 挤压力  $p$  引起的管壁张力  $T_C$ , 由材料的弹性抗力  $T_E$  和平滑肌产生的主动张力  $T_A$  平衡。

$$T_C = T_A + T_E \quad (3-9)$$

$T_E$  是管径的函数, 而  $T_A$  仅取决于血管组织活性。

图 4-5(a) 是  $T_A = 0$  时,  $p$  与  $T_E$  的平衡图, 可见, 当

$$p \leq \left( \frac{dT_E}{dR} \right)_{\max} \quad (3-10)$$

时, 挤压力  $p$  和弹性张力  $T_E$  间的平衡是稳定的。但当  $p >$

$\left( \frac{dT_E}{dR} \right)_{\max}$  时, 平衡就无法实现, 血管就会爆裂。故

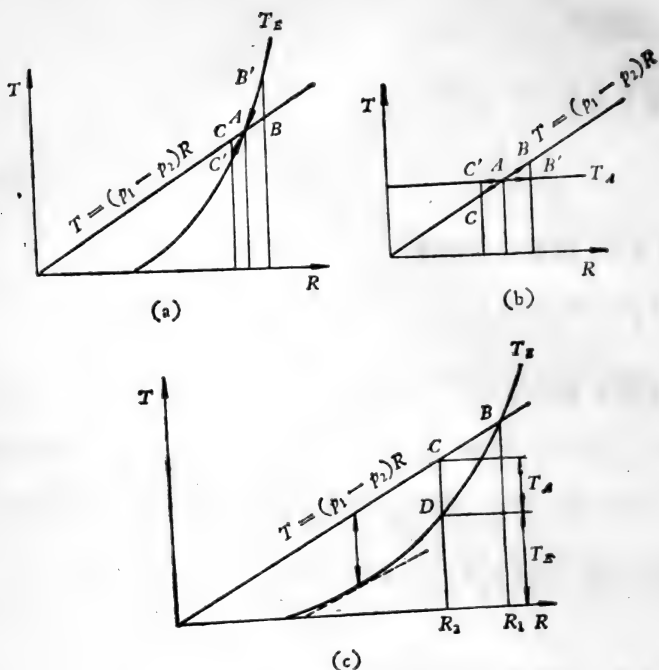


图 4-5

(a)  $p$  与  $T_E$  平衡, (b)  $p$  与  $T_A$  平衡,  
(c)  $p$  与  $T_A + T_E$  平衡。

$$p_B = \left( \frac{dT_E}{dR} \right)_{\max} \quad (3-11)$$

称为血管爆裂压力。以人体骼动脉为例,  $p_B \approx 1000 \text{mmHg}$ , 远高于正常生理状态下的血压。

若  $T_E = 0$ , 如图 4-5 (b) 所示,  $p$  与主动张力  $T_A$  的平衡是不稳定的。

挤压力  $p$  与  $T_A + T_E$  的平衡如图 4-5 (c) 示。在  $B$  点,  $T_A = 0$ ,  $T_E = pR_1$ ; 若平滑肌收缩, 产生一主动张力  $T'_A = CD$ , 则管径收缩, 达  $R_2$ ,  $T'_A + T'_E = pR_2$ 。当

$$p = \left( \frac{dT_E}{dR} \right) = p_c \quad (3-12)$$

时,主动张力达稳定性极限  $(T_A)_{cr}$ 。超过此值,稍有扰动,血管就会自行关闭。 $(T_A)_{cr}$  称为血管闭锁主动张力,相应的压力  $p_c$  称为血管闭锁压力。据测量,正常人动脉的  $p_c$  在 10—60mmHg 之间,高血压者可达 95mmHg。

主动张力取决于平滑肌的活动性,很难测量,研究得很不够。下面的讨论限于弹性张力。

### § 3-3 弹性薄壁圆管的应力

欲知血管壁在生理载荷作用下所承受的应力,首先要知道血管材料的力学性质。作为最简单的近似,可以假设血管是均匀、各向同性的胡克体,在平衡状态 ( $p_1 = p_2, p = 0$ ) 下是直圆柱管,在压力  $p$  作用下变形是轴对称的,变形很小。取柱坐标  $\{r, \theta, z\}$ , 应变为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{\xi_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z} \right) \\ \gamma_{zz} &= \frac{\partial \xi_z}{\partial z} & \gamma_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} (3-13)$$

$\{\xi_r, \xi_\theta, \xi_z\}$  是管壁位移。

静态下应力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} (3-14)$$

结合边界条件:

$$\left. \begin{aligned} r = R_1: \tau_{rr} &= -p_1 \\ r = R_2: \tau_{rr} &= -p_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

纵向平衡条件:

$$R_2^2 p_2 - R_1^2 p_1 + (R_2^2 - R_1^2) \tau_{zz} = 0 \quad (3-16)$$

并应用胡克定律,解之可得

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{1-2\sigma}{E} \cdot \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{1+\sigma}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \gamma_{\theta\theta} &= \frac{1-2\sigma}{E} \cdot \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{1+\sigma}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \gamma_{zz} &= \frac{1-2\sigma}{E} \cdot \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \gamma_{zr} = 0$$

应力分布为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \\ \tau_{zz} &= \frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

$E$  为杨氏模量,  $\sigma$  为泊松比。

按(3-18),在  $p = p_1 - p_2$  作用下,管壁周向应力  $\tau_{\theta\theta}(r)$  有三种分布形式:

(1) 整个管壁受张,即  $R_1 \leq r \leq R_2$  时,  $\tau_{\theta\theta} > 0$ 。其条件为:

$$p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2 + (p_1 - p_2) R_1^2 > 0 \quad (3-19)$$

若令

$$k = \frac{p_1}{p_2} \quad s = \frac{R_2}{R_1} \quad (3-20)$$



则条件(3-19)可改写为:

$$k > \frac{1}{2}(1 + s^2) \quad (3-21)$$

(2) 整个管壁受压。即  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $\tau_{\theta\theta} < 0$ 。其条件为:

$$k < \frac{2s^2}{1 + s^2} \quad (3-22)$$

(3) 局部受张,局部受压,即  $\tau_{\theta\theta}(R_1) > 0$ ,  $\tau_{\theta\theta}(R_2) < 0$ , 其条件为

$$\frac{2s^2}{1 + s^2} < k < \frac{1}{2}(1 + s^2) \quad (3-23)$$

由(13-18)可得单位长度管壁上周向张力  $T_c$  为:

$$T_c = \int_{R_1}^{R_2} \tau_{\theta\theta}(r) dr = p_1 R_1 - p_2 R_2$$

此即方程(3-2)。应用(3-20)可改写为

$$T_c = p_2 R_1 (k - s) \quad (3-24)$$

可见,管壁受张还是受压,取决于  $\frac{p_1}{p_2} > \frac{R_2}{R_1}$ , 还是  $\frac{p_1}{p_2} < \frac{R_2}{R_1}$ 。

只有当管壁极薄,  $R_1 \approx R_2$ ,  $s \approx 1$  时,  $p_1 > p_2$  则管壁受张,  $p_1 < p_2$  则管壁受压。

当  $\frac{p_1}{p_2} > \frac{R_2}{R_1}$  时,压差由管壁周向拉应力平衡,若材料各向同性,则在变形过程中,只改变截面积,截面形状不同,这叫可膨胀管。当  $\frac{p_1}{p_2} < \frac{R_2}{R_1}$  时,管壁受压,在截面刚度允许范围内,  $(p_1 - p_2)$  的作用仅限于改变截面积,截面形状不变。但若超过截面刚度允许范围,则截面形状发生变化。这种管子称为可坍管。人体内,大动脉血管一般可看作可膨胀管,肺动脉、肺静脉、静脉等一般均为可坍管。可膨胀管和可坍管内血液

流动的特性很不一样。

## § 4 大血管的力学性质——实验结果

血管力学性质的离体实验通常有两种做法。一是取一段血管,充气或充液使之膨胀,测内压和外径的变化;另一种做法是取周向试样,作一维拉伸实验,测拉力和伸长率。不同方法所得的结果需用不同的方式处理。下面分别介绍静力学试验和动力学试验的主要结果。

### § 4-1 大血管的静力学特性

#### 1. 不可压缩性

材料是否可压缩不仅取决于体积模量( $K$ ),更重要的是体积模量与剪切模量( $G$ )之比。以狗的胸主动脉为例,测量表明<sup>[6]</sup>:

$$K \simeq 4.35 \times 10^9 \text{ dyn/cm}^2$$

$$E \simeq 4.3 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$G \simeq 1.4 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$\therefore \frac{K}{G} \simeq 3 \times 10^3$$

即  $K \gg G$ , 故血管材料近乎不可压缩。此时泊松比  $\sigma = \frac{1}{2}$ 。

#### 2. 正交性

在内外压差(内压高于外压)作用下,血管的变形是否轴对称? Patel 等<sup>[6]</sup>以狗的胸主动脉为例作了验证。典型结果见下表。

下表中  $\gamma_{z\theta}$ 、 $\gamma_{r\theta}$  是圆柱管壁在小变形时的平均切应变,

表 4-1 狗胸主动脉的应力<sup>[6]</sup>

压力范围 (cmH <sub>2</sub> O)	$\gamma_{z\theta} \times 100$	$\gamma_{r\theta} \times 100$	$\gamma_{\theta} \times 100$	$\gamma_z \times 100$
24—136	0—0.5	0—2.2	21—56	30—48
24—179	0—0.6	0—3.7	21—67	30—53
24—270	0—0.9	0—11.5	21—83	30—62

$\gamma_{\theta}$ 、 $\gamma_z$  为平均拉应变，

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\theta} &= \frac{R - R_0}{R_0} \\ \gamma_z &= \frac{L - L_0}{L_0} \\ R &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

附标 0 表示参考状态。

由表 4-1 可见， $\gamma_{\theta}$ 、 $\gamma_z$  比  $\gamma_{z\theta}$ 、 $\gamma_{r\theta}$  大一至二个量级，故正交性假设成立。

### 3. 非线性

在静载荷作用下，血管的应力-应变关系是非线性的，若令

$$E_s = \frac{\tau}{\gamma} \quad (4-2)$$

则  $E_s$  是内、外压差的函数，如图 4-6 示。亦即此时  $\frac{\tau}{\gamma}$  不是完全由物性决定的。

然而，任一光滑的曲线总可以用许多小段直线来逼近。因此，若把应力、应变都限制在一很小的范围内，那么在该范围内材料的力学性质就可以用一物性参数  $E_{inc}$  表示

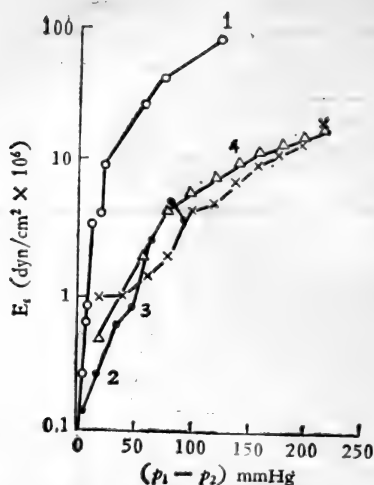


图 4-6 血管静弹性模量随内、外压差  $p$  的变化<sup>[6]</sup>

$$E_{inc} = \frac{\Delta\tau}{\Delta\gamma} \quad (4-3)$$

$E_{inc}$  称为增量化弹性模数。Bergel<sup>[6]</sup> 测定了狗胸主动脉、腹主动脉等血管的  $E_{inc}$ ，典型结果如下。

表 4-2 动脉血管增量弹性模数<sup>[11]</sup>(单位:  $10^6 \text{dyn/cm}^2$ )

压力 (mmHg)	胸主动脉	腹主动脉	股动脉	颈动脉
40	$1.2 \pm 0.1$	$1.6 \pm 0.4$	$12 \pm 0.2$	$10 \pm 0.2$
100	$4.3 \pm 0.4$	$8.9 \pm 3.5$	$6.9 \pm 1.0$	$6.4 \pm 1.0$
160	$9.9 \pm 0.5$	$12.4 \pm 2.2$	$12.1 \pm 2.4$	$12.2 \pm 2.7$
200	$18.1 \pm 2.8$	$18.0 \pm 5.5$	$20.4 \pm 4.4$	$12.2 \pm 1.5$

## § 4-2 血管的粘弹性

### 1. 滞后回线

在周期性载荷作用下，存在滞后回线。图 4-7 是狗颈主

动脉在周期性载荷作用下的应力-伸长比曲线。这里  $T_1$  是拉格朗日应力，

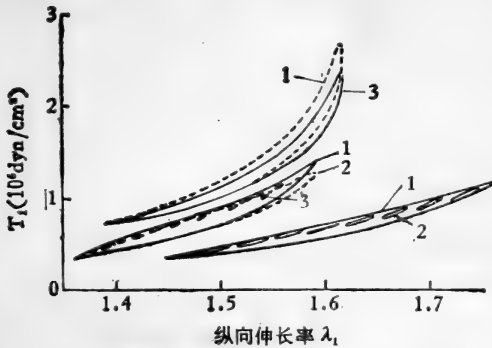


图 4-7 狗颈主动脉的加载—卸载曲线<sup>[3]</sup>

$$T_1 = \frac{W}{A_0} \quad (4-4)$$

$W$  为载荷， $A_0$  为参考截面积。

$$\lambda_1 = \frac{l}{l_0} \quad (4-5)$$

$l$  为试样长度。

可见不仅有滞后迴线，而且每一周期的滞后迴线并不重合。这表明血管壁材料是粘弹性体。而且是非线性粘弹性体。

图 4-7 还表明，即使应力、应变变化幅度很小，滞后迴线依然存在。不同平衡载荷下，各个小滞后环不平行。

不仅如此，不论是加载曲线还是卸载曲线，同样应力水平上，小滞后环并不与有限变形时的滞后迴线相切。因而，用增量化粘弹性模型表征血管在有变形时的力学性质是有问题的。

## 2. 应力松弛

血管材料对于应变阶跃:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

的应力反应为

$$\tau(t) = \begin{cases} G(t) \cdot \gamma_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4-7)$$

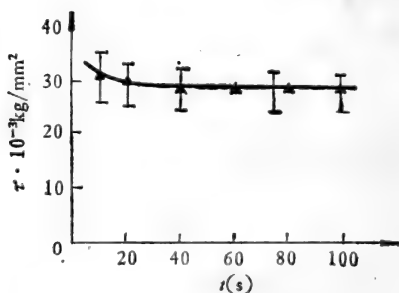


图 4-8 兔主动脉应力松弛曲线<sup>[19]</sup>

设:

$$G(t) = G_0 - (G_0 - G_\infty)\phi(t) \quad (4-8)$$

$G_0 = G(0)$ 为瞬时弹性模量,  $G_\infty = G(\infty)$ 为平衡弹性模量,  $\phi(t)$ 为应力松弛函数。若  $G_0 \neq G_\infty$ , 则存在应力松弛现象。

图 4-8 表明, 大血管材料存在应力松弛现象, 且  $G_\infty > 0$ , 即为部分松弛。

## 3. 蠕变

在应力阶跃

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4-9)$$

作用下,应变的变化为:

$$\gamma(t) = \begin{cases} J(t) \cdot \tau_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4-10)$$

$J(t) \geq \frac{1}{G_0}$  时,材料发生蠕变。图 4-9 是狗颈动脉蠕变实验

的结果。显然  $\gamma_\infty = \gamma(\infty) < \infty$ , 即血管蠕变是有限的。

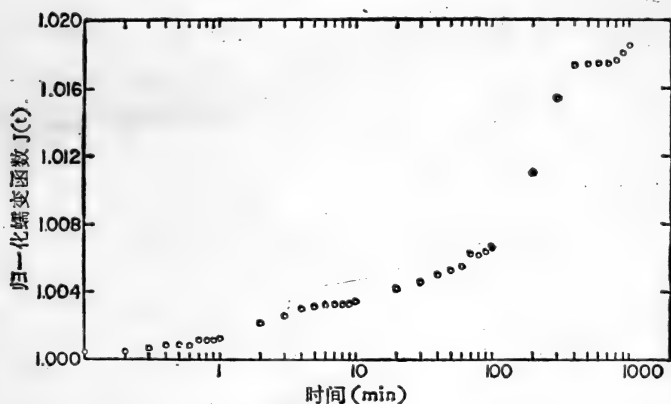


图 4-9 狗颈动脉蠕变曲线<sup>[3]</sup>

#### 4. 粘弹性与频率的关系

在小变形范围内,血管粘弹性可用复变量  $E_c$  表示

$$E_c = \frac{\tau}{\gamma} = E_s + jE_i = |E_c| e^{j\delta} \quad (4-11)$$

$E_s$  称为动力学弹性模量。而  $E_i$  为静模量。

图 4-10 是典型实验结果。可见,频率从 0 增大时,  $|E_c|$ 、 $\delta$  都迅速增大,但当频率高于 2Hz 时,  $|E_c|$ 、 $\delta$  都只在某一

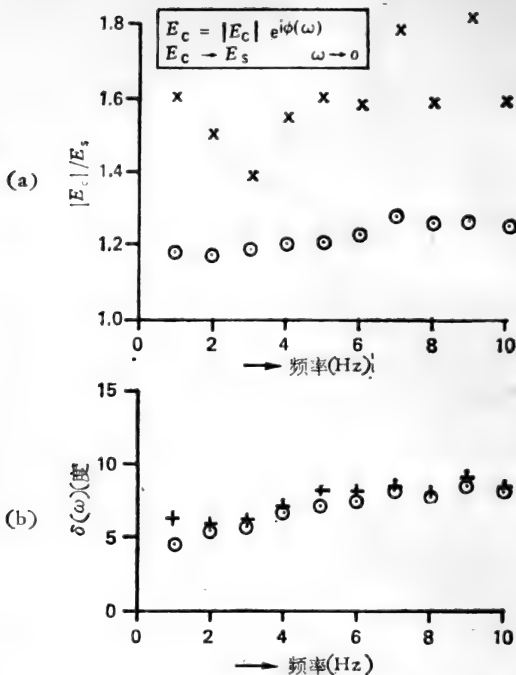


图 4-10 动脉血管的力学模量和阻尼曲线

(a)  $\frac{|E_c|}{E_s} - \omega$  曲线, (b)  $\delta - \omega$  曲线<sup>[9]</sup>。

平均值附近略有波动,基本上不变。

### 5. 应变率的影响

大量实验结果表明<sup>[3]</sup>, 绝大多数生物材料的应力-应变关系, 对于应变率的改变是不敏感的。在给定应变下, 载荷频率改变 1000 倍, 加载或减载时, 应力的变动系数为 1—2。Collin 和 Hu 用爆炸法获得高应变率, 测量了主动脉血管的应力-应变关系, 得下述经验关系:



$$\tau = (0.28 + 0.18\dot{\gamma}(e^{12\tau} - 1)) \quad (4-12)$$

$$\dot{\gamma} \leq 3.5s^{-1}$$

这说明,应变率对应力-应变关系有影响,但并不显著。

### § 4-3 血管力学特性的热力学说明

从热力学观点来看,应力的起源有二:(i)来自内能的改变;(ii)来自熵的改变。当结晶材料在外力作用下变形,但不改变结晶构造时,外力使物体变形所作之功变为物体的内能贮存起来,它可以释放出来作功,是可逆的。非结晶材料在微结构不变的条件下变形时,内能的变化亦与此类似。另一方面,若材料在外力作用下变形时,伴之以微结构有序一无序的改变,从而引起熵的改变,这一改变和外力所作的功有关,是不可逆的。前者称为内能弹性,后者称为熵弹性。二者的温度系数不同。

构成血管的胶原纤维的网络结构松弛,形态相当随机。平滑肌和弹性蛋白纤维是有组织的,但不是晶体。在变形时,必然发生有序一无序的变化,因而内能和熵同时改变。当变形较大时,必定发生某种不可逆的改变。这就是应力-应变曲线出现滞后环的热力学原因。

同样,由于过程不可逆,血管材料不可能存在所谓自然状态——外载去除后材料能够恢复到的唯一状态。至多只能在一定载荷下达到某种可重复的状态。在生物学上称此为内平衡,此状态下,因和果是一一对应的。内平衡状态是由生理条件决定的,当生理条件有较大改变时,内平衡点亦随之改变。

在作血管材料力学性质实验时,可通过重复相同的加载、卸载过程而达到可重复状态,这种方法称为预调制 (preconditioning)。

根据上述实验结果,人们提出了种种本构模型。

## § 5 增量化理论与线性粘弹性模型

粘弹性问题中研究得最多的是线性模型。然而,血管变形相当大,线性理论不适用。但是,如前所述,任一光滑的曲线总可以用一系列直线段来逼近。而且,在生理状态下,血管总是在某一平均压力下运行的,相应地有一平衡管径,瞬时半径在平衡半径附近变动,变动范围不大,一般为3—5%。因此,虽然整个应力-应变关系是非线性的,在平衡压力附近的增量化应力-应变关系是线性的,作为近似,可用线性粘弹性理论处理。

### § 5-1 增量化理论

设挤压力、轴向力、管径、壁厚平均值为  $p, F, R, h_0$ , “0”表示  $p = 0$  时的值。在载荷增量

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= |\Delta p| \exp [j(\omega t + \phi)] \\ \Delta F &= |\Delta F| \exp [j(\omega t + \alpha)] \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

的作用下,变形为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta R &= |\Delta R| \exp(j\omega t) \\ \Delta L &= |\Delta L| \exp [j(\omega t + \phi)] \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

设变形很小,得应变增量

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{d\lambda_{\theta}}{\lambda_{\theta}} = \frac{\Delta R}{R} \\ \varepsilon_z &= \frac{d\lambda_z}{\lambda_z} = \frac{\Delta L}{L} \\ \varepsilon_r &= \frac{d\lambda_r}{\lambda_r} = \frac{\Delta h}{h} \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

平均应力增量  $\tau_{\theta}, \tau_r, \tau_z$  为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta} &= \Delta T_{\theta} \approx \left( \frac{R}{h} - \frac{1}{2} \right) \Delta p + \frac{p}{h} \Delta R - \frac{pR}{h^2} \Delta h \\ \tau_z &= \Delta T_z \approx \frac{\Delta p}{2} \left( \frac{R}{h} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{p}{2h} - \frac{F}{2\pi R^2 h} \right) \Delta R \\ &\quad + \frac{\Delta F}{2\pi R h} \end{aligned} \right\} (5-4)$$

假设  $\tau_r = \Delta T_r \approx -\frac{1}{2} \Delta p$

(i) 材料均匀且具有正交性;

(ii) 材料不可压缩,因而

$$\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z + \varepsilon_r = 0 \quad (5-5)$$

(iii) 应力增量与应变增量线性相关。

因而有:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\theta\theta} & -C_{\theta z} & -C_{\theta r} \\ -C_{z\theta} & C_{zz} & -C_{zr} \\ -C_{r\theta} & -C_{rz} & C_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{\theta} \\ \tau_z \\ \tau_r \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

由于对称性,

$$C_{rz} = C_{zr} \quad C_{r\theta} = C_{\theta r} \quad C_{z\theta} = C_{\theta z} \quad (5-7)$$

又由不可压缩性,

$$\left. \begin{aligned} C_{zr} &= \frac{1}{2}(C_{zz} + C_{rr} - C_{\theta\theta}) \\ C_{r\theta} &= \frac{1}{2}(C_{rr} + C_{\theta\theta} - C_{zz}) \\ C_{\theta z} &= \frac{1}{2}(C_{\theta\theta} + C_{zz} - C_{rr}) \end{aligned} \right\} (5-8)$$

故只有三个独立的物性参数  $C_{\theta\theta}$ ,  $C_{zz}$ ,  $C_{rr}$

若令:

$$\left. \begin{aligned} S_{\theta\theta} &= \tau_{\theta} - \frac{1}{2}\tau_z - \frac{1}{2}\tau_r, \quad S_{\theta z} = -\frac{1}{2}\tau_z + \frac{1}{2}\tau_r, \\ S_{\theta r} &= \frac{1}{2}\tau_z - \frac{1}{2}\tau_r, \quad S_{z\theta} = -\frac{1}{2}\tau_{\theta} + \frac{1}{2}\tau_r, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{zz} &= -\frac{1}{2}\tau_{\theta} + \tau_z - \frac{1}{2}\tau_r, & S_{zr} &= \frac{1}{2}\tau_{\theta} - \frac{1}{2}\tau_r \\ S_{r\theta} &= -\frac{1}{2}\tau_{\theta} + \frac{1}{2}\tau_z, & S_{rz} &= \frac{1}{2}\tau_{\theta} - \frac{1}{2}\tau_z, \\ S_{rr} &= -\frac{1}{2}\tau_{\theta} - \frac{1}{2}\tau_z + \tau_r \end{aligned} \right\} (5-9)$$

则(5-6)可改写为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta z} & S_{\theta r} \\ S_{z\theta} & S_{zz} & S_{zr} \\ S_{r\theta} & S_{rz} & S_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{\theta\theta} \\ C_{zz} \\ C_{rr} \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

测量  $\Delta p$ 、 $\Delta R$ 、 $\Delta F$ 、 $\Delta L$ ，应用(5-3)(5-4)(5-6)或(5-10)即可求出增量粘弹性系数  $C_{\theta\theta}$ 、 $C_{zz}$ 、 $C_{rr}$ 。

显然， $\tau_z = \tau_r = 0$  时：

$$\varepsilon_{\theta} = C_{\theta\theta}\tau_{\theta}, \quad \varepsilon_z = -C_{z\theta}\tau_{\theta}, \quad \varepsilon_r = -C_{r\theta}\tau_{\theta}$$

$\tau_{\theta} = \tau_r = 0$  时：

$$\varepsilon_{\theta} = -C_{\theta z}\tau_z, \quad \varepsilon_z = C_{zz}\tau_z, \quad \varepsilon_r = -C_{rz}\tau_z$$

$\tau_{\theta} = \tau_z = 0$  时：

$$\varepsilon_{\theta} = -C_{\theta r}\tau_r, \quad \varepsilon_z = -C_{zr}\tau_r, \quad \varepsilon_r = C_{rr}\tau_r$$

因此可定义增量化复模数  $E_{\theta}$ 、 $E_z$ 、 $E_r$  及相应的泊松比。

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} &= \frac{1}{C_{\theta\theta}}, & E_z &= \frac{1}{C_{zz}}, & E_r &= \frac{1}{C_{rr}} \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{C_{\theta z}}{C_{zz}}, & \sigma_{zr} &= \frac{C_{zr}}{C_{zz}}, & \sigma_{r\theta} &= \frac{C_{r\theta}}{C_{\theta\theta}} \\ \sigma_{z\theta} &= \frac{C_{z\theta}}{C_{\theta\theta}}, & \sigma_{rz} &= \frac{C_{rz}}{C_{zz}}, & \sigma_{\theta r} &= \frac{C_{\theta r}}{C_{rr}} \end{aligned} \right\} (5-11)$$

令  $E = E' + jE''$ ， $C_{kl} = C'_{kl} + jC''_{kl}$ ， $\sigma_{kl} = \sigma'_{kl} + j\sigma''_{kl}$  则：

$$E'_{\theta} = \frac{C'_{\theta\theta}}{(C'_{\theta\theta})^2 + (C''_{\theta\theta})^2}, \quad E''_{\theta} = \frac{C''_{\theta\theta}}{(C'_{\theta\theta})^2 + (C''_{\theta\theta})^2} \quad (5-12)$$

$$\sigma'_{\theta z} = \frac{C'_{\theta z} C'_{zz} + C''_{\theta z} C''_{zz}}{(C'_{zz})^2 + (C''_{zz})^2}, \quad \sigma''_{\theta z} = \frac{C'_{\theta z} C''_{zz} - C''_{\theta z} C'_{zz}}{(C'_{zz})^2 + (C''_{zz})^2} \quad (5-13)$$

Patel 和 Vaishnav<sup>[6]</sup> 测量了狗胸主动脉的增量粘弹性模数, 平均伸长率  $\lambda_{\theta}$  在 1.29—1.72 之间, 频率范围为 0—5Hz。典型结果列于下表。

表 4-3 狗胸主动脉动力学特性参数<sup>[6]</sup> (单位  $10^6 \text{ dyn/cm}^2$ )

频率 (Hz)	$E'_{\theta}$	$E''_{\theta}$	$E'_z$	$E''_z$	$E'_r$	$E''_r$
0	7.38	0	6.72	0	4.58	0
0.5	9.13	0.06	9.96	0.95	6.25	0.59
1.0	9.18	0.10	10.11	0.96	6.31	0.59
2.0	9.30	0.12	10.25	0.95	6.36	0.65
3.0	9.47	0.18	10.19	0.96	6.44	0.69
4.0	9.39	0.32	10.11	1.00	6.28	0.77
5.0	9.50	0.29	10.18	1.04	6.46	0.81

## § 5-2 血管的线性粘弹性模型

增量化方法使我们有可能用较简单的线性模型处理复杂的大变形、非线性问题。但合理的血管粘弹性模型是什么? 最简单的是第二章 § 8 所述的麦克斯韦模型和佛克脱模型。试将测得的血管动力学特性与麦克斯韦体或佛克脱体的力学行为相比较, 不难看出无论是麦克斯韦模型还是佛克脱模型都不能正确地(定性地)表征血管的力学性质。因为:

(1) 测量表明,  $\omega$  从  $0-2\pi$ ,  $\delta(\omega)$  从  $0^\circ$  上升到  $7^\circ-10^\circ$ ,  $\omega > 2\pi$  时,  $\delta(\omega)$  趋于不变。而且,  $\omega > 6\pi$  时,  $|E_c|$  亦趋于不变。但按照佛克脱模型  $I_m[E_c] = E_i = \omega\eta$ ,  $|E_c|$  随  $\omega$  无限增大; 按麦克斯韦模型,  $\omega = 0$  时,  $\delta \rightarrow 90^\circ$ 。

(2) 实验证明, 血管有应力松弛且为部分松弛。而佛克脱体对应变阶跃的反应是无界的, 根本就不存在应力松弛; 麦克斯韦体则是完全松弛。二者均不能正确表示血管的应力松弛行为。

(3) 实验证明, 血管蠕变是有界的, 而麦克斯韦体的蠕变是无界的。

必需寻求合适的多元素模型, 来描述(用增量化理论)血管的粘弹性特性。这可以以第二章 § 8 所述粘弹性-弹性相当原理为基础, 即从

$$E_c(s) = E_s \frac{\prod_1^M b_n \prod_1^N (s + a_n)}{\prod_1^N a_n \prod_1^M (s + b_n)} \quad (5-14)$$

出发。因为血管蠕变是有界的, 故  $M \leq N$ ; 又因为血管应力松弛是不完全的, 故  $M \geq N$ 。两者结合得:

$$M = N \quad (5-15)$$

此外, 实验表明血管的应力松弛和蠕变行为均无振荡, 因而必有:

$$\left. \begin{array}{l} b_n \geq 0, a_n \geq 0 \\ a_{n-1} < b_{n-1} < a_n < b_n \end{array} \right\} \quad (5-16)$$

根据(6-14)及条件(6-15)(6-16)选择不同的  $N$ , 并通过实验确定  $a_n$ 、 $b_n$ , 可得各种血管粘弹性模型。作为例子, 介绍三种

### 1. Cox 模型和 W-N (Westerhof-Noordergraph) 模型<sup>[13,14]</sup>

二者均为三元素模型, 原理一样, 只是经验常数的取值不同

(5-14)中, 令  $M = N = 2$ , 得:

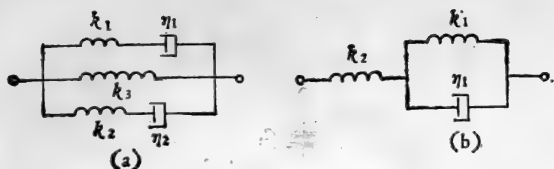


图 4-11

(a) Cox 模型, (b) W-N 模型。

$$\frac{E_c}{E_s} = \frac{\left(1 + \frac{s}{a_1}\right) \left(1 + \frac{s}{a_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{b_1}\right) \left(1 + \frac{s}{b_2}\right)} \quad (5-17)$$

令  $s = j\omega$ , 则

$$\frac{|E_c|}{E_s} = \left\{ \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{a_1}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{a_2}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{b_1}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{b_2}\right)^2\right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5-18)$$

$\delta(\omega)$

$$= \text{tg}^{-1} \left\{ \omega \cdot \frac{a_1 b_1 (b_2 - a_2) + a_2 b_2 (b_1 - a_1) + \omega^2 (b_1 + b_2 - a_1 - a_2)}{a_1 b_1 a_2 b_2 + \omega^2 [a_1 b_1 + a_2 b_2 - (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)] + \omega^4} \right\} \quad (5-19)$$

表 4-4 模型参数<sup>[13,14]</sup>

参 数	W-N 模型		参 数	Cox 模型
	主动脉 (s <sup>-1</sup> )	其它动脉 (s <sup>-1</sup> )		股动脉 (s)
a <sub>1</sub>	5.8	4.0	$\frac{1}{a_1}$	0.385
b <sub>1</sub>	6.0	6.0	$\frac{1}{b_1}$	0.308
a <sub>2</sub>	39	50	$\frac{1}{a_2}$	0.068
b <sub>2</sub>	46	70	$\frac{1}{b_2}$	0.056

经验参数取值见表 4-4。

为了便于模拟计算，W-N 模型，如图 4-12 示。其中

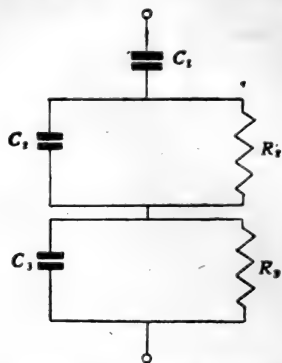


图 4-12 W-N 电模拟模型

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{3\pi R_1^2(R_1 + h)^2}{E_s h(2R_1 + h)} \\
 C_2 Q_2 &= \frac{1}{b_1} \\
 C_2 &= \frac{a_1 a_2 (b_2 - b_1)}{b_2 (b_1 - a_1)(a_2 - b_1)} \cdot C_1, & C_3 Q_3 &= \frac{1}{b_2} \\
 C_3 &= \frac{a_1 a_2 (b_2 - b_1)}{b_1 (b_2 - a_1)(b_2 - a_2)} \cdot C_1
 \end{aligned} \right\} (5-20)$$

## 2. Goedhard-Knoop 模型

Goedhard 和 Knoop<sup>[15]</sup> 提出一种四参数模型，取  $M = N = 4$ ，由(5-14)得：

$$E_c(s) = E_s \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 (s + a_1)(s + a_2)(s + a_3)(s + a_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4 (s + b_1)(s + b_2)(s + b_3)(s + b_4)} \quad (5-21)$$

令  $s = j\omega$ ，则变为



$$\frac{E_c(\omega)}{E_s} = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{a_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{a_2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{a_3}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{a_4}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{b_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{b_2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{b_3}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{b_4}\right)} \quad (5-22)$$

考虑到平滑肌的紧张或松弛，取经验常数如下表。

表 4-5 G-K 模型参数<sup>[15]</sup>

n	主 动 脉 (s)				总 颈 动 脉 (s)			
	紧 张		松 弛		紧 张		松 弛	
	$\frac{1}{a_n}$	$\frac{1}{b_n}$	$\frac{1}{a_n}$	$\frac{1}{b_n}$	$\frac{1}{a_n}$	$\frac{1}{b_n}$	$\frac{1}{a_n}$	$\frac{1}{b_n}$
1	10.4	9.8	10.4	9.7	13.3	9.3	13.3	9.1
2	3.8	3.4	2.3	2.1	4.9	4.1	1.6	1.4
3	0.56	0.50	0.37	0.33	0.53	0.42	0.26	0.22
4	0.056	0.050	0.040	0.036	0.046	0.039	0.50	0.044

无论 W-N 模型、Cox 模型还是 Goedhard-Koop 模型，都能正确地描述血管的应力松弛、蠕变等行为，但所得滞后迴线形状对应变率(或应力变化率)很敏感，这和实验结果不符。

上述线性粘弹性模型只能用于增量化应力-应变关系，即  $E_c(\omega)$  是增量模数。

## § 6 拟弹性假说

用增量化理论和线性粘弹性模型描述大血管的力学性质有两大弊病：

(1) 生理条件下，血管内压变化相当大，欲用增量化模型充分描述非线性的应力-应变关系，必须把上述模型中的物性参数变为平衡应力或平衡应变的函数，这相当困难，目前尚无

结果。

(2) 由图 4-7 可见, 即使用实验方法确定了各个平衡应力(或应变)状态下的增量化物性参数, 也不能准确描述有限变形时同样应力(或应变)下, 血管的力学性质。

因此, 需要另辟蹊径。

由于血管材料的应力-应变关系对于应变率的改变不敏感, 冯元桢<sup>[10]</sup>提出拟弹性假说, 认为血管可以看作加载和减载时具有不同弹性反应的弹性体。这样, 就可以根据血管静力学实验的结果, 来建立经验本构关系。

### § 6-1 冯元桢的拟弹性模型

考虑一维拉伸。拉格朗日应力为  $T$ , 伸长比为  $\lambda$ 。按拟弹性假说,

$$\left. \begin{aligned} T = f_1(\lambda) \quad \frac{d\lambda}{dt} > 0 \\ T = f_2(\lambda) \quad \frac{d\lambda}{dt} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

$f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$  时为纯弹性体。为确定  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$ , 冯元桢和 Tanaka<sup>[20]</sup> 用狗的各段主动脉血管, 取周向和纵向试样, 做了大量一维拉伸实验, 典型结果如图 4-13 示。

由此可见, 应力-应变关系可用两段不同的曲线表示。当  $T < 200\text{gm/cm}^2$  时,  $T$  可写作应变  $\gamma = (\lambda - 1)$  的幂函数。

$$T = K\gamma^b \quad (6-2)$$

各段动脉加载和减载时的  $K$ 、 $b$  值不一样, 见表 4-6。

当  $200\text{gm/cm}^2 < T < 600\text{gm/cm}^2$  (生理范围) 时, 有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{d\lambda} = \alpha(T + \beta) = \alpha T + E_0 \\ E_0 = \alpha\beta \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

故

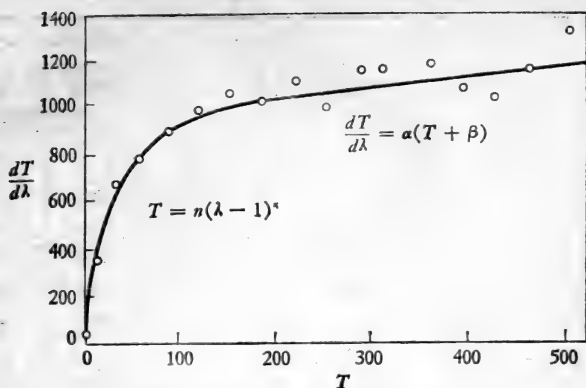


图 4-13 狗胸主动脉在加载过程中的  $\frac{dT}{d\lambda} - T$  曲线<sup>[3]</sup>

表 4-6 狗主动脉加载时的  $K$ 、 $b$  值<sup>[20]</sup>

区 段	$b$	$K(\text{g/cm}^2)$	区 段	$b$	$K(\text{g/cm}^2)$
周向			纵向		
主动脉弓	2.00	4009	主动脉弓	1.75	1930
胸主动脉(近)	2.23	6752	胸主动脉(近)	2.02	1998
胸主动脉(中)	2.26	6139	胸主动脉(中)	2.59	1038
胸主动脉(远)	2.09	9132	胸主动脉(远)	2.30	1671
腹主动脉(近)	1.99	1325	腹主动脉(近)	1.48	1408
腹主动脉(远)	1.52	967	腹主动脉(远)	1.60	2923
髂动脉	1.67	2242	髂动脉	1.37	2194
股动脉	1.59	924	股动脉	1.41	1836

$$T = (T^* + \beta)e^{\alpha(\lambda - \lambda^*)} - \beta \quad (6-4)$$

$T^*$ 、 $\lambda^*$  为参考点。各段主动脉  $\alpha$ 、 $E_0 (= \alpha\beta)$ 、 $T^*$  ( $\lambda^* = 1.6$ ) 值不同，表 3-6 给出了狗主动脉在加载时的  $\alpha$ 、 $E_0$ 、 $T^*$  值及其方差。

应该指出，对于主动脉血管来说，加载曲线和卸载曲线的差异不甚显著，作为近似，可设二者能用同一经验方程表示。

表 4-7 狗主动脉的  $\alpha$ 、 $E_0$ 、 $T^*$  值 ( $T > 200 \text{ gm/cm}^2$ )<sup>[20]</sup>

区 段	$\alpha$		$E_0$		$T^*(\text{g/cm}^2) \lambda^* = 1.6$	
	均值	方差	均值	方差	均值	方差
周向						
主动脉弓	0.88	0.83	910	488	535	55
胸主动脉(近)	0.92	0.68	885	319	585	130
胸主动脉(中)	1.24	0.50	902	175	630	85
胸主动脉(远)	1.48	0.04	866	86	675	200
腹主动脉(近)	3.24	0.45	349	198	765	150
腹主动脉(远)	3.88	0.70	160	104	570	115
髂动脉	4.70	1.52	67	364	770	200
股动脉	4.15	0.83	-14	226	720	100
纵向						
主动脉弓	1.50	0.91	565	267	485	70
胸主动脉(近)	2.93	0.83	385	281	624	180
胸主动脉(中)	2.41	0.46	508	561	442	30
胸主动脉(远)	2.12	0.38	582	451	460	40
腹主动脉(近)	4.36	0.39	227	81	712	210
腹主动脉(远)	3.81	0.51	636	201	578	25
髂动脉	1.30	0.28	1270	62	692	190
股动脉	1.06	0.18	852	47	534	130

即假设血管是完全弹性体。

与(6-4)类似,平修二等<sup>[11]</sup>得如下经验应力-应变关系,

$$\tau = c \cdot e^{m\epsilon} \quad (6-5)$$

这里  $\tau$  是欧拉应力,

$$\tau = \frac{W}{A}$$

进而,平修二等认为,不同血管力学性质的差异决定于弹性蛋白纤维和胶原纤维的含量。设  $A_e$ 、 $A_c$  为血管断面上弹性蛋白纤维和胶原纤维所占的面积百分比,  $c$ 、 $m$  与  $A_e$  或  $A_c$  有如下经验关系:

$$\left. \begin{aligned} m &= -0.233A_c + 13.667 \quad \text{或} \quad m = 0.193A_c - 0.016 \\ c &= 0.0709A_c - 1.460 \quad \text{或} \quad c = -0.05A_c + 2.33 \end{aligned} \right\} (6-6)$$

上述本构关系限于一维拉伸,轴对称变形时如何,可用应变能函数描述。

## § 6-2 应变位能

按拟弹性假说,血管的二维或三维应力-应变关系可用应变能函数给出。若将血管看作圆柱管,则其壁受力状态是轴对称的,取柱坐标  $\{r, \theta, z\}$ 。若可忽略壁厚的变化,只考虑周向和轴向应变,则

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{1}{2}(\lambda_\theta^2 - 1) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{2}(\lambda_z^2 - 1) \end{aligned} \right\} (6-7)$$

$\lambda_\theta, \lambda_z$  为周向和轴向伸长比。

关于血管壁材料的应变能函数,目前有两种形式。一种是 Patel 和 Vaishnav 提出来的多项式近似,

$$\begin{aligned} \rho_0 W &= A\epsilon_\theta^2 + B\epsilon_\theta\epsilon_z + C\epsilon_z^2 + D\epsilon_\theta^3 + E\epsilon_\theta^2\epsilon_z \\ &\quad + F\epsilon_\theta\epsilon_z^2 + G\epsilon_z^3 \end{aligned} \quad (6-8)$$

常数  $A, B, \dots$  等因血管而异。另一种是冯元桢等<sup>[33]</sup>提出的指数函数形式

$$\begin{aligned} \rho_0 W &= \frac{C}{2} \exp[a_1(\epsilon_\theta^2 - \epsilon_\theta^{*2}) + a_2(\epsilon_z^2 - \epsilon_z^{*2}) \\ &\quad + 2a_4(\epsilon_\theta\epsilon_z - \epsilon_\theta^*\epsilon_z^*)] \end{aligned} \quad (6-9)$$

$C$  的量纲为  $[ML^{-1}T^{-2}]$ ,  $a_1, a_2, a_4$  为无量纲常数,  $\epsilon_\theta^*, \epsilon_z^*$  为参考应力  $S_\theta^*, S_z^*$  (Kirchhof 应力)作用下的参考应变。 $C, a_1, a_2, a_4$  因血管而异。为确定这些常数,冯元桢和 Fronck、Patitucci<sup>[32]</sup> 等用不同部位的兔动脉做了试验,并将(6-8)和(6-9)

作了比较。参考应力为： $S_{\theta}^* = 34\text{KPa}$ ， $S_z^* = 13\text{KPa}$ ，相当于管内压力为100mmHg，所得结果列于表4-8、表4-9、表4-10。

表4-8、表4-7分别列出了兔颈动脉测量数据拟合方程(6-8)和(6-9)所得的常数。

表4-8 方程(6-9)经验常数(兔颈动脉)

	C (10KPa)	$a_1$	$a_2$	$a_4$
平均值	2.9307	2.5084	0.4615	0.1764
标准差	0.9843	1.2565	0.2562	0.0943
误差	0.2730	0.3485	0.0710	0.0261

表4-9 方程(6-8)经验常数(单位: 10KPa, 兔颈动脉)

	A	B	C	D	E	F	G
平均值	-7.1889	3.1255	0.1911	1.3711	10.2775	-3.3676	0.0787
标准差	1.6924	0.6180	0.5020	0.9351	1.6719	0.8126	0.4205
误差	0.4694	0.1714	0.1392	0.2594	0.4637	0.2254	0.1166

可见，(6-9)的系数偏差比(6-8)小得多。而且，从一段动脉到另一段动脉多项式近似的系数往往改变符号。故对血管来说，指数型应变能函数优于多项式近似。

不同部位的动脉血管用指数型应变能函数(6-9)描述其力学性质时的经验常数列于表4-10。

表4-10 方程(6-9)经验常数

	C (10KPa)	$a_1$	$a_2$	$a_4$	$e_{\theta}^*$	$e_z^*$	$S_{\theta}^*$ ( $10^3\text{dyn/cm}^2$ )	$S_z^*$ ( $10^3\text{dyn/cm}^2$ )
颈动脉	2.9307	2.5084	0.4615	0.1764	0.5191	0.9939	3.4000	1.3000
左髂动脉	2.1575	8.1674	1.2173	1.0546	0.2418	0.8834	4.5000	1.9000
下主动脉	2.1744	9.5660	3.0913	0.8805	0.2743	0.6495	4.9000	3.0000
上主动脉	3.3856	2.8173	0.5239	0.5790	0.4061	0.9566	5.2000	1.9000

对同样一批实验数据,用不同的方法去拟合,都可以拟合得很准。但是所得到的经验常数并不一定都有确切的物理意义,而我们所要的,是物理上有确定意义的经验关系。例如,同一段兔颈动脉,两次实验所得数据用(6-8)拟合得到的应变能函数分别为:

$$\begin{aligned} \rho_0 W = & -2.4385\epsilon_\theta^2 - 0.3589\epsilon_\theta\epsilon_z - 0.1982\epsilon_z^2 \\ & + 4.6334\epsilon_\theta^3 + 3.2321\epsilon_\theta^2\epsilon_z + 0.3743\epsilon_\theta\epsilon_z^2 \\ & + 0.3266\epsilon_z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 W = & -8.1954\epsilon_\theta^2 + 2.5373\epsilon_\theta\epsilon_z + 0.2633\epsilon_z^2 \\ & + 2.7949\epsilon_\theta^3 + 11.1749\epsilon_\theta^2\epsilon_z - 3.0092\epsilon_\theta\epsilon_z^2 \\ & - 0.1166\epsilon_z^3 \end{aligned}$$

各项系数差异很大,甚至符号相反,这说明这些经验参数没有确定的物理意义,故多项式近似不宜用于血管。

与此相对照,由表 4-8 可见,指数型方程中的经验参数变动范围较小,因而其物理意义可能较为确切。但它们的物理含义究竟是什么?目前尚不确定。冯元桢曾将它们和血管壁的构造联系起来,作了定性分析。

血管的应力-应变曲线必须通过原点,即静态:  $S_i = 0$ ,  $\epsilon_i = 0$ ; 和参考点  $S_i = S_i^*$ ,  $\epsilon_i = \epsilon_i^*$ 。若血管是胡克体,则其应力-应变关系完全由这两点确定了。我们知道,决定血管力学行为的结构要素,主要是弹性蛋白和胶原,前者行为近于线性,故可认为  $S_i^*$  和  $\epsilon_i^*$  是由它确定的。非线性行为来源于胶原纤维,而在方程中非线性行为确定于  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_4$ , 故可推测这些常数与胶原纤维有关。胶原纤维一开始并不受力,随着应变增大,越来越多的胶原纤维被拉伸而承力。设单位面积上所受的正应力等于它所含的胶原纤维的数目  $N$  和每一纤维承受的力  $f$  的乘积,即

$$S = Nf$$

如果进而假设应变增大时,应力的增长率和被拉伸的胶原纤维的数目  $N$  及每条纤维所受的力  $f$  成正比,那么这些比例常数就是方程(6-9)中的经验系数。 $a_1$  相应于周向应变,  $a_2$  相应于轴向应变,  $a_4$  则为交叉影响。至于系数  $C$ , 则是应力尺度, 相当于一个积分常数。

### § 6-3 组合模型

上述本构方程中,常数因血管部位而异,经验性很强。而这种差异是不同部位,血管组分不同所致。假设血管的力学性质完全取决于弹性蛋白和胶原纤维,则血管的本构方程由弹性蛋白、胶原纤维及其含量决定,这种模型称为组合模型。这里介绍两种组合模型

#### 1. Brankov 组合模型

设单位体积内弹性蛋白纤维和胶原纤维含量分别为(体积百分比)  $n_e$ 、 $n_c$ , 则

$$\tau(\lambda) = \tau_e(\lambda_e)n_e + \tau_c(\lambda_c)n_c \quad (6-10)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e &= \frac{R}{R_{0e}} = \frac{R}{R_0} \cdot \frac{R_0}{R_{0e}} = \lambda \cdot \lambda_{0e} \\ \lambda_c &= \frac{R}{R_{0c}} = \frac{R}{R_0} \cdot \frac{R_0}{R_{0c}} = \lambda \cdot \lambda_{0c} \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

$R_{0e}$ ,  $R_{0c}$  分别为纯弹性蛋白纤维管和纯胶原纤维管在自然状态(挤压力  $p = 0$ ) 下的内半径。

按(6-10)(6-11), 要确定血管应力-应变关系, 不仅需要知道  $\tau_e - \lambda_e$ ,  $\tau_c - \lambda_c$  关系及  $n_e$ 、 $n_c$ , 还需要知道  $\lambda_{0e}$ ,  $\lambda_{0c}$ 。自然状态下,  $\tau = 0$ , 故

$$n_e \tau_e(\lambda_{0e}) + n_c \tau_c(\lambda_{0c}) = 0 \quad (6-12)$$

进而假设,正常生理状态(挤压力为  $p_i$ )下,胶原纤维处于自由



态, 即  $\lambda_c = 1$ , 此时  $\lambda = \frac{1}{\lambda_{0c}}$ , 故应用拉普拉斯定律, 得

$$\left. \begin{aligned} n_c \tau_c \left( \frac{\lambda_{0c}}{\lambda_{0c}} \right) &= \frac{p_R}{a_0 \lambda_{0c}^2} \\ a_0 &= \frac{h_0}{R_0} \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

已知  $p_c$ 、 $n_c$ 、 $n_c$  及  $\tau_c - \lambda_c$ 、 $\tau_c - \lambda_c$  关系时, 由(6-12)(6-13)可求出  $\lambda_{0c}$ 、 $\lambda_{0c}$ 。

Brankov 根据 Roach 和 Burton 的实验结果, 得

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &= a \left( \lambda_c^4 - \frac{1}{\lambda_c} \right) & \lambda_c \geq 1 \\ \tau_c &= b [\exp \beta (\lambda_c - 1) - 1] & \lambda_c \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

$$a = 169 \text{g/cm}^2, \quad b = 3290 \text{g/cm}^2, \quad \beta = 5.975$$

这样(6-10)变为:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= n_c \cdot a \left[ \lambda_{0c}^4 \lambda^4 - \frac{1}{\lambda_{0c} \lambda} \right] + n_c \cdot b [\exp \beta (\lambda_{0c} \lambda - 1) - 1] & \lambda_{0c} \lambda > 1 \\ \tau &= n_c \cdot a \left[ \lambda_{0c}^4 \lambda^4 - \frac{1}{\lambda_{0c} \lambda} \right] + n_c b [\exp \beta (\lambda_{0c}^2 - 1) - 1] & \lambda_{0c} \lambda < 1 \end{aligned} \right\} \quad (6-15)$$

最近, 平修二等<sup>[11]</sup>重新测量了不含弹性蛋白纤维或不含胶原纤维的动脉血管的应力-应变关系, 得如下结果,

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &= 5.15 \times 10^{-0.56+2.98(\lambda_c-1)} \cdot (\lambda_c - 1) \\ \tau_c &= 13.55 \times 10^{-0.44+7.85(\lambda_c-1)} \cdot (\lambda_c - 1) \end{aligned} \right\} \quad (6-16)$$

代入(6-10)得:

$$\begin{aligned} \tau &= 5.15 \times 10^{-0.56+2.98(\lambda \lambda_{0c}-1)} \cdot n_c (\lambda \lambda_{0c} - 1) \\ &+ 13.55 \times 10^{-0.44+7.85(\lambda \lambda_{0c}-1)} \cdot n_c (\lambda \lambda_{0c} - 1) \end{aligned} \quad (6-17)$$

但是实际上并非全部胶原纤维受力的机会都一样。当载荷不大、变形不大时, 只有一部分胶原纤维起作用, 其余都处

于松弛状态这是 Brankov 组合模型的缺陷。

## 2. Middleman 组合模型

假设:

(1) 弹性蛋白纤维及胶原纤维为线弹性体, 弹性模量分别为  $E_e$ 、 $E_{c0}$ ;

(2) 承载胶原纤维的百分比取决于管壁所受的应变。为简单起见, 讨论一维情况, 设  $m(\gamma')d\gamma'$  表示所受应变在  $\gamma' - \gamma' + d\gamma'$  之间的胶原纤维的百分比, 则在  $\gamma$  状态下, 胶原纤维所受的应力为:

$$\tau_c(\gamma) = E_{c0} \int_0^{\gamma} (\gamma - \gamma') m(\gamma') d\gamma'$$

$$\therefore \tau(\gamma) = E_e \gamma + E_{c0} \int_0^{\gamma} (\gamma - \gamma') m(\gamma') d\gamma' \quad (6-18)$$

令 
$$E = \frac{\tau}{\gamma}$$

则:

$$E = E_e + E_{c0} \int_0^{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma'}{\gamma}\right) m(\gamma') d\gamma' \quad (6-19)$$

(3)  $m(\gamma')$  的分布如图 4-14 示, 即小应变下  $m(\gamma')$  随应变增大而增大, 设此时有

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (6-20)$$

而大应变下,  $m(\gamma')$  随  $\gamma'$  减小, 设此时:

$$\frac{dm}{m} = -bd\gamma' \quad (6-21)$$

$b$  为常数。这样,

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\gamma}{\gamma} - bd\gamma' \quad (6-22)$$

积分之得

$$m = a\gamma e^{-b\gamma} \quad (6-23)$$

$a$  为积分常数。若归一化,使:

$$\int_0^{\infty} m(\gamma) d\gamma = 1$$

$$\text{则:} \quad a = b^2 \quad (6-24)$$

这样:

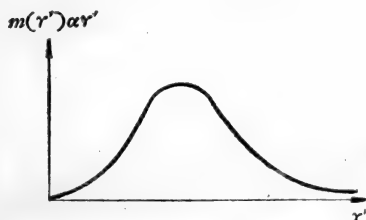


图 4-14  $m(r')dr' - r'$  关系

$$E(\gamma) = E_c + E_{c0} \left[ 1 - \frac{2}{b\gamma} \left\{ 1 - e^{-b\gamma} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 1 + \frac{1}{2} b\gamma \right) \right\} \right] \quad (6-25)$$

经验常数  $b$  因血管而异。

$$\left. \begin{aligned} E_{c0} &= 10^6 \text{ dyn/cm}^2 \\ E_c &= 10^5 \text{ dyn/cm}^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

应该指出,同样组分、同样含量下,纤维排列方式不同时,血管力学性质差异很大。而这一点,现有组合模型均未计及。此外(6-13)(6-15)本身并不是弹性蛋白和胶原纤维的其实的本构关系,更不是线弹性体(象 Middleman 假设的那样)。因而,现有的组合模型还有待改进。

综言之,拟弹性假说适于准静态。但分析脉冲波传播特性时,血管壁的粘弹性是不容忽视的,需要更完善的本构模型。

## §7 准线性理论

为描述血管的粘弹性行为,冯元桢<sup>[3,9]</sup>提出了一种准线性理论。

设血管试样受一维拉伸从  $\lambda_0 = 1$  变为  $\lambda$ , 应力  $\tau(t)$  的发展是时间和伸长比  $\lambda$  的函数。假设应力反应的历史  $K(\lambda, t)$  可以分解为

$$K(\lambda, t) = G(t)T^{(e)}(\lambda) \quad (7-1)$$

$$G(0) = 1$$

$T^{(e)}(\lambda)$  称为瞬时弹性反应,  $G(t)$  则表征历史过程。

(7-1)意味着: 尽管应力与应变的关系是非线性的, 应力与弹性反应  $T^{(e)}(\lambda)$  之间的关系却是线性的; 且历史效应本身和变形的大小无关。因而系统是准线性的。

在  $\xi$  时刻, 变形增量  $\delta\lambda(\xi)$  对于  $t(t > \xi)$  时刻应力的影响为:

$$G(t-\xi) \cdot \frac{\partial T^{(e)}[\lambda(\xi)]}{\partial \lambda} \cdot \delta\lambda(\xi) = G(t-\xi)dT^{(e)}[\lambda(\xi)]$$

由于  $\tau(t)$  与  $T^{(e)}(\lambda)$  是线性相关的, 故可应用叠加原理, 得

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\xi) \cdot \frac{\partial T^{(e)}[\lambda(\xi)]}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \cdot d\xi \quad (7-2)$$

若运动从  $t = 0$  开始,  $t < 0$  时,  $\lambda = 1, \tau = 0$ , 则有:

$$\tau(t) = T_{(0)}^{(e)} + G(t) + \int_0^t G(t-\xi) \frac{\partial T^{(e)}[\lambda(\xi)]}{\partial \lambda} d\xi \quad (7-3)$$

设  $\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \lambda}, \frac{\partial G}{\partial t}$  在  $0 \leq t < \infty$  上连续可微, 则部分积分后得:

$$\tau(t) = T^{(e)}[\lambda(t)] + \int_0^t T^{(e)}[\lambda(t-\xi)]$$

$$\times \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} \cdot d\xi \quad (7-4)$$

推广于三维,

$$\tau_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \xi) \dot{T}_{kl}^{(e)}(\xi) d\xi \quad (7-5)$$

$\dot{T}^{(e)}(t)$  表示  $T^{(e)}(t)$  对时间的导数。

现在的问题是如何确定弹性反应  $T^{(e)}(\lambda)$  及历史效应  $G(t)$ 。

### 1. 弹性反应 $T^{(e)}(\lambda)$

设在时间间隔  $[0, \epsilon]$  内, 物体伸长比从 1 变为  $\lambda$ , 按(7-4)

$$\tau(\epsilon) = T^{(e)}(\lambda) + \int_0^\epsilon T^{(e)}[\lambda(\epsilon - \xi)] \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} \cdot d\xi$$

因为  $G(t)$  是单调减小的, 故在  $[0, \epsilon]$  内, 被积函数符号不变, 应用积分中值定理可得

$$\tau(\epsilon) = T^{(e)}(\lambda) \left[ 1 - \epsilon \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=c} \right] \quad 0 \leq c \leq \epsilon$$

若  $\epsilon \rightarrow 0$  则

$$T^{(e)}[\lambda(\epsilon)] = \tau(\epsilon) \quad (7-6)$$

这说明: 弹性反应  $T^{(e)}[\lambda]$  就是与瞬时伸长比  $\lambda$  相应弹性应力, 按 § 6, 它可以由应变能函数(6-9)给出, 亦可直接用经验公式(6-4)等。

### 2. 历史效应 $G(t)$

实验表明, 应力-应变滞后环的形状对应变率  $\dot{\gamma}$  的变化不敏感, 这和任何有限元素的模型都是不相容的。故冯元桢建议用 Kelvin 模型

$$\tau + \nu_e \dot{\tau} = E_R [T^{(e)} + \nu_o \dot{T}^{(e)}] \quad (7-7)$$

$\nu_e, \nu_o, E_R$  是常数, 它们满足初始条件:

$$v_e T(0) = E_R v_\sigma T^{(e)}(0) \quad (7-8)$$

$$\because G(0) = 1 \quad \therefore T^{(e)}(0) = T(0)$$

$$\therefore E_R = \frac{v_e}{v_\sigma} \quad (7-9)$$

若

$$T^{(e)} = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (7-10)$$

则得:

$$G(t) = E_R \left[ 1 + \left( \frac{v_\sigma}{v_e} - 1 \right) e^{-\frac{t}{v_e}} \right], \quad t > 0 \quad (7-11)$$

$$\text{令} \quad S = \frac{v_\sigma}{v_e} - 1, \quad E_R = \frac{1}{1+S} \quad (7-12)$$

则(8-11)变为

$$G(t) = \frac{1}{1+S} \left[ 1 + S e^{-\frac{t}{v_e}} \right] \quad (7-13)$$

以连续变量  $v$  代替  $v_e$ , 并设  $S = S(v)$ , 得

$$G(t) = \left[ 1 + \int_0^\infty S(v) e^{-\frac{t}{v}} dv \right] \left[ 1 + \int_0^\infty S(v) dv \right]^{-1} \quad (7-14)$$

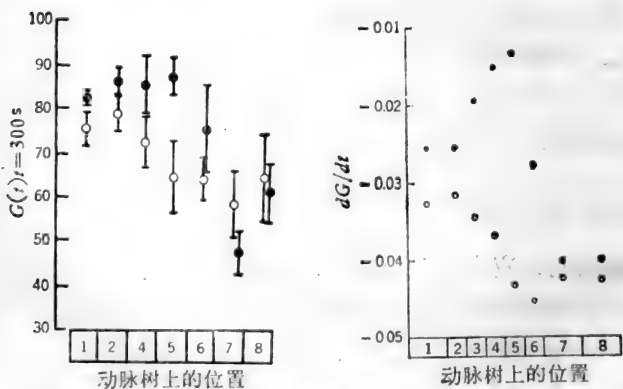


图 4-15 狗主动脉各段血管在  $t = 300$ s 时的  $G(t)$  和  $\frac{dG}{dt}$  [21]

## 冯元桢取

$$\left. \begin{aligned} S(\nu) &= \frac{c}{\nu}, \quad \nu_1 \leq \nu \leq \nu_2 \\ S(\nu) &= 0, \quad \nu < \nu_1, \nu > \nu_2 \end{aligned} \right\} \quad (7-15)$$

$c, \nu_1, \nu_2$  都是经验常数, 因血管而异。图 4-15 是狗主动脉各段血管在  $t = 300s$  时  $G(t)$  和  $\frac{dG}{dt}$  的测量结果。根据实验结果 Tanaka 和冯元桢取值如下表。

表 4-11 主动脉血管松弛常数  $c, \nu_1, \nu_2$  [19]

区 段	试样	$c$	$\nu_1(s)$	$\nu_2(s)$	试样	$c$	$\nu_1(s)$	$\nu_2(s)$
主动脉弓		0.0424	434	0.367		0.0311	451	0.431
胸主动脉(近)	周 向 试 样	0.0399	192	0.260	纵 向 试 样	0.0297	93.9	0.137
胸主动脉(中)		0.0459	286	0.211		0.0230	245	0.101
胸主动脉(远)		0.0512	230	0.118		0.0178	757	0.051
腹主动脉(近)		0.0655	162	0.059		0.0153	428	0.064
腹主动脉(远)		0.0687	98.6	0.051		0.0373	452	0.0599
髂动脉		0.0726	282	0.015		0.0832	2480	0.0065
股动脉		0.0646	119	0.040		0.0638	107.5	0.0696

## § 8 非线性粘弹性模型

Green 和 Rivlin 提出了任意粘弹性材料在有限变形时的本构关系。

$$\tau_{ij}(t) = -p'\delta_{ij} + \frac{\partial x_i(t)}{\partial X_K} \cdot \frac{\partial x_j(t)}{\partial X_L} \int_{\xi=\infty}^{OKL} S \{e_{MN}(t - \xi)\} \quad (8-1)$$

这里  $\tau_{ij}$  是欧拉应力,  $\frac{\partial x_i}{\partial X_K}, \frac{\partial x_j}{\partial X_L}$  是变形梯度,  $e_{MN}(t)$  是格

林-圣维南应变张量:

$$\epsilon_{MN} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_m}{\partial X_M} \frac{\partial x_n}{\partial X_N} - \delta_{MN} \right) \quad (8-2)$$

$p'$  为静压,

$$p' = -\frac{1}{3} \tau_{ii} \quad (8-3)$$

$S_{\xi=\infty}^{KL}$  表示历史的影响, 近似地有:

$$S^{KL} \approx \sum_{n=0}^N S_n^{KL} \quad (8-4)$$

$$S_n^{KL} = \int_{-\infty}^t \cdots \int_{-\infty}^t K_{M_1 N_1 \cdots M_n N_n}^{KL}(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \\ \times \dot{\epsilon}_{M_1 N_1}(\xi_1) \cdots \dot{\epsilon}_{M_n N_n}(\xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n \quad (8-5)$$

假设材料不可压缩、均匀、具有正交性, 且仅限于受挤压力作用的圆柱管段, 则问题可大大简化。若略  $n > 2$  的项, 则

$$S_1^{KL} = \int_{-\infty}^t K_{22}^{KL}(t - \xi) \dot{\epsilon}_{22}(\xi) d\xi \\ + \int_{-\infty}^t K_{33}^{KL}(t - \xi) \dot{\epsilon}_{33}(\xi) d\xi \quad (8-6a)$$

$$K = L$$

$$S_2^{KL} = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_{2222}^{KL}(t - \xi_1, t - \xi_2) \dot{\epsilon}_{22}(\xi_1) \dot{\epsilon}_{22}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_{2233}^{KL}(t - \xi_1, t - \xi_2) \dot{\epsilon}_{22}(\xi_1) \dot{\epsilon}_{33}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_{3333}^{KL}(t - \xi_1, t - \xi_2) \dot{\epsilon}_{33}(\xi_1) \dot{\epsilon}_{33}(\xi_2) \\ \cdot d\xi_1 d\xi_2 \cdots \quad (8-6b)$$

$$K = L$$

这样得会有 10 个核函数的非线性本构方程:

$$\tau_\theta - \tau_r = C_{22}(t) [2e_\theta + 4e_\theta^2] + C_{23}(t) [e_z + 2e_\theta e_z] \\ + C_{222}(t, t) [3e_\theta^2 + 6e_\theta^3] + C_{223}(t, t) [2e_\theta e_z]$$



$$+ 4\epsilon_{\theta}^2 \epsilon_z] + C_{233}(t, t)[\epsilon_z^2 + 2\epsilon_{\theta}\epsilon_z^2] \quad (8-7a)$$

$$\begin{aligned} \tau_z - \tau_r = & C_{32}(t)[\epsilon_{\theta} + 2\epsilon_{\theta}\epsilon_z] + C_{33}(t)[2\epsilon_z + 4\epsilon_z^2] \\ & + C_{322}(t, t)[\epsilon_{\theta}^2 + 2\epsilon_{\theta}^2\epsilon_z] + C_{323}(t, t)[2\epsilon_{\theta}\epsilon_z \\ & + 4\epsilon_{\theta}\epsilon_z^2] + C_{333}(t, t)[3\epsilon_z^2 + 6\epsilon_z^3] \cdots \quad (8-7b) \end{aligned}$$

这里

$$C_{22}(t) = \frac{1}{2} K_{22}^{22}(t), \quad C_{32}(t) = K_{22}^{33}(t)$$

$$C_{23}(t) = K_{33}^{22}(t), \quad C_{33}(t) = \frac{1}{2} K_{33}^{33}(t)$$

$$C_{222}(t, t) = \frac{1}{3} K_{2222}^{22}(t, t), \quad C_{322}(t, t) = K_{2222}^{33}(t, t)$$

$$C_{223}(t, t) = \frac{1}{2} K_{2233}^{22}(t, t), \quad C_{323}(t, t) = \frac{1}{2} K_{2233}^{33}(t, t)$$

$$C_{233}(t, t) = K_{3333}^{22}(t, t), \quad C_{333}(t, t) = \frac{1}{3} K_{3333}^{33}(t, t)$$

... (8-8)

核函数可统一写为:

$$C(t) = a + b \exp(-\alpha t^{\beta}) \quad (8-9)$$

Young 等<sup>[16]</sup>通过动脉血管应力松弛实验求出了十个核函数的经验系数,见表 4-12。

表 4-12\*<sup>[16]</sup> 核函数经验系数

	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{222}$	$C_{223}$	$C_{233}$	$C_{32}$	$C_{33}$	$C_{322}$	$C_{323}$	$C_{333}$
$a$	247	189	17	-4	29	32	320	200	-13	10
$b$	23	-19	0	-7	28	0	0	22	-17	25
$\alpha$	0.23	0.06	0	0.16	0.25	0	0	0.66	0.34	0.22
$\beta$	0.57	0.82	0	0.50	0.50	0	0	0.61	0.53	0.61

\* 取此表值时,  $C$  的单位为  $10^3 \text{ dyn/cm}^2$ 。

这些常数都是随血管类别而变的,因此,实用中,这种本构方程太繁了。

此外, Sharma 等<sup>[17,18]</sup>,从一维拉伸实验结果,建立了一维非线性粘弹性模型,它比较简单。

$$\left. \begin{aligned} \lambda\tau(t) &= E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \lambda\tau(t) &= E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + (E_4e^{-\frac{t}{\nu}} + E_c)\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0)^3 \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

$\varepsilon > \varepsilon_0$

对胸主动脉,  $\varepsilon_0 = 0.27$ ,  $E_1 = 3.37 \times 10^{-3}\text{kg/mm}^2$   
 $E_2 = 7.4 \times 10^{-3}\text{kg/mm}^2$ ,  $E_4 = 2.03 \times 10^{-3}\text{kg/mm}^2$   
 $E_c = 5.72 \times 10^{-3}\text{kg/mm}^2$ ,  $\nu = 40.8\text{s}$

## § 9 小动脉的力学性质

小动脉富含平滑肌,可以能动地收缩,对周缘血流微循环起调节作用,因而其力学性质具有重大生理意义,但很难用前述方法测定。故迄今对此知之甚少。

Gore 用猫肠系膜做自动灌流实验,压力在体循环生理范围内变化,测量小动脉的内、外径。设外部压力为零,则平均周向应力为

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = p \frac{R}{h} \quad (9-1)$$

$R$  是血管内半径,  $h$  是管壁厚度。结果如图 4-16 示。图中虚线是小动脉的平均周向应力-平均直径关系,和大动脉很相似。实线是压力为  $100 \pm 10$  (S.D)mmHg 时,不同管径的小动脉的平均周向应力的变化,显然,  $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle$  随血管直径减小而变小。

Gore 实验反映了小动脉力学性质的一个方面——被动承载时,其性状和大动脉类似。由于小动脉血管含有大量平

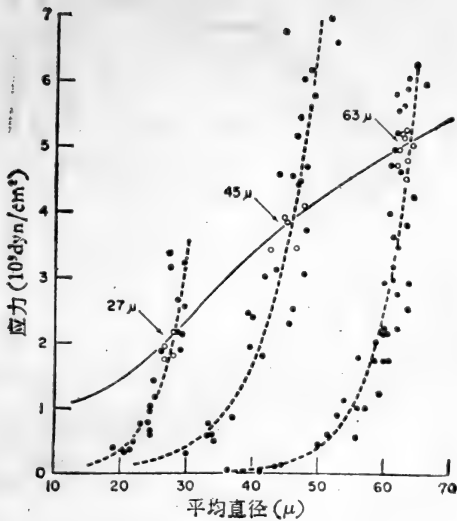


图 4-16 小动脉血管平均周向应力与平均直径的关系

滑肌,机械刺激(应力变化)、 $O_2$ 、去甲肾上腺素等,会引起能动的反应,这对于血流调节十分重要。为此 Baez 等等用神经组织完整的鼠阑尾系膜做了实验。图 4-17 是动脉压等于静脉压、管内血液不流动时,测得的压力-直径关系。可见,在某一压力范围内,管径不随压力变化,这和弹性反应完全不同,系血管平滑肌主动收缩所致。不仅如此,当灌注压力低于某一临界值时,平滑肌的主动收缩,将使小动脉关闭。

Gore 曾用实验证明,蛙的小动脉对于去甲肾上腺素的反应,与血管壁平均周向应力  $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle$  的大小有关,当  $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = 1 - 1.5 \times 10^5 \text{ dyn/cm}^2$  时,最为灵敏;高于或低于此范围时,去甲肾上腺素引起的血管收缩量均较小。

总之,小动脉血管的力学行为十分复杂,认识其规律,是当前生物力学领域的一个重要课题。

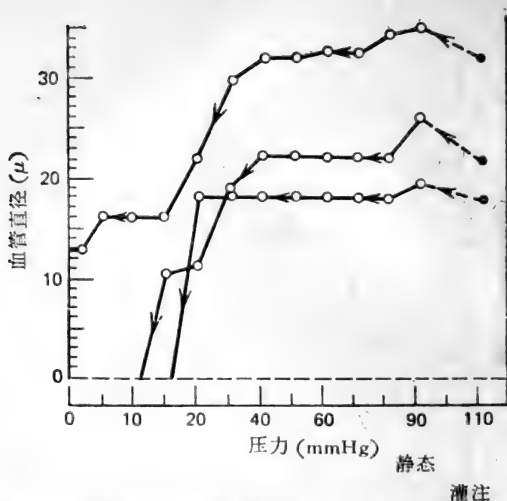


图 4-17 神经完好的组织在静态时,小动脉压力与直径的关系

## § 10 毛细血管的力学性质

毛细血管很细,和血细胞直径同量级,其变形更是一个微量,很难精确测定。因此,人们对毛细血管力学性质的认识很不完备。

根据大量肠系膜实验的结果, Zweifach 等<sup>[23]</sup>断言,血压改变时,毛细血管直径没有可以觉察的变化,象刚性管。冯元桢<sup>[24]</sup>根据测得的肠系膜的应力-应变关系,计算了周围组织对毛细血管刚度的影响。结果表明,肠系膜受张时,其毛细血管刚度的 99% 以上来自周围组织。只有不到 1% 来源于内皮膜和基质膜。因此,就其力学性质而言,应将毛细血管和其周围组织看作整体。如果周围组织比毛细血管大,且受张,则毛细血管的刚度主要来自周围组织,毛细血管就象是胶体介质内

的孔道。如果周围组织与毛细血管相比不很大,或很松弛,则毛细血管就很容易扩张。肠系膜内的毛细血管属于前者,而肺毛细血管则为后者一例。

概言之,毛细血管的力学性质取决于它和周围组织的关系。不同的器官和组织内,毛细血管组织具有不同的构造,因而其力学性质亦不相同,需分别研究。这正是微循环研究的一个重要课题。

### 参 考 文 献

- [1] Frasher, W. G.: *Biomechanics, Proceedings of a Symposium at ASME*, Ed. by Y. C. Fung, 1966.
- [2] Burton, A. C.: *Handbook of Physiology Section II, Circulatory vol. 1*, Ed. by Hamilton American Physiological Society, Washington. D. C., 1962.
- [3] Fung, Y. C.: *Peripheral Circulation*, Ed. by Johnson, P. C., J. Wiley & Sons, 1978.
- [4] 岡小天: レオロジー——生物レオロジー, 裳華房, 1976.
- [5] Attinger, E. O.: *IEEE Trans. BME*, **16**(4), 253, 1969.
- [6] Patel, D. J., Vaishnav, R. N. *Cardiovascular Fluid Dynamics Vol. 2*, Ed. by Bergel, D. H., Academic Press, London, New York, 1972.
- [7] Bergel, D. H.: *J. Physiol (London)*, **156**, 445, 1961.
- [8] Bergel, D. H.: *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* Ed. by Fung, Y. C., Perrone, N. Anliker, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [9] Fung, Y. C.: *Biomechanics, Its Foundations and Objectives*, Ed. by Fung, Y. C., Perrone, N., Anliker, M., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [10] Fung, Y. C.: *Theoretical and Applied Mechanics*, Ed. by Koiter, W. T. North-Holland Publ. Co, 1976.
- [11] 平修二等: 材料, **23**, 437, 1974.
- [12] Brankov, G. et al.: *Mechanics of Biological Solids*, Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia. 1975.
- [13] Cox, R. H.: *J. Biomechanics*, **5**(2), 251, 1972.
- [14] Westerhof, N., Noordergraph, A.: *J. Biomechanics*, **3**(3), 351, 1970. 1970.
- [15] Goedhard, W. J. A., Knoop, A. A.: *J. Biomechanics*. **6**(3): 281.

1973.

- [16] Young, A. et al.: *J. Biomechanics.*, **10(9)**, 549, 1977.
- [17] Sharma, M. G.: Biomechanics Symposium., ASME, 1973.
- [18] Sharma, M. G., Hollis, T. M.: *J. Biomechanics*, **9(5)**, 293, 1976.
- [19] Tanaka, T. T., Fung, Y. C., *J. Biomechanics*, **7**, 357, 1974.
- [20] Middleman, S.: *Transport Phenomena in the Cardiovascular system*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [21] Fung, Y. C.: *Biomechanics Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.
- [22] Gore, R. W.: *Circulation Research*, **34**, 581, 1974.
- [23] Zweifach, B. W., Intaglietta, M.: *Microvascular Research*, **1**, 83, 1968.
- [24] Fung, Y. C. *Federation of American Societies for Experimental Biology, Federation Proceedings*, **25**, 1761, 1966.

## 第五章 肌肉力学基础

### § 1 引 言

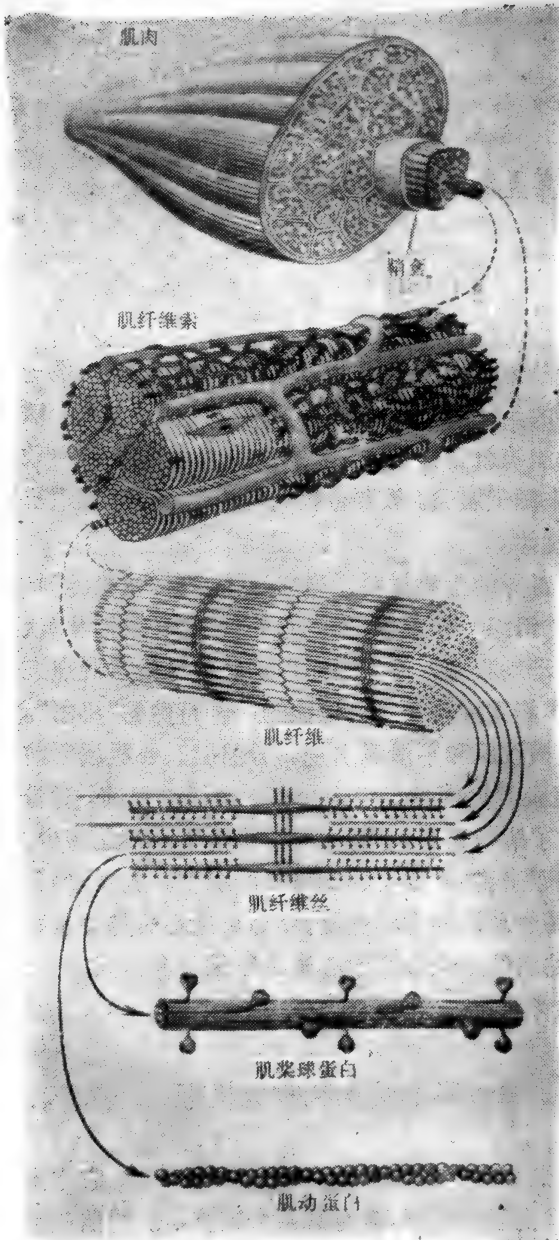
生物组织能动地收缩、松弛，推动其内部流体运动，是一种普遍而又重要的生理流动现象。心脏内部的血液流动、输尿管内尿的蠕动流等就是这类流动的代表。而生物组织主动运动的能力，则来源于肌肉，故要分析这种流动，必须知道肌肉收缩-松弛的规律。

肌肉是一种奇异的生物材料。当它处于静息(或松弛)状态时，能象其他软组织一样承载；但当它处于激发(或活化)状态时，它能够主动地收缩，产生力而作功。故从能量观点来讲，肌肉是将化学能直接转变为机械能的一种特殊的“机器”。

人体肌肉有横纹肌和平滑肌之别，骨骼肌、心肌属于前者，血管、输尿管及其他内脏组织均含有平滑肌。目前，对骨骼肌的力学性质了解得最多，心肌次之，平滑肌则知之甚少。而对生理流动问题来讲，最重要的却是平滑肌和心肌。作为基础，本章首先介绍骨骼肌的力学性质；然后讨论心肌与骨骼肌的差别，以及骨骼肌的结论推广于心肌的结果与存在问题；最后简介平滑肌的特性。

### § 2 横纹肌的结构和收缩机理

横纹肌的构造如图 5-1 所示，基本单位是肌纤维，它本身是一个细胞，大体上呈圆柱形，含有数百个细胞核。骨骼肌细



胞直径约10—60 $\mu\text{m}$ ，长度从数毫米至数厘米不等，最长的可达30cm。心肌细胞直径约10—20 $\mu\text{m}$ ，长约50—100 $\mu\text{m}$ ，它和骨骼肌细胞在构造上的差别在于：心肌细胞含有大量线粒体周围毛细血管也很丰富，大约每一根心肌纤维，都有一根毛细血管供给营养和氧；骨骼肌细胞内的线粒体较少，周围毛细血管也不如心肌密。这是因为，后者可以暂时缺氧，而前者却不可须臾不足。

图5-1 横纹肌的层次构造<sup>〔1〕</sup>



许多肌纤维由结缔组织联结在一起,形成肌纤维束,外面用一层坚韧的结缔组织鞘套包住。一个个肌纤维束再组成一块块肌肉。

肌肉细胞质可分为许多肌原纤维,直径约  $1\mu\text{m}$ 。用染色剂浸染后,在显微镜下观察时,可以看到明暗相间的条纹。较亮的称为 I 带,较暗的称为 A 带; I 带被一条细线一分为二,该线称为 Z 盘, A 带中央亦有一颜色较淡的区域,称为 H 带。如图 5-2 所示。

肌原纤维由 Z 盘分成一个个肌纤维节,长约  $2.5\mu\text{m}$ 。它由粗、细两种肌纤维丝交错对插排列而组成。从横截面来看,粗纤维丝的排列呈正六边形,中心间距约  $300\text{ \AA}$ ,每根粗纤维丝与六根细纤维丝相联结,细纤维丝亦呈六边形。X 射线衍射实验证明,在粗细两纤维丝相重叠的部分,有介桥 (cross-bridge) 将二者相联。介桥以粗纤维丝为轴呈螺旋形排列,每节螺旋有六个介桥,分别与六根细纤维丝相联,相邻两介桥间距约  $400\text{ \AA}$ ,相对旋转角约  $120^\circ$ 。

粗纤维丝是肌球蛋白分子组成,分子量约  $500,000$ ,呈杆状,一端较大,略成球形,突出于粗纤维丝轴线之外,介桥就在这里形成。球端突出部富含活性酶——三磷酸腺苷酶,它促使 ATP 的高能磷键裂解而释放能量,供肌肉收缩作功之用。

细纤维丝由肌动蛋白、原肌球蛋白和肌钙蛋白三种蛋白

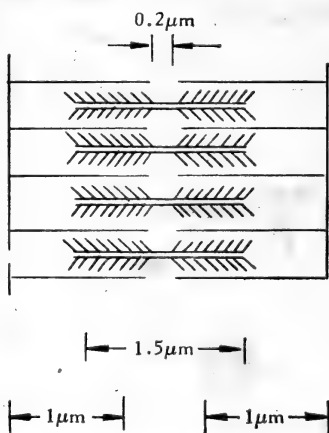


图 5-2 横纹肌肌原纤维的构造<sup>[1]</sup>

质分子构成,其排列细节还不很清楚。

肌肉纤维的收缩是怎样发生的呢? 实验证明,是  $\text{Ca}^{++}$  的释放触发了收缩过程,其机理如图 5-3 示。在松弛状态下,原肌球蛋白、肌钙蛋白与肌动蛋白结合,抑制了肌动蛋白和肌球蛋白之间的相互作用,粗、细纤维间不发生相对运动。在神经

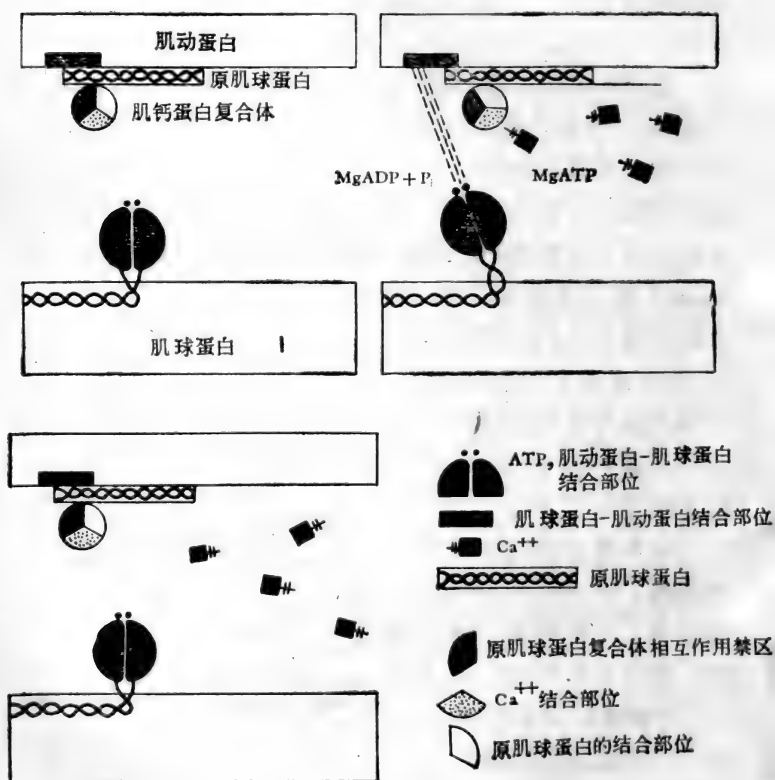


图 5-3 肌纤维节收缩的生化机理<sup>[1]</sup>

脉冲刺激下,肌细胞膜的去极化反应,使  $\text{Ca}^{++}$  释放出来,进入肌浆。肌浆中的自由  $\text{Ca}^{++}$  与起控制作用的原肌球蛋白、肌钙蛋白分子相结合,使其抑制作用削弱,肌动蛋白激活,与肌球蛋白球形突出部联结,形成介桥。这时,借助于 ATP 高能磷酸键裂解释放出来的能量,通过介桥的作用,使粗细纤维相对滑动,而粗、细纤维丝本身的长度不变。于是,肌纤维节收缩,作机械功。当肌细胞膜再极化时,肌浆中的自由  $\text{Ca}^{++}$  减少,原肌球蛋白、肌钙蛋白重新与肌动蛋白结合,介桥减少,粗、细纤维恢复原位,肌纤维节松弛。这就是肌肉收缩的纤维滑移理论,最早由 Huxley (1957) 提出。

显然,肌纤维收缩所产生的张力,取决于肌纤维节内可供与控制蛋白(原肌球蛋白、肌钙蛋白等)相结合的  $\text{Ca}^{++}$  数量,收缩速度则决定于肌球蛋白分子球端突出部所含 ATP 酶的活性。

### § 3 Hill 方程和 Hill 模型理论

肌肉构造和收缩机理的研究为认识肌肉的力学性质提供了基础,但现有知识,尚不足以使我们能由此导出准确的本构方程。仍须从宏观的实验结果出发,用现象学的方法,建立半经验理论。本世纪三十年代, Hill 的经验性工作,奠定了这一理论的基础,四十多年来,一直主导着肌肉力学的研究工作。

#### § 3-1 Hill 方程

骨骼肌的力学行为有两大特点,(i) 如图 5-4 所示,神经脉冲、电脉冲或化学刺激引起肌肉收缩所产生的张力是随时间和刺激频率而变化的。频率越高,张力越大。但当频率足够高(高于 100Hz)时,张力不再随频率改变,而且在时间域

上,很快趋于某一稳定值,不再随时间变化。此时,张力最大。肌肉的这种状态称为挛缩。骨骼肌力学性质的实验,都是在挛缩状态下进行的,因而由此导出的半经验方程,所描述的都是挛缩状态下骨骼肌的性质。(ii) 松弛状态下骨骼肌应力与主动收缩时所产生的力相比,很小很小,故可不计。

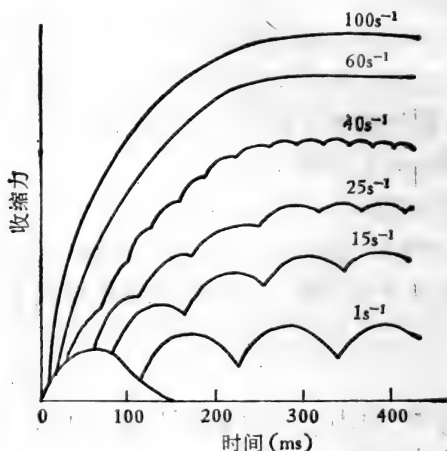


图 5-4 张力与刺激频率的关系 [1]

Hill 取青蛙缝匠肌纤维为试样,两端夹紧,保持其长度  $L_0$  不变,以足够高的频率和电压使肌纤维挛缩,测得其张力  $T_0$ 。然后将试样一端松开,肌纤维以速度  $\nu$  收缩,相应张力为  $T$ ,则  $T < T_0$ 。

若肌纤维收缩时,单位时间内释放出来的化学能为  $E$ ,单位时间内放出的热量为  $Q$ ,收缩产生的热为  $Q_s$ ,收缩时所作的机械功率为  $W = T\nu$ ,按热力学第一定律,

$$E = Q + Q_s + W \quad (3-1)$$

若长度不变,即所谓等长收缩,则:

$$E = Q \quad (3-2)$$

Hill 测量  $E$  和  $Q$ , 得  $(Q_s + W) = E - Q$ 。由此得  $Q_s + W$  的经验关系:

$$Q_s + W = b(T_0 + T) \quad (3-3)$$

$b$  是经验常数。进而, Hill 假设

$$Q_s = av \quad (3-4)$$

$a$  也是经验常数。这样, (3-3) 变为

$$b(T_0 - T) = (a + T)v \quad (3-5)$$

重新整理得:

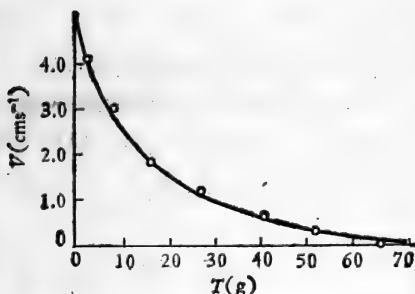


图 5-5 Hill 方程与实验结果的比较<sup>[3]</sup>

$$(a + T)(v + b) = b(T_0 + a) \quad (3-6)$$

可见,  $T$  与  $v$  近乎成双曲关系。  $T$  增大时,  $v$  减小,  $T = 0$  时,  $v = v_0 = v_{\max}$ ;  $v = 0$  时,  $T = T_0 = T_{\max}$ 。显然

$$v_0 = \frac{bT_0}{a} \quad (3-7)$$

若以  $T_0$ 、 $v_0$  为参考, 则 Hill 方程(3-6)可写成如下无量纲形式

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1 - \frac{T}{T_0}}{1 + c \frac{T}{T_0}} \quad (3-8)$$

或

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1 - \frac{v}{v_0}}{1 + c \frac{v}{v_0}} \quad (3-9)$$

这里

$$c = \frac{T_0}{a} \quad (3-10)$$

可见，Hill 方程有三个独立常数  $a$ 、 $b$ 、 $T_0$  或  $T_0$ 、 $v_0$ 、 $c$ 。 $av$  是肌纤维缩短时，单位时间内产生的热，故在某种意义上， $a$  表征肌肉收缩的效率， $b$  的意义和  $a$  相仿。 $T_0$  是肌纤维在等长收缩过程中产生的最大张力，也是初始长度为  $L_0$  的肌纤维受激后所能达到的最大张力。 $v_0$  是张力为 0 时，肌纤维所能达到的最高收缩速度，某种意义上表示肌纤维收缩的能力（收缩势）。它们都是初始长度  $L_0$ 、温度、 $\text{Ca}^{++}$  浓度等环境因素的函数。

图 5-6 说明  $T_0$  与  $L_0$  的关系。可见  $2.0 \mu\text{m} \leq L_0 \leq 2.5 \mu\text{m}$

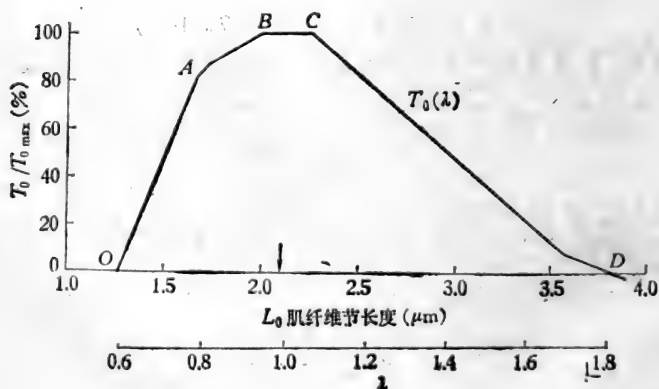


图 5-6  $T_0$  与  $L_0$  的关系<sup>[4]</sup>

时,  $T_0$  最大, 且不随  $L_0$  变化;  $L_0 < 2.0\mu\text{m}$  时,  $T_0$  随  $L_0$  增大而升高;  $L_0 > 2.5\mu\text{m}$  时,  $T_0$  随  $L_0$  增大而减小。其原因在于:  $L_0$  太大时, 粗、细纤维丝搭接部分短, 介桥减少, 故  $T_0$  降低; 当  $L_0$  太小时, 相邻的细纤维丝互相重叠, 有效长度减小, 介桥数减少,  $T_0$  亦降低。

Hill 方程给出了骨骼肌从等长挛缩状态下快速释放时的张力-收缩速度关系, 仅表征骨骼肌力学性质的一个方面。别的情况下, 肌肉的收缩特性应如何描述呢? 有必要将 Hill 方程推广于一般情况。为此, Hill 提出了表征骨骼肌收缩特性的力学模型。

### § 3-2 Hill 模型

Hill 认为骨骼肌的收缩过程可以用图 5-7 所示的双元素模型来确定, 图中 CE 是收缩元, SE 是串联弹性元。假设:

(1) 收缩元 CE 的 T-V 关系仅取决于瞬时状态, 与过程无关, 服从 Hill 方程。

(2) 松弛状态下, CE 可以自由地伸缩, 与此时肌肉的应力无关。

(3) 串联弹性元 SE 是完全弹性体, 其性质与肌肉的激发状态无关。

如图示模型,

$$\left. \begin{aligned} L &= L_c + L_s \\ T &= T_c = T_s \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

附标  $s$  表示串联弹性元,  $c$  表示收缩元。设弹性元伸长为  $\eta$ ,

按假设(2),

$$\eta = L_s - L_{s0} \quad (3-12)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= T_s(\eta) \\ \eta = 0 \text{ 时, } T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$



图 5-7 骨骼肌的 Hill 模型

若在  $t = 0$  时刻, 给肌纤维以刺激, 使之收缩, 则按(3-11a)和(3-12), 收缩速度为

$$v = -\frac{dL_c}{dt} = \frac{d\eta}{dt} - \frac{dL}{dt} \quad (3-14)$$

故

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT_s(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} = \frac{dT_s}{d\eta} \cdot \left[ \frac{dL}{dt} + v \right] \quad (3-15)$$

$\frac{dT_s}{d\eta}$  由 SE 的性质决定, Hill 假设:

$$\frac{dT_s}{d\eta} = \frac{1}{L_0}(T_s + a) \quad (3-16)$$

$L_0$  是肌纤维初始长度。积分之,

$$T_s(\eta) = a(e^{\frac{\eta}{L_0}} - 1) \quad (3-17)$$

$v$  与  $T$  的关系由 Hill 方程(3-6)给出, 代入(3-15), 对  $t$  积分, 即得收缩过程中, 张力  $T(t)$  随时间的变化,

$$T(t) = \frac{1}{L_0} \int_0^t \left( bT_0 + a \frac{dL}{d\tau} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{L_0} [b(t - \tau) - L(t) + L(\tau)] \right\} d\tau \quad (3-18)$$

若为等长收缩,  $L(t) = L(\tau) = L_0$ , 则

$$T(t) = T_0 [1 - e^{-\frac{b}{L_0} t}] \quad (3-19)$$

若收缩速度不变,

$v = \text{常数}$ , 由(3-18)可得:

$$T(t) = \frac{bT_0 - av}{b + v} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{b + v}{L_0} t \right) \right] \quad (3-20)$$

此外, 由(3-18)可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 得

$$T = \frac{bT_0 - av}{b + v} \quad (3-21)$$



它是 Hill 方程(3-6)另一种形式。

四十余年来,人们不断地改进 Hill 模型,使之能概括更多的、新的实验结果。但 Hill 模型有一个根本弱点,即各元素之间力和应变的分配具有任意性,因而通过实验所确定的各元素的性质,不一定是肌肉的固有性质。为避免上述问题,冯元桢<sup>[1]</sup>等提出了线性记忆理论。

### § 3-3 线性记忆理论

把肌肉看作一种具有记忆的、能动的材料,受激后所产生的张力取决于收缩的历史过程。这种记忆是衰退的,可用一函数  $\phi(t)$  来表示,隔得愈久,影响愈小。最简单的是线性记忆理论,即历史影响是可以叠加的。今若以  $x(t)$  表示引起某过程的原因,而以  $y(t)$  表示该过程的后果。设  $x(t)$  是连续函数,则在  $\tau$  至  $(\tau + d\tau)$  期间,  $x(t)$  的变化  $\frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau$  引起的  $y(t)$  的改变为:

$$dy(t - \tau) = \phi(t - \tau) \frac{dx}{d\tau} d\tau。$$

按线性理论,积分之得:

$$y(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{dx}{d\tau} d\tau = \phi * dx \quad (3-22)$$

$\phi * dx$  称为函数  $\phi$  和  $x$  的折积。应用折积交换律:

$$\phi * dx = x * d\phi \quad (3-23)$$

可得:

$$y(t) = \phi(0)x(t) + \int_0^t x(t - \tau) \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3-24)$$

将(3-22)或(3-24)应用于骨骼肌,假设 Hill 方程依然适用,则若取

若取

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{v(t)}{v_0} \quad \text{那么, } y &= \frac{1 - \frac{T(t)}{T_0}}{1 + c \frac{T(t)}{T_0}} \\ x = \frac{T(t)}{T_0} \quad \text{那么, } y &= \frac{1 - \frac{v(t)}{v_0}}{1 + c \frac{v(t)}{v_0}} \end{aligned} \right\} (3-25)$$

如果用(3-25a),且令  $\phi(0) = 1$ , 则:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{T(t)}{T_0}}{1 + c \frac{T(t)}{T_0}} &= \phi(t) \frac{v(0)}{v_0} + \frac{1}{v_0} \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{v(t)}{v_0} + \frac{1}{v_0} \int_0^t v(t - \tau) \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3-26)$$

引进伸长比  $\lambda(t)$ , 令

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= -\frac{d\lambda(t)}{dt} \\ \phi(t) &= \frac{d\phi(t)}{dt} \end{aligned} \right\} (3-27)$$

则(3-26)变为:

$$\frac{1 - \frac{T(t)}{T_0}}{1 + c \frac{T(t)}{T_0}} = -\frac{1}{v_0} \frac{d\lambda(t)}{dt} - \frac{1}{v_0} \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3-28)$$

如果用(3-25), 则有:

$$\frac{1 - \frac{v(t)}{v_0}}{1 + c \frac{v(t)}{v_0}} = \frac{T(t)}{T_0} + \frac{1}{T_0} \int_0^t T(t-\tau) \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= \phi(t) \frac{T(0)}{T_0} + \frac{1}{T_0} \int_0^t \phi(t-\tau) \frac{dT(\tau)}{d\tau} d\tau$$
(3-29)

函数  $\phi(t)$  可取如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{i=1}^N A_i e^{-\alpha_i t} \\ \phi(0) &= 1 \quad \therefore \sum_{i=1}^N A_i (\alpha_i) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

$\alpha_i \geq 0$ ,  $\frac{1}{\alpha_i}$  是特征时间,  $A_i(\alpha_i)$  是松弛谱函数。  $A_i$ 、 $\alpha_i$  均可通过实验确定。

Bergel 和 Hunter<sup>[5]</sup> 用方程(3-28)分析了骨骼肌的动力学特性, 通过实验确定常数  $\alpha_i$ 、 $A_i$ 。

图 5-8 是挛缩状态的骨骼肌纤维, 长度突然松弛, 长度缩小  $\Delta\lambda$  (小量) 时, 张力随时间的变化。此时, (3-28) 可写为

$$\frac{1 - \frac{T(t)}{T_0}}{1 + c \frac{T}{T_0}} = + \frac{1}{v_0} \phi(t) \cdot \Delta\lambda \quad (3-31)$$

Bergel 和 Hunter 令:

$$\frac{1}{v_0} \phi(t) = \sum_1^N B_i e^{-\alpha_i t} \quad (3-32)$$

拟合结果如图 5-7 示。可见, 若取  $c = \frac{1}{2}$ , 则取  $N = 3$  可获得良好近似。

应该指出, 选择适当的  $\alpha_i$ 、 $A_i$ , 使与某一  $\Delta\lambda$  值下所得实验

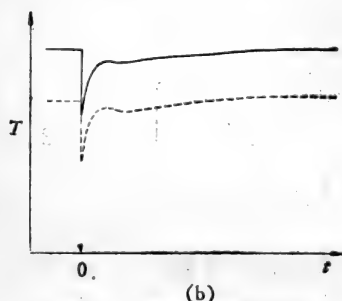
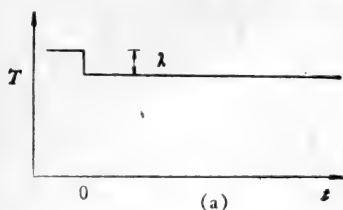


图 5-8 长度阶梯松弛时的  $\frac{T(t)}{T_0}$  曲线<sup>[5]</sup>

数据相符, 并不困难, 但欲使所得经验常数, 能够拟合不同  $\Delta\lambda$  下所得的实验数据, 却相当困难。

若骨骼肌纤维长度在某一平均值邻近作小幅度谐振,

$$\lambda = \lambda_0 - v_1 \cdot t + \Delta\lambda e^{j\omega t} \quad (3-33)$$

则张力  $T$  在  $T_1$  邻近作周期性变化:

$$T = T_1 + \Delta T \cdot e^{j\omega t} \quad (3-34)$$

应用(3-28)(3-31)得:

$$\Delta T e^{j\omega t} = E(T, T_0, \omega) \Delta\lambda \cdot e^{j\omega t} \quad (3-35)$$

$$E(T, T_0, \omega) = \frac{T}{T_0} \frac{dT_0}{d\lambda} + \left( \frac{c T_0}{1 + c} \right) \left( \frac{T}{T_0} + \frac{1}{c} \right)^2 \times \sum_1^N B_i \frac{j\omega}{\alpha_i + j\omega} \quad (3-36)$$

$E(T, T_0, \omega)$  称为骨骼肌纤维的动力学刚度。

Julian 和 Sollins<sup>[6]</sup> 测量了青蛙缝匠肌纤维在等长收缩过程中,  $\frac{dT_0}{d\lambda} = 0$  时的动力学刚度  $E(T, T_0, \omega)$ , 和等张 ( $T = T_0$ ) 收缩过程中的动力学刚度  $E(T_0, T_0, \omega)$ , 其比值称为相对刚度  $E_r$ , 显然,

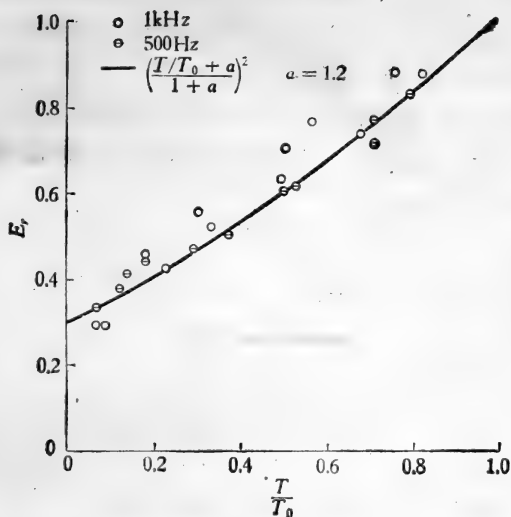


图 5-9  $E_r - \frac{T}{T_0}$  关系<sup>[9]</sup>

$$E_r = \frac{E(T, T_0, \omega)}{E(T_0, T_0, \omega)} = \left( \frac{c \frac{T}{T_0} + 1}{1 + c} \right)^2 \quad (3-37)$$

图 5-9 是用(3-37)拟合实验数据的结果, 可见取  $\frac{1}{c} = 1.2$  可

获良好近似。

线性记忆理论的主要优点是避免了 Hill 模型假说中, 各元素力和变形分配的任意性, 直接将 Hill 方程推广于一般情形。缺点是  $\Delta\lambda$ 、 $\Delta T$  必须很小, 否则线性近似不适用。

#### § 4 纤维滑移理论

根据§ 2 所述横纹肌构造及收缩机理, Huxley<sup>[7]</sup> 提出了

关于骨骼肌收缩的纤维滑移理论,从粗、细纤维丝之间介桥的特性及其数量变化的规律出发,把肌肉的力学性质变为介桥的动力学问题来研究。假设:

(1) 粗、细纤维丝长度不变,只作相对滑移。

(2) 介桥一旦形成,就象弹簧一样,张力是两端点纵向距离  $x$  (图5-10)的函数  $f(x)$ 。



图 5-10 介桥示意图

(3) 可能形成介桥的位置分布是连续的。

定义  $n(x, t)dx$  为  $t$  时刻两端纵向距离在  $[x, x + dx]$  范围内介桥的概率。 $t$  时刻已形成的介桥数占可能形成的介桥数的百分比为  $N$ ,

$$N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx \leq 1 \quad (4-1)$$

进而,设单位时间内形成的端点纵向距为  $x$  的介桥的概率为  $\varphi(x)$ ,单位时间内断裂的端点纵向距为  $x$  的介桥的概率为  $g(x)$ ,则  $n(x, t)$  的变化应服从以下方程:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V \frac{\partial n}{\partial x} = \varphi(x)(1 - N) - g(x) \cdot n \quad (4-2)$$

这里,

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (4-3)$$

$2l$  是肌纤维节长度。

每一肌纤维节产生的张力  $T(t)$  为:

$$T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) \cdot f(x) dx \quad (4-4)$$

如果知道  $\varphi(x), g(x), N, V$ , 那就可以从 (4-2) 求出  $n(x, t)$ , 代入 (4-4) 求出肌纤维节的张力  $T(t)$ 。

为解方程 (4-2), 设

$$x_1 = x - l(t), \text{ 即 } x = x_1 + l(t) \quad (4-5)$$

$$\therefore n_1(x_1, t) = n(x, t) = n(x_1 + l(t), t) \quad (4-6)$$

$$\therefore \frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t} = V \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t}$$

这样 (4-2) 变为

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \varphi [x_1 + l(t)] [1 - N(t)] - g [x_1 + l(t)] \cdot n_1 \quad (4-7)$$

若  $t = 0$  时, 肌肉松弛,  $n_1(x, 0) = 0$ , 则当  $N(t)$  已知时, 积分 (4-7) 即得:

$$\begin{aligned} n_1(x_1, t) &= \int_0^t \varphi [x_1 + l(\tau)] [1 - N(\tau)] \\ &\quad \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t g [x_1 + l(\xi)] d\xi \right\} \cdot d\tau \\ \therefore n(x, t) &= \int_0^t \varphi [x - l(t) + l(\tau)] \cdot [1 - N(\tau)] \\ &\quad \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t g [x - l(t) + l(\xi)] d\xi \right\} d\tau \end{aligned} \quad (4-8)$$

令:

$$\left. \begin{aligned} h(x, t, \tau) &= \varphi [x - l(t) + l(\tau)] \\ &\quad \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t g [x - l(t) + l(\xi)] d\xi \right\} \\ H(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x, t, \tau) dx \\ H_0(t) &= \int_0^t H(t, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

则:

$$n(x, t) = \int_0^t [1 - N(\tau)] h(x, t, \tau) d\tau \quad (4-10)$$

按(4-1),

$$\left. \begin{aligned} N(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx = \int_0^t [1 - N(\tau)] H(t, \tau) d\tau \\ \therefore N(t) + \int_0^t N(\tau) H(t, \tau) d\tau &= H_0(t) \end{aligned} \right\} (4-11)$$

若  $\varphi(x)$ ,  $g(x)$  已知,  $N(t)$  未知, 则需将(4-2)改写为:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V \frac{\partial n}{\partial x} = \varphi(x) \left[ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx \right] - g(x) \cdot n(x, t) \quad (4-12)$$

求其解。肌纤维张力为:

$$T(t) = \int_0^t \left\{ [1 - N(\tau)] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(x, t, \tau) dx \right\} d\tau \quad (4-13)$$

下面讨论几种特殊情况。

1.  $g(x) = \text{常数}$

$$\text{令 } \zeta = x - l(t) + l(\tau) \quad (4-14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{则: } h(x, t, \tau) &= \varphi(\zeta) e^{-g(t-\tau)} \\ H(t, \tau) &= e^{-g(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4-15)$$

即  $H(t, \tau)$  与  $l(t)$  无关, 因而任一时刻已形成的介桥占可能形成的介桥的百分比  $N(t)$ , 与肌纤维节长度无关, 它遵循自己的动力学规律。

2.  $g(x) = \text{常数}$ ,  $\varphi(x) = \Phi \delta(x - A)$

若设只有当  $x = A$  时, 介桥才能形成, 则



$$\varphi = \Phi \delta(x - A), \quad (4-16)$$

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \quad (4-17)$$

$\delta(x - A)$  是狄喇克函数。此时, 方程(4-12)可对  $x$  积分,

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial x} dx = n(\infty) - n(-\infty) = 0$$

$$\therefore \frac{dN}{dt} = \Phi(1 - N) - gN \quad (4-18)$$

即此时  $N(t)$  与  $V$  无关。若状态定常,  $\frac{dN}{dt} = 0$ , 则:

$$N = \frac{\Phi}{\Phi + g} = N_{\infty} \quad (4-19)$$

当  $x < A$ , 且状态定常时, (4-2) 变为

$$V \frac{\partial n}{\partial x} = -g(n)$$

$$\therefore n(x) = n(A) e^{\frac{g}{|V|}(x-A)} \quad (4-20)$$

积分之,

$$N = \int_{-\infty}^A n(x) dx = \frac{n(A)|V|}{g}$$

$$\therefore n(A) = \frac{gN}{|V|} \quad (4-21)$$

这样得:

$$n(x) = \frac{\Phi}{\Phi + g} \cdot \frac{g}{|V|} \cdot e^{\frac{g}{|V|}(x-A)} \quad (4-22)$$

此时张力-收缩速度关系变为:

$$T = \frac{\Phi}{\Phi + g} \cdot \frac{g}{|V|} \int_{-\infty}^A e^{\frac{g}{|V|}(x-A)} \cdot f(x) dx \quad (4-23)$$

如果将  $\Phi$ 、 $g$ 、 $A$  看作常数, 那么, 可以证明, 肌纤维节的张力-

速度关系,就是介桥接头力与伸长关系的拉普拉斯变换。可见,若  $g = \text{常数}$ ,  $\varphi = \Phi\delta(x - A)$ , 则肌纤维的宏观  $T-V$  关系,唯一地确定了  $f(x)$ 。反则亦然。这给我们提供了一个由宏观力学行为测量确定  $f(x)$  的方法。例如,若  $T-V$  满足 Hill 方程,则:

$$f(x) = \frac{a}{N} \left[ e^{\frac{gx}{b}} - 1 \right] \quad (4-24)$$

3.  $g = \text{常数}$ ,  $f = f_0(e^{\alpha x} - 1)$

应用(4-14),方程(4-13)可写为

$$T(t) = \int_0^t [1 - N(\tau)] e^{-g(t-\tau)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) + l(t) - l(\tau) \right\} \varphi(\zeta) d\zeta d\tau \quad (4-25)$$

设:

$$f = f_0(e^{\alpha x} - 1) \quad (4-26)$$

方程(4-25)对  $t$  微分,得:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= [1 - N(t)] \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) f(\zeta) d\zeta - g \cdot T(t) \\ &+ \alpha \frac{dl}{dt} \cdot (f - f_0) \int_0^t [1 - N(\tau)] e^{-g(t-\tau)} \\ &\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) d\zeta \right] d\tau \end{aligned} \quad (4-27)$$

若令:

$$\left. \begin{aligned} T_0(t) &= \frac{1 - N(t)}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) f(\zeta) d\zeta \\ a(t) &= T_0(t) \int_0^t [1 - N(\tau)] e^{-g(t-\tau)} d\tau \\ b &= \frac{g}{\alpha} \quad S(T) = \alpha(T + a) \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

这样有:

$$\frac{dT}{dt} = S(T) \left\{ \frac{dl}{dt} + \frac{b(T_0 - T)}{T + a} \right\} \quad (4-29)$$

上述方程用滑移理论说明了 Hill 方程中参数  $a$ 、 $b$ 、 $T_0$  的物理意义。

进而,由上式可得:

$$V_0 = V_{\max} = \frac{bT_0}{a} = \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)d(\zeta)d\zeta}{f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta)d\zeta} \quad (4-30)$$

若设:

$$\varphi(x) = F\delta(x - A) \quad (4-31)$$

则有:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \frac{\Phi}{\Phi + g} \cdot f(A), & b &= \frac{g}{\alpha} \\ a &= \frac{\Phi}{\Phi + g} \cdot f_0, & V_0 &= \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{f(A)}{f_0} \end{aligned} \right\} \quad (4-32)$$

显然,  $V_0$  与  $\Phi$  无关。如果  $g$  增大, 则  $V_0$  增大,  $T_0$  下降。

现代测量技术使我们有可能测量骨骼肌纤维节的有关参数, 因而近年来纤维滑移理论有相当大的发展, 但依旧很不完善。而且, 它既没有计及细胞结构的影响, 也没有考虑结缔组织、力的传递等因素的作用。因而由此建立的肌肉本构方程并不一定准确。

## § 5 松弛状态下心肌的力学性质

心肌也是一种横纹肌, 其构造与骨骼肌相似, 但由于心肌细胞含有大量线粒体, 因而更为复杂, 更不均匀。从力学性态来看, 心肌与骨骼肌的不同在于: (i) 所有心肌纤维收缩和松

弛是同步的,骨骼肌则不然。而且,正常生理条件下,心肌不允许处于挛缩状态。因此,如果说骨骼肌实验测量的是挛缩状态下肌纤维的张力、收缩速度、长度关系,那么心肌实验所要知道的是每一次刺激后肌纤维的张力、收缩速度、长度随时间的变化。(ii)心脏每搏输出量与心室舒张末期容量有关,而这又取决于心肌在松弛状态下的应力-应变关系。故松弛状态下心肌的应力不容忽视。下面首先讨论松弛心肌的力学性质。

肌肉是有生命的组织,离体试验时必须设法维持其生命,才能获得有意义的实验数据。实践表明,当试样直径不大于 1mm 时,在通入 95% O<sub>2</sub> 和 5% CO<sub>2</sub> 的混合气体的 Krebs-Ringer 溶液内,可借助于扩散维持其生命 36 个小时左右。故现有实验大都取猫或兔子的乳突肌为试样,大动物的乳突肌纤维较粗,难于存活。

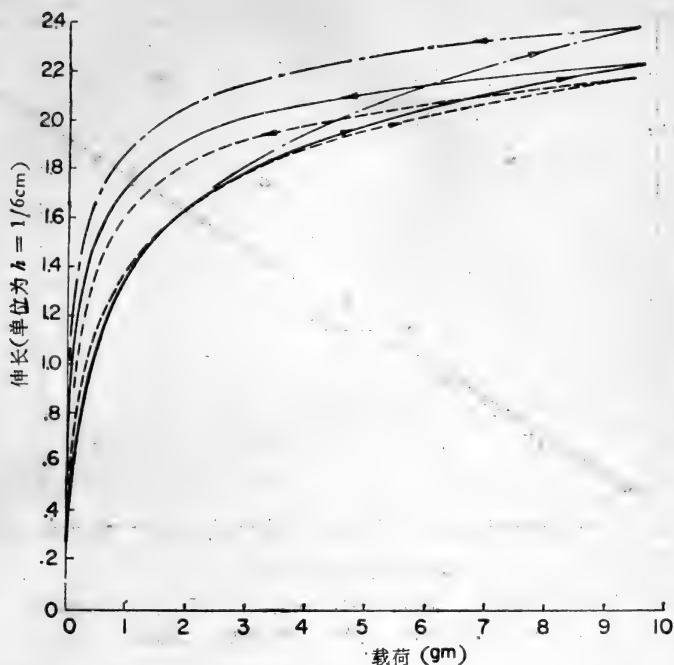
关于松弛心肌的力学性质, Pinto 和冯元桢<sup>[8]</sup>、Pinto、冯元桢和 Patitucci<sup>[9]</sup> 在不同应变率、不同温度下做了大量实验。图 5-11 是兔乳突肌,应变率从 0.09—9% 时,张力与伸长比的关系。显然,和一般软组织一样,加载和卸载时力学性质不同;但不同应变率下,力学性质的改变不大。第四章所述的拟弹性假设亦适用于静态心肌。图 5-12 是兔乳突肌的  $\frac{dT}{d\lambda} - T$  关系,可见,当应变不超过 30% 时,

$$\frac{dT}{d\lambda} = \alpha(T + \beta) \quad (5-1)$$

若  $T = T^*$  时,  $\lambda = \lambda^*$ , 则

$$T = (T^* + \beta)e^{\alpha(\lambda - \lambda^*)} - \beta \quad (5-2)$$

$$\beta = \frac{T^* e^{-\alpha\lambda^*}}{1 - e^{-\alpha\lambda^*}} \quad (5-3)$$



兔乳突肌 37°C,  $L_0 = 0.936\text{cm}$ 。 应变率  
 ..... $0.09L_0/s$ , ——— $0.009L_0/s$ , - · -  $0.0009L_0/s$ 。

图 5-11 不同应变率下载荷和伸长比的关系<sup>[9]</sup>

当应变超过 30% 时,

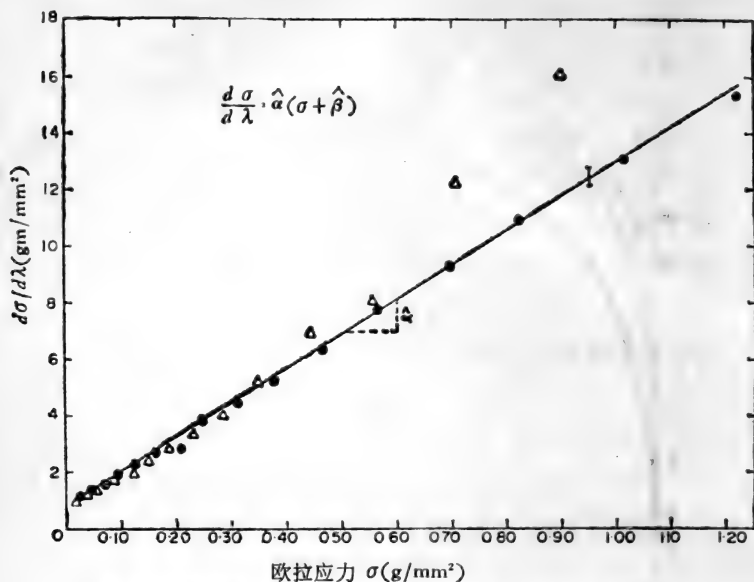
$$T = \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \lambda^* - \frac{1}{\lambda^*} \right)^{-1} e^{\alpha(\lambda - \lambda^*)} \quad (5-4)$$

$\lambda$  是伸长比。  $\alpha$  的经验值列于表 5-1。

图 5-13 是兔乳突肌在不同  $\lambda$  值下的应力松弛数据。 考虑到松弛心肌的粘弹性, 按准线性理论

$$T = G(t)T^{(e)} \quad (5-5)$$

$T^{(e)}$  由(5-2)或(5-4)给出,  $G(t)$  为归一化松弛函数,



样品: 兔乳突肌, 温度: 5°C, pH: 7.4,  $L_{ref}$ : 3.66mm,  
 $d_{ref}$ : 1.38mm, 应变率: 0.2Hz, ●加载, △卸载。

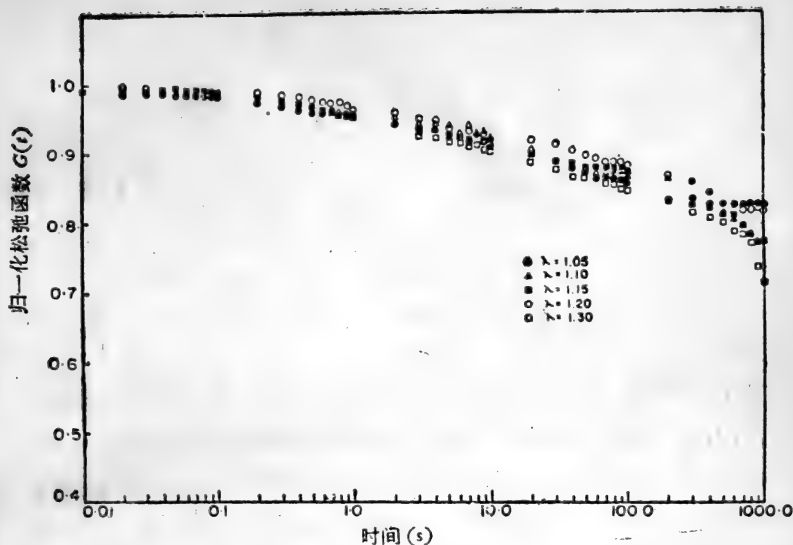
图 5-12  $\frac{dT}{d\lambda} - T$  关系<sup>[9]</sup>

表 5-1.  $\alpha$  值<sup>[10]</sup>( $cm^{-1}$ )

应变率 ( $s^{-1}$ )	$\alpha$ (加载)	$\alpha$ (卸载)
$8.99 \times 10^{-4}$	10.7	24.8
$8.99 \times 10^{-3}$	14.6	23.8
$8.99 \times 10^{-2}$	19.8	27.9
$1.798 \times 10^{-1}$	19.4	28.0

$$G(t) = \left[ 1 + \int_0^{\infty} S(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \right] \left[ 1 + \int_0^{\infty} S(\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (5-6)$$

$$S(\tau) = \begin{cases} c/\tau & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (5-7)$$



试样: 兔乳突肌, 温度: 15°C, pH: 7.4,  
 $L_{ref}$ : 3.50mm,  $d_{ref}$ : 1.28mm。

图 5-13 应力松弛实验结果<sup>[18]</sup>

据猫乳突肌实验结果, 可取:  $c = 0.081$ ,  $\tau_1 = 0.007s$ ,  $\tau_2 = 972s$ 。

## § 6 Hill 模型应用于心肌

鉴于心肌的力学特点, 将 Hill 模型应用于心肌时, 需要加一个并联弹性元 (PE), 以表征松弛状态心肌的力学性质。这两种形式, 如图 5-14 示。同样, 假设心肌在松弛状态下变形时, 收缩元不起作用, 因而激发状态下心肌的张力可以分解为主动张力和被动张量, 分别用收缩元上的张力  $T_C$  和并联弹性元上的张力  $T_P$  来表示。

$$T = T_C + T_P \quad (6-1)$$

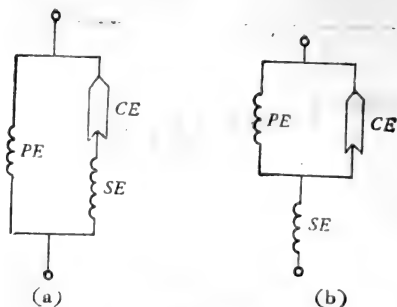


图 5-14 三元素模型的两类型式

不同的模型，张力和应变在各元素上的分配是不同的。若以  $l_s, l_p, l_c$  表示  $SE, PE, CE$  的长度，则对模型 (A) 有：

$$\left. \begin{aligned} T_s = T_c, \quad \therefore T = T_s + T_p \\ l = l_p = l_s + l_c \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

故收缩速度

$$V_c = -\frac{dl_c}{dt} = \frac{dl_s}{dt} - \frac{dl}{dt}$$

设  $SE$  是完全弹性体， $T_s$  唯一地确定了当时的伸长比  $\lambda_s = \frac{l_s}{l_{s_0}}$ ，

$$\therefore \frac{d\lambda_s}{dt} = \frac{d\lambda_s}{dT_s} \cdot \frac{dT_s}{dt} = \frac{dT_s/dt}{dT_s/d\lambda_s}$$

而

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{dT_p}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{dT_p}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\therefore V_c = \frac{dT/dt}{dT_s/d\lambda_s} - \frac{d\lambda}{dt} \left( 1 + \frac{dT_p/d\lambda}{dT_s/d\lambda_s} \right) \quad (6-3)$$

对于模型 (B)，则

$$\left. \begin{aligned} T = T_s = T_p + T_c \\ l = l_s + l_c = l_s + l_p, \quad l_p = l_c \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$



$$V_c = -\frac{dl_c}{dt} = \frac{dl_s}{dt} - \frac{dl}{dt} \quad (6-5)$$

故: 
$$V_c = \frac{dT/dt}{dT/d\lambda_s} - \frac{d\lambda}{dt} \quad (6-6)$$

可见,  $CE$ 、 $SE$ 、 $PE$  的特性参数因模型而异, 它们本身并不一定代表肌肉的固有性质。

下面介绍冯元桢<sup>[10]</sup>的三元素模型。

取心肌纤维节三元素模型如图 5-14(a) 所示, 用图 5-15 所示肌球蛋白纤维丝和肌动蛋白纤维丝的长度和位置改变来表示肌纤维节的几何变化。图中  $M$  是肌球蛋白纤维丝的长度,  $C$  是肌动蛋白纤维丝的长度, 它们是不变的。  $\Delta$  是粗、细纤维搭接部分长度。  $H$ 、 $I$  分别表示 H 带和 I 带的宽度,  $L$  是肌纤维节总长度,  $L_0$  为松弛态下的  $L$  值,  $\eta$  则为串联弹性元的伸长量。显然,

$$\Delta = M - H = 2C - I \quad (6-7)$$

若无弹性伸长, 则

$$L = M + I = M + 2C - \Delta \quad (6-8)$$

若有弹性伸长, 则

$$L = M + I + \eta = M + 2C - \Delta + \eta \quad (6-9)$$

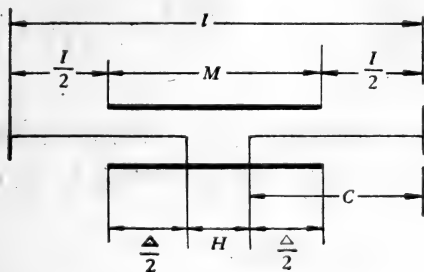


图 5-15 收缩元的几何关系

微分之得:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{d\Delta}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \quad (6-10)$$

按假设,

$$\left. \begin{aligned} T_P &= T_P(L) \\ T_S &= T_S(\eta, \Delta) \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

且

$$\eta = 0 \text{ 时, } T_S = 0$$

$$\therefore \frac{dT}{dt} = \frac{dT_P}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} \frac{d\eta}{dt} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} \frac{d\Delta}{dt} \quad (6-12)$$

以(6-10)代入(6-12)得:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{dT_P}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} \left( \frac{dL}{dt} + \frac{d\Delta}{dt} \right) + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} \frac{d\Delta}{dt} \\ &= \left( \frac{dT_P}{dL} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} \right) \frac{dL}{dt} + \left( \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} \right) \frac{d\Delta}{dt} \end{aligned} \quad (6-13)$$

若为等长收缩,  $L = \text{常数}$ , 则(6-13)变为:

$$\frac{dT}{dt} = \left( \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} \right) \frac{d\Delta}{dt} \quad (6-14)$$

若为等张收缩,  $T = \text{常数}$ ,  $\frac{dT}{dt} = 0$ , 则(6-13)变为:

$$\left( \frac{dT_P}{dL} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} \right) \frac{dL}{dt} + \left( \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} \right) \frac{d\Delta}{dt} = 0 \quad (6-15)$$

并联弹性元的性质由松弛态心肌的应力-应变关系确定, 由方程(5-2)(5-5)给出。问题是如何确定  $SE$  和  $CE$  的特性。

## § 6-1 串联弹性元的性质

为确定  $SE$  的性质, 通常做两种实验:

## 1. 快速释放实验

加载使松弛心肌伸长, 长度为  $L_1$ ; 保持长度不变, 给以刺激, 使张力达  $T_1$ ; 然后使张力  $T_1$  突然变为  $T_2$ , 相应的长度变为  $L_2$ 。假设张力改变得很快,  $\Delta$  来不及变化,  $\Delta_1 = \Delta_2$ , 故

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_2 &= T_P(L_1) - T_P(L_2) + T_S(\eta_1, \Delta_1) - T_S(\eta_2, \Delta_1) \\ L_1 - L_2 &= \eta_1 - \eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (6-16)$$

用试凑法寻求一个  $T_2$ , 使  $T_2 = T_2^*$  (相应地  $L_2 = L_2^*$ ) 时,

$$T_S(\eta_2^*, \Delta_1) = 0$$

按假设, 必有

$$\left. \begin{aligned} \eta_2^* &= 0 \\ \therefore \eta_1 &= L_1 - L_2^* \\ T_S(\eta_1, \Delta_1) &= T_1 - T_P(L_1) \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

$L_1$ 、 $L_2^*$ 、 $T_1$  是可测定的,  $T_P(L_1)$  是已知的, 由此可得  $T_S$  与  $\eta$  的经验关系。

## 2. 等长-等张实验

先加  $T_1$  使肌纤维伸长到  $L_1$ ; 保持  $L_1$  不变, 加刺激使张力达  $T_2$ 。然后保持  $T_2$  不变, 作等张收缩。按(6-14)

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{\text{等长}, T_2} = \left[ \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} (\eta_2, \Delta_2) + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} (\eta_2, \Delta_2) \right] \left. \frac{d\Delta}{dt} \right|_{\text{等长}}$$

按(6-15)

$$\left. \frac{d\Delta}{dt} \right|_{\text{等张}, T_2} = - \left[ \left. \frac{dT_P}{dL} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} \right] \left[ \left. \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \right|_{\Delta} + \left. \frac{\partial T_S}{\partial \Delta} \right|_{\eta} \right]^{-1} \left. \frac{dL}{dt} \right|_{\text{等张}}$$

因为  $\left. \frac{d\Delta}{dt} \right|_{\text{等张}, T_2}$  是  $T_S$ ,  $\Delta$ ,  $L$  和  $t$  的函数, 与其他因素无关, 故

$$\left. \frac{d\Delta}{dt} \right|_{\text{等长}, T_2} = \left. \frac{d\Delta}{dt} \right|_{\text{等张}, T_2}$$

$$\therefore \left. \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right|_{\Delta} + \left. \frac{\partial T_p}{\partial L} \right|_{T_s} = - \frac{\left. \frac{dT}{dt} \right|_{\text{等长}}}{\left. \frac{dL}{dt} \right|_{\text{等长}}} \quad (6-18)$$

这里,  $T_p(L)$  是已知函数, 方程右端可测定, 由此可得  $\left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\Delta}$

的经验关系。

综合 Sonnenblick 等人的实验结果, 得

$$\frac{\partial T_s}{\partial \eta} = \hat{\alpha}(T_s + \hat{\beta}) \quad (6-19)$$

$$\therefore T_s = (T_s^* + \beta) \exp[\hat{\alpha}(\eta - \eta^*)] - \hat{\beta} \quad (6-20)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta = \eta^* \text{ 时, } T_s = T_s^* \\ \hat{\beta} = \frac{T_s^* e^{-\hat{\alpha}\eta^*}}{1 - e^{-\hat{\alpha}\eta^*}} \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

对猫乳突肌来说, 可取  $\hat{\alpha} = 0.4$ ,  $\hat{\beta} = 2g/cm^2$ 。

## § 6-2 收缩元的性质

收缩元的张力-速度关系由 Hill 方程给出。但在三元素模型中, 有两个张力:  $T_p$  和  $T_c = T_s$ , 三个速度  $\frac{dL}{dt}$ 、 $\frac{d\eta}{dt}$ 、 $\frac{d\Delta}{dt}$ ; 将 Hill 力-速度关系用于 CE 时, 该用哪个力? 哪个速度呢? 通常用  $T_s = T_c$ , 速度  $V_c$  则取  $\frac{d\Delta}{dt}$ 。故有

$$(T_s + a)V_c = b(T_{s0} - T_s)$$

冯元桢<sup>[11]</sup>指出, 上式隐含着一个问题, 由(3-19)可知, 在等长收缩过程中, 只有当  $t \rightarrow \infty$  时,  $T_s$  才能接近于  $T_{s0}$ 。这不符合心肌的实际情况。冯元桢提出了一个修正指数  $n$ , 将 Hill 方程改写为:

$$(T_s + a)V_c = b(T_{s0} - T_s)^n \quad (6-22)$$

$$0 < n < 1$$

考虑到张力和速度随时间的变化，引进表征活化状态的函数  $f(t)$ ，(6-22) 改写为

$$V_c = \frac{b[T_{s0}f(t) - T_s]}{T_s + a} \quad (6-23)$$

$T_{s0}$  是等长收缩过程中的最大张力，有如下经验关系：

$$T_{s0} = k_1 L_0 + k_2 \quad (6-24)$$

$L_0$  是纤维初始长度， $k_1$ 、 $k_2$  是经验常数。

$a$  亦是  $L_0$  的函数，设

$$a = k_3 T_{s0}(L_0) \quad (6-25)$$

猫乳突肌  $k_3 = 0.45$ ，兔乳突肌  $k_3 = 0.25$

$b$  与最大收缩速度有关，快速释放实验表明，

$$b = k_3 v_0 T_{s0}^{1-n} \quad (6-26)$$

$v_0$  是最大收缩速度。

冯元桢总结了 Edman 和 Nilsson 等人的实验结果，由图 5-16 可见，归一化后  $f(t)$  可用半波正弦函数表示，

$$f(t) = \sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{t + t_0}{t_m} \right) / \sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{t_{ip} + t_0}{t_m} \right) \quad (6-27)$$

设  $t = 0$  时心肌开始激发， $\frac{t_0}{t_m}$  表示心肌从静止状态到激发状

态的相移， $t_m$  是心肌从静止状态到达最高激发状态所需的时间， $t_{ip}$  则是等长收缩过程中达到峰值所需的时间。

$n$  是经验指数，一般取  $n = 0.5 - 0.6$ ，可获良好近似。

实践证明，当心肌纤维初始长度较短，松弛状态张力不大时，按上述三元素模型所得的理论结果与实验数据相当一致。但当心肌纤维初始长度较长时，三元素模型中收缩元的性质依赖于模型的选择，张力-速度关系非常复杂，活化状态很难

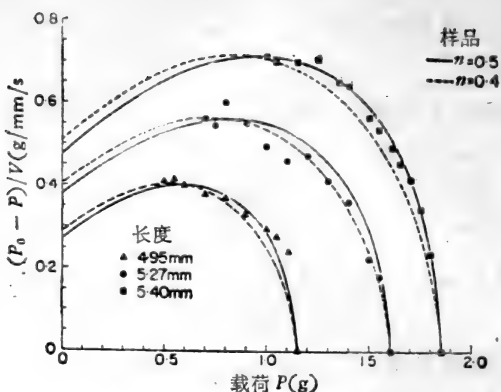


图 5-16 收缩速度-时间关系<sup>[1]</sup>

确定。而在正常生理条件下,感兴趣的是后一种情形。因此,Brady<sup>[9]</sup>认为:对心肌来说,活化状态这个概念既没有基本理论意义,经验价值也很有限,因为它不代表心肌的固有性质,无法唯一地确定。冯元桢认为这种说法过于悲观,应该说Hill模型理论已经完成了它的历史使命,这条路已经走完了。目前应当舍弃三元素模型,另觅新路。

## §7 心肌本构方程的新形式

为避免心肌模型化过程中,应力和应变分配的人为的任意性,冯元桢<sup>[2]</sup>提出了一种新的表征激活状态下心肌力学行为的本构方程。

考虑由平行的心肌纤维组成的纤维束,在 $t=0$ 时刻给以刺激,保持其长度不变,所产生的张力为 $T_0(t)$ ,与此相应的收缩势用最大收缩速度 $v_0(t)$ 表示。若从等长状态突然放松,张力从 $T_0(t)$ 变为 $T(t)$ ,相应的收缩速度为 $v(t)$ ,实验表明, $v(t)$ 与 $T(t)$ 的关系可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v(t)}{v_0(t)} &= f\left(\frac{T(t)}{T_0(t)}\right) \\ \text{或} \quad \frac{T(t)}{T_0(t)} &= f\left(\frac{v(t)}{v_0(t)}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

类似于(3-22)(3-24), 设

$$\begin{aligned} f\left(\frac{T(t)}{T_0(t)}\right) &= \phi(t, \tau) * d\left(\frac{v(\tau)}{v_0(\tau)}\right) \\ &= \phi(t) \frac{v(0)}{v_0(t)} + \frac{1}{v_0(t)} \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{v(t)}{v_0(t)} + \frac{1}{v_0(t)} \int_0^t v(t - \tau) \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (7-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或: } f\left(\frac{v(t)}{v_0(t)}\right) &= \phi(t, \tau) * d\left(\frac{T(\tau)}{T_0(\tau)}\right) \\ &= \phi(t) \frac{T(0)}{T_0(t)} + \frac{1}{T_0(t)} \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{dT(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{T(t)}{T_0(t)} + \frac{1}{T_0(t)} \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{dT(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (7-3) \end{aligned}$$

若用伸长比  $\lambda(t)$  代替  $v(t)$  则

$$f\left(\frac{T(t)}{T_0(t)}\right) = \frac{v(t)}{v_0(t)} + \frac{1}{v_0(t)} \phi(t, \tau) * d\lambda(\tau). \quad (7-4)$$

一旦通过实验确定了函数  $f(x)$ 、 $T_0(t)$ 、 $v_0(t)$  和  $\phi(t, \tau)$ , 活化心肌的力学性质即可用方程(7-2)或(7-3)、或(7-4)给出。

作为初步近似,  $f$  可采用 Hill 方程的形式, 若用  $x$  代表

$\frac{T(t)}{T_0(t)}$  或  $\frac{v(t)}{v_0(t)}$ , 则:

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + cx} \quad (7-5)$$

$c$  是经验常数。

$T_0(t)$  亦可通过实验确定, 它可展成傅里叶级数

$$T_0(t) = T_{\max} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n t}{2t_0} \quad (7-6)$$

$T_{\max}$  是等长收缩过程中的最大张力,  $2t_0$  是等长收缩周期, 当  $t > 2t_0$  时,  $T_0(t)$  很小, 可以忽略不计。  $T_{\max}$ 、 $t_0$  都是心肌纤维束初始长度、温度、pH 值及其他环境参数的函数。

$v_0(t)$  亦需通过实验确定, 类似于(7-6),

$$v_0(t) = v_{\max} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi t}{2t_0} \quad (7-7)$$

$v_{\max}$  亦与初始长度、温度、pH 值及其他环境参数有关。

函数  $\phi(t, \tau)$  则可写作如下形式:

$$\phi(t, \tau) = \sum_{n=1}^N A_n(t) e^{\alpha_n(t-\tau)} \quad (7-8)$$

$A_n$ 、 $\alpha_n$  由实验确定。

这种本构方程避免了 Hill 模型理论无法避免的弱点, 由此得到的经验参数, 多多少少反映心肌纤维的固有特性。

但这条路还刚刚开端, 能否得到预想结果, 还有待实验鉴定。

## § 8 左心室的流变模型

心脏由心肌、心外膜、心内膜和瓣膜构成, 分左、右心室, 左、右心房等四个腔室, 心肌纤维束的空构构形十分复杂。以左心室为例, 从心外膜到心内膜, 肌纤维与赤道平面的夹角从  $60^\circ$  左右变到  $-60^\circ$  左右, 在空间呈螺旋形排列, 具体细节尚不清楚。§ 6、§ 7 所述均为孤立心肌纤维束的力学模型, 不能简单地由此而推断整个心室或心脏的力学性状, 因为, 整个心脏



的收缩-舒张规律,不仅取决于心肌纤维的力学性质,还和肌纤维的排列有关。另一方面,上述模型均以猫、兔等动物的乳突肌的实验结果为基础,它不一定反映整个心室、心房的特性。尤其是:一维试验所得性能可能和三维结构很不一样。

在未掌握心肌纤维构形细节的情况下,解决上述问题的一个可能的途径是:把整个心房、心室壁看作某种连续介质,用适当安排的  $CE$ 、 $SE$ 、 $PE$  三个元素来模拟;结合整个心室、心房几何形状变化的在体观测,确定其三维流变特性。下面以左心室为例,介绍 Ghista<sup>[12]</sup> 的模型。

假设:

(1) 左心室以壁厚 ( $h$ ) 均匀的空心旋转椭球为模型,如图 5-17 示。

(2) 壁材料是不可压缩的,以图 5-13a, b 所示的麦克斯韦体或佛克脱体为模型。 $CE$ 、 $PE$ 、 $SE$  的行为服从 §3 所述条件,但应力、应变是三维的。

(3) 问题是准定常的,整个心动周期内,壁应力的变化由当时的心室几何形状及压力确定。

此时整个左心室的力学性能由力平衡方程、壁材料本构方程及相容性条件决定。

### § 8-1 力平衡方程

取柱坐标  $\{r, \theta, z\}$  如图 5-16 示,以偏心距  $a$  为参考长度,令

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{z} = \frac{z}{a} \quad (8-1)$$

根据 Ghista 和 Sandler 分析,壁应力分布为

$$\tau_{rr} = \frac{A}{a^2} \left\{ -\frac{2}{\bar{r}^2} \left[ \frac{\bar{z} + 1}{\sqrt{(\bar{z} + 1)^2 + \bar{r}^2}} - \frac{\bar{z} - 1}{\sqrt{(\bar{z} - 1)^2 + \bar{r}^2}} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left\{ \frac{\bar{z} - 1}{[(\bar{z} - 1)^2 + \bar{r}^2]^{3/2}} - \frac{\bar{z} + 1}{[(\bar{z} + 1)^2 + \bar{r}^2]^{3/2}} \right\} + B \\
\tau_{zr} = \tau_{rz} &= \frac{A}{a^2} \left\{ 2\bar{r} \left[ \frac{1}{[(\bar{z} + 1)^2 + \bar{r}^2]^{3/2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{[(\bar{z} - 1)^2 + \bar{r}^2]^{3/2}} \right] \right\} \tau_{zz} = \frac{A}{a^2} \left\{ 2 \left[ \frac{\bar{z} + 1}{[(\bar{z} + 1)^2 + \bar{r}^2]^{3/2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\bar{z} - 1}{[(\bar{z} - 1)^2 + \bar{r}^2]^{3/2}} \right] \right\} + B \\
\tau_{\theta\theta} &= \frac{A}{a^2} \left\{ \frac{2}{\bar{r}^2} \left[ \frac{\bar{z} + 1}{[(\bar{z} + 1)^2 + \bar{r}^2]^{1/2}} - \frac{\bar{z} - 1}{[(\bar{z} - 1)^2 + \bar{r}^2]^{1/2}} \right] \right\} \\
& + B \\
\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0
\end{aligned} \tag{8-2}$$

这里:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-pa^2}{4} \left\{ \frac{1 + 2\bar{d}_2^2}{\bar{d}_2^2(\bar{d}_2^2 + 1)^{3/2}} - \frac{1 + 2\bar{d}_1^2}{\bar{d}_1^2(\bar{d}_1^2 + 1)^{3/2}} \right\} \\
B &= -p(\bar{d}_1^2 + 1)^{3/2}(1 + 2\bar{d}_2^2) \{ \bar{d}_1^2(1 + 2\bar{d}_2^2)(\bar{d}_1^2 + 1)^{3/2} \\
& \quad - \bar{d}_2^2(1 + 2\bar{d}_1^2)(\bar{d}_2^2 + 1)^{3/2} \}^{-1} \\
\bar{d}_1 &= \frac{b}{a}, \quad \bar{d}_2 = \frac{b+h}{a}
\end{aligned}$$

$b$  为椭球长半轴,  $h$  为壁厚,  $p$  为心室内压力。

在赤道平面上

$$\left. \begin{aligned}
\tau_{rr} &= -\frac{4A}{a^2} \frac{(2\bar{d}_c^2 + 1)}{\bar{d}_c^2(\bar{d}_c^2 + 1)^{3/2}} + B, & \tau_{rz} = \tau_{zr} &= 0 \\
\tau_{zz} &= \frac{4A}{a^2(\bar{d}_c^2 + 1)^{3/2}} + B, & \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} &= 0 \\
\tau_{\theta\theta} &= \frac{4A}{a^2\bar{d}_c^2(\bar{d}_c^2 + 1)^{1/2}} + B, & \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{8-3}$$

$$\bar{d}_c = \frac{b + \frac{h}{2}}{a}$$

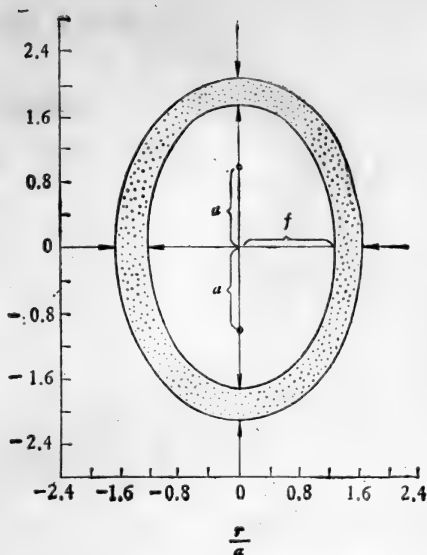


图 5-17 左心室模型

## § 8-2 本构方程

壁应力可改写为

$$\tau_{ij} = S \cdot \delta_{ij} + S_{ij} \quad (8-4)$$

这里:

$$S = \frac{1}{3} (\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} + \tau_{zz}) \quad (8-5)$$

$S_{ij}$  如下:

$$\left. \begin{aligned} S_{rr} &= \frac{2}{3} \tau_{rr} - \frac{\tau_{zz} + \tau_{\theta\theta}}{3} \\ S_{zz} &= \frac{2}{3} \tau_{zz} - \frac{\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta}}{3} \\ S_{\theta\theta} &= \frac{2}{3} \tau_{\theta\theta} - \frac{\tau_{rr} + \tau_{zz}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

在小位移假设下,应变用  $\epsilon_{ij}$  表示,则本构方程可写作

$$[S_{ij}] = [M, V][\epsilon_{ij}] \quad (8-7)$$

$[M]$ 、 $[V]$  分别代表麦克斯韦模型和佛克脱模型。

### 1. 麦克斯韦模型

类似于(6-2),有

$$S_{ij} = S_{ij}^{PE} + S_{ij}^{SE} = S_{ij}^{PE} + S_{ij}^{CE} \quad (8-8)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{PE} = \epsilon_{ij}^{SE} + \epsilon_{ij}^{CE} \quad (8-9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_{ij}^{PE}}{d\epsilon_{ij}^{PE}} &= K_{ij}^{PE} \\ \frac{dS_{ij}^{SE}}{d\epsilon_{ij}^{SE}} &= K_{ij}^{SE} \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

整个心动周期可分三个阶段。

#### (1) 阶段 I

舒张期,  $CE$  不起作用

$$S_{ij}^{CE} = 0, \quad S_{ij}^{SE} = 0 \quad (8-11)$$

$$S_{ij} = S_{ij}^{PE} \quad (8-12)$$

根据此时测得的  $p$  和几何形状随时间的变化,算出  $S_{ij}$ 、 $\epsilon_{ij}$ ,应用(8-12)(8-9)(8-10)可确定  $PE$  的特性  $K_{ij}^{PE}$ 。一般来说  $K_{ij}^{PE}$  随  $S_{ij}^{PE}$  而变化,为便于计算  $K_{ij}^{SE}$  及  $CE$  特性,可取时均值

$$\bar{K}_{ij}^{PE} = \left[ \frac{dS_{ij}}{d\epsilon_{ij}} \right] \quad (8-13)$$

#### (2) 阶段 II

收缩期,  $CE$  起作用。按(8-8)(8-9),令  $\Delta\epsilon_{ij,sh}^{CE} = -\Delta\epsilon_{ij}^{CE}$  则

$$\left. \begin{aligned} \Delta\epsilon_{ij} &= \frac{\Delta S_{ij}^{PE}}{K_{ij}^{PE}} = \frac{\Delta S_{ij}^{SE}}{K_{ij}^{SE}} - \Delta\epsilon_{ij,sh}^{CE} \\ \Delta S_{ij} &= \Delta S_{ij}^{SE} + \Delta S_{ij}^{PE} = \Delta S_{ij}^{CE} + \Delta S_{ij}^{PE} \end{aligned} \right\} \quad (8-14)$$

$$\therefore \Delta \varepsilon_{ij,sh}^{CE} = \frac{\Delta S_{ij}}{K_{ij}^{SE}} - \Delta \varepsilon_{ij} \left[ \frac{K_{ij}^{PE}}{K_{ij}^{SE}} + 1 \right] \quad (8-15)$$

从第 II 阶段开始时刻起, 求和得:

$$\varepsilon_{ij,sh}^{CE} = \Sigma \Delta \varepsilon_{ij,sh}^{CE} = \Sigma \left\{ \frac{\Delta S_{ij}}{K_{ij}^{SE}} - \Delta \varepsilon_{ij} \left[ \frac{K_{ij}^{PE}}{K_{ij}^{SE}} + 1 \right] \right\} \quad (8-16)$$

若  $K_{ij}^{PE}$ 、 $K_{ij}^{SE}$  均取其平均值, 则

$$\varepsilon_{ij,sh}^{CE} = \frac{S_{ij}}{\bar{K}_{ij}^{SE}} - \varepsilon_{ij} \left( \frac{\bar{K}_{ij}^{PE}}{\bar{K}_{ij}^{SE}} + 1 \right) \quad (8-17)$$

### (3) 阶段 III

收缩-舒张间的过渡阶段,  $CE$  不起作用, 但  $SE$  起作用, 此时

$$K_{ij}^{SE} + K_{ij}^{PE} = \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta \varepsilon_{ij}} \quad (8-18)$$

通常只讨论赤道平面上的本构关系, 此时只有正应力  $S_{rr}$ 、 $S_{zz}$ 、 $S_{\theta\theta}$ , 切应力为零。由(8-16)或(8-17)对  $t$  求导数即得  $r$ 、 $z$ 、 $\theta$  三个方向上张应力与收缩速度  $V_i^{CE}$  的关系:

$$V_i^{CE} = \frac{\dot{S}_{ii}}{\bar{K}_{ii}^{SE}} - \left[ \frac{\bar{K}_{ii}^{PE}}{\bar{K}_{ii}^{SE}} + 1 \right] \dot{\varepsilon}_{ii} \quad (8-19)$$

这里  $\dot{\cdot}$  表示时间导数, 附标重复不表示求和。由(8-19)可得力-速度关系:

$$\left. \begin{aligned} S_{\theta\theta}^{CE} &= F_{\theta}(V_{\theta}^{CE}) \\ S_{rr}^{CE} &= F_r(V_r^{CE}) \\ S_{zz}^{CE} &= F_z(V_z^{CE}) \end{aligned} \right\} \quad (8-20)$$

## 2. 佛克脱模型

类似于(6-4), 有

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= S_{ij}^{SE} = S_{ij}^{PE} + S_{ij}^{CE} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{PE} + \varepsilon_{ij}^{SE} = \varepsilon_{ij}^{CE} + \varepsilon_{ij}^{SE} \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

同样分三个阶段:

(1) 阶段 I

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^{CE} &= 0 \\
 \therefore d\varepsilon_{ij} &= \frac{dS_{ij}}{K_{ij}^{SE}} + \frac{dS_{ij}}{K_{ij}^{PE}} \\
 \therefore \frac{d\varepsilon_{ij}}{dS_{ij}} &= \frac{1}{K_{ij}^{SE}} + \frac{1}{K_{ij}^{PE}} \quad (8-22)
 \end{aligned}$$

取平均:

$$\frac{1}{\bar{K}_{ij}^{PE}} + \frac{1}{\bar{K}_{ij}^{SE}} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dS_{ij}} \quad (8-23)$$

(2) 阶段 II

类似于麦克斯韦模型, 可得:

$$\left. \begin{aligned}
 S_{\theta\theta}^{CE} &= G_r(V_{\theta}^{CE}) \\
 S_{rr}^{CE} &= G_r(V_r^{CE}) \\
 S_{zz}^{CE} &= G_z(V_z^{CE})
 \end{aligned} \right\} \quad (8-24)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned}
 S_{ij}^{CE} &= \left( 1 + \frac{\bar{K}_{ij}^{PE}}{\bar{K}_{ij}^{SE}} \right) S_{ij} - \bar{K}_{ij}^{PE} \varepsilon_{ij} \\
 V_i^{CE} &= \frac{\dot{S}_{ii}}{\bar{K}_i^{SE}} - \dot{\varepsilon}_{ii}
 \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

这里附标重复不表示求和。

(3) 阶段 III

这相当于一快速释放过程, CE 不变, PE 也不变, 只有 SE 起作用, 由此可以求出佛克脱模型中串联元素的特性。

$$K_{ij}^{SE} = \frac{dS_{ij}}{d\varepsilon_{ij}} \quad (8-26)$$

Ghista 曾讨论了上述模型的临床应用。

## § 9 心脏功能的评价问题

如果把心脏看作一个血泵, 那么评价心脏功能的指标, 可

简单归结为: (i) 效率——输出功率与总的能量供给率之比;  
 (ii) 适应各种生理需求的能力, 即可能输出的最大功率。

心脏运动所需之能量来源是心肌细胞中 ATP 水解反应。设单位时间内心肌所提供的总能量为  $U_T$ , 回流血液的机械能率为  $U_r$ , 则

$$U_T = U_a + U_v + U_i + U_b + U_w - U_r \quad (9-1)$$

这里,  $U_a$  是肌肉从松弛状态变为收缩状态所需要的能量(单位时间内);  $U_v$  是心肌材料粘性引起的内耗率;  $U_i$  是克服肌纤维之间表面张力所需之能率;  $U_b$  是心腔内部(包括瓣膜)流动阻力引起的机械能损失;  $U_w$  则为心脏射血输出的机械功率, 即有用功率, 若心输出量为  $Q$ , 主动脉口压力为  $p_a$ , 主动脉输入阻抗为  $Z_{ai}$  则

$$U_w = p_a Q \quad (9-2)$$

按线性理论

$$U_w = Z_{ai} Q^2 \quad (9-3)$$

$$\therefore \eta = \frac{U_w}{U_T} = \frac{1}{1 + \frac{U_a}{U_w} + \frac{U_v}{U_w} + \frac{U_i}{U_w} + \frac{U_b}{U_w} - \frac{U_r}{U_w}}$$

$$U_r = p_{ra} Q \quad (9-4)$$

$p_{ra}$  是右房进口处的压力。一般  $\frac{U_r}{U_w} \ll 1$ , 可以忽略不计。

欲用效率  $\eta$  来评价心脏功能, 必须设法确定  $U_T$  或分别确定  $U_a$ 、 $U_v$ 、 $U_i$ 、 $U_b$ 。且所用方法应当是无创的。为此先看一看整个心动周期内心内压力-心腔容积的变化是有益的。以左心室为例, 图 5-18 是测量结果。图中由  $A$  到  $B$ , 左心室在灌流(来自左心房)作用下膨胀, 前载荷逐渐增大, 由心室壁应力平衡。从  $B$  到  $C$  心肌从松弛状态变为收缩, 但肌纤维长度不变, 因而左室容积不变, 此即等容收缩(或等长收缩)。这

时,壁材料刚度突增,心室压力急剧增大,在C点  $p = p_a$ ,主动脉瓣打开;C到D为射血期,心腔缩小,压力逐渐降低,在D点

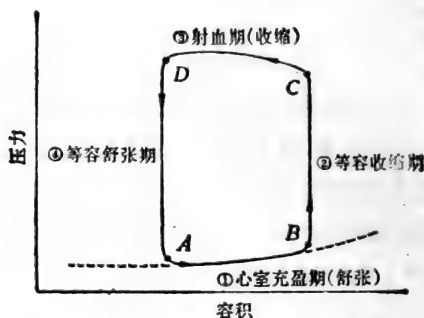


图 5-18 左心室 压力-容积 曲线<sup>[13]</sup>

$p = p_a$ ,主动脉关闭;从D到A,心肌由收缩变为松弛,压力降低,但容积几乎不变,为等容舒张。在整个过程中,心腔内的压力(后载荷)均由心室壁内的应力分布所平衡,故图5-18,可用等价的壁应力( $\tau_{ij}$ )-应变( $\epsilon_{ij}$ )曲线来表示,这时,图上封闭曲线所围面积即每一心动周期内左心室壁的变形功,它与心率之乘积即为左心室的变形功率  $U_s$ 。若壁应力按弹性模型计算,则

$$U_s = U_i + U_b + U_w \quad (9-5)$$

若按粘弹性模型计算,则

$$U_s = U_v + U_i + U_b + U_w \quad (9-6)$$

这样,

$$\left. \begin{aligned} U_T &= U_a + U_s \\ \text{或 } U_T &= U_a + U_v + U_s \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

由此可见左心室壁应力的计算对于评价心功有重要意义。



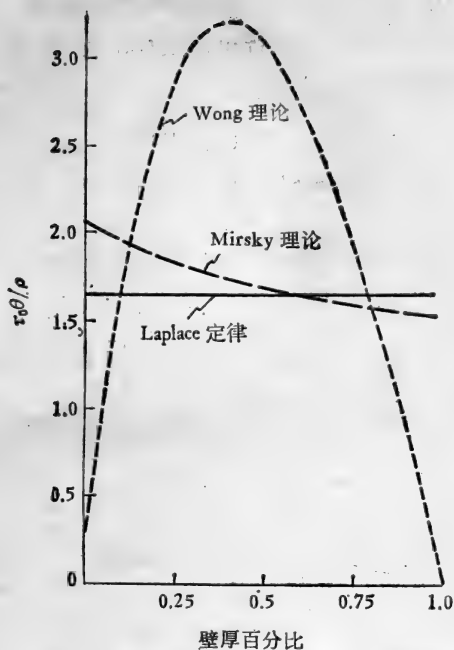


图 5-19 心动周期内左心室壁应力-应变曲线

### § 9-1 左心室壁内的应力

左心室壁应力可用§5所述方法计算,但  $K_{II}^{SB}$ 、 $K_{II}^{PB}$  如何确定是个问题。一般将左心室看作是空心的弹性球壳或旋转椭球壳来处理,假设材料是均匀、各向同性的线弹性体;应力取决于当时的心室压力及几何形状。现有模型分薄壁壳体 and 厚壁壳体两类,现将主要结果介绍于下。

#### 1. 薄壁模型

按薄壁模型,径向应力、切应力可以忽略不计,壁应力和

变形与周向坐标无关，唯一地决定于当时心室内、外的压差  $p$ ，壁张力与  $p$  的关系服从拉普拉斯定律。这样，若设心室为球壳，则周向壁应力为

$$\tau = pR_i^3 \frac{1 + \frac{R_0^3}{2r^3}}{R_0^3 - R_i^3} \quad (9-8)$$

$R_i$  为内半径， $R_0$  为外半径。壁中面平均应力为：

$$\tau_m = pR_i^3 \frac{1 + \frac{R_0^3}{2R^3}}{R_0^3 - R_i^3}, \quad R = \frac{1}{2}(R_i + R_0) \quad (9-9)$$

若设心室为旋转椭球，则赤道平面上，平均周向应力为

$$\tau = \frac{pb}{h} \left( 1 - \frac{b^3/a^3}{2b+h} \right) \quad (9-10)$$

$a$ 、 $b$  为内表面的短半轴与长半轴， $h$  为壁厚。

## 2. 厚壁模型

左心室壁相当厚，能承受弯曲应力、薄壁假设是不合理的。近年来，Mirsky<sup>[14]</sup>等相继提出了不同的厚壁理论，Mirsky 厚壁旋转椭圆壳模型可视作其代表。若以  $\theta$  表示周向角， $\phi$  表示偏心角，则

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\phi\phi} &= \frac{\tau_{\phi M} + \frac{2\zeta}{h} \tau_{\phi B}}{1 + \zeta/b} \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{\tau_{\theta M} + \frac{2\zeta}{h} \tau_{\theta B}}{1 + \frac{\zeta b}{a^2}} \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

这里  $a$ 、 $b$ 、 $h$  意义同前， $\zeta$  为厚变坐标，在中面  $\zeta = 0$ ，内表面

$\zeta = -\frac{h}{2}$ , 外表面  $\zeta = \frac{h}{2}$ 。而

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi M} &= \frac{pb}{2h} \left(1 - \frac{h}{2b}\right)^2 \\ \sigma_{\phi B} &= \frac{p}{4} \left[ 1 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{8}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^4 - \frac{4}{3} \left(-\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{h}{b} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{b}\right)^2 + 0.55 \left(\frac{h}{a}\right)^2 + 0.9 \left(\frac{hb}{a^2}\right)^2 \right] \\ \sigma_{\theta M} &= \frac{pb}{h} \left(1 - \frac{h}{2b}\right) \left(1 - \frac{hb}{2a^2}\right) - \frac{pb^3}{2a^2h} \left[ 1 - \left(\frac{h}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h^2}{9b^2}\right) \left\{ 4.5 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2.25 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2.5 \left(\frac{b}{a}\right)^6 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 10 \left(\frac{b}{a}\right)^8 \right\} \right] \\ \sigma_{\theta B} &= -\frac{\phi}{2} \left[ 1 - 2.5 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1.167 \left(\frac{b}{a}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + 0.333 \left(\frac{b}{a}\right)^6 - 0.323 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + 0.23 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 0.5 \left(\frac{hb}{a^2}\right)^2 - 1.42 \frac{b^2h^2}{a^4} \right] \quad (9-12) \end{aligned}$$

应该指出, 无论厚壁模型还是薄壁模型均未计及心室壁材料的不均匀性和各向异性, Mirsky<sup>[16]</sup>曾在上述厚壁模型基础上分析了不均匀性和各向异性的影响。结果表明, 不均匀性对壁应力分布的影响相当大, 各向异性的影响略小些。图 5-19 是几种理论结果的比较。

## § 9-2 心肌收缩特性

心肌从松弛状态变为收缩状态(等长收缩)所需要的能量

$U_a$  取决于心肌细胞中  $Ca^{++}$  泵的功能。宏观地说, 取决于串联弹性元(麦克斯韦模型)或  $SE$ 、 $PE$  两者(佛克脱)模型在等长度收缩中的功能, 和模型的力-速度曲线有密切关系。

另一方面, 心脏适应生理需求的能力, 亦和心肌的力-速度特性有关。

但是, 现有的心肌力-速度关系, 无论是 Hill 方程还是冯元桢公式中,  $a$ 、 $b$ 、 $T_0$  等均为肌纤维长度的函数, 因而与心脏前载荷有关, 不宜用来评价心肌纤维的收缩性能。当前不少人认为  $V_{max}$  可用来评价心肌收缩性, 因为从现有的实验结果来看,  $V_{max}$  似与前载无关。但对此仍有争议。因为, 实际测量中, 无载是不可能实现的, 只能从力-速度测量曲线外插而得。而在低载段曲线很陡, 外插结果的可靠性是可疑的。

Blinks 和 Jewells<sup>[15]</sup> 从肌肉力学原理出发, 认为描述肌肉收缩特性需要力、速度、长度、时间四个量之间的全部关系, 简单的收缩性指标客观上不存在, 因而寻求这种指标是徒劳的。

## § 10 平滑肌力学性质简述

平滑肌的收缩机理和横纹肌一样, 但肌球蛋白纤维丝和肌动蛋白纤维丝的排列, 不像骨骼肌和心肌那么规则、平直, 它们是弯曲的, 往往纠缠在一起, 且不存在规整的肌纤维节。不仅如此, 平滑肌的组织、功能及力学性质, 因所在组织、器官而异。例如, 豚鼠带状结肠肌的平滑肌细胞长约  $200\mu m$ , 而兔小动脉平滑肌细胞长仅  $30-40\mu m$ 。因此, 说到平滑肌的力学性质, 必须说明是哪个组织、哪种器官里的平滑肌。

人体内脏除心肌外, 均由平滑肌组成, 各种组织(如血管、尿管等)亦会有平滑肌, 它们的力学性质, 对其生理功能有很大影响。认识平滑肌的力学性质, 是生物力学领域中至为重

要的大课题。困难在于，实验非常难做。现有的实验限于输尿管、带状结肠肌等少数组织。下面介绍一些实验结果，以说明平滑肌力学性质不同于骨骼肌和心肌的特色。

Yin 和冯元桢<sup>[46]</sup>用狗的输尿管做了实验，图 5-20 是测得的张力-伸长比曲线，可见输尿管平滑肌收缩时的主动张力不高于同样伸长比下的被动张量。

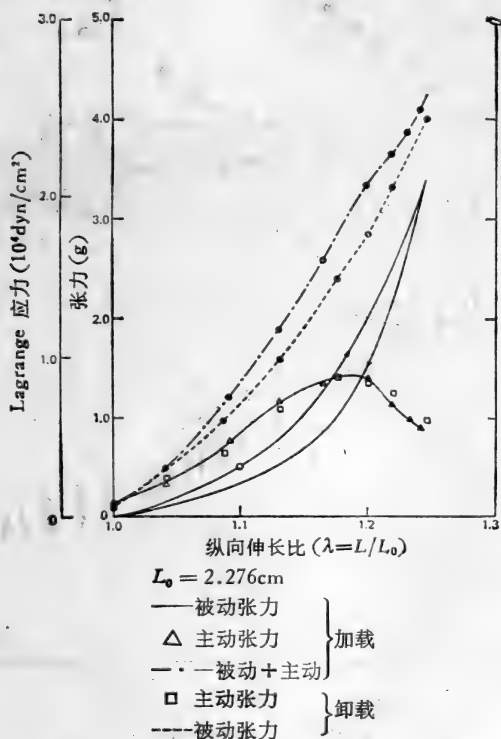


图 5-20 狗输尿管，张力-伸长比曲线<sup>[46]</sup>

图 5-21 是 Price、Paritucci 和冯元桢<sup>[9]</sup>用豚鼠带状结肠肌测得的应力-应变关系，应变以等长收缩张力达最大值时的

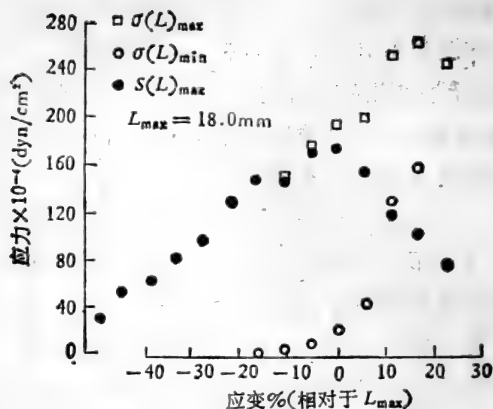
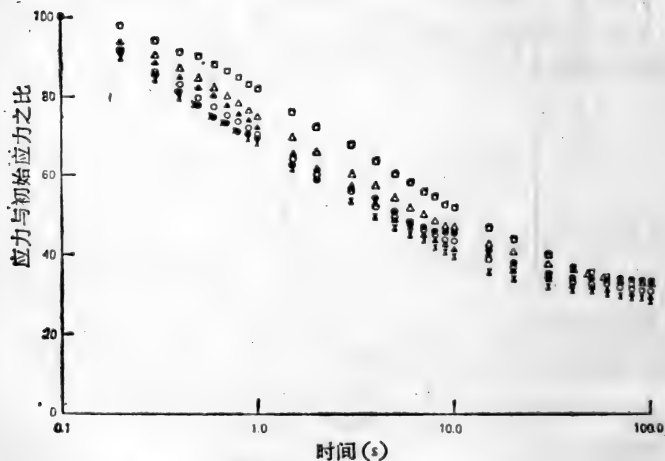


图 5-21 豚鼠带状结肠肌的应力-应变关系<sup>[9]</sup>



符号	初始伸长	$T_0 (10^4 \text{ dyn/cm}^2)$
●	$0.09L_0$	0.52
×	$0.13L_0$	1.3
○	$0.17L_0$	1.8
▲	$0.21L_0$	3.7
△	$0.25L_0$	5.0
□	$0.29L_0$	10.0

图 5-22 狗输尿管应力松弛曲线<sup>[16]</sup>

纤维长度  $L_{\max}$  为参考。可见  $L \leq L_{\max}$  时,被动张力接近于零,可以不计;当  $L > L_{\max}$  时,被动张力激增,而主动张力减小。 $\frac{L}{L_{\max}} \simeq 1.10$  时,被动张力与主动张力相等;  $L$  进一步增大时,被动张力高于主动张力。

这两个实验说明,收缩状态下,平滑肌主动张力等于或小于当时的被动张力,而骨骼肌的被动张力与主动张力相比可以忽略不计;心肌被动张力的影响虽然不可忽略,但仍远小于主动张力。这是平滑肌异于骨骼肌、心肌的一大特点。

图 5-22 是狗输尿管的应力松弛情况。不同于一般软组织,平滑肌可以完全松弛,直至应力为零。因此,由平滑肌构成的内脏,几何形状不十分确定,很大程度上取决于周围外力的作用和约束。

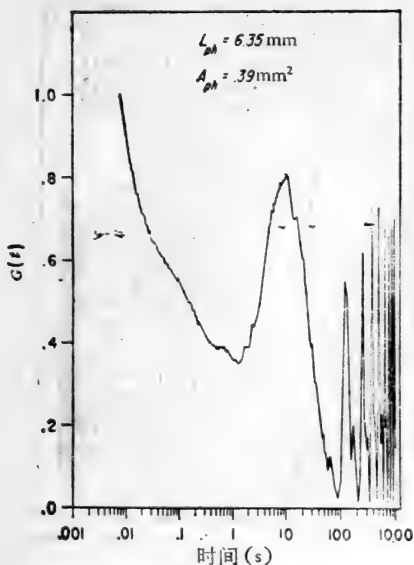


图 5-23 带状结肠肌在长度突变时的应力变化<sup>[9]</sup>

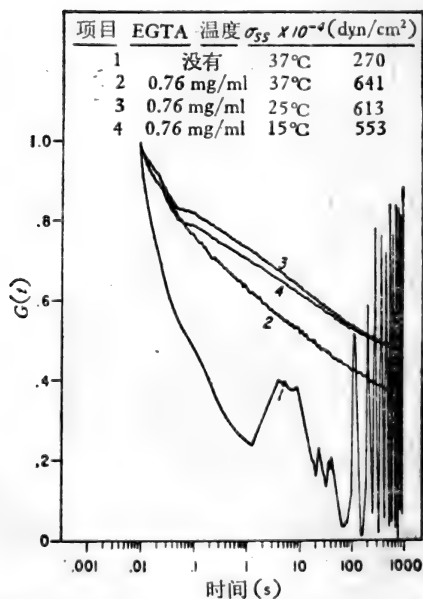
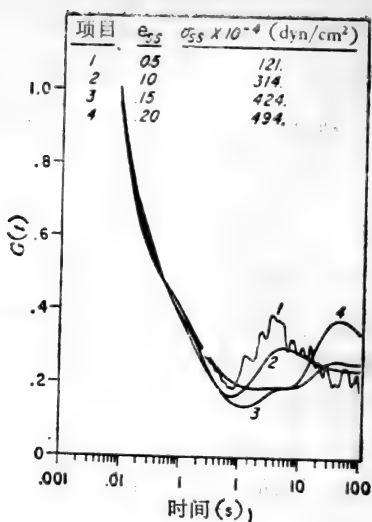


图 5-24 加 EGTA 后带状结肠肌应力松弛曲线<sup>[9]</sup>



图 5-23 是带状结肠肌在长度突然改变(改变 10%)时, 应力的反应。一开始, 应力单调下降, 约比初始值低 40%。一秒钟后, 应力以谐波形式变化; 随着时间增长, 波峰趋于常值。

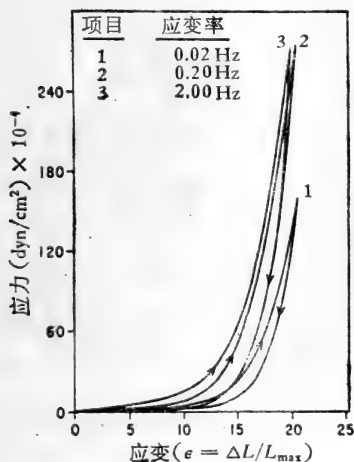
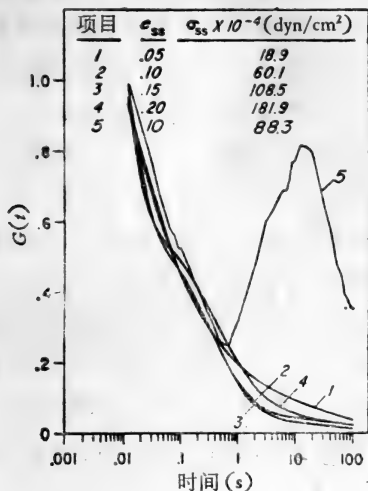


图 5-25 加肾上腺素后带状结肠肌的应力松弛曲线<sup>[7]</sup>

这是平滑肌不同于骨骼肌、心肌的又一特色，即在机械刺激下，会自发地、节律性地收缩-松弛。

因此，要研究松弛状态下的带状结肠肌特性，必须设法消除其自发收缩能力。常用三种方法：(i) 把温度降低到 20°C 以下；(ii) 用 EGTA 消除  $Ca^{++}$ ；(iii) 加肾上腺素。图 5-24 是加 EGTA 后，不同温度下的应力松弛曲线，图 5-25 是加肾上腺素后的应力松弛曲线。由此可见：平滑肌在松弛状态下的力学性质因消除其自发活性的方法而异。换言之，平滑肌的松弛状态下的性质依赖于其激活状态。这和横纹肌截然不同。后者的收缩机理不影响其静态特性。正是基于这一点，我们才能将肌肉的张力分解为主动张力和被动张力，分别用收缩元和并联弹性元表示。因此，对于具有自发激活能力的平滑肌来说，将张力分解为主动张力和被动张力是徒劳的。试图用 Hill 模型来导出平滑肌的本构方程，从根本上来讲是行不通的。

## 参 考 文 献

- [1] Mirsky, I. et al.: *Cardiac Mechanics*, Wiley & Sons., New York, 1974.
- [2] Fung, Y. C.: *Biomechanics, Mechanic properties of living tissues*. Springer-Verlag. New York. Heidelberg. Berlin, 1981.
- [3] Hill, A. V.: *Proc. Roy. Soc. London Ser B.* **126**, 136, 1938.
- [4] Peskin, C. S.: *Mathematical Aspects of Heart Physiology*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1974.
- [5] Brady, A.: *Handbook of physiology sec. 2. The Cardiovascular System*, vol 1, The Heart, American Physiological Society. Bethesda. Md., 1979.
- [6] Julian, F. J., Sollins, M. R.: *Circulation Research.*, **37**, 299, 1975.
- [7] Huxley, H. E.: *J. Biophysical and Biochemical Cytology*, **3**, 631, 1957.
- [8] Pinto, J. Fung, Y. C.: *J. Biomechanics*, **6**, 597, 1973.

