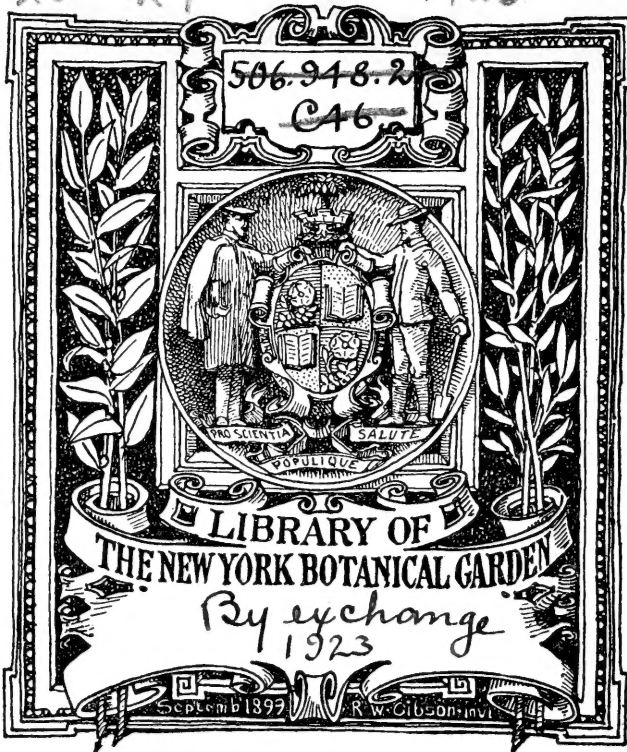
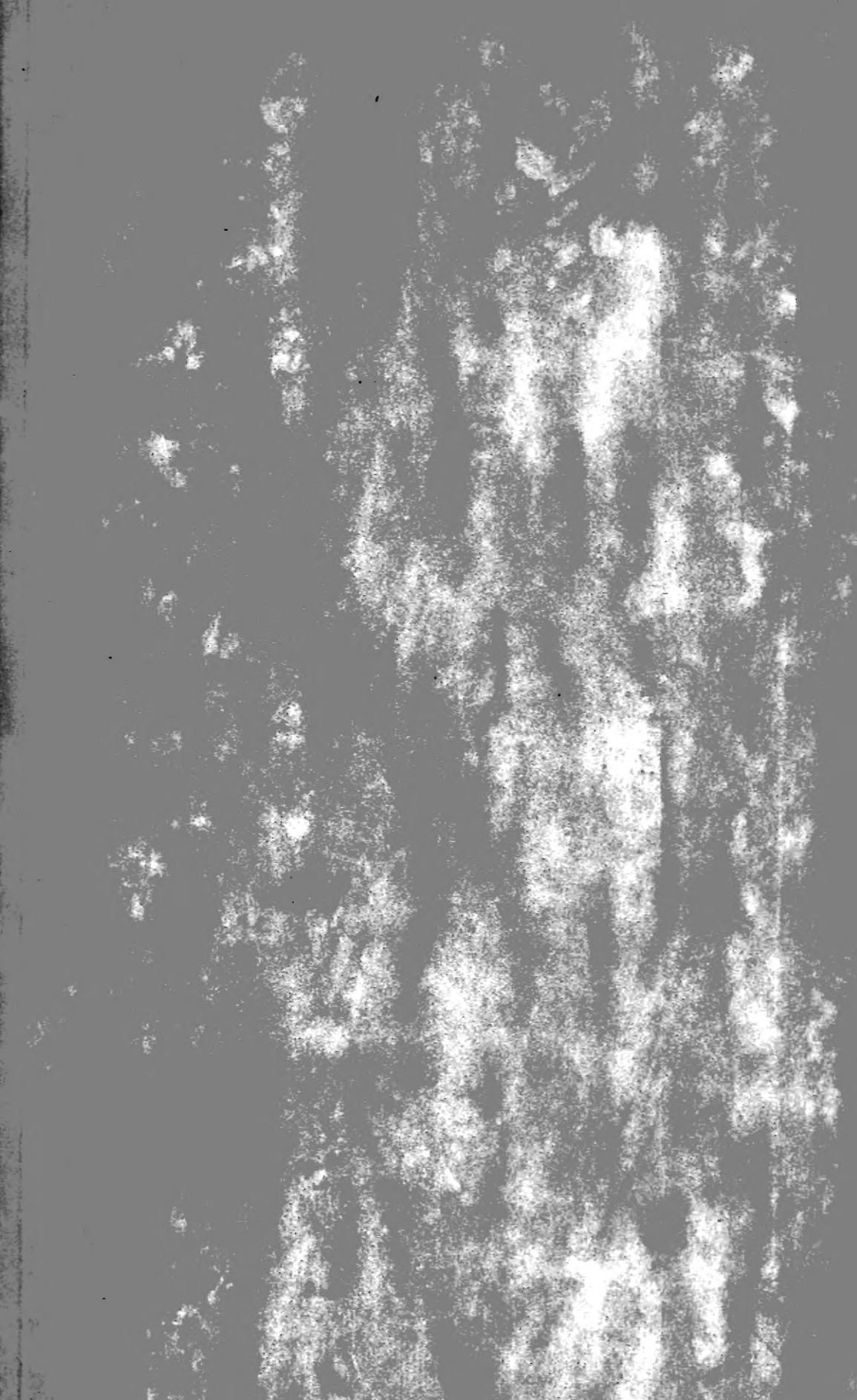


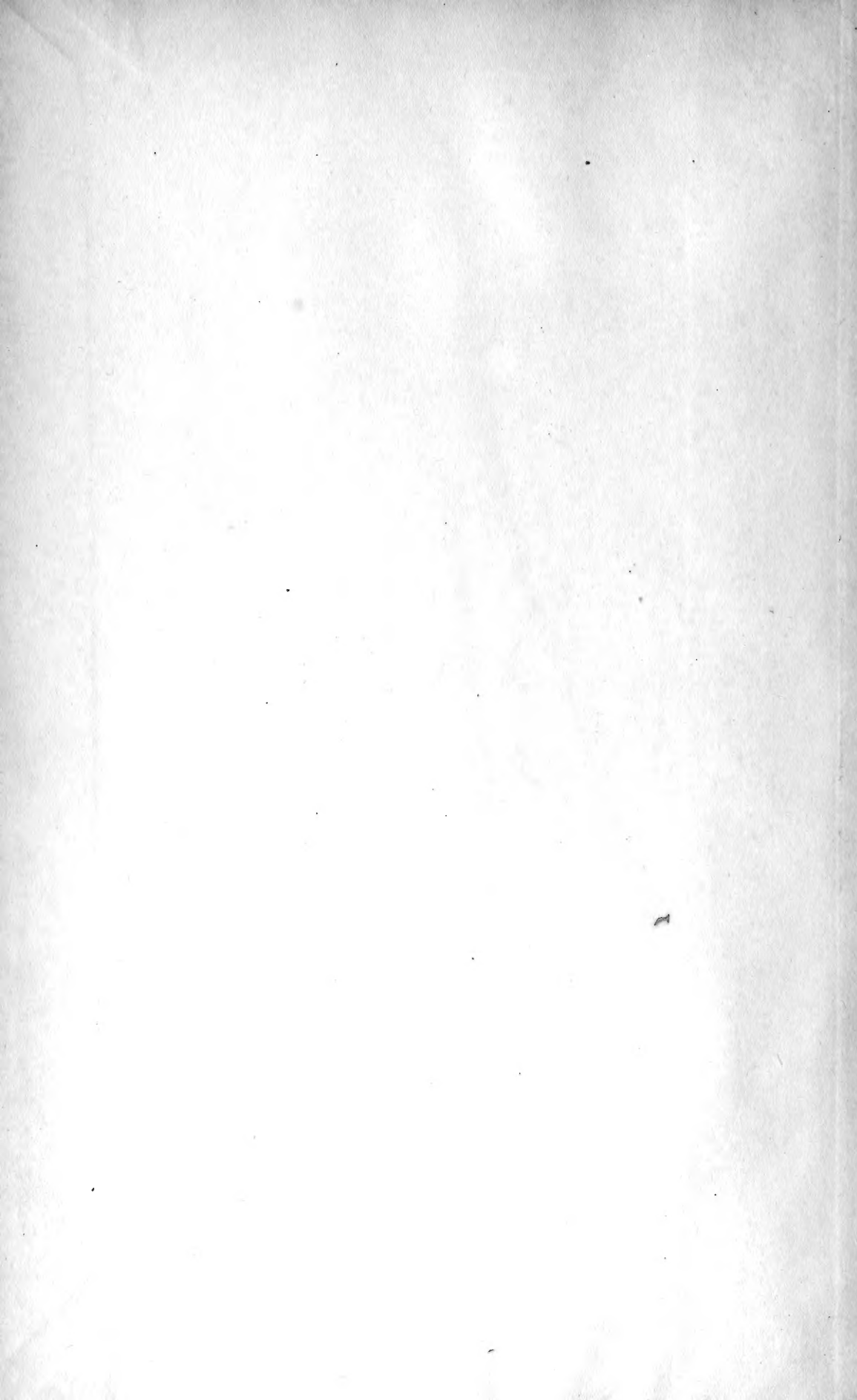


X5 K7

1923







046

SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET
I KRISTIANIA

1923

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE

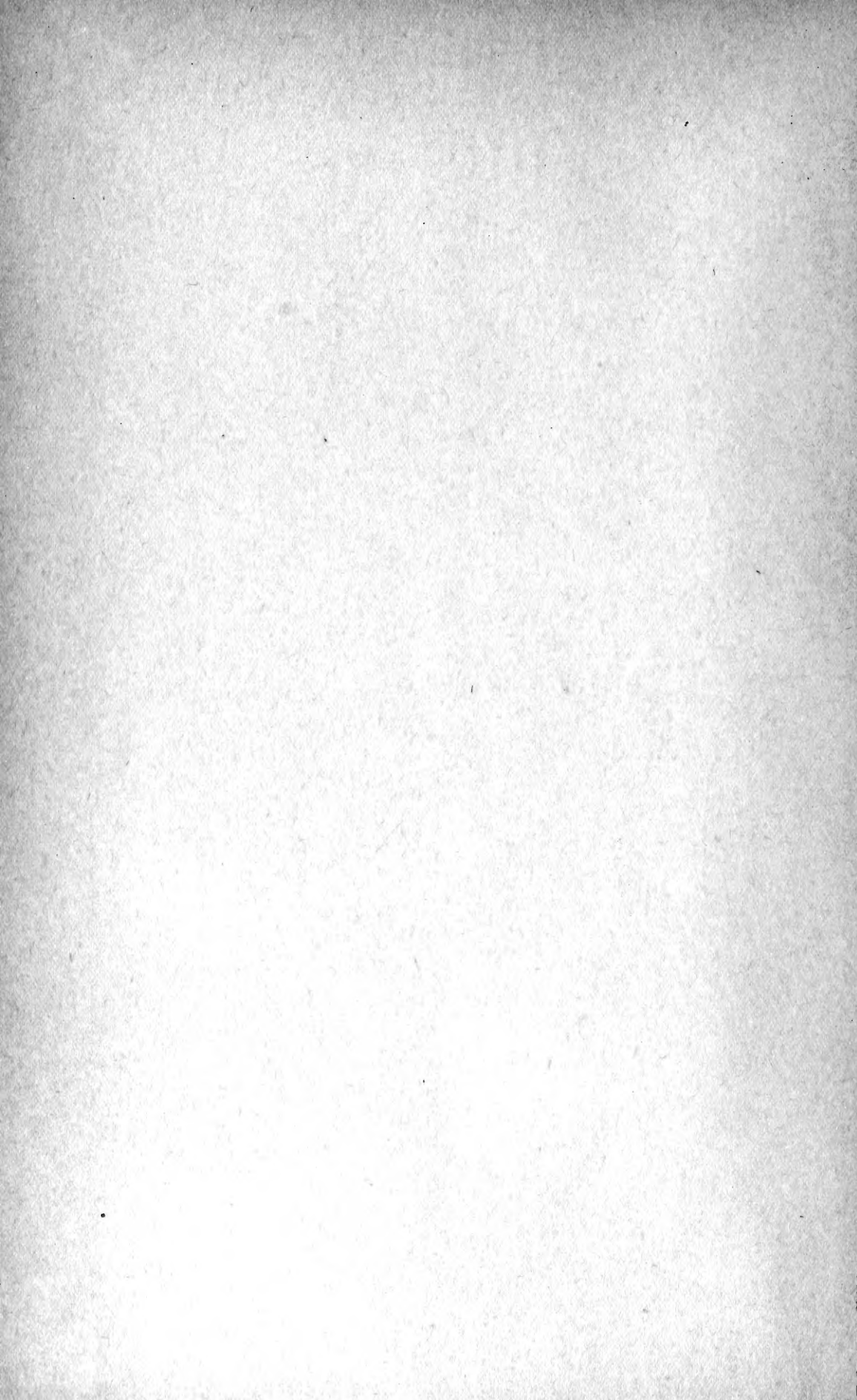


KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1924

10



SKRIFTER

UTGIT AV

VIDENSKAPSSELSKAPET

I KRISTIANIA

1923

I. MATEMATISK-NATURVIDENSKABELIG KLASSE



KRISTIANIA

I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1924

K7
1923

Indhold.

	Side
No. 1. Øystein Ore. Über die Reduzibilität von algebraischen Gleichungen. (Mit 5 Textfiguren)	1—37
» 2. V. M. Goldschmidt und L. Thomassen. Die Krystalstruktur natürlicher und synthetischer Oxyde von Uran, Thorium und Cerium. (Mit 1 Tafel)	1—48
» 3. V. M. Goldschmidt. Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente	1—17
» 4. Carl Schiøtz. Physical developments of children and young people during the age of 7 to 18—20 years. An investigation of 28 700 pupils at public (elementary) and higher (secondary) schools in Christiania. (With 31 text-figures)	1—54
» 5. John Sebelien. De forhistoriske bronsers sammensætning og oprindelse og deres relative alder som bruksmetal sammenlignet med jernet	1—28
» 6. Th. Skolem. Begründung der elementaren Arithmetik [durch die rekurrende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich]	1—38
» 7. O. Berner. A case of »virilisme surrénale«. From the Reports of the Anatomical Institute of the University, Christiania. (With 2 plates)	1—18
» 8. L. Vegard. The auroral spectrum and the upper strata of the atmosphere. Preliminary communication	1—18
» 9. L. Vegard. Auroral spectra at different altitudes and the origin of the green auroral line. Second communication. (With 2 figures in the text)	1—6
» 10. L. Vegard. Distribution of matter in the highest strata of atmosphere. Third communication. (With 6 figures in the text)	1—18
» 11. Trygve Nagell. Über die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern	1—34
» 12. Viggo Brun und Trygve Nagell. Verzeichnis der nachgelassenen Schriften Axel Thues	1—15
» 13. Trygve Nagell. Zahlentheoretische Notizen. I—VI	1—25
» 14. D. Isaachsen. Et par kalendariske nomogrammer	1—15
» 15. L. Schmidt-Nielsen und Aage W. Owe. Die Bestimmung der Jodzahl. I. Vergleichende Untersuchungen über die Jodzahl der Fette. (Mit 31 Fig. im Text)	1—77
» 16. G. H. Monrad-Krohn. The neurological aspect of leprosy (»spedalskhed«). (With 39 figures in the text)	1—78
» 17. J. H. L. Vogt. Die physikalisch-chemischen Gesetze der magmatischen Differentiation. (Mit 6 Textfiguren)	1—35
» 18. Gerda Johannesen. <i>Monocoryne gigantea</i> (Bonnievie) Broch. (Med 2 plancher og 7 tekstfigurer)	1—9
» 19. Johan Huus. Genitalorgane und »Ganglio-Genitalstrang« bei <i>Corella paraloleogramma</i> O. F. M. Ein Beitrag zur Kenntnis der postlarvalen Entwicklung der Ascidien. (Mit 6 Figuren im Text, 2 Tabellen und 4 Tafeln)	1—50

	Side
No. 20. R. Lyngnes. Zur Kenntnis der Eihüllen der Chitoniden. Mit einem Vorwort von Professor Dr. K. Bonnevie. (Mit 4 Tafeln)	1-15
» 21. Th. Skolem. Integritätsbereiche in algebraischen Zahlkörpern	1-37
» 22. Øystein Ore. Die Dedekind'schen Sätze über den Zusammenhang zwischen den Idealen und den höheren Kongruenzen	1-11
» 23. S. Holth and O. Berner. Another case of congenital miosis or pinhole pupils owing to hypoplasia of the dilatator muscle. (With 8 plates, and 3 figures in the text)	1-24

ÜBER DIE REDUZIBILITÄT VON ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN

VON
ØYSTEIN ORE

MIT 5 TAFELN

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 1.)



KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 26. mai 1922 ved prof. Størmer.

I. Historisches.

§ 1. Allgemeine Methoden.

Es sei ein Polynom vorgelegt

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

wo die Koeffizienten

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

alle ganze, rationale Zahlen sind. Es ist dann eine wichtige Aufgabe zu untersuchen, ob $f(x)$ im Gebiete der rationalen oder, was nach GAUSS¹, dasselbe ist, ob $f(x)$ im Gebiete der ganzen, rationalen Zahlen reduzibel ist. Man soll m. a. W. entscheiden, ob eine Zerlegung

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_s(x)$$

möglich ist, wo

$$f_i(x) = x^{n_i} + a_{i,1} x^{n_i-1} + \dots + a_{i,n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

ist. Dabei sind alle $a_{i,k}$ ganze rationale Zahlen und $n > n_i \geq 1$ für alle i .

Eine solche Entscheidung ist besonders für die Idealtheorie und die Theorie der algebraischen Gleichungen wichtig. Leider sind aber alle Methoden, die zur Verfügung stehen, um eine solche Untersuchung durchzuführen, sehr zeitraubend und oft praktisch beinahe unanwendbar. Methoden, die in Betracht kommen können, sind u. a. von KRONECKER² und MANDL³ angegeben worden. Unter diesen wird man am besten die KRONECKER'sche Methode mit den von RUNGE⁴ angegebenen Erleichterungen anwenden, aber auch diese ist sehr ermüdend, was man leicht durch den Anblick des von RUNGE durchgeführten Beispiels verstehen wird.

¹ Disquisitiones arithmeticae. Art. 42.

² KRONECKER: Grundzüge einer arithmetischen Theorie u. s. w. Journ. f. Math. 92, § 4.

³ MANDL: Über die Zerlegung u. s. w. Journ. f. Math. 113.

⁴ RUNGE: Über die Zerlegung u. s. w. Journ. f. Math. 99, p. 89.

FEB = 7 1925

§ 2. Die Sätze von Eisenstein und Schönemann.

Um so wertvoller sind darum die Sätze, die bloß durch eine Betrachtung der arithmetischen Eigenschaften der Koeffizienten von dem Polynome $f(x)$ erkennen lassen, ob $f(x)$ reduzibel sein kann oder nicht. Unter diesen Sätzen ist wohl der Satz von EISENSTEIN¹, (1850) am bekanntesten:

Wenn alle Koeffizienten von $f(x)$ durch eine Primzahl p teilbar sind, a_n aber nicht durch p^2 teilbar, muß $f(x)$ irreduzibel sein.

Dieser Satz ist der Keim mehrerer allgemeineren Sätze gewesen, aus denen man auf Grund der Teilbarkeitseigenschaften¹ der Koeffizienten eines Polynoms sofort eine Entscheidung über die Reduzibilität fällen kann.

Der Satz von EISENSTEIN war aber eigentlich noch früher aufgestellt worden, indem SCHÖNEMANN², schon im Jahre 1846 den folgenden Irreduzibilitätssatz bewiesen hat:

Wenn

$$f(x) = \varphi(x)^t + p \cdot M(x)$$

ist, muß $f(x)$ irreduzibel sein, wenn $M(x)$ nicht (mod. p) durch $\varphi(x)$ teilbar ist.

Außerdem ist vorausgesetzt, daß $\varphi(x)$ für den Primzahlmodul p irreduzibel ist, und wenn $\varphi(x)$ vom m^{ten} Grade ist, soll der Grad von $M(x)$ kleiner als $m \cdot t$ sein.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich so vereinfachen: Ist $f(x)$ reduzibel, etwa

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

so muß wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung für einen Primzahlmodul

$$g(x) = \varphi(x)^\alpha + p \cdot q_1(x), \quad h(x) = \varphi(x)^\beta + p \cdot q_2(x), \quad \alpha + \beta = t$$

sein. Daraus folgt

$$\varphi(x)^t + p \cdot M(x) = [\varphi(x)^\alpha + p \cdot q_1(x)] [\varphi(x)^\beta + p \cdot q_2(x)]$$

oder

$$p \cdot M(x) \equiv p \cdot q_1(x) \cdot \varphi(x)^\beta + p \cdot q_2(x) \cdot \varphi(x)^\alpha \pmod{p^2},$$

folglich, weil $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ ist,

$$M(x) \equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)},$$

was gegen die Voraussetzungen ist. Man sieht sogar ein, daß $f(x)$ für den Modul p^2 irreduzibel wird.

¹ EISENSTEIN: Über die Irreductibilität u. s. w. Journ. f. Math., 39, p. 166.

² SCHÖNEMANN: Von denjenigen Moduln u. s. w., § 61. Journ. f. Math. 32.

Man sieht leicht ein, daß ein Polynom $f(x)$, das den Bedingungen des EISENSTEIN'schen Satzes genügt, von der Form

$$f(x) = x^n \div p(b_1 x^{n-1} \div b_2 x^{n-2} \div \dots \div b_n)$$

sein wird, wo b_n nicht durch p teilbar ist. Die Irreduzibilität folgt dann aus dem Satze von SCHÖNEMANN, wenn darin $q(x) = x$ gesetzt wird.

§ 3. Der Satz von Königsberger.

Trotz der Einfachheit des EISENSTEIN'schen Satzes blieb dieser lange einzelnstehen, ohne daß man weitere Sätze von dieser Art aufstellen konnte. Erst NETTO¹ (1897) und KÖNIGSBERGER², (1895) gelang es, allgemeine Sätze zu beweisen, die den Satz von EISENSTEIN als Spezialfall enthielten. NETTO bewies, ebenso wie EISENSTEIN, seine Sätze durch Untersuchung der Gleichungen für die Koeffizienten der Faktoren, welche sich ergeben, wenn man

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \\ g(x) &= x^m \div b_1 x^{m-1} \div \dots \div b_m \\ h(x) &= x^{n-m} \div c_1 x^{n-m-1} \div \dots \div c_{n-m} \end{aligned}$$

annimmt, also

$$\begin{aligned} a_n &= b_m \cdot c_{n-m} \\ a_{n-1} &= b_m c_{n-m-1} \div b_{m-1} c_{n-m} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_1 &= b_1 \div c_1. \end{aligned}$$

Die Resultate von NETTO sind aber größtenteils in dem allgemeinen Satze von KÖNIGSBERGER enthalten:

Wenn

$$a_s = a_s \cdot p \left[\frac{r}{n} \cdot s \right]^{-1} \quad (s = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a_n = a_n \cdot p^r$$

ist, wird

$$f(x) = x^n \div a_1 x^{n-1} \div \dots \div a_n$$

irreduzibel, wenn r zu n relativ prim ist und a_n nicht durch die Primzahl p teilbar ist.

Für $r = 1$ geht dieser Satz in den Satz von EISENSTEIN über. KÖNIGSBERGER hat seinen Satz durch Analogieschlüsse aus den algebraischen Funk-

¹ NETTO: Über die Irreduktibilität u. s. w. Math. Ann. 48.

² KÖNIGSBERGER: Über den EISENSTEIN'schen Satz u. s. w. Journ. f. Math. 115, p. 53.

tionen aufgestellt, bewies aber seine Richtigkeit, indem er eine Gleichung bildete, deren Wurzeln Potenzen von den Wurzeln von $f(x) = 0$ sind. Diese neue Gleichung ist mit $f(x)$ gleichzeitig reduzibel, ihre Irreduzibilität läßt sich aber mittels des EISENSTEIN'schen Satzes beweisen.

KÖNIGSBERGER verallgemeinerte auch seinen Satz zu dem Falle, daß zwei Primzahlen in den Koeffizienten enthalten sind. Dieser Satz wurde aber von BAUER¹, (1905) zu dem Falle einer beliebigen Anzahl von Primzahlen erweitert, indem er bewies:

Wenn die Koeffizienten in der Form

$$a_i = a_n \cdot \prod_{s=1}^t p_s \left[\frac{i r_s - 1}{n_s} \right] + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

darstellbar sind, wo a_n zu den Primzahlen p_s relativ prim ist und r_s zu n_s relativ prim, und endlich

$$n = \prod_{s=1}^t n_s,$$

wird $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

irreduzibel.

Der Beweis wird idealtheoretisch geführt. Alle diese Sätze sind aber in dem weit allgemeineren Satz von PERRON², (1905) enthalten:

Wenn

$$a_i = a_n \prod_{s=1}^t p_s \left[\frac{r_s \cdot i}{n} \right] + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a_n = a_n \cdot \prod_{s=1}^t p_s^{r_s}$$

und a_n durch keine der Primzahlen p teilbar ist, wird

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

irreduzibel, wenn die Zahlen n, r_1, r_2, \dots, r_t keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Der Beweis von diesem Satze wird auch einfach idealtheoretisch geführt.

Die hier genannten Sätze können, wie ich in einer Arbeit: „Über die Reduktibilität in algebraischen Zahlkörpern“³ gezeigt habe, zu einem beliebigen Rationalitätsbereich erweitert werden, wo die Primzahlen p durch

¹ BAUER: Beitrag zur Theorie der irreduziblen Gleichungen. Journ. f. Math. 128.

² PERRON: Über eine Anwendung d. Idealtheorie u. s. w. Math. Ann. 60, p. 452.

³ Norsk matematisk forenings skrifter. Serie I, no. 9.

Primideale \mathfrak{p} ersetzt werden. [EISENSTEIN¹ hat selbst seinen Satz für den Körper $R(\sqrt{-1})$ bewiesen.] Ebenda ist gezeigt worden, daß der Satz von PERRON noch verschärft werden kann:

Wenn

$$a_i = a_i \cdot \prod_{s=1}^t \overbrace{p_s}^{r_s \cdot i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und a_1 durch keine der Primzahlen p teilbar ist, wird $f(x)$ irreduzibel, wenn die Zahlen n, r_1, r_2, \dots, r_t keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Dabei bedeutet \overline{i} die auf i nächst folgende größere ganze Zahl und $\overline{i} = i$, wenn i eine ganze Zahl ist.

Es ist auch zu bemerken, daß, wenn die Zahlen n, r_1, r_2, \dots, r_t einen größten gemeinsamen Faktor c besitzen, $f(x)$ nur Faktoren von Graden $\gamma \cdot \frac{n}{c}$ haben kann, wo γ eine der Zahlen $1, 2, \dots, c$ ist.

§ 4. Anwendung von Newton'schen Polygonen.

In $f(x)$ können einige der Koeffizienten a_i durch eine Primzahl p teilbar sein. Man kann daher

$$a_i = p^{\alpha_i} \cdot b_i$$

schreiben, wo b_i nicht durch p teilbar ist. Folglich wird

$$f(x) = \sum_{s=0}^n b_s \cdot p^{\alpha_s} \cdot x^{n-s}, \quad b_0 = 1, \quad a_0 = 0.$$

Man kann jetzt die Punkte (s, α_s) in ein Koordinatensystem aufzeichnen und das *Newton'sche Polygon*² dieser Punkte bilden. Dadurch erhalten die Sätze von EISENSTEIN und KÖNIGSBERGER eine einfache geometrische Interpretation.

Man sieht leicht ein, daß, wenn ein Polynom die Bedingungen des EISENSTEIN'schen Satzes erfüllt, das zu $f(x)$ gehörige Polygon eine Gerade wird, die außer den Punkten $(0, 0)$ und $(n, 1)$ keine weitere Gitterpunkte enthält. So hat z. B.

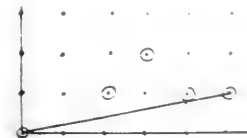


Fig. 1.

$$f(x) = x^5 + 6x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

in Bezug auf die Primzahl 3 das Polygon Fig. 1.

$f(x)$ ist nach EISENSTEIN irreduzibel.

¹ Loc. cit. p. 166.

² Man sehe z. B.: HENSEL u. LANDSBERG: Theorie der algebraischen Funktionen. IV. Vorl.

Wenn $f(x)$ den Bedingungen des Satzes von KÖNIGSBERGER genügt

$$a_i = p^{\left[\frac{r_i}{n}\right]+1} \cdot a_i, \quad a_n \not\equiv 0 \pmod{p},$$

wird auch das Polygon eine Gerade und man sieht ein, daß diese Gerade außer $(0, 0)$ und (n, r) keinen weiteren Gitterpunkt enthalten wird. So ist z. B.

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x - 24$$

nach KÖNIGSBERGER irreduzibel. Das Polygon von $f(x)$ ist für die Primzahl 2 in Fig. 2 abgebildet.

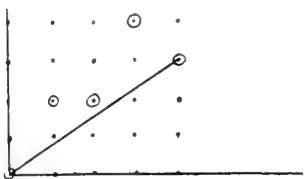


Fig. 2.

Diese Betrachtungen sind von DUMAS¹ (1906) und BAUER² (1908) verallgemeinert worden, und die Untersuchungen über Irreduzibilitätskriterien von dieser Art sind dadurch zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Das zu $f(x)$ gehörige NEWTON'sche Polygon habe die m Seiten

$$L_1, L_2, \dots, L_m$$

mit den Projektionen

$$l_1, l_2, \dots, l_m \text{ bzw. } k_1, k_2, \dots, k_m$$

auf die Abscissen-Achse bzw. Ordinaten-Achse. Die Seiten haben dann eine Neigung, die durch

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{k_i}{l_i}$$

bestimmt ist. Die Zahlen k_i und l_i können einen größten gemeinsamen Teiler t_i haben, also

$$k_i = t_i \cdot z_i, \quad l_i = t_i \cdot \lambda_i.$$

wo z_i zu λ_i relativ prim ist.

DUMAS hat dann bewiesen:

$f(x)$ kann nur dann Faktoren vom Grade r haben, wenn r von der Form

$$r = \sum_{i=1}^m v_i \cdot \lambda_i$$

ist, wo v_i eine der Zahlen $0, 1, \dots, t_i$ bedeutet.

¹ DUMAS: Sur quelques cas d'irreductibilité etc. Journ. d. Math. p. et a. 6 serie II, p. 237.

² BAUER: Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen, Journ. f. Math. 134.

So hat z. B.

$$f(x) = x^6 - 6x^4 + 30x^2 - 36x + 36$$

in Bezug auf die Primzahl 3 ein Polygon wie Fig. 3.

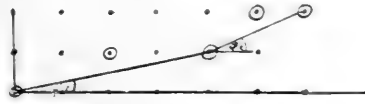


Fig. 3.

Hier ist

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{1}{2}.$$

und $f(x)$ kann folglich nur Faktoren von den Graden 4 und 2 haben.

§ 5. Über den Satz von Schönemann.

Alle Sätze, die bis jetzt behandelt worden sind, haben ihren Ursprung in dem Satze von EISENSTEIN und enthalten auch diesen als Spezialfall. Wie ich aber schon im Anfang bemerkt habe, ist der Satz von EISENSTEIN ein sehr spezieller Fall von einem Satze von SCHÖNEMANN.

Wenn die Anwendung von NEWTON'schen Polygonen irgend eine Entscheidung über die Grade der Faktoren eines Polynoms geben soll, müssen alle Koeffizienten

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_r$$

durch p teilbar sein, wo $r < \frac{n}{2}$ ist, also sehr speziellen Bedingungen unterliegen. Nach dem Satze von SCHÖNEMANN ist es möglich, die Irreduzibilität eines Polynoms auch für viele Fälle zu entscheiden, wo das NEWTON'sche Polygon mit der x -Achse zusammenfällt.

Es wäre daher natürlich, wenn man auch diesen Satz von SCHÖNEMANN zu verallgemeinern suchte. Dies ist BAUER¹ (1905) gelungen, indem er bewies:

Wenn t zu a relativ prim ist, so wird das Polynom

$$f(x) = q(x)^t + p^a \cdot M(x)$$

irreduzibel.

Dabei ist vorausgesetzt, wie in dem Satze von SCHÖNEMANN, daß $M(x)$ nicht (mod. p) durch die Primfunktion $q(x)$ (mod. p) teilbar ist. Der Grad von $M(x)$ soll kleiner als $m \cdot t$ sein, wo m den Grad von $q(x)$ angibt.

¹ M. BAUER: Verallgemeinerung eines Satzes von SCHÖNEMANN. Journ. f. Math. 128.

Der Beweis wird idealtheoretisch geführt. Man kann hier nicht, wie es natürlich wäre, denselben Weg einschlagen, den man zum Beweise des SCHÖNEMANN'schen Satzes benutzt hat, denn die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Polynoms für Primzahlpotenzmoduln ist nicht für außerwesentliche Diskriminantenteiler richtig,¹ und in der Tat zeigt das Kriterium von DEDEKIND,² daß p hier ein außerwesentlicher Teiler sein muß.

II. Untersuchungen über die Reduzibilität von Polynomen für Moduln.

§ 1. Primzahlmoduln.

Wenn ein Polynom $f(x)$ im rationalen Bereiche reduzibel sein soll, muß $f(x)$ auch nach jedem Modul reduzibel sein. Ich will hier die Reduzibilität von Polynomen nach Moduln untersuchen und zeigen, wie man daraus in vielen Fällen die Reduzibilität oder Irreduzibilität von Polynomen entscheiden kann. Es zeigt sich in der Tat, daß alle Sätze, die ich in meiner Übersicht (I) behandelt habe, darauf beruhen, daß die behandelten Polynome für einen Modul irreduzibel werden. So ist z. B. ein Polynom, welches den Bedingungen des Satzes von SCHÖNEMANN oder EISENSTEIN genügt, schon für den Modul p^2 irreduzibel. Ein Polynom, worauf man den Satz von BAUER (I, § 5) anwenden kann, ist, wie man zeigen kann, für den Modul $p^{\alpha+1}$ irreduzibel.

Um die Bedeutung dieser Bemerkungen ganz klar zu machen, bemerke ich, daß es sehr wohl eintreffen kann, daß ein Polynom irreduzibel, jedoch für *jeden* Modul reduzibel ist.

Dies ist zuerst von HILBERT³ bewiesen, indem er zeigte, daß ein Polynom

$$t^4 + 13t^2 + 81$$

diese Eigenschaft besitzt.

Für die folgenden Untersuchungen werde ich annehmen, daß die Diskriminante D von $f(x)$ von Null verschieden sein soll. Wenn $D = 0$ ist, wird $f(x)$ bekanntlich reduzibel, und Faktoren von $f(x)$ können leicht gefunden werden.

Nehmen wir erstens an, der Modul soll eine Primzahl p sein. Die Zerlegung eines Polynoms für Primzahlmoduln ist ohne Ausnahme eindeutig. Die Entscheidung, ob $f(x) \pmod{p}$ reduzibel ist, kann durch eine

¹ M. BAUER: Zur Theorie d. höheren Congruenzen. Math. Ber. aus Ungarn, 20.

² DEDEKIND: Über den Zusammenhang u. s. w. § 3, Göttinger Abhandlungen 1878.

³ D. HILBERT: Über Diophantische Gleichungen. Göttinger Nachrichten 1897, S. 53.

endliche Anzahl von Proben gegeben werden, denn es gibt von einem Grade m nur p^m Polynome

$$x^m - b_1 x^{m-1} - \dots - b_m,$$

die (mod. p) inkongruent sind.

Ich habe in einer Arbeit¹ gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

einen Faktor (mod. p) von einem Grade hat, der in t aufgeht, ist, daß die zyklische Determinante von der Ordnung t

$$\Delta = Z(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1, 0, \dots, 0) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dabei ist $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$ vorausgesetzt, d. h. $f(x)$ soll nicht den Faktor x (mod. p) haben.

Für die praktische Zerlegung von $f(x)$ wendet man am besten die Moduln 2 oder 3 an; die irreduziblen Faktoren von $f(x)$ werden dann durch einfache Rechnungen bestimmt, wenn man die Primfunktionen für diese Moduln kennt. So sind z. B. die Primfunktionen (mod. 2)

1sten Grades	—	$x, x + 1$
2ten	—	$x^2 + x + 1$
3ten	—	$x^3 + x^2 + 1, x^3 - x - 1$
4ten	—	$x^4 + x^3 - x^2 + x - 1, x^4 - x^3 - 1, x^4 - x - 1.$

Nehmen wir

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} \pmod{p} \tag{1}$$

an, wo

$$f_i(x) = x^{n_i} + a_{i,1} x^{n_i-1} + \dots + a_{i,n_i-1} x + a_{i,n_i}$$

ist. Man kann daher

$$f(x) = \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} - p \cdot M(x) \tag{2}$$

schreiben, wo $M(x)$ höchstens vom $(n-1)$ -ten Grade ist. Wenn hier

$$e_1 = e_2 = \dots = 1,$$

wird die Primzahl p bekanntlich nicht in der Diskriminante D aufgehen. Wenn es aber ein $e_i > 1$ gibt, wird p ein Diskriminantenteiler.

Wenn man die früher erwähnten Sätze untersucht, wird man finden, daß die Primzahl p , die in diesen Sätzen auftritt, immer ein Diskriminantenteiler ist. Dadurch wird später die Natur dieser Sätze erklärt.

¹ OYSTEIN ORE: Über höhere Kongruenzen. Norsk Mat. Forenings skrifter 1922.

§ 2. Zusammengesetzte Moduln.

Es soll jetzt der Fall behandelt werden, daß der Modul eine Primzahlpotenz ist. Die Zerlegung für einen Primzahlpotenzmodul p^a läßt sich aber im Allgemeinen aus der Zerlegung für die Primzahl p bestimmen. Man hat nämlich den Satz:

Wenn

$$f(x) \equiv g(x) \cdot h(x) \pmod{p}$$

ist und $g(x)$ und $h(x)$ für den Modul p keinen gemeinsamen Faktor besitzen, so wird auch

$$f(x) \equiv h_a(x) \cdot g_a(x) \pmod{p^a} \quad (3)$$

derart, daß

$$h(x) \equiv h_a(x), \quad g(x) \equiv g_a(x) \pmod{p}$$

ist, und diese Zerlegung ist eindeutig.

Um $h_a(x)$ und $g_a(x)$ zu bestimmen kann man so verfahren: Sei

$$f(x) \equiv g_{a-1}(x) \cdot h_{a-1}(x) \pmod{p^{a-1}},$$

wo

$$\left. \begin{aligned} g_{a-1}(x) &= x^m + b_1^{(a-1)} x^{m-1} + \dots + b_m^{(a-1)} \\ h_{a-1}(x) &= x^l + c_1^{(a-1)} x^{l-1} + \dots + c_l^{(a-1)} \end{aligned} \right\} l + m = n,$$

Man kann dann

$$b_r^{(a)} = b_r^{(a-1)} + p^{a-1} \cdot s_r, \quad c_r^{(a)} = c_r^{(a-1)} + p^{a-1} \cdot t_r$$

setzen und s_r und t_r derart bestimmen, daß (3) richtig wird. Dann müssen aber die Kongruenzen

$$\left. \begin{aligned} a_n &\equiv (b_m^{(a-1)} + p^{a-1} s_m) (c_l^{(a-1)} + t_l p^{a-1}) \\ a_{n-1} &\equiv (b_m^{(a-1)} + p^{a-1} s_m) (c_{l-1}^{(a-1)} + t_{l-1} p^{a-1}) \\ &\quad + (b_{m-1}^{(a-1)} + p^{a-1} s_{m-1}) (c_l^{(a-1)} + t_l p^{a-1}) \\ &\quad \vdots \\ a_1 &\equiv b_1^{(a-1)} + s_1 p^{a-1} + c_1^{(a-1)} + t_1 p^{a-1} \end{aligned} \right\} \pmod{p^a} \quad (4)$$

erfüllt sein. Die $b_r^{(a-1)}$ und $c_r^{(a-1)}$ genügen aber den Kongruenzen

$$\left. \begin{aligned} a_n &\equiv b_m \cdot c_l \\ a_{n-1} &\equiv b_m c_{l-1} + b_{m-1} \cdot c_l \\ &\quad \vdots \\ a_1 &\equiv b_1 + c_1 \end{aligned} \right\} \pmod{p^{a-1}}$$

Wird daher

$$\begin{aligned} p^{\alpha-1} \Pi_n &= a_n - b_m c_l \\ p^{\alpha-1} \Pi_{n-1} &= a_{n-1} - b_m c_{l-1} - b_{m-1} c_l \\ &\vdots \\ p^{\alpha-1} \Pi_1 &= a_1 - b_1 - c_1 \end{aligned}$$

gesetzt, so gehen die Kongruenzen (4) in

$$\left. \begin{aligned} \Pi_n &\equiv s_m \cdot c_l^{(\alpha-1)} + t_l \cdot b_m^{(\alpha-1)} \\ \Pi_{n-1} &\equiv s_m c_{l-1}^{(\alpha-1)} + s_{m-1} c_l^{(\alpha-1)} + t_l \cdot b_{m-1}^{(\alpha-1)} + t_{l-1} \cdot b_m^{(\alpha-1)} \\ &\vdots \\ \Pi_1 &\equiv s_1 + t_1 \end{aligned} \right\} \pmod{p}$$

über. Die Determinante von diesen Kongruenzen in den Unbekannten s_r und t_r ist, wie man leicht sieht, gleich der Resultante R von $g_{\alpha-1}(x)$ und $h_{\alpha-1}(x)$. Nun ist aber

$$g_{\alpha-1}(x) \equiv g(x), \quad h_{\alpha-1}(x) \equiv h(x) \pmod{p}$$

und folglich nach den Voraussetzungen R nicht durch p teilbar. Die s_r und t_r werden daher unter den Zahlen $0, 1, 2, \dots, p-1$ eindeutig bestimmt. Man sieht auch ein, wie man aus diesen Ausführungen die Eindeutigkeit der Zerlegung (3) beweisen kann. Man kann folglich für alle Exponenten α Polynome $g_\alpha(x)$ und $h_\alpha(x)$ bestimmen, so daß $f(x)$ für den Modul p^α reduzibel wird. Mit den Bezeichnungen HENSEL's¹ würde man daher sagen, daß $f(x)$ im Bereiche der p -adischen Zahlen reduzibel sei. Dies fällt aber, wie schon früher bemerkt, nicht mit der Reduzibilität im rationalen Bereiche zusammen.

Hat daher $f(x)$ für den Modul p eine Zerlegung (1) und ist p kein Teiler von D , so ergibt sich, daß $f(x)$ im p -adischen Bereiche reduzibel wird, und die irreduziblen Faktoren werden von den Graden n_1, n_2, \dots, n_s sein.

Wenn dagegen p ein Diskriminantenteiler ist, wird die Zerlegung für Potenzen von p nicht mehr eindeutig. $f(x)$ wird im p -adischen Bereiche reduzibel und wird Faktoren von den Graden

$$n_1 c_1, \quad n_2 c_2, \quad \dots, \quad n_s c_s$$

haben, aber diese können möglicherweise reduzibel oder irreduzibel sein.

¹ K. HENSEL: Theorie der algebraischen Zahlen.

Die Irreduzibilitätssätze, die in (I) erwähnt sind, beruhen alle auf dieser Ausnahmestellung der Diskriminantenteiler, wie auch aus den folgenden Untersuchungen (III) leicht zu sehen ist, und wenn man daher die Reduzibilität für Moduln, welche Potenzen von Diskriminantenteilern sind, allgemein untersucht, wird es möglich, noch weit allgemeinere Sätze aufzustellen.

§ 3. Reduzibilität für Potenzen von Diskriminantenteilern.

Ich will im Abschnitt III einige allgemeinere Untersuchungen über die Reduzibilität für Potenzen von Diskriminantenteilern durchführen. Hier werde ich nur einige spezielle Sätze aufstellen, die oft angewandt werden können und worin die Sätze von SCHÖNEMANN und BAUER als Fälle eingehen.

Wenn für $f(x)$ eine Zerlegung (1) bestimmt ist, kann man

$$f(x) = \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} + p^\alpha \cdot M(x) \quad (5)$$

setzen, wo $\alpha \geq 1$ sein muß. Die Zerlegungen von $f(x) \pmod{p^\beta}$, $\beta \leq \alpha$ sind dann einfach bestimmbar, hier soll die Reduzibilität für den Modul $p^{\alpha+1}$ untersucht werden, indem vorausgesetzt wird, daß $M(x) \pmod{p}$ durch keine der Primfunktionen $f_i(x)$ teilbar ist.

Der Kürze wegen soll im folgenden

$$H(x) = \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} \quad (6)$$

gesetzt werden. Soll $f(x) \pmod{p^{\alpha+1}}$ reduzibel sein, so muß man

$$f(x) \equiv A(x) \cdot B(x) \pmod{p^{\alpha+1}}$$

haben und folglich nach (5) und (6)

$$H(x) + p^\alpha \cdot M(x) + p^{\alpha+1} N(x) = A(x) \cdot B(x), \quad (7)$$

wo $A(x)$, $B(x)$ und $N(x)$ ganzzahlige Polynome von höchstens $(n-1)$ -tem Grade sind. Weil nach § 2 $f(x) \pmod{p^{\alpha+1}}$ immer einen Faktor vom Grade $n_i e_i$ ($i = 1, 2 \dots s$) haben muß, der $\pmod{p} \equiv f_i(x)^{e_i}$ wird, kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden,

$$A(x) \equiv f_1(x)^r \pmod{p} \quad (8)$$

annehmen, wo $1 \leq r \leq e_1$ ist.

Sei jetzt ϑ eine Wurzel von $\mathcal{A}(x) = 0$ und $P(\vartheta)$ der durch ϑ erzeugte Körper. Aus (7) folgt dann

$$II(\vartheta) \equiv 0 \pmod{p^a} \tag{9}$$

Nehmen wir an,

$$p = \mathfrak{p}_1^{t_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{t_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_k^{t_k},$$

sei die Zerlegung von p in Primidealfaktoren im Körper $P(\vartheta)$. Aus (9) folgt dann

$$II(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_f^{a t_f}} \quad (f = 1, 2, \dots, k);$$

es muß aber

$$II(\vartheta) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_f^{a t_f + 1}} \quad (f = 1, 2, \dots, k) \tag{10}$$

sein. Denn weil $M(x) \pmod{p}$ durch keine der Primfunktionen $f_i(x)$ teilbar ist, kann man solche Polynome $C(x)$ und $D(x)$ derart bestimmen, daß

$$R = C(x) \cdot II(x) + D(x) \cdot M(x) \tag{11}$$

wird, wo R die Resultante von $M(x)$ und $II(x)$ und folglich nicht durch p teilbar ist. Wenn jetzt (10) für ein f erfüllt wäre, müßte nach (7)

$$M(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_f}$$

und folglich nach (11) R durch \mathfrak{p}_f und auch durch p teilbar sein, was unmöglich ist.

Sei jetzt

$$f_i(\vartheta) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{a_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_k^{a_k} \cdot T_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

die Zerlegung von $f_i(\vartheta)$ in $P(\vartheta)$, wo T durch keines der Ideale \mathfrak{p} teilbar ist.

Dann kann nicht

$$f_i(\vartheta) \equiv f_j(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_f} \quad i \neq j$$

sein, denn daraus würde wie früher folgen, daß die Resultante von $f_i(x)$ und $f_j(x)$ durch \mathfrak{p}_f und folglich durch p teilbar sein müßte, was gegen die Voraussetzungen ist.

Ein Primideal \mathfrak{p}_f kann daher nur in einem einzigen $f_i(\vartheta)$ aufgehen, und weil nach (8) jedes Primideal, das in p aufgeht, auch ein Teiler von $f_1(\vartheta)$ sein muß, folgt daß alle

$$f_i(\vartheta) \quad (i = 2, 3, \dots, s),$$

zu p relativ prim werden und

$$f_1(\vartheta) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{a_2} \cdots \mathfrak{p}_k^{a_k} \cdot T_1$$

eine Zerlegung von $f_1(\vartheta)$ wird. Aus (7) sieht man dann, daß

$$a_i \cdot e_1 = a \cdot t_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

und wenn a und e den größten gemeinsamen Faktor b_1 besitzen, kann man

$$t_i = \frac{e_1}{b_1} \cdot \beta_i \quad (12)$$

setzen, wo β_i eine ganze Zahl ist.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß der Grad eines Ideals \mathfrak{p}_i durch n_1 teilbar sein muß. Nehmen wir an, der Grad von \mathfrak{p}_i sei f_i . Dann genügen alle ganzen Zahlen ω des Körpers $P(\vartheta)$ der Kongruenz

$$\omega^{p^{f_i}} - \omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}, \quad (13)$$

Nennt man $II_1(x)$ das Produkt aller Primfunktionen $F(x)$, deren Grade Teiler von f_i sind, so ist¹

$$II_1(x) \equiv x^{p^{f_i}} - x \pmod{p},$$

und weil \mathfrak{p}_i ein Teiler von p ist, wird nach (13)

$$II_1(\vartheta) \equiv \vartheta^{p^{f_i}} - \vartheta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}. \quad (14)$$

Es muß folglich unter den Primfunktionen $F(x)$ eine derart geben, daß

$$F(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i} \quad (15)$$

wird. Dann ist aber auch

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p, f_1(x)} \quad (16)$$

Denn wenn (16) nicht erfüllt wäre, hätte man solche Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bestimmen können, daß

$$F(x) \cdot \varphi(x) + f_1(x) \cdot \psi(x) \equiv 1 \pmod{p}$$

wäre. Weil

$$f_1(\vartheta) \equiv 0, \quad p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}$$

ist, folgt aber daraus

$$F(\vartheta) \cdot \varphi(\vartheta) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

und (15) kann nicht erfüllt sein. Aus (16) folgt jetzt $F(x) = f_1(x)$, weil $F(x)$ eine Primfunktion war, und folglich muß n_1 ein Teiler von f_i sein.

¹ Siehe z. B. DEDEKIND: Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen. Journ. f. Math. 54, Seite 22.

Man hat daher, wenn man zu den Normen übergeht,

$$N \mathfrak{p}_i = \rho^{f_i} = \rho^{l_i \cdot n_i},$$

wo l_i eine ganze Zahl ist.

Weiter ist nach (12)

$$N \rho = \rho^{\sum \frac{e_i}{b_i} \cdot \beta_i \cdot l_i \cdot n_i} = \rho^{\frac{e_1}{b_1} \cdot n_1 \cdot k_1},$$

wo k_1 eine ganze Zahl und unter den Zahlen $1, 2, \dots, b_1$ enthalten ist.

