

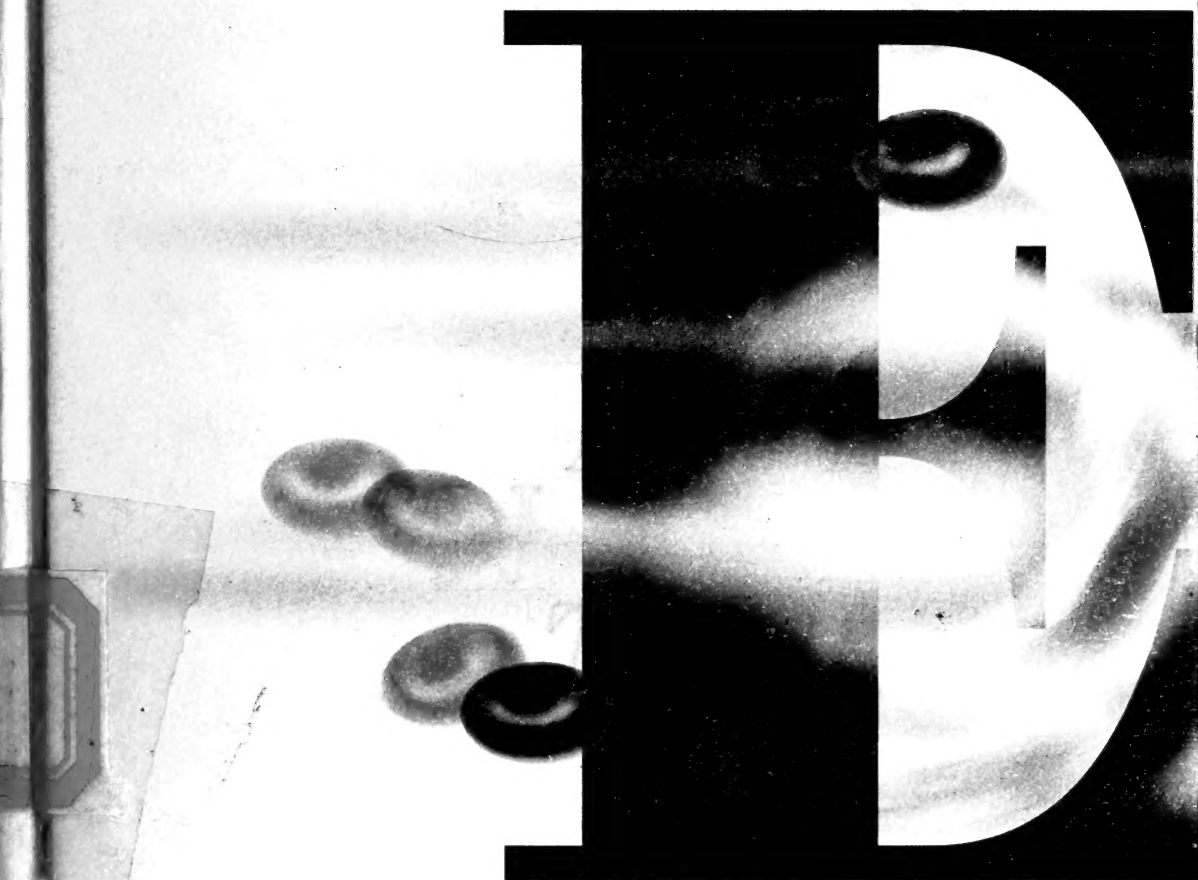


科 学 前 沿 丛 书

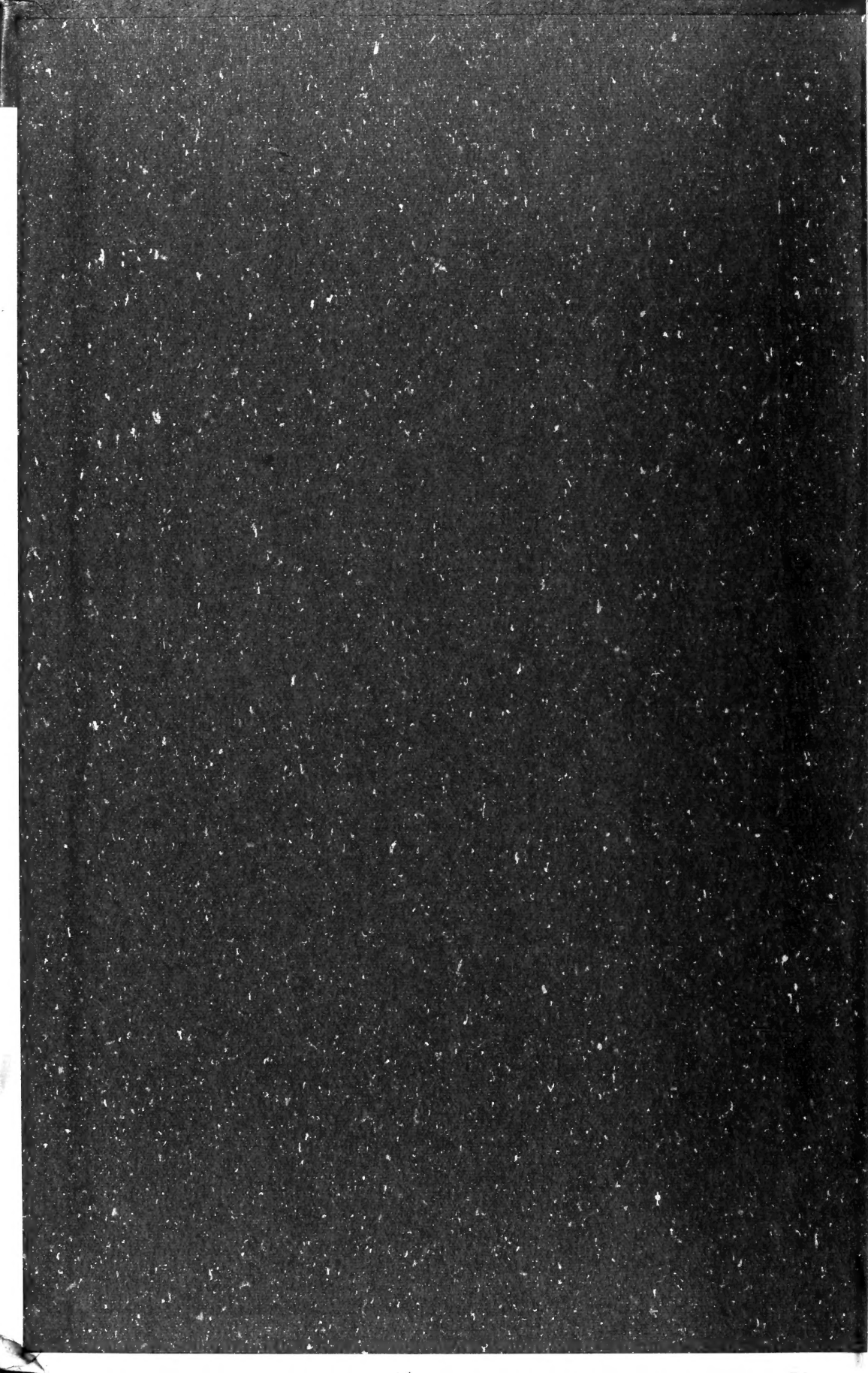
生物膜泡曲面弹性理论

Elastic Theory of
Surfaces of
Biomembrane-Vesicle

谢毓章 刘寄星 欧阳钟灿 著



上海科学技术出版社







中科院植物所图书馆



S0003569

58.1782
818

科学 前沿丛书

生物膜泡曲面 弹性理论

谢毓章
刘寄星 著
欧阳钟灿

上海科学技术出版社

27952

图书在版编目 (C I P) 数据

生物膜泡曲面弹性理论 / 谢毓章, 刘寄星, 欧阳钟灿
著. —上海: 上海科学技术出版社, 2003.12

(科学前沿丛书)

ISBN 7-5323-7215-4

I. 生... II. ①谢...②刘...③欧... III. 生物膜
—曲面—弹性理论—研究 IV. Q73

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 079051 号

责任编辑 毛文涛

上海科学技术出版社出版发行

(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)

上海新华印刷有限公司印刷 新华书店上海发行所经销

2003 年 12 月第 1 版 2003 年 12 月第 1 次印刷

开本 787×1092 小 1/16 印张 16.25 插页 4 字数 237 千

印数: 1—1 500 定价: 37.00 元

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题,
请向本社出版科联系调换

出版说明

科学技术是第一生产力。21 世纪,科学技术和生产力必将发生新的革命性突破。

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略,上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于 2000 年设立“上海科技专著出版资金”,资助优秀科技著作在上海出版。

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助。

上海科技专著出版资金管理委员会

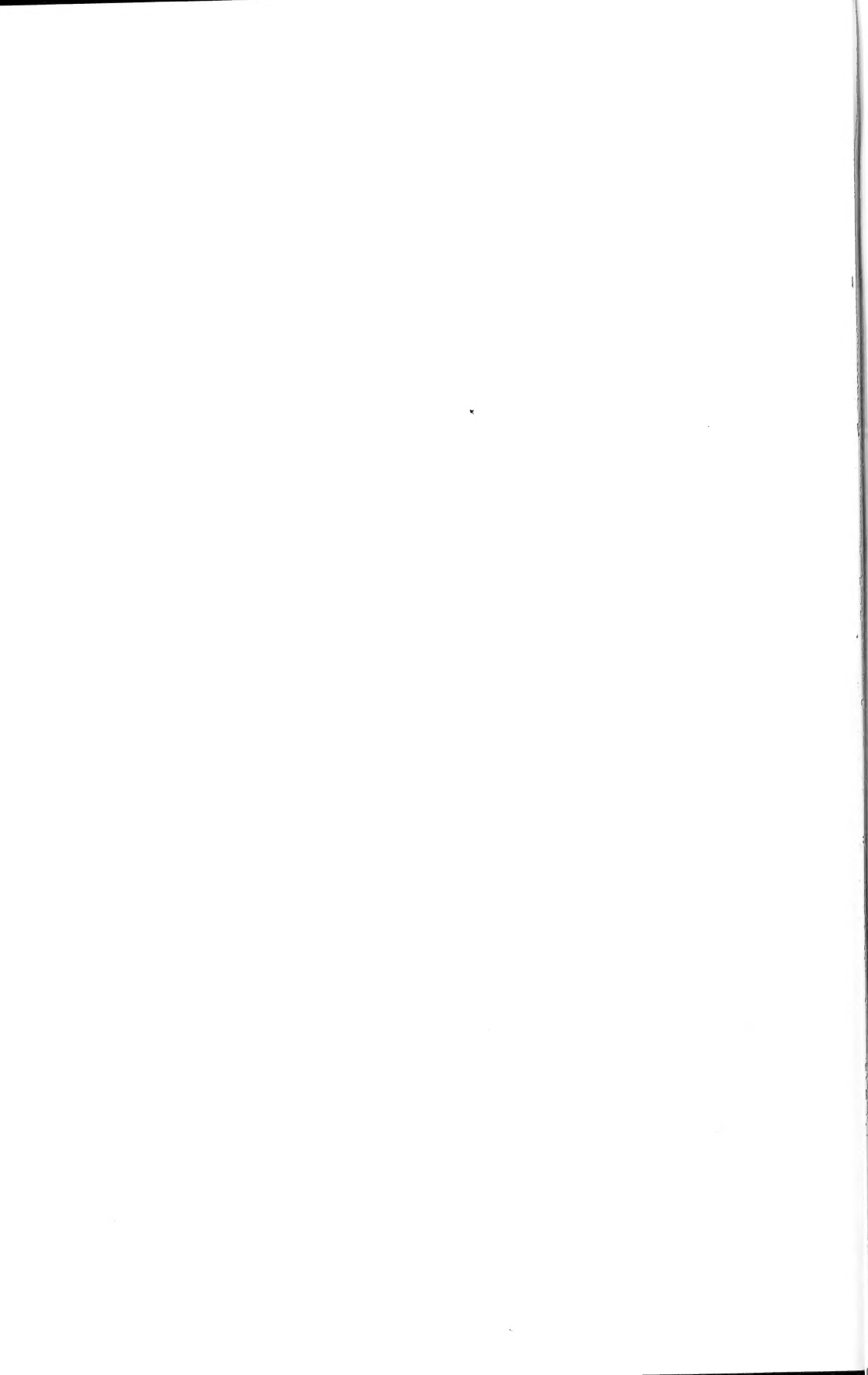


内 容 提 要

由各向同性材料形成的肥皂泡之类的膜泡一般都是圆球形的,而人类红细胞却呈现双凹圆盘形。这曾是一个令人困惑的难题。

本书总结了自引入液晶模型研究生物膜泡的形状以来生物物理方面已经取得的大量有价值的成果。本书第一章和第二章分别介绍了生物膜的液晶模型、张量和经典微分几何学;第三章介绍液体膜曲面弹性理论,提出了膜泡形状的普适方程式;第四章介绍了普适方程的一些特殊解,给出并分析了一些特殊形状的生物膜泡;最后一章介绍了倾斜手征性类脂双层膜理论。

本书由浅入深,阐述精辟,可供大学物理系和生物系高年级学生以及研究生使用,也可供相关研究人员参考。



《科学》前沿丛书》序

人类文明发展的长河正浩浩荡荡地流向又一个千年,在世界格局的综合国力竞争中,基础研究的发展水平已经成为一个民族的智慧、能力和国家科学技术进步的基本标志之一。

基础研究是人类对未知世界的探求,它在各门学科的前沿上展开,以认识客观世界的物质结构、各种基本运动形态和运动规律为己任,它的重大发现常常带来社会生产的革命性变化。

基础研究在科学前沿向未知领域迈进的每一步,都有赖于创新,创新是基础研究的灵魂,而创新需要很高水平的理论思维。正如 19 世纪的一位伟人所说,一个民族想要站在科学的最高峰,就一刻也不能没有理论思维。

自然科学的理论来自关于自然现象和探索实践认识的总结。这种总结通过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的过程,实现关于自然规律认识的飞跃,在人类认识自然的知识体系上编织出新的结点。这样的结点往往又是在新的高度编织下一个结点的支撑点。一个民族想要攀登到科学的最高峰,进行高水平的理论思维,既需要一批批科学家不懈地在科学前沿上探索,也需要他们不断地进行这种实现认识上飞跃的总结。

著书立说,对一个专题或一个领域的研究成果,进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的总结,使之系统化、理论化,是提高理论思维水平和持续创新能力的必须。在攀登科学高峰的历程中,一部好的基础科学学术著作常常能为众多继续向上攀登的人们提供一块坚实的平台。因此,出版好基础性研究领域的学术著作,是一件十分有意义的工作。

《科学》杂志的编者和出版者,自 1915 年《科学》创刊以来,始终以传播科学为己任,在办好刊物的同时,积极地参与出版科学著作这件有意义的工作。在 20 世纪的最后五年,《科学》的出版者——上海科学技术出版社推出了一套《科学专著丛书》,出版了 14 部专著,受到了科学界和出版

界的欢迎和好评。

我高兴地看到,在迎来 21 世纪之时,作为上述努力的继续,该社又推出这套《**科学**前沿丛书》,着重于从基础性研究的前沿交叉领域选题,出版学术著作。我期望,这套丛书的编者、作者和出版者能通力合作,通过自己的辛勤劳动,以一部部精心选题、精心著述、精心编辑、精心出版的著作,参与铺筑通向中国科学再度辉煌的大道!

周光召

(《**科学**》杂志编委会主编)

2001 年元旦

前 言

由各向同性材料形成的肥皂泡之类的膜泡一般都是圆球形的。另一方面,静止的人类成熟红细胞却呈现双凹圆盘形。如何解释这种双凹圆盘形曾是一个令人困惑的问题。1973年 Helfrich 教授根据红细胞处于液晶态这个观点,类比于层状相液晶,提出了一个描述液晶态膜泡的自由能密度表达式。根据这个表达式,应用数值计算,证实了双凹圆盘形膜泡的存在。1987年在 Helfrich 自由能密度表示式的基础上得出了一个液晶态膜泡需要满足的膜泡形状方程式。由于它是一个高阶偏微分方程式,至今还没有人从数学上对这个方程式进行过比较详尽的讨论,也未能提出这个方程式解的普适性质。目前唯一的办法仍然是设想一个具体形式的图形解,在代入方程式后看看能不能在一定条件下成为这个方程式的一个特解。经过努力,至今也有了一定数量的具体成果。

为了总结这方面已经获得的成果,1996年欧阳钟灿建议写一本题为 *Geometric Methods in The Elastic Theory of Membranes in Liquid Crystal Phases* 的小册子,并得到了新加坡世界科学出版社的同意,可以加以出版。当时我们仅仅做了一些粗略的分工。随后欧阳钟灿去了日本,从而难于随时进行讨论,并且拖延了完成全书的时间。1998年欧阳钟灿回国后,在刘寄星参加之下,匆忙地对稿件作了整理就付印出版了。因此,全书结构有欠完善,并且稿件中也有一些错误,我们深感歉仄。

在此,我们以英文版为基础进行修订,增加一些在英文版出版后出现的成果,出版一本原英文版的中文修订版,并简明地定名为“生物膜泡曲面弹性理论”,以代替原英文版的比较复杂的书名。中文版的主要内容基本上是英文版的中文译文。本书由谢毓章提供初稿,经欧阳钟灿进行修改而定稿。

谢毓章 清华大学物理系 中国科学院理论物理研究所

刘寄星 欧阳钟灿 中国科学院理论物理研究所

北京 2002年5月



目 录

第一章 液晶态生物膜简介	1
§ 1.1 液晶	1
1.1.1 神奇物质	1
1.1.2 取向有序	3
1.1.3 热致液晶的分类	4
1.1.4 溶致液晶的类别	6
§ 1.2 两亲分子和溶致液晶	8
1.2.1 两亲分子	8
1.2.2 两亲分子单层	9
1.2.3 分子胶束	10
1.2.4 相图	11
§ 1.3 生物膜的相变	11
1.3.1 流体镶嵌模型	11
1.3.2 类脂双层	12
1.3.3 类脂双层的相变	13
1.3.4 类脂双层的分类	14
§ 1.4 液晶生物膜的生物化学简介	16
1.4.1 链长效应	16
1.4.2 双键效应	17
1.4.3 离子条件效应	17
1.4.4 胆甾醇效应	18
1.4.5 生物膜的复杂性	19
§ 1.5 合成类脂双层和膜泡	20
1.5.1 制备合成膜泡用的类脂物	20
1.5.2 多层片状膜泡	21

1.5.3 单个双层膜泡	21
参考文献	22
第二章 张量和经典微分几何学简介	24
§ 2.1 张量	24
2.1.1 反变张量和协变张量	24
2.1.2 商定律	28
§ 2.2 空间曲线	29
§ 2.3 曲面	31
2.3.1 第一基本形式	31
2.3.2 曲面的法线和切面	34
2.3.3 第二基本形式	35
§ 2.4 张量的微分	36
2.4.1 克氏符号	36
2.4.2 协变微分和内禀微分	39
§ 2.5 与曲面有关的一些量	42
2.5.1 Weingarten 方程式、高斯方程式和第三基本形式	42
2.5.2 曲面上的曲线	44
2.5.3 曲面上曲线的法曲率	45
2.5.4 曲率线和主曲率	46
2.5.5 平均曲率和高斯曲率	48
§ 2.6 曲面上的二维微分不变量	50
2.6.1 标量场的梯度	50
2.6.2 曲面上矢量的散度和拉普拉斯算符	53
2.6.3 曲面上矢量的旋度	55
2.6.4 曲面上的面积元	58
2.6.5 一些微分不变量	59
参考文献	59
第三章 液体膜曲面弹性理论	61
§ 3.1 红细胞形状问题	61

3.1.1	细胞膜	61
3.1.2	细胞膜形状的高度可变性	63
3.1.3	解释双凹圆盘形状的难度	64
§ 3.2	液晶态流体膜的曲面弹性理论	64
3.2.1	液晶态的流体膜	64
3.2.2	Helfrich 处理方法	65
3.2.3	二维微分不变量的推导	69
3.2.4	从 Landau-de Gennes 理论看自曲率	73
3.2.5	从液晶角度看 Helfrich 弯曲能量	77
3.2.6	自曲率与弯电效应	78
§ 3.3	膜泡形状普适方程式	80
3.3.1	一些基本量的变分	80
3.3.2	普适形状方程式	87
附录	式(3.78)的证明	91
	参考文献	93
第四章	普适形状方程式的一些特殊解	96
§ 4.1	球形膜泡	96
4.1.1	球形膜泡的变形	96
4.1.2	三阶能量变分和球形膜泡的稳定性	100
§ 4.2	圆柱形膜泡	104
§ 4.3	对称椭球形膜泡	106
4.3.1	扁椭球形膜泡的约束条件	108
4.3.2	长椭球形膜泡的约束条件	111
4.3.3	对称扁椭球形膜泡的形状能	114
4.3.4	对称长椭球形膜泡的形状能	119
§ 4.4	克利福德锚环	121
§ 4.5	迪潘四次圆纹曲面	127
§ 4.6	双凹圆盘形膜泡	133
4.6.1	轴对称曲面的形状方程式	133
4.6.2	成熟红细胞	135

4.6.3	双凹圆盘形解的各种形状	137
4.6.4	双凹圆盘形解的变异	141
§ 4.7	具有恒定平均曲率的回转曲面和它的扩展曲面	142
§ 4.8	非圆截面柱面	148
§ 4.9	轴对称膜泡的欧拉-拉格朗日形状方程式	170
§ 4.10	双层膜的不稳定性和周期性形变	180
§ 4.11	非轴对称膜泡的一些数据	186
4.11.1	模型、软件和计算过程	187
4.11.2	主要结果	190
4.11.3	讨论	196
	参考文献	196
第五章	倾斜手征性类脂双层理论	200
§ 5.1	强手征性的倾斜手征性类脂双层的自由能表示式	200
§ 5.2	强手征效应下倾斜平衡和曲面平衡方程式	204
§ 5.3	螺旋面	207
§ 5.4	螺旋式绕带	208
§ 5.5	螺旋式扭曲带	212
§ 5.6	球形膜泡	217
§ 5.7	倾斜手征性类脂双层自由能普适公式	220
§ 5.8	其余弹性常数的影响	225
§ 5.9	高螺距与低螺距结构的倾斜类脂双层	229
	参考文献	236
	索引	238

第一章 液晶态生物膜简介

本书的目的是向读者介绍一下自 1973 年 Helfrich 教授根据液晶曲面弹性理论提出流体膜的定量理论以来在这方面已经取得的一些主要理论成果。为方便读者起见,在这一章先对最基本的所谓液晶态 (liquid crystal state) 生物膜作一些简单介绍。首先解释一下什么是不同于通常所谓的固态、液态和气态这三种物态的液晶态物质。构成液晶态物质的分子都是长形或扁形的大分子,也就是在结构上具有各向异性的大分子。目前所知道的液晶都是由有机分子构成的。像液态物质的分子那样,处于液晶态的分子没有位置有序性,但是它们的排列则具有取向有序性。由于温度改变而在一定温度范围内出现液晶态的系统称为热致液晶系统。由溶质和溶剂两种组元形成的液晶态系统称为溶致液晶系统。本章将简单地介绍一下两亲分子与水的系统,特别是处于液晶态的生物膜和生物膜的相变。在这部分讨论中将包括影响类脂双层相变的分子因素这一涉及生物膜的生物化学内容。最后将简单地介绍一下制备合成膜泡的方法。后面这部分内容对研究膜泡形状转变的实验工作者可能会有些帮助。本章的内容主要取材于几本大家熟知的书^[1]。本书中的许多图解都取自 Datta 所写的那本书中^[1]。

§ 1.1 液晶

1.1.1 神奇物质

自 1960 年以来已经出版了几本很好的关于“液晶”这一新的物质形态的书^[2, 3]。在诺贝尔奖获得者 de Gennes 所写的那本名著^[2]中,他提到液晶既优美又神秘。这种状态表明液晶同日常所知的处于固、液、气三

态的物质有着不同的特点。首次遇到液晶这个名词的时候,人们都会感到有些困惑:一个物体怎么能同时处在液态和结晶态这两种截然不同的状态?

为了解答这个问题,最好是简略地从其历史发展谈一谈。液晶是1888年植物学家 Reinitzer 发现的。他观测到胆甾醇苯酸酯 $C_6H_5CO_2C_{27}H_{45}$ (简称 CB) 晶体有两个“熔点”:在 145.5°C 时胆甾醇苯酸酯成为一种混浊的液体,继续加热到 178.5°C 时混浊液体突然会变成清亮的液体。当时人们还不知道一种纯粹的物质会处在混浊液体的状态。开始, Reinitzer 曾怀疑这是杂质引起的问题。但是即使他把 CB 高度纯化之后,“两个固定熔点”的现象仍然继续存在。这就使得“杂质观点”受到怀疑了。Reinitzer 当时建议,请物理学家 Lehmann 同几位化学家合作,对它进行系统的研究。结果发现,大量的物质都具有这种“两个固定熔点”的现象。实验证实:这些混浊的液体在光学上具有与晶体类似的双折射现象。从此以后,处在“两个熔点”之间的物质就被赋予“各向异性液体”、“仲晶体”、“介晶体”种种的名称。目前已经一致接受了 Lehmann 首先使用的“液晶”这个名称。这一新的物质状态同各种物质状态之间的关系见图 1-1。

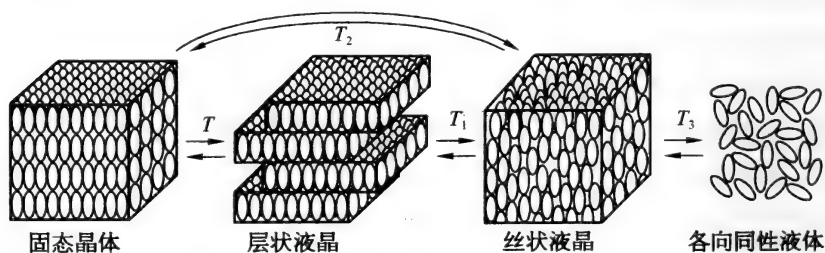


图 1-1 两种液晶态与固态和液态之间的关系

实验发现,并非所有物质都能处于液晶态^[2, 3]。液晶态可以出现在某些轴比在 $4:1 \sim 8:1$ 之间的由长分子构成的有机化合物。不过应该注意到,一些盘形分子也可以形成液晶^[3]。基本上可以说,分子几何形状上的各向异性是出现液晶态的基本要素。液晶可以像普通液体那样流动,但是它的其他一些物理性质是各向异性的。例如,像双折射和旋光性这些光学各向异性使它显出了结晶相的特点。

1.1.2 取向有序

为了理解液晶态的性质,可以先回顾一下晶体的点阵结构。晶体中,各个分子都是位于三维周期性的点阵上,这是一种具有长程位置有序的状态。很容易辨认出结晶态的 X 射线衍射图案呈点状布拉格反射,与之相反,各向同性液体中的分子就只有短程有序性。它们的 X 射线衍射显示出只有宽的、扩散的布拉格反射。在液晶中分子长程位置有序消失了,但它们的取向有序(orientational order)却具有长程性。也就是说,在宏观尺度上,从热平均来讲,分子的长轴取向都相同。因此,液晶的 X 射线衍射图案既不同于晶体衍射图案的点状结构,又不同于各向同性液体的图案,而是具有一些由于柱对称引起的环状结构。

要想说明液晶相的取向有序性需要引用两个物理量:分子的局域从优取向 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ 和有序的程度 $S(\mathbf{r})$ (\mathbf{r} 是液晶中的位矢)。 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ 称为指向矢(director),是一个单位矢量。 $S(\mathbf{r})$ 称为有序参数^[2]。取向场和有序参数场的同时存在反映了液晶态的长程取向有序性。有序参数 S 是度量分子长轴排列整齐程度的物理量,通常定义为

$$S = \int_0^\pi 2\pi P_2(\cos \theta) f(\theta) \sin \theta d\theta \quad (1.1)$$

式中 θ 为分子长轴的局域取向与指向矢 \mathbf{n} 之间的夹角, $f(\theta)$ 是对应于当地温度的分子取向分布函数, $P_2(\cos \theta) = (3\cos^2 \theta - 1)/2$ 就是二阶勒让德多项式。由于 $2\pi f(\theta) \sin \theta d\theta$ 正是与 \mathbf{n} 成 θ 角和 $\theta + d\theta$ 角的锥体内的分子份数,因此式(1.1)就是 $P_2(\cos \theta)$ 对所有分子取向的平均值。这里需要提醒读者的是:对于盘形分子(discotic molecule),指向矢可以取分子短轴(垂直于分子平面)的平均取向。

对于各向同性相,分子长轴的分布是无规则的,也就是说 $f(\theta) = 1/4\pi$; 从而式(1.1)给出 $S = 0$ 。在分子完全整齐排列的条件下, $f(\theta) = \delta(\cos \theta - 1)/(2\pi)$, $\delta(x)$ 是狄拉克 δ 函数,而 $S = 1$ 。从这两个极端情形就可以看出取 $P_2(\cos \theta)$ 的平均值作为有序参数的优点了。实际的情形是,在液晶态和各向同性态之间的相变温度 T_c 条件下, S 的数值在 0.3 到 0.4 之间;而在远低于 T_c 温度时, S 的数值大约为 0.8。相变理论中有序参数的变化反映了相变的性质。有序参数的数值可以通过光学、磁

学或核磁共振等等方法加以测定。

取向有序性的存在也表明液晶具有以指向矢 \mathbf{n} 为旋转轴的柱对称性。这些都是在隐含液晶分子具有镜面对称(也就是点群理论中的 $D_{\infty h}$ 对称)的假设条件下得出的结论。不过有些液晶分子具有空间螺旋对称性,也就是 D_{∞} 对称性。具有这种对称性的液晶在光学上具有二向色性,也就是说对偏振光中的一个分量的吸收大于对另外一个分量的吸收。这种分子具有旋光性,它们可以使偏振光的偏振方向发生旋转。要想区分液晶中这两种不同的对称性,在液晶相变理论中需要引进另外的有序参数——螺旋性有序参数(helicity parameter)。宏观上,螺旋性有序参数由媒质的宏观螺旋结构的螺距表现出来。本书中对具有 $D_{\infty h}$ 对称性的和对具有 D_{∞} 对称性的生物膜(biomembrane)都将有所讨论。它们将被分别称为流体膜(fluid membrane)和倾斜手征性膜(tilted chiral membrane)。不过,在本书的讨论中,将只使用螺距这个宏观螺旋有序参数而不引入微观螺旋有序参数。

1.1.3 热致液晶的分类

液晶态从组分上大体可以分为两类:热致液晶和溶致液晶。前者属于单组分系统而后者包含不止一个组分。生物膜这种类脂物和水系统是含有两个组元的溶致液晶。不过应该注意到,这样的分类并不是严格的,如在改变温度时溶致液晶状态可能发生变化。实际上,至今对液晶态相变的认识主要还是从研究热致液晶的相变得来的。因此,在下面的讨论中将更多地侧重于热致液晶。

根据 Friedel 引用的分类法^[4],热致液晶(thermotropic liquid crystal)可以分成三个亚类:丝状液晶(nematic liquid crystal)N,螺状液晶(cholesteric liquid crystal)Ch 和层状液晶(smectic liquid crystal)S。它们是以具有不同焓值的液晶分子的排列方式加以区别的。图 1-2 说明了这种区别。从图上可以看出,螺状液晶的分子具有螺旋式的排列,因此也常常被称为扭曲丝状液晶(TN)。

三种不同热致液晶相的名称本身就包含着它们各自结构的特征。“丝状”表示“线段”形式,它来源于整体液晶中出现有线段状的内错。在实验观测中,从这种线状的结构就可以认证出这种丝状相的存在。

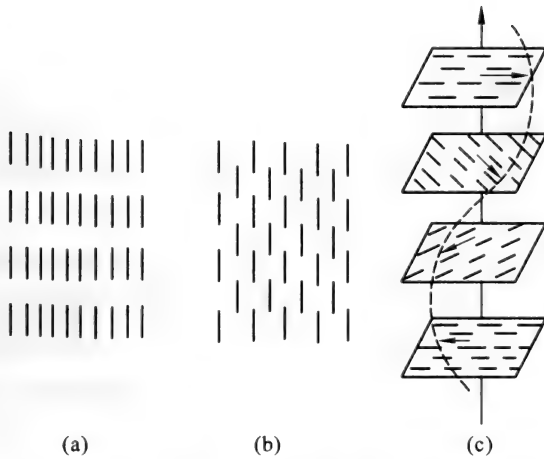


图 1-2 热致液晶态

(a) 层状相; (b) 丝状相; (c) 螺状相。

丝状液晶具有一定程度的长程有序性,但是不存在长程平移有序性。 N 相具有 D_{∞} 对称性,它的局域对称轴[指向矢 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$]在媒质中可以缓慢而平滑地从一点改变到另外一点。指向矢的改变主要是受边界条件、向错的分布以及电场或磁场之类外场的影响产生的。如果不存在这些有影响作用的因素,丝状液晶中的指向矢将保持均匀一致。

如果构成液晶的分子是手征性的,或是在丝状液晶中掺进了一些手征性分子,那么在较低的温度条件下,丝状液晶可以改变成螺状相液晶。其中指向矢 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ 的空间变化会引发一个具有长程有序的周期性螺旋结构。如果螺旋轴沿 z 轴方向,这个螺旋结构就可以用式(1.2)表示。

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = [\cos(2\pi z/p), \sin(2\pi z/p), 0] \quad (1.2)$$

式中 p 是螺旋结构的与温度相关的螺距。当温度升高到一定的中肯值 T_{ChN} 时,螺距趋于无限大。这时指向矢量场变成一个与 x 轴方向平行的均匀场,液晶从而呈现出丝状相的特征。因此,螺距是空间螺旋性这一新增加的有序度的量度。 T_{ChN} 可以用来度量从 Ch 到 N 的相变。因此,丝状相可以分成两类:一类不含手征性分子,而且也不能变为螺状;另一类则含有手征性分子而可以处于螺状相。这样需要引用两个名词来区别它们:通常的丝状(N)相和手征性丝状(N^*)相。在下面的讨论中会经常用

一个星号(*)来表示手征性特征。N相的对称性是 $D_{\infty h}$,而 N^* 的对称性则是 D_{∞} 。在没有螺旋结构的丝状相,事实上无法用指向矢量场来区分N和 N^* ,只有测量它的旋光性才能确定它是N还是 N^* 。

手征性是生物系统中最重要的性质之一,因此有必要对螺状相了解得更深入一些。但是,某些螺状液晶在形貌上不是绕一条单一的轴发生扭曲,而是在短距离内可以绕两条轴发生扭曲,从而形成一个具有整体三次对称性的扭曲结构的三维点阵。这种亚螺状相出现在螺状相和各向同性相之间大约 0.5°C 的范围内,并形成具有数量级在300 nm的超短螺距的螺旋结构。这一亚螺状相称为蓝相(blue phase),它是由于扭曲点阵引起的布拉格反射呈蓝色而得名。它的点阵参量同螺旋的螺距在同一数量级。

在层状相中,分子以单个分子的厚度形成分子层。Friedel把这个相命名为“层状相”,隐含着它与肥皂膜相类似^[4],肥皂膜也是成层的。它与肥皂膜的差别在于它每一层中的分子都是纵向平行的。因此,对每一层都可以像丝状相和螺状相那样规定一个指向矢 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$,不过还要增加具有一维周期性的排列。如果指向矢 \mathbf{n} 与层面垂直,那么这个亚相称为层状A相(S_A)。如果 \mathbf{n} 与层面相倾斜,就成为另一个称为层状B相(S_B)的亚相。如果除去倾斜这一特征之外,分子还是手征性的,那么每一层的指向矢量场都将绕层面法向旋转,从而形成螺旋结构。这种情况又引起了另一类称为倾斜手征性层状 C^* 相(S_C^*)。至今已经找到有六种以上的层状亚相(subphase of smectic liquid crystal),由于本书感兴趣的是液晶态的生物膜,因此就只介绍上面所说的三种层状亚相,并且在图1-3中列出了它们的部分图形。

1.1.4 溶致液晶的类别

影响热致液晶相变的只是液晶的焓。对于多组元的溶致液晶(lyotropic liquid crystal),影响它们相变的因素有多个。即使是最简单的生物膜那样的由两亲分子和水形成的具有两个组元的系统的相变现象也是非常复杂的。可以说,至今人们对溶致液晶相变的认识还达不到对热致液晶系统相变那样的程度。不过下面这种对溶致液晶系统的粗略分类仍然是目前一般所承认的:片状(L)相(lamellar phase)、立方(C)相

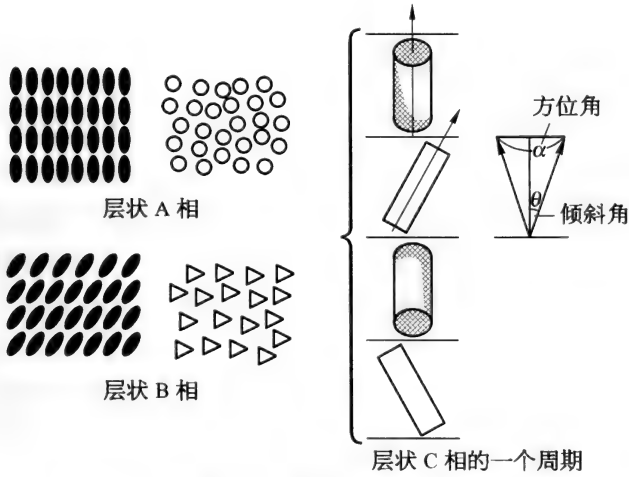


图 1-3 层状液晶亚相

(cubic phase)、六角(H)相(hexagonal phase)和分子胶束相(micelle phase)。图 1-4 是这些相的示意图。

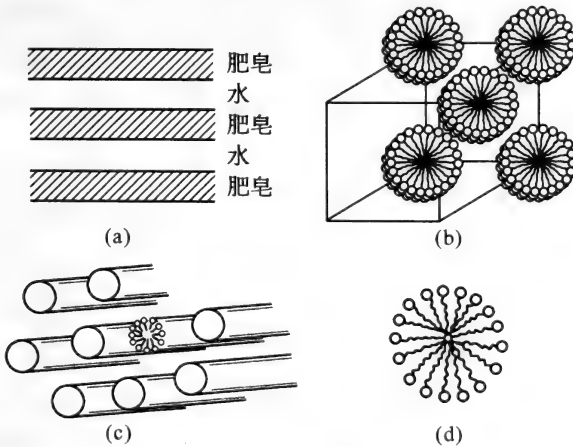


图 1-4 溶致液晶态

(a) 片状相; (b) 立方相; (c) 六角相; (d) 分子胶束相。

这些相的细节将在下一节中进行讨论,在这里只指出一点:图 1-4 中各相之间的相变取决于水含量的改变。当水含量缓慢改变时,两亲分子系统会引起惹人注目的相变,显示出所谓的溶致液晶性。

§ 1.2 两亲分子和溶致液晶

1.2.1 两亲分子

在这里主要关注的是把溶致液晶看做生物膜的这个简单模型：一个两亲分子(amphiphile)和水的系统。两亲分子和表面活性剂都是如图 1-5 所表示的那样同时具有极性部分和非极性部分。

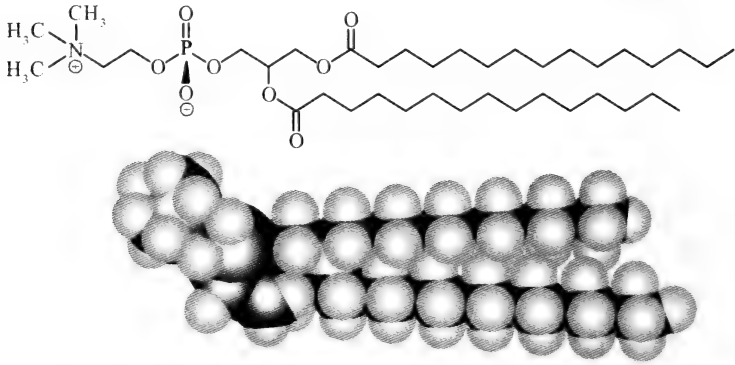


图 1-5 具有两条烃链(非极性部分)附着在单个头部极性基的两亲分子示意图

关于两亲分子的材料有两本经典著作,它们分别为 Adamson^[5]和 Tanford^[6]所著。比较近期的关于两亲分子物理的评论有 Meunier, Langivan 和 Boccara 编辑的 1987 年在 Les Houches 举办的讨论会的会议录^[7]。不过,在很早以前 Hartley^[8]就提出了“两亲性”这个名词来描述某些类型的分子在溶液分界面被吸收或者形成分子胶束的趋势。它表示在水或其他极性溶剂中以及在油或其他非极性溶剂中都可以形成均匀溶液的天然能力。十六烷基硫酸钠 $C_{16}H_{23}OSO_3^-Na^+$ 可以看做是所有两亲分子的典型。其中非极性的十六烷基脂肪链是疏水(亲脂)的,而极性的硫酸钠离子团则是亲水的。两亲分子的两个组成部分在水或其他溶剂中的溶解度差别很大。在上面这个例子中,硫酸钠离子团几乎可以无限地溶解在水中,而十六烷基部分在水中的溶解度则比在大多数非水溶剂中的溶解度要低得多。这一独特的性质引起了在溶液中出现不同的两

亲分子聚集体。关于这一点将在下面几个小节中加以讨论。

1.2.2 两亲分子单层

当水中两亲分子的浓度很低时,一定数量的分子将形成两亲分子单层(amphiphilic monolayer)。两亲分子单层成为水的主体和水表面之间的分隔界面。这个分子单层中的分子的非极性尾链由于它的疏水特性将指向远离水的方向。Gibbs^[9]在一个世纪以前曾在化学物理学中把这种现象当做一个二维效应处理。两亲分子和水的界面具有比纯水表面低的表面张力或能量,于是在图 1-6 的假想实验中,表面上的浮标为了降低总的表面能将自动向右方移动。

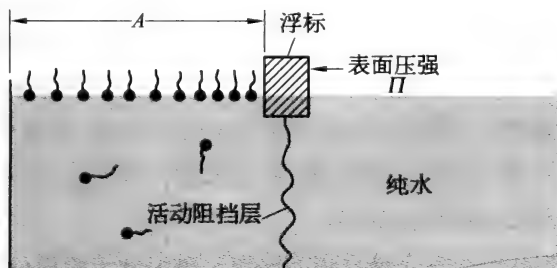


图 1-6 两亲分子单层表面压强的假想实验

在图 1-6 的假想实验装置中,为了保持浮标驻立不动,需要施加一个与浮标和界面的接触线长度成正比的力。这个力可以看做是一个二维压力。根据 Langmuir^[10]典型的压强-面积等温线,可以用一个模拟三维真实气体方程式的二维范德瓦耳斯方程式

$$(\Pi + a/A_0^2)(A_0 - b) = k_B T \quad (1.3)$$

来表示。式中 Π 是所施加的旁压强, A_0 是每个两亲分子所占有的平均面积, k_B 是玻尔兹曼常数, T 为绝对温度, a 和 b 是涉及分子间吸引力(范德瓦耳斯力)和两亲分子有限大小的常数。实际上,这是一个经验公式。 $\Pi(A_0, T)$ 的一些精细结构曾被解释为分子取向有序效应^[11, 12]。换句话说,两亲分子单层中的液晶态的性质和它的焓及其几何量(A_0)有关。如果把两亲分子单层看做是一种溶致液晶相,那么取向序就取代了热致液晶中的指向矢。因此,两亲分子既可以是溶致的,也可以是热致的。这

是两亲分子和水的系统的独特特征。

1.2.3 分子胶束

对于处在与溶液相平衡的单层,吉布斯指出,旁压强 Π 是周围压强 P 、温度 T 和溶液中两亲分子的化学势 μ 的函数。物理化学普遍原理指出:

$$\mu = \mu_0 + k_B T \ln X \quad (1.4)$$

式中 X 是两亲分子在大块溶液中的活性,而 μ_0 则表征分子的两亲性质。在低浓度条件下, X 与两亲分子在大块溶液中的浓度 c 成正比。式(1.3)和式(1.4)合起来表明, Π 随 c 的增大而变大。不过实验指出,只有当 c 低于某一临界分子胶束浓度(critical micelle concentration, CMC)时, Π 才随 c 单调增加。在临界分子胶束浓度,单层中两亲分子的化学势将达到极大值并且等于某一聚集相的化学势。此时 μ 和 Π 都达到极大值,并且具有固定的数值。两亲分子这时将进入另一个相,形成分子胶束。这时只有分子的可溶(或极性)部分暴露在溶液中,同时它的不可溶部分埋藏在聚集体的深处(参考图 1-4)。

分子胶束相有一些令人感兴趣的问题。决定分子胶束(micelle)的大小和它的形状的物理根源是什么?读者在 Israelachvili 所写的一本书中^[13]可以找到一些比较详细的答案。但是分子胶束的形状仍然是一个尚待解决的问题。在这里愿意对这个问题提出一些新的看法。现在先对图 1-4 中的分子胶束相进行一个粗略的分类。在很低的水与两亲分子比的条件下,相邻片层中两亲分子的极性部分将互相面对面地形成堆积双层片状体,如图 1-4(a)所示的片状相。这也就是清洁剂工业中所谓的整齐肥皂相(neat soap phase)。它与层状液晶(图 1-2)非常相像。这也说明了为什么 Friedel^[4]使用了层状液晶这个名词。Smectic 的希腊文 $\sigma\mu\eta\gamma\mu\alpha$ 就是指肥皂。

在稍微高一些的水与两亲分子比(水的比例仍然低于 50%)的情况下,片状相成立方相。球形的聚集体配置成立方形[图 1-4(b)]。在中等的水与两亲分子比的条件下,两亲分子形成六角形排列的两亲分子柱[图 1-4(c)]。在相对高的水与两亲分子比的条件下,形成在水中无规分布的孤立球形分子胶束,称为分子胶束相。

把分子胶束相稀释到 CMC 点时,可以得到一个均匀的两亲分子水

溶液,并且在空气与水的分界面处形成一个两亲分子单层。

1.2.4 相图

溶致液晶中的相变主要受温度和浓度的影响。至今大部分关于溶致液晶的实验研究都是设法建立水中含有一定数量的两亲分子的相图(phase diagram)。把相图描述为温度和水与两亲分子比值的函数。典型的例子就是 Skoulius 得到的肥皂相图^[14]。图 1-7 是 Skoulius 结果的重绘图。

从相图上可以看到,在每一个亚分子胶束相中,除稀释效应外,还存在一个临界温度 T_c 。温度在 T_c 以上时,系统处于溶致液晶相,也就是两亲分子的碳氢尾链比较柔顺,或者说是类似流体。相反,当 $T < T_c$ 时,碳氢尾链相对刚硬而类似固体,同时两亲分子集体进入凝胶相(gel phase)。重要的一点是,要想保持生物膜(假设是两亲分子和水系统)处于实用的状态(假设是在液晶态),就需要使它处在一定的温度范围之内,以便它能保持在水当中。

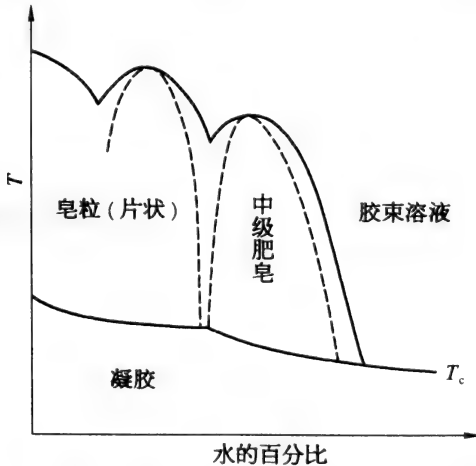


图 1-7 Skoulius 得到的简单肥皂水相图^[14]的示意重绘图

§ 1.3 生物膜的相变

1.3.1 流体镶嵌模型

现在把注意力放到生物膜中的溶致液晶态。关于生物膜的图像,

一般被接受的是 1972 年 Singer 和 Nicholson 提出的流体镶嵌模型 (fluid mosaic model)^[15]。图 1-8 是它的示意图。把生物膜简单地看做是两亲类脂双层,其中类脂分子像普通液体分子那样可以在膜表面上自由移动,同时蛋白质分子和酶分子则嵌在类脂双层之中。有一些蛋白质分子和酶分子可以在整个类脂双层中移动,沟通着细胞的内部和细胞周围的环境。其中的一些分子也可能参与了输运过程。另外一些蛋白质分子和酶分子则部分地埋置在双层之中,起着别样的生物功能。在流体镶嵌模型中,埋置的蛋白质和酶可以有相当大的流动性。

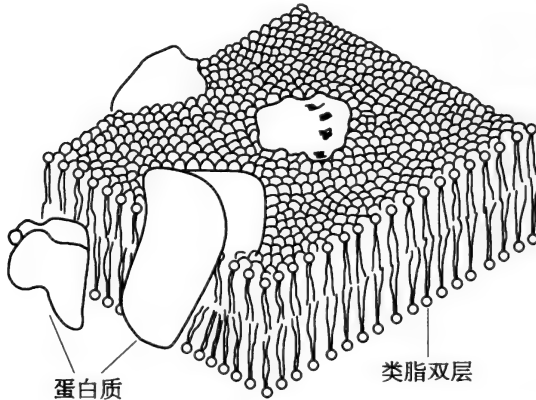
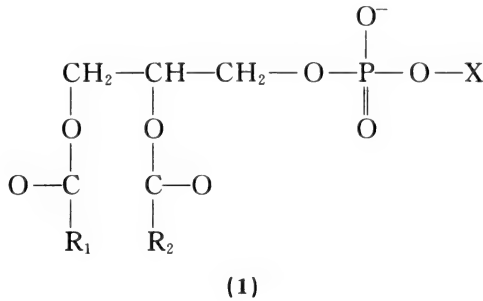


图 1-8 Singer 和 Nicholson 提出的生物膜流体镶嵌模型

1.3.2 类脂双层

生物膜模型中的类脂分子必须组成一个双层,其中亲水的极性头部把疏水的尾链(烃链)从膜周围的水环境中屏蔽起来。应该注意到,生物化学家所谓的“类脂物”是指那些高度溶于有机溶剂,但只能略微溶于水的的所有来源于生物的有机分子。但是生物膜中的类脂物则指的仅仅是各种磷脂、乙二醇类脂和胆甾醇。磷脂和乙二醇类脂都只稍微溶于水,而胆甾醇则不溶于水,而且生物膜中磷脂双层内胆甾醇的含量可以达到胆甾醇分子数和磷脂分子数成 1:1 的程度。因此,把生物膜处理作磷脂(两亲)和胆甾醇(非两亲)混合而成的类脂双层(lipid bilayer)同前面所讨论的两亲双层并不太一样。可以想像到,在一定限度之内把生物膜看做液晶膜可以表现出溶致介晶性。大多数生物类脂物有两个烃链附着在一个单独

的极性基团头部,其中大部分是可以用下列化学式表示的磷酸甘油酯^[6]。



其中 R_1 和 R_2 是烃链,而 X 是极性基团的头部。这类类脂分子只有当它们的烃链很短时才形成小的分子胶束。那些具有正常长度的烃链(大约在十个碳分子的长度)在水中大多形成双层结构。实际上,把生物膜看做类脂双层主要是由于构成它们的磷脂分子具有两条烃链。从理论上说为什么双链磷脂可以很容易地形成双层,仍然是一个尚未解答的问题。

1.3.3 类脂双层的相变

在实验方面,当把水加进纯磷脂的时候,样品会膨胀而形成不同的液晶相,因此类脂物也称作膨胀两亲分子(*swelling amphiphile*)。Luzzati 和他的同事们曾经用小角度 X 射线衍射技术广泛地研究过类脂物与水系统的液晶结构^[16]。所得到的结果同前面关于分子胶束相的相变那一节所谈的结果基本相同,不过具有一些另外的特点。

在膨胀类脂系统中,添加水可以使类脂弥散而同时并不破坏它的有序聚集结构。这也许可以用来说明形成洋葱头式的闭合多层双层结构。这个结构在不破坏单个双层的条件下就不能再分了。实际上,可以应用诸如超声波之类的技术把多层结构破解成小的可溶粒子,以形成单壁(或单个双层)膜泡。这样形成的粒子就是闭合的泡,也就是单个双层的闭合结构^[17]。关于制备膜泡的详情将在下一节再讨论。实验表明,从热力学角度来看,膜泡是聚集磷脂的有利状态。对于一定的类脂物和溶剂,膜泡具有近乎均匀的大小和形状。这些特点使人们能够对生物膜进行物理的和几何的研究。这也就是下面所要讨论的一些内容。

两亲分子和水的系统的各种液晶相与系统的水浓度和焓直接相关。

由磷脂、乙二醇类脂和其他两亲分子形成的双层,在一定的类脂相转变温度 T_i 可以经历一个从凝胶(或固)态到液晶态的吸热预转变。类脂物相变温度与类脂分子的酰基链长有关。例如,对于在两个位置具有相同酰基链的磷脂,当每一条链的链长增加两个亚甲基单位时, T_i 大约要增加 14°C 到 17°C 。Chapman 和他的同事们所作的微分扫描量热测量^[18] 结果的基本特征示意图见图 1-9。

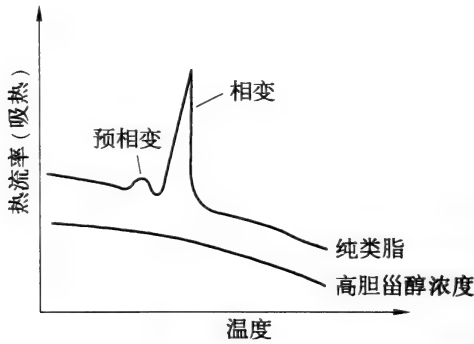


图 1-9 纯类脂双层在 T_i 处微分扫描量热测量结果示意图

在类脂双层中胆固醇的掺杂量增加后,两个相变都消失(下面一条曲线)。

从图 1-9 可以看到,纯类脂双层在 T_i 存在一个吸热的预相变和一个靠近 T_i 的主要相变。不过,在双层中增加胆固醇的掺杂量时,两个相变逐渐消失。这一点显示出,真实的生物膜并不是处于理想的溶致液晶态。

1.3.4 类脂双层的分类

类脂双层的液晶态被命名为 L_α 相, L 代表溶致液晶的片状相。在这个状态,类脂分子的两条烃链非常柔顺,而且平均起来是处在与双层表面相垂直的取向上(参考图 1-10)。如果把链的取向方向作为指向矢的取向,那么简单地讲, L_α 相就是热致液晶中的层状 A 相。

类脂双层的固态相称为 L_β 相,其中的类脂分子在双层平面中排列成准六角形阵列。它们的两条烃链充分伸展而更具刚性,而且全部都处于横向位形(图 1-10)。这个相与热致液晶中的层状 B 相对应。下标“ α ”和“ β ”代表在相应相中烃链的示意画法。

类脂双层还有另一个固相。在这一固相,类脂分子与双层平面法向

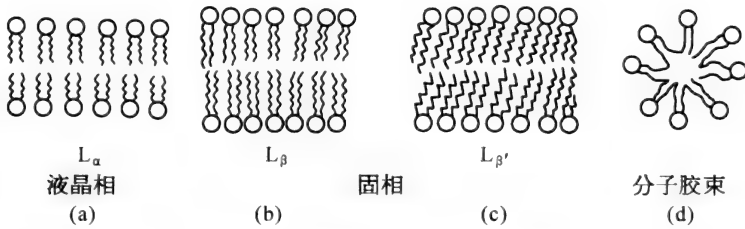


图 1-10 类脂双层各种相的示意图

(a) 液晶相双层(L_α); (b) 固相双层(L_β); (c) 倾斜固相双层($L_{\beta'}$); (d) 分子胶束。

成一倾角(图 1-10)。这个特殊相名为 $L_{\beta'}$ 相,它在磷脂酰绒膜中经常出现。Janick 等^[19]提出,这种分子的倾斜来源于它的头部基团的特征取向。

类脂双层的相变更为复杂。例如,图 1-9 中在有序无序这一主相变之前的微小吸热相变表示一个在相变前的 $P_{\beta'}$ 相,X 射线衍射之类的实验测量指出,它具有一个周期约为 12~16 nm(相当于搁置 12 到 20 个分子的宽度)的皱波结构^[19]。鉴于这种搁置方式的几何形式,这个相也被称作皱波相(图 1-11)。至今对于在 $P_{\beta'}$ 相中形成长程一维有序的机制尚不清楚。在纯类脂双层中它似乎来源于类脂-类脂头部基团取向的合作变化。当存在有其他类脂时,可能是它们干扰了长程有序分布。应该注意到,当

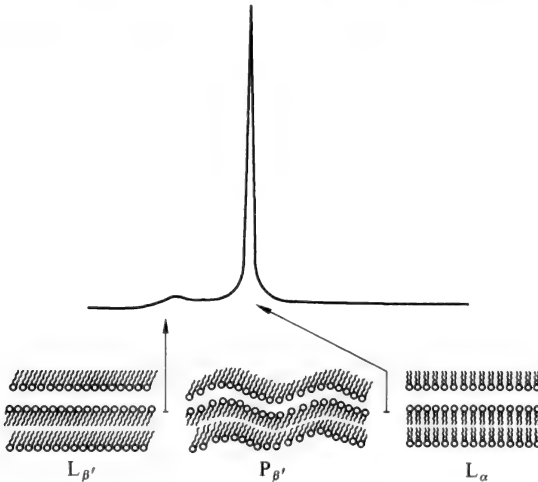


图 1-11 相变前的皱波类脂双层($P_{\beta'}$)

增加胆甾醇含量时,相变前的 P_{β} 相似乎是被抑制了。类脂双层形成皱波结构的理论至今还是生物膜物理学中的一个具有重大挑战性的课题。

除 L_{α} , L_{β} , $L_{\beta'}$ 和 P_{β} 相以外,类脂双层还可以存在更复杂的面间类脂(IL)相^[20]。这个相存在于固相区域和液相区域之间(图 1-12)。IL 相很难同已知的热致液晶中的任何相相联系,因此在类脂双层物理学中它还是一个完全未解决的问题。

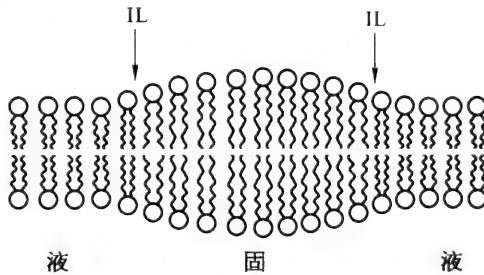


图 1-12 在固相区和液相区之间的
面间类脂(IL)相截面示意图

§ 1.4 液晶生物膜的生物化学简介

1.4.1 链长效应

在这里无意对膜的生物化学进行全面的评述,只准备讨论一下涉及在膜的弹性理论中对生物膜相变行为有影响的一些分子特性,特别是链长效应(effect of chain length)。

首先必须强调,大多数生物类脂化合物具有两条烃链,只有很少一些仅仅具有一条烃链,而且生物类脂物的烃链都很长,其中只有很少烃链少于 15 个碳原子。通常,生物类脂物的烃链大约有 20 个碳原子。具有 n 个碳原子的饱和烃链的链长可以用 Tanford 公式^[6]来进行估算:

$$l \leq l_{\max} = (0.154 + 0.1265n) \text{ nm} \quad (1.5)$$

从这个公式可以得出,具有 24 个碳原子的烃链的长度大约为 7 nm。这就给出 L_{β} 相双层(图 1-12)的厚度和流相的厚度应该小于 7 nm。对实

实际的蛋黄磷脂胆碱双层厚度的测量得到的是 $d = 2l = 5 \text{ nm}$, 完全在式 (1.5) 估计的范围之内。另外还找到, 在同样的类脂双层中, 每一个头基团的表面积大约为 0.6 nm^2 , 也就是每条烃链是 0.3 nm^2 。这一每个头基团的面积数值大于密堆积链头基团的面积 0.21 nm^2 [6]。从这些实验数据出发, 根据化学理论可以对烃链的轴比值 4.8 进行核对。令人注目的是, 生物类脂物的轴比值刚好是在本书 § 1.1 中所指出的、可以形成液晶态的分子轴比值的范围之内。这也是令人相信生物膜可以存在于液晶态的一个理由。

1.4.2 双键效应

生物膜中的类脂物具有一个非常普遍的特点——存在双键 (double bond), 也就是烃链的不饱和性 (unsaturation in hydrocarbon chains)。在 1.3.2 小节中提出的分子式为式 (1) 的磷酸甘油酯的 R_1 链多数是饱和的 [即单键 (single bond)] 脂肪酸基团, 而 R_2 是不饱和的 (即包含一些双键) [21]。这些不饱和双键通常导致烃链成顺式聚集 (cis-packing) (图 1-13)。顺式双键形成一个永久性的链环, 使得类脂双层中每一条烃链的实际面积都比密堆积的面积要大。这一点从上一小节当中提到的数据就可以看出。同时, 这也使得膜中液体能够保持在流体状态的温度比饱和性链条件下的液体保持流体状态的温度 T_f 要低。

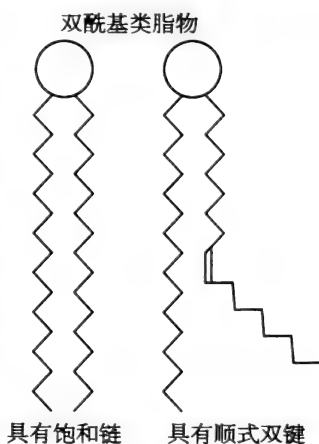


图 1-13 具有饱和超式链 (左) 和不饱和顺式双键链 (右) 的类脂物示意图

实验指出, 双键的数目越多, 类脂双层的相变温度 T_f 也越低。这一独特的性质使得某些鱼类在冬季可以及时增加细胞膜中类脂的双键数目而生存在非常寒冷的水当中。

1.4.3 离子条件效应

离子条件也可以影响生物膜的相变行为。大多数生物膜含有一定数

量的带负电磷脂。这些带负电的类脂双层对 pH 值、离子强度和阳离子浓度等的变化非常敏感。高 pH 值促使膜中这些类脂电离而降低流体相的 T_i 值。曾经发现 pH 值的改变可以导致细胞发生形变(见第二章),这是一种与带负电荷类脂物的生物膜的敏感性有关的现象。细胞膜的电致破裂是外电场和带电膜的合作效应。这种效应在膜的形状理论中是一个重要的课题。

1.4.4 胆甾醇效应

生物膜中胆甾醇的作用非常玄妙。在动物细胞膜中,胆甾醇是一种非常普遍的成分。虽然为什么生物膜中必然含有胆甾醇成分仍然是一个未曾解答的问题,但是对于掺胆甾醇磷脂双层的研究却非常受重视。据认为,掺有磷脂和胆甾醇的生物膜的结构的研究,对生物膜的生物作用可以提供一些线索。不过这里所关心的只是它们对膜的相变的影响。

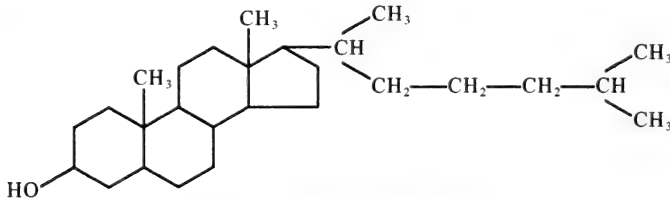


图 1-14 胆甾醇的分子结构

胆甾醇的分子结构见图 1-14。它由一个羟基附着在具有四个甾醇环的刚性平面上构成。环体连接着一个具有挠性的短烃链。在磷脂双层中,胆甾醇分子通过磷脂的脂性酰基链的羰基氧与胆甾醇羟基头之间的氢键相互作用,保持着与磷脂分子处于平行排列的位置(图 1-15)。这种相互作用降低了双层中分子的流动性,这就给图 1-9 中增加胆甾醇含量会使生物膜失去相变的现象提供了很好的解释。从这个角度来看,胆甾醇在生物膜的凝固效应中起着一定的作用。

不过,胆甾醇还有另一种与之相矛盾的效应:在低于纯磷脂相变温度,胆甾醇掺杂会起到一种流体化效应(fluidizing effect)。换句话说,生物膜中存在原始浓度的胆甾醇时,可以通过增强它的刚性和扩展它的液晶态温度范围来改善它的性能。这两种效应统称为胆甾醇效应(choles-

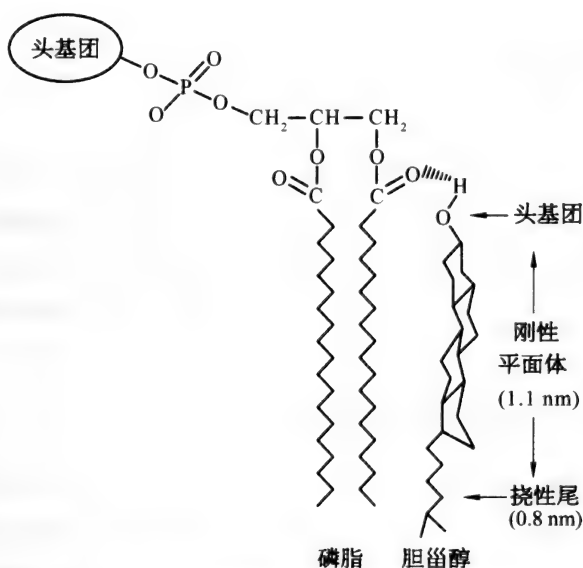


图 1-15 胆甾醇与磷脂分子形成氢键的示意图

terol effect), 它们的同时存在非常有利于细胞膜的生物功能。

1.4.5 生物膜的复杂性

至此, 上面的讨论还是不全面的。应该指出, 实际的生物膜[也就是细胞膜(cell membrane)]的结构要比上面所说的复杂得多。它们是由许多类脂和胆甾醇以及细胞骨架(cytoskeleton)等等组元的混合物。细胞骨架包括一个交叉结合的蛋白质网络, 主要是锚泊在双层上像混凝土中的钢结构那样的血影蛋白(spectrin)。它对细胞膜提供了强度和剪切刚度。在强应力作用之下或是在扰动的环流环境中(如红细胞的细胞膜), 没有细胞骨架的类脂双层将由于变形而破裂。

不过需要强调一下, 细胞骨架网络像珠串网那样具有高度的挠性。因此, 细胞膜的正常平衡形状主要是由类脂双层的弹性来决定。从这个意义上讲, 细胞骨架应该更像线状体而不是像“钢棒”。这是下面讨论中将采取的观点。实际上, 这样的生物膜模型可以从著名的红细胞的形状问题加以证实。

§ 1.5 合成类脂双层和膜泡

许多实验工作者都应用纯磷脂双层的合成膜泡来检验纯类脂双层生物膜弹性理论的正确性。在讨论类脂双层形状转变理论之前,了解一下如何制备合成膜泡也许是有益的。下面把 Szoka 和 Papahadjopoulos 所写的一篇关于人工合成膜泡制备的评述文章^[22]加以节略,提供给读者。

1.5.1 制备合成膜泡用的类脂物

合成膜泡可以用各种类脂物或类脂混合物来制备,其中最常用的是磷脂。上一节已经提到过,对于某种特定的磷脂或磷脂混合物都具有一个确定的相变温度 T_i 。低于 T_i 温度时所形成的双层处于凝胶状态,而高于 T_i 时它们将处于液晶态。表 1.1 中所列的各种材料是所谓的室温液晶态类脂物。由它们形成的合成双层在邻近室温范围内处于液晶态。

表 1.1 参考文献[22]中为制备膜泡所选用的一些类脂物

类 脂 物	符 号	T_i ($^{\circ}\text{C}$)
蛋磷脂酰胆碱 (egg phosphatidylcholine)	EPC	-1.5~-7
二月桂基磷脂酰胆碱(C 12 : 0) (dilauryloylphosphatidylcholine)(C 12 : 0)	DLPC	-1.8
二肉豆蔻酰磷脂酰胆碱(C 14 : 0) (dimyristoylphosphatidylcholine)(C 14 : 0)	DMPC	23
二月桂基磷脂酰甘油 (dilauryloylphosphatidylglycerol)	DLPG	4
二肉豆蔻酰磷脂酰甘油 (dimyristoylphosphatidylglycerol)	DMPG	23
二棕榈酰磷脂酰甘油 (dipalmitoylphosphatidylglycerol)	DPPG	41
二肉豆蔻酰磷脂酰丝氨酸 (dimyristoylphosphatidylserine)	DMPS	38

1.5.2 多层片状膜泡

多层片状膜泡的制备并不需要特殊的工艺。正像 § 1.2 中所说的那样,它们可以自然地形成平衡片状相。具体步骤是,首先在试验盘上滴一滴溶解在有机溶剂中的类脂物。当溶剂挥发后,在盘底和盘边就留下一片具有片状结构的干类脂。这时对样品添加液体缓冲剂。在高于 T_i 温度条件下,施以轻度的摇动使干类脂物水化。显然,这时缓冲剂就插进了类脂层之间,使得片层被隔离而形成隆起的类脂相(lipid phase)。根据类脂物的不同种类完成这种水合作用需要几分钟到几小时的时间。水合作用完成之后,溶液里就出现了洋葱皮式的多层片状类脂膜泡。

在形成胶束过程中,多片层膜泡的大小取决于水合过程的时间、类脂的种类以及摇动的情况。例如,短暂的声致过程可以获得比较小而且更为均匀的多层膜泡。DNA 和药物之类的大分子可以在多层膜泡中被分离出来。因此,研究药物在人体内的传送问题以及在生物工程方面如何制备多片层膜泡,都是非常重要的问题。

1.5.3 单个双层膜泡

在制备过程中,强烈的声致过程可以把多片层膜泡打碎,从而形成小的单个双层膜泡聚集体。这种过程所形成的是悬浮着一些单个双层膜泡的透明溶液。

除去声致法外,还有一些其他的办法可以获得单个的双层膜泡。注射乙醇就是一个常用的办法。这种方法非常方便。把类脂物溶解在乙醇当中,然后把它迅速注射到含水的缓冲剂内,类脂物就可以自发地形成单个双层膜泡了。

不论是用声致法或是用乙醇注射法,得到的双层膜泡的内部体积都差不多是 0.5 L/mol 类脂物。膜泡的典型大小在 $10^2 \sim 10^3 \mu\text{m}^3$ 范围之内。膜泡大小的分布和平均大小的分布取决于形成它们的各步骤中的具体情况。在乙醇溶液中,不同浓度的类脂物所形成的膜泡具有不同的直径。在大约 3 mol/m^3 的低类脂浓度下,可以得到直径约为 300 nm 的膜泡。在大约 36 mol/m^3 的高类脂浓度下,可以形成直径约为 1100 nm 的膜泡。

膜泡的大小和膜泡形状的转变是类脂双层弹性理论中最重要的课题。这类直径在 $1\sim 10\ \mu\text{m}$ 的典型膜泡可以用视频相衬显微镜对它们作记录进行研究。膜泡形状的转变可以用调节温度^[23]、调节渗透压^[24]或者二者兼用的方法来加以引发。单个双层膜泡的形状转变将是本书中所要讨论的一个主题。为了简单起见,在下面的讨论中将用“膜泡”来表示“单个双层膜泡”。

参考文献

- [1] Freiberg S. *Lytropic Liquid Crystals and the Structure of Biomembrane*. Washington D C: American Chemical Society, 1976;
Brown G H, Wolken J J. *Liquid Crystals and Biological Structures*. New York: Academic Press, 1979;
Datta D B. *Introduction to Membrane Biochemistry*. Madison: Floral Publishing, 1987;
Ceve G, Marsh D. *Phospholipid Bilayers: Physical Principles and Models*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1987
- [2] de Gennes P G. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford: Clarendon, 1975
- [3] Gray G W. *Molecular Structure and the Properties of Liquid Crystals*. London: Academic Press, 1962;
Gray G W, Goodby J W. *Smectic Liquid Crystals: Textures and Structures*. London: Heiden and Sons, 1984;
Chandrasekhar S. *Liquid Crystals*. London: Cambridge University Press, 1977
- [4] Friedel G. *Ann Phys*, 1922, **2**:273
- [5] Adamson A W. *Physical Chemistry of Surface*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1976
- [6] Tanford C. *The Hydrophobic Effect: Formation of Micelles and Biological Membranes*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1973
- [7] Meunier J, Langivan D, Boccara N. *Physics of Amphiphilic Layers*. Berlin: Springer, 1987
- [8] Hartley G S. *Aqueous Solutions of Paraffin Chain Salts*. Paris: Hermann et Cie, 1936

- [9] Gibbs J W. *Trans Comm Acad* , 1876, **3**:108; *ibid* , 1878, **3**:343
- [10] Langmuir I. *J Chem Phys* , 1933, **1**:756
- [11] Marcelza S. *Biochem Biophys Acta* , 1974, **367**:165
- [12] Sugimura A, Iwamoto M, Ou-Yang Z C. *Phys Rev* , 1994, **E50**:614
- [13] Israelachvili N. *Intermolecular and Surface Forces*. London: Academic Press, 1992
- [14] Skoulios A. *Adv Colloid and Interface Sci* , 1967, **1**:79
- [15] Singer S I, Nicholson G L. *Science* , 1972, **175**:720
- [16] Luzzati V. In: *Biological Membranes* , ed. by Chapman D. New York: Academic Press, 1968
- [17] Saunders L, Perrin J, Gammack D. *J Pharmacol* , 1962, **14**:567
- [18] Ladbroke B D, Williams R M, Chapman D. *Biochem Biophys Acta* , 1968, **150**:333
- [19] Janick M J, Small D M, Shipley G G. *Biochemistry* , 1976, **15**:4575
- [20] Marsh D, Watts A, Knowles P F. *Biochemistry* , 1976, **15**:3570
- [21] van Deenen L L M. *Pure and Appl Chem* , 1971, **25**:25
- [22] Szoka F, Papahadjopoulos D. *Ann Rev Biophys Bioeng* , 1980, **9**:467
- [23] Evans E, Rawicz W. *Phys Rev Lett* , 1990, **64**:2094
- [24] Hotani H. *J Mod Biol* , 1984, **178**:113

第二章 张量和经典 微分几何学简介

膜泡的形状是本书所要讨论的主题。在第一章曾经指出,类脂双层的厚度约为 5 nm,比膜泡(直径约为 1~10 μm)要小得多。于是,在数学处理上可以把双层膜泡处理为厚度为零的数学面,同时把双层膜泡的构形处理为一个闭合的或者是敞开的曲面。因此,有必要对曲线和曲面的微分几何学有一些基本的了解。描述曲面和曲线可以用不同的坐标系,也就是不同的独立变量。为了对不同的独立变量描述的系统用统一的数学表达式表示出来,就只能使用张量形式。因此,为了方便读者起见,本章将对张量分析和经典微分几何学作一些必要的简单介绍。本章内容基本取自 Spain^[1], Flügge^[2], Eddington^[3], Eisenhart^[4], Weatherburn^[5] 和 Forsyth^[6] 几位作者所写的书。其中 Eddington 所写的书对张量有非常简洁的介绍,后面三本书是微分几何学的经典著作。另外还有一本比较新一些的、由 do Carmo^[7] 写的微分几何学也是很适用的。

§ 2.1 张量

2.1.1 反变张量和协变张量

设 $\phi^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^N)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, 为 N 个 N 维空间坐标系 (x^1, x^2, \dots, x^N) 中的独立、单值、连续并且可微分的函数,那么

$$\bar{x}^\alpha = \phi^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

就可以用来在同一 N 维空间中定义一个新的坐标系 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ 。由于各个 ϕ^α 互相独立,因此它的雅可比行列式 $|\partial \bar{x}^\alpha / \partial x^i|$ 不等于零,从而

使式(2.1)可以作逆变换而得到

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

显然,

$$d\bar{x}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} dx^i, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4)$$

式中

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

这里和本书后面的计算中,除特别指出外,都使用求和约定(summation convention):任何一项中如果有两个相同的指标(如 i 或 α)时,表示对该指标作从 1 到 N 各项的求和。这里要提醒读者注意,在后面讨论曲面时将使用独立变量 u 和 v ,因此求和约定中相同的指标是指对 u 和 v 的求和,所以在求和前上下指标不用 u 和 v 来表示。例如, $\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^\beta} + \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^\beta} + \dots + \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^N} \frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^\beta}$ 。在式(2.2)的变换下,任意 N 个 x^j 的函数 $A^i(x^j)$ 和变换了的函数 $\bar{A}^\alpha = \bar{A}^\alpha(x^\beta)$, 如果满足

$$\bar{A}^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} A^i \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

的关系,则 \mathbf{A} 和 $\bar{\mathbf{A}}$ 都被称为一阶反变张量(contravariant tensor)或反变矢量。显然,反变矢量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ 的乘积

$$A^{\dot{i}j} = B^i C^j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

$$A^{\dot{i}jk} = B^i C^j D^k \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, N)$$

.....