- [9] Price, J. M., Patitucci, P., Fung, Y. C.: *Am. J. Physiol.*, **233**, C47, 1977.
- [10] Fung, Y. C.: *J. Biomechanics.*, **3**, 381, 1970.
- [11] Fung, Y. C.: *Federation of American Societies for Experimental Biology, Federation Proceedings*, **29**, 839, 1970.
- [12] Ghista, D. N., Sandler, H.: *J. Biomechanics*, **2**, 35, 1969.
- [13] Mirsky, I.: *Biophysical. J.*, **9**, 189, 1969.
- [14] Mirsky, I.: *Bull. Math. Biophysics*, **32**, 197, 1970.
- [15] Blinks, J. R., Jewell, B. R.: *Cardiovascular Fluid Dynamics* vol. 1, Ed. by Bergel, D. H., Academic Press, London, New York, 1972.
- [16] Yin, F. C. P., Fung, Y. C.: *Am. J. Physiol.*, **221**, 1484, 1971.

## 第六章 心脏内的血液流动

### §1 引言

心脏是个复合泵,是整个循环系统的动力源,研究其动力学特性,是认识心血管系统流体力学规律的前提。

心脏的动力来源于心脏细胞的收缩。而心肌细胞的收缩是由电信号触发的。心脏有一个完整的电信号发生、传输系统,它周期性地发出电信号,使心肌节律性地收缩、舒张,推动血液在体内循环。因此,心脏血液动力学问题,不仅取决于心脏的几何形状、材料性质以及边界条件(如输入、输出条件),还和心电过程密切相关。如果上述条件均已确知,那么,心脏血流的动力学问题不难通过数值计算来解决。

然而,实际问题往往不是这样,病人心脏的几何形状、力学性能、边界条件等均不确定。所要解决的问题是测量哪些量,可以预计病情未来的发展?采用什么方法来改变其发展。要回答这些问题,需作大量分析,而且要积累大量统计资料。本章限于讨论心脏内部血液流动的力学问题。

### §2 心脏的构造和功能

成人的心脏有四个腔室,如图 6-1 示,分左、右两部分,每部分又分心房和心室。心房收缩能力很弱,相当于两个贮存器,心室则为泵房。左心房从肺静脉接受氧合血,由左心室通过主动脉,泵入全身各组织;右心房则从上、下腔静脉接受低

氧血,由右心室泵入肺动脉。右心室压力仅为左心室的  $\frac{1}{6}$  左

右。但左、右心室的输出量(时均值)必定相等,因为,系统是闭合的,一端的输出,就是另一端的输入,必需保持平衡。



图 6-1 心脏构造示意图

每个心室有两个‘阀门’——瓣膜。进口阀位于房-室之间,左心叫二尖瓣,右心为三尖瓣。左心室的出口阀叫主动脉瓣,右心为肺动脉瓣。四个瓣膜位于同一平面内。心室收缩时,出口‘阀门’打开,房-室间的瓣膜紧闭,膜由腱索连接在乳突肌上,以防膜瓣翻转。心室舒张时,房-室瓣开放,而出口‘阀门’紧闭,血液充盈心室。

心房和心室均由心肌细胞构成,房、室之间由纤维组织构成的骨架连接,它就是四个瓣膜的底座。除了希斯氏束外,心房与心室之间的肌肉并不直接相连。整个心脏的肌肉纤维的排列很规则,贴近心外膜的心肌纤维与心脏赤道平面的夹角约  $90^\circ$ ,越向里,夹角越小。在中面,夹角为  $0^\circ$ 。尔后继续改变,在心内膜附近,心肌纤维与赤道平面夹角为  $-90^\circ$ 。

心脏膜瓣由胶原纤维构成，很容易变形。整个心脏由一层胶原纤维薄膜——心包膜包住。心包与心外膜之间，有少量起润滑作用的心胞液。

因为心机的每一次收缩，都需要一个电信号，故心肌必有一个产生电刺激的中心和相应的传输网络，把电信号送到每个心肌细胞中去。现已知，电信号主要产生于窦房结简称 S-A 结，它位于右心房壁，其内有两种细胞：小而圆的 P 细胞和细长的过渡细胞。前者是起搏细胞，后者连接 P 细胞和心肌细胞。窦房结产生的电信号向三个方面传输：(i) 沿心肌纤维传遍右心房；(ii) 沿若干特定的肌纤维束传到左心房；(iii) 沿另外三条特定的肌纤维束传向位于右心房壁的房室结，简称 A-V 结。房室结是信号转输站，它将窦房结传来的电信号延迟一定时间，然后通过希斯氏束将信号传到心室。希斯氏束沿心室间膜右侧下行，然后分左、右两支。其后更低级的分支，称为浦肯野氏纤维，它将电信号转给心肌细胞。

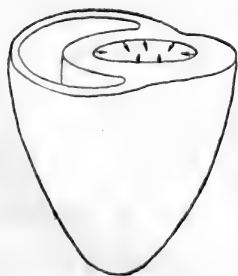
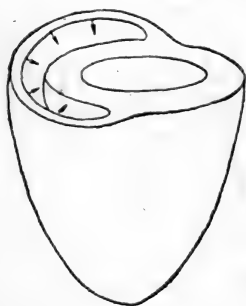


图 6-2 左、右心室收缩的情况

维传遍右心房；(ii) 沿若干特定的肌纤维束传到左心房；(iii) 沿另外三条特定的肌纤维束传向位于右心房壁的房室结，简称 A-V 结。房室结是信号转输站，它将窦房结传来的电信号延迟一定时间，然后通过希斯氏束将信号传到心室。希斯氏束沿心室间膜右侧下行，然后分左、右两支。其后更低级的分支，称为浦肯野氏纤维，它将电信号转给心肌细胞。

心脏的动力学特性和心肌电活动有密切关系，了解心肌电活动的顺序，对于心脏力学来说，极为重要。因为它告诉我们各部分心肌细胞收缩的顺序。

图 6-2 是心室收缩的情

况。左心是高压输出,收缩过程中,室腔大体上保持椭球形。因左心室收缩压高于右心室,故室间隔必定向右弯曲。由图 6-2b 可见,右心室收缩时,室腔呈风箱状,这适于低压、大流量输出。

心脏收缩与心电过程的关系见图 6-3。最下面的是心电图(ECG),P波表征心房的电活动,QRS波表征心室心肌细胞的去极化特性,T波则代表心室细胞的再极化过程。

ECG 曲线上方是心尖搏动图,a波相当于左心室充盈,IC是等容收缩,IC过程结束(e点)时,心尖位移最大。IR是等容舒张,它结束于0点,心尖位置最靠里。其后则是SFW,代表左心室的缓慢的充盈过程。

心尖搏动图上面是颈静脉波,图中a波系右心房收缩所致,c波反映右心房收缩时,三尖瓣向右心房凸起,x波是心室基面在收缩时向下移动引起的,xv波表征右房充盈过程,三尖瓣开放后产生vy波。右房压力波与此类似。

左心室容积曲线上,a波是左心房收缩引起的,平直段是等容收缩期,接着主动脉瓣打开,左心室容积剧降。在等容舒张期,容积基本上不变。二尖瓣打开后,容积增大,开始充盈过程。

左心房压力波和右心房相似,只是压力高些。

左心室压力曲线上,a波亦系左心房收缩所致。二尖瓣关闭后,左心室开始等容收缩,压力剧增,当它高于主动脉压力时,主动脉瓣被打开,开始射血,射血后期,心室压力下降。当它低于主动脉压时,主动脉瓣关闭。这在主动脉压力曲线上造成一个重搏波。右心室压力曲线与此类似,只是压力低得多。

据测量,成年人正常心脏,左心房平均压力不高于12mmHg;左心室收缩时压力峰值在100—150mmHg之间,

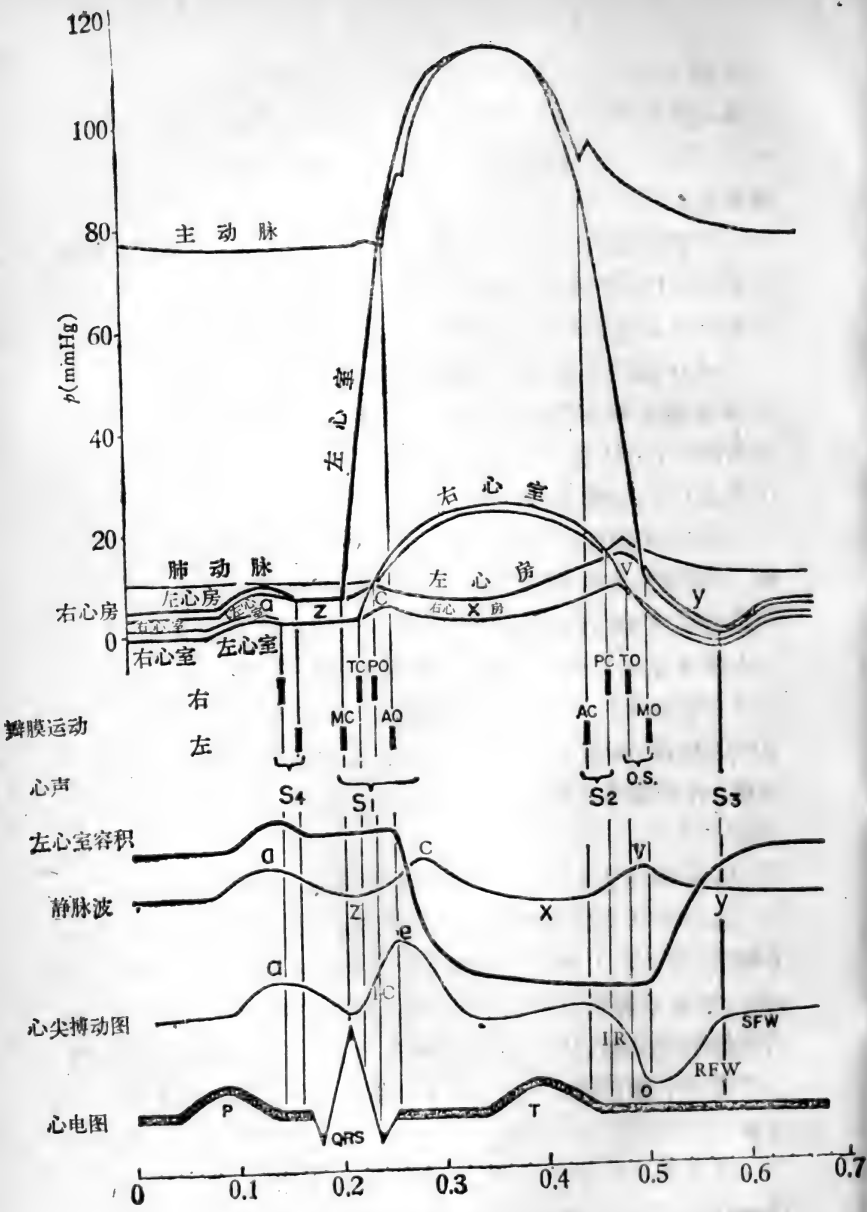


图 6-3 心脏收缩与心电过程的关系

A: 主动脉瓣, T: 三尖瓣, P: 肺动脉瓣, M: 二尖瓣,  
 O表示开放, C表示关闭。



舒张期末压力低于 12mmHg; 右心房平均压力不高于 6mmHg; 右心室收缩时最大压力为 15—30mmHg, 舒张期末, 压力低于 6mmHg。至于容积, 静止状态下, 左心室舒张期末容积约 70—100ml/m<sup>2</sup> (以单位人体表面积计), 收缩期末容积约 25—35ml/m<sup>2</sup>, 每搏输出量约 40—70ml/m<sup>2</sup>。收缩期持续时间约为整个心搏周期的 0.3。一般人心率约 60—100 次/分, 故收缩期持续时间约 0.2—0.3 秒。而主动脉口, 最大流速约为 60—100cm/s, 峰值雷诺数约为 5000—12000。

### § 3 心脏血流的动力学问题

从流体力学观点来看, 心脏血液流动的特点是:

(1) 和一般流体力学问题不同, 心脏血流是在心电系统控制下能动边界推动的非牛顿流体运动。流体的运动和心脏的构造、心肌的收缩过程、心电系统的动力学过程紧密耦合。因而心脏血液动力学问题的完整的数学描述, 必须包括上述三个过程, 光靠流体力学方程组是解决不了问题的。目前, 这样完整的数学模型还无法建立。

(2) 心血管系统是个完整的整体, 各个环节是互相影响的。以左心室为例, 其输出量作为始端边界条件, 影响整个血管系统里的流动; 而血管组织里的流动特性, 作为心室流动的出口条件又影响到心脏的输出。目前, 我们总是把它们孤立起来, 分别加以研究。

(3) 对心脏血流问题来说, 人们最感兴趣的是心室的充盈和射血过程, 这和瓣膜的运动密切相关。

(4) 无论是射血流还是充盈流, 流动加速度都很大(如左心室射血时, 加速度达 1000—5000cm/s<sup>2</sup>)、雷诺数相当高, 因而流体粘性可以忽略不计。但另一方面, 如第四章所述, 血液的

松弛时间约为 0.001—0.5 秒,而射血持续时间约 0.2—0.3 秒,故血液的弹性似应计及。

如果我们只考虑孤立的心脏,而不考虑心电过程和肌肉收缩问题,把心肌收缩力看作沿边界分布的已知力,并设血液是不可压缩牛顿流体,那么心腔内的血液流动可用下列方程描述:

连续方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3-1)$$

$\mathbf{u}$  是血流速度。

运动方程

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (3-2)$$

$\rho$  是血液密度,  $\mu$  是血液粘度,  $p$  为血压,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$  是心肌作用于血液的力,  $\mathbf{X}$  表示心腔壁上的点。

心腔内壁形状

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3-3)$$

壁面无滑流条件:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (3-4)$$

瓣膜运动方程:

$$\rho' \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} \quad (3-5)$$

$\rho'$  是瓣膜材料密度,  $\zeta$  是膜位移,  $\tau_{ij}$  是流体作用于膜的应力,  $\tau'_{ij}$  是膜的弹性应力。

瓣膜表面无滑流条件:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t) \quad (3-6)$$

$\mathbf{x}_s$  是膜表面点。

在给定边界条件下，原则上讲是可以求解的，但太复杂了。下面讨论几个比较简单的基本问题。

### § 3-1 心脏血流的相似性

动物试验是研究生理流动的重要方法，心脏血流问题亦然。哺乳动物心脏构造相似，假定心电过程、心肌收缩过程及瓣膜弹性也相似，并设血液是牛顿流体，那么，心脏血流的相似参数可由方程(3-2)导出。

以主动脉瓣到左心室尖的距离  $L$  为特征长度；以心搏周期  $T$  为时间尺度，以收缩期左心室最大压力  $P_s$  为参考压力，最大射血速度  $U_m$  为参考速度令：

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U_m} \\ p' &= \frac{p}{P_s}, \quad f(x'_i, t') = \frac{\rho L F(x_i, t)}{P_s} \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

则方程(2-2)变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'} + \frac{U_m T}{L} (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u} &= - \frac{P_s T}{\rho L U_m} \cdot \nabla p' \\ &+ \frac{\nu T}{L^2} \cdot \Delta \mathbf{u} + \frac{P_s T}{\rho U_m L} \cdot \mathbf{f}(x', t') \end{aligned} \quad (3-8)$$

由此可见，哺乳类动物心脏血流相似参数为：

$$\left. \begin{aligned} \text{峰值 Strouhl 数:} \quad St &= \frac{L}{U_m T} \\ \text{峰值雷诺数:} \quad Re &= \frac{\rho U_m L}{\mu} \\ K &= \frac{P_s}{\rho U^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

Bellhouse 和 Reid 以主动脉口半径为参考长，计算了鼠、人、象心脏血流的  $St$  和  $Re$ ，结果见表 6-1。可见，鼠、人、象的

$St$ 、 $Re$  分别差一个量级左右。这说明,不同种类的哺乳动物,心脏血液运动不一定相似。因此,试图通过动物实验来认识

表 6-1<sup>[3]</sup>

	$Re$	$St$
鼠	186	0.0089
人	4,458	0.0434
象	11,794	0.0756

人体心脏血流规律时,应对实验动物的种类有所要求。

另外, Clark 等将从睡鼠到大象多种哺乳动物的心脏作了对比,若心脏重量为  $W$ ,则  $W$  与  $T$  之间有以下经验关系

$$T \propto W^{0.28} \quad (3-10)$$

因  $W \propto L^3$ , 故

$$T \propto L^{0.84} \sim L \quad (3-11)$$

如果不同类的哺乳动物心脏血流相似,则将(3-11)代入(3-9)可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= \left( \frac{W_1}{W_2} \right)^{0.053} \\ \frac{P_{S_1}}{P_{S_2}} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{W_1}{W_2} \right)^{0.106} \\ \frac{U_1}{U_2} &= \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} \sim \frac{\mu_1 \rho_2}{\mu_2 \rho_1} \left( \frac{W_1}{W_2} \right)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

一般来说,条件(3-12a)与(3-12b)是矛盾的,很难同时满足。若不考虑粘性效应(因为流动雷诺数很高),则仍可近似看作相似。然而,粘性效应用于溶血、凝血等问题来说,有重要意义。因此,在这些问题上,将动物(尤其是小动物)试验结果推广于人体时要慎重。

### § 3-2 心室射血流动理想模型

心室收缩时,血液流动的实际情况相当复杂。但可以直观地建立一个简单的心室射血流动模型,并从中获得一些重要的结论。

心脏是生物进化亦即自然选择的产物,其构造功能应符合优化原理。可以设想心室内壁本身是个流线面。在收缩过程中,所有流线的形状都连续地变化,构成流线面的流体质点始终不变,因而流体质点不会穿越流面,不发生混合。这样,流动阻力最小,而且溶血、凝血以至血栓形成的可能性亦最小。

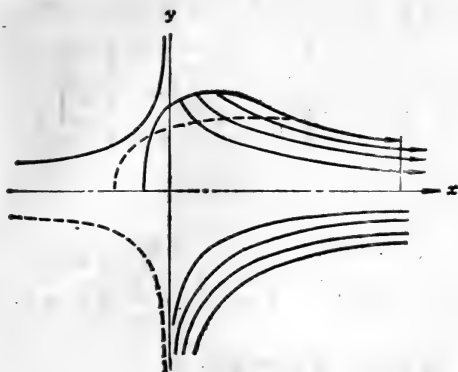


图 6-4 流线

由于心室射血时,雷诺数很高,粘性效应可忽略不计,即血液可当作不可压缩理想流体。这样,按照位流理论,若取原点位于流场驻点的直角坐标系  $\{x, y, z\}$  为参考,那么,上述理想流动的速度位为:

$$\phi = f(t)[ax^2 + by^2 + cz^2] \quad (3-13)$$

这里  $a, b, c$  是待定系数,满足条件:

$$a + b + c = 0 \quad (3-14)$$

实验证明, 尽管主动脉口峰值雷诺数高达  $10^4$ , 仍不发生持续的湍流, 这说明流动基本上不受干扰。因而可以设想出口流动是圆柱形射流, 与主动脉壁平行。进而, 如前所述, 左心室收缩时腔室呈旋转椭球形, 故可设室内流动是轴对称的。这样, 可取  $a = 2, b = -1, c = -1$ , 故

$$\left. \begin{aligned} u &= 4f(t)x \\ v &= -2f(t)y \\ w &= -2f(t)z \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

若  $t = 0$  时内腔壁型线为:

$$G_0(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (3-16)$$

则任何时刻  $t$ , 内壁面型线是(3-16)的仿射变换,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

这里

$$\lambda = e^{-\int_0^t f(t') dt'} \quad (3-18)$$

$f(t)$  取决于输出流量  $Q(t)$ 。若瓣膜开启过程中, 通道截面积为  $A(t)$ , 且设出口处  $x = x^*$ ,  $r = \sqrt{y^2 + z^2} = R$ ,

### § 3-3 瓣关闭的流体力学机理

心脏血流动力学问题中最饶有兴味的是瓣膜关闭的机理。

如前所述主动脉瓣、肺动脉瓣、二尖瓣、三尖瓣位于同一平面内, 装在同一底座上。主动脉瓣由三片新月形膜构成, 向主动脉方向打开, 关闭时将主动脉孔严密封闭, 边缘向主动脉内凸起。主动脉根部有三个主动脉窦, 其内有冠状动脉口。肺动脉瓣的构造与此类似。射血时, 瓣膜大体上与管壁平行,

瓣尖略偏向主动脉(或肺动脉)窦, 窦内形成一驻涡。

二尖瓣由两片约略呈梯形的薄膜组成, 其环座呈椭圆形。在开启位置, 膜成锥形。远端边缘由腱索连接于乳突肌。三尖瓣除多一个膜片外, 构造与二尖瓣相类似。

组织学研究表明, 瓣膜本身由胶原纤维构成。瓣膜的底座、环架也是纤维组织, 没有肌肉。因而, 都没有主动收缩的能力, 其启闭完全决定于外力。开启机理不难理解, 关闭机理却不那么简单。在体观测的一个基本事实是: 在心室开始舒张之前, 主(肺)动脉瓣就已经完全关闭, 因而血液倒流量很

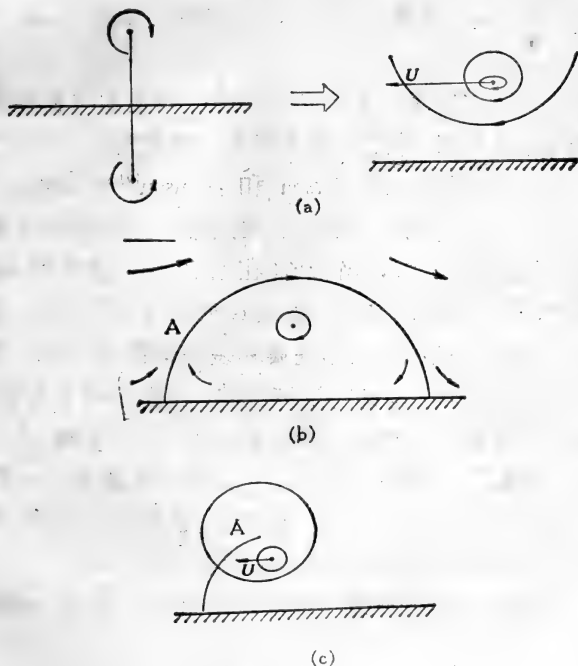


图 6-5

(a) 镜象原理, (b) 平壁驻涡, 模型, (c) 关闭机理。

小,不超过 5%。怎么会这么巧妙呢? 历来众说纷云,比较合理的解释有两种。

一种是旋涡理论。开始射血时,在主(脉)动脉窦内形成一驻涡,在射血期大部分时间内,驻涡的压力与射血流动压力平衡。在射血减速期,射流压力降低,旋涡扩张,推动瓣膜关闭。继而,由于流动减速,旋涡向相反(与流动方向相反)方向移动,使瓣膜迅速关闭。这可用位流理论说明(如图 6-5 示)。

设流场中有一点涡。若附近有平壁存在,则按镜象原理,涡将以速度 $-U_m$ 向左方移动: 如果叠加一个平行流 $U_m$ ,则变为驻涡。当平行流减速, $u < |U_m|$ 时,则壁面与旋涡的相互作用,使得涡以速度 $-(U_m - u)$ 向左方移动,从而推动瓣膜关闭。

二尖瓣和三尖瓣的关闭亦同此理,只是此时旋涡是充盈血流冲向心室尖部,并沿心室壁展布而形成的。

另一种说明基于 Henderson 和 Johnson<sup>[9]</sup>的实验。第一个实验如图 6-6(a) 示,一根管子插入容器,流体通过管子流向容器,形成淹没射流,当管流(在上部)突然中断时,容器内的液体向管周围流向管口。实验 II 如图 6-6(b) 示,在直管中部装一弯管,呈 D 形,把心脏瓣膜装在弯管进口处。当流体沿直管向下流动时,弯管内没有流动,当管流在下方受阻时,在弯管内形成迴流,它推动瓣膜将直管关闭。实验 III 示于图 6-6(c)。玻璃管下端套一段乳胶管,插入容器中。一开始设法使管内液面高于容器液面。放开后,管内液柱下降,当其液面略低于容器液面时,软管自动关闭。

上述现象可以用一维非定常理论简单地说明。忽略粘性力,运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-19)$$



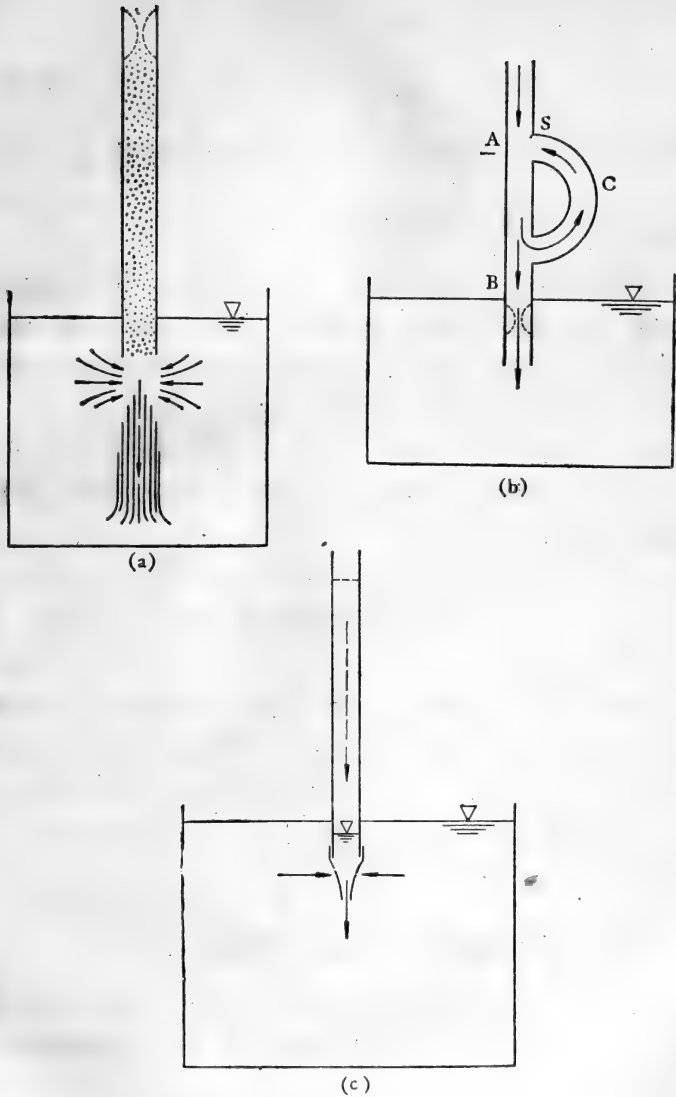


图 6-6 Henderson-Johnson 实验

因管截面积不变,故  $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-20)$$

现以实验 II 为例,当直管在下端受阻时,流动减速,  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ ,

$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} > 0$ , 它推动瓣膜关闭。

根据 Henderson 和 Johnson 实验,瓣膜关闭的原因是流动减速引起的逆压力梯度,不是流动速度,因而很灵敏,回流几乎没有。实验 II 可说明主动脉瓣和肺动脉瓣关闭的原理,实验 III 则适于二尖瓣和三尖瓣关闭过程。最近, Lee 和 Talbot(1979)<sup>[6]</sup> 用模型实验证明了上述机理的正确性。

目前,关于瓣膜关闭的流体力学机理,一般认为第二种解释更切合实际。

## § 4 主动脉瓣膜流动分析

研究主动脉瓣膜流动,必须将脉冲射流、膜运动及主动脉窦内的涡流三者结合起来,相当复杂。现有分析,都只考虑其中若干因素,讨论瓣膜关闭和开启过程的某些动力学特性。由于主动脉瓣绕流雷诺数相当高,通常不考虑流动粘性。下面分别讨论瓣膜关闭和开启过程的流动。

### § 4-1 主动脉瓣关闭过程的一维理论

Bellhouse 等从模型实验结果出发,着眼于流场压力分布和平均流速(流量),用一维流动理论分析了主动脉瓣的关闭过程。其基本假设为:

(1) 血液是不可压缩理想流体。

(2) 膜质量很小,其惯性与流体惯性相比可以不计,因而膜运动对流动的影响仅限于边界的准静态变动,只是在连续方程中有所反映。

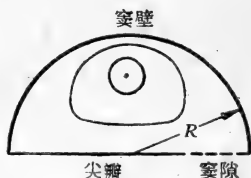
(3) 不考虑瓣膜形状的影响,瓣膜运动对流动的作用仅表现为流动通道截面积的改变。这相当于把膜看作无惯性的刚性薄片。

(4) 主动脉窦为半球形,窦内旋涡以准定常的 Hill 球形涡为其模型。

这样,流体力学问题主要是如何将涡流模型和一维流动模型结合起来。

### 1. 主动脉窦内的准定常涡

首先考虑定常流动。设瓣膜完全开启时,挡住窦口的绝大部分,且与管壁相平。因窦为半球形,故可取球坐标  $\{r, \theta, \varphi\}$  如图 6-7 示。按假设 4,旋涡以 Hill 球形涡为模型,其流函数为:



$$\phi = -\frac{A}{10}(R_0^2 - r^2)r^2 \sin \theta \quad (4-1)$$

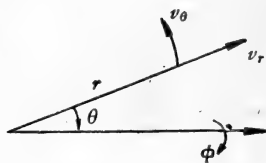


图 6-7 球坐标

$R_0$  是主动脉窦半径,设它等于主动脉出口半径。有关速度场为:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{A}{5} (R_0^2 - r^2) \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{-A}{5} (R_0^2 - 2r^2) \sin \theta \end{aligned} \right\} (4-2)$$

流场的旋度只有一个  $\varphi$  方向的分量  $\zeta$

$$\zeta = Ar \sin \theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) \quad (4-3)$$

涡核的涡量为:

$$\zeta_0 = \frac{AR_0}{\sqrt{2}} \quad (4-4)$$

Hill 涡的流场驻点位于  $r = R_0, \theta = 0, \pi$  处, 此外,  $r = \frac{R_0}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{2}$  的圆也是驻点线。

这里感兴趣的主要是旋涡引起的压力分布, 对此粘性影响甚微, 可不予考虑。这时 Hill 球形涡的总压:

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) \quad (4-5)$$

与涡量、速度的关系为:

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \nabla H + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (4-6)$$

由于流动定常, 故

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} &= v_\theta \zeta \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} &= -rv_r \zeta \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

以(4-2)(4-3)代入(4-7), 积分得

$$H = -\frac{A^2}{10} (R_0^2 r^2 - r^4) \sin^2 \theta + C$$

因为  $r = a, \theta = 0, \pi$  时  $p = p_0$  (驻点压力), 故  $C = \frac{p_0}{\rho}$ 。

$$\therefore H = \frac{p_0}{\rho} - \frac{A^2}{10} (R_0^2 r^2 - r^4) \sin^2 \theta \quad (4-8)$$

怎样确定旋涡强度  $A$  呢? 为此, 需要弄清楚主动脉窦内

的旋涡是怎样形成的。这有两种可能。一是主动脉血流边界层中的涡量,由于粘性引起扩散而进入室内;二是流体自瓣尖端间隙流入室内,形成的环流所致。何者为主?

按非正常平板边界层理论,距离  $R_0$  上的涡量扩散所需的时间  $t_D$  为:

$$t_D \sim \frac{R_0^2}{\nu}$$

若  $\nu = 3.5 \times 10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$ ,  $a = 1.0 \text{cm}$ , 则  $t_D \sim 28 \text{s}$ 。而脉冲流中,室内旋涡必须在 1 秒钟以内形成。因而,主动脉室内旋涡不可能是血流边界层内的涡量扩散所致。只能通过对流而形成,形成这种涡所需的时间为  $t_c$ ,

$$t_c \sim \frac{(2 + \pi)R}{U}$$

$U$  为主动脉内血流速度(设沿截面均匀分布),取  $U = u_{\max} = 100 \text{cm/s}$ , 则  $t_c \sim 0.05 \text{s}$ , 这在量级上是正确的。

由于室内旋涡是通过瓣尖对流形成的,故涡核的强度为:

$$\zeta = \alpha \cdot \frac{U}{R_0} \quad (4-9)$$

$\alpha$  为比例常数。这样由(4-4)(4-11)可得:

$$A = \sqrt{2} \alpha \cdot \frac{U}{R_0^2} \quad (4-10)$$

应用(4-2)(4-8)(4-12)可得主动脉室内压力  $p_s$  和主动脉内压力  $p_a$  的关系为:

$$\frac{p_s - p_a}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 0.08 \alpha^2 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 + \left( \frac{r}{R_0} \right)^4 + \sin^2 \theta \cdot \left[ 3 \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{R_0} \right)^4 \right] \right\} \quad (4-11)$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = 0.08 \alpha^2 U^2 \left\{ 1 - 2 \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right.$$

$$+ \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 + \sin^2\theta \left[ 3 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 \right] \quad (4-12)$$

$p_s$  沿瓣膜表面积分得平均压力  $\bar{p}_s$ ,

$$\frac{\bar{p}_s - p_a}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 0.0672\alpha^2 \quad (4-13)$$

上述定常模型适用于平衡状态, 即射血峰期, 瓣膜完全打开。在关闭过程中, 室内旋涡的压力场需用准静态 Hill 球形涡确定。即以主动脉根部的瞬时速度  $u_1(t)$  代替  $U$ , 这样得:

$$A(t) = \sqrt{2} \alpha \cdot \frac{u_1(t)}{R_0^2} \quad (4-14)$$

$$\frac{\bar{p}_s - p_a}{\frac{1}{2} \rho u_1^2(t)} = 1 - 0.08\alpha^2 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 + \sin^2\theta \left[ 3 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^4 \right] \right\} \quad (4-15)$$

$$\frac{\bar{p}_s - p_a}{\frac{1}{2} \rho u_1^2(t)} = 1 - 0.0672\alpha^2 \quad (4-16)$$

## 2. 一维流动模型

瓣膜从收缩峰开始关闭。设沿截面流速、压力都是均匀的, 瓣膜以角速度  $\Omega$  转动。取控制体如图 6-8 示。截面 1 为主动脉根部, 2 为主动脉窦远端边缘, 3 为通过瓣尖的截面。显然 1、2 是固定的, 而 3 的位置则随时间而变动, 但始终位于 1、2 之间。

流体质量守恒, 故由图可得:

$$\pi R_0^2 u_1 - \pi R_3^2 u_3 = \frac{dV}{dt} \quad (4-17)$$

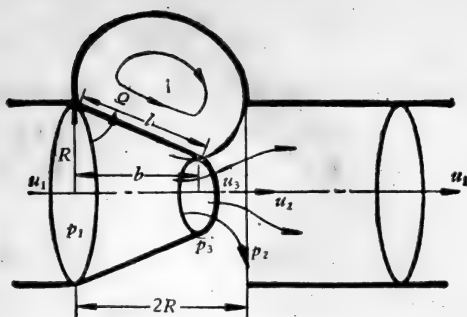


图 6-8 一维流动模型

$V$  为控制体体积, 与  $Q$  有关。若设瓣膜长度为  $l$ ,

$$\lambda = \frac{R_3}{R_0} \quad (4-18)$$

则(4-17)简化为:

$$u_3 = \frac{u_1}{\lambda^2} - \frac{QR_0}{3\lambda^2} \left(\frac{l}{R_0}\right)^2 (1 + 2\lambda) \quad (4-19)$$

推广于 1—3 之间的任意截面, 则得速度轴向分布  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 u_1(t) - \frac{R_0 Q}{3} \left(\frac{x}{R}\right)^2 \left(1 + 2\frac{R}{R_0}\right) \quad (4-20)$$

$R$  为所论截面的瞬时尚内半径。

但在截面 3—2 之间, 速度轴向分布很复杂, 作为近似, 假设:

$$\frac{u - u_1}{u_3 - u_1} = \left[\frac{2R_0 - x}{2R_0 - b}\right]^n \quad (4-21)$$

$$\left(\frac{b}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{l}{R_0}\right)^2 - (1 - \lambda)^2 \quad (4-22)$$

忽略粘性、体积力及瓣膜的惯性后, 一维非定常流动方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4-23)$$

将(4-20)代入(4-23),在截面1—3之间求积分,得:

$$\frac{p_1 - p_3}{\rho} = \frac{b}{\lambda} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{2} u_3^2 - \frac{1}{2} u_1^2 - \frac{R_0 b}{3\lambda} \left(\frac{l}{R_0}\right)^2 \frac{d\Omega}{dt} \quad (4-24)$$

将(4-21)代入(4-23),在截面3—2之间求积分,得:

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_3}{\rho} = & \frac{1}{2} u_1^2 - \frac{1}{2} u_3^2 + (2R_0 - b) \frac{du_1}{dt} \\ & + \frac{(2R_0 - b)}{n+1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{du_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (4-25)$$

由(4-19)可求出 $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ ,代入此式,并与(4-24)结合,得:

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{\rho} = & -\frac{du_1}{dt} \cdot \left\{ \frac{b}{\lambda} + (2R_0 - b) \left[ 1 + \frac{1 - \lambda^2}{(n+1)\lambda^2} \right] \right\} \\ & + \frac{d\Omega}{dt} \cdot \left\{ \frac{R_0 b}{3\lambda} \left(\frac{l}{R_0}\right)^2 + \frac{R_0(2R_0 - b)}{3\lambda^2(n+1)} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{l}{R_0}\right)^2 (1 + 2\lambda) \right\} \end{aligned} \quad (4-26)$$

计算表明,取 $n=0$ 和 $n \rightarrow \infty$ 所得结果差异不大,故可取 $n=1$ 。

如前所述,主动脉窦远端边缘为流动驻点,故据理想流体非定常运动的伯努利公式,该点压力 $p_0(t)$ 为:

$$p_0(t) - p_1(t) = \frac{1}{2} \rho u_1^2(t) - 2\rho R_0 \frac{du_1}{dt} \quad (4-27)$$

设主动脉窦内旋涡作用于瓣膜的平均压力 $\bar{p}_s = p_0$ ,则:

$$\bar{p}_s(t) - p_1(t) = 0.154 \rho u_1^2(t) - 2\rho R_0 \frac{du_1}{dt} \quad (4-28)$$



### 3. 理论与实验结果比较

Bellhouse 和 Talbot 用模型观测了主动膜瓣的启闭过程, 测量了瓣膜开启面积  $A$  及主动脉口血流平均速度随时间的变化。若以收缩期持续时间  $t_s$ , 最大速度  $u_{\max}$ , 主动脉根部内腔截面积  $A_0$  为参考, 则  $\frac{A}{A_0}$ ,  $\frac{u_1}{u_{\max}}$  随无因次时间  $\tau = \frac{t}{t_s}$  的变化如图 6-17 示。可用下述经验公式表达。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{u_{\max}} &= 1 - 4\tau^2, \quad -\frac{1}{2} \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ \lambda &= 1.09 - 8.96\tau^4 \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-29)$$

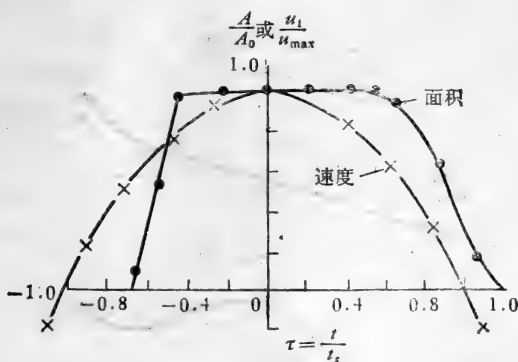


图 6-9  $\frac{A}{A_0}$ ,  $\frac{u_1}{u_{\max}}$  随  $\tau$  的变化

由图 6-9 可见, 整个收缩期, 主动脉瓣的运动可分为四个时期: 开放期、准定常期、关闭期、倒流发生期。准定常期瓣膜完全打开, 持续时间相当长。相对来说开启和关闭所需时间均较少, 而且二者是不对称的。Bellhouse 的理论分析, 侧重于准定常期和关闭期。

图 6-10 是从 (4-29) 及测得  $Q(t)^*$  出发, 用一维理论算出的压力随时间的变化。这里设主动脉窦中心压力  $p_c = p_2$ 。

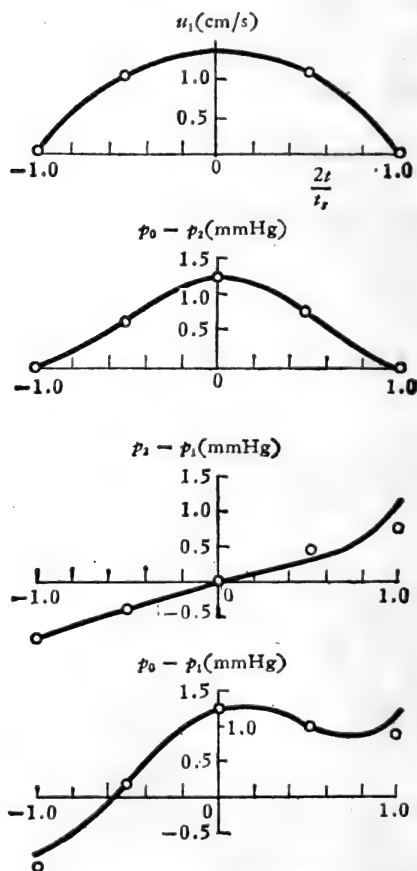


图 6-10 压力随时间的变化

然而,应该指出,这不能说明上述一维理论提供了令人满

\*  $Q(t)$  可从  $A(t)$  算出, 因为假设膜是刚性的。

意的压力场分布。因为,  $\Omega(t)$  是经验的。按理  $\Omega(t)$  应根据  $\bar{p}_i$  与  $p_a$  之差与瓣膜的转动惯量算出。

## § 4-2 开启过程中主动脉瓣膜的运动

实际瓣膜富有弹性且高度柔顺。观察其开启过程, 可以看到膜有波动、抖振。这样产生了两个问题: (i) 忽略膜惯性时, 瓣膜对血液流动的影响, 不仅仅表现为通道截面积的改变, 还要考虑通道边界(瓣膜表面)形状。而瓣膜的形状又取决于流动的应力场及膜的力学性能; (ii) 瓣膜波动、抖振时, 受弯曲应力作用, 易于疲劳破裂, 最大弯曲应力产生于最大曲率处。作为人工瓣膜的设计, 这点必须考虑。

鉴于此, Swanson 和 Clark 假设:

(1) 血液是不可压缩牛顿流体, 流动是轴对称的。

(2) 瓣膜的行为象流体中浮力中性的柔性薄膜一样, 既不阻碍流体运动, 本身亦无变形抗力。

(3) 主动脉窦形状和大小不变。

由此出发分析了主动脉内的流动和开启时尖瓣的运动。因为所考虑的是开启期, 故不考虑主动脉窦旋涡的影响。

### 1. 主动脉内的流动

设主动脉内流动是轴对称的, 径向速度甚小, 可不计。轴向速度不随轴向位置而变化, 仅为时间和径向位置的函数, 设:

$$u(r, t) = u_0(t) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^n \right] \quad (4-30)$$

$u_0(t) = u(0, t)$  为中心流速;  $n$  为经验指数, 射血加速期  $5 < n < 9$ , 减速期  $3 < n < 5$ 。  $R_0$  为主动脉根内腔半径。

设主动脉根内腔截面积为  $A_0$ , 则

$$u(r, t) = \frac{n+2}{nA_0} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^n \right] Q(t) \quad (4-31)$$

这样若流量  $Q(t)$  已测出, 且  $A_0, R_0$  已知, 则可根据(4-31)算出主动脉内速度分布。典型的心输出量曲线如图 6-11 示。

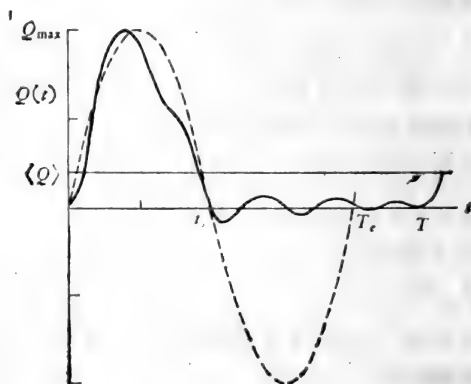


图 6-11 典型的  $Q(t)$  曲线<sup>[1]</sup>

心搏周期为  $T$ , 最大流量为  $Q_{\max}$ , 设

$$Q'(t) = \frac{Q(t)}{Q_{\max}} \quad (4-32)$$

取时均流量  $\langle Q \rangle$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt \quad (4-33)$$

这样(4-31)变为:

$$u(r, t) = \frac{n+2}{n} \frac{Q_{\max}}{\langle Q \rangle} \frac{\langle Q \rangle}{A_0} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^n \right] Q'(t) \quad (4-34)$$

这里感兴趣的是射血加速期, 故可取  $n = 6$ 。

## 2. 瓣膜的运动

瓣膜一端固定于主动脉根, 一端可自由运动, 但瓣膜长度

不变。收缩期瓣膜的形状由初始形面上各点沿当地流线的位移而决定。

因为膜很柔顺,而流体不可压缩,故当射血开始时,正是流体的运动推动瓣膜位移,流体与膜之间几乎没有相对运动。在瓣膜开启过程中,膜与流体运动的法向(垂直于膜表面)速度相等,只在切向发生相对滑移。由于膜一端固定,且不能伸长,故这种相对滑动时瓣膜运动没有影响。这样,膜的运动、形状可从初始位置、形状出发,由流动速度场随时-空的变化逐点算出。

将任一时刻的瓣膜用若干段折线近似表示,每一段的始端即前一段的终端,每一段的终点相对于其始端作圆周运动,运动的速度(周向)等于该时刻通过该点的流线。在当地瓣膜型线法向的速度分量。这样可逐点算出瓣膜的位移,从而得知其位置的形状。

数值计算时,取时刻

$$t_m = \frac{mT_e}{2M}, \quad \begin{array}{l} m \text{ 为整数} \\ 0 \leq m \leq M \end{array} \quad (4-35)$$

$T_e$  是收缩期等效正弦波的周期,

$$T_e = k \cdot T \quad (4-36)$$

$$0.75 < k < 0.8$$

$M = 100$ 。这样,位移  $D$  为:

$$\begin{aligned} \frac{D(r, m)}{R_0} &= \frac{n+2}{nR_0} \cdot \frac{Q_{\max}}{\langle Q \rangle} \cdot \frac{\langle Q \rangle}{A_0} \cdot \frac{T_e}{2} \\ &\times \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^n \right] \int \frac{Q'(m) dm}{100} \quad (4-37) \end{aligned}$$

取  $n = 6$ ,  $R_0 = 1\text{cm}$ ,  $f = \frac{1}{T} = 70$  次/分,测得的典型

$Q(t)$  曲线,(4-37)可化为:

$$\frac{D(r, m)}{R_0} = 32.1 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^6 \right] \sum \frac{Q' \Delta m}{100} \quad (4-38)$$

Swanson 和 Clark 以舒张期瓣膜形状为初始形状, 分为八段, 作数值计算, 典型结果示于图 6-12。可见:

(i)  $m = 28$  时, 瓣膜就完全开启了, 这相当于  $0.28t_s$  ( $t_s$  为收缩期持续时间) 或  $0.11T$ 。

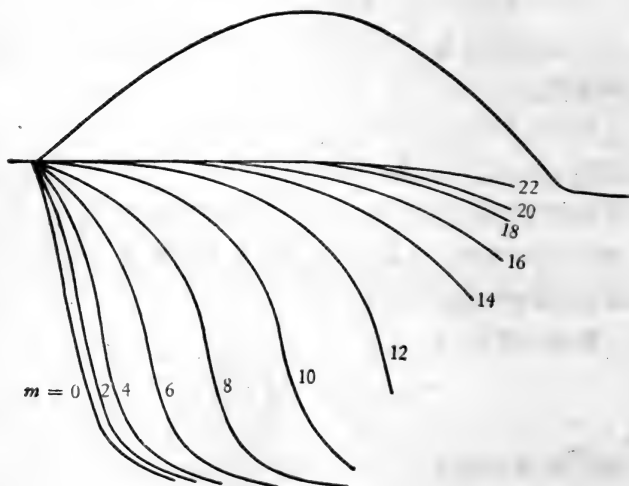


图 6-12 射血加速期瓣膜形线及位置<sup>[7]</sup>

(ii) 最大曲率为  $K = \frac{3.5}{2R_0}$ 。

Swanson 和 Clark 分析的最大问题是: 没有考虑流场沿  $x$  方向的变化, 这显然不真实。若计及流场在  $x$  方向的改变, 仍按此法计算瓣膜在开启过程中的形状和位置, 可获更准确的结果。

其次, 此模型完全忽略了瓣膜本身的弹性。真实的瓣膜形状应由当地应力场和膜材料力学性能决定。

### § 4-3 瓣膜几何形状和压力的关系

瓣膜几何形状主要决定于流动的压力分布。Swanson 和 Clark<sup>[8]</sup>用新鲜的入心(死后三日内做实验)在静态条件下,测量了瓣膜几何形状随压力的变化。所用参数的几何意义见图 6-13。 $R_a$  为主动脉窦下游血管内半径;  $R_0$  为主动脉根部(瓣膜支架)内半径, 设它不随压力变化;  $R_s$  为主动脉窦半径;  $l_s$  为主动脉窦最大长度;  $l_c$  为瓣尖长度;  $C_c$  为重叠部分高度;  $\alpha$  为主动脉瓣与根截面的夹角。所有长度参数均以  $R_0$  为参

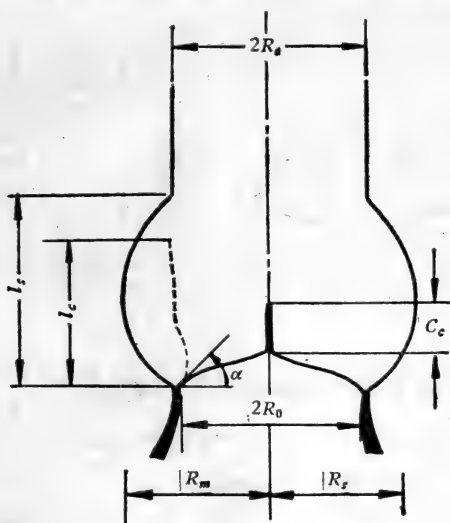


图 6-13 主动脉瓣的几何参数

考无量纲化,弹性模量则取:

$$E_d = \frac{\Delta p}{\Delta R_a / R_a} \quad (4-39)$$

Swanson 和 Clark 测量了八组不同性别、不同年龄(29岁—42岁)死者的心脏。典型结果见表 6-2。

表 6-2 主动脉瓣几何参数与压力关系<sup>[1]</sup>

	$p$ (mmHg)	$\bar{R}_a$	$\bar{R}_s$	$\bar{l}_c$	$\bar{l}_s$	$\bar{C}_c$	$\alpha^\circ$	$E_d \times 10^{-5}$ (dyn/cm <sup>2</sup> )
35 岁 (女)	0	0.78	1.01	0.68	0.78	0.18	9	—
	20	0.82	1.07	0.68	0.76	0.18	10	3.3
	40	0.85	1.07	0.70	0.81	0.18	13	3.1
	70	0.90	1.09	0.69	0.79	0.18	13	3.2
	100	0.93	1.02	0.70	0.79	0.19	15	3.3
	120	1.00	1.12	0.71	0.83	0.19	17	3.4
42 岁 (男)	0	1.00	1.26	0.75	0.98	0.20	23	3.0
	20	1.02	1.25	0.75	0.93	0.18	23	3.3
	40	1.06	1.31	0.70	0.93	0.16	24	3.6
	60	1.09	1.34	0.73	0.92	0.16	25	3.8
	80	1.20	1.40	0.73	0.95	0.18	27	4.0
	100	1.23	1.43	0.76	0.97	0.17	29	3.3
	总平均	0.95	1.21	0.70	0.87	0.17	20	3.3
	在 100mmHg 下的平均值*	1.07	1.31	0.71	0.88	0.17	22	3.5

\* 指全部八组试样的平均值,这里只列出两组。

#### § 4-4 瓣膜形状和运动速度对流动的影响

Bellhouse 的一维理论只考虑了瓣膜运动引起的孔道截面积变化对于流动的影响;而 Swanson 和 Clark 的分析实际上只考虑柔性膜在给定流场中是怎样运动的,不管膜运动本身对流场的影响。而实际流动中,二者存在强烈的相互作用,这种相互作用不仅表现为孔道截面积的影响,还表现于瓣膜形状和瓣膜运动速度。

假设血液是不可压缩理想流体,流动是轴对称的,取柱坐标  $(r, \theta, x)$ , 相应速度场为  $(v, 0, u)$ 。流动满足连续方程:



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (4-40)$$

伯努利方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (4-41)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (4-42)$$

为考察瓣膜运动对其血液动力学特性的影响, Hung 和 Schuessler<sup>[10]</sup> 根据 Bellhouse 和 Talbot 测得的  $Q(t)$  及  $A(t)$  变化规律, 对开启过程中瓣膜位置和形状随时间的变化, 规定了五种情况, 进行数值计算。

(1) 相当于 Bellhouse 实验模型, 收缩期为 0.57s; (2) 的  $Q(t)$ ,  $A(t)$  曲线和(1)一样, 但收缩期为 0.27s, 更接近于真实生理状态。(3)  $Q(t)$ , 及瓣膜运动速度(平均)和(2)一样, 但形状略有不同, 自打开之时起, 膜在而后的过程中无弯曲; (4)  $Q(t)$  和形状与(2)一样, 但瓣膜运动速度较(2)慢; (5)瓣膜形状和(2)一样, 但  $Q(t)$  不同。

瓣膜的血液动力学特性可用排出系数 (discharge coefficient)  $C_d$  来表示。

$$C_d(t) = \frac{Q(t)}{A_0 \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}}} \quad (4-43)$$

$A_0$  为主动脉根部内腔截面积,  $\Delta p(t)$  为根部压力和主动脉窦下游压力之差。五种情况的计算结果如图 6-14 所示。可见:

(i) 流量增大将使瓣膜效率增大,  $(C_d)_1$  比  $(C_d)_2$  高约 20%;

(ii) 瓣膜开启速度变慢, 在心率不变时, 相当于通道狭窄(开启不完全)。瓣膜效能大大降低。

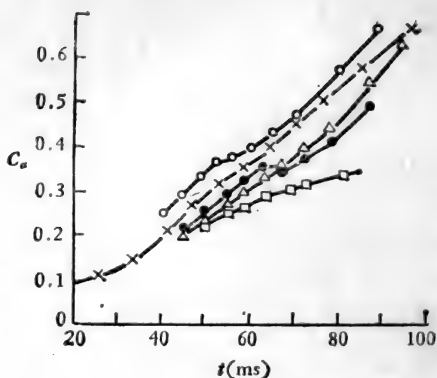


图 6-14 五种情况  $C_d(t)$  的比较<sup>[10]</sup>  
 —○—情况 5#    —+—情况 1#    ●情况 3#    —△—情况 2#  
                   —□—情况 4#。

(iii) 当  $\tau = \frac{t}{t_s} < 0.25$  时,  $(C_d)_3 > (C_d)_2$ ; 而  $\tau > 0.25$

时,  $(C_d)_3 < (C_d)_2$ 。这说明, 在射血加速初期,  $(\Delta p)_3 < (\Delta p)_2$ , 而后期则相反。

## § 5 瓣膜运动和流场的相互作用

上述分析说明了瓣膜形状、运动速度会影响血流特性, 但二者之间的相互作用问题并未解决。

瓣膜和流动的相互作用主要体现在:

(1) 瓣膜以当地流体的速度运动。

(2) 瓣膜对流体的作用力改变流体运动。这种力包括瓣膜关闭时, 阻止流体运动的力, 以及打开时, 作用于流体使形成旋涡的剪应力等。

因此, 流动方程必须和瓣膜运动方程联立求解。

假设血液是不可压缩牛顿流体, 则流动服从:

连续方程:  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (5-1)

运动方程:  $\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}$  (5-2)

膜-流体界面无滑流条件:

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s), t) \quad (5-3)$$

$\mathbf{x}(s)$  是瓣膜质点的位置,  $\mathbf{x}$  是流场中的点。

瓣膜运动方程:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(s)}{dt^2} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \quad (5-4)$$

$m$  是瓣膜微元质量,  $\mathbf{f}_1$  是周围组织作用于该微元的力,  $\mathbf{f}_2$  是流体作用于该微元的力。通常瓣膜的惯性可以忽略不计, 这样

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 = \mathbf{f} \quad (5-5)$$

即瓣膜组织产生的力可直接传递给流体。故:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(s) ds \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)] \quad (5-6)$$

$\delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)]$  是狄喇克函数。这样膜边界作用于流体的力为:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{f}(s) ds \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)] \quad (5-7)$$

$\mathbf{f}(s)$  由膜的力学性质和几何形状决定, 可写为

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}(\mathbf{x}) \quad (5-8)$$

方程(5-1)、(5-2)、(5-3)、(5-7)、(5-8)包含五个未知量  $\mathbf{u}$ 、 $p$ 、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{x}(s)$ 、 $\mathbf{f}(s)$ , 故定解系统是完备的。

为数值计算方便, 首先将(5-3)改写为:

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{dt} = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)] da \quad (5-9)$$

其次设法消去  $p$  和方程(5-1)。为此, 定义一线性微分算子  $\mathcal{D}$ , 对于任意标量, 它使

$$\mathcal{D}\nabla\varphi = 0$$

对于任意向量  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  满足  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , 则它使

$$\mathcal{D}\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

这样(5-2)可变为:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{D}[-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}] + \mathcal{D}\mathbf{F} \quad (5-10)$$

于是,定解系统变为(5-7)–(5-10)。

### § 5-1 数值计算方法

考虑二维流动,将流域分为正方形网格,边长为  $h$ ,  $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}(ih, jh)$ ; 类似地将瓣膜形线分成许多直线段,  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(h_B \cdot k)$ ,  $h_B$  是相邻点的间距,令:

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(n \cdot \Delta t) = (u_1^n, u_2^n)$$

Peskin<sup>[9]</sup> 提出如下差分方法。

$$\mathbf{f}_k = \frac{1}{h_B} \sum_j T_j \mathbf{a}_{kj} \quad (5-11)$$

$\mathbf{a}_{kj}$  是瓣膜形线  $k_j$  段的单位向量,  $T_j$  为该段张力。若设瓣膜为线弹性体,则

$$T_j = E(s_j - s_{j0}) \quad (5-12)$$

$E$  为弹性模量,  $s_{j0}$  为自然状态下的长度。

从(5-11)(5-12)出发,首先求边界力:

$$\mathbf{F}_{ij} = \sum_k h_B \mathbf{f}_k \cdot D_{ij}(\mathbf{x}_k) \quad (5-13)$$

这里:

$$D_{ij}(\mathbf{x}) = D_{ij}(\alpha h, \beta h) = \begin{cases} \frac{1}{16h^2} (2 - |\alpha - i|)(2 - |\beta - j|) & |\alpha - i| \leq 2, |\beta - j| \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5-14)$$

其次,求  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{u}^{**}$

$$\left. \begin{aligned}
 & -\left(\frac{\Delta t}{2h} u_{1,ij}^n + \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{i-1,j}^* + \left(1 + 2\frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{ij}^* \\
 & -\left(-\frac{\Delta t}{2h} u_{1,ij}^n + \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{i+1,j}^* = u_{ij}^n + F_{ij} \Delta t \\
 & -\left(\frac{\Delta t}{2h} u_{2,ij}^n + \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{i,j-1}^* + \left(1 + 2\frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{ij}^{**} \\
 & -\left(-\frac{\Delta t}{2h} u_{2,ij}^n + \frac{\Delta t}{h^2}\right) u_{i,j+1}^{**} = u_{ij}^*
 \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

然后求  $u_{ij}^{n+1}$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{**} - (G\varphi)_{ij} \quad (5-16)$$

$$\text{即: } \left. \begin{aligned}
 u_{1,ij}^{n+1} &= u_{1,ij}^{**} - \frac{1}{2h} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) \\
 u_{2,ij}^{n+1} &= u_{2,ij}^{**} - \frac{1}{2h} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})
 \end{aligned} \right\} \quad (5-17)$$

而  $\varphi$  由下式确定:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{4h^2} [\varphi_{i+2,j} + \varphi_{i-2,j} + \varphi_{i,j+2} + \varphi_{i,j-2} - 4\varphi_{ij}] = (D\mathbf{u}^{**})_{ij} \\
 (D\mathbf{u}^{**})_{ij} &= \frac{1}{2h} [u_{1,i+1,j}^{**} - u_{1,i-1,j}^{**} + u_{2,i,j+1}^{**} - u_{2,i,j-1}^{**}]
 \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

最后,求  $\mathbf{x}_k^{n+1}$  (瓣膜质点位置):

$$\mathbf{x}_k^{n+1} = \mathbf{x}_k^n + \Delta t \sum_{ij} h^2 \mathbf{u}_{ij}^{n+1} D_{ij}(\mathbf{x}_k^n) \quad (5-19)$$

## § 5-2 二尖瓣流场的数值解

Peskin 用上述方法求解二尖瓣的流场。二尖瓣流动模型如图 6-15, 设流动是二维的, 取笛卡尔坐标系  $(x, y)$ 。流动相对于  $x$  轴是对称的,  $y = 0$  及  $y = 1$  时, 流速为零。

设左心房收缩时的体积力为 $W$

$$W = W_0[-B + \sin(\omega t + \phi)] \quad 0 < B < 1 \quad (5-20)$$

正常生理状态下,  $W_0 = 1.3 \times 10^4 \text{dyn/cm}^3$ ,  $B = 0.9$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{s}$ ,  $\rho = 1 \text{gm/cm}^3$ ,  $\nu = 0.04 \text{cm}^2/\text{s}$ 。原则上可用上述方法求

数值解。但实际流动雷诺数高达 2000, 目前还无法进行数值计算。Peskin 将  $\nu$  提高 100 倍(即将雷诺数降低 1000 倍), 进行数值分析。得以下定性结果:

(i) 心房收缩压力峰领先于二尖瓣射血速度峰;

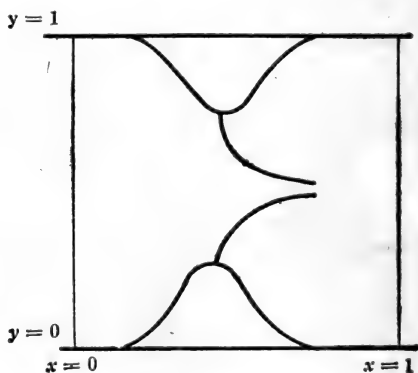


图 6-15 二尖瓣流动模型

(ii) 驱动力小于零时, 血液继续向前流动。

(iii) 二尖瓣关闭后, 流动曲线上有明显的阻尼振荡, 这种振荡是瓣膜弹性和流体惯性的耦合作用所致。

(iv) 在每个周期结束时, 流量有一轻微的突增, 此时驱动力尚未变为正值。这是贮存在成囊状的尖瓣中的血液, 突然排出而引起的。

## 参 考 文 献

- [1] Netter, F. Heart, The Ciba Collection of Medical Illustration vol. 5, Ciba Pharmaceutival Co., Summit, 1969.
- [2] Pesking, C. S.: Mathematical Aspects of Heart Physiology, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1974.
- [3] Jones, R. T.: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1, 223, 1969.
- [4] Bellhous, B. J., Talbot, L.: *J. Fluid Mech.*, 35, 721, 1969.
- [5] Bellhous, B. J.: *J. Fluid Mech.*, 37, 587, 1969.
- [6] Lee, C. S. F., Talbot, L.: *J. Fluid Mech.*, 91, 41, 1979.
- [7] Swanson, W. M., Clark, R. E.: *Circ. Res.*, 32, 142, 1972.
- [8] Swanson, W. M., Clark, R. E.: *Circ. Res.*, 35, 871, 1973.
- [9] Henderson, Y., Johnson, F. E.: *Heart*, 4, 69, 1912.
- [10] Hung, T. K., Schuesler, G. B.: *J. Biomech.*, 10, 597, 1977.
- [11] Pesking, C. S.: *J. Comput. Physics*, 10, 252, 1972.
- [12] Clark, C.: *J. Biomech.*, 9, 521, 1976.

## 第七章 大血管中的脉动流

### §1 引言

人体任一组织的生理机能与供给它的血流量及血液在其内部的灌注情况有密切关系,后者依赖于血流灌注压力、速度分布及该组织(或器官)血管的力学性质。反过来,人体各组织对血流量的需求及阻抗(等于流过该组织的压差与流量之比)决定了心脏的负荷。需求和供血间的平衡则依赖人体各部的调节作用而维持,而这种调节过程本身和循环系统内压力脉动的传播特性密切相关。因此,就认识循环生理的物理机制而言,大血管流体力学的主要任务是:

(1) 确定血压和血流量之间的关系,以及它们在时间和空间上的分布。

(2) 认识脉搏波(压力脉动和流量脉动)的传播规律。

(3) 确定血流速度分布及壁面剪应力分布。

这里主要讨论(1)、(2),下一章讨论(3)。

由动物实验和人体生理测量知道,当压力和流量脉动由心脏向外周血管传播时,波形发生显著的改变(见图 7-1),而这种改变对于心血管系统性能的变化相当敏感。因而,很自然就提出了一个问题:能否根据脉搏波的变异来评价人的心血管系统的功能,并以此来判别心血管系统是否发生病变,为心血管疾病的早期、无创诊断开辟新的途径?正是为了这个缘故,动脉血流理论成为生物流体力学领域里最早发展的一个分支。从五十年代到七十年代初,脉动流和脉搏波理论有了



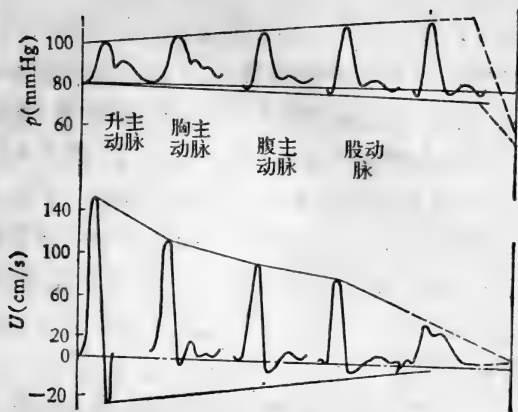


图 7-1 动脉中压力和流速波形的变化 [1]

相当进展,但是企图由此建立心血管疾病早期、无创诊断方法的目的,却没有实现。七十年代中期以来,这方面的研究渐趋沉寂。Skalak<sup>[69]</sup>认为,现有的动脉血流理论已相当完善,重要的是将它应用于临床。这需要医学工作者的合作,首先要让医学界对现有的动脉血流理论有所了解。

另一方面,大家知道,脉诊是中医传统诊断手段之一。我们的祖先在这方面积累了丰富的经验。据不完全统计,国内现存的关于脉象的古籍就有 169 种之多。尽管传统脉学瑕瑜互见,尽管同样条件下,对同一病人,不同大夫切脉的结论不尽一致,古今实践证明,脉象是客观存在的,脉诊也是行之有效的。但其原理何在呢?

从物理上看<sup>[70]</sup>,脉象是在不同外加扰动(浮、中、沉切脉)作用下,挠骨动脉血液、管壁运动和波传播的综合反应所产生的信息,通过人手指上许许多多高灵敏的传感器,输入到高性能的计算机——有经验的大夫的大脑,经过综合分析而形成的概念。所以,中医脉象和心血管系统血液运动及波的传播

规律有密切的关系。从五十年代末开始,就有人用各种传感器描记脉搏波(在挠动脉处),设法建立脉波形状和中医 28 种脉象之间的关联,以便使脉诊客观化。也有人试图从动脉血流传输线理论出发,探讨某些脉象(如弦脉、滑脉等)形成的力学机理<sup>[71]</sup>。然而,离解决问题还差得远。这里,困难不仅在于采取脉象信息的技术及处理所采取信息的方法,更在于现有的脉动流和脉搏波理论,不足以处理中医脉象所涉及的力学问题。换言之,中医脉象力学机理的研究,要求建立、发展更精细的动脉血流理论。为此,需要对于现有的动脉血流理论有全面、透彻的了解。

本章首先给出大血管流动的基本方程,进而用简单的模型阐明脉搏波形成的物理本质,讨论这类流动(可变形管道内的流动)的一般特性。从第五节起,讨论动脉血流的力学理论,从动脉血流的相似性分析入手,介绍弹性腔理论、各种线性理论和非线性理论。第九节讨论静脉血流所涉及到的流体力学问题,主要是可坍塌管道里的流动规律问题。这不仅涉及心血管流动,而且和呼吸、泌尿、组织和器官灌注特性等有关。最后,简单介绍一下实验研究模拟的方法和结果。

## § 2 大血管内血液流的物理特点和数学描述

流体的运动取决于驱动力的变化、流体的物性及边界的特点。循环系统的动力源是心脏,介质是血液,边界是血管壁,它们的特性决定了循环系统中血液流的规律。

心脏的输出是间歇性的,因而血管内血液的流动具有脉动性,动脉血流的脉动性尤为强烈。

数学上怎样描述这种流动? 首先要考虑血液的物理性质。

如前所述,血液是多种有形元素和血浆组成的多相系统。但实验证明,当流场尺度大于1mm时,有形元素(主要是红细胞)的个性不直接影响血液流动的宏观性状。因此,人体循环系统中,除小动脉、毛细血管、小静脉等以外,绝大部分血管中血液都可以看作均质的非牛顿流体,连续性假设成立。根据质量守恒定律,血液流动服从连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2-1)$$

$\rho$  为血液密度,  $\{u_i\}$  是血流速度。

血液的体积模量  $K_f \sim 10^{10} \text{dyn/cm}^2$ , 而循环系统里,压力梯度的大小  $|\nabla p|$  不超过  $10^5 \text{dyn/cm}^2/\text{cm}$ , 即:

$$\frac{|\nabla p|}{K_f} \sim 10^{-5} \ll 1$$

因而,正常生理条件下,血液可以看作不可压缩流体。这样,方程(2-1)简化为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-2)$$

按第二章方程(7-9), 当我们把血液看成均质流体时,其流动服从:

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2-3)$$

$\{\tau_{ij}\}$  是流体应力,  $\{f_i\}$  是单位质量血液所受的体积力。

血液是粘弹性流体。但经验表明<sup>[2]</sup>, 只要血管直径不太小,血液粘弹性对流动的影响不大,可以不计。此时,若以 Casson 方程为近似,则方程(2-3)变为

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{[k(2\sqrt{J_2})^{\frac{1}{2}} + \tau_y]^2}{(\sqrt{J_2})^{\frac{1}{2}}} \Delta u_i$$

$$+ \rho f_i + \frac{1}{2} J_2^{-\frac{3}{2}} [k(2J_2)^{\frac{1}{2}} + \tau_y] [\sqrt{2}k - k(2\sqrt{J_2})^{\frac{1}{2}} - \tau_y]$$

$$\times \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial J_2}{\partial x_j} \quad (2-4)$$

$J_2$  是应变率不变量, 见第三章方程(5-6)。

若用 Walbrum 经验方程近似地表达血液的本构关系, 则方程(2-2)可写为

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{K \cdot (2\sqrt{J_2})^n + \tau_y}{2\sqrt{J_2}} \Delta u_i \\ + \frac{1}{4} J_2^{\frac{3}{2}} [Kn(2\sqrt{J_2})^{n-1} - K(2\sqrt{J_2})^n + \tau_y] &\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \times \frac{\partial J_2}{\partial x_j} + \rho f_i & \quad (2-5) \end{aligned}$$

$n$ 、 $K$ 、 $\tau_y$  均为常数, 见第三章 §5。

无论方程(2-4)还是(2-5)都很复杂。如前所述, 当流动切变率高于  $50s^{-1}$  时, 血液的应力-应变率关系近乎线性。而人体大血管流动(除腔静脉外)平均切变率高于  $50s^{-1}$ , 故大血管里, 血液可看作牛顿流体, 其运动遵循纳维-司托克斯方程:

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i \quad (2-6)$$

$\mu$  是血液粘度。

不同于一般工程问题, 血液流动的边界——血管壁是可变形的。血液流动和血管壁的运动耦合在一起。设血管壁位移为  $\{\zeta_i\}$ , 其运动服从牛顿第二定律:

$$\rho_w \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2-7)$$

$\rho_w$  是血管壁材料密度,  $\{\tau'_{ij}\}$  是壁内部的应力。

血管壁是粘弹性体, 若用冯元桢准线性理论, 则

$$\tau'_{ij}(x_m, t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(x_m, t - \xi) \dot{T}'_{kl}(x_m, \xi) d\xi \quad (2-8)$$

$G_{ijkl}, T_{kl}^{(e)} = \frac{\partial}{\partial \xi} T_{kl}^{(e)}[\lambda(x_m, \xi)]$  分别为归一化松弛函数和拟

弹性反应,见第四章 §8。

不仅如此,血管壁本身是有生命的,有新陈代谢,管壁和血液之间存在物质交换。但与大血管所输运的血流量相比,透过大血管壁的渗流量微乎其微,可忽略不计。这样,大血管可以认为是纯导管,在其内表面上,运动满足无滑流条件:

$$u_i(x_k \in F) = \frac{d\xi_i}{dt} \quad (2-9)$$

$F$  是血管内表面在平衡状态(即管内压力与外部压力相等)的形状,

$$F(x_k) = 0 \quad (2-10)$$

此外,整个运动还应满足应力连续分布的要求,即:

$$\left. \begin{array}{l} x_k \in F \text{ 时, } \tau'_{ij}(x_k, t) = \tau_{ij}(x_k, t) \\ x_k \in F^{(0)} \text{ 时, } \tau'_{ij}(x_k, t) = \tau_{ij}^{(0)}(x_k, t) \end{array} \right\} \quad (2-11)$$

$F^{(0)}(x_k)$  是血管外表面,  $\{\tau_{ij}^{(0)}\}$  是作用于血管外表面的应力。

(2-2)、(2-6)((2-4)或(2-5))、(2-7)、(2-8)共 13 个独立方程,包含 13 个未知量:  $\{u_i\}$ 、 $p$ 、 $\{\tau'_{ij}\}$ 、 $\{\xi_i\}$ , 在边界条件(2-10)(2-11)及进、出口条件下,是可以求解的。

正常生理条件下,人体心血管流动属于层流,只有在主动脉瓣附近,在收缩后期,可能出现瞬时湍流斑,但消失得很快。故上述系统的解基本上是稳定的。因此,用数值计算求大血管的流场,原则上是可能的。

但是,血管系统的几何形状相当复杂;对血管力学性质的认识亦很有限(尤其当血管壁受压时);而且,研究心血管流动的目的之一,就是要通过血液流动及脉搏波传播的特征,来评价人体心血管系统的功能。因此,单凭计算技术不能解决问题。简单的近似理论,具有重要意义。

下面从最简单的力学模型入手，分析血液流动和脉搏波的传播。

### § 3 管道内小扰动的传播与脉搏波

随着心脏的收缩-舒张，在动脉血管的浅表部位，可以察觉血管的搏动，其周期和心跳一样，称为脉搏。血管的搏动是怎样引起的呢？一种直观的想法是心脏收缩射出的血液，推动血管里的血柱向前运动，使血管周期性地扩张。实则不然，据测量，在心脏收缩期(约 0.3 秒)终了之前，本次收缩引起的压力扰动就传遍全身，因而就人们感觉而言，挠动脉或足背动脉等处的搏动和心跳是同时发生的，而从心脏射出的血液流到这些地方所需的时间要长得多，差一个数量级以上，‘推动’说显然不合适。为阐明脉搏波的物理本质，需考察可变形管路里小扰动的传播。

流体是不可堆积的。任何扰动引起的流体局部堆积，必定被各种物理效应消除掉，同时，扰动以波的形式在介质中传播开去。无界流体空间里，任一点上压力扰动引起的流体局部堆积，被流体压缩性抵销，扰动以流体压缩波(声波)的形式传播；具有自由表面的流体内，扰动引起的流体局部堆积由重力消除，同时形成表面波；充满流体的管道里，扰动引起的流体局部堆积，受两种作用的制约：(i) 管壁的变形；(ii) 流体的可压缩性。前者引起管壁内的应力波(弹性波)，后者形成流体压缩波(声波)。哪种效应起主导作用，取决于流体体积模量  $K_f$  与壁材料可变形性的大小。若后者用杨氏模量  $E$  表征，则当  $\frac{K_f}{E} \ll 1$  时，流体可压缩性起主导作用，扰动引起流体中的声波。例如，钢的杨氏模量约为  $10^{12} \text{dyn/cm}^2$ ，水的体

积模量约为  $10^{10} \text{dyn/cm}^2$ ,  $\frac{K_f}{E} \sim 10^{-2} \ll 1$ , 故水流过钢管时, 水中的压力扰动以水声速传播。若  $\frac{K_f}{E} \gg 1$ , 则管壁弹性起主导作用, 流体内的扰动以管壁弹性波的形式传播。若  $\frac{K_f}{E} \sim 1$ , 则两种波同时并存。

由第四章可知, 动脉血管周向拉伸时, 杨氏模量约为  $10^7 \text{dyn/cm}^2$  (在正常生理范围内), 而血液体积模量约为  $10^{10} \text{dyn/cm}^2$ , 故  $\frac{K_f}{E} \sim 10^3 \gg 1$ 。显然人体血流内的扰动是以血管壁应力波的形式传播的, 其机制和流体中的声波不同, 速度也比流体声速低得多。

考察最简单的情形——充满无粘流体的弹性管内小扰动的传播。流体本来是静止的(或作匀速运动), 受到一个一维的扰动压力  $p$  的作用, 产生一扰动速度场  $u$ 。取控制体如图 7-2 示, 管截面积为  $S$ 。

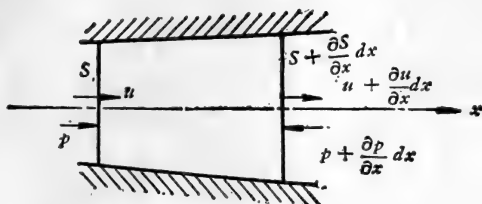


图 7-2 一维小扰动分析

因为扰动很小,  $u \frac{\partial S}{\partial x}$ 、 $u \frac{\partial u}{\partial x}$  等均可忽略, 故连续方程变

为

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-1)$$

运动方程变为

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3-2)$$

由(3-1)可得

$$\left[ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} + \frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dp} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-3)$$

设质量为  $M$  的流体所占体积为  $V$ ,  $\therefore M = \text{常数}$ ,

$$\therefore \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} = \frac{1}{K_f} \quad (3-4)$$

引进  $D$ , 表示管的可膨胀性,

$$D = \frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dp} \quad (3-5)$$

则(3-3)变为

$$\left[ \frac{1}{K_f} + D \right] \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-6)$$

小扰动下,  $K_f$ 、 $D$  及 (3-2) 中的  $\rho$  均可看作常数, 故由 (3-6)(3-2) 可得:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{1}{K_f} + D \right] \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (3-8)$$

$$c_0^2 = \left[ \frac{\rho}{K_f} + \rho D \right]^{-1} = \left[ \frac{\rho}{K_f} + \frac{\rho dS}{S dp} \right]^{-1} \quad (3-9)$$

方程 (3-8) 描述一维小扰动的传播, 是最简单的波动方程,  $c_0$  为传播速度。

若管壁是刚性的, 即  $D \ll \frac{1}{K_f}$ , 则



$$c_0^2 = \left[ \frac{\rho}{K_f} \right]^{-1} = \frac{d\rho}{d\rho} = a^2 \quad (3-10)$$

$a$  为流体声速。

若流体不可压缩, 即  $D \gg \frac{1}{K_f}$ , 则

$$c_0^2 = [\rho D]^{-1} = \frac{S d\rho}{\rho dS} \quad (3-11)$$

此系管壁应力波传播速度。

假设壁材料是线弹性体, 且管壁极薄,

$$\frac{h}{R_0} \ll 1 \quad (3-12)$$

$h$  为壁厚,  $R_0$  为平衡态半径。所谓平衡态, 就是管内压力  $p$  和外部压力  $p_c$  相等。

按拉普拉斯定律, 挤压力  $(p - p_c)$  与周向应力  $\tau_{\theta\theta}$  有如下关系:

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{(p - p_c)R}{h}$$

在平衡态  $R_0$  附近,  $p_c$  不变时, 压力小扰动  $\Delta p$  引起的周向应力为

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\Delta p \cdot R_0}{h} \quad (3-13)$$

另一方面, 按胡克定律,

$$\tau_{\theta\theta} = E \cdot \frac{R - R_0}{R_0} \quad (3-14)$$

$$\therefore \frac{R - R_0}{R_0} = \frac{\Delta p \cdot R_0}{Eh} \quad (3-15)$$

而  $S = \pi R^2$ , 故

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S - S_0}{S} = \frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2} \approx 2 \frac{R - R_0}{R_0} = \frac{2R_0 \Delta p}{Eh} \quad (3-16)$$

以此代入(3-11)得:

$$c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho R_0}} \quad (3-17)$$

这就是著名的 Moens-Kortweg 公式。若计及流体压缩性,则(3-17)改为

$$c_0 = \left[ \frac{\rho}{K_f} + \frac{2\rho R_0}{Eh} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3-18)$$

然而,管壁的周向伸长,必定在与此正交的方向上引起收缩。径向应变  $\frac{h-h_0}{R_0}$  比周向应变小得多,可以忽略不计,仅考虑纵向应变。这种应变的扰动引起壁的纵向振动。

设材料各向同性,泊松比为  $\sigma$ , 则单位周向应力作用下引起的纵向应变为  $-\frac{\sigma}{E}$ , 故  $\tau_{\theta\theta}$  引起的纵向应变为  $-\frac{\sigma}{E} \tau_{\theta\theta} = -\frac{\sigma}{E} \cdot E \frac{R-R_0}{R_0} \approx -\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{S-S_0}{S_0}$ 。可见,若壁材料不可压缩,即  $\sigma = \frac{1}{2}$ , 那么,管壁纵向脉动速度可达流动平均速度的 25%。

但是,实际上血管是嵌在软组织中的,周围组织的约束使血管壁几乎不发生纵向振动,即周围组织作用于血管壁的纵向约束应力为

$$\tau'_{zz} = -\frac{\sigma}{E} \cdot E \tau_{\theta\theta} = -\sigma \tau_{\theta\theta} \quad (3-19)$$

它必定产生一个附加的周向应力  $\tau'_{\theta\theta}$

$$\tau'_{\theta\theta} = -\sigma^2 \tau_{\theta\theta} \quad (3-20)$$

因此,考虑周围组织的纵向约束后,血管壁的周向应变为

$$\frac{R-R_0}{R_0} = \frac{1}{E} (1-\sigma^2) \tau_{\theta\theta} \quad (3-21)$$

相应的波速公式应改为

$$c'_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)\rho R_0}} \quad (3-22)$$

正常情况下, 主动脉  $E \sim \frac{E}{1-\sigma^2} \sim 10^7 \text{dyn/cm}^2$ ,  $\frac{h}{R_0} \sim 10^{-1}$ , 血液密度  $\rho \sim 1 \text{gm/cm}^3$ , 按 (3-17) 或 (3-22),  $c_0 \sim 10 \text{m/s}$ . 据测量, 从主动脉到支动脉, 波速为 5—10m/s, 但大静脉波速在 0.05—0.5m/s 之间。

一般来说, 血流压力脉动会引起血管壁内多种应力脉动, 引起多种应力波, 并伴以各种形式的壁运动。周向张应力的脉动对应于管径的扩张-收缩, 相应的波称为杨氏波(或杨氏模式), (3-17)(3-22) 给出的就是杨氏模式的传播速度。纵向拉应力的脉动对应于管壁纵向振动, 相应的波称为兰姆(Lamb)波(或兰姆模式), 若流体是无粘性不可压缩流体, 管壁很薄且为线弹性体, 则小扰动下兰姆模式的传播速度为

$$c_L = \left[ \frac{E}{\rho_w(1-\sigma^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-23)$$

此外, 弯曲应力、周向剪应力的脉动, 分别引起管壁的弯曲振动和扭转振动。血管里的脉冲波就是这些模式组成的复合波。这种复合波的传播特性, 由从流动方程、壁运动方程及边界条件导出的色散方程确定。

如前所述, 人体动脉血管的几何尺寸及力学性质均因部位而异, 且随年龄而变化, 图 7-3(a) 是老年人和青年人不同部位动脉血管外径的改变; 图 7-3(b) 则是壁厚-管外径之比随年龄和血管部位的改变。图 7-4 则是正常生理条件 ( $p=100 \text{mmHg}$ ) 下, 血管周向杨氏模量随年龄的变化, (a) 是胸主

\* 符号~表示“量级等于”的意思

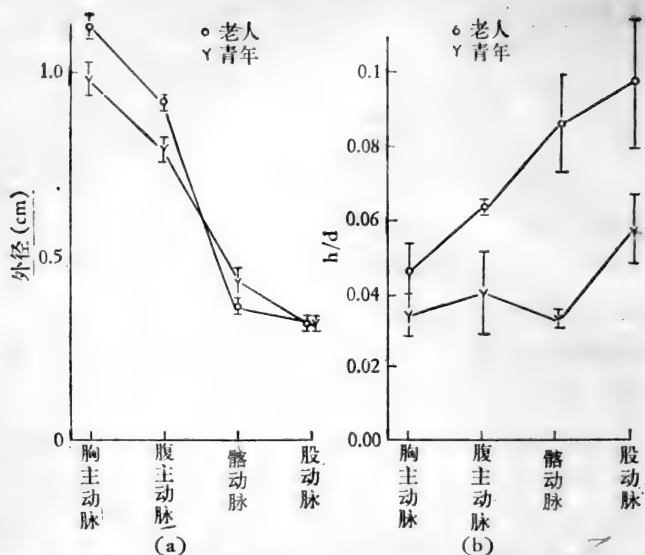


图 7-3<sup>[9]</sup> (a) 血管外径随部位的变化。(b) 壁厚-管径比的变化。

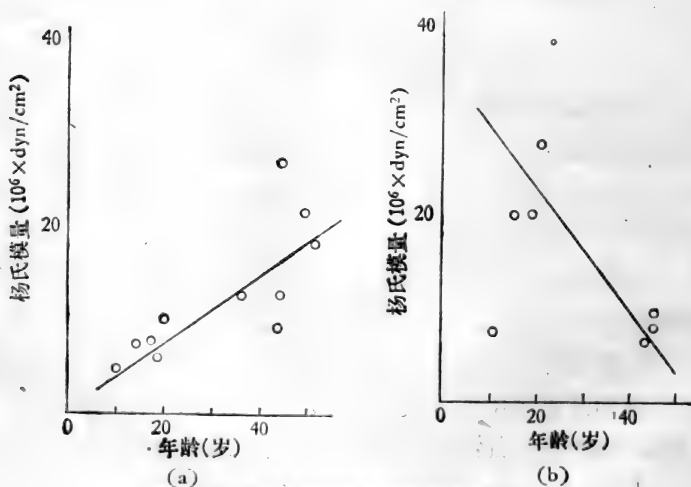


图 7-4 血管杨氏模量随年龄的变化<sup>[9]</sup>  
(a) 胸主动脉, (b) 髂动脉。

动脉, (b) 是髂动脉。值得注意的是二者变化趋势相反, 胸主动脉杨氏模量随年龄增长而增大, 髂动脉的杨氏模量则随年龄增大而减小。

更详尽的数据列于下表。

表 7-1 人体动脉血管的尺寸和波速<sup>[10]</sup>

	长度 (cm)	直径 (cm)		波速 (cm/s)	
		近端	远端	近端	远端
升、降主动脉	6.3	2.340	1.810	550	550
胸主动脉	20.1	1.810	0.938	550	575
腹主动脉 I	5.2	0.938	0.938	575	575
腹主动脉 II	2.5	0.938	0.923	575	575
腹主动脉 III	9.2	0.923	0.856	577	585
髂动脉	21.0	0.604	0.424	678	717
股动脉	25.7	0.432	0.405	717	734
膝腘动脉	17.9	0.416	0.321	977	1000
后胫动脉	29.8	0.443	0.246	1275	1470
前胫动脉	32.6	0.239	0.246	1480	1480
深股动脉	15.4	0.497	0.359	1200	1200
下肠系膜	5.9	0.284	0.284	700	700
上肠系膜	7.4	0.700	0.700	600	600
肾动脉	3.0	0.448	0.448	700	700
脾动脉	7.4	0.440	0.440	600	600
肝动脉	7.4	0.353	0.353	600	600
胃动脉	7.4	0.289	0.289	600	600
无名动脉	6.4	1.100	0.750	800	800
锁骨-腋动脉	19.9	0.750	0.541	800	800
臂动脉	25.5	0.552	0.432	925	1062
挠动脉	24.5	0.340	0.264	1062	1200
近尺动脉	4.9	0.405	0.394	1062	1174
远尺动脉	20.4	0.394	0.350	1174	1200
骨间动脉	8.6	0.171	0.171	1000	1000
脊椎动脉	17.8	0.350	0.350	1000	1000
总颈动脉	3.7	0.581	0.620	575	600
内、外颈动脉	5.4	0.318	0.160	800	1050

## § 4 可变形管内流动的特性

由前面两节可见，大血管血液流动的根本特点是：血管壁是可以变形的，而血液内的小扰动是以血管弹性波的形式传播的。所以，在具体介绍血液流动理论之前，有必要探讨一下：(i) 血管壁的变形将如何影响血液的流动；(ii) 血管弹性波的传播特性和管内流动有何关系。

血管的变形取决于血管壁内的应力分布。如第四章所述，血管壁受力状态和管内外的压差有关。假设血管是均匀各向同性的弹性直圆柱管，管壁很薄，若管内压力为  $p$ ，管外压力为  $p_e$ ，且当  $p = p_e$  时，管内半径为  $R_0$ ，管外半径为  $R_{oe}$ ，则当  $\frac{p}{p_e} > \frac{R_{oe}}{R_0}$  时，管壁受张，即管壁内的周向应力都是拉应力。

这样，变形时，只改变管腔的截面积，截面形状不变，称为可膨胀管。大、中动脉血管属于这一类。当  $\frac{p}{p_e} < \frac{R_{oe}}{R_0}$  时，管壁至少局部受压，甚至完全处于压应力作用之下，这时不仅截面积可变，截面形状也会改变，且面积和形状的改变取决于管截面的弯曲刚度。若  $p_r = (p - p_e) < 0$ ，且  $|p_r|$  大于某一临界值，管壁会失稳而被压坍，称为可坍管。肺血管、大的静脉血管等往往属此。显然，可坍陷管的流动要比可膨胀管复杂得多。

下面先讨论最简单的情形——可膨胀直圆柱管里的不可压缩定常流动。

### § 4-1 可膨胀圆柱管内的定常流动

类似于刚性管流动中的泊肃叶流。假设：

(1)  $p = p_c$  时, 管子是等截面直圆柱管, 半径  $R_0 =$  常数。

(2) 管壁很薄, 且为各向同性线弹性体。若壁材料杨氏模量为  $E$ , 管壁厚度为  $h$ 。且不失一般性, 令  $p_c = 0$ , 则按拉普拉斯定律, 有:

$$\frac{p(x)R(x)}{h} = E \left[ \frac{R(x)}{R_0} - 1 \right] \quad (4-1)$$

$$\therefore R(x) = R_0 \left[ 1 - \frac{R_0 p(x)}{Eh} \right]^{-1} \quad (4-2)$$

(3) 血液是不可压缩牛顿流体, 流动是充分发展的层流, 径向流动和迁移加速度可以忽略不计。因为流动是定常的, 故可不考虑管壁运动与流动的耦合。每一小段  $dx$  上, 泊肃叶定律有效, 即:

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (4-3)$$

$\mu$  是流体粘度;  $Q$  是流量, 为常数。

将(4-2)代入(4-3)得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= -a_1(1 - a_2 p)^4 \\ a_1 &= \frac{8\mu Q}{\pi R_0^4}, \quad a_2 = \frac{R_0}{Eh} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

积分之,

$$p(x) = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2} \{ [1 - a_2 p(0)]^{-3} - 3a_1 a_2 x \}^{-\frac{1}{3}} \quad (4-5)$$

若管长为  $L$ , 则

$$\frac{24a_2\mu L}{\pi R_0^4} Q = \frac{1}{[1 - a_2 p(0)]^3} - \frac{1}{[1 - a_2 p(L)]^3} \quad (4-6)$$

如果设血管的压力-半径关系为:

$$R = R_0 + \alpha p, \alpha = \text{常数} \quad (4-7)$$

则(4-4)变为

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{8\mu\alpha}{\pi R^4} Q$$

积分之,

$$Q = \frac{\pi}{40\alpha\mu L} [R^5(0) - R^5(L)] \quad (4-8)$$

或

$$Q = \frac{\pi}{40\alpha\mu L} \{ [R_0 + \alpha p(0)]^5 - [R_0 + \alpha p(L)]^5 \} \quad (4-9)$$

由此可见: (i)  $Q \propto R^5$ , 血管半径的改变, 对局部血流量的变化起主导作用; (ii)  $\frac{R(L)}{R(0)} < 1$ ,  $\frac{p(L)}{p(0)} < 1$ ,  $\left[\frac{R(L)}{R(0)}\right]^5 \ll 1$ , 故就血流调节而言, 控制进口条件, 比控制出口条件有效得多。

## § 4-2 三种流动的比较

§4-1 说明了可膨胀管弹性变形对管内压差-流量关系的影响。现考察一般的可变形管道(可膨胀管或可坍陷管)管壁弹性波传播与管内流动的关系。为简单起见, 考虑一维流动, 且设流体是无粘的理想流体。

如§ 3 所述, 充满不可压缩流体的可变形管内, 压力小扰动的传播, 和可压缩流体内压缩波、明渠水流的表面波的传播十分相似。为揭示可变形管不可压缩流体运动的特色, 可将它和刚性管内的可压缩流动及明渠内的水流作一比较。假设当  $p = p_0$  时, 管截面积均匀分布, 即  $S_0 = \text{常数}$ , 且不考虑体积力。

由(2-6)可知, 三种流动的运动方程都是一样的, 为:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4-10)$$

$x$  轴与管轴一致,  $t$  为时间,  $u$  为流速,  $\rho$  为流体密度,  $p$  为流体静压。

但三者的连续方程形式不同, 分别为:

(i) 可变形管不可压缩流动:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uS) = 0 \quad (4-11a)$$

$S$  为管横截面积。

(ii) 刚性管可压缩流动:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (4-11b)$$

(iii) 明渠水流:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \quad (4-11c)$$

$h$  为水表面的高度。

方程 (4-10)(4-11) 是不完备的, 为求解必须知道管壁材料的本构方程(对于 (i))或流体的状态方程(对于流动(ii)、(iii)), 设

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad S = S(p - p_e) \\ \text{(ii)} \quad \rho = \rho(p) \\ \text{(iii)} \quad h = (p - p_{atm}) / \rho g \end{array} \right\} \quad (4-12)$$

这里  $p_e$  是管外压力,  $p_{atm}$  是大气压。相应地, 压力小扰动传播速度分别为:

$$\text{(i)} \quad c^2 = \frac{S}{\rho} \cdot \frac{dp}{dS} = \frac{S}{\rho} \cdot \frac{d(p - p_e)}{dS} \quad (4-13a)$$

$$\text{(ii)} \quad c^2 = \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{d\rho} \quad (4-13b)$$

$$(iii) \quad c^2 = \frac{h}{\rho} \cdot \frac{dp}{dh} = gh \quad (4-13c)$$

(4-13a)定义了管壁应力波速, (4-13b)定义了流体声速, (4-13c)则给出了(浅水)表面波速。

由于描述三种流动的方程组十分相似, 不难设想, 这三种流动应具有相似的特色。为说明这一点, 将方程组(4-10)(4-11)(4-12)无量纲化。

设管道无限长, 故取长波波长  $\lambda$  为特征长度; 时间特征尺度为  $T$ ; 特征波速为  $c_0$ , 故  $\lambda = c_0 T$ ; 参考截面积为  $S_0$ ; 特征速度为  $U$

$$U = \frac{\langle Q(t) \rangle}{S_0} \quad (4-14)$$

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt \quad (4-15)$$

应该指出,  $c_0$ 、 $S_0$  对于三种流动是不一样的, 它们分别为:

$$(i) \quad c_0 = \sqrt{\frac{K_{p0}}{\rho}}, \quad K_{p0} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)R_0^3} \quad (4-16a)$$

$S_0 = \pi R_0^2$  是  $P = P_e$  时的截面积。

$$(ii) \quad c_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p=\rho_0}} = \sqrt{\frac{K_{f0}}{\rho_0}}, \quad \rho_0 \text{ 为参考密度,} \quad (4-16b)$$

$S_0$  就是管截面积。

$$(iii) \quad c_0 = \sqrt{gH} \quad (4-16c)$$

$S_0 = H \cdot 1$ ,  $H$  是  $p = p_{atm}$  时的水面高度

$$\left. \begin{aligned} \text{令} \quad \bar{S} &= \frac{S}{S_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{c_0 T} \\ \bar{u} &= \frac{u}{U}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \\ &\quad \bar{h} = h/H \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

代入(4-10)~(4-12)得:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c_0} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -\frac{c_0}{U} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (4-18)$$

对于流动 (i) (iii)  $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = 1$ 。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c_0} \frac{\partial(\bar{u}\bar{A})}{\partial \bar{x}} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c_0} \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial \bar{x}} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c_0} \frac{\partial(\bar{h}\bar{u})}{\partial \bar{x}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= f(\bar{p} - \bar{p}_e), \quad \bar{p}_e = \frac{p_e}{\rho c_0^2} \\ \bar{p} &= \varphi(\bar{p}) \\ \bar{h} &= \bar{p} - \bar{p}_{atm}, \quad \bar{p}_{atm} = \frac{p_{atm}}{\rho c_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

若流动定常,则可取  $R_0$  为参考长度。这时(4-18)(4-19)变为:

$$\bar{u} \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = -\left(\frac{c_0}{U}\right)^2 \cdot \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \quad (\text{对(i)(iii)}, \bar{\rho} = 1) \quad (4-21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\bar{u}\bar{A})}{d\bar{x}} &= 0 \\ \frac{d(\bar{\rho}\bar{u})}{d\bar{x}} &= 0 \\ \frac{d(\bar{h}\bar{u})}{d\bar{x}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

(4-20)不变。

由此可见,三种流动有一个共同的相似参数,即

$$\Lambda_0 = \frac{U}{c_0} \quad (4-23)$$

因而三种流动应具有某些共同的性质。这样,由空气动力学和水力学的一些现象,可以推知可变形管内不可压缩流动的大致行为。

(1) 流速( $u$ )与波速( $c$ )之比

$$\Lambda = \frac{u}{c} \quad (4-24)$$

对流动性状有决定性影响。 $\Lambda < 1$  和  $\Lambda > 1$  时,流动特性有质的不同。类似于空气动力学,前者称为亚临界流动,后者称为超临界流动(这将在 §4-3 中详述);

(2) 当流速接近波速( $u \rightarrow c$ )时,流量趋于其最大值,称为流量限止,类似于 Laval 喷管喉道的堵塞现象。这时,流动往往是不稳定的,管壁可能发生不稳定的振荡。

(3) 只要条件适宜,亚临界流动有可能连续而稳定地过渡到超临界流动。而当流动从超临界状态变为亚临界状态时,往往发生突变,相当于可压缩流中的激波或水力学中的水跃(这将在 §4-3 和 §8 中细述)。

产生上述现象的根本原因,在于压力扰动  $\delta p_t$  所引起的管壁弹性反应和由此引起的流动扰动之间的耦合作用。 $\delta p_t$  使管截面改变,按(4-12a)(设  $p_c = \text{常数}$ ),

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial p} \cdot \delta p_t \quad (4-25)$$

另一方面,根据连续性原理,截面积的改变必然引起流速的变化,按(4-11)

$$\frac{\delta u}{u} = -\frac{\delta S}{S} \quad (4-26)$$

而  $\delta u$  必然引起流体静压的改变  $\delta p_t$ 。若扰动很小,可忽略粘性力,且认为截面刚度不变,则按(4-10)

$$\left. \begin{aligned} \delta p_f &= -\rho u \delta u \\ \therefore \delta p_f &= \rho u^2 \frac{\delta S}{S} \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

由(4-25)(4-27)可得:

$$\frac{\delta p_f}{\delta p_i} = \left( \frac{u}{c} \right)^2 = \Lambda^2 \quad (4-28)$$

可见:

(1) 亚临界状态下,  $\delta p_f < \delta p_i$ 。此时流动的变化机制为  $\delta p_i \rightarrow \delta S \rightarrow \delta u$ ,  $\delta p_i$  起决定作用, 流动是稳定的; 超临界状态下  $\delta p_f > \delta p_i$ , 此时截面积的改变并非  $\delta p_i$  所致, 而是由扰动流体撑开的, 流动改变的机理是  $\delta u \rightarrow \delta p_f \rightarrow \delta S$ 。显然有质的不同。

(2) 当  $\delta p_f > \delta p_i$  时, 设相应于  $\delta p_f$  的管截面改变为  $\delta S'$ , 它引起的流速扰动为  $\delta u'$ 。显然,  $|\delta u'| > |\delta u|$ , 故相应于  $\delta u'$

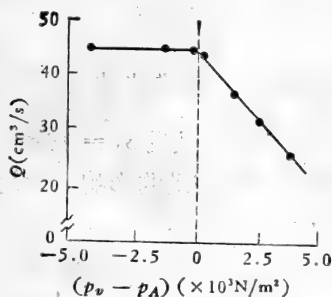


图 7-5 肺血管灌注实验  $Q-(p_v-p_A)$  关系<sup>[13]</sup>

的流体压力改变  $\delta p'_f$  亦大于(绝对值)  $\delta p_i$ 。所以  $\delta p'_f$  引起的  $\delta S''$ , 必有  $|\delta S''| > |\delta S'|, \dots$ 。这时流动是不稳定的。

上述种种现象中,对生理流动来说,最有意义的或许是流量限止问题。Permut 的肺血管灌注实验的结果表明,当肺动脉压力  $p_a$  高于肺泡压力  $p_A$ , 且  $P_a$ 、 $P_A$  保持不变时,降低肺静脉压力  $p_v$ 。一开始,灌流量增大;但当  $p_v$  低于一定值时,流量不再随  $p_v$  改变,如图 7-5 所示,生理学上称瀑布现象,因为对瀑布来说,下游水面高度不影响其流动。造成这种现象的原因,就在于  $\Lambda \rightarrow 1$ 。这可简单证明如  $\bar{r}$ 。

考虑不可压缩流体一维定常运动,它服从伯努利定理:

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 = p_0, \quad p_0 = \text{常数} \quad (4-29)$$

$$Q = S \cdot u = S \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p)} = S \sqrt{\frac{2}{\rho} [(p_0 - p_c) - (p - p_c)]}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dQ}{d(p-p_c)} &= -\frac{S}{\rho u} + u \frac{dS}{d(p-p_c)} \\ &= \frac{S}{\rho u} \left( \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4-30)$$

故  $u = c$ , 即  $\Lambda = 1$  时,  $\frac{dQ}{d(p-p_c)} = 0$ , 流量趋于其极值。

### § 4-3 可坍管内的一维定常流动

上述分析限于理想流动,且设  $S_0 = \text{常数}$ 。现考察流体粘性、 $S_0$  变化及重力对可坍管流动的影响。为简化,考虑一维定常流动。

取控制体如图 7-6 示。因质量守恒,

$$\begin{aligned} d(uS) &= 0 \\ \therefore \frac{dS}{S} + \frac{du}{u} &= 0 \end{aligned} \quad (4-31)$$

设  $\beta = \frac{S}{S_0} \quad (4-32)$

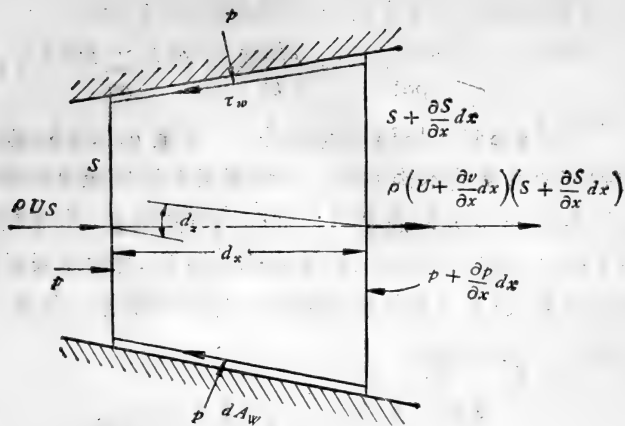


图 7-6 一维定常流动分析

$$\therefore d\beta = \frac{dS}{S_0} - \frac{SdS_0}{S_0^2}$$

这样(4-31)变为:

$$\frac{d\beta}{\beta} + \frac{dS_0}{S_0} + \frac{du}{u} = 0 \quad (4-33)$$

按动量守恒定理,有:

$$\begin{aligned} pS + p dS - (p + dp)(S + dS) - \tau_w dA_w + Sd(\rho gz) \\ = \rho u S(u + du) - \rho u^2 S \end{aligned}$$

$\tau_w$  是壁面摩擦应力,  $A_w$  是侧面积,  $z$  为液柱垂直高度,

$$\therefore \frac{du}{u} = -\frac{dp}{\rho u^2} - \frac{\tau_w}{\rho u^2} \cdot \frac{dA_w}{S} - \frac{d(gz)}{u^2} \quad (4-34)$$

引进摩擦系数  $f_T$  和水力直径  $D_c$ :

$$\left. \begin{aligned} f_T &= \tau_w / \frac{1}{2} \rho u^2 \\ D_c &= \frac{4S dx}{dA_w} \end{aligned} \right\} \quad (4-35)$$

因起作用的是管内、外压差,故(4-34)可改写为:

$$\frac{du}{u} = -\frac{d(p - p_e)}{\rho u^2} - \frac{2f_T dx}{D_c} - \frac{d(p_e + \rho g z)}{\rho u^2} \quad (4-36)$$

方程(4-33)、(4-36)包含三个未知量  $p$ 、 $u$ 、 $S$ , 欲求解还需要知道管壁的本构方程。假设管截面积仅取决于当地管内外压差  $(p - p_e)$ , 即忽略管在轴向的弯曲刚度, 则本构方程可用(4-12a)的形式表示, 称为管律。显然, 用管律来表征管的力学性能, 只有当管沿轴向截面变化很缓慢时才合适。

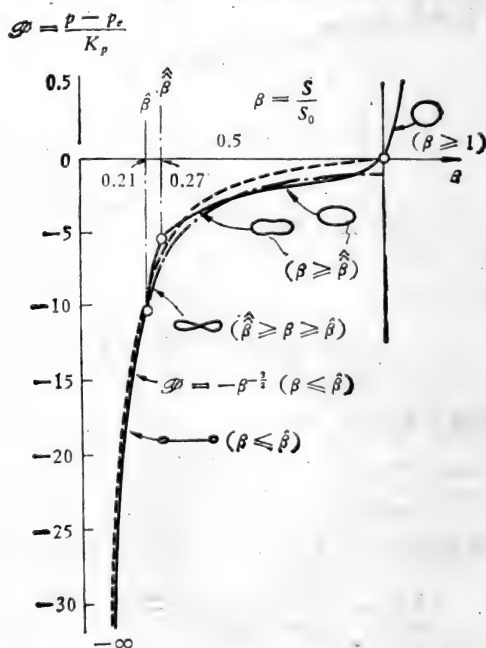


图 7-7 薄壁橡胶管的  $\varphi$ - $\beta$  关系<sup>[11]</sup>

设管截面刚度为  $K_p$

$$K_p = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)R^3} \quad (4-37)$$



显然,  $K_p = K_p(x)$ 。方程(4-12a)可写为:

$$\frac{p - p_c}{K_p} = \mathcal{D}(\beta) \quad (4-38)$$

$\mathcal{D}(\beta)$  由实验确定。目前关于血管受压时的实验数据不多, 图 7-7 是薄壁乳胶管的  $\mathcal{D}-\beta$  关系。

因为  $S_0 = S_0(x)$ , 故  $S = S[(p - p_c), x]$ , 故

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= \frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial(p - p_c)}{\partial S} \\ \text{或} \quad c^2 &= \frac{\beta}{\rho} \cdot \frac{\partial(p - p_c)}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (4-39)$$

由(4-38)可知:

$$d(p - p_c) = \frac{\partial(p - p_c)}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial(p - p_c)}{\partial K_p} dK_p$$

$$\therefore \frac{d(p - p_c)}{\rho u^2} = \left(\frac{c}{u}\right)^2 \frac{d\beta}{\beta} + \frac{\mathcal{D}}{\rho u^2} dK_p$$

代入连续方程和运动方程, 得:

$$\begin{aligned} (1 - \Lambda^2) \frac{du}{u} &= -\frac{dS_0}{S_0} + \Lambda^2 \frac{2f_T dx}{D_c} + \frac{\mathcal{D}}{\rho c^2} dK_p \\ &\quad + \frac{d(p_c + \rho g z)}{\rho c^2} \end{aligned} \quad (4-40)$$

$$\begin{aligned} (1 - \Lambda^2) \frac{dS}{S} &= \frac{dS_0}{S_0} - \Lambda^2 \frac{2f_T dx}{D_c} - \frac{\mathcal{D}}{\rho c^2} dK_p \\ &\quad - \frac{d(p_c + \rho g z)}{\rho c^2} \end{aligned} \quad (4-41)$$

$$\begin{aligned} (1 - \Lambda^2) \frac{d\beta}{\beta} &= \Lambda^2 \frac{dS_0}{S_0} - \Lambda^2 \frac{2f_T dx}{D_c} - \frac{\mathcal{D}}{\rho c^2} dK_p \\ &\quad - \frac{d(p_c + \rho g z)}{\rho c^2} \end{aligned} \quad (4-42)$$

$$(1 - \Lambda^2) \frac{d(p + \rho g z)}{\rho u^2} = \frac{dS_0}{S_0} - \frac{2f_T dx}{D_c} - \frac{\mathcal{D}}{\rho c^2} dK_p - \frac{d(p_c + \rho g z)}{\rho c^2} \quad (4-43)$$

$$(1 - \Lambda^2) \frac{d\Lambda^2}{\Lambda^2} = \mathcal{H}(x, \Lambda^2) dx \quad (4-44)$$

$$\mathcal{H}(x, \Lambda^2) = \left. \begin{aligned} & -\frac{2 - (2 - \mu)\Lambda^2}{S_0} \frac{dS_0}{dx} \\ & + \frac{\mu}{\rho c^2} \frac{d}{dx} (p_c + \rho g z) + \mu \Lambda^2 \frac{2f_T}{D_c} \\ & + \left( \mu - \frac{\rho c^2}{K_p} - \frac{1 - \Lambda^2}{\mathcal{D}} \right) \frac{\mathcal{D}}{\rho c^2} \frac{dK_p}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (4-45)$$

$$\mu = 3 + \beta \frac{\partial^2 \mathcal{D} / \partial \beta^2}{\partial \mathcal{D} / \partial \beta}$$

要计算可变形管内的流动, 必须将(4-44)和(4-40)~(4-43)中任一方程联立求解, 以确定  $u$ 、 $S$ 、 $p$ 、 $\beta$ 、 $\Lambda$  等随  $x$ 、 $p_c$ 、 $S_0$ 、 $f_T$ 、 $K_p$  等因素的变化。除少数情况外, 一般需求数值解。这里的目的, 不是求具体的解, 而是讨论可变形管流的物理特色。

由方程(4-40)~(4-43)可见,  $\Lambda > 1$  和  $\Lambda < 1$  时, 流动规律确实有质的不同, 对照如下表。

表 7-2 亚临界和超临界流动特性对照

	$\Lambda < 1$	$\Lambda > 1$
$p_c \uparrow$	$S \downarrow$ $u \uparrow$ $p \downarrow$ $\beta \downarrow$	$S \uparrow$ $u \downarrow$ $p \uparrow$ $\beta \uparrow$
$S_0 \uparrow$	$S \uparrow$ $u \downarrow$ $p \uparrow$ $\beta \downarrow$	$S \downarrow$ $u \uparrow$ $p \downarrow$ $\beta \downarrow$
$f_T \uparrow$	$S \downarrow$ $u \uparrow$ $p \downarrow$ $\beta \downarrow$	$S \uparrow$ $u \downarrow$ $p \uparrow$ $\beta \uparrow$
$K_p \uparrow$	$S \downarrow$ $u \uparrow$ $p \downarrow$ $\beta \downarrow$	$S \uparrow$ $u \downarrow$ $p \uparrow$ $\beta \uparrow$

可见:

(1) 可变形管内不可压缩流体运动时, 局部速度、压力、截面积的变化, 依然服从不可压缩流动一般规律, 例如, 截面积  $S$  增大时, 流动减速, 静压升高。无论超临界还是亚临界都是这样。

(2) 就管外压力、平衡截面积、壁面摩擦以及壁材料力学性质对于可变形管流的影响而言,  $\Lambda < 1$  和  $\Lambda > 1$  时完全相反。例如壁面摩擦增大时, 亚临界流动静压下降, 但超临界时则使静压增大, 这种现象称为负阻尼。当然, 总压  $(p + \frac{1}{2} \times \rho U^2)$  总是随  $f_T$  的增大而减小的。

(3) 具体的壁材料应力-应变关系, 对于  $\frac{dS}{dx}$ ,  $\frac{du}{dx}$ ,

$\frac{dp}{dx}$  ... 等的行为没有直接的质的影响, 不改变它们的符号。

然而,  $\Lambda$  的变化与壁材料的力学性质有密切关系。当物性不变时, 亚临界流动和超临界流动速度系数  $\Lambda$  的变化亦有质的差异。具体变化见表 7-3。

表 7-3  $\Lambda$  的变化

	$\Lambda < 1$	$\Lambda = 1$	$\Lambda > 1$
$\mathcal{H}(x, \Lambda^2) > 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} > 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} \rightarrow \infty$	$\frac{d\Lambda}{dx} < 0$
$\mathcal{H}(x, \Lambda^2) = 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} = 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} = 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} = 0$
$\mathcal{H}(x, \Lambda^2) < 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} < 0$	$\frac{d\Lambda}{dx} \rightarrow \infty$	$\frac{d\Lambda}{dx} > 0$

可见:

(1) 当  $\mathcal{H}(x, \Lambda^2)$  从正值连续地变为负值时, 可变形管流流态的变化是连续的。如图 7-8 示, 有四种可能: 连续的亚临界流, 连续的超临界流, 连续地从亚临界变为超临界, 或从超临界变为亚临界。连续过渡的条件是:  $\Lambda = 1$  时恰好  $\mathcal{H}(x, \Lambda^2) = 0$ 。

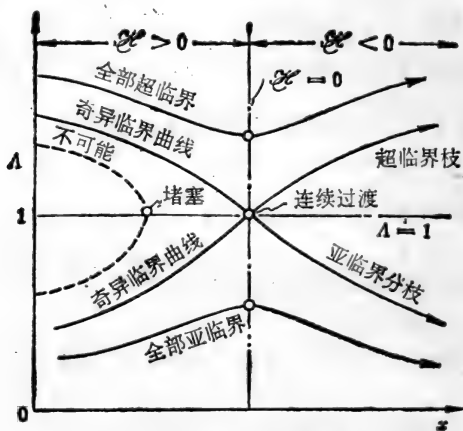


图 7-8 可坍管流流态的连续变化

(2) 当  $\mathcal{H}(x, \Lambda^2)$  从负值变为正值时, 流动有可能发生堵塞。因为,  $\mathcal{H} < 0$  时,  $\Lambda$  变化的趋向是偏离  $\Lambda = 1$ ; 而  $\mathcal{H} > 0$  时,  $\Lambda$  总是趋于 1, 且  $\frac{d\Lambda}{dx} \rightarrow \infty$ 。显然,  $\mathcal{H} > 0$  时,  $\Lambda = 1$  是不能达到的,  $\Lambda \rightarrow 1$  时, 流动堵塞, 如图 7-9 示。

作为一个例子, 考虑薄壁乳胶管内的流动, 由图 7-7 可见, 若管子刚刚压坍时  $\beta = \hat{\beta}$ , 则  $\beta < \hat{\beta}$  时, 有:

$$-\mathcal{D} = \beta^{-n}, \quad n = \frac{3}{2} \quad (4-46)$$

为便于分析, Shapiro 取如下近似

$$-\mathcal{P} = \beta^{-n} - 1, \quad n = 3/2 \quad (4-46')$$

这样

$$c = \sqrt{\frac{nK_p}{\rho\beta^n}} \quad (4-47)$$

代入(4-40)–(4-43)得

$$\begin{aligned} (1 - \Lambda^2) \frac{dS}{S} &= -(1 - \Lambda^2) \frac{du}{u} = \frac{dS_0}{S_0} - \Lambda^2 \frac{2f_T dx}{D_c} \\ &\quad + \frac{2}{3} (1 - \beta^{3/2}) \frac{dK_p}{K_p} - \frac{2}{3} \frac{d(p_c + \rho g z)}{K_p \beta^{-3/2}} \\ (1 - \Lambda^2) \frac{d\beta}{\beta} &= \Lambda^2 \frac{dS_0}{S_0} - \Lambda^2 \frac{2f_T dx}{D_c} + \frac{2}{3} (1 - \beta^{3/2}) \frac{dK_p}{K_p} \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{d(p_c + \rho g z)}{K_p \beta^{-3/2}} \\ (1 - \Lambda^2) \frac{d(p + \rho g z)}{\rho u^2} &= \frac{dS_0}{S_0} - \frac{2f_T dx}{D_c} + \frac{2}{3} (1 - \beta^{3/2}) \\ &\quad \times \frac{dK_p}{K_p} - \frac{2}{3} \frac{d(p_c + \rho g z)}{K_p \beta^{-3/2}} \\ (1 - \Lambda^2) \frac{d\Lambda^2}{\Lambda^2} &= \frac{3}{2} \left( \Lambda^2 - \frac{4}{3} \right) \frac{dS_0}{S_0} + \Lambda^2 \frac{f_T dx}{D_c} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{3} - \frac{1 - \Lambda^2}{\beta^{3/2} - 1} \right] (1 - \beta^{3/2}) \frac{dK_p}{K_p} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{d(p_c + \rho g z)}{K_p \beta^{-3/2}} \quad (4-48) \end{aligned}$$

当  $S_0$ 、 $p_c$ 、 $z$ 、摩擦阻力、 $K_p$  变化时，流动发生堵塞或连续地渡过临界状态的可能性见表 7-4。

它表明：平衡截面积减小 ( $\Lambda^2 < \frac{4}{3}$  时)、外压增大、高度增大、壁面刚度减小 ( $3\Lambda^2 < 4 - \beta^{3/2}$  时) 以及壁面摩擦，将会导致乳胶管内流动堵塞。而当  $\Lambda^2 < \frac{4}{3}$  时，若在喉部之前  $S_0$

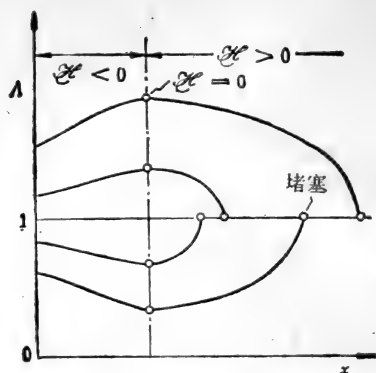


图 7-9 可拐弯流的堵塞现象

表 7-4  $\mathcal{D} = 1 - \beta^{3/2}$  时发生堵塞或连续过渡的可能性

	发生堵塞	连续过渡的条件
$\frac{dS_0}{dx}$	若 $\Lambda^2 < \frac{4}{3}$ : (-); 若 $\Lambda^2 > \frac{4}{3}$ : (+)	$\Lambda^2 < \frac{4}{3}$ 时, (-) $\rightarrow$ (0) $\rightarrow$ (+) $\Lambda^2 > \frac{4}{3}$ 时, 不可能
$\frac{d}{dx}(p_e + \rho gz)$	+	(+) $\rightarrow$ (0) $\rightarrow$ (-)
$\frac{4f_T}{D_e}$	总是引起堵塞	不可能
$\frac{dK_p}{dx}$	$3\Lambda^2 < (4 - \beta^{3/2})$ : (-) $3\Lambda^2 > (4 - \beta^{3/2})$ : (+)	$3\Lambda^2 < (4 - \beta^{3/2})$ 时, (-) $\rightarrow$ (0) $\rightarrow$ (+) $3\Lambda^2 > (4 - \beta^{3/2})$ 时, 不可能

连续减小, 而在其后  $S_0$  连续增大; 或  $p_e$  或  $z$  或  $K_p$  (当  $3\Lambda^2 > 4 - \beta^{3/2}$  时) 连续增大时, 都可能发生连续过渡。

应该指出, 上述分析应用于实际是有困难的。首先, 方程 (4-44) 涉及  $\partial^2 \mathcal{D} / \partial \beta^2$ 、 $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta}$ , 而  $\mathcal{D}(\beta)$  本身是经验的, 现有实验技术的精度不足以获得准确的  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \beta}$ 、 $\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \beta^2}$ ; 其次,  $-\mathcal{D} =$

$\beta^{-\frac{1}{2}} - 1$  适于管截面受压失稳，相对表面相接触以后的情形，而实际上（尤其是生理上）感兴趣的恰恰是管截面从圆→椭圆→相对表面接触这一阶段。

总之，可变形管流动研究的最大难题是如何准确地确定管在受压状态下的本构方程。

#### § 4-4 结语

生理流动提出了两类可变形管流动问题，一类是可膨胀管内的流动，另一类是可坍塌管内的流动，后者比前者更为复杂，但在生理上相当普遍。除了大静脉、肺(大)血管的流动可能属于这一类外，动脉血流也可能发生这种情况。例如，量血压时，大夫用绷带缠紧患者的臂部，打气压紧，使臂动脉完全压瘪。然后再降低外压，根据所谓科罗特科夫氏(Korotkoff)音来判定血压。这种声音的产生和可坍塌管流动的稳定性密切相关。又如，营养血管被压瘪造成的堵塞，可能是引起某些疾病(如股骨头无菌性坏死、骨软骨炎等)的原因之一。

可坍管流动不仅存在于循环系统，也存在于其他系统。比如呼气时气管压力低于肺泡压力  $p_A$ ，气管压力为  $p_{pl}$  (胸腔压力)，当  $p < p_{cr}$  时，气管被压瘪。Clement<sup>[18]</sup> 求出了  $(p - p_{pl})$  与气管截面积的关系，如图 7-10 曲线(A)所示。同时又给出了气管内气流的动力学曲线(曲线(B))

$$(p - p_{pl}) = p_{st} - p_v - \frac{1}{2} k \rho u^2 \quad (4-49)$$

$p_{st}$  是肺的静态恢复压， $p_v$  是粘性引起的压力损失， $k$  是系数。由图可见，曲线 A、B 相交于 X、Y、Z。这里，Y 是不稳定的，X、Z 是稳定的。X 是可膨胀管流；而 Z 是可坍管内的稳定流动。显然，在 Z 区，有一最小截面积  $S_z$ ，因而呼气存在一个极限流量。这一点早已为生理测量证明，而且已被用作评

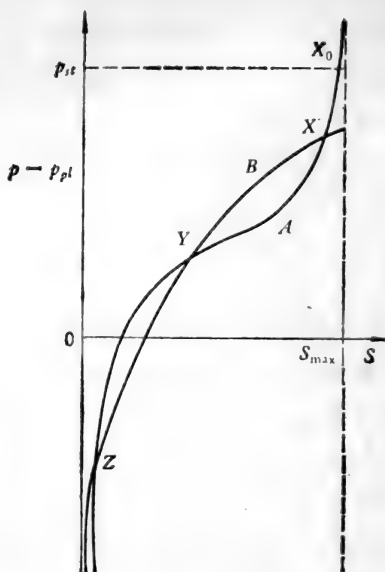


图 7-10 呼气流的可能状态  
A 弹性曲线， B 流动曲线。

价呼吸系统功能的一个客观指标。

此外，雄性哺乳动物排尿也有一个极限速度，Griffiths 对此作过详细的研究<sup>[19]</sup>。

总之，可坍塌管流动是现今生物流体力学的一个重要课题，在生理学、病理学和医学工程等方面都有意义，对于现有的流体力学理论也是一个挑战。这一点将在 §9 中进一步说明。

## § 5 动脉血流相似性和线性化理论基础

心血管流体力学中，研究得最多的是动脉血流。一方面因为它在生理上很重要，另一方面也因为比较简单。



与静脉血流相比,动脉血流的力学特点是:

(1) 流动脉动性很强。如图 7-11 示,脉动分量的幅值与平均值同量级。

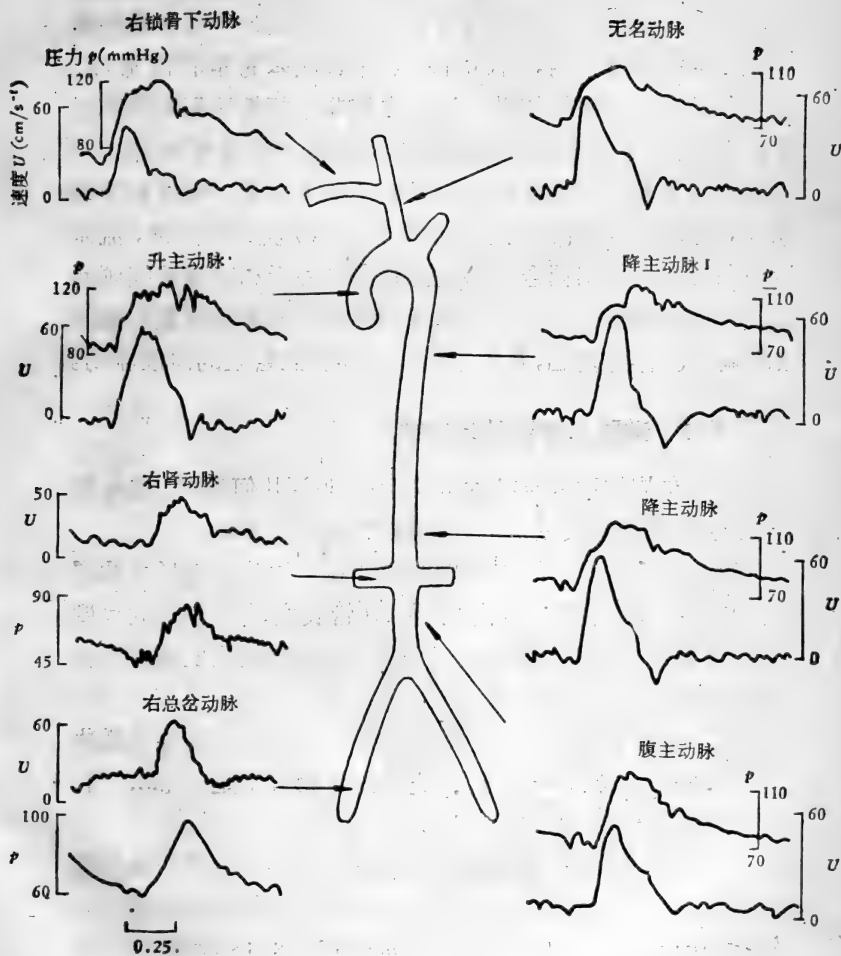


图 7-11 主动脉树内血流压力和平均速度随时间的变化<sup>[1]</sup>

(2) 静压较高,  $p > p_c$ , 血管变形时主要是改变截面积, 即为可膨胀管。同时, 由于静压较高, 重力的影响往往可以忽略不计。

(3) 管壁较厚, 刚度大, 一般  $c \gg u$ , 流动总是亚临界的。

因此, 从流体力学观点来看, 动脉血流是可膨胀圆柱管(或锥形管)或管系内, 不可压缩非牛顿流体的非定常流动。如前所述, 对大血管流动来说, 血液非牛顿性的影响并不显著, 可以不计。故动脉血流动力学问题的困难主要来自: (i) 管系分支繁多, 边界条件复杂; (ii) 管壁大变形, 壁材料非线性; (iii) 壁材料物性因血管部位而异; (iv) 流动非定常, 流体运动和管壁振动相耦合。就压力-流量关系和脉搏波问题而言, 最重要的是波反射, 以及管壁物性和几何形状改变引起的波形畸变。作为基础, 首先分析一段动脉血管里的血液流动。

### § 5-1 动脉血液流动相似性

动脉血流的动力学特性取决于: 血管几何形状、血液物性、血管壁力学性质以及进、出口边界条件。假设:

(1) 流动是充分发展的轴对称非定常层流, 流场有两个特征长度:  $R$  (平衡态管内径) 和  $L$  (管长度), 一个时间尺度  $T$  (心搏周期)。由于系统是有源的, 流动时间尺度决定于输入条件, 故  $T$  和  $L$  是彼此独立的。

(2) 血液是 Casson 流体, 其力学性质由三个物性参数决定:  $\rho$  (密度)、 $k$ 、 $b = \sqrt{\tau_y}$ 。它们的量纲分别是:  $[ML^{-3}]$ 、 $[M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1/2}]$ 、 $[M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}]$ 。

(3) 血管壁材料遵循冯元桢准线性理论, 按第四章方程(8-5)(8-6)(7-9)(8-14)(8-15), 壁材料的物性参数为  $E_0$  (方程(7-9)中的  $c$ )、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_4$ 、 $\nu_1$ 、 $\nu_2$ 、 $m$  (方程(8-15)中的  $c$ )。其中  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_4$ 、 $m$  是无量纲参数,  $E_0$  的量纲为  $[ML^{-1}T^{-2}]$ ,  $\nu_1$ 、

$v_2$  是时间常数, 量纲为 [T]。此外, 影响壁运动的还有密度  $\rho_w$ , 厚度  $h$ 。

出口条件则决定于下游组织所需的灌注压力  $p_T$ , 亦即取决于下游的阻抗  $Z_T$ ,  $Z_T = \frac{p_T}{\pi R^2 U}$ , 其量纲为  $[ML^{-4}T^{-1}]$ 。

对动脉血流来说, 进口条件决定于心脏的输出。一般由两种形式给出:

(1) 由心输出量  $Q(t)$  给出, 由此可得流动的特征速度  $U$ ,

$$U = \frac{1}{\pi R^2 T} \int_0^T Q(t) dt \quad (5-1)$$

或

$$U = \frac{[Q(t)]_{\max}}{\pi R^2}$$

对于非定常流动,  $U$  与  $T$ 、 $L$ 、 $R$  是相互独立的。除  $T$ 、 $U$  外,  $Q(t)$  还规定了输入波形, 令:

$$q(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2 U} \quad (5-2)$$

作傅里叶展开:

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n e^{in\omega t} \quad (5-3)$$

这里:  $q_0 = 1, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$  (5-4)

取有限项  $N$ ,

$$q(t) \simeq 1 + \sum_{n=1}^N q_n e^{in\omega t} \quad (5-5)$$

这样, 进口条件由:  $T$ 、 $U$ 、 $q_n$  和  $N$  为给定的。

(2) 由主动脉瓣出口压力  $P(t)$  给出, 由此可得特征压力

$P_0$ 

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (5-6)$$

同样,令

$$\tilde{P}(t) = \frac{P(t)}{P_0} \quad (5-7)$$

则波形由  $P_n$  和  $N$  给定:

$$\tilde{P}(t) \simeq 1 + \sum_{n=1}^N P_n e^{in\omega t} \quad (5-8)$$

此时流动特征速度  $U$  可取为:

$$U = \sqrt{\frac{P_0}{\rho}} \quad (5-9)$$

此外,影响流动的还有重力场,它可用特征高度  $H$  (所考虑血管两端的高度差) 和重力加速度  $g$  表征。

这样,动脉血流任一物理量,比如说压力  $p$ , 可表为上述参数的函数:

$$p(x, r, t) = f(x, r, t; R, L, T; \rho, k, b; E_0, a_1, a_2, a_4, v_1, v_2, m, \rho_w, h, g, H, Z_T, U, q_1, \dots, q_N) \quad (5-10a)$$

或: 
$$p(x, r, t) = f(x, r, t; R, L, T; \rho, k, b, E_0, a_1, a_2, a_4, v_1, v_2, m, \rho_w, h, g, H, Z_T, P_0, P_1, P_2, \dots, P_N). \quad (5-10b)$$

这里有  $(N + 19)$  个独立参数, 涉及  $M$ 、 $L$ 、 $T$  三种基本单位, 按  $\pi$  定理应包含  $(N + 16)$  个相似参数:

$$\frac{p}{\rho U^2} = F \left( \frac{x}{L}, \frac{r}{R}, \frac{t}{T}; \frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{TU}{R}, \frac{k^2}{\rho R U^2}, \frac{\tau_y}{\rho U^2}, \frac{E_0}{\rho U^2}, a_1, a_2, a_4, m, \frac{v_1}{T}, \frac{v_2}{T}, \frac{\rho_w}{\rho}, \frac{Z_T R^2}{\rho U}, \frac{\sqrt{gH}}{U}, \frac{H}{R}, q_1, q_2, \dots, q_N \right) \quad (5-11a)$$

或:

$$\frac{p}{P_0} = F \left( \frac{x}{L}, \frac{r}{R}, \frac{t}{T}; \frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{T}{R} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}}, \frac{k^2}{R \sqrt{\rho P_0}}, \right. \\ \left. \frac{\tau_y}{P_0}, \frac{E_0}{P_0}, a_1, a_2, a_4, m, \frac{v_1}{T}, \frac{v_2}{T}, \frac{\rho_w}{\rho}, \frac{Z_T R^2}{\sqrt{\rho P_0}}, \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\rho g H}{P_0}}, \frac{H}{R}, P_1, P_2, \dots, P_N \right) \quad (5-11b)$$

进而, 设(i) 血液是牛顿流体, 即上式中  $\tau_y = 0$ ,  $k^2 = \mu$ ; (ii) 血管是胡克体, 壁材料弹性由杨氏模量  $E$  和泊松比  $\sigma$  决定, 这样(5-11)可简化为:

$$\frac{p}{\rho U^2} = F \left( \frac{R}{T}, \frac{h}{R}, \frac{H}{R}, \frac{TU}{R}, \frac{\rho UR}{\mu}, \frac{Eh}{2\rho U^2 R}, \sigma, \right. \\ \left. \frac{\rho_w}{\rho}, \frac{Z_T R^2}{\rho U}, \frac{\sqrt{gH}}{U}, q_1, q_2, \dots, q_N \right) \quad (5-12a)$$

或

$$\frac{p}{P_0} = F \left( \frac{R}{T}, \frac{h}{R}, \frac{H}{R}, \frac{T}{R} \sqrt{\frac{P_0}{\rho}}, \frac{R \sqrt{\rho P_0}}{\mu}, \frac{Eh}{2P_0 R}, \right. \\ \left. \sigma, \frac{\rho_w}{\rho}, \frac{Z_T R^2}{\sqrt{\rho P_0}}, \sqrt{\frac{\rho g H}{P_0}}, P_1, P_2, \dots, P_N \right) \quad (5-12b)$$

这时, 有  $(N + 10)$  个相似参数。若  $N = 1$ , 即进口流动是定常流与某一简谐振荡的叠加, 则流动有 11 个相似参数。令

$$Re = \frac{\rho UR}{\mu}, \quad \left( \text{或} = \frac{R \sqrt{\rho P_0}}{\mu} \right); \quad St = \frac{R}{TU},$$

$$\left( \text{或} \frac{R}{T} \sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \right);$$

$$M = \frac{U}{c_0} = \frac{U}{\sqrt{\frac{Eh}{2\rho R}}} \quad \left( \text{或} M^2 = \frac{P_0}{\rho c_0^2} \right); \quad Fr = \frac{\sqrt{gH}}{U}$$

$$\left( \text{或} \sqrt{\frac{\rho g H}{P_0}} \right);$$

$$\mathcal{Z} = \frac{Z_T R^2}{\rho U} \left( \text{或} = \frac{Z_T R^2}{\sqrt{\rho P_0}} \right) \quad (5-13)$$

这样(5-11)变为:

$$\frac{p}{\rho U^2} = f \left( \frac{r}{R}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T}; \frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{H}{R}, \sigma, \right.$$

$$\left. Re, M, St, Fr, \mathcal{Z}, q_1, q_2, \dots, q_N \right) \quad (5-14a)$$

或:

$$\frac{p}{P_0} = f \left( \frac{r}{R}, \frac{x}{L}, \frac{t}{T}; \frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{H}{R}, \sigma, \right.$$

$$\left. Re, M, St, Fr, \mathcal{Z}, P_1, P_2, \dots, P_N \right) \quad (5-14b)$$

这里  $\frac{R}{L}$ 、 $\frac{h}{R}$  是几何相似参数;  $\frac{H}{R}$  是相对高度差;  $\frac{\rho_w}{\rho}$  是密度比;

$\sigma$  是泊松比;  $Re$  是雷诺数, 表征迁移惯性力与粘性力之比;  $M$  是流速-波速比, 即 §4 中的速度系数  $\Lambda$ , 其作用类似于可压流流中的马赫数, 它表征流体动能与血管变形位能之比;  $St$  是 Strouhal 数, 表征流动的非定常性, 不难看出

$$St \cdot \frac{L}{R} \sim \frac{\text{非定常惯性力}}{\text{迁移惯性力}}$$

$Fr$  是 Froude 数, 表示流体位能与动能之比;  $\mathcal{Z}$  则表征终端条件的相似性。

按运动方程(2-6), 不难看出

$$\frac{\text{非定常惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}}{\mu \Delta u_i} \sim \frac{\rho R^2}{\mu T}$$

引进圆频率  $\omega$ ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5-15)$$

定义频率参数

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} R, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (5-16)$$

$\alpha^2$  表征非定常惯性力和粘性力之比, 又称 Womersley 数。应该指出,  $Re$ 、 $St$ 、 $\alpha$  之间, 只有两个是独立的, 由(5-13)(5-15)(5-16)可知

$$\alpha^2 = 2\pi Re \cdot St \quad (5-17)$$

讨论动脉血管流动时, 常用  $\alpha$ , 不用  $St$ 。

方程(5-14)告诉我们, 若将血液看作不可压缩牛顿流体, 血管看作胡克体, 则在几何相似的条件下, 只要  $\frac{H}{R}$ 、 $\frac{\rho_w}{\rho}$ 、 $\sigma$ 、 $Re$ 、 $M$ 、 $\alpha$ 、 $Fr$ 、 $\mathcal{Z}$ 、 $q_1, \dots, q_N$  等和动脉流动一样, 那么模型实验所得的结果(用无量纲形式表示), 就可以用以分析真实的动脉血流。

更准确些, 若将血液看作 Casson 流体, 血管壁材料的应力-应变关系服从准线性理论, 那么由方程(5-11)可知, 在几何相似的条件下, 动脉血流的动力学相似参数为:  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_4$ 、 $n$ 、 $\frac{H}{R}$ 、 $\frac{\rho_w}{\rho}$ 、 $St$ (或  $\alpha$ )、 $Fr$ 、 $Re$ 、 $M$ 、 $C_{as}$ 、 $\mathcal{F}_1$ 、 $\mathcal{F}_2$ 、 $\mathcal{Z}$ 、 $q_1, q_2, \dots, q_N$  等。这里  $St$ 、 $Fr$ 、 $\mathcal{Z}$  定义同(5-13), 而

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{\rho UR}{k^2}, & M &= \frac{U}{c_0} = \frac{U}{\sqrt{\frac{E_0 h}{2\rho R}}} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\rho\omega}{k^2}} \cdot R = \sqrt{\rho\omega} \cdot \frac{R}{k}, & \mathcal{F}_1 &= \frac{\nu_1}{T} \\ C_{as} &= \frac{\tau_y}{\frac{1}{2}\rho U^2}, & \mathcal{F}_2 &= \frac{\nu}{T} \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

以上所述是把一段动脉血管看作直圆柱管时, 所得的流动相似参数。显然, 在现实中, 要实现严格的相似(模型和实体相似)几乎是办不到的。而且实际动脉形状复杂, 有弯曲, 有锥度, 分支繁复, 且其力学性质在空间分布上是不均匀的, 这些因素的影响比上述某些相似参数大得多。实践中往往只能确保某些相似参数相同, 实现部分相似。究竟应保持哪些因素相似, 则视具体问题(目标)而定。