Folglich ist bewiesen:

Satz 1. Wenn

$$f(x) = \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} + \rho^\alpha \cdot M(x),$$

der Grad von $M(x)$ kleiner als n und $M(x) \pmod{\rho}$ durch keine der Primfunktionen $f_i(x)$ teilbar ist, müssen die irreduziblen Faktoren von $f(x) \pmod{\rho^{\alpha-1}}$ von den Graden

$$k_i \cdot \frac{e_i}{b_i} \cdot n_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

sein, wo b_i der größte gemeinsame Faktor von e_i und α ist und k_i eine der Zahlen $1, 2, \dots, b_i$ bedeutet.

Wenn e_i ($i = 1, 2, \dots, s$) zu α relativ prim ist, werden folglich die Faktoren von $f(x) \pmod{\rho^{\alpha-1}}$ von den Graden $n_i \cdot e_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Für $s = 1$ erhält man:

Satz 2. Wenn

$$f(x) = \varphi(x)^e + \rho^\alpha \cdot M(x),$$

der Grad von $M(x)$ kleiner als $m \cdot e$, wo m der Grad der Primfunktion $\varphi(x)$ ist, und $M(x) \pmod{\rho}$ nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist, werden die

Faktoren von $f(x) \pmod{\rho^{\alpha-1}}$ von den Graden $k \cdot \frac{e}{b} \cdot m$, wo k eine der Zahlen

$1, 2, \dots, b$ und b der größte gemeinsame Faktor von e und α ist. Wenn e zu α relativ prim ist, wird $f(x) \pmod{\rho^{\alpha-1}}$ irreduzibel.

Natürlich sind in diesen Sätzen Irreduzibilitätssätze enthalten. So ergibt sich z. B. aus dem Satze 1:

Satz 3. Wenn

$$f(x) = \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} + \rho^\alpha \cdot M(x)$$

ist, wo $M(x)$ den Bedingungen des Satzes 1 genügt, kann $f(x)$ nur Faktoren vom Grade r haben, wenn r von der Form

$$r = \sum_{i=1}^s k_i \cdot \frac{e_i}{b_i} \cdot n_i$$

ist, wo b_i der größte gemeinsame Faktor von e_i und a ist, und k_i eine der Zahlen $0, 1, \dots, b_i$ bedeutet.

Für $s = 1$ ergibt sich aus Satz 2 der folgende Satz, worin der Satz von BAUER (I, § 5) enthalten ist:

Satz 4. Wenn

$$f(x) = \varphi(x)^e + p^a \cdot M(x)$$

ist und $M(x)$ den Bedingungen des Satzes 2 genügt, werden die Faktoren von $f(x)$ von den Graden $k \cdot \frac{e}{b} \cdot m$, wo k eine der Zahlen $1, 2, \dots, b$ und b der größte gemeinsame Faktor von e und a ist. Wenn a zu e relativ prim ist, wird $f(x)$ irreduzibel.

Man hätte natürlich auch diese Sätze etwas verallgemeinern können, indem angenommen würde, daß

$$f(x) = \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} + l \cdot M(x)$$

geschrieben werden könnte, wo

$$l = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

eine beliebige zusammengesetzte Zahl wäre. Ich will jedoch für den allgemeinen Fall keinen Satz aufstellen (man sieht sogleich ein, wie man diesen Satz hätte aussprechen können), sondern nur $s = 1$ annehmen.

Satz 5. Wenn

$$f(x) = \varphi(x)^e + l \cdot M(x), \quad l = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r},$$

und der Grad von $M(x)$ kleiner als $m \cdot e$ ist, wo m der Grad von $\varphi(x)$ ist und ferner $\varphi(x)$ für alle Moduln p_i ($i = 1, 2, \dots, r$) irreduzibel und $M(x) \pmod{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist, so sind die Faktoren von $f(x)$ von den Graden

$$k \cdot \frac{e}{b} \cdot m,$$

wo b der größte gemeinsame Faktor der Zahlen $e_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ und k eine der Zahlen $1, 2, \dots, b$ ist. Wenn die Zahlen $e_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ keinen gemeinsamen Faktor besitzen, wird $f(x)$ irreduzibel.

Dieser Satz soll dazu benutzt werden, einen Satz aufzustellen, dessen Ähnlichkeit mit dem EISENSTEIN-schen Satze interessant ist, und den man natürlich den verallgemeinerten EISENSTEIN-schen Satz hätte nennen können:

Wenn in

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

alle Koeffizienten durch eine Zahl $l = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ teilbar sind, $\frac{a_n}{l}$ aber zu l relativ prim ist, wird $f(x)$ irreduzibel, wenn die Zahlen n, a_1, a_2, \dots, a_r keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Wenn sie den größten gemeinsamen Faktor b haben, werden die Faktoren von $f(x)$ von den Graden $k \cdot \frac{n}{b}$, wo k eine der Zahlen $1, 2, \dots, b$ ist.

Die Richtigkeit des Satzes sieht man aus Satz 5 ein, wenn $\varphi(x) = x$ gesetzt wird. Den ersten Teil hätte man auch aus dem Satze von PERRON (I, § 3) ableiten können.

§ 4. Reduzibilität im rationalen Bereiche.

Es ist schon gezeigt, wie man die Faktoren von $f(x)$ für einen Primzahlmodul p^a bestimmen kann. Wie früher bemerkt worden ist, braucht aber $f(x)$ im rationalen Bereiche nicht reduzibel zu sein, selbst wenn dies für alle Moduln p^a ($a = 1, 2, \dots$) der Fall ist. Es ist aber wichtig, daß, wenn alle Koeffizienten in den Faktoren von $f(x) \pmod{p^a}$ unter einer von den Koeffizienten in $f(x)$ bestimmten Grenze bleiben, $f(x)$ notwendig reduzibel sein muß, und, wenn sie über diese Grenze hinauskommen (d. h. die kleinsten Reste $\pmod{p^a}$) $f(x)$ irreduzibel wird.

Nehmen wir an, eine Zerlegung

$$f(x) \equiv h_a(x) \cdot g_a(x) \pmod{p^a}$$

sei für alle a möglich, wo

$$\left. \begin{aligned} g_a(x) &= x^m + b_1^{(a)} x^{m-1} + \dots + b_m^{(a)} \\ h_a(x) &= x^l + c_1^{(a)} x^{l-1} + \dots + c_l^{(a)} \end{aligned} \right\} l + m = n,$$

Die Kongruenzen

$$\left. \begin{aligned} a_n &\equiv b_m c_l \\ a_{n-1} &\equiv b_{m-1} \cdot c_l + b_m \cdot c_{l-1} \\ &\vdots \\ a_1 &\equiv b_1 + c_1 \end{aligned} \right\} \pmod{p^a} \quad (17)$$

haben dann für alle a Lösungen.

Wenn $f(x)$ im rationalen Bereiche reduzibel sein soll, müssen die Koeffizienten $b_i^{(a)}$ und $c_i^{(a)}$ unter einer bestimmten Grenze bleiben. Es sei nämlich A eine obere Grenze für die absoluten Werte der Wurzeln der

Gleichung $f(x) = 0$. Auf die genauere Bestimmung dieser Grenze A kommt es hier nicht an.

Ist

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

so werden die Wurzeln von $g(x) = 0$ m von den Wurzeln von $f(x) = 0$ sein. Weil b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) die k^{te} symmetrische Grundfunktionen von m Wurzeln von $f(x) = 0$ sein muß, hat man folglich

$$b_k < \binom{m}{k} \cdot A^k$$

Daraus sieht man, daß, wenn in $g_\alpha(x)$ der kleinste Rest (mod p^α) eines der Koeffizienten $b_k^{(\alpha)}$ über diese Grenze wächst, $f(x)$ irreduzibel sein muß.

Nehmen wir jetzt an, die Lösungen der Kongruenzen (17) blieben alle unter einer Grenze M . Dann muß, weil es unter dieser Grenze nur endlich viele ganze Zahlen gibt, es eine unendliche Folge a, a', \dots geben, derart daß

$$\begin{aligned} g_\alpha(x) &= g_{a'}(x) = \dots & a < a' < \dots, \\ h_\alpha(x) &= h_{a'}(x) = \dots \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} M > b_k^{(a)} &= b_k^{(a')} = \dots & (k = 1, 2, \dots, m) \\ M > c_k^{(a)} &= c_k^{(a')} = \dots & (k = 1, 2, \dots, l), \end{aligned}$$

Dann müssen aber $b_k^{(a)}$ und $c_k^{(a)}$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_n &= b_m^{(a)} \cdot c_l^{(a)} \\ a_{n-1} &= b_{m-1}^{(a)} \cdot c_l^{(a)} + b_m^{(a)} \cdot c_{l-1}^{(a)} \\ &\vdots \\ a_1 &= b_1^{(a)} + c_1^{(a)} \end{aligned}$$

genügen, weil z. B.

$$a_n - b_m^{(a)} \cdot c_l^{(a)}$$

sonst nicht durch die Primzahlpotenz p^z für beliebig große a teilbar sein kann.

Durch diese Untersuchungen ist es möglich, die Reduzibilität von Polynomen zu entscheiden, und dies geschieht, wie man leicht an Beispielen erkennt, gewöhnlich einfacher als durch die Anwendung der KRONECKERschen Methode.

III. Aufstellung von Irreduzibilitätssätzen.

§ 1. Entwicklungen $(p, \varphi(x))$.

Wie schon früher bemerkt worden ist, beruhen alle in I behandelten Irreduzibilitätssätze auf der Ausnahmestellung der Diskriminantenteiler in Bezug auf die Reduzibilität des Polynoms für Moduln, die Potenzen von solchen Primzahlen sind. Hier soll speziell dieser Fall behandelt werden, und dadurch kann man Irreduzibilitätssätze folgern, die alle früheren Irreduzibilitätssätze (I) als spezielle Fälle enthalten.

Nehmen wir an, $\varphi(x)$ sei eine Primfunktion (mod p) vom Grade m , $f(x)$ soll (mod p) durch $\varphi(x)$ teilbar sein. Man kann dann

$$f(x) = \varphi(x)^e Q(x) + p \cdot M(x) \quad (1)$$

schreiben, wo $Q(x)$ nicht (mod p) durch $\varphi(x)$ teilbar ist.

$f(x)$ soll jetzt nach Potenzen von $\varphi(x)$ entwickelt werden. Dann wird

$$f(x) = \sum_{i=0}^s A_i \cdot Q_i(x) \cdot \varphi(x)^i \quad (2)$$

in der Weise, daß alle Polynome $Q_i(x)$ höchstens vom Grade $m-1$ sind. Die Koeffizienten A_i sind alle ganze Zahlen, und sie sollen in der Weise gewählt werden, daß, wenn $Q_i(x)$ nicht verschwindet, dieses Polynom primitiv sein soll. Eine solche Entwicklung ist, wie man leicht sehen wird, eindeutig und durch wiederholte Division mit Potenzen von $\varphi(x)$ ausführbar. Die Zahl s ist durch

$$s = \left[\frac{n}{m} \right]$$

bestimmt.

Aus (1) sieht man ein, daß

$$A_s \equiv A_{s-1} \equiv \dots \equiv A_{s-e+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

sein muß. Man kann daher allgemein

$$A_i = p^{a_i} \cdot a_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad a_s = 0$$

annehmen, und (2) nimmt die Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^s a_i \cdot Q_i(x) \cdot p^{a_i} \cdot \varphi(x)^i \quad (3)$$

an, wo a_i nicht durch p teilbar ist, wenn $a_i \neq 0$. Im Folgenden soll eine Entwicklung von der Form (3) eine *Entwicklung* $(p, \varphi(x))$ genannt werden.

§ 2. Newtonsche Polygone.

Um die folgenden Untersuchungen klarer zu machen, werde ich jetzt ein geometrisches Hilfsmittel einführen. Wenn man die Gitterpunkte $(s - i, a_i)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzeichnet, wird es zu allen Gliedern in (3) einen entsprechenden Gitterpunkt geben, wenn $a_i \neq 0$.

Man zeichne jetzt das NEWTON'sche Polygon, das zu den Punkten $s - i, a_i$ gehört. Ein solches Polygon wird etwa die Form (Fig. 4) haben,

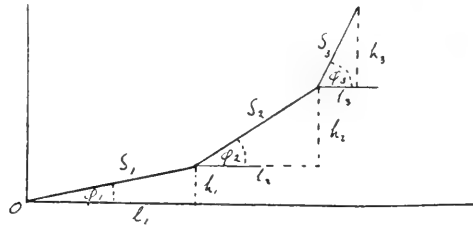


Fig. 4.

und dies soll *das Polygon zu $f(x)$* ($p, q(x)$) heißen.

Ein solches Polygon wird aus einer gewissen Anzahl Seiten

$$S_1, S_2, \dots, S_t$$

bestehen, wo S_1 immer in $(0, 0)$ anfangen muß, und möglicherweise mit der x -Achse zusammenfallen kann. Die Ecken des Polygons werden durch gewisse der Punkte $(s - i, a_i)$ gebildet. Die Projektionen der Seiten auf die x -Achse bzw. y -Achse seien

$$\begin{aligned} l_1, l_2, \dots, l_t \\ h_1, h_2, \dots, h_t \end{aligned}$$

Jede Seite S_r hat eine Neigung gegen die x -Achse, welche durch

$$tg \varphi_r = \frac{h_r}{l_r} = \frac{z_r}{\lambda_r} \quad (4)$$

bestimmt ist, wo z_r und λ_r keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Wenn $h_1 = 0$ ist, soll man $\lambda_1 = 0$ setzen.

Es ist zu bemerken, daß die folgenden Untersuchungen ebenso gut rein arithmetisch durch PUISSIEUX'sche Zahlen hätten durchgeführt werden können. Das geometrische Bild macht aber das Verfahren leichter verständlich.

§ 3. Entwicklung eines Produkts $(p, q(x))$.

Nehmen wir an, daß eine Entwicklung $(p, q(x))$ für die beiden Polynome $g(x)$ und $h(x)$ gegeben ist, es soll eine Entwicklung $(p, q(x))$ für

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

bestimmt werden.

Es seien

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=0}^{s'} a_i' \cdot Q_i'(x) \cdot p^{\alpha_i'} \cdot \varphi(x)^i \\ h(x) &= \sum_{j=0}^{s''} a_j'' \cdot Q_j''(x) \cdot p^{\alpha_j''} \cdot \varphi(x)^j \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

die Entwicklungen $(p, \varphi(x))$ von $g(x)$ und $h(x)$. Aus (5) folgt

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^{s',s''} a_i' \cdot a_j'' \cdot Q_i'(x) \cdot Q_j''(x) \cdot p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \cdot \varphi(x)^{i+j}. \quad (6)$$

Um aus (6) eine Entwicklung $(p, \varphi(x))$ zu erhalten, muß man

$$Q_i'(x) \cdot Q_j''(x) = P_{i,j}(x) \cdot \varphi(x) + R_{i,j}(x) \quad (7)$$

setzen, wo $P_{i,j}(x)$ höchstens vom Grade $m - 2$ und $R_{i,j}(x)$ höchstens vom $(m - 1)$ -ten Grade ist. Außerdem kann, wie man leicht einsieht, nicht

$$R_{i,j}(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

sein, wenn $Q_i'(x)$ und $Q_j''(x)$ von Null verschieden sind. Wenn $Q_i'(x)$ vom Grade n_i' und $Q_j''(x)$ vom Grade n_j'' ist, wird $P_{i,j}(x)$ vom Grade $n_i' + n_j'' - m$. Wenn $n_i' + n_j'' < m$, wird $P_{i,j}(x) = 0$.

Sei jetzt

$$S_k(x) = \sum_{i+j=k} a_i' a_j'' \cdot R_{i,j}(x) \cdot p^{\alpha_i' + \alpha_j''}$$

und

$$T_k(x) = \sum_{i+j=k} a_i' a_j'' \cdot P_{i,j}(x) \cdot p^{\alpha_i' + \alpha_j''},$$

wo die Summen über alle i, j erstreckt werden, welche der Bedingung $i + j = k$ genügen. Dann folgt aus (6)

$$f(x) = \sum_{k=0}^s (S_k(x) + T_{k-1}(x)) \varphi(x)^k,$$

wo $s = s' + s''$ oder $s' + s'' + 1$, je nachdem $n_s' + n_s''$ kleiner oder größer (gleich) m ist. Wenn

$$a_k \cdot Q_k(x) \cdot p^{\alpha_k} = S_n(x) + T_{n-1}(x)$$

ist, wo $a_k \cdot p^{\alpha_k}$ so gewählt wird, daß $Q_k(x)$ primitiv ist, und a_k derart, daß a_k nicht durch p teilbar ist, so wird

$$f(x) = \sum_{k=0}^s a_k \cdot Q_k(x) \cdot p^{\alpha_k} \cdot \varphi(x)^k$$

die Entwicklung $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$.

§ 4. Das Polygon eines Produkts.

Es soll jetzt das Polygon von

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

bestimmt werden, wenn die Polygone von $g(x)$ und $h(x)$ $(p, \varphi(x))$ gegeben sind.

Es sollen aber, ehe diese Aufgabe behandelt wird, einige Bemerkungen über Polygone $(p, \varphi(x))$ überhaupt gemacht werden.

Sei

$$\psi(x) = \sum_i a_i Q_i(x) \cdot p^{\alpha_i} \cdot \varphi(x)^{n_i} \quad (8)$$

ein ganzzahliges Polynom. Hier soll wie früher $Q_i(x)$ primitiv und von einem Grade kleiner als m , a_i nicht durch p teilbar sein. Diese Summe (8) soll aber nicht geordnet sein, d. h. sie braucht nicht eine Entwicklung $(p, \varphi(x))$ für $\psi(x)$ zu sein. $\psi(x)$ kann aus allen Gliedern

$$a_i p^{\alpha_i} \cdot Q_i(x) \cdot \varphi(x)^{n_i} \quad (9)$$

bestehen, wo n_i und α_i alle positiven ganzzahligen Werte annehmen kann, wo natürlich $n_i \cdot m \leq n$ ist, wenn $\psi(x)$ vom Grade n ist. Es kann auch sehr wohl eintreffen, daß es mehrere Glieder (9) gibt, für welche sowohl n_i als α_i gleich sind.

Zeichnet man jetzt alle Punkte $(s - n_i, \alpha_i)$ in ein Koordinatensystem ein, wo $s = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ ist, so kann man ein NEWTON'sches Polygon P_1 zu diesen Punkten konstruieren. Dieses Polygon braucht aber nicht mit dem Polygone P zu $\psi(x)$ $(p, \varphi(x))$ zusammenfallen, wie leicht zu zeigen ist.

Um aus (8) eine Entwicklung von $\psi(x)$ $(p, \varphi(x))$ zu erhalten, kann man alle Glieder (9) sammeln, für welche n_i dieselbe Zahl ist. Ist α'_i der kleinste Exponent für p , der in diesen Gliedern vorkommt, so wird von den Punkten $(s - n_i, \alpha_i)$ für bestimmte n_i nur $(s - n_i, \alpha'_i)$ für die Konstruktion von P_1 von Bedeutung, und man sieht, daß P nicht unter P_1 fallen kann. Denn ist $(s - n_i, \alpha_i)$ ein Eckpunkt von P_1 , so kann es eintreffen, daß es in $\psi(x)$ mehrere Glieder gibt, für welche n_i und α_i dieselben sind, und

die Summe dieser Glieder kann dann eine höhere Potenz von p als p^{α_i} als Faktor enthalten, nie aber eine kleinere Potenz. Doch wird, wie man leicht einsieht, wenn es nur ein einziges Glied in $\psi(x)$ gibt, welches in diesem Eckpunkte von P_1 abgebildet ist, dieser Punkt auch ein Eckpunkt für P sein.

Es soll jetzt ein Polygon zu dem Produkte (6) $(p, q(x))$ bestimmt werden. Es soll erstens angenommen werden, daß $s = s' + s''$ ist. Sei

$$G = a_i' \cdot Q_i'(x) \cdot p^{\alpha_i'} \cdot q(x)^i$$

ein Glied in $g(x)$ und

$$H = a_j'' \cdot Q_j''(x) \cdot p^{\alpha_j''} \cdot q(x)^j$$

ein Glied in $h(x)$ und

$$GH = a_i' \cdot a_j'' \cdot Q_i'(x) \cdot Q_j''(x) \cdot p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \cdot q(x)^{i+j}$$

ihr Produkt. Nach (7) ist dann

$$\begin{aligned} GH &= a_i' a_j'' \cdot P_{i,j}(x) \cdot p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \cdot q(x)^{i+j+1} \\ &+ a_i' a_j'' \cdot R_{i,j}(x) \cdot p^{\alpha_i' + \alpha_j''} \cdot q(x)^{i-j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Punkte, welche G und H repräsentieren, sind bzw.

$$(s' - i, a_i') \text{ und } (s'' - j, a_j'').$$

GH wird nach (10) durch die beiden Punkte

$$(s' + s'' - i - j - 1, a_i' + a_j''), (s' + s'' - i - j, a_i' + a_j'')$$

repräsentiert, von welchen der erste möglicherweise wegfallen kann.

Den Punkt $(s' + s'' - i - j, a_i' + a_j'')$ kann man in der Weise erhalten, daß man von O aus die Vektoren zu den Punkten $G(s' - i, a_i')$ und $H(s'' - j, a_j'')$ zieht, und ihre Summe bildet. Der Endpunkt dieses Vektors ist dann bekanntlich $GH(s' + s'' - i - j, a_i' + a_j'')$.

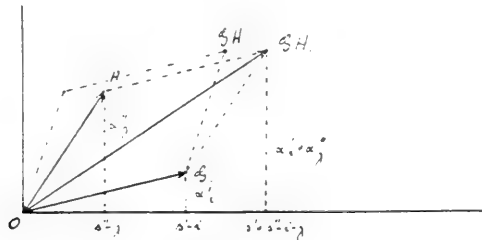


Fig. 5.

Den zweiten Punkt GH kann man z. B. in der Weise erhalten, daß man die Vektoren $O-G$ und $O-(s'' - j - 1, a_j'')$ addiert. Man sieht ein, daß der Vektor $O-(s'' - j - 1, a_j'')$ gegen die x -Achse eine größere Neigung als $O-H$ besitzt.

Wenn man jetzt in (6) für das Produkt $GH(10)$ einführt, wird man für $f(x)$ eine Darstellung von der Form (8) erhalten. P_G und P_H seien die Polygone für $g(x)$ und $h(x)$. Man konstruiere jetzt ein Polygon S , welches aus den Seiten von P_G und P_H in der Weise gebildet sei, daß man in O anfängt und die Seiten nach steigender Neigung ordnet. Wenn zwei Seiten dieselbe Neigung besitzen, ist ihre Reihenfolge gleichgültig.

Es ist zunächst klar, daß die beiden Punkte, welche das Produkt GH repräsentieren, nach der Art, wie man sie erhalten hat, *über* oder möglicherweise *auf* dieses Polygon fallen werden. Wenn man daher das Polygon P_F zu $f(x)$ für eine Entwicklung $(p, \varphi(x))$ konstruiert, so wird P_F teilweise oder ganz über S fallen oder möglicherweise mit S zusammenfallen. Es soll jetzt gezeigt werden, daß P_F in der Tat mit S zusammenfallen muß.

Um dies zu zeigen, braucht man nach den früheren Bemerkungen nur zu beweisen, daß es Punkte GH gibt, die in die Eckpunkte von S fallen, und daß es für jede Ecke nur einen Punkt gibt.

Ein Glied in $g(x)$ und der entsprechende Punkt sollen wie früher mit G bezeichnet werden, und H habe dieselbe Bedeutung für $h(x)$. Dem Produkte GH dieser Glieder entsprechen aber zwei Punkte; man sieht jedoch ein, daß für die Beurteilung, ob es in $f(x)$ Punkte gibt, welche in die Eckpunkte von S fallen, nur der Punkt von Bedeutung wird, welchen man durch die Summe der Vektoren OG und OH erhält. Dieser Punkt soll mit GH bezeichnet werden.

Man sieht, wenn G über P_G liegt und H über oder auf P_H , so wird GH über S fallen. Wenn daher GH auf S fallen soll, muß G auf P_G und H auf P_H liegen. Wenn aber G auf P_G liegt, kann man den Vektor OG durch das äquivalente Vektorpolygon P_G' ersetzen, welches aus den Seiten von P_G bis G besteht. Ebenso kann man OH durch das Polygon P_H' ersetzen, das aus den Seiten von P_H bis H besteht. Wenn man GH bestimmen soll, kann man die Seiten der beiden Polygone P_G' und P_H' nach steigender Neigung ordnen und in dieser Weise ein Polygon P'_{GH} erhalten, dessen Endpunkt GH ist.

Wenn jetzt GH auf S fallen soll, so sieht man, daß P'_{GH} mit S bis GH zusammenfallen muß. Folglich müssen, wenn GH in einen Eckpunkt von S fallen soll, G und H Eckpunkte von P_G und P_H sein, und P_G' und P_H' müssen zusammen alle Seiten von S bis GH enthalten. Wenn umgekehrt ein Eckpunkt M von S gegeben ist, gibt es immer solche Eckpunkte G und H auf P_G und P_H , daß $GH = M$ wird. Wenn nämlich P_H bis M die Seiten oder Vektoren

$$p_1, p_2, \dots p_s$$

von P_G und

$$r_1, r_1, \dots r_t$$

von P_H enthält, so wird G durch den Endpunkt des Summenpolygons

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s$$

bestimmt und H in derselben Weise durch

$$r_1 + r_2 + \dots + r_t,$$

und es ist klar, daß es nur ein G und ein H derart gibt, daß $GH = M$ ist.

Dadurch ist bewiesen:

Ist

$$g(x) = \sum_{i=0}^{s'} a_i' \cdot Q_i'(x) \cdot p^{a_i'} \cdot q(x)^i,$$

$$h(x) = \sum_{i=0}^{s''} a_i'' \cdot Q_i''(x) \cdot p^{a_i''} \cdot q(x)^i,$$

so wird

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = \sum_{i=0}^s a_i \cdot Q_i(x) \cdot p^{a_i} \cdot q(x)^i \quad s = s' + s''$$

ein Polygon $(p, q(x))$ haben, das aus den Seiten der Polygone von $g(x)$ und $h(x)$ nach steigender Neigung zusammengesetzt ist.

Wenn

$$s = s' - s'' + 1$$

ist, so wird wie früher

$$GH = a_i' \cdot a_j'' \cdot P_{i,j}(x) \cdot p^{a_i' - a_j''} \cdot q(x)^{i-j-1} \\ + a_i' \cdot a_j'' \cdot R_{i,j}(x) \cdot p^{a_i' - a_j''} \cdot q(x)^{i-j}.$$

G und H werden durch die Punkte

$$(s' - i, a_i') \text{ und } (s'' - j, a_j'')$$

abgebildet, GH wird aber jetzt durch die beiden Punkte

$$(s' + s'' - i - j, a_i' + a_j'') \text{ und } (s' + s'' - i - j + 1, a_i' + a_j'')$$

abgebildet. Man sieht wie früher ein, daß nur der letzte dieser Punkte für das Polygon zu $f(x)$ $(p, q(x))$ von Bedeutung ist. Man kann aber diesen Punkt in der Weise erhalten, daß man die Vektoren OG , OH und den Einheitsvektor von O bis $(1, 0)$ addiert. Eine Untersuchung, die der früheren analog ist, wird die Richtigkeit des folgenden Satzes zeigen:

Wenn

$$s = s' - s'' - 1,$$

so besteht das Polygon von $f(x)$ $(p, q(x))$ aus der Geraden O bis $(1, 0)$ und dem in $(1, 0)$ daran ansetzenden Polygon, das aus den nach steigender Neigung geordneten Seiten der Polygone zu $g(x)$ und $h(x)$ gebildet wird.

§ 5. Hauptpolygone.

Nach § 4 besteht also das Polygon zu einem Produkte $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ aus den Polygonen von $g(x)$ und $h(x)$, indem die Seiten nach steigender Neigung geordnet werden, wozu die Gerade $O-(1, 0)$ kommen kann. Für die folgenden Untersuchungen werden nur die Teile der Polygone von Bedeutung, welche über der x -Achse liegen. Dieser Teil eines Polygons soll *Hauptpolygon* genannt werden. Man bemerkt dann:

Das Hauptpolygon für ein Produkt ist aus den Seiten der Hauptpolygone der Faktoren nach steigender Neigung zusammengesetzt.

Es sei jetzt $f(x)$ ein beliebiges Polynom von der Form (1). Man kann dann, wie früher gezeigt worden ist, immer für jeden Primzahlpotenzmodul p^a solche Polynome $Q_a(x)$ und $\Phi_a(x)$ bestimmen, daß

$$f(x) \equiv Q_a(x) \cdot \Phi_a(x) \pmod{p^a}$$

wird, folglich

$$f(x) = Q_a(x) \cdot \Phi_a(x) + p^a \cdot M(x), \quad (11)$$

wo $M(x)$ ein ganzzahliges Polynom von höchstens $(n-1)$ -tem Grade ist und

$$\Phi_a(x) \equiv \varphi(x)^e \pmod{p}.$$

Ist jetzt (3) eine Entwicklung $(p, \varphi(x))$ für $f(x)$, so wird das zu $f(x)$ gehörige Polygon im Punkte (s, α_0) seinen Endpunkt haben. Man sieht daher, wenn man in (11) $a > \alpha_0$ wählt, wird das Glied $p^a \cdot M(x)$ ohne Bedeutung für das Polygon zu $f(x)$ $(p, \varphi(x))$. Das Polygon zu $Q_a(x)$ wird aus einer Geraden bestehen, welche mit der x -Achse zusammenfallen muß, und das Polygon zu $\Phi_a(x)$ wird daher aus dem Hauptpolygone von $f(x)$ bestehen.

Wenn jetzt $\Phi_a(x)$ für einen Modul p^a , $a > \alpha_0$, reduzibel sein soll, müssen die Seiten des Polygons eines Faktors aus Stücken des Hauptpolygons von $f(x)$ zusammengesetzt sein, und zwar mit derselben Neigung. (Im Folgenden wird die Bezeichnung des § 2 angewandt.)

Die Neigung q_r einer Seite S_r sei durch

$$\operatorname{tg} q_r = \frac{h_r}{l_r} = \frac{z_r}{\lambda_r}$$

bestimmt, wo z_r und λ_r keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Wenn h_r zu l_r relativ prim ist, gibt es außer den Eckpunkten von S_r keine Gitterpunkte auf dieser Seite. Wenn daher das Polygon zu einem Polynome $\psi(x)$ aus dem Hauptpolygone von $f(x)$ zusammengesetzt sein soll, muß darin entweder S_r fehlen oder das Polygon muß die ganze Seite enthalten.

Wenn dagegen h_r und l_r einen gemeinsamen Faktor δ_r haben, also

$$h_r = \delta_r \cdot z_r, \quad l_r = \delta_r \cdot \lambda_r,$$

so werden auf S_r außer den Endpunkten $\delta_r - 1$ Gitterpunkte liegen. Ist die Abszisse des Anfangspunktes von S_r gleich x_r , so werden für

$$x = x_r, x = x_r + \lambda_r, x = x_r + 2\lambda_r, \dots, x = x_r + \delta_r \cdot \lambda_r = x_{r-1}$$

Gitterpunkte auf S_r liegen und für keine anderen Abszissen. S_r wird daher in δ_r Stücken zerfallen können, von welchen einige in dem Polygone von $\psi(x)$ enthalten sein können. Man ersieht daraus die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz 1. Ist

$$f(x) \equiv Q(x) \cdot q(x)^e \pmod{p}$$

und haben die Seiten S_r ($r = 1, 2, \dots, t$) des Hauptpolygons von $f(x)$ ($p, q(x)$) die Neigungen φ_r , die durch

$$\operatorname{tg} \varphi_r = \frac{h_r}{l_r} = \frac{\delta_r \cdot z_r}{\delta_r \cdot \lambda_r} = \frac{z_r}{\lambda_r}$$

bestimmt sind, so kann $f(x)$ nur dann einen Faktor

$$g(x) \equiv q(x)^i \pmod{p}$$

haben, wenn $g(x)$ vom Grade

$$q = m \cdot \sum_{r=1}^t \varepsilon_r \cdot \lambda_r$$

ist, wo m der Grad von $q(x)$ und ε_r eine der Zahlen $0, 1, \dots, \delta_r$ ist, wo δ_r den größten gemeinsamen Faktor von h_r und l_r bedeutet.

Außerdem sieht man, daß $f(x) \pmod{p^a}$, $a > a_0$, nur solche Faktoren $\equiv q(x)^i \pmod{p}$ haben kann, in denen i von der Form

$$i = \sum_{r=1}^t \varepsilon_r \cdot \lambda_r$$

ist.

§ 6. Irreduzibilitätskriterien.

Es sollen hier einige Bemerkungen über die Anwendung des vorstehenden Satzes gemacht werden. Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Satze alle früher genannten Sätze auf dem Gebiete (I) enthalten sind.

Wenn

$$f(x) \equiv q(x)^t \pmod{p}$$

ist, wird das Polygon zu $f(x)$ ($p, q(x)$) ein Hauptpolygon. Man hat dann den Satz:

Wenn

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t \pmod{p},$$

kann $f(x)$ nicht mehr Faktoren haben, als es Gitterpunkte auf dem Polygone zu $f(x)$ ($p, \varphi(x)$) gibt. Dann soll bei der Berechnung der Anfangspunkt nicht mitgerechnet werden.

Aus diesem einfachen Satze folgt sogleich die Richtigkeit von SCHÖNEMANN und BAUER, indem man bemerkt, daß das Polygon in diesem Falle eine Gerade ist.

Alle Fälle, worin das Polygon eine Gerade ist, sind in dem folgenden Satze enthalten:

Wenn

$$f(x) = a_0 \cdot \varphi(x)^n + a_1 \cdot Q_1(x) \cdot \varphi(x)^{n-1} + \dots + a_n \cdot Q_n(x)$$

ist, und

$$a_1 = a_0 \cdot p^{\frac{r}{n}}, a_2 = a_0 \cdot p^{\frac{2r}{n}}, \dots, a_n = a_n \cdot p^r,$$

wo a_0 und a_n nicht durch p teilbar sind und $Q_n(x) \not\equiv 0 \pmod{p, \varphi(x)}$, wird $f(x)$ nur Faktoren von den Graden

$$t = m \cdot \frac{n}{e} \cdot \tau$$

haben, wo e der größte gemeinsame Faktor von n und r ist und τ eine der Zahlen $1, 2, \dots, e$ ist. Wenn $e = 1$ ist, wird $f(x)$ irreduzibel.

In diesem Satze sind natürlich die Sätze von SCHÖNEMANN und BAUER enthalten. Wenn $\varphi(x) = x$ gesetzt wird, alle $Q_i(x)$ Konstanten sind und r zu n relativ prim ist, hat man den Satz von KÖNIGSBERGER.

Wenn in Satz 1 $\varphi(x) = x$ gesetzt wird, folglich alle $Q_i(x)$ Konstanten werden, kommen die Resultate von DUMAS heraus.

Wenn man die Reduzibilität eines Polynoms für Moduln, die Potenzen von Diskriminantenteilern sind, untersuchen will, kann man ein Verfahren anwenden, das demjenigen ähnlich ist, das in Kap. II angewandt wurde.

Es sei $\varphi(x)$ wie früher eine Primfunktion, die für den Modul p mehrfach als Faktor in $f(x)$ vorkommt, und man konstruiere ein Polygon zu $f(x)$ ($p, \varphi(x)$). Die Projektionen der Seiten seien l_1, l_2, \dots, l_t .

Man kann dann zeigen, daß, wenn $\varphi(x)$ vom ersten Grade ist, $f(x) \pmod{p^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) reduzibel wird und Faktoren von den Graden l_1, l_2, \dots, l_t hat. Möglicherweise kann man diesen Satz für eine beliebige Primfunktion $\varphi(x)$ verallgemeinern. Ich will jedoch hier darauf nicht näher eingehen.

IV. Irreduzibilitätskriterien, aus irreduziblen Kongruenzen für Primzahlmoduln hergeleitet.

§ 1. Art der Irreduzibilitätskriterien.

Wenn man die Reduzibilität eines Polynoms mit Hilfe von Moduln untersuchen will, zerfällt diese Untersuchung nach II in drei Abteilungen.

Erstens muß die Zerlegung für irgend einen Primzahlmodul p bestimmt werden, dann muß man daraus die Faktoren für den Modul p^a herleiten, und zuletzt muß untersucht werden, ob die Koeffizienten der Faktoren unter bestimmten Grenzen bleiben.

Man sieht, wie die Grade der Faktoren bestimmt werden:

Erstens durch die Grade der irreduziblen Faktoren (mod p).

Zweitens können von diesen Faktoren mehrere in einen irreduziblen Faktor (mod p^a) zusammenfallen, wenn p Diskriminantenteiler ist.

Drittens müssen die Faktoren (mod p^a) so durch Multiplikation zusammengefaßt werden, daß die Koeffizienten des Produkts unter einer bestimmten Grenze bleiben.

Wenn man dieses Verfahren, um die Reduzibilität von Polynomen zu untersuchen, dazu benutzen will, allgemeine Irreduzibilitätssätze aufzustellen, wird man natürlich dazu geführt, die Sätze in drei Klassen einzuteilen:

1. Irreduzibilitätssätze, welche aus der Reduzibilität oder Irreduzibilität für Primzahlmoduln abgeleitet sind.
2. Sätze, die auf der Ausnahmestellung der Diskriminantenteiler beruhen. Die früher aufgestellten Sätze sind alle von dieser Art.
3. Möglicherweise können auch Irreduzibilitätssätze aufgestellt werden, die auf den Größen der Koeffizienten der Faktoren (mod p^a) beruhen.

§ 2. Irreduzible Kongruenzen.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie man Irreduzibilitätssätze von der Art 1 aufstellen kann. Solche Sätze sind u. a. von SERRET¹ bewiesen worden; ich soll aber hier zeigen, wie man einige allgemeinere Sätze herleiten kann. Es zeigt sich, daß die Idealtheorie hier ein vorzügliches Werkzeug bildet.

Wir wollen erstens eine Kongruenz von der Form

$$f(x) = \varphi(x)^t - a \pmod{p} \quad (1)$$

untersuchen. Hier soll

$$\text{Ind } a = d$$

sein, folglich, wenn g eine primitive Wurzel der Kongruenz

¹ SERRET: Cours d'Algèbre supérieure. Sect. III, Chapt. III.

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, soll

$$a \equiv g^d \pmod{p} \quad (2)$$

sein, indem p als ungerade Primzahl vorausgesetzt wird. t soll ein Teiler von $p-1$ sein.

Wenn jetzt (1) \pmod{p} reduzibel wäre, müßte man

$$f(x) \equiv A(x) \cdot B(x) \pmod{p} \quad (3)$$

haben, wo vorausgesetzt werden kann, daß $A(x)$ eine Primfunktion \pmod{p} ist. Dann folgt aus (1) und (2)

$$\varphi(x)^t = g^d + A(x) \cdot B(x) + p M(x), \quad (4)$$

wo $M(x)$ ein Polynom von höchstens $(n-1)$ -tem Grade ist. Es sei nun ϑ eine Wurzel von

$$A(x) = 0,$$

folglich nach (4)

$$\varphi(\vartheta)^t = g^d + p \cdot M(\vartheta). \quad (5)$$

Ferner sei $P(\vartheta)$ der durch ϑ erzeugte Körper und \mathfrak{p} ein Primideal, das in p aufgeht. Wenn der Grad von \mathfrak{p} gleich f ist, genügen alle ganzen Zahlen ω von $P(\vartheta)$, welche nicht durch \mathfrak{p} teilbar sind, der Kongruenz

$$\omega^{p^f} - 1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Aus (5) sieht man, daß $\varphi(\vartheta)$ nicht durch \mathfrak{p} teilbar sein kann, weil sonst a durch p teilbar würde. Nach (5) ist

$$\varphi(\vartheta)^t \equiv g^d \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Erheben wir diese Kongruenz zur Potenz $\frac{p^f-1}{t}$, so kommt heraus

$$\varphi(\vartheta)^{p^{f-1}} \equiv g^{d \cdot \frac{p^f-1}{t}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Soll jetzt

$$g^{d \cdot \frac{p^f-1}{t}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

sein, so muß bekanntlich auch

$$g^{d \cdot \frac{p^f-1}{t}} \equiv 1 \pmod{p}$$

und folglich

$$d \cdot \frac{p^{f-1}}{t} \equiv 0 \pmod{p-1} \quad (6)$$

sein. Es ist aber

$$p^f - 1 = (p-1)(p^{f-1} + p^{f-2} + \dots + p + 1),$$

also

$$\frac{p^f - 1}{t} \equiv \frac{p-1}{t} \cdot f \pmod{p-1},$$

und die Kongruenz (6) fordert dann

$$d \cdot f \cdot \frac{p-1}{t} \equiv 0 \pmod{p-1}$$

oder

$$d \cdot f \equiv 0 \pmod{t}.$$

Wenn d und t den größten gemeinsamen Faktor δ haben, folgt daraus

$$f = i \cdot \frac{t}{\delta}, \quad (7)$$

wo i eine ganze Zahl ist.

Es ist folglich bewiesen:

Wenn ein Polynom

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t - a \pmod{p}$$

ist, weiter Ind. $a = d$ für irgend eine primitive Zahl \pmod{p} und t ein Teiler von $p-1$ ist, so kann $f(x)$ nur Faktoren von den Graden

$$m = i \cdot \frac{t}{\delta}$$

haben, wo δ der größte gemeinschaftliche Faktor von t und d ist und i eine ganze Zahl bedeutet.

Wenn hier $\varphi(x) = x$ gesetzt wird, erhält man daraus einen wichtigen Spezialfall:

Wenn in

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

alle Koeffizienten außer a_n durch eine Primzahl p teilbar sind, weiter Ind. $(-a_n) = d$ für irgend eine primitive Zahl \pmod{p} und n ein Teiler von $p-1$ ist, so wird $f(x)$ irreduzibel, wenn d zu n relativ prim ist. Wenn d und n einen größten gemeinsamen Faktor δ haben, können die Faktoren von $f(x)$ nur von den Graden

$$m = i \cdot \frac{n}{\delta}$$

sein, wo i eine ganze Zahl ist.

Die Richtigkeit dieser Sätze folgt nach (7) sogleich aus dem Verfahren zur Bestimmung der Primidealfaktoren einer Primzahl durch höhere Kongruenzen.¹

Es ist aber möglich, noch allgemeinere Sätze von dieser Art aufzustellen.

Es sei wie früher

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t - a \pmod{p}, \quad (8)$$

wo

$$a \equiv g^d \pmod{p} \quad (9)$$

sein soll. Doch braucht t kein Teiler von $p-1$ zu sein, sondern p soll zum Exponenten h für den Modul t gehören, also

$$p^h - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sein, was immer möglich ist, wenn t nicht durch p teilbar ist. Es soll untersucht werden, ob $f(x) \pmod{p}$ durch Primfunktionen von den Graden $i \cdot h$ teilbar sein kann, wo i eine ganze Zahl ist. Setzen wir darum

$$f(x) \equiv A(x) \cdot B(x) \pmod{p},$$

wo $A(x)$ eine Primfunktion vom $i \cdot h$ -ten Grade ist. Weiter sei ϑ eine Wurzel von

$$A(x) = 0,$$

\mathfrak{p} ein Primideal im Körper $P(\vartheta)$ und p durch \mathfrak{p} teilbar. Dann folgt aus (8) und (9)

$$\varphi(\vartheta)^t \equiv g^d \pmod{\mathfrak{p}}$$

Diese Kongruenz wird in die Potenz

$$\frac{p^{i \cdot h} - 1}{t}$$

erhoben, also

$$\varphi(\vartheta)^{p^{i \cdot h} - 1} \equiv g^{d \cdot \frac{p^{i \cdot h} - 1}{t}} \pmod{\mathfrak{p}},$$

und folglich muß

$$g^{d \cdot \frac{p^{i \cdot h} - 1}{t}} \equiv 1 \pmod{p} \quad (10)$$

sein. Es ist aber

$$p^{i \cdot h} - 1 = (p^h - 1)(p^{h(i-1)} + p^{h(i-2)} + \dots + p^h + 1)$$

¹ DEDEKIND: Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen. Göttinger Abh. 1878.

und folglich

$$\frac{p^{ih} - 1}{t} \equiv \frac{p^h - 1}{t} \cdot i \pmod{p-1}$$

Aus (10) folgt aber

$$d \cdot \frac{p^{ih} - 1}{t} \equiv 0 \pmod{p-1}$$

also

$$d \cdot i \cdot \frac{p^h - 1}{t} \equiv 0 \pmod{p-1}. \quad (11)$$

Wenn

$$\frac{p^h - 1}{t} = k$$

gesetzt wird und k und $p-1$ den größten gemeinsamen Faktor δ besitzen, ergibt sich aus (11)

$$d \cdot i \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{\delta}},$$

und wenn d und $\frac{p-1}{\delta}$ einen größten gemeinsamen Faktor δ_1 haben, muß folglich

$$i = s \cdot \frac{p-1}{\delta \cdot \delta_1}$$

sein, wo s eine ganze Zahl ist.

Man kann daher diese Untersuchungen so zusammenfassen:

Es ist ein Polynom gegeben:

$$f(x) \equiv \varphi(x)^t - a \pmod{p}.$$

Hier ist Ind. $a = d$ für irgend eine primitive Zahl für den Primzahlmodul p , und p soll für den Modul t zum Exponenten h gehören, also

$$\frac{p^h - 1}{t} = k$$

soll eine ganze Zahl sein. Weiter soll δ der größte gemeinsame Faktor von $p-1$ und k , δ_1 der größte gemeinsame Faktor von $\frac{p-1}{\delta}$ und d sein.

Dann kann $f(x) \pmod{p}$ nur durch eine Primfunktion m -ten Grades teilbar sein, wo m ein Multiplum von h ist, wenn m von der Form

$$m = s \cdot \frac{p-1}{\delta \cdot \delta_1} \cdot h$$

ist, wo s eine ganze Zahl bedeutet.

Wenn hier $\varphi(x) = x$ gesetzt wird, kann man natürlich wie früher einen spezielleren Satz erhalten, der für ein Polynom $f(x)$ gilt, wo alle Koeffizienten außer dem letzten durch eine Primzahl teilbar sind.

§ 3. Andere Art von irreduziblen Kongruenzen.

Nehmen wir $f(x)$ von der Form

$$f(x) \equiv \varphi(x)^{p^t} - \varphi(x) + a \pmod{p} \quad (12)$$

an, wo a nicht durch p teilbar ist. Es soll untersucht werden, ob $f(x) \pmod{p}$ durch Primfunktionen von einem Grade $t \cdot i$ teilbar sein kann, wo i eine ganze Zahl ist.

Wenn

$$f(x) \equiv A(x) \cdot B(x) \pmod{p}$$

ist, wo $A(x)$ eine Primfunktion vom Grade $t \cdot i$ sein soll, folgt aus (12)

$$\varphi(x)^{p^t} - \varphi(x) + a \equiv A(x) \cdot B(x) \pmod{p}. \quad (13)$$

Es sei nun wie früher ϑ eine Wurzel von $A(x) = 0$ und $P(\vartheta)$ der entsprechende Körper; die Primzahl p soll durch das Primideal \mathfrak{p} teilbar sein. Aus (13) folgt dann

$$\varphi(\vartheta)^{p^t} - \varphi(\vartheta) + a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (14)$$

Wenn diese Kongruenz zur p^t -ten Potenz erhoben wird, ergibt sich daraus die neue Kongruenz

$$\varphi(\vartheta)^{p^{2t}} \equiv \varphi(\vartheta)^{p^t} - a \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder nach (14)

$$\varphi(\vartheta)^{p^{2t}} \equiv \varphi(\vartheta) - 2a \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ebenso erhält man

$$\varphi(\vartheta)^{p^{3t}} \equiv \varphi(\vartheta) - 3a \pmod{\mathfrak{p}}$$

oder allgemein

$$\varphi(\vartheta)^{p^{t \cdot i}} \equiv \varphi(\vartheta) - ia \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (15)$$

Wenn daher

$$\varphi(\vartheta)^{p^{t \cdot i}} \equiv \varphi(\vartheta) \pmod{\mathfrak{p}}$$

sein soll, folgt aus (15), daß i durch p teilbar sein muß. Es ist daher bewiesen:

Wenn $f(x)$ von der Form

$$f(x) \equiv \varphi(x)^{p^t} - \varphi(x) + a \pmod{p}$$

ist, wo a nicht durch p teilbar sein soll, kann $f(x)$ nur dann durch eine Primfunktion m -ten Grades teilbar sein, wo m ein Multiplum von t ist, wenn

$$m = s \cdot p \cdot t,$$

wo s eine ganze Zahl sein soll.

Aus diesem Satze kann man mehrere wichtige Spezialfälle ableiten. Es folgt z. B., wenn $t = 1$ gesetzt wird:

Wenn $f(x)$ von der Form

$$f(x) \equiv \varphi(x)^p - \varphi(x) + a \pmod{p}$$

ist, wo a nicht durch p teilbar sei, sind die Grade der Faktoren von $f(x)$ durch p teilbar.

Für $\varphi(x) = x^r$ sieht man, daß das Trinom

$$x^{rp} - x^r + a$$

nur Faktoren vom Grade m haben kann, wenn m durch p teilbar ist.

Daraus folgt aber der Satz:

Ein Polynom

$$f(x) = x^{rp} + a_1 x^{r(p-1)} + \dots + a_{rp}$$

wo alle Koeffizienten außer a_{rp} und $a_{r(p-1)}$ durch die Primzahl p teilbar sind, $a_{r(p-1)} \equiv -1 \pmod{p}$, kann nur Faktoren vom Grade m haben, wenn m durch p teilbar ist.

Wenn $r = 1$ ist, ergibt sich daraus:

Wenn in

$$f(x) = x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_{p-1} x + a_p$$

alle Koeffizienten

$$a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$$

durch die Primzahl p teilbar sind, $a_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ und a_p nicht durch p teilbar ist, wird $f(x)$ irreduzibel.

Man hätte mehrere Sätze von dieser Art aufstellen können, ich will mich aber hiermit begnügen.



Gedruckt 6. September 1923.