将分别满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}^{\alpha\beta} = (\partial \bar{x}^\alpha / \partial x^i)(\partial \bar{x}^\beta / \partial x^j) A^{ij} \\ \bar{A}^{\alpha\beta\gamma} = (\partial \bar{x}^\alpha / \partial x^i)(\partial \bar{x}^\beta / \partial x^j)(\partial \bar{x}^\gamma / \partial x^k) A^{ijk} \\ \dots\dots\dots \\ (i, j, k, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3, \dots, N) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

的关系。它们分别称为二阶、三阶…… N 阶反变张量。

与反变张量的变换相反,作为一组独立变量 x^i ($i = 1, 2, \dots, N$) 的标量函数 $f(x^1, x^2, \dots, x^N)$, 在变换到另一组独立变量 \bar{x}^α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) 时将满足

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^\alpha} \quad (2.8)$$

的关系。如果一组独立变量 (x^1, x^2, \dots, x^N) 的函数 $A_i(x^1, x^2, \dots, x^N)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 在变换到另一组独立变量为 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ 的函数 $\bar{A}_\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) 时满足关系式

$$\bar{A}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} A_i, \quad A_i = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \bar{A}_\alpha \quad (2.9)$$

那么 \mathbf{A} 和 $\bar{\mathbf{A}}$ 称为一阶协变张量 (covariant tensor), 或协变矢量。高阶协变张量的定义是

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} A_{ij} \\ \bar{A}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} A_{ijk} \\ \dots\dots\dots \\ A_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \bar{A}_{\alpha\beta} \\ A_{ijk} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \bar{A}_{\alpha\beta\gamma} \\ \dots\dots\dots \\ (i, j, k, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

一个各分量为 s 阶反变张量的分量与 p 阶协变张量分量的乘积所形成的张量是一个 s 阶反变和 p 阶协变的混合张量 (mixed tensor)。一个分量为 s 阶反变 p 阶协变的混合张量与一个 t 阶反变 q 阶协变的混合张量的乘积是一个 $s+t$ 阶反变 $p+q$ 阶协变的混合张量。这个张量称为组成它的两个混合张量的外积。在坐标变换下, 混合张量 $\mathbf{A} = A_{q_1 q_2 \dots q_p}^{t_1 t_2 \dots t_s}$ 满足关系式

$$\begin{cases} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{t_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_2}}{\partial x^{t_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_s}}{\partial x^{t_s}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} \frac{\partial x^{q_2}}{\partial \bar{x}^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x^{q_p}}{\partial \bar{x}^{\beta_p}} A_{q_1 q_2 \dots q_p}^{t_1 t_2 \dots t_s} \\ A_{q_1 q_2 \dots q_p}^{t_1 t_2 \dots t_s} = \frac{\partial x^{t_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{t_2}}{\partial \bar{x}^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{t_s}}{\partial \bar{x}^{\alpha_s}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta_1}}{\partial x^{q_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta_2}}{\partial x^{q_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\beta_p}}{\partial x^{q_p}} \bar{A}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \end{cases} \quad (2.11)$$

这里有一点必须特别注意, 上标的次序和下标的次序都不能任意改换。不同的次序意味着不同的张量。只有具有相同反变次序和相同协变次序的各个张量才能相加在一起。在同一张量方程式中, 所有各个项都必须是同一反变和同一协变阶。

反变矢量 $\mathbf{A} = A^i(x^1, x^2, \dots, x^N)$ 和协变矢量 $\mathbf{B} = B_i(x^1, x^2, \dots, x^N)$ 的乘积满足关系式

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} A^i \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^i} B_b = A^a B_a$$

也就是说, $A^i B_i$ 是一个标量或称为零阶张量。对于任何混合张量, 例如 $\mathbf{A} = A_{lmn}^{ij}$, 存在着

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\gamma\delta\beta}^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^\delta} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^\beta} A_{lmn}^{ij} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^\delta} \delta_j^n A_{lmn}^{ij} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^\delta} A_{lmj}^{ij} \end{aligned}$$

的关系。这个关系指出, $\bar{\mathbf{A}} = \bar{A}_{\gamma\delta\beta}^{\alpha\beta}$ 是一个一阶反变二阶协变的混合张量, 因此这个步骤称为张量收缩 (contraction of a tensor)。也就是说, 当混合张量中有一对上标和下标相同时, 张量就缩小了两个阶次。当两个张量中一个的某个上标与另一个的某个下标相同时, 它们的外积将有收

缩作用而形成两个比两个张量的反变阶次之和以及协变阶次之和都降低一次的张量。这个过程称为两个张量的内积(inner product of two tensors), 例如 $A_{ij}^k B_{lm}^k = C_{lm}^j$ 。

2.1.2 商定律

用式(2.11)来检验一个量是否满足张量的条件是非常麻烦的。一个简便的检验办法是应用所谓的商定律(quotient law): 如果一个由 N^p 个 x^i 形成的 p 阶量与一个任意的已知张量的内积是一个张量的话, 这个量就是一个张量。下面这个最简单的例子足以说明商定律的有效性。假设有一组 x^i 的函数 A_{ij} , 如果它同任意一个张量 $\mathbf{B} = B^i$ 的内积是一个协变张量 $\mathbf{C} = C_j$ 的话, 即

$$A_{ij} B^i = C_j$$

那么在变换到 \bar{x}^α 坐标系时, 应该有

$$\bar{A}_{ij} \bar{B}^i = \bar{C}_j$$

应用式(2.11), 它将成为

$$\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} B^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} C_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} A_{\alpha\beta} B^\alpha$$

即

$$\left(\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} A_{\alpha\beta} \right) B^\alpha = 0$$

将上式与 $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta}$ 作内积, 于是有

$$\left(\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} - A_{\alpha\beta} \right) B^\alpha = 0$$

由于 $\mathbf{B} = B^\alpha$ 是任意的反变张量, 因此要求

$$\bar{A}_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} = A_{\alpha\beta}$$

这就证明了 $\mathbf{A} = A_{ij}$ 是一个二阶协变张量。 $\delta_j^i = \delta_\beta^\alpha$ 是一个标量, 可以认为是零阶张量。

§ 2.2 空间曲线

三维空间中曲面的曲率是一个二维问题。要想弄清楚它,必须先讨论空间中一条曲线的曲率。在微分几何学中,一条空间曲线是用一个标量参数 u 来确定曲线上各点 \mathbf{r} 的位置的, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ 。如果把标量参数 u 取作曲线上该点到曲线上某一给定点的弧长 s , 那么曲线元的长度(或者称为线元) ds 将由 $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ds^2$ 给出。 s 称为自然参变量。

描述一条空间曲线需要知道曲线上各点的三个单位矢量 $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{m}(s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 沿曲线上各点的变化:

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(s) \equiv \mathbf{r}_{,s} \\ \mathbf{m}(s) = \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} / \left| \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \right| \equiv \mathbf{r}_{,ss} / |\mathbf{r}_{,ss}| \\ \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s) \end{cases} \quad (2.12)$$

由于 $\mathbf{t}(s)$ 是曲线上相邻两点间弧长与弦长之比的极限值, 因此是一个单位矢量, $\mathbf{r}_{,s} \cdot \mathbf{r}_{,s} = 1$ 。于是, $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{m}(s) = 0$, 而 $\mathbf{m}(s)$ 成为一个与 $\mathbf{t}(s)$ 相垂直的单位矢量。 $\mathbf{b}(s)$ 是一个与 $\mathbf{t}(s)$ 和 $\mathbf{m}(s)$ 都垂直的矢量, 而且 $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = [\mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s)] \cdot [\mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s)] = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{m}(s) = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1$, 因此也是一个单位矢量。 $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{m}(s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 分别称为曲线的单位切线矢量(tangent vector)、主法线(main normal)单位矢量和副法线(binormal)单位矢量。在以后的讨论中, 一个量后面的逗号和逗号后面的量表示该量对逗号后面各量依顺序求导数而不再重复加以说明。显然, $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{m}(s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 形成右手系互相垂直的三个单位矢量。图 2-1 说明了它们之间的关系。

曲线上一点的曲率(curvature) $c(s)$ 的定义是该点切线矢量的改变率:

$$c(s) = \left| \frac{d}{ds}\mathbf{t}(s) \right| = |\mathbf{r}_{,sss}(s)| \quad (2.13)$$

从几何学来看, 如果 $\Delta\phi$ 是曲线上相邻两点切线间的夹角, 那么

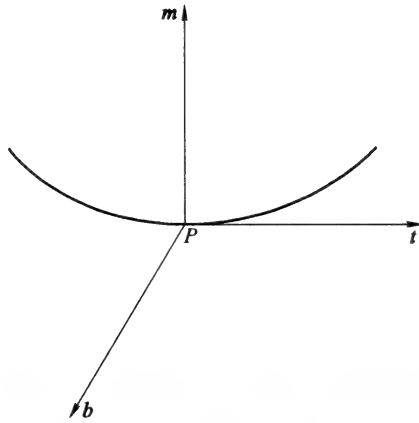


图 2-1 空间曲线上一点的三个单位矢量
形成一个 Frenet 参照系

$$c(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \right| \quad (2.14)$$

这反映了曲线在 s 点的弯曲程度。空间曲线上 s 点的切面 (tangent plane) 的定义是图 2-1 中由 $t(s)$ 和 $m(s)$ 规定的平面。因此, 这个平面的法矢量就是副法线矢量 $b(s)$ 。于是平面曲线的副法线单位矢量 $b_0 = b(s)$ 是一个常数, 也就是方向不变的单位矢量。

显然, 从式(2.12)和式(2.13)很容易看出

$$t_{,s} = c(s)m \quad (2.15)$$

由于 $t \cdot m = 0$, 因此 $t_{,s} \cdot m + t \cdot m_{,s} = 0$ 。应用式(2.15)就有

$$c(s)m \cdot m + t \cdot m_{,s} = 0$$

另外, 由于 $m \cdot m = t \cdot t = 1$, 因此上式可以写成

$$t \cdot [m_{,s} + c(s)t] = 0 \quad (2.16)$$

再者, 由于 $m \cdot m_{,s} = 0$ 和 $m \cdot t = 0$, 所以有

$$m \cdot [m_{,s} + c(s)t] = 0 \quad (2.17)$$

式(2.16)和式(2.17)说明 $m_{,s} + c(s)t$ 与 t 和 m 形成互相垂直的三个矢量。换句话说, $m_{,s} + c(s)t$ 是沿 b 的方向。这样就可以有

$$\mathbf{b} = [\mathbf{m}_{,s} + c(s)\mathbf{t}]/\tau'(s) \quad (2.18)$$

式中的 $\tau'(s)$ 称为曲线在该点上的挠率(torsion)。

式(2.12)中的第三式给出 $\mathbf{b}_{,s} = \mathbf{t}_{,s} \times \mathbf{m} + \mathbf{t} \times \mathbf{m}_{,s}$, 应用式(2.15)和式(2.18)后可以得出

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{,s} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}_{,s} = \tau'(s)\mathbf{t} \times \mathbf{b} = \tau(s)\mathbf{m} \\ \tau^2(s) = \mathbf{b}_{,s} \cdot \mathbf{b}_{,s} \end{cases} \quad (2.19)$$

式(2.19)说明 $\tau(s)$ 是空间曲线上相邻两点 s 和 $s + \Delta s$ 的副法线的旋转率, 也就是曲线在 s 点的切面的旋转率。它表现了空间曲线的扭曲程度。它可以是正值也可以是负值。换句话说, 可以在两个相反的方向发生扭转。因此, 在式(2.19)中的 $\tau'(s)$ 和 $\tau(s)$ 并没有区别, 是同一曲线的挠率。

由于 $\mathbf{m} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, 所以 $\mathbf{m}_{,s} = \mathbf{b}_{,s} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \mathbf{t}_{,s}$ 。应用式(2.15)和式(2.19)就有

$$\mathbf{m}_{,s} = -c(s)\mathbf{t} - \tau(s)\mathbf{b} \quad (2.20)$$

式(2.15)、(2.19)和(2.20)这三个关系式合在一起称为空间曲线的 Frenet-Serret 公式(Frenet-Serret formulae)。它们是关于空间曲线的基本定理。知道了曲线的曲率 $c(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 就可以从式(2.15)和式(2.19)的积分得出除曲线的刚性平移和刚性转动之外曲线的方程式。这里再提醒读者一下, 曲线的挠率 τ 可以选正值也可以选负值, 而曲线的曲率总是正值。曲线上一点与该点曲线相垂直的平面称为曲线上该点的法平面(normal plane)。

§ 2.3 曲面

2.3.1 第一基本形式

在微分几何学中, 三维空间中的曲面上任意一点 \mathbf{Y} 将由两个独立的标量参量 u 和 v 来决定, 也就是

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(u, v) \quad (2.21)$$

\mathbf{Y} 既可以用协变矢量(一阶张量) Y_l ($l = 1, 2, 3$)来表示,也可以用反变矢量 Y^m ($m = 1, 2, 3$)来表示。(1, 2, 3)是右手坐标系的三个独立坐标,每一个坐标都是标量参量 u 和 v 的函数。曲面上相邻两点 \mathbf{Y} 和 $\mathbf{Y} + d\mathbf{Y}$ 之间的线元由下式决定:

$$ds^2 = d\mathbf{Y} \cdot d\mathbf{Y} = dY^l dY_l = g_{\alpha\beta} d\alpha d\beta$$

$$(l = 1, 2, 3; \alpha, \beta = u, v) \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\alpha\beta}(u, v) = \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} = Y^l_{,\alpha} Y_{l,\beta} = g_{\beta\alpha}(u, v) \\ Y^l_{,\alpha} = \frac{\partial Y^l}{\partial \alpha}, Y^l_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 Y^l}{\partial \alpha \partial \beta}, \dots \\ Y_{l,\alpha} = \frac{\partial Y_l}{\partial \alpha}, Y_{l,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \alpha \partial \beta}, \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (l = 1, 2, 3) \\ (\alpha, \beta) = (u, v) \end{array} \quad (2.23)$$

注意,英文字母 i, j, k, \dots 指三个位置坐标 1、2、3,而希腊字母 α, β, \dots 指参量 u, v ,并且上式中采用了求和约定。 $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}$ 称为度规张量(metric tensor)。对坐标 1、2、3 进行线性变换时,参量 u 和 v 也将作线性变换,因此按照式(2.6)的规定, du 和 dv 都是一阶反变张量。两点间的距离平方 ds^2 是不变量,也就是零阶张量。按照商定律, $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}$ 是一个协变二阶张量。与 $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}$ 相对应的反变张量的定义为

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} = \delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } \beta = \gamma \text{ 或 } j = k \\ 0, & \text{当 } \beta \neq \gamma \text{ 或 } j \neq k \end{cases} \quad \begin{array}{l} (i, j, k = 1, 2, 3) \\ (\alpha, \beta, \gamma = u, v) \end{array} \quad (2.24)$$

δ^{α}_{β} 或 δ^j_i 是一个标量,因此是一个零阶张量。行列式 $|g_{\alpha\beta}|$ 将简单地用 g 来表示:

$$g = g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 \quad (2.25)$$

于是

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{uu} = g_{vv}/g, \quad g^{vv} = g^{uu} = -g_{uv}/g = -g_{uv}/g, \quad g^{uv} = g_{uv}/g \\ g^{uu} g_{uu} + g^{vv} g_{vv} = g^{uv} g_{uv} + g^{vu} g_{vu} = 1 \\ g^{ij} g_{ij} = 2 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

式(2.22)通常称为第一基本形式(first fundamental form)I,而三个 g_{ij} 称为一阶基本量。

度规张量 $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta}$ 同一个反变矢量 $\mathbf{A} = A^\beta$ 的内积 $g_{\alpha\beta}A^\beta$ 是一个与反变矢量 $\mathbf{A} = A^\beta$ 相对应的协变矢量,也就是说把反变矢量的上标换成相应的协变矢量的相应下标。类似地, $\mathbf{g} = g^{\alpha\beta}$ 同一个协变矢量 $\mathbf{A} = A_\beta$ 的内积是把协变矢量的下标变换成相应的反变矢量的上标。把这两个例子推广,可以说用度规张量或相应的反变张量与一个混合张量形成的内积是一个把该混合张量的一个上标变换成相应的下标的过程,或者是把下标变换成相应的上标的过程。这个结果在进行张量计算中非常有用。

从几何图形来看,曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 可以看做是由一系列无数条平行的 $u = \text{常量}$ 和 $v = \text{常量}$ 的相交参数曲线(parametric curve)形成的。在 $u = \text{常量}$ 曲线上的线元为 $ds = \sqrt{g_{vv}} dv$, 而在 $v = \text{常量}$ 曲线上的线元为 $ds = \sqrt{g_{uu}} du$ 。在表面上一点,两条相交参数曲线的切线方向单位矢量分别为 $\mathbf{Y}_{,u}/\sqrt{g_{uu}}$ 和 $\mathbf{Y}_{,v}/\sqrt{g_{vv}}$ 。它们之间的夹角 ω 满足关系

$$\cos \omega = \mathbf{Y}_{,u} \cdot \mathbf{Y}_{,v} / \sqrt{g_{uu}g_{vv}} = g_{uv} / \sqrt{g_{uu}g_{vv}} \quad (2.27)$$

因此,两组参数曲线正交的条件是

$$g_{uv} = 0 \quad (2.28)$$

这些关系可以参考图 2-2。

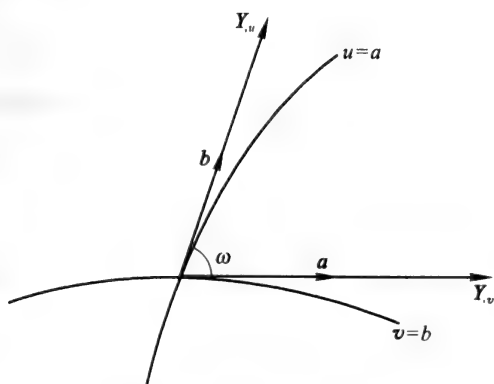


图 2-2 表面上的 uv 截面

2.3.2 曲面的法线和切面

曲面上一点的法线方向是与曲面上该点所有切线方向相垂直的方向,也就是 $\mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v}$ 的方向,因此曲面的单位法线(unit normal line) \mathbf{n} 的定义为

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v}}{\sqrt{g}} \\ \mathbf{n}^i = \frac{e^{lmn} Y_{m,u} Y_{n,v}}{\sqrt{g}} = \mathbf{n}^i(u, v) \end{cases} \quad (2.29)$$

($l, m, n = 1, 2, 3$)

式中置换符号(permutation symbol) e^{lmn} 和 e_{lmn} 的定义是

$$e^{lmn} = e_{lmn} = \begin{cases} 1, & \text{当}(l, m, n) \text{为}(1, 2, 3) \text{的偶数置换} \\ -1, & \text{当}(l, m, n) \text{为}(1, 2, 3) \text{的奇数置换} \\ 0, & \text{其余置换} \end{cases} \quad (2.30)$$

而且满足关系式^[2]

$$e_{lmn} e^{lpq} = \delta_m^p \delta_n^q - \delta_n^p \delta_m^q \quad (l, m, n, p, q = 1, 2, 3) \quad (2.31)$$

与置换符号相对应的置换张量(permutation tensor)的各分量是

$$\epsilon^{lmn} = e^{lmn} / \sqrt{g}, \quad \epsilon_{lmn} = e_{lmn} \sqrt{g} \quad (l, m, n = 1, 2, 3) \quad (2.32)$$

在讨论仅仅涉及曲面本身而不涉及曲面外部的问題时,会遇到 $e^{3mn} e_{3pq}$ ($m, n, p, q = 1, 2$) 的项。这时坐标 3 由于求和的关系而不再起作用,因此可以把坐标 3 选作指向曲面外部的方向,而其余的 1 和 2 两个坐标就可以选作描述曲面的两个参量 u 和 v 。于是 $e^{3mn} e_{3pq}$ 可以换成 $e^{3\alpha\beta} e_{3\gamma\delta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = u, v$), 而 δ 函数也就可以换成 δ_β^α 了。相应的 ϵ^{3mn} 和 ϵ_{3mn} 这时也就可以分别换成 $\epsilon^{3\alpha\beta}$ 和 $\epsilon_{3\alpha\beta}$ 。于是,由式(2.31)和式(2.32)有

$$\begin{cases} e_{3\alpha\beta} e^{3\gamma\epsilon} = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\epsilon - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\epsilon \\ \epsilon_{3\alpha\beta} \epsilon^{3\gamma\epsilon} = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\epsilon - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\epsilon \end{cases} \quad (2.33)$$

另外有一点要提请读者注意,经典微分几何学中对开曲面一般把曲

面法线的正向取从凸面指向凹面的方向,对闭曲面则取指向曲面内部的方向,但在本书则恰恰相反,开曲面法线的正向是从凹面指向凸面,闭曲面法线的正向则是指向曲面的外部。

曲面上一点 $\mathbf{Y}(u, v)$ 与该点法线相垂直的平面称为曲面上该点的切面 $\Pi(u, v)$ 。如果 $\mathbf{R}(Y^1, Y^2, Y^3) = \mathbf{R}(u, v)$ 表示曲面上的任意点,那么

$$[\mathbf{R}(u, v) - \mathbf{Y}(u_0, v_0)] \cdot \mathbf{n}(u, v) = 0 \quad (2.34)$$

这就是曲面上 $\mathbf{Y}(u_0, v_0)$ 点的切面 $\Pi(u, v)$ 的方程式。

2.3.3 第二基本形式

与曲面上各点二次微分量相关的量 $L_{\alpha\beta}(u, v)$ 和 $L^{\alpha\beta}(u, v)$ 以及行列式 $L = |L_{uv}|$ 的定义是

$$\begin{cases} L_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\alpha\beta} = n^l Y_{l,\alpha\beta} = n_l Y^l_{,\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} \\ L = |L_{\alpha\beta}| = L_{uu}L_{vv} - L_{uv}^2 \\ L^{\alpha\beta}L_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta \\ (l=1, 2, 3; \alpha, \beta=u, v) \end{cases} \quad (2.35)$$

上式的第三式给出

$$\begin{cases} L^{uu} = L_{vv}/L, L^{vv} = -L_{uv}/L, L^{uv} = L_{uu}/L \\ L^{uu}L_{uu} + L^{vv}L_{vv} = L^{uv}L_{uv} + L^{vu}L_{vu} = 1 \\ L^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} = 2 \end{cases} \quad (2.36)$$

引用式(2.33)就可以把式(2.26)和式(2.36)分别写成

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta} = e_{3\alpha\gamma}e^{3\beta\delta}g_{\gamma\delta}/g = \epsilon_{3\alpha\gamma\epsilon}^{3\beta\delta}g_{\gamma\delta}/g \\ g_{\alpha\beta} = ge_{3\alpha\gamma}e^{3\beta\delta}g^{\gamma\delta} = g\epsilon_{3\alpha\gamma\epsilon}^{3\beta\delta}g^{\gamma\delta} \\ L^{\alpha\beta} = e_{3\alpha\gamma}e^{3\beta\delta}L_{\gamma\delta}/L = \epsilon_{3\alpha\gamma\epsilon}^{3\beta\delta}L_{\gamma\delta}/L \\ L_{\alpha\beta} = Le_{3\alpha\gamma}e^{3\beta\delta}L^{\gamma\delta} = L\epsilon_{3\alpha\gamma\epsilon}^{3\beta\delta}L^{\gamma\delta} \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta = u, v) \end{cases} \quad (2.37)$$

式(2.29)表明 \mathbf{n} 与 $\mathbf{Y}_{,\alpha}$ ($\alpha = u, v$) 互相垂直,因此 L_{ij} 又可以写做

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha\beta} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\alpha\beta} = -\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} = -\mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{Y}_{,\alpha} \\
 &= -n_{l,\alpha} Y^l_{,\beta} = -n_{l,\beta} Y^l_{,\alpha} \\
 &\quad (l = 1, 2, 3; \alpha, \beta = u, v)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

从曲面上相邻两点 $P [\mathbf{Y}(u, v)]$ 和 $Q [\mathbf{Y}(u + du, v + dv)]$ 之间的距离 $d\mathbf{Y} = \overrightarrow{PQ}$ 来看, 可以有

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{Y} = \overrightarrow{PQ} &= \mathbf{Y}_{,u} du + \mathbf{Y}_{,v} dv + \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_{,uu} du^2 \\
 &\quad + 2\mathbf{Y}_{,uv} dudv + \mathbf{Y}_{,vv} dv^2) + \dots
 \end{aligned}$$

从 Q 点到曲面上 P 点切面的距离可以表现曲面在 P 点的弯曲强度, 也就是说

$$2\mathbf{n} \cdot d\mathbf{Y} = L_{uu} du^2 + 2L_{uv} dudv + L_{vv} dv^2 = L_{\alpha\beta} d\alpha d\beta \tag{2.39}$$

描述曲面上一点的弯曲程度。在经典微分几何学中, 上式称为第二基本形式(second fundamental form) \mathbb{II} , 各个 $L_{\alpha\beta}$ 称为曲面的二阶基本量(coefficients of the second fundamental form of surface)。

§ 2.4 张量的微分

2.4.1 克氏符号

在继续讨论曲面问题之前还需要讨论一些有关的数学问题。首先引进一个与度规张量 $\mathbf{g} = g_{ij}$ 对参量 u 和 v 的导数有关的量 Γ_{ij}^k 。 Γ_{ij}^k 称为克氏符号(Christoffel symbol)。它的定义是

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \tag{2.40}$$

度规张量 $\mathbf{g} = g_{ij}$ 是一个二阶协变张量, 满足变换 $\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij}$ 。将 \bar{g}_{lm} 对 \bar{x}^n 求导, 得出

$$\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n} \right) g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (2.41)$$

把下标 (l, m, n) 依次换成 (m, n, l) 和 (n, l, m) 可以得到

$$\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l} = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l} \right) g_{ij} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{nl}}{\partial \bar{x}^m} = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} \right) g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (2.43)$$

将式(2.42)和式(2.43)相加再减去式(2.41)得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial \bar{g}_{nl}}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} &= \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n} \right] g_{ij} \\ &\quad + \left[\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \right] \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (2.44)$$

由于 $g_{ij} = g_{ji}$, 上式右方第一项简化为 $2 \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij}$ 。

由于 $g_{ij} = g_{ji}$, 所以

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

将上式右方的 j 与 k 对调, 于是有

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$$

类似地, 可以有

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$$

于是得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \right) \frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{x}^k} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

因此,式(2.44)可以写成

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{g}_{mm}}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial \bar{g}_{nn}}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} = 2 \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} g_{ij} \\ & + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \end{aligned}$$

将上式两边分别乘以 $(1/2) \bar{g}^{np} = (1/2) g^{pq} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}$, 可以得到

$$\bar{\Gamma}_{ln}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} + \Gamma_{ij}^s \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \quad (2.45a)$$

将式(2.45a)两边都乘以 $\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}$, 于是上式可以写成

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = \bar{\Gamma}_{lm}^p \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} - \Gamma_{ij}^r \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \quad (2.45b)$$

式(2.45a)显然指出,由于右方存在第一项,因此克氏符号不是一个张量。

Γ_{ij}^k 的一个特殊情形是 Γ_{ij}^i 。按照式(2.40)的定义, $\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$ 。由于 $g^{il} = g^{li}$, 因此当把 l 和 i 对调时有 $g^{il} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = g^{li} \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l}$, 于是

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} g^{il} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left(g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + 2g^{mv} \frac{\partial g_{mv}}{\partial x^j} + g^{vv} \frac{\partial g_{vv}}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{2g} \left(g_{vw} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - 2g_{vw} \frac{\partial g_{mv}}{\partial x^j} + g_{mv} \frac{\partial g_{vw}}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{im} g_{vw} - g_{vw}^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln \sqrt{g}) \quad (2.45c)$$

另外,如果当 $i \neq j$ 时, $g_{ij} = 0$, 那么

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (\text{对 } k \text{ 不求和}) \end{aligned}$$

由于 $k \neq i, j$, 因此 $g_{ik} = g_{jk} = 0$ 。于是在 $i \neq j$ 的条件下 $g_{ij} = 0$ 时有

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad (2.45d)$$

在 $i \neq j$, $g_{ij} = 0$ 的条件下, 由于 $g = g_{mn} g^{mn}$, 因此 $g^{mn} = g_{mn}/g = 1/g_{mn}$, $g^{nn} = 1/g_{nn}$ 。于是有

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(2 \frac{\partial g_{il}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} \right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} = -\frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (2.45e)$$

再者,在 $i \neq j$, $g_{ij} = 0$ 的条件下, $g = g_{ii}$, 从而式(2.45c)变为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln \sqrt{g_{ii}}), \quad \Gamma_{ii}^k = \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{g_{ii}}) \quad (2.45f)$$

2.4.2 协变微分和内禀微分

对于一个反变一阶张量 A , $A^k = \bar{A}^i \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}$, 求它对 x^j 的导数可以得出

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}$$

由于上式中右方第二项的存在, 因此 $\frac{\partial A^k}{\partial x^j}$ 不是一个张量。应用式(2.45b), 上式变为

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \left[\Gamma_{in}^k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} - \Gamma_{in}^k \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^n} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^r \Gamma_m^i \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} - \bar{A}^i \Gamma_{rj}^k \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \\
 &= \left(\frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^n} + \bar{A}^r \Gamma_m^i \right) \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} - A^r \Gamma_{rj}^k
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

令

$$A_{,j}^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^r \Gamma_{rj}^k, \quad \bar{A}_{,n}^i = \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^n} + \bar{A}^r \Gamma_m^i \quad (2.47)$$

则式(2.46)变为

$$A_{,j}^k = \bar{A}_{,n}^i \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \quad (2.48)$$

显然,式(2.48)说明 $\mathbf{A} = A_{,j}^k$ 是一个二阶混合张量,称为 A^k 对于 x^j 的协变导数(covariant derivative)。

类似地,对于协变一阶张量 $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{A}_i = A_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$, 可以应用同样的步骤得到 A_j 对 x^n 的协变导数 $A_{j,n}$:

$$\begin{cases} A_{j,n} \equiv \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \Gamma_{jn}^r A_r \\ \bar{A}_{i,t} = A_{j,n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^t} \end{cases} \quad (2.49)$$

根据式(2.47)和式(2.45)可以得到

$$\begin{aligned}
 A_{,k}^k &= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + A^r \Gamma_{rk}^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + A^k \frac{\partial}{\partial x^k} (\ln \sqrt{|g|}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{jk} A_j)
 \end{aligned} \quad (2.50)$$

不变量 $A_{,k}^k$ 称为反变矢量 $\mathbf{A} = A^k$ 的散度(divergence of a vector)。对于协变矢量 $\mathbf{A} = A_k$, $g^{jk} A_{k,i}$ 是 $\mathbf{A} = A_k$ 的散度。在矢量分析中,矢量 \mathbf{A} 的散度是用 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 来表示的。对于标量 ϕ , 它的协变导数就取作一般的 ϕ 对 x 的偏导数 $\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j}$ 。它是一个协变矢量,在矢量分析中用 $\nabla \phi$

表示。 $\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \nabla \phi$ 称为 ϕ 的梯度 (gradient)。

把式(2.47)和式(2.48)推广到任意混合张量 $\mathbf{A} = A_{r_1 \dots r_p}^{u_1 \dots u_s}$, 它对 x^n 的协变导数是

$$A_{r_1 \dots r_p, n}^{u_1 \dots u_s} \equiv \frac{\partial A_{r_1 \dots r_p}^{u_1 \dots u_s}}{\partial x^n} + \sum_{\alpha=1}^s (\Gamma_{k\alpha}^{u_\alpha}) A_{r_1 \dots r_p}^{u_1 \dots u_{\alpha-1} u_{\alpha+1} \dots u_s} - \sum_{\beta=1}^p (\Gamma_{r_\beta n}^{r_\beta}) A_{r_1 \dots r_{\beta-1} r_{\beta+1} \dots r_p}^{u_1 \dots u_s} \quad (2.51)$$

根据式(2.51)可以得到

$$\begin{cases} g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^u g_{uj} - \Gamma_{jk}^u g_{iu} = 0 \\ g_{,k}^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i g^{lj} + \Gamma_{lk}^j g^{il} = 0 \\ \delta_{j,k}^i = \frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i \delta_j^l - \Gamma_{ij}^l \delta_l^k = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

协变导数满足下列三条规律。

(1) 两个张量之和(差)的协变导数是各自协变导数之和(差)。

(2) 两个张量外(内)积的协变导数是其中一个张量与另一个张量的协变导数的外(内)积之和。例如,

$$(A_{ij} B^k)_{,l} = A_{ij,l} B^k + A_{ij} B^k_{,l}$$

$$(A_{ij} B^j)_{,l} = A_{ij,l} B^j + A_{ij} B^j_{,l}$$

(3) 由于式(2.52)的关系,在求协变导数过程中 g_{ij} , g^{ij} , δ_j^i 都可以看做是常数,因此可以保留 $g_{ij,k}$ 为 $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, 而不是 g_{ij} 的协变导数。

在一条曲线 $x^i = x^i(t)$ 上,如果混合张量 $\mathbf{A} = A_{r_1 \dots r_p}^{u_1 \dots u_s}$ 的各个分量都是参量 t 的函数,那么

$$\frac{\delta A_{r_1 \dots r_p}^{u_1 \dots u_s}}{\delta t} = A_{r_1 \dots r_p, k}^{u_1 \dots u_s} \frac{dx^k}{dt} \quad (2.53)$$

称为该张量的内禀导数 (intrinsic derivative)。一个张量的内禀导数是一个与张量本身同一类型和同一阶次的张量。高阶次的内禀导数可以根据

内禀导数的定义来计算。例如,

$$\frac{\delta^2 A_j^i}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta A_j^i}{\delta t} \right) = \left(A_{j,k}^i \frac{dx^k}{dt} \right)_{,i} \frac{dx^i}{dt}$$

前面曾经引用了一个算符 ∇ 来定义标量函数 ϕ 的梯度 $\nabla\phi = \phi_{,i}$ 和一个反变矢量 $\mathbf{A} = A^k$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A} = A^k_{,k}$ 。在数学和物理学中还经常会遇到三维空间中与算符 ∇ 相关的矢量 \mathbf{A} 的旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 和标量 ϕ 的梯度的散度 $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$ 。矢量 \mathbf{A} 的旋度(curl of a vector) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 的张量表示式是

$$B^k = A_{i,j} \epsilon^{ijk} \quad (2.54)$$

式中 $\epsilon = \epsilon^{ijk}$ 是式(2.32)定义的置换张量。 ∇^2 算符称为拉普拉斯算符或拉普拉斯-贝尔特拉米算符(Laplace-Beltrami operator)。为方便起见,按照梯度的定义, $\nabla\phi = \phi_{,i}$ (暂时令 $\phi_{,i} = \psi_i$),是一个协变张量。与它相对应的反变矢量是 $\psi = \psi^k$ 。因此,按照散度的定义和式(2.50)就有

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \psi^k_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{jk} \psi_j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{jk} \phi_{,j})$$

因此,拉普拉斯算符 ∇^2 可以写成

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (2.55)$$

§ 2.5 与曲面有关的一些量

2.5.1 Weingarten 方程式、高斯方程式和第三基本形式

在空间曲面上 $\mathbf{Y}_{,u}$ 和 $\mathbf{Y}_{,v}$ 是两个不同的矢量,而且它们都与曲面的法线 \mathbf{n} 相垂直。因此, $\mathbf{Y}_{,\alpha\beta}$ 可以用 \mathbf{n} 和 $\mathbf{Y}_{,\gamma}$ 来表示。按照式(2.25) $L_{\alpha\beta}$ 的定义可以把 $\mathbf{Y}_{,\alpha\beta}$ 写成

$$\mathbf{Y}_{,\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{Y}_{,\gamma} + L_{\alpha\beta} \mathbf{n} \quad (2.56)$$

的形式,其中 $A_{\alpha\beta}^\gamma$ 是一个待定系数。另外,由于 \mathbf{n} 和 $\mathbf{Y}_{,\alpha}$ 相垂直而且 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$,因此又可以把 $\mathbf{n}_{,\beta}$ 写成

$$\mathbf{n}_{,\beta} = \mu_{\beta}^{\alpha} \mathbf{Y}_{,\alpha} \quad (2.57)$$

的形式。根据式(2.23)度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的定义可以有

$$g_{\alpha\beta,\delta} = \mathbf{Y}_{,\alpha\delta} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} + \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta\delta}$$

$$g_{\alpha\delta,\beta} = \mathbf{Y}_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{Y}_{,\delta} + \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\delta\beta}$$

$$g_{\beta\delta,\alpha} = \mathbf{Y}_{,\beta\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\delta} + \mathbf{Y}_{,\beta} \cdot \mathbf{Y}_{,\delta\alpha}$$

由于 $\mathbf{Y}_{,\alpha\beta} = \mathbf{Y}_{,\beta\alpha}$, 应用式(2.40) $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 的定义, 这三个式子给出

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta} + g_{\beta\delta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta}) = \mathbf{Y}_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{Y}_{,\delta} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta}$$

于是, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta} g^{\delta\epsilon} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta} g^{\delta\epsilon}$, 或 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 。因此式(2.56)中的待定系数 $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 正是克氏符号 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, 而式(2.56)成为高斯公式

$$\mathbf{Y}_{,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{Y}_{,\gamma} + L_{\alpha\beta} \mathbf{n} \quad (2.58)$$

由于 \mathbf{n} 和 $\mathbf{Y}_{,\alpha}$ 互相垂直, 因此

$$\mathbf{Y}_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} = 0$$

把式(2.57)和式(2.58)代入上式就得出

$$\mu_{\beta}^{\alpha} = -g^{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma}$$

因此, 式(2.57)成为 Weingarten 公式

$$\mathbf{n}_{,\beta} = -g^{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma} \mathbf{Y}_{,\alpha} \quad (2.59)$$

从式(2.59)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} &= g^{\delta\epsilon} L_{\alpha\epsilon} \mathbf{Y}_{,\delta} \cdot g^{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma} \mathbf{Y}_{,\alpha} \\ &= g^{\delta\epsilon} g^{\alpha\gamma} L_{\beta\gamma} L_{\alpha\epsilon} g_{\alpha\delta} \\ &= g^{\delta\epsilon} \delta_{\delta}^{\gamma} L_{\beta\gamma} L_{\alpha\epsilon} \\ &= L_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} g^{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (2.60)$$

二项式 $L_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} g^{\gamma\delta} d\alpha d\beta$ 称作曲面的第三基本形式 (third fundamental form) III^[1]。

2.5.2 曲面上的曲线

根据线性微分方程式解存在定理可以证明:对于给定的一组 $g_{\alpha\beta}$ 和 $L_{\alpha\beta}$, 式(2.58)和式(2.59)完全决定了相应的曲面,当然不包括曲面在空间中的平移和转动。这两个式子同样也可以用来探索曲面上曲线的弯曲特性。引用曲线上的弧长 s 作为参量,那么曲面上任意一条曲线就由

$$\mathbf{Y}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}[u(s), v(s)] = \mathbf{r}(s) \quad (2.61)$$

来确定。空间曲线上一点 $\mathbf{Y}(u, v)$ 的单位切线矢量 $\mathbf{t}(s)$ 按照式(2.12)由

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{Y}_{,u} \frac{du}{ds} + \mathbf{Y}_{,v} \frac{dv}{ds}$$

给出。从曲面上一点单位法线 \mathbf{n} 的定义式(2.29)可以看出 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$ 。因此,曲面上任意一条曲线上一点 $\mathbf{Y}(u, v)$ 的切线是在该点的切面上。这也就是曲面上一点切面的定义。把 ds 用 $(g_{\alpha\beta} d\alpha d\beta)^{1/2}$ 代替后,上式表明曲面上通过任意一点 P 的曲线的切线方向完全由 du/dv 决定。因此,由于 $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,u} du + \mathbf{r}_{,v} dv$ 和 $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,u} \delta u + \mathbf{r}_{,v} \delta v$, 通过曲面上一点 P 的两条分别由 du/dv 和 $\delta u/\delta v$ 确定的曲线之间的夹角 θ 将满足关系式

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{d\mathbf{Y}}{ds} \cdot \frac{\delta\mathbf{Y}}{\delta s} = g_{uv} \frac{du}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} + g_{vw} \left(\frac{du}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} \right) + g_{vw} \frac{dv}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} \\ \sin \theta = \left| \frac{d\mathbf{Y}}{ds} \times \frac{\delta\mathbf{Y}}{\delta s} \right| = \sqrt{g} \left| \frac{du}{ds} \frac{\delta v}{\delta s} - \frac{dv}{ds} \frac{\delta u}{\delta s} \right| \end{cases} \quad (2.62)$$

因此,曲面上两条曲线相互垂直的条件是

$$g_{uv} \frac{du}{dv} \frac{\delta u}{\delta v} + g_{vw} \left(\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} \right) + g_{vw} = 0 \quad (2.63)$$

二阶微分方程式

$$P(u, v) du^2 + Q(u, v) dudv + R(u, v) dv^2 = 0 \quad (2.64)$$

的两个根 du/dv 和 $\delta u/\delta v$ 决定了空间一点的方向。由于 $\frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} =$

$-Q(u, v)/P(u, v)$, 而 $\frac{du}{dv} \frac{\delta u}{\delta v} = R(u, v)/P(u, v)$, 因此由 $P(u, v)$, $Q(u, v)$ 和 $R(u, v)$ 所决定的两个方向互相垂直的条件就是

$$g_{uu}R(u, v) - g_{uv}Q(u, v) + g_{vv}P(u, v) = 0 \quad (2.65)$$

2.5.3 曲面上曲线的法曲率

对于式(2.61)的曲线, Frenet-Serret 公式(2.15)给出

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}(s) = c(s) \mathbf{m}$$

式中 $c(s)$ 是 $\mathbf{r}(u, v)$ 点处曲线的曲率。如果 θ 是曲面上 \mathbf{r} 点法线 \mathbf{n} 和曲线主法线 \mathbf{m} 之间的夹角, 那么

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}(s) = c(s) \cos \theta = c_n(s) \quad (2.66)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}(s) &= \frac{d}{ds} \left(\mathbf{r}_{,\alpha} \frac{d\alpha}{ds} \right) = \mathbf{r}_{,\alpha\beta} \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\beta}{ds} + \mathbf{r}_{,\alpha} \frac{d^2\alpha}{ds^2} \\ & \quad (\alpha, \beta = u, v) \end{aligned}$$

而 $\mathbf{r}_{,\alpha}$ ($= \mathbf{Y}_{,\alpha}$) 与 \mathbf{n} 正交, 因此由式(2.22)和式(2.58)的高斯公式有

$$c_n(s) = c(s) \cos \theta = \frac{L_{\alpha\beta} d\alpha d\beta}{g_{\alpha\beta} d\alpha d\beta} = \frac{II}{I} \quad (2.67)$$

式中 I 和 II 分别为第一和第二基本形式的式(2.22)和式(2.39)。式(2.67)说明 $c_n(s)$ 的数值由 $\frac{du}{dv}$ 决定, 也就是说由曲面上曲线的切线方向来决定。因此, 曲面上一点所有具有相同切矢量的曲线都有相同的 $c_n(s)$ 值。这就是 Meusnier 定理(theorem of Meusnier), $c_n(s)$ 称为 s 点曲线的法曲率(normal curvature)。

Meusnier 定理的特点可以用图 2-3 来说明。图中 \mathbf{v} 是曲面上一点 P 的某一给定切线方向。 \mathbf{n} 是曲面上 P 点的法线方向。由 \mathbf{n} 和 \mathbf{v} 确定的平面称为曲面在 P 点的正截面(normal section)。曲面与正截面相交处为

平面曲线 (c_n) 。 (c_n) 的主法线 m 和 n 相平行。 (c_n) 在 P 点的曲率就是法曲率 c_n 。

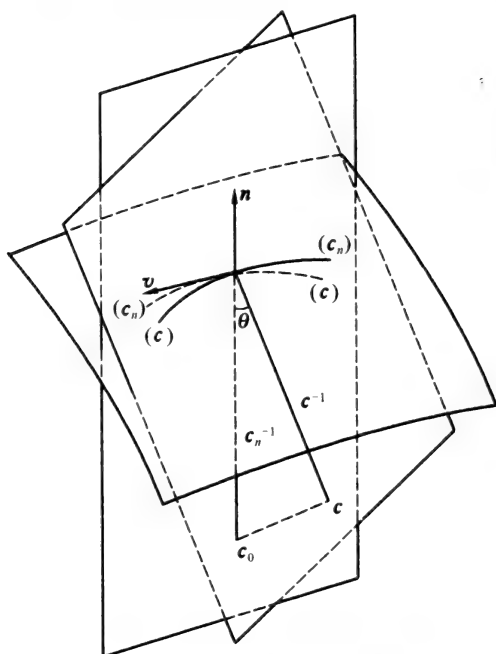


图 2-3 曲面上一点的正截面

2.5.4 曲率线和主曲率

曲面上相邻两点 Y 和 $Y + dY$ 的单位法线 n 和 $n + dn$ 一般并不相交。如果相交的话,二者必须是在同一平面上,也就是说 n , $n + dn$ 和 dY 共面。用数学式表示的话,就是要求满足

$$n \cdot dn \times dY = 0$$

由于 $n = n(u, v)$, $Y = Y(u, v)$, 因此上式成为

$$n \cdot [(n_{,u} \times Y_{,u})du^2 + (n_{,u} \times Y_{,v} + n_{,v} \times Y_{,u})dudv + (n_{,v} \times Y_{,v})dv^2] = 0 \quad (2.68)$$

根据 n 的定义式(2.29)、 $n_{,\beta}$ 的表达式(2.59)、 $g_{\alpha\beta}$ 的定义式(2.23)以及 g 的定义式(2.25),可以得出

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,u} = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_{uu}L_{uv} - g_{uv}L_{uu}) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v} = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_{uv}L_{uv} - g_{vv}L_{uu}) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,v} \times \mathbf{Y}_{,u} = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_{uu}L_{vv} - g_{uv}L_{uv}) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,v} \times \mathbf{Y}_{,v} = \frac{1}{\sqrt{g}}(g_{vv}L_{vv} - g_{vv}L_{vv}) \end{array} \right. \quad (2.69)$$

因此 \mathbf{n} , $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ 和 $d\mathbf{Y}$ 共面的条件是

$$\begin{aligned} (g_{uu}L_{uv} - g_{uv}L_{uu})du^2 + (g_{uu}L_{vv} - g_{uv}L_{uv})dudv \\ + (g_{vv}L_{vv} - g_{vv}L_{vv})dv^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

由于式(2.70)中 du^2 , $dudv$ 和 dv^2 的三个系数刚好满足式(2.65)的条件,因此这两个 du/dv 的方向互相垂直。所以在曲面上任意一点有两个互相垂直的曲面主方向(principal direction at a point on a surface)。在主方向上一方面 \mathbf{n} 和 $d\mathbf{Y}$ 垂直,另一方面由于 \mathbf{n} 是单位矢量,故 \mathbf{n} 又与 $d\mathbf{n}$ 垂直,因此主方向上 $d\mathbf{Y}$ 和 $d\mathbf{n}$ 平行。

决定法曲率 $c_n(s)$ 的式(2.67)表示 $c_n(s)$ 是 du/dv 的函数。 $c_n(s)$ 具有极值的条件是 $dc_n(s)/d\left(\frac{du}{dv}\right) = 0$ 。这个条件也正好是式(2.70)。因此,在曲面上一点有两条相互正交的曲线,每条曲线上的法曲率都具有极值,同时它的切线方向是沿主方向的,这两条曲线称为曲率线(line of curvature)。两条曲率线的法曲率称为曲面的两个主曲率(principal curvature),因此曲面上每一点有两个主曲率 c_1 和 c_2 ,它们分别对应于最大法曲率和最小法曲率。式(2.70)可以说是曲率线方程式。曲率的倒数称为曲线的曲率半径(radius of curvature)。

当曲面上一点满足

$$g_{uu} : g_{uv} : g_{vv} = L_{uu} : L_{uv} : L_{vv} \quad (2.71)$$

这一条件时,式(2.70)成为恒等式,这时式(2.67)给出的法曲率为一常数,也就是说在这一点上曲线的法曲率在各个方向是相等的。这样的点称为曲面上的脐点(umbilical point)。

2.5.5 平均曲率和高斯曲率

主曲率的正或负取决于 \mathbf{n} 的方向。在 § 2.3 中已经规定了开曲面的正向是从凹面指向凸面,而闭曲面的正向是指向曲面的外部。令曲面上一点 $\mathbf{Y}(u, v)$ 的曲率中心位置为 \mathbf{s} , 那么

$$\mathbf{s} = -\mathbf{n}/c + \mathbf{Y} \quad (2.72)$$

式中 c 是主曲率。由于曲率线上邻近点具有相同的 \mathbf{s} 值和 c 值, 因此

$$d\mathbf{s} = -d\mathbf{n}/c + d\mathbf{Y} = 0 \quad (2.73)$$

这就是罗德里格斯公式的矢量形式。写成参量 u 和 v 的形式时成为

$$(-c\mathbf{Y}_{,u} + \mathbf{n}_{,u})du + (-c\mathbf{Y}_{,v} + \mathbf{n}_{,v})dv = 0 \quad (2.74)$$

把式(2.74)分别求对 $\mathbf{Y}_{,u}$ 和对 $\mathbf{Y}_{,v}$ 的点积后, 消去 du 和 dv , 并应用式(2.59)就得出

$$c^2 + g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}c + L/g = 0 \quad (2.75)$$

一个二次方程的两个解分别为最大值的解和最小值的解, 因此式(2.75)的两个解就是曲面的主曲率 c_1 和 c_2 。它们满足关系式

$$\begin{cases} 2H = -(c_1 + c_2) = g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} \\ K = c_1c_2 = L/g \end{cases} \quad (2.76)$$

H 称为曲面的平均曲率(mean curvature), K 称为曲面的高斯曲率(Gaussian curvature)。曲面上一点的两个主曲率 c_1 和 c_2 具有相同符号时称为同向曲面(synclastic surface), 具有相反符号时称为反向曲面(anticlastic surface)。

如果把式(2.74)分别对 $\mathbf{Y}_{,u}$ 和对 $\mathbf{Y}_{,v}$ 求点积之后消去 c , 得到的正是式(2.70)。如果把曲率线作为 $u = \text{常量}$ 和 $v = \text{常量}$ 的参量曲线, 那么曲率线方程式(2.74)就相当于

$$dudv = 0 \quad (2.77)$$

这时就要求式(2.70)中的各项满足

$$\begin{cases} g_{uu}L_{uv} - g_{uv}L_{uu} = 0 \\ g_{uv}L_{vv} - g_{vv}L_{uv} = 0 \\ g_{uu}L_{vv} - g_{vv}L_{uu} \neq 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

把第一个式子乘以 L_{vv} , 第二个式子乘以 L_{uu} , 然后相减就得到

$$(g_{uu}L_{vv} - g_{vv}L_{uu})L_{uv} = 0$$

由于式(2.78)中的第三式的关系, 于是要求

$$L_{uv} = 0 \quad (2.79)$$

如果把式(2.78)中的第一式乘以 g_{vv} , 第二式乘以 g_{uu} , 然后两式相加就得到

$$(g_{uu}L_{vv} - g_{vv}L_{uu})g_{uv} = 0$$

因此要求

$$g_{uv} = 0 \quad (2.80)$$

式(2.79)和式(2.80)是参量曲线为曲率线的充要条件。比较一下式(2.77)和式(2.64), 可以看出式(2.64)中的 $P = R = 0$, $Q = 1$ 。代入式(2.65)后可以看出式(2.80)正是曲面上各点的曲率线正交的条件。

现在把曲率线选作参量曲线。由于式(2.79)和式(2.80)的要求, 沿 $\delta v = 0$ 方向和沿 $\delta u = 0$ 方向的主曲率 c_1 和 c_2 按照式(2.67)将成为

$$c_1 = \frac{L_{uu}}{g_{uu}}, \quad c_2 = \frac{L_{vv}}{g_{vv}} \quad (2.81)$$

现在考虑曲面上一点 P 的正截面。如果正截面是在 (du, dv) 的方向, 并且与 dv 方向成 θ 角, 那么根据式(2.62), 由于 $\delta v = 0$ 而且 $g_{uv} = 0$, 因此 $\delta s = \sqrt{g} \delta u$ 而

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{g_{uu}} \frac{du}{ds} \\ \sin \theta = \sqrt{g} \frac{dv}{ds} / \sqrt{g_{uu}} = \sqrt{g_{vv}} \frac{dv}{ds} \end{cases} \quad (2.82)$$

现在在 $dv = 0$ 方向的主曲率是 $c_1 = L_{uu}/g_{uu}$, 在 $du = 0$ 方向的主曲率是 $c_2 = L_{vv}/g_{vv}$; 而在主截面上的法曲率按照式(2.67)是 $c_n = L_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 +$

$L_v \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$, 因此有关于法曲率的欧拉定理(Euler theorem)是

$$c_n = c_1 \cos^2 \theta + c_2 \sin^2 \theta \quad (2.83)$$

从欧拉定理可以直接得到迪潘定理(Dupin theorem):曲面上两个互相垂直方向的法曲率之和等于两个主曲率 c_1 与 c_2 之和 $c_1 + c_2$ 。

§ 2.6 曲面上的二维微分不变量

曲面上的各种场都是曲面上各点位置的函数,因此这些函数是曲面上描述各点位置的标量参量 u 和 v 的函数。与曲面上的标量场和矢量场有关的微分不变式,在讨论与曲面有关的各种物理问题(特别是关于膜的弹性问题)中占有重要地位,因此有必要对这些微分不变式作一些必要的介绍。

2.6.1 标量场的梯度

对于三维欧几里得空间中的标量函数 f , 由于是标量,因此在不同的三维空间坐标系中具有相同的数值。对于不同的坐标系 (x^1, x^2, x^3) 和 (y^1, y^2, y^3) 应该有

$$f(x^i) = f(y^i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

f 函数的梯度(斜度) ∇f 是矢量函数,其定义是

$$\nabla f(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \quad (2.84)$$

它的方向是沿 f 在空间具有最大变化的方向,它的大小给出 f 最大变化率的大小。由于

$$f_{,x^i} = f_{,y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

因此 f 的梯度 ∇f 是一个一阶协变张量,或称作协变矢量。式(2.84)说明一个标量函数在空间一点的梯度是由空间中不在同一平面上三个方向的

函数的改变率来决定。现在的问题是,如果这个点是在一个空间曲面上,那么将如何用描述曲面的参量来表示梯度?显然,可以把空间中一点的三个非共面方向中的一个取做曲面上该点的曲面法线方向,而把其余两个方向取在沿曲面的方向。换句话说,就是把曲面上一点的函数的梯度分解成垂直于曲面的分量和沿曲面的二维梯度两个部分

$$\nabla f = \nabla' f + n \frac{\partial f}{\partial n} \quad (2.85)$$

n 是曲面上该点的单位法向矢量。后面这一项不是这里所关心的问题,但是二维梯度 $\nabla' f$ 的意义和它的具体表示形式又是什么呢?

一个标量函数 $f(u, v)$ 在曲面上一点的二维梯度 $\nabla' f$ 是一个沿曲面上该点 f 具有最大弧向增长率方向的矢量。矢量的大小就是在该点 f 具有最大弧向增长率的大小。在曲面上 $\phi = \text{常量的曲线称为函数的阶层曲线 (level curve)}^{[5]}$ 。如图 2-4 所示, c 和 c' 是两条相邻的对应于 ϕ 和 $\phi + d\phi$ ($d\phi > 0$) 的阶层曲线。 PQ 是 c 和 c' 之间阶层曲线的正交轨道线元, 它的长度是 dn 。 PR 是另一条通过 P 点的曲线元, 它与 c' 相交在 R 点。 PR 的长度为 ds 。显然, PQ 是 c 和 c' 之间通过 P 点的最短距离, 它的方向也正是 P 点具有最大增长率的方向, 所以 P 点的 ϕ 的梯度沿 PQ 方向, 并具有 $d\phi/dn$ 值。在 PR 方向 ϕ 的增长率为 $d\phi/ds = (d\phi/dn)(dn/ds) = (d\phi/dn)\cos\theta$, 也就是 $d\phi = ds \cdot \nabla' \phi$ 。式中 θ 是 PR 相对于 PQ 的倾斜角。

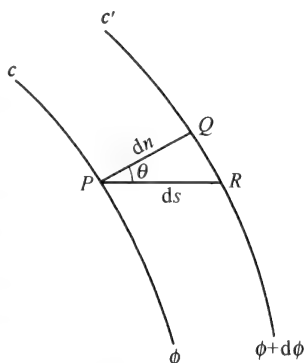


图 2-4 二维梯度示意图

如果在曲线 c 上各点的 $\nabla' \phi$ 值都相同, 那么这些 $\phi = \text{常量的阶层曲线将是互相平行的, 因此 } \phi = \text{常量的阶层曲线互相平行的充要条件是 } (\nabla' \phi)^2 \text{ 只是 } \phi \text{ 的函数。如果曲面上 } \psi = \text{常量的阶层曲线组与 } \phi = \text{常量的阶层曲线组正交, 那么 } \phi \text{ 函数与 } \psi \text{ 函数在曲面上各处的梯度都互相垂直。因此, 两组曲线呈正交的条件就是 } \nabla' \phi \cdot \nabla' \psi = 0$ 。

如果在曲线 c 上各点的 $\nabla' \phi$ 值都相同, 那么这些 $\phi = \text{常量的阶层曲线将是互相平行的, 因此 } \phi = \text{常量的阶层曲线互相平行的充要条件是 } (\nabla' \phi)^2 \text{ 只是 } \phi \text{ 的函数。如果曲面上 } \psi = \text{常量的阶层曲线组与 } \phi = \text{常量的阶层曲线组正交, 那么 } \phi \text{ 函数与 } \psi \text{ 函数在曲面上各处的梯度都互相垂直。因此, 两组曲线呈正交的条件就是 } \nabla' \phi \cdot \nabla' \psi = 0$ 。

虽然函数 ϕ 的梯度 $\nabla' \phi$ 与所选的参数无关, 为了在实际应用中方便起见, 下面将设法找出梯度用参数 u 和 v 来表达的形式。假设沿阶层曲

线 $\phi(u, v) = \text{常量}$ 上一点 $\mathbf{Y}(u, v)$ 作 δu 和 δv 的无限小的位移, 那么应该有 $(\partial\phi/\partial u)\delta u + (\partial\phi/\partial v)\delta v = 0$ 。于是, 根据式 (2.63), 对于一个与 $(\delta u, \delta v)$ 相垂直的无限小位移 (du, dv) 应该满足关系式

$$\frac{du}{dv} = \frac{g_{vv} \frac{\partial\phi}{\partial u} - g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial v}}{g_{uu} \frac{\partial\phi}{\partial v} - g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial u}}$$

因为这时 $\theta = \pi/2$, 而 $\delta v = -(\partial\phi/\partial u/\partial\phi/\partial v)\delta u$ 。位移 (du, dv) 显然是垂直于阶层曲线, 也就是平行于 $\nabla'\phi$ 的方向。在发生位移后, $\mathbf{Y}(u, v)$ 成为 $\mathbf{Y}(u, v) + d\mathbf{Y}(u, v)$, 而 $d\mathbf{Y}(u, v) = \mathbf{Y}_{,u} du + \mathbf{Y}_{,v} dv$ 。这个位移是垂直于阶层曲线 $\phi(u, v) = \text{常量}$ 的。因此, 矢量 \mathbf{V} 与 $\nabla'\phi$ 平行。

$$\mathbf{V} = \left(g_{vv} \frac{\partial\phi}{\partial u} - g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) \mathbf{Y}_{,u} + \left(g_{uu} \frac{\partial\phi}{\partial v} - g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial u} \right) \mathbf{Y}_{,v}$$

这个矢量在 $\mathbf{Y}_{,u}$ 方向的分量和在 $\mathbf{Y}_{,v}$ 方向的分量分别为 $\mathbf{Y}_{,u} \cdot \mathbf{V} / \sqrt{g_{uu}} = (g/\sqrt{g_{uu}}) \frac{\partial\phi}{\partial u}$ 和 $\mathbf{Y}_{,v} \cdot \mathbf{V} / \sqrt{g_{vv}} = (g/\sqrt{g_{vv}}) \frac{\partial\phi}{\partial v}$ 。由于在 u 轴上的线元是 $ds = \sqrt{g_{uu}} du$, 在 v 轴上的线元是 $ds = \sqrt{g_{vv}} dv$, 因此 \mathbf{V} 在 $\mathbf{Y}_{,u}$ 方向的分量正是 g 倍 ϕ 在 $\mathbf{Y}_{,u}$ 方向的导数。类似地, \mathbf{V} 在 $\mathbf{Y}_{,v}$ 方向的分量是 ϕ 在 $\mathbf{Y}_{,v}$ 方向导数的 g 倍。于是, 二维算符 ∇' 的具体形式成为

$$\begin{aligned} \nabla' &= \frac{1}{g} \left[\mathbf{Y}_{,u} \left(g_{vv} \frac{\partial}{\partial u} - g_{uv} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \mathbf{Y}_{,v} \left(g_{uu} \frac{\partial}{\partial v} - g_{uv} \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] \\ &= g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \frac{\partial}{\partial\beta} \quad (\alpha, \beta) = (u, v) \end{aligned} \quad (2.86)$$

一个与二维梯度算符有关的结果是: 曲面上一条曲线上的函数 ϕ 的梯度, 其在曲线的切向分量从曲线上一一点 A 到曲线上一一点 B 的积分等于 B 点的 ϕ 值与 A 点的 ϕ 值之差, 即

$$\int_A^B \mathbf{t} \cdot \nabla' \phi ds = \phi_B - \phi_A \quad (2.87)$$

这个结果是明显的, 因为 $\mathbf{t} \cdot \nabla' \phi$ 是沿 s 方向 ϕ 的变化量 $d\phi$, 因此积分等于 $\phi_B - \phi_A$ 。用式 (2.86) ∇' 的表示式来计算的话就是

$$\begin{aligned}
& \int_A^B \left(\mathbf{Y}_{,u} \frac{\partial u}{\partial s} + \mathbf{Y}_{,v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \cdot g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,a} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} ds \\
&= \int_A^B \left(\mathbf{Y}_{,i} \frac{\partial l}{\partial s} \right) \cdot g^{ij} \mathbf{Y}_{,i} \frac{\partial \phi}{\partial j} ds \\
&= \int_A^B g^{\alpha\beta} g_{\gamma\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} ds \\
&= \int_A^B \frac{\partial \beta}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} ds \\
&= \int_A^B \frac{d\phi}{ds} ds \\
&= \phi_B - \phi_A
\end{aligned}$$

从式(2.87)更可以看到,如果 ϕ 是单值的话,对于闭合曲线则有

$$\oint \nabla' \phi \cdot ds = 0 \quad (2.88)$$

另外,如果一个与曲面相切的矢量 \mathbf{F} 对曲面上每一条闭合曲线都存在 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 的结果,那么 \mathbf{F} 是一个标量点函数的梯度。这是因为在曲面上所有连接 A 点与 B 点的积分 $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 必然都有同一的数值。对于固定的 A 点, $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 就必然是一个由 B 点决定的点函数。这样,对于 B 点在曲面上的任何位移 $d\mathbf{r}$ 都要满足关系 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\phi = \nabla' \phi \cdot d\mathbf{r}$ 。这个关系对所有与曲面相切的 $d\mathbf{r}$ 都得满足,因此 \mathbf{F} 必然等于 $\nabla' \phi$ 。

2.6.2 曲面上矢量的散度和拉普拉斯算符

在2.4.2小节中已经提到过反变张量 $\mathbf{A} = A^k$ 的散度是 $A^{,k}$,协变张量 $\mathbf{A} = A_k$ 的散度是 $g^{ik} A_{k,i}$ 。类似于上一小节中处理曲面上标量函数 $\phi(u, v) = \text{常量的二维梯度的方法,把三维空间中的一个坐标选作曲面上的法线方向,从而得到算符}\nabla'$ 的表达式(2.86),曲面上的矢量场 $\mathbf{F}(u, v)$ 可以分解成为

$$\mathbf{F}(u, v) = P(u, v)\mathbf{Y}_{,u} + Q(u, v)\mathbf{Y}_{,v} + R(u, v)\mathbf{n} \quad (2.89)$$

的形式,式中 \mathbf{n} 是曲面上 (u, v) 点的单位法线矢量。矢量场 $\mathbf{F}(u, v)$ 在曲面上 (u, v) 点的散度就定义为 $\nabla' \cdot \mathbf{F}(u, v)$, 因此

$$\nabla' \cdot \mathbf{F}(u, v) = \nabla' \cdot (\mathbf{P}\mathbf{Y}_{,u}) + \nabla' \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{Y}_{,v}) + \nabla' \cdot (\mathbf{R}\mathbf{n}) \quad (2.90)$$

首先看上式中最后一项 $\nabla' \cdot (\mathbf{R}\mathbf{n})$, 由于 $\frac{\partial}{\partial \alpha}(\mathbf{R}\mathbf{n}) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} \mathbf{n} + \mathbf{R}\mathbf{n}_{,\alpha}$, 而 $\mathbf{Y}_{,\alpha}$ 与 \mathbf{n} 垂直, 因此按照式(2.38)有

$$\mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}(\mathbf{R}\mathbf{n}) = \mathbf{R}\mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} = -\mathbf{R}L_{\alpha\beta}$$

从式(2.86)的 ∇' 的具体形式并应用式(2.76)可以有

$$\nabla' \cdot \mathbf{n} = g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} = -g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} = -2H$$

因此

$$\nabla' \cdot (\mathbf{R}\mathbf{n}) = -2RH \quad (2.91)$$

对于 $\nabla' \cdot (\mathbf{P}\mathbf{Y}_{,u})$ 项可以有

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot (\mathbf{P}\mathbf{Y}_{,u}) &= g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}(\mathbf{P}\mathbf{Y}_{,u}) \\ &= g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot (P_{,\beta} \mathbf{Y}_{,u} + \mathbf{P}\mathbf{Y}_{,u\beta}) \\ &= g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} P_{,\beta} + P g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,u\beta} \\ &= P_{,u} + \frac{P}{g} [g_{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,u} \cdot \mathbf{Y}_{,u\alpha} + g_{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,v} \cdot \mathbf{Y}_{,u\beta} \\ &\quad - g_{\alpha\beta} (\mathbf{Y}_{,u} \cdot \mathbf{Y}_{,u\alpha} + \mathbf{Y}_{,v} \cdot \mathbf{Y}_{,u\alpha})] \\ &= P_{,u} + \frac{P}{g} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta, u} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta, v} - g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta, u} \right) \\ &= P_{,u} + \frac{P}{2g} (g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^2)_{,u} \\ &= P_{,u} + \frac{P}{2g} g_{,u} \\ &= P_{,u} + \frac{P}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{g} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{g}P) \end{aligned} \quad (2.92)$$

类似地可以有

$$\nabla'(\mathbf{QY}_{,v}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{g}\mathbf{Q}) \quad (2.93)$$

因此,综合式(2.91)、(2.92)和(2.93)可以有

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{g}P) + \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{g}\mathbf{Q}) \right] - 2HR \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\sqrt{g}F^\alpha) - 2HR \quad F^1 = P, F^2 = Q \end{aligned} \quad (2.94)$$

有了式(2.86)关于二维梯度算符 ∇' 的表示式和式(2.94)关于二维散度算符 $\nabla' \cdot$ 的表示式后,很容易地就可以得出二维拉普拉斯算符 ∇'^2 的表示式。既然考虑的是曲面上标量函数 $\phi(u, v)$ 的二维散度、梯度和拉普拉斯算符的问题,那么式(2.89)中的 $R(u, v)$ 项就可以忽略了。于是,相当于 $F^1 = P$ 的项现在是式(2.86)中的 $g^{uv} \frac{\partial}{\partial \beta}$,相当于 $F^2 = Q$ 的项是 $g^{v\beta} \frac{\partial}{\partial \beta}$,因此有

$$\begin{aligned} \nabla'^2 \phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\sqrt{g}F^\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{g}g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \phi \end{aligned}$$

也就是说,二维拉普拉斯算符(two dimensional Laplacian operator)的形式是

$$\nabla'^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{g}g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \quad (2.95)$$

2.6.3 曲面上矢量的旋度

对于式(2.89)的矢量函数 $\mathbf{F}(u, v)$,它的二维旋度 $\nabla' \times \mathbf{F}$ 的定义是

$$\nabla' \times \mathbf{F} = g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{, \alpha} \times \frac{\partial}{\partial \beta} (\mathbf{P}\mathbf{Y}_{, u} + \mathbf{Q}\mathbf{Y}_{, v} + R\mathbf{n}) \quad (2.96)$$

首先看最后一项 $g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \frac{\partial}{\partial \beta} R \mathbf{n}$,

$$g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \frac{\partial}{\partial \beta} (R \mathbf{n}) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial R}{\partial \beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{n} + R g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{,\beta}$$

上式右方第一项正是 $\nabla' R \times \mathbf{n}$, 第二项在应用式(2.58)的 Weingarten 公式后成为

$$R g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{,\beta} = -R g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} L_{\beta\gamma} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{Y}_{,\delta}$$

把 α 和 δ , β 和 γ 同时对调, 就可以得出

$$\mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{Y}_{,\delta} = -\mathbf{Y}_{,\delta} \times \mathbf{Y}_{,\alpha} = 0$$

于是

$$g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \frac{\partial}{\partial \beta} (R \mathbf{n}) = \nabla' R \times \mathbf{n} \quad (2.97)$$

另外, 应用式(2.58)的高斯公式形式可以有

$$\begin{aligned} & g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \frac{\partial}{\partial \beta} (P \mathbf{Y}_{,u}) \\ &= g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times [P_{,\beta} \mathbf{Y}_{,u} + P(\Gamma_{u\beta}^{\gamma} \mathbf{Y}_{,\gamma} + L_{u\beta} \mathbf{n})] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times P_{,\beta} \mathbf{Y}_{,u} &= g^{\alpha\beta} P_{,\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{Y}_{,u} = -g^{v\beta} P_{,\beta} \sqrt{g} \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{uv} P_{,u} - g_{uv} P_{,v}) \mathbf{n} \\ g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times P \Gamma_{u\beta}^{\gamma} \mathbf{Y}_{,\gamma} &= \frac{1}{2} P g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{u\delta}}{\partial \beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u} - \frac{\partial g_{u\beta}}{\partial \delta} \right) \mathbf{Y}_{,\alpha} \times \mathbf{Y}_{,\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{g} P (g^{u\beta} g^{v\delta} - g^{v\beta} g^{u\delta}) \left(\frac{\partial g_{u\delta}}{\partial \beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u} - \frac{\partial g_{u\beta}}{\partial \delta} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{P}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial g_{uv}}{\partial u} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial v} \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times L_{u\beta} \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\alpha\beta} L_{u\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \times (\mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}(L_{uv}Y_{,u} - L_{vu}Y_{,v})$$

于是有

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}Y_{,a} \times \frac{\partial}{\partial\beta}(PY_{,u}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u}(g_{uv}P) - \frac{\partial}{\partial v}(g_{vu}P) \right] \mathbf{n} \\ &\quad + \frac{P}{\sqrt{g}}(L_{uv}Y_{,u} - L_{vu}Y_{,v}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

类似地可以得出

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}Y_{,a} \times \frac{\partial}{\partial\beta}(QY_{,v}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u}(g_{uv}Q) - \frac{\partial}{\partial v}(g_{vu}Q) \right] \mathbf{n} \\ &\quad + \frac{Q}{\sqrt{g}}(L_{uv}Y_{,u} - L_{vu}Y_{,v}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

综合式(2.89)、(2.97)、(2.98)和(2.99)就有

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{F} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u}(g_{uv}P + g_{vu}Q) - \frac{\partial}{\partial v}(g_{vu}P + g_{uv}Q) \right] \mathbf{n} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{g}}(PL_{uv} + QL_{vu})Y_{,u} - \frac{1}{\sqrt{g}}(PL_{vu} + QL_{uv})Y_{,v} + \nabla'R \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.100)$$

对于 $\mathbf{F} = \nabla'\phi$ 的特例,按照式(2.86)可以有

$$\mathbf{F} = \nabla'\phi = \frac{1}{g} \left(g_{vu} \frac{\partial\phi}{\partial u} - g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) Y_{,u} + \frac{1}{g} \left(g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial v} - g_{vu} \frac{\partial\phi}{\partial u} \right) Y_{,v}$$

因而

$$P = \frac{1}{g} \left(g_{vu} \frac{\partial\phi}{\partial u} - g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial v} \right), \quad Q = \frac{1}{g} \left(g_{uv} \frac{\partial\phi}{\partial v} - g_{vu} \frac{\partial\phi}{\partial u} \right)$$

于是得到

$$\nabla' \times (\nabla'\phi) = \frac{1}{\sqrt{g}}(PL_{uv} + QL_{vu})Y_{,u} - \frac{1}{\sqrt{g}}(PL_{vu} + QL_{uv})Y_{,v}$$

因此 $\nabla' \times (\nabla'\phi)$ 与曲面相切。反过来,可以证明^[5],如果 \mathbf{F} 和 $\nabla' \times \mathbf{F}$ 都

与曲面相切,那么 \mathbf{F} 必然是一个标量函数的梯度。

式(2.100)的一个特例是 $P = Q = 0, R = 1$ 。这时 $\mathbf{F} = \mathbf{n}$ 。于是有

$$\nabla' \times \mathbf{n} = 0 \quad (2.101)$$

2.6.4 曲面上的面积元

如图 2-5 所示,在曲面上 $u = \text{常量}$ 的曲线上的线元 ds_u 和 $v = \text{常量}$ 曲线上的线元 ds_v ,按照式(2.22)分别为 $ds_u = \sqrt{g_{vv}} dv$ 和 $ds_v = \sqrt{g_{uu}} du$ 。 u 曲线和 v 曲线的切线的方向余弦分别为 $Y_{l,u}'/\sqrt{g_{uu}} = Y_{l,u}/\sqrt{g_{vv}}$ 和 $Y_{l,v}'/\sqrt{g_{vv}} = Y_{l,v}/\sqrt{g_{uu}}$ ($l = 1, 2, 3$)。如果曲面上一点的 u 曲线和 v 曲线之间的夹角为 ω ,那么

$$\begin{cases} \cos \omega = Y_{l,u}' Y_{l,v}' / \sqrt{g_{uu} g_{vv}} = g_{uv} / \sqrt{g_{uu} g_{vv}} \\ \sin \omega = \sqrt{g / g_{uu} g_{vv}} \end{cases} \quad (2.102)$$

因此图 2-5 中所示顶点为 (u, v) , $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$ 和 $(u + du, v + dv)$ 的曲面面积元 dA 和曲面的面积 A 分别为

$$\begin{aligned} dA &= ds_u ds_v \sin \omega = g^{1/2} du dv \\ A &= \oint g^{1/2} du dv \end{aligned} \quad (2.103)$$

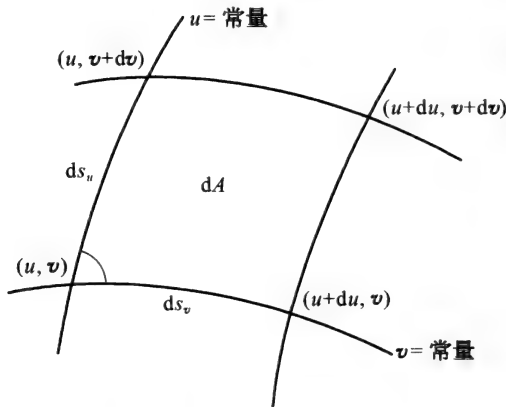


图 2-5 曲面上的面积元

2.6.5 一些微分不变量

根据二维梯度算符 ∇' 的定义式(2.86)和高斯公式(2.58)以及 Weingarten 公式(2.59),可以导出许多有关曲面上的微分不变式。这些不变式在讨论流体膜问题中会遇到。读者自己可以对它们加以证明。

$$\nabla'^2 \mathbf{Y} = 2H\mathbf{n} \quad (2.104)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla'^2 \mathbf{n} = 2K - 4H^2 \quad (2.105)$$

$$2K = \mathbf{n} \cdot \nabla'^2 - \nabla' \cdot \nabla'^2 \mathbf{Y} \quad (2.106)$$

如果 $\phi = \phi(u, v)$ 是一个标量函数, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(u, v)$ 和 $\mathbf{G} = \mathbf{G}(u, v)$ 是两个矢量函数,那么就存在下列三个关系式:

$$\nabla' \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla' \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla' \cdot \mathbf{F} \quad (2.107)$$

$$\nabla' \times (\phi \mathbf{F}) = \nabla' \phi \times \mathbf{F} + \phi \nabla' \times \mathbf{F} \quad (2.108)$$

$$\nabla' \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla' \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla' \times \mathbf{G} \quad (2.109)$$

另外一些有关曲面矢量 $\mathbf{Y}(u, v)$ 的关系式是

$$\nabla' \cdot \mathbf{Y} = 2 \quad (2.110)$$

$$\nabla' \cdot (H\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \cdot \nabla' H + 2H \quad (2.111)$$

$$\nabla' \times (H\mathbf{Y}) = (\nabla' H) \times \mathbf{Y} \quad (2.112)$$

其中 $H = H(u, v)$ 。

上面这些都是与本书后面章节有关的关系式。

参考文献

- [1] Spain B. *Tensor Calculus*. New York: Interscience Publisher, 1958
- [2] Flügge W. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. New York: Springer, 1972
- [3] Eddington A S. *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed. London:

Cambridge University Press, 1952

- [4] Eisenhart L P. *A Treatise of Differential Geometry of Curved Surfaces*. New York: Ginn And Company, 1909
- [5] Weatherburn C E. *Differential Geometry of Three Dimensions*. London: Cambridge University Press, 1955
- [6] Forsyth A R. *Lectures on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. London: Cambridge University Press, 1912
- [7] do Carmo M P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New York: Prentice Hall, 1976

第三章 液体膜曲面弹性理论

在生理学中长期以来有一个令人难以解释的问题:为什么人体中的红细胞(red blood cell)总是呈现双凹圆盘形?不论是用各向同性流体膜模型还是用固体外壳生物膜模型都无法解释这个双凹圆盘形问题。另一方面,生物膜本身基本上具有类脂双层结构,因此自然而然地令人想到去探索一下这个双凹圆盘形的出现会不会是来源于液晶态。本章将用两种不同的方法来推导 Helfrich 自曲率模型的弯曲能表达式。一种方法是遵循 Helfrich 1973 年所用的原始方法。另一种更严格的方法是应用二维微分几何学的方法。后一种方法将是本章的主要内容。两种方法都是根据与液晶曲面弹性理论的类比而来。自曲率这一 Helfrich 模型中的重要概念在膜和它所处水溶液环境的物理化学研究中有许多讨论。

§ 3.1 红细胞形状问题

3.1.1 细胞膜

在生物学的发展过程中物理学起了很重要的作用,一些历史事实清楚地说明了这个问题。1665 年胡克应用简单的显微镜认出细胞是生命的单位,并且认为,没有细胞膜,细胞就不能存在。19 世纪 30 年代发展了复显微镜,从而能够对单个细胞进行观测。1858 年, Virchow^[1] 认识到每一个细胞都来源于另外一个细胞。这一发现标志着细胞系统科学的开始。20 世纪 40 年代初期,电子显微镜的出现使得人们可以对细胞膜的精细结构直接进行观测,从而对细胞结构的描述深入到分子的层次。显然,人们对细胞结构的认识同光学和电子学的发展是同步的。

分子生物学的研究指出,细胞膜不但是细胞与其周围环境之间的隔

离物,使细胞内部保持稳定状态,同时也是用来控制细胞与其周围环境之间的物质、能量和信息定向交换的“部门”,并且蛋白质分子和酶分子也只有镶嵌在细胞膜上才能发挥它们的生化功能。由于这些“生物学要求”,大多数细胞器都具有膜结构。

细胞膜按照它们的生物功能大致可以分为几种不同的类型。图 3-1 是细胞的简略图。每一个细胞都是被一层薄膜所包围。薄膜将两种不同的流体媒质分隔开。细胞内部是细胞质,外部是细胞外媒质。这一层膜称为质膜。它就是第一章中曾经谈到的与胆固醇、蛋白质和酶有关的磷脂双层。细胞的组态,也就是细胞的形状,将是本书所要讨论的主题。

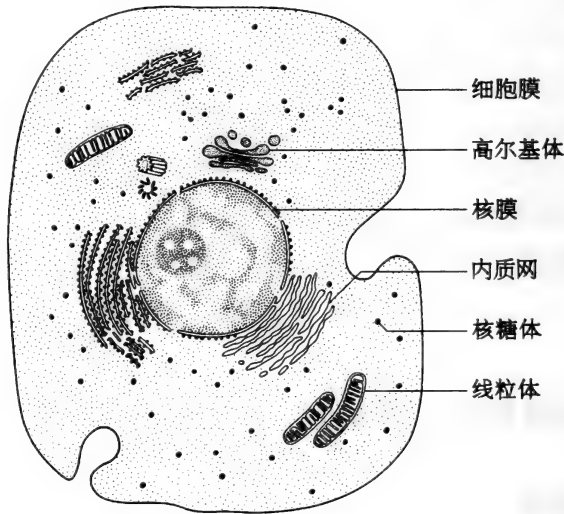


图 3-1 细胞的膜结构

另外,大部分细胞都是由一个细胞核同细胞质所组成。这里应该注意到,细胞核本身也是被一层类似于具有磷脂双层结构的双层膜所包围。不过,核膜(nuclear membrane)具有更复杂的化学成分,而且它是由一对互相平行的双层所组成。值得指出的是,由磷脂双层所组成的大多数别种细胞膜也与上述情形类似^[2],这在线粒体(mitochondria)、高尔基体(Golgi organ)、内软骨(endochondria)等等之中都可以看到。换句话说,从原则上讲,目前对细胞质膜(plasma membrane)的讨论也同样可以适用于大多数细胞器的膜系统。可以相信,细胞和细胞器的美丽而且神秘