例如, 作为认识动脉血流规律的基础, 若要了解可变形(可扩张)管非定常流动的特性, 则往往把进口条件简化为定常流动+简谐运动, 不考虑反射。这样, 运动的相似参数为:  
 $\frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{H}{R}, Re, St(\text{或 } \alpha), M, Fr$  和  $q_1(\text{或 } P_1)$ 。

又如, 为掌握脉搏波在动脉系统中的传播规律, 重要的是保证  $\left(\frac{R}{l}\right)_i, \left(\frac{h}{R}\right)_i, \frac{l_i}{L}, \frac{d_i}{L}, \left(\frac{H}{R}\right)_i, M_i = \left(\frac{U}{c}\right)_i, \alpha_i, (Re)_i, \alpha_k$ , 等等相同。  $l_i$  是第  $i$  段管的长度,  $d_i$  是第  $i$  个分支点离进口位置的距离。至于进口条件, 若为研究传播理论, 则可简化为定常流+(基频)简谐运动; 若为探讨某些生理、病理现象, 则应保证  $q_1, q_2, \dots, q_n$  (或  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ) 一样。

研究生理现象离不开动物实验。目前所知的许多心血管系统的生理规律, 大都是通过动物(主要是哺乳动物)实验而获得的。将这些结果应用于人体, 隐含着—个前提, 即哺乳动物心血管系统的尺度虽然相差甚远, 但其运动是相似的。实践证明, 这种相似性确实存在。然而, 不同哺乳动物心血管(以主动脉为例)的流动参数, 如  $Re, \alpha$  等, 差异很大, 即从流体力学观点来看, 严格地说的不相似的。那么, 这种相似性主要体现在何处呢? 观察表明: 尽管各种哺乳动物的心率、体重、心血管系统尺度等相差很大, 在相应的解剖部位上, 测



得的压力波和流量波的波形却惊人地相似。这说明,对左心室来说,动脉系统运动在频率域上的相似性似乎更为重要。Noordergraaf 等<sup>[73]</sup>对此做了较细致的观测,结果列于下表:

表 7-5 哺乳动物心血管流动相似性

	体重 $W(\text{kg})$	心率 $f(\text{min}^{-1})$	相速度 $c(\text{cms}^{-1})$	系统长度 $L(\text{cm})$	最大波长 $\lambda_{\max}(\text{cm})$	最小波长 $\lambda_{\min}(\text{cm})$	$\frac{\lambda_{\max}}{L}$	$\frac{\lambda_{\min}}{L}$
马	400	36	400	110	667	55	6.0	0.5
人	70	70	500	65	429	36	6.6	0.5
狗	20	90	400	45	267	23	5.9	0.5
澳洲袋熊	16	120	500	40	250	21	6.2	0.5
猫	3.6	180	450	27	150	13	5.6	0.5
兔	3.0	210	450	27	129	11	5.2	0.4
豚鼠	0.6	240	420	15	105	9	7.0	0.6
平均			446				6.1	0.5

这里  $L$  是主动脉口到髂动脉口的距离,  $\lambda_{\max}$ 、 $\lambda_{\min}$  分别为取  $N = 12$  时的最长或最短的波长。由此可见,表征哺乳动物心血管系统运动相似的是  $\frac{\lambda_{\min}}{L}$  和  $\frac{\lambda_{\max}}{L}$ , 即这是两个最重要的相似性参数。

对于主动脉瓣膜流动实验来说,主要应保证左心室和主动脉口的压力、流量波形和生理波形相似。

## § 5-2 动脉血流线性理论的基础

现有的动脉血流近似理论很多,用得最广泛的是线性理论。各种线化模型的共同基础是:(i)血液是牛顿流体,其运动服从纳维-司托克斯方程。而且迁移项与非定常项相比可以忽略不计;(ii)壁位移与平衡态内半径相比很小,边界条件可认为在平衡位置上满足;(iii)壁材料是线弹性体或线性粘弹性

体,因而壁运动方程是线性的。

对近似理论来说,至为重要的是确定其适用条件,并在不改变适用性的条件下,采用尽可能简单的数学定式。因此,在讨论具体的线化模型之前,分析一下动脉血线性理论的基础是有益的。

### 1. 无限长弹性圆柱管内的脉动流

作为动脉树或一段动脉血管的最简单的模型,考察无限长弹性圆柱管内的脉冲流动,壁材料是胡克体,且壁很薄,只能受拉,不能承弯。因而壁应力只有两个非零分量  $\tau_{\theta\theta}'$ ,  $\tau'_{xx}$ 。

取柱坐标  $\{r, \theta, x\}$ , 速度场为  $\mathbf{v} = \{v, 0, u\}$ , 壁位移为  $\zeta = \{\eta, 0, \xi\}$ 。根据假设 (i), 流动服从纳维-司托克斯方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (5-19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} (5-20)$$

在壁面上,满足无滑流条件:

$$r = R: \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (5-21)$$

$\eta, \xi$  服从壁运动方程,它因具体模型而异,现考虑最简单的情形。取管壁微元体如图 7-12 示。作用于其上的径向力为:

径向惯性力:  $\rho_w h dx \cdot R d\theta \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$

径向挤压力:  $-(p - p_c) R d\theta dx = -p R d\theta dx$ , 这里设  $p_c = 0$ ;

周向应力  $\tau'_{\theta\theta}$  引起的径向力:

$$2\tau'_{\theta\theta} h dx \sin \frac{d\theta}{2} \approx \tau'_{\theta\theta} h d\theta dx$$

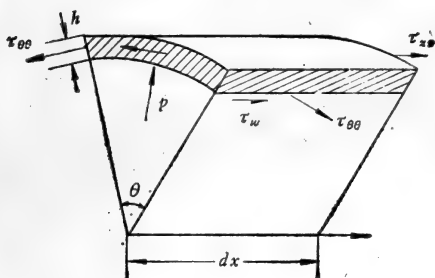


图 7-12 壁应力分析

因径向力平衡,故

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - p + \tau'_{\theta\theta} \frac{h}{R} = 0 \quad (5-22a)$$

作用于微元体的轴向力为:

流体轴向惯性力:

$$\rho_w h dx \cdot R d\theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

流体粘性应力:

$$\tau_{rz} R d\theta dx = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{r=R} \cdot R d\theta dx,$$

纵向弹性应力  $\tau'_{xz}$  的梯度引起的轴向力

$$\frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} R d\theta h dx$$

轴向力平衡,故

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \tau_{rz} - h \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (5-22b)$$

根据假设应力-应变关系符合胡克定律,

$$\left. \begin{aligned} \tau'_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\sigma^2} \left( \frac{\eta}{R} + \sigma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \\ \tau'_{xx} &= \frac{E}{(1-\sigma^2)} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma \frac{\eta}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

$E$  是杨氏模量,  $\sigma$  是泊松比。

将(5-23)代入(5-22)得壁运动方程

$$\left. \begin{aligned} \rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= p - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left[ \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{R^2} \right] \\ \rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{r=R} + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-24)$$

根据(3-22),引进波速

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2(1-\sigma^2)\rho R}} \quad (5-25)$$

则(5-24)可改为:

$$\left. \begin{aligned} \rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= p - 2\rho c^2 \left[ \sigma \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{R} \right] \\ \rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{r=R} + 2\rho c^2 \\ &\quad \times \left[ R \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

欲简化,首先要判别方程中哪些项、在什么条件下是相对

小量;然后,判断整个定解系统对这些相对小量是否敏感,略去不敏感的相对小项。这样才能确定近似理论的适用条件及合理的近似形式。

为此,将方程(5-19)(5-20)及(5-26)无量纲化。这里,关键是选择每个变量的特征尺度作为其参考量,使得无量纲方程中每一项等于一个代表该项量级的无量纲参数和量级为1的因子的乘积。这样,可以从参数的量级来判断该项的量级,以决定弃取。若所选参考量不是相应变量的固有尺度,则无量纲参数的量级不一定代表该项的量级。

本问题中,心搏周期 $T$ 确定了运动的时间尺度,流场径向尺度为 $R$ 。由于系统无反射,故纵向尺度可取基波波长 $\lambda$ ,

$$\lambda = cT. \quad (5-27)$$

即纵向尺度不是独立的,它取决于时间尺度及管壁物性(波速)。轴向和径向速度尺度为 $U$ 、 $V$ ,壁位移尺度分别为 $\eta_0$ 、 $\xi_0$ ,它们也不是独立的,

$$\frac{\xi_0}{\eta_0} \sim \sigma \quad (5-28)$$

故设:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T} = \frac{ct}{\lambda}, \\ \bar{u} &= \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\xi}{\sigma\eta_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \end{aligned} \right\} \quad (5-29)$$

连续方程(5-19)变为

$$\frac{U}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{R} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) = 0$$

$$\therefore V \sim \frac{R}{\lambda} U \quad (5-30)$$

由(5-29)(5-30),方程(5-20)、(5-26)的无量纲形式为:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) &= -\frac{\lambda}{\rho c U} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 &+ \frac{\mu}{\rho U R} \cdot \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right] \\
 \frac{R}{\lambda} \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \right\} &= -\frac{\lambda}{\rho c U} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho U R} \\
 &\times \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \left( \frac{R}{\lambda} \right) \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} + \left( \frac{R}{\lambda} \right)^3 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{p}{\rho_w c^2} \frac{\lambda^2}{h \eta_0} - 2 \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\lambda^2}{h R} \left[ \sigma \frac{R}{\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta} \right] \\
 \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{t}^2} &= -\frac{\mu}{\rho U R} \cdot \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \left( \frac{U}{c} \right)^2 \frac{\lambda^2}{\sigma \eta_0 h} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{\lambda} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right]_{r=1} \\
 &+ 2 \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\lambda}{h} \left[ \left( \frac{R}{\lambda} \right) \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (5-32)$$

由此可得无限管长(即无反射)时的线化条件为:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{U}{c} &\ll 1 \\
 \frac{R}{\lambda} &\ll 1
 \end{aligned} \right\} \quad (5-33)$$

## 2. 有限管长弹性圆管脉动流

实际动脉血管长度是有限的,据测量,若心率为每分75跳,则整个动脉树流程约为基波波长的  $\frac{1}{5}$ 。McDonald、Taylor 等人的模型实验都证明,远端反射的影响可及于主动脉口,尤其是频率低于2Hz的分量,远端反射更为显著。这说明用无限长弹性管模型分析动脉血流不够真实。取有限长弹性管更为适宜。

取有限长度( $L$ )弹性直圆管代表动脉树或一段动脉血管,心脏相当于一周期为 $T$ 的脉冲源,末端组织为纯负载。

进而假设:

(1) 在正常生理条件下,系统不发生共振;

(2) 管壁初始应力不予考虑。

如前所述,这是一个有源系统,源的输出频率,决定了系统的特征时间(因为无共振);这又是一个有反射的系统,终端反射取决于管长 $L$ 、波速、源频率、系统特征频率及端点条件。故取 $L$ 为流场的纵向特征尺度,与无反射时不同,这里 $L$ 与 $T$ 都是独立的。设:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U} \\ \bar{v} &= \frac{v}{V}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\sigma\eta_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \end{aligned} \right\} \quad (5-34)$$

除了方程(5-19)(5-20)(5-26)及壁面边界条件(5-21)外,流动还需满足两端边界条件。通常给定心脏的输出流量或输出压力及下游灌注压力。按本模型,这相当于规定端点的流速 $U$ 和径向位移 $\eta$ 。故两端边界条件为:

$$x = 0: \left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= \varphi_1(\bar{r}, \bar{t}) \\ \frac{\eta}{\eta_0} &= \varphi_2(\bar{r}, \bar{t}) \end{aligned} \right\} \quad (5-35)$$

$$x = L: \frac{\eta}{\eta_0} = \varphi_3(\bar{r}, \bar{t}) \quad (5-36)$$

应用(5-26),连续方程(5-11)无量纲化为

$$\frac{U}{L} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{R} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) = 0$$

因为流动是充分发展的等截面直圆管流,故 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}}, \frac{\bar{v}}{\bar{r}}$ 同

量级,

$$\therefore V \sim \frac{R}{L} U \quad (5-37)$$

应用(5-34)(5-37)得方程(5-20)(5-26)的无量纲形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{UT}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) &= -\frac{T}{\rho U} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \frac{\mu}{\rho UR} \cdot \frac{UT}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right] \\ \frac{R}{L} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{R}{L} \cdot \frac{UT}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) &= -\frac{T}{\rho U} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \frac{\mu}{\rho UR} \cdot \frac{UT}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} \right. \\ &\left. + \left( \frac{R}{L} \right)^3 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{vT^2}{\rho_\omega h \eta_0} - 2 \frac{\rho}{\rho_\omega} \frac{c^2 T^2}{hR} \left[ \sigma \frac{R}{L} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta} \right] \\ \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{t}^2} &= -\frac{\mu}{\rho UR} \cdot \frac{\rho U^2 T^2}{\sigma \rho_\omega h \eta_0} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right]_{r=1} \\ &+ 2 \frac{\rho}{\rho_\omega} \frac{c^2 T^2}{hL} \left[ \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-39)$$

$$\therefore \lambda = cT$$

故方程(5-38)(5-39)可改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \\ = -\frac{\lambda}{\rho U c} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho UR} \left( \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L} \right) \frac{L}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \right. \\ \times \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right] \\ \frac{R}{L} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{R}{L} \left( \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \end{aligned} \right\}$$



$$= -\frac{\lambda}{\rho U c} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho U R} \left( \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L} \right) \frac{L}{R} \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{L} \right)^3 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} \right] \quad (5-40)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{r}^2} &= \frac{p}{\rho_w c^2} \cdot \frac{\lambda^2}{h \eta_0} - 2 \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\lambda^2}{h R} \left[ \sigma \frac{R}{L} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta} \right] \\ \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{r}^2} &= -\frac{\mu}{\rho U R} \cdot \frac{\rho U^2}{\sigma \rho_w c^2} \cdot \frac{\lambda^2}{h \eta_0} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{R}{L} \right) \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right] \\ &\quad + 2 \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\lambda^2}{h L} \left[ \left( \frac{R}{L} \right) \cdot \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right] \end{aligned} \right\} \tau=1 \quad (5-41)$$

## 讨论

### 1. 流动方程线性化条件

由(5-40)可见

$$\frac{\rho(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U}}{\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}} \sim \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L} = \frac{1}{St} \cdot \frac{R}{L}$$

故流动方程线性化条件为

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L} \right) &\ll 1 \\ \frac{R}{L} &\ll St \end{aligned} \right\} \quad (5-42)$$

或

若  $L \gg \lambda$ , 则反射影响可以不计, 相当于无限长管。这时  $L$  没有意义, 应取  $\lambda$  为流场的纵向特征尺度, 条件(5-42)变为(5-33)。

若  $L \sim \lambda$ , 则条件(5-42)和(5-33)等价。

若  $L \ll \lambda$ , 则流动方程的线化条件应为(5-42), 不能用(5-33)。如前所述, 动脉血流正是这种情形。

据测量,从主动脉到远支动脉,血管内半径从约 1.5cm 变到 0.1cm,波速从 5—10m/s,平均流速从 25—1cm/s,最大流速  $u_{\max}$  从约 100—10cm/s。若取  $T = \frac{4}{5}$  s (每分 75 跳),则

$\lambda$  约 4—8m; 这样可得量级估计如下:

表 7-6 量级估计

部位 \ 参数 量级	$\frac{L}{\lambda}$	$\frac{R}{L}$	$U/c$		$\frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L}$		$St$	
			$U = \bar{u}$	$U = u_{\max}$	$U = \bar{u}$	$U = u_{\max}$	$U = \bar{u}$	$U = u_{\max}$
主动脉	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	1	$10^{-2}$	$10^{-1}$
远支动脉	$10^{-1}$	$10^{-3} - 10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$

可见用线性理论分析支动脉流动,可望获得良好近似。若用于主动脉,讨论压力-流量关系时,  $U = \bar{u}$ , 线化条件勉强满足。若用线化理论分析流场,则  $U$  应取为  $u_{\max}$ , 此时线化条件不满足。据 Ling 和 Atabek<sup>[28]</sup> 试验,主动脉管心理论速度比测量值高 50%。当然,这不完全是非线性效应,还有进口影响。

## 2. 线化条件下流动方程的最简形式

由(5-40)可见

$$\frac{\rho \frac{\partial v}{\partial t}}{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} \sim \frac{\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right)}{\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right)} \sim \frac{R}{L}$$

$$\therefore \frac{\partial p / \partial r}{\partial p / \partial x} \sim \frac{R}{L}$$

这样,线化流动方程有两种可能形式:

(i) 若  $\left(\frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L}\right) \ll 1$ , 且  $\frac{R}{L} \ll 1$ , 则(5-20)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-43)$$

(ii) 若  $\left(\frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L}\right) \ll 1$ , 但条件

$$\frac{R}{L} \ll 1 \quad (5-44)$$

不满足, 则(5-20)简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-45)$$

由表 7-5 可知, 对动脉血流来说, 条件(5-44)总是成立的。而线化条件(5-42)则要求  $\frac{R}{L} \ll 10^{-1} - 10^{-2}$ , 这比条件(5-44)苛刻得多。故可断言, 对于动脉血流来说, 若满足线化条件, 则必定同时满足条件(5-44)。因此, 动脉血流线化流动方程应取(5-43)。近年来, 一些新的线化理论均从(5-45)出发, 表面上似乎更准确, 实则于精度无补。

应该指出,  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$  并不意味着  $v = 0$ 。因为血管可膨胀, 连续性要求  $v \neq 0$ , 且在边界上还应满足条件:  $v|_R = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ 。

### 3. 粘性效应

$$\frac{\rho(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U}}{\mu\Delta\mathbf{U}} \sim \frac{UL}{\nu} = Re \frac{L}{R}$$

$$\frac{\rho \frac{\partial U}{\partial t}}{\mu\Delta\mathbf{U}} \sim \frac{\alpha^2}{2\pi}$$

主动脉  $\alpha \sim 10^2$ ,  $\frac{1}{\alpha^2} \ll 1$ , 粘性影响很小; 远支动脉  $\alpha \sim 1$ , 粘性作用很显著。

### 4. 血管壁惯性效应

由方程(5-41)可知

$$\frac{p}{\rho_w c^2} \cdot \frac{\lambda^2}{h\eta_0} \sim 2 \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\lambda^2}{hR} \gg 1$$

故壁惯性力是相对小量, 对流动的影响可忽略不计。也就是说, 壁运动对流场的影响, 主要是边界位移。这样, 流动可视为准静态, 方程(5-24)简化为:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} \cdot \frac{\eta}{R^2} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{Eh}{1-\sigma^2} \cdot \frac{\sigma}{R} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5-46)$$

由于周围组织的约束, 血管纵向位移可以不计, 这样, (5-46)可进一步简化为

$$p = \rho c^2 \left( \frac{\mathcal{R}}{R} - 1 \right) = \rho c^2 \left( \sqrt{\frac{S}{S_0}} - 1 \right) \quad (5-47)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R} &= R + \eta \\ S &= \pi \mathcal{R}^2, S_0 = \pi R^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-48)$$

但是, 实验证明, 壁材料的粘弹性对脉冲波的衰减规律有

显著影响。而材料的粘弹性只有在动力学行为中，才能显示其作用。所以，对于脉冲波传播特性来说，壁惯性力虽然是小量，却不可忽略。

基于上述分析，进一步发展脉冲血流理论有两个方向。若着眼于血液流动规律，则应考虑流动非线性项及边界条件非线性，管壁运动模型可从简，用简单的准静态关系即可；若着眼于波传播规律，则首要的是改进壁运动模型，特别是管壁有限幅度位移引起的非线性效应，及材料的粘弹性。流动仍可用线化方程处理。

## §6 可膨胀圆管内脉动流的线性理论

动脉系统的形状很复杂，但每一段血管都可近似看作等截面积的直圆管(在平衡状态下)。因此，可膨胀直圆柱管脉冲流理论是分析动脉树内血液流动规律的基础。

早在 1914 年，Witzig 就从线化纳维-司托克斯方程(5-37)、连续方程(5-1)、边界条件(5-3)出发，求解得：

$$\left. \begin{aligned} u &= [AkJ_0(ikr) + C\beta J_0(i\beta r)]e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \\ v &= -[AkJ_1(ikr) + Ck J_1(i\beta r)]e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \\ p &= -A\omega\rho J_0(ikr)e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{这里} \quad k &= -\frac{\omega}{c} \text{ 为传播系数} \\ \beta &= \sqrt{k^2 + \frac{i\omega}{\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

$A, C$  为待定常数， $J_0, J_1$  为第一类贝塞尔函数。

结合 Lamb 充液薄膜圆管管壁运动方程[方程(5-16)忽略流体粘性应力]，在长波假设下得传播系数公式：

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2(1 - \sigma^2)}{c_0^2(1 - F_{10})} \\ c_0^2 &= \frac{Eh}{2R\rho} \\ 1 - F_{10} &= 1 - \frac{2J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{i^{\frac{3}{2}}\alpha J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

这些结果和后来 Womersley 等人的结论很接近,但早了 30 多年。可惜, Witzig 的成果湮没了很久,直到 60 年代才为人们所知。

1954 年, Morgan 和 Kiely 从线化流动方程(5-32)(5-1)(5-3)及壁运动方程(5-16)出发,给出了  $\alpha \gg 1$  和  $\alpha \ll 1$  时的解析解。同时,假设血管周围组织只影响管壁的惯性,不影响血管弹性,引进参数  $H$ :

$$H = h \left( 1 + \frac{h_1 \rho_1 R_1}{h \rho_w R} \right) \quad (6-4)$$

$h_1$ 、 $\rho_1$ 、 $R_1$  为外周组织的厚度、密度、外半径。在方程(5-16)中,以  $\rho_w H \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$  代替  $\rho_w h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ ,从而计及周围组织的影响。Morgan 与 Kiely 的结果和 Womersley 的相似。

1955—1957 年, Womersley<sup>[30,31]</sup> 在生理上有意义的参数范围内,从线化流动方程、线化壁运动方程及线化边界条件出发,对流速分布、压力-流量关系、波传播特性等作了全面、系统分析,从此,血液动力学进入了一个新时期。

各种线化模型列于表 7-7。下面以 Womersley 理论为中心讨论线化理论。

## § 6-1 Womersley 理论

在流动方程线性化的基础上, Womersley 进一步假设:

(1) 血管可看作半无限长圆柱管,进口效应和末端反射

均可不计,流动是充分发展的轴对称层流。

(2) 与血管平衡半径相比,管壁很薄,可看作薄膜,只能受拉,不能承受弯曲。

(3) 与血管平衡半径相比,管壁径向位移很小。因此边界条件可线性化,壁运动方程中位移及其导数的高阶量及高阶导数亦可不计。

(4) 血管壁材料是各向同性、均匀线弹性体。

因而壁运动方程是线性的。

这样基本方程组为流体运动方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (6-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

壁运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= p - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left[ \frac{\sigma}{R} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{R^2} \right] \\ \rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

边界条件:

$$r = R \text{ 时, } u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (6-8)$$

$$x = 0 \text{ 时, } p(x, t) = f(t) \quad (6-9)$$

系统是线性的,可用傅里叶方法求解。因为心输出是周期性的,故  $p(0, t) = f(t)$  是周期函数,可展为傅里叶级数:

$$p(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t} \quad (6-10)$$

表 7-7 可膨胀管内脉冲

	流 体					运 动				
	粘 性	无 粘	不可 压缩	可 压缩	牛 顿	非 牛 顿	轴 对 称	非 轴 对 称	层 流	湍 流
Witzig (1914)	+		+		+		+		+	
Crandall (1927)	+		+		+		+		+	
Ibrall (1950)	+		+		+		+		+	
Morgan 和 Kiely (1954)	+		+		+		+		+	
Womersley (1955)	+		+		+		+		+	
Womersley (1957)	+		+		+		+		+	
Atabek 和 Chang	+		+		+		+		+	
Klip (1962)	+			+	+			+	+	
Jager (1965)	+		+		+		+		+	
Whilow 和 Rouleaw (1965)	+		+		+		+		+	
Atabek 和 Lew (1966)	+		+		+		+		+	
Anliker 和 Maxwell (1966)		+		+	+			+	+	
Barnard 等 (1966)	+		+		+		+		+	
Klip 等 (1967)	+		+		+		+		+	
Mirsky (1967)	+		+		+		+		+	
Atabek (1968)	+		+		+		+		+	
Cox (1968)	+		+		+		+		+	
Maxwell 和 Anliker (1968)		+		+	+		+		+	
Jones 等 (1968)	+		+		+		+		+	
Chou 和 Apter (1968)	+		+		+		+		+	
Cox (1969)	+		+		+		+		+	
Skalak (1966)	+		+		+		+		+	
Schwerdt 和 Constantinesco(1976)	+		+		+		+		+	
Flaud 等 (1974)	+		+		+		+		+	
Lou (1975)	+		+		+		+		+	
Thurston (1976)	+		+			+	+		+	





$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= n\omega = \frac{2\pi n}{T} \\ A_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-\frac{i n \pi t}{T}} dt \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

按(4-6b),得任意空间位置上的压力为:

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\omega_n \left(t - \frac{x}{c_n}\right)} \quad (6-12)$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{i\omega_n A_n}{c_n} \cdot e^{i\omega_n \left(t - \frac{x}{c_n}\right)} \quad (6-13)$$

对压力脉冲的每个分量求解  $u_n, v_n, \xi_n, \eta_n$ , 叠加即得所求解  $u, v, \xi, \eta$ 。下面分刚性管、自由弹性管、纵向受约束的弹性管三种情况详细讨论。

### 1. 刚性管

此时波速趋于无穷大, 无所谓波传播。一旦  $x=0$  处  $p(0, t)$  给定, 则沿管道压力处处已知, 即

$$p(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t}$$

现考察任一分量  $\omega_n$ , 为简便起见, 省去附标  $n$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} = A e^{i\omega t} \quad (6-14)$$

同时, 边界条件(6-8)变为:

$$r = R \text{ 时, } u = 0, v = 0 \quad (6-15)$$

$$\text{设 } \underline{u} = u_1(r) e^{i\omega t} \quad (6-16)$$

分离变量, (6-6a)变为

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_1}{dr} - \frac{i\omega}{v} u_1 = \frac{A}{\mu} \quad (6-17)$$

这是贝塞尔方程, 其解为

$$u_1 = \mathcal{C}_1 J_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} r \right) + \mathcal{C}_2 Y_0 \left( i^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot r \right) + \frac{A}{\mu}$$

$J_0$  为 0 阶第一类贝塞尔函数,  $Y_0$  为 0 阶第二类贝塞尔函数。

应用边界条件及对称性要求  $r = 0$  时  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ , 得:

$$u_1 = \frac{A}{i\omega\rho} \left[ 1 - \frac{J_0 \left( r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot i^{\frac{3}{2}} \right)}{J_0 \left( R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot i^{\frac{3}{2}} \right)} \right] \quad (6-18)$$

令  $y = \frac{r}{R}$ , 得

$$u(r, t) = \frac{AR^2}{i\mu\alpha^2} \left[ 1 - \frac{J_0(\alpha y i^{\frac{3}{2}})}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega t} \quad (6-19)$$

(6-19) 是复速度, 物理上有意义的是其实部。

$$\left. \begin{aligned} \text{若 } A e^{i\omega t} &= M e^{i(\omega t - \varphi)} \\ J_0(\alpha y i^{\frac{3}{2}}) &= M_0(\alpha y) e^{i\theta_0(\alpha y)} \\ J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}}) &= M_0(\alpha) e^{i\theta_0(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

真实的速度剖面为:

$$u(r, t) = \frac{MR^2}{\mu} \cdot \frac{M_0'(\alpha y)}{\alpha^2} \cdot \sin[\omega t - \varphi + \varepsilon_0(\alpha y)] \quad (6-21)$$

这里:

$$\begin{aligned} M_0'(\alpha y) &= \left\{ 1 + \left( \frac{M_0(\alpha y)}{M_0(\alpha)} \right)^2 - 2 \frac{M_0(\alpha y)}{M_0(\alpha)} \right. \\ &\quad \left. \times \cos[\theta_0(\alpha) - \theta_0(\alpha y)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \text{tg } \varepsilon_0(\alpha y) &= \frac{M_0(\alpha y)}{M_0(\alpha)} \cdot \sin[\theta_0(\alpha) - \theta_0(\alpha y)] \end{aligned}$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{M_0(\alpha y)}{M_0(\alpha)} \cos[\theta_0(\alpha) - \theta_0(\alpha y)] \right\}^{-1}$$

流量  $Q$  为

$$Q = \int_0^R 2\pi r \cdot u dr \quad (6-22)$$

应用(6-19)得复流量:

$$Q = \frac{\pi R^2 A}{i\omega\rho} [1 - F_{10}(\alpha)] \quad (6-23)$$

若

$$F_{10}(\alpha) = \frac{2J_1(\alpha i^{\frac{1}{2}})}{\alpha i^{\frac{1}{2}} J_0(\alpha i^{\frac{1}{2}})}$$

$$1 - F_{10} = M'_{10} e^{i\epsilon_{10}} \quad (6-24)$$

则真实流量为

$$Q = \frac{\pi R^4 M}{\mu} \cdot \frac{M'_{10}}{\alpha^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi + \epsilon_{10}) \quad (6-25)$$

函数  $[1 - F_{10}(\alpha)]$  的数表见参考文献[1]。

由(6-21)(6-25)可见:

(1) 流动相对于压力梯度相位迟后  $\epsilon_0(\alpha y)$ 。  $\alpha$  增大(频率增高或管径增大)时,  $\epsilon_0$  增大。这是因为  $\alpha \uparrow$  时, 流动惯性力增大, 故迟后增大。当  $\alpha \rightarrow 0$  时,  $\epsilon_0 \rightarrow 0$ 。同理,  $y \rightarrow 0$  时,  $\epsilon_0$  增大, 迟后增大。由图 7-13 可见, 同一  $\alpha$  值下, 管心速度剖面平坦, 且  $\alpha$  愈大, 越平坦。这说明同样条件下, 非定常流粘性影响区比定常流小得多。但壁面附近的速度梯度却比相应定常层流高得多, 因而脉冲流壁面摩阻远高于泊肃叶流。

(2) 定常层流流量与压力梯度呈线性关系, 脉动流则不然, 与相应泊肃叶流相比, 流量幅值差一修正因子  $\frac{M'_{10}(\alpha)}{\alpha^2}$ ,

相位迟后  $\epsilon_{10}(\alpha)$ 。图 7-14 是  $\frac{Q_{\max}}{Q_{\text{Pois}}} - \alpha$ ,  $\epsilon_{10}(\alpha) - \alpha$  曲线。可

见  $\alpha$  增大时,  $\frac{Q_{\max}}{Q_{\text{Pois}}}$  降低,  $\epsilon_{10}$  增大。  $\alpha$  愈小, 愈接近于定常流。

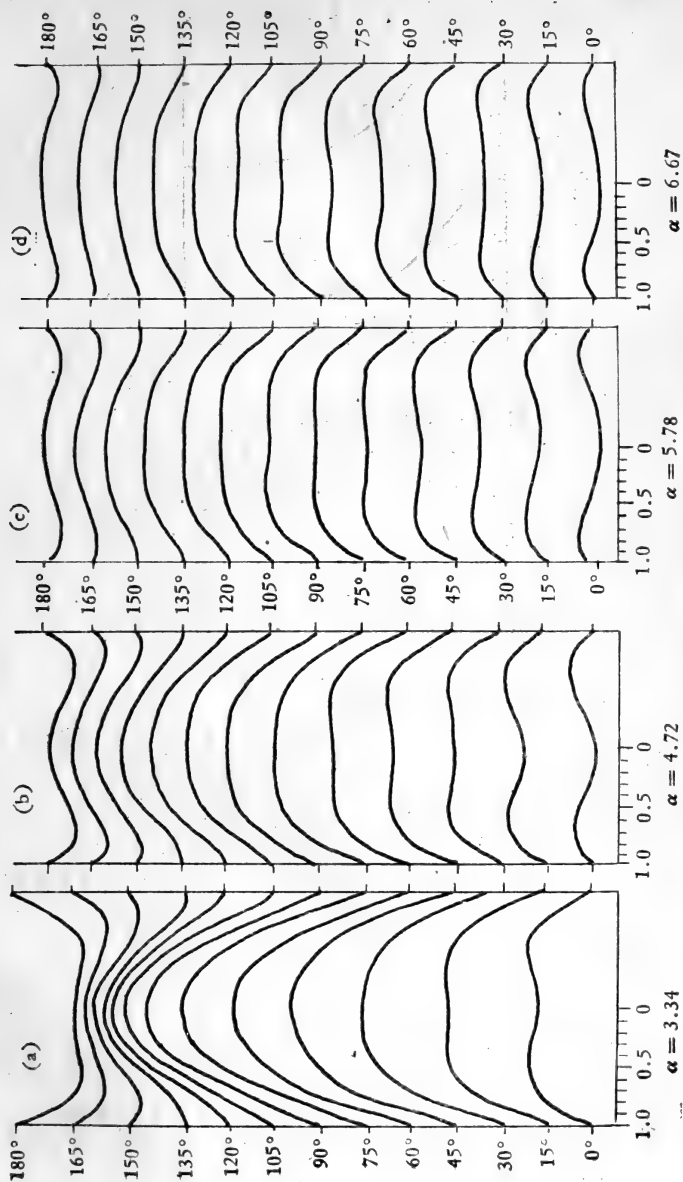


图 7-13 不同  $\alpha$  值时线性理论速度剖面

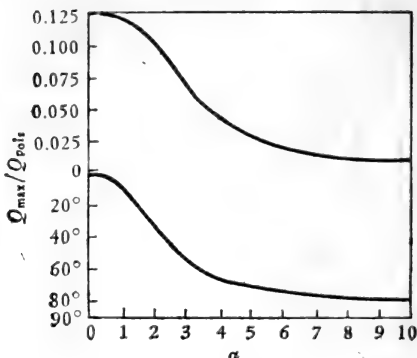


图 7-14  $\frac{Q_{\max}}{Q_{\text{pois}}}, \varepsilon_{10}$  随  $\alpha$  的变化<sup>[31]</sup>

## 2. 自由弹性管

按(6-13), 
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{i\omega A}{c} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{设 } u(x, r, t) &= u_1(r) e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \\ v(x, r, t) &= v_1(r) e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

将(6-26a)代入(6-6a)得贝塞尔方程

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_1}{dr} - \frac{i\omega}{v} u_1 = -\frac{i\omega A}{c\rho v} \quad (6-27)$$

应用对称条件:  $r = 0$  时,  $\frac{\partial u_\phi}{\partial r} = 0$ , 得

$$u_1(r) = \frac{A}{\rho c} + \mathcal{C} \frac{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}} y)}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})}$$

$$\therefore u(x, r, t) = \left[ \frac{A}{\rho c} + \mathcal{C} \frac{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}} y)}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \quad (6-28)$$

这里  $\mathcal{C}$  是待定系数, 由边界条件确定。

将(6-26)代入(6-5), 得

$$\frac{dv_1}{dr} + \frac{v_1}{r} = \frac{i\omega}{c} \cdot u_1 \quad (6-29)$$

应用(6-28)及对称条件:  $r = 0$  时,  $v = 0$  得:

$$v(x, r, t) = \frac{i\omega R}{2c} \left[ \frac{A}{\rho c} y + \mathcal{C} \frac{2J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha y)}{\alpha i^{\frac{3}{2}} J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \quad (6-30)$$

显然, 欲求出速度分布, 必须确定系数  $\mathcal{C}$  及复波速  $c$ 。这必须和壁运动方程(6-7)及边界条件(6-8)相结合。

$$\text{设: } \left. \begin{aligned} \xi &= B e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \\ \eta &= D e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \end{aligned} \right\} \quad (6-31)$$

代入(6-7)得

$$\left. \begin{aligned} A + \frac{i\omega\sigma Eh}{Rc(1-\sigma^2)} \cdot B + \left[ \rho_w h \omega^2 - \frac{Eh}{R^2(1-\sigma^2)} \right] D &= 0 \\ \left[ \rho_w h \omega^2 - \frac{\omega^2 Eh}{c(1-\sigma^2)} \right] B + \frac{\mu\alpha^2 i^3}{2R} \cdot F_{10} \mathcal{C} - \frac{i\omega\sigma}{Rc} \\ \times \frac{Eh}{1-\sigma^2} \cdot D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-32)$$

将(6-31)代入(6-8)得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho c} A - i\omega B + \mathcal{C} &= 0 \\ \frac{R}{2\rho c^2} A + \frac{R}{2c} F_{10} \mathcal{C} - D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-33)$$

由(6-32)(6-33)确定系数  $B$ 、 $\mathcal{C}$ 、 $D$  和  $A$  的关系。因为方程组是齐次的, 为保证有解,  $A$ 、 $B$ 、 $\mathcal{C}$ 、 $D$  的系数行列式必须为 0, 由此得频率方程:

$$4(1 - F_{10})\left(\frac{c_0}{c}\right)^4 + [F_{10}(4\sigma - 1) - 2K(1 - F_{10}) - 4] \\ \times \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 + (2K + F_{10})(1 - \sigma^2) = 0 \quad (6-34)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\rho_w h}{\rho R} \\ c_0 &= \sqrt{\frac{Eh}{2\rho R}} \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

解方程(6-34)可得两组复根, 分别相应于杨氏模式和 Lamb 模式。若

$$\frac{c_0}{c} = a - ib \quad (6-36)$$

则得波的相速度  $c_P$  及衰减因子  $d$

$$\left. \begin{aligned} c_P &= \frac{c_0}{a} \\ d &= \frac{b\omega}{c_0} \end{aligned} \right\} \quad (6-37)$$

每个波长上的相对衰减量为  $\exp\left[-2\pi\frac{b}{a}\right]$ 。

$c$  是频率的函数, 因而  $a$ 、 $b$  也是频率的函数。对不同的谐波分量(不同的  $n$  值,  $n = 1, 2, \dots$ )有不同的相速度  $c_P^{(n)}$  及衰减系数  $d_n$ 。

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_0}{c_n} &= a_n - ib_n \\ c_P^{(n)} &= \frac{c_0}{a_n} \\ d_n &= \frac{b_n \omega_n}{c_0}, \quad \omega_n = n\omega \end{aligned} \right\} \quad (6-38)$$



脉冲波传播速度为群速度  $c_g$ , 则

$$c_g = \frac{d\omega}{d\left(\frac{a\omega}{c_0}\right)} = \frac{c_0 d\omega}{ad\omega + \omega da} = \frac{c_0}{a + \omega a'(\omega)} \quad (6-39)$$

$$a'(\omega) = \frac{da}{d\omega}$$

若  $a$  与  $\omega$  无关, 则群速度等于相速度, 一般  $a$  是  $\omega$  的函数。

Womersley 仅对杨氏模式长波求解 ( $n=1$ ), 图 7-15 是

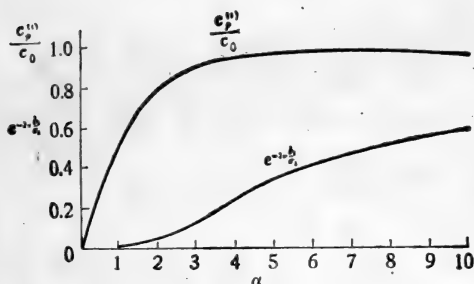


图 7-15 相速度及相对衰减量随  $\alpha$  的变化

计算的  $\frac{c_p^{(1)}}{c_0}$ , 及  $e^{-2\pi b/a_1}$  随  $\alpha$  的变化。可见  $\alpha > 3$  时,  $c_p^{(1)}$  接近于

$c_0$ , 而  $e^{-2\pi b/a_1}$  则随  $\alpha$  而增大。

由(6-32)(6-33)可求出  $\mathcal{C}$ 、 $B$ 、 $D$  与  $A$  的关系, 这里感兴趣的是  $\mathcal{C}$ , 有

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{A}{\rho c} \cdot \chi \\ \chi &= \frac{c^2(1-\sigma^2)}{c_0^2(F_{10}-2\sigma)} = \frac{1-2\sigma}{F_{10}-2\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (6-40)$$

这样速度分布(6-28)(6-30)变为:

$$\left. \begin{aligned} u(x, r, t) &= \frac{A}{\rho c} \left[ 1 + \chi \frac{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}} y)}{J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \\ v(x, r, t) &= \frac{i\omega R A}{2\rho c^2} \left[ y + \chi \frac{2J_1(\alpha i^{\frac{3}{2}} y)}{\alpha i^{\frac{3}{2}} J_0(\alpha i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega(t - \frac{x}{c})} \end{aligned} \right\} (6-41)$$

应用叠加原理, 可得一般脉冲流速度剖面:

$$\left. \begin{aligned} u(x, r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\rho c_n} \left[ 1 + \chi_n \frac{J_0(\alpha_n i^{\frac{3}{2}} y)}{J_0(\alpha_n i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega_n(t - \frac{x}{c_n})} \\ v(x, r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega_n R A_n}{2\rho c_n^2} \left[ y + \chi_n \frac{2J_1(\alpha_n i^{\frac{3}{2}} y)}{\alpha_n i^{\frac{3}{2}} J_0(\alpha_n i^{\frac{3}{2}})} \right] e^{i\omega_n(t - \frac{x}{c_n})} \end{aligned} \right\} (6-42)$$

$$\chi_n = \frac{c_n^2(1 - \sigma^2)}{c_0^2[F(\alpha_n) - 2\sigma]} - \frac{1 - 2\sigma}{F_{10}(\alpha_n) - 2\sigma}$$

按(6-22), (6-41a)可得压力-流量关系:

$$Q(x, t) = \frac{\pi R^2 A}{\rho c} [1 + \chi F_{10}(\alpha)] e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

平均速度  $U$  为: (6-43)

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{A}{\rho c} [1 + \chi F_{10}(\alpha)] e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

一般脉冲流:

$$\left. \begin{aligned} Q(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi R^2 A_n}{\rho c_n} [1 + \chi_n F_{10}(\alpha_n)] e^{i\omega_n(t - \frac{x}{c_n})} \\ U(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\rho c_n} [1 + \chi_n F_{10}(\alpha_n)] e^{i\omega_n(t - \frac{x}{c_n})} \end{aligned} \right\} (6-44)$$

要指出, (6-41)–(6-44)中, 有物理意义的是其实部。

Womersley 利用 McDonald 所作狗股动脉实验的结果, 根据测得压力梯度, 用上述理论算出了流量, 计算结果与实验结果相当接近(图 7-16)。

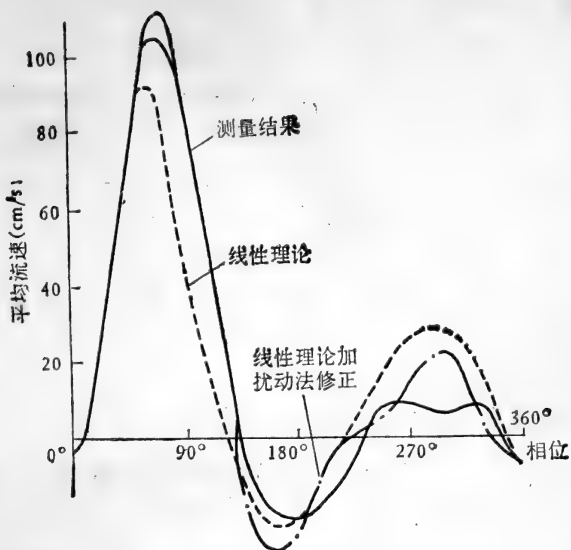


图 7-16 流量计算结果与实验比较 [313]

Ling 和 Atabek 将按 (6-42) 算出的管心 ( $y = 0$ ) 速度和测量结果作了比较, 见图 7-17, 结果表明理论值比测量值高 50% 左右。这说明用 Womersley 理论(或更广些, 线性理

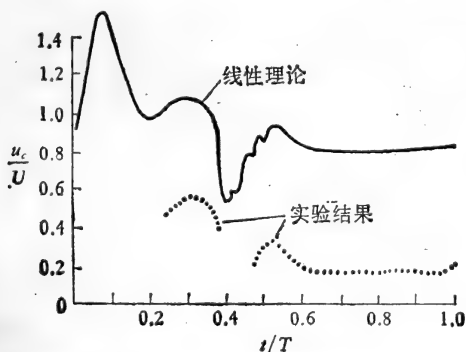


图 7-17 管心速度理论值与实验结果的比较 [28]

论)求速度分布是不合适的。

如果壁材料是粘弹体,只要是线性的,上述分析仍然有效。只消将方程(6-7)中的弹性模数  $E$  和泊松比  $\sigma$  改为相应的粘弹性模数  $E_c$  及  $\sigma_c$  即可,  $E_c(\omega)$ ,  $\sigma_c(\omega)$  是复变量。相应地  $c_0$  为:

$$c_0^2 = \frac{E_c h}{2\rho R} \quad (6-45)$$

$E_c(\omega)$ 、 $\sigma_c(\omega)$  的具体形式不限,可用任何一种线性粘弹体模型(参阅第四章)。

### 3. 纵向受约束的弹性管

动物体上血管总是受周围组织约束的,纵向几乎没有位移。为考虑约束的影响, Womersley 假设:

(1) 血管周围组织可看作附加质量,不改变管壁弹性。象 Morgan 和 Kiely 一样,设有效厚度为  $H$ :

$$H = h \left( 1 + \frac{h_1 \rho_1 R_1}{h \rho_w R} \right) \quad (6-4)$$

(2) 血管纵向位移受周围组织约束,这种约束可用周围组织的自然频率  $\Omega$  表征。

这样,壁运动方程(6-7)变为:

$$\rho_w H \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = p - \frac{E_c h}{1 - \sigma_c^2} \left[ \frac{\sigma_c}{R} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{R^2} \right] \quad (6-46a)$$

$$\begin{aligned} \rho_w H \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = & -\rho_w H \Omega^2 \xi - \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} + \frac{E_c h}{1 - \sigma_c^2} \\ & \times \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma_c}{R} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad (6-46b) \end{aligned}$$

(6-46)与流动方程、边界条件结合求解,所得结果和自由弹性管形式上一样,只需把  $K$  改为  $K'$  即可。

$$K' = \left(1 + \frac{\rho_1 h_1 R_1}{\rho_w h R}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \quad (6-47)$$

显然,组织约束并不直接影响流动,只影响波的传播,图 7-18 说明了约束的影响。当  $\omega$  接近于  $\Omega$  时,  $K' \rightarrow 0$ , 相当于自由弹性管; 当组织约束很强时,  $\Omega \gg \omega$ ,  $K' \rightarrow -\infty$ , 此时有:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= 1 \\ \frac{c}{c_0} &= \sqrt{\frac{1 - F_{10}(\alpha)}{1 - \sigma_c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6-48)$$

#### 4. 讨论

图 7-16 表明用 Womersley 理论处理中等动脉的压力-流量关系,可获良好近似。图 7-17 则说明, Womersley 理论不适用于用来分析速度剖面等流场细节问题。Klip 将柔性管实验测得的波传播特性和 Womersley 理论作了比较,结果表明:对于厚壁管,杨氏模式相速度及波衰减的理论值和测量结果相当接近;但薄壁管,理论和实验结果的差异却很大,衰减特性尤为显著。这个矛盾的原因不明。Klip 认为方程线性化是个根

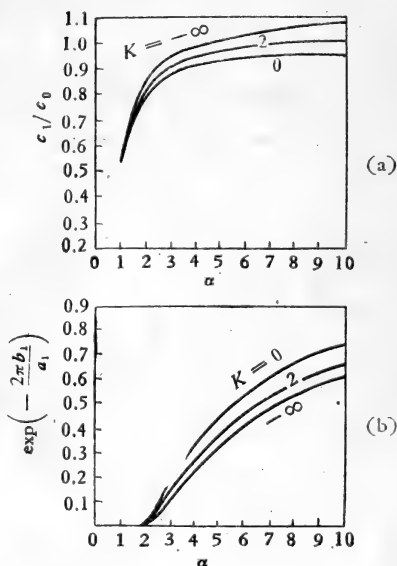


图 7-18 约束对脉冲波传播特性的影响<sup>[31]</sup>

- (a) 约束对波速的影响,  
(b) 约束对衰减系数的影响。

源。

Womersley 理论对动脉血流的适用性究竟如何,目前直接的、细致系统的实验验证还很不够。但可以用已有的生理观测结果对 Womersley 理论的基本假设作一些分析。流动非线性效应已在 §5 中作了论述,这里不予讨论。

(a) 模型假设流动是充分发展的轴对称层流,但 Schultz<sup>[32]</sup> 等的测量表明,主动脉血流在相当大一段距离上是发展中的层流,速度剖面(时均剖面)相当平坦。Lighthill<sup>[2]</sup> 认为若用边界层理论计及进口效应,线性理论可获改善,所得管心速度不会误差那样大。但 Lighthill 没有做具体的分析。

(b) 模型假设管壁与半径相比很薄。然而生理测量<sup>[21]</sup> 表明动脉的  $\frac{h}{R}$  在 0.1—0.25 之间,不能看作薄膜管。为此,

Klip<sup>[33]</sup>、Jager、Cox<sup>[34]</sup> 等提出了厚壁模型。

(c) 测量表明,主动脉壁位移可达平衡半径的 5—10%。Arndt 发现猫主动脉未暴露时,直径改变量可达平衡值的 10—20%,颈动脉达 14%。此时,小位移假设不成立,必须考虑壁面有限位移的非线性效应。

(d) 模型假设血管是无分支直圆管,实际上动脉血管有锥度且分支很多。分支对流动及波传播都有影响,尤其对后者,一般用传输线理论处理(见下节)。由于动脉树分支很快,用多孔锥管做动脉模型可能是有意义的。Skalak<sup>[35]</sup> 作过尝试,但漏失流量怎样分布才合理? 如何与实验比较等问题难于解决。近年来未见进展。

(e) 实际血管材料是各向异性、非均匀、非线性粘弹体,从心脏到末端愈来愈刚硬。粘弹性非均匀问题可用非均匀传输线理论处理; Schwerdt-Constantinesco<sup>[36]</sup> 用两个杨氏模量(周向和纵向)和两个泊松比来描述材料的各向异性。至于材料粘

弹性非线性问题则是线性模型无法解决的问题。

(f) 生理状态下血管总是在一定初始应力(相应于平衡态压力)下工作的。初始应力的存在必然影响壁内应力波的传播。Atabek 和 Lew、Anliker<sup>[37]</sup>、Flaud<sup>[38]</sup>、Schwerdt-Constantinesco 等分析了初始应力的作用, 所得结论定性地相互矛盾。

(g) 尽管当剪切率高于  $50\text{s}^{-1}$  时血液平衡应力-应变率关系是线性的。但振荡流动实验证明, 血液具有粘弹性。血液粘弹性对脉冲流动特性及脉冲波有什么影响呢? Thurston<sup>[39]</sup> 对此作了研究, 结论是对于主动脉等大动脉, 血液粘弹性影响甚微; 但对较小的血管, 如冠状动脉, 血液粘弹性对波速、衰减、输入阻抗等均有明显影响。

(h) Womersley 只分析了杨氏模式的长波, 实际血管流动中存在多种模式, 观测证明主动脉弓部有明显的摆振。Klip 分析了无约束粘弹性管内流体作脉冲运动时各种模式波的传播。

现存的线化模型不下二、三十种(见表 7-7), 由于影响因素太多, 测量精度不高, 很难作系统比较。Cox<sup>[40]</sup> 曾将 Womersley 等十多种模型在均一化条件下作了计算、比较。但由于均一化, 实际上成了薄壁模型和厚壁模型比较, 意义不大。

作者认为, 现有种种线化模型的意义, 主要在于它们说明了各种物理因素的影响, 而不在于孰优孰劣。因此, 下面介绍几种物理上有意义的线化模型, 供进一步探讨。

## § 6-2 厚壁管模型

考虑有限壁厚的影响, 壁运动用 Love 方程描述。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_w}{\mu^*} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\mu^* + \lambda^*}{\mu^*} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_w}{\mu^*} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\mu^* + \lambda^*}{\mu^*} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\ \Delta &= \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned} \right\} (6-49)$$

这里  $\mu^*$  和  $\lambda^*$  是材料的 Lamé 常数, 可用各种线性粘弹性模型。

边界条件为:

$r = 0$  时, 满足对称性要求

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0 \quad (6-50)$$

$r = Ri$  (内径) 时满足无滑流及应力连续条件。

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (6-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right\} &= \mu^* \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right\} \\ -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} &= 2\mu^* \frac{\partial \eta}{\partial r} + \lambda^* \Delta \end{aligned} \right\} (6-51)$$

$r = R_0$  (外径) 时, 应力连续:

$$\left. \begin{aligned} \mu^* \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \right\} &= 0 \\ 2\mu^* \frac{\partial \eta}{\partial r} + \lambda^* \Delta &= 0 \end{aligned} \right\} (6-52)$$

结合线化流动方程(5-13)\*, 求解得:

\* 基本方程组保留文献原貌, 实际上, 如 §5 指出, 有些量的保留是不合理的。



$$\left. \begin{aligned}
 u(x, r, t) &= - \sum_{n=0}^N i \{ A_1 \gamma_n J_0(i \gamma_n r) + A_2 \kappa_n J_0 \\
 &\quad \times (i \kappa_n r) \} e^{i(n\omega t - \gamma_n x)} \\
 v(x, r, t) &= - \sum_{n=0}^N i \gamma_n \{ A_1 J_1(i \gamma_n r) + \\
 &\quad A_2 J_1(i \kappa_n r) \} e^{i(n\omega t - \gamma_n x)} \\
 p(x, r, t) &= \sum_{n=0}^N A_3 J_0(i \gamma_n r) e^{i(n\omega t - \gamma_n x)}
 \end{aligned} \right\} (6-53)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta(x, r, t) &= - \sum_{n=0}^N i \gamma_n \{ A_4 J_1(k_n r) + B_4 Y_1(k_n r) \\
 &\quad + A_5 J_1(i \gamma_n r) + B_5 Y_1(i \gamma_n r) \} \\
 &\quad \times e^{i(n\omega t - \gamma_n x)} \\
 \xi(x, r, t) &= - \sum_{n=0}^N \{ k_n A_4 J_0(k_n r) + k_n B_4 Y_0(k_n r) \\
 &\quad + i \gamma_n A_5 J_0(i \gamma_n r) + i \gamma_n B_5 Y_0 \\
 &\quad \times (i \gamma_n r) \} e^{i(n\omega t - \gamma_n x)} \\
 \Delta(x, r, t) &= \sum_{n=0}^N \{ A_6 J_0(i \gamma_n r) + B_6 Y_0(i \gamma_n r) \} e^{i(n\omega t - \gamma_n x)}
 \end{aligned} \right\} (6-54)$$

这里  $N$  为模式的数目,  $\gamma_n$  为传播系数

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_n^2 &= \frac{i n \omega}{\nu} + \gamma_n^2, \quad k_n^2 = \frac{n^2 \omega^2 \rho_w}{\mu^*} - \gamma_n^2 \\
 A_1 &= \frac{i}{n \omega \rho} A_3, \quad A_6 = n^2 \omega^2 \rho_w A_5, \quad B_6 = n^2 \omega^2 \rho_w B_5
 \end{aligned} \right\} (6-55)$$

六个系数  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_4$ 、 $A_5$ 、 $B_4$ 、 $B_5$ , 由六个边界条件(6-8)(6-51)(6-52)确定。从系数  $A_1$ 、 $\dots$  等的定解条件可得频率方程, 解之即得传播系数  $\gamma_n$ , 从而得波速及衰减系数。通常只考虑杨氏模式。

Jager 假设管壁是线弹体,得:

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_0'^2(1 - F_{10})} \quad (6-56)$$

这里

$$c_0' = \sqrt{\frac{E(R_0^2 - R_i^2)}{3\rho R_0^2}}$$

Cox<sup>[30]</sup> 假设管壁材料粘弹性模型为:

$$\left. \begin{aligned} \mu^* &= \mu_0 \left[ \frac{1 + i\lambda_2\omega}{1 + i\lambda_1\omega} \right] \\ \lambda^* &= \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} \mu^* \end{aligned} \right\} \quad (6-57)$$

$\mu_0$ 、 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  为经验常数。数值计算结果及与其它理论的比较见图 7-19。

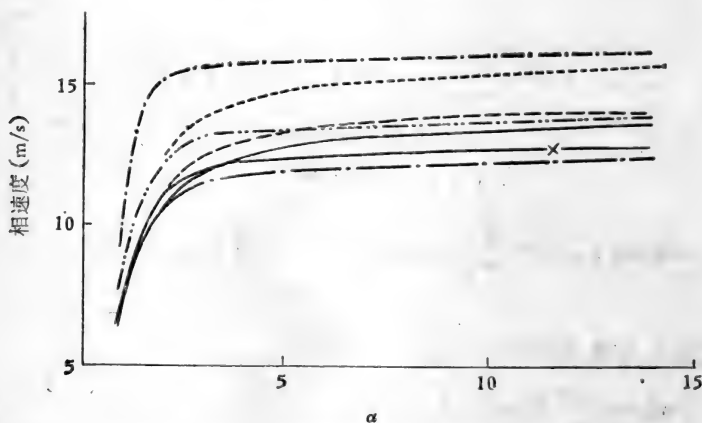


图 7-19 Cox 厚壁模型和其他线性模型比较<sup>[30]</sup>

图中——Cox, --Klip, -·-Mirsky, ×-Jager, ---Witzig,  
-·-·-Womersley, ····Iberall。

### § 6-3 波动模式

如 §3 所述, 流体在弹性管道内运动时, 压力扰动可能在

管壁内引起多种应力波。如果介质是理想的,管壁又很薄,则杨氏模式(管壁作径向振动)的传波速度由 Moens-Kortweg 公式给出:

$$c_0^2 = \frac{Eh}{2\rho R} \quad (6-3)$$

Lamb 模式(管壁作纵向振动)的传播速度为:

$$c_2^2 = \frac{E}{\rho_w(1-\sigma^2)} \quad (6-58)$$

扭转模式(管壁作周向振动)的传播速度为:

$$\left. \begin{aligned} c_3^2 &= \frac{G}{\rho_w} \\ G &\simeq \frac{E}{2(1+\sigma)} \end{aligned} \right\} \quad (6-59)$$

$$\therefore \left[ \frac{c_2}{c_0} \right]^2 = \frac{2\rho R}{\rho_w h(1-\sigma^2)}$$

$$\left( \frac{c_3}{c_0} \right)^2 = \frac{\rho R}{\rho_w h(1+\sigma)}$$

$$\left( \frac{c_2}{c_3} \right)^2 = \frac{2}{1-\sigma}$$

只要  $\rho$  与  $\rho_w$  相差不太大,总有  $c_2 > c_3 > c_0$ 。对血管来说,  $\rho \sim \rho_w$ ,  $\sigma \sim 0.5$ ,  $\frac{h}{R} \sim 0.1$ 。  $\therefore c_2 \sim 5c_0$ ,  $c_3 \sim 2.5c_0$ ,  $c_2 \sim 2c_3$ 。

Klip<sup>[33]</sup> 基于厚壁模型对各种波动模式作了详尽分析,假设壁材料是佛克脱体,运动是非对称的,但可线性化。壁运动方程为:

$$\rho_w \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = (2\mu' + \lambda') \nabla^2 \zeta - \mu' \nabla \times \nabla \times \zeta \quad (6-60)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu' &= \mu_e + \mu_v \frac{\partial}{\partial t}, & \mu_e &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \\ \lambda' &= \lambda_e + \lambda_v \frac{\partial}{\partial t}, & \lambda_e &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \end{aligned} \right\} \quad (6-61)$$

$\lambda_e, \mu_e$  为 Lamé 弹性常数,  $\lambda_v, \mu_v$  为相应的粘性常数。流动方程为:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 U \quad (6-62)$$

$$\nabla U = 0 \quad (6-63)$$

边界条件为(6-8)(6-51)(6-52)再加上周向速度、周向应力连续,共九个条件。

$$\left. \begin{aligned} v_j &= \varphi_j(r, \theta) e^{i\omega t + i\gamma x + i\beta\theta} \\ \zeta_j &= \psi_j(r, \theta) e^{i\omega t + i\gamma x + i\beta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6-64)$$

$\beta = 0, 1, 2, \dots$  表示剪切波存在。(6-64)包含九个复常数,由九个边界条件确定。根据解存在条件,得频率方程,它是一个九阶行列式,可对每个  $\beta$  值求解。

在长波假设下可得近似解。

杨氏模式:

$$\gamma_i^2 = \frac{\rho\omega^2}{(1+i\chi)E} \left( \frac{a}{g-2} - \frac{b}{a} \right) \quad (6-65)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} a &= (g-2) \frac{\rho_w}{\rho} + 2g(\kappa+1+\sigma) + \kappa(1-4\sigma) \\ b &= 2(1+\eta) \left( \kappa + \frac{\rho_w}{\rho} g \right) [1 + \kappa(1-\sigma)] \\ g &= \frac{(1-i)\alpha J_0[(1-i)\alpha]}{J_1[(1-i)\alpha]}, \quad \alpha = R_i \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\mu}} \\ \kappa &= \frac{2R_i/R_0}{R_0/R_i - R_i/R_0}, \quad \chi = \frac{\omega\mu_v}{\mu_e} \end{aligned} \right\} \quad (6-66)$$

Lamb 模式:

$$\gamma_{li}^2 = \frac{\rho\omega^2}{(1+i\chi)E} \left[ \frac{a}{b} - \frac{g-2}{a} \right]^{-1} \quad (6-67)$$

扭转波:

$$\gamma_{III}^2 = \frac{\rho_w \omega^2}{\mu_c(1+i\chi)} - \frac{4i\omega\mu R_i^2(g-2)}{\mu_c(1+i\chi)(R_0^4 - R_i^4)} \quad (6-68)$$

文献[33]给出了  $g(\alpha)$  数表。图 7-20 是指 Klip 理论算出的杨氏长波的相速度、衰减常数与测量结果(柔性管道)的比较。

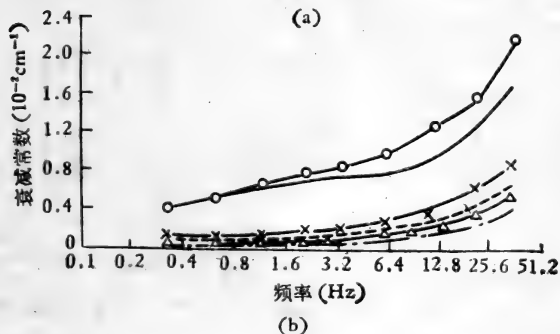
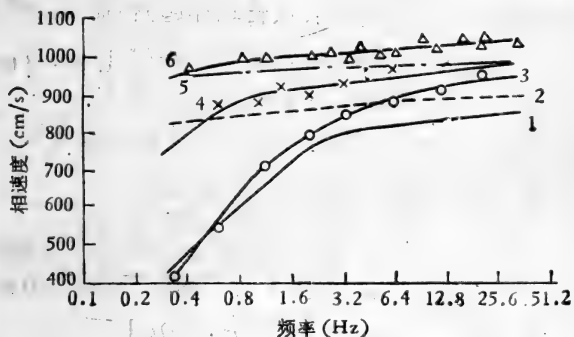


图 7-20 杨氏长波相速度及衰减常数,理论与实验结果的比较<sup>[33]</sup>

#### § 6-4 有限位移模型

最近 Lou<sup>[41,42]</sup> 从理论和实验两方面研究了壁面有限幅度位移的非线性效应。

假设:

- (1) 管壁材料是不可在缩线弹性体。
- (2) 壁运动是轴对称的。
- (3) 壁纵向因约束而不能移动,只有径向振动。
- (4) 长波,振动沿轴向按指数规律衰减。
- (5) 管壁很薄。

根据假设(1)、(2),设径向(从管轴算起)和轴向位移为:

$$\left. \begin{aligned} \eta'(r, x, t) &= r + a(r, x, t) \\ \xi'(r, x, t) &= x + b(r, x, t) \end{aligned} \right\} \quad (6-69)$$

则管壁运动服从 Knowel 方程(不考虑流体粘性应力)。

$$\left. \begin{aligned} &\left(1 + \frac{a}{r}\right) \left[ \left(1 + \frac{\partial b}{\partial x}\right) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial b}{\partial r} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] \\ &= \rho \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{E}{6} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a}{\partial r} - \frac{a}{r^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right) \\ &\left(1 + \frac{a}{r}\right) \left[ \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \left(1 + \frac{\partial a}{\partial r}\right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \\ &= \rho \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{E}{6} \left( \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \\ &\left(1 + \frac{a}{r}\right) \left[ \left(1 + \frac{\partial a}{\partial r}\right) \left(1 + \frac{\partial b}{\partial x}\right) - \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial r} \right] = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6-70)$$

根据假设(3)、(5),令瞬时内半径为  $\mathcal{R}(x, t)$ ,  $t = 0$  时  $\mathcal{R}(x, t) = R(x)$  为平衡内半径,平衡外径为  $R'(x)$ 。则在任一固定位置  $x$  上,由(6-70)可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + \left[ K - \frac{p}{\frac{1}{2} \rho R^2 \epsilon} \right] z - K z^{-3} &= 0 \\ z(0) &= z_0, \quad z'(0) = z'_0 \end{aligned} \right\} \quad (6-71)$$

这里  $K$  是物性参数,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \left( \frac{R'}{R} \right)^2 - 1 \\ z(t) &= \frac{R(t)}{R} \end{aligned} \right\} \quad (6-72)$$

心血管流动脉冲频率甚低,此时,上述方程的解主要取决于低频分量。若  $p$  有:

$$p = A e^{i\omega t} \quad (6-73)$$

则(6-71)的解为:

$$\begin{aligned} z(t) &= [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{1}{4}} \\ \bar{\alpha} &= \frac{6A}{E\epsilon} \end{aligned} \quad (6-74)$$

应用假设 4, 得

$$z(x, t) = [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{1}{4}} e^{-i\gamma x} \quad (6-75)$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \dot{z}(x, t) = \frac{i\bar{\alpha}\omega}{4} [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}} e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (6-76)$$

另一方面,按照线化流动方程(5-35)(5-1)及线化边界条件(5-3),设:

$$\left. \begin{aligned} u(x, r, t) &= u_1(r) \frac{i\bar{\alpha}\omega R}{4} [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}} e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ v(x, r, t) &= v_1(r) \frac{i\bar{\alpha}\omega R}{4} [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{5}{4}} e^{i(\omega t - \gamma x)} \\ p(x, t) &= A e^{i(\omega t - \gamma x)} \end{aligned} \right\} \quad (6-77)$$

分离变量,可得:

$$\left. \begin{aligned} u_1(y) &= \mathcal{C} \frac{J_0(\kappa y)}{J_0(\kappa)} - i \frac{B\gamma R}{\alpha^2 TD\mu} A \\ v_1(y) &= \frac{i\gamma R}{2} \left[ \mathcal{C} \frac{2J_1(\kappa y)}{\kappa J_0(\kappa)} - \frac{iB\gamma R}{\alpha^2 TD\mu} A \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-78)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned}
 y &= \kappa \frac{r}{R} \\
 \kappa &= i^{\frac{3}{2}} \sqrt{T} \cdot \alpha, \quad \alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \\
 T &= \frac{1 + \frac{1}{4} \bar{\alpha} e^{i\omega t}}{1 - \bar{\alpha} e^{-i\omega t}}, \quad D = \frac{\bar{\alpha} \omega}{4} \\
 B &= (1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t})^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \right\} (6-79)$$

因为  $r = R$  时,  $u = 0$ ,  $v = \frac{dz}{dt}$ 。

所以,  $y = 1$  时,  $u_1 = 0$ ,  $v_1 = 1$ ,

$$\therefore \mathcal{C} = \frac{iBR A}{\alpha^2 TD \mu} \gamma \quad (6-80)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{1}{2} [1 - F_{10}(\kappa)] \frac{BR^2}{\alpha^2 TD \mu} \cdot A \\
 F_{10}(\kappa) &= \frac{2J_1(\kappa)}{\kappa J_0(\kappa)}
 \end{aligned} \right\} (6-81)$$

由此得:

(1) 流动速度分布:

$$\left. \begin{aligned}
 u(r, x, t) &= \frac{\bar{\alpha} \omega B A R^2 \gamma}{4 \alpha^2 T D \mu} \left[ 1 - \frac{J_0(\kappa y)}{J_0(\kappa)} \right] [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{1}{2}} e^{i(\omega t - \gamma x)} \\
 v(x, r, t) &= \frac{i \bar{\alpha} \omega B R^3 A \gamma^2}{8 \alpha^2 T D \mu} \left[ 1 - \frac{2J_1(\kappa y)}{\kappa J_0(\kappa)} \right] [1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t}]^{-\frac{1}{2}} e^{i(\omega t - \gamma x)}
 \end{aligned} \right\} (6-82)$$

有物理意义的为其实部。

(2) 流量:

$$\begin{aligned}
 Q(x, t) &= \frac{\sqrt{3} \pi R^2}{\rho c_0} \cdot A \cdot \frac{\sqrt{1 - F_{10}(\kappa)}}{(1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t})^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{4} \bar{\alpha} e^{i\omega t} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad \times e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (6-83)
 \end{aligned}$$



真实流量为其实部。

(3) 波速及衰减:

由(6-81)直接可得复波速  $c$  ( $c = \frac{\omega}{\gamma}$ )

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 &= \frac{1}{3} [1 - F_{10}(\kappa)] \frac{B}{T} \\ \text{或: } \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 &= \frac{1}{3} \frac{(1 - \bar{\alpha} e^{i\omega t})^{\frac{9}{4}}}{1 + \frac{1}{4} \bar{\alpha} e^{i\omega t}} [1 - F_{10}(\kappa)] \end{aligned} \right\} (6-84)$$

图 7-21 是本理论计算相速度与实验相速度的比较。量值接近, 但理论值比实验值迟后了  $90^\circ$ , Lou 认为这是因为边界条件假设流速与壁运动速度匹配所致, 应该令流动与壁位移匹配。另外 Lou 理论证明, 随着波传播, 波形变陡, 这是壁面有限幅度位移的非线性效应所致。

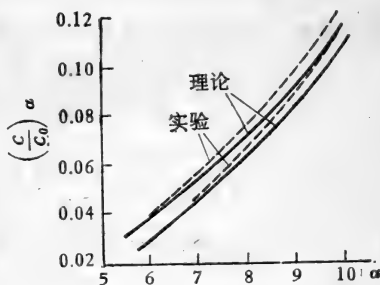


图 7-21 Lou 理论相速度与测量值的比较<sup>[42]</sup>

### § 6-5 初始应力的影响

Atabek 和 Lew、Atabek、Anliker、Schwerdt 和 Constantinesco 及 Flaud 等都分析过管壁初始应力对色散关系的影响, 一致认为初始应力的影响不容忽视, 但具体作用很不一致, 甚至定性相反。

Flaud 等作了较细致的理论和实验研究。假设管壁很薄且位移与平衡半径相比很小, 考虑周向和纵向初始应力  $\tau_{\theta^0}$  和  $\tau_{10}$  后, 壁运动方程为:

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = p - 2\mu \left[ \frac{\partial v}{\partial r} \right]_{r=R} - h\tau_{10} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{h}{R^2} \tau_{\theta 0} \eta - \frac{hE}{R(1-\sigma^2)} \left[ \frac{\eta}{R} + \sigma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \quad (6-85a)$$

$$\rho_w h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{r=R} + \frac{h}{R} (\tau_{10} - \tau_{\theta 0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{hE}{1-\sigma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma \frac{\eta}{R} \right] \quad (6-85b)$$

结合线化流动方程(5-25), 边界条件(6-8), 用分离变量法可求解。同样由(6-8)(6-85)可导出相应的频率方程:

$$\begin{aligned} F_{10}(i^{3/2}\delta) & \left[ \left(1 - \frac{K}{Y^2}\right) \left(\frac{K\alpha^4}{\chi} + \frac{2i\alpha^2}{\chi} - 1 + q_0^0 + \beta^2 q_i^0\right) \right. \\ & \left. + \left(\sigma - \frac{2i\alpha^2}{\chi} + \frac{1}{Y^2}\right) \times \left(q - \frac{2i\alpha^2}{\chi} + \frac{1}{Y^2}\right) \right] \\ & + F_{10}(\beta) F_{10}(i^{3/2}\delta) \left[ \frac{1}{2Y^2} \left(\frac{K\alpha^4}{\chi} + \frac{2i\alpha^2}{\chi} - 1 + q_0^0 + \beta q_i^0\right) \right. \\ & \left. - F(\beta) \left[ \left(q - \frac{2i\alpha^2}{\chi}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(1 - \frac{K}{Y^2}\right) \left(\frac{K\alpha^4}{\chi} + \frac{2i\alpha^2}{\chi} - 1 + q_0^0 + \beta q_i^0\right) \right] \right] \\ & - \frac{2}{Y^2} \left(1 - \frac{K}{Y^2}\right) = 0 \quad (6-86) \end{aligned}$$

这里  $\gamma$  为复波数,

$$\left. \begin{aligned} \beta &= i\gamma R, & \alpha &= R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \\ \delta^2 &= \alpha^2 + i\beta^2, & K &= \frac{\rho_w h}{\rho R} \\ q_0^0 &= \frac{\tau_{\theta 0}}{E} (1 - \sigma^2), & q_i^0 &= \frac{\tau_{10}}{E} (1 - \sigma^2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \chi &= \frac{2c_0^2 R^2}{v^2(1-\sigma^2)}, \quad c_0^2 = \frac{Eh}{2\rho R} \\
 F_{10}(z) &= \frac{2J_1(z)}{zJ(z)} \\
 q &= q_i^0 - q_\theta^0 + \sigma \\
 Y &= \frac{-i\sqrt{\chi}\beta}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{2}{1-\sigma^2}}, \quad \frac{c_0}{c_p} \left[ 1 + i\frac{k_2}{k_1} \right] \\
 \gamma &= k_1 - ik_2 \\
 c_p &= \frac{\omega}{k_1} \text{ 为相速度} \\
 TR &= \exp \left[ 2\pi \frac{k_2}{k_1} \right]
 \end{aligned} \right\} (6-87)$$

显然,  $Re[Y] \propto \frac{1}{c_p}$

$$\frac{Im[Y]}{Re[Y]} \propto \frac{k_2}{k_1} \propto \ln TR$$

由此可得脉冲波传播特性。

对于长波, (7-86) 简化为:

$$\begin{aligned}
 & [2K + F_{10}(ai^{\frac{3}{2}})] + \left\{ -K(1 - q_\theta^0)[1 - F_{10}(i^{\frac{3}{2}}\alpha)] \right. \\
 & \left. + F_{10}(ai^{\frac{3}{2}}) \left( 2\sigma + q_i^0 - \frac{1}{2}q_\theta^0 - \frac{1}{2} \right) - 2 \right\} Y^2 \\
 & + [1 - F_{10}(ai^{\frac{3}{2}})][1 - \sigma^2 - q_\theta^0 - \sigma(q_i^0 - q_\theta^0)] Y^4 = 0
 \end{aligned} \quad (6-88)$$

Flaud 等对长波作了数值计算, 给出杨氏模式 (I) 和 Lamb 模式 (II) 长波相速度及波幅衰减与初始应力  $q_i^0$ ,  $q_\theta^0$  的关系。结论是:  $q_\theta^0$  增大,  $C_I$  变小,  $C_{II}$  增大,  $TR_I$  减小,  $TR_{II}$  增大;  $q_i^0$  增大时  $C_I$  减小,  $C_{II}$  亦减小, 但  $TR_I$  增大,  $TR_{II}$  减小。图 7-22 是理论与实验结果的比较。鉴于这种比较的困难, 上述结果是难能可贵的。

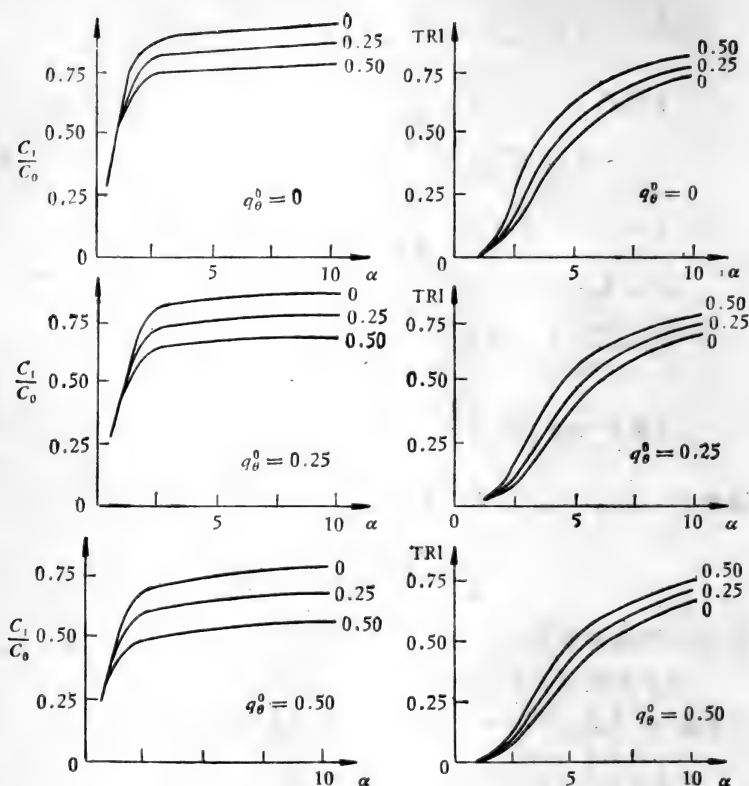


图 7-22 初始应力的影响,理论与实验比较<sup>[43]</sup>

但是,要指出,关于初始应力对脉冲波传播的影响,不同作者的结论差异相当大,甚至定性矛盾,见表 7-8。

## § 7 传输线理论

§ 6 所述理论方法均限于无分支、无限长、均匀直圆管,而实际血管长度有限,有许多分支,且几何形状及粘弹性质都是

表 7-8

		Mirsky (1968)		Atabek-Lew (1966)		Flaud et al (1974)		Anliker et al	
		$q_\theta^{0\uparrow}$	$q_i^{0\uparrow}$	$q_\theta^{0\uparrow}$	$q_i^{0\uparrow}$	$q_\theta^{0\uparrow}$	$q_i^{0\uparrow}$	$q_\theta^{0\uparrow}$	$q_i^{0\uparrow}$
模式 I	$\frac{c_1}{c_0}$	↘	↘	↘	↘	↘	↘	↗	↗
	$TR_I$	⊗	⊗	↘	↘	↘	↗	⊗	⊗
模式 II	$c_{II}/c_0$	⊗	⊗	↗	↗	↗	↘	↗	↗
	$TR_{II}$	⊗	⊗	↗	↗	↗	↘	⊗	⊗

不均匀的, 扰动在其间传播时, 必然引起复杂的反射。这时, 上节所述方法不适用。

另一方面, § 5 证明, 对血管系来说, 流动方程线化条件比一维化条件苛刻得多。若计及血管的可扩张性的影响, 就可以用一维理论来分析血管流动。而且, 生理上最重要的正是血流的压力-流量关系和波特性。

本节从一维流动方程出发, 阐述动脉血流传输线理论。这种方法的优点是: (i) 便于分析复杂的分支管系; (ii) 便于计及管系非均匀等因素的作用; (iii) 便于结合各种粘弹性模型; (iv) 便于用计算机模拟分析。

### § 7-1 一维运动方程及其线性化

血管半径远小于管长, 流动径向惯力与纵向惯力相比可以忽略不计。这样, 运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\sigma}{\partial r} [rv] = 0 \quad (7-2)$$

设血管因周围组织约束不能作纵向位移,边界条件变为:

$$r = \mathcal{R}(x, t): u = 0, v = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \quad (7-3)$$

应用边界条件及连续方程,有:

$$\int_0^{\mathcal{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 2\pi r dr = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\mathcal{R}} 2\pi r u dr - 2\pi \mathcal{R} [u]_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} v \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 2\pi r dr = 2\pi [vru]_0^{\mathcal{R}} - 2\pi \int_0^{\mathcal{R}} u \cdot \frac{\partial (vr)}{\partial r} dr$$

$$= \pi \int_0^{\mathcal{R}} r \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x} dr = \pi \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\mathcal{R}} (u^2 r) dr - \pi \mathcal{R} [u^2]_{\mathcal{R}}$$

$$\times \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = \pi \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\mathcal{R}} u^2 r dr$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} u \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 2\pi r dr = \pi \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\mathcal{R}} u^2 r dr$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot 2\pi r dr = -\frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, S = \pi \mathcal{R}^2 \text{ 为截面积}$$

$$\int_0^{\mathcal{R}} \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \cdot 2\pi r dr = 2\pi \mathcal{R} v \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\mathcal{R}} = \frac{2\pi \mathcal{R}}{\rho} \tau_w$$

$$\tau_w = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{\mathcal{R}} \text{ 为壁面剪应力}$$

故方程(7-1)沿管截面积分得:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\pi \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\mathcal{R}} u^2 r dr = -\frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} 2\pi \mathcal{R} \tau_w \quad (7-4)$$

方程(7-2)对截面积求积分,

$$\int_0^{\mathcal{R}} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 2\pi r dr = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\mathcal{R}} 2\pi r u dr - 2\pi \mathcal{R} [u]_{\mathcal{R}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int_0^a \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [rv] \cdot 2\pi r dr = 2\pi \mathcal{R}[v]_a$$

$$= 2\pi \mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

故连续方程变为:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7-5)$$

设

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{Q}{S} = \frac{2}{\mathcal{R}^2} \int_0^a ur dr \\ \tilde{U}^2 &= \frac{2\pi}{S} \int_0^a u^2 r dr \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

则(7-4)(7-5)可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(SU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S\tilde{U}^2) &= -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} 2\pi \mathcal{R} \tau_w \\ \frac{\partial(SU)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

由此可得广义 Bernoulli 能量方程:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ p + \frac{1}{2} \rho U^2 \right] + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\rho S(\tilde{U}^2 - U^2)] + \frac{2\pi \mathcal{R} \tau_w}{S} \quad (7-8)$$

若速度剖面均匀,则  $\tilde{U} = U$ , 此时(7-7)变为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\pi \mathcal{R} \tau_w}{\rho S} \quad (7-9)$$

若为泊肃叶流, 则  $\frac{\tilde{U}^2}{U^2} \approx 1.33$ 。一般脉冲流剖面比泊肃叶剖面平坦得多, 作为近似可设  $\tilde{U} \approx U$ 。这就是一维非线性理论的基础。

进而假设:

(1) 流动迁移项与非定常项相比可以忽略不计。

(2) 管截面积取决于当地瞬时压力。即：

$$S = S[p(x, t)] \quad (7-10)$$

$$(3) \quad \frac{2\pi R \tau_w}{S} = -F(x, t)Q \quad (7-11)$$

$F(x, t)$  是已知函数。

(4) 考虑到管路分支，设分支流量为  $Gp$ 。 $G$  是  $x, t$  的已知函数。

这样，方程(7-4)(7-5)变为：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} - FQ \quad (7-12)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\left(\frac{dS}{dp}\right) \frac{\partial p}{\partial t} - Gp \quad (7-13)$$

一般  $\frac{\rho}{S}$ ,  $\frac{dS}{dp}$ , 是  $p, x, t$  的函数,  $G, F$  是  $x, t$  的函数。方程仍然是非线性的。但若将整个管路分为若干小段, 每个管段上  $\frac{\rho}{S}$ ,  $\frac{dS}{dp}$ ,  $F, G$  等均可看作与  $x, t$  无关, 方程(7-12)(7-13)就变成线性的了。这就是所谓集中参数法。

方程(7-12)(7-13)和电流传输方程形式一样,  $p$  相当于电压,  $Q$  相当于电流,  $\frac{\rho}{S}$  (单位截面上流体的惯性) 相当于电感,  $F$  相当于电阻,  $\frac{dS}{dp}$  (管截面的扩张能力) 相当于电容,  $G$  相当于旁路导纳。因而有限长管及管系中的脉动流问题, 可用电学中的传输线理论处理。

## § 7-2 有限长度弹性管内的理想流动

设管壁材料是均匀的完全弹性体, 流体是无粘的, 无漏



失。此时流动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\rho}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{dS}{dp} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7-14)$$

设: 
$$c^2 = \frac{S dp}{\rho dS} \quad (7-15)$$

$$Y_0 = \frac{S}{\rho c} = \frac{1}{Z_0} \quad (7-16)$$

则(7-14)变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= -c Y_0 \frac{\partial p}{\partial x} = -c Z_0^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -c Y_0^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x} = -c Z_0 \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

按线性理论,  $c, Y_0(Z_0)$  与  $x, t$  无关。由(6-17)得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

其通解为:

$$p(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (7-19a)$$

代入(7-17)得:

$$Q(x, t) = \frac{1}{Z_0} \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] \quad (7-19b)$$

$f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  表示  $x$  正方向上的行波,  $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$  是  $x$  负方向上的波,  $f, g$  的具体形式由初始条件确定。

若无反射, 只有沿一个方向前进的波  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ , 则管任

一截面上压力-流量之比为:

$$Z_0 = \frac{p(x,t)}{Q(x,t)} = \frac{1}{Y_0} = \frac{\rho c}{S} \quad (7-20)$$

$Z_0$  称为特征阻抗,  $Y_0$  为特征导纳。它们与  $x$ ,  $t$  无关, 但随频率变化。

可见, 若不存在反射波, 流量-压力关系和波特性完全可以用波速  $c$  和特征阻抗  $Z_0$  (或导纳  $Y_0$ ) 来描述。但实际上反射波是必然存在的, 下面讨论波反射的特性。

### 1. 阻抗突变引起的反射

考察管路导纳突变时简单波的反射。如图 7-23 所示,  $x = 0$  处, 阻抗发生突变,  $x < 0$  处为  $Z_{01}$ ,  $x > 0$  处为  $Z_{02}$ , 管 2<sup>#</sup> 无终端反射。



图 7-23 阻抗突变引起的波反射

$$x < 0: \quad p_1 = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$Q_1 = Z_{01}^{-1} \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

$$x > 0: \quad p_2 = h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$Q_2 = Z_{02}^{-1} h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$x = 0$  处压力连续变化,  $p_1 = p_2$

$$\therefore f(t) + g(t) = h(t) \quad (7-21a)$$

$x = 0$  处流量连续变化,  $Q_1 = Q_2$ ,

$$\therefore \frac{1}{Z_{01}} [f(t) - g(t)] = \frac{1}{Z_{02}} h(t) \quad (7-21b)$$

$$\therefore Z_{02} \frac{f(t) - g(t)}{f(t) + g(t)} = Z_{01} \quad (7-22)$$

(7-22)左端就是管 1# 在  $x = 0$  处的有效阻抗  $Z_0^{eff}$ 。

按照(7-22),  $x = 0$  处反射压力波与入射压力波之比为:

$$\Gamma = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{Y_{01} - Y_{02}}{Y_{01} + Y_{02}} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \quad (7-23)$$

$\Gamma$  为压力波反射系数。流量波反射系数为  $\Gamma'$ ,

$$\Gamma' = -\Gamma \quad (7-24)$$

若  $Z_{02} > Z_{01}$ , 则  $\Gamma > 0$  ( $\Gamma' < 0$ )。即压力波发生正反射, 流量波发生负反射。  $Y_{02} = 0$  (即  $Z_{02} \rightarrow \infty$ ) 时  $g(t) = f(t)$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\Gamma' = -1$ , 压力波在  $x = 0$  处完全反射。若  $Z_{02} < Z_{01}$ , 则  $\Gamma < 0$ ,  $\Gamma' > 0$ , 压力波发生负反射, 流量波发生正反射。  $Y_{02} \rightarrow \infty$  ( $Z_{02} = 0$ ) 时,  $\Gamma = -1$ ,  $\Gamma' = 1$ 。

同样按(7-21), 通过  $x = 0$  透射波与入射波之比为:

$$T_r = \frac{h(t)}{f(t)} = \frac{2Y_{01}}{Y_{01} + Y_{02}} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \quad (7-25)$$

$T_r$  称为透射系数。显然

$$T_r = 1 + \Gamma \quad (7-26)$$

脉冲波传播的能流为  $\varepsilon$ , 有

$$\varepsilon = U \cdot pS = Q \cdot p = Y_0 p^2 = \frac{p^2}{Z_0} \quad (7-27)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \text{入射波能流为: } \varepsilon_i &= f^2 \left( t - \frac{x}{c} \right) \frac{1}{Z_{01}} \\ \text{反射波能流为: } \varepsilon_r &= g^2 \left( t + \frac{x}{c} \right) \frac{1}{Z_{01}} \\ \text{透射波能流为: } \varepsilon_t &= h^2 \left( t - \frac{x}{c} \right) \frac{1}{Z_{02}} \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

在  $x = 0$  处, 能量守恒,  $\varepsilon_i = \varepsilon_r + \varepsilon_t$ ,

$$\therefore \frac{1}{Z_{01}} f^2(t) = \frac{1}{Z_{01}} g^2(t) + \frac{1}{Z_{02}} h^2(t) \quad (7-29)$$

应用压力连续性条件, 由(7-29)可得(7-22)。显然,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} &= \left[ \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \right]^2 = \Gamma^2 \\ \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_i} &= \frac{4Z_{01}Z_{02}}{(Z_{02} + Z_{01})^2} = 1 - \Gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (7-30)$$

若  $Z_{02} \neq Z_{01}$  但二者相差无几, 则

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} \simeq 4 \left( 1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \right)^2 \quad (7-31)$$

为高阶小量。例如  $\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = 0.95$  时,  $\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} \sim 6 \times 10^{-4}$ 。即: 导

纳变化很小的一系列接头, 每个接头反射的能量极小, 脉冲波近乎输送一不变的能量。这个概念对于分析导纳渐变的管流十分有用。

若  $Z_{02} \gg Z_{01}$  则

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_r} \simeq \frac{4Z_{01}}{Z_{02}} \ll 1 \quad (7-32)$$

即透过接头传输过去的能流很小。但是, 按(7-22a)透射波的幅度依然很高,  $\frac{h}{f} \simeq 2$ 。

## 2. 阻抗渐变时波形的畸变

不考虑能量的粘性损失, 管道弹性或截面积的缓慢变化也会使波形发生畸变, 这种畸变仍可用前述方法处理。

阻抗渐变的管道可看作由一系列阻抗作小幅度防跃的均

匀管构成，行波以逐‘管’变化的波速  $c$  传播，波幅亦逐管变化。设  $\frac{Z_{0i-1} - Z_{0i}}{Z_{0i}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ ，则按(7-31)，反射能与入射能之比  $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ，故  $n$  个接头反射能量  $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2} \cdot n\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ ， $n \rightarrow \infty$  时，反射能趋于 0，即在导纳渐变的管路中，脉冲波波形虽然发生畸变，但没有耗散。故在  $x$  正方向上：

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_0(x)} p^2(x, t) &= \frac{1}{Z_0(0)} f^2\left(t - \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \\ \therefore p &= \left[\frac{Z_0(x)}{Z_0(0)}\right]^{\frac{1}{2}} f\left(t - \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \\ Q &= \frac{1}{Z_0(x)} p = [Z_0(x)Z_0(0)]^{-\frac{1}{2}} f\left(t - \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \end{aligned} \quad (7-33)$$

在  $x$  负方向上：

$$\begin{aligned} p &= \left[\frac{Z_0(x)}{Z_0(0)}\right]^{\frac{1}{2}} g\left(t + \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \\ Q &= \frac{-1}{Z_0(x)} p = -[Z_0(x)Z_0(0)]^{-\frac{1}{2}} g\left(t + \int_0^x \frac{dx}{c}\right) \end{aligned} \quad (7-34)$$

可见，当波传入高阻抗区时，压力波幅增高，而流量波幅减小；当波传入低阻抗区时，压力波幅减小，流量波幅增大。

对于频率为  $\omega$  的振荡流，上述近似分析的适用条件是：

在距离  $\frac{c}{\omega}$  ( $\approx$  波长) 上， $\frac{\Delta Y_0}{Y_0}$ ， $\frac{\Delta c}{c}$ ， $\Delta\left(\frac{dY_0}{dx}\right) \setminus \frac{dY_0}{dx}$  均为小量。

### 3. 有限长度管内流动的压力-流量变化

管长有限对管内流动的影响和管路阻抗突变的作用没有本质差别,可看作后者的特例。

考察有限长管内的流动。管长为 $l$ ,终端反射系数为 $\Gamma_l$ ,

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \quad (7-23')$$

始端反射系数为 $\Gamma_0$ 。由于不计流体及壁材料的粘性,且管弹性及几何形状都是均匀的,故入射波、反射波均不衰减。因而,据(7-19)可得

$$\left. \begin{aligned} p(x, t) &= f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \Gamma_l f\left(t - \frac{2l - x}{c}\right) + \Gamma_l \Gamma_0 f \\ &\quad \times \left(t - \frac{2l + x}{c}\right) + \dots + \Gamma_l^n \Gamma_0^{n-1} f\left(t - \frac{2nl - x}{c}\right) \\ &\quad + \Gamma_l^n \Gamma_0^n f\left(t - \frac{2nl + x}{c}\right) \\ Q(x, t) &= \frac{1}{Z_0} \left[ f\left(t - \frac{x}{c}\right) - \Gamma_l f\left(t - \frac{2l - x}{c}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_l \Gamma_0 f\left(t - \frac{2l + x}{c}\right) - \dots - \Gamma_0^{n-1} \Gamma_l^n f \right. \\ &\quad \left. \times \left(t - \frac{2nl - x}{c}\right) + \Gamma_0^n \Gamma_l^n f\left(t - \frac{2nl + x}{c}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7-35)$$

$f(t)$  决定于输入压力波形,若

$$p(x, t) = p_0 e^{i\omega t} \quad (7-36)$$

并设传播系数为:

$$\gamma = \frac{i\omega}{c} \quad (7-37)$$

若只计一次反射,则由(7-35)可得:

$$\left. \begin{aligned} p(x,t) &= p_0 e^{i\omega t - \gamma x} [1 + \Gamma_l e^{-2\gamma(l-x)}] \\ Q(x,t) &= \frac{p_0}{Z_0} \cdot \frac{1 - \Gamma_l e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \Gamma_l e^{-2\gamma(l-x)}} \cdot e^{i\omega t - \gamma x} \end{aligned} \right\} \quad (7-38)$$

这样管内任一截面上的流动阻抗为

$$\left. \begin{aligned} Z(x) &= \frac{p(x,t)}{Q(x,t)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} \\ \Gamma(x) &= \Gamma_l e^{-2\gamma(l-x)} \end{aligned} \right\} \quad (7-39)$$

当  $x = 0$  时, 即得输入阻抗  $Z_i$ ,

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \Gamma_l e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_l e^{-2\gamma l}} \quad (7-40)$$

主动脉输入阻抗是评价动脉系统血管功能的一个重要参数。

#### 4. 边界层修正

血液是有粘性的, 但主动脉流动的  $\alpha$  数相当高, 故可以认为粘性效应仅限于管壁附近一薄层-边界层内。Lighthill<sup>[2]</sup> 从理想流动出发, 用边界层理论作了粘性修正。

设  $p(x,t) \propto e^{i\omega t}$ , 则相应的 Stokes 层的速度分布为:

$$u = \frac{1}{i\omega\rho} \left[ 1 - \exp\left(-z\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}\right) \right] \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (7-41)$$

$z$  是离壁面的距离。

$$\therefore \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \sqrt{\frac{\nu}{i\omega}} \quad (7-42)$$

这样, 运动方程(7-17)变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\epsilon Z_0^{-1} c_0 \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -c_0 Z_0 \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (7-43)$$

这里

$$\epsilon = 1 - \frac{2}{\alpha\sqrt{i}}$$

$\tau_0$  是理想状态波速, 由 Moen-Korteweg 公式给出。

令  $\tilde{c} = \sqrt{\sigma} c_0$ ,  $\tilde{Z}^{-1} = \sqrt{\sigma} Z_0^{-1}$ , (7-43) 变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\tilde{Z}^{-1} \tilde{c} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\tilde{c} \tilde{Z} \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (7-44)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \tilde{c}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= \tilde{c}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-45)$$

因为流体粘性作用是持续的, 故它引起的导纳变化是缓慢的渐变, 应用(7-33)(7-34)得前进波:

$$\left. \begin{aligned} p(x, t) &= \left[ \frac{Z_0(x)}{Z_0(0)} \right]^{\frac{1}{2}} f \left( t - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma} c_0} \right) \\ Q(x, t) &= \sqrt{\sigma} [Z_0(x) Z_0(0)]^{-\frac{1}{2}} f \left( t - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma} c_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-46)$$

反射波:

$$\left. \begin{aligned} p(x, t) &= \left[ \frac{Z_0(x)}{Z_0(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot g \left( t + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma} c_0} \right) \\ Q(x, t) &= -\sqrt{\sigma} [Z_0(x) Z_0(0)]^{-\frac{1}{2}} g \left( t + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\sigma} c_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-47)$$

对于振荡流, 有:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 \exp \left[ i\omega t - i\omega \int_0^x \left( 1 + \frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \right) \frac{dx}{c_0} \right. \\ &\quad \left. - \omega \int_0^x \frac{dx}{c_0 \alpha \sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (7-48)$$

(7-48)中第二项意味着有效惯性增大引起的相速度减小, 第



三项意味着粘性作用引起的波幅衰减。可见,由于粘性作用,基波相速度减小得最多,高阶波相速度减小得较少。相反,基波的粘性衰减最小,谐波阶数愈高,粘性衰减率愈高。

### § 7-3 有限长度弹性管内的粘性流动

离心脏较远的大动脉、主动脉中,流动  $\alpha$  数不高,粘性效应不能用上述边界层理论估计。另一方面壁材料粘弹性、血液粘弹性等因素的作用,亦需考虑。

为此,重新考察理想流动方程(7-14),对  $t$  作傅里叶变换

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) e^{i\omega t} dt \\ \hat{Q}(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, t) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \right\} \quad (7-49)$$

则(7-14)变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= -i\omega \frac{\rho}{S} \hat{Q} \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} &= -i\omega \frac{dS}{dp} \hat{p} \end{aligned} \right\} \quad (7-50)$$

引进纵向阻抗  $Z_l$  和横向阻抗  $Z_t$ , 这里

$$\left. \begin{aligned} Z_l &= i\omega \frac{\rho}{S} \\ Z_t &= \left[ i\omega \frac{dS}{dp} \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7-51)$$

则方程(7-50)可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= -Z_l \hat{Q} \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} &= -\frac{1}{Z_t} \hat{p} \end{aligned} \right\} \quad (7-52)$$

管壁材料及流体物性对流动的影响集中体现于参数  $Z_l$ 、 $Z_t$  上,故可以设想,方程(7-52)亦可应用于一般情况,只是

$Z_1, Z_2$ 不再由(7-51)给出,其具体形式,视所用物理模型而异。

由(7-52)得傅里叶域中的波动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} - \frac{Z_1}{Z_2} \hat{p} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{Q}}{\partial x^2} - \frac{Z_1}{Z_2} \hat{Q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-53)$$

其特征值为:

$$\gamma = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (7-54)$$

故其通解为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}(x, \omega) &= A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \\ \hat{Q}(x, \omega) &= \sqrt{Z_1 Z_2} [A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}] \end{aligned} \right\} \quad (7-55)$$

$A_1, A_2$ 由边界条件确定。

若无反射波,即  $A_2 = 0$ ,则

$$\frac{\hat{p}}{\hat{Q}} = \sqrt{Z_1 Z_2}$$

故特征阻抗  $Z_0$  为:

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (7-56)$$

对任意有限长度可变形管,若已知进口条件  $p(0, t) = p_1(t)$   $Q(0, t) = Q_1(t)$  (从而可知  $\hat{p}_1, \hat{Q}_1$ ),则由(7-55)得:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}(x, \omega) \\ \hat{Q}(x, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma x - Z_0 \operatorname{sh} \gamma x \\ -\frac{1}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma x \operatorname{ch} \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (7-57)$$

由此,作反变换即可得所求的压力、流量

$$\left. \begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ Q(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (7-58)$$

这样,问题归结为如何确定  $Z_t$ 、 $Z_{t0}$ 。

### 1. 横向阻抗

由方程(7-13)可知,若设  $S = S[p(x, t)]$ , 那么

$$Z_t = \left[ i\omega \frac{dS}{dp} + G \right]^{-1} = [C_w + G]^{-1} \quad (7-59)$$

$C_w$  因具体模型而不同,常用的有两种。

#### (1) 薄壁粘弹性管

$$\begin{aligned} \therefore E_c &= \frac{dp}{dR} \cdot \frac{R^2(1-\sigma^2)}{h} \\ \therefore C_w &= \frac{2\pi R^3 i\omega(1-\sigma^2)}{E_c h} \end{aligned} \quad (7-60)$$

这里  $R$  是平衡状态半径,  $E_c$  是增量化粘弹性系数,可取第三章 § 6 所述的任一模型。

#### (2) 厚壁粘弹性管

此时

$$E_c = \frac{dp}{d(R+h)} (R+h) \frac{2R^2(1-\sigma^2)}{(2R+h)h}$$

设材料不可压缩,故  $\sigma = \frac{1}{2}$ , 则

$$\left. \begin{aligned} C_w &= i\omega \frac{3\pi R^2 a(a+1)}{E_c(2a+1)} \\ a &= \frac{R}{h} \end{aligned} \right\} \quad (7-61)$$

这里

### 2. 纵向阻抗

纵向阻抗取决于流动特性,一般不考虑血液的粘弹性,而且把流动看作充分发展了的层流,发展中的流动可按 § 7-2

(四)所述方法处理。

最简单的方法是假设(7-11)成立,则由(7-12)可得:

$$Z_l = i\omega \frac{\rho}{S} + F \quad (7-62)$$

进而,设  $F$  由泊肃叶律给出,则

$$Z_l = \frac{8\mu}{\pi R^2} + i\omega \frac{\rho}{\pi R^2} \quad (7-63)$$

脉冲流速度剖面 and 泊肃叶剖面很不一样,壁面附近差异尤为显著,因而用泊肃叶律计算摩阻不合适。

若不考虑壁弹性对流动摩阻的影响,应用 Womersley 刚性管振荡流的解,可得:

$$Z_l = \frac{i\omega\rho}{\pi R^4} \frac{1}{1 - F_{10}(\alpha)} \quad (7-64)$$

若计及壁弹性变形的影响,则由 Womersley 解得:

$$Z_l = \frac{i\omega\rho}{\pi R^2} \frac{1}{1 + \chi F_{10}(\alpha)} \quad (7-65)$$

Thurston 证明,对较小的支动脉血流来说,必须考虑血液本身的粘弹性效应。设血液粘弹性系数为  $\tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} = \mu' - i\mu'' = \mu e^{-i\phi} \quad (7-66)$$

据 Thurston 测量,当频率在 0.03—50Hz 范围内时,  $\mu' = 100\text{cP}$ ,  $\mu'' = 50\text{cP}$ 。此时,

$$\left. \begin{aligned} Z_l &= \frac{i\rho\omega}{\pi R^2} \left[ 1 - \frac{2}{KR} \frac{J_1(KR)}{J_0(KR)} \right]^{-1} \\ K &= -\frac{i\omega\rho}{\tilde{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (7-67)$$

当  $\alpha = R\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} < 2$  时,

$$Z_l \simeq \frac{8\mu'}{\pi R^4} + i \left[ \frac{4\rho\omega}{3\pi R^2} - \frac{8\mu''}{\pi R^4} \right] \quad (7-68a)$$

当  $\alpha > 20$  时,

$$Z_1 \simeq \frac{\sqrt{2\rho\omega}}{\pi R^2} \sqrt{\mu' + \mu''} + \frac{i\omega\rho}{\pi R^2} \quad (7-68b)$$

#### § 7-4 传输线理论应用于管系

电传输线理论基于基尔霍夫定理：节点上电位连续变化，流进节点的总电流等于流出节点的总电流。将传输线理论应用于管系流动要求：(i) 接头处压力连续变化；(ii) 流进接头的流量等于流出接头的流量。什么条件下能满足这两个条件呢？需估计一下这两个假设引起的误差。

压力连续性假设的误差估计如下。

$$\therefore \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \therefore \frac{\partial p}{\partial x} \sim \rho\omega U$$

$$\text{按(7-19), } U \sim \frac{p}{\rho c_0}, \therefore \Delta p \sim \frac{b\omega}{c_0} \cdot p$$

$$\therefore \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{b\omega}{c_0}, \quad b \text{ 为接头线尺度。}$$

接头处流入流量与流出流量间的不平衡应等于接头区管腔体积的变化率  $\delta V$

$$\delta V = b \cdot \frac{dS}{dt} = b \cdot \frac{dS}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \sim \rho\omega U c_0, \quad \frac{dS}{dp} = \frac{S}{\rho c_0^2}$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} \sim \rho\omega U c_0 \frac{S}{\rho c_0^2} = \frac{\omega}{c_0} S U$$

$$\therefore \frac{\Delta Q}{Q} \sim \frac{\omega b}{c_0}$$

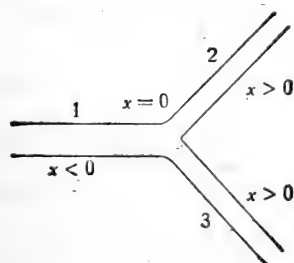
因此满足条件 (i) (ii) 的前提为：

$$\frac{\omega b}{c_0} \ll 1 \text{ 即 } b \ll \frac{c_0}{\omega}$$

心血管系统  $c_0 \sim 10\text{m/s}$ ,  $\omega \sim 10\text{s}^{-1}$ ,  $\therefore \frac{c_0}{\omega} \sim 1\text{m}$ 。心血管系统中接头尺寸远小于此, 一般为  $10^{-2}\text{m}$ , 故传输线理论适用。

### 1. 单接头处的传播

心血管常见分支形式如图 7-24 示。设管 1# 表示近端母管, 2#, 3#, ...N 表示远端子管, 接头位于  $x = 0$  处。不考虑子管终端影响, 则每个子管中压力和流量为:



$$p_m = h_m \left( t - \frac{x}{c_m} \right)$$

$$Q_m = Y_{0m} h_m \left( t - \frac{x}{c_m} \right)^*$$

$$m \geq 2$$

接头处压力连续,  $p_1 =$

$$p_2 = p_3 = \dots = p_N$$

$\therefore x = 0$  处:

$$f(t) + g(t) = h_m(t) = h(t)$$

$$(7-69a)$$

图 7-24 心血管常见分支形式

流量连续,

$$Q_1 = \sum_{m=2}^N Q_m = \left( \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) h(t)$$

$$\therefore Y_{01}[f(t) - g(t)] = \left( \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) h(t) \quad (7-69b)$$

\* 为方便起见, 本小节用特征导纳  $Y_0$  代替特征阻抗  $Z_0$ 。

(7-69a)表明, 不管怎样分支, 在接头附近每个子管的压力波形和母管一样。(7-69b)表明, 一个母管分为 $(N-1)$ 个子管的接头相当于一导纳为 $Y_{01}$ 与一导纳为 $\left(\sum_{m=2}^N Y_{0m}\right)$ 的直管的接头。这样分支接头处的反射系数为:

$$\Gamma = \frac{Y_{01} - \sum_{m=2}^N Y_{0m}}{Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m}} \quad (7-70)$$

透射系数为:

$$T_r = \frac{2Y_{01}}{Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m}} \quad (7-71)$$

上述结果是在理想情况下导出的, 但可推广于一般, 只是 $Y_{0m}$ 、 $c_m$ 由 $Z_{lm}$ 、 $Z_{im}$ 确定。

## 2. 分支系统中接头之间的干扰

心血管系统中血流速度远低于扰动波速, 故下游接头的扰动必定会影响上游的特性。整个动脉系统有20—30级分支, 很复杂。乍一看来, 象人体动脉系这样复杂的分支系统, 分析脉冲波的传播似乎是不可能的, 因为那里有无数不同接头之间的干扰。然而, 实际上并不是这样。只要弄清了相邻两个接头之间的相互作用, 就可将所得结果推广于任意复杂系统, 只要该系统是线性的。

考察图7-25所示的两个接头A、B的相互作用, AB间距为 $l$ , B下游子管无反射。按(7-70), B处压力波的反射系数为:

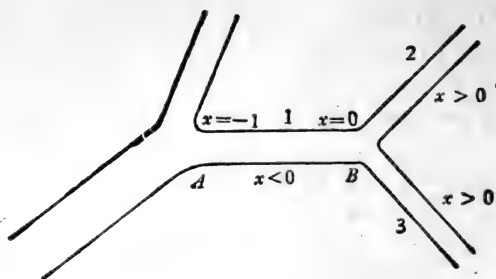


图 7-25 两接头相互作用

$$\Gamma_B = \frac{Y_{01} - \sum_{m=2}^N Y_{0m}}{Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m}}$$

若  $p \propto e^{i\omega t}$ , 则管 1 在接头 A 处 ( $x = -l$ ) 的有效导纳 (输入阻抗的倒数)  $Y_1^{\text{eff}}$ 。

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_{01} \frac{1 - \Gamma_B e^{-2\tau_1 l}}{1 + \Gamma_B e^{-2\tau_1 l}}$$

$$\therefore Y_1^{\text{eff}} = Y_{01} \frac{\left( Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{\tau_1 l} - \left( Y_{01} - \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{-\tau_1 l}}{\left( Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{\tau_1 l} + \left( Y_{01} - \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{-\tau_1 l}}$$

$$\text{即: } Y_1^{\text{eff}} = Y_{01} \frac{\left( Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{i\omega \frac{l}{c_1}} - \left( Y_{01} - \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{-i\omega \frac{l}{c_1}}}{\left( Y_{01} + \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{i\omega \frac{l}{c_1}} + \left( Y_{01} - \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) e^{-i\omega \frac{l}{c_1}}}$$

(7-72)

(7-72)亦可写为:



$$Y_1^{\text{eff}} = Y_{01} \frac{\sum_{m=2}^N Y_{0m} + i Y_{01} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega l}{c_1} \right)}{Y_{01} + i \left( \sum_{m=2}^N Y_{0m} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\omega l}{c_1} \right)} \quad (7-73)$$

由  $Y_1^{\text{eff}}$  及管 1' 的有效导纳  $Y_{1'}^{\text{eff}}$ , 按(7-70)可算出图 5-20 中管 0\* 在 A 处的反射系数  $\Gamma_A$ ; 再用(7-72)可得管 0\* 进口处的有效导纳  $Y_0^{\text{eff}}$ . 以此类推。这样, 只需知道动脉树终端阻抗, 就可由外周向中心, 重复应用上述方法, 完成整个系统的分析。

由(7-73)可见:

(1) 当  $l \ll \frac{c_1}{\omega}$ , 即  $\frac{\omega}{c_1} l \ll 1$  时, (7-73)蜕化为:

$$Y_1^{\text{eff}} = \sum_{m=2}^N Y_{0m} \quad (7-74)$$

这相当于管段 AB 不存在, 或者更准确地说, AB 本身就是接头 B 的一部分。这和(7-68)是一致的。

(2) 当  $\frac{\omega l}{c_1} = n\pi$  (即  $l = n\pi \frac{c_1}{\omega}$ ) 时, (7-74)亦成立。这时管段 AB 对于频率为  $\omega$  的脉动分量来说是可穿透的。当然  $l$  愈长, 粘性衰减愈大。

(3) 当  $\frac{\omega l}{c_1} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$  (即  $l = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$ ) 时, 按(7-73)得:

$$Y_1^{\text{eff}} = \frac{Y_{01}^2}{\sum_{m=2}^N Y_{0m}} \quad (7-75)$$

此时管段 AB 起强化导纳作用。若  $Y_{01} > \sum_{m=2}^N Y_{0m}$ , 则有效导

纳  $Y_1^{\text{eff}}$  比  $\sum_{m=2}^N Y_{0m}$  更大; 若  $Y_{01} < \sum_{m=2}^N Y_{0m}$ , 则  $Y_1^{\text{eff}}$  更小。

对于正常个体心搏频率来说, 主动脉长度约等于基波波长的  $\frac{1}{4}$ , 而且主动脉导纳大于子管导纳之和, 故主动脉瓣处主动脉的有效导纳很高。在生理上, 这意味着: 心脏只要产生不大的压力脉冲, 就能使流量脉冲顺利通过瓣口。进入主动脉。另一方面, 某些高阶谐波的波长足够小, 才等于髂动脉长度的  $\frac{1}{4}$  左右, 而髂动脉导纳又小于其分支导纳, 这时导纳强化作用使髂动脉有效导纳锐减, 在分支处压力波幅增高, 有利于血液灌注。

如果管段  $AB$  本身不是均匀的, 导纳有缓慢的变化, 则按 §7-2(2) 分析, (7-73) 可改写为:

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1^A \frac{\left( \sum_2^N Y_{0m} \right) + i Y_1^B \text{tg} \left( \frac{\omega l}{c_{AB}} \right)}{Y_1^B + i \left( \sum_2^N Y_{0m} \right) \text{tg} \left( \frac{\omega l}{c_{AB}} \right)} \quad (7-76)$$

$$\frac{1}{c_{AB}} = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 \frac{dx}{c}$$

壁面粘弹性及流动粘性等因素的影响均包含在管系每个管段的横向阻抗与纵向阻抗之中。而  $Z_{lm}$ 、 $Z_{im}$  与  $Y_{0m}$  ( $Z_{0m}$ )、 $c_m$  的关系由 (7-54)(7-56) 给出。

Taylor<sup>[46]</sup> 用传输线方法对动脉树的  $p-Q$  关系作过大量实验和理论分析。他用七级分支管系模拟动脉树, 终端负载为小动脉血流阻抗。图 7-26 是他算出的主动脉瓣输入阻抗随频率的变化。实线未计壁材料的粘弹性, 虚线计及管壁的粘弹性。

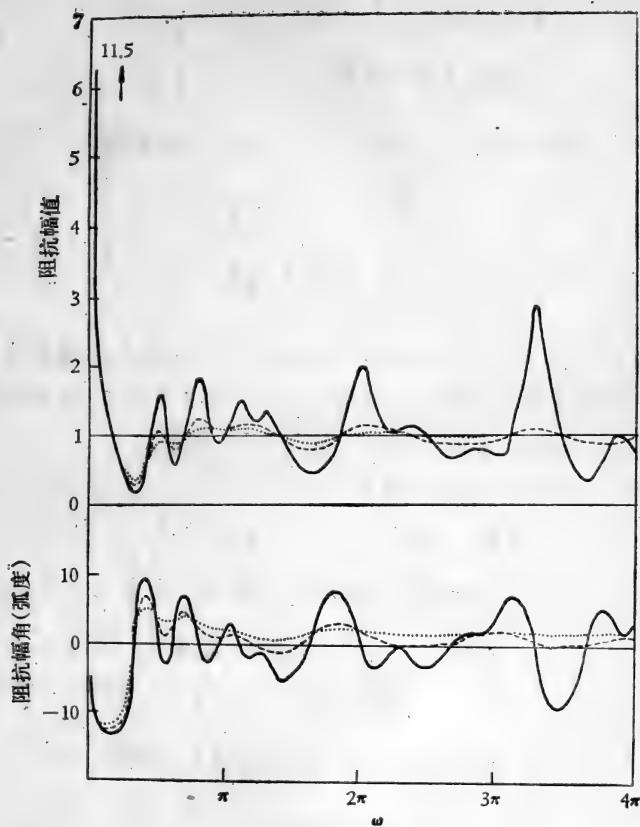


图 7-26 主动脉瓣处的输入阻抗 [46]

### § 7-5 积分变换法

在集中参数假设下，拉普拉斯变换是分析管系传输特性的有力工具。作为例子，讨论图 7-24 所示的分支管系流动。

将一维流动方程对  $t$  作拉普拉斯变换

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}(s, x) &= \int_0^{\infty} p(x, t) e^{-st} dt \\ \hat{Q}(s, x) &= \int_0^{\infty} Q(x, t) e^{-st} dt \end{aligned} \right\} \quad (7-77)$$

这里  $s$  是拉普拉斯变量, 则得类似于(7-52)的方程,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= -Z_{1s} \hat{Q} \\ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} &= -\frac{1}{Z_{1s}} \hat{p} \end{aligned} \right\} \quad (7-78)$$

$Z_{1s}$ 、 $Z_{2s}$  与  $Z_1$ 、 $Z_2$  的差别仅在于将  $Z_1$ 、 $Z_2$  公式中的傅里叶变量  $i\omega$  换成拉普拉斯变量  $s$ 。解的形式和(7-55)(7-57)相同, 只是传播系数  $\gamma$ 、特征阻抗  $Z_0$  中  $i\omega$  用  $s$  代替。

应用于图 7-27 所示管系, 则得:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{p}_0 \operatorname{ch} \gamma_a l_a - Z_a \hat{Q}_0 \operatorname{sh} \gamma_a l_a \\ \hat{Q}_1 &= -\frac{\hat{p}_0}{Z_a} \operatorname{sh} \gamma_a l_a + \hat{Q}_0 \operatorname{ch} \gamma_a l_a \\ \hat{p}_4 &= \hat{p}_2 \operatorname{ch} \gamma_b l_b - Z_b \hat{Q}_2 \operatorname{sh} \gamma_b l_b \\ \hat{Q}_4 &= -\frac{\hat{p}_2}{Z_b} \operatorname{sh} \gamma_b l_b + \hat{Q}_2 \operatorname{ch} \gamma_b l_b \\ \hat{p}_5 &= \hat{p}_3 \operatorname{ch} \gamma_c l_c - Z_c \hat{Q}_3 \operatorname{sh} \gamma_c l_c \\ \hat{Q}_5 &= -\frac{\hat{p}_3}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma_c l_c + \hat{Q}_3 \operatorname{ch} \gamma_c l_c \end{aligned} \right\} \quad (7-79)$$

接头连续性条件

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{p}_2 = \hat{p}_3 \\ \hat{Q}_1 &= \hat{Q}_2 + \hat{Q}_3 \end{aligned} \right\} \quad (7-80)$$

九个方程包含 12 个未知量, 还需要 3 个边界条件才能求解。对心血管流动来说, 通常输入流量  $Q(0, t) = Q_0(t)$  及终端阻抗  $Z_4$ 、 $Z_5$  是已知的。即:

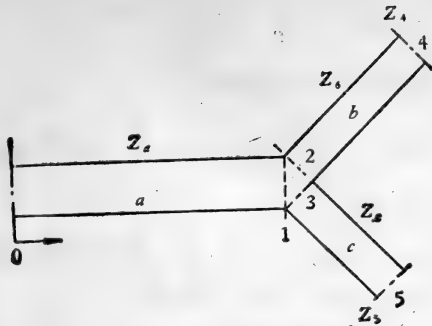


图 7-27 管系示意图

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_0 &= \mathcal{L}[Q(0, t)] \\ \frac{\hat{p}_4}{\hat{Q}_4} &= Z_4 \\ \frac{\hat{p}_5}{\hat{Q}_5} &= Z_5 \end{aligned} \right\} \quad (7-81)$$

这样由(7-79) (7-80) (7-81) 可求得  $\hat{p}_0$ 、 $\hat{Q}_1$ 、 $\hat{p}_1$ 、 $\hat{Q}_2$ 、 $\hat{Q}_3$ 、 $\hat{p}_4$ 、 $\hat{p}_5$ 、 $\hat{Q}_4$ 、 $\hat{Q}_5$  等。反变换, 即得所求解。

以此类推, 可得任意管系流动的解。

### §7-6 Rideout 差分-微分方法与电模拟

Rideout 和 Dick<sup>[47]</sup> 从另一途径建立了可膨胀管脉冲流动的传输线方程及相应的等价电路。从流体力学观点来看意义不大, 但实用中有很大的好处。

直接从线化流动方程 (7-1) (7-2) 及薄膜壁运动方程出发。流动服从:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-82)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (7-83)$$

壁纵向不能位移,壁径向运动服从:

$$p = \rho_w h \frac{dw}{dt} + \frac{E_c h}{R^2(1-\sigma_c^2)} \int_0^t w dt \quad (7-84)$$

$w$  为壁径向运动速度。

沿纵向将血管分为许多小段  $\Delta x$ , 径向分为  $N$  个同心圆, 有  $(N-1)$  个环形空间。第  $n$  个环

$$\left. \begin{aligned} \text{中线半径为: } r_n &= \frac{2n-1}{2N-1}R, \quad n=1, 2, \dots, N \\ \text{间隙为: } \Delta r &= \frac{2R}{2N-1} \end{aligned} \right\} (7-85)$$

流过第  $m$  管段、第  $n$  个环形空间的流量为:

$$\begin{aligned} f_{m,n} &= \pi \left[ \left( r_n + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( r_n - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] u_{m,n} \\ &= \frac{4\pi R^2(2n-1)}{(2N-1)^2} \cdot u_{m,n} \end{aligned} \quad (7-86a)$$

第  $m$  管段上压差为

$$\Delta p_m = p_{m0} - p_{mi} \quad (7-86b)$$

对(7-82)求差分,应用(7-79)得:

$$\begin{aligned} \frac{p_{m0} - p_{mi}}{\Delta x} &= - \frac{(2N-1)^2 \rho}{4\pi R^2(2n-1)} \frac{df_{m,n}}{dt} \\ &+ \frac{\mu(2N-1)^4}{8\pi R^4(2n-1)} \left[ -f_{m,n} + \frac{n}{2n+1} \right. \\ &\left. \times f_{m,n+1} + \frac{n-1}{2n-3} f_{m,n-1} \right] \end{aligned} \quad (7-87)$$

方程(7-84)忽略惯性力,有

$$p = \frac{E_c h}{R^2(1-\sigma^2)} \int_0^t w dt \quad (7-88)$$

由连续方程可得:

$$\sum_{n=1}^{N-1} (f_{m,n,i} - f_{m,n,o}) = w_m \cdot 2\pi R \Delta x \quad (7-89)$$

这里“i”表示管段进口，“o”表示出口。

由(7-88)(7-89)可得:

$$p_m = \frac{E_c h}{2\pi R^3 (1 - \sigma_c^2) \Delta x} \int_0^t \sum_{n=1}^{N-1} (f_{m,n,i} - f_{m,n,o}) dt \quad (7-90)$$

(7-87)(7-90)是 Rideout-Dick 差分-微分法的基础。

### 1. $N = 2$ 时的等价电路

$N = 2$ , 则  $r_1 = \frac{R}{3}$   $\Delta r = \frac{2}{3} R$ 。由(7-87)得:

$$\left. \begin{aligned} p_{m,o} - p_{m,i} &= -\frac{2\rho\Delta x}{4\pi R^2} \cdot \frac{df_{m,i}}{dt} - \frac{81\mu\Delta x}{8\pi R^4} \cdot f_{m,i} \\ p_m &= \frac{E_c h}{2\pi R^3 (1 - \sigma_c^2) \Delta x} \int_0^t (f_{m,1,i} - f_{m,1,o}) dt \end{aligned} \right\} (7-91)$$

(7-91)相当于电传输方程,其等价电路可取  $L$  形网路,亦可取  $T$  形或  $\pi$  形网路。一般取图 7-28 所示的  $L$  形网路。

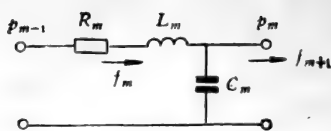
$$\text{流阻:} \quad R_m = \frac{81\mu\Delta x}{4\pi R^4} \quad (7-92)$$

$$\text{流感:} \quad L_m = \frac{9\rho\Delta x}{4\pi R^2} \quad (7-93)$$

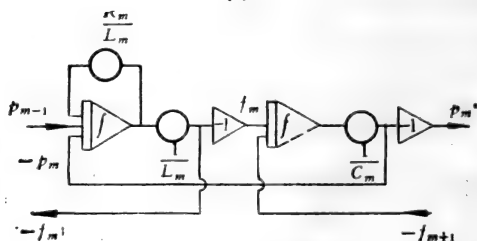
$$\text{流容:} \quad C_m = \frac{2\pi R^3 (1 - \sigma_c^2) \Delta x}{E_c h} \quad (7-94)$$

$E_c, \sigma_c$  由具体粘弹性模型确定。

应用  $L$  形电路模拟时,  $p_{m,o} = p_m, p_{m,i} = p_{m-1}, f_{m,i} = f_m, f_{m,o} = f_{m+1}$ , 由(7-91)得:



(a)



(b)

图 7-28 Rideout-Dick 模型 ( $N=2$ )

(a) 等价电路, (b) 模拟计算电路。

$$\left. \begin{aligned} f_m &= \frac{1}{L_m} \int_0^t [(p_{m-1} - p_m) - R_m f_m] dt \\ p_m &= \frac{1}{C_m} \int_0^t (f_m - f_{m+1}) dt \end{aligned} \right\} \quad (7-95)$$

模拟计算线路见图 7-28 (b)。

2.  $N=4$  时的解 $N=4$  时, 由(7-90)(7-91)得:

$$\left. \begin{aligned} p_{m0} - p_{mi} &= -L_{m1} \frac{df_{m,1}}{dt} - R_{m1} \left[ f_{m,1} - \frac{1}{3} f_{m,2} \right] \\ p_{m0} - p_{mi} &= -\frac{L_{m1}}{3} \cdot \frac{df_{m,2}}{dt} - \frac{R_{m1}}{3} \left[ f_{m,2} - \frac{2}{5} f_{m,3} - f_{m,1} \right] \\ p_{m0} - p_{mi} &= -\frac{L_{m1}}{5} \cdot \frac{df_{m,3}}{dt} - \frac{R_{m1}}{5} \left[ f_{m,3} - \frac{2}{3} f_{m,2} \right] \\ p_m &= C_m^{-1} \int_0^t \sum_{n=1}^{N-1} (f_{m,n,i} - f_{m,n,o}) dt \end{aligned} \right\} \quad (7-96)$$



$$\left. \begin{aligned} L_{m1} &= \frac{49\rho\Delta x}{4\pi R^2}, \quad R_{m1} = \frac{49^2\mu\Delta x}{8\pi R^4} \\ C_m &= \frac{2\pi R^3(1-\sigma_c^2)\Delta x}{E_c h} \end{aligned} \right\} \quad (7-97)$$

### 3. $N = 2$ 时流动非线性效应

Rideout-Dick 方法的最大优点是简捷而且易于计及流动的非线性效应。现以  $N = 2$  为例说明如何考虑非线性效应。

壁面运动方程及连续方程不变, 对流动方程 (7-1a) 求差分,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_m}{\Delta x} &= -\rho \cdot \frac{du_{m,n}}{dt} - \rho u_{m,n} \cdot \frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{2\Delta x} \\ &+ \mu \left[ \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2r_n \Delta r} + \frac{u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 2u_{m,n}}{(\Delta r)^2} \right] \end{aligned} \quad (7-98)$$

换为流量,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_m}{\Delta x} &= -\frac{(2N-1)^2 \rho}{4\pi R^2(2n-1)} \cdot \frac{df_{m,n}}{dt} - \left[ \frac{(2N-1)^4 \rho}{32\pi^2 R^4(2n-1)^2 \Delta x} \right] \\ &\times f_{m,n}(f_{m+1,n} - f_{m-1,n}) + \frac{\mu(2N-1)^4}{8\pi R^4(2n-1)} \\ &\times \left[ -f_{m,n} + \frac{n}{2n+1} f_{m,n+1} + \frac{n-1}{2n-3} f_{m,n-1} \right] \end{aligned} \quad (7-99)$$

若  $N = 2$ , 则

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= -L_m \cdot \frac{df_{m,1}}{dt} - S_m f_{m,1} \\ &\times (f_{m+1,1} - f_{m-1,1}) - R_m f_{m,1} \end{aligned} \quad (7-100)$$

$L_m, R_m$  同(7-92)(7-93),  $S_m$  为:

$$S_m = \frac{8l\rho}{32\pi^2 R^4 \Delta x} \quad (7-101)$$

考虑到迁移项后,图 7-28 (b)的模拟线路中,每一对积分需要加一个变换器、分压器。

### § 7-7 心血管系统模拟计算概述

一维流动方程(7-12)(7-13)揭示了管系流动与电网中电流传输之间的相似性,为心血管流动电模拟及计算机模拟提供了基础。具体的数学模型是多种多样的,一般来说,不同的方程组给出不同的参数值,它们导致系统不同的性状。因此,用计算机模拟心血管系统时,数学模型的选择十分重要。

方程(7-12)(7-13)的线性化是建立在集中参数模型的基础上的,这意味着各集中段之间的相互作用可以不计。一般说来,每个集中段上的参数都是随频率而变化的,这使得模拟计算大为复杂,计算成本提高。为简化起见,通常假设这些参数是常数,其值等于最可几频率(心频)下该参数的值,这样带来的误差不会太大。

近十几年来心血管系统的模拟计算有很大发展。第十二章第三节将对此作进一步的介绍。欲究细节,读者可参阅 Beneken<sup>[48]</sup>、Noordergraaf<sup>[49]</sup>、Synder 和 Rideout<sup>[50]</sup> 等人的专著。

## § 8 非线性理论

大血管里的流动实际上是非线性的,若不考虑神经系统的控制、调节作用,非线性效应主要来源于五个因素。

(1) 血管系统几何和力学性质非均匀性。血管分支、截面积大小和形状随空间位置的变化、材料力学性质非均匀等,在血管里引起复杂的波反射,非线性效应十分显著,整个血管

系统不能简单地看作各段血管流动的简单叠加。这种非线性效应,一般用非均匀传输线理论处理,见 § 7-4。

(2) 血管材料力学性质非线性。对此目前研究得还很不

够。

(3) 血液非牛顿性。Hukaba 曾用最简单的假塑模型(幂次律)作了数值计算,很费事,但结果并无多大改进。Thurston 分析了血液粘弹性的影响,结果表明,当血管较大时,血液粘弹性对流动影响不大,但当血管较小时,却不容忽视。

(4) 壁运动的非线性效应。血管内压力变动相当大,壁径向位移一般为平衡半径的 3—15%,假设壁面小位移有时不成立,必须考虑有限幅度壁位移。这样,边界条件不能取在平衡半径处,而应取于瞬时半径。而且有限变形使得壁运动方程大为复杂化。§ 6-4 所述的 Lou 的模型考虑了这种影响。

(5) 流动非线性效应。如 § 5 所指出,主动脉流动很难满足流动方程线性化条件  $\left(\frac{U}{c} \cdot \frac{\lambda}{L}\right) \ll 1$ ,应考虑流动非线性效应。

本节专述流动本身的非线性效应。现有的非线性理论大致分两类,一类基于一维简化模型,另一类用扰动法解轴对称流。

扰动法将方程及边界条件展为某一小参数的幂级数,从而化为常微分方程求解。原则上,只要所选择的小参数真实地反映系统的物理特色,扰动法可获任意精度,当然计算繁冗。Jacobs 假设血流是一定常流动与振荡流动的叠加,振荡流量与定常流相比很小,以此为小参数。这显然不合适,因为测量表明,动脉血流的脉冲性很强,一、二级谐波波幅是与平均量同量级的。Womersley<sup>[31]</sup> 曾用扰动法对壁面边界条件作了非线性修正,所得结果见图 5-16,比线性理论结果有所改进,但

不甚显著。Lee<sup>[51]</sup>取基波波长-管径比  $\epsilon$  为小参数,求长波非线性近似解,并以速度系数  $\Lambda = \frac{U}{c}$  为小参数估计了  $\Lambda$  的二级

效应。Olsen-Shapiro<sup>[52]</sup>取  $\epsilon = \frac{Q_0}{c_0 S_0}$  为小参数,给出了有限幅度

振荡管流的解析解,但所用的血管材料本构关系为 Treloar 公式,非线性效应不会导致波形变陡。这不符合动脉流动的真实情况。

Rudinger<sup>[4]</sup>和 Skalak<sup>[3]</sup>等认为,扰动法本质上只能作小修正,用于动脉脉冲流不会有多大成效。故下面主要介绍一维理论。

### § 8-1 一维非线性方程及其特性

动脉血流一般满足  $\frac{R}{L} \ll 1$ , 故流动方程可简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (8-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right] & \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

考虑到外周组织的约束,设管壁不能作纵向位移。这样,边界条件为

$$r = \mathcal{R}(x, t): \quad \left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

(8-1)–(8-3)需和壁运动方程联立求解。如§ 5 所述,在分析流动非线性效应时,壁运动模型不妨简单些,可看作准静

态,用静力学平衡关系来代替壁运动方程。

若假定  $\mathcal{R}$  是当地瞬时压力  $p$  的函数(设壁外部压力  $p_e =$  常数),则有

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(p, x, t) \quad (8-4)$$

$$\text{或 } S = S(p, x, t)$$

$$\text{或 } p = p(S, x, t)$$

若假定  $S$  是当地压力  $p$  及其时间变化率  $\frac{\partial p}{\partial t}$  的函数,则

$$\left. \begin{aligned} S = S(p, \dot{p}, x, t) \quad \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} \\ \text{或 } p = p(S, \dot{S}, x, t) \quad \dot{S} = \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

生理上最重要的参数是压力  $p$  和流量  $Q$ ,

$$Q = US$$

(8-1)(8-2)对  $r$  积分,并应用边界条件,得

$$\frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (8-6)$$

$$\frac{\partial(SU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S\tilde{U}^2) = -\frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} 2\pi \mathcal{R} \tau_w \quad (8-7)$$

$$\tilde{U}^2 = \frac{2\pi}{S} \int_0^a u^2 r dr$$

进而假定:

$$\tilde{U} = U$$

$$\frac{2\pi \mathcal{R}}{\rho S} \tau_w = f$$

并考虑到血管分支的流量漏失,设单位长度血管上、单位时间内漏失量为  $\rho\psi$ ,则(8-6)(8-7)变为:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial U}{\partial x} + \psi = 0 \quad (8-8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + f \quad (8-9)$$

$$S = S(p, x, t) \quad (8-4)$$

或: 
$$S = S(p, \dot{p}, x, t) \quad (8-5)$$

当压力-半径关系已知时, (8-8)(8-9)与(8-4)[或(8-5)]含有三个未知量  $p, U, S$ , 故系统是封闭的, 在给定的端点条件下可以求解。

## § 8-2 关于动脉血流的特征线法

设动脉血流满足方程组:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial U}{\partial x} + \Psi = 0 \quad (8-8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + f \quad (8-9)$$

$$S = S(p, x, t) \quad (8-4)$$

$x-t$  平面上存在这样的曲线族  $\zeta = x(t)$ , 在其上, 变量  $p, U, S$  不是完全独立的, 而有一定的关系。故若已知某一  $\zeta$  曲线上的  $p, U, S$  值, 不能唯一地确定曲线邻近的  $p, U, S$  值, 这种曲线称为特征线。

在特征线上,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8-10)$$

另外, 由(8-4)可知

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_x &= \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{x,t} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{p,x} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_t &= \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{x,t} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{p,t} \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

所以,特征线上有

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{x,t} \left[ \frac{dp}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{p,x} \quad (8-12)$$

代入(8-8)(8-9)得:

$$\left[ U - \frac{d\zeta}{dt} \right] \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{dU}{dt} + f \quad (8-13)$$

$$\begin{aligned} S \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{x,t} \left( U - \frac{d\zeta}{dt} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \\ = -U \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{p,t} - \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{x,t} \cdot \frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{p,x} - \Psi \end{aligned} \quad (8-14)$$

因为 $\zeta$ 是特征线,其上 $p$ 、 $U$ 、 $S$ 不独立,而 $\Psi$ 、 $f$ 等又是任意的,故必有 $\Delta = 0, \Delta^I = 0, \Delta^{II} = 0$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} S & , & \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{x,t} \cdot \left( U - \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ U - \frac{dp}{dt} & , & \frac{1}{\rho} \end{vmatrix} = 0 \quad (8-15)$$

$$\therefore \frac{d\zeta}{dt} = U \pm \left[ \frac{S}{\rho \left[ \frac{\partial S}{\partial p} \right]_{x,t}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8-16)$$

而管壁当地、瞬时声速为 $c$

$$c^2 = \frac{S}{\rho \left[ \frac{\partial S}{\partial p} \right]_{x,t}} \quad (8-17)$$

故 $x-t$ 平面上的特征线为:

$$\frac{dx}{dt} = U \pm c \quad (8-18)$$

它表明:具有一定的 $p$ 、 $U$ 、 $S$ 值的点,以速度 $(U \pm c)$ 传播,此即真实波速 $a$

$$\therefore a = U \pm c \quad (8-19)$$

由  $\Delta^I = \Delta^{II} = 0$ , 得

$$\left| \begin{array}{l} -U \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{p,t} - \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_{x,t} \cdot \frac{dp}{dt} - \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{p,x} - \Psi \mp \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_{x,t} \cdot c \\ - \frac{dU}{dt} + f \qquad \qquad \qquad \frac{1}{\rho} \end{array} \right| = 0$$

$\therefore$  特征线上  $U$ 、 $p$ 、 $S$  满足如下关系

$$\frac{dU}{dt} \pm \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{dp}{dt} = f \mp \frac{Uc}{S} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{p,t} \mp \frac{c}{S} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{p,x} \mp \frac{c\Psi}{S} \quad (8-20)$$

在给定的初始条件和端点边界条件下, 应用(8-19)(8-20)及给定的  $S = S(p, x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\Psi(x, t)$ , 可用数值方法求整个时-空域内的解。

一般, 初始条件并不知道, 但这无关紧要, 因为解是周期性的。可设一任意的初始条件, 用特征线法计算, 在时间域内计算若干个周期, 直到相继两周期内, 解的变化很小时, 即得所求结果。

用特征线法分析动脉血流能否成功, 很大程度上决定于物理模型的选择, 即摩擦因子  $f$ , 本构关系  $S(p, x, t)$ , 分流函数  $\Psi$ , 端点条件的具体形式。

### 1. 压力-截面积关系

决定管径的是壁材料力学性质和管内、外压差  $p - p_c$ 。对于较大的动脉血管来说,  $p$  比  $p_c$  大得多, 可以认为  $p_c$  近乎不变。而运动方程中压力又总是以微分的形式出现的,  $dp = d(p - p_c)$ 。作为近似,  $(p - p_c) - S$  关系就以  $p - S$  形式代替。

Streeter 等<sup>[53]</sup>假设:

(1) 壁材料是不可压缩的



$$\sigma = 0.5, \quad Rh = R_0 h_0 \quad (8-21)$$

这里  $R$  表示瞬时管径, “0” 表示  $p = p_c$  时的值。

(2) 壁很薄, 拉普拉斯定律成立, 故周向张力  $T$  满足

$$dT = R dp + p dR \quad (8-22a)$$

(3) 管径相对变化远小于压力变化, 即  $\frac{dR}{R} \ll 1$

$$dT = R dp \quad (8-22b)$$

(4) 材料是各向同性线弹性体

$$d\tau_{\theta\theta} = E \frac{dR}{R}$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{R}{h} \cdot \frac{dp}{E}$$

由此得:

$$\left. \begin{aligned} p &= 2ER_0 h_0 \left( \frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \\ S &= S_0 \left( 1 - \frac{2pR_0}{Eh_0} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (8-23)$$

即:

$$\therefore c^2 = c_0^2 - \frac{p}{\rho} = \frac{Eh_0}{2\rho R_0} - \frac{p}{\rho} \quad (8-24)$$

按照(8-24)

$$\frac{dc}{dp} = -\frac{1}{\rho} < 0$$

即波形愈来愈平坦, 不会变陡, 而动脉中的实际情况, 恰恰与之相反。故 Streeter 模型不宜用于动脉血管。

Weemple 等<sup>[54]</sup>在血管材料不可压缩且  $\frac{h}{R} \ll 1$  的前提下, 应用拉普拉斯定律得

$$E = \frac{d\left(\frac{pR}{h}\right)}{\frac{dR}{R}} \quad (8-25)$$

考虑到弹性非线性, 设

$$\frac{E}{E_*} = \left(\frac{R}{R_*}\right)^\beta, \quad \beta = \text{常数} \quad (8-26)$$

\* 表示参考压力  $p_*$  下的值。

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho c_*^2} &= \left(\frac{S_*}{S}\right) \left\{ \frac{2}{\beta} \left[ \left(\frac{S}{S_*}\right)^{\frac{\beta}{2}} - 1 \right] + \frac{p_*}{\rho c_*^2} \right\} \\ c_*^2 &= \frac{E_* h_*}{2\rho R_*} \end{aligned} \right\} \quad (8-27)$$

$$\therefore \left(\frac{c}{c_*}\right)^2 = \frac{S_*}{S} \left\{ \frac{\beta - 2}{\beta} \left(\frac{S}{S_*}\right)^{\frac{\beta}{2}} + \frac{2}{\beta} - \frac{p_*}{\rho c_*^2} \right\} \quad (8-28)$$

根据用狗主动脉做实验所得的数据, Wemple 取  $\beta = 4.5$ 。

Zeller 等<sup>[55]</sup>在薄壁条件下, 考虑了材料的粘弹性。假设材料是佛克脱体, 则

$$\tau_{\theta\theta} = E \frac{R - R_*}{R_*} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R - R_*}{R_*} \right) \quad (8-29)$$

$$\therefore c^2 = \frac{Eh}{2\rho R} \left\{ 1 + \frac{\alpha_1}{2R_*} \cdot \frac{d}{d(\ln S)} \left[ \frac{\partial(\ln S)}{\partial t} \right] \right\} \quad (8-30)$$

进而设  $(p - p_*) \propto \frac{h}{R} t$ , 则在小变形下可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{c_0} &= \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\alpha_1}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ c_0 &= \sqrt{\frac{Eh}{2R\rho}}, \quad \alpha_1 = \frac{\eta}{E} \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

但是如第四章所指出, 佛克脱模型不能反映动脉血管的粘弹性行为。

实验证明, 动脉血管离心脏愈远愈刚硬, 为反映这种非均匀性, Anliker 等<sup>[56]</sup>根据狗主动脉波速测量结果假设: 波速-挤压力呈线性关系; 波速随离心脏的距离  $x$  线性地增大, 这

样,

$$c(p, x) = (c_* + c_1 p)(1 + nx) \quad (8-32)$$

若以 cm, s 为单位, 则

$$c_1 = 2.03 \text{ gm/s} \cdot \text{cm}^2, \quad n = 0.02 \text{ cm}^{-1}$$

代入(8-17), 积分之得:

$$S(p, x) = S(p_*, x) \exp \left[ \frac{p - p_*}{\rho c(p, x) \cdot c(p_*, x)} \right] \quad (8-33)$$

取  $p_* = 100 \text{ mmHg}$ , 据 Pate 测量

$$S(p_*, x) = \tilde{S}_* e^{-\beta_1 x} \quad (8-34)$$

$\tilde{S}_*$  是  $p = p_*$  时, 主动脉根部的截面积,  $\beta_1 = 0.045$ ,  $x$  以 cm 为单位。这样

$$S(p, x) = \tilde{S}_* \exp \left[ -\beta_1 x + \frac{p - p_*}{\rho c(p, x) \cdot c(p_*, x)} \right] \quad (8-35)$$

考虑到高应变率下壁材料的特性, Kivity 等<sup>[57]</sup>设:

$$p - p_c = f(S) + g(S, \dot{S}) \quad (8-36a)$$

$$\left. \begin{aligned} f(S) &= \frac{\rho c_0}{n} \left[ \left( \frac{S}{S_0} \right)^{n-1} - \frac{S_0}{S} \right] \\ g(S, \dot{S}) &= B |f(S)| \cdot \frac{\dot{S}}{S} \end{aligned} \right\} \quad (8-36b, c)$$

$$c_0^2 = \left( \frac{S}{\rho} \cdot \frac{dp}{dA} \right) S = S_0$$

取  $n = 6$ ,  $B = 0.08 \text{ s}$ ,

$c_0, S_0$  随  $x$  的变化为

$$\left. \begin{aligned} c_0(x) &= c_i (1 + \beta_1 x) \\ S_0(x) &= A_i \exp(-\beta_2 x) \end{aligned} \right\} \quad (8-37)$$

$c_i = 300 \text{ cm/s}$ ,  $\beta_1 = 0.02 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 0.045 \text{ cm}^{-1}$ ,  $A_i = \pi \text{ cm}^2$ 。

一般说来 Streeter 模型简便, 但力学性状定性与实际动脉

不符。Wemple 模型、Anliker 模型经验性很强，Kivity 模型宜用于高加速场中。

## 2. 摩擦因子

摩擦因子  $f = \frac{2\pi R \tau_w}{\rho S}$  亦有多种选择。最初，Streeter 等用

定常流摩擦系数公式，设

$$f = b \cdot \frac{U^n}{4R} \quad (8-38)$$

$b, n$  有三种取法：

(1) 用层流摩阻公式：

$$n = 2, \quad b = \frac{32}{R_e}, \quad R_e = \frac{RU}{\nu} \quad (8-39a)$$

(2) 用湍流摩阻公式：

$$n = 2.1, \quad b = 0.4 \quad (8-39b)$$

(3) 考虑速度的方向改变：

$$\left. \begin{array}{l} U > 0: \quad n = 1.93, \quad b = 0.2 \\ U < 0: \quad n = 2.8, \quad b = 0.47 \end{array} \right\} \quad (8-39c)$$

图 7-29 是用上述三种不同的摩阻公式算出的  $Q(t)$  与测得结果(狗股动脉)的比较。显然层流摩阻公式引起的误差太大，用湍流摩阻公式有所改善，用(8-39)最佳。这个结果不足为怪，因为脉冲流剖面中心部分比泊肃叶剖面平坦得多，壁面附近瞬时速度的梯度比时均剖面大得多，更接近于湍流定常流速度剖面。而壁面摩擦实际上是由瞬时速度剖面的形式而不是时均剖面形式所决定的。

Anliker 所用经验摩阻公式类似于(8-39c)。

$$f = -0.136\nu^{0.25} \cdot \frac{|U|^{\frac{7}{4}}}{S^{\frac{5}{8}}} \cdot \text{sgn}U \quad (8-40)$$

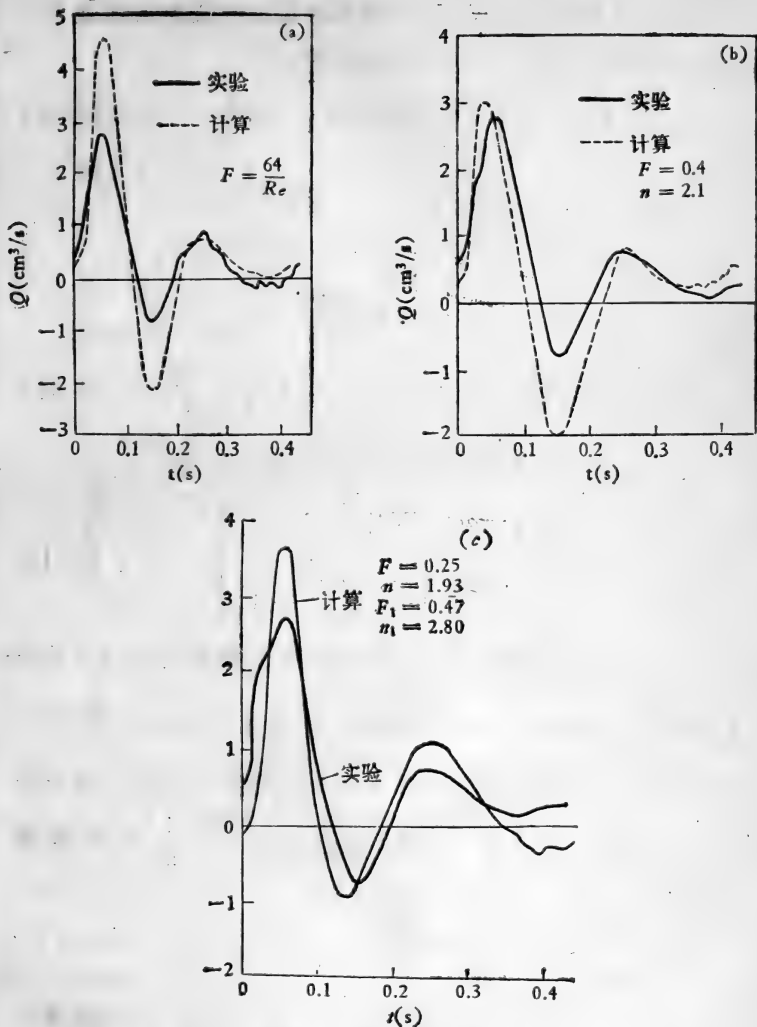


图 7-29 三种摩阻公式所得结果与测量数据的比较。

这里:

$$\text{sgn}U = \begin{cases} 1, & U > 0 \\ -1, & U < 0 \end{cases}$$

更为合理的模型是从刚性管脉冲流动的线性化理论解，导出壁面摩阻公式。按 Womersley 解，

$$\tau_w = I_m \left\{ \frac{i\mu\alpha^2}{R^2} (M_{10}^{-1} e^{-i\epsilon_{10}} - Q) \right\} \quad (8-41)$$

$$M_{10} e^{i\epsilon_{10}} = 1 - \frac{2J_1(ai^{3/2})}{ai^{3/2}J_0(ai^{3/2})}$$

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$\therefore f = \frac{8\nu U_s}{R^2} + C_1 \frac{(U - U_s)}{\rho} + \frac{C_2}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad (8-42)$$

这里  $U_s$  是时均速度剖面的面平均值， $C_1, C_2$  为

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \pi\mu\alpha^2 \frac{\sin \epsilon_{10}(\alpha)}{R^2 M_{10}(\alpha)} \\ C_2 &= \frac{\pi\mu\alpha^2}{S\omega} \left[ \frac{\cos \epsilon_{10}(\alpha)}{M_{10}(\alpha)} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-43)$$

但(8-42)只是脉冲流一个谐波分量的摩擦因子  $f_n$ ，整个  $f$  应是  $N$  个谐波分量的  $f_n$  的和， $f = \sum_1^N f_n$ 。Gerrard 和 Taylor<sup>[58]</sup> 曾这样做过，结果很复杂。Wempel 用(8-42)，只取一个频率，它介于一级谐波与二级谐波之间， $\omega^{-1} = \frac{1}{\pi} \times$  收缩期持续时间。

### 3. 侧支分流的分布

如果只计算一小段动脉血管上  $p-Q$  的变化，则可取  $\Psi = 0$ ， $\Psi$  是单位长度血管上通过分支外流的血流量。如果用特征线法计算一长段动脉或整个动脉树内的  $p-Q$  变化，则必须考虑  $\Psi$  的分布。

Anliker 根据 Sapirstein 动物实验结果, 提出如下经验公式:

$$\Psi(p, x) = \gamma_1(p - p_c) \left[ 1.1 + \cos \left( \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{x}{x^*} \right) \right], x \leq x^* \left. \vphantom{\Psi(p, x)} \right\}$$

$$\Psi(p, x) = 1.1\gamma_1(p - p_c) \exp[-0.08(x - x^*)], x > x^* \quad (8-44)$$

$$\gamma_1 = 2.29 \times 10^{-3} \text{cm}^3/\text{s 1mmHg}, x^* = 70\text{cm}.$$

$p_c$ : 毛细血管压力。

Schaaf 和 Abbrecht<sup>[59]</sup> 简单地取

$$\Psi = K(p - p_b) = KR_T Q \quad (8-45)$$

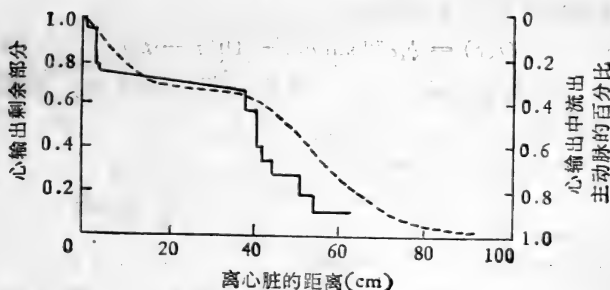


图 7-30  $K$  随位置的变化<sup>[59]</sup>

表 7-9 人体远支动脉终端阻抗<sup>[59]</sup>

部 位	$R_T(\text{mm Hg/ml/s})$	部 位	$R_T(\text{mm Hg/ml/s})$
后胫动脉	35.85	胃动脉	40.64
前胫动脉	42.00	挠动脉	39.70
深股动脉	35.85	尺动脉	39.70
下肠系膜	51.74	骨间动脉	633.6
上肠系膜	7.00	脊椎动脉	45.22
肾动脉	8.55	外颈动脉	104.3
脾动脉	17.47	内颈动脉	104.3
肝动脉	27.29	肋间动脉	10.46

$K$  是随位置而变的系数, 可由图 7-30 所示测量结果算出。 $p_b$  是终端灌注压力,  $R_T$  是终端阻抗, 人体各部位  $R_T$  的参考值列于表 7-9。

#### 4. 始端和终端边界条件

始端边界条件可用主动脉口的压力, 也可用主动脉瓣处的流量。前者测量数据颇多, 但用它进行计算所得结果往往与实验不符, 这说明用左心室出口压力作为系统初始条件时, 计算结果对测量精度相当敏感。因此, 常用心输出量作为始端边界条件。

Wemple 等取  $x = 0$  处

$$Q(t) = b_1 e^{b_2 t} \sin b_3 t - 10(t - t_s) \quad (8-46)$$

这里  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  为经验常数,  $t_s$  为收缩期持续时间。正常心输出(5.5 升/分,  $t_s = 0.24$  s)下,

$$b_1 = 1326, \quad b_2 = -10, \quad b_3 = \frac{\pi}{0.24}$$

终端可看作纯负载, Schaff 等取

$$x = L \text{ 时 } p - p_b = R_T Q \quad (8-47)$$

$R_T$  的值见表 7-9。

#### 5. 特征线数值计算典型问题

一维非定常特征线法数值计算过程中, 典型问题有三种。

(1) 如图 7-31 所示, 已知  $x-t$  平面上  $A$ 、 $B$  处的  $p$ 、 $U$ , 求由  $A$  点出发的 I 族特征线和由  $B$  点出发的 II 族特征线交点  $D$  处的  $p$ 、 $U$ 。按照(8-18)(8-20),

$$x_D - x_A = (U + c)_A \Delta t \quad (8-48a)$$

$$U_D - U_A + \frac{1}{\rho C_A} (p_D - p_A) - f_A \Delta t + \left[ \frac{U}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right]_A \cdot \Delta t$$



$$+ \left[ \frac{c}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \right]_A \Delta t + \left[ \frac{c\Psi}{S} \right]_A \Delta t = 0 \quad (8-48b)$$

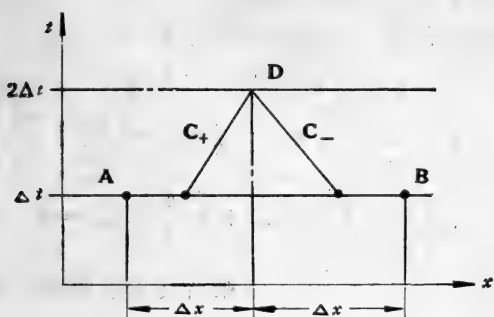


图 7-31 特征线数值计算典型问题 (1)

$$x_D - x_B = (U - c)_B \Delta t$$

$$\left. \begin{aligned} U_D - U_B - \frac{1}{\rho c_B} (p_D - p_B) - f_B \Delta t - \left[ \frac{Uc}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right]_B \Delta t \\ - \left[ \frac{c}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \right]_B \Delta t - \left[ \frac{c\Psi}{S} \right]_B \Delta t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-49)$$

由(8-48a)(8-49a)确定  $x_D$  及  $\Delta t$ ; 由(8-48b)(8-49b)求出  $U_D$ ,  $p_D$ 。

为保证计算收敛, 要求

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \geq [ |U| + c ]_E \Delta t \\ [U + c]_E = \frac{1}{2} \left\{ (U + c)_A + (U + c)_B \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8-50)$$

$E$  为  $AB$  之中点。

(2) 如图 7-32 (a) 示,

$$x_B = (U - c)_B \Delta t \quad (8-51a)$$

$$U_D - U_B - \frac{1}{\rho c_B} (p_D - p_B) - f_B \Delta t - \left[ \frac{Uc}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \right]_B \Delta t$$

$$-\left[\frac{c}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t}\right]_B \Delta t - \left[\frac{c\Psi}{S}\right]_B \Delta t = 0 \quad (8-51b)$$

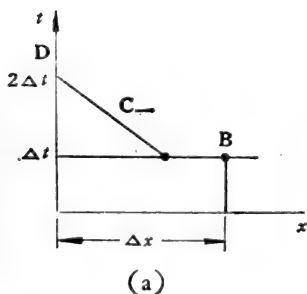
已知  $x = 0$  处的值,即可进行计算。

(3) 远端边界点。如图 7-28 (b) 示。

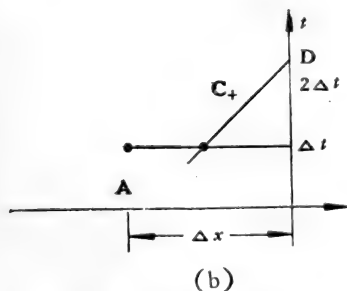
$$L - x_A = (U + c)_A \Delta t \quad (8-52a)$$

$$U_D - U_A + \frac{1}{\rho c_A} [p_D - p_A] - f_A \Delta t + \left[\frac{Uc}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x}\right]_A \Delta t + \left[\frac{c}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t}\right]_A \Delta t + \left[\frac{c\Psi}{S}\right]_A \Delta t = 0 \quad (8-52b)$$

结合终端条件进行计算。



(a)



(b)

图 7-32 特征线数值计算  
典型问题(2)、(3)

### § 8-3 有限幅度波传播特性及激波

如§ 8-1 所指出,若  $S = S(p, x, t)$ , 则一维非定常管流方程组是双曲型的, 其特征线可能收敛而形成间断。

物理上, 特征线代表有限幅度扰动的传播, 特征线收敛意味着扰动传播速度  $a$  随着扰动强度增大, 以致波形变陡, 最终形成激波。

不可压缩流体在可变形管内流动时, 波形怎样发生畸变? 会不会形成激波? 在什么条件下产生激波? 这种激波和可压缩流体运动时的

激波有何不同? 生理上有什么意义? 等等, 这些问题的探讨是

饶有兴味的。

考虑最简单的情况,忽略流体粘性和分流,则流动服从:

$$U \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (8-6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (8-11')$$

设  $p = p(S, x, t)$ , 则  $U = U(S, x, t)$ , 这样(8-6)、(8-11')变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{d(US)}{dS} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \left( U + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dU} \right) \frac{dU}{dS} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-53)$$

当  $S(x, t) = \text{常数}$  时,

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_s = 0$$

$$\therefore \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_s = - \frac{\partial S / \partial t}{\partial S / \partial x}$$