DIE KRYSTALLSTRUKTUR NATÜRLICHER
UND SYNTHETISCHER OXYDE VON
URAN, THORIUM UND CERIUM

VON
V. M. GOLDSCHMIDT UND L. THOMASSEN

(MIT 1 TAFEL)

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE 1923. No. 2)



KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturvid. klasses møte den 19. januar 1923.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	5
Die Herstellung der Oxyde	8
Die untersuchten Minerale	10
Debye-Scherrer-Aufnahmen von Uranodioxyd	12
— — — — — » U_3O_8	16
— — — — — » Urantrioxyd	17
— — — — — » Thoriumdioxyd	18
— — — — — » Ceriumdioxyd	25
— — — — — und Laue-Diagramme von Bröggerit	28
— — — — — von Cleveit	31
— — — — — » geblühtem Cleveit und Bröggerit	34
— — — — — » Uranpecherz, Joachimstal	36
— — — — — und Laue-Diagramm von Thorianit	38
Die Krystalstruktur von Fluorit und Yttrifluorit	40
Die Zusammensetzung und Atomanordnung der Uranoxydminerale	41
Zusammenfassung	45
Anhang: Röntgenspektrographische Analyse des Ceriumdioxydes	46



Einleitung.

Unsere Untersuchung umfaßt Studien über die Krystalstruktur der verschiedenen natürlichen Oxyde von Uran und Thorium, nämlich die Minerale *Uranpecherz*, *Bröggerit*, *Cleveit*, *Thorianit*, sowie die Krystalstruktur der reinen Oxyde UO_3 , U_3O_8 , UO_2 , ThO_2 und CeO_2 .

Unsere Untersuchungen wurden im mineralogischen Institut der Universität in Kristiania ausgeführt. Die Arbeit wurde von V. M. GOLDSCHMIDT geplant und geleitet, derselbe führte die krystallographisch-optischen Untersuchungen aus und berechnete und deutete die Röntgenaufnahmen. L. THOMASSEN führte die chemisch-präparative Arbeit aus und hat die zahlreichen Röntgendiagramme aufgenommen.

Im Folgenden sei zunächst die Herstellung der reinen Präparate und deren Krystalstruktur beschrieben und dann die Krystalstruktur der analogen natürlichen Uran- und Thoriumminerale.

Die Frage nach der Anordnung der Sauerstoffatome in manchen der untersuchten Stoffe ließ es erwünscht erscheinen, auch die Krystalstruktur von *Yttrfluorit* in den Bereich unserer Untersuchung aufzunehmen und unsere Ergebnisse hierüber im Anschluß an die Beschreibung der Uran- und Thorium-Minerale zu veröffentlichen.

Hierauf bringen wir als letzten Abschnitt einige Schlußfolgerungen, die aus unserer Untersuchung abgeleitet werden können.

Die untersuchten Minerale stammen teils aus der Sammlung des mineralogischen Instituts, teils aus der Sammlung des geologischen Museums, für letztere sprechen wir Herrn Professor J. SCHEDELIG unseren besten Dank aus. Für Materiel von *Cleveit* (Arendal) nebst Angaben über dessen Zusammensetzung sind wir Frl. Docent Dr. E. GLEDITSCH zu Dank verpflichtet.

Wir benutzen gern die Gelegenheit, Herrn Dr. A. HADDING von der Universität Lund unsern besten Dank auszusprechen, für die wertvolle Hilfe, die er uns bei der Einrichtung der Röntgenabteilung an unserem Institut zuteil werden ließ.

Nachdem unsere Untersuchung bereits druckfertig war, erschien eine Abhandlung von O. MÜGGE¹, worin die Überzeugung geäußert wird, daß solche Minerale wie Uranpecherz, Bröggerit und Thorianit am vollständigsten metamikt umgebildet seien, also ihre Krystallstruktur besonders weitgehend verloren hätten. Unsere Resultate haben diese Vermutung nicht bestätigt. Uebrigens hat L. VEGARD² schon vor mehreren Jahren mitgeteilt, dass er an Bröggerit und Thorianit nach der Bragg-Methode sehr schwache Reflexionen erhalten hat.

Die Debye-Scherrer-Diagramme wurden mit der Strahlung einer *Hadding-Siegbahn*-Metallröntgenröhre (mit Aluminiumfenstern) aufgenommen. Als Strahlungsquelle diente eine Eisenantikathode. Die Zahlen für Spannung, Stromstärke und Belichtungsdauer werden bei den einzelnen Aufnahmen mitgeteilt. Als Kamera wurde das von HADDING³ beschriebene sehr einfache Modell benutzt; Durchmesser der Filmtrommel in den drei benutzten Kameras 49,4, 49,5 und 49,8 mm. bis zur Oberfläche der ersten Filmhaut (doppeltbelegter Film wurde angewandt). Bei der Berechnung wird unter Berücksichtigung der Filmdicke der effektive Durchmesser gleich 49,52, 49,65 und 49,9 mm. angenommen. Die Öffnung der kreisrunden Eintrittsblende beträgt 2,6 mm., ihre Länge 30 mm., der Abstand zum Stäbchen 12 mm.; die Substanz wurde in cylindrischen Gelatinehülsen von 2,0 mm. innerem Durchmesser angewandt. Bei Substanzen, die durch Röntgenstrahlung zu Luminescenz gebracht werden, wurde der Film mit schwarzem Papier bedeckt (vergl. S. 22).

Bei einer der Aufnahmen (Bröggerit) wurde versuchsweise statt der runden Blende eine Spaltblende von 1,0 mm. Breite, 2,0 Höhe angewandt, die ein sehr scharfes aber wesentlich schwächeres Diagramm liefert, hierzu natürlich ein entsprechend dünnerer Substanzcylinder.

Bei der Berechnung der Diagramme wurden folgende Korrekturen angewandt.

Der Abstand $2d$ der Außenkanten je zweier gleichwertiger Interferenzlinien wurde mit einem in halbe mm. geteilten Maßstabe gemessen. Diese Zahlen $2d$ werden in den Tabellen der einzelnen Aufnahmen mitgeteilt.

Als Korrektur, die auf die Stäbchendicke Bezug hat, unter Annahme eines streng parallelen Primärstrahlenbündels wird nach A. HADDING'S Vorschlag⁴ von den Zahlen $2d$ die Stäbchendicke, also in der Regel 2,0 mm. abgezogen.

¹ O. MÜGGE, Über isotrop gewordene Krystalle, *Centralbl. f. Mineralogie*, 1922, S. 721—739, S. 753—765, siehe besonders 754.

² L. VEGARD, Nye Resultater vedrørende Krystalanalyse ved Röntgenstraler Vid. Selsk. Forh. 1918, No. 1.

³ A. HADDING, *Zeitschrift für Physik* III, 1920, Heft 5, S. 369.

⁴ A. HADDING, *Centralbl. f. Mineralogie* 1921, S. 631.

Aus diesem Wert ($2d - 2,0$ mm.), welcher dem Arcus $4 \frac{\vartheta}{2}$ entspricht, wird der Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ berechnet, wobei eine Tabelle für den Trommelradius 24,7 mm. angewandt wurde, und zur Berücksichtigung der Filmdicke und des etwas verschiedenen Radius der drei Kameras je $\frac{1}{4}\%$, $\frac{1}{2}\%$ oder 1% vorher von ($2d - 2,0$ mm.) abgezogen wurden.

Dieser rohe Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ muß noch einer weiteren Korrektur unterzogen werden, die auf die Konvergenz des Primärstrahlenbündels Bezug hat. Solche Korrekturen sind von L. VEGARD¹ und O. PAULI² bereits ausführlich erörtert worden.

Die Größe letzterer Korrektur kann aus den Kameradimensionen und der Absorption berechnet werden, eventuell unter Berücksichtigung des Abstands und der Größe des Brennflecks. Die Notwendigkeit der Korrektur zeigt sich

bei regulären Krystallen sehr deutlich, indem der Wert $\frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{q}$ nicht konstant ist, sondern mit steigendem q abnimmt, um sich schließlich einem Grenzwert zu nähern. Man vergleiche die Tabelle auf S. 14. Die Korrektur besteht darin, daß man allen Winkelwerten $\frac{\vartheta}{2}$ eine Korrekturgröße K abzieht, die in erster Annäherung für alle Werte je einer Aufnahme konstant ist.

Statt die Größe K aus Kameradimensionen, Stäbchendicke u. Absorptionskoeffizienten zu berechnen, kann man bei regulären Krystallen die Korrektur aus den gemessenen Werten für $\frac{\vartheta}{2}$ ableiten. Aus der vorläufigen Berechnung auf Grundlage der unkorrigierten Winkelwerte findet man

die ganzzahligen Koeffizienten q des Ausdrucks $\frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{q}$. Man wählt unter diesen Werten zwei an gut meßbaren Linien gewonnene, den einen mit möglichst kleinem, den andern mit möglichst großem q (doch nicht allzugroßem, da die Krümmung der freien Enden des Films oft fehlerhaft sein kann). Aus diesen Werten erhält man mittelst der Gleichungen $\sin^2 \left(\frac{\vartheta_1}{2} - K \right) = q_1 \cdot X$ und $\sin^2 \left(\frac{\vartheta_2}{2} - K \right) = q_2 \cdot X$ die gesuchte Korrektur K , die von allen Werten $\frac{\vartheta}{2}$ der Aufnahme abzuziehen ist. Ist

¹ L. VEGARD, Die Konstitution der Mischkrystalle und die Raumpfüllung der Atome, Vid. Selsk. Skr. M.-N. Kl. 1921, No. 6.

² O. PAULI, Zeitschr. f. Krystallogr. 56, Heft VI, S. 591.

die Korrektur richtig berechnet, so sollen die Werte für X , den irrationalen Koeffizienten der quadratischen Form, keinen systematischen Gang mehr zeigen.

Bei unserer Versuchsanordnung beträgt K meist 30—70 Winkelminuten, im Mittel etwa 50' bei stark absorbierenden Stoffen. Letzterer Wert wird, als näherungsweise richtig, bei Berechnung nichtregulärer stark absorbierender Stoffe zugrundegelegt. Der gemeinsame Faktor X der quadratischen Form regulärer Krystalle wird aus den Sinusquadraten sämtlicher Linien berechnet, wobei man jedem der gemessenen Werte $q \cdot X$ ein Gewicht proportional q beilegt.

Der Berechnung wurden folgende Wellenlängen zugrundegelegt:

$$Fe\ K\alpha = 1.934 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}, \quad Fe\ K\beta = 1,754 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Die Stärke der Linien wird mit folgender Skala bezeichnet:

ststst = außerordentlich stark, stst = sehr stark, st = stark, s-st = schwach bis stark, s = schwach, ss = sehr schwach, sss = kaum sichtbar, ? = zweifelhaft.

Die Herstellung der Oxyde.

Die untersuchten Uranoxyde wurden aus Uranylacetat auf dem Wege über Uranylнитrat hergestellt¹.

UO₃ Das Urantrioxyd wurde aus Ammoniumuranat durch 16-stündiges Erhitzen auf 230° und darauffolgendes 20-stündiges Erhitzen auf 260—270° C. gewonnen. Es ist ein hellorange-gelbes Pulver, Farbzeichen nach der Skala von OSTWALD etwa 13 pc. Selbst bei 1600-facher Vergrößerung ist im Mikroskope keine Andeutung krystalliner Beschaffenheit erkennbar, es ist völlig isotrop.

Das Präparat muß außer UO₃ noch kleine Mengen flüchtiger Bestandteile enthalten, denn der Glühverlust in Luft und in Wasserstoff ist wesentlich höher, als es dem Übergang von UO₃ in U₃O₈, respektive UO₂ entsprechen würde, wahrscheinlich handelt es sich um kleine Mengen H₂O. Das Urantrioxyd erwies sich als sehr hygroskopisch.

UO₂ Das Urandioxyd wurde durch Erhitzen des Urantrioxydes im Wasserstoffstrome hergestellt. Im Platinschiffchen wurden 0,7411 g. eine Stunde auf 1200° C. gehalten und im Wasserstoffstrome gekühlt, der Gewichtsverlust war 0,0467 g., also 6,30 %, während für den Übergang von UO₃ in UO₂ 5,60 % berechnet wird. Das angewandte Urantrioxyd enthielt also noch 0,70 % flüchtiger Stoffe.

Das Urandioxyd erwies sich als schwarzes Pulver mit Stich ins Oliven-grüne (04 p n), der grünliche Ton tritt an feinzerriebenen Stoffe noch

¹ Entsprechend den Vorschriften in: L. VANINO, Handbuch der präparativen Chemie Bd. I, S. 600 (1913).

stärker hervor (04 p l). Im Mikroskop erwies es sich als deutlich krystallisiert. Die optisch völlig isotropen Krystalle (anscheinend meist Oktaëder) erreichten bis 0,003 mm. Durchmesser, sie sind mit grünlichgelber Farbe durchscheinend. Dies Präparat wird im folgenden Kapitel als A bezeichnet.

In der Literatur wird die Farbe des Urandioxydes meist als bräunlich oder rötlich angegeben. Wir stellten auch ein anderes Präparat von Urandioxyd dar, indem U_3O_8 , das durch Glühen von Uranylнитrat erhalten war, $2\frac{1}{2}$ Stunden bei $900^\circ C$ im Wasserstoffstrome erhitzt wurde. Dieses Präparat war makroskopisch grünlichbraun, OSTWALDS Skala 08 p l, feingepulvert 08 p i; unter dem Mikroskope ließ es an durchscheinenden Partikeln rötlichgelbe Farbe erkennen. Es war ebenfalls völlig isotrop, Spuren von Krystallbegrenzung waren nicht sicher erkennbar (möglicherweise Würfel). Dies Präparat ist im Folgenden als B bezeichnet.

Zur Darstellung von U_3O_8 wurde das Urantrioxyd in Luft geglüht. U_3O_8

Bei 540° wurde die Farbe etwas dunkler orange-gelb, bei 600° etwas mehr gelbgrün, bei $750-785^\circ$ olivengrün (04 p l), bei $1000-1040^\circ$ schwarz mit Stich ins Olivengrüne (04 p n).

Folgende prozentische Gewichtsverluste wurden an 0,9642 g. beobachtet:

$540^\circ C.$	16 Stunden	1,05 %
600°	5 Stunden	1,30
$750-785^\circ$	16 Stunden	2,59
$750-785^\circ$	5 Stunden	2,59
785°	16 Stunden	2,59
$1000-1040^\circ$	5 Stunden	2,76
$1000-1040^\circ$	3 Stunden	2,75

Der theoretische Gewichtsverlust beim Übergang von UO_3 in U_3O_8 beträgt 1,86 %; falls das Urantrioxyd noch 0,7 % flüchtiger Stoffe enthielt (siehe oben), wäre also ein Gewichtsverlust von 2,6 % zu erwarten.

Das 37 Stunden bis 785° erhitzte Präparat wird im folgenden als A bezeichnet, das 8 Stunden bis 1040° erhitzte als B.

Beide Präparate zeigen in feingepulvertem Zustande einen wesentlich helleren olivengrünen Ton als vor dem Pulvern, etwa 04 p i (785°) und 04 p l (1040°).

Präparat A zeigte unter dem Mikroskop bei 1600-facher Vergrößerung kleinste gelblichgrün durchsichtige rundliche Körner, scheinbar amorph (die Röntgenuntersuchung ergab, daß es krystalline Substanz enthält, siehe das folgende Kapitel).

Präparat B ließ deutliche Kornvergrößerung durch Krystallisation erkennen. Die Größe der Krystalle erreichte 0,001—0,002 mm., sie sind

gelbgrün durchsichtig, meist von kurzprismatischem Habitus, oft zu mehreren verwachsen. Soweit die geringe Korngröße eine Beobachtung erlaubte, sind die Krystalle doppelbrechend.

ThO₂ Das Thoriumdioxyd wurde durch Glühen aus Thoriumkarbonat (KAHLBAUM) hergestellt. Das erste der untersuchten Präparate (A) wurde ohne irgendwelche Zusätze mehrere Stunden auf helle Rotglut erhitzt, das zweite (B) ebenso lange unter Zusatz einer kleinen Menge Borax und Kochsalz. Präparat B wurde mit verdünnter Salzsäure und Wasser gewaschen.

Während A rein weiß war, zeigte B einen gelblichen Ton, wie er für krystallisiertes Thoriumdioxyd angegeben wird. Präparat A zeigte im Mikroskop nur rundlich begrenzte kleinste Körner, B hingegen scharfe Würfel von 0,001—0,002 mm Kantenlänge. Beide Präparate waren völlig isotrop. Ein drittes Präparat (C) wurde durch 2½ stündiges Glühen des Thoriumkarbonates bei 1220° gewonnen. Es erwies sich unter dem Mikroskope als deutlich krystallin, es ist völlig isotrop. Die Farbe ist ganz schwach gelblich.

CeO₂ Ceriumdioxyd wurde durch Glühen eines Präparats von Cernitrat hergestellt, das von der Firma Drossbach in Freiburg vor vielen Jahren bezogen war. Nach 4-stündigem Erhitzen auf 980—990° C. zeigte das Dioxyd eine hell gelblichweiße Farbe, Präparat A. Under dem Mikroskop sind neben isotroper Substanz, welche der Hauptbestandteil ist, auch doppelbrechende Körner erkennbar.

Umkrystallisation durch 20-stündiges Behandeln mit Kaliumbisulfat von 500° bis 900° steigend, nach dem Verfahren von ŠTERBA¹ ergab (grünliche (88 ca) bis 0,05 mm. große reguläre Krystalle, $\{111\}$ herrschend $\{100\}$ untergeordnet, völlig isotrop, gelblichgrün durchsichtig, nur wenig verunreinigt durch anisotrope Einschlüsse, Präparat B. Ein Analysenröntgenspektogramm dieses Präparates wird auf S. 46 beschrieben.

Die untersuchten Minerale.

Bröggerit.

Bröggerit ist bekanntlich ein sehr frischer Thoruranin mit oktaëdrischem Habitus.

Das Material bestand aus glänzenden tiefschwarzen Krystallen von Karlshus, Raade. Die 1—2 cm. großen Krystalle zeigten das Oktaëder herrschend, untergeordnet daneben Würfelflächen. Die Farbe des feingepulverten Bröggerits entspricht dem Farbzeichen 04 p n. Unter dem Mikroskop ist er grünlich oder gelblich durchscheinend und ganz isotrop.

¹ Siehe das Handbuch von VANINO, S. 617.

Ein Krystall wurde gepulvert und ausgesuchtes Material, das keinerlei sichtbare Verunreinigungen enthielt, zur Debye-Scherrer-Aufnahme benutzt. Aus einem zweiten und dritten Krystall wurden Platten, ungefähr parallel einer Oktaëderfläche, zur Laue-Aufnahme geschliffen. Ein Krystall des benachbarten Fundortes Aanneröd lieferte einen Würfelschnitt.

Cleveit.

Als Cleveit bezeichnet man ziemlich unfrischen Uraninit, meist Thoruranin mit in der Regel würfeligem Habitus, wie er in den Granitpegmatitgängen der norwegischen Südküste (sowie Sätersdalen) an mehreren Orten vorkommt. Bei der Umwandlung findet anscheinend in erster Linie eine Oxydation des Urandioxydes statt. Die Analysen zeigen relativ hohe Gehalte an Urantrioxyd, manchmal ist Urantrioxyd sogar weit überwiegend über das Dioxyd. Sehr häufig zeigen die Krystalle eine Hülle aus orangegelbem Urantrioxydhydrat und schwefelgelbem Uranylkarbonat (Rutherfordin), mitunter mit konzentrischer Anordnung, das Uranylkarbonat als äußerste Hülle.

Drei Vorkommen wurden untersucht.

Ein großer Krystall von Svinør (mit etwa 5 cm. Durchmesser) lieferte aus dem innersten Kern tiefschwarze, noch deutlich krystallinische Substanz für ein Debye-Scherrer-Diagramm. Der Cleveit von Svinør hat als feines Pulver die Farbe o₄ p₁, die Hauptmasse ist eine isotrope Substanz, wie Bröggerit grünlich oder gelblich durchscheinend, daneben ein doppelbrechendes Aggregat heller gelbgrüner Substanz, wohl Uranocker.

Ein etwa 2 cm. großer Würfel von Auselmyren bei Tvedestrand, der außen in die obenerwähnten gelben Sekundärprodukte umgewandelt war, erschien im Inneren bräunlichschwarz; der Bruch war ausgesprochen muschelig, wie bei metamikt umgewandelten Mineralen. Zum Debye-Scherrer-Diagramm wurde Substanz des dunkeln Kernes möglichst nahe der gelben Hülle herauspräpariert. Dieser Cleveit hat als feines Pulver die Farbe o₄ p₁. Eine isotrope Substanz, schwach durchscheinend in denselben Farbtönen wie Bröggerit liegt in einer niedriger lichtbrechenden Grundmasse, die hell gelbgrün gefärbt ist und stellenweise Doppelbrechung erkennen läßt.

Ferner untersuchten wir einen Cleveit von Arendal, den uns Frl. Docent Dr. E. GLEDITSCH freundlichst zur Verfügung gestellt hatte. Dieser Cleveit enthält nach ihrer Angabe fast kein ThO₂, und der Urangehalt liegt ganz überwiegend als UO₃ vor. Auch W. F. HILLEBRAND¹ hat einen stark oxydierten Cleveit von Arendal analysiert. Dr. GLEDITSCHS Material bestand aus schwarzen Krystallbruchstücken, die Farbe feinen Pulvers entspricht o₄ p_n. Unter dem Mikroskop zeigte der Cleveit dasselbe Bild, wie der oben erwähnte Krystall von Svinør.

¹ F. W. HILLEBRAND, U. S. A. Geol. Surv. Bull. 75, 1891. 64.

Uranpecherz.

Zwei verschiedene Handstücke von Joachimstal wurden zu den Debye-Scherrer-Aufnahmen benutzt.

Das eine, von Herrn Hofrat R. PŘIBRAM in Wien 1909 durch Tausch erworben (A), war sehr rein und frisch, ohne sichtbare Beimengungen.

Das zweite (B), von der Firma Krantz vor vielen Jahren erworben, war ziemlich unfrisch, überzogen mit grünlichgelben Zersetzungsprodukten und stark mit sulfidischen Erzen durchwachsen. Es gelang indessen, eine genügende Menge reinen Materiales zu isolieren.

Beide Stücke zeigten den typischen muscheligen Bruch und das amorphe Aussehen, wie es für Uranpecherz kennzeichnend ist. Das Pecherz ist rein schwarz, in feinem Pulver besitzt es den Farbton 04 pn, unter dem Mikroskop gelb oder grünlich durchscheinend, völlig isotrop.

Thorianit.

Das untersuchte Material bestand aus bräulichschwarzen, stark glänzenden Krystallen mit der Fundortsangabe »Galle-District, Ceylon«, gekauft von der Firma Foote. Es waren Würfel von etwa 2 mm. Kantenlänge, sämtlich verzwillingt nach dem Spinellgesetze, wobei die Ecken des einen Individuums nasenförmig aus den Flächen des anderen herausragten, wie bei den bekannten Zwillingen von Flußspat. Der Farbton des Thorianits entspricht dem Farbzeichen 13 pn, als feines Pulver 8 ni. Unter dem Mikroskope sind feine Körner durchsichtig, teils gelb, teils (seltener) grünlich, in der Regel isotrop, einige doppelbrechend.

Ein Zwillingkrystall wurde für die Debye-Scherrer-Aufnahme gepulvert, ein zweiter wurde zur Laue-Aufnahme benutzt.

Nach W. R. DUNSTAN und B. M. JONES¹ enthält der Thorianit vom Galle-District ca. 27—33 % Uranoxyde und ca. 1—2 % der seltenen Erden. Andere Vorkommen auf Ceylon enthalten bis 8 % CeO₂.

Debye-Scherrer-Aufnahmen von Urandioxyd.

Eine Aufnahme an dem grünlichschwarzen Urandioxydpräparat A (vergl. S. 9), hergestellt durch Reduktion von UO₃ im Wasserstoffstrome bei 1200°, soll zunächst beschrieben werden.

Spannung 40—41 Kilovolt, Stromstärke 15—17 Milliampère, Aufnahmezeit 40 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kameradurchmesser 49,9 mm.

¹ W. R. DUNSTAN & B. M. JONES, A Variety of Thorianite from Galle, Ceylon. Proc. R. Soc. London A, LXXVII, 1906, p. 546.

Der Film zeigte mittelstarke allgemeine Schwärzung, die Interferenzstreifen sind ausgezeichnet kräftig. Auf Fig. 3 Tafel I ist das Diagramm abgebildet.

In der Tabelle I sind die Resultate der Messung und Berechnung mitgeteilt. Die erste Spalte enthält eine fortlaufende Nummerierung der Linien. Die zweite Spalte enthält die Intensitäten (vergl. S. 6), die Linie 21 zeigte sich ganz besonders stark. Die dritte Spalte bringt die gemessenen (Außenkanten) Werte $2d$ in Millimetern, die vierte die Winkelwerte $\frac{\vartheta}{2}$, nach Abzug der HADDING-Korrektion berechnet aus $2d$ und dem effektiven Durchmesser der Kamera (vergl. S. 6). Die fünfte Spalte zeigt die Werte von $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ der α -Linien und deren Deutung als ganzzahlige Multipla eines konstanten Faktors. Man erkennt den systematischen Gang des konstant sein sollenden Faktors (vergl. S. 7) und die Notwendigkeit einer Korrektion für die Nichtparallelität des Primärstrahlenbündels. Die Zahlen der fünften Spalte zeigen, daß ein Abzug von 60 Winkelminuten zu einer befriedigenden Konstanz des Faktors führt. Die sechste Spalte enthält die korrigierten Winkelwerte, die siebente Spalte die $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ der α -Linien als Multipla eines konstanten Faktors. Die achte Spalte enthält die Werte von $\sin \frac{\vartheta}{2}$, die man erhält, wenn man als konstanten Faktor 0,03125 annimmt. Die neunte Spalte enthält zum Vergleiche die Sinuswerte für die korrigierten Winkel $\frac{\vartheta}{2}$, die Übereinstimmung ist durchaus befriedigend, wenn man von den allerschwächsten und daher nur schwer meßbaren β -Linien absieht. Die zehnte Spalte enthält die Indices der reflektierenden Flächen, wobei in üblicher Weise Spektren höherer Ordnung durch Multiplikation der Indices mit der Ordnungszahl bezeichnet sind.

Die Aufnahme zeigt das typische Bild eines seitencentrierten regulären Raumgitters. Sämtliche Linien sind vertreten, die in dem erreichbaren Winkelraume bei einem solchen Gitter zu erwarten sind, und zu allen α -Linien sind auch die entsprechenden β -Linien nachweisbar, sowie drei β -Linien, deren entsprechende α -Linien selbst nicht mehr im Reflexionsbereich liegen.

Nur eine beobachtete Linie, No. 15, die als äußerst schwache Andeutung sichtbar ist, erlaubt keine einfache Deutung mittelst dieses Gitters. Die Linie 15 könnte eventuell als Reflexion von Ni-K α an der Fläche $\{422\}$ aufgefaßt werden, da die benutzte Eisenantikathode Spuren von Nickel¹

¹ Ein Analysenspektrogramm liess jedoch keine Nickellinien erkennen, das Eisen war völlig rein.

Tabelle I. UO_2 , Präparat A.

No.	Särke	$2d$	a. ohne Konvergenzkorrektur	
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$
1	s	32,0	17 ⁰ 11'	
2	stst	34,8	18 ⁰ 51'	0,104 = 3 × 0,03467
3	sss	35,7	19 ⁰ 18'	
4	s—st	39,7	21 ⁰ 39'	0,136 = 4 × 0,03400
5	s	50,7	27 ⁰ 47'	
6	stst	56,0	31 ⁰ 2'	0,266 = 8 × 0,03325
7	s	59,4	32 ⁰ 57'	
8	ss	62,4	34 ⁰ 41'	
9	stst	66,4	37 ⁰ 0'	0,362 = 11 × 0,03291
10	s—st	69,6	38 ⁰ 49'	0,393 = 12 × 0,03275
11	sss	73,0	40 ⁰ 47'	
12	ss	81,0	45 ⁰ 24'	
13	s—st	82,1	46 ⁰ 0'	0,517 = 16 × 0,03231
14	ss	83,5	46 ⁰ 48'	
15	sss	88,0	49 ⁰ 25'	
16	stst	91,4	51 ⁰ 20'	0,610 = 19 × 0,03211
17	stst	94,6	53 ⁰ 12'	0,642 = 20 × 0,03210
18	s—st	101,8	57 ⁰ 18'	
19	ststst	108,2	60 ⁰ 57'	0,764 = 24 × 0,03183
20	sss	116,2	65 ⁰ 36'	
21	stststst	119,8	67 ⁰ 37'	0,856 = 27 × 0,03170
22	st	128,4	72 ⁰ 32'	
23	s—st	132,7	75 ⁰ 0'	

No.	Korrektion $K = 60'$				
	$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.	Fläche
1	16 ⁰ 11'		0,277	0,279	β 111
2	17 ⁰ 51'	0,0942 = 3 × 0,03140	0,306	0,307	111
3	16 ⁰ 18'		0,321	0,314	β 200
4	20 ⁰ 39'	0,125 = 4 × 0,03125	0,352	0,353	200
5	26 ⁰ 47'		0,453	0,451	β 220
6	30 ⁰ 2'	0,251 = 8 × 0,03137	0,500	0,501	220
7	31 ⁰ 57'		0,532	0,529	β 311
8	33 ⁰ 41'		0,555	0,555	β 222
9	36 ⁰ 0'	0,346 = 11 × 0,03145	0,586	0,588	311
10	37 ⁰ 49'	0,376 = 12 × 0,03133	0,612	0,613	222
11	39 ⁰ 47'		0,641	0,640	β 400
12	44 ⁰ 24'		0,699	0,700	β 311
13	45 ⁰ 0'	0,500 = 16 × 0,03125	0,707	0,707	400
14	45 ⁰ 48'		0,717	0,717	β 420
15	48 ⁰ 25'			0,748	?
16	50 ⁰ 20'	0,593 = 19 × 0,03121	0,771	0,770	331
17	52 ⁰ 12'	0,624 = 20 × 0,03120	0,791—785	0,790	420, β 422
18	56 ⁰ 18'		0,833	0,832	β 511, β 333
19	59 ⁰ 57'	0,750 = 24 × 0,03125	0,866	0,866	422
20	64 ⁰ 36'		0,907	0,903	β 440
21	66 ⁰ 37'	0,843 = 27 × 0,03122	0,919	0,918	511, 333
22	71 ⁰ 32'		0,948	0,949	β 531
23	74 ⁰ 0'		0,962	0,961	β 442, β 600

enthalten könnte; für eine solche Linie ergäbe sich $\sin \frac{\theta}{2} = 0,787$. Auch die Deutung als Reflexion an $\{411\}$ $\{330\}$ ist möglich. Ferner könnte es die starke Linie 10 des U_3O_8 sein.

Eine Aufnahme an dem grünlichbraunen Urandioxydpräparat B, dargestellt durch Reduktion im Wasserstoffstrome bei 900° , wurde ebenfalls durchgemessen. Spannung 39—40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 60 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode, dieselbe Kamera wie bei A.

Das Diagramm zeigte ziemlich starke allgemeine Schwärzung. Folgende Linien wurden beobachtet, die Nummern entsprechen den Nummern der Tabelle I: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23. Es sind also alle α -Linien der Tabelle I vorhanden, hingegen fehlen einige der β -Linien, sowie die fragliche Linie 15.

Die gemessenen Werte für $2d$ sind bei B praktisch dieselben wie für die Aufnahme des Präparats A; bei den α -Linien betragen die Unterschiede der gemessenen $2d$ höchstens $\pm 0,2$ mm. ohne irgendwelchen systematischen Gang. Dementsprechend beträgt der Faktor der quadratischen Form beim Präparat B ebenfalls 0,03125. Diese Ergebnisse zeigen, daß die beiden Präparate offenbar identische Krystallstruktur besitzen.

Um Näheres über die Krystallstruktur des Urandioxydes zu erfahren, muß man zunächst berechnen, wie viele Moleküle UO_2 dem Elementarwürfel zugeordnet sind.

Als gemeinsamen Faktor der quadratischen Form nehmen wir 0,03125 $\pm 0,0001$ an.

Die Seitenlänge des Elementarwürfels ergibt sich zu folgender Zahl

$$a = 5,47 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Hieraus bestimmen wir die Zahl der Moleküle im Elementarwürfel nach der bekannten Formel, worin die Dichte des Urandioxyds nach W. F. HILLEBRANDS Untersuchungen¹ gleich 10,95 gesetzt wird, das Molekulargewicht von UO_2 ist 270,2. Man findet

$$n = 4,02,$$

im Elementarwürfel werden vier Moleküle UO_2 absorbiert, die Uranatome müssen also vierzählige Lagen im Elementarwürfel einnehmen, die Sauerstoffatome hingegen achtzählige.

Zunächst wollen wir die Anordnung der Uranatome betrachten.

Eine Betrachtung der Punktanordnungen in Raumgruppen des regulären Systems lehrt uns, daß eine Reihe verschiedener Möglichkeiten vorliegt, vier gleichwertige Atome im Elementarwürfel anzubringen. Ein

¹ HILLEBRAND, U. S. A. Geol. Surv. Bull. 117, 1893, p. 37.

Blick auf die Tabelle I zeigt uns indessen, daß wir nur solche Möglichkeiten in Betracht zu ziehen brauchen, die einer Anordnung der Uranatome in flächencentrierten Würfeln von der Kantenlänge des Elementarwürfels entsprechen. Der flächencentrierte Würfel der Uranatome kann nun entweder mit dem gleichgroßen Elementarwürfel der betreffenden Raumgruppe räumlich zusammenfallen, oder gegen denselben um einen bestimmten Betrag verschoben sein.

Die Anordnung der Sauerstoffatome wird in einem der folgenden Abschnitte in Anknüpfung an die Diagramme von Thoriumdioxid näher erörtert werden.

Debye-Scherrer-Aufnahmen von U_3O_8 .

Zwei Präparate dieses Stoffes wurden untersucht, zunächst sei B beschrieben, da dies Diagramm linienreicher ist als A. Spannung 39–40 Kilovolt, Stromstärke ca. 15 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm, effektiver Kameradurchmesser 49,52 mm.

Der Film zeigt mittelstarke allgemeine Schwärzung, hauptsächlich um den Primärstrahl, und eine Anzahl recht scharfer, wenn auch nicht sehr starker Linien. Die ersten Linien sind wegen der allgemeinen Schwärzung schwer feststellbar.

In der folgenden Tabelle II sind sämtliche beobachtete Linien angeführt, sowie die zugehörigen Sinuswerte und für 6 sichere α -Linien die Sinusquadrate.

Tabelle II. U_3O_8 , B.

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 50'$		
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.
1	s??	26,6	$13^0 23'$		0,231
2	s??	31,6	$16^0 17'$		0,280
3	st	40,6	$21^0 31'$	0,135	0,367
4	s?	49,0	$26^0 22'$		0,444
5	s-st	54,6	$29^0 38'$		0,494
6	st	60,8	$33^0 13'$	0,300	0,518
7	s-st	68,9	$37^0 51'$	0,377	0,614
8	s-st	77,5	$42^0 51'$		0,680
9	ss?	84,7	$47^0 2'$		0,732
10	st	88,3	$49^0 6'$	0,572	0,756
11	ss	92,5	$51^0 32'$		0,783
12	ss?	97,0	$54^0 20'$		0,812
13	st	105,0	$58^0 44'$	0,731	0,855
14	st	110,6	$61^0 24'$	0,771	0,878
15	s	115,0	$64^0 26'$		0,902
16	s-st	121,7	$68^0 24'$		0,930
17	s	131,4	$75^0 8'$		0,967
18	s-st	137,7	$77^0 41'$		0,977

Ein Diagramm des Präparats A, hergestellt bei 785°C . wurde ebenfalls aufgenommen.

Spannung ca. 40 Kilovolt, Strömstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdurchmesser 2,0 mm., effektiver Kameradurchmesser 49,65 mm. Der Film zeigte mittelstarke allgemeine Schwärzung und schwache aber ziemlich scharfe Linien, die indessen mit steigendem Ablenkungswinkel merkbar verbreitert werden. Die Korngröße der einzelnen Krystalle ist also offenbar merklich geringer als im Präparat B, die Krystallstruktur selbst ist identisch in A und B.

Folgende Linien wurden nachgewiesen, die mit () bezeichneten sind sehr schwach, die Nummern beziehn sich auf die Tabelle II des Präparats B.

(1), 3, 5, 6, 7, 8 (9), 10, 11, (12?), 13, 14, 15, sowie eine Linie (6 a) mit $\frac{\delta}{2}$ kor = $39^{\circ} 33'$.

Die Werte $2d$, korrigiert auf den Radius der Aufnahme B, zeigen, was die stärkeren Linien anbelangt, Unterschiede von $\pm 0,3$ mm. gegenüber B, ohne irgendwelchen systematischen Gang.

Die Ergebnisse der Messung können nicht auf irgendwelche reguläre Raumgruppe bezogen werden. Hiermit stimmt es, daß die Substanz optisch anisotrop ist, soweit die Korngröße der Krystalle eine Untersuchung gestattet. Das Krystallsystem selbst ist unbekannt, wir wissen auch nicht, wie viele der drei Uranatome und der acht Sauerstoffatome untereinander gleichwertig sind¹. Unter diesen Umständen erscheint es vorläufig aussichtslos, eine Berechnung des Diagramms zu unternehmen.

Sobald es gelingt, goniometrisch untersuchbare Krystalle von U_3O_8 darzustellen, könnte eine Berechnung hingegen erfolgreich sein, da unzweifelhafte ganzzahlige Relationen zwischen den stärkeren Linien vorliegen.

Als sicheres Ergebnis steht aber fest, daß U_3O_8 eine von UO_2 wesentlich verschiedene Atomanordnung besitzt, daß es nicht regulär kristallisiert, und daß die in der Natur vorkommenden Uranoxydminerale nicht die Krystallstruktur des synthetischen U_3O_8 besitzen.

Debye-Scherrer-Aufnahmen von Urantrioxyd.

Zwei Diagramme wurden aufgenommen.

I. Spannung 39 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 55 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., effektiver Kameradurchmesser 49,52 mm.

Das Diagramm zeigte mittelstarke allgemeine Schwärzung, besonders um den Durchstichpunkt an der Mitte, ein verwaschener Interferenzring

¹ Nur bei regulärer Symmetrie könnten alle drei Uranatome und alle acht Sauerstoffatome gleichwertig sein.

von etwa 9,5 mm. Durchmesser ist erkennbar, um diesen noch zwei schwächere Ringe mit 13 und 20 mm. Durchmesser.

Von Reflexionslinien ist nur eine ganz zweifelhafte Andeutung einer Linie bei $2d = 108$ mm, sichtbar.

II. Spannung 40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 55 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., effektiver Kameradurchmesser 49,52 mm. Das Diagramm zeigte etwas stärkere Allgemeinschwärzung als das vorige, und schattenhafte Andeutung von Interferenzringen um den Primärfleck.

Einige außerordentlich schwache Andeutungen von Linien sind erkennbar; sie sind in folgender Tabelle III zusammengestellt, die Angaben der Stärke sind nur als relativ aufzufassen.

Tabelle III.

No.	Stärke	$2d$
1	sss?	60,4
2	s?	78,0
3	s	87,6
4	sss?	94,0
5	s	97,0
6	s	108,0
7	s?	110,5

Die Linien 1, 2, 3, 7 könnten den Linien 5, 8, 10, 14 des U_3O_8 entsprechen, das Urantrioxyd selbst scheint hingegen völlig amorph zu sein.

Falls die obige Deutung der schwachen Linien richtig ist, so wäre hiermit der Beweis geliefert, daß beim Erhitzen von UO_3 in Luft bereits bei $270^{\circ}C$., etwas U_3O_8 gebildet wird. Da nun bei dieser Temperatur immer noch H_2O (und NH_3 ?) in dem aus Ammoniumuranat hergestellten Präparat enthalten ist, wäre es demnach nicht möglich *reines* UO_3 durch Erhitzen von Ammoniumuranat in Luft darzustellen, weil die Bildung von U_3O_8 schon eintritt, ehe man reines UO_3 erhalten hat.

Debye-Scherrer-Aufnahmen von Thoriumdioxyd.

Eine Aufnahme des Präparats A, hergestellt durch einfaches Glühen des Karbonats (vergl. S. 10), soll zunächst beschrieben werden.

Spannung 39–40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 60 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kameradurchmesser 49,65 mm. Der Film zeigte recht merkbare allgemeine Schwärzung, die Interferenzlinien sind im Allgemeinen nicht besonders stark. Außer

den typischen scharfen Interferenzlinien der Krystalstruktur zeigt der Film noch einen starken, allmähig abklingenden Interferenzring bei $2d = 28,5$ mm. (Mitte) und einen schwächeren desselben Typus bei $2d = 20$ mm. (Mitte); im Gebiet vom Centrum bis zum äußersten dieser Ringe ist die allgemeine Schwärzung des Films am stärksten.

Die Tabelle IV zeigt die Resultate der Messung und Berechnung. Die Linien sind fortlaufend nummeriert (die beiden obenerwähnten ersten Ringe sind nicht in die Tabelle aufgenommen). Die gemessenen Werte $2d$ sind hierauf angeführt. Von diesen Werten wird dann die Stäbchendicke abgezogen, der Winkel berechnet und wegen der Nichtparallelität des Primärstrahlenbündels je 40 Winkelminuten abgezogen.

Tabelle IV. *Thoriumdioxid A.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 40'$				Fläche
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.	
1	s-st	33,0	$17^0 13'$	$0,0876 = 3 \times 0,02920$	0,298	0,296	111
2	s	34,6	$18^0 8'$		0,313	0,311	$\beta 200$
3	s-st	38,2	$20^0 13'$	$0,120 = 4 \times 0,03000$	0,345	0,346	200
4	ss	42,7	$22^0 50'$			0,388	
5	sss?	45,5	$24^0 14'$			0,410	
6	s	48,3	$26^0 5'$		0,442	0,440	$\beta 220$
7	st	53,6	$29^0 5'$	$0,236 = 8 \times 0,02950$	0,487	0,486	220
8	s	57,0	$31^0 4'$		0,518	0,516	$\beta 311$
9	ss	59,9	$32^0 45'$		0,541	0,541	$\beta 222$
10	st	63,4	$34^0 46'$	$0,325 = 11 \times 0,02955$	0,572	0,570	311
11	s	66,8	$36^0 45'$	$0,358 = 12 \times 0,02985$	0,597	0,598	222
12	ss	70,0	$38^0 36'$		0,625	0,624	$\beta 400$
13	sss?	73,5	$40^0 34'$			0,650	
14	s	78,9	$43^0 43'$	$0,477 = 16 \times 0,02981$	0,689	0,691	400
15	sss	82,6	$45^0 51'$			0,718	
16	st	87,5	$48^0 41'$	$0,564 = 19 \times 0,02968$	0,751	0,751	331
17	st	90,6	$50^0 29'$	$0,594 = 20 \times 0,02970$	$0,771 - 0,767$	0,771	420, $\beta 422$
18	s-st	97,2	$54^0 16'$		0,812	0,812	$\beta 511, \beta 333$
19	sss	100,4	$56^0 7'$			0,830	
20	st	103,2	$57^0 44'$	$0,716 = 24 \times 0,02983$	0,844	0,846	422
21	stst	113,8	$63^0 56'$	$0,806 = 27 \times 0,02985$	0,895	0,898	511, 333
22	sss	117,3	$65^0 52'$			0,913	
23	s-st	121,3	$68^0 11'$		0,925	0,928	$\beta 531$
24	s	125,3	$70^0 29'$		0,938	0,943	$\beta 442, \beta 600$

¹ Deutlich mehrfache Linie, aber nicht sicher auflösbar, ist gleichzeitig $\alpha 400, \beta 331, \beta 420$

Die Linien der Tabelle IV geben das charakteristische Bild des flächen-centrierten Würfelgitters. Sämtliche Linien, die im zugänglichen Winkelbereich bei einem solchen Gitter auftreten sollen, sind vorhanden und zwar nicht nur die α -Linien, sondern auch fast alle β -Linien. Daneben treten noch

einige ganz schwache Andeutungen von Linien auf, die sich nicht als Interferenzen desselben flächencentrierten Würfelgitters deuten lassen. Es sind dies 4, 5, 13, 15, 19, 22.

Linie 4 und 5 könnten möglicherweise zu einem sehr schwachen verwaschenen Interferenzring gehören, von derselben Art wie die zwei auf S. 19 schon erwähnten. Die Existenz von 13 und 15 ist höchst zweifelhaft, sie sind an der Grenze der Sichtbarkeit, 15 ist jedenfalls nur einseitig vorhanden. Die Linien 19 und 22 sind ebenfalls an der Grenze der Sichtbarkeit und ihre Existenz erscheint mir sehr zweifelhaft.

Falls den fraglichen Linien reale Existenz als Interferenzen der Eisenlinie $K\alpha$ am Gitter des Thoriumdioxides zukommt, müßten die zugehörigen Sinusquadrate ganzzahlige Multipla von 0,0297 sein, die als Reflexionen rationaler Gitterebenen aufgefaßt werden können.

Folgende kleine Tabelle, V, orientiert diesbezüglich.

Tabelle V.

No.	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot q \cdot X$	Fläche
4	0,151 = $5 \times 0,03020$	201
5	0,168 = $6 \times 0,02800$	211
13	0,424 = $14 \times 0,03025$	321
15	0,516 = $18 \times 0,02867$	411, 330
19	0,689 = $23 \times 0,02996$	--
22	0,834 = $28 \times 0,02979$	--

Die Zusammenstellung zeigt, daß den Linien 19 und 22 offenbar keine reale Existenz als selbständige Interferenzen des Thoriumdioxids zukommt, da weder 23 noch 28 als Summe dreier Quadratzahlen aufgefaßt werden können. Was die übrigen Linien anbelangt, so ist zu bemerken, daß bei schwachen Linien $2d$ in der Regel zu klein ausfällt, wenn man die Lage der Außenknoten der Messung zugrundelegt. Nun geben die Linien 4 und 13 zu hohe Werte für $2d$, es erscheint daher unwahrscheinlich, daß ihnen reale Existenz als Interferenzen des Thoriumdioxidgitters zukommt. Die Linie 5 ist so undeutlich, daß ich an ihrer Existenz sehr zweifle. Zudem fehlen alle 6 zweifelhaften Linien auf der Aufnahme des Präparats C.

Eine zweite Aufnahme desselben Thoriumdioxidpräparates A wurde ebenfalls untersucht. Spannung 39 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Dieselbe Kamera, wie bei der vorigen Aufnahme. Das Diagramm zeigt recht merkbare allgemeine Schwärzung, die Reflexionslinien sind nur sehr schwach herausgekommen. Die beiden diffusen Ringe nahe dem Mittelpunkt sind

andeutungsweise sichtbar; von Streifen der Krystallstruktur sind nur die Folgenden sichtbar (Nummern wie in Tabelle IV):

1, (3), (6), 7, (8), 10, (11), (14), 16, 17, (18), 20, 21, 23, (24).

Die in () gesetzten Zahlen beziehn sich auf sehr schwache, kaum sichtbare Linien. Das Diagramm war sehr schlecht meßbar, die Ergebnisse der Messung sind praktisch dieselben wie bei dem vorigen, die Werte $2d$ weichen bis zu $\pm 0,4$ mm. von den in Tabelle IV angeführten ab, ohne daß aber irgend ein systematischer Gang erkennbar ist.

Auch von dem Präparate B (vergl. S. 10), das aus einer Borax-Kochsalz-Schmelze wohlkristallisiert erhalten war, wurde eine Debye-Scherrer-Aufnahme gemacht.

Spannung ca. 40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kameradurchmesser 49,65 mm.

Der Film zeigte sehr starke allgemeine Schwärzung, besonders für große Winkelwerte von $\frac{\theta}{2}$ etwa 35° an, die Linien waren nur schwach und sehr schlecht meßbar. Folgende kleine Tabelle (VI) enthält die gefundenen Zahlen.

Tabelle VI. *Thoriumdioxyd B.*

No.	Stärke	$2d$	$\frac{\theta}{2}$	Korrektion $K = 45'$			Fläche
				$\sin^2 \frac{\theta}{2} = q \cdot N$	$\sin \frac{\theta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\theta}{2}$ gef.	
1	s?	ca. 33,3	$17^\circ 17'$	$0,0882 = 3 \times 0,02940$	0,298	0,297	111
2	s	34,8	$18^\circ 10'$		0,313	0,312	β 200
3	s-st	38,7	$20^\circ 25'$	$0,122 = 4 \times 0,03050$	0,345	0,349	200
4	ss	49,1	$26^\circ 28'$		0,442	0,446	β 220
5	s-st	53,8	$29^\circ 7'$	$0,237 = 8 \times 0,02963$	0,485	0,487	220
6	ss	57,6	$31^\circ 20'$		0,518	0,520	β 311
7	s-st	63,8	$34^\circ 55'$	$0,327 = 11 \times 0,02973$	0,572	0,572	311
8	s	67,0	$36^\circ 47'$	$0,359 = 12 \times 0,02992$	0,597	0,599	222

Außer den meßbaren Linien waren in dem stark geschwärzten Gebiete noch einige 1—2 mm. breite unscharfe Banden andeutungsweise erkennbar, nämlich bei $2d$ etwa 87 mm., 91 mm., 103 mm., 114 mm.

Das Diagramm deutet auf Gegenwart von hochdisperssem, amorphem Thoriumdioxyd, das vielleicht bei der Reinigung des Produktes mit verdünnter Salzsäure entstanden war. Bei der starken Absorptionsfähigkeit für weiche Röntgenstrahlung würde ein ganz dünner Überzug eines solchen Produktes genügen, um sich im Interferenzdiagramm geltend zu machen.

Eine Aufnahme an dem bei 1220^0 kristallisierten Präparat C. wurde wegen der starken sichtbaren Fluoreszenz des Thoriumdioxydes¹ unter Anwendung von schwarzem Papier über dem Film hergestellt.

Spannung 40—42 Kilovolt, Stromstärke 15—17 Milliampère, Aufnahmezeit 70 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., effektiver Kameradurchmesser 49,65 mm., Eisenantikathode.

Der Film zeigte viel schwächere Allgemeinschwärzung als die bisher erwähnten Aufnahmen, das Abblenden des Fluoreszenzlichtes und sekundärer langwelliger Röntgenstrahlung wirkte also günstig².

Die Linien auf dem Filme sind scharf und deutlich, die Aufnahme ist ganz entschieden besser als die vorigen.