的形状正是生物膜的“停止不前问题”的天然的经验表现。

3.1.2 细胞膜形状的高度可变性

质膜曾被看做是具有橡皮那样弹性的薄膜。但是这种看法同小细胞能够迅速发生高度形变的事实不相适应。红细胞的情形就是典型的例子。在血液循环过程中,红细胞可以发生高度的形变。在静止状态,人类的红细胞是典型的如图 3-2 所示的双凹圆盘形(circular biconcave discoid)。人们称之为盘形细胞(discocyte)。

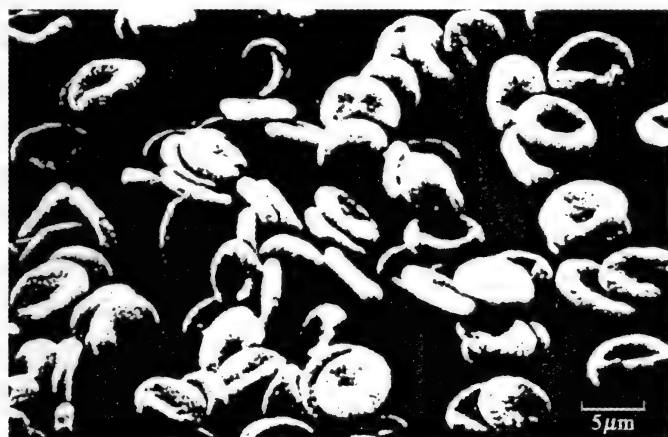


图 3-2 静止双凹圆盘形人类红细胞

当通过狭窄血管时,盘形细胞的扁平部分会转变成非常长的柱状延伸体。对薄橡皮来讲,不可能有这样大的变形,因为橡皮的厚度将变得非常非常薄。与之相反,电子显微镜的观测表明:不论红细胞是处在圆盘形的状态还是处在伸长了的手指形状状态,它的膜的厚度是相同的。红细胞膜的这种高度可形变性在微循环过程中可以观测到:在正常状态下大约为 $8\ \mu\text{m}$ 直径的红细胞可以挤过小于 $0.2\sim 0.5\ \mu\text{m}$ 宽的内皮间的间隙^[3]。

另一方面,当血液循环通过大血管时,红细胞会把它的双凹圆盘形改成长轴与血流方向平行的椭球形。可是,在静止状态条件下,如被遏制在玻璃片上的血浆,正常的人类红细胞会还原成双凹圆盘形。所有这些现象表明,细胞膜不但具有高度的可形变性,而且还具有高度的弹性。这两种特性构成了红细胞高度形变的来源。

3.1.3 解释双凹圆盘形状的难度

人类红细胞在静止状态下呈双凹圆盘形这个问题,在生物力学领域引起了很大的兴趣。基本的原因在于红细胞内部并没有细胞核,因此它的形状取决于作用在细胞膜上的力的平衡。换句话说,研究红细胞形状的改变可以简明地显示出膜的力学特性,因此正确的细胞膜的弹性模型首先应该能够解答为什么静止状态下的红细胞总是呈现为双凹圆盘形这一问题。

1948年生理学家 Ponder 建议,双凹圆盘形是氧气循环的最佳形状^[4]。不过,这样却不能解释为什么在毛细血管里气体交换过程中的红细胞却把盘形改变成为拖鞋形。在文献中有许多位研究生物力学的科学家对双凹圆盘形态提出过一系列的解释。例如,1968年 Fung 和 Tong^[5]假设红细胞是一个由膜包围、充满流体的壳,为了控制成双凹形状,膜的厚度在各处可以改变。可是这样的模型与电子显微镜观测到的膜厚度是均匀的这一事实相抵触。1968年 Lopez 等人^[6]提出,红细胞表面各处具有不同的电荷分布可能是形成它的形状的决定因素,可是 Greer 和 Baker^[7]指出红细胞表面的电荷分布是均匀的。1965年 Murphy^[8]试图把红细胞的形状同细胞膜上胆固醇的区域分布变化联系在一起,但是1973年 Seeman 等人的实验^[9]却不支持这种说法。除去上述一些模型之外,文献中还有大量关于红细胞形状的理论,但是没有一个是成功的。这些模型之所以失败,根本原因在于它们没有正确认识到细胞膜的物质状态。事实上,细胞膜处于液晶态。不幸的是,所有这些模型都未曾考虑到这一点。下面将清楚地指出,不考虑液晶态这一特点就不可能对红细胞的双凹圆盘形作出恰当的解释。

§ 3.2 液晶态流体膜的曲面弹性理论

3.2.1 液晶态的流体膜

生物膜同液晶之间的相互关系早已被人注意到。1854年, Virchow^[10]在研究活细胞的结构时就对髓磷脂的形状作了描述。髓磷脂的

形状曾被描述为液晶结构。直到 1933 年,法拉第学会会议时,生物结构具有液晶性质的观点才出现。到 1965 年,在 Kent 大学召开的第一次国际液晶会议上,液晶与生物结构成了一个热烈讨论的问题。1974 年,在瑞典首都斯德哥尔摩第五次国际液晶会议的讨论中,才确定了分子长程取向有序性是生物膜系统与溶致液晶系统的共同性质。根据第五次国际液晶会议的会议录,Freiberg 编辑了一本题为“溶致液晶与生物膜”的小册子^[11]。其后,一本题为“液晶与生物结构”^[12]的书籍的出版极大地推动了液晶在生物系统中的作用的研究。不过,即使到 1979 年,人们对生物膜和液晶之间关系的讨论基本上仍然处于简单定性类比的阶段。只有柏林自由大学的 Helfrich 教授根据液晶曲面弹性理论首先提出了一个流体膜的定量理论^[13]。

3.2.2 Helfrich 处理方法

在 § 3.1 一节中曾经谈到,引起人们研究流体膜的弯曲弹性问题源于难以解释红细胞的双凹圆盘形问题。在文献中可以看到,对于红细胞形状问题的处理主要有两种方式。第一种是机械工程式的方式^[14],用机械张力、拉伸应变等等来处理红细胞形状问题。用这种方法经常会遇到需要改变膜的面积和厚度的问题^[5]。为了克服这种困难,1970 年生物膜专家 Canham 提出,红细胞形状完全由弯曲弹性,也就是单位面积膜的弯曲能量,来决定这一假设^[15],具体的表达式就是

$$g_b = \frac{1}{2}kH^2 \quad (3.1)$$

不过,随之发现这个模型将导致红细胞会出现观察不到的哑铃形^[16]。另一方面,力学工作者试图用薄壳理论来解释红细胞形状的改变,但是又无法确定在零应变条件下的状态^[17],而且固态壳与红细胞沿血管壁的毛细流动也有矛盾。因此,在相当一段时间内,红细胞形状问题一直未能得到解决。

第二种方式是物理学家提出的。他们把生物膜同物理学中已知的某种凝聚态物质联系起来。类脂双层的厚度在 8 nm 的数量级,类脂双层中的每一层大约有 4 nm 厚。类脂双层中的分子主要是磷脂分子。磷脂

分子含有强有机分子,而它们的非极性部分却又取向于远离极性的环境。在水之类的极性液体和苯之类的非极性液体的交接面上,类脂分子的亲水头部停留在水里,而疏水的脂肪酸链则停留在非极性液体中,这样就形成了一个类脂单层。在单纯的水里,由于疏水链拒绝与水相接触,于是两层类脂单层聚集在一起形成一个类脂双层。在一定浓度条件下,类脂双层将自动卷曲而形成一个闭合的泡。这就是细胞膜的基本模型。在双层膜里,烃链的排列具有一定程度的有序性。在正常生理温度范围内,烃链的从优取向垂直于双层膜的表面。Helfrich 认识到,如果把烃链处理作为单轴液晶的指向矢,那么流体膜就正像一个厚度为两个类脂分子长度的垂直排列丝状液晶盒。根据单轴液晶 Frank 自由能密度(Frank free energy density)表示式^[18],并以膜的单位法线作为液晶指向矢,Helfrich 导出了膜的单位面积曲率弹性能 g 的表达式^[13]。

$$\begin{cases} g = \frac{1}{2}k(c_1 + c_2 - c_0)^2 + \bar{k}c_1c_2 \\ F = \oint g dA \end{cases} \quad (3.2)$$

式中 c_1 和 c_2 就是式(2.76)中的曲面的两个主曲率,常数 c_0 称为膜表面的自曲率(spontaneous curvature)^[13]。 F 表示膜的总弯曲能。常数 c_0 与液晶的自展曲(spontaneous splay)(或称永展曲) s_0 ^[18]紧密相关,它考虑了双层的不对称性或周围环境的不对称性。常数 k (> 0) 是弯曲刚度(bending rigidity), \bar{k} (> 0 或 < 0) 是高斯曲率 c_1c_2 的弹性模量。与液晶曲面弹性理论相比较, k 和 \bar{k} 的数量级都是在液晶弹性常数和膜厚度的乘积的数量级,也就是在 10^{-19} J 的数量级。式(3.2)称为流体膜的 Helfrich 自由能表达式,在处理 L_a 相生物膜的力学性能问题时,一般认为它是一个基本物理量。

1973 年 Helfrich 原来推导式(3.2)的过程是与 Frank 推导液晶曲率弹性能^[18]相类比而得到的。他考虑一个局域笛卡儿坐标系,其中系统的 z 轴与液晶的指向矢 \mathbf{n} 相平行。在局域坐标系中, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2})$ 是 x 和 y 的函数。由于转动的单轴对称性,展曲形变和鞍形展曲形变(saddle splay deformation)分别成为

$$\partial n_x / \partial x + \partial n_y / \partial y \quad (3.3)$$

$$\text{和} \quad (\partial n_x / \partial x)(\partial n_y / \partial y) - (\partial n_x / \partial y)(\partial n_y / \partial x) \quad (3.4)$$

显然,到二次项为止,曲率弹性能量密度可以写成

$$w = \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} - c_0 \right)^2 + \bar{k} \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial n_y}{\partial y} - \frac{\partial n_x}{\partial y} \frac{\partial n_y}{\partial x} \right) \quad (3.5)$$

令指向矢 \mathbf{n} 为流体膜的法线,就可以得到 Helfrich 曲率弹性能公式(3.2)。其中

$$c_1 + c_2 = \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \quad (3.6)$$

$$c_1 c_2 = \frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial n_y}{\partial y} - \frac{\partial n_x}{\partial y} \frac{\partial n_y}{\partial x} \quad (3.7)$$

式(3.6)的右方正是式(2.91)的 $\nabla' \cdot \mathbf{n}$ 。结合式(2.76),于是有

$$c_1 + c_2 = -2H = -g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

另外,式(2.101)已经指出 $\nabla' \times \mathbf{n} = \frac{\partial n_y}{\partial x} - \frac{\partial n_x}{\partial y} = 0$, 因此在液晶的 Frank 自由能密度中所包含的 $\mathbf{n} \cdot \nabla' \times \mathbf{n}$ 项和 $\mathbf{n} \times \nabla' \times \mathbf{n}$ 项在这里都不再存在。

Helfrich 后来在一次讲课中曾提出一个简单论证式(3.2)的办法:弯曲形变可以用膜表面的曲率来表示。第二章中已经指出,曲面上任意一点的弯曲特性可以用两个主曲率 c_1 和 c_2 来描述,因此弯曲能是与 c_1 和 c_2 相关的不变量的组合。用级数展开的话,到二次项为止,弯曲能应该是所有这些线性不变量和二次项不变量的复杂组合,也就是那些把 c_1 和 c_2 互换后不发生改变的项。线性项只有 $c_1 + c_2$ 一项能够满足要求。二次项却有 $(c_1 + c_2)^2$ 、 $c_1 c_2$ 、 $c_1^2 + c_2^2$ 和 $(c_1 - c_2)^2$ 这些可能的组合能够满足要求。四个二次项中只有两个是独立的,因此可以只采用 $(c_1 + c_2)^2$ 和 $c_1 c_2$ 这两项。这样,包括 $c_1 + c_2$ 、 $(c_1 + c_2)^2$ 和 $c_1 c_2$ 的自由能密度表示式就只能是式(3.2)的形式了。

Helfrich 把流体膜与液晶相类比的最重要的成就在于,它正确地给出了流体膜弹性模量 k 和 \bar{k} 的数量级。这个数量级应该是在液晶的曲率模量 ($\approx 10^{-11}$ N) 和类脂双层厚度 (≈ 5 nm) 的乘积的数量级,也就是说 k

和 \bar{k} 的数量级为 5×10^{-20} J。把式(3.2)和 Frank 的液晶曲率弹性能量密度表示式^[18]

$$g_{LC} = \frac{1}{2} [k_{11} (\nabla \cdot \mathbf{n} - s)^2 + k_{22} (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} + t_0)^2 + k_{33} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n})^2] \\ - k_{12} (\nabla \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}) - \frac{1}{2} (k_{22} + k_{24}) [(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + (\nabla \times \mathbf{n})^2] \\ - \nabla \mathbf{n} : \nabla \mathbf{n}] \quad (3.9)$$

作进一步的比较时,可以估计出^[19]

$$\begin{cases} k = k_{11} d \\ \bar{k} = -(k_{22} + k_{24}) d \end{cases} \quad (3.10)$$

式中 d 是膜的厚度。液晶的展曲弹性常数 k_{11} 在 10^{-11} N 的数量级。应用这些数值, Helfrich 首次估计出 $k = 5 \times 10^{-20}$ J^[13]。从卵磷脂测得的 k 值是 $(0.9 \sim 2.3) \times 10^{-19}$ J^[20]。这两个数值符合得相当好。因此可以认为,流体膜和液晶是非常类似的,它们可以用类似的数学方法进行处理。不过,式(3.10)的第二个式子可能会引起一些困惑。液晶的梅尔-绍珀模型(Maier-Saupe model)^[21]给出 $k_{24} = -3k_{22}/2$, 这样得到 $k = k_{22}d/2$ 。对液晶来讲, k_{22} 永远是正值。于是 \bar{k} 也将永远是正值。但是,实验^[22]结果指出,膜处于大量水环境中时可以有通道点阵结构^[23]、单个大膜泡和许多小膜泡这样三种不同的平衡组态。后两种组态都相当于 \bar{k} 为负值的情形。因此,对这个问题需要进一步加以考虑。在下一节中将应用 Nehring 和 Saupe 发展的更为全面的理论^[24]来代替原有理论进行类似的计算。

在 Frank 理论(Frank theory)和 Helfrich 理论(Helfrich theory)中,都只考虑了指向矢 \mathbf{n} (或者是曲面法线 \mathbf{n})的一阶导数。可是 Nehring 和 Saupe 指出^[24],必须考虑指向矢 \mathbf{n} 的二阶导数。他们指出,弹性自由能密度中除去式(3.9)中的项以外,还有另外两项。

$$\delta g_{LC} = k_{13} \mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} - k_{23} \mathbf{n} \cdot \nabla (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}) \quad (3.11)$$

由于 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, 很容易证明 $n_{i,jm}$ 项对 g_{LC} 的贡献可以与 $n_{i,j}n_{j,m}$ 的贡献相

比拟,因此不能忽略 δg_{LC} 项。现在看一看膜的曲面弹性理论中与 k_{13} 和 k_{23} 项相类似的项。1978 年 Mitov 证明:与丝状液晶相反,在类脂双层的二阶弹性自由能密度表示式中不存在与 k_{13} 相对应的项^[25]。下一节将指出,加进与 k_{13} 和 k_{23} 相关的项并不会改变式(3.9)的 Helfrich 自由能,不过弯曲刚度和高斯曲率模量 \bar{k} 将取新的形式。

$$\begin{cases} k = (k_{11} - 2k_{13})d \\ \bar{k} = (2k_{13} - k_{22} - k_{24})d \end{cases} \quad (3.12)$$

在液晶理论方面至今仍然有许多工作涉及 k_{13} 和 k_{24} 项的讨论^[26]。实际上, k_{13} , k_{24} 和 c_0 与整体中分子长链的取向序以及流体膜的两个分界面都密切相关,特别是自由曲率 c_0 与膜两表面的有序参数之差密切相关。它们所描述的正是膜或者是膜周围环境的非对称性的效应。在 3.2.4 小节中将与一些已知的实验结果进行比较,并提出一些可以进一步进行的实验。

3.2.3 二维微分不变量的推导

本小节将用第二章提出的二维微分不变式对 Helfrich 曲率弹性能量密度式(3.2)进行推导。在进行具体计算之前,先对流体膜的物理模型作一些简单的描述。

一般,可以把流体膜(亲水双层)理想化为一个水溶液中的二维曲面,而膜本身则是由长形分子双层组成的^[27]。膜中亲水分子的长轴(长链)的取向差不多是沿垂直于曲面的方向。水溶液与分子的亲水头部的相互作用以及与分子疏水尾链的相互作用保持了膜的完整性。同时,这些相互作用也使膜中分子垂直于膜面取向。因此,可以把流体膜处理为垂直于基片排列的单轴液晶盒。液晶盒中的液晶指向矢,简单地对应于膜面的法线单位矢量。为简单起见,可以把膜的厚度 d 处理为各处均匀的不变量。

为了找出膜的单位面积曲率弹性自由能的表达式,可以把假想的“液晶盒”的两个表面分别取作 $\mathbf{Y}(u, v)$ 和 $\mathbf{Y}(u, v) + d\mathbf{n}$, u 和 v 为两个实数参量,也就是实质坐标。为了在计算中避免涉及具体的位置坐标,故采用微分几何形式,并且引用下列一些符号:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \alpha}, & \mathbf{Y}_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \alpha \partial \beta}, & g_{\alpha\beta} = \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \\ g = \det g_{\alpha\beta}, & g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta}, & L_{\alpha\beta} = \mathbf{Y}_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v}, & L^{\alpha\beta} L_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta}, & L = \det L_{\alpha\beta} \\ (\alpha, \beta, \gamma = u, v) \end{cases} \quad (3.13)$$

为了简单起见,把 \mathbf{Y} 称为内表面,而把 $\mathbf{Y} + d\mathbf{n}$ 称为外表面。在内表面上,二维梯度算符 ∇' 定义为

$$\nabla' = g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (\alpha, \beta = u, v) \quad (3.14)$$

在 \mathbf{n} 方向的梯度算符为 $\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}$,因此式(3.9)和式(3.11)中的三维梯度算符 ∇ 成为^[28]

$$\nabla = \nabla' + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \quad (3.15)$$

平均曲率 H 和高斯曲率 K 分别为

$$\begin{cases} H = -\frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \\ K = c_1 c_2 = L/g \end{cases} \quad (3.16)$$

另外,来源于式(2.92)的 $\nabla' \cdot (\phi \mathbf{n})$ 和来源于式(2.100)的 $\nabla' \times \mathbf{F}$ 分别为

$$\begin{cases} \nabla'(\phi \mathbf{n}) = -2H\phi \\ \nabla' \times \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial u} (g_{uv} f_u + g_{vv} f_v) - \frac{\partial}{\partial v} (g_{uu} f_u + g_{uv} f_v) \right] \mathbf{n} \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{g}} (L_{uv} f_u + L_{vv} f_v) \mathbf{Y}_{,u} - \frac{1}{\sqrt{g}} (L_{uu} f_u + L_{uv} f_v) \mathbf{Y}_{,v} + \nabla' f_3 \times \mathbf{n} \end{cases} \quad (3.17)$$

式中 $\mathbf{F} = f_u \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial u} + f_v \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial v} + f_3 \mathbf{n}$, 而 ϕ , f_u , f_v 和 f_3 都是标量函数。式(3.17)的特殊情形是式(2.91)和式(2.101)的

$$\begin{cases} \nabla' \cdot \mathbf{n} = -2H \\ \nabla' \times \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

上面这些关系式都是第二章中已经得出的结果。这里把它们搜集在一起是为了便于推导下列一些结果。由于在“液晶盒”的外表面 $\mathbf{Y} + d\mathbf{n}$ 上的单位法线矢量 \mathbf{n}' 和内表面 \mathbf{Y} 上的单位法线 \mathbf{n} 之间只差一个与 d^2 成正比的零阶数量, $\mathbf{n}' = \mathbf{n} + O(d^2)$, 因此式(3.13)和式(3.14)给出

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{n} = 0 \quad (3.19)$$

于是可以有

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla' \cdot \mathbf{n} = -2H \\ \nabla \times \mathbf{n} = \nabla' \times \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

上式中的第二个关系式在层状液晶中是熟知的结果^[29]。式(3.20)直接给出了

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = 0 \\ (\nabla \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}) = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

由于式(3.21)的存在, 因此式(3.9)中的 k_{12} 项和式(3.11)中的 k_{23} 项都不存在。另外, 式(3.19)的存在表示式(3.9)中的 k_{33} 项也不存在。

不过, 式(3.11)中的 k_{13} 项需要进一步考虑。应用式(3.20)可以有

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla(-2H) = -2 \frac{\partial H}{\partial n}$$

由于膜的厚度 d 远比膜的面积要小得多, 因此可以把 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 用 $\lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{\delta H}{d} \right)$ 来代替, 其中 $\delta H = H' - H$ 是两层膜面 $\mathbf{Y} + d\mathbf{n}$ 和 \mathbf{Y} 之间的平均曲率之差。应用 Ou-Yang 和 Helfrich^[30] 所得到的结果(下节将详细加以讨论)

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 2H^2 - K \quad (3.22)$$

于是上式成为

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} = 2K - 4H^2 \quad (3.23)$$

作为式(3.23)的验证, 可以考虑半径为 r 的球面。这时 $H = -1/r$, $K =$

$1/r^2$ 。于是 $\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r^2} = 2H^2 - K$, 正好满足式(3.22)。

关于式(3.9)中的 $\nabla \mathbf{n} : \nabla \mathbf{n}$ 项, 式(3.14)和式(3.19)给出

$$\nabla \mathbf{n} : \nabla \mathbf{n} = \nabla' \mathbf{n} : \nabla' \mathbf{n} = g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} : g^{\gamma\epsilon} \mathbf{Y}_{,\gamma} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \epsilon}$$

应用 Weingarten 公式(2.59),

$$\mathbf{n}_{,\beta} = -g^{\xi\eta} L_{\beta\eta} \mathbf{Y}_{,\xi}, \quad \mathbf{n}_{,\epsilon} = -g^{uv} L_{\epsilon v} \mathbf{Y}_{,u}$$

于是有

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{n} : \nabla \mathbf{n} &= g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha} g^{\xi\eta} L_{\beta\eta} \mathbf{Y}_{,\xi} : g^{\gamma\epsilon} \mathbf{Y}_{,\gamma} g^{uv} L_{\epsilon v} \mathbf{Y}_{,u} \\ &= g^{\beta\nu} g^{\eta\epsilon} L_{\beta\eta} L_{\epsilon\nu} \\ &= (g^{uv} L_{u\eta} + g^{v\nu} L_{v\beta})(g^{m\eta} L_{uv} + g^{v\eta} L_{vv}) \\ &= (g^{uv} L_{uv})^2 + (g^{vv} L_{vv})^2 + 2g^{uv} L_{vv} g^{v\eta} L_{u\eta} \\ &= [(g^{uv} L_{uv} + g^{vv} L_{vv})^2 - 2g^{uv} L_{uv} g^{v\eta} L_{u\eta}] + 2g^{uv} L_{vv} g^{v\eta} L_{u\eta} \\ &= (g^{av} L_{av})^2 - 2(g^{uu} L_{uu} + g^{uv} L_{uv})(g^{uv} L_{uv} + g^{vv} L_{vv}) \\ &\quad + 2(g^{uv} L_{uv} + g^{vv} L_{vv})(g^{uv} L_{uu} + g^{vv} L_{uv}) \\ &= 4H^2 - \frac{2}{g^2} (g_{vv} L_{uu} - g_{uv} L_{uv})(-g_{uv} L_{uv} + g_{uu} L_{vv}) \\ &\quad + \frac{2}{g^2} (g_{vv} L_{uv} - g_{uv} L_{vv})(-g_{uv} L_{uu} + g_{uu} L_{uv}) \\ &= 4H^2 - 2 \frac{L}{g} \\ &= 4H^2 - 2K \end{aligned} \tag{3.24}$$

膜的单位面积的曲率自由能的最后形式可以应用下列近似来求取:

$$\begin{aligned} F &= \int (g_{LC} + \delta g_{LC}) dV \\ &= \oint (g_{LC} + \delta g_{LC}) dA \end{aligned} \tag{3.25}$$

式中 dV 是指两层膜 \mathbf{Y} 和 $\mathbf{Y} + d\mathbf{n}$ 之间的体积元, 而 dA 是 \mathbf{Y} 表面的面积元。

由于膜的厚度 d 近似等于两倍亲水分子的长度而远小于膜的线性长度,因此式(3.25)中的 dV 可以近似等于 d 和 dA 的乘积。把式(3.9)、(3.11)、(3.20)、(3.21)、(3.22)、(3.23)和(3.24)代入式(3.25)可以得到

$$F = d \oint \left[\frac{1}{2} (k_{11} - 2k_{13}) (2H)^2 + (2k_{13} - k_{22} - k_{24}) K + 2k_{11} s_0 H + \frac{1}{2} k_{11} s_0^2 \right] dA \quad (3.26)$$

另外,式(3.2)给出

$$F = \oint g dA = \oint \left[\frac{1}{2} k (2H + c_0)^2 + \bar{k} K \right] dA \quad (3.27)$$

把式(3.26)和式(3.27)相比较,除去一个无关紧要的常数之外,得到的除式(3.12)以外还有一个自曲率 c_0 的表示式

$$c_0 = \frac{k_{12} s_0}{d(k_{11} - 2k_{13})} \quad (3.28)$$

Frank 把 s_0 解释为液晶的自发展曲^[18]。这里的计算给出, k_{13} 不但出现在 k 的表示式中,同时也与 \bar{k} 有关。这个结果与 Mitov 的论证^[25]不同, Mitov 的结论是:与丝状液晶不同,在双层的二阶弹性自由能表示式中没有与 k_{13} 相关的项。不过他的结论无法加以检验。这里的证明清楚地表明, k_{13} 在液晶和在类脂双层的二阶弹性自由能中都存在,并且它还是解决式(3.10)的 \bar{k} 只有正值的关键。

3.2.4 从 Landau-de Gennes 理论看自曲率

式(3.28)表明:不考虑 k_{13} 的话, c_0 简单地成为 s_0/d , 也就是液晶自展曲效应。当然这一点并不能说明为什么不存在 k_{13} , 因此这种 c_0 包含 k_{13} 的情形可能是理解 Helfrich 的自曲率 c_0 的关键。不过,即使是对液晶来讲,这也仍然是一个困难的问题。

在液晶自由能密度中,

$$k_{13} \mathbf{n} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.29)$$

这一项是 1930 年左右由 Oseen 唯象地引入的^[31], 此后它被人们忽略了

将近 40 年。直到 1971 年, Nehring 等才重新发现这一项^[24]。事实上, 这一项相当难处理, 它几乎成了一个长时期难以解决的问题。至今 k_{13} 的大小, 甚至它的正负, 仍然是未知的。研究这一项的困难主要在于, 在自由能表示式(3.29)中可以用

$$k_{13} \nabla \cdot (\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (3.30)$$

来替换, 而把 $k_{13} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2$ 项归并到展曲自由能密度项中去。式(3.30)形式的这一项, 显然只对样品的表面能起作用, 因而不能从大块液晶的平衡结构实验中测量出来。另一方面, Nehring 等^[24] 以及近来 Barbero 和 Olando^[21] 从分子角度导出的有关 k_{13} 的表示式都包含有很多项, 因而也难以从分子的角度来解决它。在这里提一个折衷的办法: 用 de Gennes 的处理方法^[29] 来寻求一个 k_{13} 的表达形式。

为了获得二类相变的定量理论, 朗道引用了系统的有序参数 S 这个物理量。把系统的自由能密度展开成 S 的幂级数。de Gennes 又把朗道理论推广应用到单轴液晶系统。对于单轴液晶系统, 在系统中一点 \mathbf{r} , 序参数 $S(\mathbf{r})$ 可以定义为

$$S(\mathbf{r}) = \langle P_2(\cos \theta) \rangle \quad (3.31)$$

式中 θ 为 \mathbf{r} 点分子的长轴与该处指向矢 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ 之间的夹角, 而 P_2 就是勒让德二次多项式。不过 de Gennes 的广义序参数 $S_{\alpha\beta}$ 却是一个其迹为零的二阶张量

$$S_{\alpha\beta} = S(\mathbf{r}) [n_\alpha(\mathbf{r}) n_\beta(\mathbf{r}) - \delta_{\alpha\beta}/3] \quad (3.32)$$

式中 $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, 表示笛卡儿坐标轴的三个正交分量, 而当 $\alpha = \beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta} = 1$, 或当 $\alpha \neq \beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta} = 0$ 。展开到 $O(S^2)$ 项, 自由能密度 g_{LC} 的非齐次部分为

$$g_{LC} = \frac{1}{2} L_1 (\nabla_\alpha S_{\beta\gamma}) (\nabla_\alpha S_{\beta\gamma}) + \frac{1}{2} L_2 (\nabla_\alpha S_{\alpha\gamma}) (\nabla_\beta S_{\beta\gamma}) \quad (3.33)$$

式中 L_1 和 L_2 可以归结为弹性常数。作为很好的一级近似, 它们可以被认为是常数。

把式(3.31)和式(3.32)代入式(3.33)就得到

$$\begin{aligned}
 g_{1c} = & \frac{1}{3} \left(L_1 + \frac{L_2}{6} \right) (\nabla S)^2 + \frac{1}{6} (\mathbf{n} \cdot \nabla S)^2 + \frac{1}{3} L_2 S [2(\nabla \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \nabla S) \\
 & + (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}) \cdot \nabla S] + S^2 \left[L_1 \nabla \mathbf{n} : \nabla \mathbf{n} + \frac{1}{2} L_2 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} L_2 (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n})^2 \right] \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

在 S 为常数时, 式(3.34)还原为 Frank-Nehring-Saupe 的自由能密度表达式, 不过忽略了表面能的部分, 并且

$$\begin{cases} k_{11} = k_{33} = 2S^2 \left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) \\ k_{22} = 2S^2 L_1 \end{cases} \quad (3.35)$$

同时, 弹性常数 k_{12} , k_{13} 和 k_{23} 以及自展曲常数 S_0 和自扭曲常数 t_0 也都等于零。因此, 在 S 为常数的条件下, Landau-de Gennes 的自由能密度表示式对于丝状相只在定性上是正确的。

流体膜具有弯曲的表面, 它的表面法线 \mathbf{n} 和有序参数 S 都是空间坐标的函数。应用式(3.19)、(3.20)和(3.24), 可以看到式(3.33)右边最末一项成为

$$g_n = S^2 \left[4 \left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) H^2 - 2L_1 K \right] \quad (3.36)$$

式(3.34)中其余各项都与 ∇S 直接相关。对于非对称双层, 可以作一个简单的假设

$$S(\mathbf{r}) = S(u, v, z) = \begin{cases} S_0 & \left(\frac{d}{2} \leq z \leq d \right) \\ S_i & \left(0 \leq z \leq \frac{d}{2} \right) \end{cases} \quad (3.37)$$

式中常数 S_0 和 S_i 就是双层中两个单层的分子取向有序参量。在式(3.37)中, 局域笛卡儿坐标系的 z 轴与局域法向 \mathbf{n} 重合。应用式(3.15)可以有

$$\nabla S(\mathbf{r}) = \left(\nabla' + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) S = (S_0 - S_i) \mathbf{n} \delta \left(z - \frac{d}{2} \right) \quad (3.38)$$

式中 $\delta \left(z - \frac{d}{2} \right)$ 是狄拉克 δ 函数。双层的单位面积曲率弹性能 G 就是

$$G = \int_0^d g_{LC} dz \quad (3.39)$$

式(3.34)中前两项与 ∇S 的平方成正比,它所提供的只是一个无关大体的常数而可以不予考虑。式(3.34)中的第三项 G_1 与 ∇S^2 成正比。应用式(3.20)和式(3.37),有

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(\frac{L_2}{3}\right) \int_0^d 2(-2H)(S_o - S_i) S \delta\left(z - \frac{d}{2}\right) dz \\ &= \left(\frac{2L_2}{3}\right) (S_i^2 - S_o^2) H \left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

由于式(3.22),因此有

$$H\left(\frac{d}{2}\right) - H = \frac{d}{2}(2H^2 - K) + O(d^2) \quad (3.41)$$

于是得出

$$G_1 = \frac{2L_2}{3} (S_i^2 - S_o^2) \left[H + \frac{d}{2}(2H^2 - K) \right] + O(d^2) \quad (3.42)$$

用类似的办法可以求出式(3.34)中右方最后一项对 G 的贡献 G_2 ,

$$\begin{aligned} G_2 &= \int_0^d g_n dz \\ &= \frac{d}{2} (S_i^2 + S_o^2) \left[4\left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right) H^2 - 2L_1 K \right] + O(d^2) \end{aligned} \quad (3.43)$$

于是合起来有

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_2 \\ &= 2kH^2 + \bar{k}K + 2kc_0 H \end{aligned} \quad (3.44)$$

式中

$$\begin{cases} k = d \left[S_i^2 \left(L_1 + \frac{5L_2}{6} \right) + S_o^2 \left(L_1 + \frac{L_2}{6} \right) \right] \\ \bar{k} = -d \left[S_i^2 \left(L_1 + \frac{L_3}{3} \right) + S_o^2 \left(L_1 - \frac{L_2}{3} \right) \right] \\ c_0 = \frac{1}{3k} (S_i^2 - S_o^2) L_2 \end{cases} \quad (3.45)$$

这个结果除去一个平庸常数外,正好与 Helfrich 的结果式(3.27)相对应。

比较一下式(3.12)、(3.35)和(3.45),在令 $S_i^2 + S_o^2 = 2S^2$ 的条件下可以看出 Oseen-Frank-Nehring-Saupe 的各个弹性常数成为

$$\begin{cases} k_{11} = k_{33} = (S_i^2 + S_o^2) \left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right) \\ k_{22} = (S_i^2 + S_o^2) L_1 \\ k_{13} = - (S_i^2 - S_o^2) \frac{L_2}{6} \\ k_{24} = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

对于对称的双层, $S_i = S_o$, 因而 k_{13} 和 c_0 都为零。这一点也证实了自曲率 c_0 和弹性常数 k_{13} 都与膜的对称性直接相关。

3.2.5 从液晶角度看 Helfrich 弯曲能量

由于 k_{13} 随流体膜表面附近指向矢的畸变而改变^[21], 因此式(3.12)和式(3.28)指出了 k , \bar{k} 和 c_0 都不再是常量。于是,式(3.46)说明, S_i 和 S_o 不但与膜分子的极性有关,而且与膜的边界表面两边所受到的力也有关。Helfrich 理论已经预言自曲率 c_0 并非常数,这里又指出了 k 和 \bar{k} 也不是常数,它们可能与膜两边的化学结构有关。

一些实验室曾对卵磷脂双层的弯曲刚度 k 进行过测量。 k 的实验值是通过测量形状涨落幅度的均方值得到的。Helfrich 组和 Webb 组^[20]用的都是管状膜泡。两组测得的 k 值在 0.9×10^{-19} J 到 2.3×10^{-19} J 之间。所有实验测得的数值都比 Helfrich 理论预期的 0.5×10^{-19} J 要高^[13]。用式(3.12)计算 k 值,如果 k_{13} 取负值的话,计算值将高于 0.5×10^{-19} J。它与已有的实验值将符合得比较好一些。

Ou-Yang 和 Helfrich 曾指出^[30]: 一个波动的、半径为 ρ_0 的圆柱状膜泡(cylindrical vesicle), 如果稳定的话,需要满足

$$c_0 \rho_0 \geq 1 \quad (3.47)$$

的条件(圆柱膜泡的稳定性问题将在下一章作仔细的讨论)。这样,式(3.45)和式(3.46)说明 $k_{13} > 0$, 因此,至少从定性来说,上面的计算和实

验测得的结果是相当符合的。当然,如果能有更多关于 k 和 \bar{k} 与膜两边化学成分关系的实验数据,将更能验证上述理论正确与否。

显然,上面引用两个有序参量 S_i 和 S_o 只不过是一个简化的假设。一般来讲,应该在 Landau-de Gennes 自由能展开式中引入更多的项。例如,可以令

$$S(\mathbf{r}) = \begin{cases} S_o, & z \geq \frac{d}{2} \\ S_m, & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ S_i, & z \leq -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.48)$$

在这种假设下将给出

$$\begin{cases} k = 2S_m^2 d[(L_1 + L_2) + AL] \\ \bar{k} = -2S_m^2 d(L_1 + AL) \\ c_0 = \frac{2}{3k} S_m (S_i - S_o) L_2 \\ A = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{(S_o + S_i)}{2S_m} \right] \end{cases} \quad (3.49)$$

这时 S_m , S_i 和 S_o 分别描述膜内部和膜两边的取向有序性,同时 c_0 仍然描述膜的非对称性。当然,对这个模型还可以作更深入的计算。

3.2.6 自曲率与弯电效应

在上两小节里已经提到, Helfrich 模型的一个基本观点是:自曲率 c_0 与膜两边的取向序参量有密切的关系。在机制方面,膜泡中分子的化学结构的改变、所含盐量的改变以及温度的改变都会强烈地影响到 c_0 的数值^[32]。最简单的定量描述办法可以把 c_0 用相关的液晶自展曲 s_0 , 或是双层的膜外层和内层分子长链的序参量 S_o 和 S_i 表示出来^[13]。不过,其缺点是, s_0 , S_o 和 S_i 也都缺乏经测量得到的数值。因此,在这里提出一个新的、从宏观上研究 c_0 的意义的方法。从前面的讨论中可以看出, c_0 是控制膜泡几何形状与大小的参量。另一方面, Kaler 等人报道了一个用电荷作为控制手段以制备具有确定平均大小的膜泡的办法^[33]。因此,

在 c_0 和作用于膜上的电场之间应该有密切的关系。唯象地说,可以假定膜的非对称性这一复杂因素产生了一个电场 $\mathbf{E} = \left(\frac{\psi}{d}\right)\mathbf{n}$, 式中 $\psi = \psi^i - \psi^o$ 是作用在厚度为 d 的膜上的电压。这个电场将对膜的弯曲产生影响。类比于固体的压电效应,对于液晶, Meyer 引进了曲率电荷的概念^[34]。对于膜的能量来讲,曲率电荷对系统的自由能 F 增添了一项 ΔF 。

$$\Delta F = -\oint dA \int_0^d \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dz \quad (3.50)$$

式中 \mathbf{P} 是由于弯曲引起的极化,它的表示式是

$$\mathbf{P} = -e_{11} \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} + e_{33} (\nabla \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad (3.51)$$

这个唯象的 \mathbf{P} 项考虑到了所有与 $\nabla \mathbf{n}$ 一次项有关的项,而且弯电常数 e_{11} 和 e_{33} 又与分子的几何形状以及分子的电偶极矩有关。由于式(3.20)的 $\nabla \times \mathbf{n} = 0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{n} = -2H$, 因此 ΔF 简化为

$$\Delta F = 2e_{11} \psi \oint H dA \quad (3.52)$$

结合式(3.2),于是有

$$c_0 = \frac{e_{11}}{k} \psi \quad (3.53)$$

当然,还必须经过对膜的电压进行实际测量才能验证这个关系式是否正确。

理论^[13]和实验^[35]都指出, k 的数值是在 10^{-19} J 的数量级,但是至今还缺乏膜的弯电常数 e_{11} 的数值。幸好在参考文献[36]中有估计的数值: $e_{11} \approx 10^{-10} \text{ N}^{1/2}$ 。应用这一估计数值并取 $c_0 R_0 \approx -1.62$, $R_0 = 3.25 \mu\text{m}$ (与红细胞面积相同的球形的半径)^[37], 从式(3.53)可以得到

$$\psi \approx -15.0 \text{ mV} \quad (3.54)$$

把微电极引入红细胞来测量膜间的电压,从技术上看似乎是不可能的,但是确实有两个独立的小组^[38]曾经分别盯住了人的红细胞,并且测出了红细胞的电压为 -14 mV (Lassen 等人)^[38] 和 -8 mV (Jay 和 Burton)^[38]。前一个数值与式(3.54)异常符合。如果把 Helfrich 对 e_{11} 的估

计数值 $4 \times 10^{-11} \text{ N}^{[39]}$ 代入式(3.53), 那么得到的也几乎就是 -8 mV 。显然, 这些测量值支持了这里提出的理论。另外, 观测到的红细胞形状随 pH 值的改变^[3] 也可以作为另一个证明, 因为细胞的电压 ψ 是随溶液的 pH 值的变化而改变的。特别是红细胞玻璃效应 (glass effect of red blood cell) 也可能就是出于同一的原因。当不同的玻璃作为具有不同电压的化学电极接近红细胞时, 将会改变红细胞的电压 ψ , 从而改变 c_0 值。 c_0 值的改变于是引起与高阶球谐函数相关的红细胞形状的改变^[40]。

从上述的这些结果看, 弯电效应 (flexoelectric effect) 引起的膜电压可能部分地与膜的自曲率的物理机制相关。以往所得到的一些实验测量结果能够相当符合这一点, 看来也证实了理论的预言。

§ 3.3 膜泡形状普适方程式

红细胞的双凹圆盘形引起了 Helfrich 对流体膜的形状问题的注意, 他进而提出了膜的自曲率弹性形变理论。由于理论的复杂性, 一段时间以来都是应用数值计算方法来研究膜泡的形状问题, 但是数值计算方法难以给出普遍性的规律, 直到 1988 年才由欧阳钟灿和 Helfrich 根据自曲率理论导出了一个普适的膜泡形状方程式 (shape equation of vesicle)。不过, 这个方程式是一个高阶非线性微分方程式, 目前只找到了一些比较简单的特殊解, 尚无人对它进行过普适解的研究。本书后面的章节将对它们逐个加以讨论。

3.3.1 一些基本量的变分

在推导膜泡形状所满足的方程式过程中, 需要应用一些基本量的变分量。本节就推导这些基本量的变分量。

相对于 $\mathbf{Y}(u, v)$ 的膜面, 现在考虑一个与它临近的、发生了畸变的膜面 $\mathbf{Y}'(u, v)$ 。

$$\mathbf{Y}'(u, v) = \mathbf{Y}(u, v) + \phi(u, v)\mathbf{n} \quad (3.55)$$

式中 $\phi(u, v)$ 是一个微量的 (u, v) 的函数, 于是有

$$\mathbf{Y}'_{,\alpha} = \mathbf{Y}_{,\alpha} + \psi_{,\alpha} \mathbf{n} + \psi \mathbf{n}_{,\alpha} \quad (\alpha = u, v) \quad (3.56)$$

下标, α 表示对自变量 α 求导数。首先看 g_{ij} 的变分量 δg_{ij} 。按照式 (2.23) $g_{\alpha\beta}$ 的定义,

$$\delta g_{\alpha\beta} = \mathbf{Y}'_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}'_{,\beta} - \mathbf{Y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta}$$

应用 $g_{\alpha\beta}$ 和 \mathbf{n} 的定义、 \mathbf{n} 和 $\mathbf{Y}_{,\alpha}$ 的正交关系以及 Weingarten 公式 (2.59) 可以得到

$$\delta g_{\alpha\beta} = -2L_{\alpha\beta}\psi + \psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + \psi^2 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta}$$

借助式 (2.37)、(2.59) 和 (3.16) 可以证明

$$\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\alpha\beta} = L_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} g^{\gamma\delta} = 2HL_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta}$$

因此, $\delta g_{\alpha\beta}$ 成为

$$\delta g_{\alpha\beta} = -2L_{\alpha\beta}\psi + \psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + (2HL_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\psi^2 \quad (\alpha, \beta = u, v) \quad (3.57)$$

变分量 δg 由下式给出:

$$\delta g = [(g_{uu} + \delta g_{uu})(g_{vv} + \delta g_{vv}) - (g_{uv} + \delta g_{uv})^2] - (g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2)$$

应用式 (3.57), 于是有

$$\begin{aligned} \delta g = & g[-4H\psi + g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + (4H^2 + 2K)\psi^2 \\ & - 2KL^{\alpha\beta}\psi\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - 4HK\psi^3] + O(\psi^4) \end{aligned} \quad (3.58)$$

式中 $O(\psi^n)$ 表示比 $n(n > 2)$ 次高的、 ψ^3 以上的项。

$g^{1/2}$ 的变分量为

$$\begin{aligned} \delta g^{1/2} &= (g + \delta g)^{1/2} - g^{1/2} \\ &= g^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\delta g}{g} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta g}{g} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{\delta g}{g} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

应用式 (3.57) 和式 (3.58) 可以很容易得到

$$\delta g^{1/2} = g^{1/2} \left[-2H\psi + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + K\psi^2 + (Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta}) \psi \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \right] + O(\psi^4) \quad (3.59)$$

关于 $\delta g^{a\beta}$, 式(2.37)给出

$$\delta g^{a\beta} = \frac{1}{g} e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} \left\{ \delta g_{\gamma\delta} - (g_{\gamma\delta} + \delta g_{\gamma\delta}) \left(\frac{\delta g}{g} \right) \left[1 - \left(\frac{\delta g}{g} \right) + \left(\frac{\delta g}{g} \right)^2 + \dots \right] \right\}$$

应用式(3.57)和式(3.58)后可以有

$$\begin{aligned} \delta g^{a\beta} &= 2(2Hg^{a\beta} - KL^{a\beta})\psi + \left[\left(\frac{1}{g} \right) e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} - g^{a\beta} g^{\gamma\delta} \right] \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\ &\quad + 3(4H^2 g^{a\beta} - 2HKL^{a\beta} - Kg^{a\beta})\psi^2 - 2 \left[4Hg^{a\beta} g^{\gamma\delta} - Kg^{a\beta} L^{\gamma\delta} \right. \\ &\quad \left. - Kg^{\gamma\delta} L^{a\beta} - \left(\frac{2H}{g} \right) e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} \right] \psi \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} + 4(8H^3 g^{a\beta} - 4H^2 KL^{a\beta} \\ &\quad - 4HKg^{a\beta} + K^2 L^{a\beta})\psi^3 + O(\psi^4) \end{aligned} \quad (3.60)$$

\mathbf{n} 的变分 $\delta \mathbf{n}$ 是

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{n} &= \left[- \left(\frac{\delta g}{2g} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\delta g}{g} \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{\delta g}{g} \right)^3 + \dots \right] \mathbf{n} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[1 - \left(\frac{\delta g}{2g} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left(\frac{\delta g}{g} \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{\delta g}{g} \right)^3 + \dots \right] [(\mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{n})\psi_{,v} + (\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{,v})\psi_{,u} \\ &\quad + (\mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{n}_{,v} + \mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v} + \mathbf{n} \times \mathbf{n}_{,v}\psi_{,u} + \mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{n}\psi_{,v})\psi \\ &\quad + (\mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{n}_{,v})\psi^2] \end{aligned} \quad (3.61)$$

不难证明

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{n}\psi_{,v} + \mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{,v}\psi_{,u} &= e_{3\gamma\delta} (\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{,\delta})\psi_{,\gamma} = -\sqrt{g} g^{\gamma\delta} \mathbf{Y}_{,\gamma}\psi_{,\delta} \\ \mathbf{Y}_{,u} \times \mathbf{n}_{,v} + \mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{Y}_{,v} &= -2\sqrt{g} H \mathbf{n} \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{,v})\psi_{,u} + (\mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{n})\psi_{,v} &= e_{3\gamma\delta} (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{,\delta})\psi_{,\gamma} \\ &= \sqrt{g} KL^{\gamma\delta} \mathbf{Y}_{,\gamma}\psi_{,\delta} \\ \mathbf{n}_{,u} \times \mathbf{n}_{,v} &= \sqrt{g} K \mathbf{n} \end{aligned} \right. \quad (3.62)$$

式中 $e_{3\gamma\delta}$ 是式(2.30)的置换符号, 于是有

$$\delta \mathbf{n} = -g^{\alpha\beta} \mathbf{Y}_{,\alpha}\psi_{,\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mathbf{n}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - (2Hg^{\alpha\beta} - KL^{a\beta}) \mathbf{Y}_{,\alpha}\psi\psi_{,\beta}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} Y_{,\alpha} \psi_{,\beta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} - (2Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta}) \mathbf{n} \psi \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \\
 & - (4H^2 g^{\alpha\beta} - 2HKg^{\alpha\beta} - Kg^{\alpha\beta}) Y_{,\alpha} \psi^2 \psi_{,\beta} + O(\psi^4) \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

$L_{\alpha\beta}$ 的变分 $\delta L_{\alpha\beta}$ 为

$$\delta L_{\alpha\beta} = Y_{,\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{n} + (\psi \mathbf{n})_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} + (\psi \mathbf{n})_{,\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{n} \quad (3.64)$$

根据式(2.37)和式(3.16), 经过适当的项组合, 不难证明

$$\begin{cases}
 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} K g^{\gamma\delta} L^{\delta\epsilon} \psi_{,\epsilon} = 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} H \psi_{,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} \psi_{,\delta} \\
 K g_{\gamma\mu} L^{\gamma\delta} (g^{\mu\nu} L_{\alpha\nu})_{,\beta} \psi_{,\delta} = 2H (g^{\mu\delta} L_{\alpha\mu})_{,\beta} \psi_{,\delta} - g^{\gamma\delta} L_{\gamma\mu} (g^{\mu\nu} L_{\alpha\nu})_{,\beta} \psi_{,\delta}
 \end{cases} \quad (3.65)$$

应用高斯方程式(2.58)、(3.63)和(3.65)可以得到

$$\begin{cases}
 Y_{,\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{n} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \psi_{,\gamma} - \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} L_{\alpha\beta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} \psi \psi_{,\delta} \\
 \quad + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} g^{\epsilon\lambda} \psi_{,\delta} \psi_{,\epsilon} \psi_{,\lambda} - (2Hg^{\gamma\delta} - KL^{\gamma\delta}) L_{\alpha\beta} \psi \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\
 \quad + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} K - 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} H g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon}) \psi^2 \psi_{,\delta} + O(\psi^4) \\
 (\psi \mathbf{n})_{,\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = \psi_{,\alpha\beta} - (2HL_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta}) \psi \\
 (\psi \mathbf{n})_{,\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{n} = g^{\delta\epsilon} (L_{\beta\kappa} \delta_{\alpha}^{\gamma} + L_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta}^{\gamma}) \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} + [\Gamma_{\beta\nu}^{\delta} g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu} \\
 \quad + (g^{\mu\delta} L_{\alpha\mu})_{,\beta}] \psi \psi_{,\delta} - \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \psi_{,\alpha\beta} \\
 \quad + [(2g^{\delta\epsilon} H - KL^{\delta\epsilon}) (L_{\beta\kappa} \delta_{\alpha}^{\gamma} + L_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta}^{\gamma}) \\
 \quad + \frac{1}{2} (2HL_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta}) g^{\gamma\delta}] \psi \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\
 \quad + [(g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu})_{,\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\mu} + \Gamma_{\beta\nu}^{\gamma} g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu} g^{\delta\epsilon} L_{\gamma\epsilon}] \psi^2 \psi_{,\delta} + O(\psi^4)
 \end{cases} \quad (3.66)$$

因此得到

$$\delta L_{\alpha\beta} = \delta^{(1)} L_{\alpha\beta} + \delta^{(2)} L_{\alpha\beta} + \delta^{(3)} L_{\alpha\beta} + O(\psi^4) \quad (3.67)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned}
 \delta^{(1)} L_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha \psi_{,\beta} - (2HL_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\psi \\
 \delta^{(2)} L_{\alpha\beta} &= \left[g^{\delta\epsilon} (L_{\beta\kappa} \delta_\alpha^\gamma + L_{\alpha\epsilon} \delta_\beta^\gamma) - \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} L_{\alpha\beta} \right] \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\
 &\quad + [(g^{\mu\delta} L_{\alpha\mu})_{,\beta} + \Gamma_{\beta\nu}^\delta g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon}] \psi \psi_{,\delta} \\
 \delta^{(3)} L_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \nabla_\alpha \psi_{,\beta} \\
 &\quad + \left[(2Hg^{\delta\epsilon} - KL^{\delta\epsilon}) (L_{\beta\kappa} \delta_\alpha^\gamma + L_{\alpha\epsilon} \delta_\beta^\gamma) - Hg^{\gamma\delta} L_{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. + K \left(L^{\gamma\delta} L_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right) \right] \psi \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\
 &\quad + [(g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu})_{,\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\nu} \\
 &\quad \left. + \Gamma_{\beta\nu}^\gamma g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu} g^{\delta\epsilon} L_{\gamma\epsilon} - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon Hg^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta K] \psi^2 \psi_{,\delta}
 \end{aligned} \right. \quad (3.67a)$$

同时,根据式(2.51), $\psi_{,j}$ 的协变导数 $\nabla_i \psi_{,j}$ 是

$$\nabla_i \psi_{,j} = \psi_{,ij} - \Gamma_{ij}^\gamma \psi_{,\gamma} \quad (3.67b)$$

这里 $\delta^{(n)} f$ ($n = 1, 2, 3$)表示 ψ^n 级的变分量 δf 。

有了 $\delta g^{\alpha\beta}$ 和 $\delta L_{\alpha\beta}$ 的表示式,就可以对后面计算中非常重要的平均曲率 H 的变分 δH 进行计算。由于 $\delta g^{\alpha\beta}$ 和 $\delta L_{\alpha\beta}$ 都没有零阶项,因此

$$\left\{ \begin{aligned}
 \delta^{(1)} H &= g^{\alpha\beta} \delta^{(1)} L_{\alpha\beta} + (\delta^{(1)} g^{\alpha\beta}) L_{\alpha\beta} \\
 \delta^{(2)} H &= g^{\alpha\beta} \delta^{(2)} L_{\alpha\beta} + (\delta^{(2)} g^{\alpha\beta}) L_{\alpha\beta} + (\delta^{(1)} g^{\alpha\beta}) (\delta^{(1)} L_{\alpha\beta}) \\
 \delta^{(3)} H &= g^{\alpha\beta} \delta^{(3)} L_{\alpha\beta} + (\delta^{(3)} g^{\alpha\beta}) L_{\alpha\beta} + (\delta^{(2)} g^{\alpha\beta}) (\delta^{(1)} L_{\alpha\beta}) + (\delta^{(1)} g^{\alpha\beta}) (\delta^{(2)} L_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \right.$$

下面三个关系式只要把它们展开,然后应用式(2.37)和式(2.76)就可以得到证实。

$$\left\{ \begin{aligned}
 g^{\alpha\beta} g^{\delta\epsilon} (L_{\beta\kappa} \delta_\alpha^\gamma + L_{\alpha\epsilon} \delta_\beta^\gamma) \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} &= 2g^{\alpha\beta} g^{\delta\epsilon} L_{\beta\kappa} \psi_{,\alpha} \psi_{,\delta} \\
 &= 2(2Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta}) \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \\
 L_{\alpha\beta} e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} &= LL^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \\
 g_{\alpha\beta} e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} &= gg^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta}
 \end{aligned} \right. \quad (3.68)$$

另外,在把一些单项作适当组合后,就可以得到下面的一些关系式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} \psi_{,\delta} = 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} H \psi_{,\delta} - K \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} g_{\delta\epsilon} L^{\mu\epsilon} \psi_{,\mu} \\ g^{\delta\epsilon} L^{\alpha\beta} L_{\beta\epsilon} \psi_{,\alpha} \psi_{,\delta} = g^{\gamma\delta} \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\ \Gamma_{\beta\nu}^{\delta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu} = 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} H g^{\alpha\beta} - K L^{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\beta\nu}^{\delta} g^{\mu\nu} L^{\alpha\beta} L_{\alpha\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} g^{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (3.69)$$

借助式(3.68)和式(3.69),可以证明

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^{(1)} H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + (2H^2 - K) \psi \\ \delta^{(2)} H = (2H g^{\alpha\beta} - K L^{\alpha\beta}) \psi \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + \frac{1}{2} (H g^{\alpha\beta} - K L^{\alpha\beta}) \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \\ \quad + \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} (g^{\mu\delta} L_{\alpha\mu})_{,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon}] \psi \psi_{,\delta} + (3H^3 - 3HK) \psi^2 \\ \delta^{(3)} H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} - \frac{3}{2} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right) \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + \frac{3}{2} (4H^2 g^{\alpha\beta} \\ \quad - 2HKL^{\alpha\beta} - Kg^{\alpha\beta}) \psi^2 \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + (3H^2 g^{\gamma\delta} - 2HKL^{\gamma\delta} - Kg^{\gamma\delta}) \psi \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \\ \quad + \left[(2H g^{\alpha\beta} - K L^{\alpha\beta}) (g^{\gamma\delta} L_{\alpha\mu})_{,\beta} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} L_{\alpha\mu})_{,\beta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\nu} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} (8H^2 g^{\alpha\beta} - 4HKL^{\alpha\beta} - Kg^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} (4H g^{\alpha\beta} - K L^{\alpha\beta}) g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} \right] \psi^2 \psi_{,\delta} \\ \quad + (8H^4 - 8H^2 K + K^2) \psi^3 \end{array} \right. \quad (3.70)$$

曲面上的面积元 dA 和曲面的面积 A 已经由式(2.103)给出,它们分别是

$$\left\{ \begin{array}{l} dA = g^{1/2} du dv \\ A = \oint g^{1/2} du dv \end{array} \right.$$

引用式(3.59)可以得出面积元的变分 $\delta(dA)$ 和总面积的变分 δA 分别为

$$\begin{cases} \delta(dA) = \left[-2H\psi + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + K\psi^2 + (Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta})\psi\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} \right] dA + O(\psi^4) \\ \delta A = \oint \left[-2H\psi + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} + K\psi^2 + (Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta})\psi\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} \right] dA + O(\psi^4) \end{cases} \quad (3.71)$$

闭合曲面内所包含的体积可以看做是由一系列的锥体组成的, 锥体的底面积 $dA = g^{1/2} dudv$, 它的高度正是 $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n}$, 因此体积元 dV 成为

$$dV = \frac{1}{3} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{3} g^{1/2} (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n}) dudv$$

于是,

$$\begin{aligned} \delta(dV) &= \frac{1}{3} (g + \delta g)^{1/2} (\mathbf{Y} + \mathbf{n}\psi) \cdot (\mathbf{n} + \delta \mathbf{n}) dudv \\ &\quad - \frac{1}{3} g^{1/2} (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n}) dudv \end{aligned}$$

应用式(3.62)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{n} + \delta \mathbf{n} &= (g + \delta g)^{-1/2} (\mathbf{Y} + \mathbf{n}\psi)_{,u} \times (\mathbf{Y} + \mathbf{n}\psi)_{,v} \\ &= (g + \delta g)^{-1/2} [g^{1/2} (1 - 2H\psi + K\psi^2) \mathbf{n} \\ &\quad + e^{3\alpha\beta} (\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{,\beta}) \psi_{,\alpha} + e^{3\alpha\beta} (\mathbf{n} + \mathbf{n}_{,\beta}) \psi \psi_{,\alpha}] \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \delta(dV) &= \frac{1}{3} [g^{1/2} (\psi - 2H\psi^2 + K\psi^3) \\ &\quad - g^{1/2} (2H\psi - K\psi^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}) \\ &\quad + e^{3\alpha\beta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y} \psi_{,\alpha}) \\ &\quad + e^{3\alpha\beta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y} \psi \psi_{,\alpha})] dudv \quad (3.72) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} e^{3\alpha\beta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y} \psi_{,\alpha}) &= e^{3\alpha\beta} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y} \psi)_{,\alpha} - (\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y} \psi) \\ &\quad - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y}_{,\alpha}) \psi] \end{aligned}$$

$$e^{3a\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y}\psi_{,\alpha}) = \frac{1}{2}e^{3a\beta}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y}\psi^2)_{,\alpha} - (\mathbf{n}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{Y}\psi^2) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y}_{,\alpha}\psi^2)]$$

应用 Weingarten 公式(2.59)不难证明

$$\begin{cases} e^{3a\beta}(\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y}) = -g^{1/2}2H(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}) \\ e^{3a\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y}_{,\alpha}) = -2g^{1/2} \\ e^{3a\beta}(\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y}) = 2g^{1/2}K(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}) \\ e^{3a\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y}_{,\alpha}) = g^{1/2}2H \end{cases} \quad (3.73)$$

将式(3.73)代入式(3.72)就可以得出

$$\begin{cases} \delta(dV) = \frac{1}{3}[g^{1/2}(3\psi - 3H\psi^2 + K\psi^3) + e^{3a\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,\beta} \times \mathbf{Y}\psi)_{,\alpha} \\ \quad + \frac{1}{2}e^{3a\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \times \mathbf{Y}\psi^2)_{,\alpha} + O(\psi^4)]dudv \\ \delta V = \oint (H - H\psi^2 + \frac{1}{3}K\psi^3)dA + O(\psi^4) \end{cases} \quad (3.74)$$

3.3.2 普适形状方程式

任何处在平衡状态的物理系统,它的能量必然是处在最小值,也就是说该系统在平衡状态时的能量必然小于该系统在微小变易状态下的能量。类比于层状 A 相液晶的双层, Helfrich 认为膜泡的形状能量可以用下式表达:

$$\begin{aligned} F &= F_c + \Delta p \int dV + \lambda \oint dA \\ &= \frac{1}{2}k_c \oint (2H + c_0)^2 dA + \Delta p \int dV + \lambda \oint dA \end{aligned} \quad (3.75)$$

式中 F_c 是曲率弹性能量、 k_c 是膜泡中膜的弯曲刚度、面积元和体积元的变分分别由式(3.71)和式(3.74)给出^[30, 40]; 式中 H 是膜表面的平均曲

率,而自由率 c_0 则考虑了膜表面的不对称性或是膜与周围环境的非对称性; $\Delta p = p_{\text{out}} - p_{\text{in}}$ 是膜外与膜内的压强差; λ 可以认为是作用在膜上的拉伸应变或是膜的表面张力。从数学角度来看, Δp 和 λ 可以看做是拉格朗日未知乘子。对应于膜泡表面作 $\psi \mathbf{n}$ 的变分时的各个量的变分表示式已经在上一节中给出,现在为了求得形状方程式还要求出相应的 F 的一阶变分量 $\delta^{(1)} F$,也就是在 δF 中与 ψ 成正比的项。

根据已知的一些有关的变分量可以得到 F_c 的一阶变分 $\delta^{(1)} F_c$,它由下式给出:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} F_c = k_c \oint & [(2H + c_0)(2H^2 - c_0 H - 2K)\psi + g^{\alpha\beta}(2H + c_0)\psi_{,\alpha\beta} \\ & - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} (2H + c_0)\psi_{,\gamma}] \sqrt{g} dudv \end{aligned} \quad (3.76)$$

对于任意两个函数 $\psi(u, v)$ 和 $\phi(u, v)$,存在着下列两个关系式:

$$\left\{ \begin{aligned} \oint f \phi_{,\alpha} dudv &= \oint (f\phi)_{,\alpha} dudv - \oint f_{,\alpha} \phi dudv \\ &= -\oint f_{,\alpha} \phi dudv \\ \oint f \phi_{,\alpha\beta} dudv &= \oint [(f\phi)_{,\alpha\beta} - f_{,\beta} \phi_{,\alpha} - f_{,\alpha} \phi_{,\beta} - f_{,\alpha\beta} \phi] dudv \\ &= \oint [(f\phi)_{,\alpha\beta} - (f_{,\beta} \phi)_{,\alpha} - (f_{,\alpha} \phi)_{,\beta} + f_{,\alpha\beta} \phi] dudv \\ &= \oint f_{,\alpha\beta} \phi dudv \end{aligned} \right. \quad (3.77)$$

式中 α 和 β 等于 u 或 v 。把式(3.77)的关系应用到式(3.76)就可以得到

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} F_c = k_c \oint & \{ (2H + c_0)(2H^2 - c_0 H - 2K) \sqrt{g} \\ & + [\sqrt{g} g^{\alpha\beta} (2H + c_0)]_{,\alpha\beta} + [\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} (2H + c_0)]_{,\gamma} \} \psi dudv \end{aligned}$$

式中 $[\sqrt{g} g^{\alpha\beta} (2H + c_0)]_{,\alpha\beta}$ 可以写成 $[(\sqrt{g} g^{\alpha\beta})_{,\beta} (2H + c_0)]_{,\alpha} + [(\sqrt{g} g^{\alpha\beta}) (2H + c_0)_{,\beta}]_{,\alpha}$ 。应用式(2.23)、(2.26)和(2.40),对任意函数 $f(u, v)$ 可以证明(见本章附录)有

$$[(\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\beta}f]_{,\alpha} = -(\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\sqrt{g}g^{\alpha\beta}f)_{,\gamma} \quad (3.78)$$

根据式(2.95)的二维拉普拉斯算符表示式,显然,

$$[\sqrt{g}g^{\alpha\beta}(2H+c_0)_{,\beta}]_{,\alpha} = \sqrt{g}\nabla'^2(2H+c_0)$$

因此可以得到

$$\delta^{(1)}F_c = k_c \oint [(2H+c_0)(2H^2-c_0H-2K) + \nabla'^2(2H+c_0)]\psi\sqrt{g}dudv \quad (3.79)$$

于是 $\delta^{(1)}F$ 成为

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}F = & \oint [\Delta p - 2\lambda H + k_c(2H+c_0)(2H^2-c_0H-2K) \\ & + k_c\nabla'^2(2H+c_0)]\psi\sqrt{g}dudv \end{aligned} \quad (3.80)$$

由于 ψ 是 u 和 v 的一个任意的、足够小的而且非常平滑的函数,因此要求 $\delta^{(1)}F = 0$ 就需要满足关系式

$$\Delta p - 2\lambda H + k_c(2H+c_0)(2H^2-c_0H-2K) + k_c\nabla'^2(2H+c_0) = 0$$

这就是膜泡的普适方程式。除非膜本身以及膜与周围环境之间的对称性在各点不同,也就是说除非 $c_0 = c_0(u, v)$, 那么 c_0 一般是一个常数,而普适方程式也简化成为

$$\Delta p - 2\lambda H + k_c(2H+c_0)(2H^2-c_0H-2K) + 2k_c\nabla'^2H = 0 \quad (3.81)$$

$\delta^{(1)}F = 0$ 只是膜泡的能量具有极值的条件,它并不说明膜泡的能量定然是在最小值。换句话说,普适形状方程式(3.81)的解并非必然是一个稳定膜泡解,但是实验观测到的只能是稳定的膜泡。稳定解需要 $\delta^{(2)}F$ 是确定的正值。二阶变分 $\delta^{(2)}F$ 由下式给出:

$$\begin{cases} \delta^{(2)}F = \Delta p \delta^{(2)} \int dV + \lambda \delta^{(2)} \oint dA + \frac{1}{2} k_c \delta^{(2)} \oint (2H+c_0)^2 dA \\ \delta^{(2)} \int dV = - \oint H \psi^2 \sqrt{g} d u d v \\ \delta^{(2)} \oint dA = \oint \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + K \psi^2 \right] \sqrt{g} d u d v \end{cases} \quad (3.82)$$

$\delta^{(2)} F$ 表达式中的第三项 $\delta^{(2)} F_c = \frac{1}{2} k_c \delta^{(2)} \oint (2H + c_0)^2 dA$ 比较复杂,

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F_c &= \frac{1}{2} k_c \oint 4[(2H + c_0)\delta^{(2)} H + (\delta^{(1)} H)^2] \sqrt{g} dudv \\ &\quad + \frac{1}{2} k_c \oint 4(2H + c_0)(\delta^{(1)} H)(\delta^{(1)} dA) + \frac{1}{2} k_c \oint (2H + c_0)^2 (\delta^{(2)} dA) \end{aligned} \quad (3.83)$$

应用式(3.70)中的第二式和式(3.82)中的第三式可以得出

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F_c &= \oint \left\{ \frac{1}{2} k_c (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \psi_{,\beta})^2 - 2k_c (K + c_0 H) g^{\alpha\beta} \psi \nabla_\alpha \psi_{,\beta} \right. \\ &\quad + 2k_c (2H + c_0) (2H g^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta}) \psi \psi_{,\alpha\beta} + k_c \left(H + \frac{c_0}{2} \right) (3H g^{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_0 g^{\alpha\beta} - 2KL^{\alpha\beta}) \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + k_c (2H + c_0) [g^{\alpha\beta} (g^{\gamma\delta} L_{\alpha\gamma})_{,\beta} \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta (2H g^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta})] \psi \psi_{,\delta} \\ &\quad \left. + \left[2k_c (2H^2 - K)^2 - 2k_c \left(H^2 + \frac{c_0^2}{4} \right) \right] \psi^2 \right\} \sqrt{g} dudv \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\delta^{(2)} F = \delta^{(2)} F_c + \oint \left[\frac{1}{2} \lambda g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + (\lambda K - \Delta p H) \psi^2 \right] \sqrt{g} dudv \quad (3.85)$$

$$\text{由于} \quad \psi \psi_{,\alpha} = \frac{1}{2} (\psi^2)_{,\alpha}, \quad \psi \psi_{,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\psi^2)_{,\alpha\beta} - \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \quad (3.86)$$

因此式(3.84)和式(3.85)分别成为

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F_c &= \oint \left\{ \frac{1}{2} k_c (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \psi_{,\beta})^2 - 2k_c (K + c_0 H) g^{\alpha\beta} \psi \nabla_\alpha \psi_{,\beta} \right. \\ &\quad + k_c \left(H + \frac{c_0}{2} \right) \left[\left(H + \frac{c_0}{2} \right) g^{\alpha\beta} + 2(KL^{\alpha\beta} - 3H g^{\alpha\beta}) \right] \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \\ &\quad + k_c (2H + c_0) (2H g^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta}) (\psi^2)_{,\alpha\beta} + k_c \left(H + \frac{c_0}{2} \right) [g^{\alpha\beta} (g^{\gamma\delta} L_{\alpha\gamma})_{,\beta} \\ &\quad - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta (2H g^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta})] (\psi^2)_{,\delta} \\ &\quad \left. + \left[2k_c (2H^2 - K)^2 - 2k_c K \left(H^2 - \frac{c_0^2}{4} \right) \right] \psi^2 \right\} \sqrt{g} dudv \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\delta^{(2)} F = \delta^{(2)} F_c + \oint \left[\frac{1}{2} \lambda g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + (\lambda K - \Delta p H) \psi^2 \right] \sqrt{g} dudv \quad (3.88)$$

应用式(3.76),于是最后得出

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F_c = & \oint \left\{ \frac{1}{2} k_c (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \psi_{,\beta})^2 - 2k_c (K + c_0 H) g^{\alpha\beta} \psi \nabla_\alpha \psi_{,\beta} \right. \\ & + k_c \left(H + \frac{c_0}{2} \right) \left[\left(H + \frac{c_0}{2} \right) g^{\alpha\beta} + 2(KL^{\alpha\beta} - 3Hg^{\alpha\beta}) \right] \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} \\ & + \frac{k_c}{\sqrt{g}} [\sqrt{g}(2H + c_0)(2Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta})]_{,\alpha\beta} \psi^2 \\ & - \frac{k_c}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{g} \left(H + \frac{c_0}{2} \right) g^{\alpha\beta} (g^{\gamma\delta} L_{\alpha\gamma})_{,\beta} + k_c \sqrt{g} \left(H + \frac{c_0}{2} \right) \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} L_{\gamma\epsilon} \right. \\ & \left. - \sqrt{g} \left(H + \frac{c_0}{2} \right) \Gamma_{\alpha\beta}^\delta (2Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta}) \right]_{,\delta} \psi^2 \\ & \left. + 2k_c \left[(2H^2 - K)^2 - K \left(H^2 - \frac{c_0^2}{4} \right) \right] \psi^2 \right\} \sqrt{g} dudv \quad (3.89) \end{aligned}$$

$$\delta^{(2)} F = \delta^{(2)} F_c + \oint \left[\frac{\lambda}{2} g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} + (\lambda K - \Delta p H) \psi^2 \right] \sqrt{g} dudv \quad (3.90)$$

对于稳定的膜泡,在任何 $\psi \neq 0$ 的条件下, $\delta^{(2)} F$ 必须是确定的正值。通常这就要求与式(3.90)相关的、作用于 ψ 的算符的本征值满足一定的条件。不过式(3.90)固然提供了对任何稳定膜泡形状作稳定性分析的工具,但实际上一般很难完成这样的分析。只有在一些比较简单的情形才有可能进行这样的解析计算,而且,式(3.90)的运用,其成败还取决于是否有恰当的 ψ 函数。

附录 式(3.78)的证明

式(3.78)指出,对于任意函数 $f(u, v)$ 有

$$[(\sqrt{g} g^{\alpha\beta})_{,\beta} f]_{,\alpha} = -(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} f)_{,\gamma} \quad (3.78)$$

由于

$$\begin{aligned}
 [(\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\beta}f]_{,\alpha} &= (\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\alpha\beta}f + (\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\beta}f_{,\alpha} \\
 (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\sqrt{g}g^{\alpha\beta}f)_{,\gamma} &= (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\gamma}f + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\sqrt{g}g^{\alpha\beta})f_{,\gamma} \\
 &= (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\sqrt{g}g^{\beta\gamma})_{,\alpha}f + (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\sqrt{g}g^{\beta\gamma})f_{,\alpha}
 \end{aligned}$$

而 f 为 u 和 v 的任意函数, 因此式(3.78)相当于要求

$$-(\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\sqrt{g}g^{\beta\gamma})_{,\alpha} = (\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\alpha\beta} \quad (3.78a)$$

$$-(\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\sqrt{g}g^{\beta\gamma}) = (\sqrt{g}g^{\alpha\beta})_{,\beta} \quad (3.78b)$$

显然, 如果式(3.78b)能够成立, 式(3.78a)就自然能够成立, 因此式(3.78)是否正确依赖于式(3.78b)是否正确。

按照式(2.40) $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 的定义可以有

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\sqrt{g}g^{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\epsilon}\left(\frac{\partial g_{\beta\kappa}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\epsilon}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\epsilon}}\right)\sqrt{g}g^{\beta\gamma} \\
 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(g^{\alpha\epsilon}g_{\beta\kappa})}{\partial x^{\gamma}} - g_{\beta\kappa}\frac{\partial g^{\alpha\epsilon}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial(g^{\alpha\epsilon}g_{\gamma\epsilon})}{\partial x^{\beta}} - g_{\gamma\epsilon}\frac{\partial g^{\alpha\epsilon}}{\partial x^{\beta}} - g^{\alpha\epsilon}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\epsilon}}\right]\sqrt{g}g^{\beta\gamma} \\
 &= \frac{1}{2}\left(-g_{\beta\kappa}\frac{\partial g^{\alpha\epsilon}}{\partial x^{\gamma}} - g_{\gamma\epsilon}\frac{\partial g^{\alpha\epsilon}}{\partial x^{\beta}} - g^{\alpha\epsilon}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\epsilon}}\right)\sqrt{g}g^{\beta\gamma} \\
 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{\alpha\epsilon}}{\partial x^{\epsilon}} + \frac{\partial g^{\alpha\epsilon}}{\partial x^{\epsilon}} + g^{\alpha\epsilon}g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\epsilon}}\right)\sqrt{g} \\
 &= -\sqrt{g}g^{\alpha\epsilon} - \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\alpha\epsilon}g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\epsilon}}
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 g^{\beta\gamma}\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\epsilon}} &= g^{uu}\frac{\partial g_{uu}}{\partial x^{\epsilon}} + g^{vv}\frac{\partial g_{vv}}{\partial x^{\epsilon}} + 2g^{uv}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^{\epsilon}} \\
 &= \frac{1}{g}\left(g^{vv}\frac{\partial g_{uu}}{\partial x^{\epsilon}} + g^{uu}\frac{\partial g_{vv}}{\partial x^{\epsilon}} - 2g^{uv}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^{\epsilon}}\right) \\
 &= \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\epsilon}} = \frac{1}{g}g_{,\epsilon}
 \end{aligned}$$

于是

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \sqrt{g} g^{\beta\gamma} = -\sqrt{g} g^{\alpha\epsilon} - \frac{1}{2\sqrt{g}} g^{\alpha\epsilon} g_{,\epsilon} \quad (3.78c)$$

另一方面

$$(\sqrt{g} g^{\alpha\beta})_{,\beta} = \sqrt{g} g^{\alpha\beta}_{,\beta} + \frac{1}{2\sqrt{g}} g^{\alpha\beta} g_{,\beta} \quad (3.78d)$$

从而证明了(3.78b)式的正确性,也就证明了式(3.78)是正确的。

参考文献

- [1] Virchow R. *Die Cellularpathologie in Ihrer Begründung auf Physiologische und Pathologische Gewebelehre*. Berlin: Hirschwald, 1858
- [2] Fawcett D W. *The Cell*. Darien: W B Saunders Co, 1881
- [3] Bassis M. *Living Blood Cells and Their Ultrastructure*. Berlin: Springer, 1973
- [4] Ponder E. *Hemolysis and Related Phenomena*. New York: Grune and Stratton, 1948
- [5] Fung Y C, Tong T. *Biophys J*, 1968, **8**:175
- [6] Lopez L, Duck I M, Hunt W A. *Biophys J*, 1968, **8**:1228
- [7] Greer M A, Baker R F. *Congr Int Microsc Electron*, 7th ed. Paris: Favard, 1970
- [8] Murphy J R. *J Lab Clin Med*, 1965, **65**:756
- [9] Seeman P, Cheng D, Iles G H. *J Cell Biol*, 1973, **56**:519
- [10] Virchow R. *Virchows Arch Parrhol Anat Physiol*, 1854, **6**:562
- [11] Freiberg S. *Lyotropic Liquid Crystals and The Structure of Biomembrane*. Washington D C: American Chemical Society, 1976
- [12] Brown G H, Wolken J J. *Liquid Crystals and Biological Structures*. New York: Academic Press, 1979
- [13] Helfrich W. *Z Naturforsch*, 1973, **28c**:693
- [14] Evans E A, Sklak R. *Mechanics and Thermodynamics of Biomembranes*. Florida: CRC Boca Raton, 1979
- [15] Canham P B. *J Theo Biol*, 1970, **26**:61
- [16] Helfrich W, Deuling H J. *J Phys*, 1975, **36-c1**:327