又当  $U = \text{常数}$  时,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_u = 0$$

$$\therefore \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_u = - \frac{\partial U / \partial t}{\partial U / \partial x}$$

应用(8-53)得

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_s = U + S \frac{dU}{dS}$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_u = U + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dU}$$

因为  $S(x, t) = \text{常数}$  时, 必定有  $U = \text{常数}$ , 故

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u$$

$$\therefore S \frac{dU}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dU}$$

$$\therefore c^2 = \frac{S}{\rho} \cdot \frac{dp}{dS}$$

$$\therefore \frac{dU}{dS} = \pm \frac{c}{S} = \pm \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{dp}{dS} \quad (8-54)$$

考虑 I 族特征线(右行波), 波速为

$$a = U + c$$

$$\therefore \frac{da}{dS} = \frac{dU}{dS} + \frac{dc}{dS} \quad (8-55)$$

$$\therefore p = p(S, x, t)$$

$$\therefore \frac{dc}{dS} = \frac{1}{2\rho c} \cdot \frac{dp}{dS} \left[ 1 + \frac{S}{\frac{dp}{dS}} \cdot \frac{d^2p}{dS^2} \right] \quad (8-56)$$

$$\therefore \frac{da}{dS} = \frac{1}{2\rho c} \cdot \frac{dp}{dS} \left[ 3 + \frac{S}{\frac{dp}{dS}} \cdot \frac{d^2p}{dS^2} \right] \quad (8-57)$$

因为  $dp > 0$  时,  $dS$  总是大于零的, 即  $\frac{dp}{dS} > 0$ , 故由

(8-57)可知:

若  $\left( 3 + \frac{S}{\frac{dp}{dS}} \cdot \frac{d^2p}{dS^2} \right) > 0$ , 则扰动波速随  $S \uparrow$  (即  $p \uparrow$ ) 而增

大, 波形变陡, 可能收敛形成激波。如图 7-33 示。

若  $\left( 3 + \frac{S}{\frac{dp}{dS}} \cdot \frac{d^2p}{dS^2} \right) < 0$ , 则扰动波速随  $S \uparrow$  (即  $p \uparrow$ ) 而

减小, 波形变平坦, 不会形成激波。

若  $\left(3 + \frac{S}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dS^2}\right) = 0$ , 则波形在传播过程中不会发生

畸变。

应该指出, 这种激波和气动激波的物理本质是不一样的, 后者是流动介质的有限幅度压缩波, 而前者是可变形管壁内有限幅度应力波, 表现为管截面积的突变, 流动参数的突变是截面积突变所致。这种激波能量损失是壁材料粘性引起的。

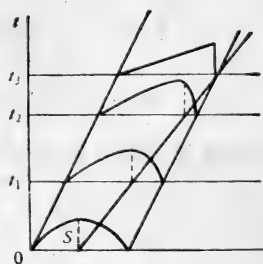


图 7-33 波形畸变

生理测量表明, 动脉中, 从主动脉到远端, 压力和流量波形总是变陡的, 即动脉血管的压力-半径关系满足条件:

$$\left(3 + \frac{S}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dS^2}\right) > 0 \quad (8-58)$$

但(8-58)只是激波形成的必要条件。实际上能否形成还要看压力扰动的幅度和流场的纵向尺度。即: 从有限幅度扰动到激波形成有一发展过程。

人体动脉内会不会形成激波? Rudinger<sup>[60]</sup>作了简单的分析。

设主动脉瓣位于原点, 瓣膜关闭时  $u = 0, p = p_0$ , 这里  $p_0$  为舒张压。当左室内压高于  $p_0$  时, 瓣膜打开, 开始射血。  $t = 0$  时刻波速为  $c_0$ ;  $t = \Delta t$  时刻,  $u = u_1, c = c_1$ , 波速为  $(u_1 + c_1)$ , 如图 5-34 所示, 在  $x-t$  平面上点 2 处, 后波赶上前波, 所需距离为  $l_s$ 。现对  $l_s$  作一估计。

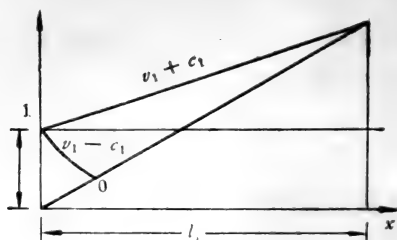


图 7-34 主动脉瓣附近形成激波的条件

当瓣膜打开时,左室内压  $p_v$  相当于总压

$$p_v = p + \frac{1}{2} \rho u^2$$

在  $\Delta t$  时刻,  $u_1$  仍然很小,  $\therefore u_1^2$  可忽略不计, 此时,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp_v}{dt} = r_p \quad (8-59)$$

$r_p$  为主动脉瓣开启时,左室内压力升高率。

应用特征线关系,

$$u_1 = \frac{\Delta p}{\rho c_0} = \frac{r_p}{\rho c_0} \cdot \Delta t$$

波速  $c_1$  可展为  $\Delta t$  的幂级数

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 + \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\right)_0 \Delta t^2 + \dots \\ &= c_0 + \left(\frac{dc}{dp}\right)_0 r_p \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 c}{dp^2}\right)_0 r_p^2 \Delta t^2 + \dots \end{aligned}$$

由图 7-34 可见:

$$\frac{l_s}{c_0} = \frac{l_s}{u_1 + c_1} + \Delta t$$

$$\therefore l_s \approx \frac{\rho c_0^3}{r_p \left[ 1 + \rho c_0 \left(\frac{dc}{dp}\right)_0 \right]} \quad (8-60)$$

可见,激波形成距离取决于舒张压下的波速,射血开始时左室压力升高率  $r_p$ , 及  $p = p_0$  时的  $\frac{dc}{dp}$ 。

在正常条件下,主动脉瓣处的压力脉动发展为激波所需要的距离超过动脉血管的长度。故正常人可以在远端支动脉观测到压力波变陡的现象,激波却未出现。但在特殊环境中或在病理状态下,激波或类激波是可能在动脉内形成的。

例如,主动脉瓣闭锁不全时,舒张期发生血液大量回流,为满足全身组织对血流量的需求,收缩时心输出量必须增大,但收缩时间不变,这样射血速度很高,压力幅度很大,再加上高速射流与大流量回流相“碰撞”,主动脉口的压力波变得更陡。Anliker 等假设病态心输出曲线如图 7-35 示,正部分射血量和正常人一样,负区域回流量达射血量的 73% (已观察到有的病人回流量达 80%),以此为始端条件,其他和正常人一样,计算结果如图 7-36 示。它表明,在  $x > 20 \text{ cm}$  的地方,压力脉冲形成陡而尖的峰——类激波。由于壁材料粘性的作用,尖峰波衰减很快。若取平均压力下的波速与类激波通过时间的乘积为类激波的厚度,则这种激波相当厚,达当地血管半径的 10 倍,这和气动激波很不一样。

类激波作用于血管壁可能引起: (i) 血管壁的损伤——

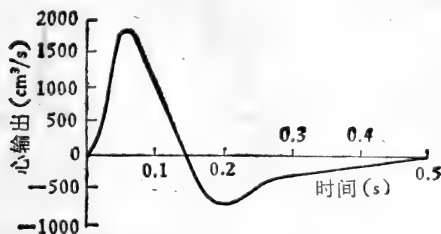


图 7-35 病态心输出曲线<sup>[36]</sup>

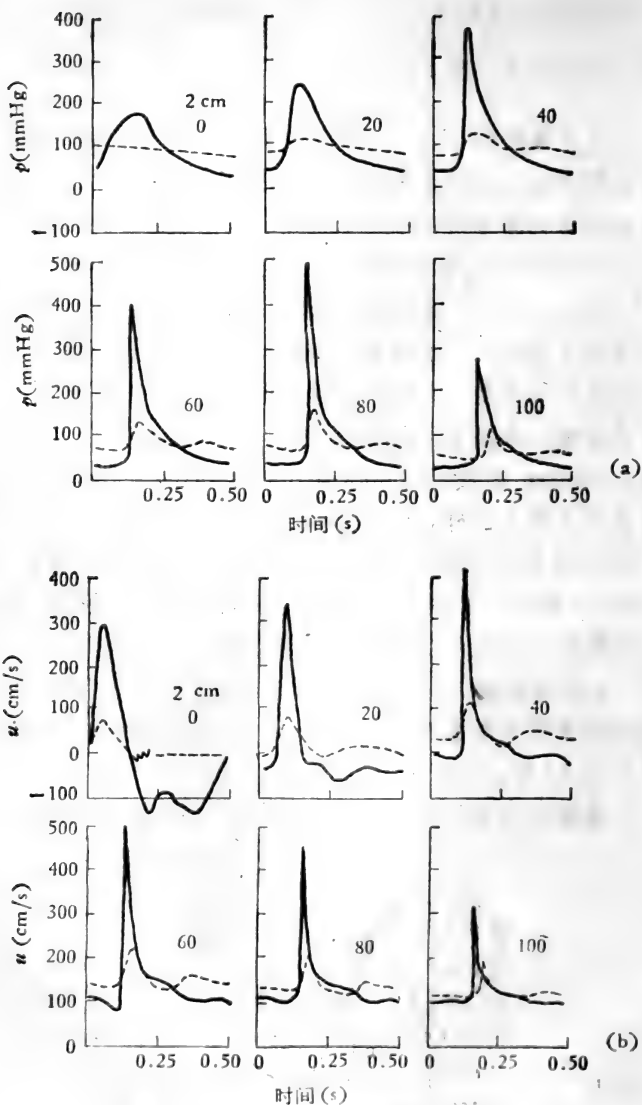


图 7-36 压力脉冲形成类激波<sup>[56]</sup>  
 (a) 压力波形的变化, (b) 速度波形的变化。



慢性损伤或突然破裂；(ii) 血管壁作高频振动，发出象手枪射击那样的声音；(iii) 在挠动脉、股动脉可摸到有尖突的脉象。

Kivity 和 Collin<sup>[57]</sup> 对于正常人，在高加速度场（如汽车碰撞）中，主动脉中压力脉冲的变化作了数值分析（用有限差分法），当过载为 50g 时，所得结果如图 7-37 与图 7-38 示。据此，Kivity 等认为：在强减速场中，主动断裂的机理是：压力脉冲发展为类激波，波前后管壁应变极大，引起断裂。

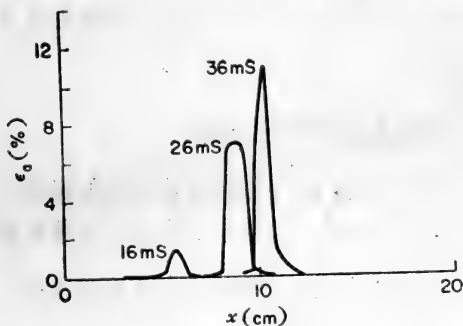


图 7-37 类激波位置<sup>[57]</sup>

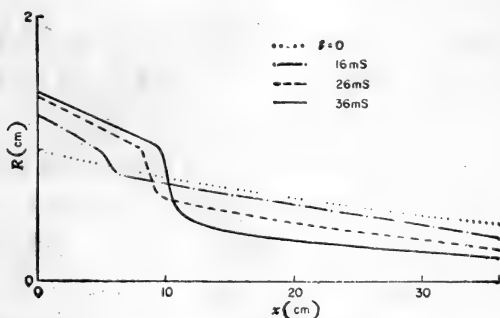


图 7-38 类激波引起的管径变化<sup>[57]</sup>

此外，Beam<sup>[61]</sup> 用拉格朗日方法分析了可变形管内有限幅度波的传播，说明波是否畸变、怎样畸变（变陡还是变平

坦),取决于: (i) 管壁材料特性; (ii) 管壁应力状态——是膨胀管还是压塌管。若  $p = F(\kappa)$ ,  $\kappa = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{S_0}{S} \right)^2 \right]$ , 则对于膨胀管, 右行波在  $\frac{d^2 p}{d\kappa^2} = F''(\kappa) > 0$  的区域内波形变陡, 在  $F''(\kappa) < 0$  的区域内, 波形变平坦; 对于压塌管, 右行波在  $F''(\kappa) < 0$  的区域内, 波形变陡, 在  $F''(\kappa) > 0$  的区域内波形变平坦。若  $F''(\kappa) = 0$ , 则无论是膨胀管还是压塌管, 波形均无畸变。

#### § 8-4 动脉血流非线性分析

Lambert 首先将特征线法应用于动脉血流, 但所取参数不当, 结论不正确。Streeter 等<sup>[53]</sup>作了改进, 考虑了粘性的作用, 在测得  $\frac{\partial p}{\partial x}$  的条件, 计算了股动脉中流量的变化, 结果良好。此后 Zeller 等<sup>[55]</sup>、Anliker 等<sup>[56]</sup>、Wemple 和 Mockros<sup>[54]</sup>等作了进一步发展。

Schraf 和 Abbrecht<sup>[50]</sup>用特征线法计算了人体挠骨动脉、膝膈动脉等 14 个部位上的  $p$ 、 $Q$  波形。图 7-39 是根据左心室输出量测量曲线算出的从主动脉—挠动脉的  $p$ 、 $Q$  波形变化; 图 7-40 是升主动脉阻抗谱计算值与测量结果的比较, 二者合理地一致。但股动脉计算阻抗与测量结果差异显著。总的说来, 在同样条件下, 用同一方法求解, 非线性模型与线性模型相比, “噪声”更小些, 结果更为良好。

Anliker 等用特征线法分析了各种参数对动脉系波形的影响。他们根据正常人生理测量结果, 规定一种标准状态, 然后逐一改变生理参数, 分析这种改变所引起的波形变化。图 7-41 是直径减小 20% 时, 压力波形的变化; 图 7-42 是动脉硬

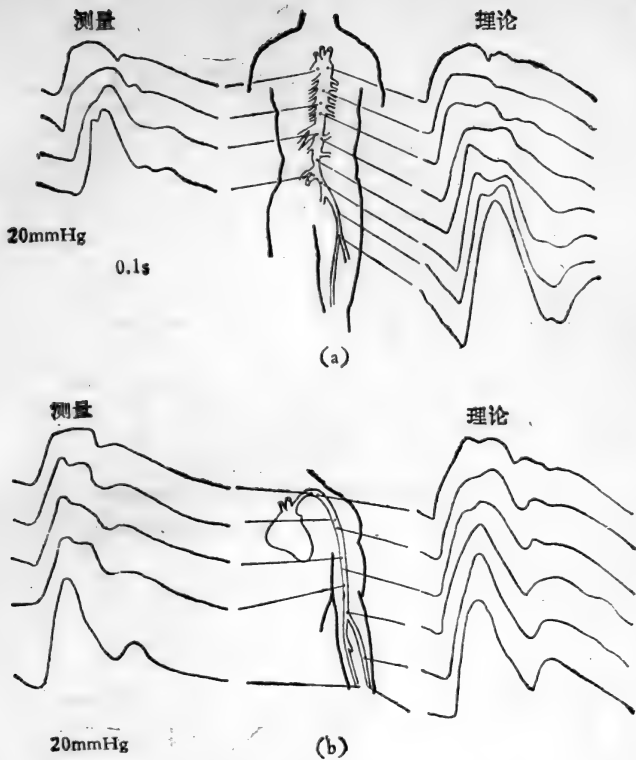


图7-39 主动脉—挠动脉及股动脉的  $p$ 、 $Q$  波形变化。  
理论与测量结果比较<sup>[59]</sup>

(a) 从胸主动脉至下肢，(b) 从心脏至挠动脉。

化，波速增大 40% 时，压力波形的变化。此外还计算了心输出、心率、收缩容量等因素改变的影响。结果表明，这些因素的变异将使  $p$ 、 $Q$  波形发生显著的改变。因此，用无创方法检测压力脉冲波形变异，来作为心血管疾病早期诊断手段是有前景的。

Rumberger 和 Nerem<sup>[62]</sup> 分析了马的冠状动脉内的波动特

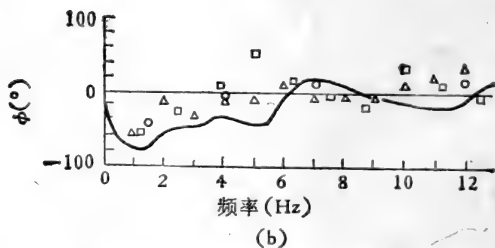
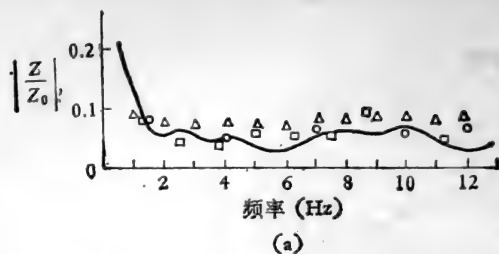


图 7-40 升主动脉阻抗谱。理论值与测量值比较<sup>[15]</sup>

(a) 幅值随频率的变化, (b) 相位角随频率的变化。

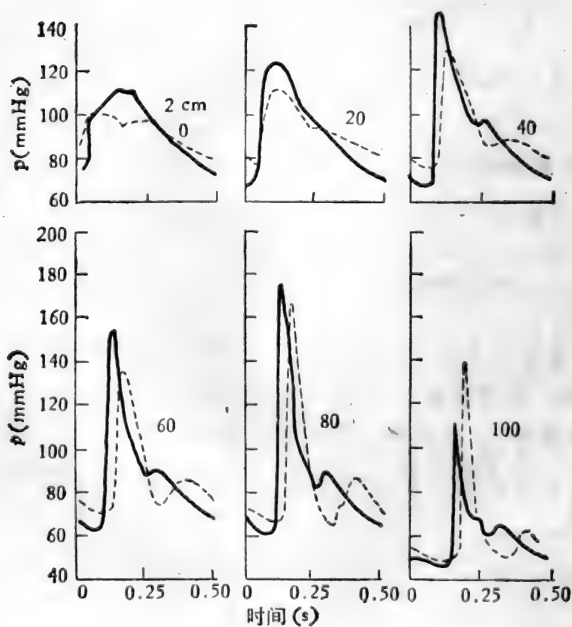


图 7-41 血管直径减小20%,引起的压力波形变化<sup>[15]</sup>

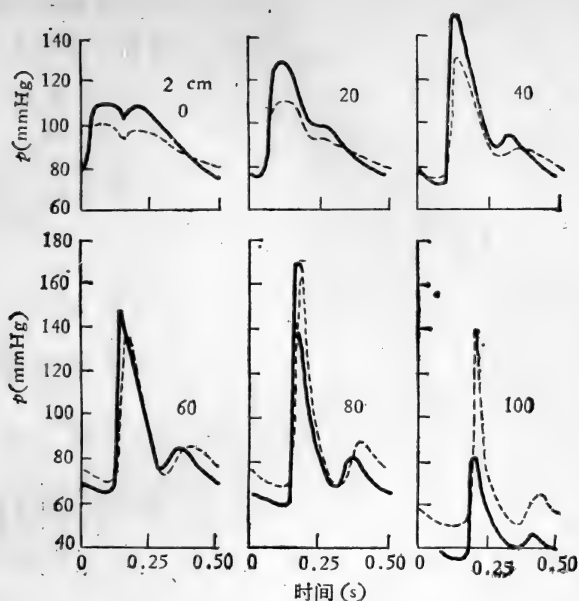


图 7-42 波速提高 40% 时压力波形的改变<sup>[56]</sup>

性,特征线法计算结果与测量值作了比较,一致性良好。

除了特征线法外, Shapiro 和 Olsen 用扰动法求方程(8-8)(8-9)的解析解,  $p$ - $S$  关系用 Treloar 公式, 给出了二级近似解。但所用  $p$ - $S$  关系决定了波形不会因非线性效应而发生畸变, 故计算结果是否适用于动脉是可疑的。Gerrard 和 Taylor 用有限差分法(非特征线法)作了数值计算, 所用摩擦因子考虑了各种频率的谐波分量的影响, 但是按他们所用的  $p$ - $S$  关系, 声速是随压力增大而变小的, 这不适于动脉血管。Kivity 和 Collin 假设流体是无粘性的, 但  $p$  不仅与  $s$  有关还与  $\frac{\partial S}{\partial t}$  有关, 计及体积力, 分析了加速场中的非线性血流, 用 Lax 方法作数值计算, 所得结果见图 7-35 和图 7-36。

上述分析均基于一维流动方程，无法看出非线性项对速度剖面的影响。Ling 和 Atabek<sup>[28]</sup>从轴对称简化非线性流动方程出发：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-61)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (8-1)$$

径向边界条件为

$$\left. \begin{aligned} r = R: \quad u &= 0 \\ v &= \frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

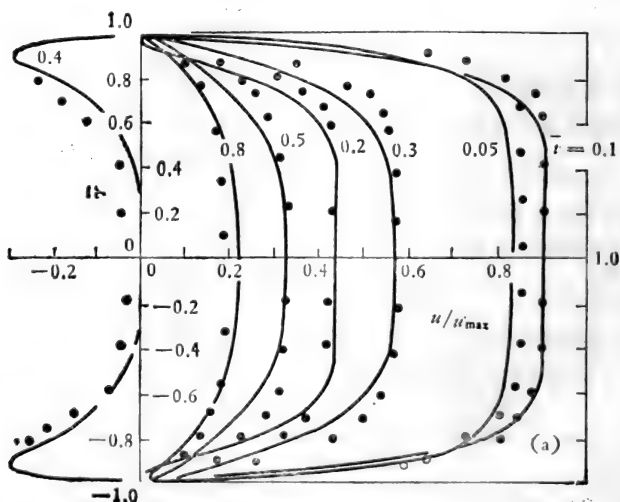


图 7-43 速度剖面计算结果与测量数据的比较<sup>[28]</sup>

$$r = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (8-62)$$

$R$ - $p$  关系用经验方程:

$$\frac{d(p/\bar{p})}{p/\bar{p}} - \frac{4d\left(\frac{R}{R_0}\right)}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^5 \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - \left(\frac{R}{R_0}\right)} = 0 \quad (8-63)$$

$\bar{p} = 100 \text{ mm Hg}$ ,  $R_0$  为平衡态半径。

基于此, 根据测得的  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , 算出了速度分布, 典型结果见图 7-43, 和实验结果相当一致。

### § 8-5 左心室-动脉血流综合分析

到此为止, 分析动脉血流时, 均将主动脉口的输入视为已知条件, 故所论实质上是动脉系统对不同输入的响应; 至于动脉系统特性对心脏输出的影响则不予考虑。实际上, 二者之间相互作用相当强。把它们联系起来, 建立心脏-动脉系功能组合模型, 研究其运动规律, 无论在理论还是实践上, 均是有意义的。

作为初步尝试, Carey 等<sup>[63]</sup>用 Sonnenblick 心肌力学模型结合动脉血流一维特征线方法, 进行了分析。

#### 1. 左心室模型

首先, 假设心肌收缩过程可用 Sonnenblick 模型(见第五章), 即心肌张力  $T$ 、长度  $l$ 、收缩速度  $V$  满足下述关系

$$\left(\frac{V}{V_m}\right)^2 + k^2 \left(\frac{T_m - T}{kT_m + T}\right) \left[ \left(\frac{l - l_m}{l_0 - l_m}\right)^2 \frac{T_m^2}{(T_m - T)^2} - 1 \right] = 0 \quad (8-64)$$

进而设左心室为薄壁球壳,壁厚为  $h$ ,内半径为  $R, R \propto l$ , 则(8-64)可改写为:

$$\left(\frac{V}{V_m}\right)^2 + k^2 \left(\frac{T_m - T}{kT_m + T}\right) \left[\left(\frac{R - R_m}{R_0 - R_m}\right)^2 \frac{T_m^2}{(T_m - T)^2} - 1\right] = 0 \quad (8-65)$$

脚标  $m$  表示最大值,但  $R_m$  为  $T = T_m$  时的  $R$  值,  $0$  为自然状态,  $k$  为常数。

心肌壁张力  $T$  与左心室内压力  $p$  的关系可用拉普拉斯定律为其近似:

$$T = \frac{pR}{2h} \quad (8-66)$$

按 Sonnenblick 模型,取弹性元模量为  $K_s$ , 则

$$V = \frac{1}{K_s T} \cdot \frac{dT}{dt} - 2\pi \frac{dR}{dt} \quad (8-67)$$

$R$  的变化和通过主动脉瓣的流量  $Q$  平衡,即:

$$Q = S_0 U = -4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \quad (8-68)$$

$U$  为主动脉口平均流速,  $S_0$  为平衡截面积。

方程(8-65)–(8-68)包含五个未知量:  $V, R, T, p, U$ , 不足以定解,必须和动脉血流方程联立。

## 2. 动脉血流一维运动方程

按(8-8)(8-9)(8-4),动脉血流服从方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial U}{\partial x} + \phi = 0 \quad (8-8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + f \quad (8-9)$$

$$S = S(p, x, t) \quad (8-4)$$



这样,整个方程组有七个未知量:  $T$ 、 $V$ 、 $R$ 、 $p$ 、 $U$ 、 $S$ 、 $c$ , 7个独立方程足以定解。

Carey 等在给定终端边界条件下,用特征线法求出了数值解。

当然,这个模型还相当粗糙,离解决实际问题尚有相当距离,但这是可喜的第一步。

## §9 静脉血流的流体力学问题

人体血容量的 80% 在静脉,静脉回流对于心输出量有决定性的影响。故静脉血液流动规律的研究,对于认识心血管生理现象,极为重要。

与动脉血流相比,静脉血液流动的特点(从力学观点来看)是:

(1) 静脉血管壁很薄,壁厚-半径比  $\left(\frac{h}{R}\right)$  比动脉血管小得多。二者差别约略如下:

主动脉: 0.16      动脉: 0.25      小动脉:  $\frac{4}{3}$

大静脉: 0.10      静脉: 0.20      小静脉: 0.10

因而静脉血管比动脉血管更符合薄壁假设。

(2) 静脉血管内压力相当低。据测量正常人卧姿静脉平均压力仅比大气压高 0—15 cm H<sub>2</sub>O。对静脉血流来说,血管外的压力 ( $p_e$ )、重力等影响相当重要,不可忽视。而  $p_e$  又受呼吸、肌肉收缩等因素影响。

(3) 静脉血管弹性模量较低。当  $p - p_e = 0 - 10$  cm H<sub>2</sub>O 时,静脉血管的杨氏模量 ( $E$ ) 在  $0.6 - 4.0 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup> 之间,为相应动脉的  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ 。再加上壁很薄,故静脉血管的截面刚

度较小,很容易被压塌。实验证明,受压状态下,静脉血管的管截面积与管内、外压差的关系与图 7-7 所示薄壁乳胶管类似。当  $(p - p_c) > 1.5 \times 10^3 \text{ N/m}^2$  时,静脉血管截面为圆形,刚度较好;  $1.0 < (p - p_c) < 1.5 \times 10^3 \text{ N/m}^2$  时,管截面仍为圆形,但面积缩小,刚度大大下降;  $0.5 < (p - p_c) < 1.0 \times 10^3 \text{ N/m}^2$  时,截面积变为椭圆形,失稳,刚度很小,面积猛降,周长缩短(这和乳胶管不同,后者周长不变);当  $-0.1 < (p - p_c) < 0.5 \times 10^3 \text{ N/m}^2$  时,截面形状由椭圆变为双凹形,相对表面仅相接于一点,面积继续猛降,刚度很小。当  $(p - p_c)$  继续变小时,血管截面变为哑铃状,形成双隧道管,此时管截面积很小,但刚度很大。Wild 等<sup>[74]</sup>拟合 Moreno 等人的实验<sup>[75]</sup>结果,得如下近似关系:

$$\frac{p - p_c}{K_{p_0}} = \frac{1}{\beta} \left[ 0.34(3\beta - 1) + 0.01(3\beta - 1)^5 + 0.1 \frac{3\beta - 1}{\beta^2} e^{-5\beta} \right] \quad (9-1)$$

这里,  $K_{p_0}$  是静脉血管为圆形时的截面刚度,  $\beta = \frac{A}{A_0}$ 。

(4) 流动切变率较低,较大的静脉里平均切变率  $\bar{\gamma} \approx 130\text{s}^{-1}$ , 腔静脉  $\bar{\gamma} \approx 40\text{s}^{-1}$ , 此时血液的非牛顿效应相当显著。

(5) 因为波速与  $\sqrt{\frac{h}{R}}$ 、 $\sqrt{E}$  成正比,故扰动在静脉血管中的传播速度很低。据测量,在膨胀状态(即管壁受周向拉应力作用)下,同样尺寸的动脉血管的波速  $c_a$  是静脉血管波速  $c_v$  的 5.5 倍。可塌管波速更低。按 Attinger 测量,  $p - p_c = -0.5 \text{ cm H}_2\text{O}$  时,  $c_v \approx 60 \text{ cm/s}$ , 腔静脉流速  $U \sim 20 \text{ cm/s}$ , 因而,  $\Lambda = \frac{U}{c_v} = \frac{1}{3} \sim \mathcal{O}(1)$ , 这样, (i) 流动方程中, 迁移加速

度项无法忽略,不能线性化。(ii)心率不变时,  $\lambda_v = \frac{c_v}{f}$  小, 故

若用集中参数法计算时,要获得与动脉血流同样的精度,在同一长度上,必须分成更多管段,计算时间及所要求的计算机容量将大大增大。

(6) 静脉血流的脉动性比动脉小得多,可近似看作一平均定常流动叠加一个小幅度振荡,这比动脉简单。然而,静脉血流脉动性状本身比较复杂,因为它是:(i)由毛细血管传来的左心室搏动;(ii)来自右心房的搏动;(iii)呼吸运动或肌肉收缩-松弛引起的脉动,三者的综合。

(7) 几乎所有的远支静脉都具有瓣膜。瓣膜模型化本身并不困难,可看作某种非线性接头。主要问题是,它使得静脉流动的性质大大复杂化了。

总的来说,静脉血流的力学问题比动脉血流困难得多。而最大的困难(也是静脉流动最突出的特点)则是:静脉血流是一种可坍管流动,高度非线性。§4 已对可坍管定常流动的一般特点作了介绍,这里仅介绍一些典型的实验结果和一种集中参数模型。然后,再就静脉血流一般理论作一概述。

### § 9-1 可坍管定常流动的特点

四十年代, Holt<sup>[76]</sup> 就用 Starling 液阻器(一根乳胶软管装在两根刚性管上,软管密封在一个容器里)观测过可坍管定常流动的上、下游压差 ( $\Delta p = p_1 - p_2$ ) 与流量 ( $Q$ ) 的关系。五十年代 Rodbard<sup>[77]</sup> 将它和局部血流的调节联系在一起。六十年代末以来,研究可坍管流的人很多,生理背景也各有所异。其中最具有代表性的,或许是 Conrad 等人<sup>[78]</sup> 的实验。它揭示了可坍管流动的特性:

(1) 若降低下游压力 ( $p_2$ ) 而保持其它条件不变,则一开

始流量 ( $Q$ ) 增大, 当  $p_2 \leq p_c$  (外部压力) 时, 流量不再因  $p_2$  改变而变化, 此即流量限制现象, 其原因已述于 § 4。

(2) 若改变上游压力 ( $p_1$ ) 而固定其他条件, 则所测得的压差-流量曲线呈  $N$  形,  $\Delta p$  有一个峰值, 其左侧有一负阻区, 即  $\frac{d(\Delta p)}{dQ} < 0$  的区域。

(3) 负阻区流动是不稳定的, 可能发生自激振荡。

$\Delta p$ - $Q$  图上的峰值是怎样形成的呢? 当  $p_1 > p_2 > p_c$  时, 管截面形状为圆, 由于流量小时阻力小, 故  $\Delta p$  随  $Q$  降低而变小 (不论层流还是湍流, 都是如此), 当  $p_2 < p_c$ , 且  $(p_2 - p_c)$  小于某一临界值  $p_b$  时, 管壁失稳, 与  $p_2$  相应的管截面被压坍, 截面积大大减小, 而其下游, 由于有刚性管支持, 管截面积不变。这样,  $Q$  的减小有双重作用: (i)  $Q$  减小本身使  $\Delta p$  减小; (ii) 随着  $Q$  减小,  $(p_2 - p_c)$  也减小, 故  $\frac{A}{A_0}$  减小 ( $A$  为当地管截

面积,  $A_0$  为  $p_2 = p_c$  时的管截面积), 在最小截面上游形成一收缩段流动加速, 速度的横向梯度增大, 摩阻增大; 另一方面, 流动在最小截面下游因迅速扩散而分离, 使流动损失剧增。在一定范围内,  $(p_2 - p_c)$  越小 ( $Q$  越小)  $\frac{A_0}{A}$  越大, (ii) 的作用就

越大, 与 (i) 相比, (ii) 占主导地位, 故总的来说, 一旦压坍, 一开始  $\Delta p$  随  $Q$  减小而增大, 即  $\frac{d(\Delta p)}{dQ} < 0$ , 形成负阻区。但当

管截面变为双凹形, 相对表面相接触时, 截面刚度剧增,  $(p_2 - p_c)$  进一步降低, 只会使截面积发生不大的改变。这时, (i) 与 (ii) 相比, 可能占主导地位, 即  $\Delta p$  随  $Q$  的进一步减小而减小, 此时  $\frac{d\Delta p}{dQ} > 0$  (即正阻区)。当流动从  $\frac{d(\Delta p)}{dQ} < 0$  变为

$\frac{d(\Delta p)}{dQ} > 0$  时,在某一点上  $\frac{d(\Delta p)}{dQ} = 0$ , 此即  $\Delta p - Q$  曲线的峰点。

至于自激振荡,那是水力-弹性耦合作用下,管壁失稳的一种形式。Matsuzaki 和冯元桢<sup>[79,80]</sup>、Shayo 和 Ellen<sup>[81]</sup>、Weaver 和 Paidoussis<sup>[82]</sup>、Grotberg 和 Davis<sup>[83]</sup> 等对短圆管(简支)、长圆管(简支)、二维渠道(简支分布弹性支撑)等的水-弹性稳定性问题作了分析,流体动力由位势流解给出,因而没有考虑粘性作用,也不计层流、湍流的影响。

关于振荡发生的具体机理,除了上述一般的水-弹性失稳外,还有几种说法:

(1) Pedley 假说: 最小截面下游,由于刚性管支持,截面积迅速扩张,流动分离,使得  $p_2(t) = p_2 + \tilde{p}'$  增大,有可能高于  $p_c$ , 管壁被撑开。此时,流量增大,  $p_2(t)$  变小,可能小于  $p_c$  而再次压坍,如此反复,形成振荡。

(2) 超临界流动‘堵塞’引起振荡,这也是一种失稳现象。但实验证明,流动亚临界时,也能发生振荡。

(3) Conrad 用电模拟集中参数模型来表征可坍管流动,此模型的性状可用 Van der Pol 方程描述。这样,振荡归因于 Van der Pol 方程失稳。据此,Conrad 提出了一个振荡发生的判据,令

$$r = -\frac{d(\Delta p)}{dQ} \quad (9-2)$$

设管路其余部分的总阻抗为  $Z(\omega)$ , 则当

$$r > |Z| \quad (9-3)$$

时,发生自激振荡。

目前,关于振荡机理尚无完备的理论,很可能各种假说是互为补充的。下面介绍一种集中参数模型,它既可用于求平

衡解,亦可用以确定振荡的条件。

## § 9-2 可坍管定常流动的集中参数模型

根据 Conrad 的实验, Pedley<sup>[84]</sup> 提出了一个集中参数模型。假设:

(1) 可坍管段的几何形状完全可用一个变量——最小截面积来规定,且管截面积取决于当地管内外压差,即服从管律;

(2) 流动是一维的;

(3) 摩阻和分离引起的能量损失可以用集中参数法分别处理。

据此,以  $(p - p_c) = 0$  时的截面积  $A_0$  为参考,取参考速度为  $U_0$ , 这样参考时间为  $R_0/U_0$  ( $A_0 = \pi R_0^2$ ), 以此为尺度,无量纲化,得下述模型。

(1) 管律:

$$p - p_c = P(\beta) \quad (9-4)$$

这里压力以  $\rho U_0^2$  为尺度无量纲化,  $\beta = \frac{A}{A_0}$ , 方程中所有的量都是无因次量(下同)。

(2) 质量守恒: 分两段考虑

收缩部流量 = 下游端流量

$$u\beta = u_2 \quad (9-5)$$

这里脚标 1 表示上游, 2 表示下游, 无下标表示最小截面上的量。  $u$  是流速(无量纲)。

对上游段:

$$u_1 - u\beta = lA_v \quad (9-6)$$

$l$  是上游段无量纲长度,  $A_v$  为上游段平均截面积, 设

$$A_v = \frac{1}{2}(1 + \beta) \quad (9-7)$$

$$A_v = \frac{dA_v}{dt} \quad (9-8)$$

(3) 刚性管流动的动量方程: 设上、下游集中流阻为  $\mathcal{R}_1$  和  $\mathcal{R}_2$  (无量纲), 上游压头为  $P_{01}$ , 下游接大气,  $P_{02} = 0$ , 这样有:

$$\left. \begin{aligned} P_{01} - p_1 &= \mathcal{R}_1 u_1 + I_1 \dot{u}_1 \\ p_2 &= \mathcal{R}_2 u_2 + I_2 \dot{u}_2 \end{aligned} \right\} \quad (9-9)$$

$I_1, I_2$  分别为无量纲流感。

(4) 收缩下游的动量方程: 由于迅速扩张, 流动分离, 可忽略壁面摩阻, 这样得

$$p + \beta u^2 = p_2 + u_2^2 \quad (9-10a)$$

结合连续方程(9-5), 得:

$$p - p_2 = -f(\beta) u_2^2 \quad (9-10b)$$

$$\text{当 } \beta < 1, u_2 > 0 \text{ 时: } f(\beta) = \frac{1}{\beta} - 1 > 0 \quad (9-11a)$$

$$\text{当 } \beta \geq 0, u_2 > 0 \text{ 时: } f(\beta) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \leq 0 \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\text{当 } \beta < 0, u_2 < 0 \text{ 时: } f(\beta) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta^2} - 1 \right) > 0 \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \quad (9-11b,c)$$

(5) 收缩上游动量方程: 将上游收缩段看作截面积变化缓慢的椭圆管, 雷诺数不高时, 其阻力用润滑理论给出<sup>[74]</sup>。同时, 考虑到上游段相当长, 流体惯性不可忽略, 这样上游段动量方程为:

$$p_1 + \frac{1}{2} u_1^2 - \left( p + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{l}{4} c_f \mu + l \dot{u}_v \quad (9-12)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} c_f &= \frac{4}{\beta \cdot Re} \left( \delta + \frac{1}{\delta} \right) \\ Re &= \frac{\mu R_0 U_0}{\rho} \end{aligned} \right\}$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \beta \geq 1 \\ \frac{8\beta}{\pi}, & \beta < 1 \end{cases} \quad (9-13)$$

$$u_v A_v - u\beta = \frac{1}{2} l A_v \quad (9-14)$$

7个未知量  $p, p_1, p_2, u, u_1, u_2, \beta$  由7个独立方程(9-4)(9-5)(9-6)(9-9)(9-10)(9-12)确定。所涉及的  $A_v, \dot{A}_v, f(\beta), c_1, \delta, \dot{u}_v$  则由(9-7)(9-8)(9-11)(9-13)(9-14)规定,  $l$  的选择具有一定的任意性,  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, I_1, I_2, P_0$  是已知的, 而管律(9-4)的具体形式, 是经验的。可用(9-1), 也可用其他形式, Pedley 曾提出过一个更简单的形式:

$$P(\beta) = \begin{cases} K_{P_0} \left(1 - \frac{\beta_c}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}, & \beta < \beta_c \\ 10K_{P_0} \left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1\right), & \beta > \beta_c \end{cases} \quad (9-15)$$

$$K_{P_0} = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)R_0^3}, \quad \sigma \text{ 泊松比。}$$

$\beta_c$  参考量, 取  $\beta_c = 1$ 。

由此可得平衡解  $(p_1 - p_2) - Q$ , 其形状和实验所得相似, 呈  $N$  形, 有一个峰值。

$$\text{令} \quad \left. \begin{aligned} \beta &= \beta_0 + \beta' e^{\gamma t} \\ u &= u_0 + u' e^{\gamma t} \\ u_2 &= Q_0 + u_2' e^{\gamma t} \end{aligned} \right\} \quad (9-16)$$

代入上述方程组, 忽略  $\beta', u', u_2'$  的高阶项, 然后从方程中消去  $\beta', u', u_2'$ , 得一关于  $\gamma$  的三次方程:

$$C_3 \gamma^3 + C_2 \gamma^2 + C_1 \gamma + C_0 = 0 \quad (9-17)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} II_2 \left( I_1 + \frac{l}{1 + \beta_0} \right) \quad ]$$



$$\left. \begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{2} l l_2 \left[ \mathcal{R}_1 - Q_0 - \frac{4Q_0}{(1 + \beta_0)^2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} l \left[ I_1 + \frac{l}{1 + \beta_0} \right] (\mathcal{R}_2 - 2Q_0 f_0) \\
 C_1 &= \frac{1}{2} l (\mathcal{R}_2 - 2Q_0 f_0) \left[ \mathcal{R}_1 - Q_0 - \frac{4Q_0}{(1 + \beta_0)^2} \right] \\
 &\quad + I_2 \left[ P'_0 - \frac{u_0^2}{\beta_0} + \frac{1}{4} l u_0 \left( c'_{f_0} - \frac{c_{f_0}}{\beta_0} \right) \right] \\
 &\quad + \left( I_1 + \frac{2l}{1 + \beta_0} \right) (Q_0^2 f'_0 + P'_0) \\
 C_0 &= (\mathcal{R}_2 - 2Q_0 f_0) \left[ P'_0 - \frac{u_0^2}{\beta_0} + \frac{1}{4} l u_0 \left( c'_{f_0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{c_{f_0}}{\beta_0} \right) \right] + \left( R_1 - Q_0 + \frac{u_0}{\beta_0} + \frac{1}{4} l \cdot \frac{c_{f_0}}{\beta_0} \right) \\
 &\quad \times (Q_0^2 f'_0 + P'_0)
 \end{aligned} \right\} (9-18)$$

这里:  $f_0 = f(\beta_0)$ ,  $c_{f_0} = c_f(\beta_0)$

$$P'_0 = \left. \frac{dK_{P_0}}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0}, \quad f'_0 = \left. \frac{df}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0}, \quad c'_{f_0} = \left. \frac{dc_f}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0}$$

若方程(9-17)只有负实根或实部为负的复数根, 则流动是稳定的(因为扰动是衰减的); 若(9-17)有一个正实根, 则扰动是增长的, 流动不稳定, 但不发生振荡; 若(9-17)有一对实部为正的共轭复数根, 则流动发生振荡。到底发生什么情况, 取决于系数  $C_3$ 、 $C_2$ 、 $C_1$ 、 $C_0$  之间的关系。

$C_3$  总是大于零的, 按 Routh 准则:

(1) 若  $C_0 < 0$ , 则方程至少有一个正实根。此时, 流动不稳定, 但不振荡。

(2) 若  $C_0 > 0$ , 且  $C_2 < 0$ , 或者  $(C_2 C_1 - C_3 C_2) < 0$  (或二者同时成立), 则方程(9-17)有两个实部为正的复数根。此时, 若它们的虚部为零, 则流动失稳, 但不振荡; 若虚部不为

零,则流动失稳,且发生自激振荡。

(3) 若  $C_0$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  均为正值,而  $(C_2C_1 - C_3C_2) < 0$  那么方程一定具有一对实部为正的共轭复根,流动失稳,发生自激振荡。

按照这个模型,振荡并不一定限于负阻区。

### § 9-3 静脉脉动流

静脉脉动流问题由于管壁可压坍(失稳)而变得十分复杂。近年来,人们试图用传输线理论来处理静脉流动问题。这时,首要的是确定纵向阻抗和横向阻抗,为此,必须讨论一段静脉血管内的流动规律。

作为粗略的近似,忽略流动迁移项的影响,则流动服从线性化纳维-司托克斯方程

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p \quad (9-19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9-20)$$

由(9-19)得:

$$\left( \mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{v} = \nabla p$$

$$\therefore \nabla \cdot \left[ \mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right] \mathbf{v} = \nabla^2 p$$

微分算子可交换,

$$\therefore \left( \mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla^2 p$$

应用(9-20),得

$$\nabla^2 p = 0 \quad (9-21)$$

尽管方程是线性的,由于边界形状是压力  $p$  的函数,整个问题仍然是非线性的。

但是,根据静脉流动的特点,对任一段静脉可选择一个工作压力,实际血压  $p$  在其附近波动,在这个小范围内,截面形状可以看作是不变的,只是面积在某一平均值附近略有波动,这样的系统是线性的。

取笛卡尔坐标系  $(x, y, z)$ , 设:

$$p = P(x, y) e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \quad (9-22)$$

这样,(9-21)变为

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\omega^2}{c^2} P = 0 \quad (9-23)$$

设

$$\left| \frac{\omega}{c} \right| \ll 1$$

则:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (9-24)$$

即沿截面压力不变。

进而,因为静脉壁很薄,惯性很小,设壁振动和压力脉冲同步,则

$$S = \tilde{S} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}$$

据此,得流量:

$$Q = -c\tilde{S} \quad (9-25)$$

复波速  $c$  应从流动方程及边界条件求出。在不同工作压力下,静脉血管的截面形状很不一样。Kresch 和 Noordergraaf<sup>[64]</sup> 将它们归结三种典型的截面,如图 7-44 示。

当  $(p - p_c) > 0$  时,截面呈圆形,平衡半径为  $R$ ,则可用

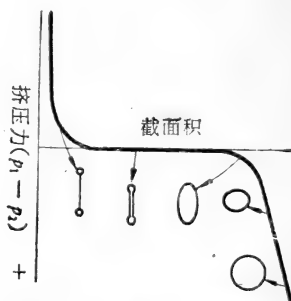


图 7-44 典型的静脉血管截面形状

§ 6 所述方法分析。得：

$$c_c^2 = \frac{S_0}{\rho} \left[ 1 - \frac{2J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{\alpha i^{\frac{3}{2}}J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} \right] \times \frac{P}{S} \quad (9-26)$$

这里  $S_0$  是工作压力下的截面积,  $\alpha = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$

Noordergraaf 假设截面形状对复波速  $c$  的影响可用形参数  $\tilde{\beta}$  表示, 则

$$c^2 = \frac{S_0}{\rho} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{\tilde{\beta}}J_1\left(\frac{i^{\frac{3}{2}}\alpha_c}{\sqrt{\tilde{\beta}}}\right)}{i^{\frac{3}{2}}\alpha_c J_0\left(\frac{i^{\frac{3}{2}}\alpha_c}{\sqrt{\tilde{\beta}}}\right)} \right] \frac{P}{S} \quad (9-27)$$

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{\omega S_0}{\pi \nu}} \quad (9-28)$$

若截面为圆, 则  $\tilde{\beta} = 1$

当截面呈哑铃状时,  $\tilde{\beta} = 2$ 。

一般静脉血管截面形状介乎二者之间, 取形参数为:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta} &= 2 - \sqrt{\frac{b}{R_{cq}}} \\ \pi R_{cq}^2 &= S_0 \end{aligned} \right\} \quad (9-29)$$

这样, 静脉血流的纵向阻抗为:

$$Z_l = \frac{i\omega\rho}{\tilde{\beta}S_0} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{\tilde{\beta}}\alpha_c J_1\left(\frac{i^{\frac{3}{2}}\alpha_c}{\sqrt{\tilde{\beta}}}\right)}{i^{\frac{3}{2}}\alpha_c J_0\left(\frac{i^{\frac{3}{2}}\alpha_c}{\sqrt{\tilde{\beta}}}\right)} \right] \quad (9-30)$$

由于可坍管变形大, 形状复杂, 严格的应力分析很难进行, 故不能给出横向阻抗的解析形式。

Synder 和 Rideout 假设静脉血管是椭圆形的, 用 § 7-5 所

述差分-微分方法处理,公式形式不变,只是将半径  $R^4$  代之以  $\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}$ ,  $2a$  和  $2b$  为椭圆的长、短轴。计及呼吸及静脉瓣膜的影响后,静脉血管的等价电路图如图 7-45 所示。在此基础上对静脉系统血流作了模拟计算。

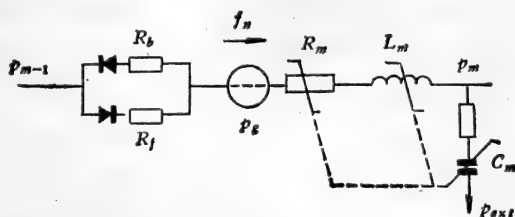


图 7-45 静脉血管等价电路

总之,静脉血流的研究远不如动脉血流充分,而其生理、病理意义并不亚于动脉。很多工作有待开展。

## § 10 大血管流动的实验研究

实验研究的目的是通过个别模型的测试,导出一般结论。从力学观点来看,首要的问题是模型与原型的相似性,即建立相似律。但是,生物系统极其复杂,影响因素很多,完全的模拟是不可能的。对同一系统,从不同的观点可以建立多种不同的模型。因此,对复杂系统作模型实验的前提是:准确地规定它的目的——用它来回答什么问题?

生物力学模型实验有三大类:生物试验、力学模型实验、计算机模拟。生物试验严格来说不能算是“模型”实验。因为,不同生物之间的差异很大,同一种生物、不同个体的差异也很大,而且‘模型’和‘原型’一样复杂,许多因素没法控制。但是,生物试验是整个生物力学的基石,物理模型、数学分析

都是建立在这个基础上的。

力学模型的好处是它可以准确地再现系统的某种或某些过程,能准确地控制影响因素,从而准确地确定各种参数的影响,检验理论模型的效能。

计算机模拟是研究生物力学的有效工具,有模拟式、数字式、混合式三种。模拟式的优点是易于改变参数,可变性大,效率高,但准确性差。数值模拟(数值实验)优点是准确、精度高。但可变性受程序限制,运行速度较慢。混合式则兼有二者的优点。但要指出:计算机模拟的成效取决于所据物理模型是否正确,而这又依赖于大量生物实验的观测结果。

本节介绍动脉血流实验(动物实验和模型实验)的一些结果。

### § 10-1 动物试验的若干结果

六十年代以来,McDonad 等人在人体和动物体内,对动脉系统中血流压力和流量的变化,作了系统测量。主要结果是:

#### 1. 压波、流量波型沿动脉系统的变化

从主动脉根部开始,随着离心脏的距离增大,压力波和流速(或流量)波波形发生畸变。典型结果见图 7-1。可见:

(1) 随着距离增大,平均压力和平均流速(流量)都减小。但压力波幅越来越大,而流量波幅越来越小。

(2) 离心脏越远,压力波前越陡,而流量波则变平坦。

(3) 无论压力波还是流量波,离心脏远时,波形尖角消失,趋于圆滑。这意味着高频分量因粘性阻尼而消失。

(4) 远端支动脉压力波在舒张后期出现重复波。

上述波形畸变的物理原因是: 血管和血液粘性(前者为

主)引起的阻尼、几何及弹性非均匀性引起的反射,非线性效应及色散等。这些均可用 §6—§8 所述的理论定量地阐明。

## 2. 动脉不同部位上输入阻抗的变化

在不同的部位上,输入阻抗幅值  $|Z(\omega)|$  及相位角  $\phi(\omega)$  的频谱结构不同。图 7-46, 图 7-47 是典型测量结果。可见:

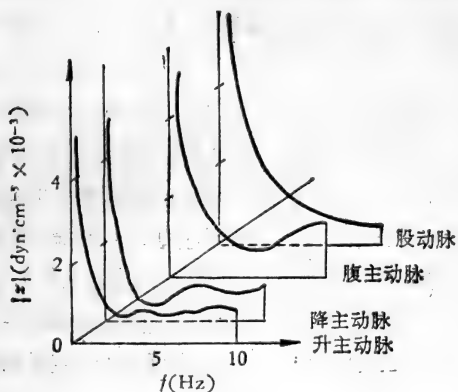


图 7-46 不同部位上  $|Z(\omega)|-\omega$  曲线<sup>[66]</sup>

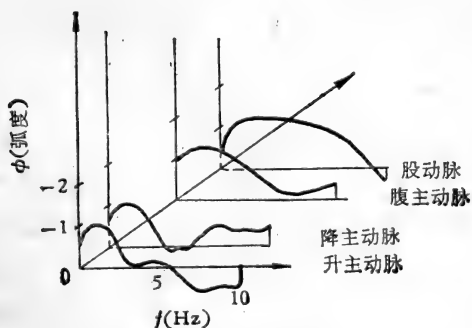


图 7-47  $\phi(\omega)$  曲线<sup>[66]</sup>

(1) 离心脏越远,动脉阻抗幅值越大。

(2) 不论部位如何,阻抗频谱的共同特点是:当 $\omega$ 从0增大时,  $|Z|$  从定常流( $\omega = 0$ )阻力  $Z_{dc}$  急剧下降,在心搏频率附近达第一最低值,同时阻抗相位变负(达 $-50^\circ$ — $-60^\circ$ )。在第一低峰后,  $|Z(\omega)|$  随着频率变化在某一平均阻抗附近略有波动。平均阻抗比定常阻力(同样流量下)低得多。这可用  $\phi(\omega)$  曲线的大负相角说明。负相位表明流动领先于压力,负相角绝对值越大,则弹性分量越大,机械能直接损失越小。

(3) 在动脉系统不同部位上,  $|Z(\omega)|$  的第一低峰的位置(频率)及平均值不同。主动脉,  $|Z|_{\min}$  发生于心频附近,离心越远,  $|Z|_{\min}$  的位置向高频方向移动。主动脉平均阻抗约为  $Z_{dc}$  的5—10%,而股动脉则为  $Z_{dc}$  的2—5%。

阻抗频谱的生理意义目前还不完全清楚,大体上,其高频部分( $>1\text{Hz}$ )主要反映动脉树及血液的物理性质;而低频部分( $0.02-1\text{Hz}$ )则是血管组织物性和神经控制过程动力学特性的综合。

Taylor 曾利用药物使狗的外周血管扩张或收缩,测量周缘阻力改变对主动脉输入阻抗的影响,结果阻抗平均幅值没有什么改变。这说明,外周组织负载的变动,不会引起心脏输出的很大变化。

## § 10-2 水力模型实验

首先要求模型管壁和所模拟的血管壁的力学性质相同,管内外压差-截面积关系的无量纲形式一样。进而,要区分是可膨胀管还是可坍管,模型和原型须属于同一类。对于膨胀管流,流动相似参数为频率参数  $\alpha$ 、雷诺数(或 Strouhal 数)及细长比。现有模型试验符合上述条件的很少。



模型实验做得相当多,一些结果已于以前各节中讨论过。这里,只介绍一下 Taylor 管系实验结果和 McDonald 动脉树阻抗模型。

Taylor 曾用随机分支管系模型,研究了动脉树分支反射对流动阻抗的影响。结果表明,在低频段(0—2Hz),管系阻抗特性类似于具有适当终端反射的单一长管;在高频段(>2 Hz)则管系阻抗类似于无反射单一长管。这样,研究主动脉口输入阻抗时,动脉树可以用一根长管来模拟,终端负载使得频率为0—2 Hz的波有适当的反射,而对于2 Hz以上的波,没有反射。

基于此,考虑到血液自左心室流出后,分为两大支,一支较长(下行动脉),另一支较短(上行动脉),McDonald 提出了一个简单的主动脉输入阻抗模型,如图7-48示。这里,长臂为 $L_1$ ,短臂为 $L_2$ ,终端阻抗为 $Z_L$ ,分别取:

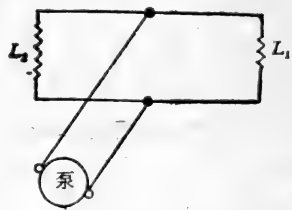


图7-48 动脉树输入阻抗简化模型<sup>[1]</sup>

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{4}, \quad \lambda_1 = \frac{c_1}{f_1} \quad (10-1)$$

$$c_1 = 560\text{cm/s}, \quad f_1 = 4\text{Hz}$$

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2}{f_2} \quad (10-2)$$

$$c_2 = 750\text{cm/s}, \quad f_2 = 8\text{Hz}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z_L}{Z_0} &= 2.8 \\ Z_0 &= \frac{\rho c}{S} \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

这样所得输入阻抗是可以接受的。

## § 11 波的传播与血管力学性质

通过脉搏波的观测来确定血管的病理变异，从而建立心血管疾病的早期，无创诊断方法，是研究心血管流体力学的目标之一。到目前为止，目的尚未达到。

实现上述目标的困难在于：(i) 自然脉搏是血管壁的有限幅度振动，线性理论不适用，准确的非线性理论目前还没有；(ii) 脉搏波波长很长，血管分支繁多，波反射使问题变得十分复杂。

鉴于此，Anliker 等<sup>[68]</sup>设法在大血管里插入微型的谐波发生器，周期性地发射小振幅、高频(20—200Hz)谐波波列，它们叠加于自然的脉搏波上，在其下游不远处(无分支)检测这些信号。由于发射波波幅很小，线性理论可用；频率高，波长短， $L \gg \lambda$ ，可避免反射引起的复杂性，又因为是谐波，分析特别简单。设发射波波幅为  $A_0$ ，测得波幅为  $A$ ，发射头和接收器间距为  $x$ ，则按线性理论，波幅衰减为

$$A = A_0 e^{-k \frac{\Delta x}{\lambda}} \quad (11-1)$$

由此可确定  $k$ ，它表征所测血管的物性。实验表明，在 40—200 Hz 范围内， $k$  与频率无关。

以狗的胸主动脉为例，据 Anliker 测量，对径向振动， $k \approx 0.7—1.0$ ；对轴向振动和扭振， $k \approx 3.5—4.5$ 。对于大静脉，径向振动的衰减系数  $k$  约为 1.0—2.5。显然，波在静脉血管里衰减得更快。这说明，静脉血管的粘性比动脉血管高。

Anliker 的方法能否用于临床呢？还不太清楚。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] McDonald, D. A.: *Blood Flow in Arteries*, Edward. Arnod, London, 1974.
- [ 2 ] Lighthill, J.: *Mathematical Biofluidynamics*, S. I. A. M., Philadelphia, 1975.
- [ 3 ] Skalak, R.: *Biomechanics*, Ed. by Fung, Y. C., ASME, 1966.
- [ 4 ] Rudinger, G.: *Biomedical Fluid Mechanics Symposium*, ASME, 1966.
- [ 5 ] Fung, Y. C., Perrone, N., Anliker, M.: *Biomechanics. Its Foundations and Objectives*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [ 6 ] Bergel, D. H.: *Cardiovascular Fluid Dynamics*, Vol. 1, Vol. 2, Academic Press, London, New York, 1972.
- [ 7 ] Wetter, E., Kenner, T.: *Grundlagen der Dynamik des Arterienpulses* Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [ 8 ] Goldsmith, H.: *1979 Biomechanics Symposium*, Ed. by W. C. Van Buskirk, ASME, 1979.
- [ 9 ] Learoyd, F., Taylor, M. G.: *Circ. Res.*, **18**, 278, 1966.
- [ 10 ] Schraf, B. W., Abbrecht, P. H.: *J. Biomechanics*, **5**(4), 345, 1972.
- [ 11 ] Shapiro, A. H.: *Caucam. 77 Proceedings*, 1977.
- [ 12 ] Shapiro, A. H.: *Trans. ASME J. Biomechanical Eng.*, **99**, 126, 1977.
- [ 13 ] Permmutt, S., Bromberger-barnea, B., Bane, H. N.: *Med. Thorac.*, **19**, 239, 1962.
- [ 14 ] Oates, G. C.: *Med. & Biological Eng.*, **13**, 773, 1975.
- [ 15 ] Oates, G. C.: *Med. & Biological Eng.*, **13**, 753, 1975.
- [ 16 ] Brower, R. W.: *IEEE. Trans. Bio-Med. Eng.*, **BME-16**(4), 335, 1969.
- [ 17 ] Gardner, et al.: *Med-Biol. Eng. & Computing*, **15**, 248, 1977.
- [ 18 ] Pedlley, T. J.: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**, 229, 1977.
- [ 19 ] Griffiths, D. J.: *Med-Biol. Eng.*, **9**, 581, 1977.
- [ 20 ] Attinger, E. O.: *Putsatile Blood Flow*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [ 21 ] Attinger, E. O., Attinger, F. M.: *Ann. Rev. Biophys. Bioeng.*, **2**, 7, 1973.
- [ 22 ] Fung, Y. C.: *Advance in Applied Mechanics*, **11**, 65, 1971.
- [ 23 ] Kenner, T.: *Biomechanics Its Foundation and Objectives* Prentice-Hall, New Jersey, 1972.

- [24] Taylor, M. G.: *Biophys. J.*, **6**, 29, 1969.
- [25] Lin, C. C., Seagl, L.: *Mathematics applied to deferministic problems in the natural sciences.*, Macmillan Publishing Co. Inc., New York, 1974.
- [26] 陶祖業: 力学学报, 第3期, 192, 1978.
- [27] 岡小天: «レオロジー——生物レオロジー», 裳華房, 1976.
- [28] Ling, S. C., Atabek, B.: *J. Fluid Mech.*, **55**, 493, 1972.
- [29] Womersley, J. R.: *Phil. Mag* [7], **46**, 199, 1955.
- [30] Womersley, J. R.: WADC, TR 56, 1957.
- [31] Schultz, D. L.: *Cardiovasculor Fluid Dynamics Vol. 1*, Academic Press, London, New York, 1972.
- [32] Klip, et al.: *J. Appl. Phys.*, **38**, 3745, 1967.
- [33] Cox, R. H.: *J. Biomechanics*, **5**(2), 135, 1972.
- [34] Skalak, R., Stathis, T.: *Biomechanics*, Ed. by Fung, Y. C., ASME, 1966.
- [35] Schwerdt, H., Constantinesco, R.: *Biorheology*, **13**(1), 7, 1976.
- [36] Anliker, M., Maxwell, J. A.: *Biomechanics*, Ed. by Fung, Y. C., ASME, 1966.
- [37] Flaud, D., et al.: *J. Physique*, **35**(11), 869, 1974.
- [38] Thurston, R.: *J. Biomechanics*, **9**(1), 42, 1976.
- [39] Cox, R. H.: *J. Biomechanics*, **2**(3), 251, 1969.
- [40] Lou, Y. S.: *J. Biomechanics*, **8**, 57, 1975.
- [41] Lou, Y. S.: *J. Biomechanics.*, **9**(12), 747, 1976.
- [42] Flaud, D., et al.: *Biorheology*, **12**(6), 347, 1975.
- [43] Martin, T.: *Ing.-Arch.*, **37**, 315, 1969.
- [44] 棚橋隆彦等: 日本機械工程学会論文集, **43**(369), 1901, 1977.
- [45] Taylor, M. G.: *Phys. Med. & Biol.*, **10**, 539, 1965.
- [46] Rideout, V. C., Dick, D. E.: *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, **BME14**, 171, 1968.
- [47] Beneken, J. E. W., Rideout, V. C.: *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, **BME14** 281, 1968.
- [48] Noordergraaf, A.: *Circulatory Analog Computer*, North Holland Pub. Co., Amstddam, 1963.
- [49] Synder, M. F., et al.: *J. Biomechanics*, **1**, 341, 1968.
- [50] Lee, R. T., *Biomechanics*, Ed. by Fung, Y. C., ASME, 1966.
- [51] Olsen, J. H., Shapiro, A. H.: *J. F. M.*, **29**, 513, 1967.
- [52] Streeter, S.: *Pulsatile Blood Flow*, Ed. by Attinger, McGraw-Hill, New York., 1964.
- [53] Wemple, R. R., Mockros, L. F.: *J. Biomech.*, **5**, 629, 1972.
- [54] Zeller, H., et al.: AGARD CP-65-70, (AD711980), 1970.
- [55] Anliker, M., Rockwell, R. L., Ogden, E. M. D., AGARD CP-

65-70, 1970.

- [57] Kivity, Y., Collins, R.: *J. Biomechanics*, **7**, 67, 1974.
- [58] Gerrad, J. H., Taylor, L. A.: *Med. & Biol. Eng. & Computing*, **15**, 611, 1977.
- [59] Rockwell, R. L., Anliker, M., Elsner, J.: *Journal of the Franklin Institute*, **297**, 405, 1974.
- [60] Rudinger, G.: *J. Appl. Mech.*, **37**, 34, 1972.
- [61] Beam, R. M., NASA TN D-4803, 1968.
- [62] Rumberger, J. A., Nerem, R. M.: *J. F. M.*, **82**, 429, 1977.
- [63] Carey, P. D., Wemple, R. R., Werff, J. Y.: *J. Biomechanics*, **8** (1), 9, 1975.
- [64] Kresch, E., Noordergraaf, A.: *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, **BME16**(4), 296, 1969.
- [65] Snyder, M. F., Rideout, V. C.: *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, **BME16**(4), 325, 1969.
- [66] Gssner, U.: *Cardiovascular Fluid Dynamics*, Vol. 1, Ed. by Bergel, D. H., Academic Press, London, New York, 1972.
- [67] Chao, J. C., Hwang, N. H. C.: *J. Biomechanics*, **5**(2), 129, 1972.
- [68] Anliker, M.: *Biomechanics, It's Foundation and Objectives*, Ed. by Fung, Y. C. et al., Prentice-Hall, New Jersey 1972.
- [69] Skalak, R.: *J. Biomechanical Engineering*, **103**, 102, 1981.
- [70] 陶祖莱: *力学情报*, (3), 293, 1979.
- [71] 柳兆荣: *上海力学*, (1), 27, 1981.
- [72] Elliot, E. A., Dawson, S. V.: *J. Appl. Physiol.*, **43**, 516., 1977.
- [73] Noordergraaf, A., Li, J. K.-J., Campbell, K.: *J. Theoretical Biology*, **9**, 485, 1979.
- [74] Wild, R., Pedley, T. J., Riley, D. S.: *J. F. M.*, **81**(II), 273, 1980.
- [75] Moreno, A. E., et al.: *Circ Research*, **27**, 1069, 1970.
- [76] Holt, J. P.: *American Journal of Physiology*, **134**, 292, 1944.
- [77] Rodbard, S.: *Circulation*, **11**, 280, 1955.
- [78] Conrad, W. A.: *IEEE Trans. Bio-Med. Eng.*, **BME16**(4), 284, 1969.
- [79] Matsuzaki, Y., Fung, Y. C.: *J. Sound & Vibration*, **54**, 317, 1977.
- [80] Matsuzaki, Y., Fung, Y. C.: *J. Appl. Mech.*, **44**, 548, 1977.
- [81] Shayo, L. K., Ellen, C. H.: *J. Sound, & Vibration*, **37**, 535, 1974.
- [82] Weaver, D. S., Paidoussis, M. P.: *J. Sound & Vibration*, **50**, 117, 1977.
- [83] Grotberg, J. B., Davis, S. H.: *J. Biomechanics*, **13**, 219, 1980.
- [84] Pedley, J. T.: *Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press, New York, 1980.

## 第八章 大血管和气管里的流场 和壁面剪应力

### §1 引 言

前章以大血管为对象,讨论了可变形管和可变形管系内,牛顿流体脉动运动的压力-流量关系,以及脉搏波传播的规律。这固然极其重要,但对于循环、呼吸系统来说,流场细节的研究,也有重大的理论和实践意义。尤其是某些心血管疾病,如动脉粥样硬化,其发病机制和病变发展,与血液流动的动力学特性(如壁面剪应力、流动分离、流体滞留等)有密切关系。因此,近年来,复杂管系内的流场分析,已成为生物流体力学的一个重要课题。

但心血管系统和呼吸道的材料物性和几何结构都极其复杂,再加上流动的脉动性,要建立一个计及各种因素的、完善的力学模型,作准确的数学分析,目前是不可能的。这里主要分析几何因素带来的流动复杂性,一般把管壁看作是刚性的。有时,甚至把流动看作是定常的,或者二维的。所用模型相当粗糙,故所得结果也往往是定性的。此外,还有些问题,众说纷云,尚无定论。

因此,本章的目的,不是提供可供实用的计算公式,而在于:(i)认识各种几何因素对流场影响的物理本质,探讨其生理、病理意义;(ii)掌握一些分析问题的方法;(iii)提供一些最新的研究结果,作为进一步研究这类问题的基础。

## §2 动脉疾病和血液流动的力学性状的关系

动脉疾病和动脉血流的关系包括两个方面，一是指病变发生的机制。和世间一切事物一样，动脉血管组织病变的发生，也是由内、外两方面的因素决定的。血管组织内部的生化过程、代谢活动及调节、控制等是病变发生的内因；而当地血液流动的动力学条件及血液物理化学性质，则是病变发生的条件。另一方面，一旦病变发生，血液流动的规律也将发生相应的变化，这可能会促进病变的进程，到一定程度就表现为症状。因此，对动脉中血液流场细节的了解，不仅有助于弄清一些心血管疾病的病理机制，还可为寻求准确、灵敏的诊断、预后方法，提供理论指导。下面举几个例子来说明这一点。

### §2-1 主动脉 P. S. D. 与血液湍流

主动脉瓣狭窄，或动脉血管管腔在某一部位变窄之后，其下游血管会发生扩张。这种病状称为狭窄后的扩张 (post stenotic dilatation)，简称 P. S. D.。自 de Vries 和 Van den Berg 以来，P. S. D. 一直被看作是血液动力学的—个佯谬 (paradox)。据他们测量，血管扩张后，远端压力不仅不超过近端压力，反而低于近端压力。这不符合‘常理’。因为，按常理，管截面积增大时，静压应升高。

Roach 用狗的股动脉、颈动脉做了 50 个在体试验，用尼龙带绑扎血管，人为地造成狭窄。然后，用扩音器在狭窄的下游端探测流动噪声。结果，39 个试样（管腔截面积减小 23—76%），可以探测到明显的湍流噪声，频率在 50—500Hz 之间。此时，狭窄下游血管发生扩张，远端直径平均增大了 20%。7 个试样，狭窄程度很轻微，动脉没有发生远端扩张，

也没有探测到湍流噪声。另有四个试样,截面积减小了85%,狭窄部形成缓慢的细射流,远端动脉不扩张,也没有探测到湍流噪声。

Roach 实验说明了两个问题:

(1) P. S. D. 和狭窄部下游流动分离,发生局部湍流有关。只有当这种局部湍流达到一定的强度——用扩音器可以探测到湍流引起的噪声时,P. S. D. 才会发生和发展。

(2) 由于狭窄部下游流动分离、发生局部湍流,压力损失很大,故下游端的管截面积增大了,压力却低于近端。

局部湍流为什么会引起动脉血管在狭窄部下游发生扩张呢? Roach 进一步用实验证明: 在湍流脉动压力作用下,或在人工激发的、同一频段的振动作用下,动脉血管的弹性会发生重大变异。

实际上,血管的膨胀能力对于压力脉动的频率是有选择性的。每一段血管总是对某一频段的压力脉动,最容易膨胀,其它频段则次之。例如,45岁以下人的主动脉血管,对于100Hz以下的压力脉动最敏感;而45—60岁的人的主动脉血管,则对100—200Hz的压力脉动,反应最为灵敏。这些频段,都在所探测到的湍流压力脉动范围之内。在这种高频脉动压力作用下,一方面血管壁中的弹性蛋白纤维会变性,另一方面,会削弱弹力纤维和胶原纤维的网络联结,从而使血管壁强度下降,进而促使组织增生,管壁变厚,管径扩张,以避免血管破裂。

Roach 证明,一旦人为造成的狭窄消失,动物体内的正常修复过程,能使扩张了的动脉血管恢复原来的弹性,并使扩张消失。

Mostardi 等通过动物实验证明,若在狭窄部,加少量高分子聚合物(如聚丙烯酰胺),使局部湍流的高频脉动分量受到阻尼,能遏止 P. S. D. 的发展。



这些都说明, P. S. D. 的发生和发展, 和狭窄部的流态特征有密切的关系。

## § 2-2 脑动脉血管瘤

临床实践证明, 动脉血管瘤无例外地发生于血管分支尖顶, 如图 8-1 示。发生于脑动脉的概率尤大。Ferguson 对此作了系统的研究。

首先, Ferguson 用扩音器探测了 19 个作颅内手术的病入的血液流动噪声。其中 12 个动脉血管瘤患者, 都检测到相当强的湍流噪声, 频率在 200—700Hz 之间。而 4 个没有动脉血管瘤的病人, 则均未记录到湍流噪声。这表明, 动脉血管瘤和局部湍流引起的高频压力脉动有关联。

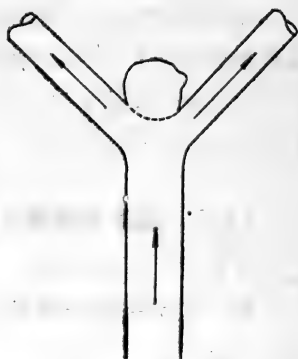


图 8-1 动脉血管瘤发生部位

为查明这种关联的物理本质, Ferguson<sup>[3]</sup> 做了一系列模型实验, 模型典型分支角为  $90^\circ$ 。流谱观察表明, 平均流动雷诺数低于 200 时, 母管中心流线 (速度最高) 直接打在分支尖顶上, 当地血管壁所受的应力很大, 收缩峰时应力尤大; 当平均流动雷诺数在 200—900 之间时, 分支附近发生局部分离, 流线呈双螺旋形。这时, 母管中平行于对称平面的涡线被拉伸, 在分支尖顶处, 涡量局部强化, 当地壁面剪应力很高; 当雷诺数高于 900 时, 脉冲流在分支附近, 变为湍流, 当地血管壁不仅受高剪应力而且受高压脉动的作用。上述三种情况, 不管哪一种, 都意味着: 血管分支尖顶部分, 受周期性的、高应力作用, 它可能使弹性蛋白纤维强度下降、弹性蛋白纤维与

胶原纤维的联结网络遭到破坏。这样,有可能在分支尖顶血管壁上引起小囊泡。囊泡一旦形成,则尖顶涡和囊泡空腔的强烈相互作用,使流动的转捩雷诺数大大降低(降至400左右),这样局部湍流发生得更为频繁,血管组织进一步退化,血瘤就越长越大。最后,血瘤脱落,导致严重后果。

为什么高脉动应力的影响对脑动脉血管分支的影响更为突出呢? Ferguson 的解释是: (i) 颅内动脉血管的壁厚-半径比,比其它地方小。(ii) 颅内动脉血管组织所含的弹性蛋白纤维数量较少。(iii) 颅内动脉血管缺乏外围组织的支持。

上述研究,对于脑动脉血瘤的诊断和手术评价,均有重要意义。

### § 2-3 动脉粥样硬化与当地血液流动特性

种种心血管疾病中,动脉粥样硬化对人类健康的威胁最为严重。弄清粥样硬化的发生、发展机理,是个十分紧迫的问题。

动脉粥样硬化的特征是:酯类(包括脂肪酸、胆固醇及其酯等)和矿物质等堆积于动脉血管内皮层,引起动脉功能障碍。在早期,形成一些玉米糊糊状的东西,或者胶冻。尔后,变成硬化的斑块。这种硬化是胆固醇引起的纤维变性及纤维蛋白溶解的结果,后者使血小板粘着于内壁,包上纤维外壳,形成附壁血栓,并钙化。这种病变引起的血液流动规律的变化,及其病理意义,将在本章 §7 中阐述。这里,讨论粥样硬化的发生与血液流动的关系。

从形态学观点来看,粥样硬化早期阶段,动脉血管组织的病变有两大特点:

(1) 病变发生的位置有强烈的选择性

它不是随机的,总是发生在大动脉的弯曲部、接头和分支

岔口附近。这一点,无法单纯用血管的组织构造来说明,必须结合这些位置上血液流动的动力学特性来解释。

## (2) 病变部位均有脂类的堆积

Mitchell 和 Schwartz 对 600 个因各种原因死亡的人作了解剖研究,发现动脉壁病变可分两类,一类为脂条 (fatty streak), 动脉壁断面包含许多充满脂肪的细胞,占主导地位的是油酸脂(胆固醇脂的一种)。脂条一般分布于主动脉弓部和上胸主动脉,主要见于年轻人;另一类是隆起的斑块,其中的脂类主要是亚油酸脂,也是一种胆固醇脂。早期纤维化斑块主要分布于腹主动脉之中,常见于老年人。脂条和斑块之间有没有什么内在的联系呢? Mitchell 和 Schwartz 从统计结果出发,认为斑块的发生、发展,与脂条的形成无关,而且两种病变中,占主导地位的脂类也不一样。但 Haherty 等人则强调脂条和斑块之间的联系,认为前者能否发展成后者,依赖于发生学的因素和环境因素,依赖于动脉不同部位上,血液流动的流体力学特性和组织构造特性。

实际上,两种病变涉及两类不同的脂类积累过程。一种是动脉壁组织细胞内部的脂类积累,另一种是细胞之间的间隙内脂类的沉积。二者是互相联系的,但这种联系的细节,目前还不十分清楚。据 Wahlqvist 等研究,人体动脉病变部位存在一种泡沫状细胞,它内部充满着脂肪。孤立的泡沫细胞从环境中摄取油酸的方式,恰好使得胆固醇油酸脂在细胞内占主导地位。这种泡沫细胞可能是细胞内部和细胞之间两种脂类沉积过程相互转化的桥梁。因为,一方面这种细胞很脆,极易破裂,这样原来细胞内所含的脂类,就会沉积于其他细胞之间;另一方面,细胞间隙之间沉积的脂类也可能和某种噬菌细胞 (phage cell) 结合而形成泡沫细胞。

粥样硬化形态学上的特点告诉我们,引起病变的生化过

程可能是各色各样的。但这些过程的发生和进展,都是以当地血液流动的流体动力学特性为条件的。对不同的生化过程,流体动力学因素所起的作用不尽相同。关于这方面,假说甚多,尚无定论,主要有下述四种。

(1) 局部高剪应力使血管内皮层损伤,从而诱发病变。Fry 用狗做了实验,在其两根髂动脉之一上人为地形成一个小动脉—静脉分流支路,使其流量大大提高,雷诺数达 800,而另一支(正常生理条件下)髂动脉血流雷诺数为 70。1 小时后,发现人工分流的髂动脉分支内侧,血管壁内皮层被撕破、剥落。这时作用于血管内壁的流体剪应力时均值为  $380 \text{ dyn/cm}^2$ 。(要指出,实际造成损伤的,是当地的、瞬时应力峰值,它远高于此值)。

Fry 实验能否用以说明人体内动脉粥样硬化的发生? 这取决于: 人体循环系统内,能否、或在什么样的条件下,血液流动的剪应力能达到这样高的值。因此,分支流场壁面剪应力分布,是动脉血流理论和实验研究的重要课题之一

(2) 动脉血管壁组织在较高的脉动应力(包括脉动压力和方向交变的壁面剪应力)作用下,生物反馈引起的组织增生,使当地血管壁内层增厚、硬化。按照这一假说,粥样硬化所以发生于动脉,而不发生于静脉,就是因为动脉血流引起的壁面剪应力不断地变换方向,且幅度较大。Fry 发现,当人工引起的高剪应力消除后,损伤区的内皮膜细胞核会改变方向,同时增厚,以增强内皮层对某一方向上应力的抵抗能力。这说明,上述生物反馈的过程确实存在,但时间有迟后。

(3) 物质从血液沉积于血管壁内皮层而引起病变。它包括三种不同的机制。

① 局部流动分离,形成旋涡和死水区。这部分流体和主流之间的物质交换率很低,部分红细胞、血小板被滞留于该区

域。定常流动模型实验证明，红细胞滞留于球形障碍下游分离区的时间，长达主流中红细胞通过相应距离所需时间的一千倍。而红细胞和血小板的寿命是有限的，若被滞留的时间足够长，它们可能被溶解，所释放的产物和血浆中的纤维蛋白原以及细胞残骸一起，和壁面相互作用，引起(生化的)损害，形成附壁血栓。

②在流动分离区，流动切变率很低。这时红细胞很容易聚集成串，脱水，并和血浆中的纤维蛋白原起作用，沉积于壁面，并发生凝血，诱致血栓形成。

③胆固醇脂类沉积于血管内皮细胞的间隙之中。胆固醇及其酯化物很难溶于水，然而，它们很容易和蛋白质形成脂蛋白，脂蛋白可溶于水而存在于血浆之中。胆固醇脂在血管内皮细胞间隙的沉积过程为：脂蛋白渗入内皮层，然后分解为脂类和脱脂蛋白，前者因不溶于水而沉积下来。因此，胆固醇脂类的沉积速率取决于：(i) 血浆中脂蛋白的浓度；(ii) 内皮层中每一种脂蛋白以什么样的浓度和血浆中相应脂蛋白的浓度保持平衡；(iii) 内皮层对于脂蛋白的通透性；(iv) 由于内皮细胞透过细胞膜能动地吸收脂类而引起的脂蛋白分解的速率；(v) 脂类分子被纤维包围而形成沉积物的速率。这些因素中，直接受当地流场特性影响的有两个，一是壁面邻近血浆中脂蛋白的扩散特性；另一个是内皮层的通透性，这和流体作用于壁面的应力有关。实验证明，对脂蛋白来说，在流体中扩散所受到的阻尼，比通过内皮层扩散的阻尼小得多，可以忽略不计。因此，影响细胞间隙中胆固醇脂类沉积的流体力学因素，主要是作用于血管壁的流体应力的性质和大小。

Fry 用实验证明，动脉血管在张应力作用下，内皮层对于脂蛋白的透性将增高。正常生理状态下，主要的大动脉血管都是受张的(周向被拉伸)，故血压达到峰值时，脂蛋白的透过

率最高。而且,平均血压越高,脂蛋白的透过率愈高(确实,高血压患者很容易得动脉粥样硬化)。但实验也证明,如果血管壁不是受张应力,而是受压应力作用,则内皮层的可透性(对于脂蛋白)与压力无关。这说明,血浆中脂蛋白向壁组织的输运本质上是扩散型的。

Carew 通过离体实验证明:壁面剪应力也会使脂蛋白透过率增大,增大的量值与剪应力平方成正比。

可以设想,当流动发生局部湍流时,湍流应力的作用将会使脂蛋白透过内皮层的能力大大提高,Fry 的实验证明了这一点。

上述三种机制中,(1)、(2)易发生于流体剪应力低的区域,而(3)则易发生于高剪应力和局部高压区域。

(4)当地流场条件使血管壁组织与血浆之间的物质输运受到阻碍,从而诱致病变。这里,有两种机制。

①传质障碍促进了壁组织细胞内胆固醇脂类的积累。

无论是细胞膜,还是细胞内的线粒体,脂类的供应都是维持其正常活动所必不可少的条件。处于平衡状态的细胞,不断地从周围介质中摄取脂类,而把 $\alpha$ 球蛋白等留在细胞之外;同时又不断地排泄脂类,它与 $\alpha$ 球蛋白等重新结合,形成脂蛋白。因此,通过细胞膜,脂类的输运是高度可逆的。一般情况下,细胞内脂类含量受两种机制控制:(i)当环境中脂含量低于某一阈值时,细胞内部由葡萄糖等络合形成脂类;(ii)当环境中脂含量高于阈值时,则通过排泄来控制细胞内的脂含量。动脉壁组织的细胞能够直接把脂蛋白之类的大分子,“拉”进细胞里去。当环境介质中,脂蛋白含量很高的时候,上述控制细胞内脂类含量的机制就可能崩溃,细胞内就会积累过量的脂类,变成充满脂肪的细胞,形成脂条。在流场中剪应力较低的区域,内皮层的通透性较差,这一方面使血浆中的脂蛋白,

不易进入内皮细胞的间隙；另一方面，也阻碍了细胞内积累起来的脂类的排泄。因此，细胞内部脂类过量积累易发生于低剪应力区。这从理论上说明了 Mitchell 和 Schwartz 观察到的脂条在动脉中的分布。当然，这并不排斥，在高剪应力区形成不可逆的脂类沉积(在细胞间隙中)。

当血浆脂蛋白浓度极高时，细胞内的脂类含量，完全取决于脂类的输入，即所谓‘进口控制’(ingress-controlled)。用高胆固醇食物喂养动物而产生的‘实验粥样硬化’即属此类。这时所观察到的脂条分布，和 Mitchell 和 Schwartz 的解剖结果刚好相反。这是因为，在‘进口控制’的情况下，促进细胞内脂类积累的，不是低剪应力区，而是高剪应力区。正因为如此，这些实验的结果都证明：脂条是可以发展变成斑块的。但不能以此来证明人体内情况也是如此。

②组织因长期缺氧，或营养不足引起的病变。动脉壁内皮膜下面的一层组织本身没有毛细血管，维持代谢活动所需的氧气和养料的供应，以及代谢产物的排除，完全仰仗于动脉血流-管壁组织之间的物质扩散。在低剪应力区，扩散率低，这会造成组织缺氧，从而代谢异常。结果脂类沉积，组织蜕化、变质。

综言之，粥样硬化的发生和当地流场特性有密切的关系，它的研究，要求我们对于病变发生部位(分支、弯曲部等)的流型、速度分布、壁面剪应力分布、压力分布、局部分离区、分离区内质点运动的轨迹、扩散等有一透彻的了解。这些将在下面各节中讨论。

### §3 动脉血流的湍流问题

动脉血流在什么条件下、在什么地方可能发生湍流？这

个问题的研究具有重要意义。因为湍流和层流的规律很不一样，不仅血压-流量关系不同，而且壁应力变化和物质传输过程也不同。

从理论上讲，要回答这个问题，首先要解决动脉血流的稳定性，即几何形状复杂的粘弹性管系内，非牛顿流体脉动运动的稳定性问题。但这太复杂了。目前还只对最简单的情况，刚性直圆管内牛顿流体准定常运动或振荡运动在小扰动下的稳定性，作了初步分析，所得结果能否应用于动脉血流，还很成问题<sup>[4]</sup>。

鉴于此，人们作了大量实验研究。直圆管内，牛顿流体振荡流、脉冲流稳定性及转捩实验结果表明：

(1) 影响非定常流动稳定性的，主要是基于斯托克斯层厚度  $\delta$  的雷诺数。Tromans 发现， $Re_{\delta} = \frac{U\delta}{\nu} \geq 130$  时，流动失稳； $Re_{\delta} \geq 500$  时，湍流发生。这里， $U$  是平均流速， $\frac{\delta}{R} \propto \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ ， $R$  为管半径， $\nu$  为流体粘度， $\omega$  为圆频率。因此，同一流体，在同样流量下， $\omega$  越大，斯托克斯层越薄，流动稳定性也愈大。所以，就基于管径的雷诺数  $Re = \frac{2UR}{\nu}$  而言，振荡流、脉冲流在小扰动下的临界雷诺数  $Re_{cr}$  和转捩雷诺数  $Re_{tr}$ ，均比同样条件下泊肃叶流的高。 $\omega$  越大，差值越大。

(2) 振荡流和脉冲流，一开始只是在整个周期的一部分时间内出现不稳定，或瞬时湍流。因此，用通常的稳定性理论去研究这种现象似乎不适宜。合理的方法应该是：在以流速运动的坐标系中考察扰动的发展。故用染色流谱显示法来确定转捩雷诺数是否可靠，是大可怀疑的。

(3) 对于流动稳定性和转捩问题来说，最重要的参数是峰值雷诺数  $\hat{Re}$ ， $\hat{Re} = \frac{2R \cdot u_{\max}}{\nu}$ ， $u_{\max}$  是最大瞬时速度。模



型实验(刚性管)表明,  $\hat{R}e \leq 4000$  为层流,  $\hat{R}e \geq 8000$  为湍流,  $4000 < \hat{R}e < 8000$  为过渡流。

(4) Cotton 通过实验, 提出振荡流发生持续湍流的转捩雷诺数为:

$$Re_{tr} = \frac{\hat{R}e}{\alpha} \times 532 + 0.009\hat{R}e \quad (3-1)$$

这里  $\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ 。此结论受到 Attinger 等人实验的支持。

上述经验结论应用于动脉血流是否准确? 很难说。例如, 血管具有良好的弹性, 可以推想, 弹性管流动的临界雷诺数要比刚性管流的高, 因为, 管壁弹性吸收扰动能量, 起着稳定作用。故尽管人体主动脉口的  $\hat{R}e$  高达 12000, 也不能断言, 那里的流动是湍流。

Seed、Wood、Nerem 等, 用热丝直接在人体及其他动物的主动脉中进行了测量, 结果表明, 在人体升主动脉段, 在收缩后期, 血流可能出现瞬时湍流斑, 其强度达最大速度的 10%, 但在舒张期被阻尼掉了。因此, 在正常生理条件下, 人体内似乎不会出现持续的湍流。但若主动脉瓣闭锁不全, 则主动脉口会形成湍流射流, 它所产生的噪声相当强, 可以用听诊器听到。

问题还不止此。上述实验研究限于小扰动下的流动稳定性。而动脉血管有许多分支, 分支角在  $0-180^\circ$  之间, 那里流动扰动很大, 这时, 前述结论是否依然成立?

对此, Ferguson、Roach 等做了不少模型实验<sup>[3]</sup>, 当分支角不大于  $180^\circ$  时, 根据染色流谱观察, 定常流的转捩雷诺数在 1100—2500 之间, 而振荡流, 则在 800—2100 之间。这说明, 分支大扰动大大降低了流动的临界雷诺数, 振荡流比定常流降低得更多, 以至大扰动下的  $Re_{tr}$  低于同样条件下的定常流。这和小扰动下的结果(见 1)恰好相反。是非线性效应引起的质变吗? 还不能断定。因为, 如前面所说, 非定常流动用

染色流谱显示来确定流动转换是否可靠，本身是有问题的。

正常生理条件下，人体大动脉平均血流  $Re$  数为：胸主动脉，2000；颈动脉，750；股动脉，500；肾动脉，750。胸主动脉一般无大的分岔。因此，即使根据 Ferguson 和 Roach 的结论，正常人体内，湍流（至少是持续的湍流）是不大可能发生的。这和 § 2-1、§ 2-2 中所述在 P.S. D. 患者或在脑动脉血管瘤患者身上能探测到湍流噪声，并不矛盾。这说明，湍流噪声的出现是病变（较严重的病变）存在的标志，也是病变恶性发展的重要原因。但病变的发生，不一定是血液湍流所致。

总之，关于血流稳定性及层流-湍流转换，还有许多问题，需要进一步研究。

#### § 4 直圆柱管内的进口流动

第七章所分析的都是充分发展的流动，即边界引起的粘性效应影响整个截面。但实际上血管不是无限长的，总有一个进口。无论是主动脉进口，还是分支血管支管进口，在一段距离之内，边界改变引起的流体粘性效应的作用仅限于边界附近一薄层内，这叫流动边界层。经过一定距离，边界层才会充分发展，长入管心。这一段流动称为进口流动，或发展中的流动。其特点是整个截面上，流动可分为两个区域：边界层流动和核心流动；沿流动方向速度分布是改变的。如图 8-2 示。从进口到速度剖面发展成某种稳定不变的形式所需的距离，称为进口段长度。一般，进口流动的发展取决于流动雷诺数、进口速度分布形状及管壁运动特性。雷诺数愈高，进口段愈长。

图 8-3 是 Schultz<sup>[5]</sup> 用热丝测得的人体胸主动脉中的时均速度分布。可见胸主动脉中的流动在相当长一段距离内是

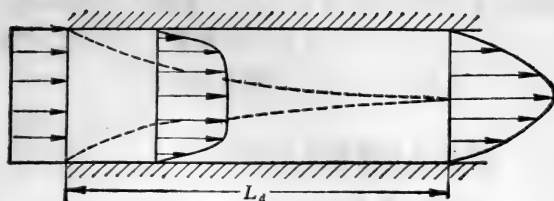


图 8-2 进口段流动

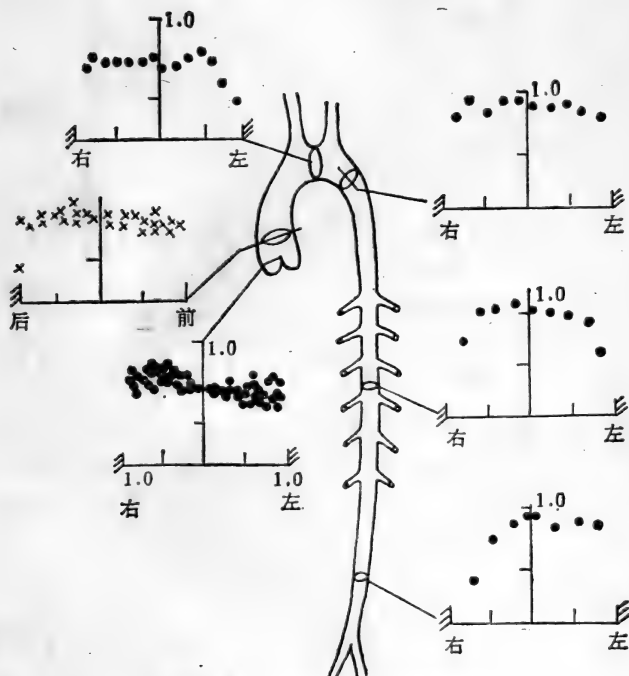


图 8-3 胸主动脉时均速度剖面<sup>[3]</sup>

发展中的流动。此外,时均速度剖面呈贝塞尔型曲线,故胸主动脉血流基本上是发展中的层流。因此,进口流动的分析,对认识心血管流动的规律是必要的。

与传统的进口流动问题相比,心血管流动的复杂性在于:

(i) 管壁是可变形的, 流动的发展和管壁的弹性及运动有关;  
 (ii) 流动是非定常的, 具有强烈的脉冲性。(iii) 进口剖面很不规则。下面介绍两类分析进口流动的方法。

#### § 4-1 刚性圆管定常进口流动

流动服从纳维-斯托克斯方程

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} (4-1)$$

连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (4-2)$$

假设进口速度分布是均匀的

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \text{ 时, } \quad u &= u_0 = \text{常数} \\ \quad \quad \quad v &= 0 \\ \quad \quad \quad p &= p_0 \end{aligned} \right\} (4-3)$$

壁面无滑流, 即

$$\left. \begin{aligned} r = R \text{ 时, } \quad u &= 0 \\ \quad \quad \quad v &= 0 \end{aligned} \right\} (4-4)$$

流动轴对称, 即

$$\left. \begin{aligned} r = 0 \text{ 时, } \quad \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \\ \quad \quad \quad v &= 0 \end{aligned} \right\} (4-5)$$

为使方程线性化, 方程(4-1)中, 迁移项中  $u, v$  取进口值,

即  $u = u_0, v = 0$ 。并应用第五章§5的结果,(4-1)变为

$$\left. \begin{aligned} u_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

无量纲化,令

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{u - u_0}{u_0}, & V &= \frac{v}{u_0}, & P &= \frac{p - p_0}{\rho u_0^2} \\ Y &= \frac{r}{R}, & Z &= \frac{x}{R}, & Re &= \frac{u_0 R}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

$R$  为管半径。则方程变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{V}{Y} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial Z} &= -\frac{dP}{dZ} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} Z = 0: & \quad \left. \begin{aligned} U &= 0 \\ P &= 0 \\ V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-9) \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} Y = 1: & \quad \left. \begin{aligned} U &= -1 \\ V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-10) \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} Y = 0: & \quad \left. \begin{aligned} V &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial Y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-11) \end{aligned} \right.$$

(4-8b) 对  $Z$  作拉普拉斯变换,得

$$Y \frac{d^2 \bar{U}}{dY^2} + \frac{d\bar{U}}{dY} + \lambda^2 (\bar{U} + \bar{P}) Y = 0 \quad (4-12)$$

$$\lambda^2 = -s^2 Re$$

$s$  为拉普拉斯变量。 $\bar{f}$  表示变量  $f$  的拉普拉斯变换。此方程可用变分法求解。为此,需寻找一个泛函  $F$ ,使得(4-12)为  $F$

的欧勒方程

$$\frac{dF}{d\bar{U}} - \frac{d}{dY} \cdot \frac{dF}{d\bar{U}_Y} = 0 \quad (4-13)$$

$$\bar{U}_Y = \frac{d\bar{U}}{dY}$$

设:

$$F = \lambda^2 Y (\bar{U} + \bar{P})^2 - Y \bar{U}^2 \quad (4-14)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{s} - 2 \frac{Y^2}{s} + (1 - Y^2)(C_1 Y^2 - C_0) \quad (4-15)$$

(4-15)满足边界条件(4-10a)(4-11b),  $C_1, C_0$  满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_0} \left[ \int_0^1 F(Y, \bar{U}, \bar{U}_Y) dY \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_1} \left[ \int_0^1 F(Y, \bar{U}, \bar{U}_Y) dY \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

同时,(4-8a)对  $Z$  作拉普拉斯变换,得

$$s\bar{U} + \frac{d\bar{V}}{dY} + \frac{\bar{V}}{Y} = 0 \quad (4-17)$$

应用边界条件(4-10b),(4-11a)得:

$$\int_0^1 sY\bar{U} dY = 0 \quad (4-18)$$

(4-15)代入(4-18)得

$$C_0 = \frac{1}{3} C_1 \quad (4-19)$$

由(4-15)(4-16)(4-19)可求出:

$$P = -\frac{8Z}{Re} - \frac{1}{3} + \frac{5}{24} e^{-30Z/Re} \quad (4-20)$$

$$U = 1 - 2Y^2 - \frac{5}{4} (1 - Y^2)(1 - 3Y^2) e^{-30Z/Re} \quad (4-21)$$

$$V = -\frac{18.25}{Re} (Y - Y^5 - 2Y^3) e^{-30Z/Re} \quad (4-22)$$

相应的进口段长度为

$$\frac{L_d}{R} = 0.16Re \quad (4-23)$$

至于弹性管内非定常进口流动问题,需将非定常纳维-斯托克斯方程和壁运动方程联立求解。作为最简单的近似,假设:

(1) 壁运动是准定常的,管内流动相当于管径等于瞬时半径的刚性管流。

(2) 流动迁移加速度可以忽略不计,即纳维-斯托克斯方程可以线性化。

这样,应用振荡平板的斯托克斯解, Lighthill<sup>[1]</sup> 得发展段边界层速度分布为

$$u = \frac{1}{i\rho\omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ 1 - \exp \left[ -\zeta \left( \frac{i\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (4-24)$$

这里

$$\zeta = R - r \quad (4-25)$$

由此得到的进口段长度  $L_d$  本身也是一个脉动量

$$\frac{L_d - L_{ds}}{L_{ds}} = f(\alpha) \quad (4-26)$$

$L_{ds}$  为相同流量、相同进口剖面时,定常流的进口长度,

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$\alpha = 4$  时,

$$\frac{L_d - L_{ds}}{L_{ds}} = \pm 0.365$$

## § 4-2 脉动进口流动的有限元分析

有限元法不用解纳维-斯托克斯方程,而是将流场划分为许多元素,直接将物理定律应用于每个元素。Davis 和 Mani<sup>[25]</sup>

应用有限元法,计算了刚性圆管和弹性圆管的进口流动。

### 1. 刚性管脉动进口流

将所考虑的区域分成环形有限元素 DR、DX, 元素的序号用  $i, j$  表示。

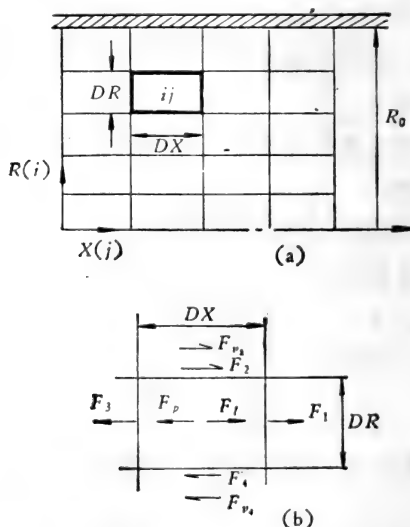


图 8-4 (a) 有限元划分, (b) 元素上的力。

作用于任一元素  $(i, j)$  上的力如图 8-4(b) 所示, 有:  
当地加速度引起的惯性力  $F_1$ ,

$$F_1 = m_{ij} \frac{u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}}{Dt} \quad (4-27)$$

$m_{ij}$  为元素  $(i, j)$  内流体的质量,  $k$  代表时间步长。

迁移惯性力(轴向)为:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= (\rho A_1 u_1)(u_1), & F_2 &= (\rho A_2 v_2)(u_2) \\ F_3 &= (\rho A_3 u_3)(u_3), & F_4 &= (\rho A_4 v_4)(u_4) \end{aligned} \right\} (4-28)$$

$v$  为径向速度,  $A$  为元素侧面积。故净迁移惯性力为:



$$F_c = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 \quad (4-29)$$

粘性力为:

$$\left. \begin{aligned} F_{v_2} &= \mu \left[ \frac{Du_2}{DR} - \frac{Dv_2}{DX} \right] A_2 \\ F_{v_4} &= \mu \left[ \frac{Du_4}{DR} - \frac{Dv_4}{DX} \right] A_4 \end{aligned} \right\} \quad (4-30)$$

轴向压力梯度为

$$F_p = \frac{1}{2} (p_{i,j} - p_{i,j-1})(A_1 + A_3) \quad (4-31)$$

轴向力平衡:

$$F_l + F_c = -F_p + F_v \quad (4-32)$$

径向力平衡关系与此类似。

质量守恒要求:

$$u_1 A_1 - u_3 A_3 = -v_2 A_2 + v_4 A_4 \quad (4-33)$$

由此,在已知进口流动条件下,结合壁面无滑流条件,可求数值解。

## 2. 推广于可变形圆管

将上述有限元方法推广于可变形管脉动流时,若忽略壁惯性效应,则力平衡关系不变,壁运动的影响仅表现为:(i)半径  $R$  是随时间、位置而变化的。Davids 取:

$$R = 1.6 + 0.0018(p - 147) \quad (4-34)$$

$R$  以 cm 为单位,  $p$  以 cm H<sub>2</sub>O 为单位。(ii) 瞬时流量沿轴改变,这将影响压力梯度和壁剪应力。如图 8-5 示,

$$Q_A = Q_B + A_w v_w \quad (4-35)$$

Davids 和 Mani 以测得的升主动脉进口处压力-时间曲线及平均速度-时间曲线为进口条件用有限元法,计算了进口段不同轴向位置上的速度剖面 and 壁剪应力随时间的变化。典型结果见图 8-6、图 8-7。

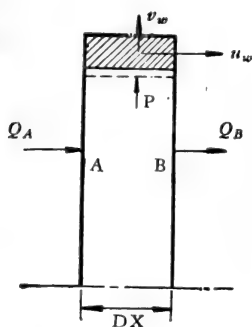


图 8-5 壁运动的影响

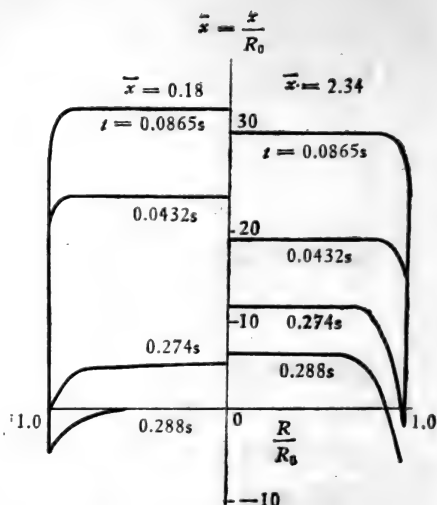


图 8-6 不同截面上的速度分布<sup>[23]</sup>

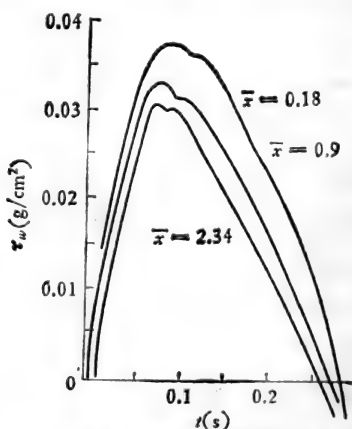


图 8-7 不同截面上  $\tau_w$  随时间的变化<sup>[23]</sup>

实际循环系统中，主动脉进口段流动的进口效应和弯曲引起的二次流效应相耦合，流场物理图象和本节模型有很大差别。至于分支进口流动，除弯曲引起的二次流外，还要考虑

岔口分流扰动,情况更为复杂。只有在弯曲或分支下游一段距离内,可用本节模型。但进口条件是非均匀的。

## §5 弯曲管内的流动

气管、血管等总是弯弯曲曲的。流体在弯曲管道内运动的一个根本特点是:由于离心力和流体粘性力的耦合作用,除了主流外,还存在各种各样的二次流。

考察弯曲圆管内充分发展了的定常层流。由于粘性作用,近壁流体运动速度低于管心部分,而壁面附近压力大体上和管心相等(如果没有二次流的话)。另一方面,由于管轴弯曲,流体受离心力作用,管心区流体离心力比壁面附近大,故管心流体流向弯曲外侧。由于连续性,外侧壁附近的流体,又沿壁面,从两个方向,流向内侧壁,形成图 8-8 所示的二次流。它和主流叠加,合成双螺旋形的流动。这种二次流,使得外侧壁边界层变薄,截面上最大速度点移向外侧,因而外侧壁所受的流动剪应力增大。而内侧壁则相反,边界层增厚,壁面剪应力减小。然而,由于二次流加剧了流体混合和动量交换,近壁区总的机械能损失增大了,因而流动阻力增大。

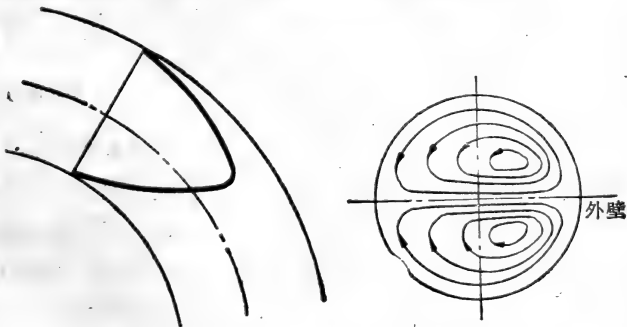


图 8-8 弯曲圆管中充分发展的定常流中的二次流

生理上的弯曲管流要比上述情况复杂得多，尤其是主动脉弓部的流动(示意如图 8-9)。其复杂性在于：

(1) 流动是非定常的；

(2) 管壁是可变形的，流动与壁运动耦合。

(3) 流动是发展中的层流，雷诺数较高，进口效应和弯曲效应耦合。

(4) 从目标而言，工程问题主要是确定阻力多大；而生理流动分析所要求的是壁面剪应力、压力及速度的分布。后者困难得多。

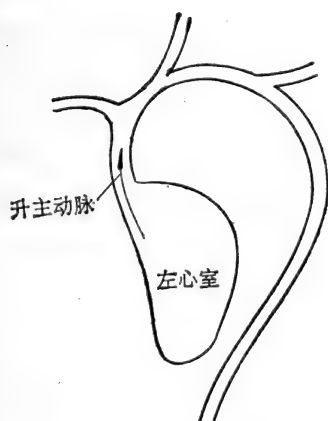


图 8-9 主动脉弓部的流动

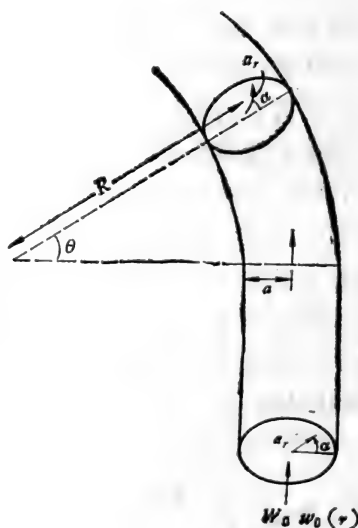


图 8-10 分析曲管流动的坐标系

要对(1)、(2)、(3)做全面分析，目前还做不到，需作简化。一般认为血管壁的位移很小，波速又很高，壁运动对流动的影响可以不计。故可假设血管是刚性管，并设血液是牛顿流体。下面就两种情况进行分析：(i) 刚性弯曲管道中充分发展的非定常流动；(ii) 刚性弯曲管道中发展中的定常层流。

## §5-1 曲管流动方程和相似参数

取坐标系  $\{r', \alpha, s'\}$  如图 8-10 示,  $s' = R \cdot \theta$ ,  $R$  是管轴的曲率半径。相应的速度分量为  $\{u', v', w'\}$ , 管半径为  $a$ 。取时间尺度为  $T = \frac{1}{f}$ ,  $f$  为流动脉动的频率。无量纲化, 设:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{r'}{a}, & s &= \frac{s'}{a}, & t &= \frac{t'}{T} = t'f \\ u &= \frac{u'}{W_0}, & v &= \frac{v'}{W_0}, & w &= \frac{w'}{W_0} \\ p &= \frac{p'}{\rho W_0^2}, & & & & W_0 \text{ 为参考速度} \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

这样, 连续方程为

$$J \frac{\partial u}{\partial r} + (2J - 1) \frac{u}{r} + \frac{J}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} - v \delta \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (5-2)$$

$$\left. \begin{aligned} & J \left( St \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{v^2}{r} \right) + w \frac{\partial u}{\partial s} \\ & - \delta w^2 \cos \alpha = -J \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \right. \\ & \left. \left( \delta \sin \alpha - \frac{J}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{\delta}{J} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \cos \alpha \right] \\ & J \left( St \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{uv}{r} \right) \\ & + w \frac{\partial v}{\partial s} + \delta w^2 \sin \alpha = -\frac{J}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{1}{Re} \\ & \cdot \left[ \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \left( \delta \cos \alpha + J \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

$$\left. \begin{aligned}
& -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \alpha} + \frac{s}{J} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \sin \alpha \Big] \\
& J \left( St \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \delta w \\
& \cdot (u \cos \alpha - v \sin \alpha) + w \frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} \\
& + \frac{1}{Re} \left[ J \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\delta w}{J} \cos \alpha \right) \right. \\
& + \frac{J}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{J}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\delta w}{J} \sin \alpha \right) - \frac{J}{r} \\
& \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right) - J \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \right) \Big]
\end{aligned} \right\}$$

这里

$$\left. \begin{aligned}
\delta &= \frac{a}{R}, & Re &= \frac{aW_0}{\nu} \\
St &= \frac{af}{W_0}, & J &= 1 + r\delta \cos \alpha
\end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

$\delta, Re, St$  是流动相似参数。

也可以引进别的相似参数,常用的有:

$$D = \left( \frac{a}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2aW_0}{\nu} = 2\delta^{\frac{1}{2}} Re \quad (5-5a)$$

称为 Dean 数,物理上它等于离心力与粘性力之比。

$$\beta = \left( \frac{2\nu}{\omega a^2} \right)^{\frac{1}{2}} = [\pi \cdot St \cdot Re]^{-\frac{1}{2}} \quad (5-5b)$$

它相当于频率参数  $a \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  的倒数,这里  $\omega$  为流动脉动的圆频率,

$\omega = 2\pi f_0$

$$R_r = \frac{\delta W_0^2}{\omega \nu} = \frac{1}{2} \delta Re^2 \cdot \beta^2 \quad (5-5c)$$

$$\sigma^2 = \frac{W_0^2}{Ra\omega^2} = \frac{\delta}{(St)^2} \quad (5-5d)$$

主动脉中,  $Re \sim 10^3$ ,  $St \sim 10^{-1}$ ,  $\beta \sim 10^{-1}$ 。

### § 5-2 充分发展的弯曲管流动

流动是充分发展的,  $u, v, w$  与  $s$  (即与  $\theta$ ) 无关, 方程 (5-2)(5-3) 中有关  $s$  的项均可略去。

Lyne<sup>[8]</sup> 分析了曲管中充分发展的振荡流。设压力梯度为

$$\frac{\partial p'}{\partial \theta} = -W_0 \cdot \omega \cos \omega t' \quad (5-6)$$

若流体无粘, 则由方程 (5-2)(5-3) 可得  $w'$  的准确解为

$$w' = \frac{W_0 \sin \omega t'}{1 + \delta r \cos \alpha} \quad (5-7)$$

无量纲化, 设

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{r'}{a}, \quad s = \frac{s'}{a}, \quad t = \omega t', \\ u &= \frac{u' \cdot R\omega}{W_0^2}, \quad v = \frac{v' \cdot R\omega}{W_0^2}, \quad w = \frac{w'}{W_0} \\ p &= \frac{p' + \rho R\theta \cdot W_0 \cos \omega t}{\rho \delta W_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

这样, 连续方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\delta u \cos \alpha}{J} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{v \delta \sin \alpha}{J} = 0 \quad (5-9)$$

运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma^2 \left[ u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{v^2}{r} \right] - \frac{w^2 \cos \alpha}{J} \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{2} \beta^2 \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\delta \sin \alpha}{J} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \right|$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + \epsilon^2 \left[ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{uv}{r} \right] \\
& + \frac{w^2 \sin \alpha}{J} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} \\
& + \frac{1}{2} \beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta \cos \alpha}{J} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \quad (5-10) \\
& \frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon^2 \left[ u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right. \\
& \left. + \frac{uw \delta \cos \alpha}{J} - \frac{wv \delta \sin \alpha}{J} \right] = \frac{\cos t}{J} \\
& + \frac{1}{2} \beta^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w \delta \cos \alpha}{J} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{w \delta \sin \alpha}{J} \right) \right]
\end{aligned}$$

设曲率半径  $R \gg a$ , 即  $\delta \ll 1$ , 略去  $\mathcal{O}(\delta)$  项, 则 (5-9) 变为

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \quad (5-11)$$

引进横截面上的流函数  $\psi$ , 使 (5-11) 自动满足,

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5-12)$$

由 (5-10a,b) 消去压力项, 略去  $\mathcal{O}(\delta)$  项, 得横截面上的涡量方程

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\epsilon^2}{r} \cdot \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \alpha)} - \frac{2}{r} \left( r w \frac{\partial w}{\partial r} \sin \alpha \right. \\
& \left. + w \frac{\partial w}{\partial \alpha} \cos \alpha \right) = \frac{1}{2} \beta^2 \nabla^4 \psi \quad (5-13)
\end{aligned}$$

这里,

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(r, \alpha)} = \frac{\partial a}{\partial r} \cdot \frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial b}{\partial r} \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha}$$



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

略去  $O(\delta)$  项后, (5-10c) 变为

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\varepsilon^2}{r} \cdot \frac{\partial(\phi, w)}{\partial(r, \alpha)} = \cos t + \frac{1}{2} \beta^2 \nabla^2 w \quad (5-14)$$

边界条件为

$$r = 1: \left. \begin{aligned} \phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

方程组 (5-11) — (5-15) 的准确解尚未求出。Lyne 在条件  $\beta \ll 1$  (即频率高、粘度小、管径大) 时, 求出了渐近解。此解在管心区与无粘解

$$w = \sin t \quad (5-16)$$

衔接, 在壁面, 满足边界条件 (5-15)。

为求渐近解, 作变换:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\beta} (1 - r) \\ f &= \frac{1}{\beta} \phi \end{aligned} \right\} \quad (5-17)$$

设解的形式为:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0(t, \eta, \alpha, R_s) + \beta w_1(t, \eta, \alpha; R_s) \\ &\quad + \beta^2 w_2(t, \eta, \alpha; R_s) \\ f &= f_0(t, \eta, \alpha; R_s) + \beta f_1(t, \eta, \alpha; R_s) \\ &\quad + \beta^2 f_2(t, \eta, \alpha; R_s) \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

边界条件变为:

$$\eta = 0: \left. \begin{aligned} w_i &= 0 \\ f_i &= 0 \\ \frac{\partial f_i}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (5-19)$$

$\eta \rightarrow \infty$ :

$$w = \sin t$$

$$\phi = F_0(t, r, \alpha; R_s) + \beta F_1(t, r, \alpha; R_s) + \beta^2 F_2(t, r, \alpha; R_s) \quad \left. \vphantom{\phi} \right\} \quad (5-20)$$

这里  $F_i$  满足:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 F_0 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 F_1 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 F_2 - \frac{R_s}{2r} \cdot \frac{\partial(F_0, \nabla^2 F_0)}{\partial(r, \phi)} &= \frac{1}{2} \nabla^4 F_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

以(5-18)代入(5-14)(5-13)得  $\beta$  的 0 级近似方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} &= \cos t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} &= -2w_0 \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

满足边界条件(5-19)(5-20)的解为:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \sin t - e^{-\eta} \sin(t - \eta) \\ f_0 &= \left\{ \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \eta - \frac{1}{8} e^{-2\eta} - \frac{1}{2} \sqrt{2} e^{-\eta} \right. \\ &\quad \cdot \cos\left(-\eta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{8} e^{-\sqrt{2}\eta} \cos\left(2t \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2}\eta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8\sqrt{2}} e^{-2\eta} \cos\left(2t - 2\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\eta} \cos\left(2t - \eta + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \left(9\sqrt{2} - 10\right) \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &\quad \cdot \sin \alpha \cdots \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

$\beta$  的一级近似方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \eta} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta \partial t} - \frac{\partial^3 f_0}{\partial \eta^3} \\ &- 2 \frac{\partial(w_0 w_1)}{\partial \eta} \sin \alpha, \end{aligned} \right\} (5-24)$$

其满足边界条件的解为:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{2} \eta e^{-\eta} \cdot \sin(t - \eta) \\ f_1 &= \left\{ 2\eta - \frac{3}{16} - \frac{1}{16} (9\sqrt{2} - 10) \right. \\ &\cdot \eta \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{32} (16\sqrt{2} - 21) \cdot \cos 2t \left. \right\} \\ &\cdot \sin \alpha + A(\alpha) \eta^2 \end{aligned} \right\} (5-25)$$

当  $R_s \rightarrow 0^*$  时,

$$A(\alpha) = \frac{3}{8} \sin \alpha - \frac{R_s}{768} \sin \alpha + \frac{R_s^2}{737,280} \sin \alpha \approx \frac{3}{8} \sin \alpha \quad (5-26)$$

图 8-11 是根据 Lyne 的解 (取一级近似) 画出的, 横截面上二次流的流线图。可见, 振荡流中, 二次流的情况和定常流很不一样。在小  $\beta$  值下, 离心力所引起的运动分两个区域, 管心区流体不是从内侧流向外侧, 而是从外侧流向内侧; 边界层区域内存在一个与管心区方向相反的迴流。这时, 轴向剪应力在内侧壁达最大值。此外, 周向剪应力在内、外侧壁面改变方向, 达最小值, 而在垂直剖面  $\left(\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\pi\right)$ , 达最大值。

\* 主动脉中  $R_s \sim 10^{-3}$ 。

据 §2 所述, 这种定性结论, 对于动脉粥样硬化的机制是很有意义的。问题是: 上述分析是否全面? 非定常流动中二次流流型的变化由哪些参数决定? 在不同的参数范围内, 二次流物理图象如何(定性地)变化? 为回答这些问题, Smith<sup>[9]</sup> 对曲管内的脉动流作了进一步研究。

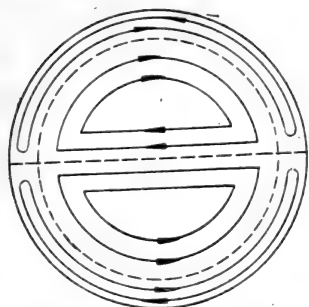


图 8-11 弯曲管内充分发展的振荡流中的二次流 ( $\beta \ll 1$ )

$$G = \text{常数}$$

引进参数

$$K = \frac{Ga^3 \delta^{\frac{1}{2}}}{\rho \nu^2} \quad (5-28)$$

类似于 Lyne, Smith 用渐近展开方法, 分析了图 8-12 所示的几种极限情况。所得定性结论列于表 8-1。

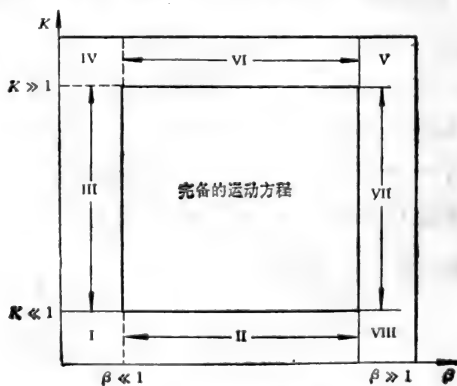


图 8-12 参数范围 ( $K, \beta$ )

表 8-1 十种情况下二次流特征<sup>[9]</sup>

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
$\frac{G}{\rho\omega W_0}$	$\gg 1$	$\ll 1$	$\ll 1$	$\ll 1$	$\mathcal{O}(1)$	$\gg 1$	$\gg 1$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\ll 1$
下游管流	定常	振荡	振荡	脉冲	定常	定常	定常	脉冲	脉冲	脉冲
二次流特点 (以管心区域为例)	定常 流向 外侧	定常 流向 外侧 或 内侧	定常 流向 外侧 或 内侧	定常 流向 外侧	定常 流向 外侧	定常 流向 外侧	定常 流向 外侧	脉冲 流向 外侧	脉冲 流向 外侧	脉冲 流向 外侧

情况 I、V、VII 中,定常分量远大于振荡分量,下游流动又是定常的。这时,所产生的二次流总是定常的,流体总是从内侧流向外侧,又沿壁面从外侧流回内侧。然而,当  $G \ll \rho\omega W_0$  (即  $K \ll 1$ ) 时,相当于情况 II、III、IV、X,则有两种情况:

(1) 振荡频率不高,振荡分量对管心区流动没多大影响,因而下游仍有一与振荡分量同量级的定常分量,流动是脉冲型的。这时二次流也是脉冲型的,情况 X 属于此类。

(2) 振荡频率很高,压倒了定常效应,下游管流变成了振荡流。此时,二次流是定常的,管心部分的流体,既可从内侧流向外侧,也可从外侧流向内侧,示例如图 8-13(a) (b)。到底流向内侧还是流向外侧,取决于参数  $K$ 、 $\beta$  的匹配,即在  $K$ - $\beta$  平面上存在一条二次流转向曲线。当  $K \ll 1$  时,存在一个  $\beta_0$ ,若  $\beta > \beta_0$ ,则管心部分的二次流是流向外侧的,否则流向内侧;当  $\beta \ll 1$  时,存在一个  $K_0$ ,若  $K > K_0$ ,则管心部分的二次流指向外侧,否则指向内侧。至于转向曲线的具体形式,尚待研究。

情况 V、VIII、IX 中, $G \sim \rho\omega W_0$ 。V 中振荡频率很低,不起多大作用,下游仍为定常流,二次流也是定常的。VIII、IX 则不然,无论下游管流还是弯曲部二次流都是脉冲型的。

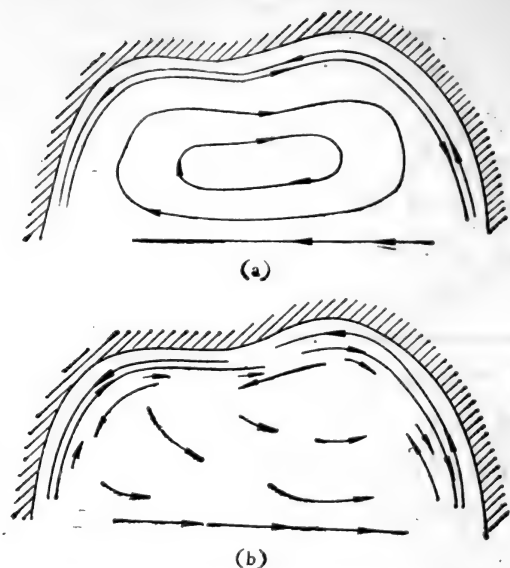


图 8-13 曲管脉冲流动中的二次流<sup>[9]</sup>

(a)  $K \ll 1, \beta \ll 1$  (b)  $K \gg 1, \beta \gg 1$ .

对于心血管流动来说, 感兴趣的是: (i) 在情况 II、III 下, 求出  $\beta_0, K_0$ ; (ii) 对情况 VIII、IX、X 求数值解。

### § 5-3 曲管内发展中的定常流

如图 8-9 所示, 左心室收缩射出的血液很快就进入主动脉弓, 这里, 进口效应和弯曲效应强烈地耦合。

分析这种流动所用的基本方程仍为 (5-2)(5-3), 壁面边界条件仍为

$$r = 1: \quad u = v = w = 0 \quad (5-29)$$

只是多一个进口条件。Singh<sup>[10]</sup> 提出两种进口条件:

(1) 进口截面上动压均匀, 即

$$s = 0 \quad (\theta = 0):$$

$$\left. \begin{aligned} u' = v' = 0 \\ w' = W_0 \frac{1 + A \sin \omega t'}{J} \end{aligned} \right\} \quad (5-30)$$

(2) 进口截面上,速度分布均匀,即

$$s = 0: \left. \begin{aligned} u' = v' = 0 \\ w' = W_0(1 + A \sin \omega t') \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

Smith<sup>[11]</sup> 则假设,进口截面上流动是定常的,按泊肃叶定律分布

$$s = 0: \left. \begin{aligned} u' = v' = 0 \\ w' = \frac{1}{4} W_0(1 - r^2) \end{aligned} \right\} \quad (5-32)$$

对主动脉弓的流动来说,(5-30)较为合理。

若流体是无粘的,则满足(5-2)(5-3)(5-29)(5-30)的准确解为:

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 \\ w = \frac{1 + A \sin t}{J} \\ p = -\frac{1}{2} \frac{(1 + A \sin t)^2}{J^2} - St \cdot A \cos t \end{aligned} \right\} \quad (5-33)$$

主动脉弓处血流  $St \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ , 故作为一种粗略的近似,可以把流动看作是准定常的,这样(5-3)中的  $\frac{\partial}{\partial t}$  项均可

忽略不计,进口条件也变为

$$s = 0: \left. \begin{aligned} u = v = 0 \\ w = \frac{1}{J}, \quad p = -\frac{1}{2J^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-34)$$

在此简化下, Singh 用渐近展开方法求解。

流动分为两个区域, (i) 无粘核心流的流体作曲线运动所受的离心力由径向压力梯度平衡; (ii) 壁面边界层的流体惯性力由粘性力平衡。首先, 假设边界层的存在不影响核心区的流动, 在管心流(5-34)的条件下求出边界层流动的一级近似解, 然后, 再由此得边界层存在时, 管心流的近似解, 再据此得边界层流动的二级近似, 如此往复, 可得任意级近似解。这里仅限于一级近似。

### 1. 边界层一级近似

设

$$\left. \begin{aligned} r &= 1 - \frac{\eta}{\sqrt{Re}} = 1 - \varepsilon\eta, \quad \varepsilon = Re^{-\frac{1}{2}} \\ u &= \varepsilon\tilde{u} \\ v &= \tilde{v}, \quad w = \tilde{w}, \quad p = \tilde{p} \end{aligned} \right\} \quad (5-35)$$

$\varepsilon$  表示粘性效应。进而设

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(\eta, \alpha, s, \delta) &= \tilde{u}_0(\eta, \alpha, s, \delta) + \mathcal{O}(\varepsilon^m), \quad m > 0 \\ \tilde{u}_0(\eta, \alpha, s, \delta) &= \tilde{u}_{00}(\eta, \alpha, s) + \delta\tilde{u}_{01}(\eta, \alpha, s) + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \right\} \quad (5-36)$$

$\tilde{u}_{00}$  为相当的直管解,  $\delta\tilde{u}_{01}$  表示弯曲效应。其他变量  $\tilde{w}$ 、 $\tilde{v}$ 、 $\tilde{p}$  也有类似于(5-36)的关系。代入(5-2)(5-3), 得两个方程组

#### (1) $\mathcal{O}(1)$ 方程组

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{u}_{00}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{v}_{00}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}_{00}}{\partial \eta} &= 0 \\ -\tilde{u}_{00} \frac{\partial \tilde{v}_{00}}{\partial \eta} + \tilde{v}_{00} \frac{\partial \tilde{v}_{00}}{\partial \alpha} + \tilde{w}_{00} \frac{\partial \tilde{v}_{00}}{\partial s} \\ &= -\frac{\partial \tilde{p}_{00}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_{00}}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (5-37)$$



$$\left. \begin{aligned} -\tilde{u}_{00} \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial \eta} + \tilde{v}_{00} \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial \alpha} + \tilde{w}_{00} \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial s} \\ = -\frac{\partial \tilde{p}_{00}}{\partial s} + \frac{\partial^2 \tilde{w}_{00}}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right\}$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: \quad \tilde{u}_{00} = \tilde{v}_{00} = \tilde{w}_{00} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty: \quad \tilde{v}_{00} = 0, \quad \tilde{w}_{00} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-38)$$

(5-37b)表明,边界层内压力是由管心区流动规定的,(5-38)说明  $\tilde{w}_{00}$  仅取决于  $\eta, s$ , 与  $\alpha$  无关。即相当于直管流动,与参数  $\delta$  无关。这样,  $\frac{\partial \tilde{p}_{00}}{\partial \alpha} = 0$ , 故  $\tilde{v}_{00}$  满足齐次方程和齐次边界条件,故

$$\tilde{v}_{00} = 0 \quad (5-39)$$

这样,  $\tilde{u}_{00}, \tilde{w}_{00}$  满足 Blasius 型方程。设

$$\zeta = \frac{\eta}{\sqrt{2s}}, \quad \tilde{\psi}_{00} = (2s)^{\frac{1}{2}} f_{00}(\zeta) \quad (5-40)$$

$\tilde{\psi}_{00}$  为流函数,

$$\tilde{u}_{00} = \frac{\partial \tilde{\psi}_{00}}{\partial s}, \quad \tilde{w}_{00} = \frac{\partial \tilde{\psi}_{00}}{\partial \eta}, \quad (5-41)$$

方程(5-37)变为

$$f_{00}''' + f_{00}f_{00}'' = 0 \quad (5-42)$$

边界条件变为

$$\left. \begin{aligned} f_{00}(0) = f_{00}'(0) = 0 \\ f_{00}'(\infty) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-43)$$

这和平板边界层的 Blasius 问题一样,可应用其解。

(2)  $\mathcal{O}(\delta)$  方程组

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{u}_{01}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{v}_{01}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{w}_{01}}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial s} \cos \alpha = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}_{01}}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & -\tilde{u}_{00} \frac{\partial \tilde{v}_{01}}{\partial \eta} + \tilde{w}_{00} \frac{\partial \tilde{v}_{01}}{\partial s} + w_{00}^2 \sin \alpha \\
 & = -\frac{\partial \tilde{p}_{01}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_{01}}{\partial \eta^2} \\
 & -\tilde{u}_{00} \frac{\partial \tilde{w}_{01}}{\partial \eta} - \tilde{u}_{01} \frac{\partial \tilde{w}_{01}}{\partial s} + \tilde{w}_{00} \frac{\partial \tilde{w}_{01}}{\partial s} + \tilde{w}_{01} \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial s} \\
 & - \tilde{w}_{00} \frac{\partial \tilde{w}_{00}}{\partial s} \cos \alpha = -\frac{\partial \tilde{p}_{01}}{\partial s} + \frac{\partial^2 \tilde{w}_{01}}{\partial \eta^2}
 \end{aligned} \right\} (5-44)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned}
 \eta = 0: & \quad \tilde{u}_{01} = \tilde{v}_{01} = \tilde{w}_{01} = 0 \\
 \eta \rightarrow \infty: & \quad \tilde{v}_{01} = 0, \quad \tilde{w}_{01} = -\cos \alpha
 \end{aligned} \right\} (5-45)$$

压力由管心流动决定,故由(5-34)可得

$$\tilde{p}_{01} = \cos \alpha \quad (5-46)$$

由(5-44)(5-46)可知,可设

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{v}_{01}(\eta, \alpha, s) &= \tilde{V}_{01}(\eta, s) \sin \alpha \\
 \tilde{u}_{01}(\eta, \alpha, s) &= \tilde{U}_{01}(\eta, s) \cos \alpha \\
 \tilde{w}_{01}(\eta, \alpha, s) &= \tilde{W}_{01}(\eta, s) \cos \alpha
 \end{aligned} \right\} (5-47)$$

引进流函数  $\tilde{\phi}_{01}, \tilde{\psi}_{01}$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{V}_{01} &= \frac{\partial \tilde{\phi}_{01}}{\partial \eta}, & \tilde{U}_{01} &= \frac{\partial \tilde{\phi}_{01}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\psi}_{01}}{\partial s} \\
 \tilde{W}_{01} &= \frac{\partial \tilde{\psi}_{01}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{\phi}_{00}}{\partial \eta}
 \end{aligned} \right\} (5-48)$$

进而设:

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\phi}_{01} &= (2s)^{\frac{1}{2}} \cdot s g_{01}(\zeta) \\
 \tilde{\psi}_{01} &= (2s)^{\frac{1}{2}} [f_{01}(\zeta) + s^2 f_{02}(\zeta)]
 \end{aligned} \right\} (5-49)$$

这样方程(5-44)(5-45)变为

$$\left. \begin{aligned}
 f_{01}'' + f_{00} f_{01}' + f_{00}' f_{01} &= 1 \\
 f_{01}(0) = f_{01}'(0) = 0 & \quad f_{01}'(\infty) = -2
 \end{aligned} \right\} (5-50)$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_{02}'' + f_{00} f_{02}' - 4f_{00}' f_{02} + f_{00}'' (2g_{01} + 5f_{02}) &= 0 \\
 f_{02}(0) = f_{02}'(0) = 0 & \quad f_{02}(\infty) = 0
 \end{aligned} \right\} (5-51)$$



因素(ii)起主导作用,内侧壁所受轴向切应力高于外侧壁。随着  $s$  增大,二次流效应迅速增大,外侧壁边界层变薄,而内侧变厚。可以预料,存在一个  $s_0$ ,当  $s > s_0$  时,二次流效应起主导作用,这时外侧壁所受流体剪应力高于内侧壁。由(5-55)可知

$$s_0 \cong 1.9 \quad (5-56)$$

$s_0$  与流动雷诺数及管轴曲率无关。

若弯曲管段全长为  $l$ , 则平均摩阻系数

$$c_D = -\frac{1}{\rho W_0^2 \pi a l} \int_0^l \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tau_{ws} a d\alpha ds \quad (5-57)$$

外侧壁  $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , 内侧壁  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。应用

(5-55)得

$$c_D = \sqrt{\frac{2}{Re}} \left[ 0.4696 \pm \frac{2\delta}{\pi} (0.0512l^2 - 0.9392) \right] l^{-\frac{1}{2}} \quad (5-58)$$

由(5-54)可得壁面周向切应力,

$$\tau_{w\alpha} = -1.5358s \cdot \delta \left( \frac{\rho \mu W_0^3}{2sa} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha \quad (5-59)$$

流动分离具有重要意义。三维情况下流动分离起始于极限流线,它的定义是

$$\frac{d\alpha}{ds} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{v}{w} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial v / \partial r}{\partial w / \partial r} = \frac{\tau_{w\alpha}}{\tau_{wz}} \quad (5-60)$$

由(5-55)(5-59)得极限流线为

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1.5358s \cdot \delta \sin \alpha}{0.4696 + (0.2562s^2 - 0.9392)\delta \cos \alpha} \quad (5-61)$$

图8-14是算出的极限流线。

## 2. 边界层位移引起的管心流场变化

上面算出来的径向速度  $u_0$  是和(5-34)不匹配的,这正

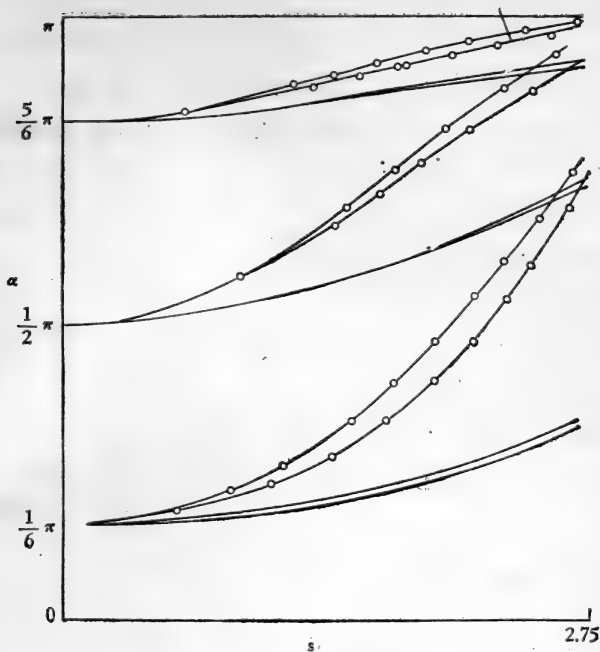


图 8--14 极限流线

反映了二次流的发展。由(5-53), 令  $\zeta \rightarrow \infty$ , 得:

$$\tilde{u} = \frac{u}{\beta} = (2s)^{-\frac{1}{2}} \{-b_1 + [b_3 + (2b_2 + 5b_4)s^2] \delta \cos \alpha\} \quad (5-62)$$

$$b_1 = 1.2168, \quad b_2 = 1.1393, \quad b_3 = 1.2168, \quad b_4 = 0.5229$$

这表明, 管心区流动可写为:

$$\left. \begin{aligned} u(r, \alpha, s, \beta, \delta) &= \beta u_1(r, \alpha, s, \delta) + \mathcal{O}(\beta^n) \quad n > 1 \\ v(r, \alpha, s, \beta, \delta) &= \beta v_1(r, \alpha, s, \delta) + \mathcal{O}(\beta^n) \\ w(r, \alpha, s, \beta, \delta) &= \frac{1}{J} + \beta w_1(r, \alpha, s, \delta) + \mathcal{O}(\beta^n) \\ p(r, \alpha, s, \beta, \delta) &= -\frac{1}{2J^2} + \beta p_1(r, \alpha, s, \delta) + \mathcal{O}(\beta^n) \end{aligned} \right\} \quad (5-63)$$

进而设

$$u_1(r, \alpha, s, \delta) = u_{10}(r, \alpha, s) + \delta u_{11}(r, \alpha, s) + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (5-64)$$

$v_1, w_1, p_1$  亦与此类似,  $u_{10}$  是直管效应,  $u_{11}$  是弯曲效应。

以 (5-63)(5-64) 代入基本方程 (5-2)(5-3) 及边界条件(5-29), 得两组方程。

$\mathcal{O}(\beta)$  级方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{10}}{\partial r} + \frac{u_{10}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{10}}{\partial \alpha} + \frac{\partial w_{10}}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial u_{10}}{\partial s} = -\frac{\partial p_{10}}{\partial s}, \quad \frac{\partial v_{10}}{\partial s} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_{10}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial w_{10}}{\partial s} = -\frac{\partial p_{10}}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (5-65)$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} r = 1: \quad u_{10} &= -\frac{b_1}{\sqrt{2s}} \\ s = 0: \quad p_{10} = w_{10} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-66)$$

$\mathcal{O}(\beta\delta)$  级方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{11}}{\partial r} + \frac{u_{11}}{r} + u_{10} \cos \alpha + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_{11}}{\partial \alpha} - v_{10} \sin \alpha \\ + \frac{\partial w_{11}}{\partial s} - r \cos \alpha \cdot \frac{\partial w_{10}}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial s} - 2r \cos \alpha \cdot \frac{\partial v_{10}}{\partial s} + 2 \sin \alpha \cdot w_{10} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_{11}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial s} - 2r \cos \alpha \cdot \frac{\partial u_{10}}{\partial s} - 2 \cos \alpha \cdot w_{10} \\ &= -\frac{\partial p_{11}}{\partial r} \\ \frac{\partial w_{11}}{\partial s} - 2r \cos \alpha \cdot \frac{\partial w_{10}}{\partial s} &= -\frac{\partial p_{11}}{\partial s} + r \cos \alpha \frac{\partial p_{10}}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (5-67)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} r = 1: \quad u_{11} &= \cos\alpha(2s)^{-\frac{1}{2}}[b_3 + (2b_2 + 5b_4)s^2] \\ s = 0: \quad p_{11} &= w_{11} = 0 \end{aligned} \right\} (5-68)$$

Singh 求出了解, 这里不详述。所得的横截面上的二次流动流线如图 8-15 示。可见, 对于曲管内发展中的定常流动来说, 影响二次流的有两种作用:

(1) 离心力使管心流体流向外侧, 然后沿壁面流向内侧。

(2) 整个管心流在发展过程中是加速的, 但外侧流体减速, 流程变长; 内侧流体加速, 流程缩短, 故内侧流体的纵向伸展率高于外侧, 有一种抽吸作用把外侧流体拉向内侧。

两种作用的结果是: 随着  $s$  的增大, 横向流动的驻点沿对称轴, 从管中心移向外侧壁。如图 8-15(a)、(b) (c)、(d) 所示。

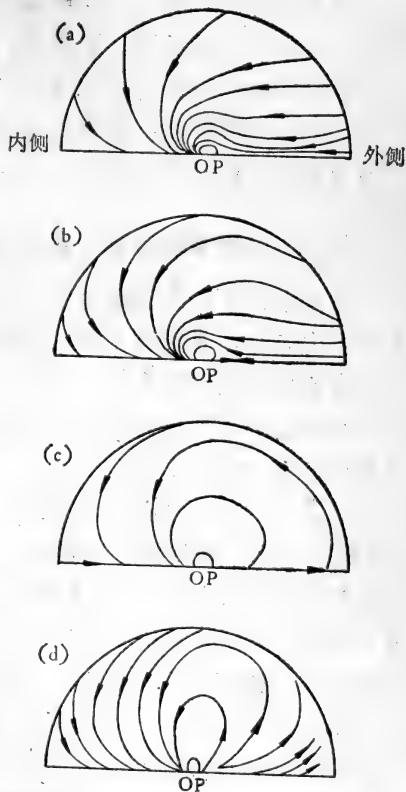


图 8-15 横截面上的二次流流线  
(a)  $s = 0.1$ , (b)  $s = 0.6$ ,  
(c)  $s = 1.1$ , (d)  $s = 2.1$ 。

## § 6 分支管道流动

动脉粥样硬化等心血管疾病的病理机制、尘埃在呼吸道中的积沉等问题的探讨，要求我们研究管系分支部位流场的特性，包括速度分布、剪应力分布、压力分布，分离区及旋涡的位置、大小及持续时间，颗粒运动轨迹及滞留程度，物质运输，流过分岔时的机械能损耗、压降等等。

### §6-1 分支管道流动的实验观测

在体条件下，准确地测定心血管或呼吸道分支流动的速度和压力分布，是非常困难的，必须通过离体模型实验来认识分支流场的物理特征。

心血管系统典型分支有 Y 形分支和侧分支两种，呼吸道的典型分支如图 8-16 示。

Attinger 观察了流过 Y 形接头时的扰动流型，发现  $Re > 20,000$  时，支管外侧壁附近发生空泡。Ferguson 和 Roach 用分支角为  $0-180^\circ$  的模型(Y 型)，系统地观察了分支处的流谱，典型结果见图 8-17。(a) 为  $Re < 200$  时的情况，母管中心流线直接撞击分支角尖顶，然后沿一曲线贴近支管内侧壁流向下游。(b) 为  $200 < Re < 500$  时的情况，支管外侧壁附近，流动分离，形成旋涡。分支角越大，分离区越大。(c)  $500 < Re < 1800$ ，由于强烈的二次流作用，可以观察到双螺旋线形的流动。

根据流谱观测，可得对称分支支管内流动的定性图象如图 8-18 示。在分支管内侧壁上，形成新的边界层，最大轴向速度就在该边界层外缘达到。同时，流动分流时，流线弯曲，形成二次流，在定常情况下，管心流体流向分支内侧(弯曲外侧)，



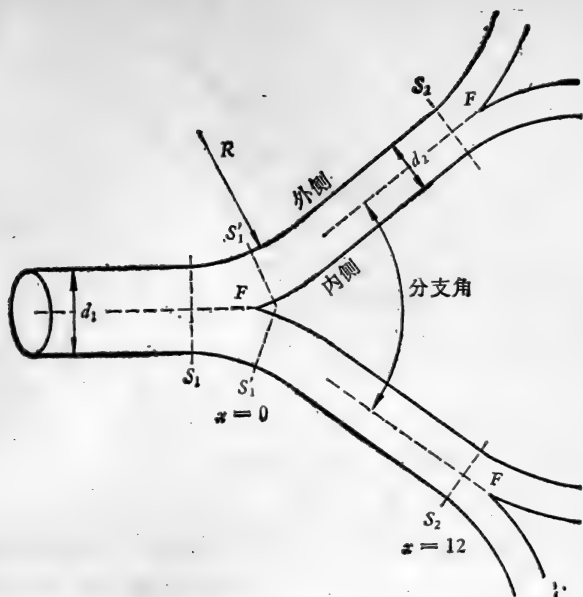


图 8-16 呼吸道分支<sup>[12]</sup>

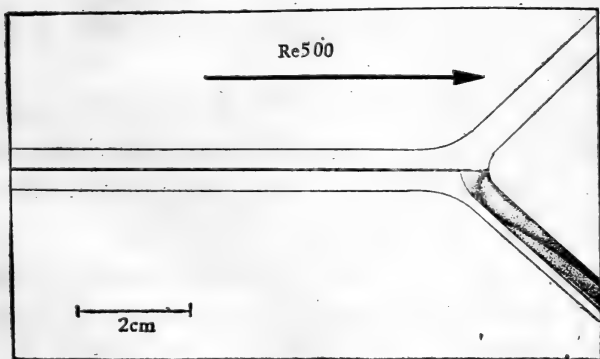


图 8-17 Y型分支流谱<sup>[3]</sup>

而壁面附近速度较低的流体，则沿壁流向分支外侧（弯曲内侧），这使得最大轴向速度的位置更靠近内侧壁。此外，在外侧壁附近流动往往分离。一定分支角下，分离区大小依赖于

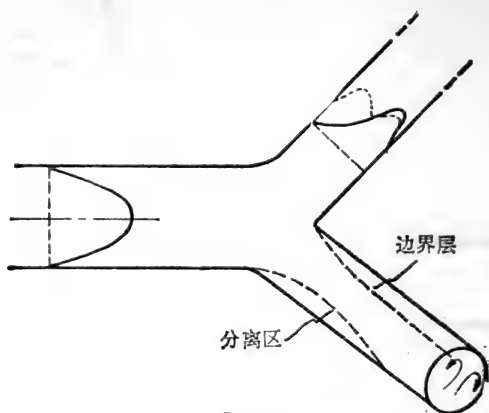


图 8-18 对称分支管流动

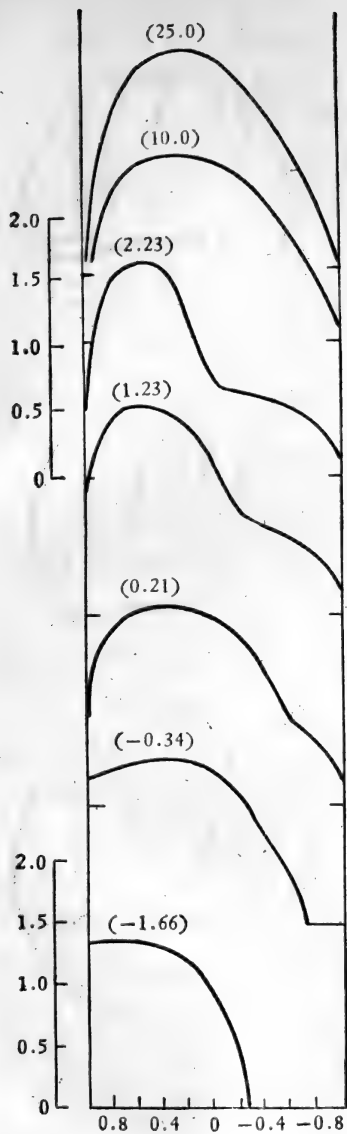
管径与轴线曲率半径之比。

Olsen 用热丝测量了对称分支管内的速度分布,典型结果见图 8-19、8-20、8-21。图 8-19 是从分支上游 1.66 倍于管直径到下游 25 倍于管直径处,若干截面上,轴向速度分布,显然最大速度发生于支管内侧壁附近,而且在分支口附近,速度剖面扭曲。

图 8-20 是分支口下游 2.2 倍支管直径处轴向速度的等值线图。其特点是: (i) 分支内侧壁附近,高剪切区超过管周的一半; (ii) 有明显的扭曲,它表明,在垂直于子管轴线的断面上,流速分布呈 M 形(见图 8-14 中虚线)。

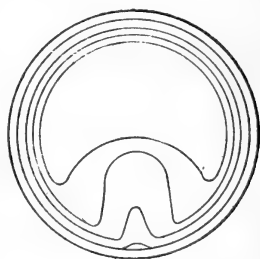
图 8-21 是从分支上游 0.34 倍于管直径,到下游 5 倍于管直径处,若干横截面上的横向流动速度剖面。(a)是上游截面,垂直于母管轴,二次流主要是流向分支外侧壁的,而在垂直于支管的截面上(b),二次流主要是流向弯曲外侧(即分支内侧)壁的。(d)的情况,还不知如何解释。

Y 形接头还有另一种流动形式,即从支管到母管的汇合流。呼气时气管中的流动即属此类。Schroter 和 Sudlow 利用



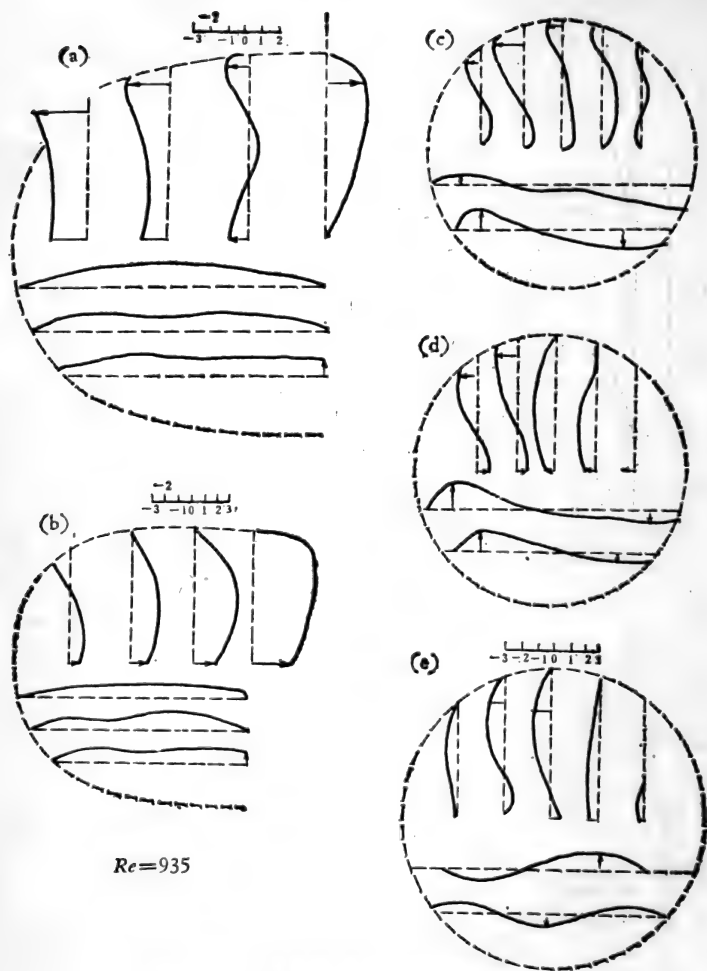
分支角:  $70^\circ$ ,  $Re=530$

图 8-19 对称分支管道轴向速度剖面的变化<sup>[12]</sup>



$Re=660$

图 8-20 分支下游, 子管截面上, 轴向速度等值线图<sup>[12]</sup>



$Re=935$

图 8-21 分支管流, 横向流动速度分布<sup>[12]</sup>

- (a) 分支上游  $0.34d$ , 截面垂直于母管轴;  
 (b) 分支上游  $0.34d$ , 截面垂直于子管轴;  
 (c) 分支下游  $0.21d$ ; (d) 分支下游  $2.23d$ ;  
 (e) 分支下游  $5.0d$ 。

模型,观察了流谱,并用热丝测量了母管中的速度分布。典型结果见图 8-18。流谱显示表明,母管进口部分,有两对二次涡,它们产生于两个支管流动汇合时的流线弯曲。图 8-22 说明,汇合流刚形成时,速度分布中心有个凹点,在下游迅速发展为峰点。但在垂直于分支平面的方向上,管心部分速度分布是很平坦的。

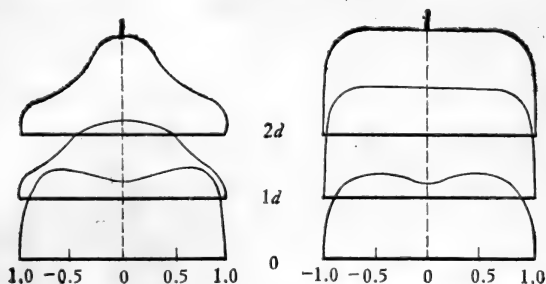


图 8-22 Y形接头汇合流轴向速度剖面<sup>[12]</sup>

- (a) 在分支所在的平面方向上,  
 (b) 在垂直于分支平面的方向上。

Round<sup>[13]</sup>测量了定常流在 Y 形分支部位,粘性引起的机械能损失。分支角在  $75-125^\circ$  之间,面积比  $\beta$  (支管总面积与母管面积之比)为  $0.73-1.33$ ,定义粘性能耗系数  $\xi$  为单位时间内粘性能耗与动能流率之比。则当  $\beta > 1, Re \leq 800$  时,有

$$\xi = 2.64 + \frac{1.41}{\beta} \quad (6-1)$$

Rodkiewicz<sup>[14]</sup> 用侧支模型观测了流谱,参数范围为:

$$130 \leq Re \leq 2040$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\alpha}{\pi/2} \leq 1$$

$$0.4 \leq \frac{d}{D} \leq 1$$

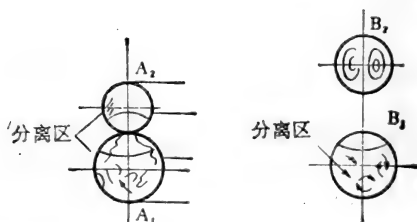
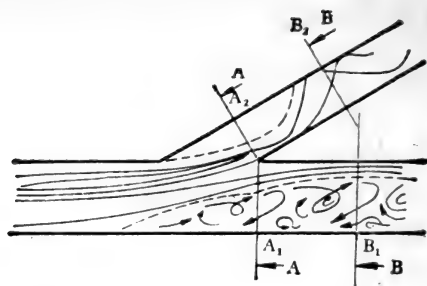


图 8-23 侧支模型流谱<sup>[14]</sup>

典型结果见图 8-23。结论是：

(1) 分支管与主支管流量之比  $\gamma = \frac{Q_d}{Q_D}$ ，是进口雷诺数及分支角  $\alpha$  的降函数，是直径比  $\frac{d}{D}$  的增函数。

(2) 两个分支管内，都发生流动分离。主支管中的分离更为严重，存在‘香蕉形’涡旋。

(3) 侧支管内，形成双螺旋线形状的流动。

## §6-2 分流效应的理论分析

综观实验结果，管道分支引起的流场扰动有四：

(1) 在分支尖顶，来流被滞止，沿支管内侧壁形成新的边界层，其位移效应影响支管核心流动，进而影响外侧壁边界层。这叫分流效应，本质上是流体粘性引起的。

(2) 流线弯曲，引起二次流。

(3) 当分支角较大、雷诺数较高时，外侧壁边界层往往发生分离，影响整个流场。

(4) 分支后，总的截面积变了，引起流场改变。

这些因素的作用不是孤立的，而是互相耦合的。但为了认识分支流场的物理本质，逐一考察其影响是有益的。

弯曲效应见本章 §5；截面积改变的影响，也在第一、七两章作了说明，流动分离问题，只能作数值计算，留待 §6-3 讨论；这里仅限于分流效应。

### 1. 小分支角渠道流动

取半无限渠道如图 8-24 示，在  $x = 0$  处，对称分支，分支角为  $2\alpha$ ，母渠宽为  $a$ ，远上游压力梯度为  $k$ 。以  $a$  为长度尺度，

度尺度， $\frac{ka^2}{\rho\nu}$  为速度尺度，取

无量纲坐标  $(x, y)$ ，对应的无量纲速度分量为  $(u, v)$ ，参

考雷诺数为

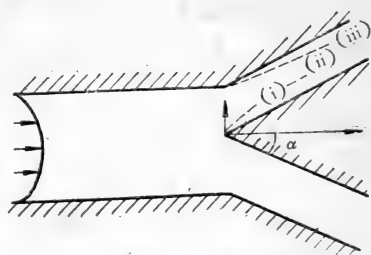


图 8-24 分支渠道流动

$$Re = \frac{ka^3}{\rho\nu^2} \quad (6-2)$$

考察定常层流，远上游流动符合泊肃叶律，即

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow -\infty, \quad u &= \frac{1}{2}(1 - y^2) \\ v &= 0 \\ p &= p_0 - kx \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

并假设： $Re \gg 1, \alpha \ll 1$

$$\bar{\alpha} = \alpha \cdot Re \sim \mathcal{O}(1)$$

进而令：

$$x = XRe \quad v = \frac{1}{Re} V \quad p = Re \cdot P \quad (6-4)$$

则  $x > 0$  处, 流动服从方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial X} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

支渠侧壁边界条件:

$$y = \bar{\alpha}X \quad \text{或} \quad y = 1 + \bar{\alpha}\bar{X} \quad \text{时},$$

$$u = 0, \quad V = 0 \quad (6-6)$$

引进流函数  $\psi(X, y)$ ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (6-7)$$

方程(6-5a)自行满足。

现分三个区域, 考察分支口附近的流场。

区域(i)可看作以母渠中心速度( $u = 1$ )为来流的平板边界层, 其解已由 Blasius 给出。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= X^{\frac{1}{2}} f_0(\eta) \\ \eta &= \frac{1}{2} y X^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

$f_0$  为 Blasius 函数。

边界层(i)引起支渠主流(ii)流线偏移, 对泊肃叶解有一个量级为  $O(X^{\frac{1}{2}})$  的扰动, 据 Smith<sup>[15]</sup> 分析, 在分支口附近, 核心区解为

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \left( y - \frac{1}{3} y^3 \right) - \beta X^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) + X^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{B}{2} (1 - y^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{3} P_2 \left[ 2y + (1 - y^2) \ln \frac{1 + y}{1 - y} \right] \right\} \quad (6-9) \end{aligned}$$



诱导压力梯度为

$$\frac{dP}{dX} = P_2 X^{-\frac{1}{6}} \quad (6-10)$$

这里:  $\beta = 1.2168$ ,  $P_2$  是已知常数,  $B$  为未知常数。

核心区 (ii) 流动的变化, 必定刺激外侧边界层 (iii) 的增长。设该区域中流函数为

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \zeta^2 X^{\frac{2}{3}} + X^{\frac{1}{2}} g(\zeta) \\ \zeta &= (1-y) X^{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