Tabelle VII. *Thoriumdioxyd C.*

No.	Stärke	2d	Korrektion K = 45'				Fläche
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.	
1	s—st	30,3	15 ⁰ 37'		0,271	0,269	β 111
2	st—stst	33,3	17 ⁰ 17'	0,0882 = $3 \times 0,02940$	0,293	0,297	111
3	s?	34,5	17 ⁰ 59'		0,313	0,309	β 200
4	st	38,3	20 ⁰ 12'	0,119 = $4 \times 0,02975$	0,345	0,345	200
5	s	48,7	25 ⁰ 13'		0,442	0,442	β 220
6	stst	54,0	29 ⁰ 15'	0,239 = $8 \times 0,02988$	0,487	0,489	220
7	s	57,4	31 ⁰ 12'		0,518	0,518	β 311
8	ss	60,3	32 ⁰ 54'		0,541	0,543	β 222
9	stst	63,8	34 ⁰ 55'	0,327 = $11 \times 0,02973$	0,572	0,572	311
10	s—st	66,7	36 ⁰ 36'	0,355 = $12 \times 0,02958$	0,597	0,596	222
11	sss	70,4	38 ⁰ 46'		0,625	0,626	β 400
12	s	77,5	42 ⁰ 48'		0,681	0,679	β 331
13	s—st	78,7	43 ⁰ 30'	0,473 = $16 \times 0,02956$	0,689	0,688	400
14	s	80,1	44 ⁰ 20'		0,699	0,699	β 420
15	st	87,6	48 ⁰ 40'	0,564 = $19 \times 0,02968$	0,751	0,751	331
16	st*)	90,5	50 ⁰ 21'	0,593 = $20 \times 0,02965$	0,771—0,767	0,770	420, β 422
17	s—st	97,3	54 ⁰ 15'		0,812	0,812	β 511, β 333
18	stst	103,2	57 ⁰ 39'	0,714 = $24 \times 0,02975$	0,844	0,845	422
19	ss	110,5	61 ⁰ 54'		0,884	0,882	β 440
20	stst	113,6	63 ⁰ 39'	0,803 = $27 \times 0,02974$	0,895	0,896	511, 333
21	s—st	120,3	67 ⁰ 32'		0,925	0,924	β 531
22	s—st	123,8	69 ⁰ 32'		0,938	0,937	β 442, β 600

*) Breit, Doppellinie, da gleichzeitig α $\{420\}$ und β $\{422\}$.

¹ Erst im Laufe der Untersuchung, als die andern Aufnahmen bereits hergestellt und berechnet waren, wurden wir auf die starke sichtbare Fluoreszenz des Thoriumdioxydes aufmerksam. Ein bedeutender Teil der Allgemeinschwärzung bei den oben beschriebenen Aufnahmen von Thoriumdioxyd ist auf das sichtbare Fluoreszenzlicht zurückzuführen.

² Es sei erwähnt, daß auch von Präparat C eine Aufnahme ohne Papierbedeckung des Films hergestellt wurde, welche dieselben Linien erkennen ließ, aber wegen sehr starker Allgemeinschwärzung viel geringere Meßgenauigkeit erlaubte.

Es ist bemerkenswert, daß diese Aufnahme *nur* solche Linien enthält, welche dem flächencentrierten Gitter entsprechen, und zwar *alle* Linien (sowohl α wie β), welche in dem zugänglichen Winkelintervall überhaupt möglich sind. Dies bestätigt die Annahme, daß die überzähligen Linien in Tabelle IV nicht zum Diagramm des Thoriumdioxides gehören, sondern falls sie überhaupt existieren, zufälligen Verunreinigungen (Reste des Karbonats?) angehören.

Als gemeinsamer Faktor der quadratischen Form für Thoriumdioxid folgt aus den Messungen an den Präparaten A und C.

$$0,02970 \pm 0,0001.$$

Die Seitenlänge des Elementarwürfels ergibt sich zu

$$a = 5,61 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Hieraus findet man die Anzahl Moleküle ThO_2 im Elementarwürfel, indem das Molekulargewicht von ThO_2 gleich 264,15 ist, die Dichte gleich 9,87¹.

Es ergibt sich

$$n = 4,00$$

im Elementarwürfel werden demnach vier Moleküle ThO_2 absorbiert. Die Thoriumatome müssen also vierzählige Lagen im Würfel einnehmen, die Sauerstoffatome hingegen achtzählige.

Ein Blick auf die Tabellen der Diagramme zeigt uns sofort, daß jedenfalls diejenigen Interferenzlinien bei weitem vorherrschen, die dem flächencentrierten Würfel entsprechen. Wir müssen daher die Thoriumatome, deren Reflexion für das Diagramm in erster Linie bestimmend wirkt, in flächencentrierten Würfeln mit der Kantenlänge $5,61 \cdot 10^{-8}$ cm. anordnen.

Es meldet sich dann die Frage, welche Anordnung den acht Sauerstoffatomen im Elementarwürfel zukommt.

Falls die acht Sauerstoffatome gleichwertig sind (und es liegt kein Grund vor, sie als ungleichwertig anzunehmen), muß ihnen eine achtzählige Lage im Elementarwürfel zukommen. Nun zeigt uns das Diagramm, daß die Thoriumatome in flächencentrierten Würfelgittern von der Kantenlänge des Elementarwürfels angeordnet sind, und es gilt also, diejenigen Raumgruppen zu finden, in denen neben einer vierzähligen Punktlage, die einem solchen flächencentrierten Würfel entspricht, auch achtzählige Punktlagen auftreten.

¹ In LANDOLT-BÖRNSTEINS Tabellen (1905) die Angaben 9,861 und 9,876, hieraus das Mittel.

Tabellen¹ der speciellen Punktlagen in Raumgruppen des regulären Krystallsystems zeigen uns eine Reihe von Möglichkeiten, die Sauerstoffatome unter den oben genannten Nebenbedingungen in achtzähligen Punktlagen anzubringen.

Es handelt sich um folgende Raumgruppen:

I. $T_h^3, O^3, O_h^5,$

dieser Fall führt zu einer Atomanordnung vom Fluorittypus,
Thoriumatome in den Punktlagen

$$ooo; \frac{1}{2}\frac{1}{2}o; \frac{1}{2}o\frac{1}{2}; o\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \text{respektive } \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}oo; o\frac{1}{2}o; oo\frac{1}{2};$$

Sauerstoffatome in den Punktlagen

$$\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4}.$$

II. $T_h^2, O^2, O_h^4,$

dieser Fall führt zu einer Atomordnung folgender Art,
Thoriumatome in den Punktlagen

a. $\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4};$ respektive b. $\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4};$

Sauerstoffatome in den Punktlagen

$$uuu; \bar{u}u\bar{u}; \frac{1}{2}-u, \frac{1}{2}-u, \frac{1}{2}-u; u+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-u, u+\frac{1}{2}; u\bar{u}\bar{u},$$

$$\bar{u}\bar{u}u; \frac{1}{2}-u, u+\frac{1}{2}, u+\frac{1}{2}; u+\frac{1}{2}, u+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-u.$$

III. T_h^6

dieser Fall führt zu einer Atomanordnung vom Pyrittypus,
Thoriumatome in den Punktlagen

a. $ooo; \frac{1}{2}\frac{1}{2}o; \frac{1}{2}o\frac{1}{2}; o\frac{1}{2}\frac{1}{2};$ respektive b. $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}; \frac{1}{2}oo; o\frac{1}{2}o; oo\frac{1}{2};$

Sauerstoffatome in den Punktlagen

$$uuu; u+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-u, \bar{u}; \bar{u}, u+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-u; \frac{1}{2}-u, \bar{u}, u+\frac{1}{2}; \bar{u}\bar{u}\bar{u};$$

$$\frac{1}{2}-u, u+\frac{1}{2}, u; u, \frac{1}{2}-u, u+\frac{1}{2}; u+\frac{1}{2}, u, \frac{1}{2}-u.$$

Der physikalische Unterschied dieser drei geometrischen Möglichkeiten könnte folgendermaßen veranschaulicht werden.

Fall I entspräche einem Gitter aus Th-Ionen und doppelt so vielen O-Ionen.

Fall II entspräche je nach dem Vorliegen der Alternative a oder b und dem Werte von u einem Gitter aus Th-Ionen und gleich vielen O₂-Ionen, einem Gitter aus Molekülen O-Th-O oder einem Gitter aus Th-Ionen und halb so vielen O₄-Ionen.

¹ Siehe die diesbezüglichen Werke von P. NIGGLI (Geometrische Krystallographie des Diskontinuums, 1919) und von R. W. G. WYCKOFF. (The Analytical Expression of the Theory of Space-Groups, 1922).

Fall III entspräche entweder einem Gitter aus Th-Ionen und gleich vielen O_2 -Ionen, oder einem Gitter aus Molekülen O-Th-O.

Da die Krystalle des Thorianits niemals eine dem Pyrit entsprechende Hemiedrie, etwa durch Streifung der Würfelflächen, erkennen lassen, darf man wohl Fall III als höchst unwahrscheinlich betrachten.

Es ist schwerer, eine sichere Entscheidung zwischen den Möglichkeiten I und II zu treffen.

Falls I zutrifft, dürften keine andern Linien auftreten, als diejenigen, welche dem flächencentrierten Würfel entsprechen. Bei dem starken Vorherrschen der Reflexion an Thorium, verglichen mit der Reflexion an Sauerstoff, müssen die Intensitäten noch ziemlich genau den Intensitäten des reinen Metallatomgitters allein entsprechen.

Falls II zutrifft, müßten auch Linien vorkommen, welche von Reflexion an Sauerstoffatomen allein bedingt werden; aber diese müßten jedenfalls nur *sehr* schwach, ja vielleicht praktisch unsichtbar sein. Man könnte versuchen, gewisse schwache und zweifelhafte Linien mancher Diagramme von Uran-dioxyd, Thoriumdioxyd und Brögerit dem Sauerstoff zuzuschreiben, aber die experimentellen Grundlagen einer solchen Zuordnung wären sehr schwach.

Eine Entscheidung wäre möglich, wenn man ein mit Thoriumdioxyd isomorphes Dioxyd eines Metalles mit wesentlich kleinerem Atomgewicht untersuchen könnte. Ceriumdioxyd würde sich dazu besonders gut eignen, wenn es nicht die Eigenschaft hätte, relativ leicht Sauerstoff abzugeben und in eine Mischung von Dioxyd und niederen Oxyden zu zerfallen, so daß eventuelle schwache Linien solcher Verunreinigung zuzuschreiben sein könnten.

Die Beobachtungen am Ceriumdioxyd (vergl. unten) müssen zugunsten des Fluorittypus gedeutet werden.

Debye-Scherrer-Aufnahmen von Ceriumdioxyd.

Präparat A, Spannung 40–42 Kilovolt, Stromstärke 15–17 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode, effektiver Kameradurchmesser 49,52 mm.

Das Diagramm zeigt starke allgemeine Schwärzung und ziemlich kräftige Linien.

Der Faktor ergibt sich zu $0,320 \pm 0,0001$, hieraus folgt als Kantenlänge des Elementärwürfels

$$a = 5,41 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Falls, wie bei den Dioxyden von Uran und Thorium, vier Moleküle des Dioxydes vom Elementarwürfel absorbiert werden, ergibt sich als Dichte, unter Annahme des Molekulargewichts 172,25

Tabelle VIII. *Ceriumdioxid A.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 40'$				Fläche	Intensität 10^{-4} ber.	
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.			
1	s-st	31,4	$16^0 21'$			0,281	0,282	β 111	3,2
2	st	34,1	$17^0 54'$	$0,0942 = 3 \times 0,03140$		0,310	0,307	111	12,5
3	s	39,4	$20^0 59'$	$0,128 = 4 \times 0,03200$		0,358	0,358	200	2,2
4	s-st	50,5	$27^0 24'$			0,459	0,460	β 220	2,5
5	st	55,9	$30^0 33'$	$0,258 = 8 \times 0,03225$		0,506	0,508	220	9,4
6	s	59,5	$32^0 38'$			0,538	0,539	β 311	2,0
7	sss	62,1	$34^0 4'$			0,562	0,560	β 222	0,2
8	st	66,2	$36^0 27'$	$0,353 = 11 \times 0,03209$		0,593	0,594	311	7,8
9	ss	69,8	$38^0 32'$	$0,388 = 12 \times 0,03233$		0,620	0,623	222	0,8
10	sss	73,0	$40^0 41'$			0,649	0,652	β 400	0,6
11	sss?	74,0	$42^0 16'$				0,673		
12	s-st ¹	81,6	$45^0 23'$	$0,507 = 16 \times 0,03169$		0,716	0,712	400	2,2
13	s	86,7	$48^0 21'$				0,747		
14	st	91,8	$51^0 18'$	$0,608 = 19 \times 0,0320$		0,780	0,780	331	5,7
15	st	94,7	$53^0 0'$	$0,638 = 20 \times 0,03190$	$0,800 - 0,795$	0,799	0,799	$420, \beta$ 422	3,9
16	s	102,4	$57^0 30'$			0,843	0,843	β 511, β 333	1,7
17	stst	108,9	$61^0 9'$	$0,767 = 24 \times 0,03196$		0,876	0,876	422	11,7
18	stst	121,1	$68^0 13'$	$0,863 = 27 \times 0,03196$		0,930	0,929	511, 333	12,9
19	st	130,2	$73^0 29'$			0,960	0,959	β 531	5,6

¹ Stärkste Komponente einer deutlich mehrfachen, breiten Linie; diese enthält außer α 400 noch β 331 und β 420.

$$D = \frac{172,25 \cdot 4}{5,41^3 \cdot 6,06 \cdot 10^{-1}} = 7,181$$

Für die Dichte des Cerdioxyds werden von verschiedenen Forschern sehr verschiedene Zahlen angegeben, die zwischen 6,93—7,99 schwanken.

Diese Schwankungen können teils durch Verunreinigung mit Oxyden anderer Erdmetalle bedingt sein, teils durch Verunreinigung mit sauerstoffärmeren Oxyden des Ceriums.

Die Linie 13 der Tabelle VII läßt sich nicht ungezwungen als Linie des Cerdioxydgitters auffassen.

Der gefundene Sinus ist 0,747; für $\{401\}$, $\{322\}$ berechnet man 0,738, für $\{411\}$, $\{330\}$ hingegen 0,759.

Die sehr schwache und zweifelhafte Linie 11 könnte als Reflexion von 321 aufgefaßt werden, gefundener Sinus 0,673, berechneter 0,669.

Sowohl 11 und 13 könnten aber auch als Reflexionen einer selbständig kristallisierten Verunreinigung aufgefaßt werden.

Sämtliche andere Linien entsprechen dem Fluorittypus, für welchen besonders die Schwächung der Reflexionen zweiter Ordnung von $\{100\}$ und $\{111\}$ sprechen würde.

In der Tabelle VIII sind auch die berechneten Intensitäten ($I \cdot 10^{-4}$) angeführt, die ein Gitter vom Fluorittypus fordern würde.

Die Intensität wurde in der üblichen Weise berechnet als

$$I = \frac{s}{(h^2 + k^2 + l^2) n^2} \cdot (A^2 + B^2) \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2 \cos \frac{\vartheta}{2}}$$

worin s die Flächenzahl ist, h, k, l die Indices, n die Ordnung des Spektrums, $(A^2 + B^2)$ der Strukturfaktor des Fluorittypus¹.

Die β -Linien wurden mit dem vierten Teil des Wertes der betreffenden α -Linien in Rechnung gesetzt, die Linie No. 15 wurde mit der Summe der zusammenfallenden α - und β -Linien berechnet.

Die Übereinstimmung zwischen beobachteter und berechneter Intensität ist durchaus befriedigend.

Ein Diagramm des schön kristallisierten Präparats B wurde ebenfalls aufgenommen. Um Allgemeinschwärzung durch sichtbare Fluoreszenz zu hindern, wurde der Film mit schwarzem Papier bedeckt.

Spannung 40—42 Kilovolt, Stromstärke 15—17 Milliampère, Aufnahmezeit 70 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., effektiver Kameradurchmesser 49,52 mm, Eisenantikathode.

Tabelle. IX. *Ceriumdioxid B.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K' = 50'$				Fläche	Intensität 10 ⁻⁴ ber.
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.		
1	s	31,6	16 ⁰ 17'		0,281	0,280	β 111	3,2
2	stst	34,8	18 ⁰ 8'	0,0967 = 3 × 0,03223	0,309	0,311	111	12,5
3	s	39,6	20 ⁰ 55'	0,127 = 4 × 0,03175	0,357	0,357	200	2,2
4	s-st	50,5	27 ⁰ 14'		0,458	0,458	β 220	2,5
5	stst	56,2	30 ⁰ 33'	0,258 = 8 × 0,03225	0,505	0,508	220	9,4
6	s	59,3	32 ⁰ 21'		0,537	0,535	β 311	2,0
7	sss	62,1	33 ⁰ 54'		0,561	0,558	β 222	0,2
8	stst	66,5	36 ⁰ 24'	0,352 = 11 × 0,03200	0,592	0,593	311	7,8
9	ss	69,4	38 ⁰ 8'	0,381 = 12 × 0,03175	0,619	0,617	222	0,8
10	s	81,7 ²	45 ⁰ 16'	0,504 = 16 × 0,03150	0,714	0,710	400	2,2
11	s??	86,8 ³	48 ⁰ 14'					
12	st	91,6	51 ⁰ 5'	0,604 = 19 × 0,03179	0,779	0,778	331	5,7
13	s-st	94,7	52 ⁰ 50'	0,635 = 20 × 0,03175	0,799 - 0,794	0,797	420, β 422	3,9
14	s	102,6	57 ⁰ 20'		0,842	0,842	β 511, β 333	1,7
15	stst	108,7	60 ⁰ 53'	0,764 = 24 × 0,03183	0,875	0,874	422	11,7
16	ss?	115,0 ²	64 ⁰ 32'		0,916	0,903	β 440	1,3
17	stst	121,1	68 ⁰ 3'	0,861 = 27 × 0,03189	0,928	0,928	511, 333	12,9
18	s-st	130,6	73 ⁰ 33'		0,958	0,959	β 531	5,6

¹ Die Berechnung des Strukturfaktors entspricht dem Fall 4 b in R. W. G. WYCKOFF & E. POSNJAK, The Crystal Structures of the Cuprous Halides, Journ. of the American Chem. Soc XLIV, No. 1, 1922, p. 32. Das Reflexionsvermögen von Ce und 2 O wurde entsprechend den Elektronenzahlen 54 und 2 × 10 angenommen.

² Verschwommen, mehrfache Linie. ³ Sehr zweifelhaft, einseitig.

Der Film zeigte nur schwache Allgemeinschwärzung, die Linien sind recht scharf.

Abgesehen von der höchst zweifelhaften Linie No. 11 entsprechen alle Linien dem flächencentrierten Würfelgitter. Der Faktor ergibt sich zu $0,0319 \pm 0,0001$; dieser Wert verlangt die unter $\left(\sin \frac{\vartheta}{2} \text{ ber.}\right)$ angeführten Zahlen und führt zu der Gitterkonstante.

$$a = 5,41 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Debye-Scherrer-Aufnahmen und Laue-Diagramme von Bröggerit.

Zwei Aufnahmen des Bröggerits von Karlshus, Raade, wurden hergestellt.

Spannung ca. 39 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Belichtungsdauer 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kamerdurchmesser 49,65 mm. Der Film zeigte ziemlich starke allgemeine Schwärzung und sehr kräftige Interferenzlinien, doch sind die ersten drei Linien wegen der starken Allgemeinschwärzung nicht genau zu messen.

Tabelle X. *Bröggerit.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 60'$				Fläche
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2} \text{ ber.}$	$\sin \frac{\vartheta}{2} \text{ gef.}$	
1	s-st	31,4	15 ⁰ 57'		0,277	0,275	β_{111}
2	st	34,9	17 ⁰ 58'	0,0949 = $3 \times 0,03163$	0,306	0,308	111
3	ss?	35,4	18 ⁰ 16'		0,320	0,313	β_{200}
4	s-st	39,4	20 ⁰ 35'	0,124 = $4 \times 0,03100$	0,353	0,352	200
5	sss?	45,5	24 ⁰ 7'			0,409	
6	s-st	50,6	27 ⁰ 4'		0,453	0,455	β_{220}
7	st	55,8	30 ⁰ 2'	0,251 = $8 \times 0,03135$	0,500	0,501	200
8	s	59,5	32 ⁰ 11'		0,531	0,533	β_{311}
9	sss	62,5	33 ⁰ 55'		0,555	0,558	β_{222}
10	stst	66,1	36 ⁰ 0'	0,316 = $11 \times 0,03145$	0,586	0,588	311
11	s	69,3	37 ⁰ 52'	0,377 = $12 \times 0,03142$	0,612	0,614	222
12	sss?	73,0	39 ⁰ 58'		0,641	0,642	β_{400}
13	ss	80,0	44 ⁰ 1'		0,698	0,695	β_{331}
14	s	81,4	44 ⁰ 50'	0,497 = $16 \times 0,03106$	0,707	0,705	400
15	s	82,8	45 ⁰ 38'		0,716	0,715	β_{420}
16	ss	87,2	48 ⁰ 11'			0,745	
17	st	91,0	50 ⁰ 23'	0,593 = $19 \times 0,03121$	0,770	0,770	331
18	st	94,1	52 ⁰ 8'	0,623 = $20 \times 0,03115$	0,790—0,785	0,789	420, β_{422}
19	s	101,0	56 ⁰ 9'		0,832	0,831	β_{511} , β_{333}
20	ststst	107,4	59 ⁰ 51'	0,748 = $24 \times 0,03117$	0,865	0,865	422
21	ststst	119,2	66 ⁰ 38'	0,843 = $27 \times 0,03122$	0,918	0,918	511, 333
22	s-st	127,0	71 ⁰ 8'		0,948	0,946	β_{531}
23	s	132,2	74 ⁰ 5'		0,961	0,962	β_{442} , β_{600}

Die Messungen führen zu dem Faktor $0,0312 \pm 0,0001$.

Eine zweite Aufnahme an Material desselben Brögeritkrystals wurde mit einer etwas geänderten Anordnung aufgenommen, indem das Primärstrahlenbündel nicht durch eine runde Blende, sondern durch einen Spalt eintrat (vergl. S. 6).

Spannung 39 - 40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, 120 Minuten Aufnahmezeit, Stabdicke 0,9 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kamera-durchmesser 49,52 mm.

Das Diagramm zeigt nur schwache allgemeine Schwärzung. Die Interferenzlinien sind ausgezeichnet scharf, auf der einen Hälfte des Films allerdings sehr schwach, auf der andern ausgezeichnet kräftig, offenbar durch unsymmetrische Intensitätsverteilung im Primärstrahlenbündel. Die Lage der Linien ist indessen symmetrisch zum Durstichpunkt des Primärstrahls und erlaubte gute Messungen.

Die Korrektion K ist bei dieser Anordnung relativ klein (30 Winkelminuten). Folgende Linien wurden beobachtet, die Nummern beziehen sich auf die analogen Nummern der Linien im ersten Diagramm (Tabelle X):

2 st, 4 s-st, 6 ss, 7 st, 8 s, 10 st, 11 s, 12 sss, 14 ss, 17 st, 18 st, 19 ss, 20 stst, 21 stst, 22 s, ferner eine sehr schwache Linie (19 a) be $\frac{\vartheta}{2} = 53^{\circ} 37'$, $\sin \frac{\vartheta}{2} = 0,805$.

Die Messungen führen zu dem Faktor $0,0312$, in guter Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen Wert.

Im Mittel erhält man für den Brögerit dieses Vorkommens $0,0312 \pm 0,0001$; hieraus berechnet sich

$$a = 5,47 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Dem Diagramm des Brögerits liegt ein flächencentriertes Würfelgitter zugrunde, das offenbar die Anordnung der Uranatome darstellt. Die Dimensionen des Gitters stimmen überein mit denen des Urandioxyds. Es kann daher keinem Zweifel unterliegen, daß Brögerit mit Urandioxyd, Thoriumdioxyd und Thorianit isomorph ist.

Der Brögerit enthält also krystalline Substanz, das Diagramm entspricht einem flächencentrierten Würfelgitter, alle Interferenzstreifen, die ein solches Gitter in dem betreffenden Winkelgebiet überhaupt liefern kann, sind vorhanden und zwar sowohl die α -Linien, wie die β -Linien.¹ Hierzu kommen noch einige höchst schwache, teilweise unsichere Linien, deren Deutung nun diskutiert werden soll.

Folgende Tabelle XI gibt eine Zusammenstellung dieser Linien und der zugehörigen Sinusquadrate. Außer den Linien der Tabelle X sei

¹ Ausgenommen β 440.

noch eine höchst schwache Andeutung einer Linie (19a) mit angeführt, welche auf der zweiten Bröggeritaufnahme erscheint.

Tabelle XI.

No.	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	Fläche
5	$0,167 = 6 \times 0,02783$	211
16	$0,555 = 18 \times 0,03083$	411, 330
19 a	$0,648 = 21 \times 0,03086$	421

Alle diese Linien können somit als Reflexionen regulärer Gitterebenen aufgefaßt werden (vergl. auch S. 20). Sie gehören aber nicht zu den Reflexionen des flächencentrierten Gitters.

Dies könnte darauf deuten, daß im Bröggerit neben den in flächencentrierten Gittern angeordneten Atomen noch andere vorhanden seien, und dies könnten entweder Sauerstoffatome oder dislocierte Metallatome sein.

Indessen zeigte eine dritte, vortreffliche Aufnahme an Material aus einem zweiten Krystall keine einzige dieser fraglichen Linien, sondern nur *alle* α -Linien und *alle* β -Linien, die dem flächencentrierten Würfel zukommen; diese Aufnahme ist auf Tafel I, Fig. 4, abgebildet. Es ist daher am wahrscheinlichsten, dass jene fraglichen Linien einer zufälligen Verunreinigung des ersten Krystalls angehören.

Die Debye-Scherrer-Diagramme ergaben also, daß der Bröggerit krystalline Substanz enthält; sie ermöglichen aber keine Entscheidung der wichtigen Frage, ob die krystalline Substanz durch den ganzen Krystall parallel orientiert ist in Übereinstimmung mit der äußeren Krystallbegrenzung, oder ob ein regelloses krystallines Aggregat an Stelle des ursprünglich einheitlichen Krystalls getreten ist.

Um hierüber zu entscheiden, wurden Laue-Diagramme von Bröggerit aufgenommen.

Ein Schliff von ca. 0,2 mm. Dicke ungefähr parallel einer Oktaëderfläche, aus demselben Krystallaggregat welches das Material der ersten Pulverdiagramme lieferte, wurde mit der Spannung 115 Kilovolt, Stromstärke 1,5 Milliampère, Aufnahmezeit 30 Minuten aufgenommen und lieferte ein deutliches Laue-Diagramm. Die Interferenzflecken der einzelnen Flächen sind ziemlich stark radial in die Länge gezogen. Das Diagramm zeigt 2×3 -zählige Symmetrie.

Ein anderer Krystall, ebenfalls von Karlshus, Raade, in einem ungefähr parallel der Oktaëderfläche (Abweichung ca. 10°) orientierten Schliff, Dicke 0,05 mm., lieferte das auf Tafel I, Fig. 1 dargestellte Diagramm. Spannung 110 Kilovolt, Stromstärke 2 Milliampère, Aufnahmezeit 60 Minuten.

Auch auf dieser Aufnahme zeigt sich Verzerrung der einzelnen Punktlagen, als sei der Krystall aus subparallelen Teilen zusammengesetzt. Hiermit stimmt es überein, daß die Krystallflächen schwache wellige Krümmungen erkennen lassen.

Ein anscheinend ganz tadelloser Krystall eines benachbarten Fundortes, Aanneröd, begrenzt von $\{111\}$ herrschend, $\{100\}$ untergeordnet, lieferte Material zu einem 0,05 mm. dicken Schliff ungefähr parallel $\{100\}$. Das Laue-Diagramm ist auf Tafel I, Fig. 2 dargestellt. Spannung 115 Kilovolt, Stromstärke 2 Milliampère, Aufnahmedauer 45 Minuten. Der Abstand zwischen Krystall und Platte bei Fig. 1 und 2 ist 40 mm.

Die Aufnahme Fig. 2 läßt deutlich die 2×4 -zählige Symmetrie erkennen. Auch diese Aufnahme zeigt radiale Verzerrungen. Diese Verzerrungen sind irgendwie durch Störungen des Krystallbaues begründet, wobei ich es vorläufig dahingestellt lasse, ob diese Störungen primärer oder sekundärer Natur seien. Bemerkenswert ist das Auftreten eines radialstrahligen Interferenzmusters der Zonenbögen bis zur unmittelbaren Nachbarschaft des Primärstrahles.

Debye-Scherrer-Aufnahmen von Cleveit.

Cleveit von Auselmyren bei Tvedestrand.

Spannung ca. 39 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 50 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Durchmesser der Kamera 49,65 mm.

Der Film zeigt sehr kräftige allgemeine Schwärzung, daneben deutliche recht scharfe Interferenzstreifen, die Intensität ist sehr schwer zu

Tabelle XII. *Cleveit, Auselmyren.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 55'$				Fläche
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot N$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.	
1	sss	49,8	$26^0 37'$		0,453	0,448	$\beta 220$
2	st	55,7	$30^0 7'$	$0,252 = 8 \times 0,03150$	0,500	0,502	220
3	s	59,1	$32^0 2'$		0,531	0,530	$\beta 311$
4	st	65,6	$35^0 48'$	$0,343 = 11 \times 0,03118$	0,586	0,585	311
5	ss	69,3	$37^0 57'$	$0,378 = 12 \times 0,03150$	0,612	0,615	222
6	ss	81,0	$44^0 40'$	$0,494 = 16 \times 0,03088$	0,707	0,703	400
7	s-st	90,6	$50^0 17'$	$0,591 = 19 \times 0,03111$	0,770	0,769	331
8	s-st	93,8	$52^0 2'$	$0,621 = 20 \times 0,03105$	$0,790 - 0,785$	0,788	$420, \beta 422$
9	ss	101,2	$56^0 20'$		0,832	0,832	$\beta 511, \beta 333$
10	s-st	107,3	$59^0 52'$	$0,748 = 24 \times 0,03116$	0,865	0,865	422
11	ss?	110,5	$61^0 44'$			0,881	
12	st	119,7	$67^0 0'$	$0,848 = 27 \times 0,03141$	0,918	0,921	511, 333
13	s-st	ca. 128,3	$71^0 59'$		0,948	0,951	$\beta 531$

beurteilen, die ersten zwei Linien sind kaum sichtbar, daher ist von einer Messung derselben abgesehen worden.

Die Linien entsprechen einem flächencentrierten Würfelgitter, mit Ausnahme der sehr schwachen und zweifelhaften Linie 11. Falls diese wirklich zur Struktur des Cleveits gehört, könnte sie als Reflexion von λ_{430} gedeutet werden, das Sinusquadrat ist $0,776 = 25 \times 0,03104$.

Der gemeinsame Faktor der quadratischen Form ist $0,0312 \pm 0,0002$.

Dies führt zu $a = 5,47 \cdot 10^{-8}$ cm., wie bei Bröggerit.

Es ist bemerkenswert, daß selbst ein so unfrischer Cleveit wie der von Auselmyren, welcher völlig muscheligen Bruch zeigt, noch ein so deutliches Interferenzdiagramm ergibt. Zudem ist die untersuchte Probe direkt an der Grenze gegen die sekundären gelben Urantrioxyd-Hydrat und Karbonatminerale genommen worden, dürfte also die am meisten veränderte Cleveitsubstanz enthalten.

Cleveit von Svinör.

Spannung 40—41 Kilovolt, Stromstärke 15—17 Milliampère, Aufnahmezeit 40 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode, effektiver Kamera-durchmesser 49,65 mm.

Das Diagramm zeigt starke allgemeine Schwärzung, besonders im Winkelintervall 0 — ca. 17^0 und von ca. 32^0 an. Daneben zeigen sich recht starke Interferenzlinien, die selbst in den stark allgemein geschwärzten Gebieten teilweise gut sichtbar sind, doch sind die allerersten Linien nicht mit Sicherheit feststellbar. Die Linien 13 und 14 zeigen deutliche Verbreiterung.

Tabelle XIII. *Cleveit Svinör.*

No.	Stärke	2d	Korrektion $K = 60'$				Fläche
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot \lambda^2$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.	
1	s-st?	ca. 39					200
2	s	50,3	$26^0 54'$		0,453	0,452	β 220
3	st	55,7	$29^0 59'$	$0,250 = 8 \times 0,03125$	0,500	0,500	220
4	s	59,3	$32^0 4'$		0,531	0,531	β 331
5	st	66,0	$35^0 47'$	$0,342 = 11 \times 0,03109$	0,586	0,585	311
6	s	69,1	$37^0 45'$	$0,375 = 12 \times 0,03125$	0,612	0,612	222
7	sss?	74,5	$40^0 50'$		0,641	0,654	β 400
8	ss	81,6	$44^0 56'$	$0,498 = 16 \times 0,03113$	0,707	0,706	400
9	sss?	86,2	$47^0 36'$			0,738	
10	st	91,0	$50^0 23'$	$0,593 = 19 \times 0,03121$	0,770	0,770	331
11	st	93,9	$52^0 0'$	$0,621 = 20 \times 0,03105$	0,790—0,785	0,788	420, β 422
12	s	100,9	$56^0 5'$		0,832	0,830	β 511, β 333
13	stst	107,6	$59^0 54'$	$0,748 = 24 \times 0,03117$	0,865	0,865	422
14	sist	119,7	$66^0 55'$	$0,846 = 27 \times 0,03133$	0,918	0,920	511, 333

Der gemeinsame Faktor der Sinusquadrate ergibt sich zu

$$0.0312 \pm 0.0002.$$

Hieraus ergeben sich die in der Tabelle angeführten Sinuswerte. Die Seitenlänge des Elementarwürfels ist

$$a = 5,47 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Cleveit, Arendal.

Spannung 37—39 KV, Stromstärke 15—20 Milliampère, Aufnahmezeit 30 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., effektiver Kameradurchmesser 49,9 mm., Eisenantikathode.

Der Film, der während der Aufnahme mit schwarzem Papier bedeckt war, zeigte nur schwache allgemeine Schwärzung, daneben eine Anzahl gut meßbarer Linien, die aber meistens nicht sehr stark waren.

Die Resultate der Messung sind in Tabelle XIV zusammengestellt.

Tabelle XIV. *Cleveit, Arendal.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 55'$				Fläche
			$\frac{\theta}{2}$	$\sin^2 \frac{\theta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\theta}{2} \text{ ber.}$	$\sin \frac{\theta}{2} \text{ gef.}$	
1	st	34,6	$17^0 49'$	$0,0936 = 3 \times 0,03120$	0,306	0,306	111
2	s	39,7	$20^0 44'$	$0,125 = 4 \times 0,03125$	0,353	0,354	110
3	s	50,6	$26^0 59'$		0,453	0,454	$\beta 220$
4	st	55,7	$29^0 57'$	$0,249 = 8 \times 0,03113$	0,500	0,499	220
5	s	59,7	$32^0 12'$		0,531	0,533	$\beta 311$
6	st	66,0	$35^0 51'$	$0,343 = 11 \times 0,03118$	0,586	0,586	311
7	s	69,2	$37^0 39'$	$0,373 = 12 \times 0,03108$	0,612	0,611	222
8	s	80,3	$44^0 2'$		0,698	0,695	$\beta 331$
9	s	81,9	$44^0 57'$	$0,498 = 16 \times 0,03113$	0,707	0,706	400
10	s	82,8	$45^0 29'$		0,716	0,713	$\beta 420$
11	st	91,2	$50^0 17'$	$0,591 = 19 \times 0,03111$	0,770	0,769	311
12	st	94,5	$52^0 13'$	$0,624 = 20 \times 0,03120$	$0,700 - 0,785$	0,790	$420 \beta 422$
13	s-st	101,8	$56^0 24'$		0,832	0,833	$\beta 511, \beta 333$
14	st	107,9	$59^0 56'$	$0,748 = 24 \times 0,03117$	0,865	0,865	422
15	ss?	115,7	$64^0 24'$		0,906	0,902	$\beta 440$
16	stst	119,7	$66^0 40'$	$0,843 = 27 \times 0,03122$	0,918	0,918	$511, 333$
17	s-st	129,4	$72^0 12'$		0,948	0,952	$\beta 531$

Die Tabelle zeigt die typische Linienfolge des flächencentrierten Würfels. Der Faktor ergibt sich zu $0,0312 \pm 0,0001$, die Gitterkonstante zu

$$a = 5,47 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Debye-Scherrer Aufnahmen von geglühtem Cleveit und Brögerit.

Es erschien von Interesse, die Struktur geglühten Cleveits zu untersuchen. Die Uranatome des ungeglühten Cleveits zeigen dieselbe Anordnung wie diejenigen des UO_2 , trotzdem der Cleveit größtenteils aus UO_3 besteht. Man könnte das Mineral gewissermaßen als eine feste Lösung von Sauerstoff in UO_2 auffassen, wobei der Sauerstoff jedenfalls größtenteils erst sekundär bei niedriger Temperatur in den Krystall eingetreten ist. Es war nun fraglich, ob eine derartige feste Lösung gegen Temperatursteigerung beständig sei, oder ob etwa eine Umgruppierung der ganzen Struktur zu U_3O_8 stattfindet. Es wäre auch denkbar, daß ein Gemenge von krystallinen UO_2 -Resten und amorphem UO_3 vorliegt, das sich bei Temperatursteigerung ebenfalls zu U_3O_8 umsetzen könnte. Ein etwa 5 mm. großes Bruchstück des Cleveits von Arendal wurde in einem elektrischen Ofen schnell erhitzt, wobei die Temperatur im Laufe von etwa einer halben Stunde auf 800°C . stieg. Der Cleveit zersprang in einige wenige Bruchstücke, die ursprüngliche Krystalloberfläche wurde gelblichbraun, die inneren Partien nahmen einen bläulichschwarzen Farbton an. Die bläulichschwarze Substanz wurde gepulvert und zeigte danach den Farbton o8 p 1, unter dem Mikroskop rötlichgelb durchsichtig, scheinbar völlig isotrop. Ein Debye-Scherrer-Diagramm dieser Substanz wurde aufgenommen.

Spannung 36—39 Kilovolt, Stromstärke ca. 15 Milliampère, Aufnahmezeit 30 Minuten, effektiver Kameradurchmesser 49,9 mm., Stabdurchmesser 2,0 mm. Eisenantikathode, Film mit schwarzem Papier bedeckt.

Der Film zeigte mittelstarke Allgemeinschwärzung und eine Anzahl recht kräftiger Linien. Die Resultate der Ausmessung sind in Tabelle XV zusammengestellt.

Zum Vergleiche sind die gemessenen Sinuswerte des Präparats B von U_3O_8 aus Tabelle II, S. 16, angeführt, sowie die berechneten Sinuswerte für unveränderten Cleveit.

Der Vergleich mit U_3O_8 zeigt, daß dem geglühten Cleveit unzweifelhaft die Struktur des U_3O_8 zukommt¹, während die charakteristischen Linien des UO_2 entweder fast ganz verschwunden sind, oder doch sehr zurücktreten. Diese Veränderung der Struktur kann nicht von einer Aufnahme atmosphärischen Sauerstoffs während des Glühens bedingt sein, da die ganz kompakten Krystallbruchstücke nicht in so kurzer Zeit von Sauerstoff durchdrungen sein können; sondern es handelt sich zweifellos um eine *Umgruppierung* des Stoffbestandes, die durch das Glühen vollzogen ist.

¹ Die Gitterdimensionen sind ein wenig vergrößert gegenüber dem reinen U_3O_8 .

Zum Vergleich wurde ein Krystallbruchstück des Bröggerits von Karlshus in genau derselben Weise gegläht. Der geglähte Bröggerit zeigte weder als Krystall noch in feingepulvertem Zustande irgendwelchen Unterschied von ungeglühtem Material, auch unter dem Mikroskope war keine Veränderung wahrnehmbar.

Ein Debye-Scherrer-Diagramm des geglähten Bröggerits zeigte nur die Linien des UO_2 -Gitters (flächencentrierter Würfel von $5.47 \cdot 10^{-8}$ cm. Kantenlänge). Linien des U_3O_8 traten nicht auf; die UO_2 -Linien hatten dieselbe Stärke wie bei ungeglühtem Bröggerit.

Dies bestätigt die Auffassung, daß Bröggerit im wesentlichen noch aus UO_2 besteht und das Gitter dieser Substanz besitzt, während Cleveit zwar ursprünglich ebenfalls aus UO_2 bestanden hat und in ungeglühtem Zustande noch das Gitter von UO_2 erkennen läßt, später aber sekundär Sauerstoff aufgenommen hat, der sich mit UO_2 beim Glühen zu U_3O_8 umsetzt.

Tabelle XV. *Geglihter Cleveit von Arendal.*

No.	Stärke	$2d$	Korrektion $K = 50'$		U_3O_8	Cleveit
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.		
1	s-st	27,0	$13^0 29'$	0,233	0,231	
2	st	32,0	$16^0 25'$	0,283	0,280	
3	s	34,5	$17^0 51'$	0,307		0,306
4	st	40,9	$21^0 30'$	0,367	0,367	
5	s	51,6	$28^0 38'$	0,479		
6	s-st	54,9	$29^0 34'$	0,493	0,494	
7	ss	56,0	$30^0 12'$	0,503		0,500
8	st	60,8	$32^0 55'$	0,543	0,548	
9	s	65,5	$35^0 39'$	0,583		0,586
10	s	69,6	$37^0 58'$	0,615	0,614	
11	st	77,3	$42^0 26'$	0,675	0,680	
12	ss	80,4	$44^0 11'$	0,697		0,698
13	ss	85,1	$46^0 54'$	0,730	0,732	
14	st	88,2	$48^0 39'$	0,751	0,756	
15	ss	91,3	$50^0 26'$	0,771		0,770
16	s-st	92,4	$51^0 4'$	0,778	0,783	
17	s-st	95,3	$52^0 46'$	0,796		0,790
18	ss	101,5	$56^0 16'$	0,832		0,832
19	st	104,7	$58^0 10'$	0,850	0,855	
20	st	108,1	$60^0 4'$	0,867		0,865
21	st	111,7	$62^0 10'$	0,884	0,878	
22	s-st	120,0	$66^0 55'$	0,920		0,918
23	st	122,0	$68^0 5'$	0,928	0,930	
24	s	130,0	$73^0 37'$	0,959		0,961
25	st	137,2	$76^0 49'$	0,974	0,977	

Debye-Scherrer-Aufnahmen von Uranpecherz. Joachimstal.

Handstück A.

Spannung 40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kameradurchmesser 49,9 mm.

Der Film zeigt mittelstarke allgemeine Schwärzung, besonders um den Primärfleck und von $\frac{\vartheta}{2}$ etwa 38^0 nach außen zunehmend. Es treten sehr deutliche und recht kräftige Interferenzstreifen auf, dieselben werden bei den größeren Winkelwerten wesentlich breiter und sehr verwaschen; bei $q = 24$ und 27 ist ihre Breite bereits 1,5–2 mm.

Die Resultate der Ausmessung sind in folgender Tabelle, XVI, zusammengestellt. Die Intensität der ersten Linien läßt sich wegen der Allgemeinschwärzung schwer beurteilen.

Tabelle XVI. *Uranpecherz A.*

No.	Stärke	2d	Korrektion $K = 60'$				Fläche
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.	
1	sss	31,4	$15^0 53'$		0,279	0,274	β_{111}
2	s	35,0	$17^0 58'$	$0,0947 = 3 \times 0,03157$	0,308	0,308	111
3	s--st	40,2	$20^0 56'$	$0,127 = 4 \times 0,03175$	0,356	0,357	200
4	s	51,1	$27^0 11'$		0,456	0,457	β_{220}
5	st	56,5	$30^0 20'$	$0,255 = 8 \times 0,03188$	0,503	0,505	220
6	s	60,3	$32^0 29'$		0,535	0,537	β_{311}
7	st	66,9	$36^0 17'$	$0,350 = 11 \times 0,03182$	0,590	0,592	311
8	sss	69,5	$37^0 45'$	$0,375 = 12 \times 0,03125$	0,616	0,612	222
9	sss?	76,9	$42^0 2'$			0,670	
10	ss	82,2	$45^0 3'$	$0,501 = 16 \times 0,03131$	0,711	0,708	400
11	st	ca 92,5	ca. $50^0 58'$	$0,604 = 19 \times 0,03178$	0,775	0,777	331
12	st	ca 95,7	ca. $52^0 50'$	$0,635 = 20 \times 0,03175$	0,795–788	0,797	420, β_{422}
13	s	ca. 104	ca. $57^0 35'$		0,838	0,844	β_{511}, β_{333}
14	st	ca. 110	ca. $61^0 1'$	$0,766 = 24 \times 0,032$	0,869	0,875	422
15	stst	ca. 122	ca. $67^0 53'$	$0,854 = 27 \times 0,032$	0,924	0,924	511, 333
16	st	ca. 141	ca. $78^0 48'$		0,972	0,981	β_{442}, β_{600}

Handstück B.

Spannung 39 Kilovolt, Stromstärke 14 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdurchmesser 2,0 mm., Eisenantikathode; dieselbe Kamera wie bei dem vorigen Diagramm.

Der Film zeigte mittelstarke allgemeine Schwärzung, besonders um den Primärfleck und von $\frac{\vartheta}{2}$ etwa 38° nach außen zunehmend. Außerdem zeigte er Interferenzstreifen, die aber entschieden etwas schwächer waren als bei der vorigen Aufnahme, die diffuse Verbreiterung der äußeren Interferenzstreifen ist ungefähr ebenso ausgeprägt, wie bei der vorigen Aufnahme.

Die Anzahl sicher feststellbarer Linien ist geringer als in der vorigen Aufnahme, es handelt sich aber um dieselbe Struktur, wie folgende Tabelle XVII zeigt, die Nummern entsprechen den Nummern der vorigen Tabelle.

Tabelle XVII. *Uranpecherz B.*

No.	Stärke	$2d$	
4	ss	51,0	β 220
5	s-s'	56,8	220
7	s-s'	66,2	311
8	sss	69,6	222
11	s	ca. 92,5	331
12	s	ca. 96,0	420
14	s	ca. 111,0	422
15	s	ca. 122,0	511, 333

Die Aufnahmen beweisen, daß im Uranpecherz von Joachimstal krystalline Substanz enthalten ist. Die Krystallindividuen sind offenbar sehr klein. Betreffend der Größe der Einzelkrystalle darf man annehmen, daß dieselben wesentlich größer sind als 10^{-7} cm., da die Linienverbreiterung bei weitem nicht so stark ist, wie bei Debye-Scherrer-Aufnahmen von »amorphem« Kohlenstoff¹ oder von hochdisperssem Eisen². Andererseits müssen nach DEBYE und SCHERRER die Individuen wesentlich kleiner sein als 10^{-4} cm., damit merkbare Linienverbreiterung eintritt.

Offenbar liegt wiederum ein flächencentriertes Würfelgitter der Uranatome vor. Berücksichtigt man alle α -Linien bis zu $q = 16$, erhält man als gemeinsamen Faktor 0,0316. Dieser Wert ist den berechneten Sinuswerten in Tabelle XVI zugrundegelegt. Berücksichtigt man nur die *starken* α -Linien, so erhält man als Faktor 0,0318.

¹ P. DEBYE und P. SCHERRER, Physikalische Zeitschrift XVIII, 1917, S. 293, siehe auch P. SCHERRER, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Kl. 1918, Heft. 1, S. 98 und besonders P. SCHERRER in ZSIGMONDYS Handbuch der Kolloidchemie, 3. Aufl., S. 387 (1920).

² A. WESTGREN & G. PHRAGMÉN, X-Ray Studies on the Crystal Structure of Steel, Journ. of the Iron and Steel Inst., 1922, No. 1, p. 255.

In ersterem Falle erhält man als Seitenlänge des Elementarwürfels

$$a = 5,45 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}, \text{ im zweiten Falle hingegen}$$

$$a = 5,42 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}, \text{ letzterer Wert stimmt entschieden besser mit den Messungen}$$

Dies ist ein etwas niedrigerer Wert als bei reinem Urandioxyd und bei Bröggerit.

Obgleich die Differenz nahe den Fehlergrenzen liegt, die bei schlecht meßbaren Diagrammen anzunehmen sind, ist es doch wahrscheinlich, daß ein Teil der Uranatome durch Atome von kleinerem Volumen ersetzt ist (wie Pb).

Es ist übrigens auffällig, daß die Dichte des sogenannten »amorphen« Uranpecherzes in der Regel viel niedriger gefunden wird als diejenige der kristallisierten Uraninite.

Es ist wohl am wahrscheinlichsten, daß im »amorphen« Uranpecherz neben einer kristallinen Substanz, die wesentlich aus UO_2 besteht, auch wirklich amorpher Stoff von bedeutend geringerer Dichte vorkommt.

Debye-Scherrer-Aufnahmen und Laue-Diagramm von Thorianit.

Ein Diagramm des Thorianits vom Galle-District, Ceylon, wurde aufgenommen.

Spannung ca. 40 Kilovolt, Stromstärke 15 Milliampère, Aufnahmezeit 45 Minuten, Stabdicke 2,0 mm., Eisenantikathode. Effektiver Kamera-durchmesser 49,52 mm.

Der Film zeigt deutliche Allgemeinschwärzung, die Linien sind nicht hervorragend stark, die ersten Linien sind etwas undeutlich wegen der Allgemeinschwärzung um den Primärfleck, wodurch die Schätzung der Intensität sehr schwierig ist.

Die schwachen β -Linien sind schwer meßbar.

Das Diagramm zeigt, daß der Thorianit Krystalstruktur besitzt. Die Struktur zeigt reguläre Symmetrie, alle Linien entsprechen dem flächen-centrierten Würfelgitter.

Die Seitenlänge des Elementarwürfels berechnet sich aus dem Faktor $0,0301 \pm 0,0001$ zu

$$a = 5,57 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Es kann demnach keinem Zweifel unterliegen, daß der untersuchte Thorianit dieselbe Krystalstruktur besitzt, wie das künstlich dargestellte

Tabelle XVIII. *Thorianit*.