- [17] Deuling H J, Helfrich W. *J Phys*, 1976, **37**:1335
- [18] Frank F C. *Discuss Faraday Soc*, 1958, **25**:79
- [19] Ou-Yang Z C, Liu S, Xie Y Z. *Mol Cryst Liq Cryst*, 1991, **204**:143
- [20] Servuss R M, Harbich W, Helfrich W. *Biochim Biophys Acta*, 1976, **436**:900;
Bebik G, Servuss R M, Helfrich W. *J Physique*, 1985, **46**:1773;
Schneider M B, Jenkins J T, Webb W W. *Biophys J*, 1984, **45**:891; *J Physique*, 1984, **45**:1457;
Duwe H P, Eugelhardt H, Zilker A, *et al.* *Mol Cryst Liq Cryst*, 1987, **152**:1
- [21] Barbero G, Oldano C. *Mol Cryst Liq Cryst*, 1989, **170**:99
- [22] Helfrich W, Harbich W. *Physics of Amphiphilic Layers*. Berlin: Springer, 1987. p58.
- [23] Harbich W, Servuss R M, Helfrich W. *Z Naturforsch*, 1978, **33a**:1013
- [24] Nehring J, Saupe A. *J Chem Phys*, 1971, **54**:337
- [25] Mitov M D. *CR Acad Bulgare Sci*, 1998, **31**:513
- [26] Hinov H. *Mol Cryst Liq Cryst*, 1987, **148**:197; 1989, **168**:7;
Olando C, Barbero G. *J Phys Lett*, 1985, **46**:451;
Barbero G, Orlando C. *Nuovo Cim*, 1986, **D6** 479
- [27] Meunier J, Langivan D, Bocara N. *Physics of Amphiphilic Layers*. Berlin: Springer, 1987
- [28] Weatherburn C E. *Differential Geometry*, Vol. XX In: *Pure and Applied Mathematics*. ed Courant R, Bers L, Stoker J J. New York: Wiley, 1969
- [29] de Gennes P G. *Mol Cryst Liq Cryst*, 1971, **12**:193
- [30] Ou-Yang Z C, Helfrich W. *Phys Rev*, 1989, **A39**:5280
- [31] Oseen C W. *Arkiv Math Astron Fysik*, 1925, **A19**:1; *Trans Faraday Soc*, 1933, **29**:883
- [32] Petrov A G, Bivas I. *Prog Surf Sci*, 1984, **16**:389;
Safran S A, Turkevich L A, Pincus P A. In: *Surfactants in Solution*. New York: Plenum, 1984.
- [33] Kaler E W, *et al.* *Science*, 1989, **245**:1371
- [34] Meyer R B. *Phys Rev Lett*, 1969, **22**:918
- [35] Evans E A. *Biophys J*, 1983, **43**:27
- [36] Schmidt D, Schadt M, Helfrich W. *Z Naturforsch*, 1972, **27a**: 277;
Dozov L, Ph Martinot-Lagarde, Durand G. *J Phys Lett*, 1982, **43**:365

-
- [37] Ou-Yang Z C, Hu J G, Liu J X. *Mod Phys Lett*, 1992, **B6**:1577
- [38] Lassen U V, Sten-Knudsen O. *J Physiol*, 1968, **195**:681;
Jay A W, Burton A C. *Biophys J*, 1969, **9**:115
- [39] Helfrich W. *Z Naturforsch*, 1971, **26a**:833
- [40] Ou-Yang Z C, Helfrich W. *Phys Rev Lett*, 1987, **59**:2486; *Phys Rev Lett*,
1988, **60**:1209

第四章 普适形状方程式 的一些特殊解

第三章已经导出了根据 Helfrich 自曲率理论所得到的膜泡普适形状方程式,本章将根据这一方程式以及在第三章中导出的二阶和三阶 Helfrich 自由能的变分,系统地对球形膜泡(spherical vesicle)和圆柱形膜泡的严格解进行稳定性分析。另外,还将对椭球形、克利福德圆环形、迪潘四次圆纹曲面形以及其他一些常见形状的膜泡进行比较详细的讨论。

§ 4.1 球形膜泡

4.1.1 球形膜泡的变形

在讨论膜泡的形状能量和它的稳定性时,一般都把膜泡的面积取做不变的常数。在这种条件下,球的形变只能认为是球面所包含的体积可以改变。形变后的球面可以在不同压强差或不同自曲率条件下稳定下来。前一种情形可以由渗透作用来完成,或者是用微吸移管插进膜泡内部来完成。球面可以用下式表达:

$$Y = R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (4.1)$$

这里自变量 u 和 v 分别由 θ 和 ϕ 取代。于是,一些非零的基本项有下列各个数值:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\theta\theta} = R^2, \quad g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta, \quad g = R^4 \sin^2 \theta, \quad g^{\theta\theta} = 1/R^2 \\ g^{\phi\phi} = 1/R^2 \sin^2 \theta, \quad L_{\theta\theta} = -R, \quad L_{\phi\phi} = -R \sin^2 \theta, \quad L = R^2 \sin^2 \theta \\ L^{\theta\theta} = -1/R, \quad L^{\phi\phi} = -1/(R \sin^2 \theta), \quad L^{\alpha\beta} = -R g^{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad L_{\theta\phi}^{\theta} = \text{ctg } \theta, \quad H = -1/R, \quad K = 1/R^2 \\ \mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

于是二维拉普拉斯算符 ∇'^2 成为

$$\nabla'^2 = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (4.3)$$

同时

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} = - (1/R) L^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} = \nabla'^2 \psi \quad (4.4)$$

式(3.81)的普适形状方程式指出,如果各个参量满足关系式

$$\Delta p R^3 + 2\lambda R^2 - k_c c_0 R(2 - c_0 R) = 0 \quad (4.5)$$

的条件,那么式(4.1)的球形方程式就是普适形状方程式的一个解。式(4.5)是一个 λ 作为 Δp 和 R 的函数的关系式。

分别由式(3.79)、(3.84)和(3.85)给出的 $\delta^{(1)} F_c$ 、 $\delta^{(2)} F_c$ 和 $\delta^{(2)} F$ 现在成为

$$\delta^{(1)} F_c = k_c \oint [(c_0 R - 2)(c_0 + R \nabla'^2) \psi] \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F_c = (k_c/2) \oint [R^2 (\nabla'^2 \psi)^2 + (2 + 2c_0 R \\ - c_0^2 R^2/2) \psi^2 \nabla'^2 \psi + c_0^2 \psi^2] \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F = (k_c/2) \oint [R^2 (\nabla'^2 \psi)^2 + (\Delta p R^3/2k_c + c_0 R + 2) \psi \nabla'^2 \psi \\ + (\Delta p R/k_c + 2c_0/R) \psi^2] \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (4.8)$$

上面各式的求得是应用了式(3.77)、(3.86)、(4.5)以及下式。

$$\begin{aligned} \oint [g^{\alpha\beta} \sqrt{g} (\psi^2)_{,\alpha\beta} - (g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}) (\psi^2)_{,\delta}] dudv \\ = \oint [(g^{\alpha\beta} \sqrt{g})_{,\alpha\beta} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} g^{\alpha\beta} \sqrt{g})_{,\delta}] \psi^2 dudv = 0 \end{aligned}$$

对于式(4.1)描述的球面,拉普拉斯算符 ∇'^2 成为

$$\nabla'^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 满足微分方程式^[3](4.9)和正交条件式(4.10)。

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) &= -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \sqrt{4\pi} Y_{00}(\theta, \phi) &= 1 \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_l^l \delta_m^m \quad (4.10)$$

式中 $Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ 是 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 的复共轭函数, 因此, 球谐函数满足

$$\nabla'^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) / R^2 \quad (4.11)$$

于是, 对于计算球面的 $\delta^{(1)} F_c$ 和 $\delta^{(2)} F_c$, $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 集可以方便地用来作为基函数。

现在设

$$\psi = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad |m| \leq l \quad (4.12)$$

令 $a_{lm}^* = a_{lm}$ 就可以保证 ψ 是一个实函数。式(4.6)是 ψ 的一次函数, 利用式(4.9)的第二式, 将式(4.6)、式(4.7)和式(4.8)的右方积分号内乘以 $\sqrt{4\pi} Y_{00}(\theta, \phi)$, 然后应用式(4.10)就可以得出

$$\delta^{(1)} F_c = k_c (4\pi)^{1/2} a_{00} c_0 (c_0 R + 2) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F_c &= [k_c / (2R^2)] \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 [l^2(l+1)^2 - l(l+1)(2 + 2c_0 R \\ &\quad - c_0^2 R^2 / 2) + c_0^2 R^2] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} F &= \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 \{ (1/2) \Delta p R + k_c c_0 / R - l(l+1) [\Delta p R / 4 \\ &\quad + k_c (c_0 R + 2) / (2R^2)] + k_c l^2 (l+1)^2 / (2R^2) \} \\ &= (k_c / 2) \sum_{l,m} (|a_{lm}| / R)^2 [l(l+1) - 2] [l(l+1) \\ &\quad - c_0 R - \Delta p R^3 / (2k_c)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

不论是保持球的面积为常数、体积为常数或是半径为常数, 式(4.15)都同样需要能够得到满足。这一点可以从下面的论证加以说明。从式

(3.71)和式(3.74)计算得到的 δA 和 δV , 在精确到 $O(\psi^2)$ 的条件下, 它们是

$$\begin{cases} \delta A = 2\sqrt{4\pi}a_{00}R + \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 [1 + l(l+1)/2] \\ \delta V = \sqrt{4\pi}a_{00}R^2 + \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 R \end{cases} \quad (4.16)$$

在固定面积($\delta A=0$)条件下,

$$\sqrt{4\pi}a_{00} = - (1/2) \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 [1 + l(l+1)/2]/R$$

因此, $\delta F = \delta^{(1)}F_c + \delta^{(2)}F_c + \Delta p \delta V$ 。这正是式(4.15)。如果是体积固定的话, $\delta V = 0$, 将有

$$\sqrt{4\pi}a_{00} = - \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 / R$$

而 $\delta F = \delta^{(1)}F_c + \delta^{(2)}F_c + \lambda dA$, 同样是式(4.15)。不过应该注意到, 在 $\delta A = 0$ 的情形需要有一个体积储蓄槽, 而在 $\delta V = 0$ 的情形则需要一个面积储蓄槽。在这两种条件下, Y_{00} 模式都不能单独地加以激发。在 $l = 1$ 的平庸条件下, 标志着 $\delta^{(2)}F = 0$, 这时所表示的是球的平移运动。在半径固定时必须同时有面积储蓄槽和体积储蓄槽, 这时就要求 $a_{00} = 0$, 于是 $\sum_{l,m} |a_{lm}|^2 = \sum_{l,m} |a_{lm}|^2 l(l+1) = 0$, 而 $\delta^{(2)}F = \delta^{(1)}F_c + \delta^{(2)}F_c = 0$ 。这种情形仍然是包括在式(4.15)之内。

式(4.15)指出, 当 Δp 大于一个只与 l 有关而与 m 无关的阈值 Δp_l 时,

$$\Delta p_l = (2k_c/R^3)[l(l+1) - c_0R] \quad (4.17)$$

所有 $1 < j \leq l$ 的 $|a_{jm}|^2$ 都是负值。显然, 在这种情形下非零的 a_{jm} 将降低曲率能而可以出现相当于高次球谐函数 Y_{lm} 的形变。

球谐函数 Y_{l0} 相对于极轴具有旋转对称性, 也就是说沿轴向的形状截面具有 l 边形对称性。Deuling 和 Helfrich^[4] 曾对具有各种不同旋转对称性的膜泡进行过计算, 其中周线为三角形、五角形和七角形的截面就是球形膜泡发生形变后的例子。Ou-Yang 和 Helfrich^[2] 对这些图形作了检验, 并指出这些形变正好分别对应于 $l = 3, 5$ 和 7 。对于 Δp_l 的数

值,理论和数值计算两者符合得非常好。观测到的红细胞形状的改变可以说是提供了另一个例子。在低渗透压介质中产生的所谓三次下凹的和四次下凹的红细胞^[5]可能就是分别对应于 $l = 3$ 和 4 的情形。所谓盘形的正常红细胞,从某种意义上讲,由于它的双凹形状,故可以说是属于 $l = 2$ 的一支。参考文献[4]中给出了这类计算所得出的周线。式(4.17)还指出,在给定的 Δp 条件下, c_0 的改变也可以引起球形膜泡的形变。另外,对于红细胞还会发生玻璃效应^[4]。当红细胞接近玻璃棒时会变成钝锯齿形。这种效应可能是化学效应,玻璃可能会令红细胞的 c_0 值增加,从而在 Δp 不变的条件下使 l 值增加。不过也可能是由于在玻璃附近红细胞的切变模量受到影响,以至它的形状发生改变。

4.1.2 三阶能量变分和球形膜泡的稳定性

上节指出,当 Δp 达到 Δp_l 值时球形膜泡变得不稳定而开始发生形变。在具有旋转对称性的情形中,振动的增长和缩减所产生的情况并不相同,前者成为长椭球形而后者是扁椭球形。但是根据式(4.15),两种情形的二阶能量相同,因此尚无法解除对称性。要想能加以分辨就需要考虑能量的三阶变分 $\delta^{(3)} F_c$ 。

三阶能量变分 $\delta^{(3)} F_c$ 是

$$\delta^{(3)} F_c = (1/2)k_c c_0^2 \delta^{(3)} \oint dA + 2k_c c_0 \delta^{(3)} \oint H dA + 2k_c \delta^{(3)} \oint H^2 dA$$

根据式(3.71),上式中右方第一项成为

$$(1/2)k_c c_0^2 \delta^{(3)} \oint dA = (1/2)k_c c_0^2 \oint (H g^{\alpha\beta} - K L^{\alpha\beta}) \psi_{,\alpha} \psi_{,\beta} dA$$

应用式(4.2),它等于零。 $\delta^{(3)} F_c$ 的第二项是

$$\begin{aligned} 2k_c c_0 \delta^{(3)} \oint H dA &= 2k_c c_0 \left(\oint \delta^{(3)} H dA + \oint \delta^{(2)} H \delta^{(1)} dA \right. \\ &\quad \left. + \oint \delta^{(1)} H \delta^{(2)} dA + \oint H \delta^{(3)} dA \right) \end{aligned}$$

很容易证明,

$$(g^{\mu\nu}L_{\mu})_{,\beta}g^{\gamma\delta}L_{\gamma}\psi_{,\delta} = 2H(g^{\mu\delta}L_{\mu})_{,\beta}\psi_{,\delta} - K(g^{\mu\gamma}L_{\mu})_{,\beta}g_{\gamma\delta}L^{\delta}\psi_{,\delta} \quad (4.18)$$

应用式(3.69)、(3.70)、(3.71)和(4.18)各式可以得出

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}\oint H dA &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} - g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right) \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + (2H^2 g^{\alpha\beta} - HKL^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - Kg^{\alpha\beta} \right) \psi^2 \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + \left(4H^2 g^{\alpha\beta} - 2HKL^{\alpha\beta} - \frac{3}{2} Kg^{\alpha\beta} \right) \psi \psi_{,\beta} \psi_{,\alpha} \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} K g^{\alpha\beta} + (2Hg^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta})(g^{\mu\delta}L_{\mu})_{,\beta} - \frac{1}{2} K(g^{\mu\gamma}L_{\mu})_{,\beta} \right. \\ &\quad \left. g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} L^{\delta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \left(Hg^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} KL^{\alpha\beta} \right) K g_{\gamma\delta} L^{\delta} \right] \psi^2 \psi_{,\delta} \Big\} dA \quad (4.19) \end{aligned}$$

类似地,应用式(4.18)可以得到

$$\begin{aligned} \delta^{(3)}\oint H^2 dA &= \oint \left\{ \left(\frac{3}{2} g^{\alpha\beta} - KL^{\alpha\beta} \right) \psi \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} \nabla^2 \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{2H}{g} e_{3\alpha\gamma} e^{3\beta\delta} - Hg^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Kg^{\alpha\beta} L^{\gamma\delta} \right) \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} (g^{\mu\delta}L_{\mu})_{,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} K g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} L^{\delta} \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} KL^{\alpha\beta} \right] \psi \psi_{,\delta} \nabla^2 \psi + (12H^3 g^{\alpha\beta} - 6H^2 KL^{\alpha\beta} - 7HK g^{\alpha\beta} \\ &\quad + 2K^2 L^{\alpha\beta}) \psi^2 \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} + (9H^3 g^{\gamma\delta} - 5H^2 KL^{\gamma\delta} - 4HK g^{\gamma\delta} \\ &\quad + K^2 L^{\gamma\delta}) \psi \psi_{,\gamma} \psi_{,\delta} + [(6H^2 g^{\alpha\beta} - 2HKL^{\alpha\beta} - Kg^{\alpha\beta})(g^{\mu\delta}L_{\mu})_{,\beta} \\ &\quad - HK(g^{\mu\gamma}L_{\mu})_{,\beta} g^{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} L^{\delta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} (4H^2 K g^{\alpha\beta} - HK^2 L^{\alpha\beta} \\ &\quad - K^2 g^{\alpha\beta}) g_{\gamma\delta} L^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} (2H^2 KL^{\alpha\beta} + HK g^{\alpha\beta} - K^2 L^{\alpha\beta}) \Big\} \psi^2 \psi_{,\delta} \\ &\quad + (8H^5 - 12H^3 K + 4HK^2) \psi^3 \Big\} dA \quad (4.20) \end{aligned}$$

对于发生畸变的球形膜泡,如果只限制在旋转椭球形的话,可以把 ψ 取做

$$\psi = R[a_0 + a_2 P_2(\cos \theta)], \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \quad (4.21)$$

到 $O(\psi^3)$ 为止,也就是说到 $O(a_2^3)$ 为止,式(3.71)、(3.74)、(3.79)和

(3.88)分别成为

$$\begin{cases} \delta A = 4\pi R^2(2a_0 + a_0^2 + 4a_2^2/5) \\ \delta V = 4\pi R^3(a_0 + a_0^2 + a_2^2/5 + a_0^2/3 + a_0 a_2^2/5 + 2a_2^3/105) \\ \delta^{(1)} F_c = 4\pi k_c(c_0^2 R^2 - 2c_0 R)a_0 \\ \delta^{(2)} F_c = 4\pi k_c[c_0^2 R^2 a_0^2/2 + (12 - 6c_0 R + 2c_0^2 R^2)a_2^2/5] \end{cases} \quad (4.22)$$

同样,式(4.19)和式(4.20)分别成为

$$\begin{cases} \delta^{(3)} \oint H dA = 4\pi R(3a_0 a_2^2/5 - 6a_2^3/35) \\ \delta^{(3)} \oint H^2 dA = -4\pi(12a_0 a_2^2/5 + 12a_2^3/35) \end{cases} \quad (4.23)$$

因此,到 $O(\psi^3)$ 为止可以有

$$\begin{cases} \delta^{(3)} F_c = 4\pi k_c[(6c_0 R/5 - 24/5)a_0 a_2^2 - (12c_0 R/35 + 24/35)a_2^3] \\ \delta F_c = \delta^{(1)} F_c + \delta^{(2)} F_c + \delta^{(3)} F_c \\ = 4\pi k_c[(c_0^2 R^2 - 2c_0 R)a_0 + c_0^2 R^2 a_0^2/2 \\ + (12/5 - 6c_0 R/5 + 2c_0^2 R^2/5)a_2^2 \\ + (6c_0 R/5 - 24/5)a_0 a_2^2 - (12c_0 R/35 + 24/35)a_2^3] \end{cases} \quad (4.24)$$

在高达 $O(a_2^3)$ 的条件下,面积守恒条件 $\delta A = 0$ 要求 $a_0 = -2a_2^2/5$, 从而给出

$$a_2^3 - \frac{21}{2}a_2^2 - \frac{35}{2}\eta = 0 \quad (4.25)$$

式中 $\eta = \delta V/(4\pi R^3/3)$ 是相应的体积变分,是一个负的微小量。在这种条件下,到 $O(a_2^3)$ 为止,式(4.24)给出

$$\begin{aligned} \delta F_c &= -4\pi k_c \left[\frac{2}{5}(c_0 R - 6)a_2^2 + \frac{12}{35}(c_0 R + 2)a_2^3 \right] \\ &= -4\pi k_c \left[\frac{1}{5}(24 + 20c_0 R)a_2^2 + 6(c_0 R + 2)\eta \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

令 $a_2 = 7/(b + \frac{1}{2})$, 式(4.25)成为一个标准三次方程式

$$b^3 - \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{10}{49}\eta\right) = 0$$

为了求得此式的解,可以令

$$1 + 10\eta/49 = \cos 3\theta_0 \quad (4.27)$$

θ_0 是一个近于零值的微小角度。三次方程式的解 Cardan 公式给出 b 的三个根分别为:(1) $A^{1/3} + B^{1/3}$, (2) $\frac{1}{2}[(-1 + i\sqrt{3})A^{1/3} + (-1 - i\sqrt{3})B^{1/3}]$ 和 (3) $\frac{1}{2}[(-1 - i\sqrt{3})A^{1/3} + (-1 + i\sqrt{3})B^{1/3}]$, 其中

$$A = \frac{1}{8}\cos 3\theta_0 + \left[\frac{1}{64}\cos^2 3\theta_0 - \frac{1}{64}\right]^{1/2} = \frac{1}{8}e^{3i\theta}$$

$$B = \frac{1}{8}\cos 3\theta_0 - \left[\frac{1}{64}\cos^2 3\theta_0 - \frac{1}{64}\right]^{1/2} = \frac{1}{8}e^{-3i\theta}$$

因此, b 的三个根成为: $\cos \theta_0$ 、 $\cos\left(\theta_0 + \frac{4}{3}\pi\right)$ 和 $\cos\left(\theta_0 + \frac{2}{3}\pi\right)$ 。于是式

(4.25)的三个根分别为: $7(\cos \theta_0 + 1/2)$ 、 $a_2^+ = 7\left[\cos(\theta_0 + 4\pi/3) + \frac{1}{2}\right]$

> 0 和 $a_2^- = 7[\cos(\theta_0 + 2\pi/3) + 1/2] < 0$, 而

$$(a_2^+)^2 - (a_2^-)^2 = 49\sqrt{3}\sin \theta_0(1 - \cos \theta_0) > 0 \quad (4.28)$$

由于 θ_0 接近于零, 因此 a_2^+ 和 a_2^- 也非常接近于零。 a_2^+ 的解给出长椭球解而 a_2^- 的解给出扁椭球解。另一方面, $7(\cos \theta_0 + 1/2) \approx 10.5$, 不是一个微小量, 因而引起的不是一个微小量畸变解。式(4.26)和式(4.28)表明, 对于不变体积 δV , 也就是不变 η , 只要

$$c_0 R < -1.2 \quad (4.29)$$

长椭球体就具有较低的曲率弹性能, 因而比扁椭球体稳定。这个结果同 Peterson^[6] 和 Milner 及 Safran^[7] 的稳定性分析结果一致。

在 $\delta A = 0$ 的条件下, 到 $O(a_2^3)$ 级, 式(4.22)给出体积变分 $\delta V = \delta V_A$ 。

$$\delta V_A = \pi R^2 \left(-\frac{4}{5}a_2^2 + \frac{8}{105}a_2^3 \right) \quad (4.30)$$

式(4.26)的曲率弹性能的变分量 δF_c 可以写成

$$\delta F_c = -\frac{32}{21}\pi k_c (c_0 R + 1.2)a_2^3 - \frac{2k_c}{R^3}(6 - c_0 R)\delta V_A \quad (4.31)$$

于是总能量的变分 $\delta F = \delta F_c + \Delta p \delta V$ 成为

$$\delta F = [\Delta p - 2k_c R^{-3}(6 - c_0 R)] \delta V_A - \frac{32}{21} \pi k_c (c_0 R + 1.2) a_2^3 \quad (4.32)$$

式(4.32)的首项(也就是 a_2^2 项)表明,当 $\Delta p > 2k_c(6 - c_0 R)/R^3$ 时, $\delta F \leq 0$ 。这就是说,当 $\Delta p \geq 2k_c(6 - c_0 R)/R^3$ 时,球形开始成为不稳定形。式(4.32)中末一项指出,当 $\Delta p - 2k_c(6 - c_0 R)/R^3$ 为无限小时,如果 $c_0 R < -1.2$,那么扁椭球 a_2^- 又成为稳定形状。由于 δV_A 包含 a_2^3 项,因此使扁椭球成为稳定状态的自曲率与 Δp 有关。

§ 4.2 圆柱形膜泡

圆柱形可以用下式表示:

$$\mathbf{Y} = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l) \quad (4.33)$$

式中 $u = \theta, v = z$ 。单位法线 \mathbf{n} 于是成为

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (4.34)$$

各基本量是

$$\begin{cases} g_{\theta\theta} = R^2, & g_{zz} = 1, & g = R^2, & g^{\theta\theta} = 1/R^2, & g^{zz} = 1 \\ L_{\theta\theta} = -R, & L = 0, & H = -1/2R, & K = 0 \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = 0, & g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} = \nabla'^2 \psi = (\partial^2/R^2 \partial \theta^2 + \partial^2/\partial z^2) \psi \end{cases} \quad (4.35)$$

当下列条件得到满足时,

$$\Delta p R^3 + \lambda R^2 + \frac{1}{2} k_c (c_0^2 R^2 - 1) = 0 \quad (4.36)$$

式(4.33)成为形状方程式(3.81)的解。柱状膜泡也可以看做是两端具有半球形盖的封闭式圆柱。当柱的长度 $L \gg R$ 时,两端半球形盖的影响可以忽略不计。这时,式(3.75)的形状能成为

$$F = \left[\frac{1}{2} k_c \left(c_0 - \frac{1}{R} \right)^2 + \lambda \right] 2\pi R L + \Delta p \pi R^2 L \quad (4.37)$$

在 $\delta F/\delta L = 0$ 的条件下可以得到另一个平衡条件

$$\Delta p R^3 + 2\lambda R^2 + k_c(c_0 R - 1)^2 = 0 \quad (4.38)$$

式(4.36)和式(4.38)的同时存在说明,处于平衡状态下的圆柱形膜泡的 Δp 和 λ 的数值固定在

$$\begin{cases} \Delta p = 2k_c(1 - c_0 R)/R^3 \\ \lambda = k_c(3 - c_0 R)(c_0 R - 1)/(2R^2) \end{cases} \quad (4.39)$$

这一点同球形膜泡的情形不同。对于球形膜泡, Δp 和 λ 两个数值当中,有一个可以自由选择;而对于圆柱形膜泡则两者都是固定的。

为了考虑柱形膜泡的稳定性,可以把 ψ 函数取做

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{m, n} b_{mn} \exp[i(m\theta + 2n\pi z/L)] \\ &= \sum_{m, n} b_{mn}^* \exp[-i(m\theta + 2n\pi z/L)] \end{aligned} \quad (4.40)$$

应用式(4.35),于是有

$$\begin{aligned} \oint \psi g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \psi_{,\beta} \sqrt{g} dudv &= \oint \psi \nabla'^2 \sqrt{g} dudv \\ &= -2\pi RL \sum_{m, n} (m^2 + n^2 q^2) |b_{mn}|^2 / R^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

式中 $q = 2\pi R/L$ 。

由式(3.71)、(3.74)、(3.79)、(3.84)各式,可以求得 A , V 和 F_c 的变分量分别为

$$\begin{cases} \delta A = 2\pi RL(b_{00}/R) + \pi RL \sum_{m, n} (m^2 + n^2 q^2) |b_{mn}|^2 / R^2 + O(b_{mn}^3) \\ \delta V = 2\pi R^2 L(b_{00}/R) + \pi R^2 L \sum_{m, n} |b_{mn}|^2 / R^2 + O(b_{mn}^3) \\ \delta F_c = k_c \pi LR^{-1}(c_0^2 R^2 - 1)(b_{00}/R) + k_c \pi LR^{-1} \sum_{m, n} \left\{ \left[\frac{1}{2}(c_0^2 R^2 - 1) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - 2c_0 R \right] (m^2 + n^2 q) + 2c_0 R m^2 \right. \\ \quad \left. + (m^2 + n^2 q^2)^2 + 1 - 2m^2 \right\} |b_{mn}|^2 / R^2 + O(b_{mn}^3) \end{cases} \quad (4.42)$$

于是总能量的变分量为

$$\delta F = k_c(\pi/R)L \sum_{m, n} [2(c_0 R - 1)(m^2 - 1) + (m^2 + n^2 q^2 - 1)^2] |b_{mn}|^2 / R^2 + O(b_{mn}^3) \quad (4.43)$$

式中 Δp 和 λ 已用式(4.39)代入。

当畸变具有转动对称性时, $m = 0$, 而 δF 简化为

$$\delta F = k_c(\pi/R)L \sum_n [-2(c_0 R - 1) + (n^2 q^2 - 1)^2] |b_{0n}|^2 / R^2$$

如果畸变的圆柱是稳定的话, 就需要满足 $c_0 R > 1$ 的条件。如果 $n^2 q^2 = (2\pi n R / L)^2 \leq 1 + \sqrt{2(c_0 R - 1)}$, 那么 n ($n \geq 1$) 级模式将是不稳定的。对于无限长的圆柱, 最低级的稳定模式由 $c_0 R = 1$ 和 $n^2 q^2 = 1$ 决定, 也就是说沿 z 轴畸变的周期 T 为 $T = L/n = 2\pi R$ 。由 Deuling 和 Helfrich^[8] 用数值计算所得到的关于髓磷脂的四个具有转动对称性的形状与上述的预计符合得很好^[3]。在 $m = 1$ 的情形, 式(4.43)简化为

$$\delta F = k_c(\pi/R)L \sum_n n^4 q^4 |b_{1n}|^2 / R^2$$

这时 $n = 0$ 对应于不需要能量的简单横向平移。 $n > 0$ 的模式表示圆管发生弯曲。由于这时 δF 与 c_0 无关, 因此圆管的弯曲能量总是正值。对于 $m > 1$ 的情形, 圆柱可以由于负值的 c_0 而产生失稳。 $n = 0$ 的最简单情形表示沿管子方向发生均匀变形。当 $c_0/R \leq -1/2$ 时, 圆柱失稳, 它的截面变成椭圆形 ($m = 2$)。在不存在储蓄槽的条件下, 它的长度将缩短。当 c_0 的绝对值越来越大的时候 (c_0 此时为负值), 圆柱将变成带形。

§ 4.3 对称椭球形膜泡

对称椭球膜泡 (axisymmetric ellipsoidal vesicle) 有扁椭球和长椭球两种不同类型。它们可以用下式表示:

$$Y = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, c \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (4.44)$$

式中 $u = \theta, v = \phi$ 。当 $a > c$ 时为扁椭球, 而当 $a < c$ 时为长椭球。当 $a = c$ 时, 式(4.44)退化成球形表达式; 而当 $c \rightarrow \infty$ 时, 退化成为圆柱柱表达式。

椭球在包含 z 轴的垂直平面上的截面是横轴为 a 、纵轴为 c 的椭圆。当 $a > c$ 时, 椭圆是扁椭圆。扁椭圆的两个焦点在横轴上, 距离球心分别为 $\pm\sqrt{a^2 - c^2}$ 。扁椭圆的离心率 e_0 的定义为

$$e_0 = (a^2 - c^2)^{1/2}/a = (1 - m^2)^{1/2}, \quad m = c/a < 1 \quad (4.44a)$$

当 $a < c$ 时椭圆是长椭圆。长椭圆的两个焦点在纵轴上, 距离球心分别为 $\pm(c^2 - a^2)^{1/2}$ 。长椭圆的离心率 e_p 的定义为

$$e_p = (c^2 - a^2)^{1/2}/c = (1 - m'^2)^{1/2}, \quad m' = a/c < 1 \quad (4.44b)$$

关于式(4.44)有下列各个基本量。

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\theta\theta} = M, \quad g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2 \theta \\ g = a^2 \sin^2 \theta \cdot M \\ g^{\theta\theta} = M^{-1}, \quad g^{\theta\phi} = 0, \quad g^{\phi\phi} = a^{-2} \sin^{-2} \theta \\ n = M^{-1/2} (c \sin \theta \cos \phi, c \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta) \\ L_{\theta\theta} = -acM^{-1/2}, \quad L_{\theta\phi} = 0, \quad L_{\phi\phi} = -ac \sin^2 \theta \cdot M^{-1/2} \\ L = a^2 c^2 \sin^2 \theta \cdot M^{-1} \\ 2H = -acM^{-3/2} - a^{-1}cM^{-1/2} \\ K = c^2 M^{-2} \\ \nabla'^2 = a^{-1} \sin^{-1} \theta \cdot M^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[a \sin \theta \cdot M^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ \quad = \sin^{-1} \theta \cdot M^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot M^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ M = a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta \end{array} \right. \quad (4.45)$$

从上面各个量可以得出

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (2H) = -(a^2 - c^2) \sin \theta \cos \theta \left(3acM^{-5/2} + \frac{c}{a} M^{-3/2} \right)$$

从而有

$$\nabla'^2 (2H) = -(a^2 - c^2) \{ 18ac(a^2 - c^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta M^{-9/2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[4 \left(\frac{c}{a} \right) (a^2 - c^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 3ac (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] M^{-7/2} \\
 & + \left(\frac{c}{a} \right) (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) M^{-5/2} \} \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

由于扁椭球体和长椭球体不同,下面将分别加以讨论。

4.3.1 扁椭球形膜泡的约束条件

当 $a > c$ 时,式(4.44)描述的是扁椭球膜泡(oblate ellipsoidal vesicle)^[9]。为了书写简单起见,现在引用下列符号:

$$\begin{cases} b_0^2 = 1 - m^2 = 1 - (c/a)^2 \geq 0 \\ X = M/a^2 = 1 - b_0^2 \sin^2 \theta \\ \lambda' = \lambda + k_c c_0^2 / 2 \\ k' = (m/a^3) k_c \end{cases} \quad (4.47)$$

这时式(4.46)成为下列形式:

$$\begin{aligned}
 \nabla'^2 (2H) = & - (c/a^4) X^{-9/2} \{ 18b_0^4 (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) \\
 & + [4b_0^4 (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) + b_0^2 (6 - 9\sin^2 \theta)] X \\
 & + b_0^2 (2 - 3\sin^2 \theta) X^2 \}
 \end{aligned}$$

应用式(4.47)中的前两个关系式,经过适当的配方可以得到

$$\begin{aligned}
 18b_0^4 (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) & = -18X^2 + 18(1 + c^2/a^2)X - 18c^2/a^2 \\
 4b_0^4 (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) + b_0^2 (6 - 9\sin^2 \theta) & = -4X^2 + (13 + 4c^2/a^2)X - (3 + c^2/a^2) \\
 b_0^2 (2 - \sin^2 \theta) & = 3X - (1 + 2c^2/a^2)
 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{cases} \nabla'^2 (2H) = \left(\frac{c}{a^4} \right) X^{-9/2} \left[18 \left(\frac{c}{a} \right)^2 - \left(15 + 8 \frac{c^2}{a^2} \right) X + \left(6 - 2 \frac{c^2}{a^2} \right) X^2 + X^3 \right] \\ K = \left(\frac{c}{a} \right)^2 X^{-2} = m^2 X^{-2} \end{cases} \quad (4.48)$$

于是,形状方程式(3.81)成为

$$\Delta p X^{9/2} - 2k' c_0 m a X^{5/2}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\lambda' \left(\frac{m}{a}\right) X^4 - \left[\lambda' \left(\frac{m}{a}\right) + \frac{1}{2} k'(1+b_0^2)\right] X^3 - \frac{3}{2} k'(3+b_0^2) X^2 \\
 &\quad + \frac{15}{2} k'(3-b_0^2) X - \frac{35}{2} k'(1-b_0^2) \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

式(4.49)是一个 $\sin \theta$ 的多阶方程式,对任何在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 范围内的 θ 值都应该能得到满足。换句话说,任何整数幂的 $\sin \theta$ 项的系数都应该等于零。由于式(4.49)的左方不是 X 或 $\sin \theta$ 的整数幂函数,因此需要把左右双方加以乘方。不过,乘方过程将引进额外的解。这些额外引进的解需要用适当的处理加以排除。乘方后得到的各个不同幂的 $b_0^2 \sin^2 \theta$ 项的系数应当分别等于零,这样就得到在 $0 < m < 1$ 条件下的各个结果。

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^0$:

$$\left[\Delta p - 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right]^2 - 4\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2\right) - 4\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) k_c\right]^2 = 0 \quad (4.49a)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^1$:

$$\begin{aligned}
 &\left[\Delta p - 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right] \left[9\Delta p - 10\left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right] - 4\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2\right)\right. \\
 &\quad \left. - 4\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) k_c\right] \left[7\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2\right) - 12\left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c\right] = 0 \quad (4.49b)
 \end{aligned}$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^2$:

$$\begin{aligned}
 &4\left[3\Delta p - 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right] \left[3\Delta p - 5\left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right] - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[85\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2\right)^2\right. \\
 &\quad \left. - 36\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{3}{m^2} + 1\right) \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2\right) k_c - 48\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{3}{m^4} - \frac{4}{m^2} - 2\right) k_c^2\right] = 0 \quad (4.49c)
 \end{aligned}$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^3$:

$$2\left[21\Delta p^2 - 35\left(\frac{m}{a}\right)^2 \Delta p k_c c_0 + 10\left(\frac{m}{a}\right)^4 k_c^2 c_0^2\right] - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[73\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2\right)^2\right.$$

$$+ 5\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{5}{m^2} - 18\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) k_c - 8\left(\frac{m}{a}\right)^4 \left(\frac{1}{m^4} + \frac{12}{m^2} - 4\right) k_c^2 = 0 \quad (4.49d)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^4$:

$$2\left[63\Delta p^2 - 70\left(\frac{m}{a}\right)^2 \Delta p k_c c_0 + 10\left(\frac{m}{a}\right)^4 k_c^2 c_0^2\right] - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[155\left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right)^2 + 5\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{32}{m^2} - 33\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) k_c + 3\left(\frac{m}{a}\right)^4 \left(\frac{27}{m^4} - \frac{26}{m^2} + 7\right) k_c^2\right] = 0 \quad (4.49e)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^5$:

$$2\left[63\Delta p^2 - 42\left(\frac{m}{a}\right)^2 \Delta p k_c c_0 + 2\left(\frac{m}{a}\right)^4 k_c^2 c_0^2\right] - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[104\left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right)^2 + 9\left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{12}{m^2} - 7\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) k_c + 3\left(\frac{m}{a}\right)^4 \left(\frac{6}{m^4} - \frac{5}{m^2} + 1\right) k_c^2\right] = 0 \quad (4.49f)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^6$:

$$28\Delta p \left[3\Delta p - \left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right] - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left[43\left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{28}{m^2} - 11\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) k_c + \frac{1}{4}\left(\frac{m}{a}\right)^4 \left(\frac{2}{m^2} - 1\right)^2 k_c^2\right] = 0 \quad (4.49g)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^7$:

$$4\Delta p \left[9\Delta p - \left(\frac{m}{a}\right)^2 k_c c_0\right] - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) \left[10\left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{2}{m^2} - 1\right) k_c\right] = 0 \quad (4.49h)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^8$:

$$9\Delta p^2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right)^2 = 0 \quad (4.49i)$$

$(b_0^2 \sin^2 \theta)^9$:

$$\Delta p^2 = 0 \quad (4.49j)$$

原始方程式(4.49)是一个低于5次幂的 $b^2 \sin^2 \theta$ 的多项式,因此无需

考虑(4.49f)到(4.49j)这五个方程式,因为它们所涉及的是比 $b^9 \sin^9 \theta$ 项高的项。实际上,式(4.49h)、(4.49i)和(4.49j)三个方程式给出的是

$$\Delta p = \lambda = k = 0$$

这个平庸奇异解。同时,它也是所有从式(4.49a)到式(4.49j)这十个方程式的平庸奇异解。另一方面,方程式(4.49a)给出两个可能的约束条件。

$$\Delta p a^3 - 2m^2 k_c c_0 a \pm 2m \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) a^2 - 4(1 - m^2) k_c \right] = 0$$

其中 $m = c/a \leq 1$ 。这两个条件中只有一个是正确的约束条件。另一个条件是由于上面把式(4.49)进行乘方导致的结果,因此应该加以排除。要想知道哪一个正确解,只要看一看 $a = c$ 的简并特例就可以做出决定。当 $a = c$ 时,椭球退化成为球体,而球体的约束条件由式(4.5)决定,因此扁椭球膜泡的约束条件应该是

$$\begin{aligned} \Delta p(m) a^3 - 2m^2 k_c c_0(m) a + 2m \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) a^2 \right. \\ \left. - 4(1 - m^2) k_c \right] = 0, \quad m = \frac{c}{a} \leq 1 \end{aligned} \quad (4.50)$$

实际上,式(4.49b)也包含这个解。另外,由于对一定面积的膜泡来讲, Δp , λ 和 k_c 都只与膜的组分以及周围环境有关而与 m 无关,因此不难得出结论: $\Delta p = \lambda = k_c = 0$ 的平庸奇异解也是式(4.49c)、(4.49d)和(4.49e)各式的奇异解。

4.3.2 长椭球形膜泡的约束条件

对于 $c > a$ 的长椭球形膜泡(prolate ellipsoidal vesicle),可以引用下列符号:

$$\begin{cases} b_p^2 = 1 - n^2 = 1 - a^2/c^2 \geq 0 \\ Z = M/c^2 = 1 - b_p^2 \cos^2 \theta \end{cases} \quad (4.51)$$

这时

$$2H = - (n^2/a) Z^{-3/2} - (1/a) Z^{-1/2}$$

$$K = (n^2/a^2) Z^{-2}$$

$$4H(H^2 - K) = -(1/2a^3)Z^{-9/2}(n^6 - n^4Z - n^2Z^2 + Z^3)$$

$$\nabla'^2(2H) = (1/a^3)[18n^6Z^{-9/2} - (15n^6 + 8n^4)Z^{-7/2} + (6n^4 - 2n^2)Z^{-5/2} + n^2Z^{-3/2}]$$

于是,长椭球形膜泡的形状方程式成为

$$\begin{aligned} Z^{5/2} \frac{\Delta p Z^2 - 2k_c c_0 n^2}{a^2} = & -\frac{35k_c n^6}{2a^3} + \frac{k_c(30n^6 + 15n^4)Z}{2a^3} \\ & - \frac{k_c(12n^4 - 3n^2)Z^2}{2a^3} + \left[\frac{k_c(1 - 2n^2)}{2a^3} \right. \\ & \left. - \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right)n^2}{a} \right] Z^3 - \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right)Z^4}{a} \end{aligned}$$

类似于扁椭球形膜泡的情形,这个方程式对任何在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 范围内的 θ 值都应该能得到满足,也就是说任何整数幂的 $\cos \theta$ 项的系数都应该等于零。把上式乘方后可以得到各个不同幂的 $b_p^2 \cos^2 \theta$ 项的系数。

$(b_p^2 \cos^2 \theta)^0$:

$$(\Delta p - 2k_c c_0 n^2 / a^2)^2 = \left[(1+n^2) \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) / a - (1+n^2+3n^4-5n^6) k_c / (2a^3) \right]^2 \quad (4.51a)$$

$(b_p^2 \cos^2 \theta)^1$:

$$\begin{aligned} (\Delta p - 2k_c c_0 n^2 / a^2)(9\Delta p - 10k_c c_0 n^2 / a^2) = & \left[(1+n^2) \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) / a \right. \\ & \left. - (1+n^2+3n^4-5n^6) k_c / 2a^3 \right] \left[2(4+3n^2) \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) / a \right. \\ & \left. - 3(1-3n^4+10n^6) k_c / a^3 \right] \quad (4.51b) \end{aligned}$$

$(b_p^2 \cos^2 \theta)^2$:

$$\begin{aligned} 4(3\Delta p - 2k_c c_0 n^2 / a^2)(3\Delta p - 5k_c c_0 n^2 / a^2) = & \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right)^2 (28 + 42n^2 \\ & + 15n^4) / a^2 - 3k_c \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) (7 + 6n^2 - 10n^4 + 20n^6 + 25n^8) / a^4 \\ & + 3k_c^2 (5 - 22n^4 + 36n^6 + 13n^8 - (40n^{10} + 300n^{12}) / (4a^6)) \quad (4.51c) \end{aligned}$$

$(b_p^2 \cos^2 \theta)^3$:

$$4(21\Delta p^2 - 35\Delta p k_c c_0 n^2/a^2 + 10k_c^2 c_0^2 n^4/a^4) = 2(28 + 35n^2 + 10n^4) \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) / a^2 \\ - 5k_c \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) (7 + 2n^2 - 20n^4 + 20n^6 + 17n^8) / a^4 + k_c^2 (5 - 5n^2 \\ - 31n^4 + 53n^6 + 14n^8 - 180n^{10}) / a^6 \quad (4.51d)$$

$(b_p^2 \cos^2 \theta)^4$:

$$2(63\Delta p^2 - 70\Delta p k_c c_0 n^2/a^2 + 10k_c^2 c_0^2 n^4/a^4) = 5 \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) (14 + 14n^2 + 3n^4) / a^2 \\ - 5k_c \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) (7 - 2n^2 - 24n^4 + 14n^6 + 6n^8) / a^4 + 3k_c^2 (5 - 10n^2 \\ - 27n^4 + 56n^6 + 8n^8) / (4a^6) \quad (4.51e)$$

类似于扁椭球形膜泡的情形,更高级幂的 $b_p^2 \cos^2 \theta$ 的系数可以不加考虑。显然,式(4.51a)和式(4.51b)都给出能够满足式(4.5)球形膜泡约束条件和圆柱形膜泡约束条件式(4.36)的长椭球形膜泡约束条件

$$\Delta p(n) - 2k_c c_0 n^2/a^2 = - (1 + n^2) \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) / a \\ + (1 + n^2 + 3n^4 - 5n^6) k_c / (2a^3) \quad (4.52)$$

另外,对于所有式(4.51a)到式(4.51e)这五个方程式还存在一个无需考虑的平庸解:

$$\Delta p = \lambda = k_c = 0$$

对于膜泡形状的处理, Helfrich 理论中含有下列各量:膜泡的大小、材料的弯曲刚度 k_c 、材料的拉伸应变 λ 、膜泡内外压差 Δp 和一个描述膜泡内外不对称的自曲率 c_0 。前面四个量都是关于膜泡具有明确界定的物理量。虽然目前关于这些量的具体实验测量的报道还不多见,它们都是具体可以直接测量的物理量。但是,自曲率 c_0 却不同。它描述的是膜内外的不对称这样一个缺乏明确能进行直接测量的量。这里,在测得的具体膜泡线度以及它的力学参量 k_c , λ 和 Δp 的数值的基础上,椭球形膜泡(包括球形和圆柱形)的约束条件式(4.50)或式(4.52)提供了计算出膜泡 c_0 值的条件。当然,这样得到的 c_0 值仍然只限于观测到的具体形状的膜

泡的 c_0 值, 而无法知道 c_0 随膜泡形状改变的规律。

4.3.3 对称扁椭球形膜泡的形状能

对称椭球可以表示为 $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ 。如果 $a > c$, 上式表示的是扁椭球。回顾式(4.44), 可以令

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - (a^2 - c^2)\cos^2\theta = a^2(1 - b_0^2\cos^2\theta), \pi \geq \theta \geq 0 \end{cases}$$

于是面积元 dA 成为

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r R d\theta = 2\pi a^2 \sin\theta(1 - b_0^2\cos^2\theta)^{1/2} d\theta \\ &= -2\pi(a^2/b_0)(1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta \end{aligned} \quad (4.53)$$

式中

$$\zeta = b_0 \cos\theta$$

扁椭球的面积 A 成为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-b_0}^{b_0} 2\pi(a^2/b_0)(1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta \\ &= 2\pi a^2(m + b_0^{-1}\sin^{-1}b_0), \quad m = c/a \leq 1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

扁椭球的体积 V 显然是

$$V = \int_{-c}^c \pi r^2 dz = 4\pi a^2 c/3 \quad (4.55)$$

对于给定的扁椭球形膜泡, λ 和 Δp 有一定不变的数值。按照式(3.75), 应用式(4.54)的结果, 膜泡的形状能 F_0 可以表示为

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2}k_c \oint (2H + c_0)^2 dA + \oint \lambda dA + \Delta p \int dV \\ &= k_c \oint 2H(H + c_0) dA + \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) A + 4\pi a^2 c \Delta p/3 \\ &= k_c \oint 2H(H + c_0) dA + 2\pi a^2 \left(\lambda + \frac{1}{2}k_c c_0^2\right) (m + b_0^{-1}\sin^{-1}b_0) \\ &\quad + 4\pi a^2 c \Delta p/3 \end{aligned} \quad (4.56)$$

应用式(4.45)的 M 和 $2H$ 表达式可以有

$$\begin{aligned}
2H(H+c_0) &= (m^2/2a^2)\{[m^2+(1-m^2)\cos^2\theta]^{-3} \\
&\quad + 2[m^2+(1-m^2)\cos^2\theta]^{-2} + [m^2+(1-m^2)\cos^2\theta]^{-1}\} \\
&\quad - (c_0m/a)\{[m^2+(1-m^2)\cos^2\theta]^{-3/2} \\
&\quad + 2[m^2+(1-m^2)\cos^2\theta]^{-1/2}\}
\end{aligned}$$

于是, $m = c/a$ 的扁椭球形膜泡的自由能 $F_0(m)$ 成为

$$F_0(m) = (F_0)_1 + (F_0)_2 + 2\pi a^2 \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) (m + b_0^{-1} \sin^{-1} b_0) + 4\pi a^2 c \Delta p / 3 \quad (4.56a)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned}
m &= c/a \\
(F_0)_1 &= (k_c \pi m^2 / \sqrt{1-m^2}) \int_{-\sqrt{1-m^2}}^{\sqrt{1-m^2}} [(m^2 + \zeta^2)^{-3} + 2(m^2 + \zeta^2)^{-2} \\
&\quad + (m^2 + \zeta^2)^{-1}] (1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta \\
(F_0)_2 &= (2\pi k_c a c^2 m / \sqrt{1-m^2}) \int_{-\sqrt{1-m^2}}^{\sqrt{1-m^2}} [(m^2 + \zeta^2)^{-3/2} \\
&\quad + (m^2 + \zeta^2)^{-1/2}] (1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta \\
\zeta^2 &= (1 - m^2) \cos^2 \theta
\end{aligned} \right. \quad (4.56b)$$

关于 $(F_0)_1$, 可以把被积函数用部分分式法展开成为下式:

$$\begin{aligned}
(F_0)_1 &= \left(\frac{\pi k_c}{\sqrt{1-m^2}} \right) \left\{ \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{4m^2} - \frac{1}{4(1+m^2)} \right] m \sqrt{1-m^2} \right. \\
&\quad + \left[\frac{1}{8m(1+m^2)} + \frac{3}{8m^3} + \frac{1}{m} + m + m^3 \right] \\
&\quad \times \int_0^{\sqrt{1-m^2}} \left(\frac{1}{m+i\zeta} + \frac{1}{m-i\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - 2m^2 \int_0^{\sqrt{1-m^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{由于 } \int_0^{\sqrt{1-m^2}} \frac{d\zeta}{(m \pm i\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \left\{ \sin^{-1} [(1+m^2)\sqrt{1-m^2} \pm im^3] \right\}$$

$$\mp \sin^{-1}\left(\frac{i}{m}\right)\}$$

而 $\sin^{-1}[(1+m^2)\sqrt{1-m^2} \pm im^3] = \sin^{-1}\sqrt{1-m^4} \pm i\beta = \cos^{-1}m^2 \pm i\beta$

同时
$$\int_0^{\sqrt{1-m^2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \sin^{-1}\sqrt{1-m^2}$$

因此

$$(F_o)_1 = \pi k_c \left\{ m \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{4m^2} - \frac{1}{4(1+m^2)} \right] + \left[\frac{1}{4m(1+m^2)} + \frac{3}{4m^3} + \frac{2}{m} + 2m + 2m^3 \right] \frac{\sin^{-1}\sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1-m^4}} - 2m^2 \frac{\sin^{-1}\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-m^2}} \right\}$$

当 $m \rightarrow 1$ 时, $(F_o)_1 \rightarrow 8\pi k_c$ 。

$(F_o)_2$ 的积分比较复杂。对于

$$\int_{-\sqrt{1-m^2}}^{\sqrt{1-m^2}} [(m^2 + \zeta^2)^{-3/2} + (m^2 + \zeta^2)^{-1/2}] (1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta$$

这一项,可以令^[10, 11]

$$\zeta^2(1+m^2)/(m^2+\zeta^2) = \operatorname{sn}^2 u$$

于是

$$\zeta^2 = [m^2/(1+m^2)] \operatorname{sd}^2 u = k'^2 \operatorname{sd}^2 u$$

式中

$$k^2 = (1+m^2)^{-1}, \quad k'^2 = m^2/(1+m^2)$$

而

$$d\zeta = k' \operatorname{cn} u \operatorname{nd}^2 u \, du$$

同时

$$m^2 + \zeta^2 = m^2 \operatorname{nd}^2 u, \quad 1 - \zeta^2 = \operatorname{cd}^2 u$$

因此,当 $\zeta = \pm\sqrt{1-m^2}$ 时, $\operatorname{sn} u = \pm\sqrt{1-m^4}$, $\operatorname{cn} u = m^2$, $\operatorname{dn} u = m$ 。于是

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{1-m^2}}^{\sqrt{1-m^2}} [(m^2 + \zeta^2)^{-3/2} + (m^2 + \zeta^2)^{-1/2}] (1 - \zeta^2)^{1/2} d\zeta \\ &= \int_{-\operatorname{sn}^{-1}\sqrt{1-m^4}}^{\operatorname{sn}^{-1}\sqrt{1-m^4}} (m^{-3} \operatorname{nd}^{-3} u + m^{-1} \operatorname{nd}^{-1} u \operatorname{cd} u) k' \operatorname{cn} u \operatorname{nd}^2 u \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}}^{\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}} \left(\frac{\operatorname{cn}^2 u}{m^2 \sqrt{1+m^2}} + \frac{\operatorname{cd}^2 u}{\sqrt{1+m^2}} \right) du \\
&= \left[\sqrt{1+m^2} \left(\frac{1}{m^2} - 1 \right) E(u) + \sqrt{1+m^2} \left(1 - \frac{1}{1+m^2} \right) u \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u \right]_{-\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}}^{\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}} \\
&= 2\sqrt{1+m^2} \left(\frac{1-m^2}{m^2} \right) E(\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}) + \frac{2m^2}{\sqrt{1+m^2}} \operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4} \\
&\quad + \frac{2m\sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1+m^2}}
\end{aligned}$$

所以

$$(F_0)_2 = -4\pi k_c c_0 a m \left[\frac{\sqrt{1-m^4}}{m^2} E(\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}) + m^2 \frac{\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1-m^4}} + m \right]$$

当 $m \rightarrow 1$ 时, $(F_0)_2 \rightarrow -8\pi k_c c_0 a$.

综合上面结果可以得到

$$\begin{aligned}
F_0 &= \pi k_c \left\{ m \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{4m^2} - \frac{1}{4(1+m^2)} \right] + \left[\frac{1}{4m(1+m^2)} + \frac{3}{4m^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2}{m} + 2m + 2m^3 \right] \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1-m^4}} - 2m^2 \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-m^2}} \right\} \\
&\quad - 4\pi k_c c_0(m) a \left[\frac{\sqrt{1-m^4}}{m} E(\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}) + m^3 \frac{\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1-m^4}} + m^2 \right] \\
&\quad + 2\pi a^2 \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(m) \right] \left(m + \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-m^2}} \right) + \frac{4}{3} \pi a^2 c \Delta p(m)
\end{aligned} \tag{4.56c}$$

式中 $c_0(m)$ 和 $\Delta p(m)$ 分别表示具有 m 值的膜泡的自由曲率和内外压强差。式(4.51)给出了扁椭球形膜泡需要满足的约束条件。把这个条件的 $\Delta p(m)$ 值代入能量方程式(4.56c)可以得到半径比为 $m = c/a$ 的扁椭球形膜泡的自由能 $F_0(m)$ 为

$$F_0(m) = \pi k_c \left\{ m \left[-\frac{32}{3} m^2 + \frac{32}{3} m + \frac{5}{2} + \frac{3}{4m^2} - \frac{1}{4(1+m^2)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{4m(1+m^2)} + \frac{3}{4m^3} + \frac{2}{m} + 2m + 2m^3 \right] \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1-m^4}} - 2m^2 \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-m^2}} \Big\} \\
& - 4\pi k_c c_0(m) a \left[\frac{\sqrt{1-m^4}}{m} E(\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}) + m^3 \left(\frac{\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-m^4}}{\sqrt{1-m^4}} - \frac{2}{3} \right) + m^2 \right] \\
& + 2\pi \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(m) \right] a^2 \left(m - \frac{4}{3} m^2 + \frac{\sin^{-1} \sqrt{1-m^2}}{\sqrt{1-m^2}} \right) \quad (4.56d)
\end{aligned}$$

当 $m = 1$ 时, 扁椭球形膜泡成为半径为 R 的球形膜泡。它的形状能 $F_0(1)$ 为

$$\begin{aligned}
F_0(1) &= 8\pi k_c - 8\pi k_c c_0(1)R + 4 \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(1) \right] R^2 + \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta p(1) \\
&= 8\pi k_c - \frac{16}{3} \pi k_c c_0(1)R + \frac{4\pi}{3} \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(1) \right] R^2 \quad (4.56e)
\end{aligned}$$

上式的最后一步是应用式(4.50)的结果。

对于具有固定面积 A 的扁椭球体, 它的 a 值和 c 值作为 m 的函数分别为

$$\begin{cases} a = [A/(2\pi)]^{1/2} [m + \sin^{-1}(\sqrt{1-m^2}/\sqrt{1-m^2})]^{-1/2} \\ c = [A/(2\pi)]^{1/2} m [m + \sin^{-1}(\sqrt{1-m^2}/\sqrt{1-m^2})]^{-1/2} \end{cases} \quad (4.57a)$$

而相应的球体的半径 R 为

$$R = \left(\frac{A}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.57b)$$

具有相同材料、相同面积和相同厚度的扁椭球体的 k_c 值和 λ 值都相同, 并且不是 m 的函数, 但是它们的 $c_0(m)$ 值和 $\Delta p(m)$ 值随着 m 值的不同却可能有差别。在这些不同 m 值的具有相同面积的扁椭球形膜泡中, 只有形状能 $F_0(m)$ 具有最小值的那些扁椭球形膜泡才能稳定地存在而被实验观测到。也就是只有那些能满足

$$dF_0(m)/dm = 0$$

条件的膜泡才能被观测到。但是, 由于 $c_0(m)$ 和 $\Delta p(m)$ 随 m 变化的规律目前还不清楚, 因此仍然无法应用上式来找出答案。不过, 由于式(4.50)

的存在,因此只有得到 $c_0(m)$ 或 $\Delta p(m)$ 随 m 变化的规律才能从理论上找到扁椭球形膜泡能够被观测到的 m 值。

4.3.4 对称长椭球形膜泡的形状能

对于长椭球, $c > a$ 而 $n = a/c < 1$ 。这时,面积元可以写成

$$\begin{cases} dA = -\frac{2\pi ac}{b_p} (n^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta \\ \eta = b_p \cos \theta = (1 - n^2)^{1/2} \cos \theta \end{cases} \quad (4.58)$$

因此,长椭球的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{1-n^2}}^{\sqrt{1-n^2}} \frac{2\pi a^2}{n\sqrt{1-n^2}} (n^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta \\ &= \frac{2\pi a^2}{n} \left[1 + \frac{n^2}{2\sqrt{1-n^2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-n^2}}{1 - \sqrt{1-n^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

这时, $2H = -\frac{1}{a} [n^2(1 - \eta^2)^{-3/2} + (1 - \eta^2)^{-1/2}]$, 而形状能量 F_p 为

$$\begin{aligned} F_p &= (F_p)_1 + (F_p)_2 + 2\pi a^2 \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(n) \right] \\ &\quad + \left[\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-n^2}}{1 - \sqrt{1-n^2}} \right) + \frac{1}{n} \right] + \frac{4}{3n} \pi a^3 \Delta p(n) \end{aligned}$$

式中

$$(F_p)_1 = k_c \oint 2H^2 dA$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi k_c}{n\sqrt{1-n^2}} \int_{\sqrt{1-n^2}}^{-\sqrt{1-n^2}} [n^4(1 - \eta^2)^{-3} + 2n^2(1 - \eta^2)^{-2} \\ &\quad + (1 - \eta^2)^{-1}] (n^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta \end{aligned}$$

$$(F_p)_2 = k_c \int c_0(n) 2H dA$$

$$= \frac{2\pi k_c c_0(n) c}{\sqrt{1-n^2}} \int_{\sqrt{1-n^2}}^{-\sqrt{1-n^2}} [n^2(1 - \eta^2)^{-3/2} + (1 - \eta^2)^{-1/2}] (n^2 + \eta^2)^{1/2} d\eta$$

关于 $(F_p)_1$ 中的各个积分项可以先用

$$(1 - \eta^2)^{-1} = \frac{1}{2} [1/(1 + \eta) + 1/(1 - \eta)]$$

$$(1 - \eta^2)^{-2} = \frac{1}{4} [1/(1 + \eta)^2 + 1/(1 - \eta)^2 + 1/(1 + \eta) + 1/(1 - \eta)]$$

$$(1 - \eta^2)^{-3} = \frac{1}{8} [1/(1 + \eta)^3 + 1/(1 - \eta)^3] + \frac{3}{16} [1/(1 + \eta)^2 + 1/(1 - \eta)^2] + \frac{3}{16} [1/(1 + \eta) + 1/(1 - \eta)]$$

展开,然后应用积分式^[12]

$$\int \frac{\sqrt{X} dx}{v^m} = \frac{1}{(m-1)b'^2} \left(-\frac{b'\sqrt{X}}{v^{m-1}} + \frac{1}{2}\beta \int \frac{dx}{v^{m-1}\sqrt{X}} + c \int \frac{dx}{v^{m-2}\sqrt{X}} \right)$$

$$X = a + bx + cx^2, \quad v = a' + b'x, \quad q = 4ac - b^2$$

$$\beta = bb' - 2a'c, \quad k = ab'^2 - a'bb' + ca'^2$$

就可以求得。结果是

$$(F_p)_1 = \pi k_c \left\{ \left[\frac{5}{2n} + \frac{3}{4}n - \frac{n}{4(1+n^2)} \right] + \left[\frac{n^5}{8(1+n^2)} + \frac{3}{8}n^5 + n^3 + n + \frac{1}{n} \right] \frac{1}{\sqrt{1-n^4}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^4}}{1-\sqrt{1-n^4}} - \frac{1}{n\sqrt{1-n^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} (F_p)_1 = 8\pi k_c$$

关于 $(F_p)_2$ 中的积分,也可以应用前面计算 $(F_o)_2$ 时所用的变换

$$\eta^2 = [n^2/(1+n^2)] \text{sd}^2 u$$

而得到

$$(F_p)_2 = -4\pi k_c c_0(n) c \left[\frac{n^4}{\sqrt{1-n^4}} \text{sn}^{-1} \sqrt{1-n^4} + \sqrt{1-n^4} \text{E}(\text{sn}^{-1} \sqrt{1-n^4}) + n^3 \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} (F_p)_2 = -8\pi k_c c_0(n) c$$

因此有

$$\begin{aligned}
(F_p) &= \pi k_c \left\{ \left[\frac{5}{2n} + \frac{3}{4}n - \frac{n}{4(1+n^2)} \right] + \left[\frac{n^5}{8(1+n^2)} + \frac{3}{8}n^5 + n^3 + n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{n} \right] \frac{1}{\sqrt{1-n^4}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^4}}{1-\sqrt{1-n^4}} - \frac{1}{n\sqrt{1-n^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}} \right\} \\
&\quad + 4\pi k_c c_0(n) c \left[\frac{n^4}{\sqrt{1-n^4}} \operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-n^4} + \sqrt{1-n^4} E(\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-n^4}) + n^3 \right] \\
&\quad + 2\pi a^2 \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(n) \right] \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2\sqrt{1-n^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}} \right) + \frac{4}{3} \pi a^2 c \Delta p(n) \\
\lim_{n \rightarrow 1} F_p &= 8\pi k_c - 8\pi k_c c_0(1)R + 4\pi R^2 \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(1) \right] + \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta p(1)
\end{aligned} \tag{4.59a}$$

如果应用长椭球形膜泡的约束条件式(4.52)将 $\Delta p(n)$ 项约去的话,就有

$$\begin{aligned}
(F_p) &= \pi k_c \left\{ \left[\frac{19}{n^2} + \frac{17}{n} + n + 2n^3 + \frac{10}{3}n^5 - \frac{n}{4(1+n^2)} \right] + \left[\frac{3}{8}n^5 + \frac{n^5}{8(1+n^2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + n^3 + n + \frac{1}{n} \right] \frac{1}{\sqrt{1-n^4}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^4}}{1-\sqrt{1-n^4}} - \frac{1}{n\sqrt{1-n^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}} \right\} \\
&\quad + 2\pi k_c c_0(n) \frac{a}{n} \left[\frac{n^4}{\sqrt{1-n^4}} \operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-n^4} + \sqrt{1-n^4} E(\operatorname{sn}^{-1} \sqrt{1-n^4}) + \frac{2}{3}n^2 + n^3 \right] \\
&\quad + 2\pi a^2 \left[\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2(n) \right] \left(\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \right) \tag{4.59b}
\end{aligned}$$

同扁椭球形膜泡的情形相似,只有知道 $\Delta p(n)$ 或 $c_0(n)$ 随 n 变化的具体规律后,才能应用式(4.59)来找出在具有相同面积、相同厚度的长椭球形膜泡中哪些 n 值的膜泡能真正被观测到。

§ 4.4 克利福德锚环

普适形状方程式(3.81)是一个非常复杂的方程式。至今还无人解析地讨论过它的解的问题,甚至也不存在任何指导寻求它的特殊解的办法。

对于具有轴对称性的问题,显然,普适方程式可以大为简化。不过,至今也仅仅对一些处于平衡状态、具有轴对称性的膜泡进行过比较详细的数值计算^[4, 6, 13-20]。寻找任何特殊的轴对称解析解仍然是一个自启发的过程。除去亏格为零的球面外,第一个找到的亏格为1的解析解是锚环解^[21]。

锚环(anchor ring)由一个半径为 r 的圆绕一条距离圆心为 R ($R > r$) 并且平行于圆平面的 z 轴旋转而成。在笛卡儿坐标系中,表示这一锚环族的方程式是^[22]

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2 + r^2)^2}{(R/r)^2} - \frac{4r^2(x^2 + y^2)}{(R/r)^2 - 1} = 0 \quad (4.60)$$

另外一种描述锚环的方法如下:如图 4-1 所示,通过原点 O 、垂直于 z 轴并与 x 轴成 ϕ 角的直线上取两个与原点相距各为 c 的 A 点和 B 点, $AB = 2c$ 。

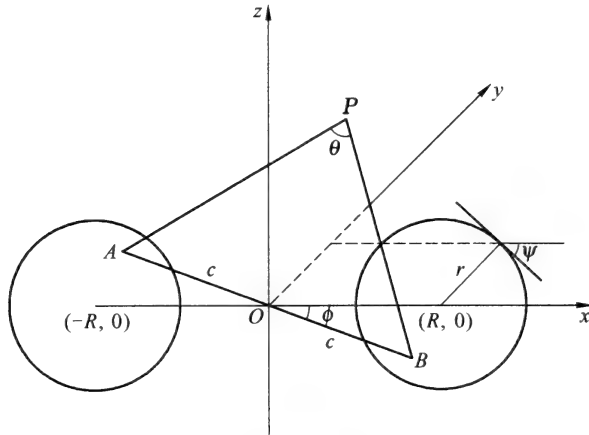


图 4-1 锚环的生成

令 P 为 $\angle\phi = \text{常量}$ 且平行于 z 轴的平面上的一点,而 $\angle APB = \angle\theta$ 。如果 $\eta = \ln(AP/BP)$, 那么 $\eta = \text{常量}$ 的曲面将是 以 A 点和 B 点分别为圆心、半径为 r 的一族圆绕 z 轴旋转形成的锚环。这族锚环的参量方程式是^[23]

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{c \sinh \eta \cos \phi}{\cosh \eta - \cos \theta}, \frac{c \sinh \eta \sin \phi}{\cosh \eta - \cos \theta}, \frac{c \sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta} \right) \quad (4.61)$$

$$(0 \leq \phi \leq 2\pi, -\pi \leq \theta \leq \pi)$$

式(4.61)给出

$$x^2 + y^2 = c^2 \sinh^2 \eta / (\cosh \eta - \cos \theta)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta) / (\cosh \eta - \cos \theta)^2$$

从两式消去 θ , 得到

$$(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) / \cosh^2 \eta - 4c^2(x^2 + y^2) / (\cosh^2 \eta - 1) = 0 \quad (4.62)$$

比较式(4.60)和式(4.62)可以看出, 当

$$c^2 = r^2, \quad \cosh^2 \eta = (R/r)^2, \quad \sinh^2 \eta = (R^2 - r^2)/r^2 \quad (4.63)$$

时, 两式相同。

应用式(4.61)和式(4.63)可以求出下列各个非零量:

$$\left\{ \begin{aligned} g_{\theta\theta} &= 1/g^{\theta\theta} = c^2 / (\cosh \eta - \cos \theta)^2 \\ g_{\eta\eta} &= 1/g^{\eta\eta} = c^2 \sinh^2 \eta / (\cosh \eta - \cos \theta)^2 \\ L_{\theta\theta} &= c \sinh \eta / (\cosh \eta - \cos \theta)^2 \\ L_{\eta\eta} &= c \sinh \eta (\cosh \eta \cos \theta - 1) / (\cosh \eta - \cos \theta)^2 \\ H &= (1/2) g^{ij} L_{ij} = (1/2c) [\sinh \eta + (\cosh \eta \cos \theta - 1) / \sinh \eta] \\ K &= (\cosh \eta \cos \theta - 1) / c^2 \\ \nabla^2 H &= -(\cosh \eta - \cos \theta)^2 \cosh \eta \cos \theta / (2c^3 \sinh \eta) \end{aligned} \right. \quad (4.64)$$

于是, 形状方程式成为

$$\begin{aligned} \Delta p - 2k_c c^{-2} c_0 (\cosh \eta \cos \theta - 1) - \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) & [\sinh \eta \\ & + (\cosh \eta \cos \theta - 1) / \sinh \eta] / c - k_c c^{-3} \cosh \eta (\cosh^2 \eta \\ & - 2)(\cosh \eta - \cos \theta)^3 / 2 \sinh^3 \eta = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

由于 θ 值是在 $-\pi$ 到 π 之间, 因此上式只有在 $\cos^m \theta$ ($m = 0, 1, 3$) 的所有系数均为零时才能得到满足。于是得出

$$\begin{cases} \cosh^2 \eta = (R/r)^2 = 2 \\ \Delta p = -2k_c c_0 / c^2 \\ \lambda = -2k_c (\pm c_0 / r + c_0^2 / 4) \end{cases} \quad (4.66)$$

式(4.66)的第一个条件说明,只有母圆半径比为 $\sqrt{2}$ 的锚环才能满足形状方程式。对二块磷脂膜泡的实验观测也定量地符合这一结论^[24-26]。由于 $\cosh \eta$ 总是正值,而式(4.66)给出 $\cosh \eta = \pm R/r$,因此,如果 R 同 r 在同一方向,则 $\cosh \eta = R/r$,反之,则 $\cosh \eta = -R/r$ 。 c 和 $\sinh \eta$ 都可以是正值或是负值。式(4.65)中第二项与 c 的正负无关,但第三项的正负取决于 c 和 $\sinh \eta$ 是否具有相同的符号。如果 c 与 $\sinh \eta$ 具有相同符号,则 $\lambda = -2k_c (c_0 / r + c_0^2 / 4)$,否则 $\lambda = -2k_c (-c_0 / r + c_0^2 / 4)$ 。虽然这两种情形的 c_0 有不同的符号,实际上表示的是同一非对称性。一种情形是从膜泡外向内观测,而另一种情形是从膜泡内向外观测。

对于 $R \rightarrow \infty$,同时 $r \rightarrow \infty$,但保持 $R - r = \rho_0$ 的无限大锚环来讲,如果当 $c \rightarrow -\infty$ 时(外法线为正向) $c / \cosh \eta \rightarrow -\rho_0$,同时 $c / \sinh \eta \rightarrow -\rho_0$,这时式(4.64)给出

$$H = -1/2\rho_0, \quad K = 0, \quad \nabla^2 H = 0$$

而形状方程式成为

$$\Delta p \rho_0^3 + \left(\lambda + \frac{1}{2} k_c c_0^2 \right) \rho_0^2 - \frac{1}{2} k_c = 0$$

这显然就是式(4.36)关于圆柱形膜泡的形状方程式,所以极限条件下的锚环形膜泡正是圆柱形膜泡。

求解锚环的稳定条件比较复杂。一个试探函数 ψ 可以取作

$$\psi = \sum_m [a_m(\theta) \sin m\phi + b_m(\theta) \cos m\phi] \quad (4.67)$$

式中 $a_m(\theta) = a_m(-\theta)$, $b_m(\theta) = b_m(-\theta)$ 。由于 $R^2 = 2r^2$,因此非零的项有

$$\begin{cases} g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} = 1/g^{\theta\theta} = 1/g^{\phi\phi} = g^{1/2} = rL_{\theta\theta} = r/L^{\theta\theta} = r^2/(\sqrt{2} - \cos \theta)^2 \\ L_{\phi\phi} = r^2(\sqrt{2}\cos \theta - 1)/(\sqrt{2} - \cos \theta)^4 \\ H = \sqrt{2}\cos \theta/(2r), \quad K = (\sqrt{2}\cos \theta - 1)/r^2 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = -\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = -\sin \theta/(\sqrt{2} - \cos \theta) \end{cases} \quad (4.68)$$

形状能量的二阶变分式(3.89)成为

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)} F = k_c \oint & \left\{ (1/2) g^{1/2} (g^{ij} \nabla_i \psi_{,j})^2 - 2(K + c_0 H) g^{1/2} g^{ij} \psi \nabla_i \psi_{,j} \right. \\
 & + g^{1/2} [-(5H^2 + 2c_0 H + c_0/r) g^{ij} + (2H + c_0) KL^{ij}] \psi_{,i} \psi_{,j} \\
 & + [g^{1/2} (2Hg^{ij} - KL^{ij})(2H + c_0)]_{,ij} \psi^2 \\
 & - [g^{1/2} (H + c_0/2) (g^{ij} (g^{kl} L_{ik})_{,j} - \Gamma_{ij}^n g^{ij} g^{kl} L_{kn} \\
 & - \Gamma_{ij}^n (2Hg^{ij} - KL^{ij}))]_{,i} \psi^2 + 2g^{1/2} [(H^2 - K)(4H^2 - K) \\
 & \left. - (c_0/r)(K - H/r)] \psi^2 \right\} d\theta d\phi \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

下列各式不难得到验证：

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla_{\theta} \psi_{,\theta} &= \sum_m \left[\left(a_{m,\theta} + \frac{a_{m,\theta} \sin \theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} \right) \sin m\phi + \left(b_{m,\theta} + \frac{b_{m,\theta} \sin \theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} \right) \cos m\phi \right] \\
 \nabla_{\phi} \psi_{,\phi} &= - \sum_m \left[\left(\frac{a_{m,\theta} \sin \theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} + m^2 a_m \right) \sin m\phi + \left(\frac{b_{m,\theta} \sin \theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} + m^2 b_m \right) \cos m\phi \right] \\
 g^{ij} \nabla_i \psi_{,j} &= \frac{(\sqrt{2} - \cos \theta)^2}{r^2} \sum_m [(a_{m,\theta} - m^2 a_m) \sin m\phi + (b_{m,\theta} - m^2 b_m) \cos m\phi] \\
 \int_0^{2\pi} \psi_{,\theta}^2 d\phi &= \sum_m (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi_{,\phi}^2 d\phi = \sum_m m^2 (a_m^2 + b_m^2) \pi \\
 \int_0^{2\pi} \psi_{,\theta}^2 d\phi &= \sum_m (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi_{,\phi}^2 d\phi = \sum_m m^4 (a_m^2 + b_m^2) \pi \\
 \int_0^{2\pi} \psi_{,\theta} \psi_{,\phi} d\phi &= - \sum_m m^2 (a_m^2 + b_m^2) \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi^2 d\phi = \sum_m (a_m^2 + b_m^2) \pi \\
 \int_0^{2\pi} \psi_{,\theta} \psi_{,\phi} d\phi &= \sum_m (a_m a_{m,\theta} + b_m b_{m,\theta}) \pi \\
 &= \sum_m (a_m^2 + b_m^2)_{,\theta} (\pi/2) - \sum_m (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) \pi \\
 \int_0^{2\pi} \psi_{,\theta} \psi_{,\phi} d\phi &= \sum_m m^2 (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) \pi - \sum_m m^2 (a_m^2 + b_m^2)_{,\theta} (\pi/2) \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (a_m a_{m,\theta} + b_m b_{m,\theta}) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (a_m^2 + b_m^2)_{,\theta} d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) d\theta \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) (a_m^2 + b_m^2)_{,\theta} d\theta &= [f(\theta) (a_m^2 + b_m^2)_{,\theta} - (df/d\theta) (a_m^2 + b_m^2)]_{-\pi}^{\pi} \\
 &+ \int_{-\pi}^{\pi} (d^2 f/d\theta^2) (a_m^2 + b_m^2) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (d^2 f/d\theta^2) (a_m^2 + b_m^2) d\theta
 \end{aligned} \right. \quad (4.70)$$

式中每项逗号后面的 θ 或 ϕ 表示该项对 θ 或对 ϕ 求微分, 同时 $f(\theta)$ 是 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的函数。有了这些关系不难得到以下各式:

$$\begin{aligned}
 & \oint (1/2) g^{1/2} (g^{ij} \nabla_i \psi_{,j})^2 d\theta d\phi = (\pi/2) \int_{-\pi}^{\pi} \{ [(\sqrt{2} - \cos \theta)/r]^2 \sum_m [(a_{m,\theta}^2 \\
 & \quad + b_{m,\theta}^2) + 2m^2 (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) + m^4 (a_m^2 + b_m^2)] - 2[(1 + \sqrt{2} \cos \theta \\
 & \quad - 2 \cos^2 \theta)/r^2] \sum m^2 (a_m^2 + b_m^2) \} d\theta \\
 & \oint 2(K + c_0 H) g^{1/2} g^{ij} \psi \nabla_i \psi_{,j} d\theta d\phi = -\pi \int_{-\pi}^{\pi} \sum_m \{ [(2\sqrt{2} \cos \theta - 2 \\
 & \quad + c_0 r \sqrt{2} \cos \theta)/r^2] [(a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) + m^2 (a_m^2 + b_m^2)] + [\sqrt{2}(2 \\
 & \quad + c_0 r) \cos \theta / 2r^2] (a_m^2 + b_m^2) \} d\theta \\
 & \oint g^{1/2} [-(5H^2 + 2c_0 H + c_0/r) g^{ij} + 2K(H + c_0/r) L^{ij}] \psi_{,i} \psi_{,j} d\theta d\phi \\
 & = (\pi/r^2) \int_{-\pi}^{\pi} \sum_m \{ -[(1/2) \cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta + 2c_0 r] (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) \\
 & \quad + [-(5/2) \cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2} c_0 r \cos \theta] m^2 (a_m^2 + b_m^2) \} d\theta \\
 & \oint [g^{1/2} (2H g^{ij} - K L^{ij}) (2H + c_0)_{,ij}] \psi^2 d\theta d\phi \\
 & = -\pi \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{2} \cos \theta / r^2) \sum_m (a_m^2 + b_m^2) d\theta \\
 & \oint \{ g^{1/2} (H + c_0/2) [g^{ij} (g^k L_{*k})_{,j} - \Gamma_{ij}^m g^{ij} g^k L_{km} - \Gamma_{ij}^l (2H g^{ij} - K L^{ij})] \} \psi^2 d\theta d\phi \\
 & = [\pi / (2r^2)] \int_{-\pi}^{\pi} (4 \cos^2 \theta - 2 + c_0 r \sqrt{2} \cos \theta) \sum_m (a_m^2 + b_m^2) d\theta \\
 & \oint 2g^{1/2} [(H^2 - K)(4H^2 - K) - (c_0/r)(K - H/r) \psi^2] d\theta d\phi \\
 & = \pi \int_{-\pi}^{\pi} [(2 \cos^2 \theta - \sqrt{2} \cos \theta + 1)/r^2 + \sqrt{2} c_0 / r / (\sqrt{2} - \cos \theta)] \sum_m (a_m^2 + b_m^2) d\theta
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