$g(\zeta)$  满足方程 (6-5b) 及边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \rightarrow \infty: \quad g &\cong -2.4336\zeta - \frac{6}{5} P_2 \\ \zeta = 0: \quad g &= 0, \quad \frac{dg}{d\zeta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

外侧边界层 (iii) 的发展必定反过来影响核心区 (ii) 的流动, 进而影响 (i) 的增长。这种作用在离分支口距离与渠道宽度  $a$  相当时, 即  $x \sim 1$  时, 变得很显著, 故上述分析限于  $x \ll 1$  处。

## 2. 半圆分支管的流动

为了解三维分流效应的物理本质, Smith 分析了图 8-25 所示的分支流场。

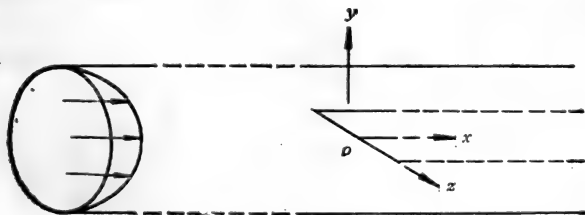


图 8-25 半圆分支管流

半无限直圆管(半径为  $a$ ) 在  $x = 0$  处, 分为两个半圆管, 分支角  $\alpha = 0$ 。这样, 就排除了流线弯曲引起的二次流, 仅仅考虑分流的影响。同样, 以  $a$  为长度尺度, 以  $\frac{ka^2}{\rho\nu^2}$  为速度尺度, 取无因次坐标  $\{x, y, z\}$ , 相应速度分量为  $\{u, v, w\}$ ,  $r^2 = y^2 + z^2$ 。

$$\text{设} \quad \left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{Re} \\ u &= u(X, y, z) \\ v &= \frac{1}{Re} V(X, y, z) \\ w &= \frac{1}{Re} W(X, y, z) \end{aligned} \right\} (6-13)$$

这样连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (6-14)$$

运动方程为

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial X} + V \frac{\partial u}{\partial y} + W \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{dP}{dX} + \nabla^2 u \\ u \frac{\partial Q}{\partial X} + V \frac{\partial Q}{\partial y} + W \frac{\partial Q}{\partial z} - Q \frac{\partial u}{\partial X} \\ &- \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial W}{\partial X} = \nabla^2 Q \end{aligned} \right\} (6-15)$$

这里  $Q$  为流向涡量,

$$Q = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (6-16)$$

来流条件:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow -\infty, \quad u &= \frac{1}{4} (1 - r^2) \\ v &= 0, \quad w = 0 \\ p &= p_0 - x \end{aligned} \right\} (6-17)$$

Smith 在高雷诺数下分析了分支起始位置邻近的流场。主要结论是：

(1) 分流壁上形成新的边界层，流场为：

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1-z^2}{4} f'_0(\hat{\eta}) \\ V &= X^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1-z^2}{8} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{\eta} f'_0(\hat{\eta}) - f_0(\hat{\eta})] \\ W &= w_0(\hat{\eta}, z) \\ \hat{\eta} \gg 1 \text{ 时, } w_0 &\sim \frac{-3\beta z \hat{\eta}}{1-z^2} \\ \hat{\eta} &= yX^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{8} (1-z^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (6-18)$$

$f_0(\hat{\eta})$  是 Blasius 函数。可见，不同于二维分支，边界层内存在从半圆角隅流向中心的横向运动，造成这种运动的主要原因是，角隅处由于粘性效应剧增，流动减速，流线向‘外’（相对于角隅而言）偏转。

(2) 分流壁上边界层位移效应使得核心区流动加速，诱导轴向压力梯度为

$$\frac{dP}{dX} = P_1 X^{-\frac{1}{2}}$$

但不同于二维， $P_1$  不是常数。因为，对于分流平板来说，来流速度是随  $z$  坐标而变化的， $z=0$  处来流速度最大，而  $z=1$  处，来流速度为 0。

因此，分流平板上的边界层沿  $z$  方向是变化的，中心部分的位移效应最大，这种不均匀性和轴向顺压梯度、角隅效应相结合，使得核心区流体沿一对方向相反的螺旋线运动。另一方面，

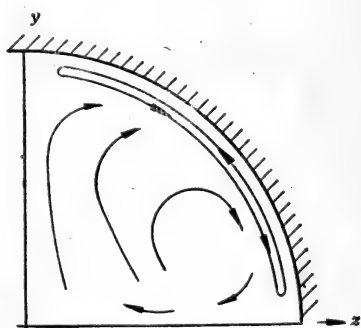


图 8-26 半圆分支管截面上的横向流动

角隅流体滞留,使圆管壁边界层内的流线沿周向发散,形成沿圆管壁面,从  $\theta = 0^\circ$  ( $\theta = \text{tg}^{-1} \frac{y}{z}$ ),  $180^\circ$  指向  $\theta = 90^\circ$  的二次流动。因而形成图 8-26 所示的二次流图象,周向运动在  $\theta = 0^\circ$  (或  $180^\circ$ )、 $90^\circ$  处改变方向。

(3) 进口附近,支管流动可以分成五个不同的区域,如图 8-27 示。(I)是分流面边界层;(II)是核心流动区,这里粘性效应可以忽略不计;外侧壁附近的流场,具有双重结构,(III)是相对厚度为  $O(Re^{-\frac{1}{2}})$  的无粘惯性层,(IV)是相对厚度为  $O(Re^{-\frac{3}{8}})$  的粘性层;(V)为角隅区。

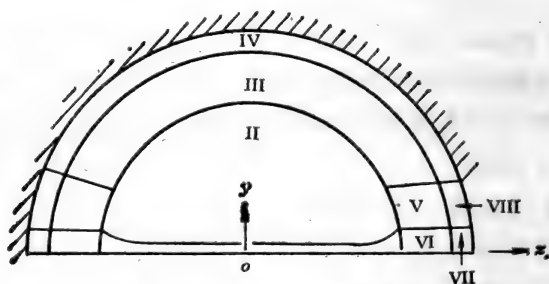


图 8-27 支管流动区域划分

虽然整个截面流量是不变的,流过每个区域的流量是有变化的。由于边界层位移效应,(I)减少的流量(相对量)约为  $\frac{1}{6} \beta X^{\frac{1}{2}}$ ,而惯性层(III)内增加的流量(相对量)约为  $-2P_1 \pi X^{\frac{1}{2}}$ , (IV)、(V)区域流量很小,可不计,这样核心区(II)中的流量变化为  $\left(\frac{\beta}{6} + 2P_1 \pi\right) X^{\frac{1}{2}}$ 。据 Smith 分析,  $-P_1 < \frac{\beta}{12\pi}$  所以,核心区(II)中流量是减小的。这样,外侧壁上的轴向切应力,比同样条件下的泊肃叶流的壁面切应力高得多。这一点和二分支流动不一样。

上述结果说明,三维分支流场和二维情况有质的差异。因此,不能将二维数值计算或实验的结果贸然推广于三维。

### § 6-3 分支管道流动的数值分析

生理上遇到的分支流场,弯曲、分流、面积改变、局部分离四种效应并存,且耦合。要了解这种流场的细节,只能借助于数值计算。由于问题复杂,即便是数值分析也还限于较简单的模型。

#### 1. 分支渠道流动数值分析

关于二维分支流场的计算,文章不少。作为一个例子,介绍 Fernandez 等人<sup>[16]</sup>的结果。

对称分支刚性壁渠道,母渠宽为  $2a$ ,支渠宽为  $2b$ ,分支角为  $2\alpha$ ,不可压缩牛顿流体在其内作脉冲运动。取直角坐标  $\{x, y\}$ ,相应的速度分量为  $\{u, v\}$ 。设:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{ub}{v}, & V &= \frac{vb}{v}, & X &= \frac{x}{b}, & Y &= \frac{y}{b} \\ \tau &= \frac{iv}{b^2}, & P &= \frac{vb^2}{\rho v^2}, & \beta &= \frac{\omega b^2}{v} \end{aligned} \right\} (6-19)$$

则无量纲运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right] \end{aligned} \right\} (6-20)$$

连续方程为

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (6-21)$$

横向边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{母渠: } Y = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad V = 0 \\ Y = \frac{a}{b}, \quad U = 0, \quad V = 0 \end{array} \right\} (6-22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{支渠: } Y = -1, \quad U = 0, \quad V = 0 \\ Y = +1, \quad U = 0, \quad V = 0 \end{array} \right\} (6-23)$$

纵向边界条件

$$X = 0: \quad P_i = P_1 + P_3 \sin(2\pi\beta\tau)$$

$$X = \frac{l}{b}: \quad P_0 = P_2 + P_4 \sin(2\pi\beta\tau)_0$$

$$\Delta P = P_0 - P_i = P_3 + P_6 \sin(2\pi\beta\tau)_0$$

$l$  为支渠出口截面位置。

初始条件:

$$\tau = 0: \quad U = 0, \quad V = 0 \quad (6-24)$$

针对血液流动问题, Fernandez 等取  $\nu = 0.0381 \text{cm}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 1.05 \text{gm}/\text{cm}^3$ , 在不同的  $Re$ 、 $\beta$  下, 用 MAC (Marker and Cell) 方法作了计算。主要结果如下:

(1) 高剪应力区发生在支渠内侧壁、离分支点(下游)  $\frac{b}{2}$  处。定常情况下, 按 Crowe 实验模型的  $Re$ 、分支角、面积比算出的壁面最大剪应力  $\tau_{w,\max} = 10 \text{dyn}/\text{cm}^2$ , 而实验结果为  $107 \text{dyn}/\text{cm}^2$ , 差一个量级。在脉冲流情况下, 取 Brech-Bellhouse 实验模型的分支角和面积比,  $Re = 173$  时, 计算所得的  $\tau_{w,\max} = 12 \text{dyn}/\text{cm}^2$ , 而实验结果为  $310 \text{dyn}/\text{cm}^2$ , 也差一个量级。这种差别的根源是: 实验模型是三维的, 而计算模型是二维的。这说明二者差异很大。因此, 决不能因二维分支流场  $\tau_{w,\max}$  远低于 Fry 的临界壁面切应力, 就否定正常或病态条件下, 内皮膜直接损伤的可能性。

(2) 外侧壁附近分离漩涡是间歇性的, 只在整个周期的部分时间内出现。因而, 壁面剪应力周期性地改变方向, 它可

能引起血管组织的疲劳、变质。同时，这也提出了一个问题：在两次分离的间歇期内，被滞留的物质是否来得及被冲走？若然，则关于粥样斑块形成机制的颗粒沉积说 [见本章 §2-3、3 之(1)、(2)] 就要修改。而要回答这个问题，必须计算分离区内悬浮颗粒的运动轨迹，以判定其滞留程度。

## 2. 二维分支流动中的颗粒运动

Erhlich 等<sup>[17,18]</sup> 计算了分支渠道流动中分离区的分布、持续时间、颗粒运动轨迹及滞留程度。

分离区和死水(或滞留)区是两个不同的概念，前者是流场的特性，有确切的定义；后者则是一种拉格朗日性质，与颗粒运动轨迹有关，无法用测量流场的方法去确定。定常流动中，流体质点总是沿流线运动的，因而，只要不发生湍流，则当流动分离时，封闭流线(分离涡)内的颗粒不会离开该区域，分离区就是死水区。但在非定常流动中，流线和流体质点的运动轨迹是两回事，因而分离区和死水区也不重合。所以，在作数值分析之前，首先要回答：用什么物理量来描述流动的滞留程度？Erhlich 等提出，用颗粒沿轨迹的行程来确定流体的滞留。

设时刻  $\tau_i$  位于  $\mathbf{r}$  (离壁面的距离) 处的流体质点 (或浮力中性的颗粒)，在时间间隔  $\Delta$  (一般取  $\Delta$  为一个周期，即  $\Delta = 2\pi$ ) 内，所经过的路径向量为  $\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{r}, \tau_i, \Delta)$ 。 $\tilde{\mathcal{R}}$  决定于离壁距离及当地流动特性。在分支口下游足够远的地方，渠道中心的流动基本上是平行的，那里  $\tilde{\mathcal{R}}$  与  $\tau_i$  无关，即  $\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{r}, \tau_i, 2\pi) = \tilde{\mathcal{R}}_0(\mathbf{r})$ 。定义无量纲行程：

$$\mathcal{R}(\mathbf{r}, \tau_i) = \frac{\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{r}, \tau_i, \Delta)}{\tilde{\mathcal{R}}_0(\mathbf{r})} \quad (6-25)$$

进而定义流场中任一点上流体质点的滞留度为： $\langle \mathcal{R} \rangle^{-1}$ ，这

里

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R} d\tau_i \quad (6-26)$$

$\langle R \rangle^{-1} > 1$  就表示流体质点在该处被滞留。

要计算  $\langle \mathcal{R} \rangle^{-1}$ , 必须首先算出流场, 然后积分, 算出轨迹, 进而得  $\bar{\mathcal{R}}, \langle \mathcal{R} \rangle^{-1}$ 。

$$\left. \begin{aligned} \text{设: } \quad \bar{x} &= \frac{x}{a}, & \bar{y} &= \frac{y}{a}, & \tau &= \omega t \\ \bar{u} &= \frac{u}{U_0}, & \bar{v} &= \frac{v}{U_0} \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

这里  $2a$  是母渠宽度,  $\omega$  是流动圆频率,  $U_0$  是母渠进口截面平均速度。

引进流函数  $\psi$ , 涡量  $\Omega$ ,

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}}, & \bar{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \\ \Omega &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \end{aligned} \right\} \quad (6-28)$$

这样, 纳维-斯托克斯方程变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta^2}{2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}} \right) \\ = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-29)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} &= \left( \frac{2a^2\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \\ Re &= \frac{Ua}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (6-30)$$

壁面边界条件:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0, \quad n \text{ 为壁外法线方向} \\ \phi &= \phi(\tau) \\ Q &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-31)$$

对称平面上:

$$Q(x, 0, \tau) = \phi(x, 0, \tau) = 0 \quad (6-32)$$

$$x = 0: \quad \left. \begin{aligned} \phi &= \phi_s + \phi_r \\ Q &= Q_s + Q_r \end{aligned} \right\} \quad (6-33)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_r(0, y, \tau) &= \frac{3}{2} \left( y - \frac{y^3}{3} \right) \\ Q_r(0, y, \tau) &= 3y \\ \phi_s(0, y, \tau) &= f(y) \cos \tau \\ \phi_r(0, y, \tau) &= g(y) \cos \tau \end{aligned} \right\} \quad (6-34)$$

而

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= \frac{y \alpha \operatorname{ch} \gamma - y \operatorname{sh} \gamma}{\gamma \operatorname{ch} \gamma - \sin \gamma} \\ g(y) &= \frac{\alpha^2 \operatorname{sh} \gamma y}{\gamma \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma} \\ \gamma &= \frac{\eta}{2} (1 + i), \quad i^2 = -1 \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

出口条件:

$$x = x_n = \frac{l}{a}:$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\eta^2}{2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \tau} &= 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \bar{y}^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{y}^2} &= -Q \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

流体质点的轨迹方程为:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v \quad (6-37)$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \frac{2Re}{\eta} \bar{u} \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= \frac{2Re}{\eta} \bar{v} \end{aligned} \right\} \quad (6-38)$$

Erhlich 取  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{b}{a} = 0.79$ ,  $Re = 100$ ,  $\eta = 10$ 。用

差分法首先求出流场，然后用 (6-37) (6-38) (6-26) 算出  $\langle \mathcal{R} \rangle^{-1}$ 。典型结果见图 8-28、8-29。

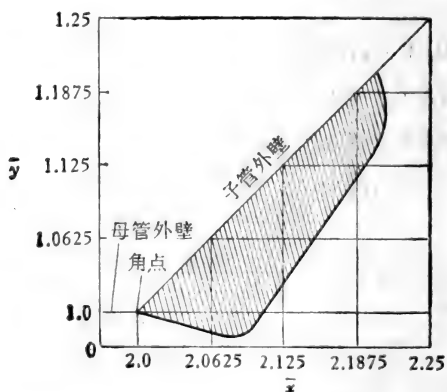


图 8-28 分离区分布<sup>[14]</sup>

图 8-28 是最大流量下的分离区特性，瞬时分离区持续时间为周期的 10%。在分离可能发生的区域以外，流体质点不是很快（小于一周期）地从分支口流过，就是平行地运动， $\mathcal{R} \approx 1$ 。可能发生滞留的，只有位于流动可能分离的区域中的质点。

若质点初始位置在间歇性分离区中，那么质点的最终位置取决于质点在该区域时，流动是否发生分离。若  $\tau_i$  时刻，流动不分离，则质点平行于壁面而运动，行程不远；若  $\tau_i$  时刻流

动分离,则质点沿螺旋形路径行进,其具体路径及行程,与质点具体位置有关。如图 8-29 所示,1、4 是大部分质点的路径,它们离开分离区,进入主流,很快流向下游;2、5 是近壁质点的轨迹,运动得很慢,分离空泡消失前进入不了主流;3 是始于瞬时分离漩涡中心附近质点的轨迹。可见,没有一个质点回到起始位置。

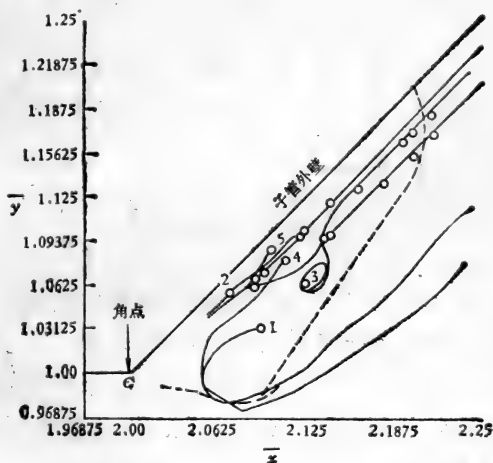


图 8-29 流体质点的轨迹及行程<sup>[18]</sup>

据计算  $[(\mathcal{R})^{-1}]_{\max} < 3$ , 这说明: 二维脉冲流在分支区域内不大会发生持续的滞留,不大会形成死水区。

但是,决不能由此断言,三维分支流动情况也是这样。因为三维分支流中存在强烈的二次流,和二维分支流场有质的不同。

此外,计算还表明,同样流量下,脉冲流中的颗粒,在分支处被滞留的时间,比定常流更长一些。

### 3. 方形分支管道的流动

现以方形分支管道为例,说明三维分支流动的一些物理

特性。Kandarpa 和 Davids<sup>[19]</sup> 用有限元法作了数值分析，但限于定常流动。

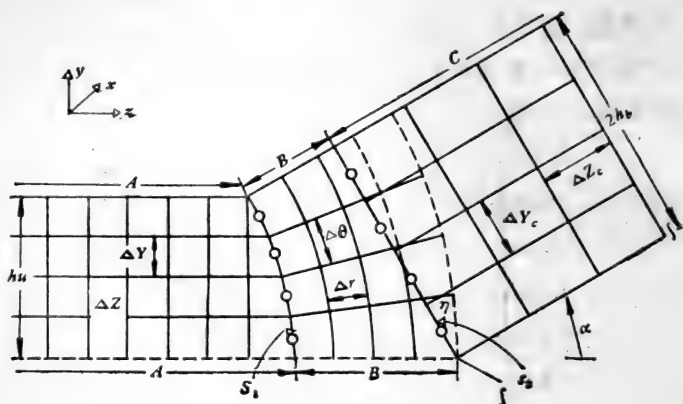


图 8-30 方形分支管几何形状及有限单元划分<sup>[19]</sup>

分支几何形状及有限单元划分如图 8-30 示。分 A、B、C 三段，A、C 是直管，用直角坐标系  $\{x, y, z\}$ ，有限单元线元为  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。B 是拐角，截面积有变化，用柱坐标  $\{r, \theta, x\}$ ，单元线元为  $\Delta r, r\Delta\theta, \Delta x$ 。

每个单元的流体运动，都服从三大守恒定律。由质量守恒。得：

$$\frac{\Delta m_e}{\Delta t} = \frac{\rho[(S_i - S_0)V_1 + (S_T - S_B)W_1 + (S_R - S_L)U_1]}{-(S_0\Delta V + S_B\Delta W + S_L\Delta U)} \quad (6-39)$$

这里  $m_e$  为有限元内流体质量； $S$  为有限元素的侧面积，其下标意为： $T$  为上侧， $B$  为下侧， $R$  为右侧， $L$  为左侧， $i$  为进口， $0$  为出口； $U, W, V$  分别为  $x, y, z$  方向上的速度分量，速度下标 1 为元素进口，2 为元素出口。

$$V_2 = V_1 + \Delta V, \quad W_2 = W_1 + \Delta W, \quad U_2 = U_1 + \Delta U \quad (6-40)$$

应用(6-39),动量守恒定理要求

$$F_t - F_z = -\rho \left[ \frac{S_0 + S_i}{2} V_1 \Delta V + \frac{A_0}{2} \Delta V^2 \right] \quad (6-41)$$

$F_t$  是依赖于时间的力,  $F_z$  为压差、体积力、粘性力之和。

横向( $x, y$  方向)运动关系与此类似。

考虑定常流动,  $F_t = 0$ , 并忽略  $\Delta V^2$ , 得

$$\Delta V = \frac{2F_z}{\rho V_1 (S_0 + S_i)} \quad (6-42)$$

设 A 段进口速度分布是均匀的, 压力也是均匀的。A 段的出口  $S_2$ , 就是 B 段的进口, 从  $A \rightarrow B$  时, 有

$$[V_{r1}(i, j)]_{S_1} = [V_2(i, j)]_{S_1} \cdot \cos\theta(i, j) \quad (6-43)$$

$$i = i_1, \dots, i_m, \quad x \text{ 方向}$$

$$j = j_1, \dots, j_m, \quad y \text{ 方向。}$$

从  $B \rightarrow C$  时, 有

$$[V_1(i, j)]_{S_2} = [V_{r2}(i, j)]_{S_2} \cos[\alpha - \theta(i, j)] \quad (6-44)$$

$2\alpha$  为分支角。

Kandarpa 和 Davids 取分支模型, 尺寸接近于狗的髂动脉分支, 在不同的雷诺数下作了计算, 典型结果见图 8-31 至 8-34。由此可见:

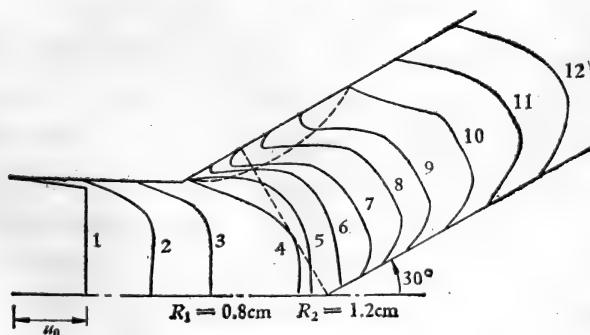


图 8-31 分支流场速度分布<sup>[19]</sup>

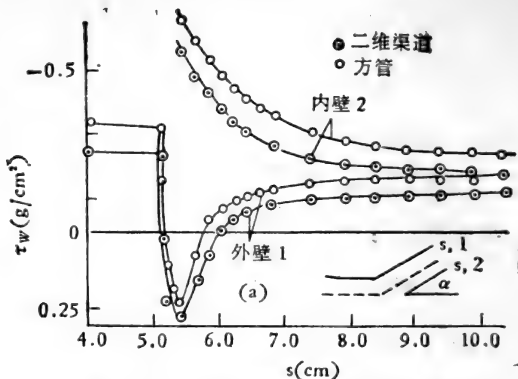


图 8-32 分支流场壁面剪应力分布<sup>[19]</sup>

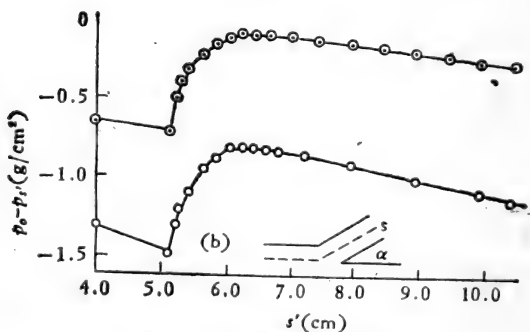


图 8-33 分支流场压力分布<sup>[19]</sup>

(1) 在狗的髂动脉峰值雷诺数下，准静态壁剪应力最大值可达  $100 \text{ dyn/cm}^2$ ，这比相应的二维分支流场中的  $\tau_{w,\max}$  大得多。但仍比临界切应力  $\tau_{w,\text{cr}}$  ( $380 \text{ dyn/cm}^2$ ) 小得多。由此看来，内皮层直接机械损伤引起粥样硬化病变的可能性不大。

(2) 分支口附近，压力上升，将使内皮层的透性提高，促进细胞间的脂类沉积。再加上剪应力方向交变及颗粒与内皮层刮擦的作用，细胞间脂类沉积的作用显得更为重要。

(3) 流动发生局部分离，存在低剪应力区，这将引起物质

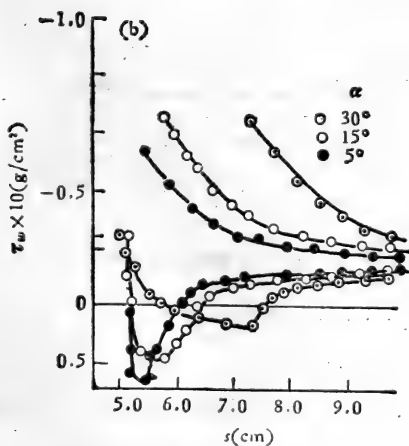
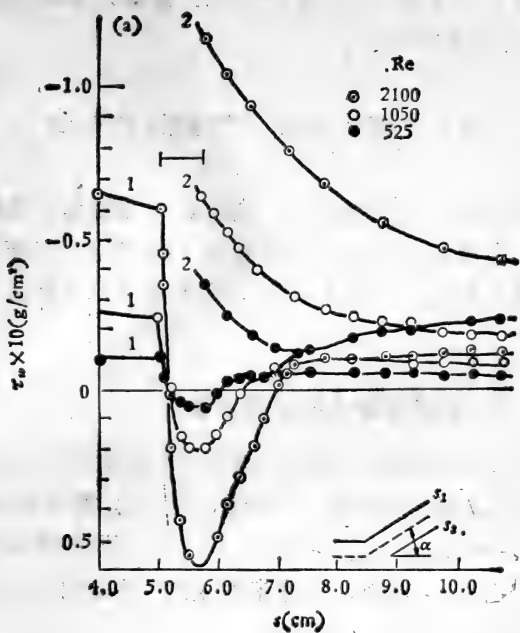


图 8-34 壁面剪应力计算结果<sup>[19]</sup>  
 (a)  $\tau_w-Re$  关系, (b)  $\tau_w-\alpha$  关系。

输运障碍。但这种作用究竟有多大？需要计算颗粒运动的轨迹，并判定其滞留程度。

## § 7 管腔表面不规则时的流动

一旦动脉血管发生病变，内表面局部隆起，管腔局部变窄，这时，血液运动的动力学特性将怎样变化？这种变化和病变的发展又有什么关系？这是动脉血液动力学的又一重要课题。

### § 7-1 狭窄管道内的定常流动

作为上述问题的最简单的模型，考察刚性管内壁单一的、轴对称的、规则的局部隆起，如图 8-35 示。流动是定常的。对此 Forrester-Young 和冯元桢等，分别在不同的雷诺数及  $\delta$  范围内作了分析。这里， $R_0$  是未发生狭窄时的半径， $\delta$  是隆起的相对高度。

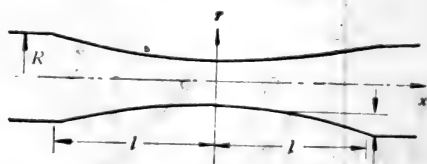


图 8-35 单一轴对称规则隆起造成的狭窄部

#### 1. 缓慢的收缩-扩张流

取柱坐标  $\{r, \theta, x\}$ ，相应速度分量为  $\{v, 0, u\}$ ，设流动是定常的，服从连续方程和纳维-斯托克斯方程。

假设：隆起高度很小，且很缓慢，即



$$\delta \ll l, \quad \frac{\delta}{l} \ll 1$$

$2lR_0$  为隆部总长度。这样纳维-斯托克斯方程近似为

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} (7-1)$$

连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0 \quad (7-2)$$

这相当于边界层方程, 现用 Polhausen 方法求解。

$$\text{令} \quad \zeta = \frac{R-r}{R} \quad (7-3)$$

$$\frac{u}{U} = A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + E \quad (7-4)$$

这里  $A, B, C, D, E$  为待定常数,  $U$  为平均速度。

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u dr = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (7-5)$$

应用边界条件:

$$\left. \begin{aligned} r = R: \quad u &= 0, \quad v = 0 \\ r = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \quad v = 0 \end{aligned} \right\} (7-6)$$

及关系:

$$\left. \begin{aligned} r = R: \quad \frac{dp}{dx} &= \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ r = 0: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= -\frac{2u_{\max}}{R^2} \end{aligned} \right\} (7-7)$$

得:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_{\max}} &= -\frac{\lambda + 10}{7} \zeta + \frac{3\lambda + 5}{7} \zeta^2 \\ &\quad - \frac{3\lambda + 12}{7} \zeta^3 + \frac{\lambda + 4}{7} \zeta^4 \end{aligned} \quad (7-8)$$

$$\lambda = \frac{R^2}{\mu u_{\max}} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (7-9)$$

$u_{\max}$  与流量  $Q$  的关系为

$$u_{\max} = \frac{210}{97\pi} \left[ Q + \frac{77}{105} \cdot \frac{R^4}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \right] \quad (7-10)$$

(7-1a)对  $r$  积分,得

$$\frac{d}{dx} \int_0^R u^2 r dr = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{R^2}{2} + \nu R \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R}$$

左端积分中,  $u$  用泊肃叶剖面,而粘性项中的  $u$  用(7-8),这样得压力流量关系

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{5432}{1575} \cdot \frac{R_0^5}{R^5} \cdot \frac{dR}{dx} + \frac{16}{Re_0} \cdot \frac{R_0^4}{R^4} \quad (7-11)$$

$$Re_0 = \frac{2R_0 U_0}{\nu}$$

这样,

$$\frac{u}{U_0} = Re_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{dR}{dx} \left[ -\frac{308}{1575} \zeta + \frac{1204}{1575} \zeta^2 - \frac{4}{5} \zeta^3 \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \zeta^4 \right] + 2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 (2\zeta - \zeta^2) \quad (7-12)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U_0^2} = -\frac{616}{1575} \left( \frac{R_0}{R} \right)^4 \frac{dR}{dx} + \frac{8}{Re_0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (7-13)$$

$\tau_w = 0$  时,流动开始分离,故分离位置由下式确定:

$$Re_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) \frac{dR}{dx} \approx 20.5 \quad (7-14)$$

当  $Re_0$  很大时,分离点就在隆起峰下游附近。

上述分析只适用于高雷诺数层流。

## 2. 快速收缩-扩张流

Fung-Lee 从纳维-斯托克斯方程的涡量形式出发,分析了

收缩比较大的流动。

引进流函数  $\phi$ 、涡量  $\omega$ ,

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} & v &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (7-15)$$

无量纲化, 设

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R_0}, & \bar{x} &= \frac{x}{R_0} \\ \Psi &= \frac{\phi}{2U_0 R_0^2}, & \Omega &= \frac{\omega R_0}{2U_0} \end{aligned} \right\} \quad (7-16)$$

则纳维-斯托克斯方程变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{x}^2} &= \Omega \bar{r} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{r}} [\Omega \bar{r}] - Re_0 \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{\Omega}{\bar{r}^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\Omega}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

这时, 壁面剪应力  $\tau_w$  为

$$\tau_w = -\frac{2\mu U_0}{R_0} \Omega_w \quad (7-18)$$

设隆起部分的型线为

$$\frac{r}{R_0} = 1 - \delta \exp\left(-\frac{4x^2}{l^2 R_0^2}\right) \quad (7-19)$$

冯元桢、李仁师取  $\delta = 0.5$ ,  $l = 1$ , 在低雷诺数 ( $Re_0 \leq 25$ ) 下, 求数值解。结果表明:

(1)  $l$  一定时,  $\delta$  越大(堵塞得越厉害),  $\tau_{w,\max}$  越大;  $\delta$  一定时,  $l$  越小(收缩得越快),  $\tau_{w,\max}$  亦越大。隆起顶部有可能发生机械应力的损伤。

(2) 存在一临界雷诺数  $[Re_0]_{cr}$ , 当  $Re_0 > [Re_0]_{cr}$  时, 隆

起下游流动发生局部分离，形成旋涡。不同  $l$  值下， $[Re_0]_{cr}$  随  $(1 - \delta)$  的变化如图 8-36 示。可见，一定  $l$  值下， $\delta$  增大时  $[Re_0]_{cr}$  锐减；一定  $\delta$  值下， $l$  减小时  $[Re_0]_{cr}$  亦减小。

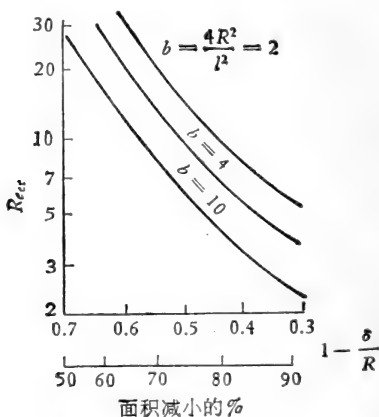


图 8-36  $[Re_0]_{cr}$  与  $l, \delta$  的关系<sup>[20]</sup>

### 3. 狭窄部几何形状对流动压降的影响

动脉中斑块的形状是不规则的，不一定轴对称，也不限于孤立的隆起。对此，很难作一般的分析。Seely 和 Young<sup>[21]</sup> 作了大量模型实验，研究了隆起形状、长度、对称性、堵塞比等对于流动压降的影响，主要结论是：

(1) 对于钝头塞子形的轴对称隆起，有

$$\frac{\Delta p}{\rho U_0^2} = \frac{K_r}{Re_0} + \frac{K_l}{2} \left[ \frac{A_0}{A_1} - 1 \right]^2 \quad (7-20)$$

$$K_l = 1.52, \quad K_r = 16 \frac{L_a}{R_0} \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^2$$

$$L_a = 0.83L + 3.28R_{10}$$

这里  $A_0$  是未变窄时的管腔截面积， $A_1$  是变窄后的管腔面积， $L$  是隆起长度， $R_1$  是变窄后的管半径。

(2) 当  $\frac{A_0 - A_1}{A_0} \geq 0.9$  时, 隆起部分的不对称性, 对  $\Delta p$  的影响甚微。但当堵塞比小于 0.9 时, 非轴对称性对于压降有相当大影响。

(3) 两个隆起‘串联’时, 若间距  $s \geq s_c$ , 则可当作两个孤立的隆起处理; 若  $s < s_c$ , 则互相影响, 总压降低于两个孤立隆起所致压降之和, 但高于一个长为  $L = L_1 + L_2$  的隆起所产生的压降。

$$\frac{s_c}{R_0 - R_1} = \frac{9.52 \times 10^4}{Re_0} \left( \frac{A_1}{A_0} \right) - 1.51. \quad (7-21)$$

## § 7-2 狭窄管道内的脉动流

### 1. 单一狭窄

上述分析和实验均限于定常流动, 离真实的生理条件较远。Daly<sup>[22]</sup> 根据 McDonald 测得的数据, 从非定常轴对称纳维-斯托克斯方程出发, 用 ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian Method) 方法, 计算了四种不同堵塞比(0, 0.23, 0.44, 0.61)下的脉冲流场。算出了不同时刻:  $\frac{t}{T} = 0.126$  (收缩加速期)、0.210(射血速度达峰值)、0.293(收缩减速期)、0.485(舒张期, 倒流速度达峰值), 流动的速度场、压力场和剪应力场。

表 8-2 列出了隆起部分的流动压力梯度。

表 8-2 堵塞比与压力梯度的关系

堵 塞 比	平均压力梯度 dyn/cm <sup>3</sup> (mmHg/cm)	最大压力梯度 dyn/cm <sup>3</sup> , (mmHg/cm)
0.23(2#)	2.4 × 10 <sup>3</sup> (1.8)	3.3 × 10 <sup>3</sup> (2.4)
0.44(3#)	8.5 × 10 <sup>3</sup> (6.4)	1.1 × 10 <sup>4</sup> (8.4)
0.61(4#)	2.3 × 10 <sup>4</sup> (17.2)	3.0 × 10 <sup>4</sup> (22.4)

显然, 堵塞比越大, 压降越大。Sako 的实验表明, 当隆起部分

的压降低于 4—10mmHg/cm 时，狭窄没多大发展；当压降超过 30mmHg/cm 时，斑块将在狭窄上游高压区内迅速增长。计算情况 4# (堵塞比 0.61) 接近于后者。

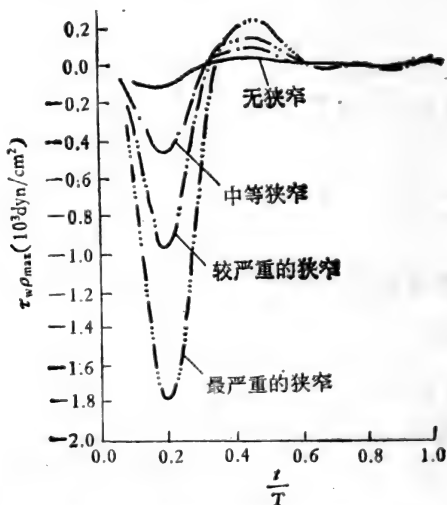


图 8-37 壁面剪应力随时间的变化<sup>[22]</sup>

图 8-37 是壁面剪应力随时间的变化。可见情况 4# 时壁面剪应力峰值，可达情况 1# (正常状态) 的 10 倍以上， $\tau_{w,max} \approx 344 \text{ dyn/cm}^2$ ，接近于引起内皮膜损伤的临界应力。这说明，堵塞比超过 60% 时，流体剪应力有可能撕破血管内皮层，使粥样斑块恶性发展，形成血栓。

图 8-38 是局部分离区域图。图左曲线表明此时分离区很小，仅在收缩期内发生于隆起下方。中间曲线表明此时分离区较大，整个周期内都存在，且发生于隆起上、下游两侧；图右曲线表明局部分离区发展很快，分离点和再附点的位置是准定常的，此时，形成一持续的、低剪应力的流动分离区。根据 Goldsmith 等人的实验，隆起部下游分离区中，悬浮颗粒滞

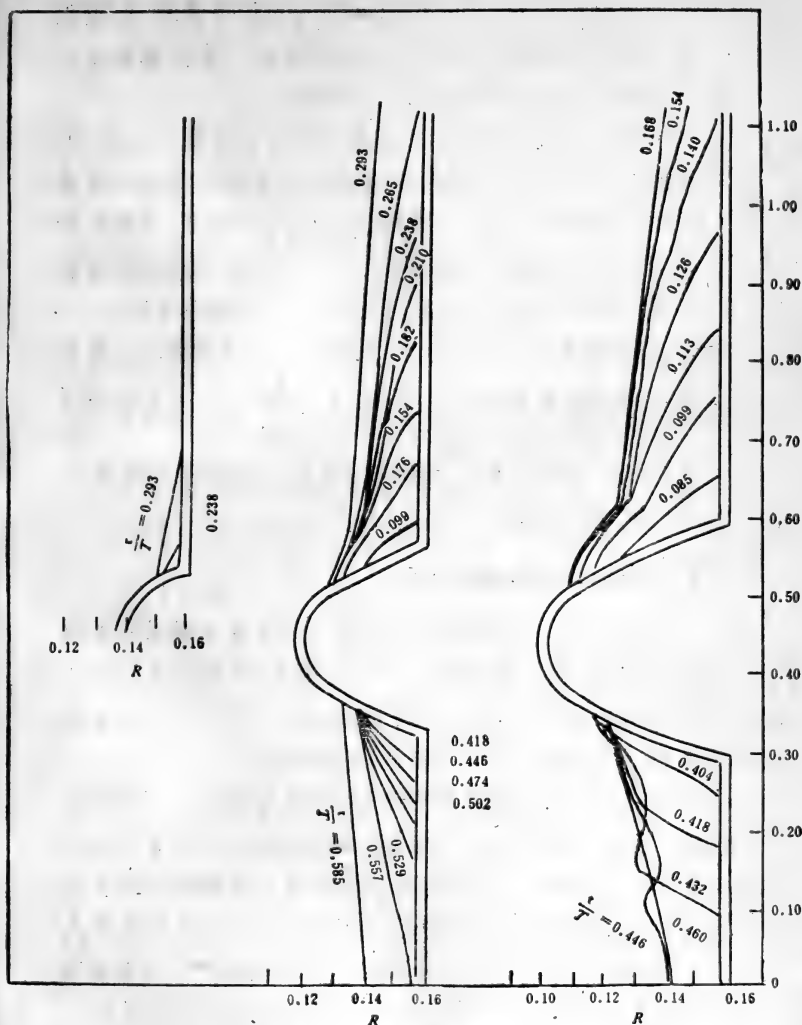


图 8-38 局部分离区域图<sup>[22]</sup>

留时间相当长,而且溶质浓度梯度很小。这样,一方面红细胞、血小板容易在该区域中聚集而发生凝血、血栓;另一方面,低

剪应力和低浓度梯度,会影响组织细胞内的脂类排泄,促进胆固醇脂类在组织细胞内沉积。但这还需要进一步计算颗粒运动轨迹,定量地确定悬浮颗粒的滞留程度。

在舒张期,直管流动的瞬时倒流首先发生于壁面附近;但当管腔局部变狭时,狭窄部的瞬时倒流几乎在所有径向位置上同时发生,这意味着流场具有很大的径向加速度,并和血管壁本身的扩张-收缩运动相耦合,可能对于附壁血栓剥落有重要意义。要弄清楚这一点,必须考虑管壁的粘弹性作用。

Daly 的计算还表明,隆起部下游分离区域的大小,是血管狭窄严重程度的灵敏指标。此外,  $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\max}$  的大小,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  和正常血管同一位置上的  $\frac{\partial p}{\partial x}$  的相位滞后,亦可作为判断血管堵塞程度的可靠依据。

## 2. 散布斑块引起的流场扰动

临床观察表明,动脉粥样硬化斑块,往往不是单一的隆起,而是散布的。其几何堵塞比不一定很大,但壁面不规则引起的血流量减小却相当严重。鉴于此,Back 等<sup>[23]</sup>以人体冠状动脉为例,分析了散布性斑块对流动的影响。

设血管是刚性的,忽略弯曲效应,并认为血液是不可压缩牛顿流体,流动是轴对称脉动层流。取柱坐标  $\{r', \theta, x'\}$ , 相应速度分量为  $\{v', 0, u'\}$ ,  $x'$  轴与冠脉动脉进口段轴线一致。但而后冠状动脉的轴线方向  $s'$  不一定和  $x'$  轴一致,其夹角为  $\beta$ 。取进口半径  $R_0$ , 最大流量下进口截面平均流速  $W_0$  为参考尺度,无量纲化,

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x'}{R_0}, & y &= \frac{r'}{R_0}, & t &= \frac{t'W_0}{R_0}, & s &= \frac{s'}{R_0} \\ u &= \frac{u'}{W_0}, & v &= \frac{v'}{W_0}, & P &= \frac{p'}{\rho W_0^2}, & H &= \frac{gh}{W_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$



这里  $h$  为计算截面与参考水平面的高度差。

引进流函数  $\psi$  及涡量  $\omega$ ,

$$\psi = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7-23)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \quad (7-24)$$

则纳维-斯托克斯方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\omega) + \frac{\partial}{\partial y} (v\omega) \\ = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\omega}{y^2} \right] \end{aligned} \quad (7-25)$$

这里,  $Re = \frac{W_0 R_0}{\nu}$

压力由下式确定

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( P + H + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \left[ -\frac{\partial u}{\partial t} + v\omega - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega}{y} \right) \right] \cos \beta + \left[ -\frac{\partial v}{\partial t} - u\omega + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \sin \beta \end{aligned} \quad (7-26)$$

轴向剪应力为  $\tau'_s$ , 无量纲化,  $\tau_s = \frac{\tau'_s}{\rho W_0^2}$ , 则

$$\begin{aligned} \tau_s = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ - \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (7-27)$$

为计算方便, 作变换:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \zeta &= \frac{y}{y_w} \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

$y_w$  是血管半径,  $y_w = y_w(x)$ 。这样

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \zeta_y \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ u &= \frac{1}{y_w} \cdot \frac{\zeta_y}{\zeta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \\ v &= -\frac{1}{\zeta y_w} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \\ \zeta_x &= -\frac{\zeta}{y_w} \cdot \frac{dy_w}{dx}, \quad \zeta_y = \frac{1}{y_w} \end{aligned} \right\} (7-29)$$

方程(7-24)(7-25)变为:

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{\zeta y_w} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \zeta_{xx} - \frac{1}{y_w} \frac{\zeta_y}{\zeta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + 2\zeta_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} \right\} \end{aligned} \quad (7-30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} (u\omega) - \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} (u\omega) - \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} (v\omega) \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \left( \zeta_{xx} + \frac{1}{y_w} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{\zeta_y}{\zeta} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right\} + \frac{1}{Re} \left\{ 2\zeta_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\omega}{(\zeta y_w)^2} \right\} \end{aligned} \quad (7-31)$$

这里

$$\zeta_{xx} = -\zeta \left[ \frac{1}{y_w} \cdot \frac{d^2 y_w}{dx^2} - \frac{2}{y_w^2} \left( \frac{dy_w}{dx} \right)^2 \right] \quad (7-32)$$

进口条件由主动脉口压力  $p_0(t)$  及冠脉进口流量  $Q'_0(t)$  给出, 测量结果如图 8-39 示。若设进口速度剖面是均匀的, 则

$$\left. \begin{aligned} x=0: \quad \phi &= \frac{1}{2\pi} \zeta^2 Q, & Q &= \frac{Q'}{\pi R_0^2 W_0} \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\} (7-33)$$

计算基本步骤为, 在每个截面上, 由  $t$  时刻的  $\omega$ ,  $\phi$ , 从(7-31)算出  $(t + \Delta t)$  时刻的  $\omega$ , 再由(7-30)算出新的  $\phi$ 。

Back 等取  $Re = 120$ , 对具有散布斑块的冠状动脉流动, 作了数值计算。主要结论是:

(1) 由于斑块存在, 中心流速增大, 速度剖面曲率增大, 使壁面附近速度梯度增大。因而第一斑块顶部, 壁面剪应力很大 (尽管几何堵塞比不大), 有可能撕伤血管内皮膜。

(2) 两个斑块之间的‘谷部’, 几乎整个心搏周期内, 流动都是分离的, 有可能出现持续的死水区。

(3) 整个心搏周期内, 壁面剪应力变化很大, 方向交变, 这可能会引起管壁材料变质。

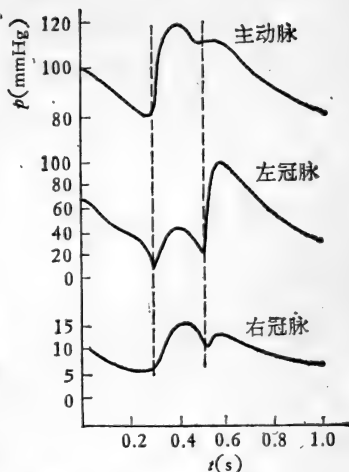


图 8-39 冠脉血流进口条件<sup>[23]</sup>  
(a) 进口压力, (b) 进口流量。

### § 7-3 分布斑块引起的血管壁组织缺氧

如 §2 所述, 动脉壁组织细胞代谢活动是否正常, 依赖于血液—动脉壁次层(内皮膜下面的一层)之间的氧传输。氧传输障碍, 引起的细胞长期缺氧, 代谢异常, 对于脂类沉积、粥样发展有很大影响。

血液与血管组织间氧传输的阻尼来自两方面: (i) 血管内壁氧边界层, 其传输特性和当地流场性质有密切关系; (ii) 从管壁表面到内部氧的传输阻尼。由于氧分子很小, 几乎可以无阻碍地通过血管内皮膜, 故血液—管壁组织氧传输的阻力主要来自管腔内壁附近的氧边界层。可以推想, 血管表面不规则引起的流场变化, 将会影响血管壁组织的氧供应。

Back 等<sup>[24]</sup> 以具有散布斑块的冠状动脉为例, 在 §7-2 流

场计算的基础上,分析了氧的传输特性。

除纳维-斯托克斯方程外,还需要氧的传输方程。假设:血液中血红蛋白所携带的氧一旦作为自由氧分子出现,立即就扩散,则氧传输方程(无量纲形式)可写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(c + \chi) + u \frac{\partial}{\partial x}(c + \chi) + v \frac{\partial}{\partial y}(c + \chi) \\ = \frac{1}{Pe} \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (7-34)$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{c'}{c'_e} \\ \chi &= \frac{\chi'}{c'_e} \end{aligned} \right\} \quad (7-35)$$

$c'$  是血浆中的氧浓度,单位为  $\text{ml}(\text{O}_2)/\text{ml}(\text{血})$ ,  $c'_e$  是内壁氧边界层边缘上血浆氧浓度,  $\chi'$  是血红蛋白携带的氧的浓度。  $Pe$  称为 Peclet 数

$$Pe = \frac{W_0 R_0}{D_b} \quad (7-36)$$

$D_b$  是氧在血液中的扩散系数。

若  $f$  表示血红蛋白中氧的饱和程度,  $\lambda$  表示红细胞在氧边界层内的分布,则

$$\chi = 0.201 \frac{f \cdot \lambda}{c'_e} \quad (7-37)$$

设  $\phi = \frac{\partial \chi}{\partial c}$ , 则方程(7.34)可改写为

$$\begin{aligned} (1 + \lambda \phi) \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{0.201 f}{c'_e} \\ \cdot \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} + u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \\ = \frac{1}{Pe} \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (7-38)$$

考虑最简单的情况, 设氧气边界层内红细胞分布是均匀的, 即  $\lambda = 1$ , 则(7-38)简化为

$$(1 + \phi) \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) \quad (7-39)$$

这是抛物型方程, 可逐步算出  $c$ 。

由  $c$  可得血液-组织细胞间的氧流量  $j'_w$ ,

$$j'_w = h'(c'_e - c'_w) \quad (7-40)$$

$$\therefore h'_w = -\frac{D_b}{c'_e - c'_w} \left[ \frac{\partial c'}{\partial y'} \cos \beta - \frac{\partial c'}{\partial x'} \sin \beta \right]_w \quad (7-41)$$

或用无量纲形式,

$$\frac{h'R_0}{D_b} = -\frac{1}{1 - c_w} \left[ \frac{\partial c}{\partial y} \cos \beta - \frac{\partial c}{\partial x} \sin \beta \right]_w \quad (7-42)$$

这里附标  $w$  表示血管内表面。

用和 §7-2 一样的数值方法进行计算, 所得不同流向位置上的氧剖面如图 8-40 示。可见, 血液与血管壁组织间的氧传输率, 受分布斑块的影响相当显著, 尽管斑块本身的几何堵塞程度并不严重。在第一斑块上游的流动加速区, 氧传输率虽然低于无扰动流, 但仍然较高。在两个斑块之间的流动充分分离区和第二斑块前缘的流动再附区, 氧传输率很高, 高于无扰动流; 但在斑块隆起下游侧分离起始位置附近, 氧传输率锐减, 氧边界层传输阻抗达  $10^4$ s/cm, 比壁内氧传输阻抗高一个量级。因而, 这个区域内组织细胞代谢活动所需的氧完全是由血液流动特性所控制的, 可能出现严重的局部缺氧。

应该指出, Back 等的计算仅仅是初步, 因为实际氧边界层不象想象的那么薄, 可达  $100\mu\text{m}$  左右, 它包含许多红细胞, 因此, 红细胞的影响是不可忽略的。

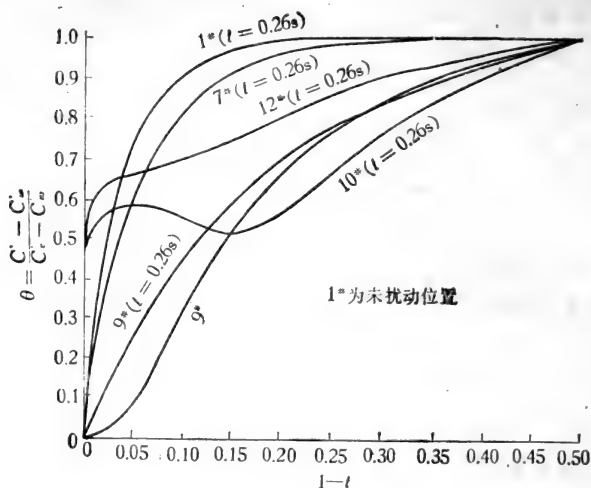


图 8-40 不同流向位置上的氧剖面<sup>[24]</sup>

## § 8 血管分支、弯曲、截面积突变 部位红细胞和血小板的运动

以上各节大都将血液看作均质流体，考察血管弯曲、分支、局部隆起等因素引起的流体动力学特性的改变，对于血管壁的影响。然而，血液含有大量红细胞、血小板和白细胞。血小板在血栓形成过程中的作用是人所共知的，至于红细胞是否会粘着在受损伤的血管内膜上，并释放某种使血管壁通透性提高的因子，则目前还不清楚。但有一点是肯定的，即对于血小板沉积和红细胞聚集来说，血液动力学特性起着举足轻重的作用。因此，不了解血管分支、弯曲或局部隆起部位有形元素（红细胞、血小板等）的运动规律，就无法弄清流体力学因素对于动脉粥样硬化的发生、发展和血栓形成的影响。

研究血管分支、弯曲和局部隆起部位血液有形元素运动

的主要目标,是弄清流场扰动和流体应力对红细胞、血小板功能的影响,并确定这种影响是否会引起红细胞、血小板聚集,或粘着于壁面。目前,这方面的工作集中于实验观测,包括在体试验、体外旁路流动观察和模型实验。后者主要是观察红细胞或模型颗粒的悬浮液,流过 T 形或 Y 形分支、对称狭窄部以及管截面积突变部位时,颗粒的运动轨迹以及聚集粘着情况。Goldsmith<sup>[26-30]</sup> 在这方面做了大量工作。下面介绍管截面突然扩张和 T 形分支模型实验的结果。

### § 8-1 涡环内的血细胞

血液或模型颗粒悬浮液从直径较小的圆管流进直径较大的同心圆管,在截面积突变的地方,流动分离,形成一个涡环。Goldsmith 等<sup>[27,28]</sup>观察了这种环形涡中红细胞、血小板和乳胶球的运动,实验雷诺数(以小管直径为参考长度)为 2—75。

#### 1. 红细胞的运动

图 8-41 是  $Re = 12.2$  时,红细胞稀悬浮液的涡环里,红细胞运动的轨迹及方位。图中从 A 到 G,颗粒运动速度分别为:0.64、0.36、1.46、11.8、0.30 和 48.6mm/s,在点 O,红细胞运动速度为 0.54mm/s。

观察表明,在一个旋转周期内,血细胞沿着一条封闭的流线运动。但是,转了几圈以后,颗粒就离开环形的封闭流线而发生迁移。若颗粒为正常红细胞、固化红细胞和直径小于  $20\mu\text{m}$  的乳胶小球,则沿着螺旋形路径向外迁移,离开涡环而进入主流。最终,涡环里就没有红细胞了。但对直径大于  $30\mu\text{m}$  的乳胶球或红细胞聚集体来说,情况恰恰相反,在所有试验雷诺数下,它们都向中心迁移,因而始终保留在涡环内。

Goldsmith 等测量了颗粒在涡环内的滞留时间,发现有一

个临界雷诺数  $Re_{cr}$  当  $Re > Re_{cr}$  时, 总有一、两个颗粒滞留于涡环内, 沿某一平衡轨道旋转。雷诺数越高, 滞留于涡环内的颗粒越多, 往往相互碰撞, 其中一部分形成小聚集体而向涡环中心迁移, 另一部分则离开涡环。据测量, 对人体红细胞而言  $Re_{cr} \sim 11$ 。

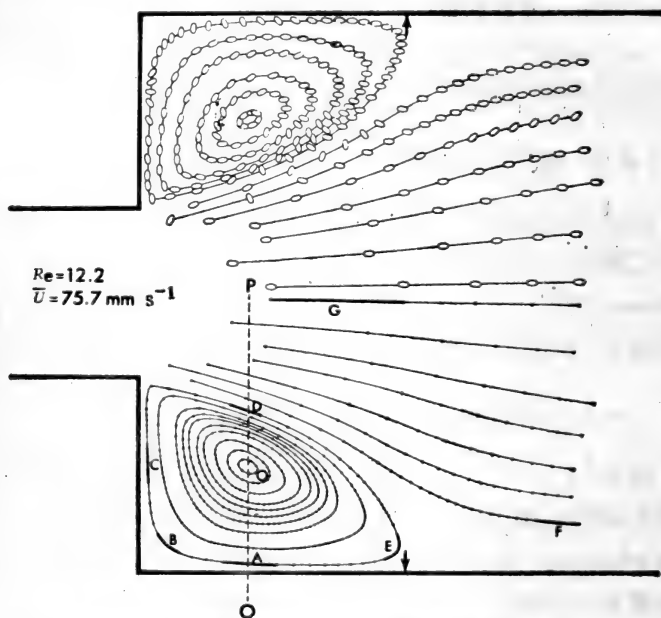


图 8-41 环形涡子午面内, 红细胞运动的轨迹及方位

当红细胞压积高达 15—45% 时, 在低雷诺数定常流里, 红细胞依然从涡环向主流迁移。因而有时会形成没有红细胞的环形区域, 有时则在涡环中区留下少量较大的红细胞串。但当雷诺数较高时, 红细胞既可以离开也可以进入涡环, 因而涡环内红细胞浓度保持一定的平衡值。

对于频率为  $\frac{1}{2}$ —3Hz 的脉动流, 亦可观测到类似的颗粒



迁移现象,其迁移方向亦依赖于颗粒的大小。

## 2. 血小板聚集

模型血小板(乳胶小环)在涡环内旋转时,会因相互碰撞而形成聚集体,并向涡环中心迁移。Mastard. 等<sup>[31]</sup>用富含血小板的血浆(PRP)及用 Tyrodes-albumin 洗过的血小板悬浮液研究了这一现象,结果表明,血小板聚集体的形成和增长,仅发生于一个很窄的雷诺数范围: 4.5—17。他们还发现,不同的悬浮液,血小板聚集的程度和速率很不一样。经肝素化处理的 PRP,血小板聚集广泛发生且生长最快,30 秒钟内就可形成长 100—600 $\mu\text{m}$ 、直径 30—50 $\mu\text{m}$  的血小板聚集体,而柠檬酸化的 PRP,聚集程度则低得多。

在脉动流中,没有观察到大的血小板聚集体,但会形成较小的聚集体,且聚集速率随频率增高而增大。

## 3. 血小板的附壁问题

Cazenave 等<sup>[32]</sup>管截面突变时血小板的附壁问题,大管用胶原纤维做衬套,流动雷诺数为 28—112,小管管径 0.92mm,大管管径 3.00mm。流动后 1—3 分钟,用戊二醛将附壁血小板固定,进而染色,用显微镜计数。血小板是用 Tyrodes-albumin 洗过的人血小板,并加了清洗过的红细胞。实验令人信服地证明:无论是定常流还是脉动流,血小板附壁现象集中发生于漩涡区,再附点下游较少,再附点附近最少。典型结果见图 8-42。可见,当红细胞压积增高时,粘着于管壁的血小板数目显著增多。当雷诺数增高时,漩涡区粘着的血小板密度峰值降低、变平,但再附点下游血小板粘着的数目基本上不变。若为脉冲流,则粘着在壁上的血小板数目减少,再附点下游的峰值消失,但漩涡区依然有一个峰值。

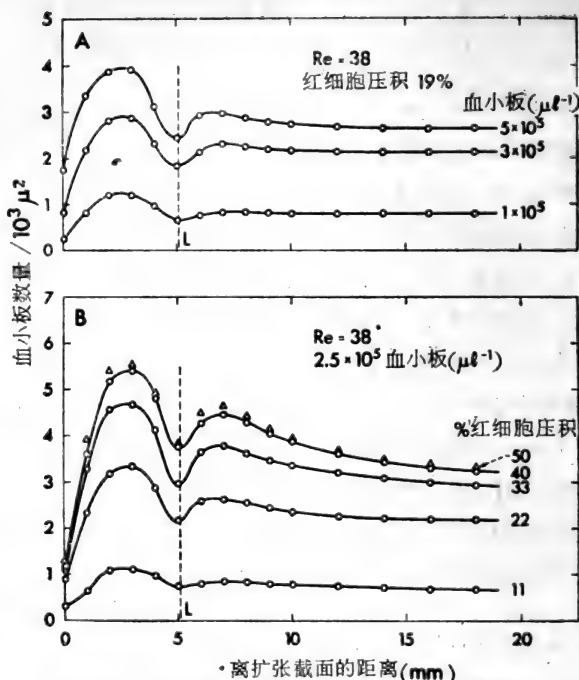


图 8-42 在扩张截面下游附壁血小板数目的密度  
 (a) 血小板浓度影响, (b) 红细胞压积影响。

上述现象不像是血小板扩散所致。按扩散理论,壁面附近流动切变率增大时,粘于壁面的血小板密度亦应增高。然而,雷诺数增大时,尽管漩涡倒流区在壁面附近流动切变率的峰值增大,粘壁血小板密度的峰值却降低了。一种可能的解释是,只有被弯曲的流线带到壁面附近,并进入壁面胶原纤维作用半径范围的血小板,才可能粘着于壁面。从再附点到管截面突变点,进入粘附作用区的血小板的流量一开始增加,而后再减少,因而在漩涡区形成一个峰值。雷诺数越低,漩涡区流线越弯曲,上述现象就越显著。同样道理,再附点下游,进入壁面粘附区的血小板数亦增大,直至流线变为平直。

## § 8-2 T形分支处的流动

基于上述假说, 不仅流动分离的地方, 而且在血管分支、弯曲等流场发生强烈扰动的地方, 都会有大量血小板粘着于血管壁。例如, 在血管分支部位, 二次流会把血细胞(包括红细胞和血小板)带向壁面, 分岔尖点两侧的径向流动, 也会使血细胞流向壁面。

为弄清分支流场的细节, Kwang 等<sup>[33]</sup>对 T形分支管内的流谱作了详尽的观察。入口雷诺数  $Re_0 = 10-250$ , 主流和侧支管流量比  $\frac{Q_1}{Q_2} = 0.05-4.0$ 。

观察表明, 在相当宽的  $Re_0$  和  $\frac{Q_1}{Q_2}$  范围内, 悬浮液从主管进入支管时, 会形成一对对称于子午面的漩涡。典型结果见

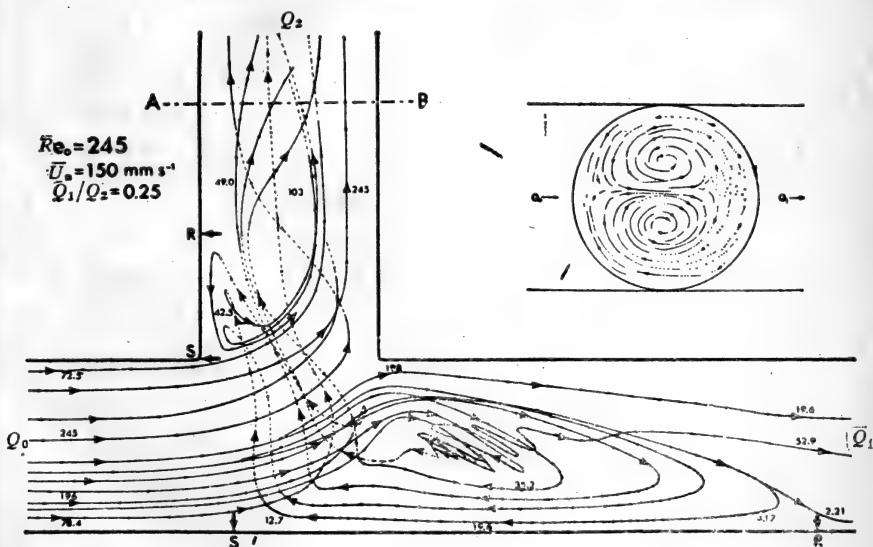


图 8-43 T形分支管公共子午面上颗粒运动的轨迹

图 8-43。可见，颗粒将沿着螺旋形的流线穿过主涡，有些还穿过侧支管的漩涡。

若 T 形分支口主管和支管间圆滑过渡，则主管内形成漩涡的  $Re_0$  更低，而支管内形成漩涡的  $Re_0$  更高。在给定  $Re_0$  下， $\frac{Q_1}{Q_2}$  增大时，主管内漩涡减小，最终消失；而支管内的漩涡则随  $\frac{Q_1}{Q_2}$  增大而增大。不论是圆滑过渡还是突然分岔，都是如此。

当分支角为  $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $135^\circ$  时，流谱和图 8-48 类似。但支管形成漩涡的临界雷诺数随分支角增大而降低。至于主涡的形成，分支角等于  $90^\circ$  时，所需的  $Re_0$  最低。

当悬浮流体从支管流进主管时，情形与此不同。只有当主管的两支之一发生严重堵塞时，才会形成成对的漩涡。

上述模型是高度理想化的。血管是有弹性的，血流是脉动流，这些都没有计及。然而，上述流动特征在动脉血流中是存在的。当然，动脉血管分支时，支管直径更小，因而在给定  $Re_0$  下，支管漩涡更大些。同时，分支时过渡曲线的曲率半径更大些，这将使支管漩涡变小，而主管漩涡变大。

此外，Müller-Mohnssen 观察了全血流过 T 形分支的情况，发现红细胞容易在再附点附近粘着于管壁，而血小板的附壁位置则要更靠上游一些。

上述流动图象为分析红细胞、血小板的运动提供了基础。

### 参 考 文 献

- [1] Lighthill, J.: *Mathematical Fluid Dynamics*, S. I. A. M., Philadelphia, 1975.
- [2] Roach, M. R.: *Cardiovascular Fluid Dynamics vol 2*. Ed. by Bergel, D. H., Academic Press, London, New York, 1972.

- [ 3 ] Ferguson, G. G., Roach, M. R.: 同[ 2 ], 1972.
- [ 4 ] Pedley, T. J.: *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press, New York, 1980.
- [ 5 ] Schultz, D. L.: *Cardiovascular Fluid Dynamics* vol. 1, Ed. by Bergel, D. H. Academic Press, London, New York, 1972.
- [ 6 ] Kuchar, N. R., Ostrach, S.: *Biomedical Fluid Mechanics Symposium*, ASME, 1966.
- [ 7 ] Singh, H. B., Klinzing, G. E.: *J. F. M.*, **63**, 297, 1974.
- [ 8 ] Lyne, W. H.: *J. F. M.*, **45**, 13, 1971.
- [ 9 ] Smith, F. T.: *J. F. M.*, **71**, 12, 1975.
- [ 10 ] Singh, M. P.: *J. F. M.*, **65**, 517, 1974.
- [ 11 ] Smith, F. T.: *Proc. Roy. Soc. Ser. A (London)*, **351**, 71, 1976.
- [ 12 ] Pedley, T. J.: *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, **9**, 218, 1977.
- [ 13 ] Round, G. F. et al.: *J. Biomechanics*, **10**, 725, 1977.
- [ 14 ] Rodkiewicz, H.: *Trans. ASME. Ser. I.*, **95**, 108, 1973.
- [ 15 ] Smith, F. T.: *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A*, **355**, 167, 1977.
- [ 16 ] Fernandez, R. C., et al.: *J. Biomechanics*, **9**, 574, 1976.
- [ 17 ] Erhlich, L. W.: *Computers & Fluids*, **2**, 237, 1974.
- [ 18 ] Erhlich, L. W., Friedman, M. H.: *J. Biomechanics*, **10**, 561, 1977.
- [ 19 ] Kandarpa, K., Davida, N.: *J. Biomechanics*, **9**, 735, 1976.
- [ 20 ] 岡小天: ヲオロジ—生物ヲオロジ—裝華房, 1976.
- [ 21 ] Seeley, B. D., Young, D. F.: *J. Biomechanics*, **9**, 439, 1976.
- [ 22 ] Daly, B. J.: *J. Biomechanics*, **9**, 465, 1976.
- [ 23 ] Back, L. D., Radbill, J. R., Crawford, D. W.: *J. Biomechanics*, **10**, 339, 1977.
- [ 24 ] Back, L. D., Radbill, J. R., Crawford, D. W.: *J. Biomechanics*, **10**(11/12), 763, 1977.
- [ 25 ] Davids, N., Mani, M. K.: *Biorheology*, **11**, 137, 1974.
- [ 26 ] Goldsmith, H. L.: *Biomechanics Symposium*, Ed. by Van. Buskirk, ASME, 1979.
- [ 27 ] Karino, T., Goldsmith, H. L.: *Biorheology*, **16**, 231, 1979.
- [ 28 ] Karino, T., Goldsmith, H. L.: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B.*, **297**, 413, 1977.
- [ 29 ] Goldsmith, H. L., Karino, T.: *Annals of the New York Academy of Sciences*, **283**, 241, 1977.
- [ 30 ] Levine, R., Goldsmith, H. L.: *Microvascular Research*, **14**, 319, 1977.
- [ 31 ] Mustard, J. F., et al.: *British Journal of Haematology*, **34**, 840, 1972.
- [ 32 ] Cazenave, J. P., et al.: *Journal of Laboratory and Clinical Me-*

*dicine*, 82, 978, 1973.

- [33] Kwong, H., Karino, T., Goldsmith, H. L.: Biomechanics Symposium, Ed. by Van Buskirk, W. C., ASME, 1979.

## 第九章 微循环流体动力学

### § 1 微循环中的流体力学问题

经小动脉—毛细血管—小静脉的血液流动,称为微循环。

正常情况下,循环系统的血压降大约有 50—60% 发生于小动脉,20% 左右发生于毛细血管,10—15% 发生于小静脉,也就是说,微循环的阻力,占整个循环系统的 90% 左右。因而,微循环血流的机械能损耗,决定了心脏的输出功率。

其次,血液循环的生理作用,在于和各组织进行物质交换,以维持其生命。这种物质交换主要通过毛细血管壁进行,它和管内血液流动特性有密切关系。

不仅如此,不同生理条件下,各组织、器官代谢活动所需的血流量很不一样,变化达一个量级以上。为满足代谢活动的需要,必须对组织的血液灌注实施有效的控制。这种控制是通过改变血管平滑肌的紧张程度,以改变流动阻力而实现的。可以设想,在控制过程中起主导作用的是流动阻力最大、含平滑肌丰富的那类血管,即小动脉。而小管血流压降-流量的非线性效应,则使得这种控制作用更为有效。

所以,无论对于心脏输出功能,还是对血液-组织传质过程,或者循环系统的控制、调节,微循环流体运动规律的研究,均有极其重要意义。

另一方面,从流体力学观点来看,微循环血液运动提出了一系列新问题,主要是:

## 1. 介质不连续性

这里有两类问题。

(1) 小动脉、小静脉的管径在数十到几百微米之间,由于壁面与红细胞之间的相互作用,以及剪切流动中红细胞之间的相互作用,血液不能看作均质的连续介质,必须考虑红细胞的‘个性’,当作具有微结构的连续介质,或两相悬浮系统来处理。

(2) 毛细血管直径与红细胞相当,或更小些。故所谓毛细‘血流’,实际上是红细胞一个、一个地,或一串、一串地排着队,从毛细血管中挤过去;细胞与细胞之间,血浆作相对于细胞的环流;细胞与管壁之间存在血浆润滑层。此时,血液既不能看作悬浮系统,更不能看作微连续介质,必须研究具有强烈的水力-弹性耦合作用的两相离散系统。

## 2. 热力学开系统

从热力学观点来看,微循环系统是一个开放的非平衡系统,它和环境之间有质、能交换,内部有化学反应。而传统的流体力学理论是建立在热力学平衡系统基础上的。

作为最原始的近似,只考虑宏观的‘介质’运动,不考虑其组元和内能的改变;或者认为系统和环境之间能、质交换的速率很快(与流动时间尺度相比),或量很小,可作为准平衡系统。这时,边界条件要作修改,需将毛细血流和组织间隙空间里组织液的运动结合起来分析。

## 3. 低雷诺数流动

运动的雷诺数在  $10^{-2}$ — $10^{-3}$  之间,远小于 1。故惯性力与表面作用相比,可以忽略不计。因此,管道弯曲、流动进口、



非定常效应等,均可不予考虑,从而使问题大为简化。

但另一方面,表面张力、静电效应、分子间的范德瓦耳斯力以及布朗运动等因素对血液宏观运动的影响亦趋显著,使问题复杂化。

#### 4. 流动边界特殊性

流动边界不同于大血管。这包括两方面:

(1) 微血管的力学性质和周围组织有密切的关系。不同组织或器官内,微血管组织具有不同的构造,因而力学性质也不同。冯元祯<sup>[50]</sup>将微血管与周围组织的关系分为三类:(i)与微血管尺寸相比,周围组织很薄,或很松弛,此时周围组织对微血管的变形几乎没影响,可看作孤立的粘弹性管;(ii)周围组织十分厚大,微血管埋藏于其中,可看作弹性胶体介质内的孔道。与红细胞相比,孔道壁相当刚硬。肠系膜内的微血管即属此例。据估计<sup>[2]</sup>,这里毛细血管刚度的99.7%、小动脉刚度的45.2%、小静脉刚度的41.7—61.3%,来自周围组织;(iii)周围组织对微血管力学性质的影响不可忽略,但也并非完全来自周围组织。此时,微血管可看作具有某种弹性支撑的粘弹性管。究竟采用哪种模型,视所论问题而定。

(2) 小动脉和小静脉血管含有大量平滑肌。它们周期性地收缩,对血液流动起着蠕动泵的作用。观察蝙蝠翅膀里小动脉、小静脉的血流,可以看到这种现象,称为蠕动流、淋巴、泌尿等系统中也有蠕动流问题。

#### 5. 微循环流动和血流控制过程高度耦合

小动脉平滑肌的紧张度,决定了微循环系统的进口条件,从而影响整个流动。而小动脉血管紧张程度,又取决于组织血液灌注和代谢需求的平衡,这和微血管里红细胞浓度、血液

与组织间的传质过程以及微循环的压力-流量分布等密切相关。

这些问题的研究，不仅能加深对微循环生理和病理的认识，还将推动流体力学理论的发展。

六十年代以来，人们对微循环流动做了不少工作。冯元桢<sup>[2]</sup>将所涉及的力学问题归纳于图 9-1 和图 9-2。图 9-1 与末梢动脉——小动脉血流有关，主要是 Fahreus-Lindqvist 效应、Fahreus 效应、红细胞径向分布不均匀性、低雷诺数进口流动、蠕动流及血流调节等问题；图 9-2 以毛细血流为对象，主要包括：红细胞与管壁相互作用、透壁流动、Fahreus 逆效应、组织压力测量、周围组织力学性质等问题。

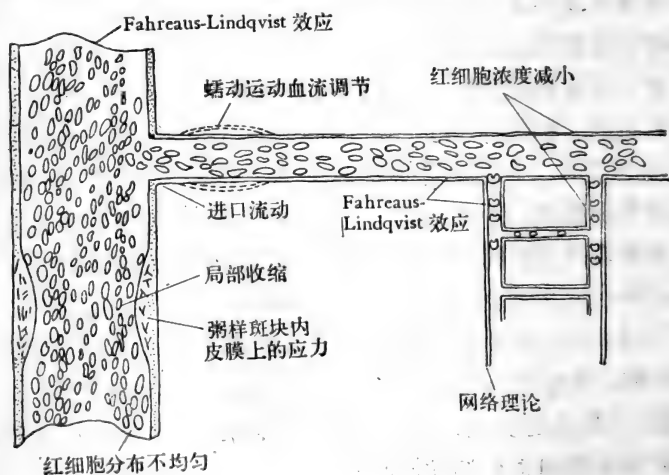


图 9-1 与小动脉血流有关的力学问题<sup>[2]</sup>

这些问题都已做了一些工作，但离问题的解决还有相当距离，无论理论分析还是实验研究，都作了很大简化，只考虑前述微循环流动特点的一、两个方面。

除了上面这些一般问题外，冯元桢<sup>[4]</sup>指出，微循环研究

中,最有前景的领域,是器官微循环。这里主要困难是:如何精确地测定器官微血管组织的几何形态及力学性质。在这方面冯元桢关于肺微循环的研究<sup>[9-13]</sup>,堪称典范。

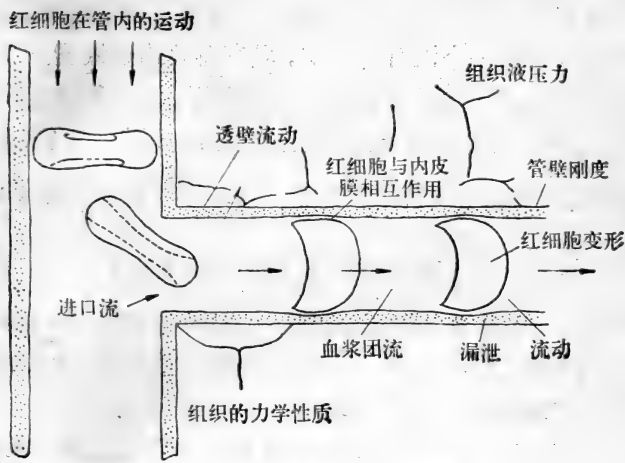


图 9-2 与毛细血流有关的力学问题<sup>[2]</sup>

本章就微血管流动的压力-流量关系、红细胞-血管壁相互作用、透过毛细血管壁的流体输运、微循环血流随机性以及肺微循环等问题,介绍现有的实验和理论研究结果,作为进一步探索的基础。

## § 2 小管血流异常现象及其物理本质

血液是具有微结构(红细胞、白细胞、血小板等)的流体,有形元素本身在不断地运动、变形、碰撞,它们彼此之间、以及和管壁之间,存在着复杂的相互作用。当流场尺度远大于有形元素尺寸时,这些作用不会直接影响宏观运动;但当流场尺

度较小时,这些作用就会直接影响整个流动,出现一些异常现象。

## § 2-1 边缘血浆层和红细胞径向迁移

早在一百五十多年前,Poiseuille 就通过小管血流实验,发现壁面附近有一个没有红细胞,只有血浆的边缘层。六十年代,Bloch 拍摄了青蛙肠系膜血流的电影,当摄影速度为 16—24 张/秒时,可清晰地看到边缘血浆层的边界。直径( $d$ )不同的血管,血浆层厚度( $\delta$ )亦不同。当  $d$  增大时, $\frac{\delta}{d}$  减小; $d \approx 1\text{mm}$  时, $\frac{\delta}{d} \sim 0$ 。但高速摄影表明,边缘血浆层的边界是不规则的,且随时间变化,这说明,红细胞的径向位置有随机脉动,所谓边缘血浆层,实际上是一个统计学上的‘贫细胞’区,其厚度是该区域边缘位置的时间平均值。

Goldsmith<sup>[14]</sup> 用显微镜观察了小玻璃管内血液的流动,红细胞压积很低,图 9-3 是测得的红细胞数目随径向位置的变化。它再一次说明了边缘血浆层的存在。

定常条件下,根据测得的血流速度分布  $u(r)$ , 可以经验地算出红细胞体积浓度的径向分布  $\phi(r)$ ,

$$\phi(r) = \phi_l + A \left[ \frac{2Q'(r)}{Q} - 1 \right] \quad (2-1)$$

$\phi_l$  是大管来流红细胞体积浓度, $Q$  是流量,

$$\text{故:} \quad Q'(r) = 2\pi \int_r^R u(r) dr \quad (2-2)$$

$A$  是  $\phi_l$  的经验函数,如图 9-4 示。

形成边缘血浆层及红细胞沿截面分布不均匀的原因是红细胞向管心迁移。引起红细胞径向迁移的原因及规律如何呢?要回答这个问题,需分析单个红细胞在有界剪切流中的行为,

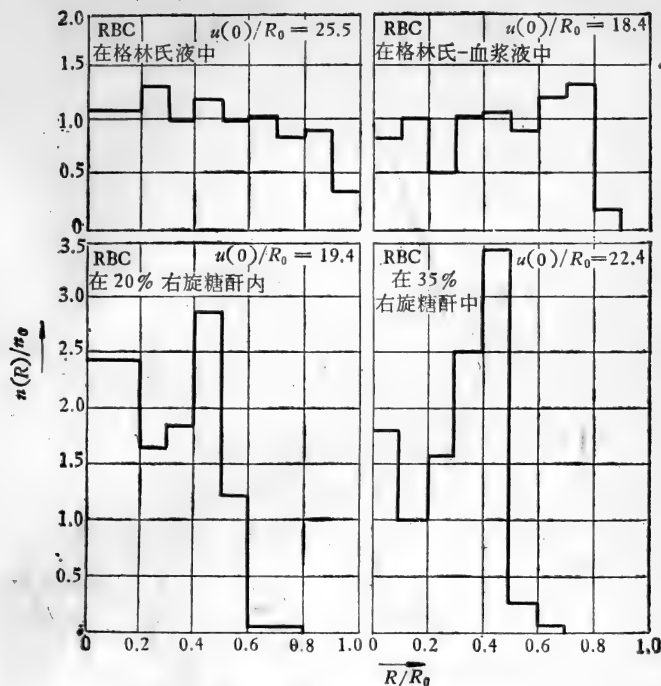


图 9-3 小管血流红细胞数量的径向分布<sup>[14]</sup>

以及红细胞之间的相互作用。目前这个问题还没有解决。这里,以液滴和刚性颗粒作为红细胞的模型,定性地说明细胞向轴迁移的物理原因。

### 1. 液滴向轴迁移和粘性作用

设液滴形状为旋转椭球,变形前长轴为  $2a$ ,短轴为  $2b$ (最大旋转半径为  $b$ )。在低雷诺数下,考察它在泊肃叶流动中的运动、变形及受力情况。

如图 9-5 示,变形主轴  $(x', y')$  与参考轴  $(x, y)$  之间夹角为  $-\varepsilon$ 。按 Taylor 分析,液滴在  $y$  方向上受压,而在  $x'$  方向上

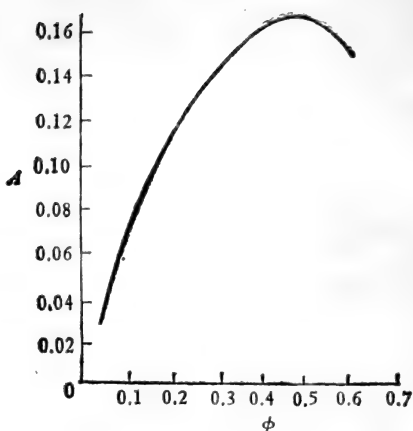


图 9-4  $A-\phi$  经验关系<sup>[7]</sup>

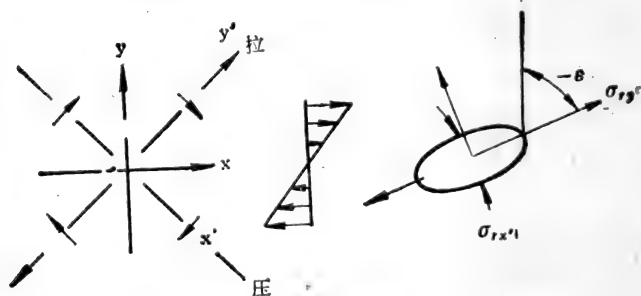


图 9-5 液滴受力图

受拉, 在球极坐标  $\{r, \theta, \phi\}$  中, 主应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rx'} &= \frac{5\lambda\mu_2G}{2(\lambda+1)} \left[ 1 + \frac{16}{5\lambda} \sin^2\theta \sin^2\phi \right] \times \sin\theta \sin\phi \\ \sigma_{ry'} &= \frac{5\lambda\mu_2G}{2(\lambda+1)} \left[ 1 + \frac{16}{5\lambda} \sin^2\theta \cos^2\phi \right] \times \sin\theta \sin\phi \end{aligned} \right\} (2-3)$$

这里  $\lambda = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ,  $\mu_1$  是悬浮液粘度,  $\mu_2$  是被悬浮液滴流体的粘度

$G$  是液滴所在位置上的流动的速度梯度, 泊肃叶流中

$$G = G_0 + kb \cos(\phi + \varepsilon) \\ = -k[r - b \cos(\phi + \varepsilon)] \quad (2-4)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{4Q}{\pi R^4} \\ \varepsilon &= \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\eta\right) \\ \eta &= \frac{l - B}{l + B} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

$Q$  为流量,  $R$  为管半径,  $2l$  为变形后液滴长轴,  $2B$  为变形后液滴短轴。根据 Taylor 分析

$$\eta^2 = \frac{Gb\mu_2}{\left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right)} \cdot \frac{19\lambda + 16}{16(\lambda + 1)} \quad (2-6)$$

当液滴方位为  $\phi$  时, 间隔为  $d\phi$  的表面上所受的主应力方向上的力为

$$\left. \begin{aligned} F_{x'}(\phi) &= 2b^2 \int_0^{\pi/2} \sigma_{r_x'} \sin \theta d\theta = \alpha G [1 + \beta \sin^2 \phi] \cos \phi \\ F_{y'}(\phi) &= 2b^2 \int_0^{\pi/2} \sigma_{r_y'} \sin \theta d\theta = \alpha G [1 + \beta \cos^2 \phi] \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{5\pi\lambda\mu_2 b^2}{4(\lambda + 1)} \\ \beta &= \frac{12}{5\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

作用于液滴表面的  $y$  向力为

$$F_y(\phi) = F_{y'}(\phi) \cos \varepsilon - F_{x'}(\phi) \sin \varepsilon \quad (2-9)$$

若变形不太大, 近似地有

$$F_y(\phi) = F_{y'}(\phi) - \varepsilon F_{x'}(\phi) \quad (2-10)$$

故作用于液滴的合力的径向分量为

$$F_r = \int_0^{2\pi} [F_{y'}(\phi) - \varepsilon F_{x'}(\phi)] d\phi \quad (2-11)$$

$$\therefore F_r = -\frac{5\pi^2 k b^3 \mu_2 \eta}{2(\lambda + 1)} \left[ \left(1 + \frac{2}{5} \lambda\right) \left(\lambda + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{6}{5}\right) \right] \quad (2-12)$$

根据(2-5),  $k > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\eta > 0$ , 而

$$\left[ \left(1 + \frac{2}{5} \lambda\right) \left(\lambda + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{6}{5}\right) \right] = \left[ \frac{2}{5} \lambda^2 + \frac{99}{100} \lambda + \frac{6}{20} \right] > 0$$

$$\therefore F_r < 0 \quad (2-13)$$

可见, 泊肃叶流中, 作用于液滴的径向力不等于 0, 方向指向管心。在  $F_r$  的作用下, 液滴将向轴迁移, 迁移速度可以用修正了的斯托克斯公式估算:

$$\left. \begin{aligned} F_r &= 6\pi\mu_2 b f_1(\lambda) \cdot v_p \\ f_1(\lambda) &= \frac{\lambda + \frac{2}{3}}{\lambda + 1} \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

$$\therefore v_p = -\frac{\pi\mu_2}{48\xi} f_2(\lambda) k^2 b^3 r \quad (2-15)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left(1 + \frac{2}{5} \lambda\right) \eta_0 \\ f_2(\lambda) &= \frac{3(19\lambda + 16) \left(8\lambda^2 + \frac{99}{5} \lambda + 6\right)}{6(\lambda + 1)(3\lambda + 2)} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

$\therefore v_p = \frac{dr}{dt}$ , 故若  $t = 0$  时, 液滴径向位置为  $r_0$ , 则积分之, 可得液滴径向位置随时间  $t$  的变化:

$$\ln \frac{r}{r_0} = -\frac{\pi\mu_2}{48\xi} f_2(\lambda) k^2 b^3 t \quad (2-17)$$

可见: (i) 由于  $f_2(\lambda) > 0$ ,  $\xi > 0$ , 故  $v_p < 0$  即液滴迁移



方向指向管心;(ii)液滴离壁愈近( $r$  愈大), 迁移速度绝对值  $|v_p|$  愈大。

红细胞是高度可变形的, 这和液滴相似。因此, 上述分析说明, 引起红细胞向轴迁移的原因之一是剪切流中流体的粘性效应。

## 2. 刚性颗粒的径向迁移及惯性效应

当颗粒雷诺数很小时, 忽略纳维-斯托克斯方程中的惯性项后, 所得作用于颗粒的侧向合力为 0, 因而浮力中性的颗粒不会穿过流线而作横向迁移。

但是, 实验表明, 颗粒雷诺数  $Re_p$  ( $Re_p = \frac{aw}{\nu_0}$   $a$  为颗粒半径;  $w$  为颗粒相对于流体的运动速度,  $\nu_0$  为悬浮液体的运动粘度) 稍高, 但仍然小于 1 时, 例如  $Re_p > 10^{-3}$ , 惯性效应将使浮力中性的刚性颗粒发生径向迁移。但迁移的特征和液滴不同, 近壁颗粒, 向管心移动, 而管心颗粒, 向壁移动, 在某一平衡位置  $r = R_m$  处, 颗粒浓度最大, 称为环箍效应 (tubular-pinch effect)。

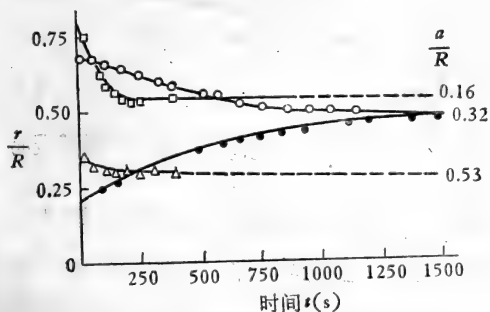


图 9-6 刚性小球在泊肃叶中的径向迁移<sup>[16]</sup>

图 9-6 是实验测得刚性小球径向位置随时间的变化,

$Re_p = 10^{-3} - 5 \times 10^{-2}$ , 颗粒尺寸不同。显然, 平衡位置与颗粒尺寸有关,  $\frac{R_m}{R}$  随  $\frac{a}{R}$  增大而减小。  $\frac{a}{R} = 0.05$  时,  $\frac{R_m}{R} \approx 0.7$ ;  $\frac{a}{R} = 0.3$  时,  $\frac{R_m}{R} \approx 0.5$ ,  $\frac{a}{R} = 0.78$  时,  $\frac{R_m}{R} \approx 0.15$ 。

径向迁移速度  $v_p$ , 有如下经验公式

$$\frac{v_p}{U} = 0.34 Re \left( \frac{a}{R} \right)^{2.84} \frac{r}{R} \left( 1 - \frac{r}{R_m} \right) \quad (2-18)$$

$$Re = \frac{2R \cdot U}{\nu_0}$$

显然, 迁移速度随  $\frac{r}{R}$  的变化不是单调的。

图 9-7 是碟形、球形、棒形刚性颗粒及液滴径向位置随时间的变化, 它说明颗粒形状的影响及刚性颗粒与柔性颗粒径向运动的差异。

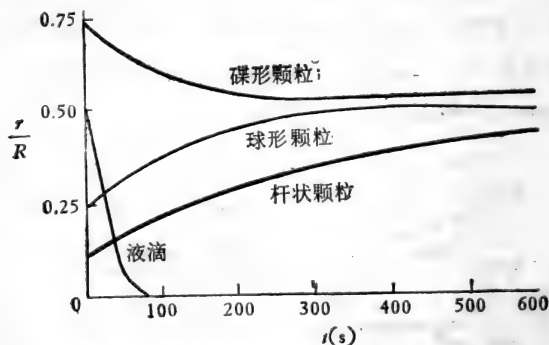


图 9-7 刚性颗粒在泊肃叶流中的径向迁移<sup>[10]</sup>

刚性颗粒的径向迁移是怎样引起的呢? 对于单个浮力中性的刚性颗粒来说, 有两种作用, 一是流动速度梯度引起的惯性效应, 二是壁面影响。

### (1) 无界剪切流动的梯度效应

考察图 9-8 所示剪切流中的旋转小球。小球旋转是流动速度梯度引起的,而这种旋转又使得上侧相对速度  $w_1$  大于下侧相对速度  $w_2$ , 因而下侧静压高于上侧, 形成一向上的侧向力, 使小球发生横向移动。在高雷诺数情况下, 这称为 Magnus 效应, 这是颗粒径向迁移的最粗略的解释。但是, Magnus 效应基于伯努利定理, 而在雷诺数很低时, 起主导作用的是粘性应力, 伯努利定理不适用。因此小雷诺数下的横向运动不能用 Magnus 效应来解释。

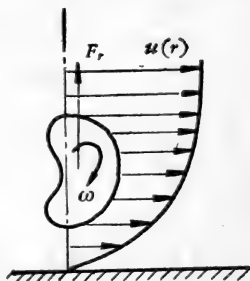


图 9-8 Magnus 效应

数学上, 斯托克斯流动可看作纳维-斯托克斯方程在小雷诺数下的 0 级近似解。对整个流场来说, 它占主导地位。但如第二章 § 12 所述, 当离颗粒的距离  $r$  达到  $Re_p \cdot \frac{r}{a} \sim \mathcal{O}(1)$  时, 斯托克斯解失效, 必须考虑惯性效应。由于流动雷诺数很小, 可把  $Re_p$  当作小参数, 用扰动法求惯性效应, 以未扰动流速  $\mathbf{v}_0$  使非线性项  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  线性化为  $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}$ , 从而求解。这样可得作用于颗粒的侧力为:

$$\mathbf{F}_l = \pi a^3 \rho \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega} [1 + \mathcal{O}(Re_p)] \quad (2-19)$$

$\boldsymbol{\omega}$  为颗粒相对于流体的速度,  $\boldsymbol{\omega}_0$  为颗粒旋转角速度。对于简单剪切流

$$F_l = 81.2 \mu a^2 (u_p - u) \left( \frac{\dot{\gamma}}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\nu^{\frac{1}{2}}) \quad (2-20)$$

$\dot{\gamma}$  为当地流动切变率,  $u_p$  为颗粒运动速度,  $u$  为无扰动时, 当地流体运动速度。

(2-19)、(2-20)表明, 作用于颗粒的侧力  $\mathbf{F}_l$  的方向, 取决于颗粒与当地流体的相对速度。对于  $u_p < u$  的颗粒,  $\mathbf{F}_l$  总是使它向  $u_p$  高的区域移动; 而对于  $u_p > u$  的颗粒,  $\mathbf{F}_l$  总是使它

向  $u_p$  低的区域移动。平衡位置  $r = R_m$  处,  $u_p(R_m) = u(R_m)$ 。

## (2) 壁面作用

壁面的存在, 对于颗粒横向迁移有明显的影响。Ho 和 Leal<sup>[18]</sup>对二维泊肃叶流中, 浮力中性的刚性小球作了分析。以  $Re_p$  为小参数, 用扰动法求出速度场、角速度场、压力场等, 然后算出作用于颗粒的总的侧向力  $F_l$  为:

$$F_l = \rho U^2 a^2 \kappa [36(1 - 2\zeta)^2 F_1(\zeta) - 36(1 - 2\zeta) F_2(\zeta)] \quad (2-21)$$

这里,  $\zeta = \frac{y}{d}$ ,  $\kappa = \frac{a}{d}$ ,  $F_1(\zeta)$ 、 $F_2(\zeta)$ 的数值见文献[18],  $d$  为壁间距,  $a$  为球半径。

据此, 平衡位置在离中心线  $0.3d$  处, 这和实验结果一致。

实验证明, 固化红细胞与生理盐水组成的悬浮系统, 当  $Re_p > 10^{-3}$  时, 细胞在径向发生双向迁移, 平衡位置为  $\frac{R_m}{R} \simeq 0.6$ 。这说明红细胞径向迁移是粘性作用和惯性效应的综合。

还要指出, 由于血液中细胞浓度相当高, 因此, 必须计及有形元素碰撞的统计效应。

## § 2-2 小管血流的速度分布及塞子流

小管血流的第二个特色是: 红细胞的存在使血流速度剖面在管心区变钝, 形成塞子流(plug flow)。对此, Goldsmith 等以刚性小球、刚性圆盘、液滴、血影细胞(ghost cell)为红细胞模型, 做了大量实验研究。

低雷诺数下, 半径( $a$ )远小于管半径( $R_0$ )的单个刚性小球, 将以速度  $U(r) = u(r)$  沿平行于管轴的路径运动,  $U(r)$  是位于  $r$  处刚性颗粒的速度,  $u(r)$  则是纯流体在同样条件下流动时, 同一径向位置上的流速。实验表明, 对刚性悬浮液来

说, 只要  $\frac{a}{R_0} < 0.4$ , 颗粒体积浓度  $\phi < 0.2$ , 则颗粒运动速度依然保持抛物型分布,  $U(r) = u(r)$ 。当  $\frac{a}{R_0}$  不变, 而  $\phi$  大于 0.2 时, 颗粒速度分布在管心区 ( $0 \leq r \leq R_c$ ) 变为平直, 那里:

$$U(r) = U_m < u(0)$$

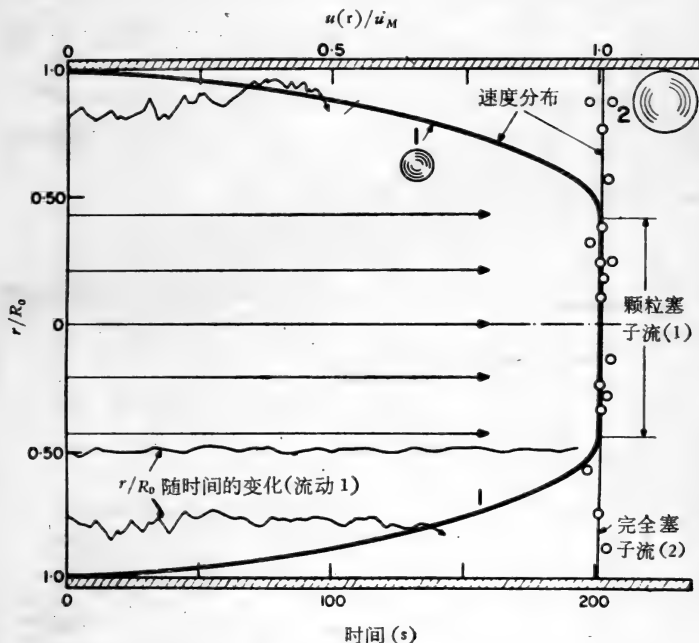


图 9-9 刚性小球悬浮液的速度分布<sup>[17]</sup>

$\phi = 37\%$ ,  $R_0 = 4.0\text{mm}$ ,

(1)  $\frac{a}{R_0} = 0.056$ , (2)  $\frac{a}{R_0} = 0.112$ 。

图 9-9 是典型实验结果。 $\frac{a}{R_0}$  越大, 出现局部塞子流的颗粒临界浓度 ( $\phi_{cr}$ ) 越低; 颗粒浓度不变时,  $\frac{a}{R_0}$  越大,  $R_c$  越大, 即

塞子流区域越大。

实验还表明，刚性颗粒悬浮液的速度分布与流量及悬浮相介质的粘度无关，单位管长上的压降与流量成正比。在这个意义上，刚性颗粒悬浮液可看作准牛顿流体。

液滴及血影细胞悬浮液流过小圆管时，在一定条件下，管心速度剖面也会变钝，但不同于刚性颗粒悬浮液：(i) 形成塞子流的临界体积浓度比刚性颗粒悬浮液高；(ii) 同样  $\phi$ 、 $\frac{a}{R_0}$  值下，塞子流区比刚性颗粒悬浮液小；(iii) 颗粒速度分布依赖于流量及悬浮介质的粘度，流量越大，塞子流区域越小；粘度越高，塞子流区域越大。

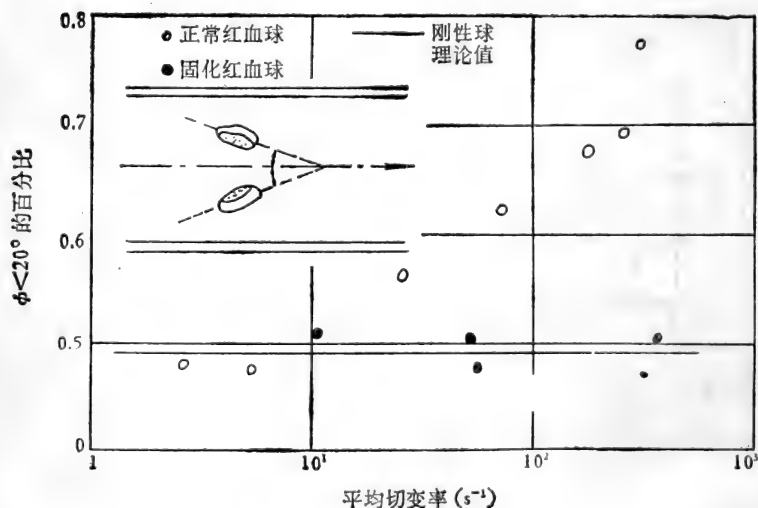


图 9-10 刚性小球悬浮液与液滴悬浮液

$$\frac{R_c}{R_0} - \phi \frac{a}{R_0} \times 10^2 \text{ 曲线的比较}^{[17]}$$

图 9-10 是刚性小球悬浮液与液滴悬浮液  $\frac{R_c}{R_0} - \phi \frac{a}{R_0}$  关系。  
 图 9-11 是  $\phi = 20-70\%$  的血影细胞悬浮液的速度分布, 由此  
 可以清晰地看到颗粒浓度、流量、平均切变率对颗粒速度分布  
 的影响。

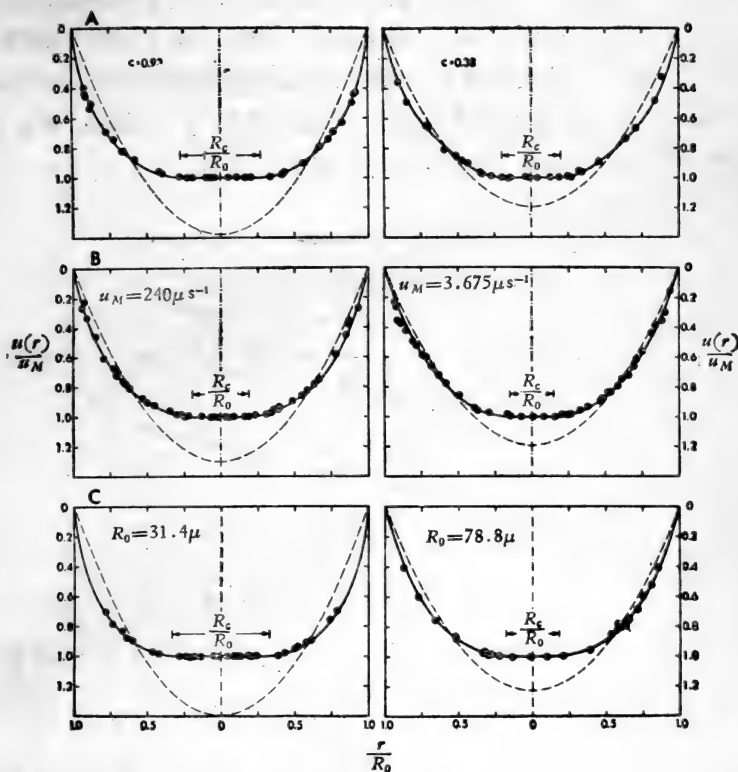


图 9-11 血影细胞悬浮液速度分布<sup>[17]</sup>

A. 浓度影响, B. 流量影响, C. 平均切变率的影响。

### § 2-3 Fahraeus 效应及其逆效应

如第三章 § 2 所述, 当管直径小于 1mm 时, 血流表观粘度

随管径减小而降低，这就是著名的 Fahraeus-Lindqvist 效应。Barbee 和 Cokelet<sup>[20]</sup> 证明，直至管径小达  $29\mu\text{m}$ ，此效应依然存在。

产生 Fahraeus-Lindqvist 效应的原因是什么呢？可能有二，一是红细胞向管心迁移形成的边缘血浆层使得壁面切应力降低（血浆粘度低于全血）。管子越小，边缘血浆层的作用越明显；二是血液从大管流到小管时，红细胞压积随管径变小而降低，这必然使血液粘度降低。这种现象称为 Fahraeus 效应。Barbee 和 Cokelet 对此作了详尽的实验研究。

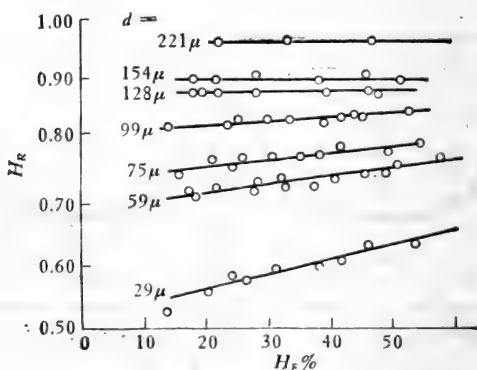


图 9-12  $H_R$  与  $H_F, D_i$  的关系<sup>[20]</sup>

图 9-12 是实验测得管内红细胞压积  $H_T$  与来流(贮存器内)红细胞压积  $H_F$  之比  $H_R = \frac{H_T}{H_F}$  随管径  $D_i$  及  $H_F$  的变化。

可见：(i) 当  $29\mu\text{m} \leq D_i \leq 1000\mu\text{m}$  时，随着  $D_i$  变小， $H_T$  显著下降；(ii) 管径较大时，若  $D_i$  不变， $H_R \approx$  常数，即  $H_T$  与  $H_F$  呈线性关系；而当  $D_i$  较小时， $H_T$  与  $H_F$  的关系是非线性的。

Cokelet 认为  $H_T$  与进口条件无关，此时  $H_R$  与  $\frac{D_c}{D_i}$  ( $D_c$  为红细胞直径) 之间有如下经验关系：



$$H_R = 0.214 - 0.233 \ln \left( \frac{D_c}{D_i} \right) + \left[ 0.382 + 0.123 \ln \left( \frac{D_c}{D_i} \right) \right] H_F \quad (2-22)$$

Barbee 和 Cokelet 证明,如果我们用较大的管子(内径大于 1mm)测量血液的表观粘度,将所得结果用管内红细胞压积的函数来表示。那么同一血样用小管测得的表观粘度和用小管内红细胞压积代入大管表观粘度经验函数所得的值相一致。以图 9-13 为例,当  $H_F = 0.559$  时,  $D_i = 811 \mu\text{m}$  的管内,  $H_T \approx 0.559$ ;而在  $D_i = 29 \mu\text{m}$  的管内,  $H_T \approx 0.358$ 。此时

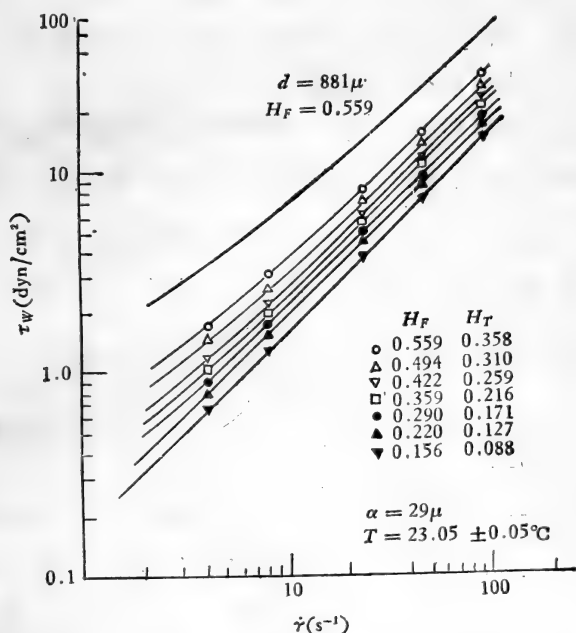


图 9-13  $\tau_w$ - $\dot{\gamma}$  曲线<sup>[20]</sup>

二者的  $\tau_w$ - $\dot{\gamma}$  曲线差异甚大。但是,若令  $H_F = 0.358$ ,则  $D_i = 811 \mu\text{m}$  的管内,血流表观粘度和  $H_F = 0.599$  但  $D_i = 29 \mu\text{m}$  的管

子测得的血流表观粘度一致。这说明造成 Fahraeus-Lindqvist 效应的主要原因是：随着管径减小，管内红细胞压积降低，即 Fahraeus 效应。

然而造成 Fahraeus 效应的原因又是什么呢？原因似乎有三个：

(1) 血浆撇取效应 (plasma skimming effect)。当血液从较大的血管流向侧支小血管时，相当一部分血液来自大血管壁面附近的血浆层，因而对分支管来讲，来流细胞浓度低于母管。这种作用由于大管内红细胞运动的方向性而变得更为强烈。若支管与母管夹角很小，则血浆撇取作用较弱。若支管与母管垂直，则由于母管中红细胞主轴平行于主流（垂直于支管轴），血浆撇取作用最为强烈。

(2) 支管进口的几何条件及进口截面外侧主流的流场条件。颜荣次和冯元楨<sup>[22]</sup>的实验表明，在同样  $H_F$ 、 $\frac{D_c}{D_t}$ 、及  $\frac{U_F}{U_T}$ （支管进口截面外侧流速与支管内平均流速之比）值下，进口形状为锥形时； $\frac{H_T}{H_F} = 0.96$ ，而正交进口时， $\frac{H_T}{H_F} = 0.84$ 。而在同样进口几何条件下， $\frac{H_T}{H_F}$  则随  $\frac{U_F}{U_T}$  变化，见图 9-16。

(3) 在红细胞运动速度 ( $U_C$ ) 高于管内血液平均流速  $U_T$ 。当流动定常时，单位时间内流进支管的红细胞数目，必定等于流出支管的红细胞数目。因此，若不考虑因素 1、2，必有：

$$U_T \cdot A \cdot H_F = U_C \cdot A \cdot H_T$$

$$\therefore H_T = H_F \frac{U_T}{U_C} \quad (2-23)$$

因为  $U_T < U_C$ ，故  $H_T < H_F$ 。

然而，实际流动中进口条件及血浆撇取作用是不可忽略的，流进支管时的血球压积不等于  $H_F$ ，若引进修正系数  $F$ ，则

$$H_T = FH_F \frac{U_T}{U_C} \quad (2-24)$$

若支管出口截面外侧血液红细胞压积为  $H_D$ , 则

$$H_D \cdot A \cdot U_T = H_T \cdot A \cdot U_C$$

$$\therefore \frac{H_D}{H_T} = \frac{U_C}{U_T} \quad (2-25)$$

代入(2-24),

$$F = \frac{H_D}{H_F} \quad (2-26)$$

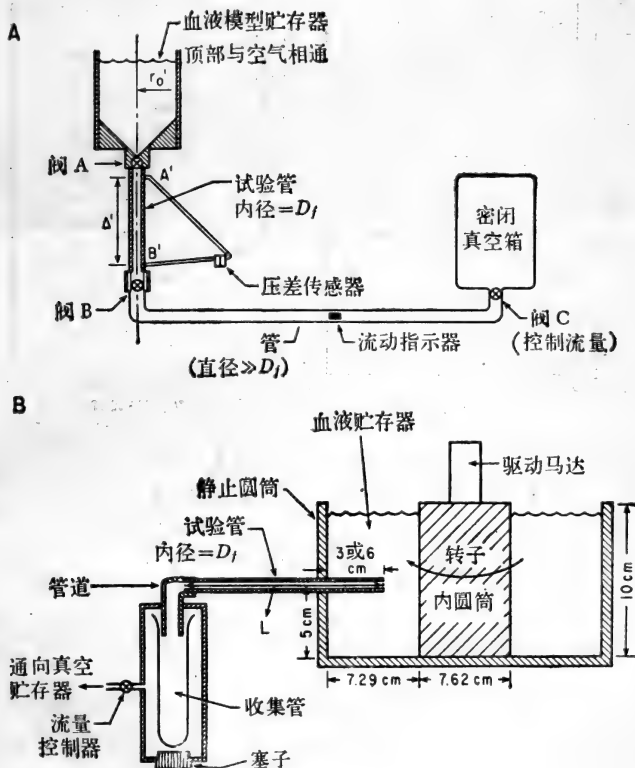


图 9-14 两种模型示意图

显然，若  $\left(F \cdot \frac{U_T}{U_C}\right) < 1$ ，则  $\frac{H_T}{H_F} < 1$ ，此即 Fahraeus 效应；如果  $\left(F \cdot \frac{U_T}{U_C}\right) > 1$ ，那么  $\frac{H_T}{H_F} > 1$ ，即支管内血球压积高于母管，Fahraeus 效应就要逆转。这种情况是否存在？ $F$  与那些因素有关？为回答这一问题，颜荣次和冯元楨用图 9-14 所示两种模型做了实验，以液态硅橡胶和明胶薄壳颗粒组成的悬浮液体模拟血液。图 9-15 是用模型 I 所得的结果，可

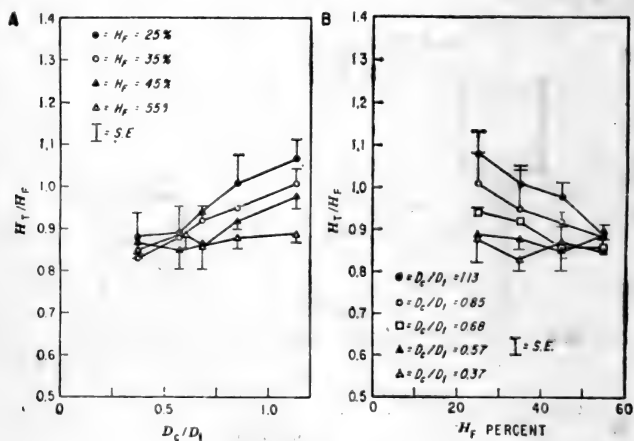


图 9-15 模型 I 测量结果<sup>[22]</sup>

- A.  $\frac{H_T}{H_F} - \frac{D_c}{D_t}$  关系，以  $H_F$  为参数；
- B.  $\frac{H_T}{H_F} - H_F$  关系，以  $\frac{D_c}{D_t}$  为参数。

见，当管径和红细胞直径同量级时， $\frac{H_T}{H_F}$  随着管径减小  $\left(\frac{D_c}{D_t}\right.$  增大) 而增大，支管内血球压积  $H_T$  可等于或高于母管内血球压积。此即 Fahraeus 效应的逆效应。 $H_F$  越低，逆效应越显著。

图 9-16 是用模型 II 测得的结果。可见  $F = \frac{H_D}{H_F}$  与主流在支管进口截面处的当地流速  $U_F$  与支管内血流平均速度  $U_T$  之比有关。 $\frac{U_F}{U_T} < 1$  时,  $F$  随  $\frac{U_F}{U_T}$  增大而增大; 在  $\frac{U_F}{U_T} \sim 1-4$  之间,  $F$  达峰值; 其后,  $F$  随  $\frac{U_F}{U_T}$  增大而减小。这说明, 进口处主流流场情况及进口几何形状对于管内血球压积有不可忽视的影响, 管子越小、 $H_F$  越低这种影响越大。因此 Cokelet 的经验方程(2-22)用于毛细血流是有问题的。此外, 实验还表明毛细血管下游(小静脉)和上游(小动脉)血球压积不相等。

Fahraeus 效应的逆转应归因于进口截面附近红细胞与管壁的相互作用。观察表明, 当  $D_i$  与  $D_c$  相当或更小时, 流进支管的红细胞的赤道平面大都平行于支管轴线, 故细胞与管壁间的相互作用集中于其侧缘距管壁最近的两点上, 而且此力在垂直于管壁的方向上分量相当大。这一方面使摩阻增大, 另一方面使红细胞膜受压而弯曲、变形。如第三章§ 8 所述, 红细胞作为一个薄壳体很容易受压而失去稳定性。当  $D_i$  与  $D_c$  相比相当大时, 进口处红细胞变形不太大, 膜可视作弹性体, 弹性抗力随变形增大略为升高, 但当  $D_i \approx D_c$  甚至更小时, 进口处红细胞变形很大, 膜壳失稳, 且膜材料相当于塑性体, 变形增大时, 抗力减小, 因而一定压差下, 进入支管的红细胞数目增多, 从而使 Fahraeus 效应逆转。

## § 2-4 管壁表面性质的影响

Copley 等人发现, 用小玻璃管量血液、血浆的粘度时, 若管壁有一薄层纤维, 则所得表观粘度低于光滑的玻璃管。典型结果见图 9-17。这种现象是怎样造成的? 目前尚无完整的理论说明, 有三种说法。

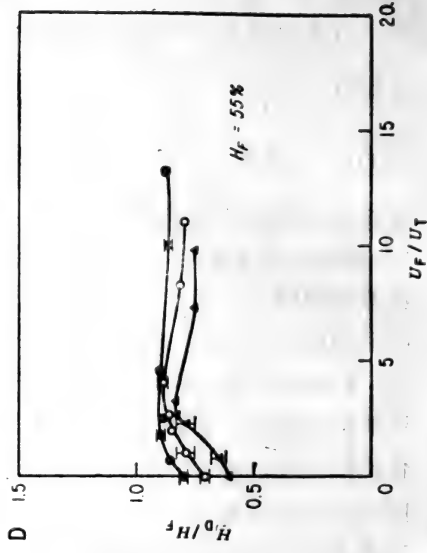
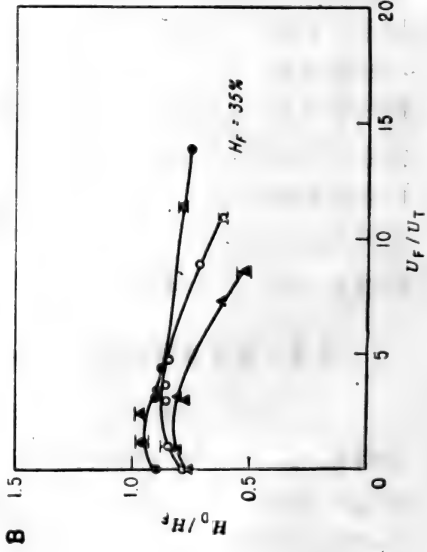
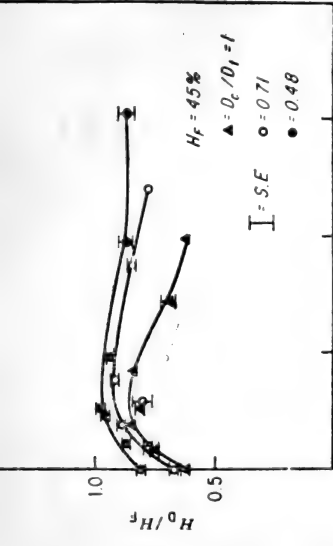
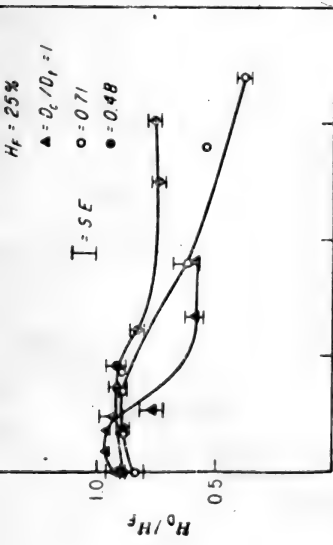


图 9-16 模型 II 测量结果 [32]

A.  $H_F = 0.25$ , B.  $H_F = 0.35$ , C.  $H_F = 0.45$ , D.  $H_F = 0.55$ .

## 1. 壁面滑流假说

认为纤维衬套管血液表观粘度之所以低,是因为血液和壁表面之间有相对滑移, $u(R) \neq 0$ ,因而同样压差下,流过纤维衬套管的流量较大。壁面滑流可用有效滑动系数 $\beta$ 来表示

$$\beta = \frac{u(R)}{\tau_w} \quad (2-27)$$

岡小天<sup>[23]</sup>在双层流动模型(见§3-2)的基础上,用表面滑移假说,计算了表面滑移对血液表观粘度的影响。但这种假说的根本毛病是:无法从物理上阐明,滑移是怎样产生的。实验证明,壁面附近有一个无细胞(统计地)的边缘血浆层,因此,平均地看血液与管壁直接接触的不是红细胞,而是血浆。而血浆90%以上是水,把血浆与纤维衬套看作是非浸润的,是没有根据的。

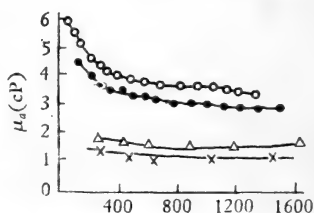


图 9-17 管壁表面性质对表观粘度的影响<sup>[23]</sup>

## 2. 表面电荷作用

红细胞膜带有微弱的负电荷;血浆蛋白中白蛋白、血纤维蛋白原等也带负电荷;而纤维膜表面也带负电荷。因此可以设想,表面电荷的静电作用(相斥)将使边缘血浆层增厚,并使贴近壁面的一个薄层内,血浆蛋白浓度降低,从而阻力减小。实验证明,带负电荷的聚合电解质管内,血流阻力比电中性管,或带正电荷的管低20%左右。且血球浓度愈高,减阻效应愈显著。

但这种假说也还有一个问题需进一步澄清,即表面电荷

是如何起作用的？因为表面电荷很弱，只有当距离小于  $50 \text{ \AA}$  时，静电力才能起作用。因而直接改变边缘血浆层厚度似乎不大可能。很可能，表面静电效应改变了红细胞与管壁表面的相互作用，从而使阻力降低。这个问题的研究，不仅有助于认识生理规律，还将为抗凝血、抗溶血医用合成材料的研制提供启示。

### 3. 表面化学效应

当血液或血浆流过带纤维衬套的管子时，血浆中的蛋白质分子被吸附于纤维表面，结果边缘血浆层中蛋白含量减少，从而使阻力降低。

## § 3 小管血液定常流动的理论分析

小动脉、小静脉血管管壁的相对厚度比大血管大得多，且与周围组织紧密结合，刚度远大于大血管。而流动的脉动性则比大血管小得多。故作为最初步的近似，小动脉和小静脉里的血液运动，可当作刚性管道里的定常流动。§3-1—§3-3 讨论充分发展的定常流动，鉴于小管血流的异常现象，采用不同的血液流变模型。§3-4 讨论低雷诺数进口流动，血液看作牛顿流体。

### § 3-1 Casson 流体定常圆管层流

定常状态下，非牛顿流体切应力  $\tau$  与切变率  $\dot{\gamma}$  的关系为

$$\dot{\gamma} = f(\tau) \quad (3-1)$$

对于刚性圆柱管内充分发展的层流则有：

$$f(\tau) = -\frac{du}{dr} \quad (3-2)$$



$$\therefore u = -\int f(\tau)dr + c$$

由于壁面无滑流,即  $r = R$  时,  $u = 0$

$$\therefore u = \int_r^R f(\tau)dr \quad (3-3)$$

另一方面,任一半径为  $r$  的圆柱形流体面上,压差与粘性力平衡,故

$$\begin{aligned} \pi r^2 \cdot \Delta p &= 2\pi r l \cdot \tau \\ \therefore \tau &= \frac{r\Delta p}{2l} \end{aligned} \quad (3-4)$$

$r = R$  时,  $\tau = \tau_w$ ,

$$\therefore \tau_w = \frac{R\Delta p}{2l} \quad (3-5)$$

$$\therefore \frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{R} \quad (3-6)$$

$$\therefore dr = \frac{R}{\tau_w} d\tau$$

这样,(3-3)可写为:

$$u = \frac{R}{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} f(\tau)d\tau \quad (3-7)$$

流量  $Q$  为:

$$Q = \int_0^R 2\pi r \cdot u dr$$

分部积分并应用边界条件  $u(R) = 0$ , 得

$$Q = -\int_0^R \pi r^2 \cdot \frac{du}{dr} \cdot dr$$

$$\therefore Q = \int_0^R \pi r^2 \cdot f(\tau)dr$$

结合(3-6)得:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_w^2} \int_0^{\tau_w} f(\tau) \cdot \tau^2 d\tau \quad (3-8)$$

如第三章所述，作定常运动的血液，可以看作 Casson 流体即

$$\sqrt{\tau} = k \sqrt{\dot{\gamma}} + \sqrt{\tau_y} \quad (3-9)$$

$$\therefore f(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} (\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_y})^2, & \tau \geq \tau_y \\ 0, & \tau \leq \tau_y \end{cases} \quad (3-10)$$

这时，压差  $\Delta p$  必须超过某一致流值  $p_c$ ，血液才会运动。

$$p_c = \frac{2l\tau_y}{R} \quad (3-11)$$

当  $\Delta p > p_c$  时，整个流场分两部分：

1.  $\tau > \tau_y$ ，即  $r > r_c$

$$r_c = \frac{2l\tau_y}{\Delta p} \quad (3-12)$$

则由(3-7)(3-10)得

$$u = \frac{\Delta p}{4k^2 l} \left[ R^2 - r^2 - \frac{8}{3} r_c^2 (R^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}) + 2r_c(R - r) \right] \quad (3-13)$$

2.  $\tau < \tau_y$ ，即  $r < r_c$  时

$$u = \frac{\Delta p}{4k^2 l} (\sqrt{R} - \sqrt{r_c})^3 (\sqrt{R} + \frac{1}{3}\sqrt{r_c})$$

以(3-13)代入(3-8)得

$$Q = \frac{\pi R^4}{8k^2} \cdot \frac{\Delta p}{l} F(\xi) \quad (3-14)$$

$$F(\xi) = 1 - \frac{16}{7}\xi^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\xi - \frac{1}{21}\xi^{\frac{3}{2}}$$

这里：

$$\xi = \frac{p_c}{\Delta p} = \frac{2l\tau_y}{R\Delta p} \quad (3-15)$$

由此得表观粘度

$$\mu_c = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8Ql} = \frac{k^2}{F(\xi)} \quad (3-16)$$

因  $F(\xi) < 1$ , 故  $\tau_y$  使表观粘度增大了。

### § 3-2 双层流体运动模型

如 §2 所述, 血管内径小于 1mm 时, 红细胞向轴迁移而产生的边缘血浆层是不可忽略的。此时, 整个流动分核心区与边缘层两部分, 核心区是某种非牛顿流体, 而边缘层是牛顿流体。下面介绍两种模型。

#### 1. 核心区为 Casson 流体

设边缘层厚度为  $\Delta$ , 令

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\Delta}{R} \\ \zeta &= 1 - \delta \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

边缘层内流速分布服从泊肃叶律,

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu_p \cdot l} (R^2 - r^2)$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p r}{2\mu_p l}, \quad R \geq r \geq R\zeta$$

$\mu_p$  为血浆粘度。

在血浆层外缘,  $r = \zeta R$ , 剪应力为  $\tau_\zeta$

$$\tau_\zeta = \frac{\Delta p \cdot R\zeta}{2l} = \zeta\tau_w \quad (3-18)$$

应用(3-8)(3-10)可得压力-流量关系:

当  $\Delta p > \frac{p_c}{\zeta}$ , ( $\tau_y < \zeta \tau_w$ ) 时:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8l} \left[ \frac{1}{\mu_p} (1 - \zeta^4) + \frac{1}{R^2} \left( \zeta^4 - \frac{16}{7} \zeta^{\frac{7}{2}} \sqrt{\xi} + \frac{4}{3} \zeta^3 \xi - \frac{1}{21} \xi^4 \right) \right] \quad (3-19a)$$

当  $\Delta p < \frac{p_c}{\zeta}$  (即  $\zeta \tau_w < \tau_y < \tau_w$ ) 时,

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8l \mu_p} (1 - \zeta^4) \quad (3-19b)$$

相应的表观粘度公式为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_a} &= \frac{1}{\mu_p} (1 - \zeta^4) + \frac{1}{k^2} \left( \zeta^4 - \frac{16}{7} \zeta^{\frac{7}{2}} \sqrt{\xi} + \frac{4}{3} \zeta^3 \xi - \frac{1}{21} \xi^4 \right) \\ \mu_a &= \frac{\mu_p}{1 - \zeta^4} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \Delta p > \frac{p_c}{\zeta} \\ \Delta p < \frac{p_c}{\zeta} \end{array} \quad (3-20)$$

当  $\delta = \frac{\Delta}{R} \ll 1$ , 但又不可忽略时, 取一级近似可得:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8l \mu_c} \left\{ 1 + 4\delta \left[ \frac{\mu_c}{\mu_p} - \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{F(\xi)} \right] \right\} \quad (3-21)$$

这里  $\mu_c$  是 Casson 流体表观粘度, 由(3-16)算出。显然, 表观粘度  $\mu_a$  为:

$$\mu_a = \mu_c \left\{ 1 + 4\delta \left[ \frac{\mu_c}{\mu_p} - \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{F(\xi)} \right] \right\}^{-1} \quad (3-22)$$

可见, 当

$$\frac{\mu_c}{\mu_p} > \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{F(\xi)}$$

时,边缘血浆层的存在,使血液表观粘度下降,

$$\mu_a < \mu_c$$

因为血液的屈服应力很小,在  $\mu_c$  中已计及此影响,故(3-22)右端[ ]中的  $\tau_y$  可以忽略,这样得

$$\mu_a = \mu_c \left[ 1 + 4\delta \left( \frac{\mu_c}{\mu_p} - 1 \right) \right]^{-1} \quad (3-23)$$

因为  $\mu_c > \mu_p$ , 故  $\mu_a < \mu_c$ 。这表明,边缘血浆层的存在,也是 Fahraeus-Lindqvist 效应的原因之一。

## 2. 核心区是颗粒悬浮体

假设管心区是颗粒(红细胞)在牛顿流体(血浆)中的悬浮流体,而边缘层是均质的牛顿流体。悬浮流体的表观粘度用爱因斯坦公式给出

$$\frac{\mu_c(r)}{\mu_p} = \frac{1}{1 - \alpha\phi(r)} \quad (3-24)$$

但系数  $\alpha$  不是常数,而是红细胞体积浓度分布  $\phi(r)$  的函数,

$$\alpha = 0.076 \exp \left[ 2.49\phi + \frac{1170}{T} \exp(-1.69\phi) \right] \quad (3-25)$$

这里  $T$  是绝对温度(K)。

为简便,设

$$\phi(r) = \phi_c = \text{常数} \quad (3-26)$$

若整个截面上,平均体积浓度为  $\bar{\phi}$ ,

$$\bar{\phi} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\phi(r)dr \quad (3-27)$$

则  $\phi_c$  为

$$\phi_c = \zeta^2 \bar{\phi} \quad (3-28)$$

这时

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\mu_p}, & R \geq r \geq \zeta R \\ \frac{\tau}{\mu_s}, & \zeta R \geq r \geq 0 \end{cases} \quad (3-29)$$

应用(3-8)得压力-流量关系

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \mu_p l} (1 - \alpha \bar{\phi} \zeta^2) \quad (3-30)$$

表观粘度  $\mu_s$  为:

$$\mu_s = \frac{\mu_p}{1 - \alpha \bar{\phi} \zeta^2} \quad (3-31)$$

当  $R > 500 \mu\text{m}$  时,  $\mu_s$  与半径无关, 以  $\mu_{s0}$  表示, 则:

$$\frac{\mu_s}{\mu_{s0}} = \frac{1 - \alpha \bar{\phi}}{1 - \alpha \bar{\phi} \zeta^2} \quad (3-32)$$

$$\because \zeta < 1$$

$$\therefore \mu_s < \mu_{s0}$$

### 3. 边缘血浆层厚度

无论哪一种模型, 都有一个共同问题, 就是如何确定边缘血浆层厚度? 这是成败的关键。目前还没有可资应用的理论方法。Ware 等<sup>[24]</sup>根据大量实验数据, 提出下述经验关系。

$$\delta = \frac{\Delta}{R} = 0.00042 [Re_b]^{-0.644} [B_m]^{-0.8} \left[ \frac{H_F}{10} \right]^{-0.3} \quad (3-33)$$

这里:

$$Re_b = \frac{2\rho UR}{b^2} \quad (3-34a)$$

$$B_m = \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{R}{U} \quad (3-34b)$$

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (3-34c)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.0503 + 0.001850H_F - 0.00001265H_F^2 \\ &\quad + 0.00000165H_F^3 \quad (\text{dyn}^{\frac{1}{2}}/\text{cm}) \\ b &= 0.1244 + 0.001363H_F + 0.0000145H_F^2 \\ &\quad [\text{dyn}^{\frac{1}{2}}\text{sec}^{\frac{1}{2}}/\text{cm}] \end{aligned} \right\} (3-35)$$

$H_F$  为来流(贮存器中)血液的红细胞压积。

### § 3-3 微极性流体模型

血液是具有细胞结构的流体,其本构关系可用微连续介质理论来处理(见第三章 §6)。其中最简单的是线性微极性流体模型。

考察直圆管内微极性流体的运动,设流动是充分发展的定常层流,管壁是刚性的,取柱坐标,则动量方程为

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r \left[ \eta_0 \frac{du}{dr} + \eta_1(\omega - \Omega) \right] \right\} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (3-36)$$

动量矩方程为

$$\frac{d}{dr} \left[ \eta_2 \left( \frac{d\omega}{dr} + \frac{\omega}{r} \right) \right] - 2\eta_1(\omega - \Omega) = 0 \quad (3-37)$$

这里,  $\Omega = -\frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dr}$  是流场旋度,  $\omega$  是细胞旋转角速度。 $\eta_0$ 、

$\eta_1$ 、 $\eta_2$  是微极性流体的流变系数,为常数。其中  $\eta_2$  是剪切粘度,  $\eta_1$  是旋转粘度。

速度边界条件仍为无滑流,即

$$r = R: \quad u = 0 \quad (3-38)$$

细胞角速度边界条件的选取极为重要;现有两种取法:

$$(i) \quad r = R: \quad \omega = 0 \quad (3-39a)$$

$$(ii) \quad r = R: \quad \omega = \text{常数} (\neq 0)$$

$$\text{但:} \quad \frac{d\omega}{dr} = 0 \quad (3-40)$$

模型实验表明,红细胞与管壁接触时,仍然可具有一定的角速度,故 Ariman<sup>[25]</sup> 等认为用(3-40)更合理。

方程(3-36)(3-37)的一般解为

$$\left. \begin{aligned} u(r) &= -\frac{2\eta_1}{k(\eta_0 + \eta_1)} [C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)] \\ &\quad + \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0} C_3 \ln r + C_4 + \frac{r^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dp}{dx} \\ \omega(r) &= C_1 I_1(kr) + C_2 K_1(kr) + \frac{2\eta_0}{\eta_1 k^2} \cdot \frac{C_3}{r} \\ &\quad - \frac{r}{4\eta_0} \cdot \frac{dp}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

这里

$$k^2 = \frac{4\eta_0\eta_1}{\eta_2(\eta_0 + \eta_1)} \quad (3-42)$$

$I_0$ 、 $K_0$ ； $I_1$ 、 $K_1$  分别为一类和二类的零阶、一阶修正贝塞尔函数。 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  是积分常数,有待用边界条件确定。

因为  $r = 0$  时,  $K_0(kr)$ 、 $K_1(kr)$ 、 $\ln r$  均趋于无穷大,而  $r = 0$  处速度和颗粒角速度都是有限的,故  $C_2 = C_3 = 0$ 。进而用条件(3-38)(3-40)得:

$$u(\zeta) = u_c \left\{ 1 - \zeta^2 + \frac{2\eta_1}{\lambda(\eta_0 + \eta_1)} \left[ \frac{I_0(\lambda\zeta) - I_0(\lambda)}{\lambda I_0(\lambda) - I_1(\lambda)} \right] \right\} \quad (3-43)$$

$$\therefore \Omega(\zeta) = \frac{u_c}{R} \left[ \zeta - \frac{\eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \cdot \frac{I_1(\lambda\zeta)}{\lambda I_0(\lambda) - I_1(\lambda)} \right] \quad (3-44)$$

$$\omega(\zeta) = \frac{u_c}{R} \left[ \zeta - \frac{I_1(\lambda\zeta)}{\lambda I_0(\lambda) - I_1(\lambda)} \right] \quad (3-45)$$

这里,

$$\zeta = \frac{r}{R}, \quad \lambda = kR \quad (3-46)$$

$$u_c = \frac{R^2}{4\eta_0} \left( -\frac{dp}{dx} \right)$$



由(3-43)对  $r$  积分,可得压力-流量关系

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left[ 1 - \frac{2\eta_2}{\eta_0 R^2} \phi(\lambda) \right]$$

$$\phi(\lambda) = \frac{\frac{\lambda}{2} I_0(\lambda) - I_1(\lambda)}{\lambda I_0(\lambda) - I_1(\lambda)} \quad (3-47)$$

因而表观粘度  $\mu_a$  有如下关系:

$$\frac{1}{\mu_a} = \frac{1}{\eta_0} \left[ 1 - \frac{2\eta_2}{\eta_0 R^2} \phi(\lambda) \right] \quad (3-48)$$

Ariman 取  $\eta_0$  为血浆粘度,  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  如表 9-1 示,算出了管内血流速度分布、细胞旋转角速度分布,并与 Bugliarello 等人实验结果作了比较,典型结果如图 9-18 示。

表 9-1<sup>[25]</sup>  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  值 ( $R = 20\mu\text{m}$ )

$H$	5%	10%	20%	40%
$\eta_1(\text{cp})$	1.50	3.27	5.85	12.0
$\eta_2$ $\left( \frac{\text{gm} - \text{cm}}{\text{s}} \right)$	0.56	0.78	0.92	0.98

对于小管血流来说, Ariman 模型的根本弱点是: 它不能预计边缘血浆层的存在。但 Popel<sup>[26]</sup>、Petrov<sup>[27]</sup> 等认为,这是因为在 Ariman 模型中没有考虑颗粒(细胞)浓度分布的缘故。若引进颗粒质量浓度  $c$  作为一个附加变量,那么,微极性流体模型是有可能描述流动的双层结构的。

颗粒浓度分布满足扩散方程:

$$\rho D \frac{dc}{dr} = \left[ \alpha_1 \alpha_2 \rho D_p \left( -\frac{dp}{dx} \right) - \alpha_1 (\alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \frac{d\omega}{dr} \right] (\omega - \Omega) \quad (3-49)$$

由于颗粒扩散,动量矩方程(3-37)应改为

$$\frac{d}{dr} \left[ \eta_1 \left( \frac{d\omega}{dr} + \frac{\omega}{r} \right) - \alpha_3 \rho D_p \frac{dp}{dx} \right] - \eta_1 (\omega - \Omega) = 0 \quad (3-50)$$

这里  $D$  是颗粒扩散系数,  $D_p$  是压力梯度引起的颗粒离散系

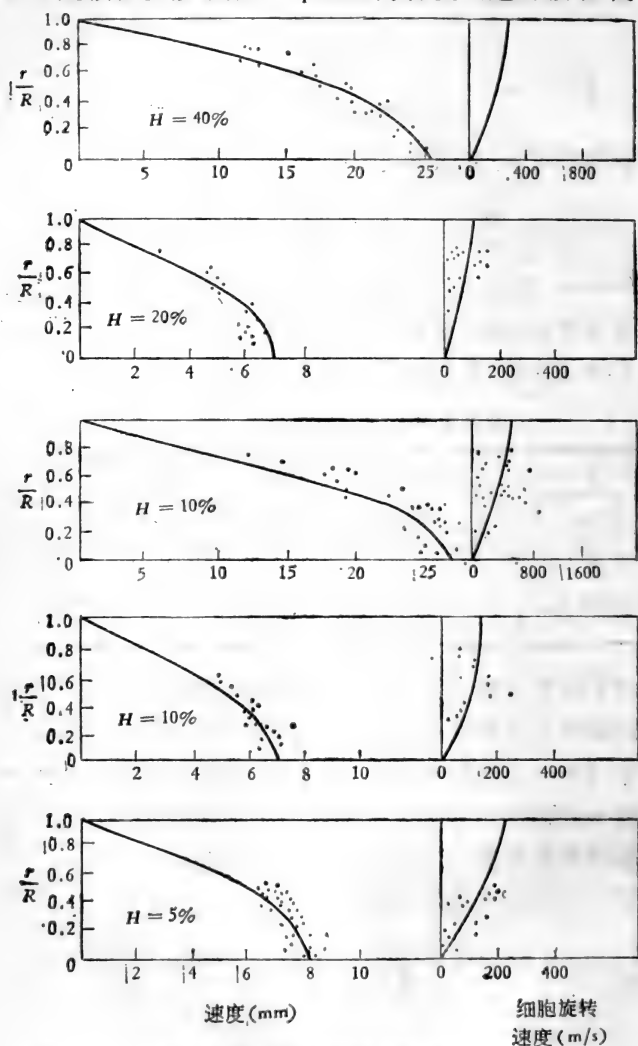


图 9-18 计算速度剖面、细胞角速度剖面与实验结果的比较<sup>[23]</sup>

数,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  都是物性常数。

若  $\alpha_3 = 0$ , 则 (3-36)(3-50) 可与 (3-49) 解耦, 所得之解即为(3-43)–(3-45), 结果仍无法描述边缘血浆层。

若  $\alpha_3 \neq 0$ , 则有可能预计边缘层的流动。为说明这一点, 可作如下定性分析。

$$\text{以 } C_0 = \frac{1}{R} \int_0^R c dr, \quad \frac{u_c}{R}, R \text{ 为参考量, 将(3-49)无}$$

量纲化, 得:

$$\frac{d\bar{c}}{d\zeta} = \left( a - b \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \right) (\bar{\omega} - \bar{Q}) \quad (3-51)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{D_p \alpha_1 \alpha_2 R^2 \left( \frac{dp}{dx} \right)^2}{4\eta_0 D C_0} > 0 \\ b &= \frac{R^2 \left( \frac{dp}{dx} \right)^2 \cdot \alpha_1 (\alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}{16\eta_0^2 \rho D C_0} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-52)$$

由(3-44)(3-45)可见,  $\zeta \geq 0$  时,  $\bar{\omega} \leq \bar{Q}$ 。而在接近于壁面时, 由于粘性效应,  $\omega$  减小, 故  $\frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} < 0$ ,

$$\therefore \left( a - b \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \right) > 0$$

因而(3-51)右端为负, 故接近于壁面时, 细胞浓度减小, 这说明边缘血浆层可能存在。

而在  $\frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} > 0$  的区域中, 又有两个亚区:

$$(1) \text{ 若 } a, b \text{ 的选取使得 } \left( a - b \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \right) > 0, \text{ 则 } \frac{d\bar{c}}{d\zeta} < 0,$$

即细胞向轴迁移。

(2) 当  $\left(a - b \frac{d\bar{c}}{d\zeta}\right) < 0$  时,  $\frac{d\bar{c}}{d\zeta} > 0$ , 红细胞向壁迁移;

(3) 当  $\left(a - b \frac{d\bar{c}}{d\zeta}\right) = 0$  时, 红细胞浓度达到极大值。

以上讨论说明, 用微极性流体作为血液流变模型来分析小管血流时, 只要计及细胞的浓度分布, 并选择适当的经验参数, 就有可能从理论上预计小血管流动的异常现象。但所涉及的经验常数太多了。

### § 3-4 低雷诺数定常进口流动

高雷诺数进口流动问题已讨论于第八章 §4。小动脉和小静脉流动雷诺数很低, 在  $10^{-2}$ —1 之间。作为近似, 假设血液是不可压牛顿流体, 且忽略惯性项, 则流动服从斯托克斯方程:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (3-53)$$

连续方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3-54)$$

边界条件为:

(i) 壁面无滑流:

$$r = R: \quad \mathbf{v} = 0 \quad (3-55)$$

(ii) 进口截面上流速均匀分布:

$$\left. \begin{aligned} x = 0: \quad \mathbf{v}(r) = \text{常数} \\ p = p_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-56)$$

(iii) 在远下游为泊肃叶流:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow \infty: \quad \mathbf{v}(r) = \mathbf{v}_\infty(r) \\ p = p_\infty \end{aligned} \right\} \quad (3-57)$$

$\mathbf{v}_\infty(r)$  为泊肃叶速度分布,  $p_\infty$  为泊肃叶流压力。

为解此方程组 Lew 和 Fung<sup>[28]</sup> 将速度场  $\mathbf{v}$  和压力场  $\phi$

分解为两部分

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_1 \\ p &= p_\infty + p_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-58)$$

因  $\mathbf{v}_\infty, p_\infty$  满足方程(3-53)(3-54), 故  $\mathbf{v}_1, p_1$  亦满足方程(3-53)(3-54)。不难看出, 只要  $\mathbf{v}_1$  可写成如下形式:

$$\mathbf{v}_1 = \nabla \times \nabla \times [\hat{\mathbf{e}}f(x, r)] \quad (3-59)$$

就可以满足方程(3-55)。这里  $f(x, r)$  是  $x, r$  的任意函数,  $\hat{\mathbf{e}}$  是坐标系的单位向量。因流动轴对称,  $f$  与  $\theta$  无关, 故在柱坐标系  $\{r, \theta, x\}$  中, (3-59) 可改写为

$$\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} - \hat{\mathbf{x}} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial f}{\partial r} \right] \quad (3-60)$$

即若  $\mathbf{v}_1 = \{v_1, u\}$ , 那么

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} \\ u_1 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial f}{\partial r} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{或} \quad v &= \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} \\ u &= u_0(r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

$u_0(r)$  是泊肃叶剖面:

$$u_0(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{dp}{dx} \quad (3-63)$$

为求  $f(x, r)$  和  $p(x)$ , 将(3-60)代入(3-53)得:

$$-\nabla \cdot \left( p_1 - \mu \nabla^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \hat{\mathbf{x}} \mu \nabla^4 f = 0 \quad (3-64)$$

它等价于:

$$p_1 = \mu \nabla^2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3-65)$$

$$\nabla^2 f = 0 \quad (3-66)$$

这样问题归结为怎样从 (3-66) 求满足于边界条件(3-55)、(3-56)的解。

方程(3-66)的一般解为

$$\begin{aligned} f(x, r) = & \left( A + B\lambda \frac{x}{R} \right) e^{-\lambda \frac{x}{R}} \cdot J_0 \left( \lambda \frac{r}{R} \right) \\ & + \left[ C \cos \left( \eta \frac{x}{R} \right) + D \sin \left( \eta \frac{x}{R} \right) \right] \\ & \times \left[ I_0 \left( \eta \frac{r}{R} \right) + E \frac{r}{R} I_1 \left( \eta \frac{r}{R} \right) \right] \quad (3-67) \end{aligned}$$

这里  $A, B, C, D, E, \lambda$  和  $\eta$  是任意常数,  $J_0$  是零阶第一类贝塞尔函数,  $I_0, I_1$  是零阶和一阶修正的第一类贝塞尔函数。

因为方程组和边界条件都是线性的,故解(3-67)叠加即可得满足边界条件的解。Lew 和 Fung 取

$$\begin{aligned} f(x, r) = & R^2 U \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \left( 1 + k_n \frac{x}{R} \right) e^{-k_n \frac{x}{R}} \cdot J_0 \left( k_n \frac{r}{R} \right) \right. \\ & + \int_0^{\infty} C_n(\eta) \cos \left( \eta \frac{x}{R} \right) \left[ I_0 \left( \eta \frac{r}{R} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{I_0(\eta)}{\frac{2}{\eta} I_0(\eta) + I_1(\eta)} \cdot \frac{r}{R} I_1 \left( \eta \frac{r}{R} \right) \right] d\eta \right\} \quad (3-68) \end{aligned}$$

这里  $J_0(k_n) = 0$ ,  $A_n$  和  $C_n$  是待定的常数,  $U$  是平均速度。

由(3-68)即可按(3-65)确定  $p'$ , 并用(3-62)(3-58)确定整个速度场和压力场。定义进口长度  $L_{in}$ , 当  $x = L_{in}$  时,  $u(x, r)$  与泊肃叶流剖面  $u_{\infty}(r)$  的差异小于 1%。用上面方法算出的进口长度为

$$L_{in} = 1.3R \quad (3-69)$$

$Re \sim 1$  时, 惯性效应不能完全忽略, Lew 和 Fung<sup>[29]</sup> 从

Oseen 方程出发作了修正。设流量为  $Q$ , 引进平均速度  $U$

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (3-70)$$

计及流动惯性, 运动方程(3-53)改写为:

$$\rho U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3-71)$$

连续方程、边界条件仍由(3-54)–(3-57)给出。求解方法亦与上面一样, 将(3-60)代入(3-71)得:

$$\begin{aligned} -\nabla \left[ p' - \mu \left( \nabla^2 - \frac{Re}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ - \hat{x} \mu \left( \nabla^2 - \frac{Re}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 f = 0 \end{aligned} \quad (3-72)$$

这里

$$Re = \frac{\rho R U}{\mu}$$

如果下列条件满足, 则方程(3-72)成立:

$$p' = \mu \left( \nabla^2 - \frac{Re}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3-73)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{Re}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 f = 0 \quad (3-74)$$

满足方程(3-74)的解为:

$$\begin{aligned} f(x, r) = R^2 U \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left[ \frac{1}{g_n} e^{-g_n \frac{x}{R}} - \frac{2}{\sqrt{4g_n^2 + Re^2} - Re} \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-(\sqrt{4g_n^2 + Re^2} - Re) \frac{x}{2R}} \right] \cdot \frac{J_0 \left( g_n \frac{r}{R} \right)}{J_1(g_n)} + B_n \left[ e^{-g_n \frac{x}{R}} \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-(\sqrt{4g_n^2 + Re^2} - Re) \frac{x}{2R}} \right] \frac{J_0 \left( g_n \frac{r}{R} \right)}{g_n^2 J_0(g_n)} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \cos \left( \eta \frac{x}{R} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ C_n(\eta) \frac{I_0\left(\eta \frac{r}{R}\right)}{I_0(\eta)} + E_n(\eta) I_0\left(\xi \eta \frac{r}{R}\right) \right]_{\star} + F_n(\eta) I_0 \\
& \times \left( \xi \eta \frac{r}{R} \right) \Big|_{\text{虚}} \Big] d\eta + \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \sin\left(\eta \frac{x}{R}\right) \left[ D_n(\eta) \frac{I_0\left(\eta \frac{r}{R}\right)}{I_1(\eta)} \right. \\
& \left. - E_n(\eta) I_0\left(\xi \eta \frac{r}{R}\right) \Big|_{\text{虚}} + F_n(\eta) I_0\left(\xi \eta \frac{r}{R}\right) \Big|_{\star} \right] d\eta \Big\} \quad (3-75)
\end{aligned}$$

这里  $I_0|_{\star}$   $I_0|_{\text{虚}}$  分别表示  $I_0$  的实部和虚部,

$$\left. \begin{aligned}
\xi &= \left(1 + \frac{Re^2}{\eta^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\
\alpha &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{Re}{\eta}
\end{aligned} \right\} \quad (3-76)$$

常数由边界条件确定。由此可得速度场和压力场。这样算出的  $L_{in}$  是  $Re$  的函数, 见图 9-19, 可见,  $Re \rightarrow \infty$  时,  $L_{in} = 0.16Re \cdot R$ ;  $Re \rightarrow 0$  时,  $L_{in} = 1.3R$ 。

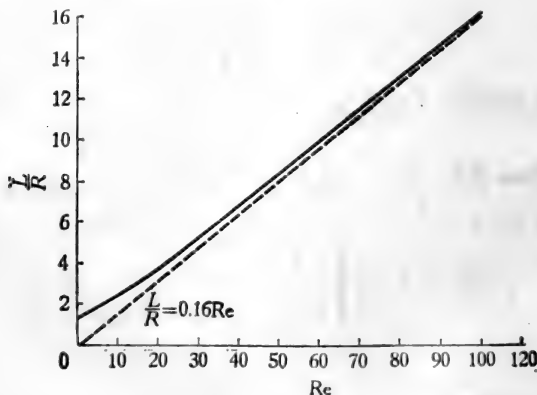


图 9-19 进口长度  $L_{in}$  与  $Re$  的关系<sup>[29]</sup>



## § 4 毛细血管内的血液流动

为认识毛细血流的规律，首先分析一根毛细血管内的血液运动。

毛细血管是埋置在组织机体中的、几何形状很复杂的管道。管径约  $3-15\mu\text{m}$ ，管长约  $0.1-1\text{mm}$ ，由于周围组织的约束，管壁近于刚性。流动雷诺数约为  $10^{-3}$ ，惯性作用微不足道，因此，可取刚性直圆管，或圆截面锥形管为毛细血管的模型。

血液通过毛细血管壁和周围组织进行物质交换，而且内部有化学反应。但是，一方面气体扩散、血红蛋白的氧化、还原反应都进行得很快，所需时间远小于流动特征时间；另一方面，正常生理条件下，流出血管壁的流体滤失量和从组织再吸收的流体量，大体上是平衡的，与毛细血管内的流量相比，净滤失(或再吸收)流量是个高阶小量。所以，作为近似，毛细血流可当作热力学平衡系统，或准平衡系统来处理。

此外，测量表明，流体通过毛细管壁的渗漏速度，约比血浆流动速度小 3 个量级。因而，在分析毛细血流的压力-流量关系、流动阻力等问题时，可以认为管内血流量不变，即不计通过壁面的流体交换，壁面无滑流条件依然适用。

作了这些简化后，毛细血流的力学问题是：求刚性壁直圆管(或锥形管)内，大变形充液薄壳结构(红细胞)和牛顿粘性流体(血浆)耦合运动的规律。即令红细胞的流变特性已经确知，定解系统也是高度非线性的。求其分析解固然极其困难，数值计算也还有许多问题有待解决。何况，红细胞的流变性质本身还是一个正在研究中的课题。

另一方面，实验研究也很困难。在体测量由于尺度太小，

限于测量技术,不易获得可靠的定量结果;而离体模型实验,则不易准确地模拟真实情况。

有鉴于此,用简单的模型、对毛细血流特性作实验、分析,对于认识微循环规律来说,是极其必要的。

### § 4-1 毛细血流模型实验

模型实验为分析毛细血流提供了必不可少的直观信息。Lee 和 Fung<sup>[30]</sup> 用橡皮按测得自然的红细胞形状做成模型红细胞(直径为  $4.29 \pm 0.05\text{cm}$ , 体积约  $16.5\text{cm}^3$ , 膜厚约  $0.042 \pm 0.01\text{cm}$ ), 内充硅橡胶液,并以硅橡胶液(比重 0.97,  $\mu = 295\text{P}$ )模拟血浆,观察了模型毛细血流的特色。实验雷诺数在  $4 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-2}$  之间。图 9-20 (a) 是管径 ( $D_t$ ) 小于红细胞

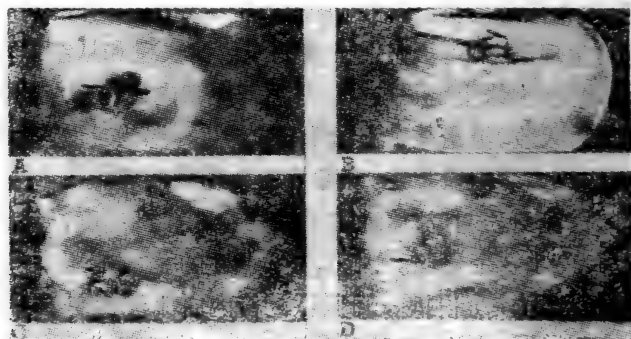


图 9-20  $\frac{D_c}{D_t} > 1$  时红细胞的变形和运动<sup>[30]</sup>

直径( $D_c$ )时,模型红细胞通过细管的情况。可见: (i) 当  $\frac{D_c}{D_t} \geq$

1 时,膜严重失稳,前缘鼓出,后缘凹陷; (ii) 毛细血管里变形后的红细胞呈拖鞋形,它不是轴对称的; (iii) 当  $D_c$  接近或大于  $D_t$  时,红细胞总是侧着进入管子的,即红细胞主轴平行于管轴。

实验还表明,红细胞与周围的血浆之间存在相对运动。设红细胞速度为  $V$ , 血流(整体)平均流速为  $U$ , 则据测量有:

$$V = k(U - b)$$

$k, b$  是常数, 随  $\frac{D_c}{D_i}$  而异, 例如  $\frac{D_c}{D_i} = 1.69$  时,  $k = 1, b = 0$ , 即

$V = U$ ; 而  $\frac{D_c}{D_i} = 0.98$  时,  $k = 1.26, b = 0.015$ 。若取固联于

红细胞的参考系, 则周围血浆的流动图案如图 9-21 示。显然, 相对于红细胞, 血浆作环流, 这种流动称团流(bolus flow)。注意, 只有当坐标系固联于红细胞时, 这种环流才存在; 若坐标系固联于管壁, 那么环流是不存在的。

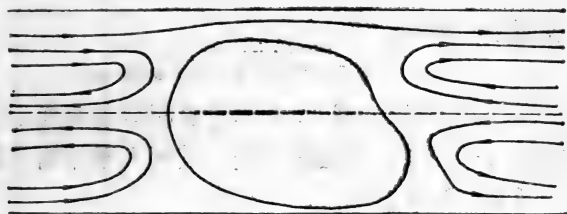


图 9-21 取参考系固联于红细胞时, 周围血浆的流动

#### § 4-2 刚性颗粒模型

在直径一定的毛细血管内, 只要流动定常, 流量一定, 那么, 每个红细胞的形状大体相同, 且在流动中无多大改变。故其绕流特性和刚性颗粒绕流有相似之处。另一方面, 红细胞比重约 1.10, 血浆比重约 1.03, 浮力作用可以忽略不计。因此, 具有适当外形的、浮力中性的刚性颗粒, 可作为红细胞的最简模型。通常设模型颗粒为旋成体。

鉴于毛细血流雷诺数很低 ( $10^{-2} - 10^{-4}$ ), 惯性效应可忽略; 血浆又是牛顿流体, 故把毛细血流看作刚性颗粒-牛顿流体两相系统时, 血浆运动服从斯托克斯方程。

取柱坐标  $\{r, \theta, x\}$ , 因流动轴对称, 速度场为  $\{v, 0, u\}$ , 故斯托克斯方程可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

连续方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (4-2)$$

管壁边界条件:

$$r = R; \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (4-3)$$

颗粒表面边界条件:

$$(x, r) \in F(x, r), \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (4-4)$$

这里  $F(x, r)$  是颗粒型线,  $\mathbf{w}$  是颗粒表面运动速度。

方程(4-1)–(4-4)是线性的, 其解可看作两个基本解的叠加。通常有两种方法:

(1) 类似于 §§3-4 中分析进口流动的方法, 将流场看作泊肃叶流和颗粒扰动流的迭加, 设:

$$\left. \begin{aligned} p(x, r) &= \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot x + p_1(x, r) & \frac{\partial p_0}{\partial x} &= \text{常数} \\ \mathbf{v}(x, r) &= \mathbf{v}_0(r) + \mathbf{v}_1(x, r), \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

代入(4-1)得:

$$-\nabla^2 p_0 + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_0 = 0 \quad (4-6)$$

$$-\nabla^2 p_1 + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_1 = 0 \quad (4-7)$$

$\mathbf{v}_0$  为泊肃叶流,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} \left( C - \frac{r^2}{R^2} \right), & C &= \text{常数} \\ v_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

这样问题变为如何在适当边界条件下, 解方程(4-7)。

(2) 将流场看作无界流体绕颗粒的流动, 与圆管内无流体排出条件下, 颗粒运动引起的扰动流场相叠加。

近十年来, Lew 和 Fung<sup>[31]</sup>、Skalak<sup>[32]</sup>、Skalak 和 Wang<sup>[33]</sup>、Bugliarello 和 Hsiao<sup>[34]</sup> 等, 以圆柱、球、旋转椭球、圆盘、半球、双凹碟形旋成体等为模型, 用解析方法、数值分法, 在正常生理条件下, 作了大量分析、计算。表 9-2 列出部分计算结果。

表 9-2<sup>[32]</sup>  $\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu}$ ,  $\frac{V}{U}$  的计算结果

颗粒形状	$\gamma = \frac{\Delta}{2R}$	$\lambda = \frac{a}{R}$	$\beta = \frac{l}{R}$	$\mu_r$ (差分法)	$\mu_r$ (有限元法)	$V/U$ (差分法)	$V/U$ (有限元)
球形	1.0	0.70	2.0	1.196	1.196	1.414	1.416
	1.0	0.8	2.0	1.455	1.455	1.274	1.272
	1.0	0.9	2.0	2.201	2.201	1.132	1.136
	1.0	0.93	2.0	2.611	2.813	1.092	1.092
	1.0	0.95	2.0	3.259	3.485	1.066	1.068
	1.0	0.98	2.0	5.878	6.207	1.026	1.029
	1.0	0.99	2.0	9.013	9.274	1.103	1.019
旋转 椭球	0.553	0.60	2.0	1.059	1.065	1.588	1.552
	0.250	0.90	2.0	1.268	1.583	1.132	1.158
	1.537	0.60	3.0	1.076	1.077	1.550	1.548
	2.0	0.90	6.0	1.714	1.795	1.132	1.136
半球	0.494	0.722	4.722	—	1.074	1.388	1.387
	0.494	0.799	4.799	1.124	1.136	—	1.279
	0.495	0.875	4.875	1.237	1.272	—	1.171
	0.495	0.959	4.950	1.669	1.804	—	1.060
半球壳	0.243	0.958	4.466	1.441	1.463	—	1.070
	0.274	0.984	4.538	1.716	1.831	1.037	1.028
	0.230	0.874	4.300	1.189	1.222	—	1.192
圆盘	0.50	0.5	4.0	1.033	1.026	1.620	1.625
	0.50	0.5	4.0	1.066	1.060	1.500	1.495

表中  $V$  为颗粒质心运动速度,  $U$  为整个流动的平均速度,  $\mu_a$  为

系统表观粒度,  $\mu$  为血浆粘度。  $\Delta$  为颗粒最大厚度(长度),  $a$  为颗粒最大旋转半径,  $l$  是颗粒质心间距,  $R$  为管半径。

下面分别讨论红细胞之间血浆的运动、红细胞运动以及毛细血压降等问题。

### 1. 红细胞之间的血浆运动

为简单起见,以刚性小圆柱为红细胞模型,其半径等于管半径,相邻两小圆柱端面间距为  $2b$ ,颗粒运动速度为  $V$ 。取随颗粒运动的柱坐标系,原点位于颗粒间隔的中点,血浆运动服从方程(4-1)(4-2),但边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} u(x, r)|_{r=R} &= -V, & -b \leq x \leq b \\ v(x, r)|_{r=R} &= 0, & -b \leq x \leq b \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, r)|_{x=\pm b} &= 0, & 0 \leq r \leq R \\ v(x, r)|_{x=\pm b} &= 0, & 0 \leq r \leq R \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

应用(4-5)(4-8),并取

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= -8\mu \frac{V}{R^2} \\ C &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

问题归结为解方程(4-7)(4-2)求  $v_1$ , 其边值为:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, r)|_{r=R} &= 0, & -b \leq x \leq b \\ v_1(x, r)|_{r=R} &= 0, & -b \leq x \leq b \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, r)|_{r=\pm b} &= -U \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], & 0 \leq r \leq R \\ v_1(x, r)|_{r=\pm b} &= 0, & 0 \leq r \leq R \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

类似于 §3-4 中进口流动的分析,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right] \\ v_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

代入(4-7)得:

$$-\nabla p_1 + \mu \left( \hat{r} \nabla^2 \frac{\partial f}{\partial x} - \hat{x} \nabla^2 f \right) = 0 \quad (4-15)$$

$$\therefore p_1 = \mu \nabla^2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4-16)$$

$$\nabla^2 f = 0 \quad (4-17)$$

方程(4-17)的满足条件(4-12a)和(4-13b)的解为:

$$\begin{aligned} f(x, r) = R^2 V \sum_{n=1}^{\infty} A_n & \left\{ -[1 + \alpha k_n \operatorname{cth}(\alpha k_n)] \frac{\operatorname{ch} \left[ k_n \cdot \frac{x}{R} \right]}{\operatorname{ch}(k_n \alpha)} \right. \\ & + k_n \cdot \frac{x}{R} \frac{\operatorname{sh} \left[ k_n \cdot \frac{x}{R} \right]}{\operatorname{ch}(k_n \alpha)} \left. \right\} \frac{J_0 \left[ k_n \cdot \frac{r}{R} \right]}{k_n^2 J_1(k_n)} \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \left( \frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{x}{R} \right) \left\{ \frac{I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R} \right)}{\left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)} \right. \\ & \left. - \frac{\frac{r}{R} \cdot I_1 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R} \right)}{\frac{m\pi}{\alpha} \left[ 2I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right) + \frac{m\pi}{\alpha} I_1 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right) \right]} \right\} \end{aligned} \quad (4-18)$$

这里  $A_n, B_{nm}$  是常数, 应由边界条件(4-12b)(4-13a)确定,  $J_0(k_n) = 0$ ,  $J_i, I_i$  为  $i$  阶第一类贝塞尔函数和修正贝塞尔函数。

$$\alpha = \frac{b}{R} \quad (4-19)$$

代入(4-14)得:

$$\frac{u_1}{V} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ -(1 + \alpha k_n \operatorname{cth}(\alpha k_n)) \frac{\operatorname{ch} \left( k_n \cdot \frac{x}{R} \right)}{\operatorname{ch}(k_n \alpha)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + k_n \frac{x}{R} \frac{\operatorname{sh}\left(k_n \cdot \frac{x}{R}\right)}{\operatorname{ch}(k_n \alpha)} \left] \frac{J_0\left(k_n \cdot \frac{r}{R}\right)}{J_1(k_n)} \right. \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{x}{R}\right) \left[ \frac{I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{2I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R}\right) + \frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R} I_1\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R}\right)}{2I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right) + \frac{m\pi}{\alpha} I_1\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)} \right] \right\} \quad (4-20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v_1}{V} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \right. & \left. \left[ \frac{\operatorname{sh}\left(k_n \cdot \frac{r}{R}\right)}{\alpha k_n \operatorname{cth}(\alpha k_n) \operatorname{ch}(k_n \alpha)} \right. \right. \\
& - k_n \cdot \frac{x}{R} \frac{\operatorname{ch}\left(k_n \cdot \frac{x}{R}\right)}{\operatorname{ch}(k_n \alpha)} \left. \right] \frac{J_1\left(k_n \cdot \frac{r}{R}\right)}{J_1(k_n)} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{x}{R}\right) \left[ \frac{I_1\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\frac{m\pi}{\alpha} \frac{r}{R} I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{r}{R}\right)}{2I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right) + \frac{m\pi}{\alpha} I_1\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)} \right] \right\} \quad (4-21)
\end{aligned}$$

$B_{nm}$  由边界条件(4-12b)确定:

$$B_{nm} = -\frac{4}{\alpha} \cdot \frac{k_n^2 \operatorname{th}(\alpha k_n)}{\left[ k_n^2 + \left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^2 \right]^2}$$



$$\frac{\frac{m\pi}{\alpha} \cdot \cos m\pi}{I_1\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right) - \frac{\frac{m\pi}{\alpha} \cdot I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)}{I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right) - 2I_0\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right) + \frac{m\pi}{\alpha} \cdot I_1\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)}} \quad (4-22)$$

$A_n$  由边界条件(4-13a)确定, 由于  $A_n$  不是正交级数的系数, 不能用简单方法决定。Lew 和 Fung 用配位法, 通过数值计算而求出。

根据已知的  $f$ , 可从方程(4-16)确定  $p_1$ , 沿截面取平均得  $\langle p_1 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{\langle p_1 \rangle}{\mu \left( \frac{V}{R} \right)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \frac{\operatorname{sh} \left( k_n \cdot \frac{x}{R} \right)}{\operatorname{ch} (k_n \alpha)} \right. \\ &\quad - \frac{4}{\alpha} k_n^2 \operatorname{th} (\alpha k_n) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{\alpha} \cos (m\pi)}{\left[ k_n^2 + \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 \right]^2} \\ &\quad \left. \frac{I_1 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)}{2I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right) + \frac{m\pi}{\alpha} I_1 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)} \right\} \cdot \sin \left( \frac{m\pi}{\alpha} \cdot \frac{x}{R} \right) \\ &\quad \frac{I_1 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right) - \frac{\frac{m\pi}{\alpha} I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)}{I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right) - 2I_0 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right) + \frac{m\pi}{\alpha} I_1 \left( \frac{m\pi}{\alpha} \right)}} \end{aligned} \quad (4-23)$$

图 9-22 是  $\alpha = 0.25$  和  $\alpha = 1$  时, 不同截面上的  $\frac{u}{V}$ 、 $\frac{v}{V}$

分布。可见当  $\alpha = \frac{b}{R} = 1$  时，在两颗粒端面间距的中间截面上，流速分布近乎为泊肃叶剖面。当红细胞间距小于管直径时，相邻红细胞之间的相互作用对流场有显著影响；当红细胞间距大于管直径 ( $\beta > 2$ ) 时，相邻红细胞之间的相互作用可以忽略不计。

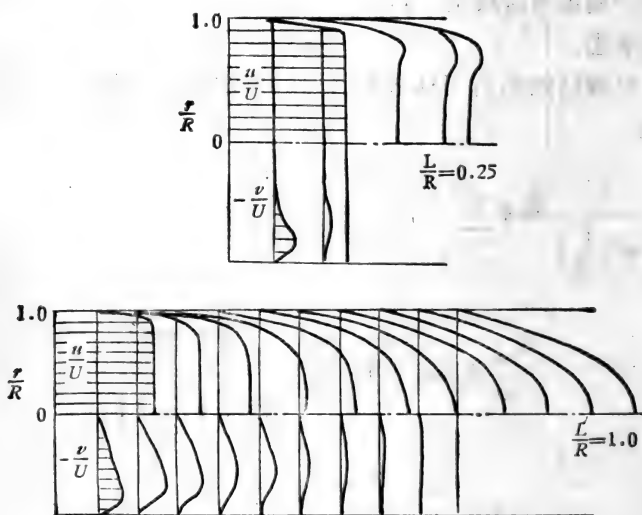


图 9-22 颗粒间血浆运动速度分布<sup>[29]</sup>

(a)  $\frac{b}{R} = 0.25$ , (b)  $\frac{b}{R} = 1.0$ 。

图 9-23 是颗粒间血浆运动的流线。可见，所谓血浆团流，是相对于红细胞而言，它只说明血浆与红细胞之间存在相对运动。对于静止参数系而言，红细胞的运动只是使流线偏转。实际上不存在什么团流。因而讨论这种团流对传质过程的影响可能意义不大。

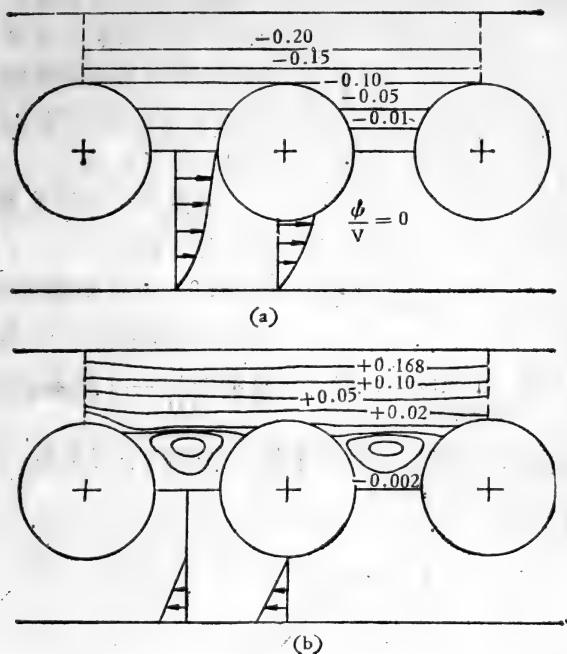


图 9-23 球形颗粒间血浆运动的流线<sup>[21]</sup>  
 (a) 相对于血管壁, (b) 相对于红细胞。

## 2. 红细胞运动速度

Skalak 等<sup>[32]</sup>用有限元法分析了双凹碟形颗粒、旋转椭球、叠合圆盘(模拟红细胞串)等通过微管时的情况。设总的机械能消耗率为  $D_m$ , 则

$$D_m = \Phi + W_e - W_g - W_r - W_p - W_\sigma \quad (4-24)$$

$\Phi$  是流体粘性引起的机械能消耗率,  $W_e$  是红细胞应变能密度,  $W_g$  是重力位能,  $W_r$  是表面应力所作之功,  $W_p$  是压力所作之功,  $W_\sigma$  是表面张力所作之功。要求系统能耗最小, 即:

$$\delta D_m = 0 \quad (4-25)$$

将所考虑的区域分成许多小元素，以每个元素的角点及每边中点为节点，在其上，压力、速度以该点坐标的多项式表示，使满足条件(4-25)，从而得整个流场的解。

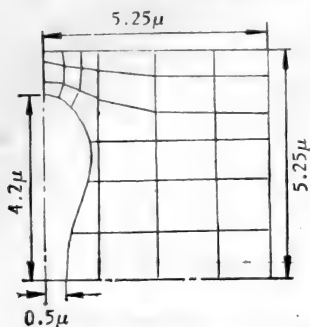


图 9-24 双凹碟形颗粒的有限元素取法

因模型红细胞是刚性的，且浮力中性，故  $W_g = W_o = W_e = 0$ 。以双凹碟形颗粒为例，取元素如图 9-24 所示。算出来的  $\frac{V}{U} - \lambda$  关系见图 9-25。

这里  $V$  是颗粒速度， $U$  是整个悬浮系统的平均流速。显然， $\frac{V}{U}$  与  $\beta$  的关系不很大。

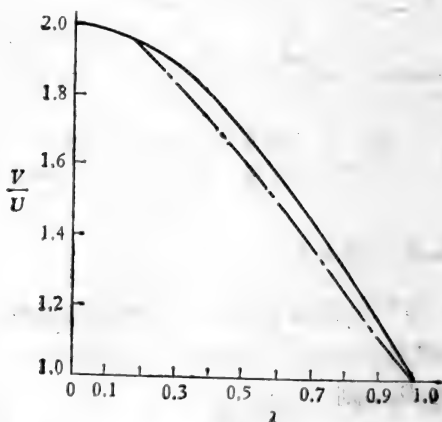


图 9-25 双凹碟形颗粒速度与  $\lambda$  的关系<sup>[33]</sup>

对细胞串(以叠合圆盘为模型)，有

$$\frac{V}{U} = \frac{2}{1 + \lambda^2} \quad (4-26)$$

可见  $\lambda = \frac{a}{R} < 1$  时,  $\frac{V}{U} > 1$ 。即当红细胞直径小于血管管径时, 红细胞运动的速度高于血流平均速度, 当然也高于血浆运动速度。  $\lambda = \frac{a}{R} = 1$  时, 对红细胞串来讲,  $V = U$ , 即此时红细胞和其间的血浆一起, 象刚性塞子一样运动。对于刚性颗粒来说,  $\lambda > 1$  是没有意义的。

### 3. 流动压降

若把红细胞看作刚性颗粒, 则毛细血流阻力产生于: (i) 血管壁的摩擦阻力; (ii) 血浆绕单个颗粒流动(相对运动)的阻力; (iii) 颗粒之间的相互作用。

当颗粒间距大于管直径, 即  $\beta \geq 2$  时, 颗粒间的相互作用可以不计, 此时:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{8\mu_0 U}{R^2} + n\Delta p^* \quad (4-27)$$

$\mu_0$  是血浆粘度,  $n$  是单位长度管段内红细胞的数目,  $\Delta p^*$  是孤立红细胞引起的压降。  $-\frac{\partial p}{\partial x}$  与颗粒排列的方式无关 (只要  $\beta > 2$ )。

$n$  与管内红细胞比积  $H$  有关,

$$n = \frac{H \cdot \pi R^2}{Vol_c} \quad (4-28)$$

$Vol_c$  是红细胞体积。引进孤立红细胞的压降系数:

$$f = \frac{\Delta p^* R}{2\mu_0 U} \quad (4-29)$$

$$\therefore -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{8\mu_0 U}{R^2} + \frac{\pi H R^2}{Vol_c} \cdot \frac{2\mu_0 U}{R} \cdot f \quad (4-30)$$

故相对粘度为:

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0} = 1 + \frac{\pi H}{4} \cdot \frac{R^3}{Vol_c} \cdot f \quad (4-31)$$

对于刚性颗粒,  $\Delta p^*$  取决于  $a, R, U, \mu_0$  及颗粒形状, 故

$$f = \frac{\Delta p^* R}{2\mu_0 U} = f(\lambda, Re_p, \text{形状}), \quad Re_p = \frac{\rho U R}{\mu_0} \quad (4-32)$$

当  $\beta < 2$ , 即颗粒间距小于管直径时, 由于颗粒间的相互作用, 若  $-\frac{\partial p}{\partial x}$  仍用 (4-27) 表示, 则  $\Delta p^*$  应代表每个红细胞引起的平均压降。这样, (4-29)–(4-31) 依然成立, 但

$$f = f(\lambda, \beta, Re_p, \text{形状}) \quad (4-33)$$

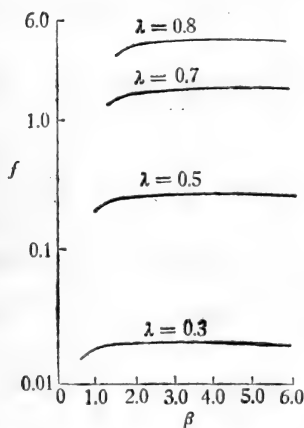


图 9-26 椭球颗粒  $f$  与  $\beta, \lambda$  的关系<sup>[32]</sup>

图 9-26 是旋转椭球颗粒的  $f$  与  $\lambda, \beta$  的关系。因雷诺数很小, 其影响可不计。可见, 由于颗粒间的相互作用, 每个颗粒引起的压降减小。这就是同样  $H$  值下, 红细胞成串时, 毛细血流表观粘度下降的原因之一。图 9-27 是 Skalak 等<sup>[33]</sup> 用刚性叠合圆盘模拟红细胞串算出的相对粘度。可见, 同样条件下, 组成串的红细胞个数愈多,  $\mu_r$  愈小。这是因为血浆与红细胞之间相对运动损失减小之故。但

当成串的细胞数大于 5 时, 这种趋势消失。

对实际红细胞来说,  $\Delta p^*$  还和细胞膜的弹性有关, 设弹性模量为  $E_c$ , 忽略雷诺数影响, 则

$$f = f\left(\frac{D_i}{D_c}, \frac{\mu_0 U}{E_c D_i}, H\right) \quad (4-34)$$

这里  $D_i$  是管直径,  $D_c$  是自然状态下红细胞的直径,  $\beta$  吸收在

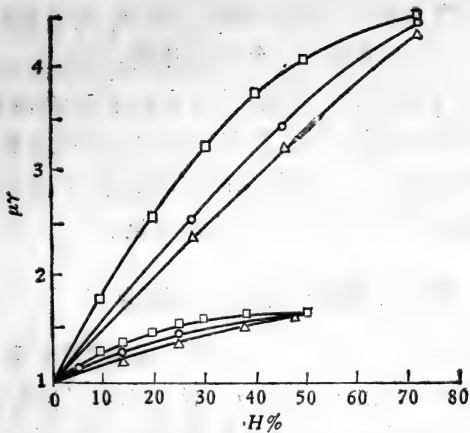


图 9-27 红细胞成串对于  $\mu_r$  的影响<sup>[33]</sup>

红细胞比积  $H$  内。图 9-28 是  $H = 40\%$  时，测得的相对粘度  $\mu_r$  与  $\frac{D_t}{D_c}$ 、 $\frac{\mu_0 U}{E_c D_t}$  的关系。可见当  $\frac{D_t}{D_c} \sim 1$  时，血流表观粘度随

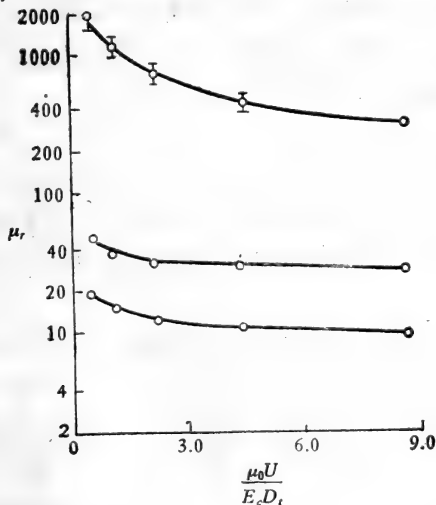


图 9-28 毛细血流  $\mu_r$  与  $\frac{D_t}{D_c}$ 、 $\frac{\mu_0 U}{E_c D_t}$  的关系,  $H = 40\%$ <sup>[33]</sup>

管径减小而激剧增大, Fahreaus-Lindqvist 效应逆转。

综言之,以刚性颗粒为红细胞模型。对于认识毛细血中红细胞的运动、估计红细胞(几何形状不变)绕流阻力以及红细胞之间的相互作用来说,是有意义的。但未计红细胞弹性,没考虑红细胞变形及红细胞和血浆间的水力-弹性效应,因而对于红细胞与管壁相互作用的估计不足。

### § 4-3 可变形颗粒模型与润滑理论

用于毛细血流分析的红细胞可变形颗粒模型大致有两类,一类忽略红细胞的弯曲抗力,认为它可以自由地变形,但计及膜张力的影响。Skalak 等<sup>[36]</sup>的液滴模型、Barnard 等<sup>[37]</sup>的柔性薄片模型、Lin 等<sup>[38]</sup>的柔性囊包模型以及 Gupta 的分析等,均属此类。然而,在毛细血流中,正是红细胞前、后缘压差,导致红细胞大变形,因而忽略红细胞的弯曲刚度是不合理的。可取之处是可以从理论上确定红细胞变形。另一类模型考虑了细胞的弯曲抗力及水力-弹性效应。Lighthill<sup>[40]</sup>的润滑理论即为此例。这里主要介绍润滑理论。

#### 1. 血浆层润滑原理

红细胞或红细胞串通过毛细血管时,发生大变形,靠近壁面的地方,有一层薄薄的水浆,相当于润滑膜。润滑原理如图 9-29 示。

取固联于红细胞的参考系,则毛细血管壁以速度  $-V$  运动。若整个间隙血浆层内流速呈线性分布,如图 9-29(a) 示,则截面 1 和截面 2 体积流量不相等,这违背质量守恒定律。若截面 1 上速度分布是线性的,则在截面 2 上,由于间隙变小,按连续性要求,速度剖面是非线性的,中间向外鼓出,如图中(b) 示。此时壁面附近速度剖面斜率为负。因此,此处壁面剪应



力不仅不起阻碍作用,反而推动红细胞向前运动,从而减小整个流动的阻力,此即间隙血浆层的润滑作用。

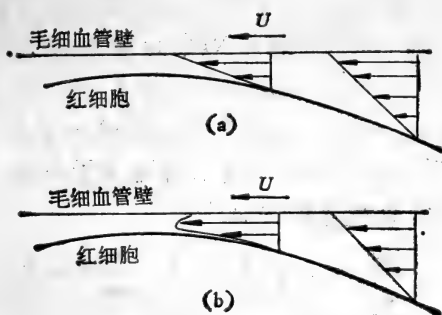


图 9-29 血浆层润滑原理

## 2. Lighthill 润滑理论

Lighthill<sup>[40,41]</sup> 首先指出毛细血流中存在润滑现象,并对此作了理论分析。Fitz-Gerald<sup>[42,43]</sup> 修正红细胞上、下游在管心区域的边界条件,改变红细胞型线,做了进一步分析。

当红细胞大变形通过毛细血管时,在靠近壁面的血浆层区域,受三种力作用:

(i) 红细胞-管壁之间血浆润滑层内流体的分布压力。它克服细胞的弹性抗力,使之变形,自由地通过毛细血管。血浆层压力分布和细胞弹性抗力的平衡,决定了血浆间隙的形状。

(ii) 流动粘性阻力。主要集中于血浆润滑层。

(iii) 细胞上、下游压差。这是细胞变形、运动的驱动力。

取固联于细胞的柱坐标系 $(r, \theta, x)$ ,假设:

(1) 细胞表面任一点的变形是作用于该点流体压力的线性函数。

$$h(x) = f(x) + \alpha[p(x) - p_0] \quad (4-35)$$

$p_0$  是参考压力,在此压力作用下,细胞恰巧能从毛细血管通

过;  $f(x)$ 是在  $p_0$  作用下的缝隙形状;  $\alpha$  为细胞的弹性顺应性, 即单位压力作用下, 径向尺度的改变。这里认为毛细血管是刚性的, 不计其变形。

若  $p = p_0$  时, 细胞形线为  $Rg(x)$ , 则

$$f(x) = R[1 - g(x)] \quad (4-36)$$

$$\therefore h(x) = R[1 - g(x)] + \alpha[p(x) - p_0] \quad (4-37)$$

(2) 流动是轴对称的, 惯性作用可不予考虑。这样血浆润滑层流动服从斯托克斯方程:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (4-38)$$

边界条件:

$$\left. \begin{array}{l} r = R: \quad u = -V, \quad v = 0 \\ r = Rg(x): \quad u = 0, \quad v = 0 \end{array} \right\} \quad (4-39)$$

$V$  是细胞运动速度。

血浆润滑层流体倒流量  $Q_1$  为:

$$Q_1 = \pi R^2(V - U) \quad (4-40)$$

$U$  是毛细血管内血液平均流速。

$$\therefore \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} = F(V, Q_1, a(x), h(x), R) \quad (4-41)$$

$$a(x) = Rg(x) - \alpha[p(x) - p_0] \quad (4-42)$$

(3) 作用于细胞上的驱动压差与细胞表面粘性阻力平衡。

$$[p(-b_0) - p(b_0)]a^2(x) = 2 \int_{-b_0}^{b_0} \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} \cdot a(x) dx \quad (4-43)$$

Lighthill 认为细胞端部压力  $p(-b_0)$ 、 $p(b_0)$  可用上、下游无穷远处的压力代替, 这样(4-43)变为:

$$[p(-\infty) - p(\infty)]a^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} a(x) dx \quad (4-44)$$

但 Fitz-Gerald 指出, 尽管细胞下游流场对压力对于其上游流场压力的选取很不敏感, 由于压差  $\Delta p = p(-\infty) - p(\infty)$  本身是个小量, 故以  $p(-\infty)$ 、 $p(\infty)$  代替  $p(-b_0)$ 、 $p(b_0)$  可能会引起相当大的误差(估计可达 300%)。因此, Fitz-Gerald 取  $2b_0$  为细胞变形后的长度。

(4) 红细胞被看作旋成体, 近壁部分的型线由经验公式给出。) Lighthill 取抛物形:

$$g(x) = 1 - \frac{kx^2}{2R} \quad (4-45)$$

$k$  为表面特征点(与壁接触点)的曲率。

Fitz-Gerald 取椭圆形:

$$g(x) = \left(1 - \frac{kx^2}{2R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-46)$$

$$\therefore b_0 = \left\{ \frac{R}{k} - \frac{\alpha^2}{kR} [p(-b_0) - p_0]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4-47)$$

$p(-b_0) \simeq p(-\infty)$ 。

方程(4-38)对  $r$  积分, 得

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + A \ln r + B$$

应用边界条件, 速度分布变为:

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[ r^2 - a^2 - \frac{2ah + h^2}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)} \ln \frac{r}{a} \right] - \frac{V \ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)} \quad (4-48)$$

$$\therefore Q_1 = -2\pi \int_a^{a+h} u r dr$$

$$\therefore \frac{1}{16\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (2ah + h^2) \left[ 2a^2 + 2ah + h^2 - \frac{2ah + h^2}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)} \right]$$

$$+ V \left[ \frac{1}{2} (a+h)^2 - \frac{ah+h^2}{2 \ln\left(1+\frac{h}{a}\right)} \right] = \frac{Q_l}{2\pi} \quad (4-49)$$

一般间隙很小,  $\frac{h}{a} \sim \frac{h}{R} \ll 1$ , 此时(4-49)可简化为:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6\mu V}{h^2} + \frac{12\mu Q_l}{h^3} \quad (4-50)$$

它说明, 血浆润滑层的压力分布是两个因素的综合: (i) 红细胞和血管壁相对运动引起的负压力梯度; (ii) 迫使流体倒流通过间隙所需的附加压力梯度。

应用(4-48), (4-43)变为:

$$a^2 [p(-b_0) - p(b_0)] = \pi \int_{-b_0}^{b_0} \frac{1}{2} \cdot \frac{dp}{dx} \left[ 2a^2 - \frac{2ah+h^2}{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)} + \frac{V}{\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)} \right] dx \quad (4-51)$$

(4-37)、(4-40)、(4-49)(或(4-50))、(4-51)共四个独立方程, 包含五个未知量:  $p(x)$ 、 $h(x)$ 、 $V$ 、 $U$ 、 $Q_l$ 。这里  $U$  必须与细胞间血浆团流的解匹配而确定。

引进无量纲参数:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{2Q_l}{VR^2} \\ L &= \frac{4\mu\alpha V}{\left(\frac{2Q_l}{VR}\right)^{\frac{5}{2}} k^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (4-52)$$

设:

$$\left. \begin{aligned} H &= h \left[ \frac{2Q_l}{VR} \right]^{-1} \\ P &= \alpha(p - p_0) \left[ \frac{2Q_l}{VR} \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4-53)$$

$$X = k^{\frac{1}{2}} x \left[ \frac{2Q_1}{VR} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad ]$$

这里  $\frac{2Q_1}{VR}$  是典型间隙高度。这样方程(4-37)(4-49)(4-51)变

为:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dX} = \frac{2}{3} LC \left[ C - 1 - \frac{1}{2} \frac{CH(2-CH)}{\ln(1-CH)} \right] \left( H \right. \\ \left. - \frac{1}{2} CH^2 \right)^{-1} \times \left[ 2 - CH(2-CH) \right. \\ \left. + \frac{CH(2-CH)}{\ln(1-CH)} \right]^{-1} \quad (4-54) \end{aligned}$$

$$H(X) = P + \frac{1}{C} [1 - (1 - CX^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (4-55)$$

$$\begin{aligned} [P(-B_0) - P(B_0)] = \int_{B_0}^{B_0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{dP}{dX} \left[ 2(1-CH)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{CH(2-CH)}{\ln(1-CH)} \right] - \frac{1}{3} \frac{LC^2}{\ln(1-CH)} \right\} dX \quad (4-56) \end{aligned}$$

$$B_0 = \left[ \frac{1}{C} - CP^2(-B_0) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-57)$$

$P(-B)$ 是已知的。

对每一组生理上有意义的  $L$ 、 $C$  值，应用(4-54)(4-55)(4-56)求出  $P(X)$ 、 $H(X)$  及  $P(B_0)$ 。而  $L$ 、 $C$  的选择则和  $V$ 、 $Q_1$  有关，可参考 §4-2 的结果。

所得之解用一组无量纲参数给出，它们是：颗粒运动速度参数：

$$A = \frac{\mu V \alpha}{R^2 (kR)^{\frac{1}{2}}} \quad (4-58)$$

倒流参数：

$$J = \frac{Q_1}{2R^2 V} = \frac{V-U}{V} \quad (4-59)$$

压降参数:

$$E = \frac{\alpha}{R} [p(-b_0) - p(b_0)] \quad (4-60)$$

阻力参数:

$$D = \frac{E}{A} = [p(-b_0) - p(b_0)] \frac{R(kR)^{\frac{1}{2}}}{\mu U} \quad (4-61)$$

计算结果表明:

(1)  $A \propto \sqrt{E}$ , 即  $V \propto \left(\frac{dp}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$ 。颗粒速度和压力梯度的

关系是非线性的, 压差与颗粒速度的平方成正比。而通常小雷诺数运动, 压差是与速度成比例的。

(2)  $h \propto \sqrt{V}$ , 润滑层厚度随细胞速度减小而显著变薄。故在一定压力梯度下, 当运动速度很低时, 润滑层可能完全破坏, 阻力激增, 细胞突然粘着于壁面。这样, 流动暂时阻塞, 上游压力剧增, 从而使细胞加速, 重新建立润滑层。细胞运动的这种间歇现象, 在微循环中是常见的。

(3) 阻力参数  $D$  与颗粒运动速度  $V$  的  $\frac{1}{2}$  次方成反比。这和橡皮小球悬浮液的实验结果相似。要指出, (3)和(1)并不矛盾, 因为  $D$  是两相系统运动阻力与相当的均质牛顿流体运动阻力之比, 并非绝对阻力。

Lighthill 理论的主要特色是揭示了红细胞-血浆层之间的水弹性相互作用, 这在毛细血流中极为重要。然而, 现有理论远非完善。主要问题是:

(1) Lighthill 假设红细胞形状决定于血浆间歇当地压力, 而实际上毛细血管里红细胞的形状主要取决于红细胞上、下游压差及细胞的弯曲刚度。因此, Lighthill 的假设不合理。

(2) 管轴附近上、下游条件不合理。Fitz-Gerald 虽然作了修正, 但所得的阻力偏高。仍需改进。

(3) 整个红细胞形状是假定的,而实际上是由水力-弹性作用决定的。

因此,计及红细胞弹性的毛细血流理论仍然是微循环流体力学中的一个基本问题,有待发展。

## §5 毛细血管壁构造与物质运输

毛细血管壁由1—2个扁平的内皮细胞构成,内皮细胞之间由粘接剂连接,整个毛细血管壁外侧有一层薄薄的带电物质称为基质膜。从组织学角度来看,毛细血管壁的构造有三种类型:

(1) 连续型: 内皮细胞形成一连续的薄膜,基质也是连续的,如图9-30(a)所示。图中N为内皮细胞核, V为囊泡, BM为基质膜, IJ为接缝。肌肉、皮肤、中枢神经系统、肺等器官中的毛细血管属于此类。

(2) 间断型: 内皮细胞间存在相当大的间隙,基质膜亦有间隙,如图9-30(b)示。肝、脾、骨髓等组织中的毛细血管属于此类。

(3) ‘窗式’毛细血管(fenestrated type capillary)。内皮膜在某些部位特别薄,只有一层基质,如图7-30(c)所示。肠、肾、内分泌系统等组织的毛细血管属于此类。

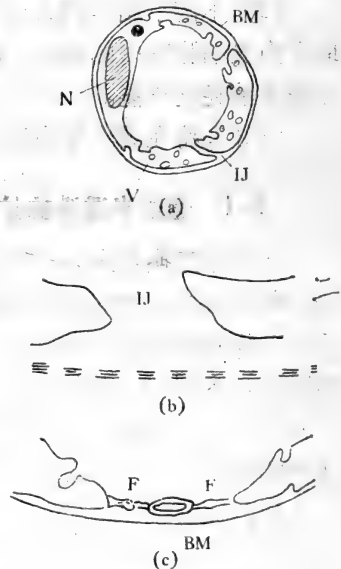


图9-30<sup>[44]</sup>

- (a) 连续型毛细血管壁,
- (b) 间断型毛细血管壁,
- (c) “窗式”毛细血管壁。

通过毛细血管壁物质的输运也有三种形式。

(1) 气体(氧、二氧化碳等)及可溶于脂类的物质,可以从毛细血管壁任何地方通过,基本上是扩散传输,输运速率决定于壁两侧该组元的浓度梯度。

(2) 水及可溶于水的低分子量溶质主要通过内皮膜上的孔隙。输运动力有二:一是壁内、外的静压梯度,它引起强迫对流;二是壁内、外有关组元的浓度梯度,它引起扩散流。实验证明,当孔隙直径超过  $20 \text{ \AA}$  时,水的传输以前者为主。

(3) 不溶于脂类的大分子物质(大于白蛋白分子)则需借助于内皮细胞膜内的载体,或通过内皮细胞中的囊泡传输,往往需要消耗化学能。

(1)(3)将在第十章中讨论,这里仅限于(2)。

### § 5-1 通过半透膜的扩散和对流

除气体交换及大分子输运外,毛细血流的传质问题主要是血浆和组织液之间流体交换。血浆和组织液都是多种蛋白质、矿物质的胶状水溶液,溶剂均为水。毛细血管壁是一种半透膜,溶剂(水)和各种溶质通过它时,所受到的阻力很不一样。通过半透膜物质输运的速率决定于四个因素:(i)膜两侧的静压差;(ii)膜两侧溶剂化学势差造成的渗透压差;(iii)膜两侧溶质化学势差;(iv)膜对溶剂及各种溶质的通透性。(i)(ii)(iv)决定了对流传输,(iii)(iv)决定了扩散速率。

设溶液中某一溶质的克分子浓度为  $c_s$ , 则其化学势为  $\phi_s$ ,

$$\phi_s = \mathcal{R}T \ln c_s + \phi_s^{(0)} \quad (5-1)$$

$\phi_s^{(0)}$  是  $c_s = 1$  时的化学势。 $\mathcal{R}$  是通用气体常数,  $T$  是绝对温度。此时,溶质沿  $x$  方向扩散的速度为  $v_s$ ,

$$v_s = -D_s \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \quad (5-2)$$



$D_s$  称为扩散系数。应用(5-1)得:

$$v_s = -D_s \cdot \frac{\mathcal{R}T}{c_s} \cdot \frac{\partial c_s}{\partial x} \quad (5-3)$$

单位面积上该溶质的扩散质量流量为

$$J_s = v_s \cdot c_s = -D_s \mathcal{R}T \cdot \frac{\partial c_s}{\partial x} \quad (5-4)$$

克分子浓度  $c_s$  与溶液渗透压  $\pi$  的关系为:

$$\pi = \mathcal{R}T c_s \quad (5-5)$$

$$\therefore J_s = -D_s \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad (5-6)$$

现分析通过半透膜时的溶质和溶剂流量。单位面积上溶质扩散流量为  $J'_D$ , 按(5-6)有:

$$J'_D = L_D \Delta \pi \quad (5-7)$$

$L_D$  是溶质透过膜时的扩散系数。

当溶质从高浓度侧向低浓度侧扩散时, 溶剂向相反方向扩散。由于膜对溶质扩散的阻力比对溶剂的阻力大, 故原来高浓度侧流体(溶剂+溶质)有一净增量。单位面积上溶液净流量为  $J'_f$ :

$$J'_f = L_{PD} \Delta \pi \quad (5-8)$$

$L_{PD}$  是渗滤系数。

另一方面, 当半透膜两侧浓度相同, 但静压不等时, 溶液通过膜从高压侧流向低压侧的流率(单位面积上的流量)为

$$J'_f = L_P \Delta p \quad (5-9)$$

$L_P$  为膜对溶液的流导。由于膜对溶质的阻力较大, 对流使得高压侧溶质浓度增大, 相当于从低压到高压侧溶质有扩散, 扩散流率为

$$J''_D = L_{DP} \Delta p \quad (5-10)$$

$L_{DP}$  和  $L_{PD}$  都表示溶质和溶剂通过膜的能力的差异, 故可以认为  $L_{PD} = L_{DP0}$  它们和  $L_P$  的关系可用反射系数表示

$$\sigma = -\frac{L_{PD}}{L_p} = \frac{v_w - v_s}{v_w} \quad (5-11)$$

$v_w$  为溶剂通过半透膜的扩散速度。

这样,在  $\Delta p$ 、 $\Delta \pi$  的作用下,通过半透膜的溶液流率为:

$$J_l = L_p(\Delta p - \sigma \Delta \pi) \quad (5-12)$$

通过半透膜膜,溶质的扩散流率为

$$J_D = L_{DP}\Delta p + L_D\Delta \pi \quad (5-13)$$

溶质的总流率为:

$$J_s = J_D + \bar{c}_s J_l \quad (5-14)$$

$\bar{c}_s$  是膜两侧溶质平均浓度。

$$\therefore J_s = L_p(\bar{c}_s - \sigma)\Delta p + (L_D - L_p\sigma\bar{c}_s)\Delta \pi \quad (5-15)$$

要将上述分析应用于毛细血流,必须知道毛细血管壁的  $L_p$ 、 $L_D$ 、 $\sigma$ , 而这些参数很难测定,至今还没有可靠应用的数据。

## § 5-2 孔隙传输理论

Papenheimer 认为物质是通过膜上的圆柱形小孔或矩形缝隙运输的。假设在静压差  $\Delta p$  作用下,溶液通过圆柱形小孔的流动服从泊肃叶律,则通过单位面积膜的溶液流量为

$$J_l = \frac{n\pi r^4}{8\mu h} \cdot \Delta p \quad (5-16)$$

$r$  是小孔半径,  $h$  为膜厚度,  $\mu$  是溶液在孔隙内的粘度,  $n$  是单位面积上的孔数。令

$$A_p = n\pi r^2 \quad (5-17)$$

则(5-16)变为

$$J_l = \frac{r^2}{8\mu} \cdot \frac{A_p}{h} \cdot \Delta p \quad (5-18)$$

当  $\Delta p = 0$  时,溶质可通过充满水的孔道而扩散,假设这种扩散服从斐克(Fick)定律,则溶质的扩散流率为

$$J_D = -D_s \cdot \frac{A_s}{h} \cdot \Delta c_s \quad (5-19a)$$

$D_s$  是溶质在水中自由扩散的扩散系数,  $A_s$  是有效扩散面积, 它和  $A_p$  的差异取决于溶质分子和孔径的相对尺度。设溶质分子半径为  $a$ , 则溶质分子可能进入的孔道面积  $A'_s$  为:

$$\frac{A'_s}{A_p} = \frac{\pi r^2 - \pi a^2}{\pi r^2} = 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (5-19b)$$

分子进入孔道后的摩阻为  $f$ , 若自由扩散时的摩阻为  $f_0$ , 则有如下经验关系

$$\frac{f}{f_0} = 1 + 2.4 \left(\frac{a}{r}\right) \quad (5-20)$$

将(5-19)(5-20)结合, 可得溶质分子孔道扩散和自由扩散能力之比为

$$\frac{A_s}{A_p} = \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}{1 + 2.4 \frac{a}{r}} \quad (5-21)$$

这里没有考虑溶质分子的反射。

Renkin 提出了更准确的圆柱孔限制扩散有效面积的公式

$$\begin{aligned} \frac{A_s}{A_p} = & \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \left[1 - 2.104 \left(\frac{a}{r}\right) \right. \\ & \left. + 2.09 \left(\frac{a}{r}\right)^3 - 0.95 \left(\frac{a}{r}\right)^5 \right] \quad (5-22) \end{aligned}$$

当静压差  $\Delta p$  和浓度差  $\Delta c_s$  同时存在时, 通过膜的溶质流率为:

$$J_s = -D_s \cdot \frac{A_s}{h} \cdot \Delta c_s + J_f \cdot \frac{A_s}{A_p} \cdot c_{s1} \quad (5-23)$$

$c_{s1}$  为高压侧溶液浓度。故

$$J_s = \frac{A_s}{A_p} \cdot \frac{A_p}{h} \left[ \frac{r^2 c_{s1}}{8\mu} \cdot \Delta p - \frac{D_s}{RT} \cdot \Delta \pi \right] \quad (5-24)$$

Papenheimer 理论使我们能在已知膜上总孔隙面积、孔径、溶质分子直径及自由扩散系数的条件下求溶质通过半透膜的流量。

据 Papenheimer 等人的实验，毛细血管壁上小孔半径为 3.0—3.5nm。

### § 5-3 Starling 假说

血浆和组织液中水均占 90% 以上，因此，通过毛细血管壁的流体运动，宏观地看，基本上就是水的渗滤。其他组元的流量很小，不影响毛细血流和组织内的体液流动。

如上所述，通过毛细血管壁水的输运动力有二，一是毛细血管内流体静压  $p$  和组织液静压  $p_i$  之差；二是血浆与组织液所含溶质种类、浓度不同，水的化学势不同，造成的血浆渗透压  $\pi_p$  与组织液渗透压  $\pi_i$  之差。早在 1896 年，Starling 就提出了以下公式：

$$J_f = K_f(p - p_i - \pi_p + \pi_i) \quad (5-25)$$

$J_f$  为通过单位面积毛细血管壁的水流量。

若设毛细血管壁是理想半透膜，即溶质完全不能通过，即  $v_r = 0$ ，则(5-11)所定义的反射系数  $\sigma = 1$ ，则由(5-12)立即可导出 Starling 公式，这时  $K_f = L_p$ 。

Landis 等人以一系列精巧的实验，证明 Starling 假说基本上正确，并测量了毛细血管壁对水的通透性系数，在  $2.5 \times 10^{-11}$ — $6.9 \times 10^{-9} \text{cm}^2 \cdot \text{s/g}$  之间。

### § 5-4 溶质透壁输运与毛细血流

若已知血浆、组织液中各种溶质透过毛细血管壁的能力，

即已知诸如  $L_P, L_D, \sigma$  或  $a, r, D_s, \frac{A_s}{h}$  之类的参数, 就可以用 (5-15), 或 (5-24) 或其他模型 (如第二章所述的传输方程), 来确定溶质透壁运输和毛细血流及组织液流动的关系。

而目前微循环生理研究所遇到的, 往往是反问题, 即如何建立一些合理的流体力学模型, 通过一些量的测量, 准确地确定毛细血管壁对各种溶质的通透性。要这样做, 必须首先了解毛细血管内的血液流动对溶质运输的影响。

考察三种溶质  $A, B, C$  在毛细血管中的浓度分布, 如图 9-31 示。在小动脉中, 三者浓度均为  $c_a$ , 在周围组织中均为  $c_i$ 。  $A$  扩散得很快, 在一段短距离上, 就达到平衡  $c_A = c_i$ , 当

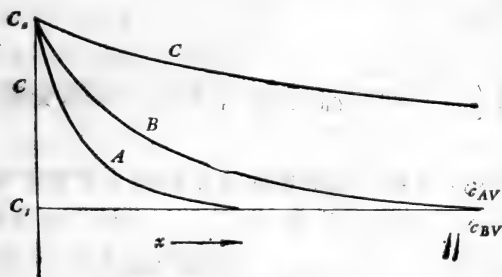


图 9-31 三种溶质的运输

然, 在小静脉中  $A$  的浓度  $c_{VA} = c_i$ ;  $B$  扩散得较慢, 恰好在静脉端达到平衡  $c_B = c_i$ , 亦有  $c_{VB} = c_i$ ; 曲线  $C$  扩散得最慢, 在静脉端仍达不到平衡,  $c_{CV} > c_i$ 。从血液传输到组织中溶质的流量  $Q_s = Q(c_a - c_V)$ 。故在此流量下  $Q_A = Q_B$ , 而  $Q_C < Q_A$ 。但若流量减小, 则血液在血管中停留时间变长,  $c_{CV}$  下降,  $(c_a - c_{CV})$  增大, 但  $(c_a - c_{AV})$ 、 $(c_a - c_{BV})$  不变, 因而  $Q_A, Q_B$  比  $Q_C$  下降得更厉害。当流量增大, 血流加速, 血液在血管中停留时间缩短,  $c_{CV}$  增大,  $B$  来不及达到平衡,  $c_{BV} > c_i$ , 故  $(c_a - c_{CV})$ 、 $(c_a - c_{BV})$  均变小, 而  $(c_a - c_{AV})$  不变, 因而  $\Delta Q_A > \Delta Q_B >$

$\Delta Q_c$ 。由此可见,溶质  $A$  的输运量是由毛细血流量决定的,称为流动限定,而  $C$  的输运量是由扩散速度限定的,称为扩散限定,属于哪一类,由指数  $E$  判定

$$E = \frac{c_a - c_v}{c_a - c_i} \quad (5-26)$$

$E = 1$  为流动限定,  $E < 1$  为扩散限定。但此判据有效的前提是所讨论的小静脉和小动脉之间没有旁路。

确定某种溶质是流动限定,还是扩散限定对于毛细管壁透性测定很重要。因为若从  $c_a$ 、 $c_v$  的差确定毛细血管壁两侧的平均浓度差,则在某一流速下所得结果对于溶质  $A$ 、 $B$  是一样的,但若由此断言毛细血管壁对于  $A$ 、 $B$  的透性一样,则显然是错误的。

## § 6 毛细血流与周围组织的液体交换

在 §4 中,分析毛细血流时完全忽略了管壁的可透性,这对于总的压力-流量关系、红细胞运动、血浆环流等来说,影响不大(一般地说)。但是,从生理功能观点来看,毛细管血液流动的特点就在于它和组织液之间有物质交换,包括气体交换和液体交换,这里限于液体交换。

液体透壁渗滤或吸收,主要涉及血浆和组织液。红细胞的影响是间接的,表现为毛细血流压力场的改变。作为近似,在分析毛细血管内、外流体交换过程时,可把血液看作某种均质流体,红细胞的作用,由表观粘度  $\mu_a$  体现(或由管内压力分布给出)。这样,毛细血管的流动可看作多孔介质管道内,多组元均质流体的运动,可用第十章 §1 所述的传输方程来描述。但本节不涉及各组元的输运,仅限于透壁流体交换引起的毛细血流和组织液流动的相互作用。

### § 6-1 组织液压力、浓度均匀时的毛细血流

周围组织的尺寸比毛细血管直径大得多，可以认为是无界的。这里考察最简单的情况，即不考虑组织液本身的运动，其压力  $p_i$  和渗透压  $\pi_i$  都是均匀、不变的。假设：

(1) 毛细血管是多孔的刚性直圆管。

(2) 血液是均质流体，表观粘度为  $\mu$  (实验证明，管径小于  $15\mu\text{m}$  时，取  $\mu = 2\text{cP}$ ，可得良好近似)，且血浆渗透压  $\pi_p$  不随位置而变化。

(3) 流动是定常、轴对称层流，雷诺数很小，惯性效应以及末端效应可以忽略不计。

(4) 壁面无滑流。

(5) 透壁渗滤服从 Starling 公式，渗滤流量  $Q_f$  与毛细血流量  $Q$  相比很小。

取柱坐标系  $(r, \theta, x)$ ， $x$  轴即毛细血管轴，流场为  $(v, 0, u)$ 。这样，毛细管血液流动服从斯托克斯方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

连续方程：

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6-2)$$

边界条件：

$$\left. \begin{aligned} r = R: \quad & u = 0 \\ & v = K_f(p - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

$$\left. \begin{aligned} r = 0: \quad & \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ & v = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

$$\left. \begin{aligned} x=0: & \quad p = p_a = \text{常数(小动脉血压)} \\ x=L: & \quad p = p_v = \text{常数(小静脉血压)} \end{aligned} \right\} (6-5)$$

这里  $\alpha = p_i + \pi_p - \pi_i = \text{常数}$ 。

求方程(6-1)(6-2)的满足条件(6-3)—(6-5)的准确解很困难。但根据假设(5),  $K_f \ll 1$ , 可取小参数  $\varepsilon$ , 用扰动法求近似解。

$$\varepsilon = \frac{\mu K_f}{R} \ll 1 \quad (6-6)$$

方程(6-1)(6-2)中各项的量级估计为:

$$\frac{\partial p}{\partial r} \sim \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sim \frac{v}{r^2} \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rv) \sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \mathcal{O}(1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \sim \mathcal{O}(1)$$

设:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 + u_2, & u_1 &\sim \mathcal{O}(1), & u_2 &\sim \mathcal{O}(\varepsilon) \\ v &= v_1 + v_2, & v_1 &\sim \mathcal{O}(1), & v_2 &\sim \mathcal{O}(\varepsilon) \\ p &= p_1 + p_2, & p_1 &\sim \mathcal{O}(1), & p_2 &\sim \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \right\} (6-7)$$

代入(6-1)—(6-6), 可得一级与二级近似。

### 1. 一级近似

定解系统为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial p_1}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rv_1) + \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} (6-8)$$



$$\left. \begin{aligned} r = R: \quad u_1 = 0, \quad v_1 = K_f(p_1 - \alpha) \\ r = 0: \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = 0, \quad v_1 = 0 \\ x = 0: \quad p_1 = p_a \\ x = l: \quad p_1 = p_v \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

由(6-8)(6-9<sub>c,d</sub>)可得:

$$\left. \begin{aligned} u_1 = \frac{-1}{4\mu} \cdot \frac{dp_1}{dx} (R^2 - r^2) \\ v_1 = \frac{1}{16\mu} \cdot \frac{d^2p_1}{dx^2} (2rR^2 - r^3) \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

(6-10<sub>b</sub>)与(6-9<sub>b</sub>)结合,得

$$\frac{d^2p}{dx^2} - \frac{16K_f\mu}{R^3} p_1 = -\frac{16}{R^3} \cdot K_f\mu\alpha \quad (6-11)$$

结合边界条件(6-9<sub>c,f</sub>)可得(6-11)的解:

$$p_1 = (p_a - \alpha) \frac{\text{sh}\lambda(L-x)}{\text{sh}\lambda L} + (p_v - \alpha) \frac{\text{sh}\lambda x}{\text{sh}\lambda L} + \alpha \quad (6-12)$$

代入(6-10)得:

$$\left. \begin{aligned} u_1 = \frac{\lambda}{4\mu} (R^2 - r^2) \left[ (p_a - \alpha) \frac{\text{ch}\lambda(L-x)}{\text{sh}\lambda L} \right. \\ \left. - (p_v - \alpha) \frac{\text{ch}\lambda x}{\text{sh}\lambda L} \right] \\ v_1 = \frac{\lambda^2}{16\mu} (2rR - r^3) \left[ (p_a - \alpha) \right. \\ \left. \cdot \frac{\text{sh}\lambda(L-x)}{\text{sh}\lambda L} + (p_v - \alpha) \frac{\text{sh}\lambda x}{\text{sh}\lambda L} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

这里:

$$\lambda = \frac{4}{R} \left( \frac{K_f\mu}{R} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{R} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (6-14)$$

将双曲函数展为幂级数,取至  $O(\varepsilon^2)$  项则:

$$\left. \begin{aligned}
 p_1 &= p_a - \xi \Delta p + \varepsilon \cdot \frac{\delta \Delta p}{3\beta^2} \left[ \left( 1 - 3 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \right) \xi \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \xi^2 - \xi^3 \right] \\
 u_1 &= \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} (1 - \zeta^2) \left[ 1 - \frac{8\varepsilon}{2\beta^2} \left( 1 - 3 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 6 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \xi - 3\xi^2 \right] \\
 v_1 &= \frac{8R\Delta p}{\mu} (2\xi - \xi^3) \left( \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} - \xi \right)
 \end{aligned} \right\} (6-15)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta p &= p_a - p_v, & \Delta \alpha &= p_a - \alpha \\
 \beta &= \frac{R}{L}, & \zeta &= \frac{r}{R}, & \xi &= \frac{x}{l}
 \end{aligned} \right\} (6-16)$$

## 2. 二级近似

定解系统为:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial p_2}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \\
 \frac{\partial p_2}{\partial r} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} \right) \\
 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r v_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \right\} (6-17)$$

$$\left. \begin{aligned}
 r = R: & \quad u_2 = 0, \quad v_2 = k p_2 \\
 r = 0: & \quad \frac{\partial u_2}{\partial r} = 0, \quad v_2 = 0 \\
 x = 0: & \quad p_2 = 0 \\
 x = L: & \quad p_2 = 0
 \end{aligned} \right\} (6-18)$$

取  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  级近似解, 得

$$p_2 = 2\varepsilon \Delta p \left( \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} - \xi \right) (1 - 2\xi^2)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \varepsilon R^2 \frac{\Delta p}{2\mu L} (1 - \zeta^2)(2 - \zeta^2) \\ v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

### 3 速度分布与压力分布

按(6-7),用近似公式(6-15)(6-19)可得压力分布和速度分布:

$$\left. \begin{aligned} p(\zeta, \xi) &= p_a - \xi \Delta p + \varepsilon g(\zeta, \xi) \Delta p \\ u(\zeta, \xi) &= \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} (1 - \zeta^2) [1 + \varepsilon f(\zeta, \xi)] \\ v(\zeta, \xi) &= \frac{\varepsilon R \Delta p}{\mu} (2\zeta - \zeta^3) \left( \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} - \xi \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta, \xi) &= \frac{8}{\beta^2} \left( \xi^2 - 2 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \xi + \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{4} \beta^2 \zeta^2 \right) \dots \\ g(\zeta, \xi) &= -\frac{8}{3\beta^2} \left[ \xi^3 - 3 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \xi^2 - \left\{ 1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} - \frac{3}{4} \beta^2 (1 - 2\zeta^2) \right\} \xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \beta^2 \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} (1 - 2\zeta^2) \right] \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

可见:

(1) 轴向速度剖面不是真正抛物形的,  $r = 0$  时,  $u =$

$$\begin{aligned} u_{\max} &= u_{m0} \\ u_m &= \frac{R^2 \Delta p}{4\mu L} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{8}{\beta^2} \left[ \left( \xi - \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \right)^2 - \left( \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta \alpha}{\Delta p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \beta^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6-22)$$

当  $\xi > \frac{\Delta \alpha}{\Delta p}$  时,  $u_m$  随  $\xi$  增大而增大,

当  $\xi < \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  时,  $u_m$  随  $\xi$  增大而减小;

$$\text{当 } \xi = \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} \text{ 时, } u_m = u_{m,\min} = \frac{R^2\Delta p}{4\mu L} \left[ 1 + \frac{8\varepsilon}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{2} + \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} - \left( \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} \right)^2 \right\} \right] \quad (6-23)$$

(2) 壁面上径向速度为

$$v_w = v(1, \xi) = \frac{\varepsilon R \Delta p}{\mu} \left( \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} - \xi \right) \quad (6-24)$$

显然, 当  $\xi < \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  时,  $v_w > 0$ , 为滤失;

当  $\xi > \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  时,  $v_w < 0$ , 为再吸收;

当  $\xi = \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  时,  $v_w = 0$ 。

#### 4. 流量变化

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr = 2\pi R^2 \int_0^1 \xi u d\xi$$

应用(6-20), 得压力-流量关系:

$$Q(\xi) = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \left[ 1 + \frac{8\varepsilon}{\beta^2} \xi^2 - 2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} \xi + \frac{\Delta p}{\Delta\alpha} - \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \beta^2 \right] \quad (6-25)$$

由于通过壁面有流体交换, 流量随  $x$  而变化, 净流出流量为  $Q_l$ ,

$$Q_l = Q(0) - Q(1) = \varepsilon \frac{2\pi R^4 \Delta p}{\beta^2 \mu L} \left( \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} - \frac{1}{2} \right) \quad (6-26)$$

可见有三种情况:

(1)  $0 < \frac{\Delta\alpha}{\Delta p} < 1$  时, 整个毛细血管流动有滤失段 ( $v_w > 0$ ), 也有吸收段 ( $v_w < 0$ ), 以  $\xi = \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  为界,  $\xi < \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  为渗滤段,  $\xi > \frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  为吸收段。至于对整个毛细血管来说是滤失, 还是吸收, 则取决于  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta p}$  的值。

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta p} > \frac{1}{2}, \quad Q_f > 0, \quad \text{滤失} > \text{吸收};$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta p} < \frac{1}{2}, \quad Q_f < 0, \quad \text{滤失} < \text{吸收};$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta p} = \frac{1}{2}, \quad Q_f = 0, \quad \text{滤失与吸收平衡}。$$

(2) 若  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta p} < 0$ , 即  $p_a < \alpha$ , 则整个毛细血管上,  $v_w < 0$ , 都起吸收作用。

(3) 若  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta p} > 1$ , 即  $p_v > \alpha$ , 则整个毛细血管上,  $v_w > 0$ , 都是滤失。

实际上微循环中三种情况都存在。当  $Q_f > 0$  时, 形成淋巴流。

这一小节的分析, 着重说明了组织液压力、浓度的变化对毛细血流的影响, 及由此而引起的净渗滤流量的改变, 未涉及组织内体液的流动及这两个流场的耦合作用。

## § 6-2 毛细血流与组织液流动

实际上, 毛细血管内的流动和周围组织中体液的运动有密切的关系, 应将二者联系起来分析。

人体每个器官都有不同的结构, 这反映了它们各自的生

理功能。微循环研究的一个基本假设就是：认为整个组织是一系列不连续的功能单元的组合。每个功能单元由一根毛细血管和它周围的组织构成，同一器官的所有功能单元的几何形状相似，物性相同，流动特性一样。因而，只要分析一个功能单元内的流动，就可以得到整个器官内血液、体液流动的信息。此假设的前提是：不同功能单元之间没有净流动，即相邻功能单元通过界面的流体交换是平衡的。

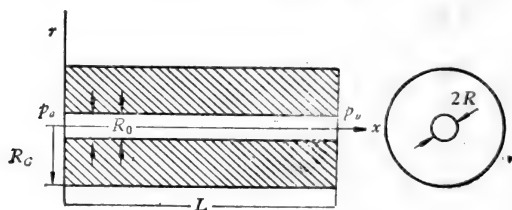


图 9-32 毛细血流功能块模型

取基本功能单元如图 9-32 示，毛细血管为刚性多孔壁直圆管，四周是半径为  $R_G$  的同心圆柱形组织‘套’。这样，血液-组织间的流体交换分两步：(i) 渗过毛细血管壁；(ii) 在组织内部流动。毛细管内的流动仍与 §6-1 一样，可以用斯托克斯方程来描述，问题是如何确定组织内的流动。

生物体组织是个复杂的组合系统，可看作多孔介质，即整个组织空间分两相：(i) 流体能运动的间隙空间；(ii) 基本上不动的支撑空间。流体在其间运动的路径十分复杂，而且随机，必须用统计的方法来处理。由于忽略了惯性效应，流体动力学特性不受路径影响，这种统计规律是存在的。当流量不大时，可用达西 (Darcy) 定律描述

$$\boldsymbol{w} = -K_t \nabla p' \quad (6-27)$$

$\boldsymbol{w}$  是组织内体液渗流流速， $p'$  是组织液压力场， $K_t$  是组织的流导，一般它是压力场的函数，即  $K_t = K_t(p')$ 。此外，质量守

恒要求

$$\nabla \cdot [\theta(p')\mathbf{w}] = 0 \quad (6-28)$$

$\theta(p')$  为组织孔隙度。二者结合,得

$$\nabla \cdot [\theta(p')K_i(p')\nabla \cdot p'] = 0. \quad (6-29)$$

若  $\theta = \text{常数}$ ,  $K_i = \text{常数}$ , 则(6-29)简化为

$$\nabla^2 p' = 0 \quad (6-30)$$

将毛细血管壁、周围组织看作两种多孔介质, 则毛细血流和组织液流动可用下述方程组描述:

(1) 毛细血管内:  $0 \leq r \leq R$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (6-2')$$

(2) 毛细血管壁——多孔介质 1<sup>#</sup> 内:  $R \leq r \leq R_0$ ,

$$\frac{\partial^2 p'_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p'_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 p'_1}{\partial x^2} = 0 \quad (6-32)$$

(3) 周围组织——多孔介质 2<sup>#</sup> 中:  $R_0 \leq r \leq R_G$ ,

$$\frac{\partial^2 p'_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p'_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 p'_2}{\partial x^2} = 0 \quad (6-33)$$

如何确定界面边界条件是个棘手的问题。因为, 对于毛细血管侧外侧的流动物理图象很不了解; 而且管内是斯托克斯流动, 管外是达西流动, 前者用二阶微分方程描述, 后者用一阶方程(对速度而言)描述, 数学上是不等价的, 边界条件不能一样。通常选取方法如下: 通过界面, 压力及法向速度连续, 切向速度可以不连续, 对多孔介质一侧, 不作任何要求, 而在斯托克斯区域一侧, 则作适当规定。

实验证明, 由于流体粘性作用, 多孔介质管壁内表面上切

向速度不为 0, 经验地有:

$$r = R: \quad \frac{\partial u}{\partial r} = B(u - u') \quad (6-34)$$

$B$  是常数,  $u'$  是多孔介质内,  $r = R$  处的切向流速。但对于生物组织来说, 渗滤流量很小, 滑流的影响可以不考虑, 表面无滑流条件仍有效。

这样整个问题的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} r = 0: \quad & \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad v = 0 \\ r = R: \quad & u = 0 \\ & v(x, R) = v'_1(x, R) \\ & p(x, R) = p'_1(x, R) \\ r = R_0: \quad & v'_1(x, R_0) = v'_2(x, R_0) \\ & p'_1(x, R_0) = p'_2(x, R_0) \\ r = R_G: \quad & v'_2 = 0 \\ x = 0: \quad & p = p_a, \quad u'_1 = 0, \quad u'_2 = 0 \\ x = L: \quad & p = p_v, \quad u'_1 = 0, \quad u'_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

Apelblat 等<sup>[45]</sup>求出了(6-31)–(6-35)的解。

毛细血管中的压力场和速度场为:

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= D + G \left( x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \delta_n}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \right) \\ u(x, r) &= \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \\ v(x, r) &= \frac{1}{16\mu} \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} (2rR^2 - r^3) \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

$$\text{这里, } D = p_a + G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \delta_n}{\alpha_n}$$

$$G = \frac{p_v - p_a}{L + \varepsilon}$$



$$\begin{aligned}
s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \delta_n}{\alpha_n} [(-1)^n - 1] \\
A_n &= \frac{16K_1}{R^3} [a_n Y_1(\alpha_n R) - b_n I_1(\alpha_n R)] \\
\delta_n &= \frac{2[(-1)^n - 1]}{\alpha_n L [A_n + \alpha_n B_n]} \\
\alpha_n &= \frac{n\pi}{L} \\
a_n &= \alpha_n R_0 \left[ d_n I_1(\alpha_n R_0) - \frac{K_2}{K_1} c_n I_0(\alpha_n R_0) \right] \\
b_n &= \alpha_n R_0 \left[ \frac{K_2}{K_1} c_n Y_0(\alpha_n R_0) + d_n Y_1(\alpha_n R_0) \right] \\
d_n &= \left[ Y_1(\alpha_n R_G) \frac{I_0(\alpha_n R_0)}{I_1(\alpha_n R_G)} + Y_0(\alpha_n R_0) \right] \\
c_n &= \left[ Y_1(\alpha_n R_G) \frac{I_1(\alpha_n R_0)}{I_1(\alpha_n R_G)} - Y_1(\alpha_n R_0) \right] \\
B_n &= b_n I_0(\alpha_n R) + a_n Y_0(\alpha_n R)
\end{aligned} \quad (6-37)$$

$K_1, K_2$  是壁和组织的达西常数,  $I_0, I_1; Y_0, Y_1$  分别为第一类和第二类零阶及一阶修正贝塞尔函数。

壁内及组织内的压力场和速度场为:

$$\left. \begin{aligned}
p'_i(x, r) &= D + G \left( \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n k_i(r) \cos \alpha_n x \right) \\
u'_i(x, r) &= -\frac{K_i}{\mu'} \cdot \frac{\partial p'_i}{\partial r}, \quad i = 1, 2 \\
v'_i(x, r) &= -\frac{K_i}{\mu'} \cdot \frac{\partial p'_i}{\partial r}
\end{aligned} \right\} (6-38)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned}
k_1 &= [Y_1(\alpha_n R_G) I_0(\alpha_n r) + Y_0(\alpha_n R) I_1(\alpha_n R_G)] / I_1(\alpha_n R_G) \\
k_2 &= b_n I_0(\alpha_n r) + a_n Y_0(\alpha_n r)
\end{aligned} \right\} (6-39)$$

$\mu'$  为组织液粘度。

计算结果表明:

(1) 毛细血流向速度  $v$  是二阶小量。这证明,在 §4 中忽略毛细血管壁的可渗透性是合理的。

(2) 毛细血管壁外侧附近,组织液的压力变化很快,迅速由毛细血流压力,趋于组织内平衡压力。

(3) 周围组织的厚度 ( $R_G - R_0$ ) 对于毛细血管渗滤段的滤失流量有显著影响,  $\frac{L}{R}$  愈大,这种影响愈显著。对每个  $\frac{L}{R}$  值, ( $R_G - R_0$ ) 超过一定值时这种影响就趋于消失,此值大约为  $\frac{R_G - R_0}{R} \simeq 16 - 20$ 。功能单元模型参数的选择应考虑这一点。

此模型的前提是: 功能单元内部无流体积累,通过其界面亦无净流量,即毛细血管滤失和吸收是平衡的。因此,尽管它把组织液的流均和毛细血流联系起来,提供了二者相互作用的细节(尤其是组织液流动对毛细血流场的影响)但它对于组织液流动的描述不够真实。因为,实验证明,一般来说滤失总是超过再吸收的。

### § 6-3 组织液流动与透壁流体交换

为进一步了解组织内体液流动和毛细血管透壁流体交换的关系, An 和 Salathe<sup>[47]</sup> 取模型如图 9-33 示。毛细血管是锥形的刚性管,动脉端较小,静脉端较大,但  $R(x)$  的变化相当缓慢。周围组织看作是无限多孔介质,无穷远处压力  $p' = p_\infty = \text{常数}$ 。假设:

(1) 渗滤流量很小,  $R(x)$  变化又很缓慢,因此,  $Q(x)$  的变化很缓慢。故可认为每个截面上,流量  $Q(x)$  与当地压力梯度的关系符合泊肃叶律,

$$Q(x) = -\frac{\pi R^4(x)}{8\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (6-40)$$

这叫广义泊肃叶流。

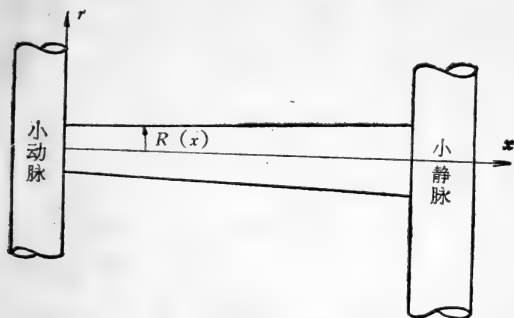


图 9-33 锥型管模型

(2) 周围组织内体液运动符合达西定律, 方程 (6-29) 适用。

(3) 血流-组织间流体交换服从 Starling 公式

$$J_f = K_f [p(x) - p'(R, x) - \pi_p + \pi_t]$$

$\pi_p =$  常数,  $\pi_t =$  常数。与(6-27)相结合得:

$$-\theta(p') K_t(p') \frac{\partial p'}{\partial r} = K_f [p(x) - p'(R, x) - \pi_p + \pi_t] \quad (6-41)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0: \quad Q = Q_0, \quad p = p_a \\ x = L: \quad p = p_v \\ (r^2 + x^2) \rightarrow \infty: \quad p'(r, x) = p_\infty \end{array} \right\} \quad (6-42)$$

$\theta(p')$ 、 $K_t(p')$  为  $p'$  的已知函数,  $\mu$ 、 $K_f$ 、 $\pi_t$ 、 $\pi_p$  为已知常数, 则(6-40)(6-29)(6-41)三个独立方程, 包含三个未知量  $Q(x)$ 、 $p(x)$ 、 $p'(x, r)$ , 可以定解。

1.  $\theta$ 、 $K_t$  为常数时的情形

设  $\theta =$  常数,  $K_t =$  常数, 则方程(6-29)简化为拉普拉斯

方程(6-30),定解系统线性化。

$$\left. \begin{aligned} \text{令: } \eta &= \frac{r}{L}, & \xi &= \frac{x}{L}, & a &= \frac{R}{L} \\ P &= \frac{p}{p_a}, & P' &= \frac{p'}{p_a}, & \Pi &= \frac{\pi}{p_a} \\ q &= \frac{Q}{Q_0} \end{aligned} \right\} \quad (6-43)$$

则方程组变为:

$$q(\xi) = -\frac{\pi p_a L^3}{8\mu} \cdot a^4(\xi) \cdot \frac{dP}{d\xi} \quad (6-44)$$

$$-\frac{\partial P'}{\partial \eta} \Big|_{\eta=a} = K[P(\xi) - P'(a, \xi) + \Pi_i - \Pi_p] \quad (6-45)$$

$$K = \frac{K_1 L}{\theta K_t}$$

$$\nabla^2 P' = 0 \quad (6-46)$$

因为流量  $Q(x)$  的变化是渗滤引起的,

$$\therefore J_1 = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{dQ}{dx}$$

由(6-40)(6-41)可得:

$$\frac{dQ}{dx} = 2\pi R \theta K_t \frac{\partial p'}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$\therefore \frac{d^2 P}{d\xi^2} = -A \frac{\partial P'}{\partial \eta} \Big|_{\eta=a} \quad (6-47)$$

$$A = \frac{16\mu\theta K_t}{L^2 R^3}$$

$$\therefore \frac{d^2 P}{d\xi^2} = AK[P(\xi) - P'(a, \xi) + \Pi_i - \Pi_p] \quad (6-47')$$

另一方面,(6-46)是拉普拉斯方程,有基本解:

$$P(\xi, \eta) = G \cdot [(\xi - \xi_0)^2 + \eta^2]^{-\frac{1}{2}}$$

它代表位于  $(\xi_0, 0)$  处、强度为  $G$  的点源。由于组织液流动是毛细血管壁外表面压力与  $p_\infty$  之差引起的,故多孔介质压力场  $p'$ ,可用一沿管轴分布的点源线来确定。

$$P'(\xi, \eta) = \int_0^1 \frac{f(\zeta) d\zeta}{[(\zeta - \xi)^2 + \eta^2]^{\frac{3}{2}}} + P_\infty \quad (6-48)$$

边界条件可写为:

$$\left. \begin{aligned} P(0) = 1, \quad \left. \frac{dP}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -\frac{8\mu Q_0}{p_a \pi R^4 L^3} = -\hat{Q}_0 \right\} \quad (6-49) \\ (\xi^2 + \eta^2) \rightarrow \infty: \quad P' \rightarrow P_\infty \end{aligned}$$

设:

$$\left. \begin{aligned} f(\xi) &= f_0(\xi) + f_1(\xi) + \dots \\ P(\xi) &= P_0(\xi) + P_1(\xi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-50)$$

代入(6-47)(6-45),结合边界条件,得:

$$\left. \begin{aligned} P_0(\xi) &= P_\infty - \Delta\Pi - \frac{\hat{Q}_0}{m} \operatorname{sh} m\xi + (1 + \Delta\Pi - P_\infty) \operatorname{ch} m\xi \\ f_0(\xi) &= \frac{K}{F} \left[ -\left(\frac{\hat{Q}_0}{m}\right) \operatorname{sh} m\xi + (1 + \Delta\Pi - P_\infty) \operatorname{ch} m\xi \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-51)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1(\xi) &= m \left\{ -\operatorname{sh} m\xi \cdot \int_0^\xi [f_0(\zeta)(1 - \zeta) \ln 4\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{f_0(\zeta) - f_0(\xi)}{|\zeta - \xi|} d\zeta \right\} \operatorname{ch} m\xi d\xi \\ f_1(\xi) &= \frac{K}{F} \left\{ P_1 - \int_0^1 \frac{f(\zeta) - f_0(\xi)}{|\zeta - \xi|} d\zeta \right. \\ &\quad \left. - f_0(\xi)(1 - \xi) \ln 4\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6-52)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{这里: } \Delta\Pi &= \Pi_t - \Pi_p, \quad F = \frac{2}{a} - 2K \ln a \\ m^2 &= \frac{2AK}{aF} \end{aligned} \right\} \quad (6-53)$$

由  $f = f_1 + f_0$ , 应用(6-48), 可得  $P'(\xi, \eta)$ 。

An 和 Salathe 取:  $\mu = 4cP, K_f = 7 \times 10^{-10} - 4 \times 10^{-9}$   
 $(m^3/m^2 \cdot s \cdot Kg_t/m^2)$

$$\theta K_t = 1.05 \times 10^{-13} (m^3/m^2 \cdot s \cdot Kg_t/m^2/m)$$

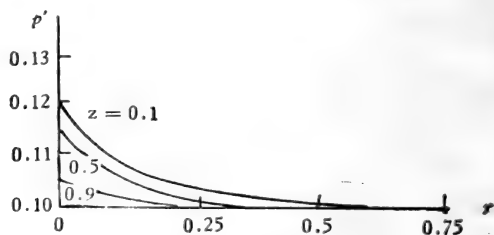


图 9-34 组织内压力分布<sup>[27]</sup>

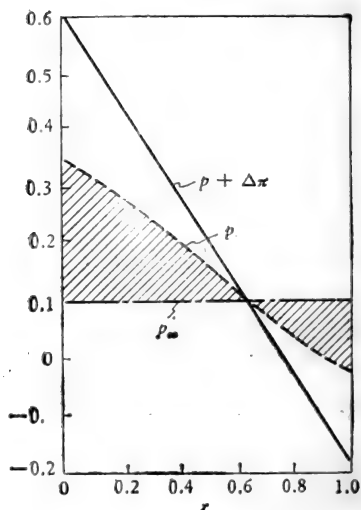


图 9-35 流量误差<sup>[44]</sup>

进行了数值计算。典型结果见图 9-34 和图 9-35。可见：

(1) 毛细血管外壁附近组织液压力  $p'$  与  $p_\infty$  的差异相当大。通常测得的组织液压力是  $p_\infty$ , 若用  $p_\infty$  代替  $p'(R)$ , 则将

引起很大误差(见图 9-35)。

(2)  $p'$  很快趋于  $p_{\infty}$ 。当  $r > 0.5L$  时, 即可取  $p' = p_{\infty}$ 。这也说明把组织看作是无限多孔介质是允许的。

## 2. $\theta(p')$ , $K_i(p')$ 非均匀时的情况

最近, An 和 Salathe<sup>[45]</sup> 进一步研究了组织液流动的非线性理论。为简单起见, 取毛细血管为直圆柱管。基本方程不变, 仍为(6-40)(6-29)(6-41)。但  $\theta(p')$ ,  $K_i(p')$  不是常数, 而是  $p'$  的已知函数。根据实验结果, 取:

$$\theta(p')K_i(p') = Bb \cdot \frac{p'}{p_a} \quad (6-54)$$

$$B = 1.135 \times 10^5 \mu\text{m}^3/\text{s} \cdot \mu\text{m}^2 \cdot (\text{cmH}_2\text{O}/\mu\text{m})$$

$$b = 21.92$$

由此出发, 用扰动法求非线性解。图 9-36 是  $\xi = 0.3$  处,

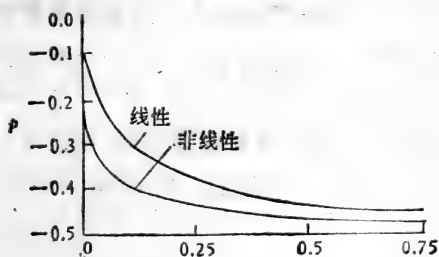


图 9-36 组织内压力变化<sup>[45]</sup>

组织液压力随  $\eta$  的变化, (1) 为非线性理论, (2) 为线性理论,  $P_{\infty} = -0.5$ , 此时, 二者差别相当明显, 非线性压力场比线性时更快地趋于  $P_{\infty}$ 。图 9-37 是滤失流量  $Q_F$ , 随  $p_{\infty}$  的变化, 可见当  $P_{\infty}$  为高负压时, 线性理论与非线性理论的结果有质的不同。

An 和 Salathe 的分析, 侧重于周围组织内体液的运动。

## § 6-4 流体交换引起的毛细血管内血液表观粘度的变化

前述分析均假设毛细血管中血液粘度及血浆渗透压为常数。但实际上，透壁渗滤将会改变管内红细胞压积  $H$  及血浆蛋白质浓度  $c$ ，这一方面引起血液表观粘度的变化，另一方面也会改变血浆渗透压，从而影响管内、外的流体交换。这种效应对于‘窗式’毛细血管、间断型毛细血管较为明显。Papenfuss 和 Gross<sup>[46]</sup>对此作了分析。

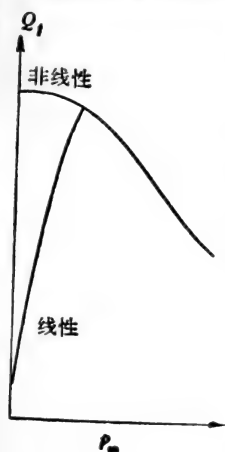


图 9-37 滤失流量  
与  $p_m$  关系<sup>[28]</sup>

假设：

(1) 毛细血管是刚性直圆柱管，管壁是理想的半透膜，血浆蛋白不能通过，因而管内血浆蛋白含量不变。

$$c(x) = c_F \cdot \frac{(1 - H_F)Q_F}{Q(x) - Q_F H_F} \quad (6-55)$$

$F$  表示进口参数， $c$  是血浆蛋白质浓度，单位为  $g/100ml$ 。

(2) 壁内、外流体交换服从 Stirling 公式(5-25)。为方便起见，改写为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -2\pi RK_f [p_c(x) - \pi(x)] \\ p_c(x) &= p(x) - p_i + \pi_i \end{aligned} \right\} \quad (6-56)$$

组织液压力  $p_i$  和渗透压  $\pi_i$  为常数。血浆渗透压  $\pi(x)$  与血浆蛋白质浓度  $c$  的关系由 Landis-Pappenheimer 公式给出：

$$\pi(x) = \alpha c(x) + \beta c^2(x) + \gamma c^3(x) \quad (6-57)$$

$\alpha = 2.1g/100ml$ ,  $\beta = 0.16g/(100ml)^2$ ,  $\gamma = 0.009g/(100ml)^3$ 。

(3) 毛细血流服从广义泊肃叶律(6-40)，在此可写为：



$$\frac{dp_c}{dx} = -\frac{8\mu(x)Q(x)}{\pi R^4} \quad (6-40')$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} x=0: & \quad p_c = p_a - p_i + \pi_i \\ & \quad Q = Q_F \\ & \quad c = c_F \\ x=L: & \quad Q = Q_v \\ & \quad c = c_{v0} \end{aligned} \right\} \quad (6-58)$$

至此,方程组是不封闭的,必须给出  $\mu(x)$  与  $c(x)$ 、 $H(x)$  的关系。

根据 Barbee 和 Cokelet 小管实验结果

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_p} = \exp[2.59H_T(x)] \quad (6-59)$$

这里  $\mu_p$  与血浆蛋白浓度的关系为:

$$\mu_p = 0.204 + 0.177c(x) \quad (6-60)$$

当管壁不可透时,管内红细胞压积  $H_T$  与进口值  $H_F$  的关系已由经验公式(2-22)给出。当管壁可渗透时,由于红细胞总数不变,故

$$\begin{aligned} H(x)Q(x) &= H_F Q_F \\ \therefore H(x) &= \frac{Q_F}{Q(x)} \cdot H_F \end{aligned} \quad (6-61)$$

以  $H(x)$  代替(2-22)中的  $H_F$ ,得

$$\begin{aligned} H_T(x) &= \left\{ 0.214 - 0.233 \ln \sigma + [0.382 \right. \\ &\quad \left. + 0.123 \ln \sigma] H_F \frac{Q_F}{Q(x)} \right\} \frac{H_F Q_F}{Q(x)} \end{aligned} \quad (6-62)$$

这里:

$$\sigma = \frac{D_c}{2R}, \quad D_c \text{ 为自然状态红细胞直径}$$

上述方程组是完备的,可用数值方法求解。Pappenfuss 和 Gross 计算了鼠肾小球毛细血管的流动,结果表明,由于管壁可渗透,使毛细血流阻力增大,表观粘度增大了 60%。但血浆渗透压的变化对渗滤流量影响不大,仅为 2%。

## §7 肺微循环

微循环领域中,最富有前景的是器官微循环。冯元桢对肺微循环力学的研究,是器官微循环研究的典型,也是用力学观点和方法解决生理问题的一个范例。

肺循环血液流动有许多不同于体循环的特点。首先,与体循环相比,肺循环是一个低压系统,正常生理条件下,压力脉动幅度不超过 20mmHg。因此肺循环系统的血管都很薄。肺小动脉相对厚度较小且平滑肌含量很少。由于肺生理功能的要求,肺毛细血管暴露于肺泡空气之中,缺乏周围组织的支持,因而肺毛细血管不是胶体介质内的孔道,而是受到某种弹性约束的柔性通道,其形状取决于管内血压  $p$  和肺泡空气压力  $p_A$ 。

其次肺内有两套系统,一是低压的肺毛细血管系统,二是高压的毛细支气管系统,还有淋巴系统。它们交织在一起,形成复杂的网络系统。肺毛细血管组织的构造和体循环系统很不一样。

从生物力学观点研究肺微循环的步骤如下:

- (1) 弄清组织结构,定量地确定其几何形状。
- (2) 测定肺毛细血管及其周围组织的力学性质,以及血液在这种通道里的流变性质。
- (3) 确定边界条件。
- (4) 提出数学模型,并求其解。

(5) 将理论预计和生理实验的结果相比较，以检验并改进理论模型。

### § 7-1 肺毛细血管组织构造及片流模型

解剖研究告诉我们，肺由隔膜分成许多片状构造（约  $10^9$  个），对成年的哺乳动物来说，各片的构造相似，每个片里都有许多毛细血管，其两侧为肺泡。肺泡-毛细血管间膜由内皮细胞、外皮细胞和组织间隙液体构成。

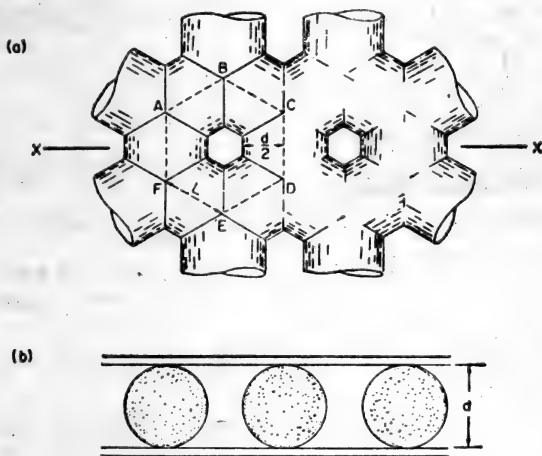


图 9-38 Weibel 管系模型

Weibel 综合了大量观测数据，提出图 9-38 那样的管系模型，毛细血管组织是由短圆柱管构成的六角形网络，图中 (b) 的空白区域是隔膜之间的支柱。

Sobin 和 Fung 提出了片状构造模型，如图 9-39 所示。

按 Weible 模型，肺毛细血流是管流，而按 Sobin-Fung 的模型，肺毛细血流是片流。窄一看来，二者很不一样，实则流场差异甚小。在 Weible 模型里，管子非常短，由于进、出口影响，

与泊肃叶流很不一样,其流谱如图 9-40(a)示。Fung-Sobin 片流模型则强调肺泡片内毛细血管是层状的,柱子仅仅引起局部扰动,并使摩阻增大,不改变整个流型,见图 9-40(b)。可见,两种模型的流型十分相似。而片流模型的分析要简易得多。

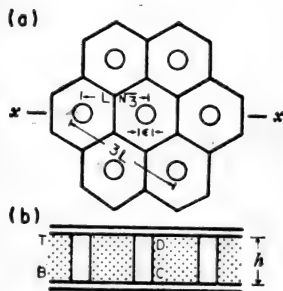


图 9-39  
Sobin-Fung 片状结构模型

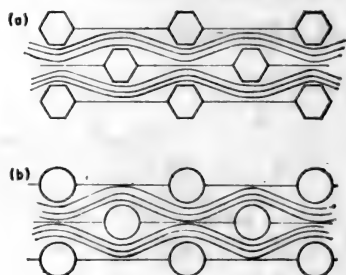


图 9-40  
(a) Weibel 管流流谱,  
(b) Fung-Sobin 片流流谱。

按片流模型(见图 9-39),重要的几何参数是:片厚度  $h$ , 支柱直径  $\epsilon$ , 支柱间距  $a(a_1 = \sqrt{3}a)$ , 片层体积与血容量之比  $S$ , 有

$$S = 1 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \left( \frac{\epsilon}{l} \right)^2 \quad (7-1)$$

据 Sobin 等测量<sup>[49]</sup>,  $p = 15\text{mmHg} - 25\text{mmHg}$  时,

$$\epsilon = 2.71 - 5.04 \mu\text{m}$$

$$a = 7.70 - 9.78 \mu\text{m}$$

$$h = 6.7 - 8.9 \mu\text{m}$$

$$S = 0.89 - 0.94 \mu\text{m}$$

具体数据见文献[49]或[13]。

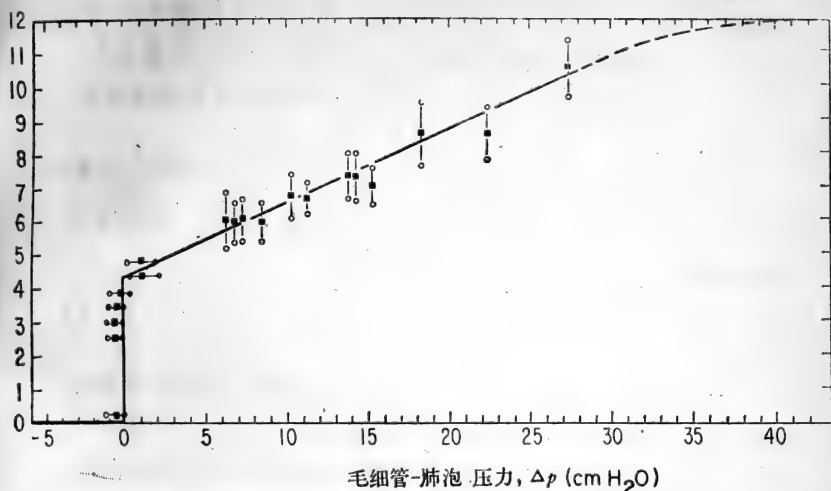


图 9-41 肺泡片的  $p-h$  关系  $h = 4.28 \pm 0.219 \Delta p$

### § 7-2 肺泡片的弹性

实验证明，肺泡隔膜膜层在膜平面内变形很小，可以不计。但其厚度是随内、外压差而改变的。图 9-41 是冯元桢和 Sobin 等测量猫肺所得的结果， $h$  与压差  $\Delta p = p - p_A$ ，有如下关系：

当  $\Delta p \leq -\delta$  时， $h = 0$   $\delta = 1 \text{ cm H}_2\text{O}$

当  $-\delta \leq \Delta p \leq 0$  时， $h = h_0 + \frac{h_0}{\delta} \cdot \Delta p$ ,

$$h_0 \approx 4.28 \mu\text{m}$$

当  $0 \leq \Delta p \leq p_c$  时， $h = h_0 + \alpha(p - p_A)$ ,

$$p_c \approx 35 \text{ cm H}_2\text{O}, \quad \alpha = 0.219 \mu\text{m/cm H}_2\text{O}$$

当  $\Delta p > p_c$  时， $h = h_\infty$ ， $h_\infty \approx 12 \mu\text{m}$

(7-2)

### § 7-3 肺毛细血管内血液的表观粘度

任何系统，不论其几何形状如何，只要确知均质牛顿流体

在其间流动时的压力-流量关系,那么,当任何非牛顿流体,例如血液,流过该系统时,假设它也服从同样的压力-流量关系,就可以测定其压力差和流量,来确定非牛顿流体的表观粘度  $\mu_a$ 。

如果我们不知道牛顿流体在某系统内流动时的压力流量关系,但可以通过实验来测定其压差和流量,那么,就可以确定血液在该系统内流动时的相对粘度  $\mu_r$ 。

$$\mu_r = \left[ \frac{\Delta p}{Q} \right]_b / \left[ \frac{\Delta p}{Q} \right]_N \quad (7-3)$$

显然,表观粘度、相对粘度不是血液的固有属性,而是血液和系统边界相互作用的某种宏观表示。

对肺毛细血管组织来说,当牛顿流体在其内运动时,所受阻力取决于片层构造的几何形状 ( $h, \varepsilon, a, S$  以及片层宽度  $W$  等)、流动方向与柱子的夹角  $\theta$ 、流体粘度  $\mu$ 、平均流速  $U$  等。按量纲分析原理,有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h^2}{\mu U} \nabla p &= -k \left( \frac{W}{h} \right) f \left( S, \frac{h}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{a}, \theta, Re \right) \\ Re &= \frac{\rho U h}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

$k \left( \frac{W}{h} \right)$  称为宽度因子,  $f$  是几何摩擦系数。

根据方管流动的解,当  $\frac{h}{W} < 0.2$  时,宽度因子有:

$$k \simeq 12 \left( 1 - 0.63 \frac{h}{W} \right)^{-1} \quad (7-5)$$

$f$  则由无限伸展的片层结构内牛顿流动的解给出。Lee<sup>[5]</sup> 和 Fung<sup>[5]</sup> 在低雷诺数下求出了解(见§7-4),因而  $f$  是已知的。

当血液流过肺泡片层时,除上述因素外,阻力还和红细胞压积  $H$ 、自然红细胞直径  $D_i$  与片厚  $h$  之比,红细胞膜弹性等

有关,因而

$$\nabla p = -\frac{U}{h^2} \cdot \mu_a \left( H, \frac{D_c}{h}, \dots \right) k \left( \frac{W}{h} \right) f \left( S, \frac{h}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{a}, \theta, Re \right)$$

由此,可确定肺毛细血管组织内血液的表现粘度。

颜荣次和冯元桢<sup>[53]</sup>用明胶颗粒模拟红细胞,用流态硅橡

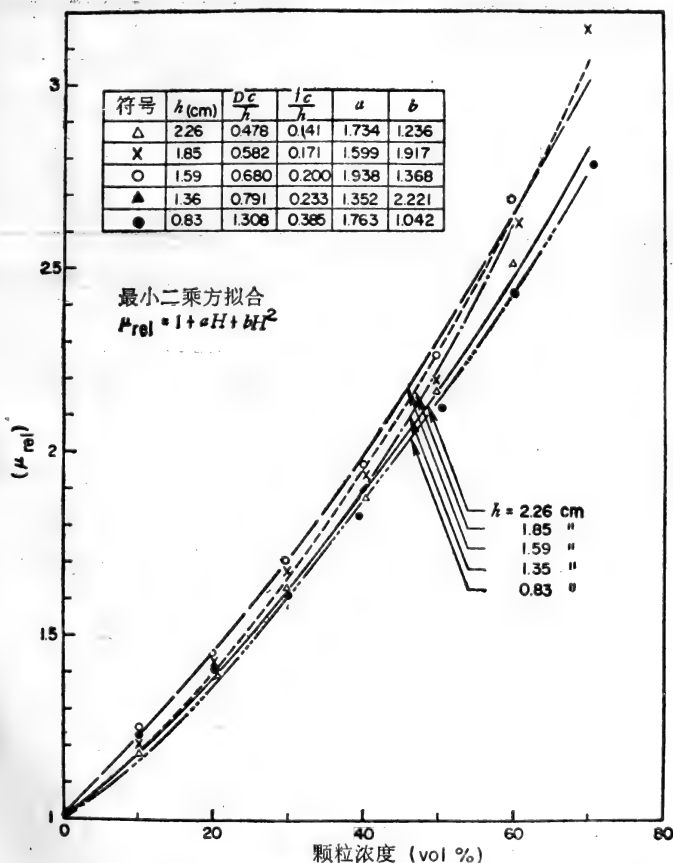


图 9-42 肺毛细血管流  $\mu_r$ -H 关系<sup>[53]</sup>

胶模拟血浆,测量它们在肺泡泡间膜片层模型中流动的阻力。所得结果见图 9-42。可见:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + aH + bH^2 \quad (7-6)$$

常数  $a$ 、 $b$  列于表 9-3。

表 9-3<sup>[53]</sup>

$\frac{D_c}{h}$	$\frac{t_c}{h}$	$a$	$b$
0.478	0.141	1.734	1.236
0.582	0.171	1.599	1.917
0.680	0.200	1.938	1.368
0.791	0.233	1.352	2.221
1.308	0.358	1.763	1.042

据此,肺毛细血管组织中的血流可按牛顿流体处理,只要将  $\mu$  改为  $\mu_a$ 。

#### § 7-4 肺毛细血流问题的数学描述

和体循环毛细血流一样,肺循环毛细血流也是不连续的,因为片厚度  $h$  与红细胞尺度同量级。作为近似,可把血液看作是均质牛顿流体,但其粘度由(7-6)确定。由于雷诺数很小(约为  $10^{-2}$ ),故惯性效应可以忽略,这样片流服从斯托克斯方程。

取直角坐标系  $(x, y, z)$ , 原点位于某一支柱轴线中点,  $x, y$  轴平行于隔膜,  $z$  与膜垂直,速度场为  $(u, v, w)$ 。定常状态下有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$



$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7-8)$$

因为片很薄,故与  $u, v$  相比  $w$  为小量;  $\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial}{\partial y}$  与  $\frac{\partial}{\partial z}$  相

比亦是小量,均可不计,这样(7-7)(7-8)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7-10)$$

如果没有支柱,则边界条件很简单,

$$z = \pm \frac{h}{2}: \quad u = 0, \quad v = 0$$

因为是斯托克斯流,  $u, v$  在  $z$  方向均呈抛物形分布,可设:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \bar{U} \\ v &= \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \bar{V} \end{aligned} \right\} \quad (7-11)$$

$\bar{U}, \bar{V}$  为沿截面的平均速度。将(7-11)代入(7-9)得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{12\mu\bar{U}}{h^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{12\mu\bar{V}}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-12)$$

(7-11)对  $z$  积分,应用壁面无滑流条件可得:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (h\bar{V}) = 0 \quad (7-13)$$

由于片层内有许多支柱, 流场变得十分复杂, 求解十分困难。为此, 冯元桢引进当地平均速度的概念。

设速度场可分解为一个平均流场和一个扰动流场:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= U(x, y) + u'(x, y, z) \\ v(x, y, z) &= V(x, y) + v'(x, y, z) \\ w(x, y, z) &= w'(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (7-14)$$

定义平均速度:

$$U(x, y) = \frac{1}{Ah} \iint_A dx' dy' \int_{-h/2}^{h/2} u(x', y', z) dz \quad (7-15a)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{Ah} \iint_A dx' dy' \int_{-h/2}^{h/2} v(x', y', z) dz \quad (7-15b)$$

$A$  内包含足够多个支柱。 $u', v', w'$  的平均值为零。类似地, 可定义一平均压力  $P = P(x, y)$ 。

借助于(7-12), 应用量纲分析可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\mu U}{h^2} \cdot Kf_x \left( \frac{h}{a}, S, \dots \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\mu U}{h^2} \cdot Kf_y \left( \frac{h}{a}, S, \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-16)$$

连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial y} (hV) = 0 \quad (7-17)$$

将(7-16)代入(7-17)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{Kf_x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{h^3}{Kf_y} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right] = 0 \quad (7-18)$$

据(7-2),

$$P = \frac{h - h_0}{\alpha} + p_A$$

代入(7-18)得基本方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{Kf_x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{Kf_y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (7-19)$$

若不计  $K, f_x, f_y$  随空间位置的变化, 则(7-19)简化为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h^4 = 0 \quad (7-20)$$

设  $\Phi = h^4 = [h_0 + \alpha(P - p_A)]^4 \quad (7-21)$

则有:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7-22)$$

此即定常情况下, 壁面无渗漏时, 片流模型的数学定式。

推广于非定常流动、可透壁, 设渗滤服从 Starling 公式

则连续方程(7-17)变为:

$$\frac{\partial(hU)}{\partial x} + \frac{\partial(hV)}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial t} - 2K_f(P - p^*) \quad (7-23)$$

$$p^* = \pi_i - \pi_p - p_i$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{Kf_x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{h^3}{Kf_y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right] \\ = \mu\alpha \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2}{\rho} K_f \left( \frac{h - h_0}{\alpha} - p^* + p_A \right) \right] \end{aligned} \quad (7-24)$$

若  $f_x = f_y = f$ , 且  $K, f$  不随位置而变化, 则可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^4}{\partial y^2} = 4\mu K f \alpha \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2K_f}{\rho\alpha} (h - h^*) \right] \\ h^* = h_0 + \alpha(p^* - p_A) \end{aligned} \right\} (7-25)$$

## § 7-5 一维理论

上述片流方程和各种边界条件相结合, 可以揭示肺毛细血流的许多特性。为说明片流方程解的物理本质, 考虑最简单的一维模型。

如图 9-43 示, (a) 为两个平行的弹性薄片, 以一定间距用垂直的薄膜联结。若在水平方向加一拉力, 则弹性片均匀伸展,  $bc$  与  $ac$  长度比保持不变, 即  $s$  不变; (b) 中以具有不同弹

性模数的弹簧来代表支柱；(c)是受内压作用时的情况；(d)是血液流动时， $h$ 的变化。

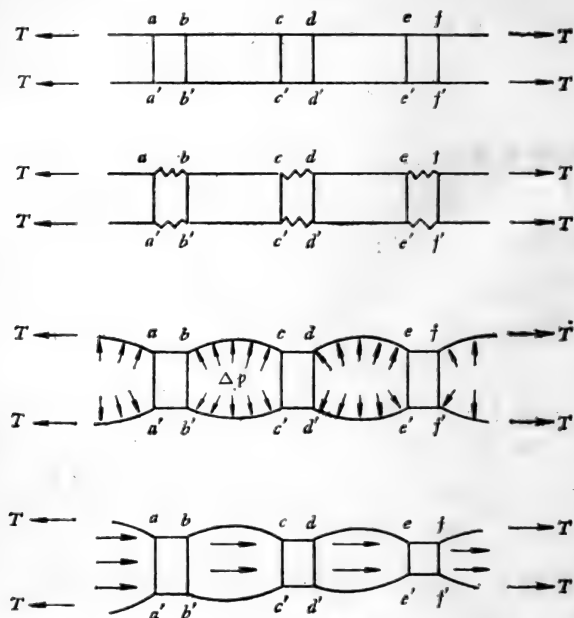


图 9-43 简化模型<sup>[30]</sup>

- (a) 膜受拉伸，(b) 支柱受拉伸，(c) 内压作用下的变形，  
(d) 血液流动时的变形。

考虑一维流动，平均速度为  $U$ ，流量为  $Q$

$$\therefore Q = hU \quad (7-26)$$

$$U = -\frac{h^2}{8\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (7-27)$$

若  $p$  在  $h = h_0 + \alpha p$  的范围内，则

$$\frac{dh}{dx} = \alpha \frac{dp}{dx} \quad (7-28)$$

$$\therefore Q = -\frac{1}{32\mu\alpha} \cdot \frac{dh^4}{dx} \quad (7-29)$$

因为流动定常且壁不可渗透,故  $dQ = 0$

$$\therefore \frac{d^2 h^4}{dx^2} = 0 \quad (7-30)$$

此即(7-20)的特例。积分之得

$$h^4 = c_1 x + c_2 \quad (7-31)$$

常数由边界条件确定。若取:

$$\text{动脉端: } x = 0, \quad h = h_a$$

$$\text{静脉端: } x = L, \quad h = h_v$$

$$\text{则} \quad h = \left[ h_a^4 - (h_a^4 - h_v^4) \frac{x}{L} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (7-32)$$

另一方面,(7-29)对  $x$  积分得:

$$\frac{1}{L} \int_0^L Q dx = \frac{1}{32\mu\alpha L} [h^4(0) - h^4(L)]$$

$$\therefore Q = \text{常数}, \quad \therefore \frac{1}{L} \int_0^L Q dx = Q.$$

$$\therefore Q = \frac{h_a^4 - h_v^4}{32\mu\alpha L} \quad (7-33)$$

令

$$q = \frac{32\mu\alpha L}{h_a^4} \cdot Q \quad (7-34)$$

则

$$q = 1 - \left( \frac{h_v}{h_a} \right)^4 \quad (7-35)$$

可见,若  $h_v < \frac{1}{2} h_a$ , 则  $(1 - q) < 0.06$ , 流动完全是由动脉端厚度  $h_a$  控制的。

若  $-\delta < p < 0$ , 则应用(7-2b)有:

$$Q = -\frac{\delta}{32\mu h_a} \cdot \frac{dh^4}{dx} \quad (7-36)$$

方程(7-30)及解(7-31)仍然有效。若取边界条件:

$$\left. \begin{aligned} x = 0: & \quad h = h_a \\ x = L_1: & \quad h = h_0 \\ x = L_1 + \Delta L: & \quad h = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-37)$$

则解为:

$$h(x) = \begin{cases} \left[ h_a^4 - (h_a^4 - h_0^4) \frac{x}{L} \right]^{\frac{1}{4}} & 0 \leq x \leq L_1 \\ h_0 \left[ 1 - \frac{x - L_1}{\Delta L} \right]^{\frac{1}{4}} & L_1 \leq x \leq L_1 + \Delta L \end{cases} \quad (7-38)$$

流量为:

$$Q = \frac{1}{32\mu\alpha L_1} (h_a^4 - h_0^4) = \frac{\delta}{32\mu h_0 \Delta L} \cdot h_0^4$$

若定义一新的通道长度  $L$ , 使:

$$Q = \frac{h_a^4}{32\mu\alpha L} \quad (7-39)$$

$$\therefore L = L_1 \left( 1 + \frac{h_0^4}{h_a^4 - h_0^4} \right) \quad (7-40)$$

方程(7-39)给出了一定  $p_a$  下, 肺毛细血流(一维模型)可能达到的最大流量。

## § 7-6 二维理论

按片流模型, 肺毛细血流是二维的。但沿每一条流线, 上述一维理论的结果仍可应用, 故首先要求出每个肺泡片层内流线的分布。

### 1. 流场计算

考虑定常流动。如前所述, 当  $p_a > p_v$  时, 片层厚度  $h$  在接近小静脉处才有明显变化。因此, 首先分析片层厚度  $h$  不变时的情况。边界条件是: 除了与小动脉、小静脉连接处外, 边界本身就是流线, 而出、入口截面压力已知。引进流函数  $\psi(x, y)$ :

$$hU = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad hV = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7-41)$$

这样,连续方程自动满足。由于  $h = \text{常数}$ ,运动方程变为:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7-42)$$

另一方面,按方程(7-16),压力  $P$  可以看作速度势。因为  $P$  和  $\phi$  都满足调和方程,等位线  $P = \text{常数}$  和流线  $\phi = \text{常数}$  相互正交,等压边界条件为:

$$P = \text{常数} \quad \text{或} \quad \frac{\partial P}{\partial s} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (7-43)$$

这里  $s$  代表流线切向,  $n$  代表流线法向;构成流线的边界上,应满足条件:

$$\phi = \text{常数} \quad \text{或} \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (7-44)$$

由此,不难用松弛法 (relaxation method) 求出流线和等压线,如图 9-43(a) 示。图中压力梯度与等压线间距成反比,流速与流线间距成反比。水平等压线为  $\frac{1}{2}(p_a + p_v)$ 。

现考虑弹性片层内的流动,层厚  $h$  与  $(p_a - p_v) = \Delta p$  线性相关。 $\Phi = h^4$  满足调和方程(7-22),其边界条件为:

$$\text{在进口截面上: } \Phi = h_a^4 = 1 + h_v^4$$

$$\text{在出口截面上: } \Phi = h_v^4$$

$$\text{沿流线: } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (7-45)$$

$$\text{令 } \Phi = \Phi' + h_v^4 \quad (7-46)$$

则  $\Phi'$  亦满足调和方程,但边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \Phi' &= 1, & \text{进口截面} \\ \Phi' &= 0, & \text{出口截面} \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} &= 0, & \text{沿流线} \end{aligned} \right\} \quad (7-47)$$





$$\int_L Q ds = - \int_L \frac{1}{\mu k f} [h_0 + \alpha \Delta p]^3 \frac{d(\Delta p)}{ds} \cdot ds \quad (7-50)$$

$L$ 是沿线长度。设 $\mu k f$ 是常数,则单位宽度上、沿流线的平均流量为:

$$\bar{Q} = \frac{1}{4 k f L \alpha} [(h_0 + \alpha \Delta p_a)^4 - (h_0 + \alpha \Delta p_v)^4] \quad (7-51)$$

$$\Delta p_a = p_a - p_A, \quad \Delta p_v = p_v - p_A$$

参照泊肃叶律,(7-51)可写为:

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \frac{1}{4 \mu f k L} (p_a - p_v) & [(h_0 + \alpha \Delta p_a)^3 + (h_0 + \alpha \Delta p_a)^2 (h_0 \\ & + \alpha \Delta p_v) + (h_0 + \alpha \Delta p_a)(h_0 + \alpha \Delta p_v)^2 + (h_0 + \alpha \Delta p_v)^3] \end{aligned} \quad (7-52)$$

设肺泡汽层平面面积为 $A$ ,流线平均长度为 $\mathcal{L}$ ,则有效宽度为 $\frac{SA}{\mathcal{L}}$ ,这样每一肺泡片的血流量为:

$$F = \frac{SAQ}{\mathcal{L}} = \frac{SA}{4 \mu k f \mathcal{L}^2 \alpha} [(h_0 + \alpha \Delta p_a)^4 - (h_0 + \alpha \Delta p_v)^4] \quad (7-53)$$

若令

$$C = \frac{4 \mu k f \mathcal{L}^2 \alpha}{SA} \quad (7-54)$$

则(7-53)变为:

$$F = \frac{1}{C} (h_a^4 - h_v^4) \quad (7-55)$$

$\mathcal{L}$ 由流函数 $\psi$ 求出:

$$\frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_2}^{\psi_1} \frac{1}{L(\psi)} d\psi \quad (7-56)$$

$\psi_1, \psi_2$ 是整个肺泡片的边界流线。

若将(7-55)写成如下形式:

$$p_a - p_v = \mathcal{R} \cdot F \quad (7-57)$$

$\mathcal{R}$  称为流阻, 则  $p_a > p_v > p_A$  时,

$$\mathcal{R} = \frac{C}{h_a^3 + h_a^2 h_v + h_a h_v^2 + h_v^3} \quad (7-58)$$

如果  $\Delta p_v > -\delta$ , 则  $h = 0$ , 整个肺泡片层内流量为零。如果  $-\delta \leq \Delta p_v < 0$ , 则  $h$  的微分方程 ( $\nabla^2 h^4 = 0$ ) 不变,  $h$  的解也不变, 只要将  $h-\Delta p$  关系改一下就行了: 当  $h > h_0$  时, 用 (7-2b); 当  $h < h_0$  时, 用 (7-2d)。这样压力-流量关系 (7-49) 依然有效, 但 (7-50) 应改为:

$$\int_L Q ds = \frac{1}{\mu k_f} \left\{ \int_{\Delta p_v}^0 \left( h_0 + \frac{h_0}{\delta} \Delta p \right)^3 d(\Delta p) + \int_0^{\Delta p_a} (h_0 + \alpha \Delta p) d(\Delta p) \right\} \quad (7-59)$$

当  $p_v \rightarrow -\delta$  时,  $h_v \rightarrow 0$ , 流量达极限值:

$$Q = Q_{\max} = \frac{1}{C} (h_0 + \alpha \Delta p_a)^4 \quad (7-60)$$

这种现象称为瀑布 (water-fall) 现象。

## § 8 毛细血流的随机性

§4 至 §7 分析了单一毛细血管或单元内的流动特性, 边界条件是确定的, 所得流量、压力、红细胞运动速度、红细胞压积等也都是确定的。但实际微循环流动的情况并不那么简单。

当我们用显微镜观察毛细血流时, 一个令人难忘的印象就是流动的极端不稳定。在任一毛细血管里, 血流除了心脏搏动引起的脉冲性外, 还有随机脉动。时快时慢, 时流时停。红细胞的分布也很不均匀。一片肠系膜或肌肉里, 某些区域红细胞浓度很高, 而邻近区域却很低, 甚至没有。同一时刻, 这种不均匀的分布是任意的, 而且随着时间的推移, 随机变

动。

造成这种随机性的原因是红细胞和毛细血管的相互作用。实际上,红细胞的尺度和形状并非均一,毛细血管的大小和长短也不一样,都是随机的,有一确定的分布谱。例如,等渗溶液中,红细胞平均直径是  $7.82\mu\text{m}$ , 标准差是  $0.62\mu\text{m}$ 。若按正态分布,则可以预计,100个红细胞中有一个直径为  $9.26\mu\text{m}$ ,1000个红细胞中,可望有一个直径达  $9.74\mu\text{m}$ ,若对  $10^8$ 个红细胞作统计,则最大红细胞直径在  $15.66-17.06\mu\text{m}$ 之间。红细胞直径的随机分布和毛细血管尺寸的随机分布相结合,就会造成各种各样的流动不稳定、不均匀现象。

为说明这一点,试看图 9-45 所示现象。考察联结血压为

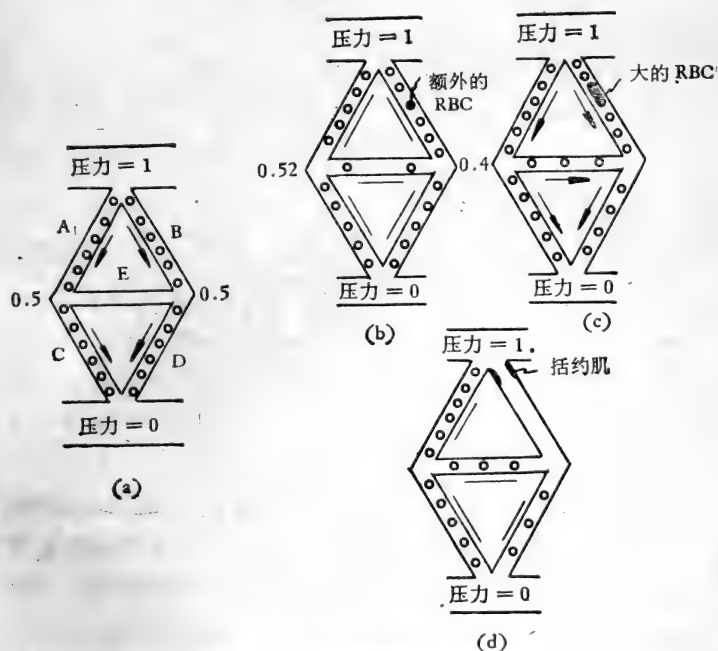


图 9-45 毛细迴路流动的随机性<sup>[14]</sup>

1 和 0 的两根血管的毛细血流迴路,有五根支管  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 。图(a)中,  $A$ 、 $B$  流速一样,压降相等,  $E$  管中无流动;图(b)中,由于偶然性,  $B$  管比  $A$  管多了一个红细胞,结果  $\Delta p_B > \Delta p_A$ ,引起  $E$  管中的血液流动;图(c)中,  $B$  管意外地进来一个大红细胞,  $\Delta p_B > \Delta p_A$ ,故  $E$  管有流动;图(d)是括约肌主动收缩,关闭  $B$  管,造成  $E$  管流动。

再者,如图 9-46 所示,在毛细血管分岔的地方,红细胞总

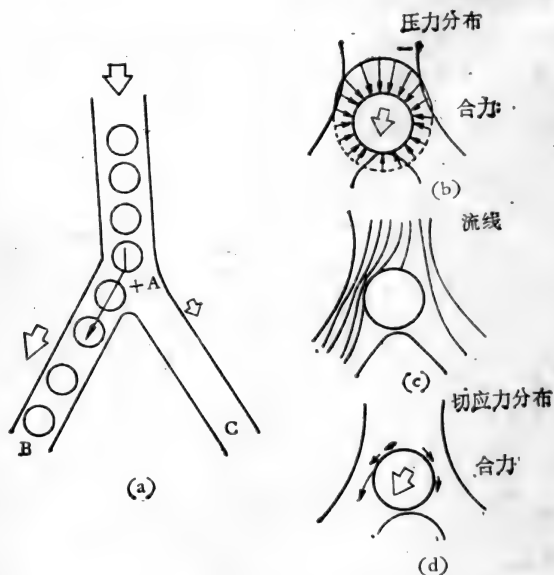


图 9-46 在分岔口红细胞趋向于快速管

是趋向于流速较快的支管。若因偶然因素(如出现大红细胞、压力脉动等)使支管  $AC$  内流速低于  $AB$ , 则  $AB$  管中的红细胞将比  $AC$  多。其原因是: (i) 如图(b)示, 红细胞(假定是小球)上半部压力分布是左、右对称的, 而下半部不对称,  $p_{AB} < p_{AC}$ , 则压力分布的合力将指向  $AB$  侧, 迫使更多的红细胞进

入 AB。(ii)在红细胞接触分岔口的瞬间,细胞被滞止,不旋转, AB侧流速快,表面剪应力大,AB侧较小。因而,切应力的合力也驱使红细胞流入 AB。但这种情况不是固定的,若  $t_1$  时刻,由于  $V_{AB} > V_{AC}, N_{AB} > N_{AC}$  ( $N$  为红细胞数目),这将使 AB 管流动阻力增大,而 AC 管阻力减小,从而使  $V_{AB}$  减小而  $V_{AC}$  增大。到  $t_2$  时刻,情况逆转, $V_{AB} < V_{AC}$ ,这时  $N_{AB} < N_{AC}$ 。如此反复,不断地改变。

此外,在肌肉中,大部分毛细血管平行于肌肉纤维,约有

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  与肌肉纤维垂直。

由于周围组织的支持,肌肉收缩不会使毛细血管关闭。若肌肉收缩时体积不变,则  $R^2 \propto \frac{1}{L}$ 。按泊肃叶定律,  $\Delta p \propto L, \Delta p \propto \frac{1}{R^4}$ ,故肌肉收缩将使平行于肌肉纤维的毛细血管阻力减小,流动加速。

为获得红细胞在分支毛细血管里分布的定量关系,颜荣次和冯元桢<sup>[55]</sup>作了模型试验,用圆柱管模拟毛细血管,用明胶做的盘状挠性颗粒作为血细胞,血浆则以硅橡胶流体代替,以获得在体毛细血流的雷诺数。典型结果如图 9-47 示,可见,在某一临界速度

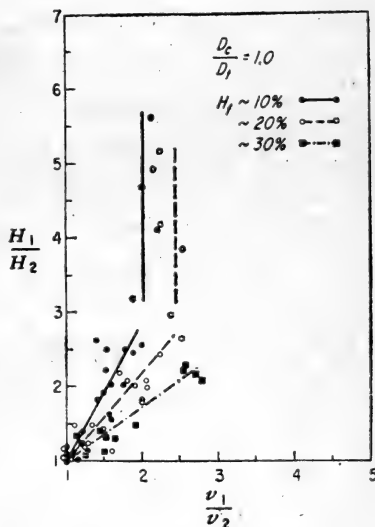


图9-47  $\frac{H^1}{H_2} - \frac{V_1}{V_2}$  曲线

- (a)  $\frac{D_c}{D_t} = 1.0,$  (b)  $\frac{D_c}{D_t} = 0.67,$   
(c)  $\frac{D_c}{D_t} = 0.50.$

比  $\left[\frac{V_1}{V_2}\right]_a$  以下,  $\frac{H_1}{H_2}$  与速度比  $\left[\frac{V_1}{V_2}\right]$  呈线性关系。

$$\frac{H_1}{H_2} - 1 = a \left( \frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \quad (8-1)$$

附标 1<sup>#</sup>、2<sup>#</sup> 表示支管。常数  $a$  与许多因素有关,最主要的是:红细胞自然直径与管径之比、红细胞刚度、来流红细胞压积等。当  $\frac{V_1}{V_2}$  高于某一临界值时,红细胞几乎完全流到流速较高的支管里去了,流速较低的支管里没有红细胞。来流红细胞压积越小,这积临界速度比越低。

考虑到肺毛细血流特点,颜荣次<sup>[56]</sup>用二维分支模型做了实验,结果与分支管流类似。

要对毛细血流的随机现象进行理论分析,必须知道:毛细血管直径和长度的分布、红细胞尺寸的分布、毛细血管组织及红细胞弹性的随机分布、小动脉能动收缩的规律等等。目前,人们对此认识还相当不足。

## 参 考 文 献

- [1] Fung, Y. C., Zweifach, B.: *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, **3**, 189, 1971.
- [2] Fung, Y. C.: *Advances Appl. Mech.*, **11**, 65, 1971.
- [3] Fung, Y. C.: *Microcirculation* Vol. 1, Ed. by Kaley, G. Altura, B. M., Univ. Park Press, 1977.
- [4] Fung, Y. C.: *Microvascular Res.*, **10**, 246, 1975.
- [5] Fung, Y. C.: *Microvascular Res.*, **17**, 88, 1979.
- [6] Lighthill, J.: *Mathematical Biofluidynamics*, S. I. A. M., Philadelphia, 1974.
- [7] Charm, S. E., Kurland, G. S.: *Blood Flow and Microcirculation*, Wiley, New York, 1974.
- [8] 岡小天: レオロジー——生物レオロジー, 裳華房, 1976.
- [9] Fung, Y. C., Sobin, S.: *J. Appl. Physiol.*, **26**, 472, 1969.
- [10] Fung, Y. C., Sobin, S.: *Circ. Res.*, **30**, 451, 1972.

- [11] Fung, Y. C. Sobin S.: *Circ. Res.*, **30**, 470; 1972.
- [12] Fung, Y. C.: Theoretical and Applied Mechanics Proc. 14th IUTAM Congress, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1976.
- [13] Fung, Y. C.: Bioengineering Aspects of the Lung, Ed. by West, J. B., Marcel Pekker. Inc. 1977.
- [14] Goldsmith, H. L.: Theoretical and Applied Mechanics Proc. 13th IUTAM Congress, North-Holland Publ. Co, Amsterbdam, 1972.
- [15] Goldsmith, H. L., Mason, S. G.: *J. Colloid Sci.*, **17**, 448, 1962.
- [16] Goldsmith, H. L., Mason, S. G.: Rheology, Theory and Application Vol. 4, Academic Press, New York, 1967.
- [17] Goldsmith, H. L.: Biomechanics Symposium. Ed. by van Buskirk, W. C., ASME, 1979.
- [18] Ho, B. P., Leal, L. G.: *J. Fluid Mech.*, **65**, 365, 1974.
- [19] Goldsmith, H. L. Skalak, R.: *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **7**, 213, 1975.
- [20] Goldsmith, H. L., Mason, S. G.: *Biorheology*, **12**, 181, 1975.
- [21] Cokelet, G. R.: Biomechanics: Itr foundations and objectives, Ed. by Fung, Y. C. et al., Prentice-Hall. Inc., Englewood Criffs, New Jersey, 1972.
- [22] Yen, R. T. Fung, Y. C.: *J. Appl. Physiol*, **42**, 578, 1977.
- [23] Oka: *Biorheology*, **12**, 157, 1975.
- [24] Ware, J. H., et al.: *Biorheology*, **11**, 97, 1974.
- [25] Ariman, T., Turk, M. A.: *Development in theoretical and applied Mechanics*, **6**, 3, 1972.
- [26] Popel, A. S., et al.: *Biorheology*, **11**, 427, 1974.
- [27] Petrov, H.: *Mechanics of Biological Solid*. Pub. House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1975.
- [28] Lew, H. S., Fung, Y. C.: *J. Biomech.*, **2**, 105, 1969.
- [29] Lew, H. S., Fung, Y. C.: *J. Biomech.*, **3**, 23, 1970.
- [30] Lee, J., Fung, Y. C.: *Microvascular Res*, **1**, 221, 1969.
- [31] Lew, H. S., Fung, Y. C.: *Biorheology*, **6**, 109, 1969.
- [32] Skalak, R.: 同 [21]
- [33] Skalak, R., Chen, P. H., Chien, S.: *Biorheology*, **9**, 67, 1972.
- [34] Bugliarello, G., Hsiao, C. C.: *Biorheology*, **7**, 5, 1970.
- [35] Sutura, S. P.: *Microvascular Res.*, **2**, 420, 1970.
- [36] Skalak, R.: *Biorheology*, **10**, 229, 1973.
- [37] Barnard, A. C. L. et al.: *Microvascular Res.*, **1**, 23, 1968.
- [38] Lin, K. L. et al.: *Microvascular Res.*, **5**, 7, 1973.
- [39] Gupta, B. B. et al.: *Microvascular Res.*, **12**, 91, 1976.

- [40] Lighthill, M. J.: *J. Fluid Mech.*, **34**, 113, 1968.
- [41] Lighthill, M. J.: *J. Fluid Mech.*, **52**, 475, 1972.
- [42] Fitz-Gerald, J. M.: *Proc. Roy. Soc. London Ser B*, **174**, 193, 1969.
- [43] Fitz-Gerald, J. M.: *Cardiovascular Fluid Dynamics*, Ed. by Bergel, D. H., Academic Press London, New York, 1972.
- [44] Michel, C. C.: 同 [43]
- [45] Apelblat, A. et al.: *Biorheology*, **11**, 1, 1974.
- [46] Salathe, E. P., An, K. N.: *Microvascular Res.*, **11**(1), 1, 1976.
- [47] An, K. N., Salathe, E. P.: *Microvascular Res.*, **12**, 103, 1976.
- [48] Papenfuss, H. D., Gross, J. F.: *Biorheology*, **14**, 217, 1977.
- [49] Sobin, S. et al.: *Circ. Res.*, **26**, 397, 1970.
- [50] Sobin, S., Fung, Y. C. et al.: *Circ. Res.*, **30**, 440, 1972.
- [51] Lee, J., Fung, Y. C.: *J. Biomech*, **2**, 187, 1969.
- [52] Fung, Y. C.: *J. Biomech*, **2**, 353, 1969.
- [53] Yen, R., Fung, Y. C.: *J. Appl. Physiol*, **35**, 510, 1969.
- [54] Fung, Y. C.: *Microvascular Res.*, **5**, 34, 1973.
- [55] Yen, R. T., Fung, Y. C.: *Biomechanics Symposium*, Ed. by Skalak, R. et al., ASME, 1977.
- [56] Yen, R. T.: *Biorheology*, **15**, 523, 1978.



## 第十章 生理流动中的传质问题

### § 1 生理流动中的物质输运方程

从物理本质而言,无论是生物系统还是无生命系统,物质输运过程均取决于物质分子的位移运动。其宏观表现为:流动(推动力是静压梯度)、扩散(其动力是化学势梯度)和化学反应。

认识物质输运过程有两个途径,一是从微观出发,研究各组元的分子运动,及其相互作用,建立统计的定量规律;二是从宏观现象出发,建立输运方程。对于生物系统来说,无论用哪种方法,目前都还不能准确地描述其传质过程。这里,基于均相、连续介质假设,从热力学第一定律出发,导出一些基本传输方程。

#### § 1-1 化学势和扩散

假设生理流体是  $N$  个组元组成的均相连续系统。考察任意小体积微元,其大小从宏观空间来说很小,而对于分子尺度而言则足够大,因而其内热力学变量是可以确定的。此时,系统的状态取决于整个均相介质的温度  $T$ 、压力  $p$ , 以及各组元的克分子数  $n_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ )。因而系统的任一性质  $G$ , 为

$$G = f(T, p, n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (1-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore dG &= \frac{\partial G}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial G}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial G}{\partial n_1} \cdot dn_1 \\ &+ \dots + \frac{\partial G}{\partial n_N} \cdot dn_N \quad (1-2) \end{aligned}$$

令

$$g_i = \left[ \frac{\partial G}{\partial n_i} \right]_{T, p, n_j} \quad (\text{除 } j \neq i \text{ 外, } j \text{ 取所有 } 1, \dots, N \text{ 的数})$$

$g_i$  称为性质  $G$  的偏克分子数, 它表示在无限大体系中, 加入 1 克分子量物质  $i$  所引起的某种性质  $G$  的改变量。

若取  $G$  为系统的自由能  $F$ ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial F}{\partial n_1} \cdot dn_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial n_N} \cdot dn_N$$

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial F}{\partial T} \right]_{p, n_1, \dots, n_N} &= -S \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial p} \right]_{T, n_1, \dots, n_N} &= V \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial n_1} \right]_{T, p, n_2, \dots, n_N} &= \phi_1 \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial n_2} \right]_{T, p, n_1, n_3, \dots, n_N} &= \phi_2 \\ &\vdots \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial n_N} \right]_{T, p, n_1, \dots, n_{N-1}} &= \phi_N \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

$S$  为均相系统的熵;  $V$  为均相的总容积;  $\phi_i$  为第  $i$  组元的化学势, 它表示 1 克分子  $i$  组元物质引起的整个系统化学势的改变。据此,

$$dF = -SdT + Vdp + \phi_1 dn_1 + \dots + \phi_N dn_N \quad (1-4)$$

进而, 可定义  $i$  组元的偏克分子体积  $V_i$  及偏克分子熵  $S_i$ :

$$V_i = \frac{\partial^2 F}{\partial n_i \partial p} = \frac{\partial \phi_i}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \quad \left. \right\} \quad (1-5)$$

$$S_i = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial n_i \partial T} = \frac{\partial \phi_i}{\partial T} = - \frac{\partial S}{\partial n_i} \right\}$$

分子运动是完全随机的,因而当  $p, T, n_i (i = 1, 2, \dots, N)$  均匀时,通过空间任一截面的  $i$  组元物质分子数的平均值为 0,没有宏观的物质迁移。若  $n_i$  不均匀,则通过空间任一截面的  $i$  组元分子数的平均值不等于 0,此时可观测到物质的宏观运输,这种现象称为扩散。类似地,若  $p, n_i$  均匀,但  $T$  不均匀,虽然单位体积内  $i$  组元物质的分子数一样,但运动平均速度不同,因而也引起宏观迁移;同样压力不均匀也会引起宏观迁移。后两种情况称为对流。

显然,扩散的速率取决于该组元物质的克分子体积浓度、分子的自由能以及该组元物质分子与其他组元分子的相互作用。若溶液浓度很稀,溶质分子间的相互作用可以忽略不计,那么  $i$  组元物质的扩散速率取决于其化学势梯度。

若系统由一种溶质和溶剂构成,则通过单位面积的溶质扩散流量  $J_D$  为:

$$J_D = -K \nabla \cdot \phi \quad (1-6)$$

若溶质浓度为  $c$ ,则(1-6)可写为

$$J_D = -K \left[ \frac{\partial \phi}{\partial c} \right]_{T,p} \cdot \nabla c \quad (1-7)$$

令

$$D = -K \left[ \frac{\partial \phi}{\partial c} \right]_{T,p} \quad (1-8)$$

则(1-7)变为:

$$J_D = -D \nabla c \quad (1-9)$$

负号表明扩散流方向与浓度梯度方向相反。 $D$  称为扩散系数,(1-9)称为 Fick 第一扩散定律。若浓度场是一维的,则

$$J_D = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1-10)$$

欲从(1-10)出发, 通过实验来确定扩散系数是很难测准的, 因为  $J_D$  的测量不容易很准。为此, Fick 导出了第二扩散定律。

仍然考虑一维问题, 在  $x$  处扩散流率为  $J(x)$ , 在  $(x + \Delta x)$  处为  $J(x + \Delta x)$ , 因而有:

$$\Delta c \cdot \Delta x = [J(x) - J(x + \Delta x)] \Delta t$$

应用(1-10), 有

$$\Delta c \cdot \Delta x = -D \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_x - \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right] \cdot \Delta t$$

$$\text{而} \quad \left[ \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x+\Delta x} = \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_x + \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right)_x \Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (1-11)$$

推广至三维:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c \quad (1-12)$$

$$\text{这里:} \quad \Delta = \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$$

此即 Fick 第二扩散定律。

## § 1-2 流动中的对流扩散

在流动的溶液中, 溶质的传输有两种不同的机理, 一是溶质浓度梯度引起的扩散, 二是在压力梯度作用下, 溶质分子和溶液一起输运, 二者之综合称为流动溶液中溶质的对流扩散。

考虑单溶质的稀溶液, 流动速度为  $\mathbf{u}$ , 则对流引起的溶质流率为

$$\mathbf{J}_v = c\mathbf{u} \quad (1-13)$$

故对流扩散时, 总的溶质流率为:

$$J_s = c\mathbf{u} - D\nabla c \quad (1-14)$$

在流动空间任取一控制体  $\Omega$ , 单位时间内流进其界面的溶质分子数, 等于体内浓度变化, 即:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} \cdot dV = -\oint J_s \cdot dS$$

$$\therefore \frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot J_s$$

$$\therefore \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot [D\nabla \cdot c] - \nabla \cdot [c\mathbf{u}] \quad (1-15)$$

若溶液是不可压缩流体, 则对流扩散方程变为。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla c = D\Delta c \quad (1-16)$$

若取直角坐标系  $(x, y, z)$ , 速度场为  $(u, v, w)$ , 则(1-16)可写为:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] \quad (1-17)$$

若流动定常, 则(1-17)变为

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] \quad (1-18)$$

引进扩散特征长度  $\delta$  (浓度在此距离上发生显著变化), 流动特征速度  $U$ , 参考浓度  $c_0$ , 令:

$$\bar{x} = \frac{x}{\delta}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\delta}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U},$$

$$\bar{w} = \frac{w}{U}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}$$

则(1-18)无量纲化为:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Pe} \left[ \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1-19)$$

$$Pe = \frac{U\delta}{D} \quad (1-20)$$

$Pe$  称 (Peclet) 数, 是对流扩散运动的相似参数。

若  $Pe \ll 1$ , 则对流项(方程左端)与扩散项相比, 可以忽略不计, 物质输运可以看作是纯扩散过程; 若  $Pe \gg 1$ , 则扩散项与对流项相比可不予考虑, 物质输运可看作是单纯对流。

Peclet 数与流动雷诺数 (以  $\delta$  为参考长度) 之比称为普朗陀(Prandtl)数(或 Schmidt 数):

$$Pr = \frac{Pe}{Re\delta} = \frac{\nu}{D} \quad (1-21)$$

$\nu$  是溶液的运动粘度。 $Pr$  表示流体分子运动引起的动量传输与扩散能力之比。当  $Pr \gg 1$  时,  $\nu \gg D$ , 此时即使流动速度很小, 对流引起的质量输运亦超过分子扩散引起的传输而占主导地位。

### § 1-3 物质输运方程的一般形式

上述分析只适于没有化学反应的系统, 且不考虑不同组元之间分子的相互作用。Snell<sup>[4]</sup> 计及这些因素, 导出了一般的传输方程。

取微元体积, 其内第  $i$  组元的平均密度为  $\rho_i$ , 平均速度为  $\mathbf{u}_i$ , 平均体积浓度为  $c_i$ , 平均化学势为  $\phi_i$ 。这些变量都是连续的, 且至少二次可微。

$i$  组元质点运动服从牛顿第二定律, 即

$$\begin{aligned} -c_i \nabla \phi_i + c_i \sum_j \xi_{ij} c_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + c_i \sum_l \mathbf{X}_{il} - \nabla \cdot \mathbf{t}_i \\ = \rho_i c_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \end{aligned} \quad (1-22)$$

这里,  $-c_i \nabla \phi_i$  是  $i$  组元化学势梯度引起的作用力;  $-c_i \sum_l$

$\mathbf{X}_i$  是作用于单位体积流体内  $i$  组元质点上, 所有体积力(如重力、电磁力等)的和;  $c_i \sum_j \xi_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i)$  是  $i$  组元和  $i$  组元分子, 由于平均速度不同而引起的分子间的相互作用,  $\xi_{ij}$  是分子摩擦系数;  $\hat{\mathbf{t}}_i$  是作用于  $i$  组元质点的流体微元表面应力, 其具体公式因模型而异;  $\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt}$  是加速度:

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1-23)$$

此外,  $i$  组元物质质量守恒, 有连续方程:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) - \sum_k \alpha_{ik} E_k = 0 \quad (1-24)$$

$E_k$  是涉及  $i$  组元的第  $k$  个化学反应速率,  $\alpha_{ik}$  是质量反应系数, 通常它正比于化学反应方程式的系数。显然

$$\sum_i \alpha_{ik} = 0$$

$\rho_i(1-23), (1-24)\mathbf{u}_i$ , 且因

$$\rho_i(\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{u}_i \cdot \nabla)(\rho_i \mathbf{u}_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \mathbf{u}_i) = \rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t}$$

这样, 从(1-22)(1-23)(1-24)可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i \mathbf{u}_i}{\partial t} = & -\nabla \cdot [\hat{\mathbf{t}}_i + \rho_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i] - c_i \nabla \phi_i + \mathbf{u}_i \sum_k \alpha_{ik} E_k \\ & + c_i \sum_{j=1}^n \xi_{ij} c_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \sum_l c_l \mathbf{X}_{il} \end{aligned} \quad (1-25)$$

流体微元质心速度为  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_i \rho_i \mathbf{u}_i}{\sum_i \rho_i} = \frac{1}{\rho} \cdot \sum \rho_i \mathbf{u}_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (1-26)$$

因为:  $\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{u} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{u} - (\mathbf{u}_i - \mathbf{u})(\mathbf{u}_i - \mathbf{u})$   
 故(1-25)可改写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_i \mathbf{u}_i)}{\partial t} = & -\nabla[\hat{\mathbf{t}}_i + \boldsymbol{\kappa}_i + \rho(\mathbf{u} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{u})] \\ & - c_i \nabla \phi_i + c_i \sum_{j=1}^n \xi_{ij} c_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \sum_l c_l \mathbf{X}_{il} \\ & + \mathbf{u}_i \sum_k \alpha_{ik} E_k \end{aligned} \quad (1-27)$$

这里:  $\boldsymbol{\kappa}_i = \rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u})(\mathbf{u}_i - \mathbf{u})$  (1-28)

方程(1-27)对全部组元求和,即得流体的运动方程:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = \nabla \cdot (\hat{\mathcal{F}} - \rho \hat{\mathbf{I}} - \rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + c \mathbf{X} + \sum_{i,k}^{n,m} \mathbf{u}_i \alpha_{ik} E_k \quad (1-29)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_i = & -(\hat{\mathbf{t}}_i + \hat{\mathbf{h}}_i), & \hat{\mathcal{F}} = & \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{F}}_i \\ \nabla \cdot (\rho \hat{\mathbf{I}}) = & \sum_{i=1}^n c_i \nabla \phi_i, & c \mathbf{X} = & \sum_{i=1}^{n,r} c_i \mathbf{X}_{il} \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

而:

$$\hat{\mathbf{t}}_i = c_i \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \xi_{ij} \delta_j \nabla c_j \mathbf{u}_j \quad (1-31)$$

$\delta_j$  是分子发生相互作用的距离。

当系统内无化学反应时,将(1-31)代入(1-29)则得纳维-斯托克斯方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} = & \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla(\rho \hat{\mathbf{I}}) + c \mathbf{X} \\ \mu = & \sum_{i,j} c_i \delta_i \xi_{ij} \delta_j c_j \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

当系统内无化学反应,且惯性效应、粘性作用、体积力均



可忽略不计时, 物质输运过程变为简单的自由扩散, 此时, (1-27)变为

$$\nabla \phi_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} c_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad (1-33)$$

设  $j$  组元单位面积上的流量为  $\mathbf{J}_j$ ,

$$\mathbf{J}_j = c_j \mathbf{u}_j \quad (1-34)$$

则

$$\nabla \phi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \xi_{ij} \mathbf{J}_j - \frac{1}{c_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \xi_{ij} c_j \mathbf{J}_i \quad (1-35)$$

引进自由扩散阻力系数  $R_{ij}$ , 则

$$R_{ij} = \begin{cases} -\xi_{ij}, & i \neq j \\ \frac{1}{c_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \xi_{ik} c_k, & i = j \end{cases} \quad (1-36)$$

则自由扩散方程(1-15)可改写为

$$-\nabla \phi_i = \sum_{j=1}^n R_{ij} \mathbf{J}_j \quad (1-37)$$

方程(1-29)给出了有化学反应时、非均匀多组元系统流动的一般规律, 方程(1-27)则描述了系统每个组元的运动规律。应用于具体系统时, 还必须考虑边界上的传输特性。对生物系统来说, 边界是各种各样的生物膜, 具有异乎寻常的输运特性, 它们构成了生理流动中传质问题的特色。

目前, 从方程(1-27)(1-29)出发对生物系统中的传质问题作全面分析, 还不可能, 只能考虑其中的一、二个因素。第九章分析了静压梯度和化学势梯度引起的、通过毛细血管壁的流体输运。本章讨论生物系统最基本的传质问题——通过细胞膜的物质输运, 以及血液流动时, 氧和二氧化碳等气体的传输过程。二者的共同特点是对流传输与扩散传输相比, 可以忽略不计。

## § 2 通过细胞膜的物质运输

细胞的生命活动需要不断地从周围液体中吸取养料，并不断地从细胞内部排出废料，此过程就是细胞间隙液（组织液）和细胞质之间通过细胞膜的物质运输。为维持代谢活动的适宜环境，使运输过程处于代谢活动所需的最适状态，组织液中的养料和废物应保持一定的浓度。这通过毛细血流和组织液之间的物质交换来实现。

如第九章 §6 所述，正常生理状态下，毛细血流的透壁滤失略高于再吸收，因而组织液在组织内部缓慢地向一定方向流动，最后汇集于淋巴管，形成淋巴流动，并通过淋巴系统流回大静脉中。但是，组织液的流动很慢，对细胞膜的传质过程几乎没有影响，故在此把组织液看作是静止的。

另外，细胞内外压力相等，不存在对流，各组元之间的内摩擦亦可不计，因而细胞膜传质的主要形式是各种类型的扩散和化学反应。但这里的扩散比一般扩散现象复杂得多。

表 10-1 列出了细胞液和组织液主要组分的含量。单位为 [meq/l 体积克分子当量浓度]

可见，在组织液和细胞液之间，许多组分浓度悬殊，例如，组织液中  $\text{Na}^+$  为细胞液的 14 倍，而  $\text{K}^+$  仅为细胞液的  $\frac{1}{28}$ ；细胞液的  $\text{Cl}^-$  是组织液的  $\frac{1}{26}$ ，而磷酸脂却为其 19 倍。显然，细胞内外，这些组元的化学势梯度相当大，这将迫使这些组分向对方扩散。但令人惊异的是：这种浓度差是稳定的。要维持这种状态，需要消耗相当大的能量来平衡化学势梯度。因而，细胞膜不是单纯的半透膜，它具有多种化学泵，因而能对进、

出细胞的所有组元的输运过程进行选择控制。现在的问题是：这种选择性控制的机理是什么？各种组元的传输规律如何？这当然和细胞膜的结构有密切关系。

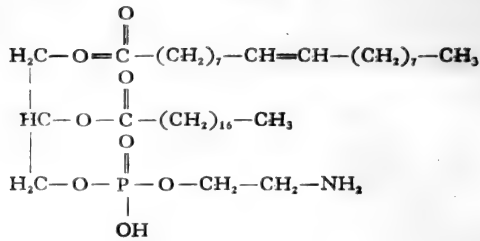
表 10-1 组织液和细胞液组分<sup>[2]</sup>

组 元	组 织 液	细 胞 液
Na <sup>+</sup>	142meq/l	10meq/l
K <sup>+</sup>	5meq/l	141meq/l
Ca <sup>++</sup>	5meq/l	<1meq/l
Mg <sup>++</sup>	3meq/l	58meq/l
Cl <sup>-</sup>	103meq/l	4meq/l
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	28meq/l	10meq/l
磷酸脂	4meq/l	75meq/l
SO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	1meq/l	2meq/l
葡萄糖	90mg/100ml	0—20mg/100ml
氨基酸	30mg/100ml	200mg/100ml
胆固醇脂	0.5g/100ml	2—95g/100ml
磷酸脂		
中性脂类		
氧分压 (P <sub>O<sub>2</sub></sub> )	35mmHg	20mmHg
二氧化碳分压 (P <sub>CO<sub>2</sub></sub> )	46mmHg	50mmHg
pH 值	7.4	7.0

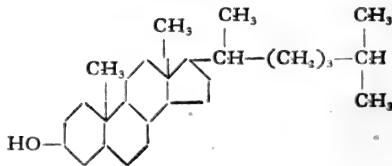
## § 2-1 膜的化学组分

人的红血球、皮肤、肌肉、肝、脑、神经索等组织的细胞膜的化学组分大体上相同，蛋白质约 50—60%，脂类约 30—35%，多糖、RNA 和其它组分占 5—10%。蛋白质主要是长链、纤维状的弹性蛋白质；脂类中占主导地位的是磷酸脂，占脂类总量的 65%，胆固醇脂 25%，其他脂类占 10%。典型结构如下：

### 磷酸脂



### 胆固醇脂



## § 2-2 细胞膜的结构

细胞膜很薄,约 80—100 Å, 有弹性, 其结构至今尚不清楚。目前流行的模型如图 10-1 示。它由两列磷酸分子构成,

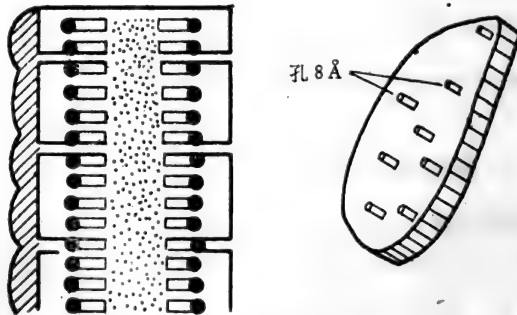


图 10-1 细胞膜结构模型

其疏水链基团(脂肪酸)指向中间, 而亲水分子团(极性磷酸根)指向两边, 其两侧是有间断的蛋白层, 外侧蛋白层上覆盖着

一层粘多糖。

此模型能说明为什么可溶于脂类的物质很容易透过细胞膜,而不溶于脂类的物质则不易透过。但它不能解释,水、尿素等为什么能自由地穿过细胞膜。据此,人们推测,膜上还有许多小孔,直径约  $8 \text{ \AA}$ , 据估计,孔截面积占整个细胞膜表面积的  $\frac{1}{1600}$ 。这些小孔是水及可溶于水但不溶于脂类的低分子量物质的主要输运通道。

不同物质通过孔道的扩散速度主要取决于分子有效尺寸与孔径之比。表 10-2 列出了若干低分子量物质通过红细胞膜的孔道扩散率数据,以水合  $\text{Na}^+$  的扩散率为 1。

表 10-2 红细胞膜的孔道扩散率<sup>[2]</sup>

物 质	分子直径( $\text{\AA}$ )	与孔径之比	相对扩散率
水	3	0.38	50,000,000
尿素	3.6	0.45	40,000,000
水合 $\text{Cl}^-$	3.86	0.48	36,000,000
水合 $\text{K}^+$	3.96	0.49	100
水合 $\text{Na}^+$	5.12	0.64	1
乳酸离子	5.2	0.65	—
丙三醇	6.2	0.77	—
核糖	7.4	0.93	—
半乳糖	8.4	1.03	—
葡萄糖	8.6	1.04	0.4
甘露糖醇	8.6	1.04	—
蔗糖	10.4	1.30	—
乳糖	10.8	1.35	—

由此可见,水合  $\text{Cl}^-$  和  $\text{K}^+$  尽管大小差不多,扩散率却相差很大,前者为后者的 360,000 倍。据此,可以推测,在孔道边缘排列着一系列带正电荷的分子团,如图 10-2 示。它们可

能是  $\text{Ca}^{++}$ ,也可能是某种蛋白质分子。

### § 2-3 通过细胞膜的物质运输形式

综观实验结果,细胞膜的物质运输有下述三种形式:

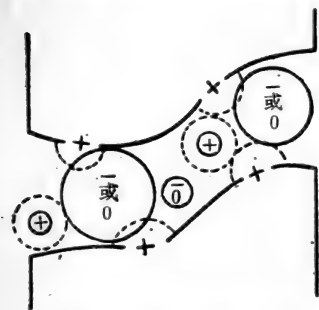


图 10-2 孔道内的正离子分布

(1) 被动扩散。它由组元的化学势差推动,有电解质和非电解质之别,可溶于脂类的物质、水、尿素及可溶于水的低分子物质的运输属于此类。

(2) 载体扩散。某些不溶于脂类,分子直径又大于孔径的物质,首先在高浓度侧和膜内某种物质(载体)形成可溶于

脂类的某种新物质,它在膜内由化学势梯度驱动而扩散,在另一侧还原,释放出被传输物质的分子。这种载体传输不消耗化学能。

(3) 能动传输。其特点是:传输方向与化学势梯度方向相反,故其运输需消耗化学能。方式很多,可通过化学载体,亦可通过囊泡。大分子的运输主要依靠这种方式。

下面分别讨论这三种传输过程的特点和规律。

### § 3 通过细胞膜的扩散和渗透

组织液和细胞液的溶剂都是水。水、可溶于水的低分子溶质、可溶于脂类的物质,都是以通常的分子扩散形式传输的,为区别于借助于载体的扩散,称为被动扩散。

由于细胞膜对水分子和溶质分子的可透性不同,在溶质通过细胞膜扩散的同时,存在溶剂(水)的渗透流,因而不能将

§1 中的自由扩散方程直接应用于此。下面分别讨论水的渗透、非电解质和电解质扩散等三个问题。

### § 3-1 水的渗透

渗透实质上就是溶剂通过半透膜的扩散。若用半透膜将纯水和溶液隔开,在同样的温度和压力下,单位时间内纯水侧与膜碰撞的水分子数高于溶液侧,故形成一股宏观的水流,通过膜流向溶液侧。这种现象叫渗透。若无外界作用,这种流动将一直持续到两侧水浓度相等。但若在溶液侧加适当压力,如图 10-3 示,使得压差引起的水的对流量和渗透流量平衡,此压力差称为溶液的渗透压:

$$\pi = p_1 - p_2 \quad (3-1)$$

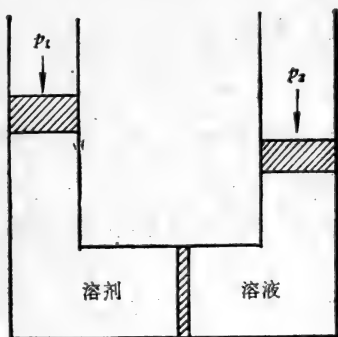


图 10-3 渗透压概念

在一定的温度和压力下,溶液渗透压是溶剂浓度的度量,更确切地说,是溶剂活动性的度量。它和溶剂的化学势有密切关系。设溶液中水的偏克分子容积为  $V_w$ ,化学势为  $\phi_w$ ,则

$$\pi = \frac{\phi_w}{V_w} \quad (3-2)$$

$\phi_w$  是温度  $T$  及水的偏克分子数  $g_w$  的函数,若  $g_w = 1$  (纯水) 时,  $\phi_w = 0$ , 则:

$$\phi_w = -\mathcal{R}T \ln g_w \quad (3-3)$$

$\mathcal{R}$ 为通用气体常数,  $\mathcal{R} = 82.05 \text{ cm}^3 \cdot \text{atm} / \text{g} \cdot \text{mol} \cdot \text{K}$ 。

若溶液含有N种溶质, 它们的偏克分子数为  $g_j$ , 那么

$$\phi_w = -\mathcal{R}T \ln \left( 1 - \sum_{j=1}^N g_j \right), \quad (3-4)$$

$$\therefore \pi = -\frac{\mathcal{R}T}{V_w} \ln \left[ 1 - \sum_{j=1}^N g_j \right] \quad (3-5)$$

当溶液浓度很低时, 展开  $\ln \left[ 1 - \sum_{j=1}^N g_j \right]$ , 取首项, 即得范德霍夫 (Van der Hoff) 方程

$$\pi = \frac{\mathcal{R}T}{V_w} \sum_{j=1}^N g_j \quad (3-6)$$

设体积克分子浓度为  $c_j$ ,  $g_j = c_j V_w$ , 则

$$\pi = \mathcal{R}T \sum_{j=1}^N c_j \quad (3-7)$$

要指出, 对于渗透来说, 起决定作用的是溶液中溶质分子的数目, 即克分子数, 而不是溶质分子的质量。因为, 同样温度下, 每个分子的平均动能相等, 质量愈大, 速度愈小, 而作用于膜的冲量几乎完全一样。

溶液渗透压常用的单位叫 Osmole, 1升纯水中含1克分子不分解的溶质时, 其渗透压等于1Osm。例如, 1M (1克分子/升) 葡萄糖溶液的渗透压为1Osm, 而1M NaCl溶液的渗透压则为2Osm, 因为NaCl在水中分解为  $\text{Na}^+$  和  $\text{Cl}^-$ , 故溶液中粒子数目是1M葡萄糖溶液的2倍。1Osm (相对于纯水) 等于 1,073,000 mmHg。

### 1. 溶质活动性修正

渗透不仅是溶剂活动性的度量, 还和溶质活动性有关。设



溶质活动性系数为  $\gamma_j$ , 则

$$\pi = -\frac{\mathcal{R}T}{V_w} \ln[1 - \sum \gamma_j g_j] \quad (3-8)$$

对于稀溶液, 有

$$\pi = \mathcal{R}T \sum \gamma_j c_j \quad (3-9)$$

溶质活动性的影响主要表现于可离解溶质, 此时, 溶质颗粒带有电荷, 它们总被带相反电荷的粒子包围着。当颗粒运动时, 不是拉着周围的颗粒一起运动, 就是冲破周围颗粒的包围, 运动受到阻碍, 有效浓度降低。

可离解溶质的活动性系数可以用 Debye-Hückel 公式来估计,

$$-\ln \gamma_j = \alpha e_j^2 I^{\frac{1}{2}} \quad (3-10)$$

$e$  是电解质离子电荷绝对值,  $I$  是溶液的电离强度, 有:

$$I = \frac{1}{2} \sum e_j^2 c_j \quad (3-11)$$

$\alpha$  为常数, 25°C 时,  $\alpha = 0.509$ , 0°C 时,  $\alpha = 0.488$  此公式限于稀溶液。

在更一般的情况下, 可用以下经验公式

$$-\ln \gamma_j = \alpha e_j^2 \frac{I^{\frac{1}{2}}}{1 + I^{\frac{1}{2}}} \quad (3-12)$$

$\alpha$  值同上。

血浆中, 一价离子的活动性系数大体上都在 0.7 左右, 高价离子的活动性更低。

## 2. 渗透流量

组织液和细胞液都不是纯溶剂, 此时, 渗透流的驱动力为两侧的渗透压差  $\Delta\pi$ ,

$$\Delta\pi = \mathcal{R}T \Delta(\sum c_j \cdot \gamma_j) \quad (3-13)$$

通过细胞膜的总的水渗透流量为

$$Q_i = KA(\Delta\pi - \Delta p) \quad (3-14)$$

$K$  是渗透系数,  $A$  是膜表面积。  $K$  必须用实验测定, 目前尚无法用理论预计。

### 3. 溶液的分类

生理学上, 常把溶液分为等张 (isotonic)、高张和低张三类, 等张溶液渗透压和血浆或细胞内液一样。高张和低张溶液渗透压分别高于或低于血浆或细胞液。

0.15M 的 NaCl 溶液是和红细胞内部液体等张的溶液。在高张溶液中, 红细胞内水渗出, 细胞皱缩; 而在低张溶液中, 水渗入红细胞, 使之膨胀, 最后破裂。

### § 3-2 非电解质的扩散

溶液中非电解质组元  $i$  的扩散系数为  $D_i$ , 通过细胞膜的有效扩散系数为  $K_{D_i}D_i$ , 单位时间内、单位面积上  $i$  组元的克分子流量为:

$$J_i = -D_i K_{D_i} \nabla c_i \quad (3-15)$$

另一方面, 由于溶剂通过细胞膜的阻力小, 高浓度侧体积增大, 相当于有一个宏观的溶液扩散流, 其克分子流量为  $\sum_{j=1}^N$

$J_j$  (包括溶剂在内), 其中  $i$  组元的流量为:  $c_i \sum_{j=1}^N J_j$ , 故通过细胞膜  $i$  组元物质总的扩散流量为:

$$J_i = -D_i K_{D_i} \nabla c_i + c_i \sum_{j=1}^N J_j \quad (3-16)$$

$\sum_{j=1}^N J_j$  必定引起细胞容积的变化, 而实际上, 正常情况下, 组织细胞体积没多大变化。故可设

$$\sum_1^N J_i \approx 0$$

这样(3-16)变为:

$$J_i = -D_i K_{Di} \nabla c_i \quad (3-17)$$

由于细胞膜很薄(厚度为 $\Delta$ ),扩散可看作一维的,即

$$J_i = -\frac{D_i K_{Di}}{\Delta} (c_{i2} - c_{i1}) \quad (3-18)$$

“2”指高浓度侧,“1”指低浓度侧。

此即非电解质通过细胞膜扩散运输的规律,关键是如何测定细胞膜的  $K_{Di}$  及溶质  $i$  自由扩散系数  $D_i$ 。一般设

$$K_{Di} = \frac{c_{im}}{c_{il}} \quad (3-19)$$

$c_{im}$  为  $i$  组元在细胞膜中的浓度。

### § 3-3 电解质的扩散

若组元是电解质,则扩散是以离子形式进行的。此时,决定扩散的除了离子浓度差、膜的可透性外,还有静电力。

假设:(i)化学势梯度和静电位梯度引起的扩散流是可叠加的,即问题是线性的;(ii)扩散是一维的;(iii)溶剂渗透引起的溶液宏观流动可以忽略不计。

此时,有:

$$J_i = -D_i \left( \frac{dc_i}{dx} + \frac{v_i F}{RT} c_i \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3-20)$$

这里,  $F$  是法拉第常数(每克分子单价离子的电荷),等于 96,496 库伦;  $\phi$  是电位(整个溶液中占优势的电位),  $v_i$  是化学价。

(3-20)亦可写为

$$J_i = -D_i \exp \left[ -\frac{v_i F}{RT} \cdot \phi \right] \cdot \frac{d}{dx} \left[ c_i \exp \left( \frac{v_i F}{RT} \cdot \phi \right) \right] \quad (3-21)$$

$c_i \exp \left[ \frac{v_i F}{RT} \cdot \phi \right]$  称为电化学活动性, 表示组元  $i$  在局部电场影响下的有效浓度。

若溶液中只含有一种离子, 且该组元通过膜的净流量为零, 则按(3-21)有

$$\frac{d}{dx} \left( c e^{\frac{vF}{RT} \psi} \right) = 0$$

$$\therefore c e^{\frac{vF}{RT} \psi} = \text{常数}$$

现膜的内缘标以 1, 外缘标以 2, 则

$$c_1 e^{\frac{vF}{RT} \psi_1} = c_2 e^{\frac{vF}{RT} \psi_2}$$

由此得扩散平衡时的膜电位差

$$E = \psi_2 - \psi_1 = \frac{RT}{vF} \ln \frac{c_1}{c_2} \quad (3-22)$$

此即能斯脱 (Nernst) 方程。

若溶液中含有多种离子, 则膜电位差由广义能斯脱方程给出。以细胞膜为例, 取占主导地位的组元  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$ , 则有

$$-E = \frac{RT}{F} \ln \frac{D_{\text{Cl}}[\text{Cl}]_1 + D_{\text{K}}[\text{K}]_2 + D_{\text{Na}}[\text{Na}]_2}{D_{\text{Cl}}[\text{Cl}]_2 + D_{\text{K}}[\text{K}]_1 + D_{\text{Na}}[\text{Na}]_1} \quad (3-23)$$

[ ] 表示该组元的克分子浓度。据此, 由表 8-1 的数据可以算出细胞膜电位差为  $-74\text{mV}$ , 而测量值为  $75\text{mV}$ , 相当一致。

按照广义能斯脱方程, 若被动扩散是唯一的传输机理, 且全部离子都能自由地通过膜, 则在平衡状态下, 膜电位差消失。但若某些离子不能自由地通过膜, 则存在稳定的膜电位差。而且, 这时由于膜两边离子浓度总是不平衡, 必定引起一恒定的溶剂渗透流。除非存在一个方向相反的压力梯度, 否则这种渗透流将继续下去, 直至低(离子)浓度侧的溶剂流光为止。因此, 细胞内、外总有一定的压差(尽管很小), 以防止上

述情况发生。

考虑膜内、外静压差的作用后，离解组元  $i$  的扩散流率为：

$$J_i = -D_i \left[ \frac{dc_i}{dx} + \frac{v_i F}{RT} \cdot c_i \cdot \frac{d\psi}{dx} + \frac{c_i V_i}{RT} \cdot \frac{dp}{dx} \right] \quad (3-24)$$

这里  $V_i$  是  $i$  组元的偏克分子容积。

压差引起的扩散与化学势梯度、电位梯度引起的扩散相比，是一个小量，但其影响不可忽略。

#### §4 载体扩散

溶质借助于膜中某种中间物质而传输，其方向与该溶质的浓度梯度方向一致，这种传质过程称为载体扩散，它不需要输入能量。

这种输运过程的机理如图 10-4 示。在与 II 区（高浓度区）邻接的膜内，溶质 S 与膜中载体起化学反应：



由于 II 区内，S 的浓度  $[S]_2$  较高，故  $\alpha_1 > \alpha_2$ ，即结合率高于分解率，因而复合物 SA 的浓度  $[SA]_2$  较高，故 SA 在膜中向内侧扩散，在膜内缘，由于  $[S]_1$  较小，分解率高于结合率，即  $\alpha_1 < \alpha_2$ ，游离的 S 离开膜，进入 I 区。从而完成输运过程。与此同时，载体 A 在膜内缘浓度升高，从外缘扩散，从而使整个输运过程得以继续。

许多不溶于脂类而分子又大于膜孔隙直径的溶质，就是依靠这种机理而通过细胞膜进行交换的。葡萄糖的输运就是一个典型的例子，其载体为某种分子量在 50,000 左右的蛋白质。

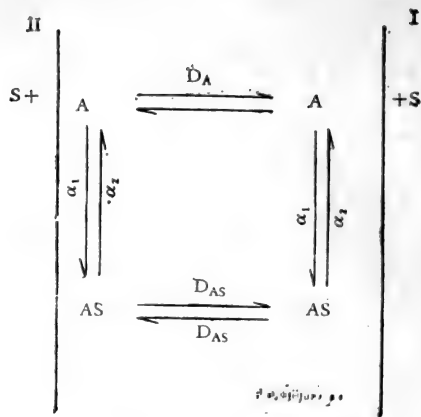


图 10-4 载体扩散

但要指出,载体扩散并不限于大分子物质,某些小分子量物质,既可通过一般扩散传输,亦可通过载体扩散运输。这时,物质的扩散速率与浓度梯度的关系是非线性的。

载体扩散虽然名为扩散,而且复合物的运输也确实依靠分子热运动进行的,但实际上它和一般的扩散过程有根本的区别。一般扩散过程中,每个颗粒的运动是相互独立的,彼此间无影响。而载体扩散不然,载体系统(载体加被载物)的运动是彼此相关的。正是这种相互作用产生了载体扩散的特色。

对于一定的物质 S,膜内的载体数量是有限的,例如一个红细胞膜内糖的载体数不高于 500,000 个。当  $[S]_2$  不大,只有一小部分载体参与运输时,载体运输的宏观特性与一般扩散无多大差别。但当大部分载体均与 S 结合形成 SA 时,即系统接近于饱和状态时,载体运输就会发生异常的现象。

首先,按照常规扩散规律, $[S]_2$  愈高,扩散流量愈大;但当载体接近于饱和时, $[S]_2$  增高不仅不会使  $J_s$  增大,反而会使之

减小,发生反传输现象。因此;若  $t = 0$  时刻,  $[S]_1 = [S]_2$ , 且载体近于饱和, 则  $t > 0$  时,  $[S]_1$  会降低。图 10-5 是葡萄糖和木糖反向传输实验结果。

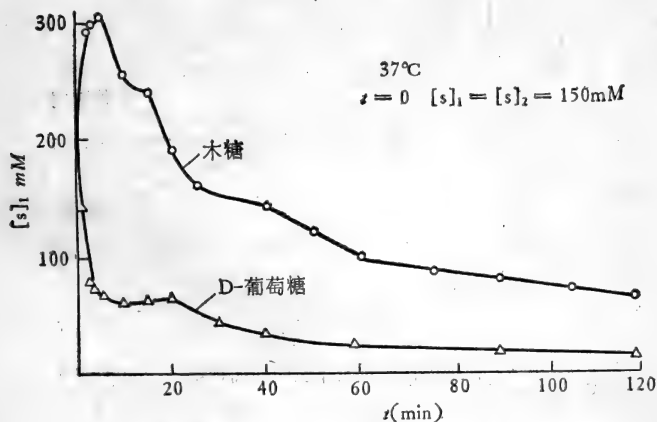


图 10-5 葡萄糖和木糖通过细胞膜的反向传输实验结果<sup>[1]</sup>

其次,同一载体可以载运几种物质。这时一种物质的传输率会因另一种物质同时存在而受到影响,或使传输加速,或使传输受到限止。图 10-6 是一个例子,它说明甘露糖存在对人体红细胞葡萄糖运输的影响,可见一开始起促进作用,使之加速;而后则起限止作用,使之减速。

载体扩散的速率取决于: (i) 膜两侧溶质的浓度差; (ii) 膜中载体的数量; (iii) 结合和分解反应的速率  $\alpha_1, \alpha_2$ ; (iv) 复合物在膜中的扩散系数。

若化学反应速率远高于复合物在膜内的传输速率,则单溶质 S 的载体输运速率  $v_s$  可用下式确定:

$$v_s = \frac{[S]_2 - [S]_1}{m_2([S]_1 + K) + m_1([S]_2 + K) + \frac{b}{K}\{[S]_2([S]_1 + K) + [S]_1([S]_2 + K)\}} \quad (4-1)$$

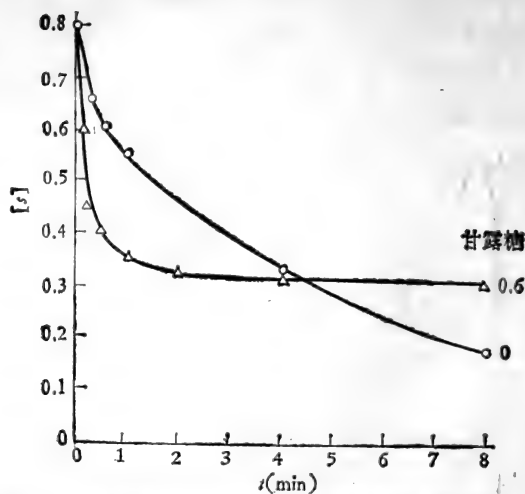


图 10-6 甘露糖存在对人体红细胞葡萄糖运输的影响<sup>[1]</sup>

这里

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \left[ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2D_{AS}} \right] \frac{1}{c_A} \\ m_2 &= \left[ \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{2D_{AS}} \right] \frac{1}{c_A} \\ b &= \frac{1}{2D_A c_A} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

$D_{AS}$  是复合物在膜中的扩散系数,  $D_A$  是载体在膜中的扩散系数,  $c_A$  是膜中载体浓度。

Wilbrandt<sup>[1]</sup> 测得的人体红细胞膜对于葡萄糖的载体运输参数列于表 10-3

表 10-3 葡萄糖通过人体红细胞膜的运输系数<sup>[1]</sup>

温度	$m_1$	$m_2$	$b$	$K$	$n^*$
20°	0.93	48.5	0.57	0.0065 = 1.95mM	60
37°	0.18	3.33	0.15	0.0166 = 4.98mM	105

\*  $n$  为抽样数目。



## §5 能动运输

至此,还有两个问题没有回答。

(1) 按表 10-1,细胞内 $K^+$ 浓度比细胞外高得多,而 $Na^+$ , $Cl^-$ 则比细胞外低得多,这种状况何以能持久地维持?