No.	Stärke	2 d	Korrektion $K = 50'$			Fläche	
			$\frac{\vartheta}{2}$	$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = q \cdot X$	$\sin \frac{\vartheta}{2}$ ber.		$\sin \frac{\vartheta}{2}$ gef.
1	s?	29,8	$15^0 15'$		0,273	0,263	β 111
2	s-st	33,6	$17^0 26'$	$0,0900 = 3 \times 0,03000$	0,301	0,300	111
3	s?	34,7	$18^0 5'$		0,315	0,310	β 200
4	s-st	38,5	$20^0 17'$	$0,120 = 4 \times 0,03000$	0,347	0,347	200
5	sss	49,7	$26^0 46'$		0,445	0,450	β 220
6	st	54,2	$29^0 20'$	$0,240 = 8 \times 0,03000$	0,491	0,490	220
7	sss	57,6	$31^0 18'$		0,522	0,520	β 311
8	ss?	60,0	$32^0 42'$		0,545	0,540	β 222
9	st	64,2	$35^0 18'$	$0,334 = 11 \times 0,03036$	0,575	0,578	311
10	s	67,3	$36^0 55'$	$0,361 = 12 \times 0,03008$	0,601	0,601	222
11	s	79,1	$43^0 47'$	$0,479 = 16 \times 0,02993$	0,694	0,692	400
12	st	88,2	$49^0 13'$	$0,573 = 19 \times 0,03016$	0,756	0,757	331
13	st	91,2	$50^0 47'$	$0,601 = 20 \times 0,03005$	0,776-771	0,775	420, β 422
14	sss	97,8	$54^0 37'$		0,818	0,815	β 511, β 333
15	stst	104,0	$58^0 10'$	$0,723 = 24 \times 0,03013$	0,850	0,850	422
16	ss?	109,3	$61^0 14'$		0,890	0,874	β 440
17	s-st	114,6	$64^0 18'$	$0,812 = 27 \times 0,03007$	0,901	0,901	511, 333
18	s-st	122,6	$68^0 55'$		0,929	0,933	β 531
19	s	127,3	$71^0 39'$		0,944	0,949	β 442, β 600

Thoriumdioxid. Der Elementarwürfel ist ein wenig kleiner als der des reinen Thoriumdioxides, dies entspricht der isomorphen Beimengung von-Urandioxid.

Eine Erörterung des spezifischen Gewichts in Bezug auf die gefundenen Gitterdimensionen hat wenig Zweck, da der Thorianit stets zahlreiche Beimengungen enthält, über deren Strukturzustand wir nichts wissen.

Der Thorianit ist also wie das Debye-Scherrer-Diagramm ergab, unzweifelhaft kristallin. Es lag aber immerhin die Möglichkeit vor, daß die Thorianitkristalle nicht mehr einheitlich kristallin orientiert sind, sondern daß ein feinkörniges Aggregat kristalliner Substanz den Raum des ursprünglichen Kristalls erfüllt, in der Art der Paramorphosen.

Um dieser Frage nachzugehen, wurde ein Laue-Diagramm eines Thorianitkristalls aufgenommen, Spannung 90 Kilovolt, Stromstärke 2 Milliampère, Aufnahmezeit 15 Minuten. Hierzu wurde ein kleiner Zwillingskristall (vergl. S. 12) in willkürlicher Stellung in den Gang des Strahlenbündels einer Coolidgeöhre gebracht. Die Aufnahme zeigte ein Diagramm mit deutlichen Interferenzflecken, die zu Zonenbögen angeordnet waren; der Thorianit enthält also, wie auch der Bröggerit, kristalline Substanz in einheitlicher Orientierung.

Die Krystalstruktur von Fluorit und Ytthrofluorit.

Die Krystalstruktur von Fluorit ist bekannt¹. Es erschien von Interesse die Krystalstruktur von Ytthrofluorit² zu untersuchen, da isomorphe Aufnahme von YF_3 in Krystalle von CaF_2 offenbar nahe analog mit der Aufnahme höherer Uranoxyde in Urandioxyd sein dürfte.

Um die Struktur von Fluorit und Ytthrofluorit zu vergleichen, machten wir Debye-Scherrer-Aufnahmen von Fluorit von Hesselbach in Baden und Ytthrofluorit von Hundholmen in Nordnorwegen. Da die Möglichkeit denkbar war, daß der Ytthrofluorit, wie so viele andere Minerale alter Pegmatitgänge, welche seltene Erden enthalten, metamikt umgewandelt sei, oder durch teilweise Rekrystallisation eines metamikten Körpers entstanden sei, wurde zunächst eine Laue-Aufnahme an einem etwa 2 mm. dicken Plättchen von Ytthrofluorit aufgenommen. Es erwies sich, daß ein homogener Krystall vorlag.

Ein Debye-Scherrer-Diagramm von Fluorit und zwei von Ytthrofluorit wurden in der üblichen Weise aufgenommen. Beide zeigten starke allgemeine Schwärzung und kräftige Linien. Als wir erkannten, daß die allgemeine Schwärzung großenteils durch sichtbare Fluorescenz bedingt ist, wurde noch eine dritte Aufnahme von Ytthrofluorit, unter Anwendung von schwarzem Papier über dem Film hergestellt, die viel geringere Allgemeinschwärzung zeigte.

Bei Fluorit wurden folgende Linien gefunden:

$\{III\}$ st, $\beta \{220\}$ s, $\{220\}$ st, $\beta \{3II\}$ ss?, $\{3II\}$ s—st, $\beta \{400\}$ ss?, $\{400\}$ s, $\beta \{33I\}$ s, $\{33I\}$ s—st, $\beta \{422\}$ ss?, $\beta \{5II\}$ u. $\beta \{333\}$ s, $\{422\}$ st, $\beta \{440\}$ ss, $\{5II\}$ u. $\{333\}$ s—st, $\beta \{53I\}$ s, $\beta \{442\}$ u. $\beta \{600\}$ s.

Bemerkenswert ist das Fehlen von $\{200\}$, $\{222\}$ u. vielleicht $\{420\}$, entsprechend der nahen Übereinstimmung der Elektronenzahlen des Calciumions (18) und der zwei Fluorionen (2×10).

Die Gitterkonstante ergab sich zu

$$a = 5,47 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Bei Ytthrofluorit wurden folgende Linien gefunden:

βIII s?, $\{III\}$ st, $\{200\}$ ss?, $\beta \{220\}$ s, $\{220\}$ st, $\beta \{3II\}$ s, $\{3II\}$ st, $\{222\}$ ss, $\beta \{400\}$ sss, $\{400\}$ u. $\beta \{33I\}$ s—st, $\{33I\}$ st, $\beta \{422\}$ u.? $\{420\}$ s, $\beta \{5II\}$ u. $\beta \{333\}$ s, $\{420\}$ st, $\beta \{440\}$ s, $\{5II\}$ u. $\{333\}$ st, $\beta \{53I\}$ s—st, $\beta \{442\}$ u. $\beta \{600\}$ s—st, sowie vielleicht $\{510\}$, $\{43I\}$ s?

¹ W. L. BRAGG, Proc. Royal Soc. London A; LXXXIX, 1913—14, p. 248 & 468.

² Ytthrofluorit ist ein Fluorit, in welchen ca. 10—20% YF_3 an Stelle von CaF_2 eingetreten ist. TH. VOGT, Centralbl. f. Min. 1911, S. 373, u. Neues Jahrb. f. Mineralogie, 1914, II, S. 9, sowie F. ZAMBONINI, Riv. di Min. e Cristallogr. Italiana, XLV, 1915, Estr. p. 149—152.

Die Gitterkonstante ist

$$a = 549, \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Es zeigt sich also, daß Fluorit und Yttrifluorit nahe verwandte Strukturen besitzen, das Yttrium tritt unzweifelhaft an die Stelle von Calciumatomen in das flächencentrierte Würfelgitter des Calciums ein. Die Gleichheit der Elektronenzahlen der Kationen und Anionen bleibt bei der Substitution annähernd erhalten, indem das Yttriumion (36) drei Fluorionen (3×10) entspricht.

Die Reflexion von $\{222\}$ ist bei Yttrifluorit zwar sehr schwach, aber doch unzweifelhaft.

In denjenigen Elementarbezirken, in denen Calciumatome teilweise durch Yttrium ersetzt sind, müssen jetzt mehr als 8 Fluoratome enthalten sein. Über die Art der Gruppierung der Fluoratome in solchen Gitterteilen läßt sich vorderhand nichts Bestimmtes aussagen. Für uns ist indessen die Tatsache wesentlich, daß eine derartige Substitution stattfinden kann, ohne daß die Anordnung der Metallionen in flächencentrierten Gittern zerstört wird, denn es ist ein Analogon der Aufnahme überschüssigen Sauerstoffs in das Gitter des Urandioxyds.

Die Erweiterung der Würfelkante von 5,47 auf 5,49 braucht nicht durch den Eintritt der neuen Fluoratome bedingt zu sein, sondern kann durch den teilweisen Ersatz von Calcium durch Yttrium verursacht werden.

Es ist eine auch in allgemein kristallographischer Beziehung wichtige Frage, in welcher Weise die geometrische Anordnung geändert wird, wenn Verbindungen *ungleicher* Atomzahl isomorphe Mischungen bilden. Die festen Lösungen der verschiedenen Oxyde des Eisens und die Lösungen überschüssigen Schwefels in FeS würden ein geeignetes Material für systematische Untersuchungen über diese Frage liefern können.

Die Zusammensetzung und Atomanordnung der Uranoxydminerale.

Die Zusammensetzung von Uranpecherz, Bröggerit, Cleveit und dergl. wird gemeinhin als U_3O_8 angenommen, und in den Lehrbüchern der Mineralogie werden diese Minerale in der Regel der Spinellgruppe zugeordnet.

Dies ist aber keineswegs richtig. Bereits die Analysen von W. F. HILLEBRAND¹ zeigen unzweifelhaft, daß diese Minerale, sofern sie einigermaßen frisch sind, bei weitem mehr UO_2 enthalten, als der Formel $U_3O_8 = 1UO_2 \cdot 2UO_3$ entsprechen würde. So enthält der kristallisierte Uraninit

¹ HILLEBRAND, U. S. A. Geol. Surv. Bull. 78¹, 1891, p. 4.

von Branchville, Conn. 72,25 % UO_2 und nur 13,27 % UO_3 , der Bröggerit aus der Gegend östlich des Kristianiafjords 43—51 % UO_2 und 22—36 % UO_3 , wozu noch kommt, daß ein Teil des Urans durch Thorium vertreten wird, das jedenfalls als Dioxyd in das Mineral eintritt. Die Menge des Thoriums, berechnet als ThO_2 , beträgt in den obengenannten Vorkommen etwa 6—9 %. Auch im »amorphen« Pecherz von Johannegeorgensstadt fand HILLEBRAND¹ 59,3 % UO_2 gegenüber nur 22,3 % UO_3 .

In stark zersetzten Uraninitmineralen (wie Cleveit) steigt nach HILLEBRANDS Analysen die Menge von UO_3 auf Kosten von UO_2 , zweifellos durch eine sekundäre Sauerstoffaufnahme.

Die Analogie der Gitterdimensionen und der Anordnung der Metallatome in Bröggerit, Thorianit, Urandioxyd und Thoriumdioxyd zeigt mit Bestimmtheit, daß UO_2 die Grundsubstanz des Bröggerits sein muß. Bereits W. R. DUNSTAN und G. S. BLAKE² weisen darauf hin, daß Thorianit und Uraninit wahrscheinlich isomorph sind und zwar als ThO_2 und UO_2 , und schon HILLEBRAND³ hat synthetisch isomorphe Mischungen von Urandioxyd und Thoriumdioxyd dargestellt. Indessen halte ich es für wahrscheinlich, daß nicht der *ganze* Sauerstoffüberschuß in den Uraninitmineralen sekundär ist, sondern es dürfte eine gewisse Menge Sauerstoff im Überschuß über die Formel RO_2 von vornherein in fester Lösung in den Mineralen enthalten gewesen sein, so hat ja schon HILLEBRAND synthetisch isomorphe Mischungen von UO_2 und UO_3 dargestellt.

Es fragt sich nun, in welcher Weise kann man sich die Anordnung überschüssiger Sauerstoffatome im UO_2 -Gitter vorstellen? Hier kommen mehrere Möglichkeiten in Betracht. Es kann eine vollständige Umgruppierung *aller* Sauerstoffatome im Elementarwürfel stattfinden, und es können dann vielleicht zwölf gleichwertige Atome Sauerstoff in Elementarwürfel angeordnet sein. Oder aber die acht ersten Sauerstoffatome verbleiben auf ihrem Platze und die überschüssigen Sauerstoffatome füllen diejenigen Positionen des Gitters, die am ehesten Platz bieten.

Ein ganz analoges Gruppierungsproblem findet man bei der isomorphen Vertretung von CaF_2 durch YF_3 im Yttriofluorit. Hier wird zwar je ein Calciumatom durch ein Yttriumatom ersetzt, aber für die Fluoratome müssen neue Punktlagen gefunden werden.

Nun beweist unsere Untersuchung, daß die Metallatome im Yttriofluorit tatsächlich dieselbe Anordnung zeigen wie im Fluorit, und daher erscheint

¹ HILLEBRAND, U. S. A. Geol. Surv. Bull. 90, 1892, p. 23.

² W. R. DUNSTAN & G. S. BLAKE, Thorianite, a New Mineral from Ceylon, Proc. Royal Soc. London, A. LXXVI, 1906, p. 253.

³ HILLEBRAND, U. S. A. Geol. Surv. Bull. 113, 1893, p. 41.

es berechtigt anzunehmen, daß die Uraninitminerale auch *primär* einen gewissen Überschuß an Sauerstoffatomen über die Formel RO_2 enthalten haben können, unter Beibehaltung des Urangitters von UO_2 .

Ob der ganze sekundär aufgenommene Sauerstoff ebenfalls in fester Lösung in das Krystallgitter eingeht, oder ob bei der sekundären Oxydation neben der Krystallsubstanz auch amorphe Produkte entstehen, läßt sich noch nicht sicher entscheiden, doch möchte ich auf Grund der mikroskopischen Untersuchung, vergl. S. 11, glauben, daß bei sehr vorgeschrittenen Stadien der Oxydation (Cleveit) auch wesentliche Mengen amorpher Substanz entstehen, wobei dann auch die Interferenzlinien der Diagramme gegenüber der allgemeinen Schwärzung mehr zurücktreten.

Im Uranpecherz dürfte ebenfalls eine Mischung amorpher und krystallisierter Substanz vorliegen.

Was die übrigen Bestandteile der Uranoxydminerale angeht, wäre noch zu bemerken, daß Thorium und die kleine Menge Cerium sicher als Dioxyde in Vertretung von UO_2 von vornherein im Gitter vorhanden waren.

Das Blei könnte wohl, sofern es teilweise primär dem Mineral angehörte (wie in manchen Pecherzen), dem Gitter als PbO_2 angehört haben. Die Hauptmenge des Bleis in solchen Mineralen wie Bröggerit ist aber erst nach Bildung der Krystalle auf Kosten von Uran entstanden. In welcher Anordnung finden sich nun diese Bleiatome im Krystall? Ich möchte es nach dem Resultat unserer Untersuchung für das wahrscheinlichste halten, daß sie sich am Orte ihrer ursprünglichen Uranatome befinden, und daß der Bröggerit gewissermaßen als isomorpher Mischkrystall von UO_2 , ThO_2 und Dioxyd¹ des Uranbleis aufzufassen ist, wobei das Uranblei erst im Krystall selbst entstanden ist. Theoretisch wäre es möglich, den Oxydationszustand des Bleis im Bröggerit zu bestimmen, indem man das Absorptionsspektrum der Blei-Ionen im Bröggerit genau mißt.

Bei der Diskussion über das Verhalten der einzelnen Atome in radioaktiven Krystallen ist in unserm Falle noch folgendes zu berücksichtigen. Das Uran wandelt sich ja nicht direkt in Blei um, sondern es werden eine Reihe von Stufen durchlaufen, die sich nicht dem Valenzschema von vierwertigem Uran oder Blei einordnen lassen. Wie soll man sich etwa ein Emanationsatom, ein Edelgas, im Krystallgitter des Bröggerits vorstellen? Nun ist zu berücksichtigen, daß nur selten der Fall eintreffen kann, daß eine Anzahl unmittelbar *benachbarter* ursprünglicher Uranatome *gleichzeitig* in Zwischenstadien zwischen Uran und Blei umgewandelt sind. Und ist nur je ein einzelnes U-Atom im engeren Gitterbezirk im Zerfallsstadium, könnten

¹ Die eventuelle Gegenwart von Bleidioxyd würde bei der Analyse eine entsprechende Menge UO_3 anstatt UO_2 vortäuschen.

die inzwischen frei gewordenen Sauerstoffvalenzen durch Übergang benachbarter Uranatome in sechswertiges Uran abgesättigt werden.

Sehr schwierig ist es, sich von der Anordnung der abgespaltenen Heliumatome im Bröggeritkrystall eine anschauliche Vorstellung zu machen. Beim Zerfall eines Uranatoms zu Uranblei entstehen nicht weniger als acht Heliumatome, das heißt, es sind im Bröggeritkrystall bis heute ungefähr ebensoviele Heliumatome frei geworden, als das Gitter ursprünglich Uranatome enthalten hat¹. Der allergrößte Teil des Heliums ist im Krystall selbst abgebremst worden, und erst allmählig später herausdiffundiert.

Es ist sehr merkwürdig, daß solche großen Substanzveränderungen und das Abbremsen so großer Mengen kinetischer Energie nicht zu einer völligen Zerstörung der ursprünglichen Atomanordnung geführt haben. Unser Resultat, daß der Bröggerit und der Thorianit noch gänzlich oder größtenteils ihre ursprüngliche Atomanordnung besitzen, ist daher sehr überraschend.

Daß L. VEGARD² bei Bröggerit und Thorianit nach der Bragg-Methode nur sehr schwache Reflexion erhalten hat, könnte folgenden Grund haben. Bei Anwendung der Bragg-Methode auf stark absorbierende Krystalle tritt nur eine sehr dünne Oberflächenschicht in Wirkung. Nun dürfte aber gerade die Oberflächenschicht dieser Minerale durch sekundäre Oxydation und Hydratation relativ stark verändert sein. Es wäre von Interesse, *angeschliffene* Flächen dieser Minerale auf Reflexionsfähigkeit für Röntgenstrahlung zu untersuchen. VEGARD schloß aus seinen Ergebnissen, daß Bröggerit und Thorianit Gemenge krystalliner und amorpher Substanz seien.

Was die Gitterdimensionen der Urandioxyd-Thoriumdioxyd-Minerale anbelangt, ist folgendes zu beachten.

Die Gitterdimensionen der betreffenden reinen Oxyde ordnen sich folgendermaßen:

	$a \cdot 10^{-8}$ cm.
Thoriumdioxyd	5,61
Urandoxyd	5,47
Ceriumdioxyd	5,41
Bleidioxyd ³ , unbekannt, wahrscheinlich kleiner als	5,47.

¹ Das Alter des Bröggerits von Raade ist durch E. GLEDITSCH zu 950 Millionen Jahren bestimmt worden, *Études sur les minéraux radioactifs I*, Ark. f. Math. og Naturv., XXXVI, 1919, No. 1.

² L. VEGARD, *Vid.-Selsk. Forh.* 1918, No. 1, S. 4.

³ Unter der Voraussetzung, daß PbO_2 in das reguläre Gitter eintritt. Nach den Gitterdimensionen der reinen Metalle ist das Atomvolumen des Bleis bedeutend kleiner als das des Thoriums.

Dementsprechend hat der Thorianit vom Galle-District, der etwa 20—30 % Uranoxyde, 6 % Bleioxyde, und 1—2 % Ceroxyde enthält, eine Gitterkonstante $5,57 \cdot 10^{-8}$ cm.

Im Bröggerit und Cleveit dominiert das Urandioxyd, die Wirkungen von Thorium einerseits, von Blei und Cerium andererseits dürften einander ungefähr kompensieren, entsprechend dem Wert 5,47 der Gitterkonstanten.

Im Uranpecherz sind neben Uran offenbar nur solche Metalle enthalten, welche verkleinernd auf die Gitterkonstante des UO_2 wirken.

Zusammenfassung.

I.

Urandioxyd, Thoriumdioxyd und Ceriumdioxyd sind isomorph, die Metallatome sind in flächencentrierten Würfelgittern angeordnet, für die Anordnung der Sauerstoffatome liegen drei geometrisch verschiedene Möglichkeiten vor, am wahrscheinlichsten ist der Fluorittypus.

II.

Die Krystalstruktur von U_3O_8 ist wesentlich verschieden von der des UO_2 ; die Krystalle gehören *nicht* dem regulären Systeme an.

III.

Urantrioxyd konnte nur amorph erhalten werden.

IV.

Bröggerit, Cleveit und Thorianit zeigen deutliche Krystalstruktur. Bei Bröggerit und Thorianit wurde auch durch Laue-Aufnahmen gezeigt, daß die Atomanordnung noch dem ursprünglichen Krystalgitter entspricht. Die Struktur von Bröggerit, Cleveit und Thorianit entspricht isomorphen Mischungen von Urandioxyd, Thoriumdioxyd, etwas Ceriumdioxyd und eventuell dem Dioxyd des Uranbleis. Bröggerit und die andern Varietäten von Uraninit gehören demnach *nicht* zur Spinellgruppe.

Die Gitterdimensionen der untersuchten Körper sind:

	$a \cdot 10^{-8}$ cm.
ThO ₂	5,61
Thorianit	5,57
Bröggerit	5,47
Cleveit	5,47
UO ₂	5,47
CeO ₂	5,41

V.

Cleveit, der reich an UO_3 ist, wird durch kurzes Erhitzen auf 800°C . zu U_3O_8 umgesetzt, Bröggerit besitzt auch nach dem Glühen die Struktur des UO_2 .

VI.

Uranpecherz von Joachimstal enthält (eventuell neben amorphem Stoff) kristalline Substanz in stark dispersem Zustande (Größe der Einzelkristalle zwischen 10^{-4} und 10^{-7} cm.). Die kristalline Substanz des Uranpecherzes kristallisiert regulär. Die Uranatome sind in flächencentrierten Würfeln angeordnet, Kantenlänge derselben $5,42-5,45 \cdot 10^{-8}$ cm., also kleiner als bei reinem Urandioxyd, vielleicht infolge isomorpher Vertretung des Urans durch Atome von kleinerem Volumen.

VII.

Die Krystalstruktur des Yttrifluorits ist nahe verwandt mit derjenigen des Fluorits, die Kantenlänge des Elementarwürfels beträgt $5,49 \cdot 10^{-8}$ cm. gegenüber $5,47 \cdot 10^{-8}$ cm. bei Fluorit. In Yttrifluorit können die Fluoratome nicht auf dieselbe Weise angeordnet sein wie im Fluorit. Wahrscheinlich ist die Aufnahme überschüssigen Sauerstoffs in Kristalle von Urandioxyd in geometrischer Beziehung vergleichbar der Aufnahme überschüssiger Fluoratome in Yttrifluorit.

VIII.

Es ist bemerkenswert, daß so stark radioaktive und so alte Minerale wie Bröggerit und Thorianit ihre ursprüngliche Atomanordnung ganz oder größtenteils bewahren konnten, trotzdem beispielsweise im Bröggerit etwa jedes achte Uranatom in Blei umgewandelt ist und trotzdem hierbei das Krystallgitter von etwa gleichviel Alphapartikeln bombardiert worden ist, als das Gitter Uranatome enthalten hat.

Anhang: Röntgenspektrographische Analyse des Ceriumdioxydes.

Das Ceriumdioxyd B (vergl. S. 10) wurde nach der ausgezeichneten HADDINGSchen Methode¹ qualitativ analysiert.

Es wurde eine in Lund² hergestellte, später von uns umgebaute, spektrographische Kamera (mit Steinsalzkrystall) benutzt. Durch Anbringen

¹ A. HADDING, Kvalitativ analys enligt röntgenspektrografisk metod, Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar No. 11, 1922, und Mineralanalysen nach Röntgenspektroskopischer Methode, Zeitschr. f. anorganische Chemie, Bd. 122, 1922, S. 195.

² Wir sind Herrn Prof. Dr. M. SIEGBAHN in Lund sehr zu Dank verpflichtet, indem mehrere der von uns angewandten Apparate in seinem Institut hergestellt sind.

geeigneter Bleischirme und einer zweckmäßigen Kathodenform wurde eine recht hohe Empfindlichkeit erreicht, worüber L. THOMASSEN in einer andern Abhandlung berichten wird. Es sei beiläufig bemerkt, daß beispielsweise 0,02% Gold in Wismut noch sicher nachgewiesen werden konnte.

Eine Aufnahme des Ceriumdioxides auf einer Kupferantikathode wurde hergestellt. Exposition mit Drehkristall (Uhrwerk) im Intervall 29° – 15° (36–38 Kilovolt, 10–15 Milliampère) und 9° – 5° (41 Kilovolt, 8–10 Milliampère), Drehgeschwindigkeit 2 Minuten per Grad.

Auf dem Film entspricht 1 mm. Länge $29,3'$.

Analysenspektrogramm, Cerdioxid B.

Stärke ¹	Glanzwinkel	Linie	Berechnet ²
1	$27^{\circ} 10'$	Ce $L\alpha_2$	$27^{\circ} 10'$
10	Ref. Linie	Ce La_1	$27^{\circ} 4'$
1	$24^{\circ} 58'$	Nd La_1	$24^{\circ} 54'$
10	$24^{\circ} 39'$	Ce $L\beta^1$	$24^{\circ} 45'$
		Ce $L\beta_4$	$24^{\circ} 40'$
6	$24^{\circ} 11'$	Ce $L\beta_3$	$24^{\circ} 14'$
2	$23^{\circ} 51'$	Cr $K\alpha$	$23^{\circ} 54'$
8	$23^{\circ} 1'$	Ce $L\beta_2$	$23^{\circ} 6'$
		Ce $L\beta_7$	$23^{\circ} 1'$
1	$22^{\circ} 43'$	Nd $L\beta_1$	$22^{\circ} 36'$
1	$21^{\circ} 50'$	Mn $K\alpha$	$21^{\circ} 51'$
		Cr $K\beta_1$	$21^{\circ} 41'$
6	$21^{\circ} 15'$	Ce $L\gamma_1$	$21^{\circ} 20'$
3	$20^{\circ} 8'$	Fe $K\alpha$	$20^{\circ} 3'$
2	$19^{\circ} 36'$	Mn $K\beta_1?$	$19^{\circ} 45'$
6	$15^{\circ} 47'$	Cu $K\alpha$	$15^{\circ} 53'$
2	$14^{\circ} 13'$	Cu $K\beta_1$	$14^{\circ} 19'$
1	$13^{\circ} 18'$	Zn $K\beta_1^3$	$13^{\circ} 18'$

Dazu noch äußerst schwach und zweifelhaft $K\alpha$ und $K\beta$ von Yttrium und Zirkonium.

Das Spektrogramm zeigt somit, daß ein ungewöhnlich reines Präparat vorlag. Von Metallen der Cergruppe ist außer Cerium nur Neodym zugegen, offenbar in minimaler Menge.

¹ Geschätzt in Stärkegraden 1–10.

² Nach HADDINGS Winkeltabelle und nach M. SIEGBAHN, Bericht über die letzte Entwicklung der Röntgenspektroskopie, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik, Bd. XVIII, Heft 3, 1922.

³ Zn $K\alpha$ ist nur ganz schwach angedeutet, da in dem betreffenden Winkelintervall nur ganz kurz exponiert wurde.

Ferner findet sich eine kleine Menge Chrom, die vielleicht die grünliche Farbe des Präparats verursacht; Eisen und Mangan sind vorhanden, aber können auch aus dem Antikathodenkupfer stammen. Das Zink ist eine fast stets vorhandene Verunreinigung des Antikathodenkupfers. Die Gegenwart von Spuren Yttrium und Zirkonium ist höchst zweifelhaft.

Die Gegenwart von Chrom ist begreiflich, da Chromverbindungen bei der fabrikmäßigen Herstellung¹ von Ceriumpräparaten angewandt werden.

Wir möchten schließlich noch bemerken, daß die röntgenspektroskopische Analysenmethode bei der Untersuchung analytischer Produkte und synthetischer Präparate ausgezeichnete Dienste leistet.

¹ Nach Mitteilung von Herrn Universitätsstipendiat A. RÖDLAND.

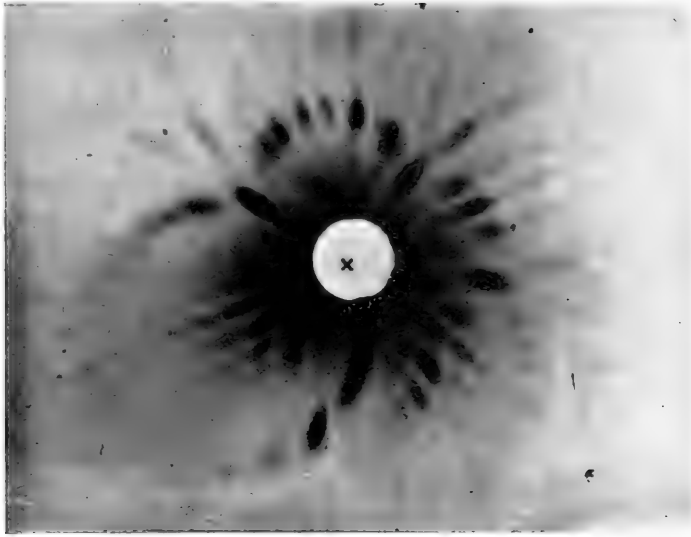


Fig. 1. Bröggerit, schiefer Schnitt, ca. \perp {111}.

[010]

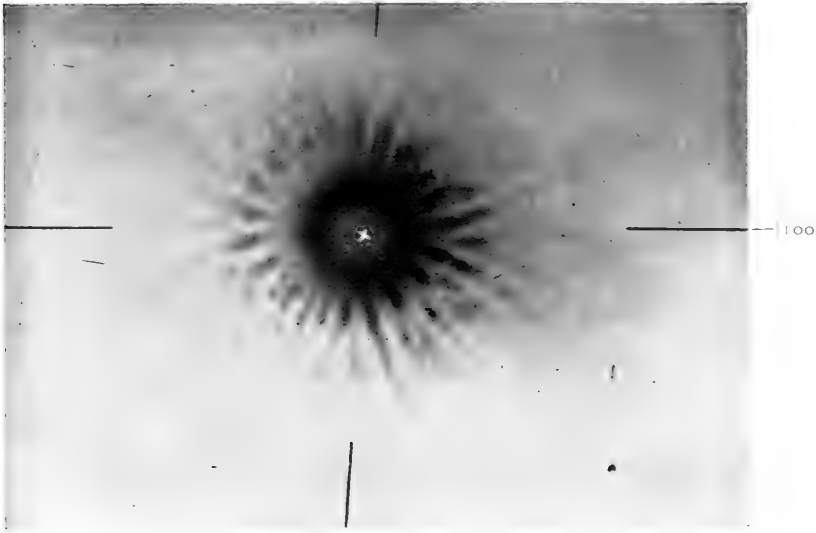


Fig. 2. Bröggerit, \perp {001}.



Fig. 3. UO₂, Präparat A.

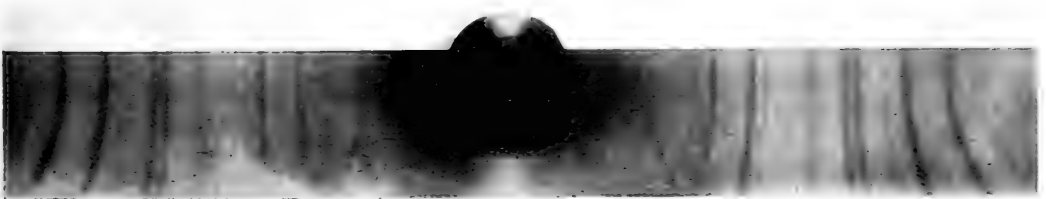


Fig. 4. Bröggerit.

	9	11	12	10	20
					24
					27

GEOCHEMISCHE
VERTEILUNGSGESETZE
DER ELEMENTE

VON

V. M. GOLDSCHMIDT

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 3)



KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 25. mai 1923.

Es gehört zu den interessantesten und wichtigsten Aufgaben der Geochemie, festzustellen, in welchem Mengenverhältnis die chemischen Elemente vorkommen und welche Vorgänge es sind, welche für die lokale Anreicherung der einzelnen Elemente maßgebend sind.

Im folgenden möchte ich einige allgemeine Gesichtspunkte erörtern, welche bei der Behandlung derartiger Aufgaben fruchtbar sein dürfen.

Die Verteilung und Menge der chemischen Elemente an der uns heute zugänglichen Erdoberfläche, ihr Vorkommen in Atmosphäre, Hydrosphäre, Lithosphäre, ist erstens bedingt durch das Mengenverhältnis, in welchem die Elemente von vornherein vorhanden waren, zweitens durch Vorgänge der Stoffverteilung und Stoffwanderung, denen die Elemente unterworfen waren und noch sind.

In früheren Darlegungen¹ habe ich gezeigt, wie man die physikochemischen Vorgänge in Gesteinen als einen »Stoffwechsel der Erde« betrachten kann. Jetzt möchte ich auf einige allgemeine Prinzipien hinweisen, die für den Weg zum heutigen Verteilungszustand der Elemente von wesentlicher Bedeutung sind, indem sie in vielen wichtigen Fällen die Richtung der Stoffwechselforgänge entscheidend beeinflusst haben.

Es handelt sich bei den Stoffwechselforgängen, die zur heutigen Verteilung der Elemente geführt haben, um vier Arten physikochemischer Prozesse.

Erstens um Verteilung der Elemente zwischen koexistierenden flüssigen Phasen; Vorgänge dieser Art in größtem Maßstabe beherrschten die Verteilung der Elemente zwischen Metallschmelze, Sulfidschmelze und Silikatschmelze.

Zweitens handelt es sich um Verteilung der Elemente zwischen koexistierenden flüssigen und gasförmigen Phasen. Hierher gehört die Abspaltung von Atmosphäre (und Hydrosphäre) aus dem ursprünglichen

Vortrag in der Sitzung vom 25ten Mai der Mat.-Naturv. Kl. von Videnskapsselskapet.

¹ Der Stoffwechsel der Erde, Videnskapsselsk. Skr. 1922, M.-N. Kl. No. 11 und Zeitschrift für Elektrochemie, Bd. 28, 1922, p. 411—421, sowie: Ueber die Massenverteilung im Erdinnern verglichen mit der Struktur gewisser Meteoriten. Die Naturwissenschaften 1922, Heft 42.

Schmelzfluß, sowie in kleinerem Maßstabe beispielsweise die Abspaltung gasförmiger Phasen aus Silikatschmelzflüssen.

Drittens kommt die Verteilung der Elemente zwischen festen Phasen und flüssiger Lösung (oder Gasphasen) bei der fraktionierten Krystallisation von Silikatschmelzflüssen und deren Restlaugen in Betracht.

Viertens kommt hierzu noch die specielle Verteilungsart der Elemente bei Vorgängen sekundärer Umlagerungen der primären Krystallisationsprodukte unter Einwirkung von Lösungsmitteln. Hierher gehören alle jene Vorgänge, die man als Verwitterungsvorgänge, Metamorphose, Metasomatose und dergl. zusammenfaßt.

Von entscheidender Bedeutung in jedem einzelnen Fall von Phasensonderung und für jedes einzelne Element ist der Verteilungsquotient des betreffenden Elementes zwischen den koexistierenden Phasen unter den gegebenen Verhältnissen von Temperatur und Druck.

Es soll versucht werden, einen Überblick über die Verteilungsverhältnisse der chemischen Elemente zu gewinnen, wie sie sich bei der fortschreitenden stofflichen Differentierung des Erdballs ergeben müssen.

Bezüglich der principiellen Grundlage einer solchen Darstellung sei auf meine früheren Erörterungen verwiesen.

Entsprechend meiner Auffassung über den Entwicklungsgang der Erde, werden folgende wichtigste Stadien im Laufe der Zeit durchlaufen.

I.

Ursprünglich gasförmiger oder schmelzflüssiger Erdball, über dessen chemischen Differentierungsgrad wir noch keine sichere Aussage machen können.

II

Unter dem Einfluß der Abkühlung Scheidung in ein System dreier flüssiger Phasen, nämlich Metallschmelzfluß, Sulfidschmelzfluß, Silikatschmelzfluß. Diese drei Schmelzflüsse werden unter dem Einflusse des Schwerfeldes konzentrisch angeordnet, zu äußerst ist die Silikatschmelze von einer Dampfhülle umgeben.

III.

Die Silikathülle scheidet sich unter dem Einfluß fortschreitender Krystallisation in leichtere und schwerere Anteile, derart, daß schwere Sonderschmelzen und schwere Krystallarten absinken, leichte Sonderschmelzen, Gasphasen und leichte Krystallarten aufsteigen.

IV.

Mannigfaltige Umlagerungen unter dem Einfluß von Gasen und Lösungen verarbeiten bereits verfestigtes Material der Silikathülle.

Die Stadien I—III entsprechen dem normalen Verlaufe der geochemischen Entwicklung bei stetig sinkender Temperatur. Für jedes einzelne chemische Element muß hierbei ein specielles Verteilungsschema gültig sein, bedingt durch die Verteilungsquotienten bei Phasentrennungen unter den gegebenen Konzentrations-Temperatur-Druck-Bedingungen.

Es mag noch bemerkt werden, daß auch Meteoritenmaterial die unter II angeführte Sonderung in drei flüssige Phasen in typischer Weise erkennen läßt.

Zunächst wollen wir die Verteilung der Elemente betrachten, wie sie durch die Phasentrennung in Eisenschmelze, Sulfidschmelze, Silikatschmelze und Dampföhle bedingt wird.

In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Elemente in vier Gruppen geteilt, entsprechend ihrer Verteilungsweise zwischen den vier Phasen des Systems; die Tabelle umfaßt nur langlebige Elemente. Der Verteilungszustand entspricht dem Stadium III (p. 4).

Maßgebend bei der Ausarbeitung der Tabelle waren erfahrungsgemäß festgestellte Verteilungsquotienten der betreffenden Elemente bei solchen Phasensonderungen. Das Erfahrungsmaterial beruht auf experimentellen Daten, technischen Erfahrungen und zu einem sehr großen Teil auf geochemischer Beobachtung.

Bezüglich der Tabelle sei noch bemerkt, daß Elemente, die mit () bezeichnet sind, nur zum geringeren (aber immerhin recht merklichen) Teile in die betreffende Phase eingehn, Elemente, die mit (()) bezeichnet sind, nur zum *sehr* geringen Teile.

A.	B.	C.	D.
Eisenschmelze <i>Siderophile Elemente</i>	Sulfidschmelze <i>Chalkophile Elemente</i>	Silikatschmelze <i>Lithophile Elemente</i>	Dampföhle <i>Atmosphile Elemente</i>
Fe, Ni, Co	((O)), S, Se, Te	O, (S), (P), (H)	H, N ² , (O), (Cl)
P, C	Fe, (Ni), (Co), Mn?	Si, Ti, Zr, Hf, Th	He, Ne, A, Kr, X
Mo, (W?)	Cu, Zn, Cd, Pb	F, Cl, Br, J	
Pt, Ir, Os?, (Pd), Ru, Rh	(Sn?), Ge, (Mo?)	B, Al, Sc, Y, La, Ce, Pr, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Ds.	
	As, Sb, Bi	Ho, Er, Tu, Ad, Cp	
	Ag, Au, Hg	Li, Na, K, Rb, Cs	
	Pd, (Ru?), (Pt)	Be, Mg, Ca, Sr, Ba	
	Ga, In, Tl	(Fe), V, Cr, Mn, ((Ni)), ((Co))	
		Nb, Ta, W, U, Sn	
		(C) ¹	

¹ Als CO₂.

² Bei hoher Temperatur und hohem Druck vielleicht siderophil (in Nitriden).

Eine solche Einteilung der Elemente in vier geochemische Gruppen, entsprechend ihrem Verhalten bei der Phasensonderung des Erdballs und der Meteoriten, erscheint mir natürlicher, als die Einteilung in »metallo-genetische« und »petrogenetische« Elemente, welche H. S. WASHINGTON vorgeschlagen hat.

Was die Zusammensetzung der Phase A anbelangt, wäre folgendes zu bemerken. Nach Analogie mit der durchschnittlichen Zusammensetzung des Meteoreisens ist für den Eisenkern der Erde ein Nickelgehalt von etwa 6—10 % am wahrscheinlichsten. Der Kobaltgehalt dürfte etwa ein Fünftel des Nickelgehalts betragen. Phosphor und Kohlenstoff sind bei der Verteilung zwischen den drei flüssigen Phasen unzweifelhaft in der Eisenschmelze am stärksten angereichert worden, derart daß die Menge des Kohlenstoffs im Eisenschmelzfluß jedenfalls um ein vielfaches höher ist als in den beiden andern Flüssigkeiten¹, die des Phosphors (als Phosphide) etwa um das Doppelte höher als im Silikatschmelzfluß, in welchem letzteren er in Phosphatform eingeht, während im Sulfidschmelzfluß Phosphor praktisch abwesend sein dürfte.

Die Menge der Platinmetalle im Eisenschmelzfluß dürfte, nach Analogie mit Meteoreisen, von der Größenordnung einiger Gramme per Tonne zu rechnen sein, doch dürfte Palladium, nach den bisher vorliegenden Erfahrungen, wohl hauptsächlich in der Sulfidschmelze angereichert sein. Osmium ist vielleicht lithophil. Man sollte übrigens auch in irdischem Nickeleisen, das aus Silikatschmelzen ausgeschieden ist (wie etwa Josephinit), Platinmetalle nachweisen können.

Molybdän dürfte wohl im Eisenkern angereichert sein; nach Analogie der molybdänhaltigen Eisensauen bei der Verarbeitung des Kupferschiefers dürfte dies Element ausgesprochen siderophil sein. Es wäre sehr interessant, Meteoreisen systematisch auf Vorkommen von Molybdän zu untersuchen der Gehalt könnte vielleicht um 0,05—0,1 % betragen.

Betreffend des Zusammensetzung der Phase B wird vorausgesetzt, daß deren Hauptbestandteil FeS ist, entsprechend den Troilitknollen der Meteoriten. Der Nickel- (und Kobalt) Gehalt der Phase B muß in enger Beziehung zur Menge dieser Metalle in Phase A stehn, und ließe sich durch experimentelle Bestimmung des Verteilungsquotienten von Nickel im System der zwei Flüssigkeiten Fe, Ni und (Fe, Ni)S feststellen. Wahrscheinlich handelt es sich in der Phase B um Nickelmengen von der Größenordnung 1—4 %, falls die Phase A etwa 8 % Ni enthält; Erfahrungen bei der Ver-

¹ Im Sulfidschmelzfluß fehlt Kohlenstoff wohl gänzlich, im Silikatschmelzfluß findet sich ein wenig Karbonat.

hüttung nickelhaltiger Erze lassen auf einen Verteilungsquotienten 1 : 2 bis 1 : 8 schließen.

Was die Mengen der übrigen Bestandteile in der Phase B anbelangt, so wäre zu bemerken, daß die Menge des Kupfers hier wahrscheinlich von ähnlicher Größenordnung sein dürfte, wie diejenige des Nickels. Nach technischen Erfahrungen dürfte der Verteilungsquotient des Kupfers zwischen Sulfidphase und Eisenphase etwa von der Größenordnung 10 : 1 — 100 : 1 sein¹. Hiermit stimmt es, daß im *Eisen* der Meteoriten nur etwa 0,02 % Kupfer enthalten ist. Das Kupfer ist ein ganz ausgesprochen chalkophiles² Element.

Es sei übrigens noch bemerkt, daß der Verteilungsquotient natürlich selbst *keine unveränderliche Größe* ist, sondern von Temperatur und Druck abhängig ist, ferner auch von der Gegenwart fremder Stoffe, und daß er vor Allem in gewissen Fällen in hohem Grade mit der Konzentration wechselt. Falls nämlich beim Übergang des gelösten Stoffes von einem Lösungsmittel zum andern eine Änderung der Molekülzahl eintritt, so ist natürlich der Verteilungsquotient proportional einer entsprechenden Potenz der Konzentration, und dadurch *sehr* stark von der Konzentration abhängig.

Ob Mangan in *erheblichen* Mengen in die Sulfidschmelze eintritt, ist mir noch ungewiß, ebenso ist es vorläufig schwer, sich über die eventuelle Anreicherung von Zinn und Molybdän in dieser Phase eine bestimmtere Vorstellung zu machen. Die übrigen Elemente, die unter B aufgezählt sind, müssen jedenfalls in der Sulfidschmelze *relativ* angereichert sein, wenn auch ihre *absolute* Menge *gering* ist.

Präzisionsanalysen der Troilit-Phase aus Meteoriten dürften geeignet sein, uns hierbei zahlenmäßige Anhaltspunkte zu liefern.

Da nur die Silikathülle der Erde für technische Zwecke zugänglich ist, interessiert es uns besonders, nach welchen Principien sich die Verteilung der Elemente in der Silikatschmelze regelt, wenn die Silikatschmelze unter dem Einfluß allmählicher Abkühlung zur Krystallisation gebracht wird.

Bei der Abkühlung finden teils nacheinander, teils gleichzeitig mehrere Reihen von Vorgängen statt, die für das Schicksal der einzelnen Elemente bestimmend wirken.

¹ Zahlreiche zahlenmäßige Angaben über die Verteilung von Kupfer, Nickel und Kobalt zwischen Eisensau und Sulfidstein bei metallurgischen Schmelzen findet man in den bekannten Arbeiten von J. H. L. Vogt.

² Die Bezeichnung *chalkophil* erscheint mir geeigneter als *thiophil*, um die Neigung dieser Elemente auszudrücken, vorzugsweise in die sulfidisch-arsenidischen *Erzminerale* einzutreten.

Die Krystallarten, deren Löslichkeitsgrenze bei der Abkühlung überschritten wird, werden ausgeschieden. Sind sie schwerer als die Restschmelze, können sie zu Boden sinken, sind sie leichter, können sie aufsteigen.

Auch flüssige Phasen können ausgeschieden werden, so insbesondere selbständige Sulfidschmelzen, die ihr Material aus dem relativ geringen Schwefelgehalt herleiten, der bei der ersten Abtrennung (bei noch höherer Temperatur) in der Silikatschmelze zurückgeblieben war.

Auch solche Sulfidschmelzen sinken ab, und streben, zusammen mit schweren Erstkrystallisationen aus der Silikatschmelze, wie insbesondere oxydischen Eisenerzen, der Sulfidschale zu; die Sulfidschale entwickelt sich zur Sulfid-Oxyd-Schale.

Selbständige Gasphasen können abgespalten werden. Diese, ebenso wie abgespaltene wässrige Lösungen, streben nach oben. Auch schwere Elemente, deren Verbindungen in die Gasphase oder die wässrige Lösung eingetreten sind, können hierbei den Weg nach oben nehmen.

Die Abkühlung der Silikatschmelze führt somit zu einer weiteren Trennung der chemischen Elemente.

Zunächst ist es klar, daß die sehr geringen Reste der unter B angeführten rein chalkophilen Elemente, die noch in der Silikatschmelze übrig geblieben sind, bei einer zweiten Abtrennung von Sulfidschmelze überwiegend in diese neue Sulfidschmelze eintreten werden¹, und nur dann vor dem endgültigen Absinken bewahrt bleiben, wenn die Sulfidschmelze durch frühzeitige Erstarrung arretiert wird.

Ebenso ist es klar, daß diejenigen Elemente, welche nicht durch isomorphe Vertretung in die einzelnen Krystallisationen aus der Silikatschmelze eintreten, in dem Rest der Schmelze relativ angereichert werden müssen.

Es ist daher einleuchtend, daß die seltneren Elemente, die unter C angeführt sind, eine verschiedene Bahn einschlagen werden, je nachdem sie in den einzelnen Krystallisationsprodukten der Silikatschmelze löslich sind oder nicht, wobei es nicht nur darauf ankommt, ob überhaupt eine isomorphe Vertretung möglich ist, sondern auch auf den Grad der Isomorphie, gemessen am Wert des Verteilungsquotienten zwischen fester und flüssiger Lösung².

Zu den ersten Krystallisationsprodukten der Silikatschmelze gehören neben Olivin oxydische Eisenerze, insbesondere der Magnetit (mit Chromit) und der Ilmenit.

In diesen Erzen sammelt sich nun auch der allergrößte Teil des Chroms und des Vanadiums (Isomorphie von dreiwertigem Eisen, Chrom, Vanadium

¹ Sofern sie nicht in eine neue Bindungsform (beispielsweise als Chloride) eingetreten sind, welche der Sulfidbildung entgegenwirkt.

² Wobei wir voraussetzen, daß es sich um sehr verdünnte feste und flüssige Lösungen handelt, die bei jeweilig konstanter Temperatur betrachtet werden.

und Titan), welche hierdurch der Schmelze entzogen werden. Der geringe Rest des Chroms, der noch übrig bleibt, dürfte überwiegend in ein ebenfalls recht früh krystallisierendes Silikat, den Diopsid, eintreten, der geringe Rest des Vanadiums in ein anderes Silikat, den Biotit, ab und zu auch in Pyroxenminerale. Hierzu kommt noch insbesondere, daß auch die Schwerlöslichkeit des Chromits zu einer sehr frühzeitigen selbständigen Ausscheidung von Chrom aus den Silikatmagmen führt. Sofern die Krystallisation im Existenzgebiet der Eklogitfacies stattfindet, wird Chrom auch im Pyrop, besonders aber in chromreichen Pyroxenen, gebunden.

Nickel (und Kobalt) werden der Silikatschmelze großenteils durch die Abscheidung der flüssigen Sulfidschmelze entzogen, der übrige Teil dieser beiden Elemente geht in fester Lösung größtenteils in ein frühzeitig ausgeschiedenes Silikat, den Olivin ein, und sinkt in der Regel mit diesem ab¹.

Auf diese Weise werden der Silikatschmelze also schon in recht frühen Stadien der Krystallisation die folgenden Elemente entzogen:

Fe teilweise.

Ti großenteils, aber nicht vollständig (wohl ganz überwiegend als dreiwertiges Titan²).

Cr praktisch vollständig.

V praktisch vollständig.

Ni und Co praktisch vollständig.

Was das Schicksal der übrigen seltneren Elemente anbelangt, so hängt es wesentlich davon ab, inwiefern sie befähigt sind, in die Hauptkrystallisationen der Silikatschmelze unbehindert isomorph einzutreten. Sind sie hierzu imstande, so lösen sie sich in den festen Hauptkrystallisationsprodukten in ähnlicher Konzentration wie im Schmelzfluß, sie werden *nicht wesentlich angereichert*. Ist aber das Verteilungsverhältnis ein solches, daß sie vorzugsweise in der flüssigen Lösung verbleiben, oder sind sie gar unlöslich in den Krystallisationsprodukten, so werden sie in der Restlauge relativ angereichert und können schließlich selbständige Krystallarten bilden.