把式(4.71)代入式(4.69)后,最后得到

$$\begin{aligned} \delta^2 F = & (\pi k_c / r^2) \int_{-\pi}^{\pi} \sum_m \{ [(1/2)(\sqrt{2} - \cos \theta)^2 (a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2)] \\ & + [(\sqrt{2} - \cos \theta)^2 m^2 - (1/2)\cos^2 \theta + \sqrt{2}\cos \theta + 2 \\ & + c_0 r(2 - \sqrt{2}\cos \theta)](a_{m,\theta}^2 + b_{m,\theta}^2) + [(1/2)(\sqrt{2} - \cos \theta)^2 m^4 \\ & + \left(-\frac{1}{2}\cos^2 \theta + 2\sqrt{2}\cos \theta - 3\right)m^2 + 2 - \sqrt{2}\cos \theta \\ & + \sqrt{2}c_0 r(\sqrt{2} - \cos \theta)^{-1}](a_m^2 + b_m^2) \} d\theta \end{aligned} \quad (4.72)$$

稳定性分析要求:当 $\psi \neq 0$ 时, $\delta^2 F$ 应该是正值。式(4.72)中 $(a_{m\theta}^2 + b_{m\theta}^2)$ 的系数为正值的必要条件是

$$c_0 r < -1 - \cos \theta / [2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \cos \theta)] < -3/2 - \sqrt{2}/4 \approx -1.8536$$

另一方面, $(a_m^2 + b_m^2)$ 的系数为正值的条件是

$$c_0 r > -(\sqrt{2} - \cos \theta)^2$$

也就是说, $c_0 r$ 的下限为 $c_0 r > -5.8284$ 。这个条件与 $c_0 r < -1.8536$ 并不矛盾。因此,锚环的稳定条件是 $c_0 r$ 满足

$$-5.8284 < c_0 r < -1.8536 \quad (4.73)$$

§ 4.5 迪潘四次圆纹曲面

在对二块磷脂环形膜泡的观测中发现,除上节所讨论的锚环形膜泡外,还存在有非轴对称环^[24-26]。由于两亲分子膜与层状液晶的相似性, Ou-Yang^[27] 感到环形膜泡与层状液晶的结构很有关联,从而研究了普适形状方程式的四次圆纹曲面解的问题。

如图 4-2 所示,四次圆纹曲面与一对圆锥曲线直接相关。

$$(X/a)^2 + (Y/b)^2 = 1, \quad Z = 0 \quad (4.74a)$$

$$(X/c)^2 - (Z/b)^2 = 1, \quad Y = 0 \quad (4.74b)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (4.74c)$$

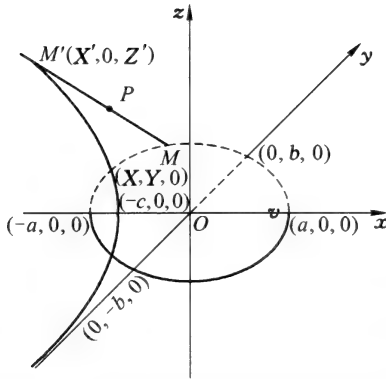


图 4-2 生成四次圆纹曲面的圆锥曲线

以椭圆 [式 (4.74a)] 上各点 $M(X, Y, 0)$ 为球心, 作半径为 $-cX/a + \mu$ (μ 为任意的常数, $a > \mu > c$) 的各族球面。以双曲线 [式 (4.74b)] 上各点 $M'(X', 0, Z')$ 为球心作半径为 $-aX'/c + \mu$ 的球面族。这两族球面的半径差 $cX/a - aX'/c$ 正好是 M 点和 M' 点之间的距离。因此, 两族球面在 P 点相切而具有同一包络面。这个包络面就是迪潘四次圆纹曲面。 M 族球面 $F(x, y, z, X)$ 的

方程式 [应用式 (4.74a)] 是

$$\begin{aligned} F(x, y, z, X) &= (x - X)^2 + (y - Y)^2 + z^2 - (-cX/a + \mu)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2X(x - c\mu/a) - 2b(1 - X^2/a^2)^{1/2}y + b^2 - \mu^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

式中 X 是参变量而 Y 与 X 的关系由式 (4.74a) 决定。迪潘四次圆纹曲面的方程式可以由解式 (4.75) 和 $\partial F/\partial X = 0$ 这一对联立方程式得到。式 (4.75) 给出的 $\partial F/\partial X = 0$ 的形式是

$$(x - X) + (y - Y)\partial Y/\partial X - \frac{c}{a} \left(-\frac{c}{a}X + \mu \right) = 0$$

或者在应用式 (4.74a) 后写成

$$\frac{X^2}{a^2} = \frac{(x - c\mu/a)^2}{(x - c\mu/a)^2 + b^2 y^2/a^2} \quad (4.76)$$

联立方程式 (4.75) 和 (4.76) 给出迪潘四次圆纹曲面方程式

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - c^2 - \mu^2)^2 = 4(ax - c\mu)^2 + 4(a^2 - c^2)y^2 \quad (4.77a)$$

另外, 对于 M' 族球面, 同样的处理给出

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + c^2 - \mu^2)^2 = 4(cx - a\mu)^2 + 4(c^2 - a^2)z^2 \quad (4.77b)$$

式(4.77a)和式(4.77b)是等价的。在 $c = 0$ 的条件下,两式分别简化成两个等价的锚环方程式

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - \mu^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

和
$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - \mu^2)^2 = 4a^2(\mu^2 - z^2)$$

作为比较,式(4.77)迪潘四次圆纹曲面的投影和式(4.60)克利福德锚环的投影见图4-3。

迪潘四次圆纹曲面的参量方程式是^[28]

$$\begin{cases} x = [\mu(c - \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta] / (a - c \cos \theta \cos \psi) \\ y = b \sin \theta (a - \mu \cos \psi) / (a - c \cos \theta \cos \psi) \\ z = b \sin \theta (c \cos \theta - \mu) / (a - c \cos \theta \cos \psi) \\ (\theta \geq 0, \psi \leq 2\pi) \end{cases} \quad (4.78)$$

式(4.78)给出下列各非零项:

$$\begin{cases} g_{\theta\theta} = b^2 (a - \mu \cos \psi)^2 / (a - c \cos \theta \cos \psi)^2 \\ g_{\psi\psi} = b^2 (\mu - c \cos \theta)^2 / (a - c \cos \theta \cos \psi)^2 \\ L_{\theta\theta} = b^2 (a - \mu \cos \psi) \cos \psi / (a - c \cos \theta \cos \psi)^2 \\ L_{\psi\psi} = -b^2 (\mu - c \cos \theta) / (a - c \cos \theta \cos \psi)^2 \\ n_x = (c - a \cos \theta \cos \psi) / (a - c \cos \theta \cos \psi) \\ n_y = -b \sin \theta \cos \psi / (a - c \cos \theta \cos \psi) \\ n_z = -b \sin \theta / (a - c \cos \theta \cos \psi) \\ H = (1/2) [\cos \psi / (a - \mu \cos \psi) - 1 / (\mu - c \cos \theta)] \\ K = -\cos \psi / (a - \mu \cos \psi) (\mu - c \cos \theta) \end{cases} \quad (4.79)$$

为了找出迪潘四次圆纹曲面式(4.78)能满足形状方程式(3.81)的条件,引用符号^[29]

$$\begin{cases} \Delta p' = \Delta p / k_c, \quad \gamma = \lambda / k_c + c_0^2 / 2, \quad \gamma' = \gamma - c_0^2 / 2 \\ A = \cos \theta, \quad B = \cos \psi, \quad D = (a - \mu \cos \psi)^3 / (\mu - c \cos \theta)^3 \end{cases} \quad (4.80)$$

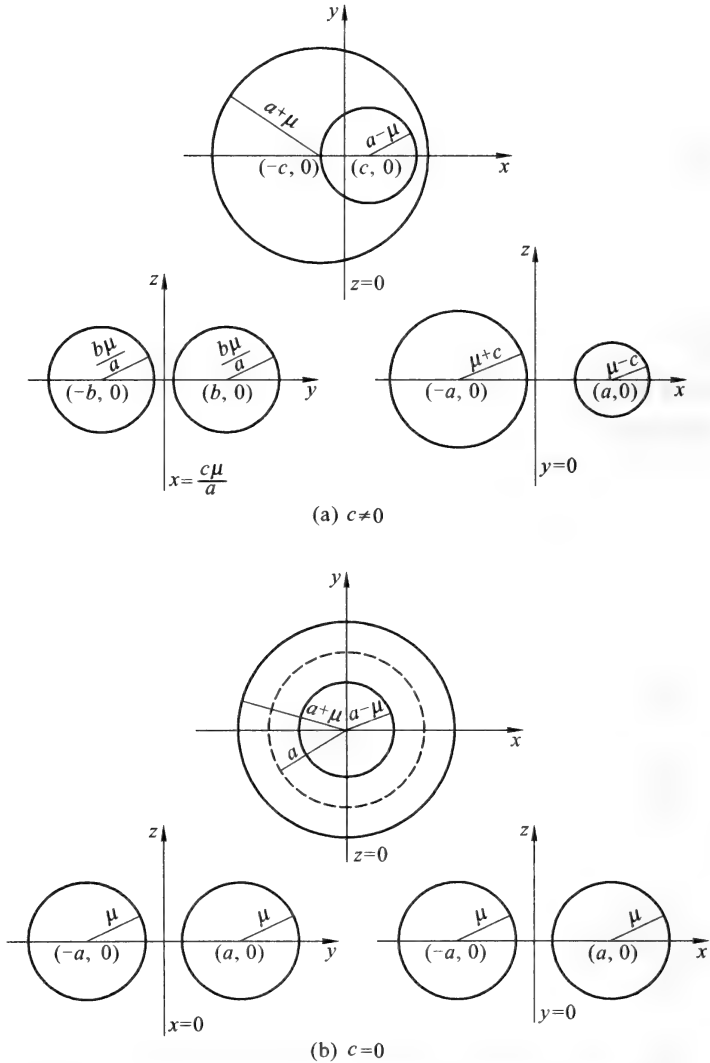


图 4-3 迪潘四次圆纹曲面(a)和锚环(b)投影图(不同尺度)

式(2.55)的拉普拉斯算符现在成为

$$\nabla^2 = \frac{(a - cAB)^2}{b^2(a - \mu B)(\mu - cA)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\mu - cA}{a - \mu B} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{a - \mu B}{\mu - cA} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} \right] \right\} \quad (4.81)$$

详细的运算给出(注:参考文献[29]中有一些印刷错误,这里作了修正。)

$$\begin{aligned}
\Delta p' - (2\gamma - c_0^2)H &= D^{-1}[(\mu\Delta p' + \gamma')\mu^2 c^3 A^3 B^3 \\
&- (3\mu\Delta p' + 2\gamma')\mu\alpha c^3 A^3 B^2 + (3\mu\Delta p' + \gamma')a^2 c^3 A^3 B - \Delta p' a^3 c^3 A^3 \\
&- (3\mu\Delta p' + 4\gamma')\mu^3 c^2 A^2 B^3 + 9(\mu\Delta p' + \gamma')\mu^2 \alpha c^2 A^2 B^2 \\
&- (9\mu\Delta p' + 6\gamma')\mu\alpha^2 c^2 A^2 B + (3\mu\Delta p' + \gamma')a^3 c^2 A^2 \\
&+ (3\mu\Delta p' + 5\gamma')\mu^4 cAB^3 - (9\mu\Delta p' + 12\gamma')\mu^3 \alpha cAB^2 \\
&+ 9(\mu\Delta p' + \gamma')\mu^2 a^2 cAB - (3\mu\Delta p' + 2\gamma')\mu\alpha^3 cA - (\mu\Delta p' + 2\gamma')\mu^5 B^3 \\
&+ (3\mu\Delta p' + 5\gamma')\mu^4 aB^2 - (3\mu\Delta p' + 4\gamma')\mu^3 a^2 B + (\mu\Delta p' + \gamma')\mu^2 a^3]
\end{aligned} \tag{4.82a}$$

$$\begin{aligned}
(2H + c_0)(2H^2 - 2K - c_0H) &= (2D)^{-1}[(\mu^2 c_0^2 - 1)c^3 A^3 B^3 \\
&- 2\mu c_0^2 \alpha c^3 A^3 B^2 + c_0^2 a^2 c^3 A^3 B - (4\mu^2 c_0^2 - 4\mu c_0 - 2)\mu c^2 A^2 B^3 \\
&+ (9\mu^2 c_0^2 - 8\mu c_0 + 1)\alpha c^2 A^2 B^2 - 2(3\mu c_0 - 2)c_0 a^2 c^2 A^2 B + c_0^2 a^3 c^2 A^2 \\
&+ (5\mu c_0 - 8)\mu^3 c_0 cAB^3 - (12\mu^2 c_0^2 - 16\mu c_0 + 4)\mu\alpha cAB^2 \\
&+ (9\mu^3 c_0^2 - 8\mu c_0 + 1)a^2 cAB - 2\mu c_0^2 a^3 cA - 2(\mu c_0 - 2)\mu^4 c_0 B^3 \\
&+ (5\mu c_0 - 8)\mu^3 c_0 aB^2 - (4\mu^2 c_0^2 - 4\mu c_0 - 2)\mu\alpha^2 B + (\mu^2 c_0^2 - 1)a^3]
\end{aligned} \tag{4.82b}$$

$$\begin{aligned}
2\nabla^2 H &= (1/D)[(a^2 - \mu^2)b^{-2}c^3 A^3 B^3 - \mu c^2 A^2 B^3 \\
&+ (3\mu^2 - 2a^2 - c^2)b^{-2}\alpha c^2 A^2 B^2 + 2\mu\alpha cAB^2 \\
&- (3\mu^2 - a^2 - 2c^2)a^2 b^{-2}cAB - \mu\alpha^2 B \\
&+ (\mu^2 - c^2)a^3 b^{-2}]
\end{aligned} \tag{4.82c}$$

由于形状方程式对 $(0, 2\pi)$ 范围内任意 θ 和 ψ 值都必须能得到满足,同时 $b \neq 0$ 而 $D > 0$,因此 $A^m B^n$ 项的系数对任何整数的 m 和 n 值都必须为零。由于式(4.74c)的关系,迪潘四次圆纹曲面形膜泡的存在需要满足下列关系式:

$$(n, m) \quad (3, 3) \quad c^3[\mu^2(\mu\Delta p' + \gamma) - (2\mu^2 - a^2 - c^2)/(2b^2)] = 0 \tag{4.83a}$$

$$(3, 2) \quad \mu\alpha c^3(3\mu\Delta p' + 2\gamma) = 0 \tag{4.83b}$$

$$(3, 1) \quad a^2 c^3(3\mu\Delta p' + \gamma) = 0 \tag{4.83c}$$

$$(3, 0) \quad a^2 c^3 \Delta p' = 0 \tag{4.83d}$$

$$(2, 3) \quad \mu^2 c^2(3\mu^2 \Delta p' + 4\mu\gamma - 2c_0) = 0 \tag{4.83e}$$

$$\begin{aligned}
(2, 2) \quad a^2 c^2[\mu(9\mu^2 \Delta p' + 9\mu\gamma - 4c_0) \\
+ 3(2\mu^2 - a^2 - c^2)/(2b^2)] = 0
\end{aligned} \tag{4.83f}$$

$$(2, 1) \quad a^2 c^2 (9\mu^2 \Delta p' + 6\mu\gamma - 2c_0) = 0 \quad (4.83g)$$

$$(2, 0) \quad a^3 c^2 (3\mu \Delta p' + \gamma) = 0 \quad (4.83h)$$

$$(1, 3) \quad \mu^3 c (3\mu^2 \Delta p' + 5\mu\gamma - 4c_0) = 0 \quad (4.83i)$$

$$(1, 2) \quad \mu^2 ac (9\mu^2 \Delta p' + 12\mu\gamma - 8c_0) = 0 \quad (4.83j)$$

$$(1, 1) \quad a^2 c [\mu (9\mu^2 \Delta p' + 9\mu\gamma - 4c_0) \\ - 3(2\mu^2 - a^2 - c^2)/(2b^2)] = 0 \quad (4.83k)$$

$$(1, 0) \quad \mu a^3 c (3\mu \Delta p' + 2\gamma) = 0 \quad (4.83l)$$

$$(0, 3) \quad \mu^4 (\mu^2 \Delta p' + 2\mu\gamma - 2c_0) = 0 \quad (4.83m)$$

$$(0, 2) \quad \mu^3 a (3\mu^2 \Delta p' + 5\mu\gamma - 4c_0) = 0 \quad (4.83n)$$

$$(0, 1) \quad \mu^2 a^2 (3\mu^2 \Delta p' + 4\mu\gamma - 2c_0) = 0 \quad (4.83o)$$

$$(0, 0) \quad a^3 [\mu^2 (\mu \Delta p' + \gamma) + (2\mu^2 - a^2 - c^2)/(2b^3)] = 0 \quad (4.83p)$$

式(4.83d)的条件指出

$$c = 0, \quad \Delta p' = 0 \quad (4.84a)$$

或 $c = 0, \quad \Delta p' \neq 0 \quad (4.84b)$

或 $c \neq 0, \quad \Delta p' = 0 \quad (4.84c)$

第一种情形 ($c = 0, \Delta p' = 0$) 属于锚环形膜泡。这时从式(4.83a)到式(4.83l)所有各式都能得到满足。同时, (4.83m)到(4.83o)各式和式(4.83p)分别要求

$$\begin{cases} \gamma = c_0 = \lambda = 0 \\ \mu/a = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad (4.85)$$

第二种情形 ($c = 0, \Delta p' \neq 0$) 也属于锚环解。这时, 从(4.83m)到(4.83p)各式给出

$$\begin{cases} c_0 = \gamma\mu/2 = 2\sqrt{2}/a - (8/a^2 - 2\lambda/k_c)^{1/2} \\ \Delta p' = -4c_0/a^2 \\ \mu/a = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad (4.86)$$

第三种情形 ($c \neq 0, \Delta p' = 0$) 对应于非轴对称的迪潘四次圆纹曲面。这时, 式(4.83)中的 b, c, e, g, h, i, j, l, m, n 和 o 各式以及式(4.80)给出

$$\gamma = 0, \quad c_0 = 0, \quad \lambda = 0 \quad (4.87)$$

同时, 式(4.83)中的 a, f, k 和 p 各式给出

$$\mu^2 = (a^2 + c^2)/2 \quad (4.88)$$

因此, $c \neq 0$ 、 $\Delta p' = 0$ 和式(4.87)以及式(4.88)是迪潘四次圆纹曲面为膜泡解的充要条件。式(4.88)的条件限制了迪潘四次圆纹曲面生成圆锥曲线的形状,因此迪潘四次圆纹曲面形的膜泡比较难以出现。

§ 4.6 双凹圆盘形膜泡

人类以及哺乳类动物的成熟红细胞中没有细胞核。红细胞的形状又是被施加在红细胞上的力的平衡所控制。因此红细胞的形状成为研究生物膜的一个理想课题。实验观测指出:成熟的人类红细胞呈双凹圆盘形。正是这个问题引起了 Helfrich 教授对生物膜研究的兴趣。在具体讨论双凹圆盘形膜泡(circular biconcave discoidal vesicle)之前,先对普遍的具有轴对称性的曲面的形状方程式进行一些比较详细的讨论是有益的。

4.6.1 轴对称曲面的形状方程式

对于具有轴对称性的曲面,比较方便的办法是引用曲面上一点到对称轴(z 轴)的距离 ρ 作为独立参量(如图 4-4 所示),把该点曲面周线的切线与对称轴之间交角的余角 ψ 看做是 ρ 的函数, $\psi = \psi(\rho)$ 。于是有

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad dz = d\rho \tan \psi \\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 = \sec^2 \psi d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ g_{\rho\rho} = \sec^2 \psi, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2, \quad g = \rho^2 \sec^2 \psi \\ n_\rho = -\sin \psi, \quad n_\theta = 0, \quad n_z = \cos \psi \\ n_x = -\sin \psi \cos \theta, \quad n_y = -\sin \psi \sin \theta, \quad n_z = \cos \psi \\ L_{\theta\theta} = \sec \psi \frac{d\psi}{d\rho}, \quad L_{\rho\theta} = 0, \quad L_{\rho\rho} = \rho \sin \psi \\ 2H = -(c_1 + c_2) = \cos \psi \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin \psi}{\rho}, \quad K = c_1 c_2 = \frac{\sin \psi \cos \psi}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} \\ c_1 = -\frac{\sin \psi}{\rho}, \quad c_2 = -\cos \psi \frac{d\psi}{d\rho} \\ \nabla'^2 = \frac{\cos \psi}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cos \psi \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sec \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \end{array} \right. \quad (4.89)$$

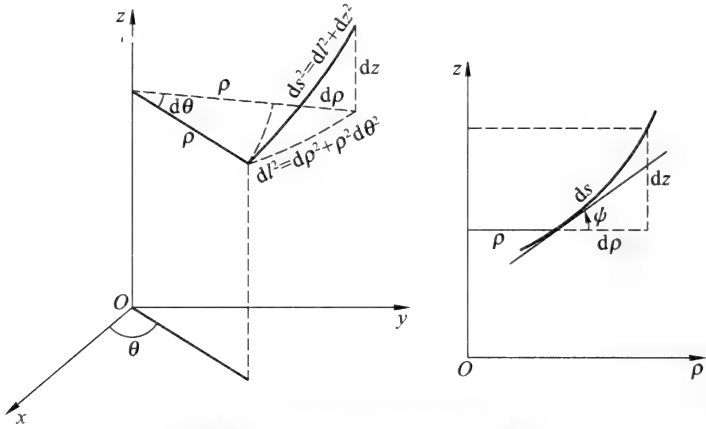


图 4-4 描述轴对称曲面的坐标

式中 $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 为转动角, 曲面上外向法线 \mathbf{n} 已经被明确规定, 这样的曲面称为光滑曲面。根据式(4.89), 普适形状方程式^[30](3.81)成为

$$\begin{aligned} & \cos^3 \psi \frac{d^3 \psi}{d\rho^3} - 4 \sin \psi \cos^2 \psi \frac{d\psi}{d\rho} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \cos \psi \left(\sin^2 \psi - \frac{1}{2} \cos^2 \psi \right) \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^3 \\ & + \frac{2 \cos^3 \psi}{\rho} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \frac{7 \sin \psi \cos^2 \psi}{2\rho} \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 + \left[\frac{\sin^2 \psi - 2 \cos^2 \psi}{2\rho^2} - \left(\frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2c_0 \sin \psi}{\rho} \right] \cos \psi \frac{d\psi}{d\rho} + \left[\frac{\sin \psi (1 + \cos^2 \psi)}{2\rho^3} - \left(\frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) \frac{\sin \psi}{\rho} + \frac{\Delta p}{k_c} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.90a)$$

它也可以写成下列形式^[31]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \cos \psi \left[\cos^2 \psi \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \frac{\sin 2\psi}{4} \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 + \frac{\cos^2 \psi}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\sin 2\psi}{2\rho^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho \Delta p}{2k_c \cos \psi} - \frac{\lambda \sin \psi}{k_c \cos \psi} - \frac{\sin \psi}{2 \cos \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} - c_0 \right)^2 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.90b)$$

也就是相当于在 $\rho \neq 0$ 和 $\cos \psi \neq 0$ 的条件下有

$$\begin{aligned} & \cos^2 \psi \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \frac{\sin 2\psi}{4} \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 + \frac{\cos^2 \psi}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\sin 2\psi}{2\rho^2} - \frac{\lambda \sin \psi}{k_c \cos \psi} \\ & - \frac{\sin \psi}{2 \cos \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} - c_0 \right)^2 - \frac{\rho}{2k_c \cos \psi} \widetilde{\Delta p} = 0 \end{aligned} \quad (4.90c)$$

式中

$$\widetilde{\Delta p} = \Delta p + \frac{2k_c K}{\rho^2} \quad (4.90d)$$

K 为积分常数。

4.6.2 成熟红细胞

式(4.90a)是一个三阶非线性微分方程。能够满足它的解析形式的解已知的非常少,而且很难找到。幸而,Naito, Okuda 和 Ou-Yang^[32] 找到一个能描述双凹圆盘形的解。它的具体形式是

$$\begin{cases} \psi = \arcsin[\rho(a \ln \rho + b)] = \arcsin[a \rho \ln(\rho/\rho_B)] \\ \rho_B = \exp(-b/a) \end{cases} \quad (4.91)$$

式中 a 和 b 为常量。 a 的量纲为长度的倒数,由形状方程和对膜泡所规定的符号来决定。对式(4.91)求导得出

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{1}{\cos \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} + a \right) \\ \frac{d^2\psi}{d\rho^2} = \frac{\sin \psi}{\cos^3 \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} + a \right)^2 + \frac{a}{\rho \cos \psi} \\ \frac{d^3\psi}{d\rho^3} = \left(\frac{3\sin^2 \psi}{\cos^5 \psi} + \frac{1}{\cos^3 \psi} \right) \left(\frac{\sin \psi}{\rho} + a \right)^3 + \frac{3\sin \psi}{\rho \cos^3 \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} + a \right) - \frac{a}{\rho^2 \cos \psi} \end{cases} \quad (4.92)$$

把式(4.92)代入式(4.90a)可以得到

$$2(a + c_0) \left(\frac{\sin \psi}{\rho} \right)^2 + \left[(c_0 + a)^2 + \frac{2\lambda}{k_c} \right] \frac{\sin \psi}{\rho} - \left[\frac{\Delta p}{k_c} - \frac{1}{2} a (c_0^2 - a^2) - \frac{a\lambda}{k_c} \right] = 0$$

由于此式对任何值的 ψ 角都应能得到满足,因此要求

$$a + c_0 = 0$$

$$(a + c_0)^2 + 2\lambda/k_c = 0$$

$$\Delta p/k_c - (1/2)a(c_0^2 - a^2) - a\lambda/k_c = 0$$

于是在

$$a = -c_0, \quad \lambda = \Delta p = 0 \quad (4.93)$$

的条件下,

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} = \sin \psi = -c_0 \rho \ln(\rho/\rho_B) = \beta x \ln x \\ x = \rho/\rho_B, \quad \beta = -c_0 \rho_B \end{cases} \quad (4.94)$$

成为普适形状方程式(3.81)的解。 s 是弧长。

为了讨论方便起见,先看

$$\beta < 0 \quad (c_0 > 0), \quad |\beta| < e \quad (4.95)$$

的情形。显然,当 $x = 0$ ($\rho = 0$) 和 $x = 1$ ($\rho = \rho_B$) 时, $\sin \psi = 0$; 而在拐点 $x = e^{-1}$ ($\rho = \rho_M = \rho_B/e$) 处, $\sin \psi$ 具有最大值 $\sin \psi_M$, $\sin \psi_M = c_0 \rho_B/e$ 。在 $x = x_c = \rho_c/\rho_B > 1$ 处, $\psi = \pi/2$ 。为了使曲面的正向法线指向曲面外部,在这里 ψ 角正向取作顺时针方向。对 $x_c \ln x_c = 1/(c_0 \rho_B)$ 的情形,数值计算指出:在式(4.95)的条件之下,只有一个大于 1 的 x_c 数值,也就是只有一个大于 ρ_B 的 ρ_c 数值能够得到满足,所以有

$$\rho_c > \rho_B > \rho_M > 0$$

相对于式(4.94)可以有两个 $\cos \psi$ 函数。

$$\cos \psi = \pm (1 - \beta^2 x^2 \ln^2 x)^{1/2} = \pm [1 - c_0^2 \rho^2 \ln^2(\rho/\rho_B)]^{1/2} \quad (4.96)$$

在正号条件下, $\rho = 0$ 处 $\tan \psi = 0$ 。 ρ 值增加时 $\tan \psi$ 的负值的绝对值增大,到达 $\rho = e^{-1}$ 处 $\tan \psi$ 负值的绝对值达到最大值 $\tan \psi_M$ 。 ρ 再增加时, ψ 开始向正向增加,于是 $\tan \psi$ 负值的绝对值降低。当 ρ 到达 ρ_B 时, $\tan \psi = 0$ 。 ρ 继续增加时, $\tan \psi$ 成为正值。在 $\rho = \rho_c$ 处, $\tan \psi \rightarrow \infty$ 。函数 $z(\rho)$ 的轮廓见图 4-5,它也就是双凹圆盘形在 ρz 平面上方的图形。式(4.96)的负号部分描述的应是图 4-5 中曲线关于 ρ 轴对称反射部分。 $\beta > 0$ 的情形与 $\beta < 0$ 的情形完全类似,只不过把式(4.96)中前面的正负号颠倒一下而已。对于 $a = c_0 = 0$ 的特例,如果令 $b = 1/R$,式(4.91)将简化成 $\rho = R \sin \psi$,这是一个半径为 R 的球形膜泡。

函数 $z(\rho)$ 由下式决定

$$\begin{cases} dz/d\rho = \tan \psi = -c_0 \rho \ln(\rho/\rho_B) / \cos \psi \\ z(\rho) - z(0) = \int_0^\rho \tan \psi(\rho) d\rho \end{cases} \quad (4.97)$$

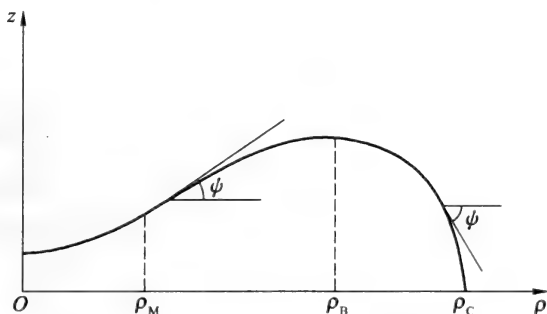


图 4-5 $c_0 > 0$ 时式(4.91)描述的轮廓图

具有 $D_{\infty h}$ 对称的膜泡包括对 ρ 轴对称反射部分

可惜,对本问题无法求得简单的解析形式的 $z(\rho)$ 函数。从图 4-5 可以看出,由于 $z(0) > z(\rho_C) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} z(0) &= -\int_0^{\rho_C} \tan \psi(\rho) d\rho \\ &= \int_0^{\rho_C} c_0 \rho \ln(\rho/\rho_B) d\rho [1 - c_0^2 \rho^2 \ln^2(\rho/\rho_B)]^{1/2} \end{aligned}$$

另外,双凹圆盘形膜泡的具体形状由 c_0 和 ρ_B 决定。由于膜泡的面积 A_0 为

$$A_0 = 4\pi \int_0^{\rho_C} \rho d\rho \sqrt{1 - [c_0 \rho \ln(\rho/\rho_B)]^2} \quad (4.98)$$

因此也可以说双凹圆盘形膜泡的具体形状由 c_0 和膜泡面积 A_0 决定。

值得注意的是,如果把式(4.91)的轮廓线绕 ρ 轴转动一周的话,形成的将是一个哑铃形曲面(dumbbell shaped surface),但是还不曾观测到过稳定的哑铃形红细胞。由于没有解析形式的 $z(\rho)$ 函数,因此无法讨论由式(4.91)形成的哑铃形曲面的问题。

4.6.3 双凹圆盘解的各种形状

式(4.91)的双凹圆盘形表示式可以写成另外一种形式

$$\begin{cases} \sin \psi = \rho/\rho_0 + c_0 \rho \ln \rho = c_0 \rho \ln(\rho/\rho_B) \\ \rho_B = \exp(-1/c_0 \rho) \end{cases} \quad (4.99)$$

当 c_0 的数值是在 $(-\infty, \infty)$ 范围内, 同时 ρ 的数值是在 $(0, \infty)$ 范围内取不同数值时, 式(4.99)将给出不同的图形, 也就是不同形状的膜泡。上节已经提到, 标识膜泡形状的是 c_0 和膜泡表面面积 A_0 这两个量。通常为了便于识别, 对于每一种形状都赋予一个标量不变量 $c_s = c_0 \rho_s$, $\rho_s = \sqrt{A/(4\pi)}$ [32, 33]。为了简单起见, 可以取单位半径的球面作为标准, 于是这个不变量的数值 $c_0 \rho_s$ 就等于 c_0 。由于 $\sin \psi$ 的数值限制在 -1 到 $+1$ 之间, 因此各种图形也就存在于不同的 ρ 值区域。图 4-6 给出了各个区域的范围。

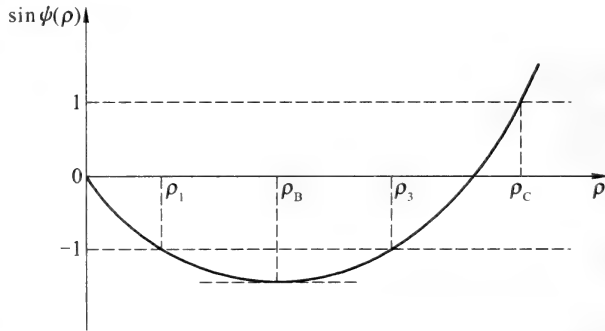


图 4-6 $\sin \psi(\rho)$ 与 ρ 的关系以及各种图形出现区域图

当 $c_0 > c_0 > 0$, $0 > \sin \psi(\rho_B) > -1$ 时, 图形出现在 $[0, \rho_C]$ 区域; 当 $c_0 > c_0$, $-1 \geq \sin \psi(\rho_B)$ 时, 图形出现在 $[0, \rho_1]$ 和 $[\rho_3, \rho_C]$ 两个不同的区域。

对于式(4.98), 当 $c_0 = 0$ 同时 $\rho_0 > 0$ 时, 它是一个半径为 ρ_0 的球面方程式。式(4.99)是一个 ρ 的单值单调函数。函数 $\sin \psi(\rho)$ 的极值(取 $\rho_0 = 1$)位于 ρ_B , 并满足关系式

$$\frac{d}{d\rho} \sin \psi = 1 + c_0 + c_0 \ln \rho_B = 0$$

$$\rho_B = \exp[-(1 + c_0)/c_0]$$

因此

$$\begin{aligned} \sin \psi(\rho_B) &= \rho_B + c_0 \rho_B \ln \rho_B = -c_0 \rho_B \\ &= -c_0 \exp[-(1 + c_0)/c_0] \end{aligned} \quad (4.100)$$

当 $c_0 > 0$ 时,它是负值;而当 $c_0 < 0$ 时,它是正值。对于 $c_0 > 0$ 的情形,不同的 c_0 值将给出不同的类椭球形膜泡。这里使用了“类椭球形”而不是如文献[32]中那样直接称为“椭球形”。椭球在包含 z 轴的平面上的投影是椭圆 $\rho^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ 。在椭圆上任意一点,椭圆的法线与 ρ 轴之间夹角的正弦满足关系式

$$\begin{aligned}\sin \psi &= dz/ds = dz/(d\rho^2 + dz^2)^{1/2} \\ &= -c^2 \rho / (a^4 z^2 + c^4 \rho^4)^{1/2}\end{aligned}$$

这个关系式显然不同于式(4.91)的各种特例的情形。只有在特例条件下两者才能近似相等。因此,严格说来这不是椭球形,只是类椭球形。首先,当 $c_s = c_0 \approx 3.59112$ 时,式(4.100)给出 $\sin \psi(\rho_B) = -1$ 。式(4.89)指出,这时膜泡的主曲率 $c_2 = -\cos \psi(d\psi/d\rho) = d(\sin \psi)/d\rho = 0$, 因此膜泡是一个无限长的有盖圆柱,圆柱半径 $\rho_B = 1/c_0 \approx 0.278$ 。

其次,当 $c_0 < c_p$ 时, $0 > \sin \psi(\rho_B) > -1$ 。这种状态下的图形将出现在 ρ 从 0 到 ρ_C 的范围内,其中 $\sin \psi(\rho_C) = 1$ 。同时, ρ_C 是图形的赤道半径。这些图形属于类扁椭球形。

当 $c_0 > c_p$ 时, $\sin \psi(\rho_B) < -1$, 这时图形可以在 $\rho \in [0, \rho_1]$ 和 $\rho \in [\rho_3, \rho_C]$ 两个范围内出现。在 $[0, \rho_1]$ 范围内, ρ_1 是图形的赤道半径,同时 $\sin \psi(\rho_1) = -1$ 。这些图形属于类长椭球形。不过,这时 $-1 \leq \sin \psi(\rho) \leq 0$, 因此图形的法线是指向内部的。在 $[\rho_3, \rho_C]$ 范围内,数值计算表明,只能出现自交的结点形圆柱体。图 4-7 绘出了下列图形:

- (a) 类长椭球 $c_0 \rho_s = -0.72, \sin \psi = \rho - 0.6 \rho \ln \rho, \rho \in [0, 1];$
- (b) 有盖圆柱 $c_0 \rho_s = -2.06, \sin \psi = \rho - 0.99 \rho \ln \rho, \rho \in [0, 1];$
- (c) 类扁椭球 $c_0 \rho_s = 0.46, \sin \psi = \rho + 0.5 \rho \ln \rho, \rho \in [0, 1];$
- (d) 双凹圆盘 $c_0 \rho_s = 1.51, \sin \psi = \rho + 1.8 \rho \ln \rho, \rho \in [0, 1];$
- (e) 自交倒双凹圆盘 $c_0 \rho_s = 2.72, \sin \psi = \rho + 3.2 \rho \ln \rho, \rho \in [0, 1];$
- (f) 自交结点形圆柱 $c_0 \rho_s = 3.28, \sin \psi = \rho + 3.60 \rho \ln \rho,$
 $\rho \in [0.301, 1]。$

这六种图形加上 $c_0 \rho_s = 0, \sin \psi = 0, \rho \in [0, \infty]$ 的平面和 $c_0 \rho_s = 0, \sin \psi = \rho/\rho_0, \rho \in [0, \rho_0]$ 的球面是式(4.96)所有可能出现的图形。值得

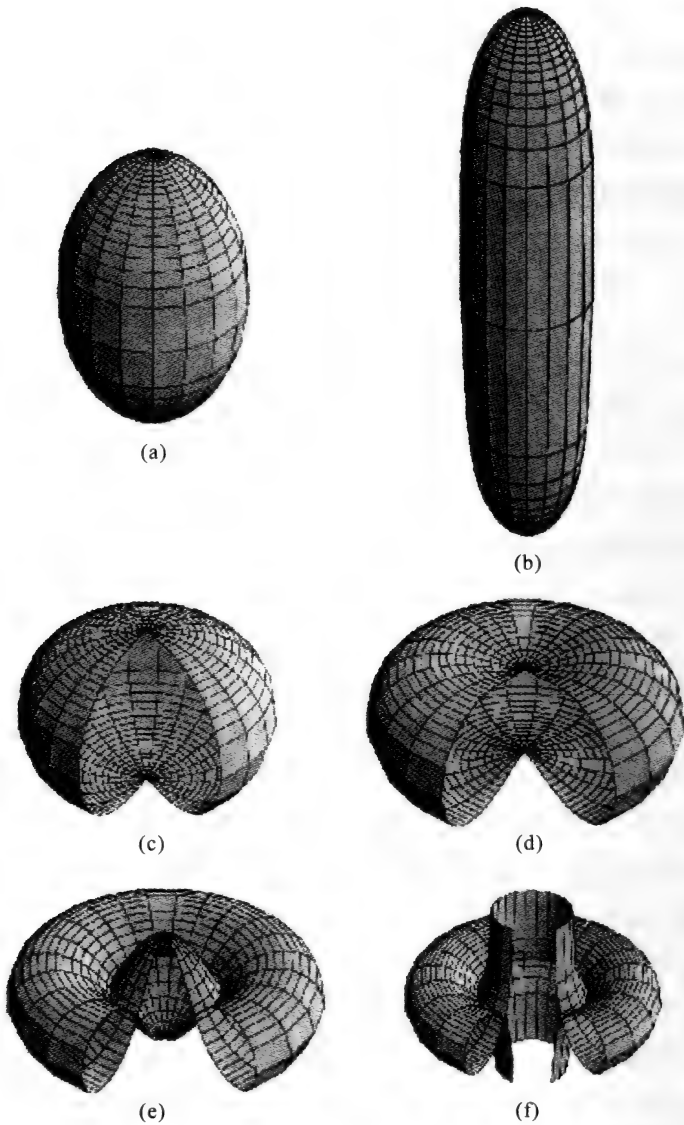


图 4-7 双凹圆盘形解的各种非平凡图形

(a) 类长椭球; (b) 有盖圆柱; (c) 类扁椭球; (d) 双凹圆盘; (e) 自交倒双凹圆盘; (f) 自交结点形圆柱。

注意的是,所有图形的自曲率都是在一个很小的数值范围内,而不是 $c_0 \in [-\infty, \infty]$ 的无限大范围。

4.6.4 双凹圆盘形解的变异

膜泡的形状^[34, 35]在温度^[36]和渗透压^[37]改变的时候可以发生变化。Hotani^[37]应用暗视场显微镜观测到如图 4-8 中所示的双凹圆盘形脂质体向椭圆形、三角形、四边形或五边形变化的情形,并且指出这种变化是由于渗透压的改变引起的。因此,可以把膜泡的初始条件取作式(4.93)的 $\Delta p = \lambda = 0$, 并把双凹圆盘形取作式(4.94)。形状方程式的解就由 c_0 和 ρ_B 完全决定,也可以取式(4.98)的膜泡面积 A_0 作为参数。

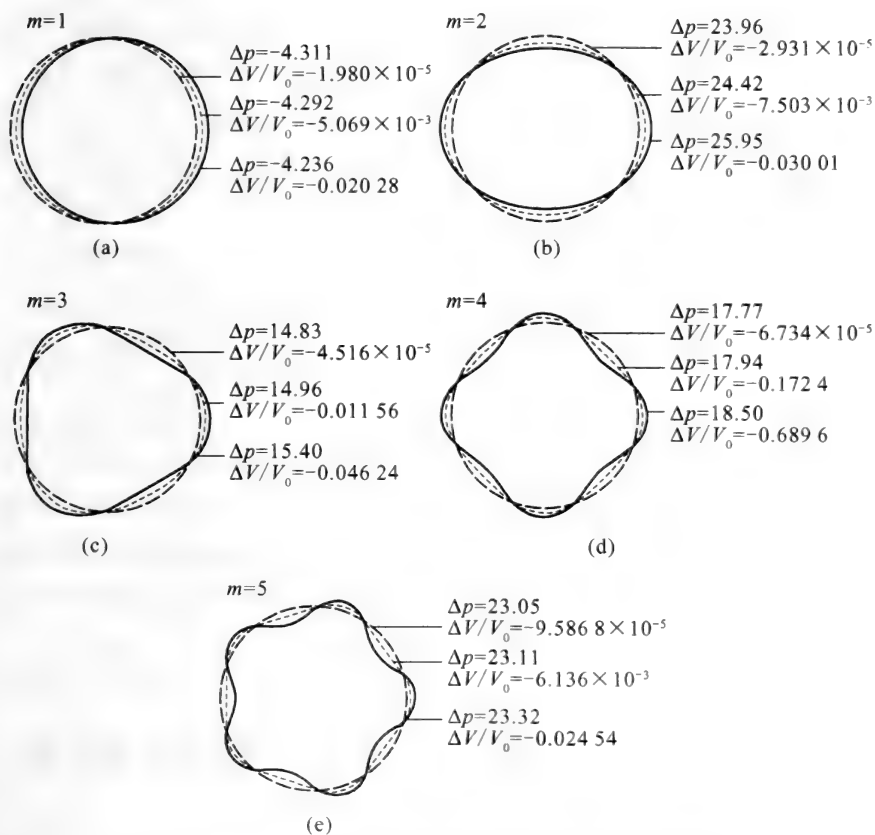


图 4-8 几种双凹圆盘形膜泡的多边形畸变的顶视图

(a) 不对称形; (b) 椭圆形; (c) 三角形; (d) 四边形; (e) 五边形。

图中 Δp 是渗透压差(单位为 $-kc_0^3$), $\Delta V/V_0$ 为膜泡体积相对改变量。

Naito 等人^[34]在拟合 Evans 和 Fung^[38]实验结果所得出的关于人类红细胞形状经验公式后,利用第三章中对膜面施加微量扰动的办法求得系统形状能的变分量。对形状能量的极小化证实了在高于渗透压差的阈值情形下,双凹圆盘形膜泡可以出现如图 4-8 所示的不对称双凹圆盘形、椭圆形、三角形、四边形或五边形的情况。具体的计算读者可以参阅文献[33]。

把双凹圆盘形红细胞放在某些高浓度的化学试剂中可以变成有刺的棘皮形,也就是说双凹圆盘形的顶点发生移动。式(4.91)的双凹圆盘形解在 $\lambda = \Delta p = 0$ 条件下是成立的。把红细胞放在高浓度化学试剂中相当于增加了膜泡内外压差而使渗透压差 $\Delta p \neq 0$ 。在 $\Delta p \neq 0$ 的条件下,令 $\psi(\rho) = \sin^{-1} f(\rho)$, 由于表面张力 λ 基本上等于零,因此可以令 $f(\rho) = c_0 \rho \ln(\rho/\rho_B) + \Delta p g(\rho)$ 。把它代入式(4.90a)就可以得到一个关于 $g(\rho)$ 的二阶微分方程式。方程式的齐次部分有两个正则奇点 $\rho = 0$ 和 $\rho = \rho_C$ 。可以证明,在两个奇点附近, $g(\rho)$ 具有下列形式:

$$g(\rho) = c_1 \rho + c_2/\rho + \rho^3/(16k)$$

数值计算说明,这个结果是合理的,所以在小的渗透压差 δp 时,

$$f(\rho) = c_0 \rho \ln \rho/\rho_B + \delta p[\rho^3/(16k)]$$

当渗透压差增大时,顶点将向中央移动。移动的大小由 $f(\rho_B + \epsilon) = 0$ 决定,式中 $\epsilon = -0.06\rho_B[\delta p/(kc_0^3)]$ 。这个结果表明,红细胞周围化学试剂浓度的增加将使细胞顶点向中心移动。这正是实验中看到的圆盘形细胞向有刺形细胞和圆盘形细胞向球形细胞变化的结果。关于上面计算的详细情形读者可以参考文献[34]。

§ 4.7 具有恒定平均曲率的回转曲面和它的扩展曲面

1841 年, Delaunay^[39]指出,欧几里得空间中具有不变平均曲率的回转曲面只有球面、圆柱面、悬链曲面(catenoid)、波形曲面(unduloid)和结点曲面(nodoid)。这些曲面统称为 Delaunay 曲面(Delaunay surface)。

前面已经比较详细地讨论过前两种曲面。生成 Delaunay 曲面的一般过程是把一条圆锥曲线沿它所处平面上的一条直线滚动,这时圆锥曲线的一个焦点绕该直线(例如 z 轴)所描绘的迹就产生了 Delaunay 曲面。Delaunay 曲面的普适方程式是^[39, 40]

$$\sin \psi(\rho) = a\rho + \frac{d}{\rho} \quad (4.101)$$

式中参量 a 和 d 决定了曲面的类型。(1) $a = 0$ 为由抛物线的焦点所生成的悬链曲面,也就是具有固定两 endpoints、不可伸缩的自由悬挂链生成的曲面。(2) $0 \leq ad < 1/4$ 为波形曲面,也就是由椭圆的一个焦点生成的波形曲线所形成的曲面。(3) $ad < 0$ 为结点曲面。由双曲线的一个焦点生成的曲面如图 4-9 所示。图中的

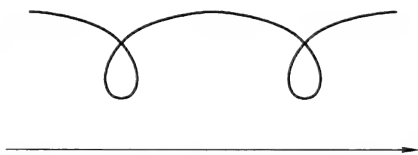


图 4-9 以底线为绕转轴的结点曲面

结指向绕转轴。由于 ψ 可以控制在顺时针方向也可以控制在逆时针方向,因此可以把参量 a 认为是正值。曲面式(4.101)的平均曲率 $H = \frac{1}{2} \left(\cos \psi \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin \psi}{\rho} \right)$ 正好等于 a 。这也说明了 $a > 0$ 。式(4.101)的一个简单的推广是,在 Delaunay 方程式(4.101)中增加一个常数 b 项^[41],

$$\sin \psi(\rho) = a\rho + b + \frac{d}{\rho} \quad (4.102)$$

式(4.102)描述的回转曲面并不一定具有不变的平均曲率。当 $b = 0$ 时,式(4.102)简化为 Delaunay 曲面。

现在看一看在什么条件下式(4.102)成为普适方程式(4.90a)的解。简单的求导给出下式:

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\rho} = \left(a - \frac{d}{\rho^2}\right) \sec \psi \\ \frac{d^2\psi}{d\rho^2} = \left(a - \frac{d}{\rho^2}\right)^2 \tan \psi \sec^2 \psi + 2\left(\frac{d}{\rho^3}\right) \sec \psi \\ \frac{d^3\psi}{d\rho^3} = \left(a - \frac{d}{\rho^2}\right)^3 (\sec^5 \psi + 2 \tan^2 \psi \sec^3 \psi) + \frac{6d}{\rho^3} \left(a - \frac{d}{\rho^2}\right) \tan \psi \sec^2 \psi - 6\left(\frac{d}{\rho^4}\right) \sec \psi \end{cases} \quad (4.103)$$

把式(4.103)代入式(4.90a)得出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\rho^3} \sin^3 \psi - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\rho^4} + \frac{3a}{\rho^2} \right) \sin^2 \psi - \left[\frac{d^2}{2\rho^5} + (ad + 2c_0 d + 1) \frac{1}{\rho^3} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{3}{2} a^2 + 2ac_0 + \frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) \frac{1}{\rho} \right] \sin \psi + \frac{d^3}{2\rho^6} + d \left(1 - \frac{3}{2} ad \right) \frac{1}{\rho^4} \\ & \quad + \left[\frac{3}{2} a^2 d + a - d \left(\frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) \right] \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2} a^3 + a \left(\frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) - \frac{\Delta p}{k_c} = 0 \end{aligned} \quad (4.104)$$

应用式(4.102),式(4.104)成为

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\Delta p}{k_c} + 2a^2 c_0 + 2a \left(\frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) \right] + b \left[2ac_0 + \left(\frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} \right) \right] \frac{1}{\rho} \\ & \quad + b \left(\frac{1}{2} b^2 - 2ad - 2c_0 d - 1 \right) \frac{1}{\rho^3} + d(b^2 - 4ad - 2c_0 d) \frac{1}{\rho^4} = 0 \end{aligned} \quad (4.105)$$

由于式(4.102)对于不同的 ρ 值都应能得到满足,因此只有当

$$\begin{cases} -\Delta p/k_c + 2a^2 c_0 + 2a(\lambda/k_c + c_0^2/2) = 0 \\ b[2ac_0 + (\lambda/k_c + c_0^2/2)] = 0 \\ b(b^2/2 - 2ad - 2c_0 d - 1) = 0 \\ d(b^2 - 4ad - 2c_0 d) = 0 \end{cases} \quad (4.106)$$

这些条件都得到满足时,式(4.102)才是普适形状方程式(4.90a)的解。式(4.106)指出,有下列四种不同的情形。

(1) $b = d = 0$ 这时 $\sin \psi = a\rho$ 。应用 $\rho^2 = x^2 + y^2$ 和 $\tan \psi = dz/d\rho = \pm \sin \psi (1 - \sin^2 \psi)^{-1/2}$ 的关系,对 $dz/d\rho$ 的积分给出了半径为 $R = |1/a|$ 的球面解。这时,式(4.106)的第一个式子就是简单的式(4.5)的球形解的要求。

(2) $b = 0, d \neq 0$ 这时 $\sin \psi = a\rho + d/\rho$ 。它就是具有不变平均曲率 $H = a$ 的 Delaunay 曲面解。Delaunay 曲面是膜泡形状的条件为 $c_0 = -2a$ 和 $\Delta p - 2ax = 0$ 。

(3) $b \neq 0, d = 0$ 这时 $\sin \psi = a\rho + b$ 。在这种条件下,对 $dz/d\rho$ 的积分给出了锚环解。

$$[x^2 + y^2 + z^2 + (b^2 - 1)/a^2]^2 = 4(b/a)^2(x^2 + y^2) \quad (4.107)$$

同时,式(4.106)的第二个式子给出了约束条件 $b^2 = 2$, $\lambda/k_c = -(2ac_0 + c_0^2/2)$ 和 $\Delta p = -2k_c a^2 c_0$ 。把式(4.107)同式(4.62)和式(4.63)相比较,可以看出 $|1/a|$ 就是锚环的小圆半径。

(4) $bd \neq 0$ 这时 $\sin \psi = a\rho + b + d/\rho$ 。在这种条件下式(4.106)给出下列约束条件:

$$\frac{\Delta p}{k_c} = -2a^2 c_0, \quad \frac{\lambda}{k_c} + \frac{c_0^2}{2} = -2ac_0, \quad c_0 d = -1, \quad b^2 = -\left(2 + \frac{4a}{c_0}\right) \quad (4.108)$$

在(3)和(4)两种情形下,式(4.102)指出,曲面并不具有不变的平均曲率。第(4)种情形比较复杂,有必要对它更仔细地讨论一下。

在 $bd \neq 0$ 的条件下要想得到实数的 b 值, a 和 c_0 必须具有不同的符号,而且要求 $-2a/c_0 \geq 1$ 。式(4.108)指出, b 可以有两个可能的数值。它们分别为 $b_{\pm} = \pm(-4a/c_0 - 2)^{1/2}$ 。与 b_{\pm} 相对应的曲面是

$$\sin \psi = a\rho + b_{\pm} - 1/c_0\rho \quad (4.109a)$$

$$\rho = [1/(2a)][(\sin \psi - b_{\pm}) \pm (\sin^2 \psi - 2b_{\pm} \sin \psi - 2)^{1/2}] \quad (4.109b)$$

式中 ρ 限制为正值实数。由于 $|\sin \psi| \leq 1$, 因此式(4.109b)中的 b_{+} 不能存在。Deuling 和 Helfrich 曾经用数值计算 Delaunay 波形曲面来解释红细胞髓磷脂的形状^[8]。他们的计算并未包括式(4.109)所描述的曲面。式(4.109)似乎可解释 Bar-Ziv 和 Moses^[42] 观测到的珠串形柱体结构。

令 $\rho = \rho_m$ 为 $d \sin \psi(\rho)/d\rho = 0$ 处的 ρ 值。这样 $\rho_m = (-ac_0)^{-1/2}$ 。于是, b_{-} 那一支曲面可以用一个无量纲的变量 x 来表示成为

$$\begin{cases} \sin \psi(x) = \alpha(x + x^{-1}) - (4\alpha^2 - 2)^{1/2} \\ x = \rho/\rho_m = (-ac_0)^{1/2}\rho \\ \alpha = (-a/c_0)^{1/2} \\ \sin \psi_m = 2\alpha - (4\alpha^2 - 2)^{1/2} \end{cases} \quad (4.110)$$

约束条件 $|\sin \psi| \leq 1$ 要求 $\alpha = (-a/c_0)^{1/2} \geq 3/4$ 。 x 的可能值限制在

$$x_2 = [1/(2\alpha)]\{1 + (4\alpha^2 - 2)^{1/2} + [2(4\alpha^2 - 2)^{1/2} - 1]^{1/2}\}$$

$$\geq x \geq [1/(2a)]\{1 + (4\alpha^2 - 2)^{1/2} - [2(4\alpha^2 - 2)^{1/2} - 1]^{1/2}\} = x_1 \quad (4.111)$$

的范围之内,其中 $\sin \psi(x_1) = \sin \psi(x_2) = 1$, $\cos \psi(x_1) = \cos \psi(x_2) = 0$ 。对应于每一个 $\sin \psi(x)$ 有两个数值相等的 $\tan \psi(x)$ 值,其中一个是正值,另一个是负值。在 x_1 和 x_2 这两个端点, $z(x)$ 曲线都与 ρ (也就是 x) 轴垂直。式(4.110)表明,在 $x_1 \leq x \leq x_2$ 的范围内,函数 $z(\rho)$ 不存在水平方向的切线。这两点表明 $z(\rho)$ 是波形的,同时式(4.110)的曲面是波形曲面。

值得注意的是 $\alpha = \alpha_0 = 3/4$ 这一特例。这时式(4.110)成为

$$x^2 - 2(1 + 2\sin \psi)x/3 + 1 = 0$$

这个方程式存在 x 的实数根的条件是 $(1 + 2\sin \psi)^2 \geq 9$ 。因此,只有 $\sin \psi = 1$ 和 $x = 1$ 才能满足要求。换句话说就是,波形回转曲面退化成为一个 $a/c_0 = 9/16$ 的半径为 $\rho_m = (ac_0)^{-1/2}$ 的圆柱面(cylindrical surface)。这时,式(4.38)的圆柱形膜泡的约束条件也自动得到满足。图 4-10 绘出了不同 α 值的曲面轮廓线的半周期。

式(4.110)并不包括 $H = \alpha = -c_0/2$ 的结点曲面。这一点并不表示非常数平均曲率的结点形解不是普适形状方程式(4.90a)的解。式(4.91)的解描述的曲面可以看做是另一类 Delaunay 曲面的延伸。§ 4.6 已经指出,在 $a = -c_0$, $\Delta p = \lambda = 0$ 和 $|\beta| = |c_0| \rho_B < e$ 的条件下,式(4.91)描绘了双凹圆盘形曲面。现在看一看在

$$|\beta| > e \quad (4.112)$$

条件下式(4.91)的情形。它与 $|\beta| < e$ 情形的不同之处主要在于存在三个位置 x_1 , x_2 和 x_3 具有满足 $x \ln x = 1/|\beta|$ 的条件而不是仅有一个 x_e 。这三个位置分别处于

$$0 < x_1 < e^{-1}, \quad e^{-1} < x_2 < 1, \quad 1 < x_3 \quad (4.113)$$

三个范围内。另外,由于式(4.96)的关系,在 $x_1 < x < x_3$ 范围内,每一个 x 值一般有两个大小相等但符号相反的 $\tan \psi$,特别是

$$\begin{cases} \tan \psi(0) = 0, & \tan \psi(x_1) \rightarrow \pm \infty, & \tan \psi(x_2) \rightarrow \pm \infty \\ \tan \psi(1) = 0, & \tan \psi(x_3) \rightarrow \pm \infty \end{cases} \quad (4.114)$$

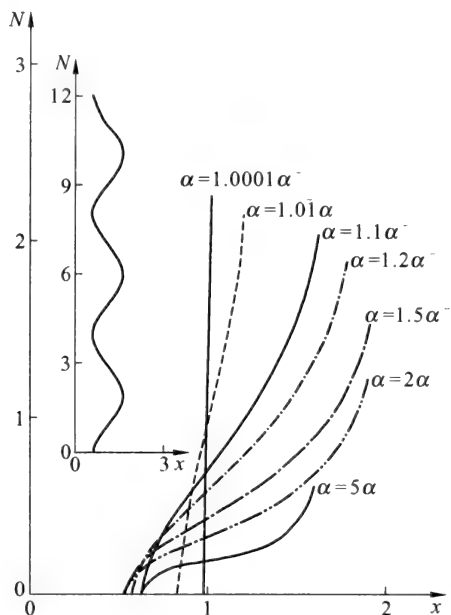


图 4-10 不同 α 值 (以 $\alpha^- = 3/4$ 为单位) 的类波形曲面轮廓线的半周期

小插图给出了 $\alpha = 1.1\alpha^-$ 的三个周期。

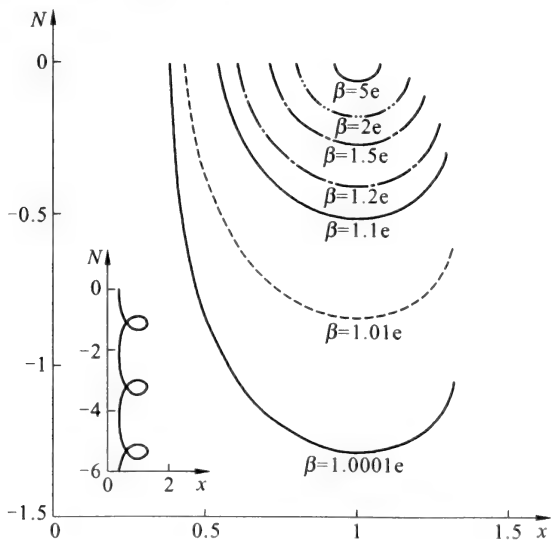


图 4-11 不同 β 值结点形的半周期

小插图给出三个半周期, $\beta = 1.0001e$ 。

$\tan \psi(x)$ 的这些性质提示,在 $x_2 \leq x \leq x_3$ 范围内轮廓线 $z(x)$ 具有结点。数值计算证实了图 4-11 的结点形。

这里的结点形与 Delaunay 曲面的结点形的不同之处在于:此处的结点是向外伸的而不是如图 4-8 那样向曲面内部内切的。从图 4-11 上看,似乎结点形将退化生成环并非圆的锚环。当 $\beta \rightarrow \infty$ 时,锚环具有一个无限小的生成圆,同时环面不是圆柱形而是 § 4.2 中所说的呈带状。

§ 4.8 非圆截面柱面

细胞膜有许多呈柱形结构^[43]。例如,线粒体内嵴经常是管状,并且大体上呈六角形堆积。另外,还有截面呈三角形的棱柱形内嵴^[44]。在理论方面,Seifert 在研究二维的膜泡黏附问题时曾对非圆截面柱形面进行过讨论^[45]。近来,Zhang 和 Ou-Yang^[46, 47]对 Helfrich 变分法中的普遍柱形解进行了讨论。沿 y 轴的柱形可以用它的截面曲线

$$z = f(x) \quad (4.115a)$$

来表示。令曲线上任意一点 x 的切线与 x 轴之间的夹角为 $\psi = \psi(x)$, 那么曲线上的线元 dl 和柱面上的空间线元 ds 之间满足关系式

$$\begin{cases} dx = dl \cos \psi, & dz = dl \sin \psi \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dl^2 + dy^2, & \psi = \psi(l) \end{cases} \quad (4.115b)$$

以 l 和 y 为独立参量,就有 $g_{ll} = g_{yy} = g = 1$, $\mathbf{n} = (-\sin \psi, 0, \cos \psi)$, $L_{ll} = d\psi/dl = \cos \psi \cdot d\psi/dx$, $L_{yy} = L_{ly} = L = 0$, $2H = -(c_1 + c_2) = d\psi/dl = \cos \psi \cdot d\psi/dl$ 以及 $K = 0$ 。柱面的两个主曲率是 $-c_1 = \tau = d\psi/dl$ 和 $-c_2 = 0$ 。于是,式(2.95)给出

$$2 \nabla^2 \psi = \cos \psi \left[\cos^2 \psi \frac{d^3 \psi}{dx^3} - 2 \sin 2\psi \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \cos 2\psi \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^3 \right]$$

普适形状方程式(3.81)现在成为

$$\frac{d^3 \psi}{dl^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dl} \right)^3 + \bar{\lambda} \frac{d\psi}{dl} + \bar{\Delta p} = 0 \quad (4.116a)$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \cos^3 \psi \frac{d^3 \psi}{dx^3} - 2 \sin 2\psi \cos \psi \frac{d\psi}{dx} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \cos \psi \left(\frac{1}{2} \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \right) \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^3 \\ - \bar{\lambda} \cos \psi \frac{d\psi}{dx} + \overline{\Delta p} = 0 \end{aligned} \quad (4.116b)$$

$$\text{式中} \quad \bar{\lambda} = \lambda/k_c + c_0^2/2, \quad \overline{\Delta p} = \Delta p/k_c \quad (4.116c)$$

柱形的周线由

$$z = \int \tan \psi(x) dx$$

给出。应用曲率

$$t = -c_1 = \frac{d\psi}{dl} = \cos \psi \frac{d\psi}{dx} \quad (4.117)$$

和变换 $d/dl = (d\psi/dl)d/d\psi = t d/d\psi$ 或 $d/dx = (d\psi/dx)d/d\psi$, 式(4.116a)成为

$$t^2 \frac{d^2 t}{d\psi^2} + t \left(\frac{dt}{d\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} t^3 - \bar{\lambda} t - \overline{\Delta p} = 0$$

应用 $d/d\psi = (dt/d\psi)d/dt$ 的关系, 上式成为

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{dt}{d\psi} \right)^2 + t^3 - 2\bar{\lambda} t - 2\overline{\Delta p} = 0$$

此式的一次积分成为

$$\frac{dt}{d\psi} = \left(-\frac{t^2}{4} + \lambda + \frac{2\overline{\Delta p}}{t} + \frac{C}{4t^2} \right)^{1/2} \quad (4.118)$$

式中 $C/4$ 是积分常数。由于 $d\psi = tdl$, 上式的一次积分成为椭圆积分^[10, 11]

$$\int_0^\Lambda (-t^4 + 4\bar{\lambda}t^2 + 8\overline{\Delta p}t + C)^{-1/2} = \int_0^l (1/2)ldl \quad (4.119)$$

于是曲线的曲率 t 可以表示成

$$t = d\psi/dl = \Lambda(l/2) \quad (4.120)$$

椭圆函数是双周期函数, 一个实数周期和一个虚数周期, 而且除极点外是

解析函数。对于膜泡来讲,只需要考虑实数周期函数。由于曲率 t 是曲线弧长 l 的周期性函数,因此只需要讨论一个周期。在一个周期内所转的角度 ψ_0 由

$$\psi_0 = \int_0^T t dl \quad (4.121)$$

给出,式中 T 是椭圆函数的周期 $\Lambda(t/2)$ 。对于给定的 $\bar{\lambda}$ 和 $\overline{\Delta p}$, ψ_0 可以看做是 C 的函数。截面曲线就由式(4.115b)和式(4.120)给出。只有当 $\psi_0(C)$ 满足一定的条件的 C 值时,截面曲线才是一条闭合的曲线。

式(4.119)中的四次方程

$$P(t) = C - t(t^3 - 4\bar{\lambda}t - 8\overline{\Delta p}) \quad (4.122)$$

是常数 $\bar{\lambda}$ 和 $\overline{\Delta p}$ 的函数。积分常数 C 相当于把 t - P 坐标系的原点沿 P 轴进行移位。 $P(t)$ 的极值由 $dP(t)/dt = 0$ 决定,也就是由方程式

$$t^3 - 2\bar{\lambda}t - 2\overline{\Delta p} = 0 \quad (4.123)$$

决定,它与积分常数 C 无关。对于具有正的 λ 和 k_c 值的膜泡, $\bar{\lambda} > 0$, 但 $\overline{\Delta p}$ 却是可正可负。式(4.122)和式(4.123)在同时改变 t 和 $\overline{\Delta p}$ 的符号时都是不变的。这说明 $P(t)$ 曲线的形状在 $\overline{\Delta p}$ 和 $-\overline{\Delta p}$ 条件下是对称的,它们互为镜像。式(4.123)是一个标准的 $x^3 + px + q = 0$ 式的三次方程式。它的判别式 Δ 是 $\Delta = q^2/4 + p^3/27$, 当 $\Delta < 0$ ($q^2/4 < -p^3/27$) 时,它有三个不等的根: $x_1 = 2r^{1/3} \cos(\theta/3)$, $x_2 = 2r^{1/3} \cos[(\theta + 2\pi)/3]$ 和 $x_3 = 2r^{1/3} \cos[(\theta + 4\pi)/3]$, 其中 $r = (-p^3/27)^{1/2}$, $\cos \theta = (-q/2)(-27/p^3)^{1/2}$ 。当 $\Delta = 0$ ($q^2/4 = -p^3/27$) 时,方程式有一个实根 $x_1 = 2(-q/2)^{1/3}$ 和一个二重根 $x_2 = x_3 = -(-q/2)^{1/3}$ 。当 $\Delta > 0$ ($q^2/4 > -p^3/27$) 时,有一个实根 $x_1 = (-q/2 + \sqrt{\Delta})^{1/3} + (-q/2 - \sqrt{\Delta})^{1/3}$ 和在膜泡形状问题中不具有物理意义的一对复共轭根。式(4.123)的判别式是 $\Delta_i = \overline{\Delta p}^2 - 8\bar{\lambda}^3/27$ 。下面将对此加以详细讨论。

一、第一类: $\Delta_i < 0$, $\overline{\Delta p}^2 < (2\bar{\lambda}/3)^3$

与之相对应的 r 和 θ 是 $r = (2\bar{\lambda}/3)^{3/2}$ 和 $\cos \theta = (3/2\bar{\lambda})^{3/2} \overline{\Delta p}$ 。由于 $\overline{\Delta p}^2 < (2\bar{\lambda}/3)^3$, 因此对于 $\overline{\Delta p} > 0$ 的情形, $\cos \theta$ 在 $(0, 1)$ 的范围之内,也

就是 θ 是在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 的范围内。相应的 $\cos(\theta/3)$, $\cos[(\theta + 2\pi)/3]$ 和 $\cos[(\theta + 4\pi)/3]$ 分别在 $(\sqrt{3}/2, 1)$ 、 $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ 和 $(-1/2, 0)$ 范围内。因此,有一个正根和两个负根。它们可以分别称为 t_a, t_b 和 $t_c, t_a > 0 > t_b > t_c$, 而且 $t_a > |t_c|$, $|t_c|$ 是 t_c 的绝对值。类似地,对于 $\overline{\Delta p} < 0$ 的情形, $\cos \theta$ 和 θ 分别在 $(-1, 0)$ 和 $(\pi/2, \pi)$ 范围内。因此, $\cos(\theta/3)$ 、 $\cos[(\theta + 2\pi)/3]$ 和 $\cos[(\theta + 4\pi)/3]$ 分别在 $(1/2, \sqrt{3}/2)$ 、 $(-1, -\sqrt{3}/2)$ 和 $(0, 1/2)$ 范围内。这些结果指出, $t_a > t_b > 0 > t_c$, 而且 $|t_c| > t_a$ 。根据 $d^2 P(t)/dt^2 = -4(3t^2 - 2\bar{\lambda})$, 不难看出, $P(t_a)$ 和 $P(t_c)$ 是两个极大值而 $P(t_b)$ 是极小值。进一步从式(4.122)和式(4.123)还可以指出, $P(t_a) - P(t_c) = (t_a + |t_c|)[(t_a - |t_c|)^3 + \overline{\Delta p}]$ 。这一关系式表明,当 $\overline{\Delta p} > 0$ 时, $P(t_a) > P(t_c)$; 而当 $\overline{\Delta p} < 0$ 时, $P(t_c) > P(t_a)$ 。这些结果也证实了 $\overline{\Delta p} > 0$ 和 $\overline{\Delta p} < 0$ 的 $P(t)$ 曲线互为镜像。

为了简单起见,在下面的讨论中,除特别指出之外,将令 $\overline{\Delta p} > 0$, 而令 $C_i (i = a, b, c, j)$ 为

$$-C_i = t_i^4 - 4\bar{\lambda}t_i^2 - 8\overline{\Delta p}t_i, \quad i = (a, b, c, j) \quad (4.124)$$

图 4-12 是 $P(t)$ 与 t 的关系示意图。图 4-13 是 $C = 0$ 、与 t 相对应的 $\bar{\lambda} = 1.0k_c$ 时的 $P(t)-t$ 图,其中(a)对应于 $\overline{\Delta p} = 0.3k_c$, (b)对应于 $\overline{\Delta p} = -0.3k_c$, (c)对应于 $\overline{\Delta p} = p_c = (2/3)^{3/2}k_c$, (d)对应于 $\overline{\Delta p} = 0$ 。

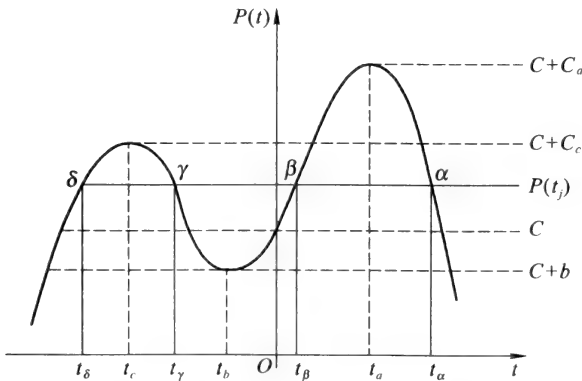


图 4-12 $P(t)$ 曲线示意图

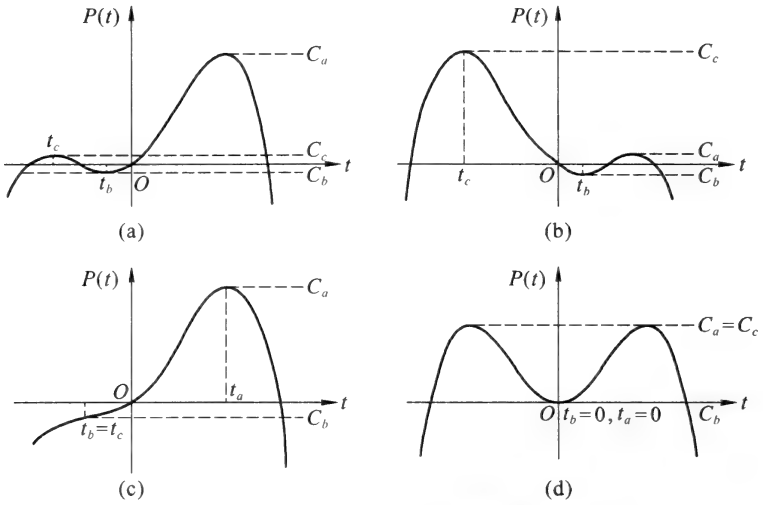


图 4-13 $C = 0$ 的 $P(t)$ - t 曲线示意图

(a) $\overline{\Delta p} = 0.3k_c$; (b) $\overline{\Delta p} = -0.3k_c$; (c) $\overline{\Delta p} = p_c = (2/3)^{3/2}k_c$; (d) $\overline{\Delta p} = 0$ 。

图 4-12 表明,任意一条 $P(t) = P(t_j) = \text{常数}(t_j = \text{常数})$ 的直线与 $P(t)$ 曲线最多相交在 α, β, γ 和 δ 四点,其中 $t_\alpha > t_\beta > t_\gamma > t_\delta$ 。换句话说,就是方程式

$$P(t) - P(t_j) = -(t^4 - t_j^4) + 4\bar{\lambda}(t^2 - t_j^2) + 8\overline{\Delta p}(t - t_j) = 0 \tag{4.125}$$

的四个解是 $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$ 和 t_δ 。这些交点与 C 的数值有关。表 4-1 中所列的六种状态的情形分别如下。

状态(1): $C = -C_a$

在这一状态下 $t_j = t_a$, 方程式(4.125)成为

$$-(t^4 - t_a^4) + 4\bar{\lambda}(t^2 - t_a^2) + 8\overline{\Delta p}(t - t_a) = 0$$

由于 t_a 满足式(4.123),因此很容易得出

$$(t - t_a)(t_a - t)[(t + t_a)^2 + 4\overline{\Delta p}/t_a] = 0$$

于是二重根是 $t_\alpha = t_\beta = t_a$, 而一对共轭复根是 $t_\gamma = -t_a + 2i(\overline{\Delta p}/t_a)^{1/2}$ 和 $t_\delta = -t_a - 2i(\overline{\Delta p}/t_a)^{1/2}$ 。实数根 $t_a = 2(2\bar{\lambda}/3)^{1/2} \cos(\theta/3)$ 为一常数,其中

$\cos \theta = (3/2\sqrt{\lambda})^{3/2} \sqrt{\Delta p}$ 。与它相对应的柱面是一个半径为 $R = 1/t_a$ 的圆柱面。式(4.117)的积分给出了柱面的圆周 $L = 2\pi R$ 。式(4.123)也就是圆柱膜泡的约束条件式(4.38)。如果把 t_γ 和 t_δ 考虑进去的话,式(4.119)就不能导致一个椭圆积分,而角 ψ_0 在转一圈时也不一定是周期性的。不过,在 $\overline{\Delta p} = 0$ 的情形,式(4.123)给出 $2\bar{\lambda} = t_a^2$ 。于是,式(4.124)成为 $-C_a = t_a^4 - 4\bar{\lambda}t_a^2 = -t_b^4$, 而式(4.122)成为 $P(t) = -(t_a^2 - t^2)^2$ 。这时,式(4.119)给出 $\Lambda = it_a \tan(t_a L/2)$ 而式(4.121)给出 $\psi_0 = -2i \ln \cos(t_a L/2)$, 式中 L 是柱面截面的周长^[12]。 ψ_0 的表示式可以写做 $\cos(t_a L/2) = \cos(\psi_0/2) + i \sin(\psi_0/2)$ 的形式。 $\cos(t_a L/2)$ 应该是实数的要求指出, ψ_0 应该等于 $2n\pi$, n 为整数,因此正如它所应该的那样, $t_a L = 2n\pi$ 。

表 4-1 直线 $P(t) = P(t_j)$ 与 $P(t)$ 曲线的交点(即 $P(t) - P(t_j) = 0$ 的各个根)

C	交点(根)	$P(t)$
$C = -C_a$	一个二重根 $t_a = t_\beta (= t_a)$ 和一对共轭复根 t_γ 和 $t_\delta = t_\gamma^*$	$P(t) = P(t_a)$
$-C_c > C > -C_a$	两个实根 $t_a (> t_a) > t_\beta$ 和一对共轭复根 t_γ 和 $t_\delta = t_\gamma^*$	$P(t_a) = P(t_\beta)$
$C = -C_c$	两个实根和一对二重根 $t_a (> t_a) > t_\beta (> t_b) > t_\gamma = t_\delta (= t_c)$	$P(t) = P(t_c)$
$-C_b > C > -C_c$	四个实根 $t_a (> t_a) > t_\beta (> t_b) > t_\gamma (> t_c) > t_\delta$	$P(t) = P(t_a) = P(t_\beta) = P(t_\gamma) = P(t_\delta)$
$C = -C_b$	两个实根和一个二重根 $t_a (> t_a) > t_\beta = t_\gamma (= t_b > t_c) > t_\delta$	$P(t) = P(t_b)$
$C > -C_b$	两个实根 $t_a (> t_a > t_b > t_c) > t_\delta$ 和一对共轭复根 t_β 和 $t_\gamma = t_\beta^*$	$P(t) = P(t_a) = P(t_\beta) = P(t_\delta)$

状态(2): $-C_c > C > -C_a$

在这种状态下式(4.125)成为 $(t_a - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\delta) = 0$, 其中 $t_a > t > t_\beta$ 。应用变换^[10] $\tau = [(t_a - t)B - (t - t_\beta)A] / [(t_a - t)B + (t - t_\beta)A]$, 式(4.119)成为

$$\int_{t_\beta}^t [(t_a - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\gamma^*)]^{-1/2} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= g \int_{\tau}^1 [(1 - \tau^2)(k'^2 + k^2 \tau^2)]^{-1/2} d\tau \\
 &= L/2
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