(2) 一些很大的蛋白质分子、颗粒甚至细菌是怎样进入细胞内部的?

到目前为止,尚未确切的答案,只有一些看起来是合理的推测。但有一点是肯定的,即细胞膜内存在某种能动的运输过程。

### §5-1 推进运输

所谓推进运输 (facilitated transport) 实质上也是一种载体运输,但与前述载体扩散不同,其运输方向与该溶质化学势梯度方向相反,因而需要细胞提供能量,即是一种有源运输。

对于推进运输的规律,目前知之甚少。其机理如图 10-7 示。在酶的催化作用下,溶质分子 S 和载体分子 C 在低浓度侧结合形成复合物 CS,然后借助于生化能,向高浓度侧迁移,在膜边缘,再借助于酶的催化作用,使 CS 分解,放出溶质 S,完成运输过程。载体 C 再向外缘迁移。所需的能量由三磷酸腺苷(ATP)裂解而提供。

图 10-8 以 $K^+$ 和 $Na^+$ 为例说明推进运输的原理。在细胞内侧,在三磷酸腺苷酶的催化作用下, $Na^+$ 与膜中载体 Y 结合成 NaY,利用 ATP 裂解的能量,NaY 迁移至外缘,在酶作用下,NaY 分解为 $Na^+$ 和 Y, $Na^+$ 进入细胞间隙液, Y 则发生分裂,产生 $K^+$ 的载体 X。在某种酶的催化下, $K^+$ 与 X 结合形成 KX,借助于 ATP 的能量迁移至内缘,再分解为 $K^+$ 和 X, $K^+$ 进

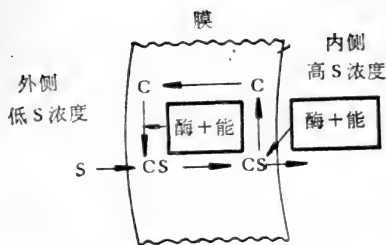


图 10-7 能动的载体运输——推进运输

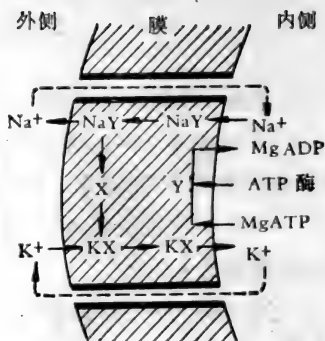


图 10-8  $K^+$ 、 $Na^+$ 的能动运输

入细胞内，X 则变成  $Na^+$  的载体 Y。如此往复。这种能动运输的速率超过了  $K^+$ 、 $Na^+$  化学势梯度引起的被动扩散，因而表 10-1 所列的状态得以维持。

除了  $K^+$ 、 $Na^+$  外， $Cl^-$ 、 $Ca^{++}$ 、 $Mg^{++}$ 、 $HCO_3^-$ 、 $H^+$ 、 $I^-$ ，铁离子、尿素离子、氨基酸和某些糖类分子等都可能发生能动的载体运输。每一组元都有特定的载体，亦可能几个组元借助同一载体而运输。

推进运输的具体形式可能有三种，如图 10-9 所示。

(1) 溶质分子和载体分子结合，一起移迁。 $K^+$ 、 $Na^+$ 、 $Cl^-$  的运输常取此形式。

(2) 载体分子链很长，其一端的键与 S 结合，然后旋转  $180^\circ$ ，再分解，放出 S。

(3) 载体分子链很长，沿链有一系列能动位置，溶质 S 的分子在一端与链结合后，在化学能作用下，沿这一连串能动位置跳跃，最后进入另一侧。

能动运输在人体某些区域和某些器官中特别重要，如肾、肝、肠等。激素对能动运输有显著影响，尤其是氨基酸。

## § 5-2 囊泡运输

当细胞接近一个大分子或颗粒时,膜首先凹进去一块,如图 10-10 示,形成一空腔,吞进大分子或颗粒。当膜完全包围吞入物后,就从膜边缘分裂,变成囊泡。囊泡再借助某种动力,在膜中迁移,到达另一侧时再将吞入物释放。许多蛋白质大分子是通过这种方式传输的。当然,这种传输也是有源的。

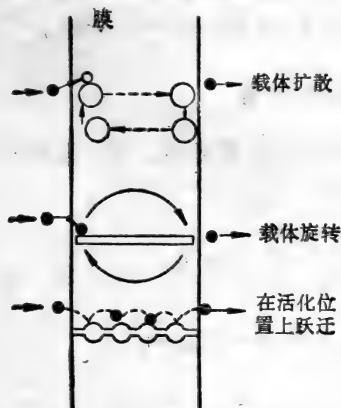


图 10-9 能动的载体运输的几种可能形式

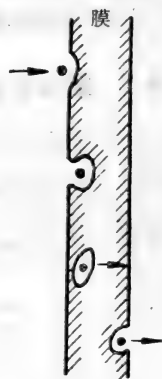


图 10-10 囊泡运输

## § 6 体循环系统氧及二氧化碳的运输

氧及二氧化碳的正常运输是人体各组织细胞生存的必要条件,这靠血液循环来完成。然而氧在血浆中的浓度  $c_{p1}$  不高。设:

$$c_{p1} = \frac{\text{溶于血浆的氧的容积}}{\text{血浆容积}}$$

按亨利(Henry)定律

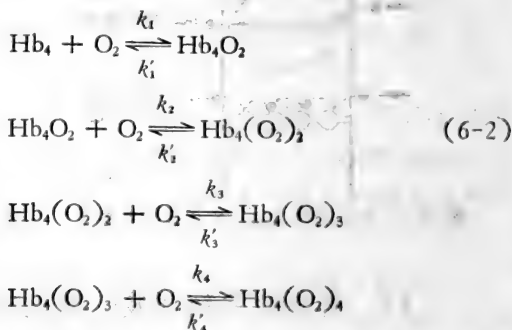
$$c_{p1} = K_{O_2} P_{O_2} \quad (6-1)$$

这里  $P_{O_2}$  是氧偏压,  $K_{O_2}$  是氧在血浆中的溶解度。血浆 90% 是

水,故  $K_{O_2}$  实际上是氧在水中的溶解度。 $T = 310K$  (即  $37^\circ C$ ) 时,  $K_{O_2} = 0.023 \text{ ml O}_2 / \text{ml 血浆} \cdot \text{大气压}$ , 在大气压及  $37^\circ C$  下,  $P_{O_2}$  约为 0.21 大气压, 这样,  $c_{P1} \approx 0.48 \text{ ml} / 100 \text{ ml 血浆} = 0.0048$ 。可见血浆含氧量很低, 单靠它不足以维持细胞的生命活动。为此, 血液内含有大量红细胞, 其主要功能就在于有效地输运氧和二氧化碳。但二者机理不同, 氧以血红蛋白为载体, 以各种氧化血红蛋白的形式输运; 而二氧化碳则借助于红细胞中某种酶的催化作用, 以  $\text{HCO}_3^-$  形式传输。

### § 6-1 氧与血红蛋白的结合

血红蛋白分子有四个血红素基团, 每个基团可结合一个氧分子。其反应式为



$k_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为血红蛋白 ( $\text{Hb}_4$ ) 氧化反应速率,  $k'_i$  为还原速率。如果每个血红蛋白都和 4 个氧分子结合, 那么按血球容积比  $\phi = 45\%$ , 每个红细胞含有 25% 血红蛋白计算, 每 100 ml 血液含氧量为 20ml, 比血浆中的含氧量高两个量级。

但实际上血红蛋白与氧的结合有四种形式, 为表征血红蛋白和氧的结合状况, 引进氧饱和度  $\beta$ , 它是 1 克分子血红蛋白所结合的氧克分子数与它能结合的氧克分子数的比值。 $\beta$  是氧偏压  $P_{O_2}$ 、温度及溶液 pH 等的函数。

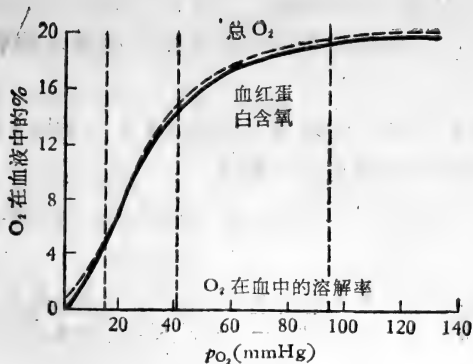


图 10-11  $\beta$ - $P_{O_2}$  曲线<sup>[10]</sup>

图 10-11 是正常生理状态 ( $pH = 7.4$ ,  $T = 310K$ , 即  $37^\circ C$ ,  $P_{CO_2} = 40-45mmHg$ ) 下的平衡饱和曲线(测量结果), 据此, Hill 得如下经验公式:

$$\beta = \left( \frac{P_{O_2}}{P_{O_2}^*} \right)^m \left[ 1 + \left( \frac{P_{O_2}}{P_{O_2}^*} \right)^m \right]^{-1} \quad (6-3)$$

一般  $m = 2.5-2.6$ ,  $P_{O_2}^*$  是  $T = 310K$ ,  $pH = 7.4$ ,  $P_{CO_2} = 40mmHg$  时的氧偏压, 取  $P_{O_2} = 27.2mmHg$ 。

(6-3) 是纯经验的, 不涉及氧与血红蛋白的反应机理。Adair 根据反应机理, 提出中间产物假说, 用反应速率及  $P_{O_2}$  来确定  $\beta$ 。定义反应常数  $K_i$ :

$$K_i = \frac{k_i}{k_i'} \quad (6-4)$$

则(6-2)中每个反应产物的浓度为:

$$\left. \begin{aligned} [Hb_4O] &= K_1 \cdot P_{O_2} [Hb_4] \\ [Hb_4O_2] &= K_2 P_{O_2} [Hb_4O] = K_1 K_2 P_{O_2}^2 [Hb_4] \\ [Hb_4O_3] &= K_3 P_{O_2} [Hb_4O_2] = K_1 K_2 K_3 P_{O_2}^3 [Hb_4] \\ [Hb_4O_4] &= K_4 P_{O_2} [Hb_4O_3] = K_1 K_2 K_3 K_4 P_{O_2}^4 [Hb_4] \end{aligned} \right\} (6-5)$$

[ ]表示该组元的克分子浓度。

任意状态下，单位体积内与血红蛋白相结合的氧的克分子数为：

$$[\text{Hb}_4\text{O}_2] + 2[\text{Hb}_4\text{O}_4] + 3[\text{Hb}_4\text{O}_6] + 4[\text{Hb}_4\text{O}_8]$$

而血红蛋白能结合的氧克分子数为

$$4\{[\text{Hb}_4] + [\text{Hb}_4\text{O}_2] + [\text{Hb}_4\text{O}_4] + [\text{Hb}_4\text{O}_6] + [\text{Hb}_4\text{O}_8]\}$$

$$\beta = \frac{K_1 P_{\text{O}_2} + 2K_1 K_2 P_{\text{O}_2}^2 + 3K_1 K_2 K_3 P_{\text{O}_2}^3 + 4K_1 K_2 K_3 K_4 P_{\text{O}_2}^4}{4(1 + K_1 P_{\text{O}_2} + 2K_1 K_2 P_{\text{O}_2}^2 + 3K_1 K_2 K_3 P_{\text{O}_2}^3 + 4K_1 K_2 K_3 K_4 P_{\text{O}_2}^4)} \quad (6-6)$$

令  $B_1 = K_1$ ,  $B_2 = K_1 K_2$ ,  $B_3 = K_1 K_2 K_3$ ,  $B_4 = K_1 K_2 K_3 K_4$

则(6-6)变为：

$$\beta = \frac{B_1 P_{\text{O}_2} + B_2 P_{\text{O}_2}^2 + B_3 P_{\text{O}_2}^3 + B_4 P_{\text{O}_2}^4}{4(1 + B_1 P_{\text{O}_2} + B_2 P_{\text{O}_2}^2 + B_3 P_{\text{O}_2}^3 + B_4 P_{\text{O}_2}^4)} \quad (6-7)$$

若结合反应系数正比于血红蛋白中未结合的铁原子数，则

$$k_1 : k_2 : k_3 = 4 : 3 : 2_0$$

$$k'_1 : k'_2 : k'_3 = 1 : 2 : 3_0$$

$$K_1 : K_2 : K_3 = 4 : \left(\frac{3}{2}\right) : \left(\frac{2}{3}\right)_0$$

这样(6-6)简化为

$$\beta = \frac{K_1 P_{\text{O}_2} \left[ 1 + \left( K_1 \frac{P_{\text{O}_2}}{4} \right) \right]^3 + \frac{1}{4} K_1^3 K_4 P_{\text{O}_2}^4}{4 \left[ 1 + \frac{1}{4} K_1 P_{\text{O}_2} \right]^4 + \frac{1}{4} K_1^3 K_4 P_{\text{O}_2}^4} \quad (6-8)$$

归结为两个参数  $K_1, K_4$ 。

当  $P_{\text{O}_2} \ll 1$  时，

$$\beta \approx \frac{K_1 P_{\text{O}_2}}{4} \quad (6-9a)$$

当  $P_{O_2} \gg 1$  时,

$$\beta \approx \frac{4K_4 P_{O_2}}{1 + 4K_4 P_{O_2}} \quad (6-9b)$$

据此,可通过实验确定  $K_1, K_4$  值,有

$$K_1 = 0.32[\text{mmHg}]^{-1}, \quad K_4 = 8.8[\text{mmHg}]^{-1}$$

Kleman 等在(6-7)的基础上得:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{a_1 P_{O_2} + a_2 P_{O_2}^2 + a_3 P_{O_2}^3 + P_{O_2}^4}{a_4 + a_5 P_{O_2} + a_6 P_{O_2}^2 + a_7 P_{O_2}^3 + P_{O_2}^4}, & P_{O_2} \geq 10 \text{mmHg} \\ \beta &= 0.003683 P_{O_2} + 0.000584 P_{O_2}^2, & P_{O_2} \leq 10 \text{mmHg} \end{aligned} \right\} (6-10)$$

这里,  $a_1 = -8.5322 \times 10^3$ ,  $a_2 = 2.1214 \times 10^3$ ,

$$a_3 = -6.7074 \times 10, \quad a_4 = 9.3596 \times 10^5,$$

$$a_5 = -3.1346 \times 10^4, \quad a_6 = 2.3962 \times 10^3,$$

$$a_7 = -6.7104 \times 10$$

而  $P_{O_2}$  是  $T$ 、 $\text{pH}$  值、 $P_{\text{CO}_2}$  的函数,若以正常生理状态(见前)下的氧偏压  $P_{O_2}^*$  为参数,则

$$P_{O_2} = P_{O_2}^* 10^{[0.024(310-T) + 0.40(\text{pH}-7.40) + 0.06(\lg 40 - \lg P_{\text{CO}_2})]} \quad (6-11)$$

$P_{O_2}, P_{\text{CO}_2}$  均以  $\text{mmHg}$  为单位。

在这样平衡状态下,血液中氧体积浓度为:

$$C_{O_2} = 1.39\phi\zeta + K_{O_2}(1 - \phi)P_{O_2} \quad (6-12)$$

$\phi$  为红细胞体积浓度,  $\zeta$  为每个红细胞中血红蛋白的浓度。

根据反应式(6-2),化学动力学方程应为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [\text{Hb}_4\text{O}_2] &= k_1[\text{Hb}_4][\text{O}_2] - k_1'[\text{Hb}_4\text{O}_2] \\ \frac{d}{dt} [\text{Hb}_4(\text{O}_2)_2] &= k_2[\text{Hb}_4\text{O}_2][\text{O}_2] - k_2'[\text{Hb}_4(\text{O}_2)_2] \\ \frac{d}{dt} [\text{Hb}_4(\text{O}_2)_3] &= k_3[\text{Hb}_4(\text{O}_2)_2][\text{O}_2] - k_3'[\text{Hb}_4(\text{O}_2)_3] \\ \frac{d}{dt} [\text{Hb}_4(\text{O}_2)_4] &= k_4[\text{Hb}_4(\text{O}_2)_3][\text{O}_2] - k_4'[\text{Hb}_4(\text{O}_2)_4] \end{aligned} \right\} (6-13)$$

但并非每一步反应都能是实验确定其反应速率。通常所得的数据是还原的 Hb 基团浓度和饱和的 HbO<sub>2</sub> 浓度,或更一般的气体 X 的浓度。这样(6-2)可表为:



相应的动力学方程为

$$\frac{d}{dt} [\text{HbX}] = k[\text{Hb}][\text{X}] - k'[\text{HbX}] \quad (6-15)$$

若设 Hb 基团总的克分子数(包括还原的和饱和的)为 B, X 总克分子数(包括离解的和结合的)为 A, 且设反应速率  $k, k'$  不随时间变化, 则可得:

$$\frac{1}{F} \ln \frac{2y - (A + B + \Gamma) - F}{2y - (A + B + \Gamma) + F} = kt + \text{常数} \quad (6-16)$$

这里:

$$y = [\text{HbX}], \quad \Gamma = \frac{k'}{k}, \quad F = \sqrt{(A - B + \Gamma)^2 + 4B\Gamma}$$

F 为实数。若  $k' \ll k$ , 则(6-15)近似变为

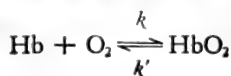
$$\frac{dy}{dt} = k(B - y)(A - y) \quad (6-17)$$

其解为:

$$y = \frac{A \left\{ 1 - \frac{B}{A} K \exp[(A - B)kt] \right\}}{1 - K \exp[(A - B)kt]} \quad (6-18)$$

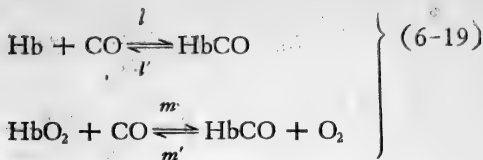
K 是积分常数。

(6-14)~(6-18)适于任何气体与血红蛋白的反应。生理上感兴趣的是三种反应, 除氧化反应



外, 还有:





对此,上述解均适用。

## § 6-2 氧在血红蛋白溶液中的运输

图 10-12 是在恒定压差下,血红蛋白稀溶液中氧、氮的传输率与  $P_{\text{O}_2}$ 、 $P_{\text{N}_2}$  的关系(实验结果)。在高偏压段,氧、氮传输率的差异起因于它们在水中扩散能力(可溶性)不同;低偏压段,氧传输率远高于氮则是氧与 Hb 结合的缘故,是一种载体运输。

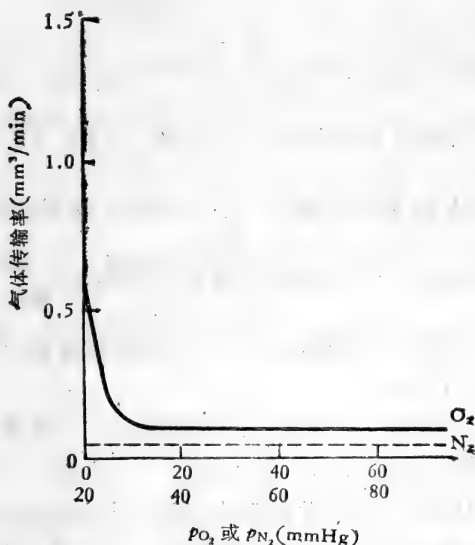


图 10-12 氮、氧传输率随  $P_{\text{N}_2}$ 、 $P_{\text{O}_2}$  的变化<sup>[2]</sup>

设氧的运输是定常的,这样,总的氧流量决定于溶解于水中的氧的扩散及溶液中  $\text{HbO}_2$  的扩散,即:

$$J_{O_2} = -D_{O_2} \frac{dc_{O_2}}{dx} - D_{HbO_2} \frac{dc_{HbO_2}}{dx} \quad (6-20)$$

$$\therefore \beta = \frac{c_{HbO_2}}{c_{Hb} + c_{HbO_2}} \quad (6-21)$$

$$\therefore J_{O_2} = -D_{O_2} \frac{dc_{O_2}}{dx} - D_{HbO_2} (c_{Hb} + c_{HbO_2}) \frac{d\beta}{dx} \quad (6-22)$$

因为 Hb 氧化反应速率与扩散速率相比很快，故可假设反应物和产物是平衡的，这样  $\beta$  与  $c_{O_2}$  的关系可由其平衡关系  $\beta = \beta(c_{O_2})$  ((6-3)或(6-8)，或(6-10)与(6-12)相结合) 确定，这样，

$$\left. \begin{aligned} J_{O_2} &= -D_{\text{eff}} \frac{dc_{O_2}}{dx} \\ D_{\text{eff}} &= D_{O_2} + D_{HbO_2} (c_{Hb} + c_{HbO_2}) \frac{d\beta}{dc_{O_2}} \end{aligned} \right\} \quad (6-23)$$

$\therefore \frac{d\beta}{dc_{O_2}} \geq 0$ ，故  $D_{\text{eff}} \geq D_{O_2}$ 。且由图 10-11 可见，当氧浓度较低 ( $0 \leq P_{O_2} \leq 40 \text{ mmHg}$ ) 时， $\frac{d\beta}{dc_{O_2}}$  较大，故  $D_{\text{eff}}$  亦较大；当氧浓度较高 ( $P_{O_2} > 40 \text{ mmHg}$ )、接近于饱和时， $\frac{d\beta}{dc_{O_2}} \rightarrow 0$ ， $D_{\text{eff}}$

$\rightarrow D_{O_2}$ 。这表明，血红蛋白引起的氧的载体运输，只有在氧分压较低时才有效。

由(6-12)可知  $P_{O_2}$  依赖于 pH 值，即  $H^+$  的浓度，故  $H^+$  势差也会影响氧的运输，Fox 和 Landahl 等对此作过分析。

上述分析建立于化学平衡的基础之上。而血红蛋白溶液-氧界面上是不平衡的，在实验室条件下，不平衡区的线尺度约为数微米，只要所分析问题的特征线尺度远大于此值，平衡假设即成立。但是，对红细胞来说，平衡假设不成立。此时必须计及反应速率，方程是非线性的。

### § 6-3 红细胞与血浆间的氧交换

血液里氧的输运过程不仅包括血红蛋白与氧的化学反应，还包括血浆及红细胞内部氧的扩散和氧通过红细胞膜的扩散。Hartridge 和 Roughton 曾将红细胞悬浮液及具有同样氧合能力的血红蛋白溶液的荷氧率作了比较，结果如图10-13

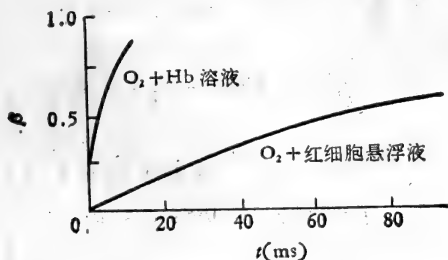


图 10-13 RBC 氧合率与 Hb 溶液的氧合率的比较<sup>[10]</sup>

示。可见氧饱和度从 40% 增至 60%，红细胞悬浮液所需时间是血红蛋白溶液的 16 倍。Hb 与氧的化学反应不会受红细胞膜存在与否的影响，故这种差异是红细胞膜改变了扩散过程所致。据此，Nicolson 和 Roughton 提出了如图 10-14 所示的

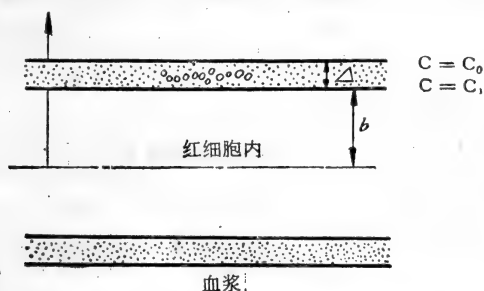


图 10-14 RBC 与血浆之间的氧传输模型

Hb-O<sub>2</sub> 反应扩散模型。红细胞膜外侧，血浆的氧浓度为  $c_p$ ，膜层内氧浓度为  $c'(x, t)$ ，红细胞内氧浓度为  $c(x, t)$ ，血红蛋白

浓度为  $\varphi(x, t)$ 。不考虑红细胞侧缘的氧传输, 则氧浓度的变化服从下列方程组:

$b < x \leq b + \Delta$  时:

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} \quad (6-24)$$

$0 \leq x \leq b$  时:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + k'(\varphi_0 - \varphi) - kc\varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= D_{\text{Hb}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k'(\varphi_0 - \varphi) - kc\varphi \end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

初始条件为:

$$t = 0 \text{ 时: } \left. \begin{aligned} c' &= \alpha c_0, & b \leq x \leq b + \Delta \\ \varphi &= \varphi_0, & 0 \leq x < b \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

边界条件为:

$$c = c_0 \quad \dots$$

$$\left. \begin{aligned} x = 0: & \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ x = b: & \quad c' = \alpha c, \quad \varphi = 0 \\ & \quad D_m \frac{\partial c'}{\partial x} = \alpha D \frac{\partial c}{\partial x} \\ & \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ x = b + \Delta: & \quad c' = c_p \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

$c_p =$  常数,  $\alpha$  表示氧在膜和水中溶解度的差异。

无量纲化, 设

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{t_D}{b^2}, \quad \eta = \frac{x}{b}, \quad C = \frac{c - c_0}{c_p - c_0}, \quad C' = \frac{c' - \alpha c_0}{c_p - c_0} \\ Y &= \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \gamma = (c_p - c_0)k b^2 / D, \quad q = \frac{k' b^2}{D}, \quad \zeta = \frac{D_{\text{Hb}}}{D} \\ \delta &= \frac{D_m}{D}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{b}, \quad a = \frac{c_0}{c_p - c_0}, \quad f = \frac{\varphi_0}{c_p - c_0} \end{aligned} \right\} \quad (6-28)$$

这样(6-24)–(6-26)变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C'}{\partial \tau} &= \delta \frac{\partial^2 C'}{\partial \eta^2}, & 1 \leq \eta \leq 1 + \varepsilon \\ \frac{\partial C}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - r f(C+a)Y + f q(1-Y), & 0 \leq \eta < 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial \tau} &= \zeta \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} - r(C+a)Y + q(1-Y), & 0 \leq \eta < 1 \end{aligned} \right\} (6-29)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau = 0: & \quad C = C' = 0, & 0 \leq \eta \leq 1 + \varepsilon \\ & \quad Y = 1, & 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \right\} (6-30)$$

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0 \quad (6-31)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta = 1: & \quad C = \alpha c' \\ & \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = \alpha \delta \frac{\partial c'}{\partial \eta} \\ \eta = 1 + \varepsilon: & \quad c' = 1 \end{aligned} \right\} (6-32)$$

作为近似,可假设:

(1) 氧能很快通过膜而扩散,细胞内任何区域因化学反应而失去的氧,立即可通过氧扩散而获得补偿,因而状态是准定常的,即

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} \sim 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} \sim 0 \quad (6-33)$$

(2) 在红细胞获取(或失去)氧的过程中,血红蛋白浓度几乎不变,  $\varphi \simeq \varphi_0$ , 即  $(1 - Y) \sim 0$ .

(3) 血红蛋白分子比氧分子大得多,因而其扩散系数  $D_{Hb}$  与  $D$  相比可以忽略不计,即  $\zeta \sim 0$ .

(4)  $\alpha = 1$ ,  $c_0 \simeq 0$

这样(6-29)简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 C'}{\partial \eta^2} &= 0, & 1 \leq \eta \leq 1 + \varepsilon \end{aligned} \right\} (6-34)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} = frCY, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2}} \right\}$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 1 + \varepsilon: & \quad C' = 1 \\ \eta = 1: & \quad C' = C \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: & \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \\ \eta = 1: & \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = \delta \frac{\partial C'}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

由(6-34a)及(6-35)可得:  $\eta = 1$  时,

$$\frac{\partial C'}{\partial \eta} = (1 - C)\varepsilon \quad (6-37)$$

故(6-36b)可改写为:

$$\eta = 1: \quad \frac{\partial C}{\partial \eta} = \delta\varepsilon(1 - C) \quad (6-38)$$

由此可得(6-34)的解:

$$C(\eta) = \frac{\text{ch}\omega\eta}{\text{ch}\omega + \frac{\omega}{\lambda} \text{sh}\omega} \quad (6-39)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \delta\varepsilon = \frac{bD_m}{\Delta D} \\ \omega &= (fr)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\varphi \cdot kb^2}{D}} \end{aligned} \right\} \quad (6-40)$$

按上述假设,(6-29)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial r} &= -rCY \\ \tau = 0: & \quad C = 0, \quad Y = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6-41)$$

以(6-39)代入得:

$$Y = 1 - \frac{\tau th\omega}{\omega} \cdot \frac{\tau}{1 + \frac{\omega}{\lambda} \cdot th\omega} \quad (6-42)$$

$$\therefore 1 - Y = \frac{\tau th\omega}{\omega} \cdot \frac{\tau}{1 + \frac{\omega}{\lambda} \cdot th\omega}$$

参数  $\lambda$  表示血红细胞内氧扩散阻力与膜层扩散阻力之比,  $\left[1 + \frac{\omega}{\lambda} th\omega\right]^{-1}$  则表示由于膜存在引起的氧传输率的降低;  $\omega$  表示氧与 Hb 结合速率与氧在红细胞内扩散率之比,  $\frac{th\omega}{\omega}$  则表示红细胞内部扩散引起的氧合率的减小。自由 Hb 溶液  $\lambda = \infty, \omega = 0$

图 10-15 是根据非定常方程(6-29)——(6-32)算出的  $(1-Y)-\tau$  曲线, 可见, 只要 5—20ms, 就可以达到定常状态, 因而准定常假设是一种合理的近似。将计算结果与测量数据比较, Roughton 等发现人的红细胞对氧来说  $\lambda \approx 1.53$ 。

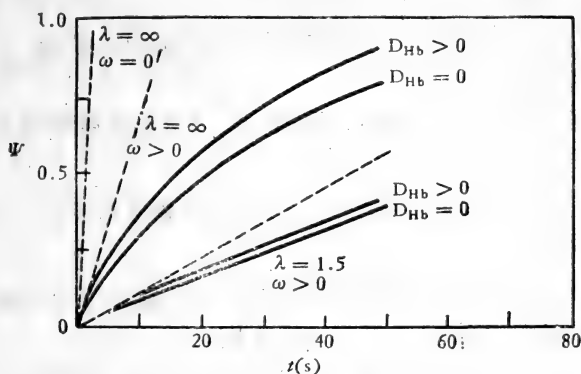


图 10-15  $(1-Y)-t$  计算曲线<sup>[2]</sup>

上述理论模型将红细胞氧合率比同样自由 Hb 浓度下血

红蛋白溶液氧合率低这一事实，归因于红细胞膜产生的附加扩散阻力。然而，Kreuzer 和 Yahr 等人测量了静止的血红蛋白溶液（浓度为 33%）薄膜与凝集红细胞的静止悬浮液的氧合时间，未发现二者有明显差异。这表明红细胞膜对于氧扩散来说构不成多大障碍。但这和图 10-13 所示的实验结果不一致。如何解释？Middleman 认为，在红细胞表面附着了一层相对静止的血浆层，它阻碍氧的输运。因此，上述模型中  $D_m$  不是膜本身的扩散系数，而是血浆层的扩散系数， $\Delta$  则为血浆层厚度。然而，这仅仅是一种可能。

#### § 6-4 透过毛细血管壁的氧交换

毛细血管供给其周围一定范围内组织细胞代谢所需要的氧，并带走它们的代谢产物。Krogh 取毛细血管-周围组织功能单元（圆柱形）假设周围组织圆柱形界面（ $r = R_C$ ）上，氧的净流量为零，考察毛细血流与组织间的氧交换。整个输运过程分四步：

(1) 氧化血红蛋白分解释出的自由氧，不断通过扩散，经红细胞膜，进入血浆。此过程可用 Nicolson-Roughton 反应扩散模型，（见 §6-3）。

(2) 血浆中的氧通过对流、扩散，经毛细血管壁进入组织液。

(3) 组织液中的氧扩散。由于组织液流速很小，所以是纯扩散过程；

(4) 组织液-组织细胞之间的氧交换，氧在组织细胞内扩散，并参与代谢反应，这又是一个反应-扩散过程。

若据此逐步建立模型，通过边界条件将它们联系起来，即可得整个氧交换过程的模型。但这样做太复杂了，许多参数目前还不能准确测定，因此，有必要作进一步简化。



假设:

(1) 周围组织是均匀连续介质, 氧在其内的扩散系数 ( $D_t$ ) 与氧浓度及空间位置无关。组织细胞代谢活动引起的氧耗率用一分布的‘汇’项  $g(c')$  表示,  $c'(\mathbf{x}, t)$  为组织内氧浓度分布。这样, 按 Krogh 圆柱模型, 取柱坐标  $\{x, r, \theta\}$ , 设  $c'$  是轴对称的, 则在  $r_c \leq r \leq r_t$  区域内, 有

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = D_t \left( \frac{\partial^2 c'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c'}{\partial r} + \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} \right) - g(c') \quad (6-43)$$

$$r = r_t: \quad \frac{\partial c'}{\partial r} = 0 \quad (6-44)$$

$g(c')$  是单位体积组织内的氧耗率, 通常用 Michaelis-Menten 近似:

$$g(c') = \frac{Ac'}{B + c'}, \quad A = 5 \times 10^{-4} \text{mlO}_2/\text{ml} \cdot \text{s} \quad (6-45)$$

$$B = 2.5 \times 10^{-6} \text{mlO}_2/\text{ml}$$

$A, B$  为常数。

(2) 毛细血管内的血液是连续介质, 其内氧浓度  $c(\mathbf{x}, t)$  等于血浆内的氧浓度 (因为氧交换总是在血浆-组织液之间进行的)。血红细胞的存在表现为 (i) 速度场  $\mathbf{u}$  的改变, 这可用第七章 §4 所述方法确定; (ii) 血红蛋白氧化还原反应引起的氧的浓度的改变, 这相当于一分布源项  $d(c)$ ; (iii) 氧扩散率改变, 此时径向扩散系数与轴向扩散系数不同, 分别为  $D_r, D_b$ 。这样毛细血管内 ( $0 \leq r \leq r_c$ ) 有:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial r} = D_r \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \right] + D_b \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d(c) \quad (6-46)$$

$$r = 0: \quad \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \quad (6-47)$$

(3) 毛细血管壁对于氧的通透性用系数  $h$  表示, 有

$$\left. \begin{aligned} r = r_c: \quad -D_t \frac{\partial c'}{\partial r} &= h[\langle c \rangle - c'] \\ \langle c \rangle &= \frac{1}{\pi r_c^2} \int_0^{r_c} 2\pi r c dr \end{aligned} \right\} \quad (6-48)$$

(4) 因氧与 Hb 的反应速率远高于氧的扩散速度, 故可认为 Hb 与氧结合的比例与血浆氧含量的改变保持平衡。设单位体积血液内所含血红蛋白克分子数为  $M$ , 则

$$d(c) = -M \left[ \frac{\partial \beta}{\partial t} + u \frac{\partial \beta}{\partial x} + v \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \quad (6-49)$$

$c$  与  $P_{O_2}$  的关系由亨利定律

$$c = K_{O_2} P_{O_2} \quad (6-50)$$

确定,  $K_{O_2}$  为氧在血浆(水)中的溶解度。  $\beta$ - $P_{O_2}$  关系则由(6-3)或(6-8)或(6-10)(6-11)给出。

(5) 氧在毛细血管内扩散阻力  $\frac{1}{D_b}$  相当于在血浆中扩散阻力  $\frac{1}{D_{Pl}}$  与在血红蛋白溶液中扩散阻力  $\frac{1}{D_e}$  之平均值:

$$\frac{1}{D_b} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{D_e} + \frac{1}{D_{Pl}} \right) \quad (6-51)$$

而  $D_r$  则可取:

$$D_r = D_e \quad (6-52)$$

$D_{Pl}$  即氧在水中的扩散系数, 而  $D_e$  与 Hb 浓度有关, 对红细胞可取  $c_{Hb} = 35\text{g}/100\text{ml}$ ,  $D_e$  随  $c_{Hb}$  的变化见方程(6-23)。

一般氧交换过程是定常的, 方程中  $\frac{\partial c}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial c'}{\partial t}$  均可忽略, 这样上述边界条件足以定解。但即便如此, 求解仍相当困难。下面讨论两种更简单的近似。

### 1. Krogh 定常模型

假设(i)组织氧耗率与  $c'$  无关,  $g(c') = g_0$ ; (ii) 毛细

血管中  $c$  及流速在径向及轴向都是均匀的,  $c = c_0$ ; (iii) 组织中沿  $x$  方向的扩散可以忽略不计; (iv) 毛细血管壁对氧的扩散无阻碍。这样(6-43)变为:

$$D_t \left( \frac{d^2 c'}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dc'}{dr} \right) - g_0 = 0 \quad (6-53)$$

$$r = r_c: \quad c' = c_0$$

$$r = r_t: \quad \frac{\partial c'}{\partial r} = 0$$

其解为

$$c' - c_0 = \frac{g_0}{D_t} \left[ \frac{r^2 - r_c^2}{4} - \frac{r_t^2}{2} \cdot \ln \frac{r}{r_c} \right] \quad (6-54)$$

周围组织消耗的氧必定与毛细血流提供的氧平衡, 设毛细血管长为  $l$ , 则

$$\pi(r_t^2 - r_c^2)lg_0 = \langle u \rangle \pi r_c^2 [(c + M\beta)_0 - (c + M\beta)_l]$$

$\langle u \rangle$  为整个管长上的平均值。因为  $c$  沿  $x$  方向不变,  $M$  亦不变, 故氧的消耗完全表现为血红蛋白饱和度的改变

$$g_0 = \langle u \rangle M \frac{\beta_0 - \beta_l}{l} \left[ \left( \frac{r_t}{r_c} \right)^2 - 1 \right] \quad (6-55)$$

据此, 组织供氧与毛细血流平均速度、血红蛋白氧饱和梯度成线性关系。

## 2. Bloch-Blum 近似

和 Krogh 近似一样, 忽略组织内氧的纵向扩散及毛细血管内部氧的扩散, 毛细血流是一维的, 但计及毛细血管壁对氧扩散的阻尼, 并考虑了  $c$  沿轴向的变化。同时假设

$$g(c') = \alpha c', \quad \alpha = \text{常数} \quad (6-56)$$

这样:

$$-\langle u \rangle r_c \frac{d}{dx} (\langle c + M\beta \rangle) = 2h(\langle c \rangle - c'). \quad (6-57)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} x=0: & \quad \langle c \rangle = c_a \\ r=r_i: & \quad \frac{\partial c'}{\partial r} = 0 \\ r=r_c: & \quad -D_t \frac{\partial c'}{\partial r} = h(\langle c \rangle - c') \end{aligned} \right\} \quad (6-58)$$

结合(6-53)求解,得

$$\frac{\langle c \rangle}{c_a} = \exp \left[ -\frac{2\theta G}{1 + \theta G} \cdot \frac{h}{\langle u \rangle} \cdot \frac{r}{r_c} \right] \quad (6-59)$$

$$\frac{c'}{c_a} = \frac{\langle c \rangle}{c_a} \cdot \frac{1}{1 + \theta G} \cdot F \left( \frac{r}{r_c}, \frac{r_c}{r_i}, \sigma \right) \quad (6-60)$$

这里: 
$$\theta = \frac{(\alpha D_t)^{\frac{1}{2}}}{h}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\alpha r_c^2}{D_t}} \quad (6-61)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{-K_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) I_1(\sigma) + I_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) K_1(\sigma)}{K_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) I_0(\sigma) + I_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) K_0(\sigma)} \\ F &= \frac{K_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) I_0 \left( \sigma \frac{r}{r_c} \right) + I_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) K_0 \left( \sigma \frac{r}{r_c} \right)}{K_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) I_0(\sigma) + I_1 \left( \sigma \frac{r_c}{r_i} \right) K_0(\sigma)} \end{aligned} \right\} \quad (6-62)$$

$I_0, I_1, K_0, K_1$  分别为第一类和第二类 0 阶和 1 阶贝塞尔函数。

毛细血管壁对于氧交换的阻尼很小, 即  $h \gg 1$ , 令  $h \rightarrow \infty$ , 即可得渐近解

$$\left. \begin{aligned} \frac{\langle c \rangle}{c_a} &= \exp \left[ -2G \cdot \left( \frac{\alpha D_t}{\langle u \rangle^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{r_c} \right] \\ \frac{c'}{c_a} &= \frac{\langle c \rangle}{c_a} \cdot F \left( \frac{r}{r_c}, \frac{r_c}{r_i}, \sigma \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-63)$$

这时支配组织内氧分布的三个重要参数是:  $\sigma, \frac{r_i}{r_c}, \kappa = \frac{\alpha D_t}{\langle u \rangle^2}$ 。

可见 $\langle u \rangle^2$ 起重大作用,毛细血流平均速度的减小,将使组织供氧率按指数规律降低,使代谢率亦按指数律降低,从而产生病理变化。

### § 6-5 二氧化碳在血液中的运输

人体内,二氧化碳以下述三种形式随血液循环而运输(如图 10-16 所示):

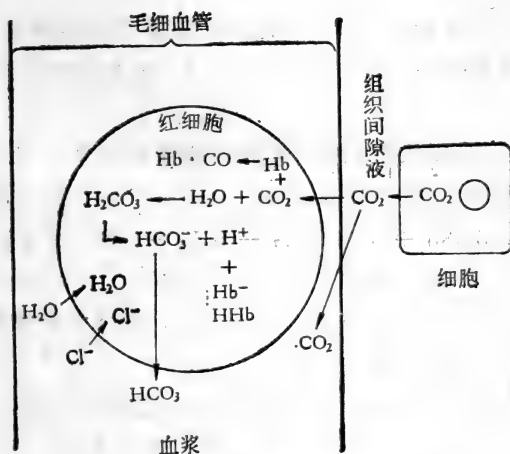
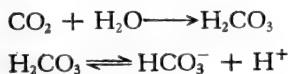


图 10-16 二氧化碳在血液中的运输方式<sup>[2]</sup>

(1) 二氧化碳较易溶于水,约有 7% 的二氧化碳是溶于血浆而运输的。

(2) 二氧化碳可与血红蛋白结合,以血红蛋白为载体而运输,约占总二氧化碳的 30%。

(3) 二氧化碳与水起化学反应,生成 HCO<sub>3</sub><sup>-</sup>,并以此形式运输。反应方程为:



但第一步反应通常很缓慢,必须借助于某种酶的催化,才能迅速进行,而这种酶只存在于红细胞之中。第二步反应很快,且  $\text{H}_2\text{CO}_3$  中有 99.9% 离解为  $\text{HCO}_3^-$  和  $\text{H}^+$ 。这是运输二氧化碳的主要形式,占总二氧化碳量的 63%。

这里,(1)不涉及化学变化,(2)、(3)均涉及化学反应,反应动力学过程比氧复杂得多,将在本章 §7-2 中讨论。这里简单介绍平衡状态下,血液中二氧化碳含量的计算方法。具体步骤如下:

(1) 计算  $pK$  值及二氧化碳在血浆中的溶解度:

$$K_{\text{CO}_2} = 0.0307 + 0.00057(310 - T) + 0.00002(310 - T)^2 \quad (6-64)$$

这里  $K_{\text{CO}_2}$  是单位压力增引起的单位体积血浆内二氧化碳克分子数的改变,单位为  $\text{mM/lit} \cdot \text{mmHg}$ 。  $T$  为绝对温度。

$$pK = 6.086 + 0.042(7.4 - \text{pH}) + (311 - T)[0.0047 + 0.0014(7.4 - \text{pH})] \quad (6-65)$$

(2) 计算血浆中的二氧化碳浓度(克分子浓度)  $c'_{\text{CO}_2}$

$$c'_{\text{CO}_2} = K_{\text{CO}_2} \cdot P_{\text{CO}_2} [1 + 10^{(\text{pH} - pK)}] \quad (6-66)$$

(3) 求红细胞中二氧化碳浓度与血浆中二氧化碳浓度之比  $\xi$ ,它是血液中氧饱和度  $\beta$  及  $\text{pH}$  值的函数。

$$\xi = \Phi + (\Psi - \Phi)(1 - \beta) \quad (6-67)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= 0.590 + 0.2913(7.4 - \text{pH}) - 0.0844(7.4 - \text{pH})^2 \\ \Psi &= 0.664 + 0.2275(7.4 - \text{pH}) - 0.0938(7.4 - \text{pH})^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-68)$$

$\Phi$ 、 $\Psi$  分别为氧化血及还原血的相对含量。

由此可得红细胞内二氧化碳的含量

$$c''_{\text{CO}_2} = \xi c'_{\text{CO}_2} \quad (6-69)$$

(4) 全血二氧化碳浓度为

$$c_{\text{CO}_2} = 2.22 K_{\text{CO}_2} \cdot P_{\text{CO}_2} [\phi \xi + (1 - \phi)] [1 + 10^{(\text{pH} - pK)}] \quad (6-70)$$

这里  $c_{\text{CO}_2}$  的单位是  $\text{mM}/100\text{ml}$ 。

还应指出, 血液 pH 值本身是  $P_{\text{CO}_2}$  的函数,

$$\text{pH} = 7.590 + 0.003c_{\text{Hb}}(1 - \beta) - 0.2741 \lg \left( \frac{P_{\text{CO}_2}}{20} \right) \quad (6-71)$$

这里  $c_{\text{Hb}}$  是血红蛋白的体积克分子浓度, 单位为  $\text{mM}/100\text{ml}$ 。

二氧化碳含量与  $P_{\text{CO}_2}$  的关系如图 10-17 所示。图中给出了正常生理条件下, 人体二氧化碳含量的范围。

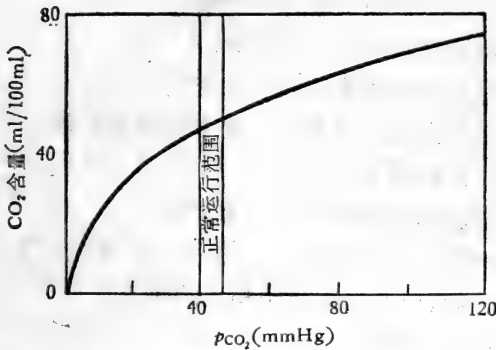


图 10-17 二氧化碳含量与  $P_{\text{CO}_2}$  的关系<sup>[2]</sup>

## §7 肺内的气体交换

肺的主要功能是进行体内外气体交换, 吸收氧, 排出二氧化碳。这种气体交换发生于肺泡与肺毛细血管之间, 其微结构如图 10-18 示。肺泡与毛细血管壁之间有一薄层水样组织液。整个气体交换过程包括下列步骤。

(1) 毛细支气管到肺泡的气相对流扩散;

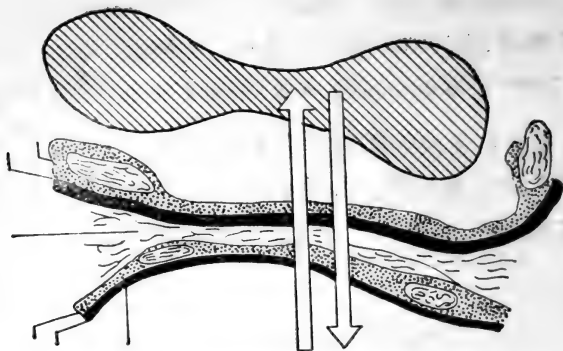


图 10-18 肺泡与毛细血管的微显示意图

- (2) 通过肺泡膜的气体(纯)扩散;
- (3) 间隙液薄层内的气体扩散;
- (4) 通过肺毛细血管壁的气体交换;
- (5) 肺毛细血管内气体在血浆中的对流扩散;
- (6) 通过红细胞膜的扩散;
- (7) 红细胞内部液体中的气体扩散;
- (8) 红细胞内的化学反应,包括: 血红蛋白与氧,二氧化碳的化合和分解,以及二氧化碳与水的化合;
- (9) 毛细血液流动。

这里, (1)是气体各组元的对流-扩散; (8)是化学反应动力学问题; (9)是静压梯度作用下的迁移运动。(2)一(7)是单纯的气体扩散问题。其中, 肺毛细血流问题已述于第九章, 氧的反应动力学及血浆-红细胞氧交换已简述于本章 §6-1 和 §6-3。这里主要讨论末端支气管内气体的对流扩散, 以及肺泡-肺毛细血流间的氧、二氧化碳运输。

### §7-1 末端支气管-肺泡内的气体混合

第一、七、八章中, 以均质流体为模型, 分析了呼吸道中气



流的压力损失及流场。但实际上,呼吸道中的气体是非均质的,吸气(或呼气)时,吸入(或从肺排出)的气体,和气管树内残存的气体组分不同,两种气体界面上,有混合现象。这对于整个流场影响不大,但涉及气体输运时,必须考虑不同组元的扩散。

为说明这一点,考察图10-19所示最简单的情况,气体在长直圆管内作定常运动,流动是充分发展的层流。在  $t = 0$  时刻,气体 B 与 A 之间有一平直的界面。如果 A、B 不能相互扩散,那么,经足够长时间后, B、A 的界面变为旋转抛物面,如图 10-19(b) 示。但若 A、B 是可以相互掺混的,则在流动同时,必伴之以径向和纵向的扩散,界面扭曲,形如图 10-19(c) 示。根据 Taylor 分析,此时两种气体的纵向混合,可以用一个有效扩散系数  $D_e$  表示,层流时有:

$$D_e = D \left[ 1 + \frac{Pe^2}{192} \right] \quad (7-1)$$

$$Pe = \frac{Ud}{D}$$

$U$  是平均流速,  $d$  是管径,  $D$  是分子扩散系数。显然,当分子扩散系数  $D$  减小时,由于径向扩散变慢,纵向有效扩散系数增大。

当气体经鼻(或口)、喉、咽进入气管时,流动呈湍流状态,

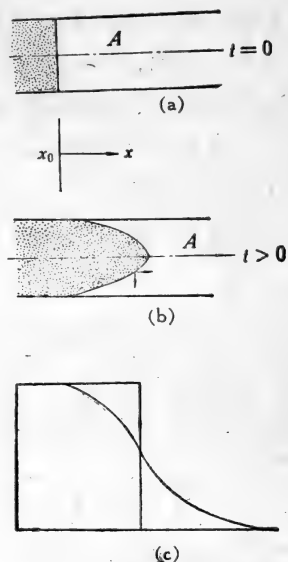


图 10-19<sup>[6]</sup> 对流-扩散问题  
(a)  $t = 0$  时刻; (b)  $t > 0$ , B、A 不相混; (c)  $t > 0$  B、A 相混。

气体充分混合，气管内气体组分和口腔内无多大差别。在较大的支气管内，流速原高于分子扩散的速率，故往往只考虑纵向的扩散。末端支气管内流速很低，雷诺数很小，在气体混合过程中起主导作用的当然是扩散，但对流迁移的影响亦不容忽视。因此，末端支气管-肺泡的气体混合过程，不能单纯用扩散方程，而要用扩散-对流方程来描述。

将末端支气管-肺泡结合在一起，看作一端封闭的直圆柱管，管内带有一系列环形隔板，如图 10-20 示，每一小段代表一个肺泡。根据生理观测结果，从第 17 级支气管开始和肺泡

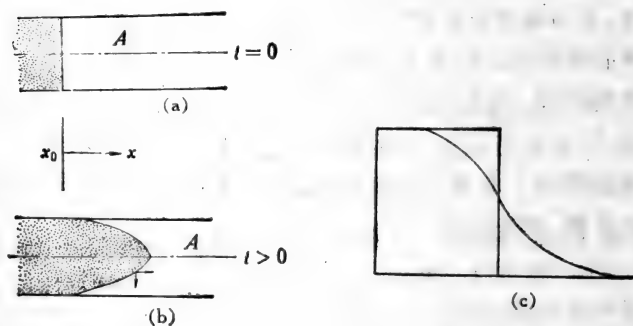


图 10-20 (a) 末端支气管，(b) 气体传输模型。

相联，但只限于一部分，17、18、19 三级支气管与肺泡相联的比例分别为 12%、25%、50%。这里假设支气管从第 19 级开始与肺泡相联，且 100% 地与肺泡相联。因而模型中包括五个隔室，每段长度为  $l_i$ ，总长为  $L$ ，进口孔径为  $a$ ，据 Weibel 观测数据，取：

$$\frac{2L}{d} = 8, \quad \frac{2a}{d} = 0.5, \quad \frac{l_1}{2d} = 2.2, \quad \frac{l_2}{2d} = 1.8,$$

$$\frac{l_3}{2d} = 1.6, \quad \frac{l_4}{2d} = 1.3, \quad \frac{l_5}{2d} = 1.1.$$

假设:

(1) 管径既包括毛细支管,也计及周围的肺泡,在呼吸过程中管径  $d$  及长度  $L$  都是变化的,以适应肺容积的变化。

(2) 流动雷诺数很小,几何形状的影响可以忽略不计,但用流体速度的不连续来模拟分支接头。

(3) 与气体在肺泡内的扩散相比,通过肺泡膜的气体传输可以忽略不计,即  $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$ 。因而,沿管截面氧、二氧化碳

浓度、压力  $p_i$ 、有效扩散系数  $D_e$  等都是均匀的。

这样,浓度  $c(x, t)$  服从对流-扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ A \cdot D_e \frac{\partial c}{\partial x} \right] \quad (7-2)$$

$A(x)$  是截面积。根据 Scherer 等人的实验结果,

$$D_e = D[1 + kP_e] \quad (7-3)$$

$$k = \begin{cases} 1.08 & \text{吸气} \\ 0.37 & \text{呼气} \end{cases}$$

Pedley<sup>[6]</sup>、Davison 和 Fitz-Gerald<sup>[7]</sup>、Davison<sup>[8]</sup> 等据此,用不同的边界条件作了计算。图 10-21 是算出的氧浓度分布随时间的变化。可见,用对流-扩散方程和用扩散方程算出的结果有明显的差别。相应的肺泡氧偏压亦不同,若用对流-扩散方程算出的  $p_{O_2}$  为  $p_{DC}$ , 用纯扩散算出的  $p_{O_2}$  为  $p_D$ , 则当吸气流量为 10—200 升/分时,  $\frac{p_{DC} - p_D}{p_D}$  约为 0.4—23.2%。这说明,

尽管末端支气管气流速度很低,对流对于气体输运过程的影响,依然是不可忽略的,尤其在气流量较大时。

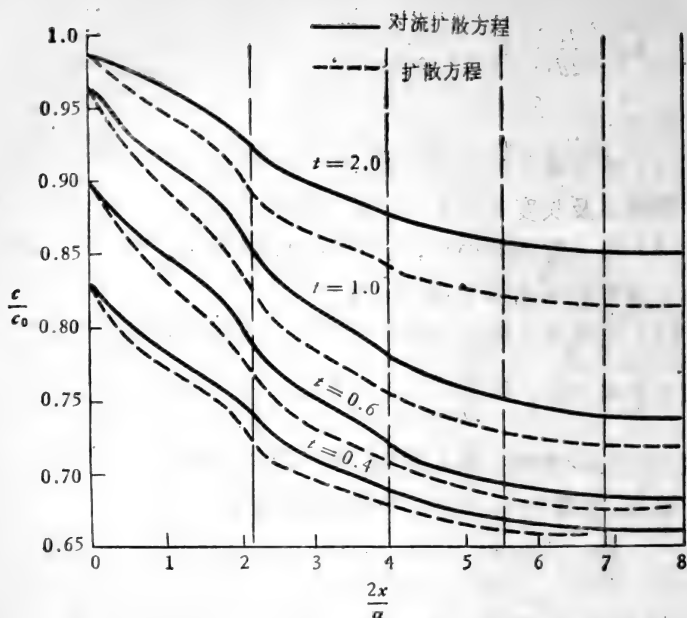
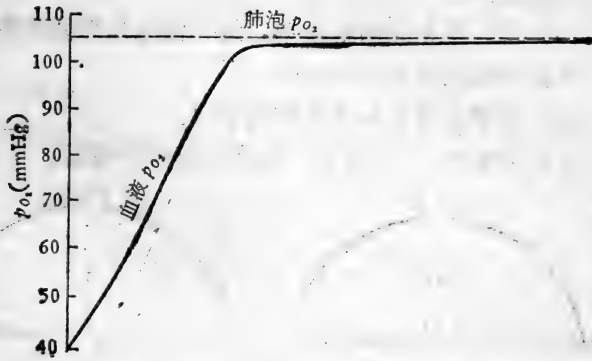
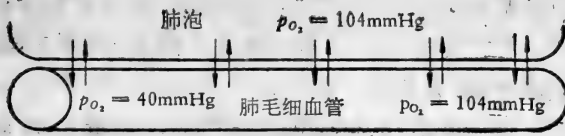


图 10-21 氧浓度分布<sup>[7]</sup>

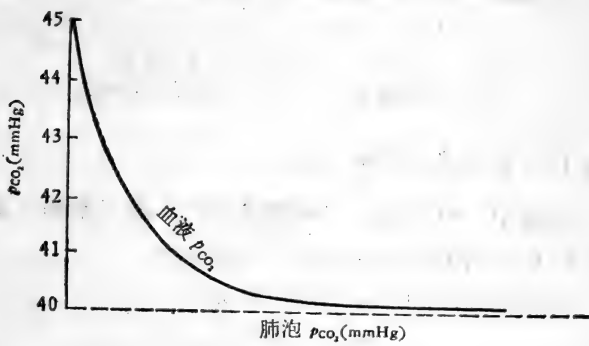
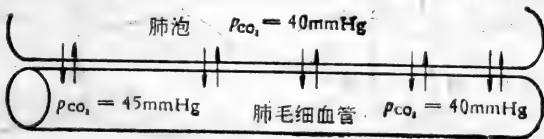
## § 7-2 肺泡与肺毛细血管间的气体交换

肺泡膜、毛细血管壁、间隙液合称呼吸膜。若将此三者视作一个整体。则肺泡与肺毛细血管间的气体交换是一个透过呼吸膜的扩散问题。对此，有两种简化模型。其一是二组元模型，由肺泡气体和（均质）血液组成，如图 10-22 所示，由此模型所得的计算结果也示于图中。

在毛细血管中把血液看作均质流体是不合适的，而且二组元模型也未计及血液载氧、载二氧化碳的机制。为此，进一步提出了如图 10-23 所示的三组元模型，由肺泡气体、毛细血管内的血浆以及红细胞组成，空气与血浆之间由呼吸膜隔开，血浆与细胞液之间由红细胞膜隔开。假设：



(a)



(b)

图 10-22 肺内气体交换的二组元模型及结果举例<sup>[2]</sup>

(a) 氧的交换, (b) 二氧化碳的交换。

(1) 肺泡内部、血浆内部、红细胞内部气体组元浓度都是均匀的, 无扩散过程。扩散仅发生于肺泡-血浆之间和血浆-红细胞液之间, 且都是一维的。

(2) 通过呼吸膜、红细胞膜的气体净流量为 0, 输运过程服从斐克定律。

(3) 呼吸膜和红细胞膜内, 组元偏压与组元浓度线性相关。且膜内偏压分布是线性的。

(4) 化学反应服从质量作用定律。

以此为基础, 分别讨论二氧化碳及氧的输运。

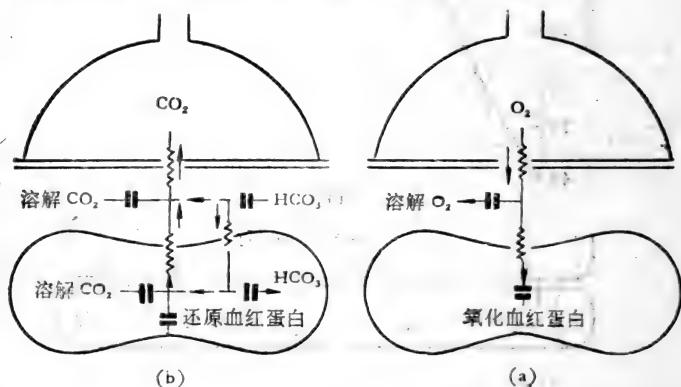


图 10-23 肺毛细组织三组元模型<sup>[9]</sup>  
(a) 氧传输模型; (b) 二氧化碳传输模型。

### 1. 二氧化碳的传输方程

血液中二氧化碳以三种形式存在: 溶于水的二氧化碳、 $\text{HCO}_3^-$  及二氧化碳与血红蛋白的化合物。

通过呼吸膜的二氧化碳流率为

$$J_{\text{CO}_2} = D_{\text{mCO}_2} (P_{\text{PICO}_2} - P_{\text{ACO}_2}) \quad (7-4)$$

“m”指呼吸膜, “PI”指血浆, “A”指肺泡。

$J_{\text{CO}_2}$  必定引起溶于血浆的二氧化碳浓度改变。

$$\frac{d[\text{CO}_2]_{PI}}{dt} = \frac{-J_{\text{CO}_2}}{V_{PI}} = \frac{-D_{m\text{CO}_2}}{V_{PI}} (P_{\text{PICO}_2} - P_{\text{ACO}_2}) \quad (7-5)$$

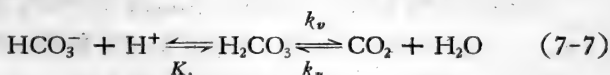
$V_{PI}$  是系统内血浆容量。 $[\text{CO}_2]$  表示二氧化碳的克分子浓度。

类似地，通过红细胞膜进入血浆的二氧化碳引起血浆  $[\text{CO}_2]_{PI}$  的变化为

$$\frac{d[\text{CO}_2]_{PI}}{dt} = \frac{D_{R\text{CO}_2}}{V_{PI}} (P_{R\text{CO}_2} - P_{\text{PICO}_2}) \quad (7-6)$$

R 表示红细胞。

影响血浆二氧化碳浓度的第三个因素是下述化学反应：



$K$  是碳酸电离平衡常数， $k_v$ 、 $k_u$  为正、逆反应速率，应用质量作用定律，有

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{CO}_2]'''}{dt} &= k_v[\text{H}_2\text{CO}_3] - k_u[\text{CO}_2] \\ &= \frac{k_v}{K} [\text{HCO}_3^-][\text{H}^+] - k_u[\text{CO}_2] \end{aligned} \quad (7-8)$$

综合(7-5)(7-6)(7-8)得血浆内二氧化碳浓度的变化为：

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{CO}_2]_{PI}}{dt} &= \frac{1}{V_{PI}} [-D_{m\text{CO}_2}(P_{\text{PICO}_2} - P_{\text{ACO}_2}) \\ &+ D_{R\text{CO}_2}(P_{R\text{CO}_2} - P_{\text{PICO}_2})] + \frac{k_v}{K} [\text{HCO}_3^-]_{PI} [\text{H}^+]_{PI} \\ &\quad - k_u[\text{CO}_2]_{PI} \end{aligned} \quad (7-9)$$

浓度与偏压的关系服从亨利定律：

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{1}{K_{\text{CO}_2}} [\text{CO}_2]_0 \quad (7-10)$$

$K_{\text{CO}_2}$  是二氧化碳的溶解度。

与(7-9)类似，红细胞内二氧化碳浓度的变化为：

$$\frac{d[\text{CO}_2]_R}{dt} = -\frac{D_{R\text{CO}_2}}{V_R} (P_{R\text{CO}_2} - P_{\text{PICO}_2})$$

$$+ A \left( \frac{k_v}{K} [\text{HCO}_3^-]_R [\text{H}^+]_R - k_u [\text{CO}_2]_R \right) - \frac{d[\text{Carb}]}{dt} \quad (7-11)$$

这里  $V_R$  是红细胞容积;  $A$  是催化系数 (红细胞内反应 (7-7) 是在催化剂作用下进行的), 最后一项  $\frac{d[\text{Carb}]}{dt}$  代表红细胞内血红蛋白-二氧化碳结合物浓度变化, 对细胞内二氧化碳浓度的影响, 其计算见方程 (7-22)。

血浆中碳酸氢离子浓度的变化取决于  $\text{HCO}_3^-$  脱水 (dehydration) 反应速率与红细胞-血浆间  $\text{HCO}_3^-$  扩散。脱水反应引起的  $[\text{HCO}_3^-]$  减少, 和该反应引起的  $[\text{CO}_2]$  增加一样, 即

$$\frac{d[\text{HCO}_3^-]'}{dt} = -\frac{d[\text{CO}_2]''}{dt}$$

而红细胞-血浆间  $\text{HCO}_3^-$  的扩散却因二者的平衡浓度不同而变得复杂, 但二者的分布应服从吉布斯-杜亨 (Gibbs-Dornan) 电化学平衡条件

$$\frac{[\text{HCO}_3^-]_R}{[\text{HCO}_3^-]_{Pl}} = r \quad (7-12)$$

$r$  叫做吉布斯-杜亨比, 它与其它离子的存在、电离强度、蛋白质的电荷等有关。假设  $r$  与血中氧的饱和度  $\beta$  呈线性关系, 且

$$r = (0.058\text{pH} - 0.437) \cdot \beta - 0.529\text{pH} + 4.6 \quad (7-13)$$

这里  $\text{pH}$  是血浆的值。

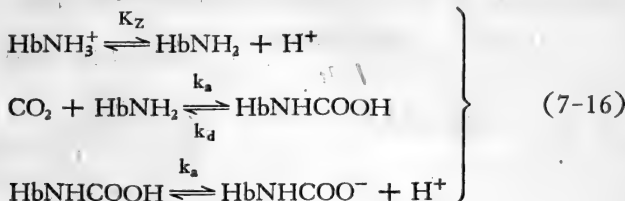
综合两种作用, 有

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{HCO}_3^-]_{Pl}}{dt} = & -\frac{D^{\text{HCO}_3^-}}{V_{Pl}} \left( [\text{HCO}_3^-]_{Pl} - \frac{[\text{HCO}_3^-]_R}{r} \right) \\ & + k_u [\text{CO}_2]_{Pl} - \frac{k_v}{K} [\text{H}^+]_{Pl} [\text{HCO}_3^-]_{Pl} \end{aligned} \quad (7-14)$$



$$\frac{d[\text{HCO}_3^-]_R}{dt} = \frac{D^{\text{HCO}_3^-}}{V_R} \left( [\text{HCO}_3^-]_{\text{PI}} - \frac{[\text{HCO}_3^-]_R}{r} \right) + A \left( k_u [\text{CO}_2]_R - \frac{k_v}{K} [\text{H}^+]_R [\text{HCO}_3^-]_R \right) \quad (7-15)$$

至于二氧化碳与血红蛋白的结合,反应如下



应用质量作用定律

$$\frac{d[\text{HbNHCOOH}]}{dt} = k_a [\text{CO}_2] [\text{HbNH}_2] - k_d [\text{HbNHCOOH}] \quad (7-17)$$

应用(7-16a,c)的反应常数:

$$\left. \begin{aligned} [\text{HbNH}_2] &= \frac{[\text{HbNH}_3^+] K_z}{[\text{H}^+]} \\ [\text{HbNHCOOH}] &= \frac{[\text{HbNHCOO}^-] [\text{H}^+]}{K_a} \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

将(7-18)代入血红蛋白总浓度

$$[\text{Hb}] = [\text{HbNH}_2] + [\text{HbNH}_3^+] + [\text{HbNHCOO}^-] + [\text{HbNHCOOH}] \quad (7-19)$$

$$\therefore [\text{HbNH}_3^+] = \frac{[\text{Hb}] - [\text{HbNHCOO}^-] \left( 1 + \frac{1}{K_a} [\text{H}^+] \right)}{1 + [\text{H}^+]/K_z} \quad (7-20)$$

$\therefore \frac{[\text{H}^+]}{K_a} \lesssim 0.04$ , 故该项可忽略, 代入(7-17)得

$$\frac{d[\text{HbNHCOO}^-]}{dt} = \frac{k_a [\text{CO}_2] ([\text{Hb}] - [\text{HbNHCOO}^-])}{1 + [\text{H}^+]/K_z}$$

$$-\frac{k_d[\text{HbNHCOO}^-][\text{H}^+]}{K_a} \quad (7-21)$$

将反应式(7-16b,c)相结合,其平衡常数为  $K_c$ , 设

$$\frac{k_a}{K_c} = \frac{k_d}{K_a}$$

考虑到血红蛋白中氧化的和还原的同时并存,故有:

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{Carb}]}{dt} &= \frac{d[\text{HbNHCOO}^-]}{dt} = k_a[\text{CO}_2]_R([\text{Hb}] \\ &- [\text{HbNHCOO}^-]) \cdot \left( \frac{\beta}{1 + \frac{[\text{H}^+]_R}{K_{zO}}} + \frac{1-\beta}{1 + \frac{[\text{H}^+]_R}{K_{zR}}} \right) \\ &- k_d[\text{HbNHCOO}^-][\text{H}^+]_R \cdot \left( \frac{\beta}{K_{CO}} + \frac{1-\beta}{K_{CR}} \right) \end{aligned} \quad (7-22)$$

这里  $K_{zO}, K_{zR}, K_{CO}, K_{CR}$  分别为氧化血红蛋白和还原血红蛋白的  $K_z, K_C$  值。

### 2. 氧的传输方程

血液中氧的存在形式有两种: 溶于血浆的氧和红细胞中的氧化血红蛋白。类似于二氧化碳传输过程的分析方法, 有

$$\frac{d[\text{O}_2]_{PI}}{dt} = \frac{D_{\text{mO}_2}}{V_l} (P_{\text{AO}_2} - P_{\text{PIO}_2}) - \frac{d[\text{O}_2]_R}{dt} \quad (7-23)$$

$$\frac{d[\text{O}_2]_R}{dt} = \theta(P_{\text{PIO}_2} - P_{\text{RO}_2}) \quad (7-24)$$

这里  $V_l$  是毛细血管内血液容积;  $\theta$  有

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{3.287V_{\text{O}_2}}{20.1} \{1 - \exp[-0.1117(1-\beta)] + 7.05 \\ &\quad \times 10^{-1}\beta - 0.8143\} \end{aligned} \quad (7-25)$$

### 3. pH 值方程

氧和二氧化碳的交换与 pH 值有密切关系, 故建立 pH 值方程, 对于肺气体交换的计算极为必要。

按定义,

$$\text{pH} = -\lg [\text{H}^+] \quad (7-26)$$

据此,应用本节前述关系可得:

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{H}^+]_{\text{Pl}}}{dt} = & \frac{2.303}{\lambda_{\text{Pl}}} [\text{H}^+]_{\text{Pl}} (k_u [\text{CO}_2]_{\text{Pl}} \\ & - \frac{k_v}{K} [\text{H}^+]_{\text{Pl}} [\text{HCO}_3^-]_{\text{Pl}}) \end{aligned} \quad (7-27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{H}^+]_{\text{R}}}{dt} = & \frac{2.303}{\lambda_{\text{R}}} [\text{H}^+]_{\text{R}} \left\{ A (k_u [\text{CO}_2]_{\text{R}} \right. \\ & - \frac{k_v}{K} [\text{H}^+]_{\text{R}} [\text{HCO}_3^-]_{\text{R}}) + 1.5 \frac{d[\text{Carb}]}{dt} \\ & \left. + 0.6 \frac{d[\text{O}_2]}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (7-28)$$

这里  $\beta$  是 pH 改变量为 1 时,  $[\text{H}^+]$  增加的量。

#### 4. 结果

应用方程 (7-9)(7-11)(7-14)(7-15), (7-22)–(7-25), (7-27)(7-28); 取适当参数<sup>[9]</sup> (参考文献[9]) 可算出血浆内、红细胞内  $P_{\text{CO}_2}$ 、 $P_{\text{O}_2}$ 、 $[\text{HCO}_3^-]$ 、pH 等随时间的变化。典型结果见图 10-24—图 10-27。

### § 7-3 肺通风量与血流量的关系

设每个呼吸单元的容积变化率为  $\dot{V}_A$ , 血流量为  $Q_B$ , 则由质量守恒可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_A F_{A_{\text{O}_2}} &= Q_B [c_{v_{\text{O}_2}} - c_{a_{\text{O}_2}}] \\ \dot{V}_A F_{A_{\text{CO}_2}} &= Q_B [c_{v_{\text{CO}_2}} - c_{a_{\text{CO}_2}}] \end{aligned} \quad (7-29)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_A F_{A_{\text{N}_2}} &= Q_B [c_{v_{\text{N}_2}} - c_{a_{\text{N}_2}}] \\ F_{A_{\text{O}_2}} + F_{A_{\text{CO}_2}} + F_{A_{\text{N}_2}} &= 1 \end{aligned} \quad (7-30)$$

这里，“A”表示肺泡参数，“v”表示肺静脉，“a”表示肺动脉。 $F_{Ai}$ 是呼吸单元容积改变一个单位时，肺泡内组元*i*容积的增量。

若用肺泡中的偏压代表  $F_i$ ，则

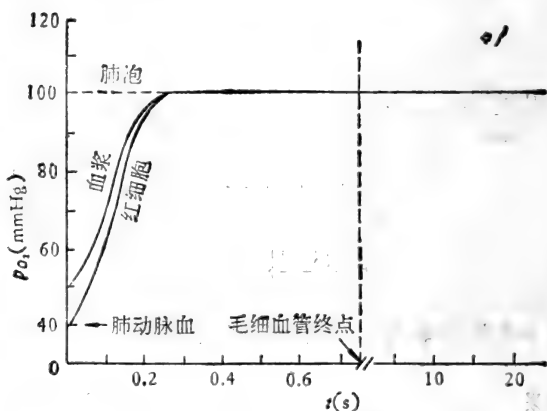


图 10-24  $P_{O_2}-t$  曲线<sup>[9]</sup>

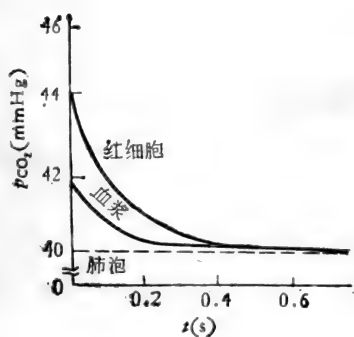


图 10-25  $P_{CO_2}-t$  曲线<sup>[9]</sup>

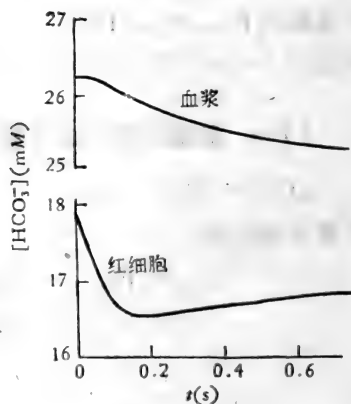


图 10-26  $[HCO_3^-]-t$  曲线<sup>[9]</sup>

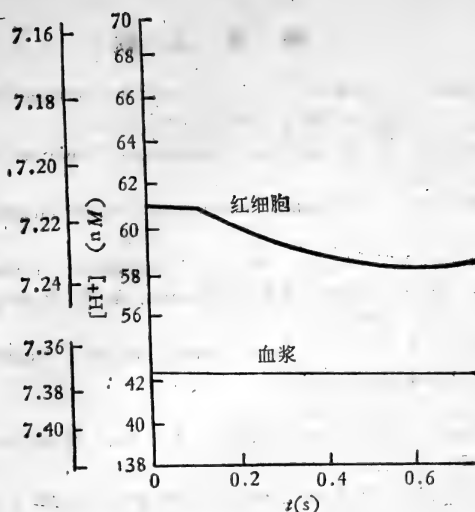


图 10-27 pH[H<sup>+</sup>]-t 曲线<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_A p_{A_{O_2}} &= \alpha_{O_2} (c_{v_{O_2}} - c_{a_{O_2}}) Q_B \\ \dot{V}_A p_{A_{CO_2}} &= \alpha_{CO_2} (c_{v_{CO_2}} - c_{a_{CO_2}}) Q_B \\ \dot{V}_A p_{A_{N_2}} &= \alpha_{N_2} (c_{v_{N_2}} - c_{a_{N_2}}) Q_B \end{aligned} \right\} \quad (7-31)$$

$\alpha_{O_2}$ 、 $\alpha_{CO_2}$ 、 $\alpha_{N_2}$  是参数。应用已知的  $P_{O_2}-c_{O_2}$ 、 $P_{CO_2}-c_{CO_2}$  关系，可解 (7-31)，算出不同  $\frac{\dot{V}_A}{Q_B}$  比值下的肺泡氧偏压  $P_{O_2}$  等。典型结果如下：

果如下：

$$\frac{\dot{V}_A}{Q_B} = 1, \quad 0.1, \quad 0.01, \quad 0.001$$

$$P_{AO_2} = 104.0, \quad 45.4, \quad 40.6, \quad 40.2$$

分析全肺呼吸量与肺循环血流量的关系时，必须考虑肺内各个区域气体交换的不均匀性。最近，West. J. B. 和 Wagner. P. D<sup>[5]</sup> 对此作了综合分析。

## 参 考 文 献

- [1] Kreuzer, F., Slegers, J. F. G.: *Passive permeability of cell membranes*, Plenum Press, New York, 1972.
- [2] Cooney, D. O.: *Biomedical Engineering Principles*, Marcel Dekker Inc., 1976.
- [3] Левич, В. Г.: *Физико-Химическая Гидродинамика*, Физматгиз 1959.
- [4] Snell, F. M.: *Physical Bases of Circulatory Transport: Regulators and Exchange.*, Ed. by Gyuton, A. C., Reeve, E. B., Wiley, New York, 1969.
- [5] West, J. B., Wagner, P. D.: *Bioengineering Aspects of the lung*, Marcel Dekker Inc, 1977.
- [6] Pedley, T. J., et al.: 同[5]
- [7] Davison, M. R., Fitz-Gerald, J. M., *Bull. Mathematical Biology*, **36**, 275, 1974.
- [8] Davison, M. R.: *Bull. Mathematical Biology*, **37**, 113, 1975.
- [9] Hill, E. P., 同[5].
- [10] Middleman, S.: *Transport Phenomena in the Cardiovascular System*, Wiley-Intersciences, New York, 1972.
- [11] Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N.: *Transport Phenomena*, Wiley, New York, 1960.
- [12] Gross, F. J., Popel, A.: *Mathematics of Microcirculation Phenomena*, Raven Press, New York, 1980.
- [13] Lightfoot, E. N.: *Transport Phenomena and Living Systems* John Wiley & Sons, New York, 1974.

## 第十一章 其他生理流动

### §1 引言

前述各章以人体内最重要的血液流动、气体运动及细胞膜层输运为对象,阐述了有关的流体力学原理。但是,如第一章所述,生理流动是多种多样的。若以生理功能而言,泌尿系统的流动、消化系统的流动、淋巴流动、各种腺体内分泌运动等等,也是极其重要的。这里,不拟分述各类系统的流动规律,而是从力学观点,就几类流动的共同特点作一讨论。主要是:淋巴流动(侧重于淋巴液的初始汇集过程与机理)、各种分泌运动及平滑肌规则收缩——舒张引起的蠕动流问题。至于管道内纤毛运动引起的流体输运、精子泳动、阿米巴及其他微生物运动的问题,将在第十三章中讨论。

### §2 淋巴流动

正常生理条件下,从毛细血管渗入组织的液体,略多于从组织再吸收的流体。超滤的流体通过组织中的毛细淋巴管,一级一级汇集起来,形成淋巴流动,最后流入大静脉。

淋巴液是蛋白质和矿物质的水溶液,可看作牛顿流体。因而,淋巴流动本质上是牛顿流体在粘弹性管系中的汇合流动,雷诺数较低,略有脉动,且淋巴管系有瓣膜结构。因此,淋巴流动的规律与静脉血流相似,但似乎更为简单些。

从流体力学观点来看,淋巴流动中最具有特色的问题是:

液体是怎样从组织汇集到初始淋巴管中去的？淋巴流动的动力何在？对此，目前众说纷云，大体上有四种说法。

(1) 组织间隙液的静压高于淋巴管内压力，从而使超滤的液体不断地流入淋巴管，流体积聚，从而推动淋巴流动。然而，测量结果表明，毛细淋巴管内流体静压为 0，即与大气压大致相等，而组织液压力却往往是负的。因而上述假说难于成立。

(2) 较大的淋巴管收缩产生一种吸力，把部分组织液吸入初始淋巴管。但最近 Zweifach 和 Prather 的实验似乎证明，淋巴管不能产生吸力。

(3) 存在某种能动的输运过程。但此说至今未获实验证实。

(4) 初始淋巴管内，淋巴液有效胶体渗透压的作用，使组织液周期性地流入淋巴管，推动淋巴流动。Casley-Smith<sup>[1,2,3]</sup> 对此作了系统的实验和理论研究。下面讨论这一假说。

初始淋巴管壁由一层内皮细胞构成，细胞与细胞接头的地方形成缝隙。缝隙有三种，一种是紧密关闭的；一种是窄缝，水和低分子量物质很容易通过，蛋白质分子通不过；还有一种是宽缝，当组织压缩时，此缝变窄，蛋白质分子不能通过，但水能自由通过；当组织松弛时，缝相当宽，蛋白质分子能通过。

机体组织是多孔介质，由充满组织液的间隙相和不动的固相构成。组织压力( $TTP$ )是间隙液静压( $THP$ )和固相压力( $TSP$ )之和。当组织压缩时， $TSP$  增大 ( $THP$  不变)，因而  $TTP$  增大，淋巴管受压缩，宽缝变窄，同时管内淋巴液压力( $LHP$ ) 增大，高于组织液压力  $THP$ ，这使淋巴液中水滤失，蛋白质浓度增高。当组织松弛时，一方面，渗透压迫使组织液内的水分从宽、窄缝渗入淋巴管，从而使蛋白质浓度降低；另一方面，宽缝开启，组织液中的蛋白质随着水一起，通过宽缝流



进初始淋巴管。诚然,淋巴管内的蛋白质浓度高于组织液,有一从内指向外的扩散流,但由于蛋白质扩散很慢,被流进淋巴管的流动所抑制。故在缝隙内侧面形成一虚拟膜,其上存在一有效渗透压(ECOP),它使组织液流进淋巴管, Casley-Smith 和 Bolton<sup>[2]</sup> 用实验证明了这一点。

根据大量实验结果, Elhay 和 Casley-Smith<sup>[3]</sup> 认为初始淋巴流动是周期性的,可分三个阶段:

### 1. 灌注期

如图 11-1 示。流体是不可压缩的,流场中无源汇。沿

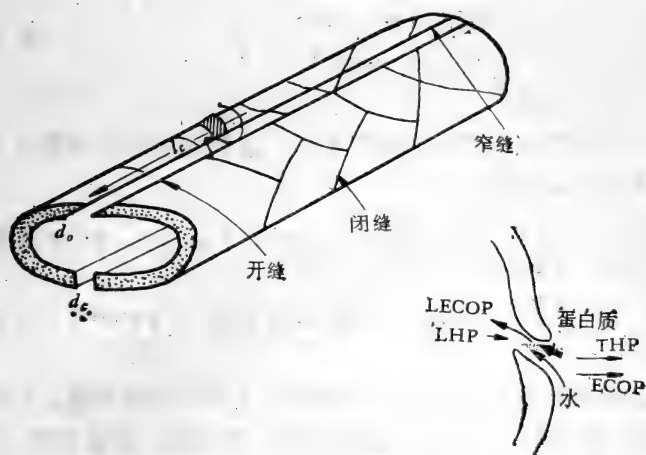


图 11-1 毛细淋巴管灌注期

缝隙深度方向坐标为  $z$ , 向内为正, 外壁面  $z=0$ 。若液体的蛋白质浓度为  $c(z, t)$ , 则灌注期淋巴管内蛋白质含量增长率为:

$$c(z, t) \frac{dV_0(t)}{dt}$$

$V_o(t)$  是  $t$  时刻通过开口缝隙的流体体积。同时,通过宽缝,蛋白质的扩散流量为

$$Dw_o l_o \cdot \frac{\delta c(z, t)}{\delta z}$$

$D$  是蛋白质的扩散系数,  $w$  为缝隙宽度,  $l$  为缝隙长度, 下标  $o$  表示可开、闭的宽缝。

因此,淋巴液蛋白质浓度的总变化率为:

$$\frac{d}{dt} [c_1(t)V(t)] = c(z, t) \frac{dV_o(t)}{dt} + Dw_o l_o \frac{\delta c(z, t)}{\delta z} \quad (2-1)$$

这里  $c_1(t)$  是淋巴管内蛋白质浓度,  $V(t)$  为  $t$  时刻淋巴容积。若缝深度为  $d$ , 则

$$\left. \begin{aligned} c(d, t) &= c_1(t) \\ c(0, t) &= c_t(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

下标  $t$  指组织液。

一般缝深度  $d$  远大于缝宽度  $w$ , 故假设缝内流动服从二维泊肃叶定律, 这样,

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{(w_o^{(f)})^3 l_o}{12\mu_r \cdot d_o} [THP - LHP + LECOP - TECOP] \\ &+ \frac{w_c^3 l_c}{12\mu_w d_c} [THP - LHP + LCOP - TCOP] \quad (2-3) \end{aligned}$$

这里  $\mu_r$  是组织液粘度,  $\mu_w$  是水粘度, 下标  $c$  表示窄缝, 上标  $(f)$  表示灌注期,  $COP$  表示蛋白质胶体渗透压。实验证明, 在灌注期中, 窄缝的作用可不予考虑, 即(2-3)中第二项可忽略。

缝隙两侧的净压差  $NP$  可按 Landis-Pappenheimer 公式求出:

$$\begin{aligned} NP &= THP - LHP + K_o [284(c_1 - c_t) \\ &+ 2100(c_1^2 - c_t^2) + 12,200(c_1^3 - c_t^3)] \quad (2-4) \end{aligned}$$

这里浓度单位为  $g/ml_o$

$$K_0 = \frac{ECOP}{COP} \quad (2-5)$$

通过缝隙的流量与压差成正比（因为淋巴液可看作牛顿流体），故

$$\frac{dV_o(t)}{dt} = K_1 NP \quad (2-6)$$

设

$$K_2 = D \frac{w_o l_o}{d_o} \quad (2-7)$$

忽略(2-3)中的第二项，则灌注期初始淋巴流方程为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [c_1(t)V(t)] &= \frac{dV_o}{dt} \left\{ \frac{c_1(t) \exp\left(-\frac{1}{K_2} \cdot \frac{dV_o(t)}{dt}\right) - c_t}{\exp\left(-\frac{1}{K_2} \cdot \frac{dV_o(t)}{dt}\right) - 1} \right\} \\ \frac{dV_o(t)}{dt} &= K_1 NP \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

初始条件为：

$$t = 0: \quad V(t) = V(0), \quad c_1(t) = c_1(0) \quad (2-9)$$

## 2. 过渡期

如图 11-2 示。此时管内外压力平衡，净流量为 0，即

$$NP = THP - LHP + LECOP - TECOP = 0 \quad (2-10)$$

## 3. 排出期

如图 11-3 示。此时，组织压缩，淋巴管缝关闭，管内淋巴压力升高，存在两种流动：

(1) 初始淋巴管内静压高于远端淋巴管的压力(RCHP)，形成淋巴流动。作为近似，把椭圆形的淋巴管看作是圆形管

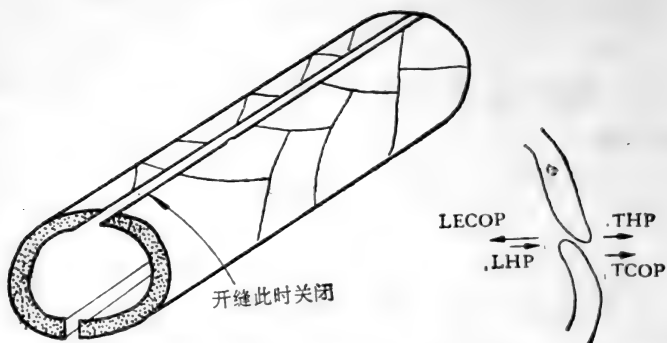


图 11-2 过渡期

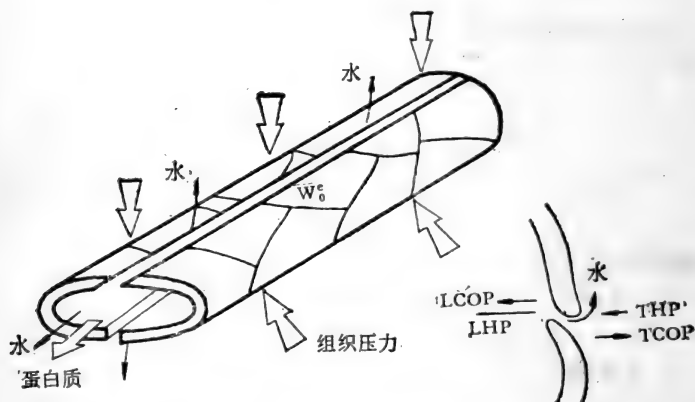


图 11-3 排出期

(截面积相等), 且流动准定常, 故按泊肃叶定律, 有

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = \frac{-\pi[R(t)]^4}{8\mu_1 \frac{L}{2}} (LHP - RCHP) \quad (2-11)$$

$dV_p(t)/dt$  是淋巴流量,  $\mu_1$  是淋巴液粘度,  $L/2$  是淋巴管系平均长度,  $R^2(t) = \frac{V(t)}{L\pi}$  是其等价半径。这样(2-11)变为

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = -K_3 V^2(t) (LHP - RCHP) \quad (2-12)$$

这里:

$$K_3 = \frac{1}{4\pi\mu_1 L^3} \quad (2-13)$$

(2) 通过窄缝的水的渗透流, 其流量为  $\frac{dV_u(t)}{dt}$ , 有:

$$\begin{aligned} \frac{dV_u(t)}{dt} = & - \left[ \frac{(w_o^{(e)})^3 l_o}{d_o} + \frac{w_c^3 l_c}{d_c} \right] \\ & \times \frac{[LHP - THP + TCOP - LCOP]}{12\mu_w} \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\text{令} \quad K_4 = \frac{1}{12\mu_w} \left[ \frac{(w_o^{(e)})^3 l_o}{d_o} + \frac{w_c^3 l_c}{d_c} \right] \quad (2-15)$$

则(2-14)变为

$$\frac{dV_u(t)}{dt} = -K_4 NP \quad (2-16)$$

这里上标(e)表示排出期。

假设淋巴管内流动不影响淋巴液的蛋白质浓度, 则

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{c_1}{V(t)} \cdot \frac{dV_u(t)}{dt}$$

这样, 排出期的方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [c_1(t)V_p(t)] &= -K_3 \cdot V^2(t)c_1(t)(LHP - RCHP) \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_p(t)}{dt} + \frac{dV_u(t)}{dt} = -K_3 V^2(t)(LHP \\ &\quad - RCHP) - K_4 NP \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

初始条件为:

$$t = t_1 \text{ 时: } V(t_1) = V_1, \quad c_1(t_1) = c_{11} \quad (2-18)$$

$t_1$  为排出期起始时间。

Elhay 和 Casley-Smith 取参数如下:

$$L \simeq 10\text{cm}, R \simeq 40\mu\text{m}, l_o = 21\text{cm}, d_o = 500\text{nm}$$

$$w_o^{(f)} = 100\text{nm}, w_o^{(e)} = 8.2\text{nm}, l_c = 86\text{cm}, w_c = 8.2\text{nm}$$

$$\frac{w_c^3}{d_c} = 1.1\text{nm}^2, D = 6 \times 10^{-7}\text{cms}^{-1}, \mu_l = 2 \times 10^{-2}\text{poise}$$

$\mu_s = 0.01\text{poise}$ , 这样在 C. G. S 制中:

$$K_1 = 3.5 \times 10^{-9}, K_2 = 2.5 \times 10^{-6},$$

$$K_3 = 4.0 \times 10^{-3}, K_4 = 1.4 \times 10^{-11}$$

据此, Elhay 和 Casley-Smith 作了数值计算, 典型结果如图 11-4 示。

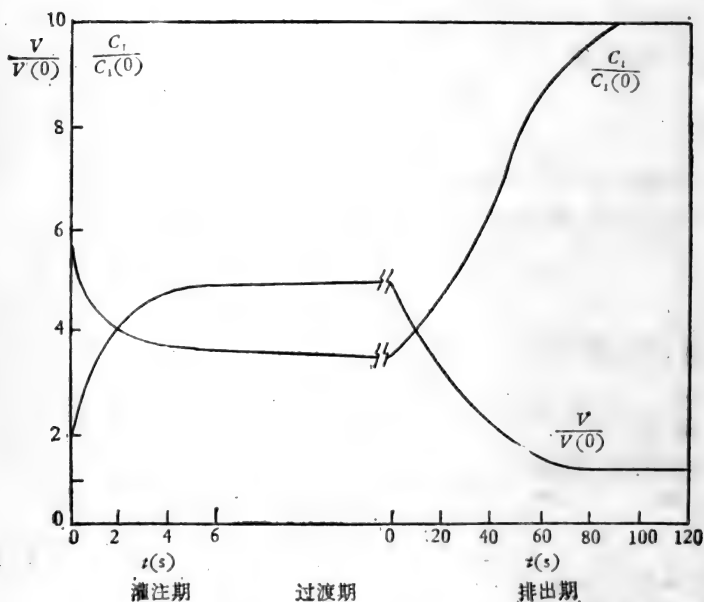


图 11-4 典型计算结果<sup>[3]</sup>

### §3 小管内溶质浓度梯度不变的流动

从机体组织向附近的充液小管分泌各种溶质，并通过小管内流体的运动将分泌物运输到所需要的地方去，这种现象在生理上是常见的。例如，胃壁内胃液的分泌，肝脏内肝胆管胆汁的分泌，肾脏肾小管内的流动，腺体内分泌的流动，等等。它们的共同特点是：

(1) 流体输运管道都是一端封闭的细长管道，盲端深深埋在组织之中，见图 11-5，在这里周围组织分泌溶质，进入管内，因而这里溶质浓度很高。从盲端到开口，浓度逐渐变稀。

(2) 盲端管内溶质浓度不低于当地组织内的浓度，因此，盲端溶质是通过膜的能动输运进入管内的。

(3) 输运小管的侧壁是半透膜，溶质难于通过，而溶剂

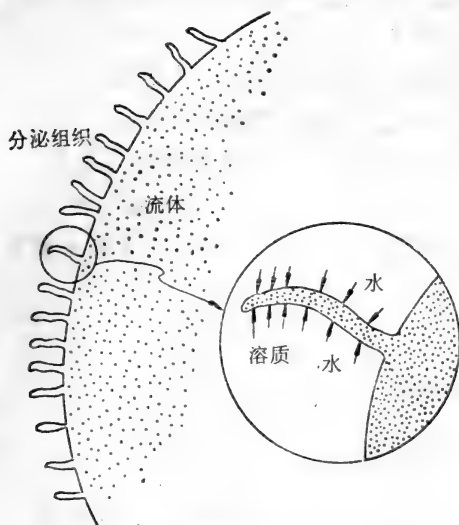


图 11-5 分泌组织中的细长管道

(水)很容易通过,这样浓度逐渐变稀,形成一稳定的浓度梯度。小管内的流动,实际上是组织-小管之间水的渗透引起的。

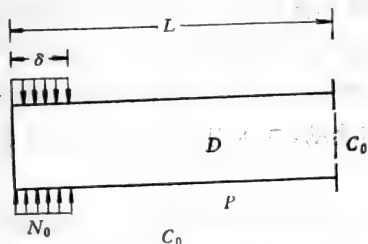


图 11-6 定常浓度梯度流动模型

据此, Diamond 和 Bossert<sup>[4]</sup> 提出如图 11-6 所示的定常浓度梯度流动模型。假设:

(1) 分泌管道是一端封闭的等截面直圆管, 面积为  $a$ , 周长为  $l$ , 管长为  $L$ 。

(2) 溶质的能动输运限于盲端附近一段距离  $\delta$  内, 端面无输运, 通过单位面积管壁的溶质能动输运率  $N_0$  为常数。

(3) 管道其余部分, 壁为半透膜。壁内、外浓度差使得水从周围组织透入管内。单位面积上渗透流量与浓度差成线性关系, 渗透系数  $P$  为常数。

(4) 管运出口处溶质浓度  $c_0$  为常数。

(5) 管道内, 流动是一维的, 速度为  $v = v(x)$ , 溶质的输运包括对流和扩散两部分, 扩散系数  $D$  为常数。

取坐标  $0x$ , 盲端为  $x = 0$ , 出口为  $x = L$ 。若通过单位截面积的溶质流量为  $F(x)$ , 则出口处溶质流量为  $aF(L)$ 。定义:

$$O_r^* = \frac{F(L)}{v(L)} \quad (3-1)$$

生理上最感兴趣的是  $O_r^*$ 。

### § 3-1 量纲分析

根据上述假设, 管内流动决定于八个参数:  $\delta, L, l, D, c_0, P, N_0, a$ 。故



$$\frac{O_i^*}{c_0} = f(\delta, L, l, D, c_0, P, N_0, a) \quad (3-2)$$

但对于流动而言,  $N_0, P$  总是和周长  $l$  相结合而起作用的,  $D$  则和截面积  $a$  结合而起作用。故可设新的参数:

$$P_1 = Pl, \quad N_1 = N_0 l, \quad D_1 = aD \quad (3-3)$$

这样, 流动取决于六个参数:  $\delta, L, D_1, c_0, P_1, N_1$ ,

$$\therefore \frac{O_i^*}{c_0} = g(\delta, L, D_1, c_0, P_1, N_1) \quad (3-4)$$

为作量纲分析, 需知各参数的量纲, 基本量为: 长度  $\mathcal{L}$ , 质量  $\mu$ , 时间  $\mathcal{T}$ 。这样, 诸参数的量纲如下:

$\delta, L, l$	$\mathcal{L}$
$D$	$\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$
$c_0, O_i^*$	$\mu \mathcal{L}^{-3}$
$P$	$\mu^{-1} \mathcal{L}^4 \mathcal{T}^{-1}$
$N_0$	$\mu \mathcal{L}^{-2} \mathcal{T}^{-1}$
$a$	$\mathcal{L}^2$
$D_1$	$\mathcal{L}^4 \mathcal{T}^{-1}$
$P_1$	$\mu^{-1} \mathcal{L}^5 \mathcal{T}^{-1}$
$N_1$	$\mu \mathcal{L}^{-1} \mathcal{T}^{-1}$

由(3-4)可知:

$$[g] = [\delta^{b_1} L^{b_2} D_1^{b_3} c_0^{b_4} P_1^{b_5} N_1^{b_6}] = [\mathcal{L} \mu \mathcal{T}]^0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} b_1 + b_2 + 4b_3 - 3b_4 + 5b_5 - b_6 &= 0 \\ b_4 - b_5 - b_6 &= 0 \\ -b_3 - b_5 - b_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

三个方程, 六个未知量, 故有三个独立的相似参数。由(3-5)可得:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 2\alpha + 2\beta - \gamma, & b_2 &= \gamma, \\ b_3 &= -\alpha - \beta, & b_4 &= \alpha - \beta, \\ b_5 &= \alpha, & b_6 &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

$$\therefore \frac{O_i^*}{c_0} = f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad (3-7)$$

$$\pi_1 = \frac{l\delta^2 c_0 P}{aD}, \quad \pi_2 = \frac{l\delta^2 N_0}{aDc_0}, \quad \pi_3 = \frac{L}{\delta} \quad (3-8)$$

亦可取其它形式,如:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{N_0}{Pc_0^2} \\ \eta &= \frac{1}{\pi_2} = \frac{ac_0D}{lN_0\delta} \\ \lambda &= \pi_3 = \frac{L}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

这样,

$$\frac{O_i^*}{c_0} = f_2(\nu, \eta, \lambda) \quad (3-10)$$

量纲分析可导出决定流动的主要参数,但不可能确定具体的关系。欲求具体解,需要建立具体的数学模型。

### §3-2 数学模型

整个流动的数学定式可从流体质量守恒和溶质质量守恒两个基本定律导出。

#### 1. 流体质量守恒

任取一管段,  $x, x + \Delta x$ , 流入该段的流量为:

$$a[v(x) - v(x + \Delta x)]$$

通过侧壁渗入该段的流量为

$$Pl \int_x^{x+\Delta x} [c(s) - c_0] ds$$

质量守恒,应用积分中值定理可得:

$$a[v(x) - v(x + \Delta x)] + Pl[c(x + \theta\Delta x) - c_0]\Delta x = 0$$

这里  $0 < \theta < 1$ 。令  $\Delta x \rightarrow 0$  则得:

$$(3-11) \quad \frac{dv}{dx} = Pl a^{-1} (c - c_0) \quad (3-11)$$

## 2. 溶质质量守恒

单位时间内通过单位截面的溶质流量为  $F(x)$ , 故由溶质守恒(因为壁对于溶质是不可透的)可得:

$$l \int_x^{x+\Delta x} N(s) ds + a[F(x) - F(x + \Delta x)] = 0。$$

同样, 令  $\Delta x \rightarrow 0$ , 得:

$$lN(x) - a \frac{dF}{dx} = 0 \quad (3-12)$$

$F(x)$  包含两部分: (i) 对流引起的输运  $F_c$ , (ii) 扩散引起的输运  $F_d$ 。

$$F_c = cv \quad (3-13)$$

$$F_d = -D \frac{dc}{dx} \quad (3-14)$$

$$\therefore F = vc - D \frac{dc}{dx} \quad (3-15)$$

按本模型,  $0 \leq x \leq \delta$  时,  $N = N_0$ ;  $\delta < x \leq L$  时,  $N = 0$ , 故由(3-12)直接积分可得:

$$aF = lN_0x + Q_1, \quad 0 \leq x \leq \delta$$

$$aF = Q_2, \quad \delta < x \leq L$$

$$\because F(0) = 0, \quad \therefore Q_1 = 0$$

$$\text{又} \because F(\delta^-) = F(\delta^+), \quad \therefore Q_2 = lN_0\delta$$

$$\therefore vc - D \frac{dc}{dx} = \begin{cases} \frac{l}{a} N_0 x, & 0 \leq x \leq \delta \\ \frac{l}{a} N_0 \delta, & \delta < x \leq L \end{cases} \quad (3-16)$$

(3-11)(3-16)结合边界条件:

$$\left. \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ c(L) &= c_0 \\ v(\delta^-) &= v(\delta^+), \quad c(\delta^-) = c(\delta^+) \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

构成确定管内流动的定解系统。它是非线性的欲求解必须作近似处理。

### 3. 无量纲化

为获得便于近似计算的无量纲方程, 在无量纲化时必须选择每个量的固有尺度为参考。方程(3-11)(3-16)(3-17)中的未知变量为浓度  $c(x)$  和速度  $v(x)$ , 独立变量为  $x$ 。  $c$  的参考尺度可选  $c_0$ , 参考长度应取  $c$  与  $v$  变化最大的那一段距离, 即  $\delta$ , 问题是  $v$  的尺度如何选择。

按(3-15),

$$F(L) = v(L)c(L) - D \left. \frac{dc}{dx} \right|_L$$

$x = L$  处,  $\left(\frac{dc}{dx}\right) < 0, \therefore \left(D \frac{dc}{dx}\right) > 0$

$$\therefore v(L) \leq \frac{lN_0\delta}{ac_0} \quad (3-18)$$

故取  $\frac{lN_0\delta}{ac_0}$  为速度尺度, 这样可设

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{c}{c_0} \\ V &= \frac{vac_0}{lN_0\delta} \\ \xi &= \frac{x}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

这样(3-11)(3-16)(3-17)变为:

$$C - 1 = \nu \frac{dV}{d\xi} \quad (3-20)$$

$$VC - \eta \frac{dC}{d\xi} = \begin{cases} \xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 1, & 1 < \xi \leq \lambda \end{cases} \quad (3-21)$$

$$V(0) = 0, \quad C(\lambda) = 1. \quad (3-22)$$

$$C(1^-) = C(1^+), V(1^-) = V(1^+)$$

这里,  $\nu$ 、 $\eta$ 、 $\lambda$  见(3-9)

### § 3-3 近似解及其意义

方程(3-20)(3-21)(3-22)是非线性的,难于求准确解。为得合理的近似解,首先要考察一下,具体生理流动中,有关参数的大小。表 11-1 列出了 Diamod 和 Bossert 的观测分析结果,表中分别给出了最大值、最小值及典型值。

表 11-1 参数值的估计<sup>[5]</sup>

参数	单位	最小值	典型值	最大值
$r$	cm	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-4}$
$L$	cm	$4 \times 10^{-4}$	$10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$
$\delta$	cm	$4 \times 10^{-5}$	$10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$
$D$	cm <sup>2</sup> /s	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$
$N_0$	mOsm/cm <sup>2</sup> ·s	$10^{-10}$	$10^{-7}$	$10^{-5}$
$P$	cm <sup>4</sup> /s · mOsm	$10^{-6}$	$2 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$
$c_0$	mOsm/cm <sup>3</sup>	—	$3 \times 10^{-1}$	—
$\nu$	无量纲	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-2}$	$10^2$
$\eta$	无量纲	$4 \times 10^{-3}$	75	$10^{10}$
$\kappa$	无量纲	$4 \times 10^{-3}$	5	200

可见,一般来说(典型值), $\nu$ 与 $\eta$ 相比是个小参数,因此  $C(x)$ 、 $V(x)$  均可展为  $\nu$  的幂级数用扰动法求解。

$$C(x) = C^{(0)}(x) + \nu C^{(1)}(x) + \nu^2 C^{(2)}(x) + \dots \quad (3-23)$$

$$V(x) = V^{(0)}(x) + \nu V^{(1)}(x) + \nu^2 V^{(2)}(x) + \dots \quad (3-24)$$

但是，以(3-23)(3-24)直接代入(3-20)、(3-21)所得的解在  $x = 1$  处是不连续的，不满足边界条件(3-22)。这是因为未对方程中另一参数  $\eta$  作适当处理所致。

为此，Segel 引进新的无量纲参数  $\kappa$  代替  $\eta$ ，

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\lambda^2}{\nu\eta} \\ \therefore \kappa &= \left( \frac{lPc_0L}{aD} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

这样方程(3-20)(3-22)变为：

$$\left. \begin{aligned} C - 1 &= \nu \frac{dV}{d\xi} \\ \nu\kappa^2 VC - \lambda^2 \frac{dC}{d\xi} &= \begin{cases} \nu\kappa^2 x & 0 \leq x \leq 1 \\ \nu\kappa^2 & 1 \leq x \leq \lambda \end{cases} \\ V(0) = 0, \quad C(\lambda) = 1, \quad C(1^-) = C(1^+) \\ V(1^-) = V(1^+) \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

将(3-23)(3-24)代入(3-26)则得各级近似：

$$\nu^0: \quad \left. \begin{aligned} C^{(0)} &= 1 \\ \lambda^2 \frac{dC^{(0)}}{d\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

$$\nu^1: \quad \left. \begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{dV^{(0)}}{d\xi} \\ \lambda^2 \frac{dC^{(1)}}{d\xi} &= \kappa^2 [-x + V^{(0)}C^{(0)}] \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \text{或} &= \kappa^2 [-1 + V^{(0)}C^{(0)}] \quad 1 < x \leq \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

$$\nu^2: \quad \left. \begin{aligned} C^{(2)} &= \frac{dV^{(1)}}{d\xi} \\ \lambda^2 \frac{dC^{(2)}}{d\xi} &= \kappa^2 [V^{(0)}C^{(1)} + V^{(1)}C^{(0)}] \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

由(3-7)可得  $C^{(0)} = 1$ ，代入(3-28)得：

$$\lambda^2 \frac{d^2 V^{(0)}}{d\xi^2} - \kappa^2 V^{(0)} = \begin{cases} -\kappa^2 x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\kappa^2, & 1 < x \leq \lambda \end{cases} \quad (3-30)$$

结合边界条件, 可得(3-30)的解为:

$$\left. \begin{aligned} V^{(0)} &= x - G_1 \text{sh}(\kappa \lambda^{-1} x) \\ C^{(1)} &= 1 - G_1 \kappa \lambda^{-1} \text{ch}(\kappa \lambda^{-1} x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq 1 \quad (3-31)$$

$$\left. \begin{aligned} V^{(0)} &= 1 - G_2 \text{ch} \kappa \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \\ C^{(1)} &= G_2 \kappa \lambda^{-1} \text{sh} \kappa \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned} \right\} 1 < x \leq \lambda \quad (3-32)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{\lambda \text{ch} \left[ \kappa \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right]}{\kappa \text{ch} \kappa} \\ G_2 &= \frac{\lambda \text{sh} \frac{\kappa}{\lambda}}{\kappa \text{ch} \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (3-33)$$

取一级近似:

$$O_s = \frac{O_s^*}{c_0} = \frac{1}{V(\lambda)} \approx (1 - G_2)^{-1} \quad (3-34)$$

$\lambda$  的典型值为 10,  $\therefore \frac{\kappa}{\lambda}$  通常不超过 1, 故(3-34)可近似地

取:

$$O_s \approx \frac{\text{ch} \kappa}{\text{ch} \kappa - 1} \quad (3-35)$$

若  $\kappa \ll 1$ , 则可进一步简化为

$$O_s \approx 1 + 2\kappa^{-2} \quad (3-36)$$

图 11-7 是近似解(3-34)与非线性方程数值解的比较, 可见, 当  $\nu = 5$  时, 二者很相符, 只有当  $\nu = 50$  时, 二者才有显著差异, 而生理流动中典型值远小于 50, 故近似解相当准确。同时, 数值计算还表明参数  $\lambda$  的影响很小, 可以不计。如图

11-8 所示。

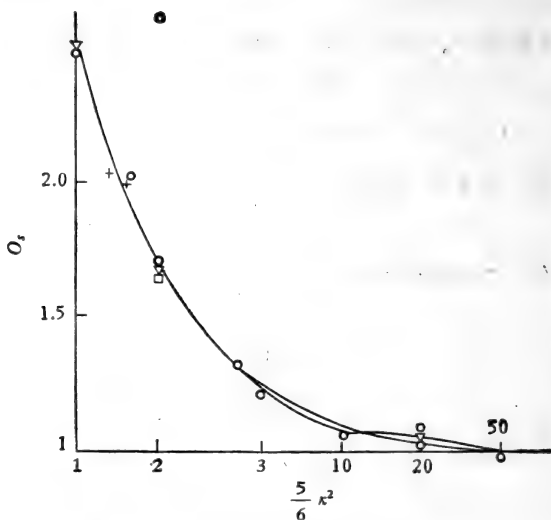


图 11-7 近似解与精确解的比较<sup>[2]</sup>

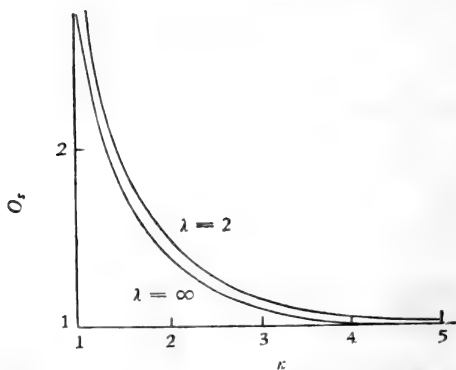


图 11-8  $\lambda$  对  $O_s$  的影响<sup>[2]</sup>

近似解 (3-34) 说明, 影响分泌物运输的最重要的物理参数是  $\kappa$ 。故进一步阐明  $\kappa$  的物理意义是有必要的。



设管道内溶质特征浓度为  $c^*$ ，则由  $\kappa$  的定义 (3-25) 可得：

$$\frac{1}{2} \kappa^2 = \frac{[l(c^* - c_0)PL]c_0}{aD(c^* - c_0)/2L}$$

而  $l(c^* - c_0)PL$  等于单位时间内从组织渗入管内的水容量，它等于从开口端流出的流量，因此， $[l(c^* - c_0)PL]c_0 \approx aF_c c_0$ 。另一方面， $(c^* - c_0)/\frac{1}{2}L$  为管道平均浓度梯度，故

$$D \frac{c^* - c_0}{L/2} \approx F_d$$

$$\therefore \frac{1}{2} \kappa^2 \approx \frac{F_c}{F_d} \quad (3-37)$$

即： $\frac{1}{2} \kappa^2$  是对流引起的溶质输运率与扩散引起的溶质输运率之比。

从物理上来讲，

$$O_s = \frac{O_s^*}{C_0} = \frac{F(L)}{v(L)c_0} = \frac{F_c + F_d}{F_c}$$

$$\therefore O_s = 1 + \frac{F_d}{F_c} \quad (3-38)$$

$$\therefore O_s \approx 1 + 2\kappa^{-2}$$

这说明， $O_s$  主要取决于参数  $\kappa$  这一结论，在物理上是完全有根据的。

鸟类腺管流动和鳄鱼肾小管流动观测表明，分泌物的浓度基本上不受能动输运率  $N_0$  的影响。按本节模型，也就是说除非  $\nu$  很大，否则  $\nu$  的改变不影响  $O_s$ 。这是因为，当  $N_0\delta$  减小时，管内容质特征浓度  $c^*$  降低，渗入管内的水量减少，溶质的对流输运量下降。但同时， $c^*$  的降低导致管内浓度梯度降低，故扩散输运率亦下降，其比  $(\frac{1}{2}\kappa^2)$  大体上不变，因而  $O_s$  不受影响。

本节所述流动模型,既可处理分泌问题,亦可用于体液吸收现象,但更为复杂。

## § 4 蠕动流

可变形管充满流体,当管截面积规律性地收缩、膨胀时,形成沿轴向传播的行波。管壁的这种波动运动,将引起管内流体的运动,称为蠕动流,运动的管壁就起着蠕动泵的作用。

生理上,蠕动作用是管状平滑肌构造的固有的神经-肌肉特性,蠕动流是动物体内物质运输的一种重要形式。尿道、胃-肠道、胆道、腺体管道中,流体的运动均属于蠕动流。此外,小动脉血管壁含有大量平滑肌,其节律性收缩,也起着蠕动泵的作用,推动血液流动。

为说明管壁蠕动引起流体运输的物理机制,考察图 11-9 所示流动,长管两端封闭,套束沿管从左往右滑动,速度为  $c$ ,

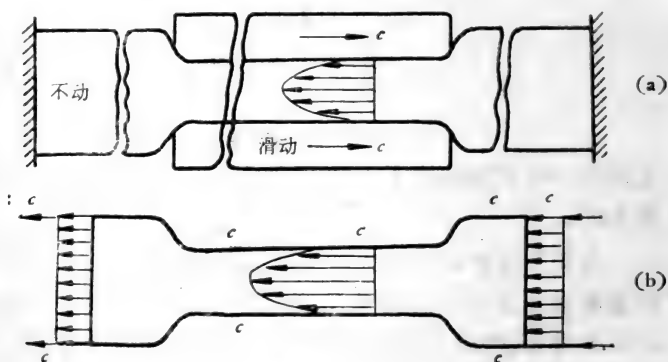


图 11-9

(a) 固定参考系, (b) 随波参考系。

产生一蠕动波,图 11-9(a)是固定参考系中的情况,由于两端封闭,端面无流动,但在收缩管内,流体向左方流动,其速度分

布如图 11-9(a) 所示。由于流体有粘性，流动有阻力，故右方压力高于左方。即在蠕动波前进方向上，流体压力升高。

若取随波一起以速度  $c$  运动的参考系，如图 11-9(b) 示，则壁以驻波形式蠕动，但整个壁以速度  $c$  向左移动，端面上流速均匀，等于  $-c$ 。由于质量守恒，收缩管截面上流速必定超过  $c$ ，若不考虑惯性效应，则速度剖面呈抛物形，但在壁面上流速等于  $-c$ 。它说明了固定参考系中，收缩管内流体沿蠕动波相反方向流动的物理原因。

如果两端不封闭，那么，壁蠕动必然促使流体沿蠕动波前进方向流动。此时，收缩管段内反向流动流量减少。这种反向流动的粘性阻力，使得壁蠕动引起的压力降低。

由此可知：(i) 在固定参考系中，壁蠕动使面积减小的截面上，流体逆着波前进的方向流动；使面积扩大的截面上，流体沿波传播方向流动。(ii) 蠕动流的根本特色是有消耗的。若无粘性作用，则在收缩管段，速度分布是均匀的，不可能造成压降。

#### § 4-1 蠕动流方程及相似参数

设管长无限，壁蠕动波长为  $\lambda$ ，波速为  $c$ 。流体是不可压缩牛顿流体。因而蠕动流服从纳维-斯托克斯方程。进而设流动是轴对称的，取柱坐标  $(r, \theta, x)$  如图 11-10 示。图中  $a$  为

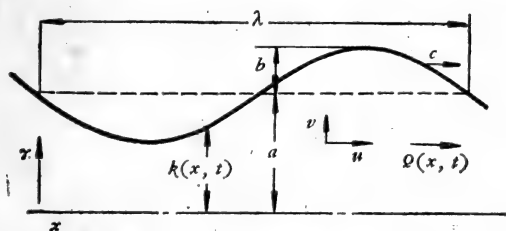


图 11-10 坐标与管壁运动

平衡位置管半径,  $b$  为波幅,  $R(x, t)$  为瞬时半径。引进流函数  $\psi$ ,

$$u = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \phi_r, \quad v = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{r} \phi_x \quad (4-1)$$

流动方程可写为:

$$\nabla^2 \phi_t + \frac{\phi_x}{r} \left[ \nabla^2 \phi_r - \frac{2}{r} \nabla^2 \phi + \frac{\phi_r}{r^2} \right] - \frac{\phi_r}{r} \nabla^2 \phi_x = \nu \nabla^4 \phi \quad (4-2)$$

边界条件为:

$$r = 0: \quad \left. \begin{array}{l} \phi = 0 \\ \phi_{rr} = 0 \end{array} \right\} \quad (4-3)$$

$$r = R(x, t): \quad \left. \begin{array}{l} \phi_r = 0 \\ \phi_x = R \cdot \frac{\partial R}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (4-4)$$

无量纲化, 设

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{x}{\lambda}, \quad \eta = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{ct}{\lambda} \\ v = \frac{u}{c}, \quad V = \frac{\nu}{c} \\ f = \frac{\psi}{a^2 c}, \quad \eta^* = \frac{R}{a} \end{array} \right\} \quad (4-5)$$

这样, 方程(4-2)变为

$$\begin{aligned} D^2 f_\tau + \frac{1}{\eta} \cdot f_\xi \left( D^2 f_\eta - \frac{2}{\eta} \cdot D^2 f + \frac{1}{\eta^2} \cdot f_\eta \right) \\ - \frac{1}{\eta} \cdot f_\eta D^2 f_\xi = \frac{1}{R_c} \cdot D^4 f \end{aligned} \quad (4-6)$$

这里:

$$f_\tau = \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad f_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (4-7)$$

$$D^2 = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4-8)$$

$$\alpha = \frac{a}{\lambda}, \quad R_c = \frac{c a}{\nu} \cdot \alpha \quad (4-9)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0: \quad f = 0, \quad f_{\eta\eta} = 0. \\ \eta = \eta^*: \quad f_{\eta} = 0, \\ \quad \quad \quad f_{\xi} = \eta^* \eta^* \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

显然, 蠕动流相似条件为  $\alpha$ 、 $R_c$  相同, 且  $\eta^*$  相似。壁蠕动波形相似要求波动频率  $\omega$  一样, 相对振幅  $\frac{b}{a}$  也一样, 而  $\omega$  是由  $\lambda$ 、 $c$  决定的,

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{\omega}$$

故  $\eta^*$  相似要求:

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \quad (4-11)$$

相同。也就是说, 相似参数为:  $R_c$ 、 $\alpha$ 、 $\varepsilon$ 。

在给定的蠕动波形  $\eta^*$  下, 方程(4-6)的一般解为:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n} \alpha^{2m} R_c^n \quad (4-12)$$

$f_{m,n}$  服从下述微分方程:

$$\begin{aligned} D_{\eta}^2 f_{m,n} = & -2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [D_{\eta} f_{m-1,n}] - \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} (f_{m-2,n}) \\ & + \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \tau} (f_{m,n-1}) + \frac{\partial}{\partial \tau} (D_{\eta} f_{m,n-1}) \\ & + \frac{1}{\eta} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\partial f_{i,j}}{\partial \xi} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{2}{\eta} \right) \left[ \frac{\partial^2 f_{m-i-1,n-j-1}}{\partial \xi^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{\eta} f_{m-i,n-j-1} \right] - \frac{\partial f_{i,j}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^2 f_{m-i-1,n-j-1}}{\partial \xi^2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ D_{\eta} f_{m-i, n-j-1} \} \left. \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (4-13)$$

这里: 
$$D_{\eta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0: \quad \frac{\partial f_{m,n}}{\partial \eta} = 0, \quad f_{m,n} = 0 \\ \eta = \eta^*: \quad \frac{\partial f_{m,n}}{\partial \eta} = 0 \\ \quad \quad \quad \frac{\partial f_{0,0}}{\partial \xi} = -\eta \eta^* \\ \quad \quad \quad \frac{\partial f_{m,n}}{\partial \xi} = 0 \quad (m+n > 0) \end{array} \right\} \quad (4-14)$$

#### § 4-2 低雷诺数蠕动流

生理条件下, 蠕动流雷诺数一般很低, 且波长很长, 因而  $R_e$  和  $\alpha$  都很小。这时, 可忽略流动的惯性, 得 0 级近似。

设无量纲压力为  $P$

$$P = \frac{2\pi a^2}{\lambda \mu c} \cdot p \quad (4-15)$$

由 (4-13) (4-14) 求解可得:

$$f = -\frac{1}{16} \cdot \frac{dP}{d\xi} \cdot \eta^2 (\eta^2 - \eta^{*2}) \quad (4-16)$$

应用 (4-1) (4-5) 得速度分布:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{c} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{dP}{d\xi} \cdot \eta^{*2} \left( 1 - \frac{\eta^2}{\eta^{*2}} \right) \\ \frac{v}{c} = \frac{1}{16} \cdot \frac{d^2 P}{d\xi^2} \cdot \eta^2 \eta^{*2} \left( 1 - \frac{\eta^2}{\eta^{*2}} \right) + \frac{1}{8} \eta^2 \eta^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \xi} \cdot \frac{dP}{d\xi} \end{array} \right\} \quad (4-17)$$

### 1. 流量-压差关系

瞬时无量纲流量为:

$$q(\xi, \tau) = \frac{2}{a^2 c} \int_0^R r u dr = -\frac{1}{8} \eta^{*4} \frac{dP}{d\xi} \quad (4-18)$$

设流动在随波参考系中是定常的, 则可定义时均流量  $\bar{q}$ :

$$\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\xi, \tau) d\tau \quad (4-19)$$

设:

$$\eta^* = 1 + \varepsilon \cos(\varepsilon - \tau) \quad (4-20)$$

每一波长上流动的无量纲压降为常数  $\Delta P_\lambda$ , 则

$$\bar{q} = \frac{8\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)}{2 + 3\varepsilon^2} - \frac{(1 - \varepsilon^2)^{7/2}}{8\pi(2 + 3\varepsilon^2)} \Delta P_\lambda \quad (4-21)$$

可见, 蠕动流流量包括两部分, 第一部分(右端第一项)是  $\Delta P_\lambda = 0$  时, 壁蠕动引起的流量; 另一部分(右端第二项)是平均压力梯度引起的反向泊肃叶流。

显然, 时均流量  $\bar{q} = 0$  时, 压降最大

$$(\Delta P_\lambda)_{\max} = 64\pi\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) (1 - \varepsilon^2)^{-7/2} \quad (4-22)$$

而平均压降  $\Delta P_\lambda = 0$  时, 流量最大(一定  $\varepsilon$  下):

$$\bar{q}_0 = 8\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) (2 + 3\varepsilon^2)^{-1} \quad (4-23)$$

因为  $\bar{q}_0 = \bar{q}_0(\varepsilon)$ , 不难证明:  $\varepsilon = 1$ , 即壁蠕动波幅等于管半径时,  $\bar{q}_0$  达最大值:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{q}_0)_{\max} &= \frac{3}{2} \\ \therefore \bar{Q}_{0\max} &= \frac{3\pi}{2} a^2 c \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$

此时, 平滑肌收缩使管道完全堵塞, 因而倒流不可能发生, 流

量最大。尿道流动中可以观察到这种现象。

## 2. 倒流现象

(4-17a) 表明, 在固定轴向位置上, 随着壁波动相位的变化, 流速时而和波行进方向一致, 时而相反。然而它本身不能说明流体质点在一个周期内平均地说是沿波传播方向前进, 还是倒退。因为质点位移是拉格朗日性质, 而上述分析都是在欧拉体系中进行的。鉴于此, Shapiro 等用拉格朗日方法计算了蠕动流中, 流体质点运动的轨迹。计算表明, 即使平均流量为零, 管轴附近流体质点的位移(一个周期内的时均值)也是正的。接近管壁的流体质点, 在平均流量很小时, 平均位移为负, 而在平均流量较大时, 则为正。只有在某种条件下, 接近壁面的部分流体才会发生倒流, 而其余部分仍然是向前运动的。

若流动在随波参考系中定常, 则在此参考系中流线和质点运动的轨迹重合。这时, 可根据算出的流函数  $\psi$  来判定是否发生倒流。据 Shapiro 分析, 二维蠕动流倒流发生条件为

$$\bar{q} < \varepsilon^2 \quad (4-25)$$

轴对称情况下则为

$$\bar{q} < \bar{q}_0 \quad (4-26)$$

此外, 在随波参考系中, 在某种条件下, 管心部分流线会出现如图 11-11 所示情况, 这时, 迴流部分的流体, 以蠕动波

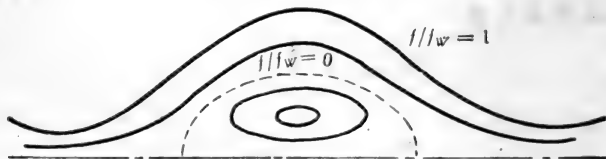


图 11-11 管心环流



速  $c$  随壁面一起运动。Shapiro 指出,发生这种环流的条件是:

$$\text{二维流动:} \quad \bar{q} > \frac{1}{3}(2 - \varepsilon) \quad (4-27)$$

$$\text{轴对称流:} \quad \bar{q} < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \quad (4-28)$$

### 3. 蠕动流与管壁应力

上面分析了给定蠕动波形时,管内流体的运动,未涉及管壁的应力。下面以尿道为例,讨论蠕动运动时管壁的受力情况。

蠕动波形如图 11-12 示。管壁力平衡要求:

$$P_i R_i - P_o R_o = (R_o - R_i) T \quad (4-29)$$

“ $i$ ”表示内壁面,“ $o$ ”表示外壁面,  $T$  为平均(一个波长上)周向张力。

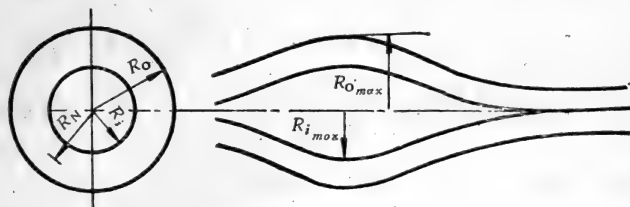


图 11-12 管壁蠕动

假设尿道平滑肌可用第九章 §3-2 所述的三元素模型表示,设并联和串联元素的应力分别为  $T_p$  和  $T_s$ ,则:

$$T = T_p + T_s \quad (4-30)$$

肌肉纤维长度为  $l$ ,可分解为肌球蛋白长度  $M$ ,肌动蛋白纤维长度  $C$  和搭接长度  $\Delta$ 。

$$l = (M + 2C) - \Delta + \delta \quad (4-31)$$

$\delta$  是串联弹性元伸长量,而  $(M + 2c - \Delta)$  为收缩元长度。这

样,有经验方程:

$$\left. \begin{aligned} T_p &= (p^* + \hat{\beta})e^{\hat{\alpha}(l-l^*)} - \hat{\beta} \\ T_s &= (s^* + \beta)e^{\alpha(\delta-\delta^*)} - \beta \end{aligned} \right\} \quad (4-31)$$

这里  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ 、 $p^*$ 、 $l^*$ 、 $s^*$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\delta^*$ 均为生理常数。为确定  $T_s$ , 必须知道  $l$  和  $\delta$  (或  $\Delta$ )。

据实验结果,收缩速度为:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{b(l)\text{sgn}|S_0f(t) - T_s|^n}{a(l) + T_s} \quad (4-32)$$

$S_0$  是收缩元应力峰值,  $0 < n < 1$ ,  $f(t)$ 、 $a(l)$ 、 $b(l)$  都是经验函数,由实验确定。

设  $R_N$  为管壁内中性面的半径,且令

$$\zeta = x - ct \quad (4-33)$$

则平均张力随时间的变化为

$$\begin{aligned} -c \frac{dT}{d\zeta} &= -c[\alpha T - (\alpha - \hat{\alpha})T_p + \alpha\beta + \hat{\alpha}\beta] \frac{1}{R_N} \\ &\cdot \frac{dr_N}{d\zeta} + \left[ \alpha(T - T_p) + \alpha\beta + \frac{\partial T_s}{\partial \Delta} \cdot R_N \right] \frac{1}{R_N} \\ &\cdot \frac{b\text{sgn}|S_0f(t) - T + T_p|^n}{a + T - T_p} \end{aligned} \quad (4-34)$$

另一方面,由(4-29)设  $P_0 = 0$ , 则:

$$(R_0 - R_i) \frac{dT}{d\zeta} + \left( \frac{dR_0}{d\zeta} - \frac{dR_i}{d\zeta} \right) T = R_i \frac{dP_i}{d\zeta} + P_i \frac{dR_i}{d\zeta} \quad (4-35)$$

$P_i$  由(4-18)与流量相联系。这样,由(4-34)(4-35)就可求出壁应力。

## 参 考 文 献

- [1] Casley-Smith, J. R.: Microcirculation, Ed. by Kaley, G., Altura, B. M., Univ. Park. Press., 1977.

- [ 2 ] Casley-Smith, J. R., Bolton, T.: *Microvascular Research*, 5, 213, 1973.
- [ 3 ] Elhay, S., Casley-Smith, J. R.: *Microvascular Research* 12, 121, 1976.
- [ 4 ] Diamond, J., Bossert, W.: *J. Gen. Physiol*, 50, 2061, 1967.
- [ 5 ] Segel, L. A.: *J. Theoretical Biology*, 29, 233, 1970.
- [ 6 ] Liron, N.: *Bull Mathematical Biology*, 38, 573, 1976.
- [ 7 ] Jaffrin, M. Y., Shapiro, A. H.: *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, 3, 13, 1971.
- [ 8 ] Fung, Y. C.: *Advances in Applied Mechanics*, 11, 65, 1971.
- [ 9 ] Lin, C. C., Segel, L. A.: *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, Macmillan Publishing Co. Inc., 1974.