Die wichtigsten Krystallarten der normalen magmatischen Krystallisationsbahn, die hierbei in Betracht kommen, sind nun folgende (wir sehn ab von Quarz, der keinerlei isomorphe Beimengungen aufnimmt):

Feldspate und Feldspatoide (Alumosilikate von Natrium, Kalium und Calcium).

Pyroxene und Amphibole (Silikate hauptsächlich von Magnesium, Calcium und zweiwertigem³ Eisen).

¹ Zur Eklogitschale, vergl. die auf p. 3 angeführten Darlegungen.

² Vielleicht geht auch ein Teil des Scandiums schon in die Frühkrystallisationen des dreiwertigen Titans ein.

³ Aluminium und dreiwertiges Eisen treten besonders in *alkalihaltige* Pyroxene und Amphibole ein.

Glimmerminerale, speciell Biotit (ein hydroxylhaltiges Aluminosilikat von Kalium, Magnesium und Eisen).

Olivin (Orthosilikat von Magnesium und zweiwertigem Eisen).

Oxydische Eisenerze und Apatit¹.

Als quantitativ untergeordnete Erstkrystallisationen betrachten wir Olivin, oxydische Eisenerze und Apatit. Es bleiben uns als Hauptkrystallisationen: Feldspate (und Feldspatoide), Pyroxene und Amphibole, Biotit. Es handelt sich demnach um die Frage der isomorphen Vertretbarkeit von Natrium, Kalium, Magnesium, Calcium, Aluminium, Silicium durch fremde Elemente.

Es ist nun von Interesse, daß in die Feldspatminerale neben Natrium, Kalium und Calcium auch Rubidium, Cäsium, Strontium und Baryum in fester Lösung eingehen können, dies gilt ganz speciell für den Kalifeldspat. Auf diese Weise wird der Gehalt an diesen vier Elementen aus der Silikatschmelze entfernt und zwar, da die Menge des Kalifeldspates ja normalerweise groß ist, nur in recht verdünnter Form. Deshalb finden wir in Produkten typischer magmatischer Restlösungen nur als allergrößte Seltenheit reine Verbindungen von Strontium, Baryum, Rubidium² oder Cäsium.

Die Isomorphie zwischen Verbindungen des Lithiums und denen des Kaliums oder Natriums ist hingegen bei weitem nicht so ausgeprägt; deshalb wird Lithium öfters in den Restlösungen angereichert, und kann aus diesen in Form lithiumreicher Minerale ausgeschieden werden.

Beryllium und Bor gehen ebenfalls nicht in die gewöhnlichen primären Silikatminerale ein, sind daher typisch für die Produkte magmatischer Restlösungen.

Das Scandium, das früher für ein ungemein seltenes Element gehalten wurde, ist wie wir durch EBERHARDS Untersuchungen wissen, weit verbreitet. Es scheint, wie Ti^{III} , im magmatischen Pyroxen und Biotit an Stelle von Aluminium eintreten zu können, und wird daher nur in relativ geringer Menge bis in die Restlösungen gelangen, aus denen specielle Scandiumminerale deshalb nur sehr selten zur Abscheidung gelangen.

Das Mangan ist in der Silikatschmelze recht reichlich vertreten, etwa in 2 % der Eisenmenge. Da indessen zweiwertiges Mangan und zwei-

¹ Apatit ist für unsere Betrachtungen von besonderem Interesse, da eine kleine Menge seltener Erden dem Magma schon relativ frühzeitig durch isomorphes Eintreten in Apatit entzogen wird; hierüber soll eine spätere Publikation aus meinem Institut Weiteres bringen.

² Es ist überhaupt kein specielles Rubidiummineral bekannt, eben weil Rubidium krystallochemisch dem Kalium so nahe steht, daß eine reinliche Abtrennung des Rubidiums nicht stattfindet. Eine relativ starke Anreicherung an Rubidium ist in einem Kalifeldspat pegmatitischer Restkrystallisationen aus dem Ilmengebirge beobachtet (3,12 % Rb_2O nach W. VERNADSKY).

wertiges Eisen einander weitgehend isomorph vertreten. geht das Mangan in relativ derselben Menge in die einzelnen eisenhaltigen Krystallisationsprodukte, doch besonders in die Silikate, ohne in irgendwelchem Gebiete der normalen Krystallisationsbahn *hervorragend* angereichert zu werden.

Eine ganze Reihe von Elementen der Silikatschmelze ist in krystallochemischer Beziehung dadurch gekennzeichnet, daß sie nicht, oder nur höchst untergeordnet, in fester Lösung in die gewöhnlichen gesteinsbildenden Silikate eintreten. Es sind dies, außer den schon oben erwähnten Elementen Lithium, Beryllium und Bor aus der *ersten* Horizontalreihe des periodischen Systems eine Anzahl Elemente von *höherem* Atomgewicht, die offenbar wegen ihrer speciellen Affinität zu Sauerstoff¹ in die Silikatschmelze eingetreten sind, statt, wie viele andere schwere Elemente, in die Eisenschmelze oder die Sulfidschmelze einzugehn.

Es sind dies folgende:

Die Elemente der seltenen Erden² Y, La, Ce, Pr, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Ds, Ho, Er, Tu, Ad, Cp, sowie in *geringerem* Grade Sc;

ferner Zr, Hf, Th (und teilweise³ Ti),

sowie Nb, Ta, W, U, Sn;

dazu also noch Li (teilweise), Be, B.

Diese Elemente werden in der Restschmelze und in Restlaugen angereichert, wir finden sie deshalb in den Mineralen pegmatitischer Gänge, die aus solchen Mutterlaugen der normalen Krystallisationsbahn krystallisiert sind.

Neben diesen Elementen finden wir in den Pegmatitgängen und verwandten Bildungen der Restlaugen dann noch eine Gruppe von Elementen, die hier ebenfalls zur Anreicherung gelangt, allerdings auf anderer Grundlage. Es sind dies *relikte* Schwermetalle und Metalloide der Gruppe B, welche der Ausscheidung in Sulfidschmelzen entgangen sind, und in Form besonders leichtlöslicher oder gar flüchtiger Verbindungen in den Restlaugen des Silikatschmelzflusses angereichert wurden. Speziell sind dies Mo, Bi, S, As. Auch Fluor und Chlor werden in den Restlösungen auf analoge Weise angereichert, sofern sie nicht schon im Apatit zur Abscheidung gelangt sind.

Hier wäre auch die *Abspaltung* von *Dämpfen* und *wässrigen Lösungen* mit den Elementen, Cu, Zn, Pb, Ag, Au, Hg, Sn und S, Se, Te, As, Sb, Bi, Cl, F zu nennen⁴.

¹ Überhaupt ist für die lithophilen Elemente eine starke Sauerstoff-Affinität kennzeichnend

² Mit Ausnahme der kleinen Erdenmenge, die schon in älteren Apatit eingegangen ist, vergl. p. 10, Anm. 1.

³ Als vierwertiges Titan.

⁴ Es ist von besonderem Interesse, die Verteilungsbahn des *Goldes* zu verfolgen: dieses Element besitzt ein specielles Anreicherungsgebiet in *kieselsäurereichen wässrigen* Restlösungen gewisser Granitmagmen, obgleich es im Allgemeinen zu den ausgesprochenen *chalkophilen* Elementen gehört.

Solche Elemente hingegen, die auf der normalen Krystallisationsbahn nicht in speciellen Mineralen besonders angereichert werden, können nur dann in reicheren Lagerstätten angesammelt werden, wenn die primären Minerale, in denen sie in niedriger Konzentration auftreten, sekundären Umsetzungen unterworfen werden, die zu einer lokalen Anreicherung der betreffenden Elemente führen können. Derartige sekundäre Umlagerungen sind daher eine notwendige Vorbedingung für die Bildung reicher Vorkommen beispielsweise von Mangan, Strontium, Baryum. Reiche Nickel-lagerstätten (etwa mit 10 % Ni oder darüber) können nur entstehen, wenn die primären Nickelanreicherungen (beispielsw. Olivin mit wenigen zehntel Procent Nickel) unter dem Einfluß sekundärer Prozesse (Stadium IV, S. 4) unter Mitwirkung wässeriger Lösungen von Neuem aufgearbeitet werden.

Versuchen wir einen systematischen Überblick über die hier kurz angedeuteten Stoffwanderungen und Stoffverteilungen zu erlangen, so können wir diesen in der Form erhalten, daß wir für einige typische Fälle das Verteilungsschema zahlenmäßig skizzieren.

Derartige zahlenmäßige Darstellungen sind natürlich jetzt noch mit allem Vorbehalt zu betrachten, können aber immerhin einen Eindruck der Größenordnungen vermitteln.

Wir müssen hierbei zunächst die Quantitäten der beteiligten Phasen kennen, um die ursprüngliche Durchschnittszusammensetzung zu errechnen. Nach unserer Kenntnis von der Lage der Diskontinuitätsflächen im Erdinneren und der Dichte der einzelnen Schalen (vergl. die oben citierten Abhandlungen) können wir in erster Annäherung die Phasenmengen berechnen, wobei wir berücksichtigen müssen, daß die Oxyd-Sulfid-Schale ursprünglich geringer war, als heute:

Wir erhalten dann folgendes Mengenverhältnis:

Phase A	Eisenschmelze	1
Phase B	Sulfidschmelze	1,4
Phase C	Silikatschmelze	1,4

Beispielsweise seien die Resultate einer Überschlagsrechnung für die Elemente

Vanadium, Eisen, Nickel, Kupfer, Zirkonium

mitgeteilt. Die Zahlen stützen sich auf Analysen von Meteoriten und irdischen Gesteinen. Eine ausführliche Behandlung dieser Fragen gedenke ich in einer späteren Darstellung zu geben¹.

¹ Auf meine Veranlassung hat mein Mitarbeiter Ing. L. THOMASSEN zahlreiche Röntgenspektrogramme von Mineralen und Erzen aufgenommen; hierdurch erhielt ich ein bedeutendes Tatsachenmaterial über die relative Verbreitung der einzelnen Elemente, das für die spätere ausführliche Behandlung der hier erörterten Probleme von Bedeutung sein wird.

<i>Ursprüngliche Mischung.</i>	
Vanadium	0.01 †
Eisen	50 †
Nickel	3-4 †
Kupfer	1 †
Zirkonium	0.003 †



<i>A. Eisenschmelze.</i>	
V	Null ¹
Fe	90 †
Ni	8 †
Cu	0.02 †
Zr	Null

<i>B. Sulfidschmelze.</i>	
V	Null
Fe	60 †
Ni	1-4 †
Cu	2-4 †
Zr	Null

<i>C. Silikatschmelze.</i>	
V	0.03 †
Fe	7 †
Ni	0.05 †
Cu	0.01 †
Zr	0.01 †

<i>Ältere Krystallisationen der Silikatschmelze.</i>	
V	0.1 †
Fe	20 †
Ni	0.15 †
Cu	Null
Zr	0.005 †

<i>Sulfidausscheidung der Silikatschmelze.</i>	
V	Null
Fe	60 †
Ni	2 †
Cu	2 †
Zr	Null

<i>Hauptkrystallisationen der Silikatschmelze.</i>	
V	0.01 †
Fe	4 †
Ni	0.01 †
Cu	Null
Zr	0.005 †

<i>Restkrystallisationen der Silikatschmelze.</i>	
V	Null
Fe	1 †
Ni	Null
Cu	0.003 †
Zr	0.1 †

Es liegt in der Natur der Fragestellung, daß die hier angeführten Zahlen keinen Anspruch auf absolute Genauigkeit machen, sondern nur Größenordnungen und relative Verschiebungen ausdrücken sollen.

Mit dem Zahlenmaterial, das jetzt zu meiner Verfügung steht, können ähnliche Diagramme auch für eine große Anzahl anderer Elemente aufgestellt werden; ich werde in einer ausführlichen Behandlung desselben Themas hierauf zurückkommen.

¹ Höchstens ein tausendstel Procent.

Es ist eine wichtige Aufgabe, für möglichst viele Elemente die Verteilungsquotienten bei den einzelnen Arten von Phasenscheidungen festzustellen; denn auf diese Weise gewinnen wir einen Überblick über den Stoffwechsel der Erde, der uns die Verteilung der Stoffe veranschaulicht, und der Voraussagen über das Vorkommen der einzelnen Elemente ermöglichen wird, und schon jetzt viele Erfahrungstatsachen zu erklären vermag.

Schon jetzt wird es uns beispielsweise erklärlich, daß wir die Elemente Vanadium, Chrom, Nickel *niemals* als wesentliche Bestandteile in Mineralen pegmatitischer Gänge antreffen, da diese Elemente längst aus der Krystallisationsbahn ausgeschieden sind, ehe die pegmatitischen Restschmelzen zur Entwicklung kamen. Umgekehrt wird es auch verständlich, daß wir in solchen Restschmelzen Metallsäuren und seltene Erden angereichert finden, die in den früheren Abschnitten der Entwicklung keine Gelegenheit zur Abscheidung hatten; es wird uns auch begreiflich, daß Scandium, trotzdem es so verbreitet ist, nur höchst selten als Hauptbestandteil von Mineralen auftritt.

Es wird uns ferner verständlich, daß magmatische Sulfidlagerstätten im Allgemeinen um so reicher an den Metallen Kupfer und Nickel sind, in je früheren Stadien der magmatischen Entwicklung sie aus dem zugehörigen Silikatschmelzflusse abgeschieden sind, daß beispielsweise nutzbare Lagerstätten nickelreicher Sulfide an *basische* Silikatschmelzflüsse geknüpft sind.

Bei dem Aufsuchen und der Bewertung von Erzlagerstätten ist es demnach von größter Bedeutung, das Verteilungsschema der betreffenden Elemente in der geochemischen Entwicklungsreihe zu kennen.

Wir können den üblichen Krystallisationsverlauf der Silikatmagmen in folgendem Schema darstellen, das uns eine erste Übersicht über die Verteilungsweise der lithophilen Elemente liefert.

Erstkrystallisationen.

Wichtigste Krystallarten sind:

Eisenerze und Olivin.

Isomorph mit dreiwertigem Eisen sind dreiwertiges Chrom, Vanadium Titan; isomorph mit Magnesium sind vor allem Nickel und Kobalt, ferner zweiwertiges Eisen und Mangan, welche letztere beide aber nicht im erstkrystallisierten Olivin angereichert werden.

Hauptkrystallisationen.

Wichtigste Krystallarten sind:

Feldspate, Feldspatoide, Pyroxene, Amphibole, Glimmer.

Es handelt sich um Isomorphie mit Silicium, Aluminium, Magnesium, Calcium, Natrium, Kalium, besonders Aluminium, Calcium, Kalium.

Mit Silicium ist kein anderes Element ausgesprochen isomorph.

Isomorph mit Aluminium sind in Pyroxenen, Amphibolen und Glimmern dreiwertiges Eisen, dreiwertiges Titan¹, Scandium; auch Chrom und Vanadium treten ein, falls sie nicht schon mit den Erstkrystallisationen ausgeschieden sind.

Isomorph mit Magnesium sind Eisen und Mangan in Pyroxenen. Amphibolen und Glimmern.

Isomorph mit Calcium, Natrium, Kalium sind in Feldspaten und Feldspatoiden die Elemente Baryum, Strontium, Cäsium, Rubidium; sehr viel schwächer ist die Isomorphie des Lithiums mit Natrium und Kalium

Restkrystallisationen.

Wichtige Krystallarten der Restkrystallisationen sind Alkali-Feldspate, eventuell Feldspatoide, Glimmer, Quarz, daneben finden wir als *selbständige* Minerale Verbindungen solcher Elemente, die *nicht* mit den vorherrschenden gesteinsbildenden Elementen in unserem Sinne isomorph sind.

Es sind dies, wie oben erwähnt neben Wasserstoff folgende Elemente: Lithium (teilweise), (als größte Seltenheit) teilweise Cäsium, ferner Beryllium, die Elemente der seltenen Erden mit einem Teile des Scandiums, ferner vierwertiges Titan, Zirkonium, Hafnium, Thorium, sowie Niob, Tantal, Wolfram, Uran und Zinn, dazu noch das Metalloid Bor, sowie eventuell Fluor, Chlor, Kohlensäure, mitunter auch Phosphorsäure und einige relikte chalkophile Elemente.

Ich halte es für unzweckmäßig, die nichtsilikatischen Minerale dieser Elemente zusammen mit Chromit, Spinell und dergleichen als »telechemische« Minerale zusammenzustellen, wie es J. H. L. VOGT² vorgeschlagen hat, und für alle diese Minerale eine besonders frühzeitige Ausscheidung aus dem Silikatmagma zu postulieren. Wenn ein Mineral als charak-

¹ Titan in solchen *Silikaten* dürfte nach meinen Erfahrungen in den allermeisten Fällen als *dreiwertiges* Titan vorhanden sein; *vierwertig* ist es in den *Titanmineralen* der *Restkrystallisationen*, inclusive *Titanit*.

² J. H. L. VOGT, Die Sulfid: Silikat-Schmelzlösungen. Vid.-Selsk. Skrifter. M.-N. Kl. 1918. No. 1, p. 131.

teristischer Bestandteil eines pegmatitischen Ganges auftritt, so bedeutet dies eine *relativ sehr späte* Ausscheidung in der betreffenden magmatischen Entwicklungsreihe, selbst wenn das Mineral, bezogen auf den Pegmatit allein, frühzeitig ausgeschieden ist. Zirkon ist übrigens mitunter eine relativ junge Bildung, selbst verglichen mit andern Mineralen der Restkrystallisationen.

Die oben herangezogenen Beispiele beziehen sich auf einen sozusagen idealisierten »Normalfall« der geochemischen Entwicklungsreihe. In der Natur treffen wir oftmals etwas modifizierte Entwicklungsreihen, indem besondere geologische Umstände, wie etwa sekundäre Wasseraufnahme der Silikatschmelzflüsse, in Erscheinung treten. Diese Abweichungen vom »Normalfalle« sind ebenfalls von größtem wissenschaftlichen und praktischen Interesse, und sollen in der späteren ausführlichen Darstellung näher erörtert werden.

Von besonderer Wichtigkeit ist auch der Fall, daß die fraktionierte Krystallisation des Silikatschmelzflusses nicht in der Facies der gabbrogranitischen Normalreihe stattfindet, sondern in der Eklogitfacies¹. Da anzunehmen ist, daß die tieferen silikatischen Anteile des Erdballs in der Eklogitfacies entwickelt sind, verdient das Studium der Krystallisationsbahnen von Eklogitgesteinen von unserem Standpunkte ganz besondere Beachtung.

¹ Vergl. über die Eklogitfacies:

P. ESKOLA, The Mineral Facies of Rocks, Norsk Geologisk Tidsskrift 1920.

P. ESKOLA, On the Eclogites of Norway, Vid.-Selsk. Skr. M.-N. Kl. 1921. No. 8.

Zusammenfassung.

In geochemischer Beziehung können die chemischen Elemente in *vier Hauptgruppen* eingeteilt werden:

Siderophile Elemente, angereichert in Nickeleisen (Beispiel Kobalt).

Chalkophile Elemente, angereichert in Sulfidschmelzen (Beispiel Kupfer).

Lithophile Elemente, angereichert in Silikatschmelzen (Beispiel Magnesium).

Atmophile Elemente, angereichert in der Dampfhülle (Beispiel Argon).

Die Scheidung in diese vier Hauptgruppen hat in größtem Maßstabe bei der ersten Phasenentmischung des Erdballs sowie der Meteoriten stattgefunden, entsprechend den *Verteilungsquotienten* der einzelnen Elemente zwischen den vier Hauptphasen.

Eine *weitere* Sonderung der Elemente ist an die fortschreitende physikochemische Differenzierung der Lithosphäre geknüpft. Restmengen chalkophiler Elemente sammeln sich in Sulfidphasen, Reste atmophiler Elemente wandern zur Dampfhülle.

Die lithophilen Elemente sondern sich in bestimmte Gruppen, die vom Verlauf der magmatischen Entwicklung abhängig sind. Das Schicksal des einzelnen lithophilen Elements im Gange der magmatischen Entwicklung ist in erster Linie davon abhängig, ob es in die krystallisierten Verbindungen der gewöhnlichen gesteinsbildenden Elemente isomorph eintreten kann. Der Grad der Isomorphie, die Leichtigkeit des isomorphen Eintretens, erhält ihren Ausdruck durch den Verteilungsquotienten im System fest: flüssig.

Nach den Isomorphiebeziehungen zu den vorherrschenden lithophilen Elementen und den dadurch bedingten Verteilungsquotienten, können die seltneren *lithophilen*¹ Elemente in *drei Untergruppen* verteilt werden:

Elemente der *Erstkrystallisationen*, speciell isomorph mit dreiwertigem Eisen und mit Magnesium; Beispiele Chrom, Vanadium, Nickel.

Elemente der *Hauptkrystallisationen*, speciell isomorph mit Kalium, Calcium, Aluminium; Beispiele Rubidium, Strontium, teilweise Scandium.

Elemente der *Restkrystallisationen*, nicht isomorph oder nur schwach isomorph mit Natrium, Kalium, Magnesium, Calcium, Aluminium, Eisen, Silicium; Beispiele Lithium (teilweise), Bor, Niob, Thorium, Lanthan.

¹ Sowie die kleinen Mengen anderer Elemente, die in der Silikatschmelze untergeordnet vertreten sind.

Gedruckt 30. Juli 1923.

PHYSICAL DEVELOPMENT

OF CHILDREN AND YOUNG PEOPLE DURING
THE AGE OF 7 TO 18—20 YEARS

AN INVESTIGATION OF 28700 PUPILS
AT PUBLIC (ELEMENTARY) AND HIGHER (SECONDARY)
SCHOOLS IN CHRISTIANIA

BY

CARL SCHIØTZ

WITH 31 TEXT FIGURES

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 4)

TRYKT FOR KRISTIANIA KOMMUNES FOND
TIL VIDENSKAPENS FREMME

CHRISTIANIA
AT COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 19. januar 1923 ved professor M o h r.

PREFACE

From the university jubilee fund I received the means for conducting an investigation of the average growth or physical development of Norwegian school children.

In my application for same I had presented the following plan for the work: On the results of former investigations of children 6—14 years (the counties in the region of Mjösen in the inland country of Norway 1913—14) a series of average types were to be selected for closer investigations (anthropological measurements, &c.). This material was practically fully prepared according to this plan in the fall of 1918.

But for several different reasons, however, the present work does not refer to the mentioned material. The fact is that I was appointed inspector of health in Christiania from December 1918, and under this administration belongs, as the most important part, the position as chief medical officer of schools. Thereby I got access to an altogether more valuable material, and the whole investigation work was started all over again from the beginning. It is therefore now not presented as a study of the average development through the years 7—14 made on only a selection of children, but as a complete investigation of the school children of the Capital (girls 7—18 years, boys 7—20) with average calculations and variations in regard to bodily height, weight, and weight-height proportions; also photographs of average types after objective numeric selection with later subjective control (in order not to include as normal types the abnormal or sick children with accidental normal average numeric values).

This school material applies to 28 700 pupils examined March 1920, one single school in April.

No representation of the practical-hygienic measures which present themselves as a result of the school investigation (as the working out of practical norms, distribution of places in the vacation colonies, apportionment of milk or oatmeal gruel, judgment of results of vacation colonies, &c.) will be mentioned in this work, which is purely anthropometric in character.

The practical-hygienic side has been treated in "Sociale meddelelser" no. 6, 1920, in "Nordisk hygienisk tidsskrift" no. 5, 1920, no. 1, 1923, and in the daily press.

PHYSICAL DEVELOPMENT OF CHILDREN AND YOUNG PEOPLE DURING THE AGE OF 7—18 YEARS

Before we take up the closer study of the details it should be noted, that "6 years" means 6.0, therefore not children "past six years, but not yet seven", but those nearer to 6, than they are to either 5 or 7, in other words children between $5\frac{1}{2}$ and $6\frac{1}{2}$ exclusive. Individuals exactly on the day $6\frac{1}{2}$ were¹ divided between the 6 or 7 group, if there were as many as two, otherwise they were not included. More than two exactly on the half-year day was never found. This method — and not "past" 6 years — was used in compliance with international anthropologic demands.

The investigations at the schools were conducted after general instruction from the author and special instructions from the school physicians by nurses and teachers, partly also by school physicians themselves. Of course, errors of measurement may occur in such a large investigation as this. But the school material is so great, that the computed statistical values cannot possibly to any degree have been affected thereby.

I. Height of the body.

As to the technic followed it should be stated, that the same kind of apparatus was used at all the schools, namely one specially constructed height-measurer with fixed foot-tray, on which the child stands during the investigation. (These apparatuses were ordered from the instrument-maker Gallus, Christiania.) Thereby every deviation from the vertical position of the measuring rod itself was hindered. The child stands facing the rod, head straight forward (not upward) and is required to stretch itself ad maximum. Thereby is attained a more perfect stretching, than when the back is leaned against the rod. Centimeter with one decimal is written down. If the rod only is marked with whole or half centimeters, the millimeters between are taken according to estimation.

The results of the height investigations may be seen from the following table:

¹ Without inquiry into the results of the measurements.

Table 1a.
The public ("elementary") schools². Boys.

Average age	Number investigated	Average height, cm.	Probable errors	Standard deviation, cm.	Coefficient of variability	Probable errors	Rounded off values Average height	Increase	
								in cm.	in percent-age
7, II years ²	617	118.18	± 0.13	4.92	4.16	± 0.08	117.8 (7.0) ³	—	—
8	1521	121.80	± 0.10	5.73	4.70	± 0.06	121.8	4.0	3.40 ⁰⁰
9	1538	126.05	± 0.10	5.58	4.43	± 0.05	126.1	4.3	3.53 ⁰⁰
10	1655	130.91	± 0.09	5.73	4.38	± 0.05	130.9	4.8	3.81 ⁰⁰
11	1785	135.02	± 0.10	6.10	4.52	± 0.05	135.0	4.1	3.13 ⁰⁰
12	1615	139.23	± 0.11	6.70	4.81	± 0.06	139.2	4.2	3.11 ⁰⁰
13	1402	143.27	± 0.12	6.54	4.56	± 0.06	143.3	4.1	2.95 ⁰⁰
14	1264	148.22	± 0.14	7.57	5.05	± 0.07	148.2	4.9	3.42 ⁰⁰

Table 1b.
The public schools. Girls.

7, III years	569	117.40	± 0.14	4.86	4.14	± 0.08	116.4 (7 y.)	—	—
8	1467	120.58	± 0.09	5.30	4.39	± 0.05	120.6	4.18	3.59 ⁰⁰
9	1560	125.30	± 0.10	5.63	4.49	± 0.05	125.3	4.72	3.91 ⁰⁰
10	1701	130.02	± 0.10	6.01	4.62	± 0.05	130.0	4.72	3.77 ⁰⁰
11	1727	135.05	± 0.10	6.30	4.66	± 0.05	135.1	5.03	3.87 ⁰⁰
12	1717	140.37	± 0.11	6.61	4.71	± 0.05	140.4	5.30	3.92 ⁰⁰
13	1413	145.62	± 0.13	7.21	4.95	± 0.06	145.6	5.27	3.76 ⁰⁰
14	1439	150.60	± 0.13	7.09	4.71	± 0.06	150.6	4.98	3.42 ⁰⁰

Table 1c.
Higher schools. Boys.

9 years	44	134.14	± 0.57	5.62	4.19	± 0.30	133.6	—	—
10	101	136.56	± 0.39	5.75	4.21	± 0.20	136.9	3.3	2.47 ⁰⁰
11	101	140.34	± 0.41	6.05	4.31	± 0.21	140.7	3.8	2.78 ⁰⁰
12	182	144.73	± 0.32	6.42	4.44	± 0.16	144.5	3.8	2.70 ⁰⁰
13	394	147.44	± 0.38	6.98	4.73	± 0.11	147.8	3.3	2.28 ⁰⁰
14	448	153.46	± 0.25	7.84	5.11	± 0.12	153.3	5.5	3.72 ⁰⁰
15	477	159.47	± 0.26	8.55	5.36	± 0.12	159.5	6.2	4.04 ⁰⁰
16	443	165.73	± 0.27	8.25	4.65	± 0.11	166.0	0.5	4.08 ⁰⁰
17	254	170.03	± 0.30	6.96	4.10	± 0.12	170.2	4.2	2.53 ⁰⁰
18	143	173.55	± 0.41	7.30	4.21	± 0.17	173.2	3.0	1.76 ⁰⁰
19	71	174.14	± 0.48	6.00	3.45	± 0.27	174.6	1.4	0.81 ⁰⁰
20	36	174.92	± 0.65	5.80	3.31	± 0.26	175.2	0.6	0.34 ⁰⁰

² Only schools for normal children. The school for feeble-minded children omitted.

³ 7 years and 2 months. A special calculation of this youngest year class showed, that the average age for those who stood nearest to 7.0 was 7.11. It was really anticipated that there so far out in the school year would be a deficit of the 6½ to 7 group against 7 to 7½.

⁴ The value of 7.11 was first marked in its place on the curve, which then was drawn up towards the left after its most natural continuation to 7.0.

Table 1 d.
Higher schools. Girls.

Average age	Number investigated	Average height, cm.	Probable errors	Standard deviation, cm.	Coefficient of variability	Probable errors	Rounded off values. Average height	Increase	
								in cm.	in percentage
9 years	39	130.67	± 0.64	5.94	4.55	± 0.35	130.6	—	—
10 —	63	133.98	± 0.43	5.06	3.78	± 0.23	133.8	3.2	2.45 0/0
11 —	56	137.98	± 0.49	5.41	3.92	± 0.25	138.0	4.2	3.14 0/0
12 —	100	143.81	± 0.48	7.15	4.97	± 0.24	144.2	6.2	4.49 0/0
13 —	342	149.36	± 0.25	6.93	4.64	± 0.12	149.6	5.4	3.74 0/0
14 —	335	154.91	± 0.25	6.69	4.32	± 0.11	154.7	5.1	3.41 0/0
15 —	382	157.88	± 0.20	5.74	3.64	± 0.09	158.0	3.3	2.13 0/0
16 —	338	159.87	± 0.21	5.70	3.56	± 0.09	159.9	1.9	1.20 0/0
17 —	215	160.97	± 0.24	5.11	3.17	± 0.10	161.0	1.1	0.69 0/0
18 —	46	161.64	± 0.57	5.72	3.54	± 0.25	161.4	0.4	0.25 0/0

Table 1 e.
Height. Boys.

Age	Christiania 1920	Districts of Mjösen 1913—1914	Horten 1916	Stavanger 1918
7 years	117.8 cm.			
7 ¹ / ₂ —		119.13 cm.	120.0 cm.	118.4 cm.
8 —	121.8 "			
8 ¹ / ₂ —		122.93 "	123.7 "	122.3 "
9 —	126.1 "			
9 ¹ / ₂ —		127.56 "	128.44 "	126.8 "
10 —	130.9 "			
10 ¹ / ₂ —		132.68 "	132.87 "	132.2 "
11 —	135.0 "			
11 ¹ / ₂ —		136.53 "	137.71 "	135.1 "
12 —	139.2 "			
12 ¹ / ₂ —		140.44 "	142.24 "	140.6 "
13 —	143.3 "			
13 ¹ / ₂ —		145.17 "	145.25 "	145.8 "
14 —	148.2 "			
14 ¹ / ₂ —		150.02 "	149.42 "	149.3 "

In regard to statistical methods used I must confine myself to refer to my earlier writings, and for more exact instruction to special professional books (Gunnar Jahn, W. Johansen, Zimmermann). "Standard deviation" and the "coefficient of variability" built upon it, is without doubt the best measurement for the variations.

After the tables 1 the curves fig. 1 are constructed. It is the general rule for all average number curves⁵ that the perpendicular lines mark

⁵ Where nothing else is marked.

the arithmetical average, \pm the probable error. F. inst.: 9 years old boys (higher schools) average 134.14, probable error 0.57. The perpendicular line marks this deviation. Similar computation and its corresponding marking on millimeter paper has been done for all ages, after which the most natural and even course of the curves has been drawn within the borders of these lines, regardless whether the curve hits the arithmetical average or some other point within the borders of the probable error. The "rounded off values" — cfr. the tables — are read off after the curves. This mode of proceeding I regard as the most correct, the one

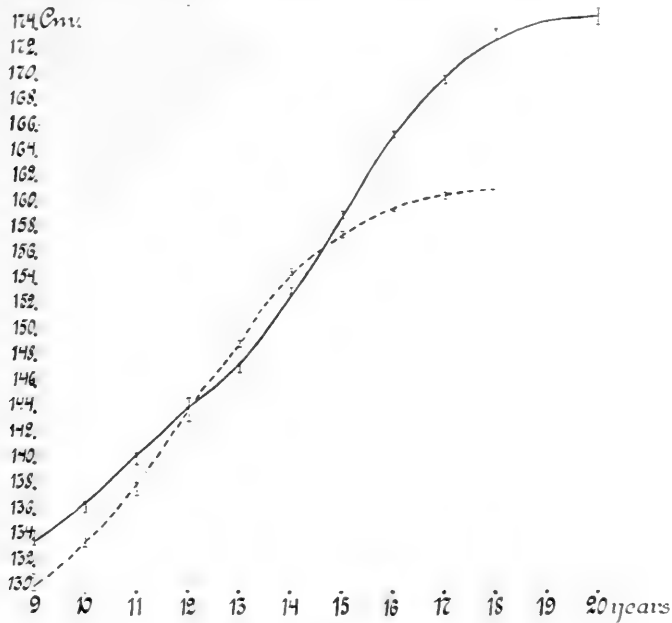


Fig. 1 a. Higher schools.

which best reflects the real phenomena in question⁶. The probable error for the public school material is so minimal, that it does not make any difference.

Herewith we shall proceed to the study of the curves: — Fig. 1 b. *As regards the public school children, the boys are the tallest until about exactly 11.0 years. Then they are overtaken by the girls, who then are the tallest as far as our material reaches, that is to 14.0 years. Judging from the course of the curve and probable continuation the precedence*

⁶ Cf. f. inst. the course of the curve between 17 and 20 years for high school boys. A line between the arithmetical average numbers would have given a false conception of the course. The method used gives no doubt a much more correct presentation of the laws of physical development. Only to present the average numbers — as is often done — without considering probable errors, frequently leads to altogether wrong conclusions and conceptions.

of the girls is not concluded at this age. This can be stated with definition, but how long it will last cannot be definitely stated.

It is of great interest that we already at this early stage can record a remarkable difference between the pupils of the public schools and the higher schools. In the last mentioned ones the boys keep their lead in height until the 12.0 years (a whole year longer than at the public schools)⁷. The laws of development of this material can be studied until 18 for girls and 20 for boys. After the girls have caught up to the boys at 12.0, they keep the lead until a trifle after 14½. Then the boys again grow the tallest — a relation which of course is not changed later.

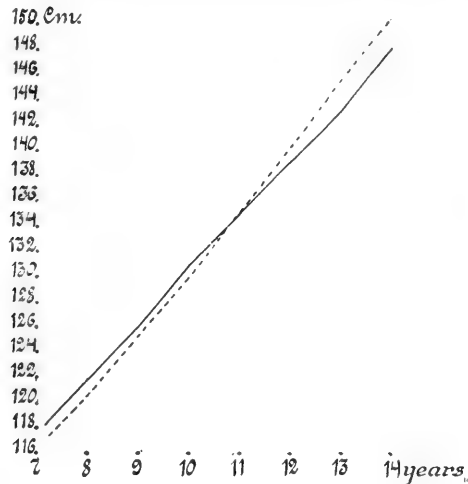


Fig. 1 b. Public schools.

Those who might wish to study the number valuations, eventually for comparison with the material of other countries, are referred directly to the tables. In this work quotations from literature will be restricted to the least possible. The work is no general exposé of the relations of

⁷ I shall quote the following from a treatise by H. Bryn, "Selbu and Tydalen, An anthropological investigation of men, women and children in two Norwegian inland country districts" (Christiania, Dybwad, 1921 — received after the conclusion of this work): "It seems to be a general law that the greater the average height of the population is, the later the girls get the lead. But it also lasts longer, before the boys again overtake the girls as to height".

The first part of the quoted sentence ("the later the girls get the lead") agrees consequently with our material. As to the proof of the last part ("the longer it lasts before the boys again overtake the girls as to height") we cannot present any material for comparison, as the investigation of the public schools only reaches to the year of 14. We can presume, though, that it does not correspond, as the divergence of the curves of the boys and girls of the public schools at 14 years is so great, that there is no possibility for any crossing of the curves, before this takes place at the higher schools (a little after 14½).

growth — that would be only unnecessary repetitions of the works of others and my own — it is a study of the physical development of children in the Capital of Norway. Some comparisons will be done, specially with other Norwegian investigations. On table 1 e and curve fig. 2 is seen a comparison between the material of our Christiania public schools and the results of an investigation by the author in the districts of Mjösen 1913—14; one from Horten 1916 (Zeiner-Henriksen) and one from Stavanger 1918 (the statistical bureau of the city, chief Lie, miss Gudrun Dahl). The comparison — which refers to boys only — does not show any on-sided preference for any single material continued through all the year classes. The districts of Mjösen have on the whole

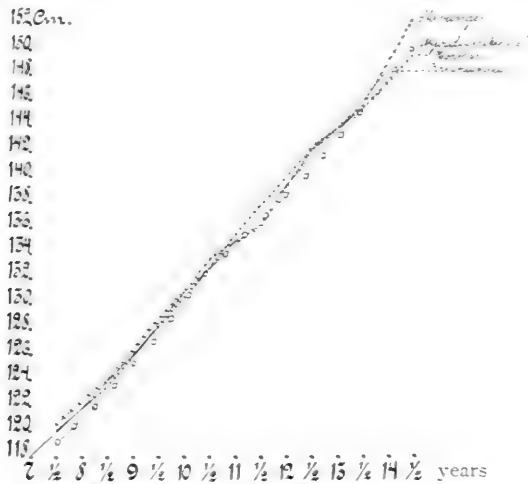


Fig. 2.

comparatively the lowest number-values. Whether it plays any part that this is a mixed country and city material, while the other three curves only refer to cities, shall not be said. It will be noted that the abscissa here also has divisions for the half-year ages ($7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, &c.). The fact is that the investigations with which our present material is being compared, state the values for the individuals who have filled 7, 8, &c., therefore the average age will be $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$. This must be taken into consideration when the curves are constructed, as the numbers of our material only can be put down between the 7.0, 8.0, &c. of the abscissa, the rest between $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$.

It is naturally of great interest to make direct comparisons between the public schools and the higher schools. — although there beforehand can be no doubt that there *is* a difference in favour of the last.

On table 2 is seen a comparison between 1) Frogner and Vestheim higher schools with pupils from more well to do homes. 2) Borgerskolen and Hammersborg, also higher schools, but — as a later following comparison of weights will show — representing the least good material of

Table 2 a.
Boys. Height.

Age	Frogner & Vestheim		Borger- & Hammersb.		Public schools		Schools for feebleminded	
	Number	Average height	Number	Average height	Number	Av. height	Number	Av. hght.
10 years	100	136.46 cm.	—	—	1655	130.91	36	129.46
11 —	101	140.34 "	—	—	1785	135.02	34	132.31
12 —	140	144.85 "	—	—	1615	139.23	53	136.71
13 —	145	149.34 "	50	146.46 cm.	1402	143.27	45	141.59
14 —	150	155.26 "	69	152.28 "	1264	148.22	48	155.39

Girls. Height.

Age	Nissen		Number	Average height	Number	Av. height	Number	Av. hght.
	Number	Average height						
10 years	63	133.98 cm.	—	—	1701	130.02	18	126.83
11 —	55	137.93 "	—	—	1727	135.05	23	132.93
12 —	80	143.55 "	—	—	1717	140.37	23	138.26
13 —	172	149.39 "	56	147.71 cm.	1413	145.62	41	142.76
14 —	128	156.12 "	65	152.52 "	1439	150.60	30	147.13

Table 2 b.
Difference of height betw. public schools and higher schools.

Boys	10 years	11 years	12 years	13 years	14 years
Frogner & Vestheim	136.46 cm.	140.34	144.85	149.34	155.26
Public schools	130.91 "	135.02	139.23	143.27	148.22
Difference	5.55 cm.	5.32	5.62	6.07	7.05
Girls					
Nissen school	133.98 cm.	135.93	143.55	149.39	156.12
Public schools	130.02 "	135.05	140.37	145.62	150.60
Difference	3.96 cm.	2.88	3.18	3.77	5.62

Average difference of height: — 3.86 cm.

the higher school material. Sufficient material can here only be provided for the ages 13 and 14. 3) All the public schools. 4) The schools for feeble-minded children (the decidedly psychically deficient). No computation of probable errors has been done here. No detail studies of the laws of growth were intended, only a collected survey of the age-period 10—14 years. The graphical representation is found on the curves fig. 3. Especially when we compare with curve fig. 2 from the different country districts and see how rather small the difference is there, it is at once apparent how very widely the *children from the different social strata differ from each other in regard to bodily height during these years*. We are, though, saying nothing about the eventual difference, when these individuals have grown up. The explanation of the average difference

in height during the child age may be either in an absolutely stronger physical energy of growth at a certain stage of growth and the same distance of time from the termination of the growth, — or in a more rapid growth, so that a certain class of children of a certain age are nearer to their final stature than children of the same age of another social class — or in a combination of these momenta. As this more rapid growth is a long established fact (cfr. the previous menarche in the socially better off classes), it must be regarded as certain, that the final stage will not show *so* great differences in height. As is well known, bodily height is a distinct inheritable phenomenon. No less sure does the milieu — nourishment, housing, all in all healthy or unhealthy modes

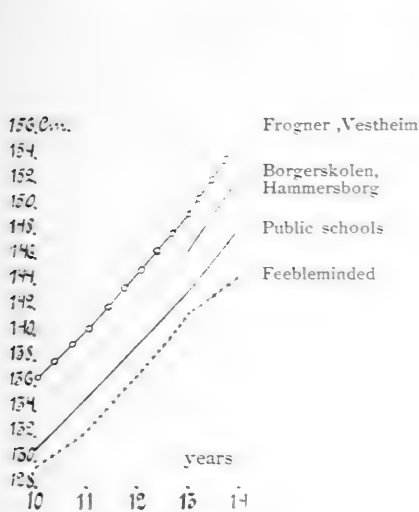


Fig. 3 a. Height.

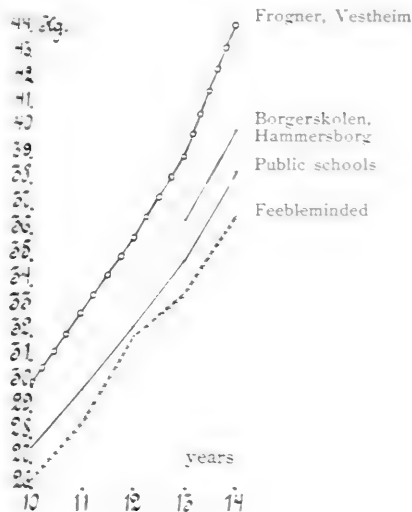


Fig. 3 b. Weight.

of living — play its important part. This can, f. inst., be seen by the sudden impulse of growth which sets in, when children with poor or less good state of health in general are brought into especially good sanitary conditions. I find it necessary as proof for the last statement^s to present individual curves, worked out at my office after the first results

^s As a lately published Danish research work does not put much stress on this momentum. H. J. Hansen, page 276: "As the main and last result of the investigation it may then be definitely stated, that height is a function of the energy of growth conditioned by race and family, and that it only to a small degree is influenced by conditions of nourishment and sanitation . . .".

Quite lately is published a work by K. Kassowitz, "Zur Frage der Beeinflussung der Körperlänge und Körperfülle durch die Ernährung", Zeitschrift für Kinderheilkunde, bd. XXX, p. 275. The following result from the investigation is hereby quoted (bodily height is the matter in question): The propounded inheritable under-measure of proletarian children can by a quantitative optimal food through several years, qualitative not much more than minimal, be changed to "eine Übermässigkeit".

from the open-air boarding school Ramsvig, near Stavanger, opened fall of 1920, and the open-air day school Sandaker, near Christiania. The curves fig. 4 are with a small commentary very illustrating: — The long drawn up oblique line indicates average heights of girls in the public schools of Stavanger in the age 7 to 14; the dotted middle oblique line the corresponding for Christiania; the outer oblique lines the borders for

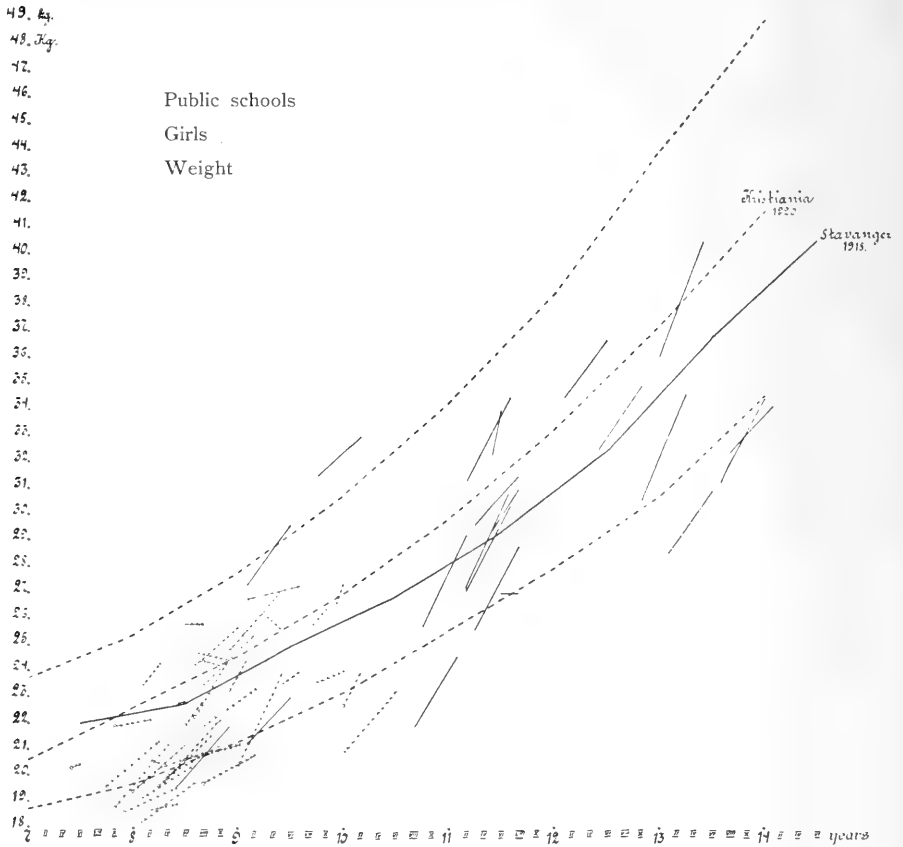


Fig. 4 a.

the standard deviation for the same ages⁹. The short single lines are the individual curves from Stavanger. By the help of the figures on the abscissa can be read the child's age in years and months at its start and finish at the school. The lines furnished with a ring underneath are the individual curves from Christiania. We see the very violent growth of height at the open-air boarding school. The large curve everywhere permits comparison with the middle one for the city. We see the very

⁹ For the benefit of those who have had no invitation to make themselves acquainted with this statistical compend, it should be stated, that in the single year classes — practically told — two thirds of the material lie within these borders.

emphatic steepness of these lines which connect the figures of height at the entering and leaving of school. The steepness is demonstrated just as plainly for the small, the medium tall¹⁰ and well as the tall children. We are obliged to reason as follows, especially when we take the last phenomenon into consideration: — The given tendency for growth or possibility for growth, inherited from race and family whether it be

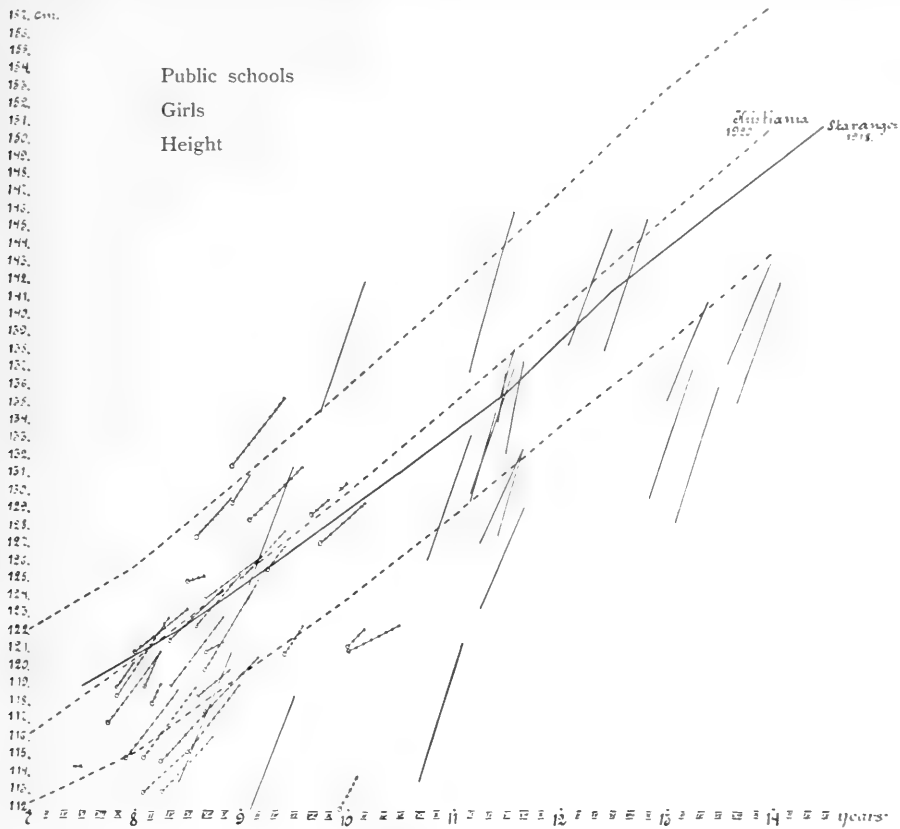


Fig. 4 b.

weaker or stronger (cfr. small and tall families) is in the earlier unfavorable environment strongly checked. A change takes at once place, when the conditions for growth get free, natural unfoldment in a healthy environment¹¹.

From fig. 4 is furthermore seen, that the open-air day school — the children come in the morning, are getting three meals in the day,

¹⁰ As "medium" is counted a bodily height within the standard deviation.