式中

$$\begin{aligned}
 g &= (AB)^{-1/2}, \quad k^2 = [(t_\alpha - t_\beta)^2 - (A - B)^2]/(4AB), \quad k'^2 = 1 - k^2 \\
 A^2 &= (t_\alpha - b_1)^2 + a_1^2, \quad B^2 = (t_\beta - b_1)^2 + a_1^2 \\
 a_1^2 &= -(t_\gamma - t_\gamma^*)^2/4, \quad b_1 = (t_\gamma + t_\gamma^*)/2
 \end{aligned}$$

按照定义, $\tau = \text{cn}(L/2g, k)$ 。于是

$$t = \frac{(t_\alpha B + t_\beta A) - (t_\alpha B - t_\beta A) \text{cn}(L/2g, k)}{(A + B) + (A - B) \text{cn}(L/2g, k)} \tag{4.127}$$

函数 $\text{cn}(L/2g, k)$ 的周期是第一类完全椭圆积分 $K(k)$ 的四倍, 因此 t 的周期也是 $4K(k)$, 而在一个周期内转动的角度 $\psi_0(C)$ 由

$$\begin{aligned}
 \psi_0(C) &= \int_0^{4K(k)} 2g \, dL \\
 &= 2g \int_0^{4K(k)} \left\{ -\frac{(t_\alpha B - t_\beta A)}{(A - B)} + \left[\frac{2AB}{(t_\alpha + t_\beta - 2b_1)} \right] \left/ \left[1 + \frac{(A - B) \text{cn}(L, k)}{(A + B)} \right] \right\} dL
 \end{aligned}$$

给出, 式中 $L = L/(2g)$ 。上式中第二个积分可以应用关系式^[10]

$$\begin{aligned}
 \int du / (1 + \beta \text{cn } u) &= (1 - \beta^2)^{-1} \{ \Pi[\phi, \beta^2/(\beta^2 - 1), k] - \beta f_1 \}, \quad \phi = \alpha mu, \beta^2 \neq 1 \\
 f_1 &= (1 - \beta^2)^{1/2} [\beta^2 + k^2(1 - \beta^2)]^{-1/2} \tan^{-1} \{ (1 - \beta^2)^{-1/2} [\beta^2 \\
 &\quad + k^2(1 - \beta^2)]^{1/2} \text{sd } u \}, \quad \beta^2/(\beta^2 - 1) < k^2
 \end{aligned}$$

变换成第三类椭圆积分 $\Pi(\phi, \beta, k)$ 。对于目前的情形, $1 > \beta = (A - B)/(A + B) \geq 0$, 由于 $\text{sd}[4K(k)] = \text{sd } 0 = 0$, 因此 $f_1 = (1 - \beta^2)^{1/2} [\beta^2 + k^2(1 - \beta^2)]^{-1/2} p\pi$, p 是任何整数。由式(4.126)可以证明: 在一个周期内, 转动的角度 $\psi_0(C)$ 为

$$\psi_0(C) = 2g \left[\frac{4K(k)(t_\beta A - t_\alpha B)}{(A - B)} + \frac{2AB(1 - \alpha)}{t_\alpha + t_\beta - 2b_1} \Pi(2\pi, \alpha, k) \right] - 2p\pi \tag{4.128}$$

式中 $\alpha = \beta^2/(\beta^2 - 1) = -(A - B)^2/(4AB)$ 。按照定义,

$$\begin{aligned} \Pi(2\pi, \alpha, k) &= \int_0^{2\pi} d\theta / [(1 - \alpha^2 \sin^2 \theta)(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}] \\ &= 2(1 - \alpha)^{-1}(1 - k^2)^{-1/2} \Pi[\pi/2, \alpha/(1 - \alpha), \\ &\quad \alpha^2/(1 - k^2)] + 2\Pi(\pi/2, \alpha, k) \end{aligned} \quad (4.129)$$

由于可以适当移动 $\psi_0(C)$ 的零点而且 $\psi_0(C) \geq -\infty$, 因此式(4.128)中的常数项 $2p\pi$ 可以忽略不计。

当 $C \rightarrow -C_a$ 时, $t_a = t_\beta = t_a$, $t_y = -t_a + 2i(\overline{\Delta p}/t_a)^{1/2}$, 因此 $a_1^2 = 4\overline{\Delta p}/t_a$, $b_1 = -t_a$, $A^2 = B^2 = 4(t_a^2 + \overline{\Delta p}/t_a)$, $\alpha = \beta = k = 0$, $g = \frac{1}{2}(t_a^2 + \overline{\Delta p}/t_a)^{-1/2}$, 同时 $K(0) = \pi/2$ 。由于 $t_a = t_\beta$, $A = B$, 因此式(4.127)指出 t 与 $\text{cn}(l/2g)$ 无关。于是, 直接的积分给出

$$\psi_0 = 4gt_a\pi \quad (4.130)$$

这正是状态(1)中的圆柱面的情形。在这个范围内 $-\infty < \psi_0 \leq 4gt_a\pi$, 只有那些相当于 C 能满足 $\psi_0(C) = 2\pi - 2\pi/n$ ($n =$ 正整数) 条件的周线才是闭合曲线。由于 $t_a > 0$, 因此与之相对应的截面具有 n 个外向结, 如图 4-14 所示。每一条 n 值的曲线具有一个 n 重对称轴。

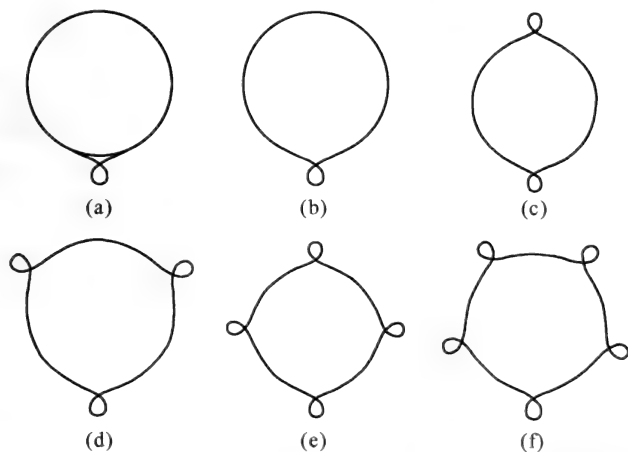


图 4-14 在 $-C_a > C > -C_a$, $t > t_a$ 区域内 $\bar{\lambda} = 1$, $\overline{\Delta p} = 0.2$ 状态下的截面形状图

(a) $C = -C_a$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = 3$; (e) $n = 4$; (f) $n = 5$ 。

当 $C \rightarrow -C_c$ 时, $t_\gamma = t_\gamma^* = t_c$, $t_a = 2(-\overline{\Delta p}/t_c)^{1/2} - t_c$, $t_\beta = -2(\overline{\Delta p}/t_c)^{1/2} - t_c$, $b_1 = t_c$, $A = t_a - t_c$, $B = t_\beta - t_c$, $g = [(t_a - t_c)(t_\beta - t_c)]^{-1/2}$, $\alpha = -(t_a - t_\beta)^2/[4(t_a - t_c)(t_\beta - t_c)] < 1$, 同时 $k = 0$, 因此 $K(k) = \pi/2$ 。由于在 $\alpha < 1$ 时 $\Pi(\phi, \alpha, 0) = (1-\alpha)^{-1/2} \tan^{-1}[(1-\alpha)^{1/2} \tan \alpha]$, 于是 $\Pi(2\pi, \alpha, 0) = 0$ 。除去常数 $2p\pi$, 式(4.128)给出

$$\psi_0 = 4gt_c\pi \quad (4.131)$$

它对应于一个半径为 $R = 1/t_c$ 的圆柱面。

状态(3): $C = -C_c$

在这种状态下式(4.125)成为

$$-(t^4 - t_c^4) + 4\bar{\lambda}(t^2 - t_c^2) + 8\overline{\Delta p}(t - t_c) = 0$$

式中 $t_c < 0$, 而且

$$t_c^3 - 2\bar{\lambda}t_c - 2\overline{\Delta p} = 0$$

此式也可以写成

$$-(t - t_c)^2(t^2 + 2t_c t + 3t_c^2 - 4\bar{\lambda}) = 0$$

的形式。于是

$$t_a = -t_c + 2(-\overline{\Delta p}/t_c)^{1/2}, \quad t_\beta = -t_c - 2(-\overline{\Delta p}/t_c)^{1/2}$$

实数的二重根等于 $2(2\bar{\lambda}/3)^{1/2} \cos[(\theta + 2\pi)/3]$; 同时 $\cos \theta = (3/2\bar{\lambda})^{3/2} \cdot \overline{\Delta p}$ 。对应于 t_c , 柱面是半径为 $R = 1/t_c$ 、周长为 $L = 2\pi R$ 的圆柱面。类似于状态(1)的情形, 如果把 t_a 和 t_β 考虑进去的话, Λ 的形式将变得相当复杂。不过在 $\overline{\Delta p} = 0$ 的条件下, 式(4.119)和式(4.120)给出^[12]

$$\Lambda = it_c \tan(Lt_c/2)$$

同时式(4.121)给出

$$\psi_0 = -2t \ln \cos(Lt_c/2)$$

ψ_0 应该是实数这一要求, 显然导致 $t_c L = 2\pi$ 。

状态(4): $-C_b > C > -C_c$

在这种状态下有两种可能性, 即 $t_a \geq t \geq t_\beta$ 和 $t_\gamma \geq t \geq t_\delta$ 。对于 $t_a \geq$

$t \geq t_\beta$ 的情形,应用变换^[10, 12]

$\tau^2 = (t_\alpha - t_\gamma)(t - t_\beta) / [(t_\alpha - t_\beta)(t - t_\gamma)]$ 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{t_\beta}^t [(t_\alpha - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\delta)]^{-1/2} dt &= g' \int_0^\tau [(1 - \tau^2)(1 - k''^2 \tau^2)]^{-1/2} d\tau \\ &= g' \operatorname{sn}^{-1}(\tau, k'') \\ &= l/2 \end{aligned} \quad (4.132)$$

式中 $g' = 2[(t_\alpha - t_\gamma)(t_\beta - t_\delta)]^{-1/2}$

$$k''^2 = (t_\alpha - t_\beta)(t_\gamma - t_\delta) / [(t_\alpha - t_\gamma)(t_\beta - t_\delta)] < \alpha^2$$

$$\alpha^2 = (t_\alpha - t_\beta) / (t_\alpha - t_\gamma) < 1$$

同时 $t = [t_\beta - \alpha^2 t_\gamma \operatorname{sn}^2(1/2g', k'')] / [1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2(1/2g', k'')]$

由于 $\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u$, 同时 t 只与 $\operatorname{sn}^2 u$ 有关, 因此 t 的周期可以取作 $2K(k)$ 而不必用 $4K(k)$ 。由于 $L = l/2g'$, 因此在一个周期所转动的角度 $\psi_0(C)$ 现在由

$$\begin{aligned} \psi_0(C) &= 2g' \int_0^{2K(k'')} \{t_\gamma + (t_\beta - t_\gamma) / [1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2(L, k'')]\} dL \\ &= 2g' [2K(k'')t_\gamma + (t_\beta - t_\gamma)\Pi(\pi, \alpha^2, k'')] \end{aligned} \quad (4.133)$$

给出。如式(4.129)那样, 其中的 $\Pi(\pi, \alpha^2, k'')$ 可以用两个 $\Pi(\pi/2, \beta, k'')$ 函数来表示。当 $C \rightarrow C_c$, $t_\gamma = t_\delta = t_c$, $\alpha^2 = (t_\alpha - t_\beta) / (t_\alpha - t_c)$, $k'' = 0$ 时, $\Pi(\pi, \alpha^2, 0) = (1 - \alpha^2)^{-1/2} \tan^{-1}[(1 - \alpha^2)^{1/2} \tan \pi] = 0$, $\psi_0 = 2g't_c\pi$ 。由于 $g' = 2g$, 因此它也就是式(4.131)的 $\psi_0 = 4gt_c\pi$ 。由于 $t_c < 0$, 因此对应于那些能使 $\psi_0(C) = -2\pi - 2\pi/n$ (n 为正整数)的 C 值的曲线是具有 n 个内向结的闭合曲线。

当 $C \rightarrow -C_b$ 时, 由于 $t_\beta = t_\gamma = t_b$, 上面所用的变换将不能应用。用另一个变换^[10] $\tau^2 = (t_\beta - t_\delta)(t_\alpha - t) / [(t_\alpha - t_\beta)(t - t_\delta)]$ 可以得到

$$\int_t^{t_\alpha} [(t_\alpha - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\delta)]^{-1/2} dt = 2g' \operatorname{sn}^{-1}(l/2g', k'') = l/2 \quad (4.134)$$

式中

$$t = t_\delta + \frac{(t_a - t_\delta)}{1 + \alpha'^2 \operatorname{sn}^2(L, k'')}, \quad \alpha'^2 = \frac{t_a - t_\beta}{t_\beta - t_\delta}, \quad L = \frac{l}{2g'}$$

在一个周期内转动的角度 ψ_0 等于

$$\psi_0 = 2g' \int_0^{2K(k'')} t dL = 2g' [2K(k'')t_\delta + (t_a - t_\delta)\Pi(\pi, -\alpha'^2, k'')]]$$

在这种情况下, 由于 $k'' = 1$, $K(1) = \infty$, $\Pi(\pi, -\alpha'^2, 1) = \infty$, $\operatorname{sn}(L, 1) = \tanh L$, 因此 t 不是周期性的。当 $L \rightarrow \infty$, $t \rightarrow t_\beta = t'_\beta$ 时, 柱面成为半径 $R = 1/t_\beta$ 的圆柱面, 因此一个周期所转动的角度由于 $t_\beta < 0$ 成为负无穷大。

对于 $t_\gamma \geq t \geq t_\delta$ 的情形, 应用变换^[10]

$\tau^2 = (t_a - t_\gamma)(t - t_\delta) / [(t_\gamma - t_\delta)(t_a - t)]$ 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{t_\delta}^t [(t_a - t)(t_\beta - t)(t_\gamma - t)(t - t_\delta)]^{-1/2} dt &= g' \operatorname{sn}^{-1}(l/2g', k'') \\ &= l/2 = g'L \quad (4.135) \end{aligned}$$

式中 $t = t_a - (t_a - t_\delta) / [1 + \alpha''^2 \operatorname{sn}^2(L, k'')]$, $\alpha''^2 = (t_\gamma - t_\delta) / (t_a - t_\gamma) < 1$, 于是一个周期内转动的角度 $\psi_0(C)$ 等于^[10]

$$\psi_0(C) = 2g' \int_0^{2K(k'')} t dl = 2g' [2K(k'')t_a - (t_a - t_\delta)\Pi(\pi, -\alpha''^2, -k'')]] \quad (4.136)$$

当 $C \rightarrow -C_c$ 时, $t_\gamma = t_\delta = t_c$, $k'' = 0$, $\alpha'' = 0$, $g' = (t_c^2 + \overline{\Delta p}/t_c)^{-1/2}$, 于是 $\psi_0 = 2\pi t_c / (t_c^2 + \overline{\Delta p}/t_c)^{1/2} = 2g't_c\pi$, 而 $t_c < 0$, 这再次与式(4.130)相同。如图 4-15 所示, 在这一区域的截面具有内向的结。当 $C \rightarrow -C_b$, $t_\beta = t_\gamma = t_b$, $k'' = 1$ 时,

应用 $\tau^2 = (t_\beta - t_\delta)(t_\gamma - t) / [(t_\gamma - t_\delta)(t_\beta - t)]$ 变换^[10] 导致

$$\int_t^{t_c} [(t_a - t)(t_\beta - t)(t_\gamma - t)(t - t_\delta)]^{-1/2} dt = g' \operatorname{sn}^{-1}(l/2g', k'') = l/2 = g'L$$

式中 $t = t_\beta - (t_\beta - t_\gamma) / [1 - \alpha''^2 \operatorname{sn}^2(L, k'')]$, $\alpha''^2 = (t_\beta - t_\gamma) / (t_\beta - t_\delta)$ 。对于这种情形, $\alpha''^2 = 0$ 和 $t = t_b$, 柱面成为半径为 $R = 1/t_b$ 的圆柱面。这种情形下, 一周内转动的角度 ψ_0 等于 $\psi_0 = 4g'K(k'')t_b$ 。由于 $k'' = 1$, 因

此 ψ_0 成为负无穷大。

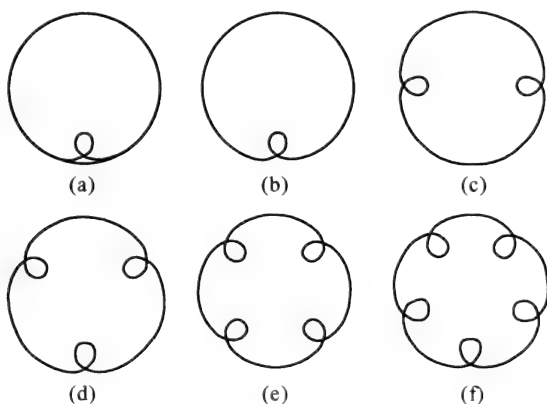


图 4-15 在 $-C_b > C > -C_c$, $t < t_b$ 区域内 $\bar{\lambda} = 1$, $\overline{\Delta p} = 0.2$ 状态下的截面形状
(a) $C = -C_b$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = 3$; (e) $n = 4$; (f) $n = 5$ 。

状态(5): $C = -C_b$

此时 $t_\beta = t_\gamma = t_b$ 而 $-(t^4 - t_b^4) + 4\bar{\lambda}(t^2 - t_b^2) + 8\Delta p(t - t_b) = 0$, 同时 $t_b < 0$ 而 $t_b^3 - 2\lambda t_b - 2\Delta p = 0$ 。当 $\overline{\Delta p} \neq 0$ 时, 关于 t 的方程式可以写做 $-(t - t_b)^2 [t^2 + 2t_b t + (3t_b^2 - 4\lambda)] = 0$, 于是有 $t_a = -t_b + 2\sqrt{-\overline{\Delta p}/t_b}$ 和 $t_\delta = -t_b - 2\sqrt{-\overline{\Delta p}/t_b}$ 。二重根 t_b 等于 $2(2\bar{\lambda}/3)^{1/2} \cos[(\theta + 4\pi)/3]$, 同时 $\cos \theta = (3/2/\bar{\lambda})^{3/2} \overline{\Delta p}$ 。对应于 t_b , 柱面是半径为 $R = 1/t_b$ 、周长为 $2\pi R$ 的圆柱面。考虑到 t_a 和 t_b 时, 与状态(1)和状态(3)相似, Λ 的表示式非常复杂。应该注意到, 上面的 t_a 和 t_b 表示式在 $\overline{\Delta p} = 0$ 的条件下不再适用。当 $\overline{\Delta p} = 0$ 时, 式(4.123)给出 $t_b = 0$ 和 $t_a = 2\sqrt{\bar{\lambda}}$, 因此 $t_a = 2\sqrt{\bar{\lambda}}$, $t_\delta = -2\sqrt{\bar{\lambda}}$ 。这时, $P(t) = t^2(4\bar{\lambda} - t^2)$, 而式(4.119)指出, 曲率 t 是非周期性的。这种情形将在第四类情形中再进行讨论。

状态(6): $C > -C_b$

在这种状态下 $P(t)$ 有两个实根 $t_a (> t_\beta > t_\gamma) > t_\delta$ 和一对共轭复数根 t_β 和 $t_\gamma = t_\beta^*$, 同时 $t_a \geq t \geq t_\delta$ 。应用变换^[10] $\tau = [(t_a - t)B - (t - t_\delta)A] / [(t_a - t)B + (t - t_\delta)A]$ 可以导出

$$\int_{t_\beta}^{t_a} [(t_a - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\delta)]^{-1/2} dt = g \int_0^1 [(1 - \tau^2)(k'^2 + k^2 \tau^2)]^{-1/2} d\tau$$

$$= l/2 \quad (4.137)$$

式中

$$g = (AB)^{-1/2}, \quad k^2 = [(t_a - t_\delta)^2 - (A - B)^2]/(4AB), \quad k'^2 = 1 - k^2$$

$$A^2 = (t_a - b_1)^2 + a_1^2, \quad B^2 = (t_\delta - b_1)^2 + a_1^2$$

$$a_1^2 = -(t_\beta - t_\beta^*)^2/4, \quad b_1 = (t_\beta + t_\beta^*)/2$$

于是

$$t = (t_\delta A - t_a B)/(A - B) + [2AB/(t_a + t_\delta - 2b_1)]/[1 + (A - B)\text{cn}(l/2g, k)/(A + B)]$$

同时

$$\psi_0 = 2g \left[4K(k) \left(\frac{t_\delta A - t_a B}{A - B} \right) + \frac{(A + B)^2}{2(t_a + t_\delta - 2b_1)} \right] \Pi(2\pi, \alpha, k) + 2p\pi \quad (4.138)$$

p 为整数, 上式中 $\alpha = -(A - B)^2/(4AB)$ 。当 $C \rightarrow -C_b$ 时, $a_1^2 = 0$, $b_1 = t_b$, $A^2 = (t_a - t_b)^2$, $B^2 = (t_b - t_\delta)^2$, $k^2 = 1$, $\text{cn}(L, 1) = \text{sech } L$, 同时 t 为非周期性。当 $L \rightarrow \infty$, $\text{cn}(L, l) \rightarrow 0$, 同时 $t = t_b$ 时, 柱面成为半径 $R = 1/t_b$ 的圆柱面。图 4-16 给出了 $\bar{\lambda} = 1$, $\bar{\Delta p} = 0.2$ 时, 这种状态下的一些

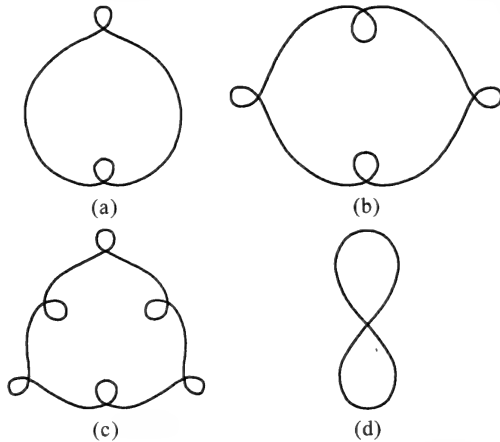


图 4-16 在 $C > -C_b$ 范围内, $\bar{\lambda} = 1$, $\bar{\Delta p} = 0.2$ 的状态下一些截面形状

(a) $n = 1$; (b) $n = 2$; (c) $n = 3$; (d) $n = \infty$ 。

截面。由于 $t_b < 0$, 式(4.121)指出, 当 $C \rightarrow -C_b$ 时, ψ_0 成为负无穷大。另一方面, 当 $C \rightarrow \infty$ 时, $P(t)$ 趋于无穷大而 $\psi_0 \rightarrow 0$ 。数值计算指出, 在 $C = -C_b$ 和 $C \rightarrow \infty$ 之间存在一个 $C = C_m$, 在那里 ψ_0 达到最大值 ψ_m 。

小结 在 $\overline{\Delta p} > 0$ 的条件下, $P(t)-t$ 曲线下面的空间可以分为三个不同的区域: (I) $-C_b \geq C \geq -C_a$ 区, 在这一区中 $t \geq t_b$, t_b 为负值; (II) $-C_b \geq C \geq -C_c$ 区, 区中 $t_b \geq t$; (III) $C > -C_b$ 区。当 $\bar{\lambda} = 1, \overline{\Delta p} = 0.2$ 时, 在三个不同区域中 ψ_0-C 的关系见图 4-17。

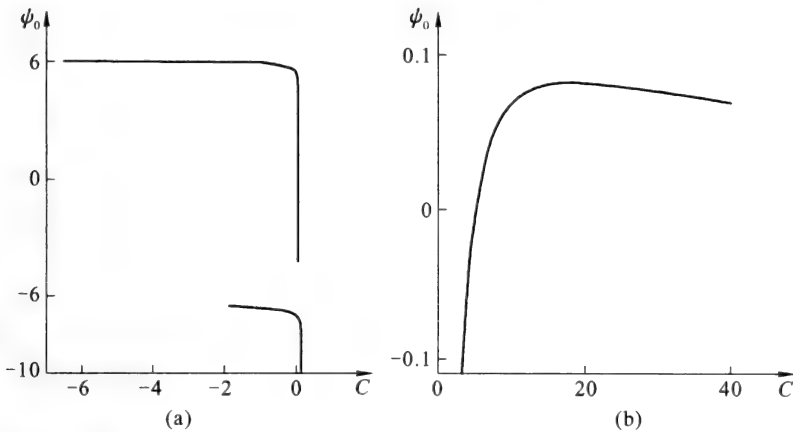


图 4-17 $\bar{\lambda} = 1, \overline{\Delta p} = 0.2$ 条件下 $\psi_0(C)$ 与 C 关系图

(a) 上面曲线对应于 I 区。当 $C \rightarrow -C_a$ 时曲线趋于 $4gt_a\pi (< 2\pi)$ 。当 $C \rightarrow -C_b$ 时曲线趋于 $-\infty$ 。下面曲线对应于 II 区。当 $C \rightarrow -C_c$ 时曲线趋于 $4gt_c\pi (< -2\pi)$ 。当 $C \rightarrow -C_b$ 时曲线趋于 $-\infty$ 。
 (b) 曲线对应于 III 区。当 $C \rightarrow -C_b$ 时曲线趋于 $-\infty$, 而当 $C \rightarrow \infty$ 时曲线趋于零。

二、第二类: $\Delta_1 = 0, \overline{\Delta p}^2 = (2\bar{\lambda}/3)^3$

在这种情形下, 如图 4-13(c) 所示, 式(4.123)具有一个实根 $t_a = 2(\overline{\Delta p})^{1/3} = 2(2\bar{\lambda}/3)^{1/2}$ 和一个二重根 $t_b = t_c = -(\overline{\Delta p})^{1/3} = -(2\bar{\lambda}/3)^{1/2}$ 。这里, 分 $-C_b > C > -C_a$ 和 $C > -C_b$ 两个区域, 具有四种不同的状态: (1) $C = -C_a$, (2) $-C_b > C > -C_a$, (3) $C = -C_b$, (4) $C > -C_b$ 。状态 (1) 同第一类情形中的状态 (1) 类似, 只不过有一个不同的 t_a 值而已。状态 (2) 与第一类情形中在 $-C_b \geq C \geq -C_a$ 区域内的状态 (2) 类似, 只是不存在 $C > -C_c$ 的区域。各种截面的形状见图 4-18。在状态 (3), $C = -C_b$, 式(4.125)成为

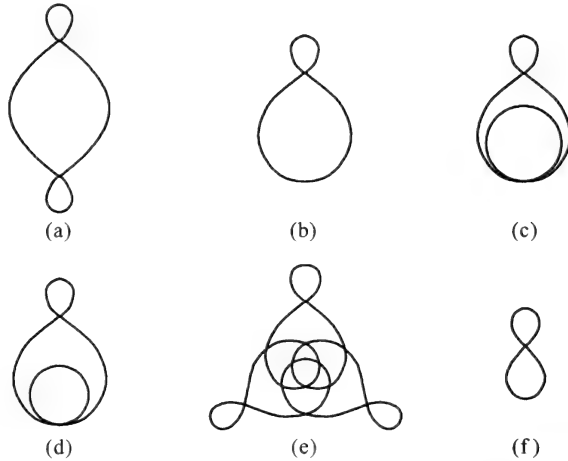


图 4-18 $\bar{\lambda} = 1, \bar{\Delta p} = p_c = (2/3)^{3/2}$ 条件下截面形状图

(a), (b) 处于 $-C_b > C > -C_a$ 区, $t > t_b$; (c) 处于 $C = -C_b$ 的边界; (d), (e), (f) 处于 $C > -C_b$ 区。

$$\begin{aligned}
 -(t^4 - t_b^4) + 4\bar{\lambda}(t^2 - t_b^2) + 8\bar{\Delta p}(t - t_b) &= -(t - t_b)^2(t^2 + 2t_b t + 3t_b^2 - 4\lambda) \\
 &= (t + \sqrt{2\bar{\lambda}/3})^3(3\sqrt{2\bar{\lambda}/3} - t) = 0
 \end{aligned}$$

也就是说, 式(4.125)有一个根是 $t_a = 3(2\bar{\lambda}/3)^{1/2}$, 另一个是三重根 $t_b = -(2\bar{\lambda}/3)^{1/2}$ 。对式(4.119)的直接积分^[12]给出

$$\int_0^\Lambda dt / [(t - t_b)^{3/2}(t_a - t)^{1/2}] = \frac{2}{(t_a - t_b)} \left[\left(-\frac{t_a}{t_b} \right)^{1/2} - \left(\frac{t_a - \Lambda}{\Lambda - t_b} \right)^{1/2} \right] = \frac{l}{2}$$

也就是

$$\Lambda = -\left(\frac{t_b^2 l}{2} \right) \left[\frac{l(t_a - t_b)}{8} - \left(-\frac{t_b}{t_a} \right)^{1/2} \right] \left\{ 1 - \frac{lt_b}{2} \left[\frac{l(t_a - t_b)}{8} - \left(-\frac{t_b}{t_a} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1}$$

曲率是非周期性的。当 $l \rightarrow \infty$ 时, $t = \Lambda \rightarrow t_b$ 。状态(4)和第一类的状态(6)相似。

三、第三类: $\Delta_1 > 0, \bar{\Delta p}^2 > (2\bar{\lambda}/3)^3$

在这种情形, 式(4.123)只有一个实根。换句话说, $P(t)$ 曲线只有一个最大值。

$$t_a = [\overline{\Delta p} + (\overline{\Delta p}^2 - 8\bar{\lambda}^3/27)^{1/2}]^{1/3} + [\overline{\Delta p} - (\overline{\Delta p}^2 - 8\bar{\lambda}^3/27)^{1/2}]^{1/3}$$

当 $C = -C_a$ 时,情况同第一类状态(1)相同。当 $C > -C_a$ 时,式(4.125)有两个实根 t_a 和 t_b 以及一对共轭复数根 t_β 和 $t_\gamma = t_\beta^*$ 。曲率 t 和转角 ψ_0 与式(4.138)相同。为了同第二类相比较,图 4-19 给出了在 $\bar{\lambda} = 1$ 的条件下,不同 $\overline{\Delta p}$ 值的 $\psi_0(C)$ 和 C 的关系图。

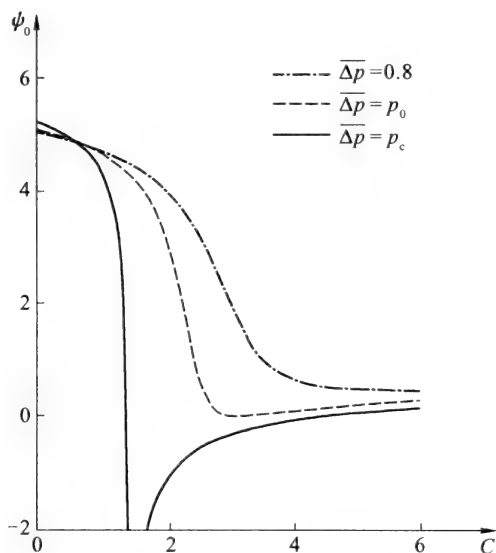
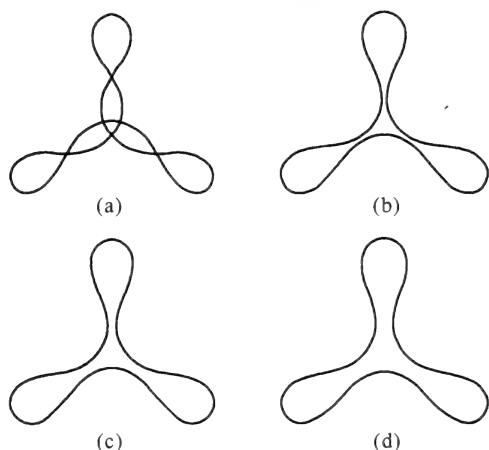


图 4-19 $\bar{\lambda} = 1$; $\overline{\Delta p} = 0.8$, $\overline{\Delta p} = p_0 \approx 0.6987$, $\overline{\Delta p} = p_c = (2/3)^{3/2}$
条件下的 $\psi_0(C)$ 与 C 关系图

当 $\Delta_1 = 0$ 时, $\psi_0(C)$ 在 $-C_2 \approx 4/3$ 处接近于 $-\infty$ 。 $\psi_0(C)$ 有两个实根 C_{01} 和 C_{02} , 分别位于 $C = -C_b$ 的两侧。与之相对应的图形分别为图 4-18 中的 (b) 和 (f)。当 $\overline{\Delta p} > (2/3)^{2/3}$ 时, $\psi_0(C)$ 是 C 的连续函数。当 $\overline{\Delta p} = p_0 \approx 0.69$ 时, $\psi_0(C) = 0$ 有一个二重根 C_0 。于是,图 4-18 中的 (b) 和 (f) 退化,图中所有的精细结构图形全部消失。当 $\overline{\Delta p} > p_0$ 时, ψ_0 总是正值 (或者是相应的负值), 只有相当于使 $\psi_0 = 2\pi/p$ (p 为整数) 的 C 值的曲线是具有 n 阶对称轴的闭合曲线。不过,对于不同的 $\overline{\Delta p}$ 值,具有相同 $\bar{\lambda}$ 和 n 的曲线其形状是不同的。图 4-20 指出,只有大的 $\overline{\Delta p}$ 值的图形才能避免有相交点。对于 t_a 和 t_b 的分析加上对相应 ψ_0 的数值计算得出了上述的结果。

图 4-20 $\bar{\lambda} = 1$ 的三角形

(a) $\overline{\Delta p} = 2$; (b) $\overline{\Delta p} = 6$; (c) $\overline{\Delta p} = 10$; (d) $\overline{\Delta p} = 30$.

四、第四类: $\overline{\Delta p} = 0$

当 $\overline{\Delta p} = 0$ 时, $P(t)$ 曲线是对称的, 如图 4-13(d) 所示。图中 $t_a = \sqrt{2\bar{\lambda}}$, $t_b = 0$, $t_c = -\sqrt{2\bar{\lambda}}$ 。对于 $0 = -C_b > C > -C_c = -C_a$ 的情形, 式 (4.125) 具有四个根: t_a , t_β , $t_\gamma = -t_\beta$ 和 $t_\delta = -t_a$ 。在 $t_a > t > t_b = 0$ 的范围内, 由于 $t_a = -t_\delta$, $t_\beta = -t_\gamma$, 因此在应用变换^[10, 12] $\tau^2 = (t_a + t_\beta)(t - t_\beta) / [(t_a - t_\beta)(t + t_\beta)]$ 后可以得到

$$\int_{t_\beta}^t [(t_a - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\delta)]^{1/2} dt = g_1 \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{l}{2g}, k_1 \right) \\ = l/2 = g_1 L \quad (4.139)$$

式中

$$g_1 = 2/(t_a + t_\beta) \\ k_1^2 = (t_a - t_\beta)^2 / (t_a + t_\beta)^2 < \alpha_1^2 = (t_a - t_\beta) / (t_a + t_\beta) < 1 \\ t = t_\beta \{ -1 + 2/[1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2(L, k_1)] \}$$

所以, 在一周内转动的角度 $\psi_0(C)$ 为^[10]

$$\psi_0(C) = -4g_1 K(k_1)t_\beta + 4g_1 t_\beta \Pi(\pi, \alpha_1^2, k_1) \quad (4.140)$$

当 $C \rightarrow -C_a$ 时, $t_a = t_\beta = t_a$, $t_\gamma = t_\delta = -t_a$, $k_1^2 = \alpha_1^2 = 0$, $g_1 = 1/t_a$, $K(k_1) = \pi/2$, $\Pi(\pi, 0, 0) = \pi$, 于是 $\psi_0 = 2\pi$ 。当 $C \rightarrow -C_b = 0$ 时, $t_a = -t_\delta = t_a$, $t_\beta = t_\gamma = t_b = 0$, $k_1^2 = \alpha_1^2 = 1$, 从而使上面指出的变换不再适用。使用另一个变换^[10, 12] $\tau^2 = (t_\beta - t_\delta)(t_a - t)/[(t_a - t_\beta)(t - t_\delta)]$ 可以有

$$\int_t^{t_a} [(t_a - t)(t - t_\beta)(t - t_\gamma)(t - t_\delta)]^{-1/2} dt = (2/t_a) \operatorname{sn}^{-1}(lt_a/4, l) = l/2$$

由于 $\operatorname{sn}(u, 1) = \tanh u$, 因此

$$t = t_a [1 - \tanh^2(lt_a/4)] / [1 + \tanh^2(lt_a/4)] \quad (4.141)$$

这是一个非周期性的量。当 $l \rightarrow \infty$ 时, 曲率成为零, 同时柱面成为平面。由于 $P(t)$ 与 t 的关系曲线相对于 $t = t_\beta = t_b = 0$ 是对称的, 因此在 $t_\gamma > t > t_\delta$ 范围内的情况和在 $t_a > t > t_\beta$ 范围内的情况除了以 $-\alpha_1^2$ 代换 α_1^2 以外完全相同。

对于 $C > -C_b$ 的情形, 式(4.125)有两个实根 t_a 和 t_δ 以及一对复共轭根 t_β 和 $t_\delta = t_\beta^*$ 。对于这种情形, 第一类状态(6)中所作的计算都仍然可以适用。只不过, 在这里, 当 $C \rightarrow -C_b$ 时, $t_a = t_a = -t_\delta$, 而 $t_\gamma = -t_\beta = t_\beta^*$, 也就是 $t_\beta = i\beta$, $t_\gamma = -i\beta$ 。式(4.137)中各项现在成为 $b_1 = 0$, $a_1^2 = \beta^2$, $A^2 = B^2 = t_a^2 + t_\beta^2$, $g = (t_a^2 + t_\beta^2)^{-1/2}$, $k^2 = t_a^2/(t_a^2 + t_\beta^2)$ 和 $t = -t_a \operatorname{cn}(L, k)$ 。角 ψ_0 现在成为^[10]

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -2g \int_0^{4K(k)} t_a \operatorname{cn}(L, k) dL \\ &= -2gt_a \{ \sin^{-1}[k \operatorname{sn} 4K(k)] - \sin^{-1}(k \operatorname{sn} 0) \} = 0 \end{aligned}$$

或是由于 $t_\beta = 0$ 而有 $-2gt_a n\pi = -2n\pi$ 。

现在返回来看看形状方程式式(4.116)。当 $\overline{\Delta p} = 0$ 时, 平面 $\psi =$ 常量是它的一个解。令 $\Theta = d\psi/dx$, 由于 $d/dx = \Theta d/d\psi$, 因此式(4.116)成为

$$d^2\Theta^2/d\psi^2 - 4 \tan \psi d\Theta^2/d\psi - (3 - 2 \sec^2 \psi)\Theta^2 - 2\bar{\lambda} \sec^2 \psi = 0 \quad (4.142)$$

在 § 4.2 中曾经指出, 普适形状方程式有一个半径满足式(4.36)的柱面解(注意 $\bar{\lambda} = \lambda/k_c + c_0^2/2$)。在 $\overline{\Delta p} = 0$ 的条件下, 式(4.36)成为

$$2\bar{\lambda}R^2 = 1 \quad (4.143)$$

具有圆截面的柱面方程式可以写成

$$X = R\sin\psi \quad (4.144)$$

的形式,而式(4.144)直接给出了式(4.143)。很容易证明, $\sec\psi$ 和 $\sec\psi\tan\psi$ 是式(4.142)齐次部分的两个解,因此,式(4.142)的通解可以写成

$$\Theta^2 = \sec^2\psi/R^2 + A\sec\psi/R^2 + B\sec\psi\tan\psi/R^2 \quad (4.145)$$

的形式,式中 A 和 B 是两个任意常数。因此,角 ψ 由

$$\int \cos\psi d\psi / (1 + A\cos\psi + B\sin\psi)^{1/2} = \int_{X_0}^X dX/R = (X + X_0)/R \quad (4.146)$$

决定,式中 X_0 为积分常数。为简单起见,令 $C^2 = A^2 + B^2$ ($C > 0$), $\sin\psi_0 = A/C$ 和 $\cos\psi_0 = B/C$ 。式(4.146)中的积分于是成为

$$\begin{aligned} \int \cos\psi d\psi / (1 + A\cos\psi + B\sin\psi)^{1/2} &= \int \cos\psi_0 \cos\theta d\theta / (1 + C\sin\theta)^{1/2} \\ &+ \int \sin\psi_0 \sin\theta d\theta / (1 + C\sin\theta)^{1/2} \end{aligned}$$

式中 $\theta = \psi + \psi_0$ 。第一个积分显然是

$$\int \cos\psi_0 \cos\theta d\theta / (1 + C\sin\theta)^{1/2} = (2/C)\cos\psi_0 (1 + C\sin\theta)^{1/2}$$

但是第二个积分却不很简单,它与 C 的数值直接相关。对于 $C < 1$ 的情形,应用

$$\sin^2 u = C(1 - \sin\theta)/(1 + C) - (1 - \sin\theta)/(2k^2), \quad k^2 = (1 + C)/(2C)$$

的变换^[10]可以得出

$$\begin{aligned} \int \sin\theta d\theta / (1 + C\sin\theta)^{1/2} &= -g \int (1 - 2k^2 \sin^2 u) du \\ &= g[u - 2E(u, k)] \end{aligned}$$

其中 $g = (2/C)^{1/2}$, 而 $E(u, k) = \int_0^u (1 - k^2 \sin^2\theta)^{1/2} d\theta = \int_0^u dn^2 u du$ 是第

二类正椭圆积分。对于 $C > 1$ 的情形,应用

$$\operatorname{sn}^2 u = (1 - \sin \theta)/2, \quad k^2 = 2C/(1+C)$$

的变换^[10]可以得出

$$\begin{aligned} \int \sin \theta d\theta / (1 + C \sin \theta)^{1/2} &= -g' \int (1 - 2\operatorname{sn}^2 u) du \\ &= g' [(2/k^2 - 1)u + (2/k^2)E(u, k)] \end{aligned}$$

其中 $g' = 2/(1+C)^{1/2}$ 。对于 $C = 1$ 的情形,应用

$$1 + \sin \theta = 2y^2 = 2z$$

的变换可以很容易地得到非周期性的结果。

$$\int \sin \theta d\theta / (1 + C \sin \theta)^{1/2} = \int (2z - 1) dz / [z \sqrt{2(1-z)}]$$

因此,在 $C < 1$ 和 $C > 1$ 的条件下, ψ 的周期性解分别为

$$\begin{cases} (2/C) \cos \psi_0 (1 + C \sin \theta)^{1/2} + (2/C)^{1/2} \sin \psi_0 [u - 2E(u)] = (X + X_0)/R \\ E(u) = E[u, (1+C)^{1/2}/(2C)^{1/2}], \quad C < 1 \end{cases} \quad (4.147a)$$

和

$$\begin{cases} (2/C) \cos \psi_0 (1 + C \sin \theta)^{1/2} + 2(1+C)^{-1/2} \sin \psi_0 [u/C - \\ (1/C + 1)E(u)] = (X + X_0)/R \\ E(u) = E[u, (2C)^{1/2}/(1+C)^{1/2}], \quad C > 1 \end{cases} \quad (4.147b)$$

并且,

$$\theta = \psi + \psi_0, \quad C^2 = A^2 + B^2, \quad \sin \psi_0 = A/C, \quad \cos \psi_0 = B/C \quad (4.147c)$$

从式(4.147a)和式(4.147b)都难以解出 ψ , 不过有一些简单的情形值得提出。在 $A = 0$ 的条件下, 有 $C = B$, $\sin \psi_0 = 0$, $\cos \psi_0 = 1$, 因此式(4.146)给出

$$\sin \psi = B(X + X_0)^2 / (4R^2) - 1/B \quad (4.148)$$

这个结果在 $B < 0$ 的情形下也同样成立。适当选择 x 轴上的原点, 上式中的积分常数 X_0 可以取作零。在 $X_0 = 0, 1 > 1/B > 0$ 的条件下, 式(4.148)表示的是一个波形的曲面。令

$$X_m = 2R(1/B + 1/B^2)^{1/2} = 2R(1 + B)^{1/2}/B, \quad \chi = X/X_m$$

在 $X_0 = 0$ 的条件下, 式(4.148)成为

$$\sin \psi = (1 + 1/B^2)\chi^2 - 1/B \quad (-1 \leq \chi \leq 1) \quad (4.149)$$

式(4.97)给出轮廓线的截面

$$Z(\chi) - Z(\chi') = - \int_{\chi'}^{\chi} \tan \psi d\chi \quad (4.150)$$

式中 $Z = z/X_m$ 。上式的右边积分导致椭圆函数。图 4-21 绘出了不同 $1/B$ 值条件下由数值计算得到的在一个周期内截面的轮廓线^[46]。可以看出, 截面的周期在 $1/B \rightarrow 0$ 时达到最大值。在该处 $\sin \psi = \chi^2$, 而最大周期 $T = 2 \int_{-1}^1 \chi^2 d\chi / (1 - \chi^4)^{1/2} \approx 2.4$ 。图 4-21 中的情形, Harbich 和

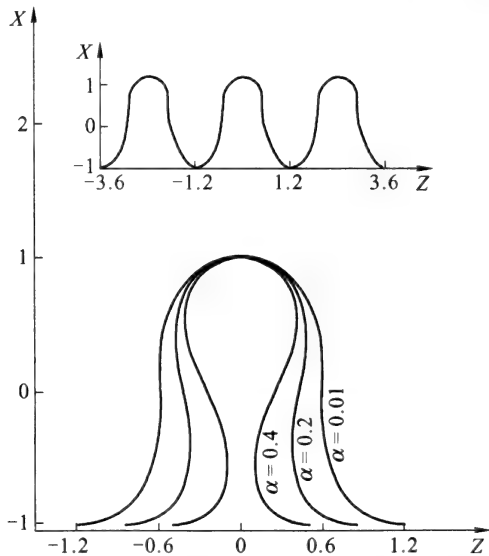


图 4-21 不同 $1/B (= \alpha)$ 值条件下的一个周期性的波形柱面截面

小插图给出 $B = 100$ 时的三个周期。

Helfrich在过量水中卵磷脂的膨胀实验里^[48]曾经观察到。不过,他们并没有给波形曲面作出解释。其实,它是普适形状方程的一个解。

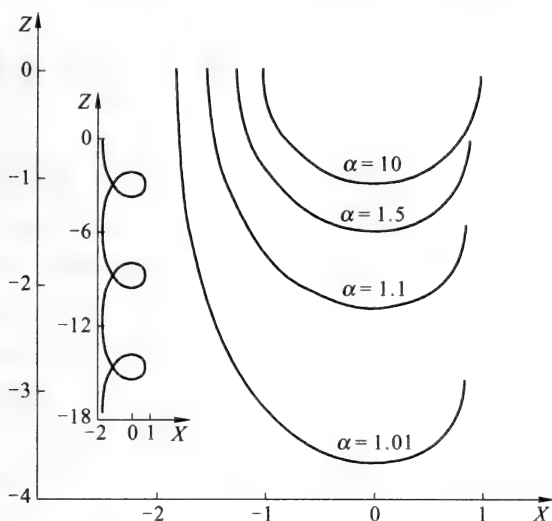


图 4-22 不同 $1/B (= \alpha)$ 值的类结点形柱面的截面半周期

小插图给出 $B = 1/1.01$ 时的三个周期。

当 $1/B > 1$ 时,式(4.149)表现的是类结点形圆柱面的周期结构,如图 4-22 所示^[46]。这时,如果把积分常数 X_0 取作 $2R/B$,而令 $\chi = X/B$,那么式(4.149)成为

$$\sin \psi = (B/4)(\chi + 2/B)^2 - 1/B \quad (4.151)$$

同时

$$2(1/B + 1/B^2)^{1/2} - 2/B \geq \chi \geq 2(1/B^2 - 1/B)^{1/2} - 2/B$$

在 $B \rightarrow 0$ 的极限条件下,由于

$$\lim_{B \rightarrow 0} [(1/B)(B\chi/2 + 1)^2 - 1/B] = \chi$$

$$\lim_{B \rightarrow 0} [(1/B)(B + 1/B^2)^{1/2} - 1/B] = 1/2$$

$$\lim_{B \rightarrow 0} [(1/B^2 - 1/B)^{1/2} - 1/B] = -1/2$$

因此曲面退化成为单位半径的圆柱体。对于 $B = 1$ 的情形,这时相当于

$C = 1$ 。在把 X_0 取作零,同时 $\chi = X/R$ 的条件下,式(4.149)成为 $\sin \psi = 2\chi^2 - 1$ 。如前所示,截面是非周期性的。

§ 4.9 轴对称膜泡的欧拉-拉格朗日形状方程式

在无外力场作用下,任何物理条件或化学成分的改变必然要引起具有不变面积或不变体积的膜泡沿膜泡表面法线方向发生变化。这也就是推导膜泡普适形状方程式(3.81)时物理方面的基本考虑。对于具有轴对称性的膜泡,式(3.81)约化成为式(4.90)的形式。为了简便起见,式(4.90)被称为 H-O 方程式,它是首先由 Helfrich 和欧阳钟灿提出的。不过,对于具有轴对称膜泡的形状方程式还有另一种更为数学化的推导方法,就是把式(3.75)的形状能量用作用量的形式来表示,形状能量具有极值的条件就是形状方程式。从数学上来讲,这是一个简单的具有或不具有辅助条件的变分问题^[49]。关于独立变量,可以有不同的选择。为简单起见,这里只提两种选择:一种是用包含膜泡对称轴的截面曲线的弧长 s 作为独立变量(称为 s 参量化法),另一种办法是用曲面到对称轴的距离 ρ 作为独立变量(称为 ρ 参量化法)。 ρ 参量化法是 Helfrich 首先提出来的^[50],被许多数值计算工作者加以应用。从图 4-4 上可以清楚地看到面积元 dA 和体积元 dV 分别为

$$dA = 2\pi\rho(s)ds = 2\pi\rho d\rho/\cos\psi \quad (4.152a)$$

$$dV = \pi\rho^2(s)dz = 2\pi k_c \int \left[\frac{\rho}{2\cos\psi} \left(\frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin\psi}{\rho} + c_0 \right)^2 + \frac{\bar{\lambda}\rho}{\cos\psi} + \frac{1}{2} \overline{\Delta p} \rho^2 \tan\psi \right] d\rho \quad (4.152b)$$

式中 $\bar{\lambda} = \lambda/k_c$, 而 $\overline{\Delta p} = \Delta p/k_c$ 。应用式(4.89),对于具有轴对称的膜泡,形状能量式(3.75)成为下列形式:

s 参量化法

$$F_s = 2\pi k_c \int \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin\psi}{\rho} + c_0 \right)^2 + \bar{\lambda}\rho + \frac{1}{2} \overline{\Delta p} \rho^2 \sin\psi \right] ds \quad (4.153a)$$

ρ 参量化法

$$F_\rho = 2\pi k_c \int \left[\frac{\rho}{2\cos\psi} \left(\frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin\psi}{\rho} + c_0^2 \right) + \frac{\bar{\lambda}\rho}{\cos\psi} + \frac{1}{2} \overline{\Delta p \rho^2} \tan\psi \right] d\rho \quad (4.153b)$$

这里需要指出的是,在变分计算中得出的解,不但与能量积分本身有关,而且取决于所考虑问题中的边界条件与能量积分中的变量之间的约束条件。对于目前的问题,这些约束条件有

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{d\rho}{ds} = \cos\psi, & \dot{z} = \frac{dz}{ds} = \sin\psi \\ \frac{dz}{d\rho} = \tan\psi, & \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \end{cases} \quad (4.154)$$

它们都与所选用的独立变量有关。

在 s 参量化法中,作用量函数 L 的形式是

$$L(\psi, \dot{\psi}, \rho, \dot{\rho}, \gamma, \eta, \epsilon, s) = \frac{1}{2} \rho \left(\dot{\psi} + \frac{\sin\psi}{\rho} + c_0^2 \right)^2 + \bar{\lambda}\rho + \frac{1}{2} \overline{\Delta p \rho^2} \sin\psi + \gamma(s)(\dot{\rho} - \cos\psi) + \eta(s)(\dot{z} - \sin\psi) + \epsilon(s)(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 - 1) \quad (4.155)$$

其中 $\gamma(s)$, $\eta(s)$ 和 $\epsilon(s)$ 是对应于三个约束条件的拉格朗日乘子。式子当中加入三个约束项是为了在求 L 的变分时对三个约束条件可以各自独立进行。积分 $\int_{s_0}^{s_1} L ds$ 的变分 $\delta F'_s$ 由下式给出^[51]:

$$\begin{aligned} \delta F'_s = & \int_{s_0}^{s_1} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) \right] \delta\psi + \left[\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) \right] \delta\rho - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) \delta z \right. \\ & + \frac{\partial L}{\partial \gamma} \delta\gamma + \frac{\partial L}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \delta\epsilon \left. \right\} ds - (H_1 \Delta s_1 - H_0 \Delta s_0) \\ & + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right)_1 \Delta\psi_1 - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right)_0 \Delta\psi_0 \right] + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right)_1 \Delta\rho_1 - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right)_0 \Delta\rho_0 \right] \\ & + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right)_1 \Delta z_1 - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right)_0 \Delta z_0 \right] \end{aligned} \quad (4.156)$$

式中下标 1 和 0 分别指在端点 1 和 0 处的数值,同时哈密顿函数 H 的定义是

$$H = -L + \dot{\psi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \dot{\rho} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (4.157)$$

式(4.156)中最后四项来源于在边界两 endpoint s_0 和 s_1 的变分。 L 的极值在 $\delta F'_s = 0$ 处。由于 $\delta\psi$, $\delta\rho$, δz , $\delta\gamma$, $\delta\eta$ 和 $\delta\epsilon$ 这些变差各自互相独立,因此就要求这些项前面的系数以及式(4.156)中与端点有关的那四项各自分别等于零。这样就得到了六个欧拉-拉格朗日方程式和四个与边界相关的方程式。

当 Δs_1 和 Δs_0 可以互相独立变化时, $H_1 \Delta s_1 - H_0 \Delta s_0 = 0$ 的条件要求 $H_1 = H_0 = 0$ 。由于 L 函数和 H 函数都不显含 s , 因此 H 在两个终点和整体当中是守恒的。这就导致

$$H = 0 \quad (4.158)$$

利用式(4.155),再经过一些简化,六个欧拉-拉格朗日方程式和四个边界条件以及式(4.158)给出

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \sin \psi - \eta \cos \psi = \dot{\rho} \dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \psi - \sin \psi \cos \psi / \rho - (1/2) \overline{\Delta p \rho^2} \cos \psi \quad (4.159a) \\ \dot{\gamma} = (1/2) [(\dot{\psi} + c_0)^2 - \sin^2 \psi / \rho^2] + \bar{\lambda} + \overline{\Delta p \rho} \sin \psi - 2\dot{\epsilon} \cos \psi + 2\dot{\psi} \sin \psi \quad (4.159b) \\ \dot{\eta} = -2\dot{\psi} \cos \psi - 2\dot{\epsilon} \sin \psi \quad (4.159c) \\ \dot{\rho} = \cos \psi \quad (4.159d) \\ \dot{z} = \sin \psi \quad (4.159e) \\ \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = 1 \quad (4.159f) \\ \rho_1 (\dot{\psi} + \sin \psi / \rho + c_0)_1 = \rho_0 (\dot{\psi} + \sin \psi / \rho + c_0)_0 = 0 \quad (4.159g) \\ \gamma_1 + 2\dot{\rho}_1 \epsilon_1 = \gamma_0 + 2\dot{\rho}_0 \epsilon_0 = 0 \quad (4.159h) \\ \eta_1 + 2\dot{z}_1 \epsilon_1 = \eta_0 + 2\dot{z}_0 \epsilon_0 = 0 \quad (4.159i) \\ \gamma \cos \psi + \eta \sin \psi = - (1/2) \rho \dot{\psi}^2 + \sin^2 \psi / (2\rho) + c_0 \sin \psi + (1/2) c_0^2 \rho \\ \quad + \bar{\lambda} \rho + (1/2) \overline{\Delta p \rho^2} \sin \psi - 2\dot{\epsilon} \quad (4.159j) \end{array} \right.$$

从这十个方程式可以解出

$$\begin{aligned} \gamma = & \rho \sin \psi \ddot{\psi} + \sin \psi \cos \psi \dot{\psi} - (1/2)\rho \cos \psi \dot{\psi}^2 - \sin^2 \psi \cos \psi / (2\rho) \\ & + (1/2)c_0^2 \rho \cos \psi + c_0 \sin \psi \cos \psi + \bar{\lambda} \rho \cos \psi - 2\epsilon \cos \psi \quad (4.160) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = & -\rho \cos \psi \ddot{\psi} - (1/2)\rho \dot{\psi}^2 \sin \psi - \cos^2 \psi \dot{\psi} + \sin \psi (1 + \cos^2 \psi) / (2\rho) \\ & + (1/2)c_0^2 \rho \sin \psi + c_0 \sin^2 \psi + \bar{\lambda} \rho \sin \psi + (1/2)\overline{\Delta p} \rho^2 - 2\epsilon \sin \psi \quad (4.161) \end{aligned}$$

将式(4.160)和式(4.161)分别代入式(4.159b)和式(4.159c)可以得到下列方程式:

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho \frac{d^3 \psi}{ds^3} + \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^3 + 2 \cos \psi \ddot{\psi} - \frac{3}{2} \sin \psi \dot{\psi}^2 - \left(\frac{2 \cos^2 \psi - \sin^2 \psi}{2\rho} + 2c_0 \cos \psi \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} c_0^2 \rho + \bar{\lambda} \rho \right) \dot{\psi} + \left[\frac{\sin \psi (1 + \cos^2 \psi)}{2\rho^2} - \frac{1}{2} c_0^2 \sin \psi - \bar{\lambda} \sin \psi - \overline{\Delta p} \rho \right] \\ & = -4\epsilon \dot{\psi} \quad (4.162a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho \frac{d^3 \psi}{ds^3} + \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^3 + 2 \cos \psi \ddot{\psi} - \frac{3}{2} \sin \psi \dot{\psi}^2 - \left(\frac{2 \cos^2 \psi - \sin^2 \psi}{2\rho} + 2c_0 \cos \psi \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} c_0^2 \rho + \bar{\lambda} \rho \right) \dot{\psi} + \left[\frac{\sin \psi (1 + \cos^2 \psi)}{2\rho^2} - \frac{1}{2} c_0^2 \sin \psi - \bar{\lambda} \sin \psi - \overline{\Delta p} \rho \right] \\ & = 0 \quad (4.162b) \end{aligned} \right.$$

式(4.162a)和式(4.162b)在 ψ 与 s 无关的条件下,或是在

$$\epsilon = 0 \quad (4.163)$$

的条件下完全相同。对于第一种 ψ 与 s 无关的情形, ψ 场的欧拉-拉格朗日方程式根本没有任何意义。换句话说就是, $\psi = \text{常量}$ 的柱面不存在欧拉-拉格朗日形状方程式。不过,在这种情形下式(4.162)直接给出一个与式(4.36)相类似的约束条件。另一方面,在式(4.163)条件下把 s 换成 ρ 的话,式(4.162)正是式(4.90a)乘以 ρ 的 H-O 方程式。Jülicher 和 Seifert 曾经指出,当式(4.155)中没有 ϵ 项的时候可以直接导出 H-O 方程式^[52]。不过必须注意,这种情形只适用于亏格为零、两个端点自由并且互相独立的曲面。值得注意的是,式(4.155)中如果 $\eta = 0$ 的话,式(4.162)这一对方程式仍然存在,只不过这时 $\epsilon \neq 0$ 而 $\dot{\psi} = 0$ 。这一点并不奇怪,因为 $\dot{\rho} = \cos \psi$, $\dot{z} = \sin \psi$ 和 $\rho^2 + z^2 = 1$ 三个约束方程式中只有两

个是独立的。注意到式(4.159c)当 $\epsilon = 0$ 时给出 $\dot{\eta} = 0$, 也就是 $\eta = \eta_0$ (常数)是式(4.162b)的第一积分。把 s 变换成 ρ 时,式(4.161)成为

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \frac{1}{2} \sin \psi \cos \psi \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 + \frac{\cos^2 \psi}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\sin 2\psi}{2\rho^2} \\ - \frac{\sin \psi}{2\cos \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} + c_0 \right)^2 - \frac{\bar{\lambda} \sin \psi}{\cos \psi} - \frac{\overline{\Delta p \rho}}{2\cos \psi} = \frac{\eta_0}{\rho \cos \psi} \end{aligned} \quad (4.164)$$

当 $\eta_0 = 0$ 时,式(4.164)是另外一个可以称为 D-H(Deuling-Helfrich)方程式的形状方程式。事实上,它是最早出现的形状方程式^[50]。把 D-H 方程式乘以 $\rho \cos \theta$,得到的实际上是积分常数 $\eta_0 = 0$ 的 H-O 方程式的初积分。这一点曾由 Zheng 和 Liu 指出^[31]。

这里需要强调一点: H-O 方程式(4.162b)的出现是由于有式(4.158)的存在,也就是说是由于 Δs_1 和 Δs_2 这两个变分量是互相独立而且是自由的。对于 s_1 和 s_2 互相重合因而 $\Delta s_1 = \Delta s_2$ 的那些膜泡(例如具有圆环拓扑的膜泡),式(4.158)的条件并不存在。对于这种情形,只存在 $H_1 = H_0$ 的条件,因而没有足够的方程式来求解 γ , η 和 ϵ ,所以不能得出形状方程式。甚至即使在承认

$$H = K \quad (\text{与 } s \text{ 无关})$$

的条件下,形状方程式也将成为

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^3 \psi}{ds^3} + \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^3 + 2\cos \psi \ddot{\psi} - \frac{3}{2} \sin \psi \dot{\psi}^2 - \left[(2\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \frac{1}{2\rho} \right. \\ \left. + 2c_0 \sin \psi + \frac{1}{2} c_0^2 \rho + \bar{\lambda} \rho - K \right] \dot{\psi} + \left[\sin \psi (2 - \sin^2 \psi) \frac{1}{2\rho^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} c_0^2 \sin \psi - \bar{\lambda} \sin \psi - \overline{\Delta p \rho} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.165)$$

它仍然与式(4.162b)的 H-O 方程式不同。 H 纯粹是一个数学函数,即使把它看做是系统的能量也没有理由把它取为零。

在 s 参量化的情形下,式(4.153a)并不显含泛函数 z 。从数学上讲,完全可以把作用函数 L 取为

$$L(\psi, \dot{\psi}, \rho, \dot{\rho}, s) = (1/2)\rho(\dot{\psi} + \sin \psi/\rho + c_0^2)^2 + \bar{\lambda}\rho$$

$$+ (1/2) \overline{\Delta p \rho^2} \sin \psi + \gamma(s)(\dot{\rho} - \cos \psi) \quad (4.166)$$

的形式,而不存在式(4.155)中的额外 η 项和 ϵ 项。三个关于 ψ 场、 ρ 场和 γ 场的欧拉-拉格朗日方程式足以给出

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \psi}{ds^3} - \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \dot{\psi} \ddot{\psi} + \frac{2 \cos \psi}{\rho} \dot{\psi} \ddot{\psi} - \left[\left(\frac{2 + \sin^2 \psi}{2 \rho \sin \psi} \right) \dot{\psi}^2 + \left(\frac{\sin^2 \psi}{\rho^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{c_0 \sin \psi}{\rho} + \frac{\overline{\Delta p \rho}}{2 \sin \psi} \right) \dot{\psi} + \left[\frac{\sin \psi (2 - \sin^2 \psi)}{2 \rho^3} \right. \right. \\ \left. \left. + (2\bar{\lambda} + c_0^2) \frac{\sin \psi}{2 \rho} - \Delta p \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.167a)$$

把 s 变换成 ρ 后,上式成为

$$\begin{aligned} \cos^3 \psi \frac{d^3 \psi}{d\rho^3} - \left(3 \sin \psi + \frac{1}{\sin \psi} \right) \cos^2 \psi \frac{d\psi}{d\rho} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \sin^2 \psi \cos \psi \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^3 \\ - \frac{(2 + 5 \sin^2 \psi)}{2 \rho \sin \psi} \cos^2 \psi \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 + \frac{2 \cos^3 \psi}{\rho} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \left(\frac{c_0 \sin \psi}{\rho} - \frac{\sin^2 \psi}{\rho^2} \right. \\ \left. - \frac{\overline{\Delta p \rho}}{2 \sin \psi} \right) \cos \psi \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right) + (2 - \sin^2 \psi) \frac{\sin \psi}{2 \rho^3} - (c_0^2 + 2\bar{\lambda}) \frac{\sin \psi}{\rho} - \overline{\Delta p} \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.167b)$$

这个方程式被称作 S-B-L 形状方程式^[14, 15, 17, 18]。显然, H-O 方程式、D-H 方程式和 S-B-L 方程式,甚至式(4.165)各不相同。只不过 D-H 方程式是 H-O 方程式的积分常数为零的初积分。

在以 ρ 为参量的条件下,作用量函数成为

$$\begin{aligned} L = \frac{\rho}{2 \cos \psi} \left(\cos \psi \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin \psi}{\rho} + c_0 \right)^2 + \frac{\bar{\lambda} \rho}{\cos \psi} + \frac{\overline{\Delta p \rho^2} \sin \psi}{2 \cos \psi} \\ + \eta(\rho) \left(\frac{dz}{d\rho} + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \right) \end{aligned} \quad (4.168)$$

上式中最后一项是考虑到了边界的约束条件。式(4.156)中关于边界变差的系数等于零的条件对于整体没有什么影响,因此可以不必考虑。对于 ψ 场的欧拉-拉格朗日方程式得出的正是式(4.164)。当 $\eta = \eta_0 = 0$ 时,它给出了 D-H 方程式。与 s 参量化的情形相类似,式(4.153b)并不显含 z 。从数学上来讲,也可以简单地把作用量积分取为

$$L = \frac{\rho}{2\cos\psi} \left(\cos\psi \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin\psi}{\rho} + c_0^2 \right)^2 + \frac{\bar{\lambda}\rho}{\cos\psi} + \frac{\overline{\Delta p}\rho^2 \sin\psi}{2\cos\psi} \quad (4.169)$$

在这种情形, ψ 场的欧拉-拉格朗日方程式直接给出了 D-H 方程式, 也就是积分常数为零的 H-O 形状方程式的初积分。

Hu 和 Ou-Yang 曾经指出^[30]: 对于球形膜泡, $\rho = R\sin\psi$, 而 H-O 方程式、D-H 方程式和 S-B-L 方程式都给出同一的约束条件

$$\Delta p R^3 + 2\lambda R^2 + k_c c_0^2 R^2 - 2k_c c_0 R = 0$$

对于圆柱形膜泡, $\rho = R$, $\psi = \pi/2$, H-O 方程式和 S-B-L 方程式给出约束条件

$$\Delta p R^3 + \lambda R^2 + \frac{1}{2} k_c (c_0^2 R^2 - 1) = 0$$

而 D-H 方程式给出

$$\Delta p R^3 + 2\lambda R^2 + k_c (c_0 R + 1)^2 = 0$$

这同样是圆柱的平衡方程式(注意: c_0 可正可负)。对于克利福德锚环, 图 4-1 指出, $\rho = R + r\sin\psi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ 。§ 4.4 中指出, H-O 方程式导致约束条件

$$(R/r)^2 = 2, \quad \Delta p = -2k_c c_0 / c^2, \quad \bar{\lambda} = -2k_c (\pm c_0 / c + c_0^2 / 4)$$

式中 $c^2 = r^2$ 。对于 D-H 方程式, 很容易得出

$$(R/r)^2 = 2, \quad \overline{\Delta p} = k_c / r^3, \quad \lambda = -9k_c / (8r^2), \quad c_0 = 1/(2r) \quad (4.170)$$

对于 S-B-L 方程式, 得出的约束条件是

$$(R/r)^2 = 2, \quad \overline{\Delta p} = k_c / r^3, \quad \lambda = -k_c [1/(2r^2) + c_0 / r + c_0^2 / 2] \quad (4.171)$$

显然, 当 $c_0 = 1/(2r)$ 时, 式(4.67)、(4.170)和(4.171)完全相同。换句话说, D-H 方程式的解和 S-B-L 方程式的解都只不过是 H-O 方程式解的特例而已。

对于用式(4.91) $\psi = \arcsin[\alpha\rho \ln(\rho/\rho_B)]$ 描述的双凹圆盘形膜泡, H-O 方程式给出的约束条件是

$$a = -c_0, \quad \Delta p = \lambda = 0 \quad (4.93)$$

D-H 方程式给出^[32]的约束条件是

$$\frac{1}{2} \overline{\Delta p} - \frac{2a}{\rho} - \left[\frac{1}{2}(a^2 - c_0^2) - \bar{\lambda} \right] \ln(\rho/\rho_B) + a^2(a + c_0) [\ln(\rho/\rho_B)]^2 = 0 \quad (4.172)$$

而 S-B-L 方程式给出^[32]的约束条件是

$$\left(\frac{2a}{\rho^2} - \frac{\overline{\Delta p}}{2} \right) \left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_B}\right) \right]^{-1} + \frac{1}{2} \overline{\Delta p} + \frac{2a}{\rho^2} + a \left[\bar{\lambda} + \frac{(a + c_0)^2}{2} \right] \ln\left(\frac{\rho}{\rho_B}\right) + a^2(a + c_0) \left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_B}\right) \right]^2 = 0 \quad (4.173)$$

并且,式(4.172)和式(4.173)都要求

$$a = -c_0 = \Delta p = \lambda = 0 \quad (4.174)$$

这又一次表明,D-H 方程式和 S-B-L 方程式给出的都只是 H-O 方程式的特例。

对于用式(4.109)描述的扩展 Delauney 曲面 $\sin \psi = a\rho + b + d/\rho$, H-O 方程式要求

$$\begin{cases} \overline{\Delta p} - 2a^2c_0 - a(c_0^2 + 2\bar{\lambda}) = 0 \\ b \left[2ac_0 + \frac{1}{2}(c_0^2 + 2\bar{\lambda}) \right] = 0 \\ b[b^2/2 - 2ad - 2c_0d - 1] = 0 \\ d[b^2 - 4ad - 2c_0d] = 0 \end{cases}$$

对于 D-H 方程式,不难得出,要求是

$$\begin{cases} \overline{\Delta p} + a(c_0^2 + 2\bar{\lambda}) + 2ac_0 = 0 \\ b[4ac_0 + (c_0^2 + 2\bar{\lambda})] = 0 \\ \frac{1}{2}ab^2 - 2a^2d - (b^2 + 2ad)c_0 - \frac{1}{2}d(c_0^2 + 2\bar{\lambda}) = 0 \\ b \left[\frac{1}{2}b^2 - 2ad - 2dc_0 - 1 \right] = 0 \\ d \left[\frac{1}{2}b^2 - 2ad - dc_0 \right] = 0 \end{cases} \quad (4.175)$$

式(4.175)比式(4.106)多一个方程式。在 $bd \neq 0$ 的条件下,这一额外方程式导致一个额外的条件

$$c_0 = -1/d \quad (4.176)$$

换句话说,在这种情形下 D-H 方程式的解比 H-O 方程式的解更为严格。对于 S-B-L 方程式,约束条件将是

$$\begin{cases} bd(4ad + 2dc_0 - b^2) = 0 \\ 4a^2d^2 + b^2 + ab^2d + (b^2 + ad)dc_0 - \frac{1}{2}d^2(c_0^2 + 2\bar{\lambda}) - \frac{1}{2}b^4 = 0 \\ b[2a + 4a^2d - ab^2 - d(c_0^2 + 2\bar{\lambda})] = 0 \\ -\frac{3}{2}d\overline{\Delta p} - a^2dc_0 - \frac{1}{2}a^2b^2 - ab^2c_0 - \left(\frac{b^2}{2} + ad\right)(c_0^2 + 2\bar{\lambda}) + 2a^3d = 0 \\ -a\left[\frac{\overline{\Delta p}}{2} + a^2c_0 + \frac{1}{2}a(c_0^2 + 2\bar{\lambda})\right] = 0 \end{cases} \quad (4.177)$$

在 $abd \neq 0$ 的条件下,式(4.177)导致

$$\begin{cases} b^2 = ad \\ c_0 = -\frac{3}{2}a \\ d\overline{\Delta p} + 2a^2 = 0 \\ 2\bar{\lambda} = \frac{2a}{d} + \frac{3}{4}a^2 \end{cases} \quad (4.178)$$

显然,当 $d = -1/c_0$ 时,这个结果同 H-O 方程式的结果相同。

对上面的那些膜泡的讨论说明,虽然 D-H 方程式和 S-B-L 方程式都是形状方程式,但是与 H-O 形状方程式不同之处在于,它们都只能给出每种膜泡的一些有限的形状。欧拉-拉格朗日形状方程式只能给出在这些极值下的形状能量,并不一定是它们的最小值。但是实验所能观测到的,则是具有最低能量值的形状。因此,H-O 形状方程式更为通用,它能够容纳所有可能的解。各个常数的限制条件由 $\delta^2 F = 0$ 来确定,而 $\delta^2 F$ 则由式(3.88)决定。欧拉-拉格朗日形状方程式是极小曲线需要满足的方程式。事实上,最低阶的方程式是由式(4.164)这一最低阶的方程式

$$H(\rho) = \rho \cos \psi \left[\cos^2 \psi \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \frac{\sin 2\psi}{4} \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 + \frac{\cos^2 \psi}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\sin 2\psi}{2\rho^2} - \frac{\sin \psi}{2\cos \psi} \left(\frac{\sin \psi}{\rho} + c_0 \right)^2 - \bar{\lambda} \frac{\sin \psi}{\cos \psi} - \frac{\overline{\Delta p \rho}}{2\cos \psi} \right] = \eta$$

给出。用函数 $H(\rho)$ 来表示的话, H-O 形状方程式(4. 90a)、D-H 形状方程式(4. 164)和 S-B-L 形状方程式(4. 167)可以简单地分别写成

$$\frac{d}{d\rho} H(\rho) = 0, \quad H(\rho) = \eta_0 \quad (4. 179)$$

$$\frac{H(\rho)}{\rho} = 0 \quad (4. 180)$$

和 $\eta_0 = 0$, $\frac{d}{d\rho} H(\rho) - \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \frac{d\psi}{d\rho} H(\rho) = 0$, $H(\rho) = \text{常数} \times \sin \psi$

$$(4. 181)$$

Podgornik, Svetina 和 Zeks 应用双层相耦合模型在面积参量化的条件下得到了下列形状方程式^[53]:

$$\frac{dH(\rho)}{d\rho} - \frac{H(\rho)}{\rho} = 0, \quad H(\rho) = \text{常数} \times \rho \quad (4. 182)$$

他们所用的作用量函数就是式(4. 168)的 1/2。 $H(\rho)/\rho = 0$ 是所有形状方程式的共有解这个结果同变分学中参数化的不变性^[54]是一致的。

膜泡形状的多样性这一点颇能引人入胜。长期以来,除去用数值计算法进行计算以外,还没有找到过成功的理论处理方法。普适形状方程式(3. 80)的出现,对于解析地研究这个问题提供了一个开端。不过,式(3. 80)是一个三阶非线性微分方程式。这样的微分方程式至今还未曾有人进行过仔细的研究。目前,还只能对一些已知的几何图形试探着看它是否是形状方程式的解。具有解析表达式的几何图形非常有限,因此有必要对这类微分方程式的解的问题进行深入的探索。形状方程式是从 Helfrich 的类脂化合物双层膜理论中得出的。这个理论是从类脂双层膜与层状液晶相似这一点发展起来的,而类脂双层膜与生物膜又紧密相关。形状方程式在描述一些简单膜泡方面的成功,表明我们对生物膜的形成有了进一步的认识。这说明对这一部分的生物物理学我们已经从单纯的观测前进了一步,能够作出一些理论上的预言。这是重要的一步。一个

新的生物物理学分支现在已经在望。

§ 4.10 双层膜的不稳定性和周期性形变

在水环境中,磷脂类分子之类的类脂化合物分子聚集成双层膜(BMs)。对于闭合的 BMs(膜泡)的弹性和统计已经有许多探索工作。类脂浓度足够高的双层膜会从膜泡的形状发展成扩展式的组态^[55]。对于扩展的膜,实验显示,存在有一维的周期性柱状面^[48]。前面已经指出过,这类形状可以用双层膜的 Helfrich 曲率弹性理论加以解释^[46, 47]。新近利用冻裂痕电子显微术(freeze fracture electron microscopy)实验显示出,存在着类似于装鸡蛋用的那种纸匣形具有稳定周期性的弯曲方形织构(periodic curved square texture, PCST),而且从膜的两面来看都是相同的^[55-58]。后来, Klösgen 和 Helfrich 在蛋黄磷脂酰胆碱双层中用低温传输电子显微术找到了晶粒状结构^[59]。实际上,在细胞膜中有很多周期性的形变^[60]。这些观测结果的共同点是,所有这些弯曲织构都是通过快速冷却过程产生的^[56-60]。

在理论方面,迈耶推测认为所观测到的周期性形状是无限周期性的极小曲面(IPMS)^[61]。参考文献[62]中提出,IPMS 的形成需要有规则排列的蛋白质或是别的大分子。不过,文献[56]和[57]中却报道,PCST 的形成并不需要这种条件。近来,Goetz 和 Helfrich 提出了一种解释这个问题的想法。他们提出了一个包括高于主曲率二次弯曲能项的曲率弹性模型,并在应用蒙特卡罗法数值模拟下得出了 PCST^[63]。他们发现,如果从一个平面开始进行蒙特卡罗法模拟,那么除去出现涨落之外,平面可以保持不变。这一点表明:在平面和任何周期性曲面之间存在一个能量势垒^[63]。Yan, Zhou 和 Ou-Yang^[64]从理论上证明了,如果只考虑曲率弹性能量,那么不论包括或不包括高阶项,平面将永远保持为稳定组态。根据这一点,他们把 PCST 的形成处理为另一种压制温度下降的机制^[64]。在考虑了曲率弹性、膜在高温状态下和在低温状态下的体吉布斯自由能差以及表面张力能差的条件下,导出了双层膜的平衡形状方程式。这三种能量的总和可以看做是形状的形成能^[64]。平面组态是形状

方程式的一个平凡解。在略微偏离平面的条件下,如果吉布斯自由能密度差和张力密度差满足一定的阈值条件,一个用三角函数描述的 PCST 将是另一个近似解。在低于这个阈值条件下,淬灭过程中平面双层膜的形状形成能量可能变为负值。换句话说,在冷凝过程中,平面双层膜变为不稳定。于是,为了保持平衡(也就是形状形成能为零),将自发形成弯曲的双层膜。把类似淬灭的冷却过程的平衡条件考虑进去的话,上面的论证为双层膜的周期性弯曲方形结构的形成机制提供了一些看法。在这样的过程中,所形成的 PCST 的周期与振幅的最佳比值大约等于 $\sqrt{2}\pi$ 。这个结果同几组对双层膜形成周期性弯曲方形结构的观测结果相当一致^[56—58]。