## 第十二章 生理流动与系统分析

### §1 引言

生物是一个复杂的、具有多层次构造的巨系统,它包含许多子系统。如呼吸系统、循环系统、神经系统、淋巴系统、骨骼系统、泌尿系统、消化系统、内分泌系统等等。每个子系统又由许多次级子系统和组元构成,例如,心血管系统又可分为心脏、动脉系统、微循环系统、静脉系统、肺循环系统等。各系统、各组元既有自己的运动规律,又彼此联系,互为条件,互相影响,组成一个整体。

生物体的每个组织、器官都是为了维持生存而存在的。用控制论的语言来说,如果生物系统的一切可能状态用集合  $\{M_i\}$  来表示,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 每个状态  $M_i$  用  $m$  个变量  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, m$ ) 代表, 则生物系统一切可能的状态组成一个  $m$  维向量的集合  $\{[x_\alpha]_i\}$ 。若  $\{M_i\}$  中子集  $\{E\}$  表示生物处于活的状态, 即生存, 那么系统各子系统、组元  $\{[x_\alpha]_i\}$  的功能就在于使系统在环境扰动  $\{D\}$  的作用下, 状态的变化保持在子集  $\{E\}$  内。即:

$$\{D\} \rightarrow \{F\} \rightarrow \{E\}$$

故广义地说, 生物体内各种系统、器官、组织都是使整体(生物)适应环境变异的调节器。生理流动正是实现种种调节的过程之一。

因此, 生理流动规律的研究是认识生理过程的必要前提; 另一方面, 生理流动只有在整体的背景下进行研究, 才有意

义,才有生命的气息。这就需要各种层次的分析与综合。

从第三章到第十一章,讨论了生物系统中,若干类组元和初级子系统的力学性质和流动规律,本章以心血管系统为例,阐述生理流动的系统分析方法。由于神经、精神、激素等控制作用的复杂性,这里主要限于不受上述因素控制时,系统的力学行为。

## §2 系统分析方法

在工程上,系统分析的目的是为了改善系统的性能。因此,进行系统分析的前提是:规定明确的目标,并给定边界条件和所要研究的时间、频率范围。

按照自然选择法则,生物系统应该具有适应其环境的最佳构造。因此,将系统分析方法应用于生物系统是很自然的。当然,其目的不在于改善性能,而在于认识各子系统、各组元之间的关系。但对一个生理系统来说,明确规定其目标是个难题。因为,一个生理系统往往同时为若干目标服务;而某一目标,又往往靠几个系统来实现。

例如,循环系统既能输运氧、养料、废料、热,又能通过改变总流量或局部流量分布维持体内平衡,并传递化学信号。另一方面,循环系统又不是维持体内平衡的唯一系统,仅仅是其中之一。因此,离开整个生物系统的状态,就无法确定循环系统的目标。

工程技术中,系统分析方法有两类。

### 1. 单参数理论(经典控制论)

如图 12-1 示,系统分控制器和受控者两个子系统,受控变量只有一个,用一反馈线路检测受控变量,并通过比较器将

误差信号送入控制器,从而实现调节。每个子系统中绝大多数组元是线性或近似线性的。为使系统功能稳定,总是用负反馈进行控制。

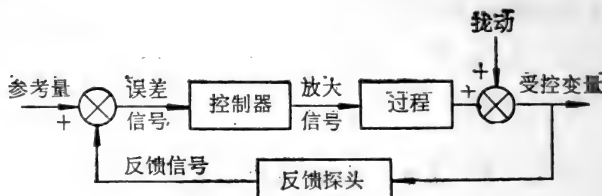


图 12-1 经典控制论方块图

在数学上,经典控制论的特色是用集中参数法表示每个组元,对时间作拉普拉斯变换,将复杂的高阶微分方程组(它描述系统变量随时间的变化),简化为代数方程组而求解。输入和输出之间用传递函数(或频率特性)联系。

## 2. 多参数理论(向量控制论)

系统方块图如图 12-2 示。数学上,多参数理论的特点是:用  $n$  个一阶微分方程组,代替描述系统的  $n$  阶微分方程。一

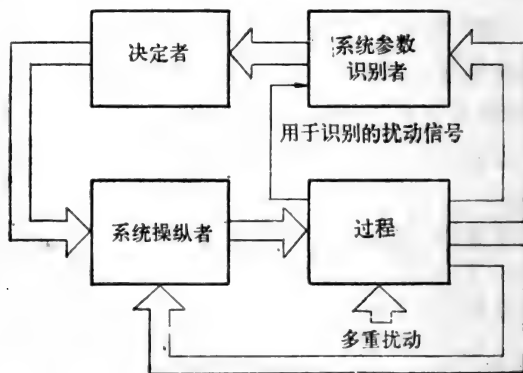


图 12-2 多参数理论的方块图

阶微分方程组的变量为  $x$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\dddot{x} = \frac{d^3x}{dt^3}$ ,  $\dots$ , 它们构成一个  $n$  维向量。

这里,首要的问题是:用哪些变量才能正确、全面地表征被控系统的动力学特性,以保证由此而产生的控制信号,足以控制系统的内部状态。对生理流动来说,这取决于对系统内部流动的认识。

其次是决定控制方案。在多种扰动影响下,系统状态在状态空间的位置变了,偏离了最佳点。决定器必须根据检测

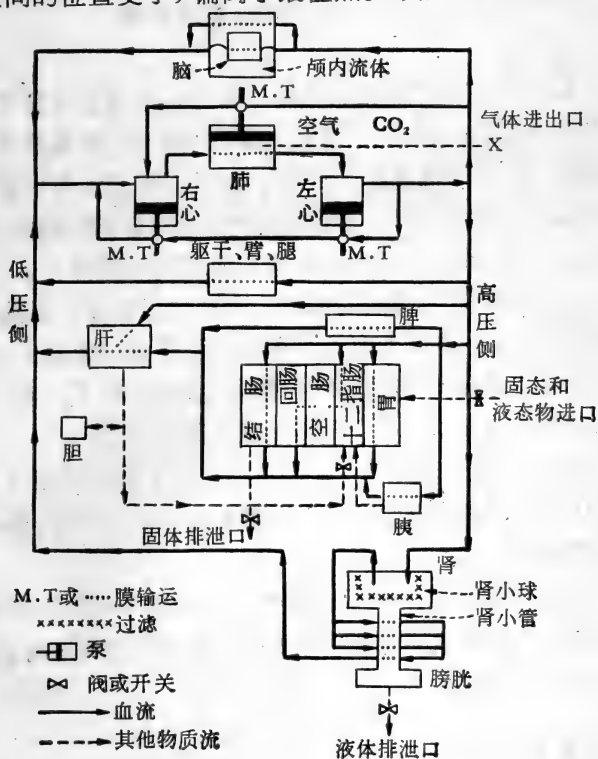


图 12-3 人体内部物质运输过程图<sup>[9]</sup>

信号,算出环境改变后的最佳状态位置,发出控制信号。然后,通过控制器改变系统参数,实现调节。

就人体内部物质输运过程而言,图 12-2 中的受控系统,可用图 12-3 所示的方块图来表示。每个子系统、每个组元,都通过多种渠道在各个层次上进行控制。为认识这种多层次、多目标组合系统的调节功能,现有的理论是不够的,需要发展大尺度系统理论 (large-scale System theory)。

### § 3 循环系统动力学

要分析心血管系统的功能,首先要弄清它在整个生物系统内部的地位。图 12-4 清楚地表明,整个生物系统可分为代谢系统、体内平衡系统……等;循环系统是体内平衡系统之一;它由循环控制系统、心血管系统(受控者)等构成。从构造上看,心血管系统又可分为心泵和血管组织两部分。

整个循环系统功能的调节,主要通过改变心脏输出和周缘阻力而实现。前者表现为心率变化和每搏射血量的变化;后者则表现为小血管的收缩和扩散。控制机理有三种:(i)交感神经控制;(ii)内分泌激素(如肾上腺素)控制;(iii)心脏、血管力学性能的自动调节。只有明确规定了机体代谢水平及其他体内平衡系统的状态后,才能用系统分析的方法,确定整个循环系统的状态。

这里,只讨论上节所述的第一个问题——如何判别受控系统的动力学特性,即当控制器处于某一稳定状态时,心血管系统整体的力学行为。

#### § 3-1 概述

心血管系统的基本特色是:它构成一个闭环。每次心搏



产生的脉动信号,沿两个方向相反的路径传遍整个系统,最后回到原点(心脏)。显然,闭环中任一部分的压力、流量变化,必定影响环路的其余部分。孤立地研究闭环中某一部分的运动,有可能遗漏它和其他组元相互作用的信息,所得结论不能完全代表该组元作为整体一部分时的特性。

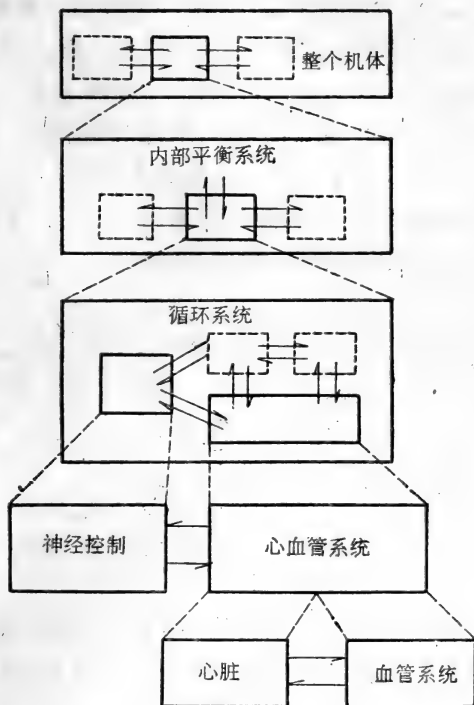


图 12-4 心血管系统在体内的位置

因此,研究心血管系统的动力学行为时,既要从各个部分的运动规律(应用第三至第十章的结果)出发,把它们联系起来(互为边界条件),进行综合;也需要从综合到分析,由整体特性决定组元的运动规律。后一种方法的要点是:在所要研究的组元邻近将闭环打开,确定开环的动力学行为,从而得该

组元特性。

### § 3-2 组元模型

心血管系统每个组元至少有两个开口,一个出口,一个进口,在两个方向上和邻接组元发生相互作用,如图 12-5(a) 所示。对于心、肺、大血管来说,血液和周围组织的物质交换可以忽略不计,双开口组元是其合理的模型。就机体各部分、各器官的毛细血管组织而言,若只考虑短期内的相互作用,即只考虑血液和组织之间的气体交换,双开口模型也近似适用;但若计及长期调节 (long term regulation) 作用,则必须考虑血流与组织之间的流体交换,至少应采用三开口元素模型(见图 12-5(b))。下面讨论最简单的双开口模型。

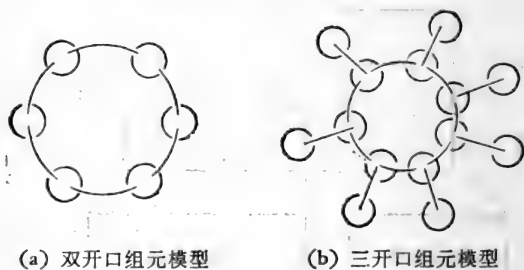


图 12-5

设组元物性用集中参数表示,参数不随时间变化。流动通过该组元时的规律,可用进口和出口的压力-流量关系表

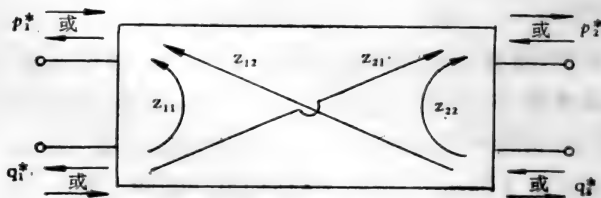


图 12-6 集中参数模型

征。由于组元是线性的，压力  $p(t)$  和流量  $Q(t)$  随时间  $t$  的变化，可用相应的拉普拉斯变换  $p^*(s)$ 、 $Q^*(s)$  描述(图 12-6)，有如下关系：

$$\left. \begin{aligned} p_1^* &= Q_1^* Z_{11} + Q_2^* Z_{12} \\ p_2^* &= Q_1^* Z_{21} + Q_2^* Z_{22} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

或：

$$\left. \begin{aligned} Q_1^* &= Y_{11} p_1^* + Y_{12} p_2^* \\ Q_2^* &= Y_{21} p_1^* + Y_{22} p_2^* \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

$Z_{ij}$  为阻抗， $Y_{ij}$  为导纳。其中  $Z_{11}$  是出口流量不变时组元输入阻抗：

$$Z_{11} = \left. \frac{p_1^*}{Q_1^*} \right|_{Q_2^*=0} \quad (3-3a)$$

$Z_{22}$  是进口流量不变时，终端阻抗：

$$Z_{22} = \left. \frac{p_2^*}{Q_2^*} \right|_{Q_1^*=0} \quad (3-3b)$$

$Z_{21}$  是出口流量不变时，进口流对出口流的传输阻抗：

$$Z_{21} = \left. \frac{p_2^*}{Q_1^*} \right|_{Q_2^*=0} \quad (3-3c)$$

$Z_{12}$  是进口流量不变时，出口流对进口流的传输阻抗：

$$Z_{12} = \left. \frac{p_1^*}{Q_2^*} \right|_{Q_1^*=0} \quad (3-3d)$$

(3-1)(3-2)亦可写为：

$$\begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

传输参数为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ：

$$\begin{bmatrix} p_1^* \\ Q_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2^* \\ -Q_2^* \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\begin{bmatrix} p_2^* \\ Q_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ -Q_1^* \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A}{C}, & Z_{12} &= \frac{AD - BC}{C} \\ Z_{21} &= \frac{1}{C}, & Z_{22} &= \frac{D}{C} \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{D}{B}, & Y_{12} &= \frac{-AD + BC}{B} \\ Y_{21} &= -\frac{1}{B}, & Y_{22} &= \frac{A}{B} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

### § 3-3 单开口系统分析

作为第一步,假设心血管迴路在某一点上打开,把开环系统当作黑箱,在一定的约束条件——血容量不变情况下,选择合适的输入量,测量输入与输出,导出二者的关系。开口的选择应考虑两个因素:一是物理上流动特性有无显著变化;二是是否易于测量。通常取腔静脉-右心房衔接处或左心室-升主动脉接头处为开口。

由于血容量不变,黑箱输出流量必定与输入流量相等,因而不能取压力  $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$  为输入,应取流量  $Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t)$  为输入,这时:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= Z_{12} = \frac{p_1^*}{Q^*} \\ Z_{22} &= Z_{21} = \frac{p_2^*}{Q_2^*} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

#### 1. 静态特性

静态分析常常可以揭示系统的一些基本性质,这些性质从动态分析中是看不出来的。循环系统开环静态分析始于

Guyton 等人。图 12-7 是他们测得的静脉回流量  $VR$  和腔静脉压力  $P_{cV}$  的关系。当  $P_{cV}$  达  $7\text{mmHg}$  时, 回流停止, 进口流量为  $0$ , 整个血管系统内没有流动, 压力处处均布, 称为系统平均充盈压力  $MSP$ 。  $VR-P_{cV}$  曲线的斜率为静脉回流阻力  $R_{V0}$ 。  $VR-P_{cV}$  曲线的一个特点是: 当  $P_{cV} \lesssim 0$  时,  $VR$  不再随  $P_{cV}$  降低而增大。这是因为, 当腔静脉压力低于大气压时, 血管被压坍, 阻力增大, 回流量不再升高。

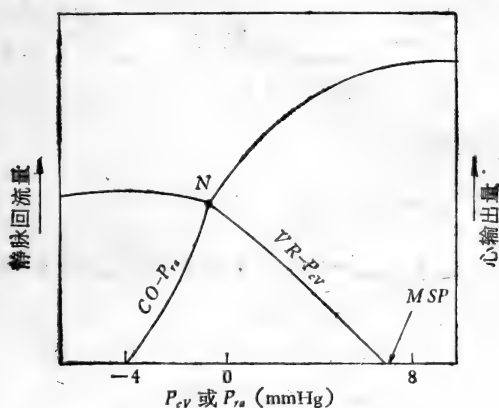


图 12-7  $VR-P_{cV}$  及  $CO-P_{ra}$  曲线<sup>[1]</sup>

图 12-7 中还画出了左心室输出流量  $CO$  与右心房压力  $P_{ra}$  的关系。它与  $VR_{R} - P_{cV}$  曲线的交点  $N$  是血量不变时, 心输出量的稳定运行点。

为说明图 12-7 所示的结果, Guyton 提出图 12-8 所示的心血管系统模型。设自然状态下系统容积为  $V_0$ ,  $EV = V - V_0 = EV_a + EV_v$ , 动脉和静脉总的平均顺应性 (compliance) 为  $C_s$ ,

$$C_s = \frac{\Delta EV}{\Delta p} = C_a + C_v \quad (3-11)$$

$C_a$  和  $C_v$  分别为动脉和静脉的顺应性。

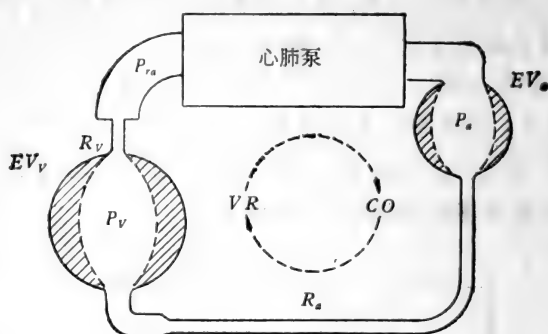


图 12-8 心血管系统模型

当流量为零时，

$$P_a = P_v = P_{ra} = MSP = \frac{EV}{C_s} \quad (3-12)$$

即  $MSP$  是血容量、顺应性及自然状态管系容量  $V_0$  的函数。

当流量大于零但流动定常时，

$$P_a = \bar{Q}(R_v + R_a) + P_{ra} \quad (3-13)$$

$$P_v = -\bar{Q}R_v + P_{ra} \quad (3-14)$$

$\bar{Q}$  为时均流量，下标“a”指动脉，v 指静脉。由 (3-12) — (3-14) 得：

$$P_a = \bar{Q}R_a + MSP \quad (3-15)$$

$$P_{ra} = P_{cv} = MSP - \bar{Q} \left[ \frac{R_v C_v + (R_v + R_a) C_a}{C_a + C_v} \right] \quad (3-16)$$

一般  $C_a \ll C_v$ ，据测量， $C_v \approx 20C_a$ ；而  $R_a \gg R_v$ ，据估计

$$R_v \approx \frac{1}{20} R_a。$$

由此可见：

$$(1) \frac{\partial \bar{Q}}{\partial P_a} = \frac{1}{R_a}, \quad \frac{\partial \bar{Q}}{\partial P_{ra}} \approx \frac{-1}{R_v}, \quad \because R_v \ll R_a$$

故右房压力（即静脉压力）对于心输出量的影响比动脉压力（即周缘血管阻力）大得多。

(2) 因为  $C_v \approx 20C_a$ , 故(3-16)近似为:

$$P_{ra} = P_{cv} = MSP - \left( R_v + \frac{R_a}{20} \right) \bar{Q} \quad (3-17)$$

而  $R_v \approx \frac{R_a}{20}$ 。故尽管静脉血流阻力远低于动脉阻力, 二者对

右房压力、静脉压力的影响是相当的。

(3) 血容量的变化将改变  $MSP$ , 从而改变心输出。图 12-9 是输血和失血时  $VR-P_{cv}$  曲线与正常状态的比较。系统顺应性较小时失血 12%, 心输出量降低 50%; 输血 10%, 心输出量增大 40%。系统顺应性越大, 总血容量的影响越缓和。

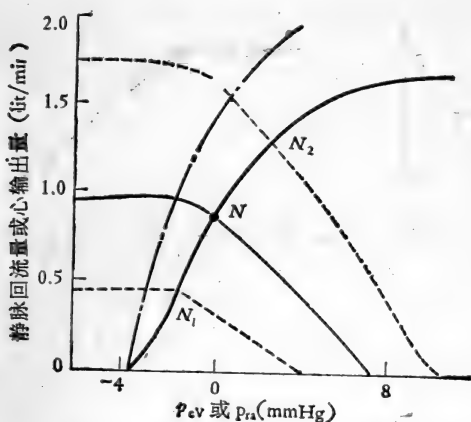


图 12-9 血容量对心输出的影响<sup>[1]</sup>

(4) 正常生理状态下,  $VR-P_{cv}$  曲线与  $CO-P_{ra}$  曲线的交点接近于  $VR-P_{cv}$  曲线‘平台’部分。故当血容量不变、静脉流动阻力不变时, 不论怎样加快心跳或加强心肌收缩, 心输出量也不会有显著增加。

(5) 两个开环曲线以相反(符号)的斜率相交, 因而闭环系统是稳定的。

## 2. 动态特性

Sagawa<sup>[1]</sup> 对正弦流动在频率为 0.005—0.01Hz 范围内, 测定了静脉端及右房端阻抗幅值与频率的关系, 二者之比:

$\left| \frac{Z_{vc}(i\omega)}{Z_{ra}(i\omega)} \right|$  随频率的变化如图 12-10 示。可见, 当频率低于 2

周/分时,  $\left| \frac{Z_{vc}(i\omega)}{Z_{ra}(i\omega)} \right| > 1$ , 因而闭环时, 在低频区系统具有良好的稳定性。然而, 频率增大时, 幅值比减小, 相移增大, 故对于频率较高的扰动, 系统稳定性稍差, 但不会产生自激振荡。

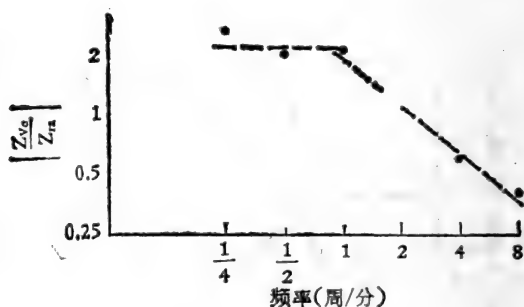


图 12-10 动态特性<sup>[1]</sup>

## § 3-4 双开口系统分析

若在腔静脉与右心房接头及左心室与升主动脉接头处, 将闭环断开, 则整个心血管系统分为两部分(图12-11): 心-肺泵和血管组织。在讨论图 12-11 所示肺-心泵的力学性能之前, 先介绍一下 Frank-Starling 假设是有益的。



## 1. Frank-Starling 假设

实验证明,即使没有神经活动和激素作用,心脏也能借助于心肌的特性而自行调节,以适应血液动力学条件的改变。

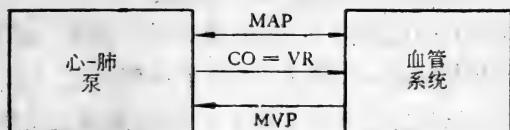


图 12-11 双开口心血管系统方块图

心肌纤维收缩时的张力和纤维初始长度  $l_0$  有关。当  $l_0$  不超过某一值时,  $l_0$  愈长,纤维张力越大;但超过该值时则相反。因而,对整个心室来说,舒张期末心室容积越大,收缩力愈大,心输出量增大。但超过某一容积后,则情况相反。心脏的这种调节机理称为 Frank-Starling 机理。

Starling 用狗的心脏做了系统的观测,结果证明:

(1) 当静脉回流量突然增大时,右心房压力突增;主动脉压力仅略有所增;左心室容量也很快增大,但比右心房压力突增迟后若干周期。这说明舒张期内左心室进口流量高于收缩期时的出口流量,残存的血液使左心室舒张期末容积增大,按照 Frank-Starling 机理,下一次心搏的输出量将增大,从而流进和流出达到新的平衡。

(2) 当外周阻力突然增大时,动脉压力升高。因而,一开始左心室输出量减少,而静脉回流未变。这样,舒张期末容量增大,同理,而后的心搏输出量增大,达到新的平衡。

由此可见,心输出量必定和静脉迴流相匹配,即左、右心室输出量保持精确的平衡。由于两个心室是串联的,即使很小的不平衡,也会引起灾难性的后果。此即 Frank-Starling 假设。

## 2. 肺-心泵静态特性

Sagawa 等通过动物试验,测定了平均心输出量  $\bar{Q}$  与平均主动脉压力  $P_a$  及平均右心房压力  $P_{ra}$  的关系,以及  $\bar{Q}-P_{la}$  (平均左心房压力)的关系。结果表明:

(1) 在生理范围内,心输出量对右心房压力相当敏感,而对主动脉压力的改变很不敏感,几乎不变。

(2) 当左心房压力受控时,心输出量随主动脉压力的变化较为明显。二者的比较见图 12-12。

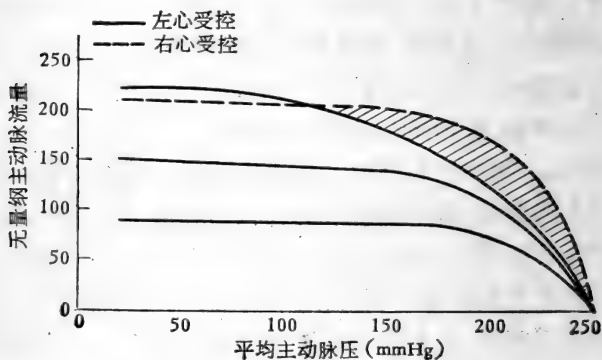


图 12-12 流量-动脉平均压力关系<sup>[1]</sup>

(3) 在生理范围内,左心房压力固定时,心输出量随主动脉压力的变化不甚大。Sarnoff 把它归因于除了心肌特性引起的调节机理以外的,另一种固有调节机理称为自适调节(homeometric auto regulation)。但 Clancy 等认为,由于蠕变,左心房压力不变并不意味着舒张后期心室容积不变。因此,上述现象仍然是 Starling 机理引起的。

(4)  $\bar{Q}$ 、 $P_{la}$ 、 $P_a$  间有如下经验关系:

$$\bar{Q} = K(P_{la} - P_{la,0}) \left\{ 1 - \exp \frac{1 - \frac{P_a}{P_{a,m}}}{A \cdot K(P_{la} - P_{la,0})} \right\} \cdot BW \quad (3-18)$$

这里,  $P_{la,0}$  是左心室能泵血的最小左心房压力;  $P_{a,m}$  是左心室能泵血时, 主动脉最大压力,  $A$ 、 $K$  是经验常数,  $BW$  是体重。

(5) 输出功率的峰值取决于  $P_a$  和  $P_{la}$ ,  $P_{la}$  越高, 达到输出功率峰值的最佳  $P_a$  越低。

### 3. 肺-心系动态特性

用不同波形的流动作为输入, 可得其动力学性质。

Herndon 实验中, 主动脉压力作正弦变化, 测量心输出量的变化。实验测得心-肺泵的传递函数为:

$$\frac{Q^*}{P_a^*} = \frac{k(1 + \tau_2 s)}{1 + \tau_1 s} \quad (3-19)$$

$k$  是负常数,  $\tau_1$ 、 $\tau_2$  是时间常数。  $|k|$  的变化范围为 0—5ml/mmHg,  $\tau_1 \approx 1s$ ,  $\tau_2 \approx 10s$ 。

当主动脉压力突变时, 心输出量  $Q$  的反应如图 12-13 示。研究动脉阻抗突出对于左心室输出瞬时影响的人, 根据图

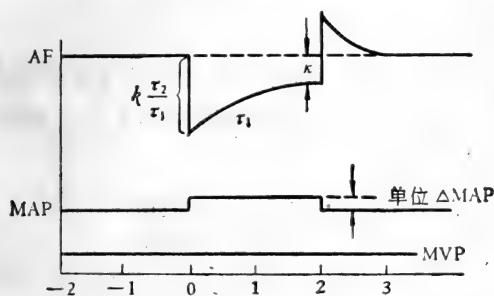


图 12-13  $Q(t)$  对阶跃  $P_a(t)$  的反应<sup>[1]</sup>  
 $AF = Q(t)$ ,  $MAP = P_a$ ,  $MVP$ ——平均静脉压

12-13 中  $Q(t)$  在初始时期的突变, 认为心脏是内阻抗很小的流动源; 而观察主动脉压力突变后压力-流量定态关系的人, 则根据  $t \rightarrow \infty$  时, 流量几乎不变这一事实, 断言心肺泵近似于具有高内阻抗的恒流源。实际上, 见智见仁, 都有一定道理, 但都不全面。全面的流量反应如图 12-13。

### § 3-5 心血管系统分析

现以各组元运动规律为基础, 把它们联系起来, 对心血管系统的力学性能作综合分析。这类模型很多, 它们的共同之处是:

- (1) 都是集中参数模型, 且大都是线性的。
- (2) 均基于经典控制论(是单参数的)。
- (3) 都用计算机模拟, 有的用数字计算机, 有的用模拟计算机, 有的用混合型计算机。

这里, 以 Beneken 和 Dewit<sup>[2]</sup> 模型说明心血管系统分析的方法。

Beneken 和 Dewit 将整个心血管系统分为十九个单元, 如图 12-14 所示, 每个组元的性能如下。

#### 1. 心室

假设心室为球壳, 肌肉纤维均匀地沿球面切向分布; 壁材料各向同性、不可压缩, 且左右心室互不干扰。这样, 左心室内压  $P_{LV}$  为:

$$P_{LV} = \frac{10^3 \cdot S_L}{13.6} \cdot \frac{K_{TL}}{A_n} \quad (3-20)$$

单位: mmHg

这里,  $S_L$  是无量纲形参数, 等于心肌纤维长度  $L_i$  和舒张期末长度  $L_{IED}$  之比,  $S_L$  与左心室容积的关系如图 12-15 所示。  $A_n$

是松弛状态下壁断面积,  $K_T$  是每平方毫米上肌肉产生的力 (单位为 gm)。 $K_T - \frac{L}{L_u}$  关系见图 12-16,  $L$  为心肌纤维长度,  $L_u$  为松弛状态下的长度。

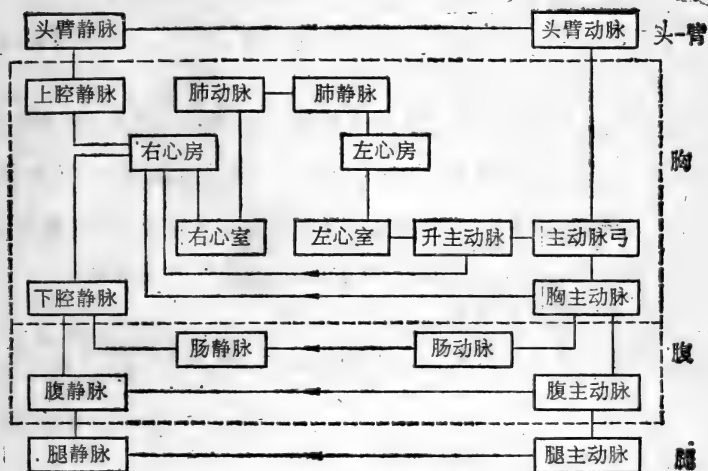


图 12-14 心血管系统分析模型<sup>[2]</sup>

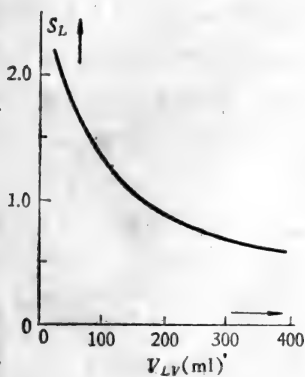


图 12-15  $S_L - V_{LV}$  关系<sup>[2]</sup>

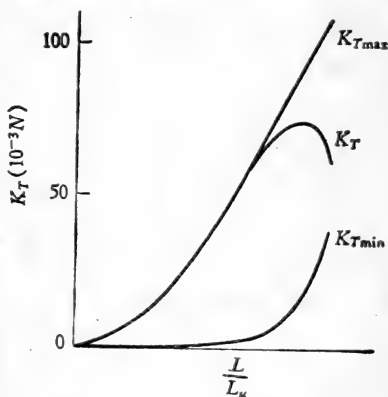


图 12-16  $K_T - \frac{L}{L_u}$  关系<sup>[2]</sup>

类似地,右心室有:

$$\dot{P}_{RV} = \frac{S_R \cdot 10^3}{13.6} \cdot \frac{K_{TR}}{A_u} \quad (3-21)$$

$$S_R = \frac{L_R}{L_{RED}}$$

收缩期持续时间

$$T_{VS} = 0.16 + 0.20T \quad (3-22)$$

$T$  为心搏周期。

左心室容积和输出输入流量的关系为:

$$V_{LV}(t) = V_{OLV} + \int (Q_{LALV} - Q_{LV AO1}) dt \quad (3-23)$$

$V_{OLV}$  为舒张期末左心室容积,  $Q$  为流量, 下标  $LALV$  表示从左心房到左心室,  $LV AO1$  表示从左心室到升主动脉

压力-流量关系为:

$$P_{LV} - P_{AO1} = R_{LV AO1} \cdot Q_{LV AO1} + \mathcal{L}_{LV} \frac{dQ_{LV AO1}}{dt} + \frac{\rho}{2A_{AO1}^2} Q_{LV AO1}^2, P_{LV} > P_{AO1} \text{ 时} \quad (3-24a)$$

$$Q_{LV AO1} = 0, \quad P_{LV} \leq P_{AO1} \text{ 时} \quad (3-24b)$$

$R$  为阻力,  $A$  为截面积,  $\mathcal{L}_{LV}$  = 血液密度  $\times$  左心室半径  $\times$  流出血管直径。方程右端第一项代表血液粘性引起的压降, 第二项是加速度引起的惯性效应, 第三项是瓣膜及出口截面积变化引起的流动损失。一般第一项比第三项小得多。

类似地右心室有:

$$V_{RV}(t) = V_{ORV} + \int (Q_{RARL} - Q_{RV PA}) dt \quad (3-25)$$

$$P_{RV} - P_{PA} = R_{RV PA} Q_{RV PA} + \mathcal{L}_{RV} \frac{dQ_{RV PA}}{dt} + \frac{\rho}{2A_{PA}^2} Q_{RV PA}^2 \left. \begin{array}{l} P_{RV} > P_{PA} \\ P_{RV} \leq P_{PA} \end{array} \right\} \quad (3-26)$$

$$Q_{RV PA} = 0$$

这里  $RV$  指右心室,  $PA$  指肺动脉,  $RARV$  表示从右心房到右心室,  $RVPA$  表示从右心室到肺动脉。

## 2. 心房

压力-容积关系为

$$P_{LA} = a_{LA}(t)(V - V_u)_{LA} \quad (3-27)$$

$$P_{RA} = a_{RA}(t)(V - V_u)_{RA} \quad (3-28)$$

$V_u$  为松弛状态心房容积。

$$a_{LA}(t) = \begin{cases} 0.28 & \text{收缩期} \\ 0.12 & \text{舒张期} \end{cases} \quad (\text{mmHg/ml}) \quad (3-29)$$

$$a_{RA}(t) = \begin{cases} 0.15 & \text{收缩期} \\ 0.05 & \text{舒张期} \end{cases} \quad (\text{mmHg/ml}) \quad (3-30)$$

心房收缩期为  $T_{As}$

$$T_{As} = 0.10 + 0.09T \quad (3-31)$$

左心房容积-流量关系:

$$(V - V_u)_{LA} = (V_0 - V_u)_{LA} + \int [Q_{PVLA} - Q_{LALV}] dt \quad (3-32)$$

压力-流量关系:

$$\left. \begin{aligned} Q_{LALV} &= \frac{1}{R_{LALV}} (P_{LA} - P_{LV}), & P_{LA} > P_{LV} \\ Q_{LALV} &= 0, & P_{LA} \leq P_{LV} \end{aligned} \right\} \quad (3-33)$$

右心房容积-流量关系:

$$(V - V_u)_{RA} = (V_0 - V_u)_{RA} + \int (Q_{VR} - Q_{RARV}) dt \quad (3-34)$$

压力-流量关系:

$$\left. \begin{aligned} Q_{RARV} &= \frac{1}{R_{RARV}} (P_{RA} - P_{RV}), & P_{RA} > P_{RV} \\ Q_{RARV} &= 0, & P_{RA} \leq P_{RV} \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

这里  $V_0$  为初始容积,  $Q_{VR}$  表示静脉回流量,  $Q_{PVL\Delta}$  为肺静脉到左心房的流量。

### 3. 体循环和肺循环的血管模型

整个血管系统分为若干段用集中参数模型表示。考察任一段血管 1#, 前面与 0# 段相连, 后面与 2# 相接。按线性传输线理论, 1# 血管内压力、流量和容积满足如下关系:

$$P_0 - P_1 = R_1 Q_{01} + \mathcal{L}_1 \frac{dQ_{01}}{dt} \quad (3-36)$$

$$V_1 = V_0 + \int (Q_{01} - Q_{12}) dt \quad (3-37)$$

$$P_1 = \frac{1}{C_1} (V - V_u)_1 + R'_1 \frac{dV_1}{dt} \quad (3-38)$$

这里,  $R$  为流阻,  $\mathcal{L}$  为流感,  $C$  为流容,  $V_{10}$  为 1# 段初始容积  $Q_{01}$  为 1# 段进口流量,  $Q_{12}$  为 1# 段出口流量,  $R'$  为壁材料粘性引起的容积变化阻力。

模拟时, 动脉血流和静脉血流的等效电路如图 12-17 示。

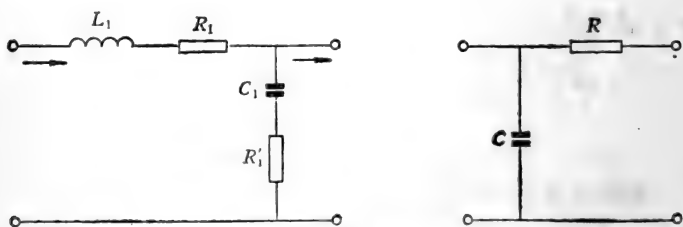


图 12-17 动脉血管和静脉血管的等效电路

各段血管的  $R$ 、 $\mathcal{L}$ 、 $C$ 、 $V_u$  值列于表 12-1。

应用上述模型, Beneken 和 Dewit 分析了整个心血管系统的动力学特性。结果与实验近似相符。



表 12-1 Beneken-Dewit 模型参数<sup>[2]</sup>

	$R$ ( $10^{-3}$ mmHg/ml/s)	$\mathcal{L}$ (mmHg/ml/s)	$C$ (ml/mmHg)	$V_u$ (ml)
升主动脉	—	0.22	0.28	53
主动脉弓	0.03	0.43	0.29	61
胸主动脉	0.9	3.8	0.29	59
腹主动脉	12	14	0.21	58
肠动脉	1.4	2.7	0.66	17
腿动脉	180	31	0.12	63
头臂动脉	47	14	0.33	114
头臂静脉	226	—	9.4	522
腿静脉	300	—	4.8	257
腹静脉	595	—	5.1	305
肠静脉	166	—	10.6	607
下腔静脉	15	—	8.3	488
上腔静脉	60	—	8.3	485
肺动脉	—	0.18	4.3	50
肺静脉	7	—	8.4	460

## § 4 心血管流动和体液平衡

### ——循环系统的长期调节

上述模型分析了心血管系统内部各个环节的相互作用，没有考虑循环系统和体内其他系统的相互影响，因而忽略了影响心血管功能的许多长效因素。这里，作为一个例子，考察体液平衡和心血管流动的相互作用。

#### § 4-1 体液对心血管血液流动的影响

不考虑神经系统和激素的调节作用，体液对循环系统的长效作用可用图 12-18 所示模型表示。

单元 1 代表动脉压力( $AP$ )对尿排出量( $UO$ )的影响。当

动脉压力  $AP < 60-70\text{mmHg}$  时, 尿排出量接近于 0, 而当  $AP$  从  $100\text{mmHg}$  增至  $200\text{mmHg}$  时, 尿排出量增至六倍到七倍。

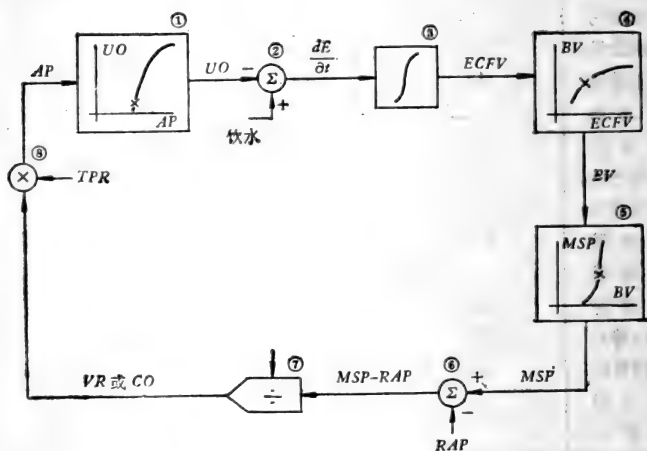


图 12-18 长效作用的基本回路<sup>[4]</sup>

单元 2 集中表示体液的变化, 它包括整个生物系统水的输入以及除排尿以外, 通过汗腺和内脏的全部水损失。这个单元的输出是细胞间流体容量的变化率  $\frac{dE}{dt}$ 。

单元 3 是细胞间流体体积变化率的积分, 其输出  $ECFV$  表示任一时刻, 体内细胞间流体的体积。

单元 4 给出了血容量  $BV$  和细胞间体液容量  $ECFV$  之间的关系。由图可见, 正常生理状态下, 细胞间体液容量约为  $15\text{l}$ , 而血容量约  $5\text{l}$ 。当  $ECFV$  增大时,  $BV$  约增大  $\frac{1}{3}$  左右。但当  $ECFV$  超过  $20-25\text{l}$  时, 血容量趋于不变。

单元 5 给出了血容量 ( $BV$ ) 和体循环血管系统平均充盈压力  $MSP$  的关系。正常生理状态下,  $MSP \approx 7\text{mmHg}$ 。由图

可见,  $BV$  稍有变化, 就会显著地改变  $MSP$ 。血容量增大 14%,  $MSP$  就增大一倍;  $BV$  减少 15—20%,  $MSP$  就降至 0。

单元 6 给出平均充盈压力与右心房压力  $RAP$  之差, 即其输出是静脉回流压力梯度。实验证明在一定  $RAP$  范围内,  $VR$  与  $(MSP - RAP)$  线性相关。

单元 7 表示静脉回流阻抗, 其输出为静脉回流量  $VR$ , 它等于心输出量  $CO$ 。

单元 8 代表动脉系输入阻抗, 其输出即为动脉压力  $AP$ 。

用这个模型可以说明许多在循环功能异常时发生的病理生理现象。例如, 图 12-19 是按这个简单的模型得到的结果, 总的外周阻抗 ( $TPR$ ) 先阶梯递降, 而后又阶梯递增时, 动脉压力  $AP$ 、心输出量  $CO$ 、血容量  $BV$  的变化。对  $TPR$  的每一次阶跃, 在一个短时间(不超过一天)内,  $AP$  有一相应的突增或突降, 但不久由于  $BV$  上升或下降, 心输出量亦发生相应的变化, 因而  $AP$  很快又恢复到正常值。

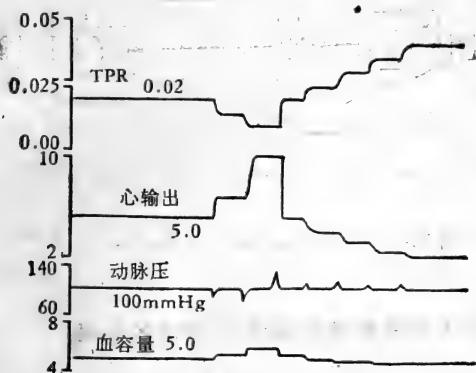


图 12-19 外周阻抗递降又递增时动脉压力、心输出量和血容量的改变

但由于图 12-18 所示的模型没有计及: (i) 机体组织对流经它的血液流量的自动调节作用; (ii) 载荷 (动脉压力、静脉

压力)对心脏的影响; (iii) 植物神经的反射作用; 故有些病理现象无法说明。为此, Guyton 和 Coleman 在模型 12-18 的基础上, 提出了图 12-20 所示的更精确的模型。图中, 单元 1 到 8 和图 12-18 一样, 单元 9—15 说明机体组织对血流量的调节, 16—19 表示动脉、静脉血压对心脏的影响, 而 20—29 则代表植物神经系统的长效调节作用。

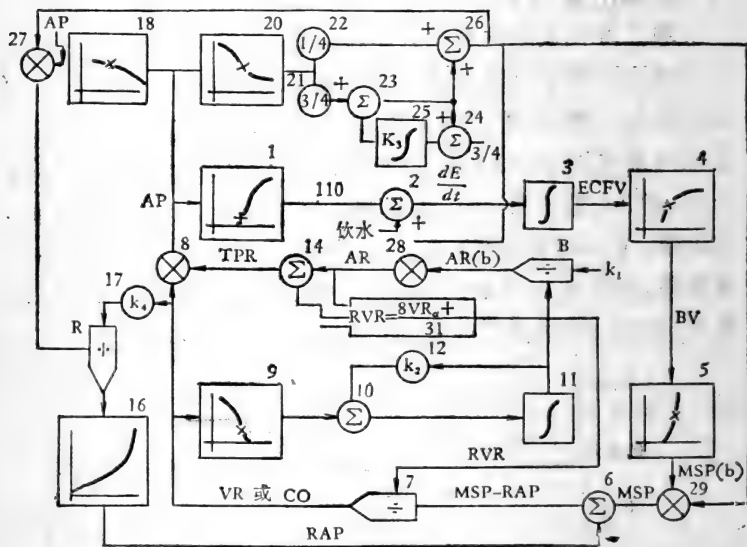


图 12-20 心血管系统长效调节模型

## § 4-2 循环系统对组织液流动特性的影响

§4-1 中, 体液容量变化对心血管流动特性的影响是以集中组元的形式给出的。这里讨论心血管流动对体液运动规律的影响。

为此, Guyton 和 Coleman 取基本模型如图 12-21。

单元①代表关于毛细血管-组织液交换的 Starling 假设, 即从毛细血管到组织的净流量与  $(CP - IFP + TCOP - PCOP)$  成正比, 这里  $CP$  是毛细血管静压,  $IFP$  是组织间隙液静压,  $TCOP$  是组织液胶体渗透压,  $PCOP$  是血浆胶体渗透压。

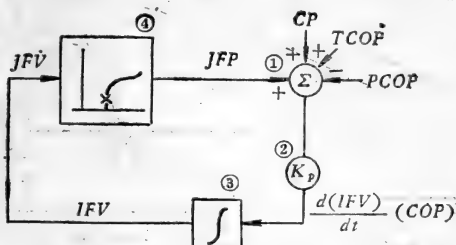


图 12-21 组织间隙液容量和组织液压力的长效调节模型<sup>[4]</sup>

单元②代表毛细血管壁的通透性,  $K_p$  为通透系数, 故其输出为通过毛细血管壁流体的流量  $\frac{d}{dt}(IFV)$ ,  $IFV$  为组织液容积。

单元③是  $\frac{d}{dt}(IFV)$  的积分, 其输出为组织液总容积。

单元④表征组织液容积-压力关系。根据实验测量所得  $IFV-IFP$  关系如图中单元 4 所示。可见在负压段曲线很陡,  $IFV$  稍有变化,  $IFP$  立即增大; 但当组织液压力高达到大气压时,  $IFP$  就不再随  $IFV$  变化了。正常生理条件下,  $IFP \approx -7\text{mmHg}$ 。

然而, 要说明生理、病理现象, 用图 12-21 所示的基本模型是不够的。还必须考虑: (i) 淋巴流动的动力学规律; (ii) 组织液胶体渗透压的调节功能; (iii) 毛细血管压力的调节。

Guyton 和 Coleman 提出图 12-22 所示模型。单元 1—4 是基本模型,单元 5—11 代表淋巴系统;单元 12—18 表示组织液静压和胶体渗透压的控制;单元 19—28 代表毛细血流压力控制及其与组织间隙流体的关系。

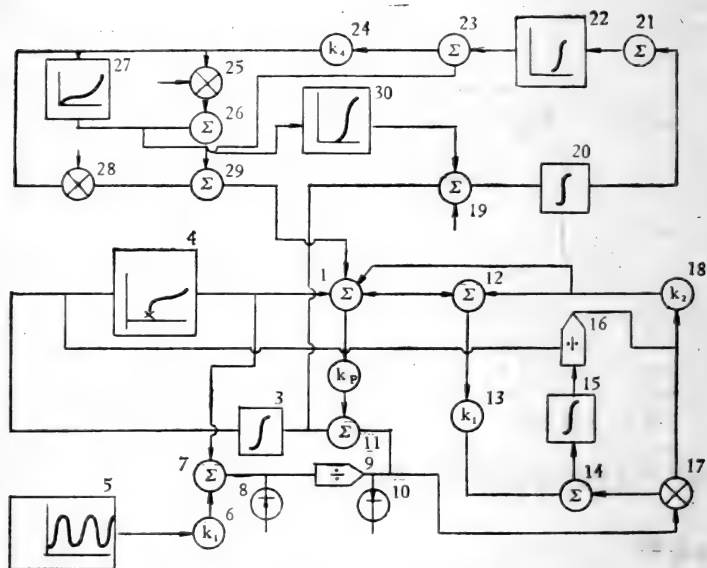


图 12-22 组织液运动动力学的系统分析<sup>[4]</sup>

### 1. 淋巴系统流动

决定淋巴流动的两个主要因素是: (i) 组织间隙流体压力; (ii) 从组织进入初始淋巴管的液体量, 俗称淋巴泵。

图 12-22 单元 5 表示组织对于淋巴液的推动; 单元 6 则是能改变组织推动力的变量。单元 7 中, 组织推动压力和组织液静压迭加, 合而为终端淋巴压力。单元 8 的作用是防止终端淋巴压力低于零, 单元 9 代表淋巴流动阻力, 其输出等于

淋巴流量；单元 10 的作用是给淋巴流量一个适当的限止，最大值不超过 31ml/min，这是正常人的最大淋巴流量。单元 11 是毛细血管-组织间隙净流量与淋巴流量之差，其输出即组织间隙液容量的净变化率。

## 2. 组织液蛋白质浓度及渗透压的确定

图 12-22 单元 12 代表毛细血管内外渗透压差： $PCOP - TCOP$ ，它与毛细血管壁两侧蛋白质的限度梯度成正比。通过单元 13 可算出从毛细血管到组织间隙空间的蛋白质流量。在单元 14 中，流进组织间隙的蛋白质流量减去流进淋巴系统的蛋白质流量，从而得组织间隙液内蛋白质含量的净变化率。通过单元 15 积分之，得间隙液蛋白质含量的总量。单元 16 算出组织液蛋白质浓度；单元 17 表示从组织间隙到淋巴系统的蛋白质流量；单元 18 将间隙液蛋白质浓度换算成组织液胶体渗透压，并将此结果输入单元 1。

## 3. 毛细血流压力的计算

图 12-22 单元 19 代表血浆容量的净增加率，它包括 (i) 来自内脏的流体和盐类；(ii) 进入组织间隙的流体损失；(iii) 通过泌尿系统的流出量。单元 20 对单元 19 的输出作积分，得任一时刻血浆总容积；在单元 21 中，血浆容积和红细胞总容积相加，得总的血容量；单元 22 从血容量算出体循环血管组织内平均充盈压力  $MSP$ 。通过单元 23 算出  $MSP$  与右心房压力  $RAP$  之差；单元 24 代表静脉回流流导，它与  $(MSP - RAP)$  之积等于静脉回流量，亦等于心输出量  $CO$ ，单元 25 将  $CO$  和总的外周阻抗相乘，得动脉压力  $AP$  与右心房压力  $RAP$  之差。单元 26 将  $(AP - RAP)$  与右心房压力  $RAP$  相加得动脉压力  $AP$ 。而  $RAP$  则通过单元 27 从心功能的 Starling

曲线算出。单元 28 将  $CO$  与动脉系阻抗相乘,得动脉系压降  $\Delta AP$ , 单元 29 将  $AP$  与  $\Delta AP$  相减,得毛细血管压力  $CP$ ,并将此输入到单元 1。单元 30 表示动脉压力与肾输出的关系。

Guyton 和 Coleman 用此模型计算了毛细血流压力、血浆渗透压、肌肉活动性、心功衰竭对组织液压力、淋巴流等的影响。图 12-23 是肌肉活动性减弱时组织间隙液容量  $IFV$ , 淋巴流量 ( $Q_{lym}$ ), 组织液胶体渗透压  $TCOP$ 、间隙液压力  $IFP$  的影响,可见: 即使肌肉活动能力降至正常状态的  $\frac{1}{4}$  时,  $IFV$  及  $Q_{lym}$  的影响也不大, 但组织液胶体渗透压  $TCOP$  却显著增大, 间隙液压力也增大。

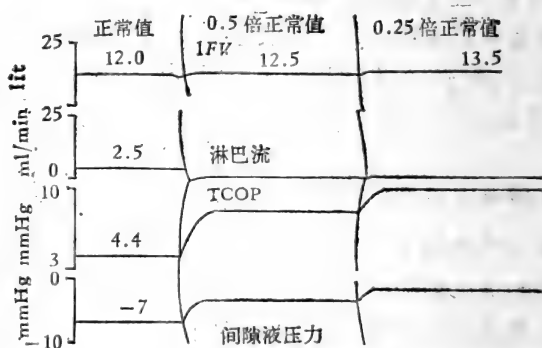


图 12-23 肌肉活动性衰减的影响<sup>[4]</sup>

图 12-24 是心力衰竭时  $AP$ 、 $CO$ 、 $RAP$ 、 $IFV$ 、 $Q_{lym}$ 、 $BV$ 、 $IFP$  的影响。可见心力衰竭 50%, 对这些参数的影响不是很大, 但当心力衰竭到正常状态的  $\frac{1}{3}$  时, 右心房压力猛增,  $IFV$ 、 $Q_{lym}$  亦猛增, 间隙液压力也增大, 从而出现水肿等一系列病理现象。



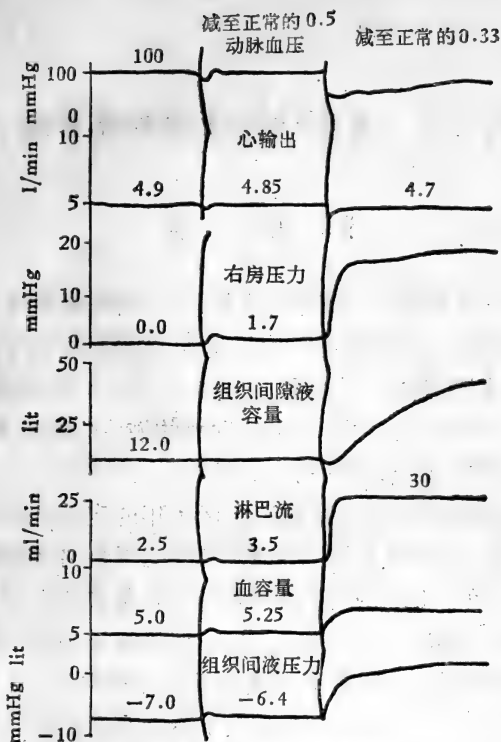


图 12-24 心力衰减的影响<sup>[4]</sup>

### 参 考 文 献

- [1] Sagawa, K.: Cardiovascular Fluid Dynamics, Vol. 1, Ed. by Bergel, D. H., Academic Press, London. New York, 1972.
- [2] Beneken, J. E. W., Dewit, B.: Physical Basis of Circulatory Transport.: Regulation and Exchange, Ed. by Reeve, E. B., Guyton, A. C., Wiley, New York, 1973.
- [3] Beneken, J. E. W.: 同[1].
- [4] Guyton, A. O., Coleman, G.: 同[2].
- [5] Berne, R. M., Levy, M. N.: Cardiovascular Physiology, Mosby, Saint Louis, 1972.

## 第十三章 水生动物泳动的流体力学

### §1 引言

从第一章到第十二章,所述都是生理流动,即发生于生物体内,特别是人体内的各种体液运动的流体力学问题。现在开始讨论生物流体力学的另一个领域——生物运动时外部流动的流体力学问题,主要是水生动物的游泳(本章)和鸟类、昆虫的飞行(第十四章)原理。

现存的水生动物已经历了十亿多年的自然选择。为了生存,水生动物必须具备两种能力:(i)比捕食者和食物运动得更快、更灵敏;(ii)在找到食物前能作长距离的运动。生存竞争的结果,使得现有的水生动物,特别是海洋中的高级水生动物(如鲸、海豚等),形成了一整套低能耗条件下,快速泳动的方法和工具。其力学原理的研究,不仅有助于人们深刻地认识水生动物形态进化的本质,更重要的是,它给人们许多宝贵的启示,以解决工程技术问题。例如,日本曾将鲸的外形用于巨型远洋货轮型线设计,结果航速提高了25%;又如,有人曾将海豚皮蒙在鱼雷上做实验,发现阻力降低了50%。除了高效率、低阻力外,鱼类泳动的机动性,低噪声,以及某种特殊的浮沉机构等,都是舰船设计中值得借鉴的。

现有水生动物种类繁多,形态光怪陆离。这都是由其长期生活的特定环境、特殊要求所决定的,都可以利用它们在该环境中生存所需的流体力学性能来说明。

水生动物泳动的流体力学问题涉及到的尺度、速度范围

很大,因而雷诺数变化范围也很大。鲸、海豚长约2—30m,巡航速度8—12m/s。原生动物,如精子,长约50—300 $\mu\text{m}$ ,直径为其 $\frac{1}{20}$ — $\frac{1}{100}$ ,泳速约80—1000 $\mu\text{m/s}$ ;细菌长约1—5 $\mu\text{m}$ ,泳速约200 $\mu\text{m/s}$ 。设

$$Re = \frac{Ul}{\nu}$$

$U$ 为泳速, $l$ 为长度, $\nu$ 为介质运动粘度,则鲸类, $Re = 10^8$ ,回游鱼类: $Re = 10^6$ ;其它鱼类 $Re = 10^3 - 10^5$ ;线虫: $Re = 1$ ,精子 $Re = 10^{-3}$ ,细菌 $Re = 10^{-6}$ 。在不同的雷诺数范围内,动物泳动的流体力学机理不一样。

从推进方式而言,所有水生动物的推进可分两大类,一类是射流反作用推进,典型代表为乌贼,最大速度可达2—4m/s,这种方法只适用于高雷诺数;另一类是摆动推进,它适用于全部雷诺数范围,是水生动物推进的基本形式。这里主要讨论这种形式。

摆动推进又可分为低雷诺数和高雷诺数两个亚类。低雷诺数时,推力来自动物体波动引起的介质抗力,效率较低,它有两种形式:(i)鞭毛(或机体)摆动推进;(ii)纤毛推进(见本章§2,§3)。高雷诺数时,推力主要产生于介质的反作用力,推进效率较高。随着生物的进化,它有三种推进模式,即鳗鲡科模式、鲹科模式、鲹科模式加新月形尾鳍推进,效率一个比一个高。这将分别讨论于§4、§5。

水生动物泳动涉及的流体力学问题很多,这里主要研究推进原理,§6涉及阻力问题。机动性、浮沉等问题本书不作讨论。

## § 2 低雷诺数下动物泳动的力学原理

许多低等动物、微生物是通过自身机体作波状运动,或鞭毛作波状运动而前进的。当机体长度不超过 1mm 时,运动的雷诺数小于 1,即流体运动的惯性力与粘性力相比,可以忽略不计。因而只要考虑流体-机体相互作用的静力学平衡,但必须以热力学和运动学的约束为其补充。

假设:

(1) 液体是不可压缩的牛顿流体,流体的运动服从连续方程。

(2) 任一时刻机体表面的运动是下列两种运动之和:-

(i) 体表相对于机体质心的运动。它产生于机体能动活动的的能力,和机体表面曲率及局部应变有关。

(ii) 刚体运动,包括质心移动(速度为  $U$ )和绕质心的转动(角速度为  $\Omega$ )。

当运动 (i) 给定时,机体运动取决于  $U$  和  $\Omega$ ,它们分别由流体与机体之间的力和力矩平衡方程确定。由于雷诺数很低,不考虑惯性,  $U$ 、 $\Omega$  仅依赖于当时动物体的能动运动。这样,动力学问题退化为静力学和运动学问题的结合。

### § 2-1 抗力理论

严格地确定水和机体之间的相互作用是很复杂的。一种简化理论是所谓抗力理论 (resistive theory),它假设:任一小段机体与周围液体间的相互作用,可分为抗力和粘性阻力,二者均和该段机体相对于液体的瞬时速度成正比。抗力又可分解为切向分量(与机体中心线相切)和法向分量(与机体中心线垂直),它们分别正比于机体相对于周围液体的切向和法向

速度分量。法向分量大于切向分量，由此产生推动机体质心前进的力。

### 1. 机体摆动幅度很小时的抗力

当机体中心线与其前进方向夹角很小时，抗力理论可说明如下。

如图 13-1 示，取任一段中心线  $BEC$ ，流速为  $U$ ，中心线波动速度为  $V$ ，侧向运动速度为  $W$ 。设在时间  $\tau$  内， $A$  向侧面移动到  $B$ ， $AB = w\tau$ ，同时  $A$  移至下游点  $C$ ， $AC = V\tau$ 。而  $\tau$  时间内，流体质点  $A$  从  $A$  移动到  $D$ ， $AD = U\tau$ 。所以，相对于流体，中心线上质点的侧向位移为  $DE = w\tau$ ， $w$  是相对于流体的法向速度分量。

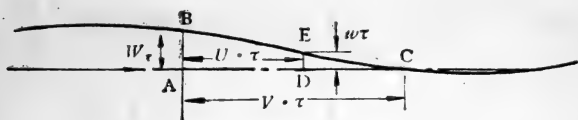


图 13-1 抗力理论说明

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\text{即: } \frac{w\tau}{W\tau} = \frac{(V-U)\tau}{V\tau}$$

$$\therefore w = W \left(1 - \frac{U}{V}\right) \quad (2-1)$$

设  $K_N$  为法向力系数， $K_T$  为切向力系数，

$$\zeta = \frac{K_T}{K_N} \quad (2-2)$$

单位长度中心线上，法向力为  $K_N w$ ，切向力为  $K_T W \frac{w}{V}$ ，因而

单位长度上推力为:

$$T = (K_N w - K_T W) \frac{w}{V} \quad (2-3)$$

$T$  必须和单位长度机体所受的流动阻力  $D$  平衡,

$$D = K_T U \quad (2-4)$$

$$\therefore (K_N w - K_T W) \left( \frac{W}{V} \right) = K_T U$$

$$\therefore U = W \sqrt{\frac{1}{\zeta} \left( 1 - \frac{w}{W} \right) \left( \frac{w}{W} - \zeta \right)} \quad (2-5)$$

当  $W$ 、 $\zeta$  不变时,若

$$\frac{w}{W} = \frac{1}{2} (1 - \zeta) \quad (2-6)$$

则达最大泳速  $U_m$ :

$$U_m = W \cdot \frac{1 - \zeta}{2\sqrt{\zeta}} \quad (2-7)$$

例如: 草蛇:  $\zeta = 0.1, \frac{U_m}{W} = \sqrt{2}$

线虫:  $\zeta = 0.5, \frac{U_m}{W} = \sqrt{0.12}$

定义推进效率为单位长度机体推进功与相应摆动功之比, 即

$$\eta = \frac{UT}{(K_N w)W} = \left( 1 - \frac{w}{W} \right) \left( 1 - \zeta \frac{W}{w} \right) \quad (2-8)$$

由此可知, 当  $\zeta$  不变时, 若

$$\frac{w}{W} = \zeta^{\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

可获最高推进效率  $\eta_m$ ,

$$\eta_m = (1 - \zeta^{\frac{1}{2}})^2 \quad (2-10)$$

此时,  $U = U_c$ , 由(2-9)(2-1)可得:

$$\frac{U_c}{V} = 1 - \zeta^{\frac{1}{2}} \quad (2-11)$$

$$\therefore \frac{U_c}{W} = \frac{1}{\sqrt[4]{\zeta}} (1 - \sqrt{\zeta}) \quad (2-12)$$

可见,  $U_c$  比  $U_m$  小不了多少。

根据 (2-11), 若  $\zeta = 0.5$ , 则  $\frac{U_c}{V} \approx 0.3, \eta_m \approx 0.1$ ; 若  $\zeta = 0.1$ , 则  $\frac{U_c}{V} \approx 0.7, \eta_m \approx 0.5$ 。这和观察结果吻合。

## 2. 有限波幅时的抗力推进

上述分析限于机体小幅度摆动。实际上摆动幅度相当大, 上述结论不能直接应用。

设鞭毛伸直后长度为  $L$ , 运动时鞭毛的波形为:

$$(x, y, z) = (X(s), Y(s), Z(s)) \quad (2-13)$$

$s$  是从鞭毛头部算起的弧长。(2-13) 是周期函数。沿机体曲线度量, 波长为  $\Lambda$ , 而沿整体运动方向度量, 则波长为  $\lambda$ ,

$$\lambda = \alpha \Lambda, \quad \alpha < 1 \quad (2-14)$$

$\alpha$  表示由于波动引起的机体表现长度的缩短。

设机体能动运动的波形以均匀的速度  $c$  向下游传播, 则 (2-13) 应改为

$$(x, y, z) = (X(s - ct), Y(s - ct), Z(s - ct)) \quad (2-15)$$

这里,  $c$  是随机体中心线运动的参考系中的波速, 而在随机体质心运动的参考系中, 波速为  $V$ ,

$$V = \alpha c \quad (2-16)$$

设动物泳动速度为  $U$ , 相对于流体波向下游的传播速度为  $(V - U)$ 。这样, 机体任一截面相对于流体的运动速度等于  $c$  与  $(V - U)$  的矢量和。其切向分量为:

$$(V - U)X'(s - ct) - c$$

法向分量为:

$$(V - U)[1 - X'(s - ct)]^{\frac{1}{2}}$$

这样,作用于机体的推力  $T$  为:

$$T = \int_0^L \{K_T[(V - U)X'(s - ct) - c]X'(s - ct) + K_N(V - U)[1 - X'(s - ct)]\} ds \quad (2-17)$$

$$\therefore \int_0^L X'(s - ct) ds = l = \alpha L = \frac{V}{c} L \quad (2-18)$$

并设:

$$\int_0^L X'^2(s - ct) ds = \beta L \quad (2-19)$$

则:

$$T = K_T L[(V - U)\beta - V] + K_N L(V - U)(1 - \beta) \quad (2-20)$$

若动物头部阻力为  $K_N L U \delta$ , 这里,

$$\delta = \frac{\text{头部阻力}}{\text{鞭毛均匀法向运动时的抗力}}$$

则由  $T = K_N L U \delta$ , 得:

$$\frac{U}{V} = \frac{(1 - \beta)(1 - \zeta)}{1 - \beta + \zeta\beta + \delta} \quad (2-21)$$

当  $\beta \rightarrow 1$  时,  $U \rightarrow 0$ ; 当  $\beta$  从 1 下降时,  $\frac{U}{V}$  从 0 增大, 但决不会超过  $U_m$ ,

$$\frac{U_m}{V} = \frac{1 - \zeta}{1 + \delta} \quad (2-22)$$

机体克服抗力所作之功率为:

$$E = \int_0^L \{K_T[(V - U)X'(s - ct) - c]^2 + K_N(V - U)^2 \cdot [1 - X'^2(s - ct)]\} ds + K_N L U^2 \delta \quad (2-23)$$

应用(2-18)(2-19)得:



$$E = K_T L [(V - U)^2 \beta - 2(V - U)c\alpha + c^2] + K_N L (V - U)^2 (1 - \beta) + K_N L U^2 \delta \quad (2-24)$$

按效率的定义，

$$\eta = \frac{(K_T + K_N \delta) L U^2}{E} \quad (2-25)$$

故：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} = & (1 - \zeta)^{-2} (1 - \beta)^{-2} [(\zeta + \delta) + (1 - \beta + \beta \zeta) \\ & - 2\zeta (1 - \beta + \zeta \beta + \delta)] + \delta (\zeta + \zeta)^{-1} - \alpha^{-2} \zeta (1 \\ & - \zeta)^{-2} (1 - \beta) (\zeta + \delta)^{-1} \cdot (1 - \beta + \zeta \beta + \delta)^2 \end{aligned} \quad (2-26)$$

由此可得给定  $\beta$  值下  $\eta'_{\max}$  为：

$$\frac{1}{\eta'_{\max}} = \frac{1}{(1 - \zeta)^2} \left[ \frac{\zeta(1 + \delta)^2}{(\zeta + \delta)\beta} + \frac{\zeta + \delta}{1 - \beta} \right] + \frac{\delta}{\zeta + \delta} \quad (2-27)$$

进而求给定  $\zeta$  值下的  $\eta_m = \eta_{\max}$ ，则

$$\eta_m = \frac{(1 - \zeta^{\frac{1}{2}})^2}{1 + \delta} \quad (2-28)$$

相应的  $\beta$  值满足：

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}(1 + \delta)}{\zeta + \delta} \quad (2-29)$$

泳速-波速比为：

$$\frac{U}{V} = \frac{1 - \zeta^{\frac{1}{2}}}{1 + \delta} \quad (2-30)$$

许多微生物运动时，鞭毛作螺旋形摆动，这时鞭毛摆动还产生一个扭矩  $M$ ，

$$M = 4\pi a^2 L \mu \omega \cos \phi \quad (2-31)$$

这里  $\omega$  是鞭毛作螺旋运动的角速度， $\phi$  是螺旋线与质心运动方向的夹角，

$$\alpha = \cos \phi, \quad \beta = \cos^2 \phi \quad (2-32)$$

$M$ 与头部阻力矩之和必须与抗力(法向、切向)产生的扭矩平衡。而抗力本身的大小,不受机体旋转的影响,仍可用上述方法计算。

应用(2-29)可得最佳 $\phi$ 值 $\phi_0$ :

$$\phi_0 = \text{tg}^{-1} \left[ \zeta^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{\delta}{\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \delta)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (2-33)$$

计算表明, $\phi_0$ 对于 $\zeta$ 、 $\delta$ 值不敏感。当 $\zeta$ 从0.5增至0.7时,若 $\delta = 0$ ,则 $\phi_0$ 从 $40^\circ$ 增至 $42^\circ$ ;若 $\delta = 0.1$ ,则 $\phi_0$ 从 $41^\circ$ 增至 $43^\circ$ ;若 $\delta = 0.2$ ,则 $\phi_0$ 从 $42^\circ$ 增至 $43^\circ$ 。

显然,用抗力理论处理鞭毛运动推进问题时,关键是确定法向力系数 $K_N$ 和切向力系数 $K_T$ 。为此必须解机体绕流的流场。

## § 2-2 流体运动方程基本解

任一段机体对于流体的作用可用强迫项 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,表示,则忽略惯性力后,流动方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-34)$$

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2-35)$$

$$\therefore \nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (2-36)$$

方程组是线性的,在无界流体中对不同性质的 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,有不同的基本解。

### 1. 斯托克斯子 (stokeslet)

斯托克斯子相当于作用于点 $\{\mathbf{x}\}$ 的集中力,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 8\pi\mu\alpha(t)\delta(\mathbf{x}) \quad (2-37)$$

$\alpha(\mathbf{x})$ 为斯托克斯子分布强度, $\delta(\mathbf{x})$ 为狄喇克函数。它引起的流场和压力场为:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}}{r} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{r^3} \quad (2-38)$$

$$p_s(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = -2\mu \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{a}}{r} \right) \quad (2-39)$$

这里  $r = |\mathbf{x}|$ 。它作用于流体的力为

$$\mathbf{F}_s(t) = 8\pi\mu\mathbf{a}(t) \quad (2-40)$$

这要求在无限远处有一大小相等、方向相反的力作用于流体，使之保持平衡。

由(2-38)可知， $r \rightarrow \infty$  时，斯托克斯子的诱导速度与  $r^{-1}$  成正比，故作用范围很大，衰减很慢。图 13-2 是其流线

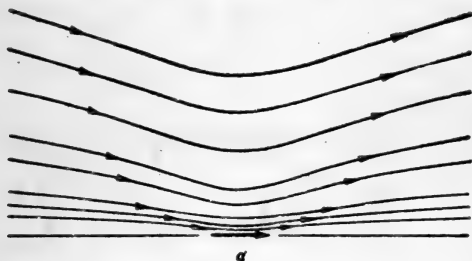


图 13-2 强度为  $\mathbf{a}(t)$  的斯托克斯子的诱导流场

## 2. 旋转子 (rotlet)

旋转子相当于一集中力矩

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\mu \nabla \times \boldsymbol{\gamma}(t)\delta(\mathbf{x}) \quad (2-41)$$

$\boldsymbol{\gamma}(t)$  为旋转子强度。其诱导速度场和压力场为：

$$\mathbf{u}_R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = \nabla \times \frac{\boldsymbol{\gamma}}{r} \quad (2-42)$$

$$p_R(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (2-43)$$

它作用于流体的力矩为：

$$\mathbf{M}_R = 8\pi\mu\boldsymbol{\gamma}(t) \quad (2-44)$$

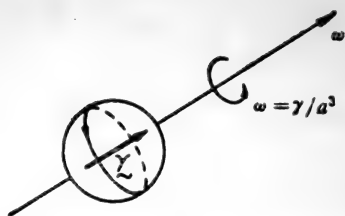


图 13-3 强度为  $\gamma(t)$  的旋转子的诱导流场

$M_R$  由无穷远处作用于流体的反向力矩平衡。

物理上, 旋转子的流场相当于一半径为  $a$  的小球绕  $\gamma$  方向, 以角速度  $\omega$  旋转所引起的流体运动,  $\omega = \frac{\gamma}{a^3}$ 。如图 13-3

所示。显然,  $r \rightarrow \infty$  时,  $|\mathbf{u}_R| \propto \frac{1}{r^2}$

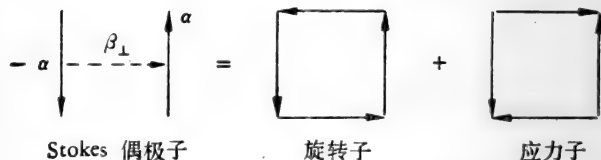


图 13-4 斯托克斯偶极子分解为一个旋转子加一个应力子

### 3. 应力子 (stresslet)

如图 13-4 所示, 应力子是斯托克斯力偶极子的组成部分, 斯托克斯力偶极子的定义为:

$$\mathbf{u}_{SD}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \kappa) = -\mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{u}_S(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_{SS} \quad (2-45)$$

这里  $\mathbf{u}_R$  代表强度  $\gamma = \kappa a$  的旋转子, 而  $\mathbf{u}_{SS}$  就是应力子的流场:

$$\mathbf{u}_{SS}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \kappa) = -\frac{(\kappa a)\mathbf{x}}{\gamma^3} + 3(\mathbf{a}\mathbf{x})(\kappa\mathbf{x})\frac{\mathbf{x}}{r^5} \quad (2-46)$$

斯托克斯力偶极子代表纯应变,  $r \rightarrow \infty$  时,  $u_{SS} \propto \frac{1}{r^2}$ 。

4. 强度为  $\kappa$  的质量偶极子

其诱导速度场为  $u_D$

$$u_D(\mathbf{x}, \kappa) = \nabla \cdot \nabla \left( \frac{\kappa}{r} \right) = -\frac{1}{2} \nabla^2 u_S(\mathbf{x}, \kappa) \quad (2-47)$$

应用上述基本解可以求出鞭毛摆动时周围的流场。

### § 2-3 用基本解确定 $K_N$ 和 $K_T$

设微生物可以用一半径为  $R$  的圆球和一半径为  $a$  的细长圆柱为模型, 平均运动速度为  $U$ 。按斯托克斯公式, 头部阻力为  $D$ ,

$$D = 6\pi\mu RU \quad (2-48)$$

首先考虑圆柱表面在轴线垂直方向上运动所引起的机体-流体相互作用。假设这种相互作用可以用沿中心线分布的力  $(f dz, 0, 0)$  表示,  $f$  为单位长度上机体作用于流体的力, 设力分布于:  $z = -b, z = d$  之间, 圆柱半径为  $a$ , 应用(2-38)求积分, 当  $a \ll b, a \ll d$  时, 在截面  $z = 0$  处  $x^2 + y^2 = a^2$  附近的速度场为:

$$\mathbf{u} = \frac{f}{8\pi\mu} \left( \frac{2x^2}{a^2} + \ln \frac{4bd}{a^2}, \frac{2xy}{a^2}, 0 \right) \quad (2-49)$$

相应于(2-47), 分布偶极子的速度场为:

$$\mathbf{u} = \frac{g}{4\pi} \left( \frac{2}{a^2} - \frac{4x^2}{a^4}, -\frac{4xy}{a^4}, 0 \right) \quad (2-50)$$

若取

$$g = \frac{fa^2}{4\mu} \quad (2-51)$$

则合速度场为:

$$\mathbf{u} = \frac{f}{8\pi\mu} \left( 1 + \ln \frac{4bd}{a^2}, 0, 0 \right) \quad (2-52a)$$

其次,考虑圆柱沿切向(即轴向)运动时引起的流动。此时,集中力沿  $X$  分布,强度为  $(fdX, 0, 0)$ , 从  $X = -b$ , 延续到  $X = d$ 。同理可得  $x = 0, y^2 + z^2 = a^2$  附近流场为:

$$\mathbf{u} = \frac{f}{8\pi\mu} \left( -2 + 2 \ln \frac{4bd}{a^2}, 0, 0 \right) \quad (2-52b)$$

显然,(2-53)与(2-49)不一样:

(1) 切向力在圆柱表面引起的流动是均向的,不需要迭加分布偶极子。

(2) 同样大小的力  $f$  作用于圆柱的切向、法向时,产生的运动速度是不一样的,前者几乎比后者大 1 倍。

$f$  通常称为运动的抗力。由此可得‘圆柱’体的法向抗力系数  $K_N$  (单位长度上法向力与所产生的法向速度之比)为:

$$K_N = \frac{8\pi\mu}{1 + \ln \frac{4bd}{a^2}} \quad (2-53)$$

切向抗力系数  $K_T$  (单位长度上切向力与所产生切向速度之比)为:

$$K_T = \frac{4\pi\mu}{-1 + \ln \frac{4bd}{a^2}} \quad (2-54)$$

一般生物体是细长的,即  $bd \gg a^2$ , 故  $\left( \ln \frac{4bd}{a^2} \right) \gg 1$ 。因而  $K_N > K_T$ , 即机体法向运动的抗力大于切向抗力,这就是鞭毛(或整个机体)摆动能推动生物体前进的原因。

$$\zeta = \frac{K_T}{K_N} = \frac{1 + \ln \frac{4ba}{a^2}}{2 \left( \ln \frac{4bd}{a^2} - 1 \right)} \quad (2-55)$$

$\zeta$  对于比值  $\frac{b}{a}$ 、 $\frac{d}{a}$  不敏感, 当后者在 120—1000 之间变化时,

$\zeta$  的改变范围为 0.6—0.7。

用不同的模型所得到的抗力系数  $K_N$ 、 $K_T$  不一样, 通常可写成如下形式

$$K_N = \frac{4\pi\mu}{C_2 + \ln \frac{2q}{a}} \quad K_T = \frac{2\pi\mu}{-C_1 + \ln \frac{2q}{a}} \quad (2-56)$$

对(2-53)(2-54),

$$C_2 = C_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \sqrt{bd}, \quad b + d = l \quad (2-57)$$

$l$  为机体长度, 取质心为坐标原点。

Hancock<sup>[5]</sup> 取:

$$q = \frac{l}{2}, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \quad (2-58)$$

Gray & Hancock<sup>[6]</sup> 取

$$q = \lambda, \quad C_2 = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{2} C_2 \quad (2-59)$$

Lighthill 取

$$q = 0.09\lambda, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2} \quad (2-60)$$

Chwang 和 Wu<sup>[7]</sup> 做了一系列模型试验, 发现按抗力理论所求得的力和测量结果有显著差异, 但力矩公式仍然可用。造成这种差异的原因是 (i) 抗力理论过于粗略, 未计及机体中心线弯曲的影响; (ii) 实验容器的壁效应; (iii) 模型雷诺数不

象生物体那么小,惯性较大。(ii)(iii)是实验方法所致,而(i)则是理论本身的问题。鉴于此, Wu 等用细长体理论作了改进。

### § 2-4 有机体泳动的细长体理论(低雷诺数)

取图 13-5 所示细长体为微生物泳动的模型,  $s$  为体中心

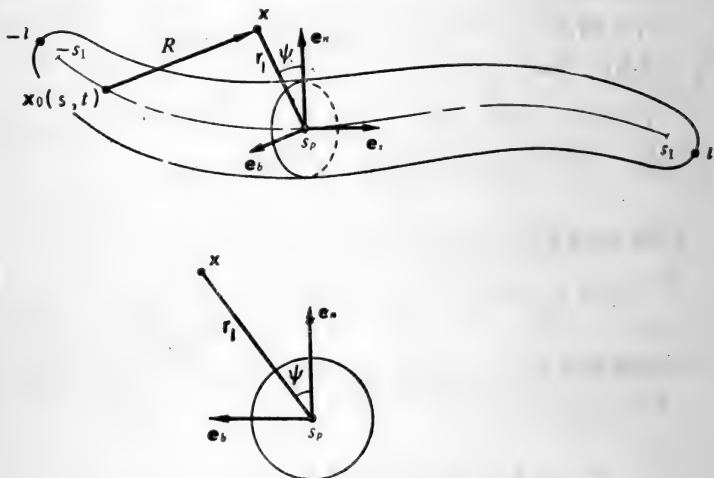


图 13-5 以任意形式运动的细长体的几何形状及坐标

线弧,截面半径为  $a(s)$ ,长为  $2l$  两端为球形,有:

$$\left. \begin{aligned} a &= \epsilon(l^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}, & \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right) \ll 1 \text{ 时。} \\ \epsilon &= \frac{a_0}{l} \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

体中心线为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(s, t) \quad (-l \leq s \leq l) \quad (2-62)$$

其上每一点都有一组正交基本向量  $\{\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ ,  $\mathbf{e}_s$  为切向,  $\mathbf{e}_n$  为中心线主法线方向,  $\mathbf{e}_b$  为次法线方向。故:



$$\mathbf{e}_s = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s}, \quad \mathbf{e}_n = b \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s}, \quad \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n \quad (2-63)$$

$b$  为中心线曲率半径,

$$b = \left| \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} \right|^{-1} \quad (2-64)$$

有机体表面任一质点的运动由: (i) 相应中心线上点的运动, 速度为  $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t}$  (ii) 体表质点绕中心线的旋转, 角速度为

$$\Omega_s(s, t) \mathbf{e}_s. \quad (\text{iii}) \text{ 中心线的转动, 角速度为 } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{e}_s \times \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial t}.$$

这样, 表面无滑流体件为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t} + a(s) \left[ \Omega_s \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_s \times \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial t} \right] \times \mathbf{e}_r \\ &= V_s \mathbf{e}_s + V_n \mathbf{e}_n + V_b \mathbf{e}_b \end{aligned} \quad (2-65)$$

这里,

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_n \cos \psi + \mathbf{e}_b \sin \psi \quad (2-66)$$

在低雷诺数下, 机体运动的流场可由沿中心点的奇点分布给出。为得足够的精确度,  $W_u$  取六种基本解, 得:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-s_0}^{s_0} \{ \mathbf{u}_S(\mathbf{R}; \mathbf{d}) + \mathbf{u}_D(\mathbf{R}; \boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{u}_R(\mathbf{R}; \boldsymbol{\gamma}) \\ &\quad + \mathbf{u}_m(\mathbf{R}; m) + A_1 \mathbf{u}_{SS}(\mathbf{R}; \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) B_1 \mathbf{u}_Q(\mathbf{R}; \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \\ &\quad + A_2 \mathbf{u}_{SS}(\mathbf{R}; \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b) - B_2 \mathbf{u}_Q(\mathbf{R}; \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b) \} ds \end{aligned} \quad (2-67)$$

$\mathbf{u}_S$ 、 $\mathbf{u}_D$ 、 $\mathbf{u}_R$ 、 $\mathbf{u}_{SS}$  的物理意义见 §2-2,  $\mathbf{u}_m$  为强度为  $m$  的源的诱导速度,  $\mathbf{u}_Q$  则为四极子 (quadropole) 的诱导速度场。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_m(\mathbf{R}, m) &= \frac{m \mathbf{R}}{R^3} \\ \mathbf{u}_Q(\mathbf{R}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}) &= (\boldsymbol{\delta} \cdot \nabla) \mathbf{u}_D(\mathbf{R}, \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \right\} \quad (2-68)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad R = |\mathbf{R}| \\ s_0 &= (l^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2\right) l \end{aligned} \right\} \quad (2-69)$$

将(2-67)代入边界条件(2-65),被积函数在体表附近展开,略去比  $\epsilon \ln \epsilon$  高阶的项,得  $\alpha$  的积分方程

$$V_i(s, t) = \alpha_i(s, t) L_i + \int_{-s_0}^s K_i(\mathbf{R}_0, \alpha) ds' \quad (2-70)$$

$$i = s, n, b_0$$

这里,

$$\left. \begin{aligned} L_i &= 2 \left[ 2 \ln \left( \frac{2}{\epsilon^*} \right) - 1 \right], \quad L_n = L_b = 2 \ln \frac{2}{\epsilon^*} + 1 \\ K_i(\mathbf{R}_0, \alpha) &= \frac{\alpha_i(s', t)}{R_0} + \frac{[\alpha(s', t) \cdot \mathbf{R}_0] R_{0i}}{R_0^3} - \frac{D_i \alpha_i(s, t)}{|s - s'|} \\ D_s &= 2, \quad D_n = D_b = 1, \quad \epsilon^* = a(s) / l(1 - s^2)^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{x}_0(s, t) - \mathbf{x}(s', t) = R_{0s} \mathbf{e}_s + R_{0n} \mathbf{e}_n + R_{0b} \mathbf{e}_b \\ \alpha(s, t) &= \alpha_s \mathbf{e}_s + \alpha_n \mathbf{e}_n + \alpha_b \mathbf{e}_b \end{aligned} \right\} \quad (2-71)$$

方程(2-70)可迭代求解。由此,可得机体运动时的流场。

### § 3 纤毛推进的流体动力学问题

除了鞭毛摆动推进外,原生动物、微生物运动的另一种形式是纤毛推进。

生物体表面长着许多纤毛,每一纵列纤毛的运动是同步的,但不同列的纤毛运动有一定的迟后。纤毛运动由两个冲程构成:(i)快速的有效冲程,近乎刚硬的纤毛向动物泳动方向的反方向迅速划动,产生推力;(ii)缓慢的恢复冲程。此时纤毛柔软,与周围流体的相互作用很弱。图 13-6 是纤毛虫纤

毛运动的两个冲程,这样,纤毛运动形成的波通过一圈圈纤毛传向下游。

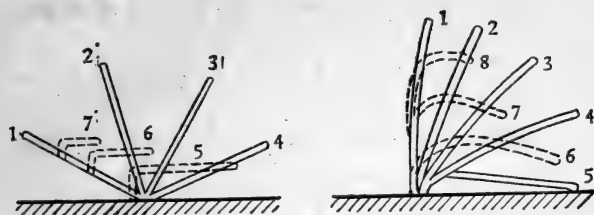


图 13-6 纤毛运动的两个冲程

纤毛推进又可分为两种:其一,波传播方向和有效冲程方向一致,纤毛运动自由度很小,泳动速度恒低于波速;另一种,纤毛本身运动自由度相当大,泳动速度可高于波速。Blake<sup>[8,9,10]</sup>对这两种推进问题,提出了两种不同的模型。

蛙片虫 (*opalina*) 是用第一种纤毛推进方式运动的典型生物。它是碟形的多核原生动物,宽约  $200\mu\text{m}$ ,厚约  $20\mu\text{m}$ ,每根纤毛长约  $10\mu\text{m}$ ,每排纤毛间距约  $3\mu\text{m}$ ,每列纤毛内部,尖端间距约  $0.3\mu\text{m}$ 。纤毛运动时,尖端形成一个起伏的(波动的)包络面。因此,这种纤毛推进相当于动物通过假想的柔性体表(纤毛尖端包络面)的波动(收缩-舒张)而推进的。这称为包络模型(envelop model)。

为作分析,Blake 假设生物体以带有纤毛的平板为模型,且平板平行于生物泳动的方向。由于平板面积的大小,不影响泳速(即推力、阻力均与面积成正比),因此,可设平板是无限的。Blake 用这种模型深入地研究了不同波形的推进情况,得以下结论:

(1) 获得给定泳动速度,所需功率最小的纤毛运动方式是使得纤毛尖运动轨迹和飘浮在水波表面的颗粒相似。

(2) 设泳动速度为  $U_{\infty}$ ,动物特征尺度为  $L$ ,纤毛摆动频

率为  $\omega$ ，则无量纲速度  $\frac{U_\infty}{\omega L}$  随纤毛密度参数  $\tau$  的变化见图 13-7。图中， $\gamma = \frac{K_N}{K_T} = \frac{1}{\zeta}$ ， $\kappa = \frac{\omega L}{c}$  称为频率参数， $c$  是波速。可见，用这种纤毛推进的方法， $\frac{U}{V}$  不超过 0.5。一般情况下， $U \approx 100 \mu\text{m/s}$ 。这和观测值相近。

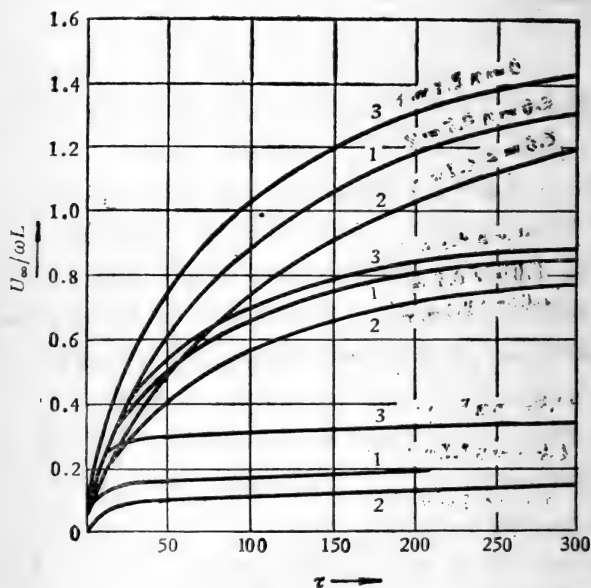


图 13-7 泳速随  $\tau$  的变化<sup>[17]</sup>

1.  $\gamma = 2.0$ ,  $\kappa = 0.5$ ; 2.  $\gamma = 1.5$ ,  $\kappa = 0.5$ ; 3.  $\gamma = 1.5$ ,  $\kappa = 0$ 。

第二种纤毛推进方式的典型代表是草履虫(*paramecium*)。这也是一种多核原生物，椭球形，长约 250 $\mu\text{m}$ ，纤毛长约 10 $\mu\text{m}$ ，纤毛运动波长为 20 $\mu\text{m}$ ，而泳动的速度可达 1000 $\mu\text{m/s}$ 。

对于这种纤毛推进，上述柔性表面波动推进的概念没有多大意义。Blake<sup>[7]</sup> 在 Gray 和 Hancock 工作的基础上，提出亚层模型。

首先，每一根纤毛对流体的作用，可用 §2 所述的分布力 (Stokeslets) 来代表。但和 §2 不同，必须考虑生物体表面的影响。设体表用无限平板代表，则体表存在的影响可用镜象系统模拟。如图 13-8(a) 所示，对于平行于前进方向的力，镜象由一大小相等、方向相反的力，一个集中力偶 (Stokes-doublet) 和一个偶极子 (轴平行于壁面) 组成，远处诱导速度场很弱，与  $r^{-2}$  成正比；而对于垂直于壁面的力，其镜象则由大小相等、方

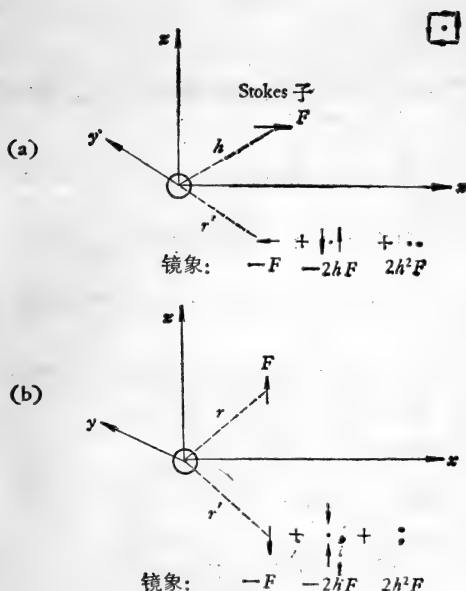


图 13-8

- (a) 强度为  $F$ 、距离为  $h$  的平行集中力的镜象系统，  
 (b) 强度为  $F$ 、距离为  $h$  的垂直集中力的镜象系统。

向相反的力和轴垂直于壁面的偶极子组成, 远处速度场很弱, 因为此时速度正比于  $r^{-3}$ , 如图 13-8(b) 示。

这样, 对于纤毛推进来说, 起主导作用的是切向力, 而不是法向力。

其次, 要计及各个纤毛流场之间的相互作用。由于纤毛数量很大, 必须用统计方法处理, 这是整个问题的难点。

设每根纤毛运动引起的平行于壁面的速度场分布是离表面距离  $z$  的函数  $U(z)$ , 每根纤毛的  $U(z)$  是独立的, 可作为一个独立场决定。  $z \rightarrow \infty$  时  $U = U_\infty$ , 它是生物的泳速;  $z \rightarrow 0$  时,  $U(z)$  表示纤毛层内的剪切运动。 Gray 和 Hancock 通过观测、分析, 给出了纤毛作用于流体的力, 它是纤毛相对于流体运动速度的函数。这个力的作用, 可用上述集中力及其镜像系统表示, 从而得所有纤毛运动的流场。进而用泊松求和公式求和, 得到一个关于  $U(z)$  的积分方程, 用迭代法求数值解。

图 13-7 是草履虫、侧腕水母 (pleurobrachia) 和蛙片虫三种低等动物, 在不同  $\gamma$ 、 $\kappa$  值下算出的  $\frac{U_\infty}{\omega L} - \tau$  的关系。图 13-9 是  $\tau = 50$  时, 上述三种生物纤毛层内的速度分布  $\frac{U(z)}{\omega L}$ 。

Wu 进一步用牵引层模型对纤毛推进性能作了优化分析。他假设: 纤毛系统产生的不连续的力, 等价于纤毛层体积内连续分布的非定常体积力。

应用上述概念, 平面纤毛层内的体积力可表为:

$$f(x, y, t) = \sum_{n=0}^N f_n(y) e^{in(kx - \omega t)} \quad (0 < y < l) \quad (3-1)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$  为波长,  $\omega$  为圆频率,  $y = 0$  及  $y \geq l$  时  $f = 0$ 。这里

仅考虑上述展开的首项  $f_0(y)$ ，它表示平均力的分布，决定了平均速度场  $u_0(y)$ ，二者满足斯托克斯方程：

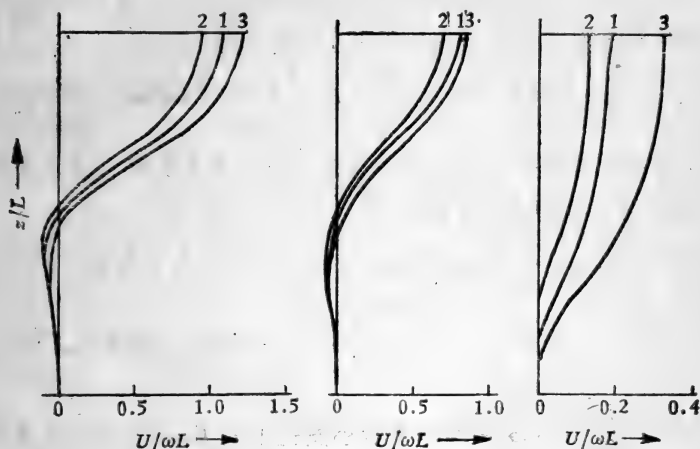


图 13-9 三种动物纤毛层内的速度分布<sup>[1]</sup>

1.  $\gamma = 2.0, \kappa = 0.5$ ; 2.  $\gamma = 1.5, \kappa = 0.5$ ; 3.  $\gamma = 1.5, \kappa = 0$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\mu} f_0(y) \quad (3-2)$$

$y > l$  时的  $u_0$  给出了平均推进速度。为维持平均速度场，机体对流体所作平均功率为

$$E_0 = \int_0^l f_0(y) u_0(y) dy \quad (3-3)$$

所要解决的问题是：怎样才能以最小的  $E_0$  获得一定的  $f_0$ ，或获得一定的  $D_0$

$$D_0 = \int_0^l f_0^2(y) dy \quad (3-4)$$

设  $\eta = \frac{y}{l}$ ，引进待定乘子  $\lambda$ ，对  $(E_0 - \lambda D_0)$  作变分

$$\delta(E_0 - \lambda D_0) = l \int_0^1 \{ (u_0 - 2\lambda f_0) \delta f_0(\eta)$$

$$+ f_0(\eta) \delta u_0(\eta) \} d\eta = 0$$

由此得欧拉方程:

$$\frac{d^2 f_0}{d\eta^2} = -\frac{l^2}{\lambda\mu} f_0 \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (3-5)$$

边界条件为:  $f_0(0) = f_0(1) = 0$ 。解之得

$$f_0(\eta) = \mu A \sin k_n \eta, \quad k_n = \left(\frac{l^2}{\mu\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}} = \pi n \quad (3-6)$$

合适的解为  $n = 1, k_1 = \pi$ 。这样由(3-2)(3-6)结合边界条件  $u_0(0) = 0, u_0'(1) = 0$  得:

$$u_0(\eta) = A \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 (\pi\eta + \sin \pi\eta), \quad 0 < \eta < 1 \quad (3-7)$$

若  $\tilde{D}_0 = \frac{D_0}{l\mu^2} = 1$ , 则  $A = \sqrt{2}$ , 相应的  $\tilde{E}_0 = \frac{E_0}{\mu l^3} =$

0.304,  $\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{D}_0} = 0.304$  给出了最小能耗下的  $E_0 - D_0$  比。由此可

得纤毛层内最佳速度分布和力分布。

$$\left. \begin{aligned} f_0/f_0^* &= \sqrt{2} \sin \pi\eta \\ u_0/u_0^* &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} (\pi\eta + \sin \pi\eta) \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_0}{f_0^*} &= \frac{\mu\omega}{kl^2} \\ \frac{u_0}{u_0^*} &= \frac{\omega}{k} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

$u_0^*$  即为纤毛产生的波速。

由于自然选择的结果, 生物体往往具有它所生存的环境下的最优功能。因此, 可以认为纤毛推进时, 纤毛层内的速度和力分布接近于上述最佳分布。

还应指出, 无论鞭毛推进运动还是纤毛推进运动, 不仅见



于微生物的运动,而且在生理流动问题中,也有重要意义。例如呼吸道内粘液的运动,雄性生殖器官输精管内精液的流动,等等。一般,生理流动中涉及到的纤毛推进方式,都属于第二类。图 13-10 是  $\gamma = 1.5$ ,  $\kappa = 0, 0.5, 1.0$  时,用上述方法算出的输精管内精液流动的速度分布。

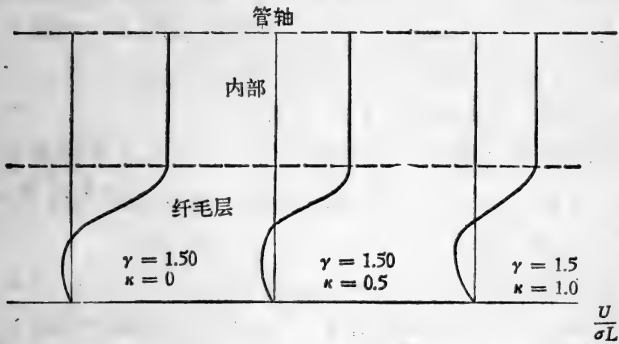


图 13-10  $\gamma = 1.5$ , 不同  $\kappa$  值下, 输精管内精液流动的速度分布<sup>[1]</sup>

气管内纤毛推进的粘液运动的特色是: 粘液并没有充满整个管道截面, 只占一部分。而且粘液的流变特性比较复杂。目前, Blake 等正在这方面作深入的探讨。

#### § 4 水生动物高雷诺数泳动的细长体理论

原生动物及一些泳动速度较慢的动物是靠机体波状运动引起的介质抗力推进的。鱼类和水生哺乳动物(如鲸、海豚等)亦借助于机体摆动而泳动, 但机理不同, 推力主要产生于介质的反作用力。这种反作用力的大小, 取决于: (i) 机体相对于介质运动速度的变化率; (ii) 与机体表面发生相互作用介质质量——虚质量的变化率。

鱼类体形的特点是: 身体细长, 头部小, 体截面在摆动方

向上比较扁平。因此,在研究鱼类游泳的动力学问题时,空气动力学中的细长体理论是个有力的工具。Lighthill 对此作了系统的研究<sup>[2,3,4]</sup>。

细长体理论的根本特色在于:对横向(垂直于通过动物脊椎骨的平面)运动来说,虚质量很大,而对纵向运动来说,虚质量可以忽略不计。由于雷诺数很高,实际上后者的作用仅限于边界层内,表现为摩擦阻力,它由反作用所产生的推力克服。换言之,在细长体理论中,动物的切向运动,可按抗力理论处理,而横向运动则决定于反作用力。

取随动物质心运动的直角坐标系 $\{x, y, z\}$ ,  $x$  在动物前进的方向上,  $xy$  平面通过动物的脊椎骨。设泳动时深度不变,机体在  $z$  方向上摆动,摆动方程为:

$$z = h(x, y, t) \quad (4-1)$$

泳动速度为  $U$ , 波传播速度为  $V$ 。设任一机体截面相对于坐标系的侧向运动速度为  $W$ , 相对于流体的侧向运动速度为  $w$ ,

$$W = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4-2)$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4-3)$$

$$\therefore \frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\therefore w = W \frac{V - U}{V} \quad (4-4)$$

显然,

$$w < W \quad (4-5)$$

若单位长度上虚质量为  $m$ , 动物运动时,传递给介质(单位长度)的横向动量为  $m(x) \cdot w(x, t)$ , 这样作用于单位长度机体的侧向力  $Z$  为:

$$Z = \frac{D(w \cdot m)}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) [m(x)w(x,t)] \quad (4-6)$$

整个机体以速度  $W(x,t)$  摆动所需的功率为:

$$E = \int_0^l z \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dx \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} \therefore E = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left( mw \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2} mw^2 \right) dx \\ + U \left[ mw \frac{\partial h}{\partial t} \right]_{x=l} \end{aligned} \quad (4-8)$$

(4-8)右端第一项是脉动量的时间导数,其时均值为零,故第二项极为重要,它说明,平均地看,单位时间内动物体对周围介质作的功为:

$$\bar{E} = U \left[ mw \frac{\partial h}{\partial t} \right]_{x=l} = [UmwW]_{x=l} \quad (4-9a)$$

这里,  $[Umw]_l$  是单位时间内从尾鳍后缘进入尾迹的侧向动量,也就是尾鳍作用于尾迹流体的侧向力。

应用(4-3),(4-8)变为:

$$E - U[mwW]_{x=l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left( \frac{1}{2} mw^2 - Umw \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx \quad (4-9b)$$

在静止参考系中,动物所作之功率  $E$  为:

$$E = UT + U \left[ \frac{1}{2} mw^2 \right]_{x=l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left( \frac{1}{2} mw^2 \right) dx \quad (4-10)$$

右端第一项是推力所作之功,第二项是通过尾鳍后缘进入水的动能,这是浪费掉的能量,第三项是尾后缘以前包围整个机体的控制体内动能的变化率。

根据以上分析, Lighthill 归纳出关于鱼类泳动的细长体理论的三项基本原理:

(1) 鱼体截面附近水的动量在垂直于其脊椎骨的方向

上,大小等于虚质量(单位长度上虚质量为  $m$ )与鱼体相对于水的侧向速度的乘积。

(2) 推力决定于某一控制体内动量的变化率,这个控制体在任一时刻都包含鱼的全身,并包括垂直于尾鳍并通过其后缘的平面  $\Pi$ 。

(3) 在考虑动量平衡时;不仅要计及通  $\Pi$  平面的动量迁移,还必须考虑到尾鳍在  $\Pi$  平面内运动产生的力  $\frac{1}{2} m\omega^2$ 。

应用这些原理分析鱼类推进问题的好处在于,只需要考察控制体内动量的变化率,不必考虑复杂的尾涡作用。

在将上述原理转变为具体的计算方法之前,进一步考察(4-9)(4-10)等方程的含意,并导出一些一般结论,或许是有益的。

由(4-9)(4-10)可得推力  $T$ :

$$T = \left[ m\omega \left( W - \frac{1}{2} \omega \right) \right]_{x=l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \left( m\omega \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx \quad (4-11)$$

取时间平均:

$$\bar{T} = m(l) \left[ \overline{\omega W - \frac{1}{2} \omega^2} \right]_{x=l} \quad (4-12)$$

应用(4-3),设  $U, V$  不随时间变化,则

$$\bar{T} = m(l) \frac{\overline{W^2}(l)}{V^2} (V - U) \quad (4-13)$$

由此可见,为产生推力,必须:

$$V > U \quad (4-14)$$

推进效率:

$$\eta = \frac{\bar{U}\bar{T}}{\bar{E}} = 1 - \frac{\bar{E} - \bar{U}\bar{T}}{\bar{E}}$$

应用(4-12),得:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{1}{2} [\bar{w}^2]_{x=l}}{[wW]_{x=l}} \quad (4-15)$$

若  $V, U$  不随时间变化, 则应用(4-3)可得:

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{V - U}{V} \quad (4-16)$$

即  $|V - U|$  愈小, 推进效率愈高。

### § 4-1 虚质量估算

细长体理论假设沿纵向机体截面积变化率甚小, 且摆动对于鱼体质量沿流向的分布没有多大影响。这样, 与任一截面  $S_x$  有关的单位长度虚质量  $m$ , 可用具有同样截面形状、面积为  $C_x$  的水柱来估计。  $C_x$  的大小可根据各种截面形状的二维无旋理论求出。

设机体截面(包括鳍)展长(最大横向尺度)为  $s$ , 则  $m$  可近似表为:

$$m = \frac{1}{4} \pi s^2 \rho \beta \quad (4-17)$$

$\rho$  是水的质量,  $\beta$  是无量纲参数, 称为虚质量系数, 它取决于截面形状及展长-波长(摆动波长)比, 图 13-11 是

不同截面形状下,  $\beta$  随  $q$  的变化,  $q$  是机体截面(不包括鳍)所占的百分比。  $q = 0$  (全为鳍) 或  $q = 1$  (无鳍) 时,  $\beta = 1$ 。  $q \approx 0.7$  时,  $\beta$  最小, 对椭圆形截面,  $\beta_{\min} \approx 0.75$ 。

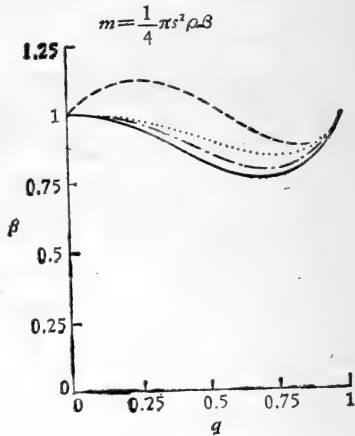


图 13-11  $\beta - q$  关系<sup>[3]</sup>

.....椭圆形截面, 背鳍与腹鳍展长相等; — 圆形截面, 背鳍与腹鳍展长相等; - · - 椭圆形截面, 背鳍与腹鳍展长为 3:1; ——— 椭圆形截面, 单鳍。

图 13-12 是  $\beta$  随  $\frac{\lambda}{s}$  的变化,  $\lambda$  为鱼体摆动的波长。可见当  $\lambda > 5s$  时,  $\beta$  的变化不大, 接近于 1。

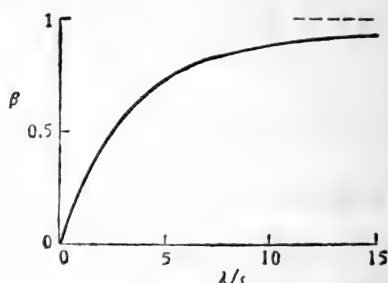


图 13-12  $\beta - \frac{\lambda}{s}$  关系<sup>[3]</sup>

#### §4-2 反作用力计算

取坐标系  $\{x, y, z\}$ , 它固联于离泳动物无穷远处的流体介质,  $x, z$  轴在水平面上,  $x$  指向平均泳动方向, 运动过程中水平面不变。机体中心线上任一点用拉格朗日坐标  $a$  表示,  $a$  从尾后缘量起, 如图 13-14 示。在运动过程中, 该点坐标  $x, z$  是  $a, t$  的函数  $x(a, t), z(a, t)$ 。

假设动物机体的尺寸不变, 则:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 = 1 \quad (4-18)$$

水平面上的速度分量为  $(u, w)$ , 而动物体中心线切向和法向

单位向量为:  $\left(\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}\right)$  和  $\left(-\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial a}\right)$ , 故

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} \\ w &= -\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

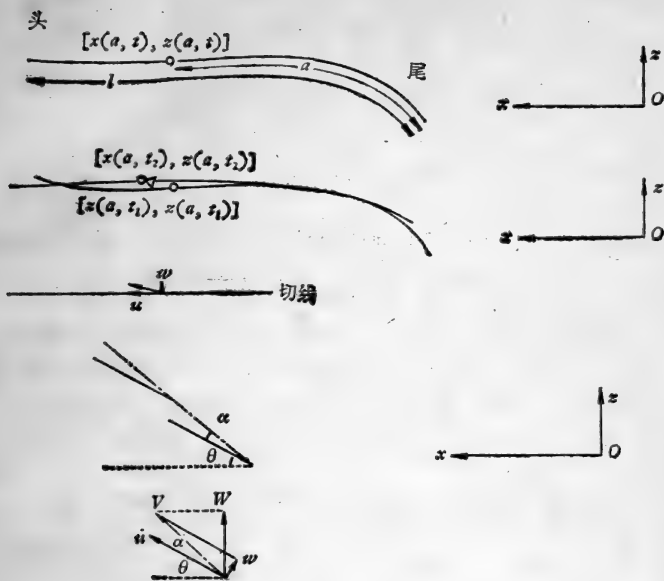


图 13-13 描述鱼类泳动的坐标系

动物运动时受到的瞬时反作用力为  $(T, N)$ ,  $T$  沿  $x$  方向,  $Q$  沿  $z$  方向。根据上述原理, 有:

$$\frac{d}{dt} \int_0^l m w \left( -\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial a} \right) da = \left[ -u m w \left( -\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \frac{1}{2} m w^2 \left( \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a} \right) \right]_{a=0} - (T, Q) \quad (4-20)$$

左端是控制体 (不包括尾迹) 内侧向动量的变化率, 右端有三项: (i) 由于  $u$  通过平面  $\Pi$  传递给尾迹的动量; (ii) 平面  $\Pi$  上, 压力  $\frac{1}{2} m w^2$  的作用; (iii) 水作用于动物的力  $(T, Q)$

应用(4-19), (4-20)可写为:

$$T = \left[ m w \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2} m w^2 \frac{\partial x}{\partial a} \right]_{a=0} + \frac{d}{dt} \int_0^l m w \frac{\partial z}{\partial a} da \quad \left. \right\}$$

$$-Q = \left[ mw \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} mw^2 \frac{\partial z}{\partial a} \right]_{a=0} + \frac{d}{dt} \int_0^l mw \frac{\partial x}{\partial a} da \quad (4-21)$$

摆动是周期性的,取时间平均得平均推力:

$$\bar{T} = \left[ mw \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2} mw^2 \frac{\partial x}{\partial a} \right]_{a=0} \quad (4-22)$$

必须指出,(4-21)和(4-11)所用的参考系不同,后者用的是随动物质心运动的参考系,而前者用的是固联于无穷远处介质的参考系;后者用的是欧拉方法,前者用了拉格朗日方法。而关于鱼类运动的实验观察总是在绝对参考系中进行的,而且总是用拉格朗日方法观测的。因此,(4-21)(4-22)比(4-11)更为实用,而且可用于大幅度摆动。

由(4-22)可知,如果 $w$ 和 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 高度正相关,而 $w^2$ 与 $\left[ \frac{\partial x}{\partial a} \right]_{a=0}$ 负相关,则可望获得高推力。还应指出,尽管

$$\frac{d}{dt} \int_0^l mw \frac{\partial z}{\partial a} \cdot da$$

对于平均推力没有贡献,但对动物泳动来说仍有重要意义。因为,(4-21a)中方括号内的量,在每一周期中有两次变为0(摆动变向, $w=0$ ),因而它所产生的瞬时推力是间歇性的。而 $\frac{d}{dt} \int_0^l mw \frac{\partial z}{\partial a} \cdot da$ 则起平滑作用,从而改善泳动性能。这种作用在采用鳗科模式推进时,尤为显著。

(4-21b)给出了侧向力,其时均值为:

$$-\bar{Q} = \left[ mw \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} mw^2 \frac{\partial z}{\partial a} \right]_{a=0} \quad (4-23)$$

摆动幅度 $z(a, t)$ 随 $a$ 的变化很大,(4-23)右端第二项相当大,很难被第一项抵销,为减小侧向力影响,尾部 $m$ 应尽可能



小，即减小机体后段截面积。采用鲹科模式推进的鱼类形状满足此要求。

平均泳速为：

$$\bar{U} = \left[ u \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \right]_{a=0} \quad (4-24)$$

单位时间内传递给尾迹的动能的时均值为：

$$\bar{\varepsilon} = \left[ \frac{1}{2} m w^2 u \right]_{a=0} \quad (4-25)$$

由(4-22)(4-24)(4-25)可求出推进效率。

Lighthill<sup>[4]</sup> 根据 Bainbridge 观察结果，用上述方法计算了雅罗鱼 (*Leuciscus*) 泳动时的推力，结果列于表 13-1。

表 13-1 雅罗鱼泳动参数 (1N = 10<sup>5</sup>dyn)

$t$ (s)	$U$ (ms <sup>-1</sup> )	$W$ (ms <sup>-1</sup> )	$w$ (ms <sup>-1</sup> )	$\frac{\partial x}{\partial a}$	$s$ (m)	$m$ (kgm <sup>-1</sup> )	$mwW$ (N)	$\frac{1}{2}mw^2\frac{\partial x}{\partial a}$ (N)	$T$ (N)
0.04	0.50	0.15	0.03	0.97	0.094	6.9	0.03	0.00	0.03
0.08	0.60	0.42	0.03	0.74	0.087	5.9	0.07	0.00	0.07
0.12	0.74	0.64	0.06	0.57	0.079	4.9	0.19	0.01	0.18
0.16	0.68	0.50	0.19	0.85	0.083	5.4	0.51	0.08	0.43
0.20	0.52	0.12	0.09	1.00	0.087	5.9	0.06	0.02	0.04
0.24	0.62	-0.36	-0.09	0.88	0.088	6.1	0.20	0.02	0.18
0.28	0.87	-0.75	-0.24	0.72	0.083	5.4	0.97	0.11	0.86
0.32	0.67	-0.48	-0.12	0.81	0.084	5.5	0.32	0.03	0.29
0.36	0.52	-0.22	-0.05	0.95	0.092	6.6	0.07	0.01	0.06
0.40	0.48	-0.02	0.00	1.00	0.093	6.8	0.00	0.00	0.00

平均推力约为 0.2N。

### § 4-3 转弯问题

鱼类泳动具有惊人的机动能力，据观测它们能在体长的

$\frac{1}{4}$  距离内, 转一个  $90^\circ$  的大弯而速度无多大改变。机动泳动的力学分析是一个饶有兴味的问题。

Gray 拍摄了鱼类转弯的电影, 典型图象如图 13-14 所示, 可分三个阶段: (i) 质心大体上沿一直线运动, 头部右拐, 尾略向左偏, 侧向力平衡, 但形成一相当大的向右转的力矩, 作用于鱼体。相当于图中 1、2、3。(ii) 质心沿一高度弯曲的路径运动, 这表明鱼体受到一个相当大的、指向路径曲率中心的力的作用。此力是由于鱼体后部大转弯而引起的。这相当于图中 4、5、6 位置。(iii) 作用于鱼尾的侧向力使鱼迅速沿新的轨道泳动, 相当于图中 7、8、9 位置。



图 13-14 鱼的转弯<sup>[1]</sup>

Weihls 将上述细长体理论用于鱼转弯问题, 但作了一些改进。他用虚质量方法计算作用于鱼体的力, 但对作用于鱼鳍的力, 选取了更合适的力系数。Weihls 算出了每一阶段作用于鱼体的力和力矩, 并算出了质心运动的轨迹, 和鱼体绕质心的旋转。

#### § 4-4 泳动推进的鳗鲡目模式和鲈科模式

高雷诺数时, 动物泳动的推进方式可进一步分为两类。一类效率较低,  $\eta < 0.5$ 。这类动物的特点是机体截面较圆, 从头至尾均有背鳍和腹鳍, 截面展长  $s$  无多大变化。泳动时, 从头到尾都作波状运动, 越到尾部波幅越大。其推力来自两方面: (i) 介质抗力, 它是相对速度的幂函数, 幂次数在 1—2 之

间;(ii)反作用力。这种推进方式,以鳗鲡目(Anguilliformes)鱼类为代表,故称为鳗鲡目模式。

另一类推进效率较高,  $\eta > 0.5$ 。这类动物的形态特征是:体截面在摆动方向扁平,且前段截面展长较大,后段展长减小。在前部到尾鳍之间的过渡部分,截面展长特别小,称为后颈部。泳动时,前部(约占整体的  $\frac{2}{3}$ )基本上不动,而尾鳍

摆幅很大,摆幅的变化主要发生在后颈部。推力完全来自水的反作用力。这种推进方式以鲹科鱼类为典型代表,故称鲹科模式。

鲹科模式与鳗鲡目模式相比优越性何在?首先,鲹科模式推进效率高。如前所述,动物摆动产生推力的同时,以一定的速率将动能传递给尾迹而浪费掉。机体摆动产生的漩涡越强,效率就越低。鳗鲡目模式全身波动,可以想象,产生同样推力,这种模式所引起的涡量比鲹科模式强得多,因而效率较低。对此, Lighthill<sup>[3]</sup>作了简单的定量分析,得

$$\varepsilon = \bar{U} \cdot \frac{3}{16} \rho s_0^2 \omega_0^2 \left( 1 + \frac{2\omega_0}{\bar{U}} \cdot \frac{1}{\tau s_0} \right) \quad (4-26)$$

这里  $s_0$  是  $s$  的最大值,  $\omega_0$  是  $w$  的幅值,  $\tau$  表示  $sw^2$  的相对(以  $s_0\omega_0^2$  为参考值)增长率(沿  $x$ ),  $\frac{2\omega_0}{U} \sim 1$ 。由此可见,当  $\tau \sim s_0^{-1}$

或  $\tau < \frac{1}{s_0}$  时,浪费掉的能量相当多,鳗鲡目鱼类的  $\tau$  值相当

小,因而效率较低。而鲹科鱼类,靠近尾部时摆动幅变猛增,  $w^2$  猛增,故  $\tau$  值相当大,故效率较高。

但是,由于任何时刻都不出现全波长,尾部摆动产生的侧向力就不可能完全抵销(鳗鲡目模式中是完全抵销的),它使机体作螺旋运动。这种附加运动必须消除,否则鲹科推进模

式就毫无优越性可言。这一点是通过形体进化而实现的。一方面,摆幅变化主要发生于后颈部,侧向力亦主要产生在这一部分,而后颈部很窄,相应的虚质量很小,故产生的侧力很小;另一方面,前部截面展长比尾部大得多,因而前部侧滑的阻尼很大。两种作用的综合,使采用鳗科模式推进的动物的螺旋运动减轻到可以忽略不计的地步。

Bainbridge、Gray 等人的观测表明,鱼体长度  $l$  是制约鳗科鱼类泳速的一个主要参数。一般,鳗科鱼类尾鳍摆动幅度约为  $0.2l$ , 频率参数  $\frac{\omega l}{U}$  在 10 左右。当鱼长大后,尾鳍摆动频率降低,而  $\frac{\omega l}{U}$  大体不变,因而单位长度回游速度  $\frac{U}{l}$  降低,但  $U$  本身增大。

Gray 指出,当鱼长大后,肌肉产生的推动力与  $l^3$  成正比,而所需克服的阻力等于  $\frac{1}{2} \rho U^3 C_D S$ , 它与  $C_D l^2$  成正比。推力与阻力平衡,故

$$U \propto \left( \frac{l}{C_D} \right)^{\frac{1}{3}}$$

而  $C_D$  与  $Re = \frac{Ul}{\nu}$  有关系,层流时

$$C_D \propto Re^{-\frac{1}{2}} \propto (Ul)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore U \propto l^{0.6}$$

湍流时,

$$C_D \propto Re^{-\frac{1}{4}} \propto (Ul)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore U \propto l^{0.46}$$

实际观测表明,

$$U \propto l^{0.33} \sim l^{0.6}$$

这和理论预计相似。

## § 5 新月形尾鳍推进的二维理论

从流体力学观点来看,为提高泳速和推进效率,鲹科推进模式进一步发展有三种不同的形式。

(1) 后颈部进一步变窄,尾鳍象后掠机翼那样,呈V形,后掠角高达 $50-60^\circ$ 。推力不变,但阻力减小,因而有利于高速泳动。鲱属(*Clupea*)鱼类即属此例。但是,若欲保持尾鳍后掠角不变,同时增大推力,则必须增大尾鳍展长。由于材料强度的限制,这一点不能实现。

(2) 减小后掠角,增大尾鳍展长( $s$ ),但尾鳍面积( $A$ )不变,因而展弦比 $\frac{s^2}{A}$ 增大,推力提高,而阻力无多大变化,从而提高推进效率。鲹类的竹荚鱼(horse-mackerel *caranx*)即为一例。

(3) 尾鳍为新月形,展弦比很大,尾鳍剖面取低阻翼型的形状,前缘圆钝,能产生很大的前缘吸力,它提供相当大一部分推力。海洋中的一切快速泳动的动物,如箭鱼、鲨鱼、鲸、海豚等等,都采用这种推进方式,短时间内最高泳速可达 $10-20\text{m/s}$ 。本节专门讨论这种推进方式的流体力学原理。

为什么高速泳动的生物,从不同的进化途径收敛于同一种形态呢?是结构力学性能的需要吗?似乎不是这样。因为箭鱼的尾鳍是有骨架的,而鲨鱼的尾只有软骨,鲸类的尾根本没骨头,三者的结构力学性能很不一样,但外形却很相似。看来这种形态学上的收敛性只能归因于流体力学因素。

进一步,为什么新月形尾具有最佳的水力学特性呢?Lighthill<sup>[2]</sup>认为,动物泳动时,尾迹是由一连串移动着的涡环组成的,涡环近乎圆形,而新月形尾特别容易使圆形涡环从后缘脱

落,从而把尾涡脱落所消耗掉的能量降低到最小,故推进效率最高。当然,这仅仅是一个定性的说明,准确的定量分析,需要发展一种适用于具有弯曲中弧线的机翼的三维升力线理论,Lighthill 等曾探讨过这个问题。

下面从二维机翼理论出发,来讨论新月形尾鳍的推进原理。

### § 5-1 推进原理

大展弦比的新月形尾鳍在水中摆动时产生的力,和鸟类飞行时翼上的空气动力相似,不过目标不同,后者追求的是高升阻比,而前者要求的是高推进效率。但二者都可以用二维振动机翼理论来处理。这里先谈一谈定性原理。

新月尾摆动有两种形式,一是左右摆动,如箭鱼;另一种是上、下摆动,如鲸、海豚等,二者原理一样,现以后者为例。

由图 13-15 可见,尾鳍在最高位置时,向下击水,产生反时针方向的漩涡,给尾下方的水一个向后的冲量,因而水给动物一个向前的反作用;而当尾鳍在最低位置时,向上击水,产生一个顺时针的涡,给尾上方的水一个向后的冲量,因而水又给动物一个向前的反作用,这就是推力。



图 13-15 尾鳍摆动产生推力的原理

应该指出,尾鳍摆动所产生的尾涡涡量的方向及上、下排列位置,恰巧和流体流过圆柱体时产生的卡门涡街相反,因而后者为阻力,前者恰巧为推力。

要提高尾鳍摆动推进的效率,要求解决下列两个因素的

矛盾:

(1) 推力与涡量强度成正比, 因而需要保持一定的涡量强度, 以保证所产生的推力足以克服阻力;

(2) 机械能损失与涡量平方成正比。故应避免太强的漩涡, 以减少能量损失。

一般快速泳动的动物尾鳍向上摆动比较缓和, 其作用可用缓和因子  $\theta$  表示。 $\theta$  对推力系数  $C_T$ , 及效率  $\eta$  的影响见图 13-17。

## § 5-2 二维理论

设尾鳍剖面从  $x = -a$  伸展到  $x = a$ , 未扰动流速为  $U$ , 剖面侧向位移为  $z$ ,

$$z = [h - i\alpha(x - b)]e^{i\omega t} \quad (5-1)$$

$h, \alpha$  为实数, 分别表示侧滑和偏航的幅度, 偏航轴为  $x = b, z = 0$ 。

由于雷诺很高, 可认为流体是无粘的, 扰动速度位为  $\phi e^{i\omega t}$ , 它满足一定的边界条件。进而, 因为尾鳍相当薄, 故在线性理论中, 边界条件在平面  $z = 0$  上满足。这样, 边界条件为:

$$-a < x < a$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = i(\omega h - U\alpha) + \omega\alpha(x - b) \quad (5-2)$$

$\omega$  为摆动的圆频率。

当  $x < -a$  时,  $\phi = 0$ ; 但当  $x > a$  时, 由于尾涡存在,  $\phi \neq 0$ , 但  $\Phi = 0$ ,

$$\Phi = i\omega\phi + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5-3)$$

$\Phi$  与压力有关,

$$p - p_0 = -\rho\Phi e^{i\omega t} \quad (5-4)$$

$p_0$  为静水压力。

用  $\Phi$  代替  $\phi$ , 则边界条件(5-2)可写为:

$$-a < x < a;$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=0} &= B + Cx \\ B &= 2U\omega\alpha - \omega^2(h + i\alpha b) \\ C &= i\omega^2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

$x < -a, x > a$  时,

$$\Phi = 0 \quad (5-6)$$

在边界条件(5-5)(5-6)下解方程:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (5-7)$$

可得:

$$\Phi = A\Phi_1 + B\Phi_2 + C\Phi_3 \quad (5-8)$$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  由表 13-2 列出,  $A$  由下式给出:

$$A = -U \left\{ \left[ \omega\alpha \left( b - \frac{1}{2}a \right) + i(U\alpha - \omega h) \right] [(F + iG) + \frac{1}{2}\omega\alpha a] \right\} \quad (5-9)$$

这里  $F, G$  为 Theodorsen 函数,

$$F(\sigma) + iG(\sigma) = \frac{\kappa_1(i\sigma)}{\kappa_0(i\sigma) + \kappa_1(i\sigma)} \quad (5-10)$$

$$\sigma = \frac{\omega a}{U} \quad (5-11)$$

$\sigma$  为频率参数,  $\kappa_0, \kappa_1$  分别为零阶和一阶贝塞尔函数。图 13-16 给出了  $G, F, \sigma$  的关系。

单位展长上的侧向力为  $\rho Z e^{i\omega t}$ , 对于  $x = 0, z = 0$  轴的力矩为  $M e^{i\omega t}$ 。



表 13-2  $\Phi = (\Omega + i\Psi)$  与  $Z, M$  等的关系

$\Phi$	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$
$\Omega + i\Psi$	$1 - [(\xi - a)/(\xi + a)]^{1/2}$	$\xi - (\xi^2 - a^2)^{1/2}$	$\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi(\xi^2 - a^2)^{1/2}$
$(\Omega)_{ x =0} \begin{cases}  x  < a \\  x  > a \end{cases}$	/	$x$	$\frac{1}{2}x^2$
$(\Psi)_{ x =0} \begin{cases}  x  < a \\  x  > a \end{cases}$	$1 - [(x - a)/(x + a)]^{1/2}$	$x - (x^2 - a^2)^{1/2} \operatorname{sgn} x$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} x (x^2 - a^2)^{1/2}$
$Z = 2 \int_{-a}^a (\Phi)_{z=0} \cdot dx$	$\mp [(x - a)/(x + a)]^{1/2}$ 0	$\mp (a^2 - x^2)^{1/2}$ 0	$\mp \frac{1}{2}x(a^2 - x^2)^{1/2}$ 0
$M = 2 \int_{-a}^a (-x)(\Phi)_{z=0} \cdot dx$	$2\pi a$	$\pi a^2$	0
	$\pi a^2$	0	$-\frac{1}{8}\pi a^4$

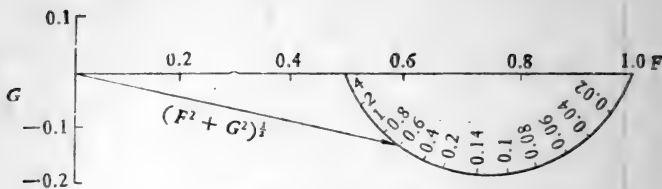


图 13-16  $G, F, \sigma$  关系<sup>[1]</sup>

$$Z = 2 \int_{-a}^a (\Phi)_{z=0^-} \cdot dx = 2\pi a A + \pi a^2 B \quad (5-12)$$

$$M = 2 \int_{-a}^a (\Phi)_{z=0^-} \cdot (-x) dx = \pi a^2 A - \frac{1}{8} \pi a^4 C \quad (5-13)$$

单位展长尾鳍摆动时所作的平均功率为  $\rho \bar{E}$ ，它包括侧向力所作的功及偏航力矩所作的功，前者等于侧向力与剖面中心侧向速度的乘积，后者等于偏航力矩与偏航角速度的乘积。故有：

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \mathcal{R} [Z \omega (-\alpha b - ih) + M (-\omega \alpha)] \quad (5-14)$$

应用 (5-5) (5-12) (5-13)，上式变为：

$$\bar{E} = -\pi a \omega \alpha \left( b + \frac{1}{2} a \right) \mathcal{R} A + \pi a \omega h \mathcal{I} A - \pi a^2 U \omega^2 \alpha^2 b \quad (5-15)$$

这里  $\mathcal{R}$  表示实部， $\mathcal{I}$  表示虚部。

单位展长上平均推力为  $\rho \bar{T}$ ，有：

$$\bar{T} = \pi a U^{-2} |A|^2 + \left( \pi a \alpha \mathcal{I} A - \frac{1}{2} \pi a^2 \omega^2 \alpha^2 b \right) \quad (5-16)$$

故单位展长上浪费掉的机械能率为  $\rho (\bar{E} - U \bar{T})$ ，

$$\bar{E} - U\bar{T} = U\pi a \left[ \omega^2 \alpha^2 \left( b - \frac{1}{2} a \right)^2 + (\omega h - U\alpha)^2 \right] (F - F^2 - G^2) \quad (5-17)$$

推进效率为  $\eta$ ,

$$\eta = 1 - \left\{ \left\{ \omega^2 \alpha^2 \left( b - \frac{1}{2} a \right)^2 + (\omega h - U\alpha)^2 \right\} (F - F^2 - G^2) \right\} / \left\{ \left\{ \omega \alpha \left( b - \frac{1}{2} a \right) \left[ \alpha \left( b + \frac{1}{2} a \right) F - hG - \frac{1}{2} \alpha a \right] + (\omega h - U\alpha) \left[ hF + \alpha \left( b + \frac{1}{2} a \right) G \right] \right\} \omega \right\} \quad (5-18)$$

图 13-17 是根据上述理论算出的推力系数  $C_T$  及推进效率  $\eta$  随参数  $\frac{2\omega a}{U}$  的变化,

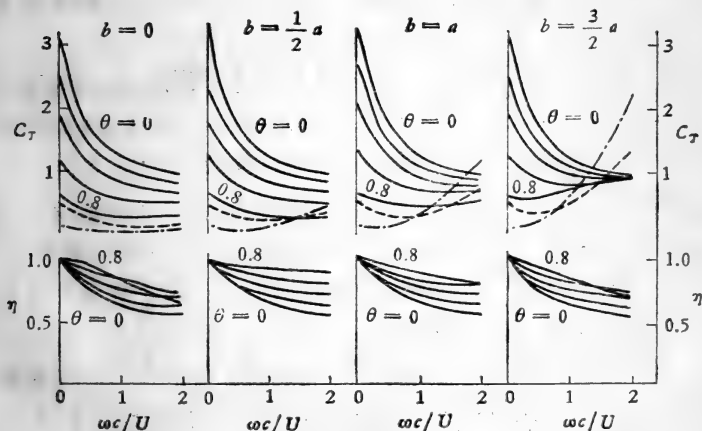


图 13-17  $C_T, \eta$  随  $\frac{2\omega a}{U}$  及  $\theta$  的变化<sup>[3]</sup>

$$C_T = \frac{\bar{T}}{\omega^2 h^2 a} \quad (5-19)$$

由此可见:

(1) 为保持高推进效率, 应取较高的缓和因子  $\theta$ , 比如说  $\theta = 0.6 \sim 0.8$ 。

(2) 偏航轴越靠后, 即  $b$  越大, 推力愈大。一般说来,  $\frac{1}{2}a \leq b \leq a$  时, 即可获得最佳效率, 又可得到最佳效率。

应该指出, 二维理论算出的推力、效率都是偏高的, 因为它没有考虑尾鳍尖端漩涡的影响。更准确的分析需要用三维理论。

## § 6 动物泳动的阻力

高速泳动的动物, 除了采取最有效的推进方式外, 还通过种种途径减少泳动阻力。这方面的研究, 对于提高舰船速度很有意义。

首先, 高速泳动动物的体型是高度流线形的, 运动时不会发生流动分离现象。而且表面特别光滑。在高速泳动时, 胸鳍、腹鳍可以收进体表上特定的凹槽, 以减小阻力。

其次, 背鳍、腹鳍、胸鳍和身体截面宽度组合、分布得很巧妙, 使侧力不平衡引起的螺旋运动降低到微不足道的地步。

最后一个因素是表面摩擦阻力很小。这除了优良的外形外, 还和动物机体的表面性质有关。

50 年代末, Osborn 观测了鲑鱼回游, 结论是: 活鱼的摩阻比外形相似的刚性模型的摩阻小得多。另一方面, 实验表明最强的肌肉, 每磅只能产生 0.01 马力的功率。若按刚性模型试验所得的阻力系数计算, 则为达到其最大速度所需的功

率，是动物肌肉无法产生的。这就是有名的 Gray 疑难。这个问题促使人们作进一步的研究，一方面，排除实验中的不确定性，作更准确的测量；另一方面，探索是否存在新的、特殊的力学机理。

Gray 对采用鳗科模式推进的鱼类的阻力测量数据作了综合，一般说来，死鱼和模型‘鱼’的摩阻系数接近。若以最大迎流面积为参考，阻力系数  $C_D$  约等于 0.25。

60 年代后期，Lang 等对几种海豚和鲸作了一系列水动力学实验，结果表明，当推进功率——体重比相同、推进效率相同时，测得阻力系数接近于等价刚性模型的阻力系数。这表明，鱼类泳动摩阻问题似乎没有什么特殊的流体力学机理，Gray 疑难可以用持续时间来解释，即每磅肌肉产生 0.01 马力功率是指肌肉的持续输出功率，而瞬时功率可高于此值。

但这只是问题的一方面。如前所述，海豚、鲸等动物泳动雷诺数高达  $10^8$ 。这样高的雷诺数下，光滑刚性平板边界层早已转变为湍流了，而动物体表面的边界层基本上是层流。这是为什么？目前还不十分清楚。可能的机理有四：

(1) 动物体表面形状产生有利的压力分布，使转捩雷诺数大大提高。

(2) 动物表皮具有双层结构，外层薄而且弹性好；内层是密集的弹性网络，孔眼中充满脂肪性物质。这种表皮结构，对边界层的扰动起阻尼作用，大大提高了边界层流动的稳定性，因而在极高的雷诺数下也不发生转捩。

(3) 鱼类学家的一个传统观念是：动物体表面分泌一种粘液，它起润滑作用而减阻。尽管这种粘液有很多功能，但是否和流体力学性能有关联，还很难断言。一种流行的说法是，它的作用相当于高分子减阻剂。但高分子减阻剂只有对湍流才起减阻作用，是否能增强流动稳定性，目前还没有定论。

(4) 某些构造起控制边界层的作用。观察表明,鱼转弯时,内侧鳃盖紧闭,而外侧有缝隙。从口内进入鳃的水,全部从外侧喷出,从而防止外侧流动分离。但是否存在使流动保持层流的边界层控制机构,目前尚难断言。

总之,继续弄清阻力机理,是水生动物流体动力学的一个有意义的课题。

### 参 考 文 献

- [1] Lighthill, J.: *Mathematical Biofluidynamics*, S. I. A. M., Philadelphia, 1975.
- [2] Lighthill, J.: *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, 1, 413, 1969.
- [3] Wu, Y. T.: *Advances in Applied Mechanics*, 11, 1, 1971.
- [4] Wu, Y. T.: 1977 Biomechanics, Symposium. Ed. by Skalak, R., Schultz, A. B., ASME, 1977.
- [5] Hancock, G. J.: *Proc. Roy. Soc. London Ser A*, 217, 96, 1953.
- [6] Gray, J., Hancock, G. J.: *J. Experimental Biology*, 32, 802, 1955.
- [7] Chwang, A. T., Wu, Y. T.: *Swimming and Flying in Nature*, Ed. by Wu, Y. T. et al., Plenum Press, New York, 1975.
- [8] Blake, J. R.: *J. F. M.*, 46, 199, 1971.
- [9] Blake, J. R.: *J. F. M.*, 55, 1, 1972.
- [10] Blake, J. R.: *J. Biomechanics*, 6, 133, 1973.
- [11] Blake, J. R., Sleigh, M. A.: *Biology Rev.*, 49, 85, 1974.
- [12] Lighthill, J.: *J. F. M.*, 40, 265, 1970.
- [13] Lighthill, J.: *Proc. Roy. Soc. Ser B*, 179, 125, 1971.

## 第十四章 动物飞行的空气动力学问题

### §1 引言

动物飞行的历史非常久远,早在三亿年前,持续飞行问题就已为昆虫解决。而鸟类和昆虫的飞翔能力,长期以来为向往飞行的人类所倾羨,曾激发了人们许多美好的想象,也引起了古往今来许多学者的兴趣。可以说,他们是人类征服天空的启蒙导师。他们的许多特殊的飞行能力(如悬停、节能等)至今仍值得人类师法。因而动物飞行的空气动力学问题也是当今生物流体力学的一个重要课题。

飞行动物需要多种不同的飞行能力,因而涉及的空气动力学问题是多种多样的。首要的是持续飞行的能力,这要求翼的运动既产生升力以支持体重;又产生推力,以克服空气阻力,且以所需要的速度飞行。这将在本章 §2、§3 节中讨论。

除了持续飞行外,许多动物还要求有空中悬停的能力,既可以在起飞、降落过程中作短期悬停,又能在空中长期悬停。所谓悬停,就是动物整体与空气之间几乎没有相对运动,靠翼的扑击而凌空停留。这给空气动力学提出了一个新课题,这将在第 5 节中介绍。

§3 分析动物飞行的能量问题。在此基础上,讨论飞行动物的重量和体积的限制(第 4 节)。

此外,还有飞行控制和机动飞行问题。有趣的是:两翼昆虫、鸟类和蝙蝠等都用不着尾部安定面(相当于飞机尾翼)就可具有飞行稳定性。这是因为动物具有精确控制其姿态的

能力,以保证扑翼的升力中心具有适宜的位置,避免不希望产生的俯仰力矩。

应该指出,鸟类、昆虫以及蝙蝠等飞行最显著的特点,不在于其气动力性能,而在于其构造。

鸟类有许多特殊构造有利于飞行。例如,分布的气囊(见第一章)除了可以作为高效能的呼吸器官外,还可以在保证结构刚度的条件下,减轻重量。又如,鸟的羽毛可以巧妙地改变翼的平面形状,以适应载荷分布的变化。而且它是透气的,高雷诺数时,起着控制边界层,避免流动分离的作用,类似于飞机上的前缘缝翼。

昆虫的翼富有弹性,薄而且轻,具有高频(20—500Hz)谐振的能力。鼓翼时,靠翼的弹性来克服翼的惯性,肌肉仅用以克服气动阻尼。因而昆虫飞行不需要强大的肌肉。这是昆虫飞行的一大特色。

## §2 持续飞行

在生物进化的历史过程中,最早获得飞行能力的是昆虫,有翼昆虫出现于石炭纪中叶。继昆虫之后,爬虫类的一个分支——翼龙也获得了持续飞行的能力。约1亿年前,侏罗纪后期,出现了鸟类,而后某些哺乳动物(如蝙蝠)也从另一途径在五千万年前,实现了持续飞行。这些飞行动物,解剖构造很不一样,大小也十分悬殊(从 $1\mu\text{g}$ — $12\text{kg}$ ),但其飞行方式却基本相同,都是靠肌肉收缩,鼓动翼,扑击空气,获得飞行所必需的升力和推力,实现持续飞行。

动物飞行产生升力的基本原理和飞行器相同,推力的产生则和桨、橹划水的作用相似。但翼的运动比飞行器复杂得多。翼不仅和身体一起相对于空气移动,而且上下挥舞,拍打



空气。每个翼剖面之间都有相对运动。翼上每一个点的空气动力都是随时间和空间位置而变化的。这使得翼上的空气动力分布非常复杂,无法作精确的理论分析。现有的研究主要是实验观测和原理性的估算。

## § 2-1 昆虫的持续飞行

Weis-Fogh 和 Jensen<sup>[30,41]</sup> 在风洞中观察了蝗虫飞行时翼的运动,并测量了翼扑动过程中升力、推力随时间的变化。翼长 4cm, 飞行速度  $U = 4\text{m/s}$ , 基于前翼弦长的雷诺数约为 2000, 典型频率为 20Hz, 频率参数  $\frac{\omega c}{U} \simeq \frac{1}{4}$ ,  $c$  为翼弦长。

图 14-1 是昆虫平飞时, 单个前翼在空气中的运动情况。可见, 翼的扑动可分为两个冲程:

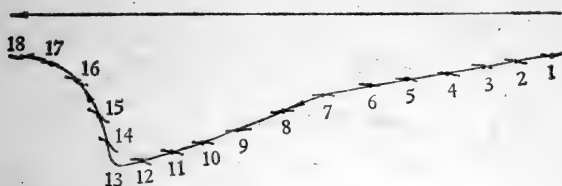


图 14-1 昆虫飞行时翼的运动<sup>[1]</sup>

### 1. 下扑冲程

持续时间较长(图中 1 至 13), 且整个过程中, 翼弦大体上平行于平均运动方向。气动力接近于定常(因为频率参数比 1 小一个量级), 垂直于瞬时飞行轨迹, 因而既产生升力, 也产生推力。

### 2. 上提冲程

历时较短, 翼剖面相对于平均运动的迎角是正的, 但相对

于当地瞬时气流的方向,迎角为负。

图 14-2 进一步说明,翼在扑动过程中发生扭摆。



图 14-2 翼的扭摆及迎角的定义

昆虫有复翼,扑动时,前翼相对于后翼有一相位迟后,而且相互之间有气动干扰。观测表明,前翼后缘的下洗流场使后翼的有效迎角降低  $2^\circ$  左右,而后翼前方的上洗流场使前翼迎角增大约  $2^\circ$ ,因而总的气动力效应可以不计。

图 14-3 是一个扑动周期内,蝗虫前、后翼升力随时间的变化。可见:(i) 升力主要产生于下扑冲程;(ii) 后翼升力占总升力的 70%,前翼占 30%。

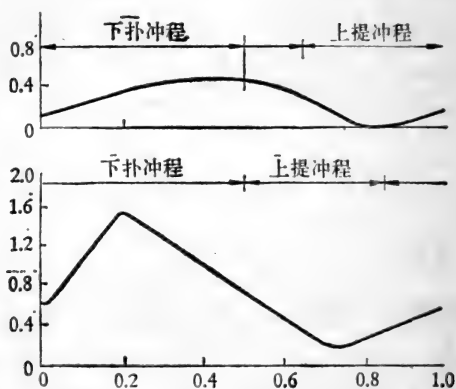


图 14-3 蝗虫前、后翼升力随时间的周期性变化<sup>[1]</sup>

图 14-4 是一个扑动周期内,前、后翼推力及总推力随时间的变化。可见:(i) 总推力有两个峰值,分别相应于下扑冲程和上提冲程。下扑冲程产生的推力高于上提冲程。(ii) 后

翼产生的推力占总推力的 75%，前翼推力仅占 25%。

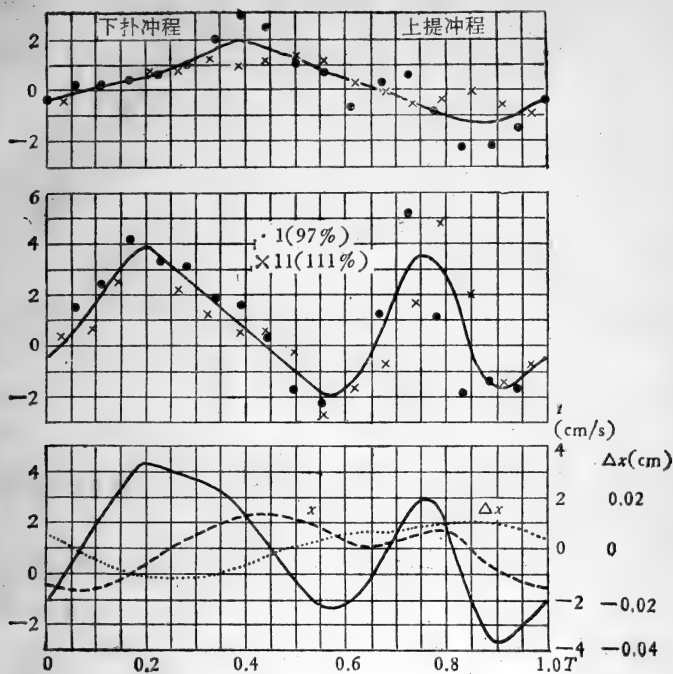


图 14-4 蝗虫前、后翼推力及总推力的周期性变化<sup>[1]</sup>

Weis-Fogh 和 Jensen 进一步研究了蝗虫前、后翼翼剖面的气动力性能,求出了升阻比曲线,并与飞行(低速)翼型的升阻比曲线作了比较,典型结果见图 14-5,昆虫翼最小阻力系数  $C_{Dmin} \approx 0.05$ ,而低速机翼  $C_{Dmin} \approx 0.03$ 。这说明,昆虫翼剖面的气动特性并不十分优越。由此看来,昆虫飞行的优点主要在于结构,而不在于气动力性能。

## §2-2 鸟类的持续飞行

鸟类飞行方式和昆虫没有质的差异,都通过翼的扑动获

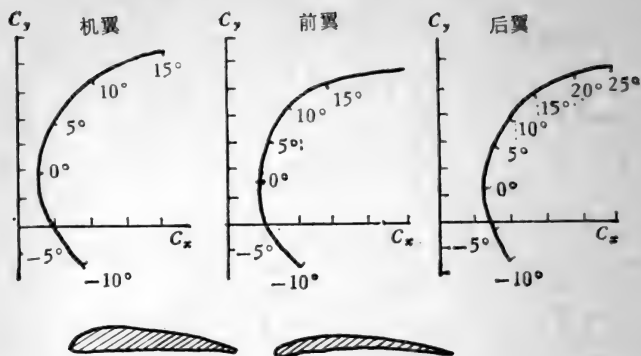


图 14-5 蝗虫前、后翼翼剖面升阻比曲线，  
及其与低速飞机翼型的比较<sup>[1]</sup>

得所需的升力和推力。当然，由于结构不同，飞行方式及其气动力特性也有所不同。

Brown 对鸽的飞行作了精细的观测<sup>[5]</sup>，他让受过训练的鸽在一条长达 60m 的通道里飞向位于一端的笼子，在中途用高速摄影机观测。鸽飞行的速度约为 10m/s，以翼弦为参考长度的雷诺数约为  $10^5$ 。鼓翼频率约为 5Hz，相应的频率参数  $\left(\frac{\omega c}{U}\right)$  约为 0.5。观测结果表明，鸟飞行时翼的运动也可以分

为下扑和上提两个冲程。下扑冲程和昆虫飞行相似。但在下扑终了时，翼尖部下翼面迅速向上翻转，有助于主羽收拢上提。另外，在下扑过程中，主羽炸开，起增升作用。据观测，升力可提高 60% 左右。鸟翼上提时，翅尖关节弯曲，收拢，主羽散开，使上下翼面空气可以沟通，这样既能保持一定的推力，又可使升力不致损失。

鸟类和昆虫扑翼飞行的主要差异在于单位体重所需要的能量不同。据估计，鸽作持续飞行所需的能量为  $20w/kg$ ，而

昆虫飞行所需的比能量仅为其  $\frac{1}{3}$  左右。

为了节省能量以利于生存竞争,除了扑翼飞行外,鸟类还掌握了其它的飞行方法。

### § 2-3 鸟类的滑翔

滑翔时,鸟翼不扑动。设翼升力为  $L$ , 阻力为  $D$ , 下滑角(与水平面的夹角)为  $\theta$ , 鸟的质量为  $m$ , 则:

$$L = mg \cos \theta \quad (2-1)$$

$$D = mg \sin \theta \quad (2-2)$$

$$\theta = \arctg \frac{D}{L} \quad (2-3)$$

阻力包括两部分:

$$D = D_i + D_f \quad (2-4)$$

$D_i$  为诱导阻力,  $D_f$  为摩擦阻力。较大的鸟类,  $R_c > 10^4$ , 可以期望  $c_{D_f}$  基本上不变, 这里,

$$D_f = \frac{1}{2} \rho U^2 S c_{D_f} \quad (2-5)$$

若半翼展为  $b$ , 则

$$D_i = \frac{KL^2}{\frac{1}{2} \rho U^2 b^2} \quad (2-6)$$

$K \approx 0.10$ 。

当滑翔角  $\theta$  一定时,  $L$  一定, 此时, 阻力是  $U$  和  $b$  的函数

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 S c_{D_f} + \frac{KL^2}{\frac{1}{2} \rho U^2 b^2} \quad (2-7)$$

因  $c_{D_f}$ ,  $K$  不变, 故最小阻力时的滑翔速度  $U_0$  为:

$$U_0 = \left( \frac{4K}{\rho c_{Dj}^2} \cdot \frac{L^2}{Sb^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2-8)$$

当  $U > U_0$  时,  $D_j$  占主导地位, 阻力随速度增大, 滑翔是稳定的; 当  $U < U_0$  时,  $D_i$  占主导地位, 速度降低时阻力增大, 此时稳定的滑翔不可能实现。

由 (3-12) 可知, 当  $D_j = D_i = \frac{1}{2} D$  时,

$$b = \sqrt{\frac{K}{S c_{Dj}}} \cdot \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

故当滑翔速度  $U$  小于  $U_0$  时, 要求翼展增长, 以恢复稳定。

一定的下滑角  $\theta$  下, 总阻力是一定的 [见 (2-2)], 而  $D$  只能是  $D_j$  的 1—2 倍, 否则要失速, 因此, 稳定的滑翔速度范围为:

$$\left[ \frac{mg \sin \theta}{\rho S c_{Dj}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq U \leq \left[ \frac{2mg \sin \theta}{\rho S c_{Dj}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

可见, 增大下滑角  $\theta$ , 可使稳定滑翔的速度范围变宽。

若鸟利用局部上升气流滑翔, 上升气流速度为  $v$ , 则

$$\sin \theta = \frac{v}{U} \quad (2-10)$$

为保证滑翔稳定,  $U$  应满足:

$$\left[ \frac{mgv}{\rho S c_{Dj}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq U \leq \left[ \frac{2mgv}{\rho S c_{Dj}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-11)$$

## § 2-4 信天翁的翱翔

当信天翁在海洋上空作长距离飞行时, 可以观察到它周期性地改变高度, 其目的在于利用风速梯度 (风速随高度变化), 以减小飞行时的能量消耗。早在 1883 年, Rayleigh 就分

析过这个问题。

设平均自然风速为  $\bar{u}(z)$ , 信天翁飞行速度则为:

$$\mathbf{V} = \{\bar{u}(z) + u', v', w'\} \quad (2-12)$$

为避免失速, 信天翁飞行的动能  $\frac{1}{2} m(u'^2 + v'^2 + w'^2)$  必须保持一定的大小, 以克服飞行阻力。

任何脉动运动都从平均运动  $\bar{u}$  获得能量, 单位时间内、单位面积上从气流平均动能获得的能量为:

$$-m \overline{u'w'} \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (2-13)$$

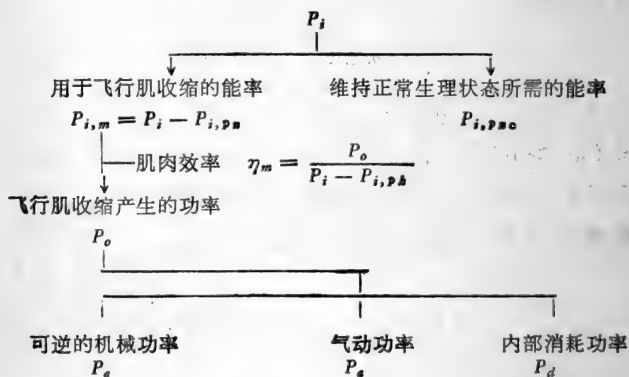
为使(2-13)为正, 必须使  $u'$  与  $w'$  符号相反。也就是说, 当气流上升 ( $w' > 0$ ) 时, 信天翁总是在上风 ( $u' < 0$ ); 而当气流下降 ( $w' < 0$ ) 时, 它总是在下风 ( $u' > 0$ )。这样才能充分利用风能减轻自身的消耗。实际情况正是如此。

### §3 飞行的动力

动物飞行的动力来自肌肉收缩所作的机械功。无论是昆虫, 还是鸟类, 或者是蝙蝠, 作为其飞行动力装置的, 都是横纹肌。Greenewalt<sup>[6]</sup> 发现, 用于鼓翼飞行的肌肉的质量, 和飞行动物的体重成正相关。他的研究表明, 昆虫体内肌肉总质量约占整个身体总质量的 10—20%; 对于鸟类来说, 鼓翼下扑的胸大肌的质量约占身体总质量的 15%; 而专司挥翼上提的肌肉的质量仅占身体总质量的 1.5% 左右; 蝙蝠胸大肌的质量约占身体总质量的 8%, 但它的飞行还和其他肌肉有关, 如果把这些肌肉都算在内, 那么用于飞行的肌肉的总质量约为身体总质量的 16% 左右。由此看来, 不管是小昆虫, 还是大鸟, 或是哺乳类的蝙蝠, 它们飞行的动力装置的功能是差不多的。据 Weis-Fogh<sup>[4]</sup> 估计, 飞行动物每千克肌肉提供的机械功

率约为 50—200W,具体数量与个体大小无关,而决定于飞行的方式。

进而言之,动物肌肉收缩产生的机械能,来自代谢时产生的化学能。对飞行动物来说,代谢能不仅用以使肌肉收缩,还用来维持与飞行相适应的生理状态(如血液循环、呼吸等)。设单位时间内飞行动物体体内因代谢而产生的化学能(简称代谢率)为  $P_i$ ,则能量分配如下。



这里  $P_e$  包括因惯性、重力和组织弹性变形所贮存的机械能;  $P_d$  则为单位时间内因组织粘弹性变形、关节摩擦等损失的机械能。气动功率  $P_a$  包括三部分: (i) 为产生飞行所必需的升力,对空气所作的功率  $P_l$ ; (ii) 为克服翼的气动阻力所作的功率  $P_{pr}$ ; (iii) 为克服气动废阻所作的功率  $P_{par}$ 。Tucker<sup>[7]</sup>曾对此作过细致的分析。

设沿翼展单位长度上翼所受的气动力为  $f(z, t)$ ,  $z$  为展向坐标,  $t$  为时间;相应的气流相对速度为  $v(z, t)$ ;鼓翼周期为  $T$ ,翼展长为  $b$ ,则气动功率为:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} f(z, t) \cdot v(z, t) dz dt \quad (3-1)$$

若绝对风速为  $v_a$ ,翼剖面运动绝对速度为  $v_w$ ,则



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_w \quad (3-2)$$

$\mathbf{v}_a$  为空气自然流动速度  $\mathbf{v}_0$  和翼扑动引起的诱导速度  $\mathbf{v}_i$  之和,

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i \quad (3-3)$$

$\mathbf{v}_w$  由动物飞行速度(移动速度)  $\mathbf{U}$  和扑动速度  $\mathbf{v}_f$  构成, 即

$$\mathbf{v}_w = \mathbf{v}_a + \mathbf{v} \quad (3-4)$$

不失为一般性, 设  $\mathbf{v}_0 = 0$ , 将(3-2)(3-3)(3-4)代入(3-1), 得:

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dz dt \quad (3-5)$$

显然, 气动功率  $P_a$  由三部分组成:

$$P_a = P_l + P_{pr} + P_{par} \quad (3-6)$$

$$P_l = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i dz dt \quad (3-7)$$

$$P_{pr} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dz dt \quad (3-8)$$

$$P_{par} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dz dt \quad (3-9)$$

如前所述, 用(3-1)或(3-6)(3-7)(3-8)(3-9)计算功率是很困难的, 几乎不可能。只能根据实验的结果作半经验的估计。Pennycuik<sup>[8]</sup> 曾计算过鸽在平飞时的  $P_l$  和  $P_{pr}$ , Tucker 根据实测结果做了进一步分析。但所得结果相当粗略。

## § 4 飞行动物的尺度

观察表明, 较大的飞行动物(如鸟类)能达到较高的飞行速度, 而较小的飞行动物(如昆虫)所能达到的飞行速度则较低。例如, 鸽子体重约 450g, 飞行速度约 10m/s; 而蝗虫体重约 2g, 飞行速度约为 4m/s。

按飞行器空气动力学原理，较大的飞行器要求较高的飞行速度，且具有较大的翼载。若飞行物重量为  $W = mg$ ，翼面积为  $S$ ，则其翼载为  $\frac{W}{S}$ 。这一规律也适用于飞行动物。

设飞行动物的特征线尺度为  $l$ ，则  $W$  与  $l^3$  成比例， $S$  与  $l^2$  成比例，故

$$\frac{W}{S} \propto l$$

$$\therefore \frac{W}{S} \propto W^{\frac{1}{3}} \quad (4-1)$$

图 14-6 是观测到的若干种鸟类翼载随体重的变化，近似满足于(4-1)。

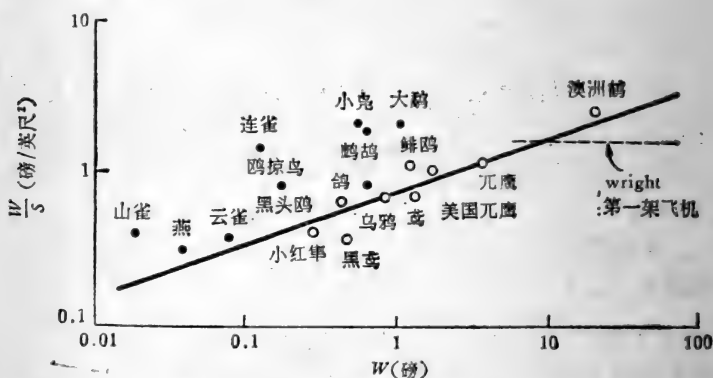


图 14-6 各种鸟类翼载与体重的关系<sup>[9]</sup>

Weis-Fogh 将蝙蝠、鸟类和昆虫的翼载作了比较，数据列于表 14-1。

根据 Greenewalt 的观测，飞行动物的翼面积  $S$  与体重  $W$  有如下关系

$$\frac{S}{W^{2/3}} = B \quad (4-2)$$

表 14-1 蝙蝠、鸟类、昆虫的翼载<sup>[4]</sup>

	$\frac{W}{S}$ (N/m <sup>2</sup> )
小蝙蝠	10—20
鸟类:	
大、中型鸟类	30—170
麻雀	20—50
蜂鸟	20—30
雨燕等	13—25
昆虫	
大的鞘翅目昆虫	12—40
大的膜翅目昆虫	8—44
大的双翅目昆虫	5—20
大的鳞翅目昆虫	4—12
中等鳞翅目昆虫	3—6
小型鞘翅目昆虫	1—6

$B$  是常数, 据现有观测资料,  $B$  的数值集中在三个值附近。若  $W$  以  $g$  为单位,  $S$  以  $cm^2$  为单位, 则  $B$  可取 25, 16 和 9 三个值, 分别相应于低、中、高三种翼载。

翼载和飞行的特征速度有关系。若升力系数为  $c_L$ , 那么,

$$W = mg = \frac{1}{2} c_L \cdot \rho U^2 S$$

$$\therefore U = \sqrt{\frac{2}{\rho c_L}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \quad (4-3)$$

这样, 若  $c_L = (c_L)_{\max}$ , 则  $U$  为失速临界速度; 若  $c_L$  取  $(c_L/c_D) = (c_L/c_D)_{\max}$  时的值, 则  $U$  为巡航速度。无论  $U$  是那个速度, 由 (4-3) 可知,  $c_L$  一定时,

$$U \propto \sqrt{\frac{W}{S}} \propto l^{\frac{1}{2}} \propto W^{\frac{1}{6}} \quad (4-4)$$

另一方面, 动物飞行所需要s的最小推力  $T_{\min}$  为:

$$T_{\min} = \frac{W}{(c_L/c_D)_{\max}} \quad (4-5)$$

故飞行所需的最小功率为  $P_{\min}$

$$P_{\min} = T_{\min} \cdot U \quad (4-6)$$

应用(4-5)(4-3),得

$$\frac{P_{\min}}{W} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho c_L} \cdot \left(\frac{c_L}{c_D}\right)_{\max}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \quad (4-7)$$

故当翼的  $\left(\frac{c_L}{c_D}\right)_{\max}$  一定时,

$$\frac{P_{\min}}{W} = \left(\frac{P}{W}\right)_{\min} \propto l^{\frac{1}{2}} \propto W^{\frac{1}{6}} \quad (4-8)$$

动物飞行所需的能量来自其肌肉,肌肉的性能限制了单位体重所能产生的功率,即  $\frac{P_o}{W}$  ( $P_o$  为肌肉所作的功率) 有一

最大值  $\left(\frac{P_o}{W}\right)_{\max}$ 。动物飞行的必要条件为

$$\left(\frac{P_o}{W}\right)_{\max} \geq \left(\frac{P}{W}\right)_{\min} \quad (4-9)$$

从而,限制了飞行动物的体重和大小。目前所观察到的飞鸟的体重约 12kg。

## § 5 悬停飞行的空气动力学原理

悬停飞行是这样一种运动,动物整体相对于周围空气的相对速度很小,接近于零,仅仅通过翼的水平运动,获得升力,使之凌空。显然,这种运动所消耗的能量比平飞高得多。据目前所知,自然界中能持续悬停的动物,最大的是蜂鸟,体重

约 20g。

悬停状态下，动物的翼应怎样运动才能获得必要的升力呢？Weis-Fogh<sup>[11,12]</sup> 作了精细的观察，发现了动物悬停的通用模式——正态悬停，它实际上是平飞扑翼运动的一种改型。

大家知道，为产生升力，翼必须相对于空气作水平运动。当动物整体没有水平运动时，只能依靠翼自身相对于空气的运动。正态悬停时，动物体轴是铅直的，翼在扑动时扭转，发生水平运动，并保证前缘的有效迎角处于高升阻比范围内。图 14-7 是正态悬停飞行时，翼的运动情况。

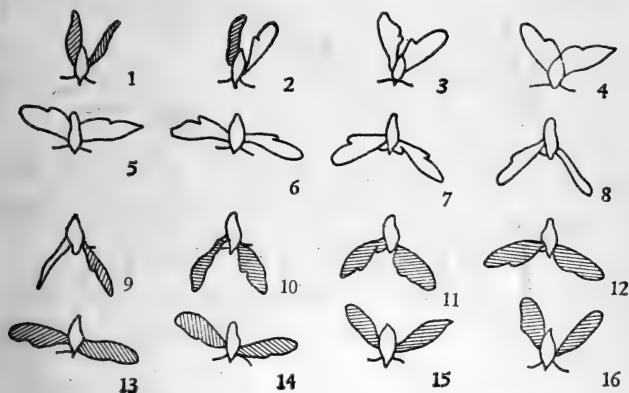


图 14-7 正态悬停飞行时，翼的运动<sup>[11]</sup>

设翼前缘相对于其转轴在水平面内的旋转角速度为  $\Omega$ ，翼面积相对于转轴的矩为  $J$ ，体重为  $W$ ，翼平均升力系数为  $c_L$ ，则根据观测到的数据，可算出悬停飞行时翼的升力系数。

$$\frac{1}{2} \rho \Omega^2 J c_L = W \quad (5-1)$$

Weis-Fogh 根据观测结果，计算了蜂鸟、蝙蝠等 17 种动物悬停飞行时的升力系数，雷诺数范围为 770—23,000， $c_L$  从 0.5—2.0。这说明，除特殊情况外，正态悬停不需要特别高的升力

系数。

Weis-Fogh 还发现,有的动物(如黄蜂),悬停飞行能力特别强。它们的飞行方式和正态悬停略有不同。如图 14-8 所示,起始时,两翼翼背相向,合并于背后,接着,以后缘为轴,翼旋转分开,达到某一角度( $2\alpha_0$ )后,后翼分开,作正态悬停飞行。从前缘分开到两翼完全分开,这一过程称为挥翼。这种悬停方式效率之所以特别高,就是因为挥翼过程加速了环量产生,从而提高了升力。

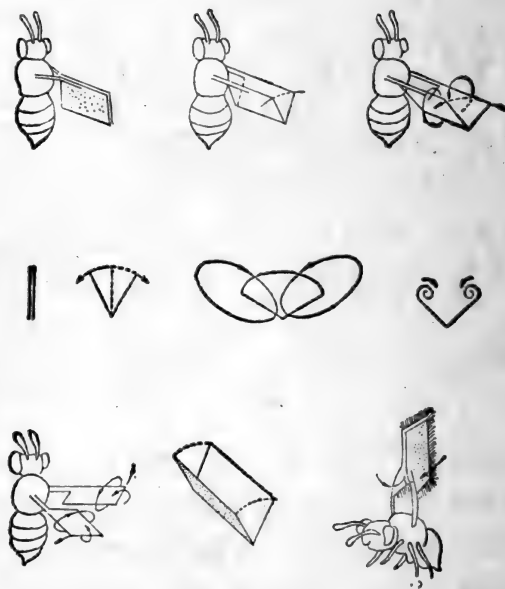


图 14-8 黄蜂悬停飞行的挥翼过程<sup>[11]</sup>

为说明此过程的机理,考察最简单的二维、无粘情况,如图 14-9 所示,(b)至(f)表示挥翼过程。按照空气动力学原理,二维情况下,以速度  $U$  在水平方向运动的物体上,升力  $L$  为:

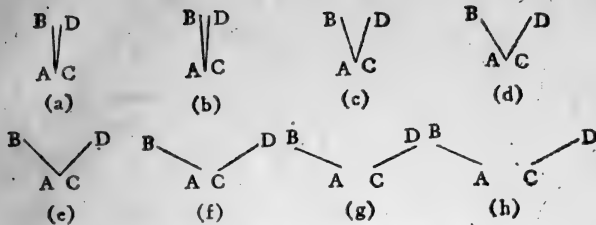


图 14-9 挥翼过程示意图<sup>[12]</sup>

$$L = \rho U \Gamma \quad (5-2)$$

$\Gamma$  为围绕运动物体的环量。按照 Kelvin 环量守恒定理，在静止的无粘流体中，总环量恒等于 0。但是，这并不排除物体一分为二时，在每一部分周围各自产生一个大小相等、方向相反的环量，当挥翼终止时，情况恰恰就是这样。如图 14-8 示，当两翼分开时，围绕每个翼形成一个环量，但二者之和为 0，从而产生升力。这就是产生升力的 Weis-Fogh 原理，这是一个航空工程中未曾遇到的新概念。

作为定量描述，取挥翼模型如图 14-10 示。角速度  $\Omega$  为：

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (5-3)$$

两翼以后缘为轴旋转时产生的环量为：

$$\Gamma = \Omega c^2 g(\alpha) \quad (5-4)$$

$c$  为翼弦长。为确定  $g(\alpha)$ ，以任一翼为例，作保角变换，从  $z$  平面变为  $Z$  平面，如图 14-11 示

$$\frac{dz}{dZ} = K \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{Z-a}{Z+1} \quad (5-5)$$

这里：

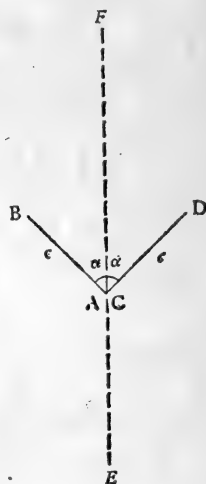


图 14-10 挥翼过程二维模型<sup>[12]</sup>

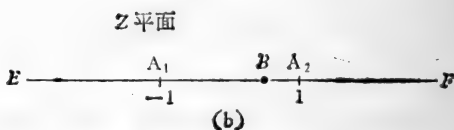
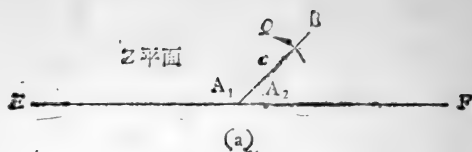


图 14-11 保角变换

$$a = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \quad (5-6)$$

$$\therefore ze^{i\alpha} = Kf(Z) \quad (5-7)$$

$$f(Z) = \int_{-1}^Z \left( \frac{1-Z}{1+Z} \right)^{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{a-Z}{1-Z} dZ \quad (5-8)$$

这里:

$$K = \frac{c}{f(a)} = cf_{\max}^{-1} \quad (5-9)$$

这样可得:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{QK^2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1} f^2(\xi) d\xi \\ g(\alpha) &= \frac{1}{\pi f^2(a)} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1} f^2(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

$g(\alpha)$  曲线见图 14-12。

当  $\alpha$  较小时,

$$g(\alpha) \simeq \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha} \quad (5-11)$$

其物理意义可以用图 14-13 所示的二维流场说明。挥翼起始



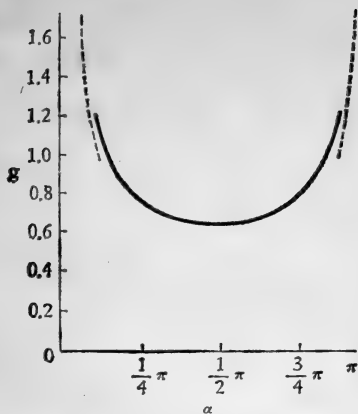


图 14-12  $g(\alpha)$  曲线<sup>[10]</sup>

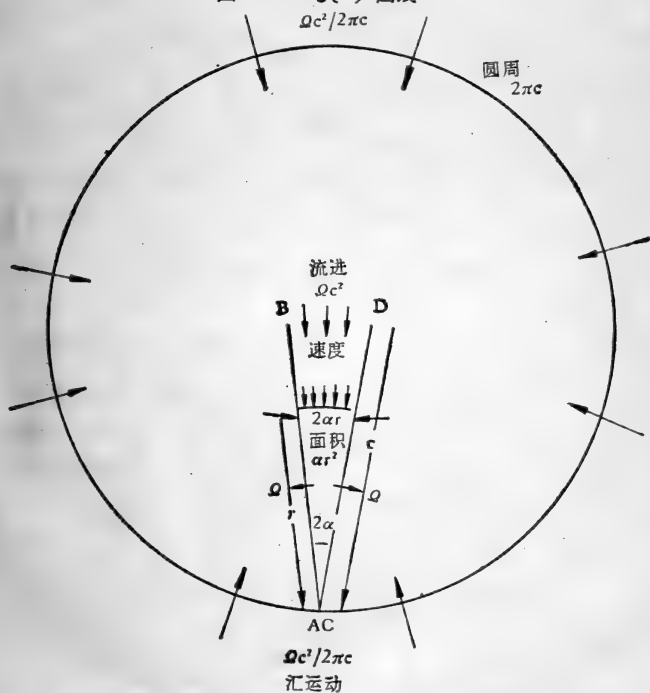


图 14-13 挥翼过程初始阶段的流场<sup>[10]</sup>

时,空气从四周经前缘吸入缝隙,离A(后缘)距离为 $r$ 处,单位展长上,流入空气体积为 $\alpha r^2$ ,故单位时间内流入的量为 $Qr^2$ ,它是通过弧 $2\alpha r$ 吸入的,故平均速度为: $\frac{Qr}{2\alpha}$ ,积分之,得前缘环量为 $\frac{Qc^2}{4\alpha}$ ,这就是(5-11)首项的物理意义。在缝隙以

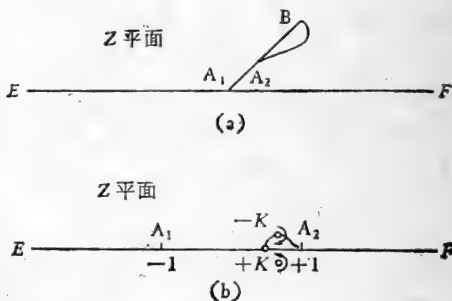


图 14-14 粘性效应<sup>[1]</sup>

外的区域,空气从各个方向流向 $BD$ ,因而在长为 $c$ 的距离上,迎流面积从 $2\pi c$ 缩小为 $2\alpha c$ ,此过程对环量的贡献为 $\frac{Qc^2}{2\pi} \ln\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$ 。这就是(5-11)第二项的物理意义。

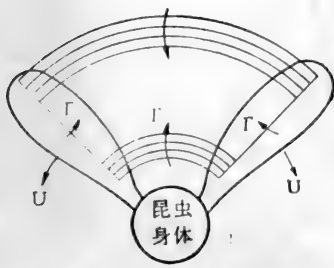


图 14-15 三维情况<sup>[16]</sup>

实际流体是有粘性的,由于粘性的作用,前缘形成分离气泡,旋涡从此脱落,如图 14-14 示。此时,环量除(4-4)外还有一个附加环量:

$$\frac{K}{\pi} \left[ \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m}{1-l} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{m}{1+l} \right) \right] \quad (5-12)$$

图中镜像点的坐标为: $Z = (l + im), Z = (l - im)$ 。它使

总的附着涡涡量增大,从而升力增大。

实际情况是三维的,除附着涡外,翼尖和翼根还产生自由涡,环量的分布如图 14-15 示。三维情况下的理论分析还有待研究。

### 参 考 文 献

- [1] Lighthill, J.: *Mathematical Biofluidynamics*, S. I. A. M., Philadelphia, 1975.
- [2] Lighthill, J.: *Swimming and Flying in Nature* vol. 2., Ed. by Wu, T. Y.-T. et al., Plenum Press, New York, 1975.
- [3] Weis-Fogh, T., Jensen, M.: *Phil. Trans. Roy. Soc. B*, **239**, 415, 1956.
- [4] Weis-Fogh, T.: 同[2].
- [5] Brown, R. H. J.: *J. Exp. Biol.*, **30**, 90, 1953.
- [6] Greenewalt, C. H.: *Smithsonian Misc. Coll.*, **144**, 46, 1962.
- [7] Tucker, V. A.: 同[2].
- [8] Pennycuik, C. J.: *J. Exp. Biol.*, **49**, 527, 1968.
- [9] von Kármán, T.: *Aerodynamics: Selected Topics in the Light of Their Historical Development*, Cornell University Press, 1954.
- [10] Lighthill, J.: *J. Fluid Mech.*, **60**, 1, 1973.
- [11] Weis-Fogh, T.: *J. Exp. Biol.*, **56**, 79, 1972.
- [12] Weis-Fogh, T.: *J. Exp. Biol.*, **59**, 169, 1973.

中科院植物所图书馆



S0011811

北京植物所

收到期	85.4.16.
来源	西单新
书价	4.20
单据号	0273418
开票日期	85.4.16.

58.17111/

shēng wù liú tǐ lì xué  
生 物 流 体 力 学 / 陶

1984.9

853页；32开

4.20元

本书从力学观点出发，用系统学  
其理论基础，较系统地介绍了60-  
展，并从方法学上阐明了生物流

I. II. III. 生物流体力学

IV. Q66 58.17111 Q6

1.4

58.17111  
474

### 注 意

- 1 借书到期请即送还。
- 2 请勿在书上批改圈点，折角。
- 3 借去图书如有污损遗失等情形须照章赔偿。

23862 0

京卡0701

封面设计：漆 平

统一书号：13031·2681

定 价： 4.20 元

本社书号：3685·13-10

科技新书目：78-46