¹¹ An investigation at another open-air school (Home for scrofulous, Medical society of Trondhjem, 1921) did not show as sharply ascending lines, although sharper than the average. The increases in weight were here very strong. What the cause is of the difference between the two boarding schools has not been brought out (perhaps investigations conducted different seasons of the year?).

and go home in the afternoon — cannot by far show such demonstratively good results as the open-air boarding school. The reason is, of course — in any way principally — to seek in the home, where the child stays more than half of the time (poor and crowded housing, poor ventilation, no rationel bedtime, &c.).

We then return to the curves fig. 3 and to table 2 and verify that the diversity of height between the public schools and the higher schools that reach highest of the series is on the average 5.92 cm.; that as an example the height of the 10 year olds at the public school is about ¹² 95.9% of the 10 year olds at the higher school; the 14 year olds 95.5%.

As to the girls we refer to table 2 b. It should be noted that Nissens school for girls (higher) on account of *some* recruiting from the city's east side (the poorer part) does not, in a social respect, reach up to Frogner school for boys (higher). The schools can therefore not be quite compared. It is seen that the 10 year olds at the public school has a height corresponding to 97% of that of the 10 year olds at Nissen; the

Table 3 a.
Height. Boys. Public schools.

Cm.	7 years		Cm.	9 years		11 years		14 years	
	Num-ber	0/0		Num-ber	0/0	Num-ber	0/0	Num-ber	0/0
102—104	3	0.49	107—109	4	0.26	1	0.06	-	-
105—107	8	1.30	110—112	12.5	0.81	1	0.06	-	-
108—110	31.5	5.11	113—115	32.5	2.11	5	0.28	-	-
111—113	60	9.72	116—118	84	5.46	1	0.06	-	-
114—116	125	20.26	119—121	171.5	11.15	11.5	0.64	-	-
117—119	141	22.85	122—124	280	18.21	55.5	3.11	-	-
120—122	125.5	20.34	125—127	345.5	22.46	119	6.67	2	0.16
123—125	87.5	14.18	128—130	288	18.73	211	11.82	7	0.55
126—128	28.5	4.62	131—133	197.5	12.84	316	17.70	11	0.87
129—131	6	0.97	134—136	80	5.20	333.5	18.68	46.5	3.68
132—134	1	0.16	137—139	29.5	1.92	313.5	17.56	73	5.78
			140—142	7.5	0.49	221	12.38	127	10.05
			143—145	4.5	0.29	123.5	6.92	233.5	18.47
			146—148	1	0.07	49.5	2.77	170.5	13.49
			149—151	-	-	14.5	0.81	189	14.95
			152—154	-	-	7.5	0.42	147	11.63
			155—157	-	-	1	0.06	113.5	8.98
			158—160	-	-	-	-	69	5.46
			161—163	-	-	-	-	36	2.85
			164—166	-	-	-	-	18	1.42
			167—169	-	-	-	-	15	1.19
			170—172	-	-	-	-	5	0.40
			173—175	-	-	-	-	1	0.08
	617			1538		1785		1264	

¹² I say "about", as probable errors have not been computed.

14 year olds respectively 96.5%. Consequently a certain levelling with the increasing age (cfr. page 11). But Borgerskolen and Hammersborg may be compared with the public schools for both sexes. The results show for boys that the public schools at 14 years have a height corresponding to 97.3% of the height at the two higher schools, for girls 98.7%.

Table 3a. As seen, the individuals are arranged in groups of 3 and 3 cm. The "typical number" (that numeric value about which most individuals group themselves most closely) for boys 7 years old is nearest to 118 cm. It will therefore for the drawing of the distribution-curves, if we have 3 cm. groups, be most correct that we proceed from this number as the middlemost group (117—119), and from here count 3 and 3 cm. to both sides. This — the position of the typical number — is the reason why not the same 3 cm. groups are used for all ages. The same applies to our figures for weight.

Table 3a.
Height. Boys. Public schools. Continuation.

Cm.	8 years		10 years		12 years		13 years	
	Number	00	Number	00	Number	00	Number	00
103—105	1	0.07	-	-	-	-	-	-
106—108	8	0.53	-	-	-	-	-	-
109—111	49.5	3.26	-	-	-	-	-	-
112—114	102.5	6.74	2	0.12	1	0.06	-	-
115—117	182	11.97	18.5	1.12	1	0.06	-	-
118—120	281.5	18.51	46	2.78	1	0.06	-	-
121—123	333.5	21.93	97.5	5.89	9	0.56	1.5	0.11
124—126	258	16.92	192	11.60	20.5	1.27	4.5	0.32
127—129	156	10.26	322.5	19.49	63	3.90	17	1.21
130—132	96	6.31	323.5	19.55	134	8.30	38	2.71
133—135	44.5	2.93	309.5	18.70	205	12.69	87.5	6.24
136—138	5.5	0.36	180	10.88	304	18.82	170.5	12.16
139—141	3	0.20	115	6.95	303	18.76	236	16.83
142—144	-	-	36.5	2.20	251.5	15.57	265	18.90
145—147	-	-	9	0.54	170.5	10.56	250	17.83
148—150	-	-	2	0.12	90	5.57	160.5	11.45
151—153	-	-	1	0.06	37.5	2.32	81	5.78
154—156	-	-	-	-	14	0.87	47	3.35
157—159	-	-	-	-	7	0.43	25.5	1.82
160—162	-	-	-	-	2	0.12	10	0.71
163—165	-	-	-	-	0.5	0.03	7	0.50
166—168	-	-	-	-	0.5	0.03	-	-
169—171	-	-	-	-	-	-	1	0.07
	1521		1655		1615		1402	

Table 3 b.
Height. Girls. Public schools.

Cm.	7 years		8 years		11 years		14 years	
	Number	0/0	Number	0/0	Number	0/0	Number	0/0
101-103	1	0.18	-	-	-	-	-	-
104-106	5.5	0.97	2.5	0.17	-	-	-	-
107-109	20.5	3.60	20.5	1.40	-	-	-	-
110-112	56	9.84	65	4.43	-	-	-	-
113-115	113	19.86	163	11.11	2	0.12	-	-
116-118	142	24.96	252	17.18	6	0.35	-	-
119-121	125.5	22.06	342	23.31	10.5	0.61	-	-
122-124	68	11.95	292.5	19.24	53.5	3.10	-	-
125-127	24.5	4.31	186	12.68	126	7.30	1	0.7
128-130	7	1.23	102	6.95	225.5	13.06	5	0.35
131-133	5	0.88	27	1.84	281.5	16.30	16.5	1.15
134-136	1	0.18	9.5	0.65	319.5	18.50	29.5	2.05
137-139	-	-	4	0.27	310	17.95	48	3.34
140-142	-	-	1	0.07	197	11.41	81.5	5.66
143-145	-	-	-	-	98.5	5.70	135	9.38
146-138	-	-	-	-	65	3.76	198.5	13.79
149-151	-	-	-	-	21	1.22	263	18.28
152-154	-	-	-	-	4	0.23	232	16.12
155-157	-	-	-	-	6	0.35	200	13.90
158-160	-	-	-	-	-	-	126	8.76
161-163	-	-	-	-	1	0.06	59	4.10
164-166	-	-	-	-	-	-	36	2.50
167-169	-	-	-	-	-	-	6	0.42
170-172	-	-	-	-	-	-	2	0.14
	569		1467		1727		1439	

Table 3 b.
Height. Girls. Public schools. Continuation.

Cm.	9 years		12 years		Cm.	10 years		13 years	
	Number	0/0	Number	0/0		Number	0/0	Number	0/0
106-108	2	0.13	-	-	105-107	1	0.06	-	-
109-111	7	0.45	-	-	108-110	4	0.23	-	-
112-114	24.5	1.57	-	-	111-113	5	0.31	-	-
115-117	99.5	6.38	-	-	114-116	20.5	1.20	1	0.07
118-120	161	10.32	-	-	117-119	34.5	2.03	1	0.07
121-123	298.5	19.13	7.5	0.44	120-122	100	5.88	1	0.07
124-126	336	21.54	20.5	1.19	123-125	203.5	11.96	2	0.14
127-129	288	18.46	52	3.03	126-128	278	16.34	3.5	0.25
130-132	182	11.67	124	7.22	129-131	367	21.58	16	1.13
133-135	97	6.22	179	10.43	132-134	321.5	18.90	57	4.03
136-138	43	2.76	283	16.48	135-137	200	11.76	103	7.29
139-141	15.5	0.99	338	19.69	138-140	102.5	6.03	167.5	11.85
142-144	5	0.32	274	15.96	141-143	37.5	2.20	207	14.65
145-147	1	0.06	198	11.53	144-146	18.5	1.09	217	15.36
148-150	-	-	122	7.11	147-149	4.5	0.26	217.5	15.39
151-153	-	-	70	4.08	150-152	2	0.12	176.5	12.49
154-156	-	-	34	1.98	153-155	-	-	112	7.93
157-159	-	-	11	0.64	156-158	1	0.06	79.5	5.63
160-162	-	-	3	0.17	159-161	-	-	33	2.34
163-165	-	-	1	0.06	162-164	-	-	14.5	1.03
					165-167	-	-	2.5	0.18
					168-170	-	-	1.5	0.11
	1560		1717			1701		1413	

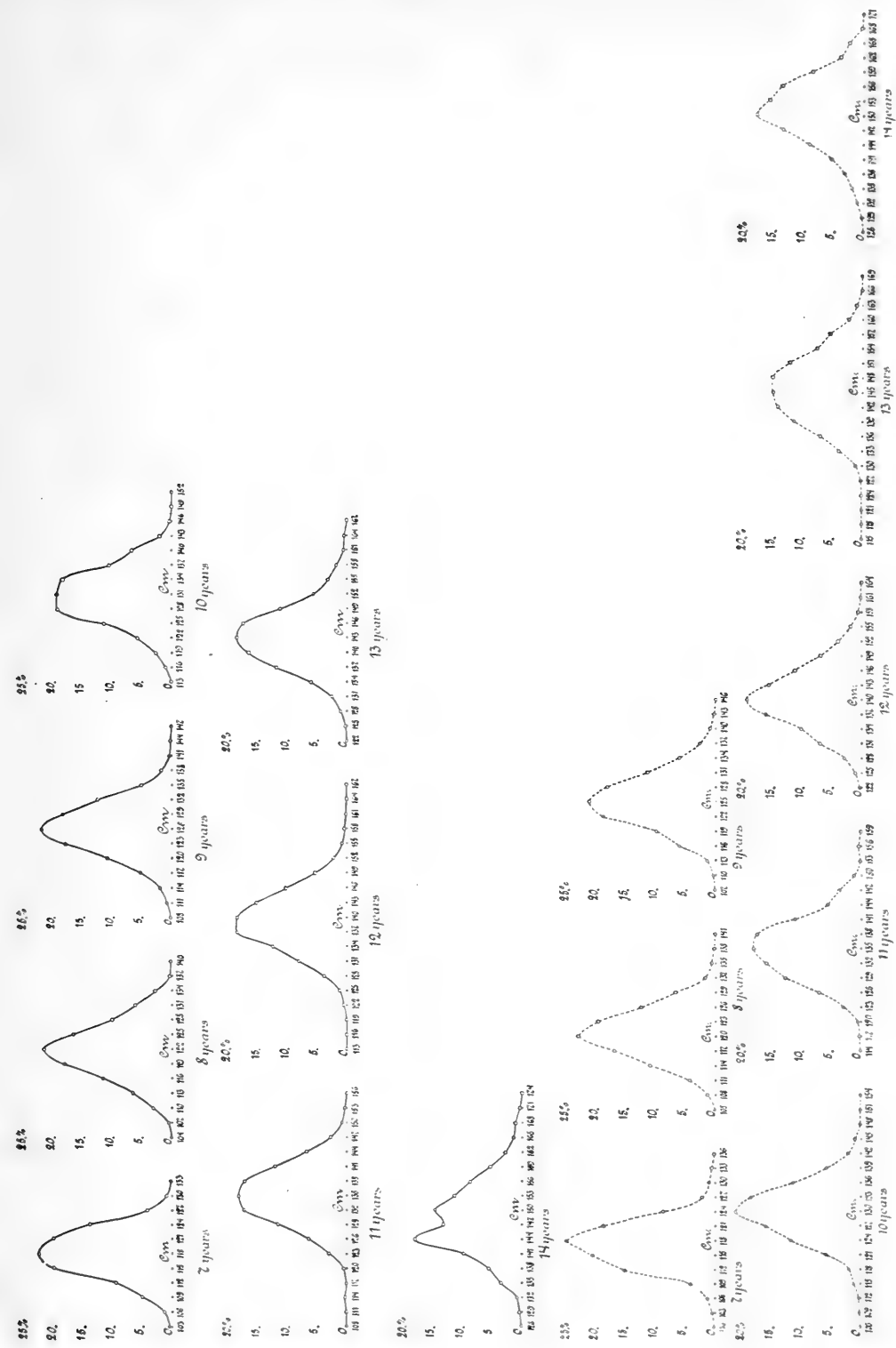


Fig. 5.

Variations in bodily height.

When we study the distribution curves (fig. 5) built on the results of tables 3 a and 3 b, we see that the *distribution of height within the single year classes shows considerable relation to the well known and in statistical hand books and anthropometrical researches often spoken of binomial curve*¹³. Whether the twotopped curve for 14 years old boys corresponds to reality, a collecting about two medians, respective two types at this age, or whether — if we had a still larger material to work from — a coming together would take place, I dare not say definitely.

With the rising age we see on the whole an increase of the extension of the curve on the abscissa, a shortening on the ordinate, — in other words, we get the impression of an with the age increasing individual variation. This may be closer studied numerically by examining the tables (table 1), the standard deviations¹⁴ there shown, consequently a measurement for the absolute variation (here expressed in centimeter).

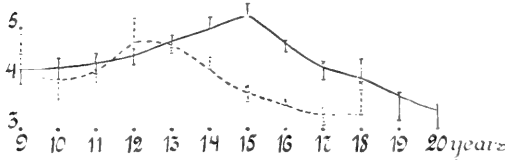


Fig. 6 a. Higher schools.

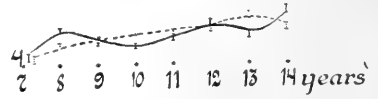


Fig. 6 b. Public schools.

From the public school material 7—14 years (on which, as before mentioned, the distribution curves are built, we see a standard deviation, which from 7 to 14 years age increases from 4.9 cm. to 7.6 cm. for the boys; for the girls an increase from 4.9 cm. at 7 years to 7.2 cm. at 13 years, then a descent to 7.1 at 14 years. For the higher schools we see that the highest values are reached at 15—16 years for boys, 12 years for girls.

The coefficient of variability (the standard deviation in percentage of the average number) of course gives us a more significant expression for the variability, and this coefficient we have shown in curve-form after the tables (fig. 6). For the public school material — 7 to 14 years — we find for both sexes a slightly rising tendency. The small waves ought not to give any occasion for attempts of analysis, however. The material of the higher schools, the years 9—18, respective 20, is of greater value in the last mentioned respect. We see here *for boys an increase till year 15, then a decrease till 20. For girls we see an increase*

¹³ Some very few isolated individuals — abnormals without any connection with the other series of numbers — have not been included.

¹⁴ $\sigma = \sqrt{\frac{pa^2}{n} \div b^2}$.

(anyway from 10) to 12—13 years, then a decrease²⁵. We shall preliminary state this fact and abstain from any commentary, i. inst. the possible connection of the development of puberty of the two sexes, before we have a collected view over all anthropometrical results and furthermore can compare these with the photographs.

The growth from year to year.

The public school material is here easy to make use of, as the probable error is so very small. With the higher school we start from the rounded off values (table 1) marked on millimeter paper after the most natural curve construction and compute from this the growth from year to year in centimeter. Curves are not constructed after these results, as — which has been repeatedly stated in my earlier writings — the laws

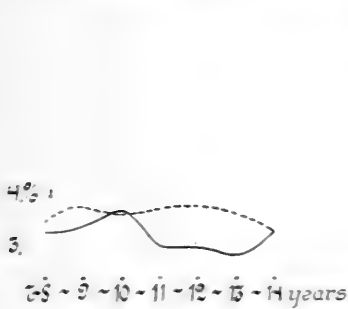


Fig. 7 a.

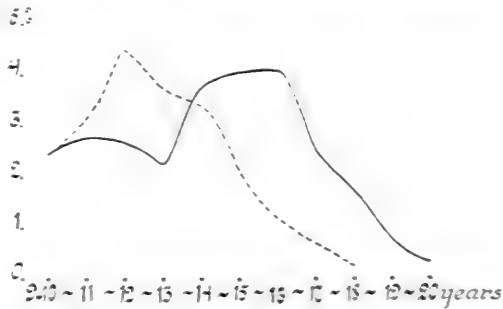


Fig. 7 b.

of growth cannot be reliably studied after such absolute numbers. We therefore compute a *growth-coefficient*, the growth in percentage, how much the children grow on an average from year to year — the centimeter-increase in percentage of the starting point value. Example: — From 8 years (average height 121.8 cm.) till 9 years (126.1) the public school boys grow 4.3 cm. = 3.5% of the 8 year olds height. Hereby we are getting a truthful expression for the really unfolded growth energy

²⁵ As will be seen from the perpendicular lines the probable error is not wholly immaterial. The drawing of the curve (cf. fig. 6) was therefore performed in the following manner, illustrated by two examples: The value for 13 years old boys (higher schools) is computed as average number of the arithmetical average values for 12, 13, and 14. It falls in one place within the borders of error for 13 years (inside the perpendicular line). A similar value for 18 years (the average value of 17, 18, and 19 years) falls below the border of error for 18 and is marked with a cross. For this age the curve is marked as near the mentioned cross as possible, that is, at the very bottom of the perpendicular line, in other words, at the lowest border for the probable error. Hereby is avoided subjectivity and arbitrariness at the drawing of curves, and a natural smoothness in the course is secured. At the same time principal errors are escaped by everywhere keeping within the mathematically computed probable error.

which of course must be compared with the starting point value of the individual. Hereby will furthermore be possible to get trustworthy comparisons between the different ages, the different sexes, even between different races, yes animal species, as well as trustworthy comparisons between increase in height and weight (NB. growth-coefficient, — an *abstract* number).

The increase oscillates for *the public school material* between almost 3% and almost 4% through these seven year classes. The 7—14 years material shows us the following difference between girls and boys: — The girls' curve (fig. 7) runs almost without an exception on a higher plane. *The energy of growth of the girls at these ages is stronger than that of the boys.* The girls' curve has two slight waves, one top about 9 and one about 12. The most conspicuous thing at *the boys' curve* is that a rising ascent at 10 is followed by a long descent — *a period of slow development* — from 10 to 11, 12, and 13, consequently through 3 years. After 13 we again notice a rising tendency.

The higher schools: — We again recognize from the just mentioned public school material, how *the boys have a weak period of growth from 10 to 13* and an increase after this time till 14, but anything corresponding to the relatively stronger growth of the public school pupils from 9 to 10 we do not find¹⁶. *The girls show here, as with the public schools, the strongest growth about 12.* A collective impression of the ages 9, 10 to 14 is the stronger oscillation and a larger difference of the sexes in the higher school curves. Cf. the top at 12 with the girls; extension of the curves 2.6 to 4.5%, at the public school only 2.9 to 3.9.

The public school curve had to be stopped at 14. The material of the higher schools will therefore be of special value by the opportunity it gives for study of the following years. The analogies of the two boys-curves' incline after 13, the girls-curves' decline from 12 to 14, increase the value of the higher schools' material as object for study of growth, although we naturally cannot construct details for the further continuation of the public school curve

We then see how the mentioned *incline of growth after year 13 with boys continue through 3 years until 16, when a strong decline takes place.* After year 17 the yearly increase is below 2%, after 19 below ½%. *The plateau at 14—16 with boys stands in distinct contrast to the pointed top at 12 years with girls.* The energy of growth diminishes strongly with the years after 12, while we yet have to remark, that it still until 14 is relatively strong, only slightly weaker than with boys of the same year class. After year 15 the increase is below 2%, after 17 below ½%.

¹⁶ Earlier investigations (13) as well as general experiences concerning the peculiarities of the higher schools' material justify the supposition that the continuation of the curve towards the left would have given a top from 8 to 9.

II. Weight of the body.

The same sort of balance was used at the weighings at all the schools: It was supplied by the firm Viig & Vraalsen. Although it would seem unnecessary, I shall especially mention, that every single individual was weighed¹⁷ absolutely undressed. The fact is that the great majority of foreign investigations of school children does not fulfil this elementary demand. As some have been weighed with "underclothes on", others with "light summer clothes on", others again "with the shoes taken of", etc., consequently the largest part of the internationally collected material is unusable for comparisons. The supposed difficulties with the weighing of older girls all undressed are exaggerated, when the weighing is done by women (physicians, nurses, teachers) — any way in a country where the state church is lutheran (!). I have namely found that at a catholic institute objections were raised against "exposure of the body". It should be strongly emphasised, though, that an older girl — that is, after the age when the signs of puberty have become visible — never should be compelled to that sort of examination. If she wished to take a coat or anything around herself, it should be permitted, but this must then be weighed specially afterwards. This will very seldom be necessary, when the examiner has sufficient tact and discretion.

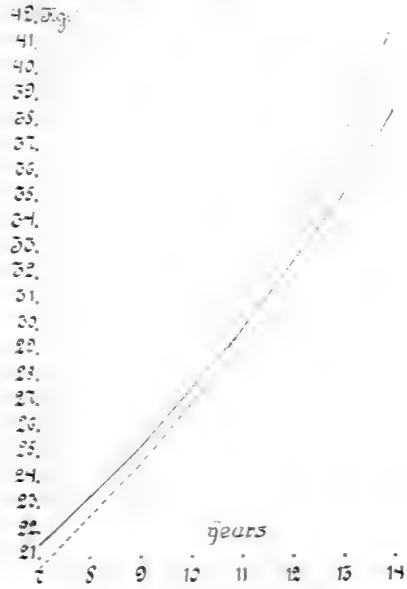


Fig. 8 a. Public schools.

The weight was recorded in kilograms with one decimal. The results are found on table 4 and the graphical presentation of the average numbers on curves, figs. 8 a and b. *From the public school material — 7 to 14 years — we find that in the beginning the boys are the heaviest. This continues until nearly 11. At 11.0 the two sexes have the same number, after that the girls become the heaviest. (It will be remembered that the corresponding relations were found for the absolute height.) The material from the higher schools shows that the girls first at 11½ or 12 get the highest numbers, a relation which continues until nearly*

¹⁷ Also measured.

exactly 15½ years. (Also in this respect did the investigation of height show practically the same relation.) This last statement (of the girls' lead in weight until 15½) should be specially emphasised, as we will remember that the girls' lead in height only keeps up till 14½ (fig. 1).

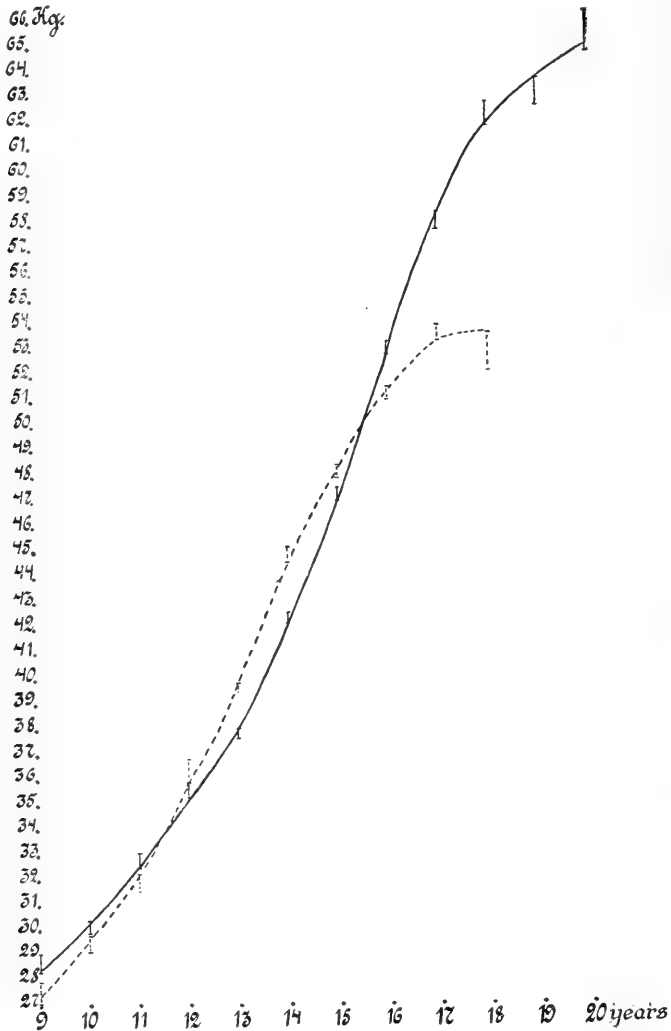


Fig. 8 b. Higher schools.

The girls' lead in height therefore lasts 2½ years (12.0—14½), in weight more than 3½ years (11½ à 12—15½).

On table 5 we see a comparison in weight between the public school boys and the material from Stavanger mentioned on page 9. The other investigations mentioned in the same place — the districts of Mjösen and Horten — only refer to height.

On table 6 a is seen a comparison in weight between 1) Frogner and Vestheim higher schools, 2) Borgerskolen and Hammersborg, 3) all the public schools, and 4) the schools for the feeble-minded. This applies to the age 10 to 14 years¹⁸.

In order to investigate whether the difference of weight or the difference of height is the most obvious by a comparison between the public school and the higher school, it would be most practical to see the numbers of the public school material in percentage of the numbers of the higher school material. For the purpose of getting a large material, the collected material from the two school systems are here compared for the years 9 to 14. Table 7 answers this question regarding the absolute numbers of weight and height.

The following is deducible from table 7 concerning *the difference between the public school and the higher school*: —

The difference of weight is more than twice as large as the difference of height. The boys of the two school systems differ more strongly, both in height and weight, than the girls do. A comparison between the year classes 9 to 14 displays the greatest differences in the younger year classes.

Table 4 a.
The public school. Boys.

Average	Number investigated	Average weight, kg.	Probable errors	Standard deviation.	Coefficient of variability	Probable errors	Rounded off values. Average weight	Growth	
								in kg.	in per-centage
7, II years	616	21.81	± 0.07	2.57	11.76	± 0.23	21.5 (7.0 years)	-	-
8 >	1521	23.35	± 0.05	2.73	11.68	± 0.14	23.4	1.9 kg.	8.84 ⁰⁰
9 >	1537	25.28	± 0.05	3.02	11.95	± 0.15	25.3	1.9 >	8.12 ⁰⁰
10 >	1656	27.58	± 0.06	3.34	12.11	± 0.14	27.6	2.3 >	9.09 ⁰⁰
11 >	1785	29.93	± 0.06	3.72	12.44	± 0.14	29.9	2.3 >	8.33 ⁰⁰
12 >	1615	32.44	± 0.07	4.26	13.14	± 0.16	32.5	2.6 >	8.70 ⁰⁰
13 >	1401	35.05	± 0.09	4.77	13.61	± 0.18	35.1	2.6 >	8.00 ⁰⁰
14 >	1265	38.54	± 0.11	6.05	15.70	± 0.22	38.5	3.4 >	9.69 ⁰⁰

Table 4 b.
The public school. Girls.

7, III years	569	21.19	± 0.07	2.51	11.86	± 0.24	20.6 (7.0 years)	-	-
8 >	1467	22.58	± 0.05	2.85	12.62	± 0.16	22.6	2.0 kg.	9.71 ⁰⁰
9 >	1560	24.58	± 0.06	3.26	13.25	± 0.16	24.6	2.0 >	8.85 ⁰⁰
10 >	1701	27.02	± 0.06	3.77	13.97	± 0.16	27.0	2.4 >	9.76 ⁰⁰
11 >	1727	29.94	± 0.07	4.36	14.58	± 0.17	29.9	2.9 >	10.74 ⁰⁰
12 >	1718	33.28	± 0.09	5.24	15.75	± 0.19	33.3	3.4 >	11.37 ⁰⁰
13 >	1412	37.40	± 0.12	6.58	17.50	± 0.23	37.3	4.0 >	12.01 ⁰⁰
14 >	1439	41.81	± 0.13	7.22	17.26	± 0.22	41.7	4.4 >	11.80 ⁰⁰

¹⁸ Except for Borgerskolen and Hammersborg, where we only have the ages 13 and 14 (just as for table 6 b — girls). The tables demonstrate the diminishing values from the first mentioned schools to the last mentioned ones.

Table 4 c.
The higher schools. Boys.

Average	Number investigated	Average weight, kg.	Probable errors	Standard deviation	Coefficient of variability	Probable errors	Rounded off values. Average weight	Growth	
								in kg.	in per-centage
9 years	44	28.74	± 0.39	3.81	13.26	± 1.45	28.4	-	-
10 »	101	30.14	± 0.26	3.86	12.79	± 0.90	30.3	1.9 kg.	6.69 ⁰ / ₀
11 »	100	32.80	± 0.27	4.00	12.19	± 0.60	32.6	2.3 »	7.59 ⁰ / ₀
12 »	182	35.64	± 0.23	4.68	13.13	± 0.47	35.3	2.7 »	8.28 ⁰ / ₀
13 »	394	37.80	± 0.19	5.63	14.90	± 0.37	37.9	2.6 »	7.37 ⁰ / ₀
14 »	447	42.39	± 0.24	7.47	17.63	± 0.43	42.2	4.3 »	11.34 ⁰ / ₀
15 »	478	47.25	± 0.25	8.22	17.40	± 0.39	47.0	4.8 »	11.37 ⁰ / ₀
16 »	443	53.04	± 0.28	8.58	16.17	± 0.37	52.8	5.8 »	12.34 ⁰ / ₀
17 »	254	58.06	± 0.32	7.46	12.85	± 0.39	58.3	5.5 »	10.42 ⁰ / ₀
18 »	142	62.30	± 0.45	7.98	12.81	± 0.51	61.9	3.6 »	6.17 ⁰ / ₀
19 »	71	63.15	± 0.58	7.23	11.44	± 0.65	63.7	1.8 »	2.91 ⁰ / ₀
20 »	36	65.50	± 0.82	7.31	11.17	± 0.90	65.0	1.3 »	2.04 ⁰ / ₀

Table 4 d.
The higher schools. Girls.

9 years	39	27.55	± 0.41	3.77	13.68	± 1.06	27.4	-	-
10 »	62	29.48	± 0.32	3.77	12.78	± 0.79	29.6	2.2 kg.	8.03 ⁰ / ₀
11 »	56	31.91	± 0.35	3.90	12.22	± 0.79	32.3	2.66 »	8.99 ⁰ / ₀
12 »	100	36.33	± 0.45	6.67	18.35	± 0.91	35.9	3.62 »	11.22 ⁰ / ₀
13 »	342	39.59	± 0.26	7.00	17.69	± 0.47	39.9	3.96 »	11.04 ⁰ / ₀
14 »	336	44.92	± 0.29	8.00	17.80	± 0.48	44.6	4.79 »	12.02 ⁰ / ₀
15 »	382	48.15	± 0.24	6.96	14.45	± 0.36	48.2	3.57 »	8.00 ⁰ / ₀
16 »	337	51.27	± 0.26	7.11	13.86	± 0.37	51.3	3.1 »	6.43 ⁰ / ₀
17 »	215	53.59	± 0.30	6.42	11.97	± 0.40	53.3	2.0 »	3.90 ⁰ / ₀
18 »	46	52.87	± 0.77	7.75	14.65	± 1.05	53.6	0.3 »	0.56 ⁰ / ₀

Table 5.
Weight.

Age	Boys		Age	Girls	
	Kristiania	Stavanger		Kristiania	Stavanger
7 years	21.5 kg.		7 years	20.6 kg.	
7½ »		22.0 kg.	7½ »		22.0 kg.
8 »	23.4 »		8 »	22.6 »	
8½ »		23.2 »	8½ »		22.8 »
9 »	25.3 »		9 »	24.6 «	
9½ »		25.7 »	9½ »		25.1 »
10 »	27.6 »		10 »	27.0 »	
10½ »		27.7 »	10½ »		26.9 »
11 »	29.9 »		11 »	29.9 »	
11½ »		29.4 »	11½ »		29.9 »
12 »	32.5 »		12 »	33.3 »	
12½ »		32.2 »	12½ »		32.5 »
13 »	35.1 »		13 »	37.3 »	
13½ »		35.4 »	13½ »		36.9 »
14 »	38.5 »		14 »	41.7 »	
14½ »		37.6 »	14½ »		40.6 »

Table 6 a.
Boys. Weight.

Age	Frogner & Vestheim		Borger- & Hammersborg		Public schools		Sch. f. feebleminded	
	Number	Average weight	Number	Average weight	Number	Average weight	Number	Average weight
10 years	100	30.06 kg.	-	-	1656	27.58 kg.	36	26.35 kg.
11 "	101	33.02 "	-	-	1785	29.93 "	34	28.6 "
12 "	140	35.85 "	-	-	1615	32.44 "	53	32.07 "
13 "	145	39.15 "	50	36.63 kg.	1401	35.05 "	45	33.60 "
14 "	150	44.44 "	69	40.18 "	1265	38.54 "	48	30.75 "

Table 6 b.
Girls. Weight.

Nissen

10 years	62	29.48 kg.	-	-	1701	27.02 kg.	18	24.81 kg.
11 "	55	31.89 "	-	-	1727	29.94 "	23	29.52 "
12 "	80	36.22 "	-	-	1718	33.28 "	23	32.09 "
13 "	172	39.87 "	56	37.78 kg.	1412	37.40 "	41	36.20 "
14 "	127	46.16 "	65	42.21 "	1439	41.81 "	30	40.35 "

Table 7 a.
Difference of height between the higher school and the public school.

	Boys		Difference		Average difference
	Higher school	Public school	Cm.	% of the numbers of higher school	
9 years	133.6 cm.	126.1 cm.	7.5	5.6	4.0 ⁰⁰
10 "	136.9 "	130.9 "	6.0	4.4	
11 "	140.7 "	135.0 "	5.7	4.1	
12 "	144.5 "	139.2 "	5.3	3.7	
13 "	147.8 "	143.3 "	4.5	3.0	
14 "	153.3 "	148.2 "	5.1	3.3	
Girls					
9 years	130.6 cm.	125.3 cm.	5.3	4.1	2.8 ⁰⁰
10 "	133.8 "	130.0 "	3.8	2.8	
11 "	138.0 "	135.1 "	2.9	2.1	
12 "	144.2 "	140.4 "	3.8	2.6	
13 "	149.6 "	145.6 "	4.0	2.7	
14 "	154.7 "	150.6 "	4.1	2.7	

Table 7 b.
*Difference of weight between the higher school
 and the public school.*

	Boys		Difference		Average difference
	Higher school	Public school	Kg.	% of the numbers of higher schools	
9 years	28.4 kg.	25.3 kg.	3.1	10.9	8.7 %
10 »	30.3 »	27.6 »	2.7	8.9	
11 »	32.5 »	29.9 »	2.7	8.3	
12 »	35.3 »	32.5 »	2.8	7.9	
13 »	37.9 »	35.1 »	2.8	7.4	
14 »	42.2 »	38.5 »	3.7	8.8	
Girls					
9 years	27.4 kg.	24.6 kg.	2.8	10.2	7.75 %
10 »	29.6 »	27.0 »	2.6	8.8	
11 »	32.26 »	29.9 »	2.36	7.3	
12 »	35.88 »	33.3 »	2.58	7.2	
13 »	39.85 »	37.3 »	2.55	6.4	
14 »	44.63 »	41.7 »	2.93	6.6	

The variations in weight.

We also here present the distribution series (table 8) and the distribution curves (fig. 9 a and b), the computed standard deviation and coefficient of variability (table 4), the last one graphically (fig. 10).

A comparison between the coefficients for *height* (table 1) and for *weight* confirms the fact, which we know beforehand, that *weight* is a very much more variable conception. The following comparison of numbers will give us a general view of this:

Average coefficient of variability.

	Boys			Girls		
	Weight	Height	Rate	Weight	Height	Rate
Public schools						
7-14 years.....	12.80	4.6	2.8-1	14.60	4.6	3.2-1
Higher schools						
9-18 years.....	14.31	4.5	3.2-1	14.75	4.0	3.7-1

When we now are presenting distribution curves, it would be of interest if this difference in variability was exhibited in a way so it would come to full validity as a really indicative sight impression¹⁹. The curves have therefore been drawn after the following plan:

¹⁹ As before stated, the public school has only large enough material for distribution curves for the single ages.

Table 8 a.
Weight. Boys. Public schools.

Kg.	7 years		10 years		Kg.	8 years		11 years		12 years	
	Number	00	Number	00		Number	00	Number	00	Number	00
14-16	3	0.49	-	-	13-15	1	0.07	-	-	-	-
17-19	96	15.58	5.5	0.33	16-18	44	2.89	1	0.06	-	-
20-22	293.5	47.65	73.5	4.44	19-21	339.5	22.32	5.5	0.31	3.5	0.22
23-25	194	31.49	358	21.62	22-24	660.5	43.43	88	4.93	25.5	1.58
26-28	27.5	4.46	612	36.96	25-27	366	24.06	374.5	20.98	151.5	9.38
29-31	1.5	0.24	429.5	25.94	28-30	96.5	6.34	583	32.66	363	22.48
32-34	0.5	0.08	136.5	8.24	31-33	13.5	0.89	460.5	25.80	477	29.57
35-37	-	-	29	1.75	34-36	-	-	187	10.48	351	21.73
38-40	-	-	10	0.60	37-39	-	-	60.5	3.39	144	8.92
41-43	-	-	1	0.06	40-42	-	-	18	1.01	69.5	4.30
44-46	-	-	1	0.06	43-45	-	-	3	0.17	17	1.05
					46-48	-	-	4	0.22	8	0.5
					49-51	-	-	-	-	3	0.19
					52-54	-	-	-	-	2	0.12
	616		1656			1521		1785		1615	

Boys. Public schools. Continuation.

Kg.	9 years		13 years		14 years	
	Number	0/0	Number	0/0	Number	0/0
15-17	3.5	0.23	-	-	-	-
18-20	64	4.16	-	-	-	-
21-23	360.5	23.46	2	0.14	2	0.16
24-26	625	40.66	16.5	1.18	7.5	0.50
27-29	358	23.29	115.5	8.24	34.5	2.73
30-32	106	6.90	298.5	21.31	138	10.91
33-35	15	0.98	380	27.12	243.5	19.25
36-38	3	0.20	309.5	22.09	281	22.21
39-41	1	0.07	160.5	11.46	215	17.0
42-44	1	0.07	69	4.93	157	12.41
45-47	-	-	28.5	2.03	75.5	5.97
48-50	-	-	10	0.71	58.5	4.62
51-53	-	-	5	0.36	32	2.53
54-56	-	-	3	0.21	8.5	0.67
57-59	-	-	-	-	6	0.47
60-62	-	-	3	0.21	2	0.16
63-65	-	-	-	-	1	0.08
66-68	-	-	-	-	3	0.24
	1537		1401		1265	

As the variability (the coefficient of variability) is computed to be about 3 times as large in weight as in height, this must first of all get its expression of the abscissa, where we, however, in contrast to coefficients, are operating with absolute numbers, cm. and kg. This is the reason (cf. fig. 9, the large curve for 7 year olds boys) why the standard

Table 8 b.
Weight. Girls. Public schools.

Kg.	7 years		9 years		14 years		Kg.	8 years	
	Number	0/0	Number	0/0	Number	0/0		Number	0/0
14-16	5.5	0.97	1	0.06			15-17	24.5	1.67
17-19	135	23.73	48.5	3.11			18-20	325	22.15
20-22	274.5	48.24	377.5	24.20			21-23	646.5	44.07
23-25	132	23.20	595.5	38.17	4	0.28	24-26	331.5	22.60
26-28	16.5	2.90	384.5	24.65	20	1.39	27-29	111	7.57
29-31	3.5	0.62	105.5	6.76	59.5	4.14	30-32	22	1.50
32-34	1	0.18	33.5	2.15	136	9.45	33-35	4.5	0.31
35-37	1	0.18	9.5	0.61	216.5	15.05	36-38	2	0.14
38-40	-	-	2	0.13	231	16.05			
41-43	-	-	1.5	0.10	216.5	15.05			
44-46	-	-	-	-	188	13.06			
47-49	-	-	1	0.06	179.5	12.47			
50-52	-	-	-	-	82.5	5.73			
53-55	-	-	-	-	48	3.34			
56-58	-	-	-	-	32	2.22			
59-61	-	-	-	-	13.5	0.94			
62-64	-	-	-	-	5	0.35			
65-67	-	-	-	-	1	0.07			
68-70	-	-	-	-	3	0.21			
71-73	-	-	-	-	1.5	0.10			
74-76	-	-	-	-	0.5	0.03			
77-79	-	-	-	-	1	0.07			
	569		1560		1439			1467	

Girls. Public schools. Continuation.

Kg.	10 years		11 years		12 years		13 years	
	Number	0/0	Number	0/0	Number	0/0	Number	0/0
16-18	9	0.53	-	-	-	-	-	-
19-21	75.5	4.44	11.5	0.67	2	0.12	-	-
22-24	316	18.58	124.5	7.21	31	1.80	7.5	0.53
25-27	605.5	35.60	382	22.12	154.5	8.99	34.5	2.44
28-30	439.5	25.84	515	29.82	361	21.01	126.5	8.96
31-33	161.5	9.49	393.5	22.78	451	26.25	250.5	17.74
34-36	63.5	3.73	173.5	10.05	317	18.45	294.5	20.86
37-39	17.5	1.03	80	4.63	205.5	11.96	245.5	17.39
40-42	11	0.65	26	1.51	104.5	6.08	174.5	12.36
43-45	1	0.06	7.5	0.43	49.5	2.88	117	8.28
46-48	-	-	11	0.64	16.5	0.96	75	5.31
49-51	1	0.06	2.5	0.14	17.5	1.02	43.5	3.08
52-54	-	-	-	-	1	0.06	24	1.70
55-57	-	-	-	-	3.5	0.20	6	0.42
58-60	-	-	-	-	2.5	0.15	6	0.42
61-63	-	-	-	-	0.5	0.03	4	0.28
64-66	-	-	-	-	0.5	0.03	1.5	0.11
67-69	-	-	-	-	-	-	1.5	0.11
	1701		1727		1718		1412	

deviation in weight (2.57 kg.) is given 3 times larger place on the abscissa than the standard deviation in height (4.92 cm., fig. 5).

The sight impression of the variability is naturally dependent upon the relation between the breadth and height extension of the curve. If therefore a 3 times larger space for the standard deviation on the abscissa really is to give the right impression of a 3 times larger variability, it must be taken care that the height of both of the curves is the same. This has been done on the mentioned curve for 7 years old boys weight and height²⁰. Fig. 9 a and fig. 5.

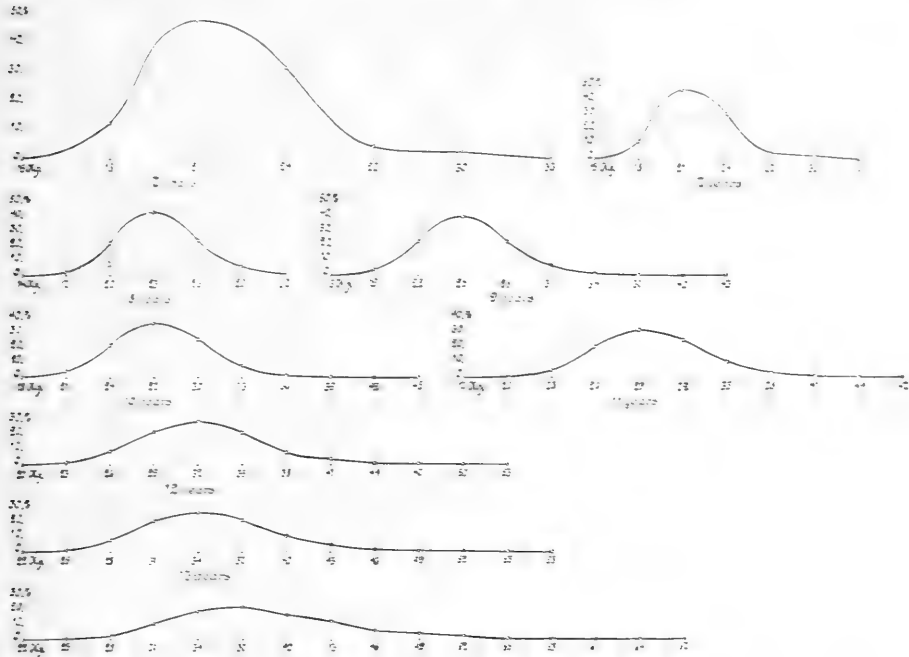


Fig. 9 a.

And when we compare these two height and weight curves, the eye will get a striking impression of the much stronger degree of the variability of weight compared to the variability of height — or, as expressed in numbers by the coefficient of variability, 11.76 and 4.16.

Beside the just mentioned curve for weight of 7 years old boys we find the same in a reduced scale. The dimensions of abscissa and ordinate have been correspondingly reduced. This reduction is then, in consideration of space, methodically carried out for all the other ages and for both sexes. The sight impression of the variability will naturally therefore not be changed.

The curves for weight show moreover, compared to fig. 5 (the distribution curve of height) another and significant peculiarity, viz. a distinct

²⁰ Strongly approximate.

skew distribution of the weight curves, so that the *extension toward the plus-side is considerably larger than toward the minus-side*. The consequence of this is that the "type" of the year class does not coincide with the arithmetical average of the year class, but lies lower than this (more toward the left). The arithmetical average for weight is therefore not a perfectly valid characteristic number-representative for the year class. The strong plus-deviation removes the average perceptibly toward the plus-side, while the real type for the age (that number around which most of the variants group themselves) is lower, more to the left on the curve. The so-called "typical number" for the weight of every age is computed after the directions in Gunnar Jahn's Statistical handbook. It is here quoted compared to the arithmetical average:

Table 9.

Boys.

Age	Average	Typical number	Difference	
			Absolute	in % of the average
8 years	23.4 kg.	23.0	0.4 kg.	1.7
9 "	25.3 "	25.0	0.3 "	1.2
10 "	27.6 "	27.5	0.1 "	0.4
11 "	29.9 "	29.5	0.4 "	1.3
12 "	32.5 "	31.9	0.6 "	1.8
13 "	35.1 "	34.0	1.1 "	3.1
14 "	38.5 "	36.5	2.0 "	5.2

Girls.

8 years	22.6 kg.	22.0	0.6 kg.	2.7
9 "	24.6 "	23.5	1.1 "	4.7
10 "	27.0 "	25.7	1.3 "	5.1
11 "	29.9 "	28.6	1.3 "	4.5
12 "	33.3 "	31.9	1.4 "	4.4
13 "	37.3 "	35.2	2.1 "	6.0
14 "	41.7 "	39.3	2.4 "	6.1

It is seen from this comparison, that the most typical number-representative distances itself perceptibly, partly even very considerably, from the arithmetical average. This deserves to be emphasised, as it never — as far as I know — has been investigated after this statistical method, for the school age. (I have not either found anything corresponding for the grown-up age, although I cannot deny that it possibly has been investigated.) It must furthermore be specially stated, that a few isolated individuals — with number valuations which are without direct connection with the continuous 3 kilogram groups (cf. the curves) — have not been included. These would have made the curves still more skew by addition to the plus-side²¹.

²¹ But we would then surely — with this large material — have got undoubtedly pathological individuals mixed in.

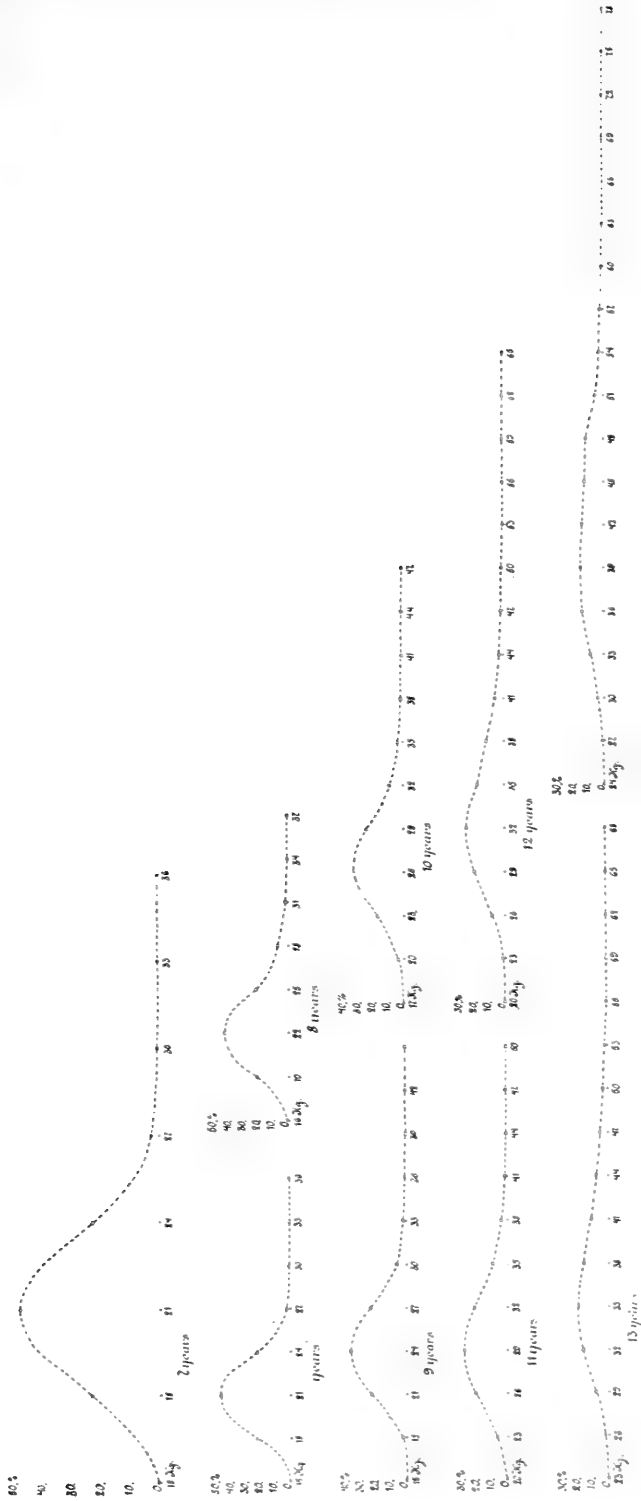


Fig. 9 b.