Goetz 和 Helfrich 建议^[63], PCST 的弯曲能的形式可以写成

$$F_B = \int \left[\frac{1}{2} \kappa H^2 + \bar{\kappa} K + \kappa_2 K^2 + \kappa_4 K^4 \right] dA \quad (4.183)$$

式中 $H = (c_1 + c_2)/2$ 和 $K = c_1 c_2$ 分别为膜表面的平均曲率和高斯曲率, κ 是弯曲刚度, $\bar{\kappa}$ 是高斯曲率模量, dA 是表面面积元, 其中 $\bar{\kappa}$ 假定是负值。对于平面膜的周期性形变, 根据 Gauss-Bonnet 定理, 可以忽略 $\bar{\kappa}$ 项。在笛卡儿坐标系中, 表面一般用

$$Y(x, y) = [x, y, z(x, y)] \quad (4.184)$$

来表示。与之相关的平衡形状方程式可以用要求在小形变条件下式(4.183)弹性能的一阶变分 $\delta^{(1)} F_B$ 为零来得到。这个条件在

$$\kappa H^3 - \kappa H K + 2\kappa_2 H K^2 + 6\kappa_4 H K^4 + \frac{1}{2} \kappa \nabla^2 H + 2\kappa_2 \bar{\nabla}^2 K + 4\kappa_4 \bar{\nabla}^2 K^3 = 0 \quad (4.185)$$

的情况下可以得到满足^[2, 65]。式中 $\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j)$ 是拉普拉斯算

符, 而 $\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} K L^{ij} \partial_j)$ 是一个新的算符, 其中 $\partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y, g$

$= \det(g_{ij}), L^{ij} = (L_{ij})^{-1}, g_{ij}$ 和 L_{ij} 分别为与曲面的第一和第二基本形式相关的量。式(4.185)是一个高度非线性的微分方程式, 一般很难找出它的精确解。Goetz 和 Helfrich 找到的那个装鸡蛋用的纸匣形的表面可以

认为是式(4.185)的一个数值周期性解^[63]。固然 $H = K = 0$ 的平面位形 $\mathbf{Y} = (x, y, 0)$ 是它的一个精确解, 计算出的 $\delta^{(2)} F_B$ 为

$$\delta^{(2)} F_B = \frac{\kappa}{8} \int (\partial_{xx} z + \partial_{yy} z)^2 dx dy \quad (4.186)$$

式中 $z(x, y)$ 表示平面沿 $(0, 0, 1)$ 法线方向的偏差。显然, 由于 κ 总是正值, 因此对于任何违反平面的情形式(4.186)都是正值。由于 $\delta^{(2)} F_B$ 与 κ_2 和 κ_4 无关, 说明了平面的稳定性与任何高于主曲率二次项的弹性能都无关。为了更广泛地说明这一点, 可以分析一下包括所有直到主曲率四次项的曲率弹性的弯曲能表示式。

$$F_B = \int (\kappa H^2 + \bar{\kappa} K + \kappa_3 H^3 + \bar{\kappa}_3 HK + \kappa_4 H^4 + \bar{\kappa}_4 H^2 K + \kappa_4^* K^2) dA \quad (4.187)$$

这时可以发现, 平面仍然是相应的形状方程式的严格解; 同时, 平面的能量二次变分仍然是与高阶能量项无关的式(4.186)。 $\delta^{(2)} F_B > 0$ 表明, 平滑位形与任何可能的稳定弯曲位形之间存在着能量势垒。这一点同 Goetz 和 Helfrich 的模拟计算结果一致^[63]。因此, 文献[56—58]中报道的用冷凝法使平面变成 PCST 的结果不能单用曲率弹性能来加以解释。由于这个困难, 下面将从降低温度对平面构形的不稳定性具有关键作用这一观点来研究一下这个问题^[64]。

一般地, 当双层膜的温度从 T_b 降低到 T_l 时, 它的体吉布斯自由能密度和表面张力由于膜中的类脂分子将排列得更为有序从而相应地发生改变。因此, 在这种类似于淬灭的过程当中, 膜从高温状态变换到低温状态, 非常类似于液晶从各向同性相形成管状的层状 A 相的过程^[65—67] 以及从含碳中介相中生成多壳层碳纳米管的过程^[66]。在文献[65—67]中曾指出, 如果把高温状态的膜取作零能态, 那么低温的形状形成能就是下列三项之和: (i) 低温 T_l 态和高温 T_b 态的体吉布斯自由能之间的净差 $F_V = -g_0 V = -g_0 d_0 A$ (式中 V , A 和 d_0 分别为双层膜的体积、面积和厚度, 正的 g_0 是 T_b 态和 T_l 态之间的体吉布斯自由能密度之差); (ii) 表面张力能之差 $F_A = 2[\gamma(T_l) - \gamma(T_b)]A$ [式中 $\gamma(T)$ 是在温度 T 条件下的表面张力]; (iii) Helfrich 曲率弹性能 F_B 。对于具有对称性的双层膜, $F_B =$

$\frac{\kappa}{2} \int H^2 dA + \bar{\kappa} \int K dA$ 。由于在下面的计算中应用最简单的自由率弹性模型已经可以满足要求,因此在 F_B 中不考虑高阶项,同时忽略掉 $\bar{\kappa}$ 项。总的形状形成能量 F 于是成为

$$\begin{aligned} F &= F_V + F_A + F_B = \int -gd_0 dA + 2[\gamma(T_1) - \gamma(T_h)] \int dA + \frac{\kappa}{2} \int H^2 dA \\ &= \lambda \int dA + \frac{\kappa}{2} \int H^2 dA \end{aligned} \quad (4.188)$$

式中 $\lambda = -gd_0 + 2[\gamma(T_1) - \gamma(T_h)]$

变分方程式 $\delta F = 0$ 给出双层膜的平衡形状方程式^[2, 65]是

$$\kappa H^3 - \kappa HK + \left(\frac{\kappa}{2}\right) \nabla^2 H - 2\lambda H = 0 \quad (4.189)$$

显然,平面双层膜永远是形状方程式(4.189)的一个解,同时,与之相对应的平面双层膜的形成能量是 $F = \lambda A$ 。把形成能量看做是自由能,那么平衡态的阈值条件 $F = 0$ 就给出了平面双层膜从温度 T_h 到温度 T_1 的稳定性的判据。

$$\lambda = -g_0 d_0 + 2[\gamma(T_1) - \gamma(T_h)] = 0 \quad (4.190)$$

这个方程式给出了平面双层膜的 γ 和 g_0 之间的阈值关系。这里要特别提出: γ 和 g_0 都与温度和环境有关。膜泡的形变过程是一个突然冷却的过程,因此实际上是一种类似于淬灭的过程。只要平面双层膜的形成能量从阈值条件向下改变,也就是 λ 成为负值,那么总的能量剩余部分将阻止平面双层膜保持稳定。于是将引发形变从而可以导致形状方程式的另一个形成能量又等于零的解。实际上,当温度下降时, g_0 将增加。另外,文献[68]中论证说:当温度降低时,类脂分子的烃链将变得不那么柔顺,从而厚度 d_0 将略微增加一些。考虑到这两个效应,按照式(4.190), λ 可能会变为负值而平面双层膜在快速冷却过程中可能发生弯曲。这些特征都给双层膜的形变提供了很自然的解释。

寻找式(4.189)的精确周期性解一般非常困难。不过要想解释实验方面观测到的从平面解到周期性弯曲方形织构的阈值形变解^[56-58],只要考虑一个脱离平面组态的小形变而试求式(4.189)的一些近似周期性

解就可以了。变形的曲面可以用式(4.184)来描述。在仅仅保留到一阶 $z(x, y)$ 的条件下,式(4.189)简化为

$$\kappa \nabla^2 H - 4\lambda H = 0 \quad (4.191)$$

式中

$$H = \frac{1}{2} \Delta z \quad (4.192)$$

而 $\nabla^2 = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ 就是二维拉普拉斯算符。只要能令 λ 从正值变为负值就可以找到式(4.191)的周期性弯曲方形织构解。一个这样的解是

$$Y(x, y) = \left\{ x, y, z_a \left[\cos \frac{2\pi(x-x_0)}{p} + \cos \frac{2\pi(y-y_0)}{p} \right] \right\} \quad (4.193)$$

式中 x_0 和 y_0 为积分常数, $p = 2\pi\sqrt{\kappa/(-4\lambda)}$, z_a 是形变的幅度。这一位形的示意图见图 4-23。

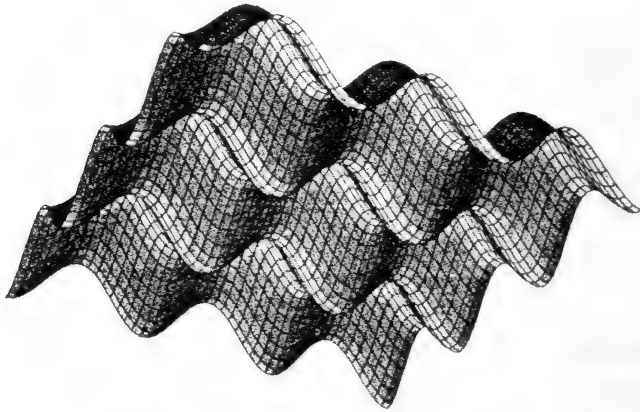


图 4-23 周期性弯曲方形结构解示意图

(周期与振幅之比取为 $\sqrt{2}\pi$)

图 4-23 与实验观测到的结果^[56-58]的相似是显而易见的。基于这种一致的情形,令人相信式(4.193)的位形确实表现了 PCST 的一些基本特征。下面再比较详细地作一些讨论。

周期性弯曲方形织构曲面的度规是

$$\begin{aligned} g^{1/2} &= (1 + \partial_x^2 z + \partial_y^2 z)^{1/2} \\ &= \left(1 + \frac{4\pi^2 z_a^2}{p^2} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{2\pi^2 z_a^2 [\cos \frac{2\pi(x-x_0)}{p} + \cos \frac{2\pi(y-y_0)}{p}]}{p^2 + 4\pi^2 z_a^2} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\approx \left(1 + \frac{4\pi^2 z_a^2}{p^2}\right)^{1/2} \quad (4.194)$$

双层膜的总面积作为守恒量,于是式(4.194)表明,周期性弯曲方形织构在 xy 平面上的投影面积 A_p 小于未发生形变的平面组态的总面积 A 。

$$\frac{A_p}{A} = \left(1 + 4\pi^2 \frac{z_a^2}{p^2}\right)^{-1/2} = p(p^2 + 4\pi^2 z_a^2)^{-1/2}$$

应用式(4.192)、(4.193)、(4.194)各式以及总面积守恒的条件,从式(4.188)可以得出周期性双层膜的形成能量 F 为

$$F = \lambda A \left(1 - \frac{2\pi^2 z_a^2}{p^2}\right) \quad (4.195)$$

现在得到了与平面双层膜不同的周期性弯曲状态,于是可以把阈值条件 $F = 0$ 取为

$$\frac{p}{z_a} = \sqrt{2}\pi \quad (4.196)$$

式(4.196)给出了周期与周期性弯曲方形织构的振幅的最佳比值。在这种条件下, $A_p/A = 1/\sqrt{3} \approx 0.6$, 也就是说,面积在 xy 平面上的投影将只有无形变平面总面积的 60%。当然,在振幅 z_a 与周期的大小相差不大的时候[例如在式(4.196)的情形],由式(4.193)描述的曲面将不再能满足式(4.189)的平衡形状方程式。因此,上面的这些结果只不过是实验观测到的真正稳定周期性弯曲方形织构的粗略近似。尽管如此,仍然可以发现,式(4.196)对实际系统还是能满足得相当好的。这说明了这里提出的关于周期性弯曲方形织构的机理还是正确的。文献[57]中的图 3b 显示出有一部分双层膜的弯曲是有规则的。这部分弯形织构的振幅可以从这个区域的边界曲线估计出来。直接从图中估算的结果表明,式(4.196)可以相当不错地得到满足。对图中具有周期性形变部分的粗略估计得出, $p \approx 25 \text{ nm}$, $z_a \approx 5 \text{ nm}$, 也就是说 $p/z_a = 5 \approx \sqrt{2}\pi$ 。从另一篇文献[56]中图 4d 的方形织构的估算,给出 $p/z_a \approx 3/0.5 = 6$ 。这同样与式(4.196)的预期值相当接近。

研究一下文献[56—58]中报道的一些实验观测到的周期性弯曲方形织构的 g_0 值也很有意义。现在取 $d_0 = 4 \text{ nm}$ [63, 69], $\kappa = 4 \times 10^{-19} \text{ J}$ [68]。

关于表面张力, de Gennes 和 Taupin^[70] 给出 $\gamma = 2\kappa/R/R_0$, 式中 R_0 是自曲率半径, 而 R 是实际曲率半径。因此, 在 T_b 条件下, 对于平面, 由于 $R = \infty$, 于是 $\gamma(T_b) = 0$ 。在 T_1 条件下, 对于周期性弯曲方形织构, 作为估算, 可以令 $R \approx R_0 \approx p$, 因此 $\gamma(T_1) \approx 2\kappa/p^2$ 。于是, 对于产生一个周期为 45 nm 的周期性弯曲方形织构应该约需要 $6 \times 10^5 \text{ J/m}^3$ 。这个数值同 Sternberg 等人的实验结果——“周期性弯曲方形织构的形成与由温度感生的类脂相变过程无关”^[57] 是一致的。根据文献[69], 如果要发生相变的话, 仅仅在相变点最少就要释放出大约 6.3~8.4 kJ/mol 的热量。对于典型的双层膜, 每个类脂分子平均大约占据 1 nm^3 的体积^[69], 这就相当于说, 如果产生相变的话, 在高温态和低温态之间存在着最少约 $1 \times 10^7 \text{ J/m}^3$ 的能量差。可是, 从实验数据进行估算的话, 这个数值大约只有 $6 \times 10^5 \text{ J/m}^3$, 比 10^7 J/m^3 要低得多。因此, 可以说在降温形成周期性弯曲方形织构的过程中没有发生相变。这一点同文献[57]报道的观测结果是一致的。

§ 4.11 非轴对称膜泡的一些数据

前面比较解析地讨论了一些稳定的轴对称膜泡的各种组态。在实验方面也曾观测到各种具有球拓扑的非轴对称形膜泡。它们具有很复杂的组态, 其中一些甚至没有内禀几何对称性。在 *Living Blood Cells and Their Ultra-Structure* 一书^[5] 中有许多用扫描电子显微镜拍摄到的红细胞照片, 其中有些很复杂。例如, 表面具有均匀分布的钝锯齿状或针状突起的有刺细胞(echinocyte type cell), 见文献[5]中的图 98; 具有类似有刺细胞但表面只具有少许不规则排列而且末端后弯的针状突起的棘囊形细胞(acanthocyte type cell), 见文献[5]中的图 157 和图 159; 具有三凹或四凹形的冕状细胞(knizocyte type cell), 按原文, knizocyte 尚无正式中文译名, 从图形看颇类似王冕故暂称之为冕状细胞, 见文献[5]中的图 106 和图 107; 镰形细胞(sickle type cell), 见文献[5]中图 198, 等等。此外, 在脂质体由渗透压引起的变化过程中, 还能看到许多其他的复杂形状^[37]。Yan 等人^[74] 曾用双凹圆盘形作为初始状态对一些细胞形状的

改变进行过讨论。另外,在实验方面也曾发现过许多稳定的、具有挠性的薄管状膜泡,在这些管状膜泡充分发展以前,可以出现某些能用具有很小头部的瞬变形细丝来加以描述的状态。这些弯曲的管状膜泡也是非轴对称的。

在理论上,这些复杂形状还未能用弯曲能模型加以解释。有一些研究人员^[71]相信这些引人入胜的形状可能涉及到包括膜的高阶曲率和范德瓦尔斯吸引力之类的能量。不过,这种猜测并不像所想象的那样明显。在这里值得探索的是,能否用一个如 Helfrich 模型之类的简单曲率模型来描述这些复杂的形状。本节就是准备在 Helfrich 自曲率(SC)模型的构架内利用数值计算办法来寻找具有球拓扑的非轴对称形状。

在能成功地找到非轴对称椭球形和海星形膜泡(starfish shaped vesicle)^[72, 73]的鼓舞下,Yan^[74]等人对三角形曲面的能量进行了强力极小化的数值计算。这个方法是把总能量直接极小值化,得到的是一个原则上取决于所选择初始形状的、具有局域能量最小值的形状。下面比较详细地叙述一下 Yan 等人^[74]所用的算法以及他们所得到的主要结果。

4.11.1 模型、软件和计算过程

为了找到膜泡的局域稳定非轴对称位形,他们应用 SC 模型,用数值法计算了具有一定体积和(或)一定面积的膜泡的弯曲能。在定体积的约束条件下,参量 λ 被理解为张力系数;而在定面积约束条件下,参量 Δp 被认作为渗透压。

为了寻找这些曲面,他们所用的软件是计算机程序“surface evolver”^[75](曲面演化器)。它是根据在三角形曲面上把曲率能量、面积和体积都加以离散化的基础设计的。软件中的能量可以是表面张力、引力能、均方曲率等等的组合。约束条件可以是各个顶点的位置,或是加在体积、表面面积等的总量上。得到的总能量用梯度下降的步骤加以极小化。这样得到的形状具有局部最小值。演化器的这些特点使它在研究 SC 模型中的非轴对称形状问题非常适用。在使用演化器的过程中,渗透压是用内压强 P 来表示的。它在处理能量泛函数

$$F = m_1 \int (H - H_0)^2 dA + \lambda \int dA - P \int dV \quad (4.197)$$

问题时非常方便,式中 m_1 称为弯曲能的“权重”。在 $H = (c_1 + c_2)/2$ 的条件下,这个模型等同于 $m_1 = 2\kappa_c$, $P = -\Delta P$ 和 $H_0 = c_0/2$ 的 SC 模型。在演化器的使用过程中并不限定使用任何特殊的单位制。不过要想把程序中的数值同实际情形相联系的话,所有的数值就应该是用一致的单位。

近年来,这个软件曾被用来处理过许多几何问题,例如具有不变平均曲率的曲面、平衡的泡沫结构等等。它也曾被多次用来处理各种涉及表面的物理问题,例如由表面张力和弯曲以及其他能量形成的曲面。文献 [76] 研究最小曲面的开尔文猜想的作者,曾使用该演化器获得边界平滑的多面胞腔的最小结构。它还曾被用来研究过干泡沫的弹性^[77, 78]和压缩乳胶^[79, 80]。作为练习,我们曾用它来验证过在 SC 模型中立方形发展成为完整球形的平衡条件。能量泛函数式(4.197)的平衡条件是

$$-Pr^3 + 2\lambda r^2 + 2m_1 H_0 r(-1 + H_0 r) = 0 \quad (4.198)$$

式中 r 是球的半径[参考式(4.5)]。取 $m_1 = 1$, $H_0 = 1$, $\lambda = 2$ 和靶子体积 $V = 4.189 \text{ m}^3$, 从演化器得到面积 $A = 12.5774 \text{ m}^2$ 和拉格朗日未定乘子 $P = 4.0023$ 的稳定单位球体确实可以满足平衡条件。

从这种算法找到的曲面对应于能量最小值的曲面,演化器还可以检验对所产生的形状施加有限振幅的微扰时曲面的稳定性。令三角形曲面的每一个顶点进行 $A\sin(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} + \psi)$ 的移动(\mathbf{A} 是振幅矢量、 \mathbf{v} 是各顶点的位置矢量、 $\boldsymbol{\omega}$ 是波矢、 ψ 是相位)。参量 \mathbf{A} , $\boldsymbol{\omega}$ 和 ψ 可以用手工进行调整或是令它无规变化。在无规变化情形下,可以取与物体大小相等的球半径的无规振幅 \mathbf{A} 和无规波长 L 。我们曾用演化器的这些特点检验了本文中提供的所有形状。

在运算过程中,有两点很重要,需要加以注意。(1)在启动曲面演化器时必须先有一个描述初始形状的数据档案。对于复杂的形状,书写数据档案是相当困难的。通常选多面体作为初始形状。从这个初始形状经过软件的提炼指令和发展指令可以得到能够满足目标体积、目标面积等等约束条件的最终目标形状。(2)能够满足约束条件的最终形状与初始形状的选择有密切的关系。人们也许期望从起始形状经过一步一步的扫描就可以得到所有在 $v_1 \leq v \leq v_2$ 和 $c_{01} \leq c_0 \leq c_{02}$ 的参量范围内可能得到的所有形状。但这是做不到的,这是因为:(a)对于任何一对 (v, c_0)

值,一般会有一套稳定形状同时存在(这里所谓的“同时存在”的形状是指具有相同参量值的各种形状);(b)从算法得出的形状与所选择的初始形状强烈相关。因此,扫描法产生的形状只不过是所有可能形状中的一个子集。由于一般对初始形状只能写出一个简单的数据序列,因此难于通过扫描过程来得到各种复杂的形状。例如,从一个 c_0 和面积 A 为常量的稳定或非稳定初始形状,通过缓慢改变目标体积 V 的数值,可以得到一序列不包括初始形状的稳定形状。但是由于第 $i+1$ 次得到的形状由第 i 次形状决定,因此所产生的整个序列的形状都是由初始形状所决定。一个非常重要的问题是,所产生的序列形状对初始形状并不敏感,换句话说,就是即使初始形状有一些畸变也可以得到同样的形状序列。上面所提的扫描过程相当于保持对比自曲率不变而逐步沿对比体积扫描的过程。不过,由于对任何一对给定的 (v, c_0) 值都存在一套共存的形状 $S_{(v, c_0)}$,显然,在这一序列中所包括的形状形成了在这一扫描范围所存在的所有形状的一个子集。因此,由于一般只能对初始形状提供简单的数据档案,所以许多复杂的形状都不能出现。要想从简单的初始形状得出复杂的形状必须打破初始形状序列的不敏感性。

在这里提出下面所述的另一种步骤:如果将靶子形状的一些几何量(如体积、面积、对比体积等等)选择在与初始形状相差相当大的条件之下,可以想象到,从初始形状到最后达到可以满足所有几何约束条件的稳定构形之前,将会通过一条长而复杂的过程连续地发展下去。可以预计,最终的形状(以及步骤)由于过程之长和复杂应该对初始形状相当敏感。两个相差不多的初始形状由于它们之间的差别,在发展过程中将被放大而导致具有相同约束条件的不同的最终形状。因此,参量为 (v_i, c_0) 的初始形状可以通过不同的渠道变换到参量为 (v_j, c_0) 的形状。

第一种演变过程是从 v_i 开始,通过逐渐扫描使它变换到 v_j 。在每一次扫描过程当中,形状都是稳定的,而达到的最终形状对初始形状并不灵敏。第二种演变过程是“跳变”过程。从初始形状直接演变成为对初始形状敏感的具有最终参量值的最终形状。两种不同的演变过程可以从同一初始形状演变成为不同的、但是能够共存的、具有相同终值参量的最终形状。显然,“跳变”过程可以从初始形状得出复杂的最终形状。把应用由“跳变”过程产生的形状作为初始形状再继续应用形状转变过程的话,就

可以得出更为有趣的形状。

不过,对上述“跳变”过程的应用有一些技术上的困难:当突然改变对比体积的时候,对面积 A 和体积 V 都突然加上了约束条件。这样的做法经常会导致软件出现奇异行为。在有限的迭代计算步骤以后,演化器可能会不收敛而出现奇异点。为了避免出现这个问题,可以放松面积的约束条件而突然把体积改变到一个远离初值的数值。于是在发展过程中,曲面演化器对形状的变化获得了更多的自由,从而在计算过程中大量地减少了奇异点的出现。

Yan 等人^[74]计算了形状的对比自曲率和对比体积,确定了这些形状在 (v, c_0) 参量空间中所处的区域。下面是这一过程的概要。假定演化从单位体积的球体开始。

(1) 在某一给定自曲率 c_0 值和张力系数 λ 值,令演化器把球形演化成为一个体积为 $V(\neq 1)$ 的靶子形状。这时希望这样一个体积的突然变化将在曲面形状的位形空间中最终定位于一个体积为 V 的非平庸局域稳定位形之前,激发起一个“无规行走”过程。这种步骤可以应用到任何形状以便产生更稳定的形状。

(2) 在从上述过程得到的复杂形状中,Yan 等人^[74]选择了一些,研究了它们可以产生更为稳定、更令人感兴趣的形状跃迁过程序列。

4.11.2 主要结果

应用上面所描述的步骤,Yan 等人^[74]找到了许多引人注目的膜泡形状。其中有一些类似于实验中观察到的红细胞形状,另一些又类似于脂质体形状。在下面描述这些引人入胜的形状时,对于那些类似于观测到的红细胞形状就采用有关红细胞文献中所用的术语。下面就提供关于五种形状的一些结果:有角形形状(corniculate type shape)、冕形形状(knizocyte type shape)、镰形形状(sickle type shape)、棘囊形形状(acanthocyte type shape)和两个类管形形状(tubelike shape)。部分形状见图 4-24、图 4-25、图 4-26、图 4-27 和图 4-28。

虽然由算法所搜寻出的形状具有局域稳定性,这种稳定性在施加有限振幅微扰后曾更进一步作了检验。在施加微扰后所有六种图形都是稳定的。按照 Seifert 等人的做法^[17],每一种形状都映入了对比体积和对

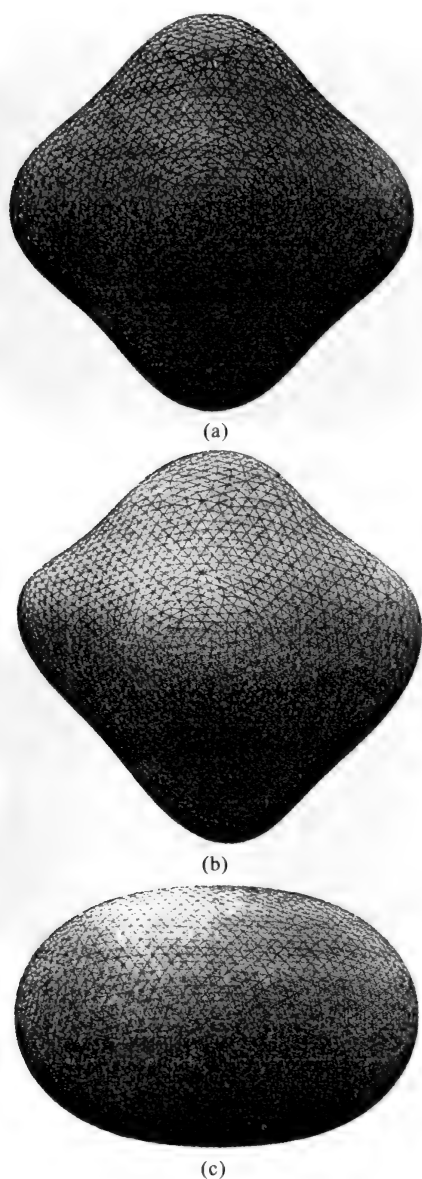


图 4-24 有角形细胞形状

(a) 有角形,对比体积 $v = 0.95$,对比自曲率 $c_0 = 1.35$;

(b) 有角形在大振幅扰动下的严重变形;

(c) 从与(a)中相同 v 值和 c_0 值出发,大幅变形下所形成的轴对称椭球形状。

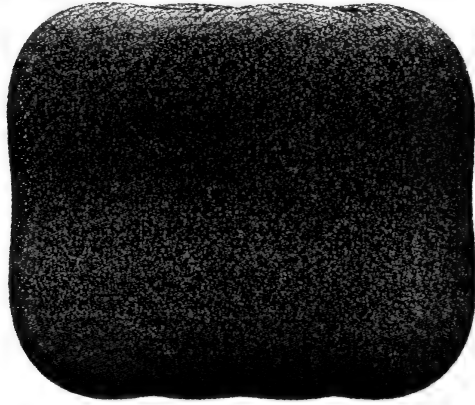


图 4-25 四凹形细胞形状

对比体积 $v = 0.84$, 对比自曲率 $c_0 = -1.41$ 。

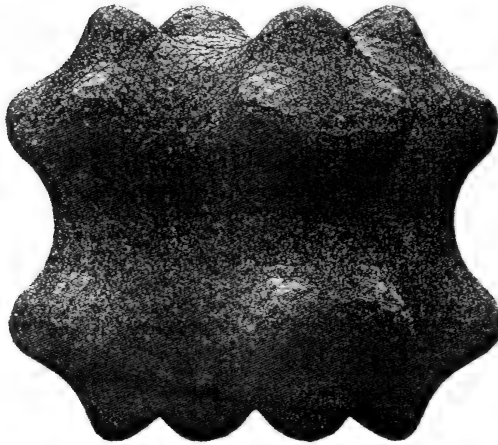


图 4-26 镰形细胞形状

对比体积 $v = 0.74$, 对比自曲率 $c_0 = -1.48$ 。

比自曲率的二维相图内。

一、有角形

图 4-24 绘出了具有六个凸起的有角形曲面。它在相图上的位置是 ($v = 0.95$, $c_0 = 1.35$)。显然,此形与八面体具有相同的转动对称性,因此与 S_4 同构, S_X 表示 X 集的置换群^[81]。虽然在文献^[5]中没有刊登

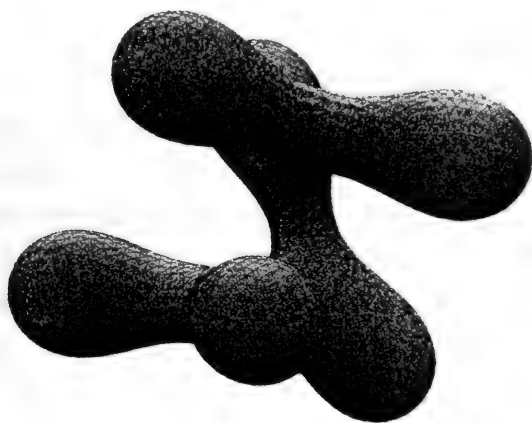


图 4-27 棘囊形细胞形状

对比体积 $v = 0.38$, 对比自曲率 $c_0 = 1.35$ 。从图 4-24(a) 出发, 在对比自曲率保持不变, 但对比体积逐渐降低的条件下得到的棘囊形细胞形状。

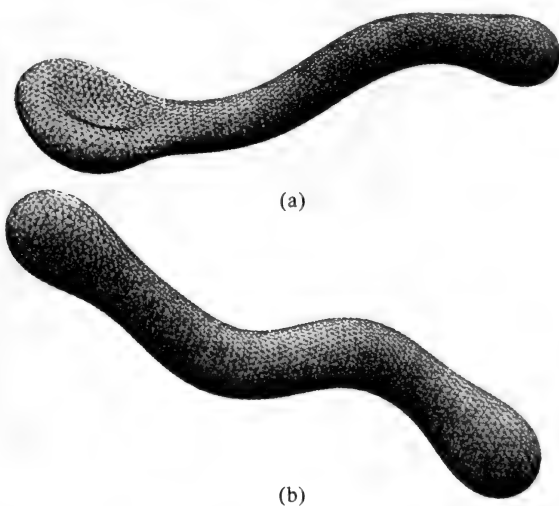


图 4-28 类管形细胞形状

(a) 对比体积 $v = 0.38$, 对比自曲率 $c_0 = 1.35$, 具有双凹头部的类管形; (b) 对比体积 $v = 0.46$, 对比自曲率 $c_0 = 1.35$, 无明显头部的类管形。

两种形状均属从图 4-24(c) 在保持 c_0 不变, 但逐渐降低 v_0 时得出的形状。由于图 4-24(a) 与图 4-28(a) 为共存形状, 因此图 4-28(a) 与图 4-27 共存, 均属从图 4-24(a) 开始的一系列形状跃迁的产物。

类似的形状,它可能暗示文献[5]中图 98 到图 100 的那些有 10 到 50 个均匀分布在近似球形曲面上的棘皮细胞Ⅲ膜泡形状的形成。为了说明在固定(v, c_0)值所涵盖的参量空间中具有不同的共存形状,可以对图 4-24(a)进行大振幅的长波长微扰计算。这时图形将发生大幅度的变形而成为图 4-24(b)的形状。对这一变形的形状再进行曲面演化器运算,最终得到了图 4-24(c)这一与图 4-24(a)具有相同参量的轴对称类椭球体的新稳定形状。由于图 4-24(a)和图 4-24(c)是在参量空间中的同一位置,在图 4-29 中就用 *1 来表示这两个图形。显然,在相同的转变过程中,这两个共存的稳定形状将导致不同的形状转变序列。

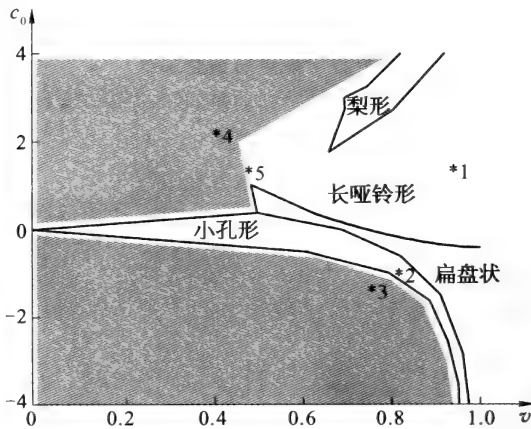


图 4-29 SC 模型相图示意图(经原作者同意复制,录自文献[17])

相图给出具有最低曲率能的形状作为对比体积 v 和对比自曲率 c_0 的函数关系。稳定的长哑铃形、梨形、扁盘状细胞形和稳定的小孔细胞形之间以相变线加以分开。原始相图中所包括的形状均为轴对称。暗区为以前尚未探讨过的区域。相图中标出了本文中找到的各种形状的位置以便获悉这些形状所在的区域。这些区域以 * n (n 为整数)标出。*1 对应于图 4-24(a)与图 4-24(b)这两个共存形状; *2 对应于图 4-25; *3 对应于图 4-26; *4 对应于图 4-27 和 4-28(a)这两个存在的形状; *5 对应于图 4-28(b)。

二、冕形形状

冕形细胞(文献[5]中的图 106 和图 107)是在红细胞实验中找到具有的三凹和四凹形状。图 4-25 是四凹形状的,它同文献[5]中图 106 所给出的由实验观测到的形状类似。这在相图 4-29 上以 *2 标明,它的位置在 $v = 0.84, c_0 = -1.41$ 。这一形状具有与立方体相同的转动对

称性。它与 S_4 同构^[81]。这个形状可以在不同的情况下看到。在某些溶血性贫血病的新鲜血液中可以观察到。另外,在用显微镜观测玻璃片与滑片之间的悬浮细胞时,如果允许有红细胞粘附在玻璃片上,当液体标本流动使细胞产生轻微形变就有可能产生这一形状^[5]。

三、镰形形状

图 4-26 绘出了类似棘皮细胞形中的镰形细胞(文献[5]中图 198)。在相图 4-29 中它的位置在 *3 处($v = 0.74$, $c_0 = -1.48$)。镰形细胞涉及到遗传变异的镰形细胞病。当受感染的血液暴露在足够低的氧压下就会出现镰形细胞。这种现象在把制剂样品放入滑片和盖片之间数小时后,或把血液放在缺氧的器皿中 24 到 48 小时后就可以看到^[82]。

四、棘囊形细胞形状

图 4-27 表现出一个缺乏任何内禀几何对称性的令人注目的复杂形状。这种形状的特点是它的不规则的形状和具有几个无规分布的与在红细胞实验中所观测到的棘囊形细胞(文献[5]中图 157 和图 159)相同形状的钝齿。在相图 4-29 中,它的位置在 $v = 0.39$, $c_0 = 1.35$ 的 *4 处。它是从图 4-24(a)开始,在逐渐增加对比体积 v 的形状转变过程中得到的。棘囊形细胞是 Singer 等人^[83]对目前认为是缺少 β 脂肪蛋白质和严重神经系统变质的遗传病患者的钝齿形红细胞所起的名字。这种畸形是在整个细胞周期的循环过程中逐渐发展形成的。最年轻的细胞当中不存在这种畸变,即使出现也非常少^[84]。这类非常复杂且不规则的棘囊细胞的形状在 Yan 等人的研究中找到很多^[74]。

五、类管形状

图 4-28(a)和图 4-28(b)是两个很有趣的形状。其中一个具有双凹头部的弯曲管状形状,另一个是没有明显头部的管状形状。它们的参量分别为 $v = 0.38$, $c_0 = 1.35$ 和 $v = 0.46$, $c_0 = 1.35$ 。显然,图 4-28(a)同图 4-27 共存,它们都是在相图中的 *4 的位置。图 4-28(b)是在相图中 *5 的位置。两个形状都是从图 4-24(c)在逐渐增加 v 的形状转变过程中出现的。在脂质体变化过程的实验研究中^[37],图 4-28(b)是观测到的一个稳定的形状。图 4-28(a)也是在同一实验中观测到的,它不过是在获得最终形状图 4-28(b)之前出现的一个瞬变形状。不过,Yan 等人的研究^[74]表明,图 4-28(a)和图 4-28(b)都是稳定形状。这个理论和实验

观测方面的一致有两种可能:第一种是可能存在另外一种很小的能量贡献阻碍了在实验中图 4-28(a)成为稳定形状;第二种是在改变实验条件的情形下,图 4-28(a)这一种位形可能成为稳定形状。

在关于红细胞的各种实验中也曾有过类似的观测。文献[5]中提供了许多具有管状尾巴和各种头部形状的膜泡的例子。文献[5]中的图 182 是一种类似于图 4-28(a)的盘形异形红细胞(poikilocyte)。异形红细胞与地中海贫血病有关。患了这种病可以有各种奇怪形状的红细胞。虽然看起来它们并不等同于图 4-28(a)的形状,不过它显示上面所提到的假设可能是正确的,也就是说在一定条件下图 4-24(a)可能是稳定的。

4.11.3 讨论

上面所谈的算法可以从简单的初始形状通过“跳变”过程来找到复杂的膜泡形状,再把这些比较复杂的形状作为初始形状进行下去就可以获得更复杂的形状。这样,在 SC 模型的框架中,Yan 等人^[74]得到了许多引人注目的形状。这样找到的一些形状与实验观测到的非常相似。显然,这种步骤在寻找高亏格的新形状方面也可以应用,并且也可以用到别的曲率模型。从上面提供的各种形状来看,令人强烈感到,在 SC 模型中可以存在诸如棘囊细胞形状和弯曲管状之类的形状,因为这些是在简单曲率能模型中首次被找到的不规则的、具有球拓扑的形状。上面这些结果表明,要想说明这些不规则形状并不需要增加新的诸如高阶曲率和范德瓦尔斯吸引力之类的能量项。事实上,我们还找到了一些前面未曾提到的不规则形状。

参考文献

- [1] Ou-Yang Z C, Helfrich W. *Phys Rev Lett*, 1987, **59**: 2486; 1988, **60**: 1209
- [2] Ou-Yang Z C, Helfrich W. *Phys Rev*, 1989, **A39**:5280
- [3] Schiff L I. *Quantum Mechanics*, 3rd ed. New York: Mc-Graw Hill, 1968
- [4] Deuling H J, Helfrich W. *J Phys*, 1976, **37**: 1335
- [5] Bessis M. *Living Blood Cells and Their Ultrastructure*. Berlin: Springer-Ver-

- lag, 1973
- [6] Peterson M A. *J Math Phys* 1985, **26**:711; *J Appl Phys*, 1985, **57**:1739; *Mol Cryst Liq Cryst*, 1985, **127**:159; 1985, **127**:257
- [7] Milner S T, Safran S A. *Phys Rev*, 1987, **A36**:437
- [8] Deuling H J, Helfrich W. *Blood Cells*, 1977, **3**:713
- [9] Xie Y Z. *Chinese Physics Lett*, 2000, **17**:230
- [10] Byrd P F, Friedman M D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. Berlin: Springer-Verlag, 1954
- [11] Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1972
- [12] Pierce B O. *A Short Table of Integrals*. New York: Ginn Co, 1929
- [13] Jenkins J. *J Math Biophys*. 1977, **4**:149
- [14] Svetina S, Zeks B. *Euro Biophys J*. 1989, **17**:101
- [15] Miao L, Fourcade B, Rao M, etc. *Phys Rev*, 1991, **A43**:6843
- [16] Seifert U. *Phys Rev Lett*, 1991, **66**:2404
- [17] Seifert U, Berndl R, Lipowski R. *Phys Rev*, 1991, **A44**:1182
- [18] Berndl K, Käs J, Lipowski R, etc. *Europhys Lett* 1990, **13**:659
- [19] Lipowski R. *Nature*, 1991, **349**:475
- [20] Miao L, Seifert U, Wortis M, etc. *Phys Rev*, 1994, **E49**: 5389
- [21] Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1990, **E41**: 4517
- [22] Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics I*. New York: McGraw-Hill, 1953
- [23] Hobson E W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New York: Chelsea Publishing Company, 1955
- [24] Mutz M, Bensimon D. *Phys Rev* 1991, **A43**:4525
- [25] Fourcade B, Mutz M, Bensimon D. *Phys Rev Lett*, 1992, **68**:2551
- [26] Michalet X, Bensimon D. *J Phys II*, 1995, **5**:263
- [27] Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1993, **E47**:747
- [28] Forsyth A R. *Lectures on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. England: Cambridge University Press, 1912
- [29] Xie Y Z, Ou-Yang Z C. *Acta Physica Sinica*, 1993, **2**:881; 1994, **3**: 240
- [30] Hu J G, Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1993, **E47**: 461
- [31] Zheng W M, Liu J X. *Phys Rev*, 1993, **E48**: 2856
- [32] Naito H, Okuda M, Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1993, **E48**: 2304

- [33] Liu Q H, Zhou H J, Ou-Yang Z C, *etc.* *Phys Rev*, 1999, **E60**: 3227
- [34] Naito H, Okuda M, Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1996, **E54**: 2816
- [35] Liu Q H, Yan J, Ou-Yang Z C. *Phys Lett*, 1999, **A260**: 162
- [36] Evans E, Rawicz W. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**: 2094
- [37] Hotani H. *J Mol Biol*, 1984, **178**: 113
- [38] Evans E A, Fung Y C. *Microvasc Res*, 1972, **4**:335
- [39] Delaunay C. *J Math Pure et Appl Ser*, 1841, **16**:309
- [40] Bells J. *Math Intelligen*, 1987, **9**:53
- [41] Naito N, Okuda M, Ou-Yang Z C. *Phys Rev Lett*, 1995, **74**:4345
- [42] Bar-Ziv R, Moses E. *Phys Rev Lett*, 1994, **73**:1392
- [43] Fawcett D W. *The Cell*. Philadelphia: W B Saunders Corp, 1981
- [44] Blinzinger K. *J Cell Biol*, 1965, **25**:293
- [45] Seifert U. *Phys Rev*, 1991, **A43**:6803
- [46] Zhang S G, Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1996, **E53**:4206
- [47] Zhang S G. *Acta Physica Sinica (Oversea ed)*, 1997, **6**:641
- [48] Harbich W, Helfrich W. *Chem Phys Lipids*, 1984, **36**:39
- [49] Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. New York: Interscience, 1953
- [50] Helfrich W. *Z Naturforsch*, 1973, **C28**:693
- [51] Jeffreys H, Jeffreys B S. *Methods of Mathematical Physics*. England: Cambridge University Press, 1950
- [52] Jülicher E, Seifert U. *Phys Rev*, 1994, **E49**:4728
- [53] Podgornik R, Svetina S, Zeks B. *Phys Rev*, 1995, **E51**:544
- [54] Forsyth A R. *Calculus of Variations*. New York: Dover, 1960
- [55] Israelachvili J N. *Intermolecular and Surface Forces*. New York: Academic, 1991
- [56] Meyer H W, Richter W, Gumpert J. *Biochim Biophys Acta*, 1990, **1026**:171
- [57] Sternberg B, Gumpert J, Reinhardt G, *etc.* *Biochim Biophys Acta*, 1987, **898**: 223
- [58] Tocanne J E, Vorrergart P H Jh, Verkleij A T, *etc.* *Chem Phys Lipids*, 1974, **12**:220
- [59] Klösgen B, Helfrich W. *Eur Biophys J*, 1993, **22**:329
- [60] Fawcett D W. *The Cell*, 2nd ed. Philadelphia: W B Saunders, 1981
- [61] Meyer H W. *Acta Biotechnol*, 1990, **10**:135

- [62] Hyde S T, Andersson S. *Kristallogr Z*, 1986, **174**:237; Andersson S, Hyde S T, Larsson K, *etc.* *Chem Rev*, 1988, **88**:221
- [63] Goetz R, Helfrich W. *J Phys*, 1996, **6**:215
- [64] Yan J, Zhou H J, Ou-Yang Z C. *Mod Phys Lett*, 1998, **B12**:117
- [65] Naito H, Okuda M, Ou-Yang Z C. *Phys Rev Lett*, 1993, **70**:2912; *Phys Rev*, 1995, **E52**:2095
- [66] Ou-Yang Z C, Su Z B, Wang C L. *Phys Rev Lett*, 1997, **78**:4055
- [67] Naito H, Okuda M, Ou-Yang Z C. *Phys Rev*, 1997, **E55**:1655
- [68] Komura S. *Vesicles*. New York: Marcel Dekker, 1996
- [69] Israelachvili J N, Marčeljā S, Horn R G. *Q Rev Biophys*, 1980, **13**:121
- [70] de Gennes P G, Taupin C. *J Phys Chem*, 1982, **86**:2294
- [71] Miao L, Seifert U, Wortis M, *etc.* *Phys Rev*, 1994, **E49**:5389
- [72] Jaric M, Seifert U, Wintz W, *etc.* *Phys Rev*, 1995, **E52**:6623
- [73] Wintz M, Döbereiner H G, Seifert U. *Europhys Lett*, 1996, **23**:404
- [74] Yan J, Liu J X, Ou-Yang Z C, *etc.* *Phys Rev*, 1998, **E58**:4730
- [75] Brakke K. *Exp Math*, 1992, **1**:141
- [76] Weaire D, Phelan R. *Phil Mag Lett*, 1994, **69**:107
- [77] Reinelt D A, Kraynik A M. *J Fluid Mech*, 1996, **311**:327
- [78] Kraynik A M, Reinelt D A. *J Colloid Interface Sci*, 1996, **181**:511
- [79] Lacasse M D, Grest G S, Levine D, *etc.* *Phys Rev Lett*, 1996, **76**:3448
- [80] Lacasse M D, Grest G S, Levine D. *Phys Rev*, 1996, **E54**:5436
- [81] Armstrong M A. *Groups and Symmetry*. Berlin: Springer-Verlag, 1988
- [82] Jensen W N, Rucknagel D L, Taylor W J, *etc.* *Clin Invest*, 1960, **56**:854
- [83] Singer K, Fisher B, Perlstein M A. *Blood*, 1952, **7**:577
- [84] Reed C, Ways P, Simon E. *Nouvs Rev fr Hemat*, 1963, **3**:59

第五章 倾斜手征性 类脂双层理论

式(3.75)的形状方程式只适用于处于 L_a 相的膜泡,也就是如图 5-1 (b)所示的那种多少有些柔性的烃链沿双层的法线方向排列的膜泡。对于膜中类脂分子倾斜的 L_β 相和具有倾斜的手征性分子的 L_β^* 相都不适用。实验表明,双层中两亲分子的手征性对形成螺旋结构具有关键作用^[1-7]。在报道中提出,有两类螺旋结构。一类结构类似于缠绕在圆柱上具有螺旋间隙的缎带^[5],同时螺旋的斜度接近于 45° 。有些情况是间隙闭合使缎带形成长管。另一种类型是像一条扭曲的带子,它似乎是从小泡状分散物到第一种类型之间的跨接体^[1, 2]。从技术上讲,这些结构可以用作电光元件、微电子元件、输药囊以及微外科材料等等器件^[8, 9]。

Helfrich 用膜边的自扭转与膜的弯曲之间的相互竞争来处理螺旋绕带问题^[10]。de Gennes 用平面固态带棱边的铁电极化引起弯折来说明管状的形成^[11]。其后,Helfrich 和 Prost 在膜的弯曲问题中引进一项新的、具有 C_2 或 D_2 对称的、与分子手征性相关的线性项来改善原来的 Helfrich 理论^[12]。与他们的处理方法不同,Ou-Yang 和 Liu 在强手征性的假设下,类比于螺状液晶,发展了一种螺旋结构理论^[13, 14]。近来, Komura 和 Ou-Yang 用螺旋相 Frank 自由能整体表示式解释了新近实验观测到的关于低螺距和高螺距的螺旋结构^[15]。本章将对后面这两种理论作一些介绍。

§ 5.1 强手征性的倾斜手征性类脂双层的自由能表示式

类脂双层可以作为一个单位法线为 \mathbf{n} 、均匀厚度为 $t \cos \theta_0$ 的二维曲

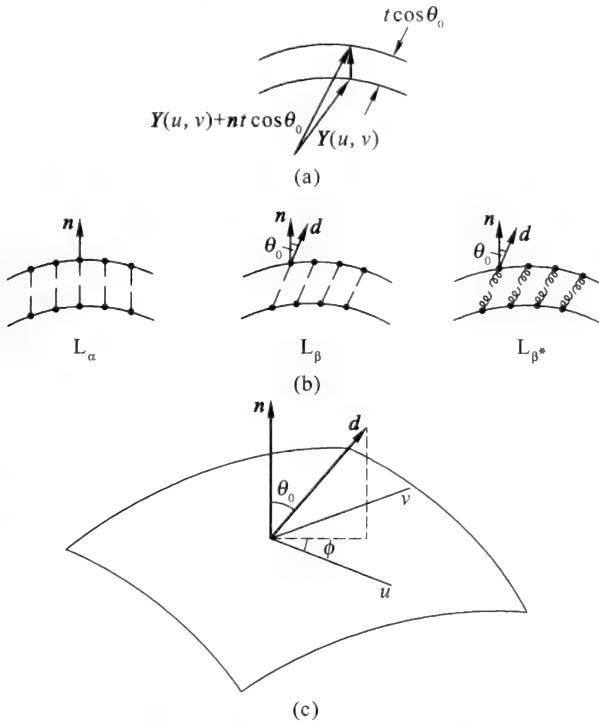


图 5-1 类脂双层的位形

(a) 双层的几何图形；(b) 不同相双层中的分子取向；(c) 表面上的几何位形。

面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 来进行处理, θ_0 是图 5-1(a)和 5-1(b)中所示的膜中分子的倾角。前面已经指出过, 由两个参量 u 和 v 描述的函数 $\mathbf{Y}(u, v)$ 本身, 在 $\theta_0 = 0$ 时已经足以确定一个均匀的 L_α 相。但是, 对于倾斜类脂双层 (tilted lipid bilayer, TLB) L_β 相和倾斜手征性类脂双层 (tilted chiral lipid bilayer, TCLB) L_β^* 相则除函数 $\mathbf{Y}(u, v)$ 外还需要知道分子的取向 $\mathbf{d}(u, v)$, 而 $\mathbf{d}(u, v)$ [如图 5-1(b)和 5-1(c)] 则取决于倾斜角 θ 和方位角 ϕ 。对于均匀的 L_β 相和 L_β^* 相, $\theta = \theta_0$ 为常数。在曲面上由于它依赖于参照系的曲线坐标, 因此采用标量方位角 $\phi(u, v)$ 并不方便。取而代之的可以引用一个与坐标无关的单位取向矢量 \mathbf{d} 。

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= d_u(u, v) \mathbf{Y}_{,u} + d_v(u, v) \mathbf{Y}_{,v} + n \cos \theta_0 \\ &= d_l \mathbf{Y}_{,l} + n \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

式中 d_u 和 d_v 是两个与曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 的单位法线矢量 \mathbf{n} 无关的 u 和 v 的标量函数。与 Frank 液晶理论相对应, \mathbf{d} 正好取代了液晶中的指向矢, 因此在下文中就把 \mathbf{d} 直接称为指向矢。根据式 (2.23) g_{ij} 的定义和式 (2.29) 曲面法线 \mathbf{n} 的定义, 式 (5.1) 的自点积给出

$$g_{ij}d_i d_j - \sin^2 \theta_0 = 0 \quad (i, j = u, v) \quad (5.2)$$

实验观测指出, TCLB 分子的手征性在形成螺旋结构方面起着关键的作用。为简单起见, 在这里先抛开其余项而专注于手征效应 (chirality effect), 也就是说讨论具有强手征效应的 TCLB。在 Frank 理论中, 螺状相液晶的标志是自由能密度 (free energy density) 表示式中的

$$g_{\text{ch}} = -k_2 \mathbf{d} \cdot (\nabla \times \mathbf{d}) \quad (5.3)$$

项, $k_2 > 0$ 对应于右手螺旋, 而 $k_2 < 0$ 对应于左手螺旋。由于涉及曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 和曲面 $\mathbf{Y}(u, v) + \mathbf{n}(u, v)t$, 因此按照式 (2.85), 式 (5.3) 中的梯度算符应该是

$$\nabla = \nabla' + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \quad (5.4)$$

其中 ∇' 是运算于曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 上的二维梯度算符

$$\nabla' = g^{ij} \mathbf{Y}_{,i} \frac{\partial}{\partial j} \quad (i, j = u, v) \quad (5.5)$$

于是得到

$$\begin{aligned} g_{\text{ch}} &= -k_2 \mathbf{d} \cdot (\nabla' \times \mathbf{d} + \mathbf{n} \times \mathbf{d}_{,n}) \\ &= -k_2 \mathbf{d} \cdot (g^{ij} \mathbf{Y}_{,i} \times \mathbf{d}_{,j} + \mathbf{n} \times \mathbf{d}_{,n}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

由于式 (5.1) 包含 \mathbf{n} 和 $\mathbf{Y}_{,i}$ 两项, 因此需要对它们先加以考虑。 \mathbf{n} 是一个大小不变的单位矢量, 因此沿它自己方向的变化为零。

$$\mathbf{n}_{,n} = 0 \quad (5.7)$$

另一方面, 如果在曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 上的一点 P 增加一个小小的变化 $l\mathbf{n}$, 那么相应的 \mathbf{Y} 的变化就是简单的 l 。按照定义 $\partial \mathbf{Y} / \partial n = \lim_{l \rightarrow 0} (l\mathbf{n} / l) = \mathbf{n}$, 因此按照式 (2.58) 有

$$Y_{,ln} = n_{,l} = Y_{,nl} = -L_{lm}g^{mk}Y_{,k}$$

因此,应用式(2.24)可以有

$$\begin{aligned} d_l n \times Y_{,ln} &= d_l L_{lm} g^{mk} (Y_{,k} \times n) \\ &= g^{-1/2} d_l L_{lm} g^{mk} (g_{kv} Y_{,u} - g_{ku} Y_{,v}) \\ &= g^{-1/2} d_l e^{3mn} L_{ln} Y_{,m} \end{aligned} \quad (5.8)$$

式中 e^{3mn} 是式(2.30)的置换符号。

应用式(2.26)、(2.29)和(2.57), $\nabla' \times \mathbf{d}$ 成为

$$\begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{d} &= g^{ij} Y_{,i} \times \frac{\partial}{\partial_j} (d_l Y_{,l} + n \cos \theta_0) \\ &= g^{ij} d_{l,j} Y_{,i} \times Y_l + g^{ij} d_l Y_{,i} \times Y_{l,j} + \cos \theta_0 g^{ij} Y_{,i} \times n_{,j} \\ &= g^{1/2} (g^{uj} d_{v,j} - g^{vj} d_{u,j}) n + g^{1/2} (g^{uj} \Gamma_{lj}^v - g^{vj} \Gamma_{lj}^u) d_l n \\ &\quad + g^{1/2} g^{ij} d_l L_{lj} (g_{iv} Y_{,u} - g_{iu} Y_{,v}) - \cos \theta_0 g^{1/2} L_{jl} (g^{uj} g^{lv} - g^{vj} g^{lu}) n \end{aligned}$$

只要进行简单的展开就可以证明下列各个关系式:

$$\begin{aligned} g^{uj} d_{vj} - g^{vj} d_{u,j} &= \frac{1}{g} e^{3mn} g_{kn} d_{km} \\ g^{uj} \Gamma_{lj}^v - g^{vj} \Gamma_{lj}^u &= \frac{1}{g} e^{3mn} g_{kn} \Gamma_{ml}^k \\ g^{ij} L_{jl} (g_{iv} Y_{,u} - g_{iu} Y_{,v}) &= e^{3mn} L_{ln} Y_{,m} \\ L_{jl} (g^{uj} g^{lv} - g^{vj} g^{lu}) &= 0 \end{aligned}$$

式中 $j, k, l, m, n = u, v$, 因此得到

$$\nabla' \times \mathbf{d} = g^{-1/2} e^{3mn} [g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) n + L_{ln} d_l Y_{,m}] \quad (5.9)$$

另外,应用式(5.7)和式(5.8)可以有

$$\begin{aligned} n \times d_{,n} &= n \times (d_l Y_{,l} + n \cos \theta_0)_{,n} \\ &= g^{-1/2} d_l e^{3mn} L_{ln} Y_{,m} \end{aligned} \quad (5.10)$$

结合式(5.9)和式(5.10)可以得到

$$\nabla' \times \mathbf{d} = g^{-1/2} [g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) n + 2L_{ln} d_l Y_{,m}] \quad (5.11)$$

于是式(5.3)成为

$$g_{\text{ch}} = -k_2 g^{-\frac{1}{2}} e^{3\gamma m} [g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) \cos \theta_0 + 2L_{ln} g_{mk} d_l d_k] \quad (5.12)$$

TCLB 整体的总自由能由

$$F = \int g_{\text{ch}} dV$$

给出。由于 TCLB 的厚度 $t \cos \theta_0$ 大约是两亲分子长度 $t/2$ 的两倍,比起膜的线度大小可以忽略不计,因此体积元可以近似为 $t \cos \theta_0 dA$, dA 是 $Y(u, v)$ 曲面的面积元。于是可以有

$$F = t \cos \theta_0 \int g_{\text{ch}} dA = \int g^{1/2} g_{\text{TCLB}} du dv \quad (5.13)$$

式中

$$g_{\text{TCLB}} = -k_2 t \cos \theta_0 g^{-1/2} e^{3\gamma m} [g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) \cos \theta_0 + 2g_{km} L_{ln} d_k d_l] \\ + \lambda(u, v) (g_{mn} d_m d_n - \sin^2 \theta_0) \quad (k, l, m, n = u, v) \quad (5.14)$$

上式中 λ 项来源于式(5.2)的约束条件。拉格朗日未定乘子 $\lambda(u, v)$ 可以认为是由于分子的倾斜与表面曲率的耦合所引起的作用于膜面的拉伸应变。

§ 5.2 强手征效应下倾斜平衡和曲面平衡方程式

在平衡状态下系统自由能处于最小值,因此关系式

$$\delta F = \delta \int g^{-1/2} g_{\text{TCLB}} du dv = 0$$

确定了系统的平衡状态。与之相对应的欧拉-拉格朗日方程式为

$$\left(\frac{\partial}{\partial d_j} - \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial d_{j,m}} \right) g^{\frac{1}{2}} g_{\text{TCLB}} = 0 \quad (j, m = u, v) \quad (5.15)$$

根据式(5.14)的 g_{TCLB} 表示式,由欧拉-拉格朗日方程式(5.15)决定的系统处于平衡状态的条件成为

$$2g^{\frac{1}{2}}\lambda g_{ij}d_i - k_2 te^{3\pi m} [(g_{kn}\Gamma_{mj}^k - g_{nj,m})\cos^2\theta_0 + 2(g_{kn}L_{jm} + g_{jm}L_{kn})d_k \cos\theta_0] = 0$$

$$(i, j, k, m, n = u, v) \quad (5.16)$$

从原则上讲,对于给定的曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$,式(5.16)提供了两个关于 d_u, d_v 和 λ 的线性方程式。从这两个方程式可以解出 d_u 和 d_v 作为 λ 的函数。把这两个解代入式(5.2)就决定了 λ 作为 g_{ij}, L_{ij} 和 Γ_{ij}^k 这些对于给定曲面 $\mathbf{Y}(u, v)$ 是已知值的函数。式(5.16)可以称为倾斜平衡方程式。

另一方面,为了确定一个平衡的曲面,首先应该有一个曲面平衡方程式(surface-equilibrium equation)。为了找出这个曲面平衡方程式就需要找出曲面发生变化时曲面自由能的变化。设曲面的平衡形状为 $\mathbf{Y}(u, v)$,而

$$\mathbf{Y}'(u, v) = \mathbf{Y}(u, v) + \psi(u, v)\mathbf{n} \quad (5.17)$$

是一个发生了微小畸变的曲面,式中 $\psi(u, v)$ 是一个足够小的 u 和 v 的光滑函数。 ψ 引起的曲面自由能的变化由

$$\delta F = \delta \oint g_{\text{TCLB}} dA = \delta \oint g^{1/2} g_{\text{TCLB}} du dv \quad (5.18)$$

式给出。在第三章中已经得出,在 ψ 的一阶近似条件下,存在下列的关系式:

$$\begin{cases} \delta g_{ij} = -2L_{ij}\psi \\ \delta g = -4gH\psi \\ \delta g^{1/2} = -2g^{1/2}H\psi \\ \delta L_{ij} = \psi_{,ij} - \Gamma_{ij}^k \psi_{,k} - (2HL_{ij} - Kg_{ij})\psi \\ \delta(dA) = -2H\psi dA \end{cases} \quad (5.19)$$

从式(5.19)的各式可以很容易地得出下列两个结果:

$$\begin{cases} \delta g_{ij,k} = (\delta g_{ij})_{,k} = -2(L_{ij}\psi)_{,k} \\ \delta g^{-1/2} = -\frac{1}{2}g^{-3/2}\delta g = 2g^{-1/2}H\psi \end{cases} \quad (5.20)$$

应用这些关系可以得出下列两个结果:

$$\begin{cases} g_{in,j} + g_{jn,i} - g_{ij,n} = 2g_{kn}\Gamma_{ij}^k \\ \delta(g_{kn}\Gamma_{ml}^k) = \frac{1}{2}\delta(g_{nm,i} + g_{ln,m} - g_{ml,n}) \\ \qquad \qquad \qquad = -[(L_{mn}\psi)_{,i} + (L_{ln}\psi)_{,m} - (L_{ln}\psi)_{,n}] \end{cases} \quad (5.21)$$

F 的变分 δF 可以写成下列形式:

$$\begin{aligned} \delta F &= \oint (\delta g_{\text{TCLB}}) dA + \oint g_{\text{TCLB}} \delta(dA) \\ &= \oint g^{1/2} (\delta g_{\text{TCLB}}) dudv - 2\oint H g_{\text{TCLB}} \psi dA \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} g^{1/2} (\delta g_{\text{TCLB}}) &= (\delta g^{-1/2}) g_{\text{TCLB}} - k_2 t \cos \theta_0 e^{3mn} \{ [\delta(g_{kn}(d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l))] \cos \theta_0 \\ &\quad + 2(\delta L_{ln}) g_{km} d_k d_l + 2L_{ln} (\delta g_{km}) d_k d_l \} + \lambda(u, v) g^{1/2} (\delta g_{ij}) d_i d_j \end{aligned}$$

因此, 可以有

$$\begin{aligned} \delta F &= \oint \left(-k_2 t \cos \theta_0 e^{3mn} \{ \delta[g_{kn}(d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l)] \cos \theta_0 + 2(\delta L_{ln}) g_{km} d_k d_l \right. \\ &\quad \left. + 2L_{ln} (\delta g_{km}) d_k d_l \} + \lambda(\delta g_{ij}) g d_i d_j \right) dudv \end{aligned} \quad (5.22)$$

注意到 $\delta g_{kn} d_{km}$ 是 ψ 的二阶项, 因此

$$\begin{cases} e^{3mn} \delta[g_{kn}(d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l)] = e^{3mn} [(L_{mn}\psi)_{,i} + (L_{ln}\psi)_{,m} - (L_{ln}\psi)_{,n}] = 0 \\ e^{3mn} L_{ln} (\delta g_{km}) d_k d_l = -2e^{3mn} L_{ln} L_{km} d_k d_l = 0 \\ e^{3mn} (\delta L_{ln}) g_{km} d_k d_l = e^{3mn} [\psi_{,ln} - \Gamma_{ln}^p \psi_{,p} - (2HL_{ln} - Kg_{ln})\psi] g_{km} d_k d_l \\ \qquad \qquad \qquad = e^{3mn} (\psi_{,ln} - \Gamma_{ln}^p \psi_{,p} - 2HL_{ln}\psi) g_{km} d_k d_l \\ \lambda(\delta g_{ij}) d_i d_j = -2\lambda L_{ij} d_i d_j \psi \end{cases} \quad (5.23)$$

于是得到

$$\begin{aligned} \delta F &= \oint \{ -k_2 t \cos \theta_0 e^{3mn} [2(\psi_{,ln} - \Gamma_{ln}^p \psi_{,p} - 2HL_{ln}\psi) g_{km} d_k d_l] \\ &\quad - 2\lambda g^{-1/2} L_{mn} d_m d_n \psi \} dudv \end{aligned}$$

应用式(3.75)和式(3.76), 于是得到

$$\delta F = \oint 2 \left[k_2 t g^{-1/2} \cos \theta_0 e^{3mm} \left(2HL_{ln} - \frac{\partial}{\partial p} \Gamma_{ln}^p - \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} \right) g_{km} d_k d_l - \lambda L_{mn} d_m d_n \right] \psi dA$$

这样得到曲面平衡方程式为

$$k_2 t g^{-1/2} \cos \theta_0 e^{3mm} \left(2HL_{ln} - \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial p} \Gamma_{ln}^p \right) g_{km} d_k d_l - \lambda L_{mn} d_m d_n = 0$$

$$(k, l, m, n, p = u, v) \quad (5.24)$$

式(5.2)、式(5.16)和式(5.24)这一组方程式是确定问题性质的基本方程式。下面将应用它们来处理一些具体问题。

首先将要讨论的是盘绕在圆柱上的螺旋带,简称为螺旋绕带。由于它涉及所谓的螺旋面(helicoid),因此下面先简单介绍一下螺旋面。

§ 5.3 螺旋面

螺旋面^[16, 17]是由一条平直线段或是一条扭曲的曲线线段围绕一条称作“螺旋面的旋转轴”的固定直线旋转,同时以与旋转角速度成正比的不变线速度沿旋转轴方向平移而形成。曲面在一个包含旋转轴的平面上的截线称为该螺旋面的经线或子午线。所有经线都是相同的平面曲线,而曲面本身也可以由一条经线以与给定曲线相同的角速度和线速度运动而形成。上面所说的运动方式称为螺旋运动,所以螺旋面可以由一条平面曲线作螺旋运动(helical motion)而产生。

设螺旋面的旋转轴为 z 轴, ρ 为螺旋面上一点到 z 轴之间的距离, ϕ 为通过该点和 z 轴所形成的平面在 xz 平面上所转过的正向夹角,那么螺旋面的一般方程式是

$$\mathbf{Y}(\rho, \phi) = [\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, h(\rho) + b\phi] \quad (5.25)$$

式中 $z = h(\rho)$ 是螺旋面上通过任意点 ρ 的母曲线(生成曲线), b 是两种运动速率之比,同时标志着转动的宇称性, $b > 0$ 表示右旋,而 $b < 0$ 为左旋,扭曲的螺距为 $2\pi|b|$ 。当 $b = 0$ 时, $\mathbf{Y}(\rho, \phi)$ 是一个回转曲面(surface of revolution),也称转成面。当 $h(\rho)$ 为常量时, $\phi = \text{常量}$ 表示垂直于 z 轴的直线,这种曲面称为正螺旋面(right helicoid)或正劈锥

曲面(right concoid)。曲线 $\rho = \text{常数 } R$, 是螺旋面上的螺旋线或是回转曲面上的圆。

§ 5.4 螺旋式绕带

在式(5.25)中,如果在 $0 \leq z \leq a$ 的范围内 $h(\rho)$ 随 z 线性变化,而且 $2\pi|b| > a > 0$, 那么正螺旋面成了一个沿 z 轴方向螺距间隙为 $2\pi|b| - a$ 的螺旋式绕带^[14, 18], 以下简称为螺旋绕带(helical wound-ribbon)。它像一条宽为 $a \cos \psi$ 的丝带缠绕在一个半径为 R 的正圆柱面上, 而 ψ 为螺旋相对于 xz 平面的倾斜角。螺旋绕带曲面不再是 ρ 和 ϕ 的函数而成为 ϕ 和 h 的函数, 可以用

$$Y(\phi, h) = (R \cos \phi, R \sin \phi, h + b\phi) \quad (5.26)$$

来表示。图 5-2 是螺旋绕带的示意图。不难看出, 螺旋的倾斜角 ψ 满足方程式

$$\tan \psi = 2\pi b / (2\pi R) = b/R \quad (5.27)$$

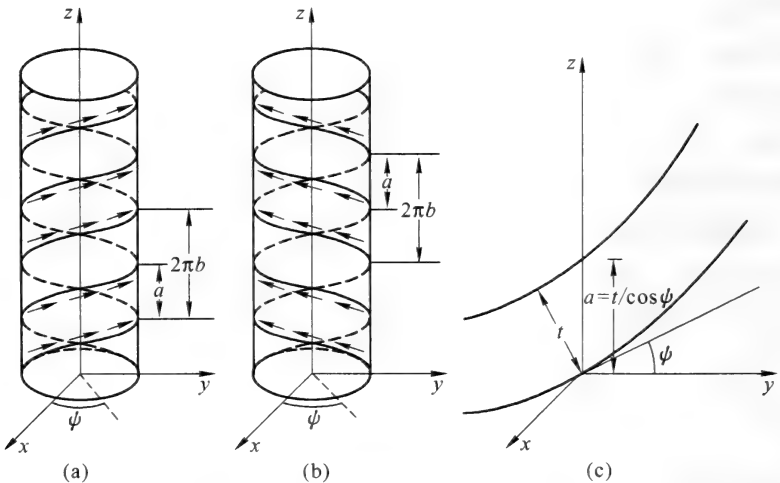


图 5-2 螺旋式绕带示意图

(a) 右旋螺旋; (b) 左旋螺旋, 箭头表示局域倾斜方向; (c) 带截面, t 为带宽, $a = t/\cos \psi$ 。

与式(5.26)曲面相关的各个基本量为

$$\begin{cases}
 \mathbf{Y}_{,\phi} = (-R\sin\phi, R\cos\phi, b), & \mathbf{Y}_{,h} = (0, 0, 1) \\
 g_{\phi\phi} = R^2 + b^2, & g_{\phi h} = g_{h\phi} = b, & g_{hh} = 1, & g = R^2 \\
 g_{ij,k} = 0 & (i, j, k = \phi, h) \\
 \mathbf{n} = (\cos\phi, \sin\phi, 0) \\
 L_{\phi\phi} = -R, & L_{\phi h} = L_{h\phi} = L_{hh} = L = 0 \\
 2H = -\frac{1}{R}, & K = 0, & \Gamma_{ij}^k = 0 & (i, j, k = \phi, h)
 \end{cases} \quad (5.28)$$

式(5.2)关于 \mathbf{d} 的约束条件现在成为

$$R^2 d_\phi^2 + (bd_\phi + d_h)^2 = \sin^2\theta_0 \quad (5.29)$$

θ_0 是膜中分子相对于膜面法线的倾斜角,它说明 Rd_ϕ 和 $bd_\phi + d_h$ 分别为矢量 \mathbf{d} 的 ϕ 向分量和 z 向分量。

很容易证明

$$\begin{aligned}
 e^{3\gamma m} [(g_{kn}\Gamma_{jm}^k - g_{m,m})\cos\theta_0 + 2(g_{km}L_{jm} + g_{jm}L_{kn})d_k] \\
 = \begin{cases} 2R(2bd_\phi + d_h) & (j = \phi) \\ 2Rd_\phi & (j = h) \end{cases} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

应用式(5.30),倾斜平衡方程式(5.16)给出下列两个方程式:

$$\begin{cases} \lambda[R^2 d_\phi + b(bd_\phi + d_h)] = k_2 t [bd_\phi + (bd_\phi + d_h)] \cos\theta_0 & (j = \phi) \end{cases} \quad (5.31a)$$

$$\begin{cases} \lambda(bd_\phi + d_h) = k_2 t d_\phi \cos\theta_0 & (j = h) \end{cases} \quad (5.31b)$$

它们相当于

$$R^2 d_\phi^2 = (bd_\phi + d_h)^2 \quad (5.32a)$$

$$\lambda^2 = k_2^2 t^2 \cos^2\theta_0 / R^2 \quad (5.32b)$$

式(5.29)和式(5.32a)给出

$$\begin{cases} R^2 d_\phi^2 = \frac{1}{2} \sin^2\theta_0 \end{cases} \quad (5.33a)$$

$$\begin{cases} (bd_\phi + d_h)^2 = \frac{1}{2} \sin^2\theta_0 \end{cases} \quad (5.33b)$$

由式(5.33)决定的四组 d_ϕ 和 d_h 的解如下:

$$(1) d_{\phi} = \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), bd_{\phi} + d_h = \sin \theta_0 / \sqrt{2}, d_h = (R - b) \cdot \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), Rd_{\phi}(bd_{\phi} + d_h) = \sin^2 \theta_0 / 2, \lambda = k_2 t \cos \theta_0 / R \quad (5.34a)$$

$$(2) d_{\phi} = -\sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), bd_{\phi} + d_h = -\sin \theta_0 / \sqrt{2}, d_h = -(R - b) \cdot \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), Rd_{\phi}(bd_{\phi} + d_h) = \sin^2 \theta_0 / 2, \lambda = k_2 t \cos \theta_0 / R \quad (5.34b)$$

$$(3) d_{\phi} = \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), bd_{\phi} + d_h = -\sin \theta_0 / \sqrt{2}, d_h = -(R + b) \cdot \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), Rd_{\phi}(bd_{\phi} + d_h) = -\sin^2 \theta_0 / 2, \lambda = -k_2 t \cos \theta_0 / R \quad (5.34c)$$

$$(4) d_{\phi} = -\sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), bd_{\phi} + d_h = \sin \theta_0 / \sqrt{2}, d_h = (R + b) \cdot \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), Rd_{\phi}(bd_{\phi} + d_h) = -\sin^2 \theta_0 / 2, \lambda = -k_2 t \cos \theta_0 / R \quad (5.34d)$$

式(5.34)中 λ 的相应值由式(5.31b)决定。指向矢 \mathbf{d} 现在成为

$$\mathbf{d} = d_{\phi}(-R \sin \phi, R \cos \phi, b) + d_h(0, 0, 1) + \cos \theta_0(\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (5.35)$$

与液晶理论相比较,在液晶理论中 \mathbf{n} 和 $-\mathbf{n}$ 是等价的,此处的指向矢 \mathbf{d} 和 $-\mathbf{d}$ 也可以看做是等价的。对于右手扭曲, b 和 k_2 为正;而对于左手扭曲则 b 和 k_2 为负。这些条件表明,式(5.33)的四组解(1)、(2)、(3)和(4)也是等价的。它们可以分成两组:第一组为(1)和(2),具有正的 $d_{\phi}(bd_{\phi} + d_h)$ 值;第二组为(3)和(4),具有负的 $d_{\phi}(bd_{\phi} + d_h)$ 值。由于 R 永远是正值,因此在 $Rd_{\phi}(bd_{\phi} + d_h) > 0$ 的条件下,一个正的 Rd_{ϕ} 增量表示垂直分量 $bd_{\phi} + d_h$ 正向增加。它对应于一个右手螺旋。另一方面, $Rd_{\phi}(bd_{\phi} + d_h) < 0$ 时对应于一个左手螺旋。

这里应注意,在曲面上任意一点,矢量 \mathbf{d} 的水平分量 Rd_{ϕ} 和垂直分量 $bd_{\phi} + d_h$ 具有相同的大小,不过对于右旋螺旋和左旋螺旋则具有不同的符号。这一点说明, \mathbf{d} 的倾斜角在 $b > 0$ 的情形下等于 $45^\circ(-135^\circ)$,而在 $b < 0$ 的情形下是 $135^\circ(-45^\circ)$ 。这同式(5.27)得出的 $R = |b|$ 的螺旋线的倾斜角相符合。因此,指向矢 \mathbf{d} 同 $R = |b|$ 的螺旋线的边线相平行。由于这种螺旋线的倾斜角是 $\pm 45^\circ$ 或 $\mp 135^\circ$,因此螺旋线的螺距等于 $2\pi R$ 。这个结论对实验中所观测到的螺旋绕带的 45° 倾斜角^[1, 2]给出了一个解释。不过,还需要有更多的实验来验证是否存在有倾斜角不等于 45° 的螺旋绕带。 45° 的倾斜角确定了指向矢 \mathbf{d} 与螺旋的边线相平行。式(5.35)中的 d_{ϕ} 和 d_h 都与 ϕ 和 h 无关。这一点使得式(5.24)中的曲面平

衡方程式成为

$$d_{\phi}[-k_2 t \cos \theta_0 (bd_{\phi} + d_h) + \lambda R^2 d_{\phi}] / R = 0 \quad (5.36)$$

这个方程式对于式(5.34)的所有解都能自动得到满足。

现在,式(5.14)的 g_{TCLB} 函数成为

$$g_{\text{TCLB}} = -2k_2 t g^{-1/2} \cos \theta_0 R d_{\phi} (bd_{\phi} + d_h) \quad (5.37)$$

的形式。螺旋绕带的面积 A 由

$$A = \int_0^{2n\pi} \int_0^{n\pi} R d\phi dh = 2n^2 \pi a R \quad (5.38)$$

给出,式中 $a = \sqrt{2}t_0$ 。于是,螺旋绕带的自由能 F_w 成为

$$\begin{aligned} F_w &= - \int_0^{2n\pi} \int_0^{n\pi} 2k_2 t \cos \theta_0 R d_{\phi} (bd_{\phi} + d_h) d\phi dh \\ &= -2k_2 t A \cos \theta_0 d_{\phi} (bd_{\phi} + d_h) \end{aligned} \quad (5.39)$$

对于右旋的螺旋绕带 ($b > 0$), 式(5.34a)和式(5.34b)给出

$$F_w^R = -k_2 t A \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 / R \quad (5.40a)$$

由于 θ_0 规定为锐角,因此那些由 $k_2 > 0$ 的分子所形成的右旋螺旋绕带比起由 $k_2 < 0$ 类分子形成的右旋螺旋绕带要稳定。反过来,式(5.34c)和式(5.34d)给出的左旋螺旋绕带 ($b < 0$) 的自由能 F_w^L 为

$$F_w^L = k_2 t \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 / R \quad (5.40b)$$

这个结果说明,左旋螺旋绕带 ($b < 0$) 中由 $k_2 < 0$ 的分子形成的要比由 $k_2 > 0$ 的分子形成的更为稳定。总之,具有相同符号的 b 和 k_2 所形成的螺旋绕带具有比不同符号的 b 和 k_2 所形成的螺旋绕带的自由能低,因此更为稳定。这一点同螺状液晶的 $k_2 > 0$ 和 $k_2 < 0$ 分别对应于右旋和左旋图案相一致^[19]。除此之外,上面的计算还表明,指向矢的方向与螺旋绕带的棱边平行。

在本节开始处曾提到,当 $b = 0$ 时,螺旋退化为柱面,这时扭曲的宇称只取决于 k_2 的正或负, $k_2 > 0$ 为右旋, $k_2 < 0$ 为左旋。同时,上面的计算也表明,指向矢平行于螺旋的棱边时,式(5.34)简化为^[14]

$$d_{\phi} = \alpha_1 \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), \quad d_h = \alpha_2 \sin \theta_0 / (\sqrt{2}R), \quad \lambda = \alpha_1 k_2 t \cos \theta_0 / (\alpha_2 R) \quad (5.41)$$

式中在右旋 $k_2 > 0$ 时有 $(\alpha_1, \alpha_2) = (\pm 1, \pm 1)$, 而在左旋 $k_2 < 0$ 时有 $(\alpha_1, \alpha_2) = (\pm 1, \mp 1)$ 。指向矢 \mathbf{d} 现在成为

$$\mathbf{d} = \frac{\alpha_1 \sin \theta_0}{\sqrt{2}} (-\sin \phi, \cos \phi, 0) + \frac{d_2 \sin \theta_0}{\sqrt{2}} (0, 0, 1) + \cos \theta_0 (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (5.42)$$

柱面的面积 A 为

$$A = 2\pi RL \quad (5.43)$$

式中 L 为柱长。最后, 柱面的自由能 F_w^c 为

$$F_w^c = -\alpha_1 \alpha_2 k_2 t A \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 / R \quad (5.44)$$

当 $k_2 > 0$ 时有利于形成右手螺旋带柱面; 反之, 当 $k_2 < 0$ 时有利于形成左手螺旋带柱面。

螺旋绕带的面积为 $A = 2n^2 \pi a R$, 因此式(5.40)的自由能 F_w 可以写成

$$F_w = \mp k_2 t 2n^2 \pi a \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0$$

对于半径为 R 的螺旋绕带, a 的最大值为 $2\pi|b|$ 。在这种情形之下, 螺旋带之间不再存在空隙, 这时的自由能达到最小值。这一点解释了螺旋绕带自然转变为长管的实验现象。当 $a = \sqrt{2}t > 2\pi|b|$ 时, 曲面将变成类似饮用苏打水时所用的多层长管。这两种情形的一般性质与前面所叙述的相同。两种情形在实验中都曾看到过^[1-3]。

§ 5.5 螺旋式扭曲带

当式(5.25)中 $h(\rho) = 0$, $|\rho| \leq \text{常量 } R$, 而且 $0 \leq \phi \leq 2n\pi$ (n 为盘绕数)时, 式(5.25)成为

$$\mathbf{Y}(\rho, \psi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, b\phi), \quad |\rho| \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq 2n\pi \quad (5.45)$$

它所描述的是一条以 z 轴为扭曲轴的螺旋式扭曲带 (twisted strip he-

lix)。这种螺旋结构示意图见图 5-3。有关的基本量如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_{,\rho} = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \mathbf{Y}_{,\phi} = (-\rho \sin \phi, \rho \cos \phi, b) \\ g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\rho\phi} = g_{\phi\rho} = 0, \quad g_{\phi\phi} = \rho^2 + b^2 = g \\ \mathbf{n} = (\rho^2 + b^2)^{-1/2} (b \sin \phi, -b \cos \phi, \rho) \\ L_{\rho\rho} = 0, \quad L_{\rho\phi} = L_{\phi\rho} = -b(\rho^2 + b^2)^{-1/2}, \quad L_{\phi\phi} = 0, \quad L = -b^2/(\rho^2 + b^2) \\ H = 0, \quad K = -b^2/(\rho^2 + b^2)^2 \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = -\rho, \quad \Gamma_{\rho\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\rho}^{\phi} = \rho/(\rho^2 + b^2), \quad \Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = \Gamma_{\phi\phi}^{\rho} = \Gamma_{\rho\phi}^{\rho} = \Gamma_{\phi\rho}^{\rho} = \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0 \end{array} \right. \quad (5.46)$$

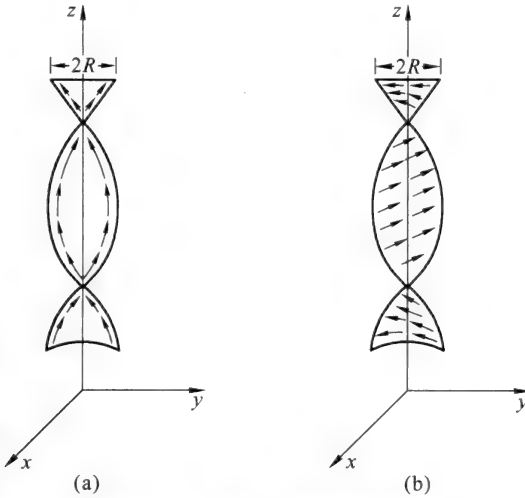


图 5-3 螺旋式扭曲带示意图

(a) 沿边线扭曲；(b) 垂直边线扭曲。箭头表示局域扭曲方向。

根据这些已知量,式(5.2)关于 \mathbf{d} 的约束方程式成为

$$d_{\rho}^2 + (\rho^2 + b^2)d_{\phi}^2 - \sin^2 \theta_0 = 0 \quad (5.47)$$

扭曲平衡方程式(5.16)中 $j = \rho$ 和 $j = \phi$ 的各项为

$$j = \rho, \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{ij}d_i = d_{\rho} \\ e^{3m} (g_{kn}\Gamma_{mj}^k - g_{nj,m}) = 0 \\ e^{3m} (g_{kn}L_{jn} + g_{jm}L_{kn})d_k = -2b(\rho^2 + b^2)^{-1/2}d_{\rho} \end{array} \right. \quad (5.48a)$$

和

$$j = \phi, \begin{cases} g_{ij}d_i = (\rho^2 + b^2)d_\phi \\ e^{3nm}(g_{kn}\Gamma_{mj}^k - g_{nj,m}) = 0 \\ e^{3nm}(g_{kn}L_{jn} + g_{jm}L_{kn})d_k = 2b(\rho^2 + b^2)^{1/2}d_\phi \end{cases} \quad (5.48b)$$

于是,式(5.16)给出下列两个关系式:

$$\begin{cases} d_\rho(\rho^2 + b^2)^{1/2}[\lambda + 2k_2tb \cos \theta_0/(\rho^2 + b^2)] = 0 & (j = \rho) \\ d_\phi = (\rho^2 + b^2)^{3/2}[\lambda - 2k_2tb \cos \theta_0/(\rho^2 + b^2)] = 0 & (j = \phi) \end{cases} \quad (5.49a)$$

$$\begin{cases} d_\rho(\rho^2 + b^2)^{1/2}[\lambda + 2k_2tb \cos \theta_0/(\rho^2 + b^2)] = 0 & (j = \rho) \\ d_\phi = (\rho^2 + b^2)^{3/2}[\lambda - 2k_2tb \cos \theta_0/(\rho^2 + b^2)] = 0 & (j = \phi) \end{cases} \quad (5.49b)$$

式(5.47)和式(5.49)的两组解现在分别成为如下形式:

第一类解

$$\begin{cases} d_\rho = 0 \\ d_\phi = \pm (\rho^2 + b^2)^{-1/2} \sin \theta_0 \\ \lambda = 2k_2tb \cos \theta_0/(\rho^2 + b^2) \end{cases} \quad (5.50a)$$

第二类解

$$\begin{cases} d_\rho = \pm \sin \theta_0 \\ d_\phi = 0 \\ \lambda = -2k_2tb \cos \theta_0/(\rho^2 + b^2) \end{cases} \quad (5.50b)$$

两个函数 d_ρ 和 d_ϕ 分别表示单位指向矢 \mathbf{d} 在垂直于曲面法线的 (ρ, ϕ) 平面上的两个分量。它们合在一起给出类脂双层中一点上分子的平均方向。类脂双层由两层具有相反取向的分子组成,显然,在 (ρ, ϕ) 平面上 \mathbf{d} 和 $-\mathbf{d}$ 是等价的。这一点同液晶理论中的指向矢 \mathbf{n} 和 $-\mathbf{n}$ 等价相对应。在螺旋式扭曲带的情形中,式(5.50)指出,对于 d_ρ 和 d_ϕ 有两组解 $d_\rho = 0$ 或是 $d_\phi = 0$ 。在 (ρ, ϕ) 平面上, \mathbf{d} 和 $-\mathbf{d}$ 等价意味着式(5.50)中的正负号无关紧要,而可以加以忽略。忽略式(5.1)中的 \mathbf{n} 项时,第一类解中的 \mathbf{d} 在 z 方向有一个常量的分量而在第二类解中 \mathbf{d} 在 z 方向不存在分量。第一类解对应于 \mathbf{d} 沿螺旋的边线方向,而第二类解对应于 \mathbf{d} 垂直于螺旋的边线。另外,第二类解表示在 ϕ 等于常量的平面上 \mathbf{d} 与 b 无关,而只有垂直于曲面方向的 \mathbf{d} 分量才与 b 相关。在螺旋绕带情形中并不存在 \mathbf{d} 垂直于螺旋边线的情形。因此,第二类解不是一个有实际物理意义的情形,对它不必重视。

应用式(5.46)给出的各个量的分量值,在把各个单项直接展开后很容易得到

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{3mn} g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) = \frac{d}{d\rho} [(\rho^2 + b^2) d_\phi] \\ e^{3mn} L_{ln} g_{km} d_k d_l = -b(\rho^2 + b^2)^{-1/2} d_\rho^2 + b(\rho^2 + b^2)^{1/2} d_\phi^2 \\ g_{ij} d_i d_j = d_\rho^2 + (\rho^2 + b^2) d_\phi^2 \\ e^{3mn} \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial}{\partial n} (g_{km} d_k d_l) = -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [(\rho^2 + b^2) d_\rho d_\phi] \\ e^{3mn} \frac{\partial}{\partial p} (\Gamma_{ln}^p g_{km} d_k d_l) = -\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho d_\rho d_\phi) \\ L_{mn} d_m d_n = -2b(\rho^2 + b^2)^{-1/2} d_\rho d_\phi \end{array} \right. \quad (5.51)$$

螺旋式扭曲带的表面平衡方程式于是成为

$$k_2 t (\rho^2 + b^2)^{-1/2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho^2 + b^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + 2b \right] d_\rho d_\phi = 0 \quad (5.52)$$

显然,式(5.50 a)或式(5.50 b)的一组 d_ρ , d_ϕ 和 λ 的解都能满足这个方程式。

螺旋式扭曲带的面积 A 为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} (\rho^2 + b^2)^{1/2} d\rho d\phi \\ &= 2\pi n \{ R(R^2 + b^2)^{1/2} + (b^2/2) \ln[(R^2 + b^2)^{1/2} + R] - (b^2/2) \ln[(R^2 + b^2)^{1/2} - R] \} \end{aligned}$$

显然,对于给定的 $|b|$ 值,右旋螺旋和左旋螺旋互相对称,具有相同的面积。因此,面积 A 可以写成

$$A = 2\pi n \{ R(R^2 + b^2)^{1/2} + b^2 \ln[(R^2 + b^2)^{1/2} + R] - b^2 \ln |b| \}$$

现在令

$$x = \frac{R}{|b|} > 0 \quad (5.53)$$

那么,螺旋式扭曲带的面积 A 可以写为

$$A = 2\pi n b^2 \{ x(1 + x^2)^{1/2} + \ln[(1 + x^2)^{1/2} + x] \} \quad (5.54)$$

式中 x 可以大于 1 或小于 1,这视 R 是大于 $|b|$ 还是小于 $|b|$ 而定。

根据式(5.51),函数 g_{TCLB} 成为

$$g_{\text{TCLB}} = -k_2 t g^{-1/2} \cos \theta_0 \left\{ \frac{d}{d\rho} [(\rho^2 + b^2) d_\sharp] \cos \theta_0 \right. \\ \left. - 2b(\rho^2 + b^2)^{-1/2} d_\rho^2 + 2b(\rho^2 + b^2)^{1/2} d_\sharp^2 \right\}$$

对应于式(5.50)所给出的两组 d_ρ 和 d_\sharp 解,于是 g_{TCLB} 具有下列的形式:

第一类

由于 $d_\rho = 0$, $d_\sharp = \pm (\rho^2 + b^2)^{-1/2} \sin \theta_0$, 因此

$$g_{\text{TCLB}}^{(1)} = -k_2 t g^{-1/2} \cos \theta_0 \left\{ \frac{d}{d\rho} [\pm (\rho^2 + b^2)^{1/2}] \sin \theta_0 \cos \theta_0 \right. \\ \left. + 2b(\rho^2 + b^2)^{-1/2} \sin^2 \theta_0 \right\} \quad (5.55a)$$

第二类

由于 $d_\rho = \pm \sin \theta_0$, $d_\sharp = 0$, 因此

$$g_{\text{TCLB}}^{(2)} = 2k_2 t b g^{-1/2} \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 (\rho^2 + b^2)^{-1/2} \quad (5.55b)$$

在求螺旋式扭曲带自由能的积分过程中,应该注意到 $(\rho^2 + b^2)^{-1/2}$ 中的 b^2 是指 $|b|^2$, 而在 $(\rho^2 + b^2)^{-1/2}$ 前面的因子 b 决定了扭曲的宇称 (parity), 因此对应于第一类和第二类螺旋式扭曲带的自由能 $F_{\text{T}}^{(1)}$ 和 $F_{\text{T}}^{(2)}$ 分别成为

$$F_{\text{T}}^{(1)} = -F_{\text{T}}^{(2)} = -8n\pi k_2 t b \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \ln[(1+x^2)^{1/2} + x] \quad (5.56a)$$

由于 $(1+x^2)^{1/2} + x > 1$, 因此当 k_2 和 b 具有相同符号时, $F_{\text{T}}^{(1)}$ 小于 $F_{\text{T}}^{(2)}$ 而成为有利状态。反之,当 k_2 和 b 异号时, $F_{\text{T}}^{(2)}$ 为有利状态。按照一般的观点^[19], k_2 的正或负,取决于分子的手征性。这里的分析提供了一个特殊的宏观结构:螺旋的旋向与形成它的微观分子的手征性具有不同的结构。不过应该注意到, $F_{\text{T}}^{(2)}$ 属于指向矢 \mathbf{d} 垂直于螺旋边线的情形,而在螺旋绕带情形中并不出现这种状态。除非实验中证实有这种状态的出现,否则对它可以不必再进行讨论。

为了进一步与螺旋绕带作比较,现在把自由能 F 写成下列的形式:

$$F_{\text{T}}^{(1)} = -F_{\text{T}}^{(2)} = -\frac{4k_2 t A \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \ln[(1+x^2)^{1/2} + x]}{b|x(1+x^2)^{1/2} + \ln[(1+x^2)^{1/2} + x]} \quad (5.56b)$$

按照式(5.53), b 可以表示为 $\pm R/x$, 其中正号属于 $b > 0$ 的情形,而负号

属于 $b < 0$ 的情形,因此 F_T 可以写成

$$F_T^{(1)} = -F_T^{(2)} = \mp 2k_2 A t \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 f(x)/R \quad (5.56c)$$

的形式,右方的负号属于 $b > 0$ 的情形,而正号属于 $b < 0$ 的情形,同时函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \frac{2x \ln[(1+x^2)^{1/2} + x]}{x(1+x^2)^{1/2} + \ln[(1+x^2)^{1/2} + x]} \quad (5.57)$$

数值计算给出 $f(x)$ 的最大值出现在

$$x = 2.34 \quad (5.58)$$

而其值为

$$f(x) \leq 0.984$$

与螺旋绕带的式(5.44)自由能 F_w 相比较,可以看出在同样半径 R 和同样面积条件下,螺旋绕带有利状态的自由能小于螺旋式扭曲带有利状态的自由能。这一点看来解释了实验中观测到的螺旋式扭曲带自发转变为螺旋绕带的现象^[1]。

§ 5.6 球形膜泡

在一些实验研究中^[1, 3] 观察到手征性纤维状双层在成长为螺旋结构之前形成了球形膜泡。因此有必要研究一下球形表面上手征性分子的指向场。在用球坐标 (θ, ϕ) 表示下,半径为 R 的球面可以用

$$Y(\theta, \phi) = R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (5.59)$$

来表示。与之相关的各个基本量为

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\theta\theta} = R^2, \quad g_{\phi\phi} = g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\theta\theta} = R^2 \sin^2 \theta, \quad g = R^4 \sin^2 \theta \\ \mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ L_{\theta\theta} = -R, \quad L_{\phi\phi} = L_{\theta\phi} = 0, \quad L_{\theta\theta} = -R \sin^2 \theta, \quad L = R^2 \sin^2 \theta \\ H = -1/R, \quad K = 1/R^2 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} = \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} = -\sin^2 \theta \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin^2 \theta \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = -\sin \theta \cos \theta \end{array} \right. \quad (5.60)$$

式(5.2)的 \mathbf{d} 的约束条件和式(5.16)的倾斜平衡方程式现在分别成为

$$R^2 d_\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d_\phi^2 - \sin^2 \theta_0 = 0 \quad (5.61a)$$

$$\lambda d_\theta = 0 \quad (5.61b)$$

$$\lambda \sin^3 \theta d_\phi = 0 \quad (5.61c)$$

显然,式(5.61)的两组解如下:

第一组

$$d_\theta = 0, \quad d_\phi = \pm \sin \theta_0 / (R \sin \theta), \quad \lambda = 0 \quad (5.62a)$$

第二组

$$d_\theta = \pm \sin \theta_0 / R, \quad d_\phi = 0, \quad \lambda = 0 \quad (5.62b)$$

这时,式(5.24)的表面平衡方程式成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta \right) d_\theta d_\phi = 0$$

显然,两组方程式(5.62a)和(5.62b)都能满足这一方程式。由于 \mathbf{d} 和 $-\mathbf{d}$ 等价,因此式(5.62)中的正负号已无关紧要而可以加以忽略。对应于式(5.62)的指向矢方位角场分别表现为图 5-4(a)和图 5-4(b)中的球面上的纬线和经线。在这两种情形当中,在北极和南极指向矢的取向都是不连续的。这是“在闭合拓扑球面上的线场最少有两个奇异点”^[20]这一微分几何学定理的自然结果。这两个奇异点对应于 TCLB 膜泡的缺陷。如果假设这些缺陷会导致膜泡的泄漏和融合,那么指向场的这一特点就可以合理地解释实验上观测到的“TCLB 从膜泡弥散到螺旋式超级结构的形成”这一现象。

Nakashima 等人在他们的实验中^[1]观察到,当降低温度时,膜泡与膜泡可以发生融合,并且最后形成为聚集的螺旋结构。这一过程似乎可以认为是无取向倾斜和取向缺陷的双层材料进行的一系列从 L_α 相到 L_β^* 相的相变。在 L_β^* 相,分子的倾斜将引起取向缺陷,从而导致膜泡融合(vesicle fusion)而形成螺旋结构。一般地,可以从能量的观点来解释膜泡到螺旋结构的转变过程。这个问题的 g_{TCLB} 函数的形式是

$$g_{\text{TCLB}} = -k_2 t g^{-1/2} \cos^2 \theta_0 [g_{\theta\theta} (d_{\theta,\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^\theta d_\theta) - g_{\theta\phi} (d_{\theta,\phi} + \Gamma_{\theta\phi}^\theta d_\theta)]$$

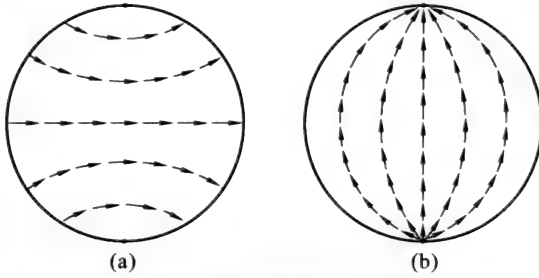


图 5-4 球形膜泡示意图

(a) 对应于式(5.62a)的倾斜场; (b) 对应于式(5.62b)的倾斜场。
箭头表示局域倾斜方向。

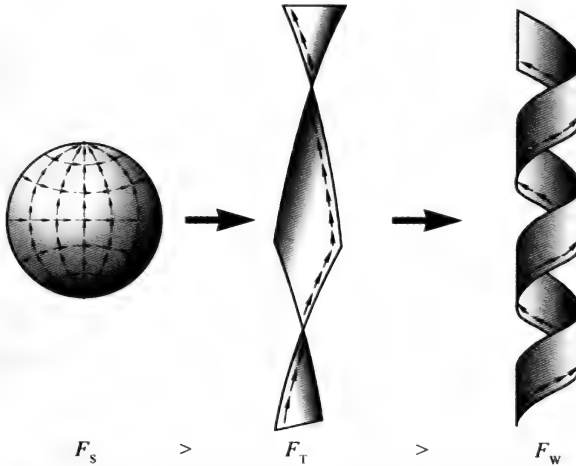


图 5-5 从球形膜泡到螺旋结构的系列转变过程示意图

箭头表示局域倾斜场的方向。

由于 d_θ 和 d_ϕ 都不是 ϕ 的函数, 因此球形膜泡的自由能为

$$F_S = -k_2 t \cos^2 \theta_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^2 \frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta d_\phi) d\theta d\phi$$

因此, 对于第一组和第二组的情形可以有

$$F_S = F_S^{\text{轴向}} = F_S^{\text{径向}} = 0 \tag{5.63}$$

把它同式(5.40)和式(5.56)相比较可以看到

$$F_S > F_T > F_w \tag{5.64}$$

这就证实了从球形膜泡弥散到扭曲螺旋带再到螺旋绕带这一观测到的转变过程。图 5-5 表明了膜的不同形状的转变序列。习惯上,局域倾斜方向一般取作沿螺旋结构边线的方向。在这一序列中,图 5-3(b)所表示的第二类扭曲带被排除了。

§ 5.7 倾斜手征性类脂双层自由能普适公式

式(5.13)和式(5.14)的自由能表示式在讨论给定形状的 TCLB 问题时比较方便。本节将用微分几何学中使用的术语来给出 TCLB 自由能普适公式的表达式。虽然在第二章中已经给出一些微分几何术语,为了使用方便起见,在这里将更加综合地重新加以引进。空间曲面上任意一点 \mathbf{Y} 可以用两个标量参量 u 和 v 来加以描述: $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(u, v)$ 。曲面上任意一条曲线上一点 \mathbf{r} 的位置可以用一个标量参量 s 来加以确定:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{Y}[u(s), v(s)] = \mathbf{Y}(s)$$

为了方便起见, s 可以选为曲线上一点距离曲线上固定点 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s_0)$ 的弧长。

对于曲面上一条非直线的光滑连续曲线 $\mathbf{r}(s)$ 上两个邻近点 P 和 P' , 当 P' 沿曲线向 P 点趋近时,割线 PP' 将趋近于曲线上 P 点的切线。在 P 点沿曲线弧长 s 增长方向的切线单位矢量 $\mathbf{t}(s)$ 称为曲线在 P 点的单位切向矢量。

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}_{,s}(s) = \mathbf{Y}_{,s}(s)$$

P 点的法面是在 P 点与切线相垂直的平面。对于具有 $\mathbf{r}_{,s}$ 和 $\mathbf{r}_{,ss}$ 不为零的空间曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 包含曲线上 P 点的切线和曲线上 P 点的邻近点 P' 的平面, 当 P' 点以 P 点为极限而与之相靠近的时候, 这一极限平面称为曲线上 P 点的密切平面。曲线上 P 点的主法线是 P 点的法平面与密切平面的相交线。单位主法线 $\mathbf{m}(s)$ 的定义是

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{Y}_{,ss} / |\mathbf{Y}_{,ss}|$$

显然, 由于 $\mathbf{Y}_{,s} \cdot \mathbf{Y}_{,s} = 1$, 因此 $\mathbf{Y}_{,ss}$ 与 $\mathbf{Y}_{,s}$ 相垂直。于是, 由 $\mathbf{t}(s)$ 和 $\mathbf{m}(s)$ 所

确定的平面是密切平面。单位副法线 $\mathbf{b}(s)$ 的定义是

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s) = \mathbf{Y}_{,s}(s) \times \mathbf{Y}_{,ss}(s) / |\mathbf{Y}_{,ss}(s)|$$

三个单位矢量 $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{m}(s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 互相垂直形成一个右手坐标系, 同时

$$\mathbf{t}(s) \times \mathbf{m}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 1$$

当 P 点沿曲线移动时, 切线的改变率称为曲线上 P 点的曲率 $c(s)$ 。

$$c(s) = |\mathbf{t}_{,s}(s)| = |\mathbf{Y}_{,ss}(s)|$$

曲线上 P 点的曲率 $c(s)$ 的倒数称为曲线在 P 点的曲率半径 R 。

$$1/R(s) = c(s) = |\mathbf{Y}_{,ss}(s) \cdot \mathbf{Y}_{,ss}(s)|^{1/2}$$

曲线上 P 点的密切平面上有一个唯一的半径为 $R(s)$, 与曲线相切且中心在主法线上的圆。这个圆称为密切圆或称为曲率圆。对于在曲面 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(u, v)$ 上一条非直线的曲线 C , $u = u(s)$, $v = v(s)$, 如果 ϕ 是曲线上 P 点主法线 \mathbf{m} 和曲面法线 \mathbf{n} 之间的夹角, 那么

$$\frac{d}{dt} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \cos \phi / R$$

它规定了曲线在 P 点的曲率半径 R 。当 $\phi = 0$ 或 π 时, $R = R_n$ 称为 P 点的法曲率半径。 P 点的法曲率 c_n 为 $c_n = 1/R_n$ 。不难证明

$$c_n = \frac{1}{R_n} = \pm \left[L_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_{uv} \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right) + L_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]$$

将式(2.12)的 $\mathbf{t}(s)$ 对 s 微分, 再应用式(2.12)的 $\mathbf{m}(s)$ 和式(2.13)的 $c(s)$ 可以得到

$$\mathbf{t}_{,s} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = c(s)\mathbf{m}(s)$$

类似于曲线的曲率, 当 P 点沿曲线移动时, 密切平面绕切线转动的弧长改变率也就是副法线的改变率, 称为曲线在 P 点的挠率 $\tau(s)$ 。

$$|\tau(s)| = \left| \frac{d}{ds} \mathbf{b}(s) \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \psi}{\Delta s} \right|$$

式中 $\Delta \psi$ 是 $\mathbf{b}(s + \Delta s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 之间的夹角。由于 $\mathbf{b}(s)$ 与垂直于 $\mathbf{t}(s)$ 和

$m(s)$ 所决定的密切面垂直,同时由于 $b(s)$ 为单位矢量,因此 $b_{,s}$ 在密切面内。另外,由于 $t \cdot t_{,s} = 0$, 所以 $b_{,s}$ 与 t 垂直。因此, $b_{,s}$ 必然与 $m(s)$ 平行。于是导致

$$\frac{db(s)}{ds} = \tau(s)m(s)$$

对 $m(s) = b(s) \times t(s)$ 进行微分,给出 $m_{,s} = b_{,s} \times t + b \times t_{,s}$ 。利用式(2.15)和式(2.19),于是有

$$m_{,s} = -c(s)t - \tau(s)b$$

式(2.15)、(2.19)和(2.20)这一组方程式称为空间曲线的 Frenet-Serret 公式。对于曲面上一条非直线的曲线,如果曲线上每一点的主法线与曲面上该点的法线重合,那么这条曲线称为曲面上的测地线^[21],因此在测地线上主法线 m 与曲面的法线 n 重合,而

$$b = t \times n = Y_{,s} \times n$$

于是 Frenet-Serret 公式中的式(2.20)成为

$$\frac{d}{ds}m(s) = \frac{d}{ds}n(s) = -c(s)t - \tau(s)b$$

上式与 b 的点积给出测地挠率(geodesic torsion) τ_g 为

$$\tau_g = |\tau(s)| = b \cdot \frac{dn}{ds}(s) = \left(\frac{dn}{ds}\right) \cdot (Y_{,s} \times n) \quad (5.65)$$

现在返回来看 TCLB 的自由能。前面章节中已经指出, TCLB 的自由能除去一个与宏观结构中分子的取向 θ_0 有关的常数因子外,只与在 TCLB 表面上取向矢 d 的投影有关,而 d 的投影场就是 $d_i Y_{,i} (i = u, v)$ 。现在看一看由变量 s 描述的在曲面 $Y(s) = Y[u(s), v(s)]$ 上的单一无限曲线族,同时把 ds 取作沿 $d_i Y_i$ 的方向。这样, du/ds 和 dv/ds 将与 d_u 和 d_v 成比例。设比例常数为 γ , 那么

$$\dot{Y} = Y_{,s} = Y_{,u} \frac{du}{ds} + Y_{,v} \frac{dv}{ds} = \gamma(d_u Y_{,u} + d_v Y_{,v})$$

由于 $Y_{,s}$ 是切向单位矢量,因此

$$Y_{,s} \cdot Y_{,s} = \gamma^{-2} g_{ij} d_i d_j = 1$$

根据式(5.2),于是

$$\begin{cases} \gamma = 1/\sin \theta_0 \\ du/ds = d_u/\sin \theta_0, \quad dv/ds = d_v/\sin \theta_0 \\ \dot{Y} = Y_{,s} = d_l Y_{,l}/\sin \theta_0 \quad (l = u, v) \end{cases} \quad (5.66a)$$

类似地,对于曲面上的单位法线矢量 \mathbf{n} 可以有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n}_{,s} &= d_i \mathbf{n}_{,i}/\sin \theta_0 = -L_{ij} g^{jk} Y_{,k} d_i/\sin \theta_0 \\ &\quad (i, j, k = u, v) \end{aligned} \quad (5.66b)$$

式中最后一步来源于 Weingarten 公式(2.58)。把式(5.66)代入式(5.65)就得到

$$\begin{aligned} \tau_g &= -L_{ij} g^{jk} d_i (Y_{,k} \times Y_{,s} \cdot \mathbf{n})/\sin \theta_0 \\ &= -L_{ij} g^{jk} d_i d_l (Y_{,k} \times Y_{,l} \cdot \mathbf{n})/\sin \theta_0 \end{aligned}$$

根据式(2.29) \mathbf{n} 的定义,将上式展开并把 g^{jk} 用式(2.24)变换成 g_{jk} ,就得到

$$\begin{aligned} \tau_g &= [(g_{uu} L_{uv} - g_{uv} L_{uu}) d_u^2 + (g_{uu} L_{vv} + g_{vv} L_{uv} - g_{uv} L_{uu} - g_{uv} L_{vv}) d_u d_v \\ &\quad + (g_{uv} L_{vv} - g_{vv} L_{uv}) d_v^2]/(\sqrt{g} \sin^2 \theta_0) \\ &= [(g_{uu} d_u + g_{uv} d_v)(L_{uu} d_u + L_{vv} d_v) \\ &\quad - (g_{uv} d_u + g_{vv} d_v)(L_{uu} d_u + L_{vv} d_v)]/(\sqrt{g} \sin^2 \theta_0) \\ &= e^{3nm} (g_{mn} d_u + g_{mv} d_v)(L_{nu} d_u + L_{nv} d_v)/(\sqrt{g} \sin^2 \theta_0) \\ &= e^{3nm} g_{ln} L_{ln} d_k d_l /(\sqrt{g} \sin^2 \theta_0) \quad (k, l, m, n = u, v) \end{aligned} \quad (5.67)$$

这实际上就是式(5.14)的 g_{TCLB} 展开式中的一项。

式(5.14)中的另一项 $e^{3nm} g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l)$, 根据式(2.40) Γ_{ml}^k 的定义,可以有

$$e^{3nm} g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) = e^{3nm} \left[(g_{kn} d_k)_{,m} + \frac{1}{2} (g_{mn,k} - g_{nk,m} - g_{mk,n}) d_k \right]$$

不过,由于 $e^{3mn} g_{mm,k} = 0$ 和 $e^{3mn} (g_{nk,m} + g_{mk,n}) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \int e^{3mn} g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) dudv &= \int e^{3mn} (g_{kn} d_k)_{,m} dudv \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial u} (g_{kv} d_k) - \frac{\partial}{\partial v} (g_{ku} d_u) \right] dudv \end{aligned}$$

应用斯托克斯定理(有时也称格林定理)^[22]可以把积分变为线积分:

$$\begin{aligned} \int e^{3mn} g_{kn} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^k d_l) dudv &= \oint g_{ik} d_k di = \oint (\mathbf{Y}_{,i} \cdot \mathbf{Y}_{,k}) d_k di = \oint \mathbf{d} \cdot \mathbf{ds} \\ &(i, j, k, l, m, n = u, v) \end{aligned} \quad (5.68)$$

式中 $\mathbf{ds} = \mathbf{Y}_{,i} di$ 是倾斜手征性类脂双层 TCLB 边线的线元。在应用式(5.67)和式(5.68)后,式(5.13)的 TCLB 自由能普适方程式成为

$$F = -k_2 t \cos^2 \theta_0 \oint \mathbf{d} \cdot \mathbf{ds} - 2k_2 t \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \int \tau_g dA \quad (5.69)$$

式中 dA 是 TCLB 的面积元。对于流体膜, $\theta_0 = 0$, 同时 \mathbf{d} 与 \mathbf{ds} 垂直, 因此式(5.69)给出 $F = 0$ 。这个结果说明, 只有取向矢处于倾斜状态时才能显现出手征性(螺旋性)曲率弹性。

测地挠率 τ_g 可以用下述办法来表示。由于式(2.29)的 \mathbf{n} 与 $\mathbf{Y}_{,j}$ 垂直, 因此可以有 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,ij} = -\mathbf{n}_{,i} \cdot \mathbf{Y}_{,j} = -\mathbf{n}_{,j} \cdot \mathbf{Y}_{,i}$ 。于是, 式(2.35)指出, $L_{ij} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,ij} = -\mathbf{n}_{,i} \cdot \mathbf{Y}_{,j}$ 。因此, 式(2.39)的第二基本形式 II 可以写成

$$\text{II} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Y}_{,ij} = -\mathbf{n}_{,i} \cdot \mathbf{Y}_{,j} = L_{uu} du^2 + 2L_{uv} dudv + L_{vv} dv^2 \quad (5.70)$$

的形式。按照式(2.15), 曲线的曲率 $c(s)$ 满足关系式

$$c(s) \mathbf{m}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{Y}_{,s}(s)$$

如果曲面的法线 \mathbf{n} 和曲线在 P 点的主法线 $\mathbf{m}(s)$ 之间的夹角为 θ , 那么

$$c_n(s) = c(s) \cos \theta = c(s) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{m}(s) = \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{Y}_{,s}(s)$$

而

$$\mathbf{Y}_{,s} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{Y}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\mathbf{Y}_{,u} \frac{du}{ds} + \mathbf{Y}_{,v} \frac{dv}{ds} \right)$$

如果 ψ 是 $\frac{du}{dv}$ 方向与 u 曲线之间的夹角, 那么式(2.82)指出,

$$\cos \psi = \sqrt{g_{uu}} \frac{du}{ds}, \quad \sin \psi = \sqrt{g_{vv}} \frac{dv}{ds} \quad (5.71)$$

于是式(5.67)给出

$$\tau_g = (c_1 - c_2) \cos \psi \sin \psi \quad (5.72)$$

而 ψ 就是局域倾斜方向和一个主方向之间的夹角。

§ 5.8 其余弹性常数的影响

上面的讨论只涉及到手征曲率模量 k_2 项。除去与 k_2 有关的自由能密度 g_{Ch} 以外,螺状液晶的 Frank 自由能密度还包括满足 $D_{\infty h}$ 对称性的曲率能量密度 g_N 项^[23]:

$$\begin{aligned} g_N &= \frac{1}{2} [k_{11} (\nabla \cdot \mathbf{d})^2 + k_{22} (\mathbf{d} \cdot \nabla \times \mathbf{d})^2 + k_{33} (\mathbf{d} \times \nabla \times \mathbf{d})^2] \\ &= \frac{1}{2} [k_{11} (\nabla \cdot \mathbf{d})^2 + k_{22} (\mathbf{d} \cdot \nabla \times \mathbf{d})^2 + k_{33} (\mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{d})^2] \end{aligned} \quad (5.73)$$

式中 k_{11} , k_{22} 和 k_{33} 分别为液晶的展曲、扭曲和弯曲弹性常数。在单一弹性常数近似下,式(5.73)简化为^[23]

$$g_N = \frac{1}{2} k_N [(\nabla \cdot \mathbf{d})^2 + (\nabla \times \mathbf{d})^2], \quad k_N = k_{11} = k_{22} = k_{33} \quad (5.74)$$

式中第一项为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{d} &= \left(g^{ij} Y_{,i} \frac{\partial}{\partial j} + n \frac{\partial}{\partial n} \right) \cdot (d_l Y_{,l} + n \cos \theta_0) \\ &= d_{i,i} + \Gamma_{ij}^i d_i - 2H \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

上式的导出应用了式(2.29)、(2.57)、(2.58)、(2.76)和(5.7)各式。式(5.11)给出了 $\nabla \times \mathbf{d}$ 的表达式。不难得出

$$\mathbf{d} \cdot \nabla \times \mathbf{d} = g^{-1/2} e^{3\sigma} [g_{lm} (d_{k,m} + \Gamma_{ml}^* d_l) \cos \theta_0 + 2g_{lm} L_{ln} d_k d_l] \quad (5.76)$$

由于

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \nabla &= (d_i Y_{,i} + \mathbf{n} \cos \theta_0) \cdot \left[g^{ij} Y_{,i} \frac{\partial}{\partial j} - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right] \\ &= d_j \frac{\partial}{\partial j} + \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial n} \end{aligned}$$

而 d_i 又不是 \mathbf{n} 的函数, 因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{d} &= \left(d_j \frac{\partial}{\partial j} + \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial n} \right) (d_i Y_{,i} + \mathbf{n} \cos \theta_0) \\ &= (d_j d_{i,j} + d_j d_k \Gamma_{kj}^i - 2d_k L_{jk} g^{ij} \cos \theta_0) Y_{,i} + d_i d_j L_{ij} \mathbf{n} \quad (5.77) \end{aligned}$$

应用式(5.11)、(5.75)、(5.76)和(5.77)各式就不难得出在给定状态下自由能 g_N 的表示式。

在螺旋绕带情形, 各个基本量由式(5.28)给出, 同时 d_i 和 d_k 由式(5.34)给出。很容易证明

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \frac{\cos \theta_0}{R}, \quad \nabla \times \mathbf{d} = 2d_i Y_{,k}$$

因此

$$g_N = \frac{k_N}{2R^2} (1 + \sin^2 \theta_0)$$

而

$$F_N = t \cos \theta_0 \int g_N dA = \frac{k_N}{2R^2} tA \cos \theta_0 (1 + \sin^2 \theta_0) \quad (5.78)$$

按照式(5.38), $A = 2n^2 \pi aR$ 。因此, 螺旋绕带的总自由能密度成为

$$F_{WT} = F_N + F_W = tA \left[\frac{k_N}{2R^2} (1 + \sin^2 \theta_0) - \frac{|k_2|}{R} \sin^{-2} \theta_0 \right] \cos \theta_0 \quad (5.79)$$

这个关系式说明, k_N 项和 $|k_2|$ 项互为竞争项。对于固定面积的螺旋绕带, F_{WT} 的最小值给出绕带管的半径 R 由下式规定:

$$R = \frac{k_N}{|k_2|} \frac{1 + \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} = \frac{p_{Ch}}{\pi} \frac{1 + \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \quad (5.80)$$

式中 p_{Ch} 是螺旋的螺距, 而 $k_w / |k_2| = p_{Ch} / \pi$ [19]。由于指向矢 \mathbf{d} 的梯度

是 45° , 因此螺旋绕带的螺距 p 为

$$p = 2\pi |b| = 2\pi R = 2p_{\text{Ch}} \frac{1 + \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \quad (5.81)$$

这个关系说明在形成螺旋结构中手征性 p_{Ch} 和倾斜角 θ_0 的作用。在 $\theta_0 = 0$ 或 $p_{\text{Ch}} \rightarrow 0$ 的极限情形条件下, R 和 p 都趋于 ∞ 。这意味着不能形成螺旋状结构 (helical structure) 和管状结构 (tubular structure)。一般螺状液晶的螺距在 $0.1 \sim 100 \mu\text{m}$ 的数量级。据此, 式 (5.80) 和式 (5.81) 给出所形成的管的半径和螺旋的螺距都是在 $0.1 \sim 100 \mu\text{m}$ 的数量级。这同实验测到的结果^[1-7]一致。

螺旋式扭曲带的各个基本量已由式 (5.46) 给出。很容易得出在第一类情形中有

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{d} = \pm \left[\frac{\rho \sin \theta_0}{\rho^2 + b^2} \mathbf{n} + \frac{2b \sin \theta_0}{(\rho^2 + b^2)^{3/2}} \mathbf{Y}_\rho \right] \quad (5.82a)$$

而在第二类情形中有

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \pm \frac{\rho}{\rho^2 + b^2} \sin \theta_0, \quad \nabla \times \mathbf{d} = \mp \frac{2b \sin \theta_0}{\rho^2 + b^2} \mathbf{Y}_\rho \quad (5.82b)$$

两类情形都导致

$$g_{\text{N}} = \frac{1}{2} k_{\text{N}} \left[\frac{1}{\rho^2 + b^2} + \frac{3b^2}{(\rho^2 + b^2)^2} \right] \sin^2 \theta_0 \quad (5.83)$$

和

$$\begin{aligned} F_{\text{N}} &= k_{\text{N}} 2n\pi t \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 3|b| \tan^{-1} x] \\ &= k_{\text{N}} t \left(\frac{A}{b^2} \right) \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 \frac{[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 3|b| \tan^{-1} x]}{\{x\sqrt{1+x^2} + \ln[x + \sqrt{1+x^2}]\}} \end{aligned} \quad (5.84)$$

式中 A 为式 (5.54) 给出的扭曲带的面积, 而 $x = R/|b|$ 。扭曲带的总自由能密度 $F_{\text{TT}} = F_{\text{N}} + F_{\text{T}}$, 是 x 的一个非常复杂的函数, 因此难以进行更多的计算和讨论。

对于球形膜泡, 根据式 (5.60) 的各个基本量, 很容易得出, 在第一组

情形中 $d_\theta = 0$, 而 $d_\phi = \sin \theta_0 / (R \sin \theta)$ 。因此,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \frac{2 \cos \theta_0}{R} \\ (\nabla \times \mathbf{d})^2 = \frac{\sin^2 \theta_0 (1 + 3 \sin^2 \theta)}{R^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (5.85)$$

于是有

$$g_N^{(1)} = k_N (4 + \sin^2 \theta_0 \cot^2 \theta) / (2R^2) \quad (5.86)$$

因此可以得出

$$\begin{aligned} F_N^{(1)} &= t \cos \theta_0 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1/2) k_N (4 \sin \theta + \sin^2 \theta_0 \cos \theta \cot \theta) d\theta d\phi \\ &= \pi k_N t \cos \theta_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 \sin \theta + \sin^2 \theta_0 \cos \theta \cot \theta) d\theta \end{aligned}$$

由于 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta \cot \theta$ 都是 θ 的奇函数, 因此

$$F_N^{(1)} = 0 \quad (5.87)$$

对于第二组情形, $d_\theta = \sin \theta_0 / R$, $d_\phi = 0$, 有

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = (\sin \theta_0 \cos \theta + 2 \cos \theta_0 \sin \theta) / (R \sin \theta) \\ (\nabla \times \mathbf{d})^2 = 4 \sin^2 \theta_0 / R^2 \end{cases} \quad (5.88)$$

于是,

$$g_N^{(2)} = k_N (\sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \theta \cos \theta) / (2R^2 \sin^2 \theta) \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} F_N^{(2)} &= t \cos \theta_0 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1/2) k_N (4 \sin \theta + \sin^2 \theta_0 \cos \theta \cot \theta + 4 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \theta) d\theta d\phi \\ &= 8\pi k_N t \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 \end{aligned} \quad (5.90)$$

因此有两种不同的情形:

$$(1) \quad F_{ST}^{\text{纬}} = 0 \quad (5.91a)$$

和

$$(2) \quad F_{ST}^{\text{纬}} = 8\pi k_N t \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 \quad (5.91b)$$

显然, 纬向情形是有利状态。

§ 5.9 高螺距与低螺距结构的倾斜类脂双层

自然界中经常看到有管状结构和螺旋状结构的材料^[24]。例如,在近来的一些实验中^[1-6],许多作者找到了各种螺旋结构的手征性类脂双层(CLB)。在一些理论处理中,都是采用与实验相一致的、把分子的聚集作用对比于螺状液晶(chiral liquid crystal, ChLC)的螺旋性^[12-14, 25]。按照早期的理论,螺旋的螺距角[图 5-6(a)中的 ϕ_0 角]被预测为 45° 。这一点同早期实验测得的数值^[1-6]符合得很好。

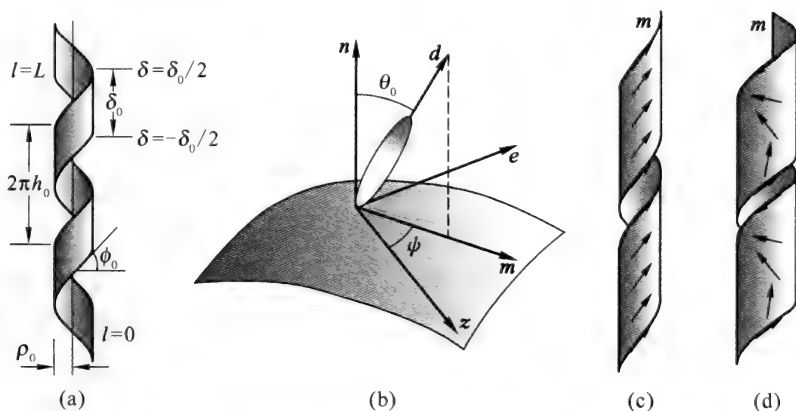


图 5-6 螺旋带结构示意图

(a) 螺旋带的几何参量; (b) 倾斜手征性类脂双层 TCLB 的局域坐标系; (c) 分子“平行聚集”螺旋带(P 螺旋); (d) 分子“反平行聚集”螺旋带(A 螺旋)。

虽然实验证实了^[26],而且理论上也扩展了^[27, 28]螺状液晶 ChLC 中分子聚集相互作用的观点,最近的挑战是如何去理解新发现的、在天然的和合成的胆汁中的胆甾醇结晶^[29, 30]的问题。先配备好克分子比为 97.5 : 0.8 : 1.7 的胆汁牛磺胆酸钠、卵磷脂和胆甾醇,同时包含有分子胶束和膜泡的分子胶束形合成胆汁。在稀释后 2 到 4 小时以内可以观察到有丝状的结构。过了几天以后,这些丝状结构会弯曲而形成具有高(长)螺距(pitch)的螺旋{大约 54° ,见参考文献[30]中的图 2(a)}。这些螺旋

保持螺距角不变地横向生长而形成管状{参考文献[30]中图 2(b)}。在几周以内,长螺距的螺旋和螺管将消失而出现新的低(短)螺距角($\approx 11^\circ$)的螺旋,并成长形成新的螺管{参考文献[30]中的图 2(c)和 2(d)}。最终就剩下片状的螺状分子胶束晶体{参考文献[30]中的图 2(e)和 2(f)}。重要发现之一是存在有两个不同螺距角的螺旋带结构(helical ribbon structure):一个高螺距角(54°)的螺旋和一个低螺距角(11°)的螺旋。为了解释这种现象,Chung 等人^[30]应用以前的一个适用于各向异性倾斜手征性两亲分子双层理论^[31]导出了单位面积自由能表达式:

$$g = (1/2\rho_0^2)[k^{cc}\cos^4\phi_0 + k^{pp}\sin^4\phi_0 + (k^{cp}/2)\sin^2 2\phi_0] - (k^*/2\rho_0)\sin 2\phi_0 \quad (5.92)$$

式中 ρ_0 和 ϕ_0 分别为螺旋带的半径和螺距角(参考图 5-6); k^{cc} , k^{pp} , k^{cp} 和 k^* 为各个弹性常数。对于处在平衡状态的螺旋,他们得出了 $\tan \phi_0 = (k^{cc}/k^{pp})^{1/4}$ 的结论。

对应于 $\phi_0 = 54^\circ$ 和 11° 的情形,相应的 k^{cc}/k^{pp} 值分别为 3.4 和 0.0015。不过,最近 Selinger 等人^[32]认为 3.4 这个比值是合理的,而 0.0015 这个比值却令人感到意外。因此,Selinger 等人在他们的文章中假设了螺旋带上分子倾斜的方向(图 5-6 中的 m)在跨越螺旋带时发生线性变化^[32]。虽则他们把测到的 11° 低螺距角归诸于螺旋方向和倾斜方向之间的差值,但是对这种线性说法目前还缺少证据。在理论上目前对存在两种类型螺旋也还没有结论性的解释。因此,整个问题可以归结为存在两种类型螺旋的本质是什么?能不能从能量观点对上述系列的变迁以及每一种结构进行理论上的讨论?

在最近的一篇文章中,Komura 和 Ou-Yang^[33]在推广以前一个理论^[13, 14]的基础上把螺状类脂双层螺旋带处理为螺状液晶来讨论手征类脂双层螺旋带上的分子的聚集问题。在参考文献[13]和[14]中只考虑了手征性自由能 $g_{ch} = -k_2 \mathbf{d} \cdot \nabla \times \mathbf{d}$ 项,式中 \mathbf{d} 是平行于分子长轴[图 5-6 (b)]的单位矢量而 k_2 标志螺状液晶的手征性。应用这一简化的自由能预言了倾斜角为 45° 。本节将按照参考文献[33]应用单位面积螺状液晶的完整自由能密度表示式^[19]

$$g_{LC} = (k_{11}/2)(\nabla \cdot \mathbf{d})^2 + (k_{22}/2)(\mathbf{d} \cdot \nabla \times \mathbf{d} - k_2/k_{22})^2 + (k_{33}/2)(\mathbf{d} \times \nabla \times \mathbf{d})^2 \quad (5.93)$$

来进行计算,式中 k_{ii} ($i = 1, 2, 3$) 分别为展曲、扭曲和弯曲弹性常数,而 ∇ 为三维梯度算符。把式(5.93)看做单位面积的能量时, k_{ii} 和 k_2 可以看做是相应的螺状液晶弹性常数乘以手征类脂双层的厚度。因此,手征类脂双层的总自由能为 $F = \oint g_{LB} dA$, dA 为手征类脂双层的表面面积元。这采用了 Selinger 等人提出的分子倾斜方向 \mathbf{m} 在双层中变化的意见^[25, 32],不过保留倾斜方向是沿螺旋带棱边的螺旋方向这一边界条件。后面这个边界条件在以前的理论中^[12, 27, 30]也曾讨论过,并且被 X 射线衍射实验所证实^[34]。在这里特别要指出的是,代替简单线性倾斜场的假设^[32],直接从解 g_{LC} 的欧拉-拉格朗日方程式可以正确地得到这一结果。进行了这些改善之后,就可以揭示,对于高螺距的螺旋,沿双层的两个棱边分子的倾斜将是互相平行的[图 5-6(c)];而对于低螺距的螺旋,它们的倾斜将是互相反平行的[图 5-6(d)]。在冷却或是在稀释过程中^[26],通过从流体手征性类脂双层(链式熔化的 L_a)相到倾斜手征类脂双层(链式冻结的 L_p^*)相的相变过程形成了螺旋结构。从观测到的由于两类螺旋结构引起的从丝状结构到螺状分子胶束(chiral micelle, ChM)结构这一序列可以证明,这是一系列自由能逐渐减少的一些亚稳态中间结构,可以把它看做是分子倾斜的一种类似淬灭的冷却过程。

从数学上看,绕在半径为 ρ_0 的圆柱体上的螺旋带曲面可以用含两个变量的矢量函数

$$\mathbf{Y}(l, \delta) = (\rho_0 \cos \omega_0 l, \rho_0 \sin \omega_0 l, h_0 \omega_0 l + \delta)$$

来表示,式中 $\omega_0 = (\rho_0^2 + h_0^2)^{-1/2}$ [参考图 5-6(a)]。俯仰角和螺旋的螺距分别为 $\phi_0 = \tan^{-1}(h_0/\rho_0)$ 和 $2\pi|h_0|$ 。 l 和 δ 分别满足 $0 \leq l \leq L$ 和 $-\delta_0/2 \leq \delta \leq \delta_0/2$ 这两个关系,其中 δ_0 是沿圆柱中心轴(z 轴)的带宽,而 L 是带棱边的弧长。令指向矢的倾斜满足关系式 $\mathbf{d} = \mathbf{n} \cos \theta_0 + \mathbf{m} \sin \theta_0$, 其中 \mathbf{n} 为螺旋带表面的单位法线,而 \mathbf{m} 为平行于 \mathbf{d} 、在螺旋带表面上投影方向的单位矢量,同时倾斜角 θ_0 是 \mathbf{n} 和 \mathbf{d} 之间的夹角[参考图 5-6(b)]^[31]。 θ_0 标志着从 $\theta_0 = 0$ 的流体相(L_a 相)到常数 $\theta_0 > 0$ 的倾斜手征性类脂双

层 L_β^* 相之间的过渡。一般地, \mathbf{m} 可以用一个单独的角度 $\psi(l, \delta)$ 来表示: $\mathbf{m} = \mathbf{z} \cos \psi(l, \delta) + \mathbf{e} \sin \psi(l, \delta)$, \mathbf{z} 是沿 z 轴方向的单位矢量, 而 \mathbf{e} 是沿圆柱上圆周的单位矢量。

为简单而且不失一般性起见, 可以考虑 ψ 仅仅是 δ 的函数的情形, 并且引用单一常数近似 $k_{11} = k_{22} = k_{33} = k_0$ 。于是, 式(5.93)成为

$$g_{LC} = [k/(2\rho_0^2)][\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0(4\sin^2\psi + \psi_\delta^2/\omega_0^2)] \\ - \sin 2\theta_0(h_0 \cos \psi + \rho_0 \sin \psi)\psi_\delta] - [k_2/(2\rho_0)][\sin 2\theta_0(h_0 \sin \psi \\ - \rho_0 \cos \psi)\psi_\delta + 2\sin^2\theta_0 \sin 2\psi] + k\mu^2/2 \quad (5.94)$$

式中 $\psi_\delta = d\psi/d\delta$, $\mu = k_2/k$ 是螺旋液晶螺距的倒数^[13, 14, 19]。对于 ψ 为常数的情形, 可以证明, 当 $k^{pp} = k \cos^2\theta_0$, $k^{cc} = k(\cos^2\theta_0 + 4\sin^2\theta_0)$, $k^{cp} = k \cos^2\theta_0$, 同时 $k^* = 2k_2 \sin^2\theta_0$ 时, 除去一个常数项外, 式(5.94)与式(5.92)相同。进一步的探索是看看 ψ 不是一个常数的情形。这时从式(5.94)导出的欧拉-拉格朗日方程式是

$$\psi_{,\delta} = 2\omega_0^2 \sin(2\psi - \alpha_0) / \cos \alpha_0 \quad (5.95)$$

式中 $\psi_{,\delta} = d^2\psi/d\delta^2$, 而 $\alpha_0 = \arctan(\mu\rho_0)$ 。式(5.95)的第一次积分的普遍形式是

$$\psi_{,\delta} = 2\omega_0 [\cosh^2 C - \cos^2(\psi - \alpha_0/2)]^{1/2} \cos^{-1/2} \alpha_0 \quad (5.96)$$

式中 C 是积分常数。

显然, 式(5.95)有一个常数解 $\psi = \psi_0 = \alpha_0/2$ 。为了满足分子在螺旋带两条棱边上的倾斜互相平行, 可以令 $\phi_0 = \pi/2 - \psi_0 = \pi/2 - \alpha_0/2$ 。图 5-6(c)中所显示的这种组态可以称之为“平行聚集”(parallel packing, 也称 P 螺旋)。这里需要检查一下这样的螺旋是否处于机械平衡的状态。令螺旋的曲率 κ_0 为 $\kappa_0 = \rho_0 \omega_0^2$, 它的挠率为 $\tau_0 = h_0 \omega_0^2$, 于是式(5.94)给出用 κ_0 和 τ_0 表示的 P 螺旋的弹性能量密度为

$$g_P = (k/2)[4\sin^2\theta_0(\kappa_0^2 + \tau_0^2) + \cos^2\theta_0(\kappa_0 + \tau_0^2/\kappa_0)^2] - 2k_2\tau_0 \sin^2\theta_0 + k\mu^2/2$$

把这个弹性能表示式对 κ_0 和 τ_0 极小化, 也就是令 $\partial g_P / \partial \kappa_0 = \partial g_P / \partial \tau_0 = 0$, 就得到螺旋带的最优几何形状由

$$\tan \phi_0 = (1 + \tan^2 \theta_0)^{1/4} \quad (5.97)$$

$$\mu\rho_0 = -\tan 2\phi_0 = \frac{2(1 + 4\tan^2 \theta_0)^{1/4}}{(1 + 4\tan^2 \theta_0)^{1/2} - 1} \quad (5.98)$$

决定;同时,相对应的单位面积的能量为 $g_P = k\mu^2/2$ 。这些结果显示出 P 螺旋的一些重要特性。首先,注意到式(5.98)同所假设的边界条件 $\phi_0 = \pi/2 - \alpha_0/2$ 和 $\alpha_0 = \arctan(\mu\rho_0)$ 完全相同,因此这里的计算是前后一致的。这就证实了螺旋是处于机械平衡状态,因为最小化条件要求这个状态是处于无外力和无外力矩的状态。其次,式(5.97)的结果实质上相当于前面提到的 Chung 等人的结果^[30](特别注意 k^{cc} , k^{pp} 和 k 之间的关系),并且预言了一个 $\phi_0 > \pi/4$ 的高螺距角。在不使用单一常数近似的极小化计算下,可以得到

$$\cos^2 2\phi_0 + \left[2 + \frac{k_{11}}{k_{33}} \cot^2 \theta_0 \right] \cos 2\phi_0 + 1 = 0$$

的结果。由于这个方程式有一个 $\cos 2\phi_0$ 为负值的解,因此同前面一样也可以证明 $\phi_0 > \pi/4$, 并且当 $k_{11} = k_{33}$ 时它还原成式(5.97)。第三点,由于半径 ρ_0 与手征弹性常数 k_2 成反比,因此可以看出柱面曲率来源于分子的手征性。实际上,式(5.98)显示出螺距 $1/\mu$ 应该与半径成比例。这一点正是实验中所观测到的显著特点(可以参考文献[30]中的图 4-6)。

根据实验结果,合成胆汁在结晶过程的初始阶段出现一条直丝,它可以认证为 $\rho = 0$ ^[29]。这一事实表明,倾斜手征类脂双层 TCLB 在初始阶段被淬灭成 $\phi_0 = \pi/2$ 的结构[注意式(5.98)和 $\phi_0 > \pi/4$]。从式(5.97)可以预计,倾斜角是在最大值 $\theta_0 = \pi/2$ 处。经过淬灭过程, θ_0 值将从 $\pi/2$ 降低到一个稳定的数值,同时直丝将在 ϕ_0 减小而 ρ_0 增大的过程中发生弯曲(bend)和扭曲(twist)^[29, 30]。这是在从直丝状态到高螺距螺旋状态转变过程中可以预期会出现的机制。

现在再看一看倾斜方向在横过螺旋带的双层中发生改变的情形。由于倾斜方向同螺旋带棱边的螺旋方向相重合,因此对于非均匀解的边界条件可以是 $\psi(-\delta_0/2) = \pi/2 - \phi_0$ 和 $\psi(\delta_0/2) = \psi(-\delta_0/2) + \pi = 3\pi/2 - \phi_0$ 。处于这种边界条件的分子组态称为“反平行聚集”(antiparallel packing, 也称 A 螺旋),如图 5-6(d)所示。下面将证明,从反平行聚集分子产

生的螺旋结构确实是处于低螺旋角。式(5.96)中的积分常数 C 现在由 $\delta_0 = \cos^{1/2}(\alpha_0 q)K(q)/\omega_0$ 和 $q = 1/\cosh C$ 这个边界条件来决定,而单位面积的能量则可以从式(5.94)得出

$$g_A = (k\mu^2/2) \{ 1 + (1 + \sin^2 \theta_0)x^2 + 2\sin^2 \theta_0 x \sqrt{1+x^2}(1-2/q^2) + 8\sin^2 \theta_0 x \sqrt{1+x^2}E(q)/[q^2K(q)] - 2\sin 2\theta_0 \sqrt{x(1+x^2)}^{1/4}/[qK(q)] \} \quad (5.99)$$

式中 $x = \cot \alpha_0$, 而 $K(q)$ 和 $E(q)$ 是分别由 $K(q) = \int_0^{\pi/2} d\varphi / (1 - q^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ 和 $E(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi$ 给出的第一和第二完全椭圆积分。为了保证螺旋处于力学平衡状态,必须把 g_A 极小化。由于 q 是 δ_0 , ϕ_0 和 α_0 的函数,因此把 g_A 对这些量同时极小化也就导致了 $\partial g_A / \partial q = 0$ 。利用 $dK(q)/dq = \{E(q)/[q(1-q^2)]\} - K(q)/q$ 和 $dE(q)/dq = [E(q) - K(q)]/q$ 这两个关系式^[35], 可以得到 $\sqrt{\cos \alpha_0} / \sin \alpha_0 = qcot \theta_0 / [2E(q)]$ 这个 α_0 与 q 之间的关系式。把它代入式(5.99)就得到

$$g_A = (k\mu^2/2) [1 + (1 + \sin^2 \theta_0)(\sqrt{1+4y^2} - 1)/2 + 2y^2 \sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0 / E^2(q)] \quad (5.100)$$

式中 $y = \sqrt{\cos \alpha_0} / \sin \alpha_0$, 同时 $\alpha_0 = \arctan(\mu\phi_0)$ 。

当 $g_A = g_P$ 时, θ_0 可以有一个临界值 θ_0^* 。图 5-7(a) 绘出了在不同 $t = \tan \theta_0$ 值下 $g_A - g_P$ 作为 q 的函数的图形。图中指出, 在 $\theta_0^* > \theta_0 > 0$ 的区域内 q 有一个临界值 q^* ; 当 $q = q^*$ 时, $g_A = g_P$ 。在 $\pi/2 > \theta_0 > \theta_0^*$ 区域内, g_A 总是小于 g_P , 因而存在从 P 螺旋(P helix)到 A 螺旋(A helix)的转变。图 5-7(b) 绘出了在 $\theta_0^* > \theta_0 > 0$ 区域内 q^* 与 $t = \tan \theta_0$ 的关系, 其中 θ_0^* 由 $q = 1$ 时 $g_P = g_A$ 决定, 也就是 $\tan \theta_0^* \approx 0.654$ 。当螺旋带闭合形成管状时, $\delta_0 = 2\pi h_0 = (2\pi/\mu)\tan \alpha_0 \tan \phi_0$ 。应用这个关系可以得出螺旋的俯仰角 ϕ_0 满足下列关系式:

$$\sin \phi_0 = [K(q)/(2\pi)] \{ [q^4 + 4E^4(q)\tan^4 \theta_0]^{1/2} - 2E^2(q)\tan^2 \theta_0 \}^{1/2} \quad (5.101)$$

在图 5-7(b)中还绘出了当 $q = q^*$ 时 $\sin \phi_0$ 与 $t = \tan \theta_0$ 的关系图。图中显示出,除去在奇异点 $\theta_0 = \theta_0^*$ 外,一般 $\phi_0 < 30^\circ$ 。这一点表明,反平行聚集存在于低俯仰角位置。这是一个重要结果。

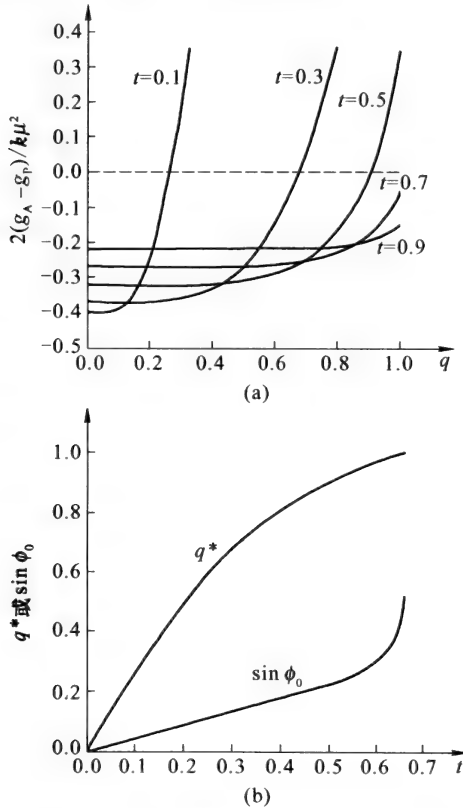


图 5-7 螺旋带中的几组关系

(a) 不同 $t = \tan \theta_0$ 值条件下 $2(g_A - g_P)/k\mu^2$ 与 q 关系图; (b) 在 $\theta_0^* > \theta_0 > 0$ ($\tan \theta_0^* \approx 0.654$) 区内 q^* 和 $\sin \phi_0$ 分别与 $t = \tan \theta_0$ 的关系图。

另外,图 5-7(a)中 $q = 0$ 是各个 g_A 的最小值的位置,因此它是唯一的稳定态。 $q = 0$ 的状态导致 $\alpha_0 = \pi/2$, 由于 $\alpha_0 = \arctan(\mu\rho_0)$, 因此它对应于 $\rho_0 \rightarrow \infty$ 。这个结果证实了在天然胆汁和在合成胆汁中观测到的结果。在结晶过程的最后阶段,各条管子的尾端分裂形成板状的螺旋分子胶束[参考文献[32]的图 2]。换句话说,P 螺旋和 A 螺旋虽然都是欧拉-拉格朗日方程式(5.95)的静态解,实际上它们都是亚稳的中间态。

同以前的理论^[30, 32]相比较, 这里的一个结论是, 图 5-7(a) 预示从低螺距螺旋(A 螺旋)到螺状分子胶束的转变可以是连续的, 而从高螺距螺旋(P 螺旋)到螺状分子胶束的转变是不连续的这一重要特点。所有 $g_A(q)$ 曲线都是连续的, 并且在 $q = 0$ 处都有最小值。这个特征表明, 具有低螺距角的螺旋管可以连续地转变成为螺状分子胶束, 如参考文献 [30] 中图 2(f) 所示。对于高螺距螺旋, 在转变成螺状分子胶束时, 需要经过溶解过程才能发生转变^[30]。除去 $\theta_0 = \pi/2$ 的情形之外, 螺状分子胶束 ($q = 0$) 的能量是 $g_{\text{ChM}} = (k\mu^2/2)[1 - (2/\pi)^2 \cos^2 \theta_0]$, 因此 $g_P = k\mu^2/2$ 总是比 g_{ChM} 要大。这一点说明了为什么 TCLB 初始阶段的螺旋结构要淬灭到 $\theta_0 = \pi/2$ 。参考文献 [30] 中的实验观测结果很好地证实了这些预言。

上面这些结果提供了确定最佳高螺距角的途径。从高螺距螺旋到螺状分子胶束的转变过程中, 为了能满足图 5-7(a) 中从低螺距螺旋那一支开始的 $g_P = g_A$ 这个条件, θ 必须降低到 θ_i^* 。因此, 从式 (5.97) 可以得到高螺距角为

$$\phi_0 = \arctan \left\{ \left[\frac{8}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{5}{32} \right) + \frac{1}{3} \right]^{1/4} \right\} \approx 52.1^\circ \quad (5.102)$$

这个结果与实验观测到的数值 $\phi_0 = 53.7^\circ \pm 0.8^\circ$ ^[30] 符合得非常好。

参考文献

- [1] Nakashima N, Asakuma S, Kim J M, *et al.* *Chem Lett*, 1984, **1984**:1709
- [2] Yamada K, Ihara H, Ide T, *et al.* *Chem Lett*, 1984, **1984**:1713
- [3] Nakashima N, Asakuma S, Kunitake T. *J Am Chem Soc*, 1985, **107**:509
- [4] Yager P, Schoen P, *Mol Cryst Liq Cryst*, 1984, **106**:371
- [5] Yager P, Schoen P, Davies C, *et al.* *Biophys J*, 1985, **48**:899
- [6] Fuhrhop J H, Schneider R, Boekema E J, *et al.* *J Am Chem Soc*, 1988, **110**:
2861
- [7] Survuss R M. *Chem Phys Lipids*, 1988, **46**:37
- [8] Schur J M, *et al.* *Thin Solid Films*, 1987, **152**:181

- [9] Schur J M, *et al.* (未发表)
- [10] Helfrich W. *J Chem Phys*, 1886, **85**:1085
- [11] de Gennes P G. *CR Acad Sci Paris*, 1987, **304**:259
- [12] Helfrich W, Prost J. *Phys Rev*, 1988, **A38**:3065
- [13] Ou-Yang Z C, Liu J X. *Phys Rev Lett*, 1990, **65**:1679
- [14] Ou-Yang Z C, Liu J X. *Phys Rev*, 1991, **A43**:6826
- [15] Komura S, Ou-Yang Z C. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**:473
- [16] Eisenhart L P. *A Treatise on The Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New York: Ginn Co, 1909
- [17] Forsyth A R. *Lectures on The Differential Geometry of Curves and Surfaces*. London: Cambridge University Press, 1912
- [18] Xie Y Z. *Chinese Phys Lett*, 1999, **16**:229
- [19] de Gennes P G. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford: Clarendon, 1993
- [20] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Berkeley: Publish of Perish, 1979
- [21] Graustein W C. *Differential Geometry*. New York: MacMillan and Co, 1934
- [22] Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953
- [23] Stephen M J, Straley J P. *Rev Mod Phys*, 1974, **46**:618
- [24] Schnur J M, *Science*, 1993, **262**:1669
- [25] Selinger J V, Schnur J M, *Phys Rev Lett*, 1993, **71**:4091
- [26] Thomas B N, Safinya C R, Plano R J *et al.* *Science*, 1995, **267**:1635
- [27] Chappell J S, Yager P. *Chem Phys Lipids*, 1991, **58**:253
- [28] Nelson P, Powers T. *Phys Rev Lett*, 1992, **69**:3409
- [29] Konikoff F M, Chung D S, Donovan J M, *et al.* *J Clin Invest*, 1992, **90**:1155
- [30] Chung D S, Benedek G B, Konikoff F M *et al.* *Proc Natl Acad Sci USA*, 1993, **90**:11341
- [31] Dald I, Lagerwall S T. *Ferroelectrics*, 1984, **58**:215
- [32] Selinger J V, MacKintosh F C, Schnur J M. *Phys Rev*, 1996, **E53**:3804
- [33] Komura S, Ou-Yang Z C. *Phys Rev Lett*, 1998, **81**:473
- [34] Caffrey M, Hogan J, Rudolph A S. *Biochem*, 1991, **30**:2134
- [35] Byrd P F, Friedman M D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. Berlin: Springer Verlag, 1954

索 引

A

鞍形展曲形变 saddle splay deformation 66

B

扁椭球膜泡 oblate ellipsoidal vesicle 108

C

参数曲线 parametric curve 33
测地挠率 geodesic torsion 222
层状亚相 subphase of smectic liquid crystal 6
层状液晶 smectic liquid crystal 4
长椭球形膜泡 prolate ellipsoidal vesicle 111

D

单键 single bond 17
单位法线 unit normal line 34
胆甾醇效应 cholesterol effect 18
迪潘定理 Dupin theorem 50
第二基本形式 second fundamental form 36
第三基本形式 third fundamental form 43
第一基本形式 first fundamental form 33
度规张量 metric tensor 32
对称椭球膜泡 axisymmetric ellipsoidal vesicle 106

E

二维拉普拉斯算符 two dimensional Laplacian operator 55

F

- 法平面 normal plane 31
法曲率 normal curvature 45
反变张量 contravariant tensor 25
反平行聚集 antiparallel packing 233
反向曲面 anticlastic surface 48
分子胶束 micelle 10
分子胶束相 micelle phase 7
副法线 binormal 29

G

- 高斯曲率 Gaussian curvature 48
管状结构 tubular structure 227

H

- 海星形膜泡 starfish shaped vesicle 187
核膜 nuclear membrane 62
红细胞 red blood cell 61
红细胞玻璃效应 glass effect of red blood cell 80
回转曲面 surface of revolution 207
混合张量 mixed tensor 27

J

- 棘囊形形状 acanthocyte type shape 190
棘囊形细胞 acanthocyte type cell 186
阶层曲线 level curve 51
结点曲面 nodoid 142

K

- 克氏符号 Christoffel symbol 36

L

- 拉普拉斯-贝尔特拉米算符 Laplace-Beltrami operator 42

蓝相	blue phase	6
类管形形状	tubelike shape	190
类脂双层	lipid bilayer	12
类脂相	lipid phase	21
立方相	cubic phase	6
镰形细胞	sickle type cell	186
镰形形状	sickle type shape	190
链长效应	effect of chain length	16
两亲分子	amphiphile	8
两亲分子单层	amphiphilic monolayer	9
临界分子胶束浓度	critical micelle concentration	10
流体化效应	fluidizing effect	18
流体膜	fluid membrane	4
流体镶嵌模型	fluid mosaic model	12
六角相	hexagonal phase	7
螺距	pitch	229
螺旋带结构	helical ribbon structure	230
螺旋面	helicoid	207
螺旋绕带	helical wound-ribbon	208
螺旋绕带	helical wound-ribbon	208
螺旋式扭曲带	twisted strip helix	212
螺旋性有序参数	helicity parameter	4
螺旋运动	helical motion	207
螺旋状结构	helical structure	227
螺状分子胶束	chiral micelle	231
螺状液晶	chiral liquid crystal	229

M

锚环	anchor ring	122
梅尔-绍珀模型	Maier-Saupe model	68
冕状细胞	knizocyte type cell	186
膜泡融合	vesicle fusion	218
膜泡形状方程式	shape equation of vesicle	80

N

- 挠率 torsion 31
内禀导数 intrinsic derivative 41
凝胶相 gel phase 11
扭曲 twist 233

O

- 欧拉定理 Euler theorem 50

P

- 盘形分子 discotic molecule 3
盘形细胞 discocyte 63
膨胀两亲分子 swelling amphiphile 13
片状相 lamellar phase 6
平均曲率 mean curvature 48
平行聚集 parrallel packing 232

Q

- 脐点 umbilical point 47
切面 tangent plane 30
切线矢量 tangent vector 29
倾斜类脂双层 tilted lipid bilayer 201
倾斜手征性类脂双层 tilted chiral lipid bilayer, TCLB 201
倾斜手征性膜 tilted chiral membrane 4
求和约定 summation convention 25
球形膜泡 spherical vesicle 96
曲率 curvature 29
曲率半径 radius of curvature 47
曲率线 line of curvature 47
曲面的二阶基本量 coefficients of the second fundamental form of surface 36
曲面平衡方程式 surface-equilibrium equation 205
曲面演化器 surface evolver 187

曲面主方向 principal direction at a point on a surface 47

取向有序 orientational order 3

R

热致液晶 thermotropic liquid crystal 4

溶致液晶 lyotropic liquid crystal 6

S

散度 divergence of a vector 40

商定律 quotient law 28

生物膜 biomembrane 4

手征效应 chirality effect 202

双凹圆盘形 circular biconcave discoid 63

双凹圆盘形膜泡 circular biconcave discoidal vesicle 133

双键 double bond 17

顺式聚集 cis-packing 17

丝状液晶 nematic liquid crystal 4

T

梯度 gradient 41

烃链的不饱和性 unsaturation in hydrocarbon chains 17

同向曲面 synclastic surface 48

W

弯电效应 flexoelectric effect 80

弯曲 bend 233

弯曲方形织构 periodic curved square texture 180

弯曲刚度 bending rigidity 66

X

细胞骨架 cytoskeleton 19

细胞膜 cell membrane 19

细胞质膜 plasma membrane 62

线粒体	mitochondria	高尔基体	Golgi organ	内软骨	endochondria
62					
相图	phase diagram	11			
协变导数	covariant derivative	40			
协变张量	covariant tensor	26			
悬链曲面	catenoid	波形曲面	unduloid	142	
旋度	curl of a vector	42			
血影蛋白	spectrin	19			

Y

哑铃形曲面	dumbbell shaped surface	137			
液晶态	liquid crystal state	1			
有刺细胞	echinocyte type cell	186			
有角形形状	corniculate type shape	冕形形状	knizocyte type shape		
190					
宇称	parity	216			
圆柱面	cylindrical surface	146			
圆柱状膜泡	cylindrical vesicle	77			

Z

张量的内积	inner product of two tensors	28			
张量收缩	contraction of a tensor	27			
整齐肥皂相	neat soap phase	10			
正截面	normal section	45			
正螺旋面	right helicoid	207			
正劈锥曲面	right concoid	207			
指向矢	director	3			
置换符号	permutation symbol	34			
置换张量	permutation tensor	34			
主法线	main normal	29			
主曲率	principal curvature	47			
自曲率	spontaneous curvature	66			
自由能密度	free energy density	202			

自展曲 spontaneous splay 66

数字及其他

A 螺旋 A helix 234

Delaunay 曲面 Delaunay surface 142

Frank 理论 Frank theory 68

Frank 自由能密度 Frank free energy density 66

Frenet-Serret 公式 Frenet-Serret formulae 31

Helfrich 理论 Helfrich theory 68

Meusnier 定理 theorem of Meusnier 45

P 螺旋 P helix 234



8357595

2018.6.24
T-10212
37.003
85/85
2018.6.23

中科院植物所图书馆



S0003569

000027952

58.1782
818

—2003—

生物膜泡曲面弹性理论

58.1782
818

000027952



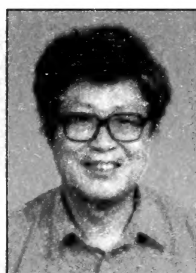
北京市海岸文化服务中心万海书店
北京 9399 信箱(100093) 电话:010-62591500



谢毓章

先后获清华大学物理系学士学位、硕士学位以及美国范德比尔特大学博士学位。1958年起任清华大学物理系教授。著有《液晶物理学》。与欧阳钟灿、刘寄星合著 *Geometric Methods in the Elastic Theory of Membranes in Liquid Crystal Phases*。1995年获中国科学院自然科学奖一等奖，1999年获中国科学技术部自然科学奖二等奖。

曾组建中国物理学会液晶分科学会，并曾担任理事长、名誉理事长。



刘寄星

1938年11月生，研究员。1964年毕业于北京大学物理系。1978年前先后在二机部401所、七机部207所从事国防科研。1980年赴美国，1985年获得克萨斯大学物理学博士学位。1986年起在中国科学院理论物理研究所工作，曾任副所长（1993—1998年）。相继从事高温气体性质、等离子体与高速飞行体相互作用、电磁波传播、磁化等离子体不稳定性与非线性等离子体理论等方面研究。1990年参加生物膜形状的液晶模型理论研究，1995年获中国科学院自然科学奖一等奖，1999年获国家自然科学奖二等奖。



欧阳钟灿

1946年1月生，1968年毕业于清华大学自动控制系，1981年获清华大学固体物理专业硕士学位，1984年获清华大学光学专业理学博士学位。近年研究兴趣为液晶、生物膜理论与DNA等生物大分子弹性性质。1993年获海外华人物理学亚洲华裔物理杰出成就奖，1995年获中国科学院自然科学奖一等奖，1999年获周培源奖和国家自然科学奖二等奖。1997年被选为中国科学院院士，2003年被选为第三世界科学院院士。现任中国科学院理论物理研究所所长。

ISBN 7-5323-7215-4



9 787532 372157 >

定价：37.00 元

责任编辑 毛文涛
封面设计 陈蕾



www.sstp.com.cn