In order to get a more significant expression for the mentioned difference between the typical number and the average, the difference is computed as percentage of the average (table 9). It is then very obvious how the percentage — consequently the *relative difference* — *in all the ages is considerably larger with the girls than with the boys. A tendency to stronger extension of the curve toward the plus-side from the type characterizes the girls in all ages compared to the boys.* How does this markedly skew distribution of the curve affect the relation between the plus- and minus-variants computed from the arithmetical average? As H. J. H a n s e n remarks: When the individuals who weigh less than the average deviate less from it than those who weigh more, it is a mathematical necessity, that there must be more in number under than over the average in order to create equilibrium. L i v i (quoted by H. J. Hansen) found in his investigations of Italian soldiers, that 53.1% were under average, H. J. Hansen found that of new born children were about 54% under average. Our material of the numbers from the public schools, 8 to 14 years, shows an average of 53.4% of the boys, and 54.5% of the girls as minus-variants, — which is very near the Italian numbers for soldiers and the Danish for new born. Table 10 shows the rate between plus- and minus-variants for 8 to 14 years in the public schools. The girls show in all the years (except 14) relatively more minus-variants than the boys. The table shows similarity in the numbers for the percentage of the growth in weight (table 4), higher numbers for the girls with maximum at (12) 13, after which a descent. Perceivable ascent with the boys after 13. Therefore *parallelism between the years of strong development and increased number of minus-variants.* (One anyway reasonable analogical conclusion is, that the larger percentage of minus-variants among the girls in these years is connected with the quicker average development of this sex.)

From the numbers on table 9 is seen, how the positive distribution increases with the years. No detailed analysis from year to year of the relative differences between average and type — eventually as curves — will be given. The typical number cannot be computed as accurately as the average.

Note. A corresponding analysis of the distribution curves of height was not made, as the conformity with the “ideal” binomial-curve was obvious. As now, however, the conception “skew curves” has become actual by going through the variability of weight, a comparison of the distribution of height will be appropriate. Table 11 will furnish us the material for this.

As we see, the skew distribution of weight is conspicuous, compared to the distribution of height. For the ages 8 to 14 at the public schools 53.4% of the boys show ²² a weight under average, only 50.6% a height

²² As average of the numbers of the single ages.

under same; for the girls we find 54.5% under average weight, 50.2% under average height.

The much stronger extension of the weight curve toward the plus-side appears quite natural to us, when we remember, that someone may be found to weigh 100% more than the average, but impossibly 100% below, — as H. J. Hansen emphasizes in his work.

The variabilities in weight, statistically computed as standard deviation and as coefficient of variability, are seen on table 4, the last one graphically on curve, fig. 10. Already on page 27 we have mentioned, how the weight varies much more than the height. A closer study of the curves shows, how *in the public school material, 7—14 years, the*

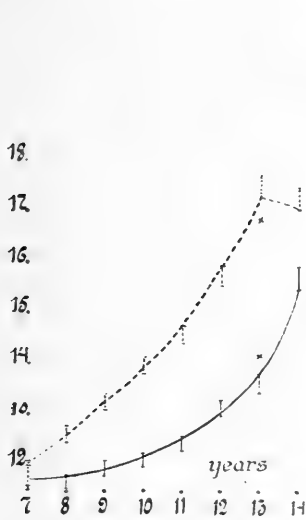


Fig. 10 a. Public schools.

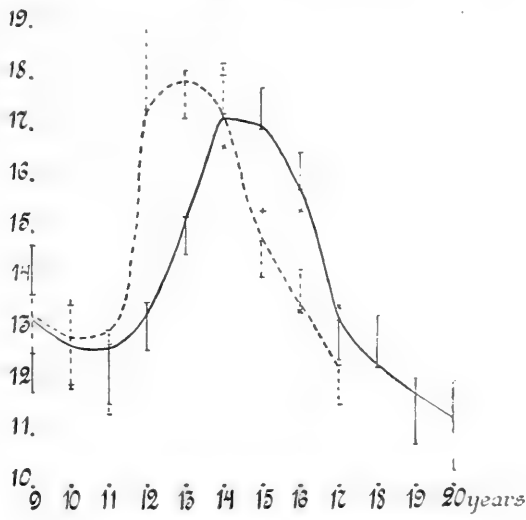


Fig. 10 b. Higher schools.

girls in all ages vary much stronger than the boys. The curves for the higher schools teach us, that this stronger variability of the female sex ceases at this latter age, 14 years, from which time the male sex varies most strongly²³. Concerning the curve sketch, which, as far as the higher school is concerned, cannot be accurately detailed — as the probable error is not altogether small — we refer to page 19. It is, however, conspicuous how the time for the strongest variability of the girls (round about 13 years) falls earlier than that of the boys (about 15). Cf. the practically corresponding phenomena in regard to height, page 18, 19. The curves do not furnish any proof for any difference in degree between the public school and the higher school; there seems to be considerable conformity through the ages, that can be compared, viz. 9 to 14 years.

²³ Anyway as far as our investigation reaches through the years.

Table 10.
The Public schools.

	Boys		Girls	
	Over average weight	Under average weight	Over average weight	Under average weight
8 years	47.17 ^{0/0}	52.83 ^{0/0}	45.57 ^{0/0}	54.43 ^{0/0}
9 "	47.22 "	52.78 "	45.45 "	54.55 "
10 "	47.91 "	52.09 "	46.65 "	53.35 "
11 "	47.30 "	52.70 "	45.92 "	54.08 "
12 "	46.81 "	53.19 "	43.69 "	56.31 "
13 "	45.80 "	54.20 "	43.97 "	56.03 "
14 "	44.15 "	55.85 "	47.48 "	52.52 "

Table 11.
The Public schools.

	Boys		Girls	
	Over average height	Under average height	Over average height	Under average height
8 years	49.43 ^{0/0}	50.57 ^{0/0}	49.15 ^{0/0}	50.85 ^{0/0}
9 "	50.31 "	49.69 "	48.89 "	51.11 "
10 "	50.11 "	49.89 "	50.44 "	49.56 "
11 "	49.94 "	50.06 "	49.73 "	50.17 "
12 "	49.31 "	50.69 "	48.47 "	51.53 "
13 "	48.15 "	51.85 "	49.80 "	50.20 "
14 "	48.44 "	51.56 "	52.00 "	48.00 "

The increase in weight from year to year.

In referring back to the methodics, page 19 (increase in height), we note that the tables 4 a—d furnish information about as well the absolute as the percentage increase in weight from year to year. A graphical presentation of the latter will be found on fig. 11. *The public school material show* — compared to the valuations for increase in height 3 à 4% (page 5) — an increase between 8 and a little more than 9½% for the boys, from almost 9 to 12% for girls. With the boys is seen, after a rather wavy course, with its highest top about year 10 (the same as with respect to height), a tendency to stronger increase after 13 (also with respect to height was increase showed at this time). The girl curve is, without exception, on a higher plane than the boy curve. An even, steady, from year to year increasing energy of growth from 9 to 13 is seen on the girls curve, diverging strongly from that of the boys. The curves for *the higher schools* at once make a peculiar impression on the eye by the markedly parallel phenomena between the maximum of the

girl curve, 12²⁴ to 14, and that of the boy curve, 14 to 16, with for both sexes the strongest oscillation during the last year of the term (an increase in weight of about 12 0/0). After this there is a decided falling off in the weight increase. At 17^{1/2} it is down to 2 0/0 for the girls (cfr. the height, page 20, after 15 2 0/0), at 18 1/2 0/0. For the boys it is at 20 down to 2 0/0 (height 2 0/0 after 17).

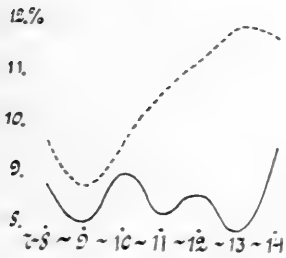


Fig. 11 a. Public schools.

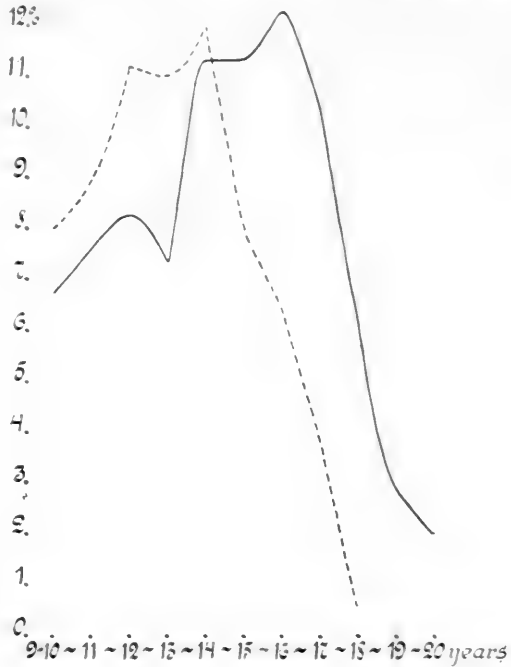


Fig. 11 b. Higher schools.

Bodily weight at the Public Schools in the different part of the city.

A comparative study of all the public schools is of considerable interest; it will principally furnish information about the important problem, the influence of the surroundings. The difficulty will be to find a method, which gives a single numeric expression for the level of each school. Simply to calculate the average at each school would, of course, give an unusable result, as the distribution of age and sex is not precisely the same everywhere. It would be better to compute, 1) the average weight for each year class, separatedly for the sexes; 2) the average number of this, likewise separated for the sexes; and 3) the average of the average of boys and girls. Hereby would be obtained for most of the schools a rather characteristic number; but in such case the schools for the feeble-minded and delinquents should be taken out, they have few or no representatives in the younger year classes, and yet, these schools should not be left out. Another method is therefore selected, which gives an illustrative, collective survey over the question:

²⁴ By "12" is of course meant the increase in weight from 11 to 12.

Table 12.

Schools	Over weight	Middle weight	Under weight	Proportionate number
	1.	2.	3.	
	0/0	0/0	0/0	
Schools for feeble-minded	8.8	69.1	22.1	2.13
Rosenhof	8.6	75.1	16.3	2.08
Vahl	9.1	74.6	16.3	2.07
Tøien	8.4	76.5	15.1	2.07
Kampen	8.3	77.9	13.8	2.06
Vaalerengen	8.3	77.7	14.0	2.06
Lilleborg	9.4	75.6	15.0	2.06
Ruseløkken	10.3	74.9	14.8	2.05
Bjølse	9.4	77.4	13.2	2.04
Sagene	10.7	75.3	14.0	2.03
Grønland	10.2	76.2	13.6	2.03
Sofienberg	10.1	76.6	13.3	2.03
Foss	10.0	77.8	12.2	2.02
Oslo	10.5	77.1	12.4	2.02
Grünerløkken	11.4	76.0	12.6	2.01
Møllergaten	11.4	76.7	11.9	2.01
Classes for hard of hearing (Ila)	11.3	76.4	12.3	2.01
Lakkegaten	11.4	77.4	11.2	2.00
Vaterland	12.0	76.6	11.4	1.99
Ila	14.1	74.1	11.8	1.98
Majorstuen	10.9	80.5	8.6	1.98
Uranienborg	16.9	74.9	8.2	1.91
Bolteløkken	21.4	70.3	8.3	1.87
Schools for delinquents	23.4	68.1	8.5	1.86

The statistical values, the average weight and the standard deviation of the year classes for the whole city, the sexes separatedly, were firstly computed. (These numbers which we were to use for hygienic purposes have not been included in this work; our table 1 show the public and higher schools separatedly.) The standard deviation is then used as the principle of division, as every single boy and every single girl is compared with the norm of the year class of its sex and entered as "middle weight", if the weight lies within the outer borders of the mentioned deviation, — as "under weight", respective "over weight", if it lies outside same. In that way an enumeration of the single individuals will give a real foundation for comparison, even if the distribution of age and sex is not precisely the same everywhere — as every individual is counted in, independent of the age (an "under weight" 9 years old girl is counted in the same way as an "under weight" 14 years old girl, — that is, after the comparison with the norm of the year class of the sex has been done).

The result for public and special schools is shown on table 12.

In order to be able finally to characterize the school by a single number, the "proportionate number" was computed: Every percentage "over weight" is counted as "1", "middle weight" as »2", »under weight«

as "3", after which the three products are divided by the collected number, consequently 100:

$$\frac{(8.8 \times 1) + (69.1 \times 2) + (22.1 \times 3)}{100} = 2.13$$

(schools for the feeble-minded). The poorer the weight is at the school, the higher will be the "proportionate number".

The combination, about which we refer to the cartogram, fig. 12, now gives us a very illustrative survey and — with one single exception — a most likely result, in other words, on the whole well consistent with the experiences that had been gathered concerning the pupils relative to the part of the city where they live.

First it shall be mentioned that *the schools for the feeble-minded* which — just because of their purely special material not marked down — *are a good way behind the poorest public school, yes, separated from it by a wide intermediate space*, do not join in the continuous series, which now begin for the 20 of the named 23 schools. This series from Rosenhof (2.08) to Majorstuen (1.98) are so evenly growing toward a stronger weight, that any separateness would be artificial. But we see distinctly how, within these even series, we find among the "poorest" the three most northern schools, Rosenhof, Lilleborg, Bjölsen; then the four east-side schools in a row, Vahl, Töien, Kampen, Vaalerengen; and finally the most southern school in the city, Ruselökken. This is the school we meant by the one single exception, as mentioned above. This school had before been regarded as a "good" school, as it in a way belongs to the west-side of the city, and therefore could not lay claim to very many of the places at the vacation colonies. But the school is largely recruited from the harbour district Piperviken, where there for one thing is very poor housing, so the statistical result is only what might be expected. Further down the list we find the medium good weights in what can, on the whole, be designated as the center of the city, plus the old part of the town, Oslo. Finally the best weights are found at the west-side schools, beginning with Ila and Majorstuen (both 1.98).

Note. The classes for the hard of hearing at Ila are recruited from the whole city and show a number of 2.01, corresponding to a more medium development.

From Ila and Majorstuen — the two first ones of the "best" schools in the list — there is a considerable leap to the still better Uranienborg (1.91) and from there again a leap to *the best*, Boltelökken (1.87) and the *schools for delinquents* (1.86). This last is — to begin with — a very sensational result: The bad, misbehaving children from the poor homes stand as number 1 in weight! The explanation is, however, simple, and at the same time very important. It proves to us on one side *the swift reaction of the child organism from its surroundings* (cf. page 12, 13,

Ramsvig open air school), and on the other side *the very big benefit children from unsanitary homes derive from being moved to boarding schools with rational, plain nourishment, regulated arrangement of work and rest, rational bedtime. Our schools for delinquents — one for boys and one for girls — are boarding schools. We thus find that these schools — although they are recruited by a material which surely belongs to the worst — are able to boast an average number which distances the*

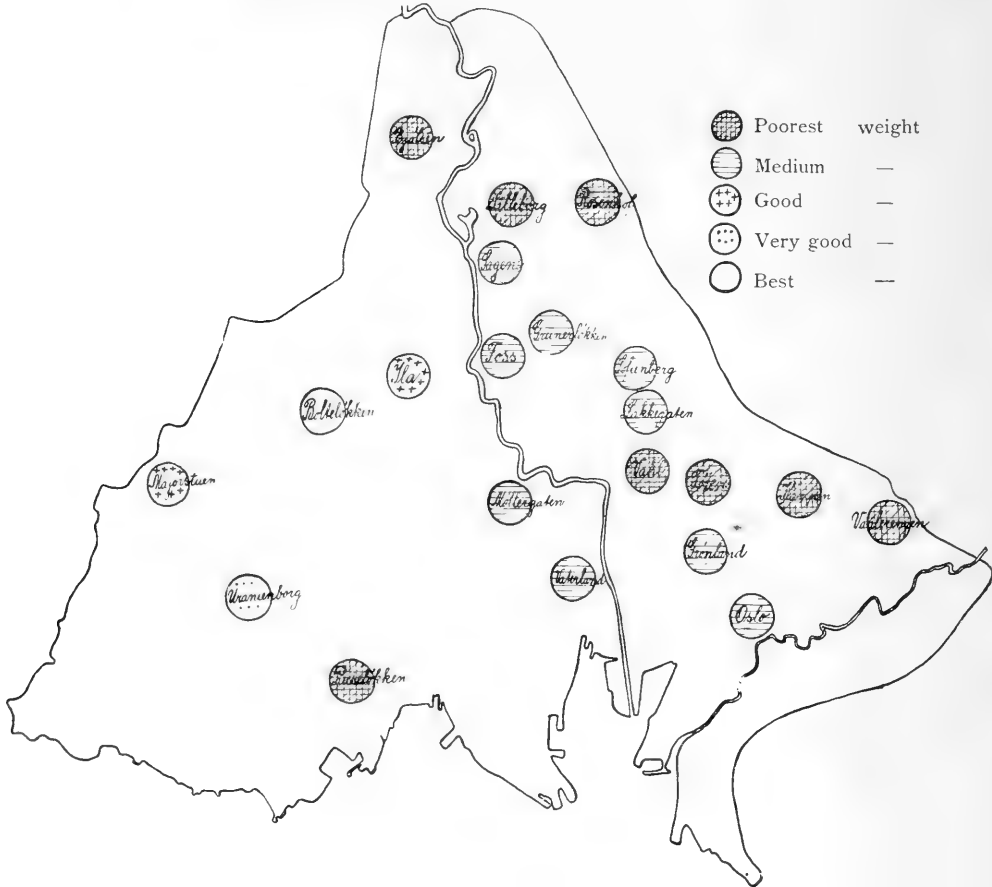


Fig. 12.

very best public schools. Only one is, practically speaking, able to compete, and that is the very best one, Boltelökken.

A closer comparison between development in weight and the housing question — (the latter is, as well known, a very good indicator for the standing of hygiene on the whole, the social level) — will be seen on the following cartogram (fig. 13), which shows the average number of living rooms per flat (kitchen not included) in the different parishes of Christiania. The territory marked with a cross (the castle) is not included, as there are no statistics, probably on account of the minimal

number of flats here. The cartogram is very illustrative compared with the status of the schools (fig. 12). It should be noticed that the schools are not being recruited exactly according to the parishes. *That bad hygiene of housing with all its results is a powerfully hampering factor for healthy development of children, goes, after all, almost without saying.*

A comparison has also been made between the higher schools. Lowest in the line are Borgerskolen, Hammersborg, Hegdehaugen, whose clientele



Fig. 13.

is very largely being recruited from the public schools. Then a considerable leap to Aars & Voss and Fagerborg, and finally an interval to the best group, the west-side schools proper, Nissen, Frogner and Vestheim, which in a rising degree, as they are here named, have pupils from the socially best off classes.

A closer description — for practical hygienic purposes — will be found in "Nordisk hygienisk tidsskrift" 1920, page 289.

III. The relation between weight and height.

Concerning the different methods of expressing the weight-height relation in numbers, we refer to *Martin's* "Lehrbuch der Anthropologie", p. 156. The best one is reported to be *Rohrer's* "Index der Körperfülle" (that is, weight — in grammes — multiplied by 100, divided by the height — in centimeter — in third potency; in other words, the weight in percentage of a cube whose edge is like the height: $\frac{\text{weight} \times 100}{\text{height}^3}$).

I cannot here enter into any criticism of all the methods in question. Yet I shall mention the following: Any method which — anyway for the mass of the material — can be accepted with confidence must let that well known phenomenon be deservedly taken into consideration,

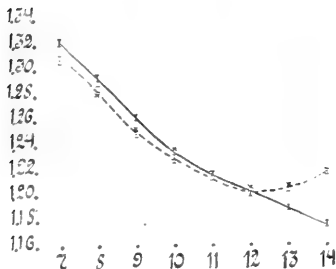


Fig. 14 a.

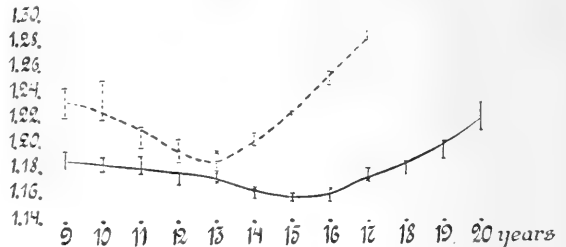


Fig. 14 b.

that a certain physiological decrease in proportional weight takes place and undoubtedly also in the weight-height relation²⁵ up through the years until toward or about the age of puberty. This is the case with *Rohrer's* "Index". But "Index der Körperfülle" is unquestionable an unfortunate designation (cf. the note below). Only the weight-height relation, and absolutely nothing else, is being characterized. Special attention must be paid to this, especially if single individuals are to be judged according to this index. It cannot be too much emphasized, that number values permit and give the only efficient foundation for characterization of a large material and for study of the laws of development and body building. But when it concerns single individuals, the numbers may at most be a help for the expert subjective judgment. The objective method, which when it concerns single individuals would be the most efficient, would probably be photography. A high index of a single child may be caused not alone by plumpness or fatness, but also by, f. inst., a large head and a large abdomen (a rachitic build).

²⁵ "Weight-height" relation does not entirely cover "Körperfülle". That one phenomenon alone, that the head gets relatively smaller from the birth and up, the extremities longer, causes a decrease in the relation of weight and height.

An eventual plumpness may furthermore be united with a healthy, yes blooming appearance, — or it may be wholly pathological. These are examples of, how utterly careful one must be in the use and judgment of numbers concerning individuals. What follows relates only to characterization of great masses. Table 14 gives information of the results found. An index can help considerably for the comparison of an individual from time to time, but it is also here the case, that the expert subjective judgment is very far from superfluous.

The curve fig. 14 a shows the average index for the *public school material*: For the boys a steady decrease from 7 to 14 years, somewhat

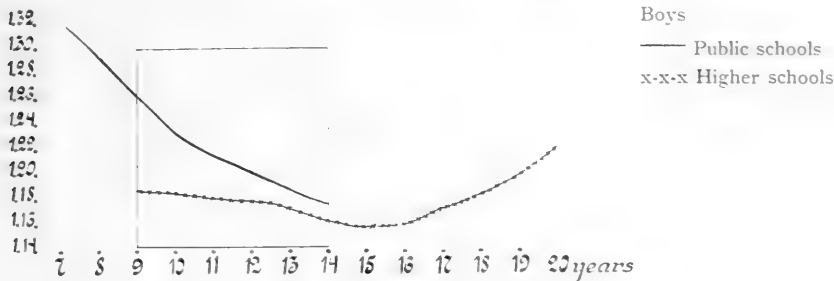


Fig. 15 a.

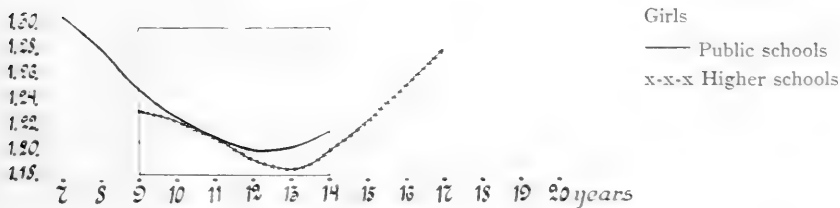


Fig. 15 b.

less steep after 10—11 years then before. *The index of the girls decreases — somewhat less steeply after 9—10 — until 12.0, when the weight-height proportion begins to increase.* We see that as long as the index decreases for both sexes, that is until 12.0, the boys are all the time the heaviest for the height.

The higher school (fig. 14 b) show in the last mentioned respect the very remarkable difference, that the girls in each and all ages have an obviously higher index than the boys. The increase begins for the girls at 13, for the boys at ca. 15. The whole development has for the girls a more intense impress, decrease as well as increase go on after steep lines; with the boys the deviation from the horizontale line is much less emphatic. When we now look at the two curves, fig. 15, we see that the boys as well as the girls have a smaller weight-height proportion at the higher schools than at the public schools, but the difference is (except for the age 13 and 14) considerably larger for the boys part. This throws

a light upon what we have mentioned before, that the boys at the higher schools of all ages — therefore also before 13 — have a smaller weight-height index than the girls. This then is not caused by one in proportion to the public school large index for the girls of the higher school. On the contrary, also the girls have a somewhat small index in proportion to the public school, but the boys have a comparatively still smaller one.

Note. Our material gives no exact information as to the cause for this smaller weight-height proportion for the pupils of the higher school ²⁶ especially the boys. It is — after the opinion of the author — reasonable to think of two things. Firstly it is well known, that children from the socially better off classes grow quicker and puberty develops earlier. When we suppose that an early developed boy of 10 in his total development answers to the average type of 12, then it is likely that he also can have reached year 12 in weight-height proportion, have an index corresponding to the 12-average, hence smaller than the 10-average. This, however, does not wholly explain the case: 10 year olds boys at the higher schools have an average height of 136.6 cm., which for the public school falls between 11 and 12 (nearer to 11). The index of the higher school for 10 (1.18) is yet still smaller than that of the public

Table 13 a.
The public school. Boys.

Average age	Number investigated	Medium index	Probable errors	Standard deviation	Coefficient of variability	Probable errors	Rounded off values
7, II years.....	617	1.323	± 0.003	0.102	7.70	± 0.15	1.323 (7 years)
8 "	1521	1.295	± 0.002	0.107	8.28	± 0.11	1.294
9 "	1537	1.263	± 0.002	0.104	8.24	± 0.10	1.263
10 "	1655	1.231	± 0.002	0.097	7.87	± 0.09	1.233
11 "	1783	1.217	± 0.002	0.106	8.73	± 0.10	1.216
12 "	1614	1.201	± 0.002	0.100	8.36	± 0.10	1.203
13 "	1399	1.190	± 0.002	0.098	8.25	± 0.11	1.189
14 "	1264	1.177	± 0.002	0.103	8.79	± 0.12	1.177

Table 13 b.
The public school. Girls.

7, III years.....	567	1.309	± 0.003	0.103	7.88	± 0.16	1.309 (7 years)
8 "	1467	1.286	± 0.002	0.111	8.63	± 0.11	1.284
9 "	1560	1.249	± 0.002	0.113	9.01	± 0.11	1.251
10 "	1700	1.228	± 0.002	0.110	9.00	± 0.10	1.230
11 "	1727	1.214	± 0.002	0.115	9.47	± 0.11	1.214
12 "	1717	1.201	± 0.002	0.122	10.17	± 0.12	1.203
13 "	1412	1.204	± 0.002	0.124	10.26	± 0.13	1.206
14 "	1437	1.218	± 0.002	0.134	10.97	± 0.14	1.218

²⁶ Pfaundler has found the same.

Table 13 c.
The higher school. Boys.

Average age	Number investigated	Medium index	Probable errors	Standard deviation	Coefficient of variability	Probable errors	Rounded off values
9 years	44	1.188	± 0.008	0.078	6.566	± 0.472	1.188
10 »	100	1.186	± 0.006	0.084	7.055	± 0.336	1.186
11 »	99	1.185	± 0.007	0.101	8.484	± 0.407	1.182
12 »	182	1.174	± 0.005	0.098	8.343	± 0.295	1.179
13 »	393	1.177	± 0.003	0.104	8.839	± 0.213	1.174
14 »	445	1.161	± 0.003	0.101	8.707	± 0.197	1.164
15 »	475	1.159	± 0.003	0.106	9.118	± 0.200	1.159
16 »	443	1.158	± 0.003	0.100	8.657	± 0.196	1.161
17 »	254	1.178	± 0.004	0.096	8.187	± 0.315	1.174
18 »	142	1.181	± 0.005	0.107	9.047	± 0.362	1.185
19 »	71	1.196	± 0.007	0.090	7.511	± 0.425	1.200
20 »	36	1.222	± 0.011	0.101	8.303	± 0.660	1.222

Table 13 d.
The higher school. Girls.

9 years	39	1.235	± 0.011	0.105	8.517	± 0.650	1.235
10 »	63	1.237	± 0.016	0.136	11.011	± 0.670	1.227
11 »	56	1.208	± 0.008	0.087	7.236	± 0.451	1.214
12 »	100	1.197	± 0.009	0.135	11.278	± 0.545	1.196
13 »	342	1.183	± 0.005	0.125	10.524	± 0.274	1.188
14 »	334	1.205	± 0.005	0.129	10.721	± 0.283	1.203
15 »	382	1.222	± 0.005	0.146	11.932	± 0.291	1.227
16 »	337	1.254	± 0.005	0.141	11.270	± 0.297	1.255
17 »	215	1.288	± 0.005	0.110	8.534	± 0.271	1.283
18 »	46	1.257	± 0.018	0.173	13.738	± 0.984	1.257

school at 12 (1.20). This shows, at any rate, that the low index at the higher school is not simply referable to the more advanced development of height, in any way not entirely to this. But we cannot get away from, that the mentioned momentum must play a certain part, in as much there exists a physiological decrease of the weight-height proportion, as the growth in height takes place, and practically goes on until the strongest growth in height is succeeded by a relatively slower. (This takes place for girls after 12, for boys after 16.) If the smaller weight-height proportion of the socially better situated children only was dependent on the mentioned quicker growth, then we should expect that at a certain age, reverse from earlier years, would occur just the opposite proportion between the two kinds of schools, — that the higher school would show larger index (beginning at a certain time after 12—13 with the girls, and abt. 15 with the boys). From these ages a normal increase of index takes place, wherefore a quicker development now would stipulate higher values. We are unfortunately unable to make such comparison. Without

being able to present any positive proof, we should yet keep that possibility in mind, that the "race" or the "race-crossing", respective the generic heritage of *the higher school material* concedes more slimness or slenderness. The author anyway wishes, that these two momenta — *the quicker growth by itself and an eventually inherited slenderness* — should be mentioned, and that another explanation uttered by P f a u n d l e r, should not be admitted as a wholly plausible explanation and thereby stiffen into a dogma. Pfaundler emphasizes the smaller weight-height proportion at the higher school as a defect or doubtful advantage, speaks about a possible onesided accelerated height-weight eventually on account of a too strong diet of albumen. This explanation — which is of course only a possibility for an explanation — does not satisfy the author of the present work. Firstly, the difference in index between the two kinds of schools is worth considering only for a certain time and only for boys; *a vigorous leveling takes place toward 14 years. Secondly, subjective judgment and experience do not tell in favour of any unhealthy propulsion at the higher school. When we compare the corresponding year classes from the higher school and from the public school, there can be no doubt whatever, where we find the most signs of health and the hale and hearty development, and where we find the unhealthy hampering.*

Variability in the weight-height proportion.

Distribution series are presented on table 14, corresponding curves on fig. 16 a and b. Although it is very conspicuous that a couple of the curves, those for 10 and 12 years boys, approach very near to the ideal binomial curve, it is yet, after a complete survey — and especially for the girls — plain that *the variability-breadth toward the plus-side is larger than toward the minus-side* (what we also found for the absolute weight).

We shall at once proceed to the numeric expression for the variability — the standard deviation and coefficient of variability (table 13 and the curve fig. 17). Just as for the absolute weight, *the girls vary more than the boys in all years until 14 in the case of the public school.* The results are not presented for the higher school, as a test which has been made seems to suggest that the material is not large enough. The computation itself of the index seems to convey the necessity for a very large material in order to attain a so far obvious evenness in the course of the year curve, that we may feel safe.

In regard to the average coefficient of variability for index in the age 7 to 14 years, it is for boys 8.28, for girls 9.42, — thus forming, as might be expected, a medium between the numbers on page 26 for the absolute height and the absolute weight.

Table 14 a.
Weight-height proportion. Boys The public school.

Index	7 years		9 years		13 years		Index	8 years	
	Number	00	Number	00	Number	00		Number	00
0.80—0.86	-	-	-	-	1	0.07	0.89—0.95	1	0.07
0.87—0.93	-	-	-	-	2	0.14	0.96—1.02	6	0.39
0.94—1.00	-	-	7	0.46	24	1.72	1.03—1.09	24	1.58
1.01—1.07	5	0.81	42	2.73	116	8.29	1.10—1.16	127	8.35
1.08—1.14	21	3.40	114	7.42	326	23.30	1.17—1.23	287	18.87
1.15—1.21	54	8.75	357	23.23	402	28.74	1.24—1.30	428	28.14
1.22—1.28	144	23.34	420	27.33	315	22.52	1.31—1.37	310	20.38
1.29—1.35	179	29.01	353	22.97	144	10.29	1.38—1.44	209	13.74
1.36—1.42	125	20.26	152	9.89	46	3.29	1.45—1.51	89	5.85
1.43—1.49	59	9.56	54	3.51	14	1.00	1.52—1.58	23	1.51
1.50—1.56	23	3.73	24	1.56	6	0.43	1.59—1.65	14	0.92
1.57—1.63	4	0.65	8	0.52	3	0.21	1.66—1.72	2	0.13
1.64—1.70	1	0.16	5	0.33	-	-	1.73—1.79	1	0.07
1.71—1.77	2	0.32	1	0.07	-	-			
	617		1537		1399			1521	

Boys. The public school. Continuation.

Index	10 years		Index	11 years		Index	12 years		Index	14 years	
	Number	00		Number	00		Number	00		Number	00
0.85—0.91	2	0.12	0.90—0.96	7	0.39	0.81—0.87	3	0.19	0.79—0.85	1	0.08
0.92—0.98	5	0.30	0.97—1.03	40	2.24	0.88—0.94	2	0.12	0.86—0.92	5	0.40
0.99—1.05	39	2.36	1.04—1.10	178	9.98	0.95—1.01	28	1.73	0.93—0.99	26	2.06
1.06—1.12	183	11.06	1.11—1.17	440	24.68	1.02—1.08	159	9.85	1.00—1.06	116	9.18
1.13—1.19	376	22.72	1.18—1.24	479	26.87	1.09—1.15	344	21.31	1.07—1.13	306	24.21
1.20—1.26	482	29.12	1.25—1.31	348	19.52	1.16—1.22	471	29.18	1.14—1.20	335	26.50
1.27—1.33	348	21.03	1.32—1.38	187	10.49	1.23—1.29	348	21.56	1.21—1.27	273	21.60
1.34—1.40	153	9.25	1.39—1.45	57	3.20	1.30—1.36	167	10.35	1.28—1.34	133	10.52
1.41—1.47	50	3.02	1.46—1.52	33	1.85	1.37—1.43	58	3.59	1.35—1.41	48	3.80
1.48—1.54	14	0.85	1.53—1.59	6	0.34	1.44—1.50	25	1.56	1.42—1.48	14	1.11
1.55—1.61	2	0.12	1.60—1.66	4	0.22	1.51—1.57	9	0.56	1.49—1.55	4	0.32
1.62—1.68	1	0.06	1.67—1.73	2	0.11				1.56—1.62	-	-
			1.74—1.80	1	0.06				1.63—1.69	3	0.24
			1.81—1.87	1	0.06						
	1655			1783			1614			1264	

In closing this chapter on the weight-height proportion, we again emphasize, that our numeric values concern whole year-groups. We do not, f. inst., even touch upon the very important phenomenon, that the tall individuals of a year class averagely ("normally") have a lower weight-height proportion than the small ones in the class. The chapter is of great importance both anthropometrically and practical-hygienically, and we are at present making special studies concerning this under my administration ("Nordisk hygienisk tidsskrift" 1923, nr. 1).

Table 14 b.
Weight-height proportion. Girls. The public school.

Index	7 years		9 years		12 years		13 years	
	Number	%	Number	%	Number	%	Number	%
0.85—0.91	-	-	-	-	4	0.23	1	0.07
0.92—0.98	-	-	4	0.26	27	1.57	23	1.63
0.99—1.05	3	0.53	32	2.05	111	6.46	105	7.44
1.06—1.12	14	2.47	141	9.04	331	19.28	236	16.71
1.13—1.19	64	11.29	319	20.45	431	25.10	355	25.14
1.20—1.26	111	19.58	435	27.89	363	21.14	299	21.18
1.27—1.33	157	27.69	335	21.47	243	14.15	220	15.58
1.34—1.40	117	20.64	170	10.90	111	6.46	85	6.02
1.41—1.47	62	10.93	69	4.42	50	2.91	45	3.19
1.48—1.54	32	5.64	29	1.86	25	1.46	26	1.84
1.55—1.61	6	1.06	14	0.90	10	0.58	8	0.57
1.62—1.68	1	0.18	5	0.32	2	0.12	5	0.35
1.69—1.75	-	-	3	0.19	6	0.35	2	0.14
1.76—1.82	-	-	3	0.19	2	0.12	2	0.14
1.83—1.89	-	-	1	0.06	1	0.06	-	-
	567		1560		1717		1412	

Girls. The public school. Continuation.

Index	10 years		11 years		14 years		Index	8 years	
	Number	%	Number	%	Number	%		Number	%
0.81—0.87	-	-	-	-	1	0.07	0.94—1.00	3	0.20
0.88—0.94	-	-	3	0.17	13	0.90	1.01—1.07	19	1.30
0.95—1.01	16	0.94	30	1.74	46	3.20	1.08—1.14	109	7.43
1.02—1.08	133	7.82	164	9.50	147	10.23	1.15—1.21	242	16.50
1.09—1.15	295	17.35	360	20.84	265	18.44	1.22—1.28	413	28.15
1.16—1.22	442	26.00	444	25.71	340	23.66	1.29—1.35	330	22.49
1.23—1.29	412	24.24	378	21.89	275	19.14	1.36—1.42	207	14.11
1.30—1.36	229	13.47	182	10.54	175	12.18	1.43—1.49	87	5.93
1.37—1.43	102	6.00	95	5.50	83	5.78	1.50—1.56	30	2.05
1.44—1.50	48	2.82	35	2.03	42	2.92	1.57—1.63	19	1.30
1.51—1.57	12	0.71	25	1.45	26	1.81	1.64—1.70	4	0.27
1.58—1.64	6	0.35	7	0.40	13	0.90	1.71—1.77	3	0.20
1.65—1.71	3	0.18	2	0.12	8	0.56	1.78—1.84	1	0.07
1.72—1.78	-	-	1	0.06	3	0.21			
1.79—1.85	-	-	1	0.06	-	-			
1.86—1.92	2	0.12	-	-	-	-			
	1700		1727		1437			1467	

IV. Periods of development and puberty.

We have referred to *the obvious inclines in energy of development, which could be verified for the girls averagely after 11 years, for boys after 13 years, in regard to height and weight.* These inclines, which at this time or about this time are found in all research works of school

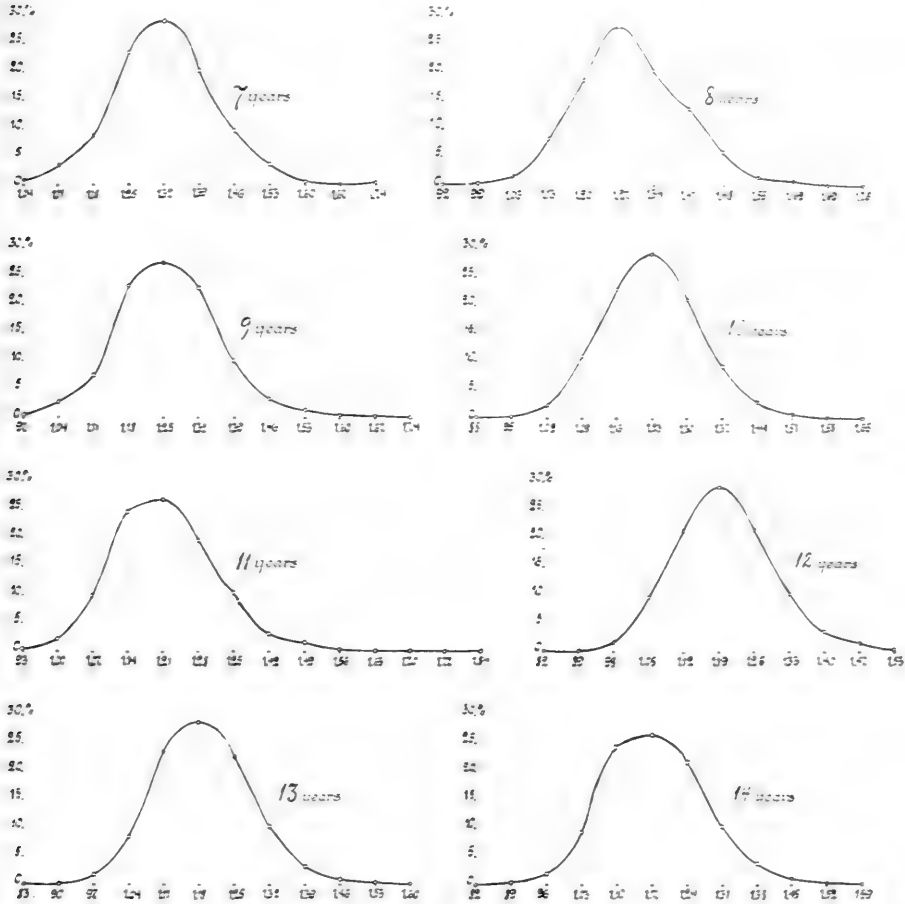


Fig. 16 a (see page 44).

children, have been attributed to *the puberty that now approaches, a couple of years earlier for the girls than for the boys.* There is no doubt whatever, but that this is correct. We can further refer to a statistical research by Alette Schreiner and the author of the ages 12—17 in two higher schools in Christiania. The research refers to height, weight and development of puberty.

In order to avoid every confusion on the terminology — such do exist in literature — we beg to observe what follows: “*Puberty*” should

be used about maturity itself, — the *first menstruation* of the girls and the *first sperm secretion* of the boys. *A certain definite time which goes before, and when for one thing the development of secondary characteristics of sex can be verified, may be called "pre-puberty", as it both scientifically and practically deserves to be regarded as a distinct period. Immediately before the beginning development of secondary characteristics of sex the mentioned vigorous development of weight and height com-*

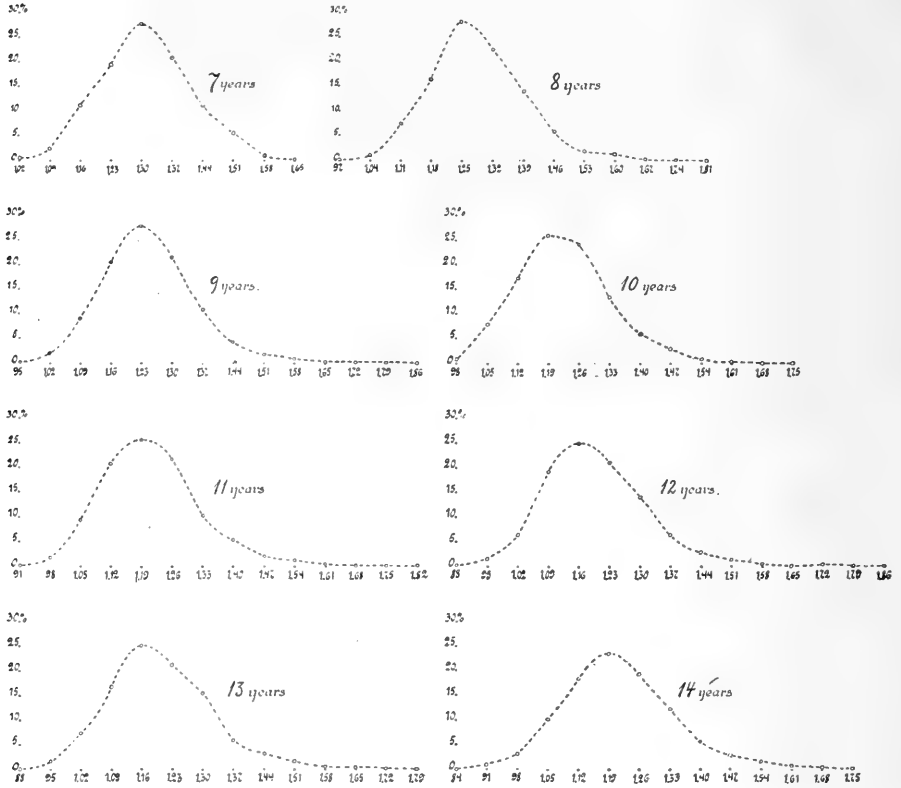


Fig. 16 b. (see page 44).

mences, which consistently ought to be counted in under the "pre-puberty" period, as it separates itself as something new from the earlier child-age proper and without any doubt is connected with the development of the genitals.

It would now be of interest objectively to be able to demonstrate the average sum total of development during childhood, pre-puberty, and puberty. I specially emphasize the word "objectively", as we have a popular scientific demonstration in S t r a t z's handsomely illustrated work (last edition 1921). Yet not alone has here been sacrificed too much on the altar of popularity, but the selection of photographs is in the highest degree subjective, and the schedule of division with alternating "Perioden

der Streckung" and "Perioden der Fülle" (originally copied after Bartels) must be stamped as absolutely erraneous. Concerning this I refer to a more detailed account about the years 2—6, published before: there is in childhood no undulating line in the medium development, on the contrary there is an unbroken decline in the weight-height proportion — an unbroken "Streckung", any way after the age of two²⁷. After the close of the child-age proper, in the pre-puberty period, *the proportion turns about*, what we in the present work already have demonstrated. Photographs of medium types — after objectiv number-selection — also prove, what here has been referred to for the ages 2—6 years. We shall now report on the succeeding age 7 to 14 years. Figs. 18 a and b.

The method of selection must first be demonstrated, it depends wholly and entirely upon this, whether the photographs can get any scientific value (and not only become an entertaining illustrated contribution to a strongly subjective interpretation). We proceeded in the following way: The cards of all the examined school children were gone through. Those cards were selected, which showed a conformity to the average number of the age within the following narrow boundaries: Bodily height from 2 cm. below²⁸ until 1 cm. above the average; weight from 1 kg. below till 1 kg. above and — what there for the sum total of the impression is still more important — weight-height index with a permissible deviation of at most 0.03 upward or downward. Thus have been secured very representative average types from the numbers alone. All in all a little over 400 report cards were selected, age 7 to 14 (by "7" is meant 6½ to 7½, &c.). In order not to include any visibly pathological, respective abnormal children with accidental medium numeric quantity, all were inspected, wholly undressed, and some excluded. All in all 299 children were photographed, averagely 21 per year class of boys and 17 of girls. The photographs were taken by

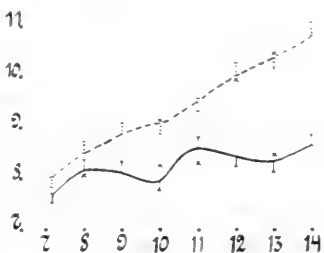


Fig. 17 (see page 44).

²⁷ I express myself here only concerning those ages, where I have undertaken personal examinations. We do not speak here about oscillations dependent upon seasons of the year and change of surroundings (vacations). Concerning this can be referred to another work ("The influence of seasons and vacations on the bodily development of school children" by N. C. Hertzberg and Carl Schiötz. Medicinsk Revue, January 1922).

²⁸ The combined examinations — measuring and weighing — were undertaken in March 1921, the same as in 1920, which are presented here. The photographs were taken in April and May 1921, especially the last month. A slightly greater "under-measure" (2 cm.) was therefore calculated, as the spring months are comparatively vigorous months for the growth of height.

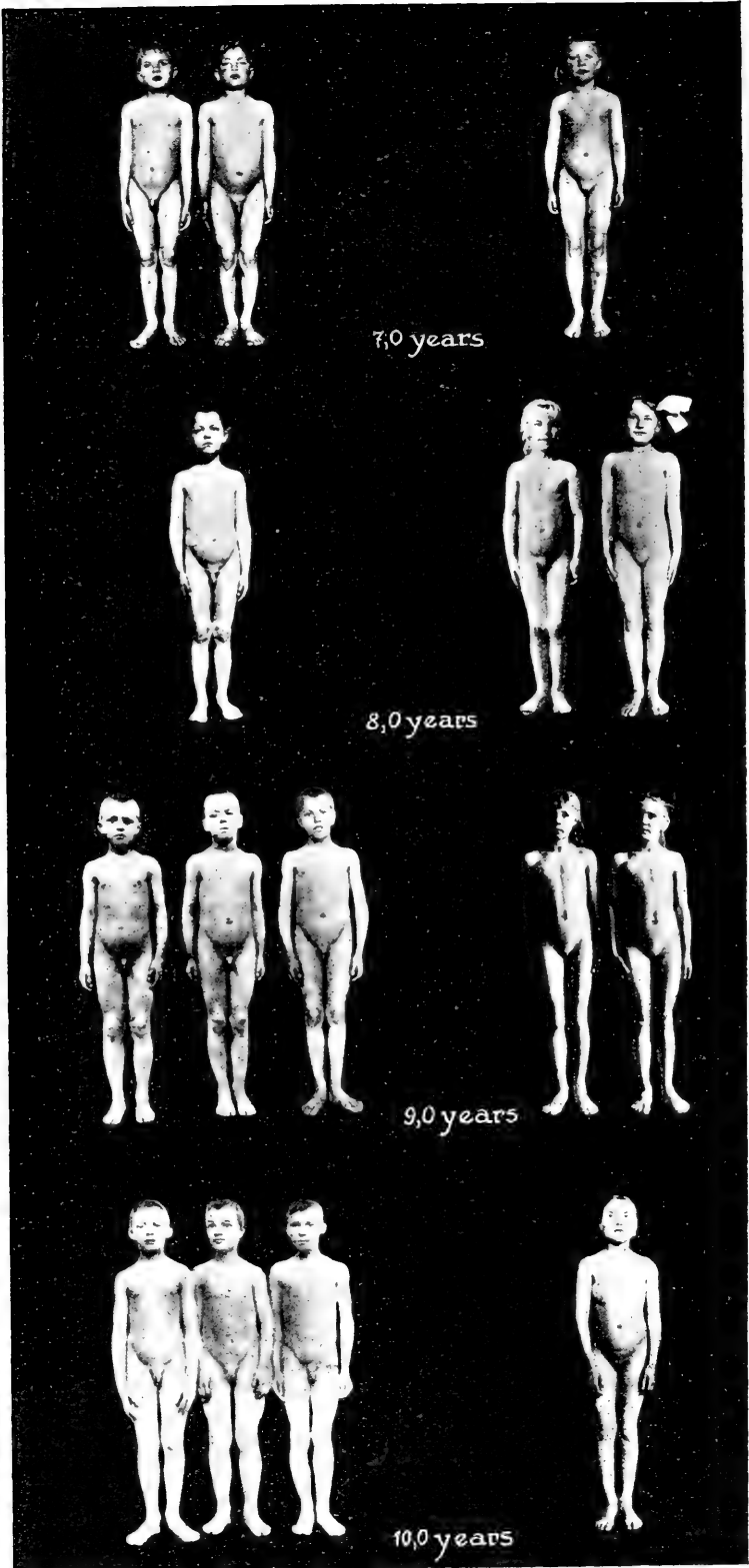
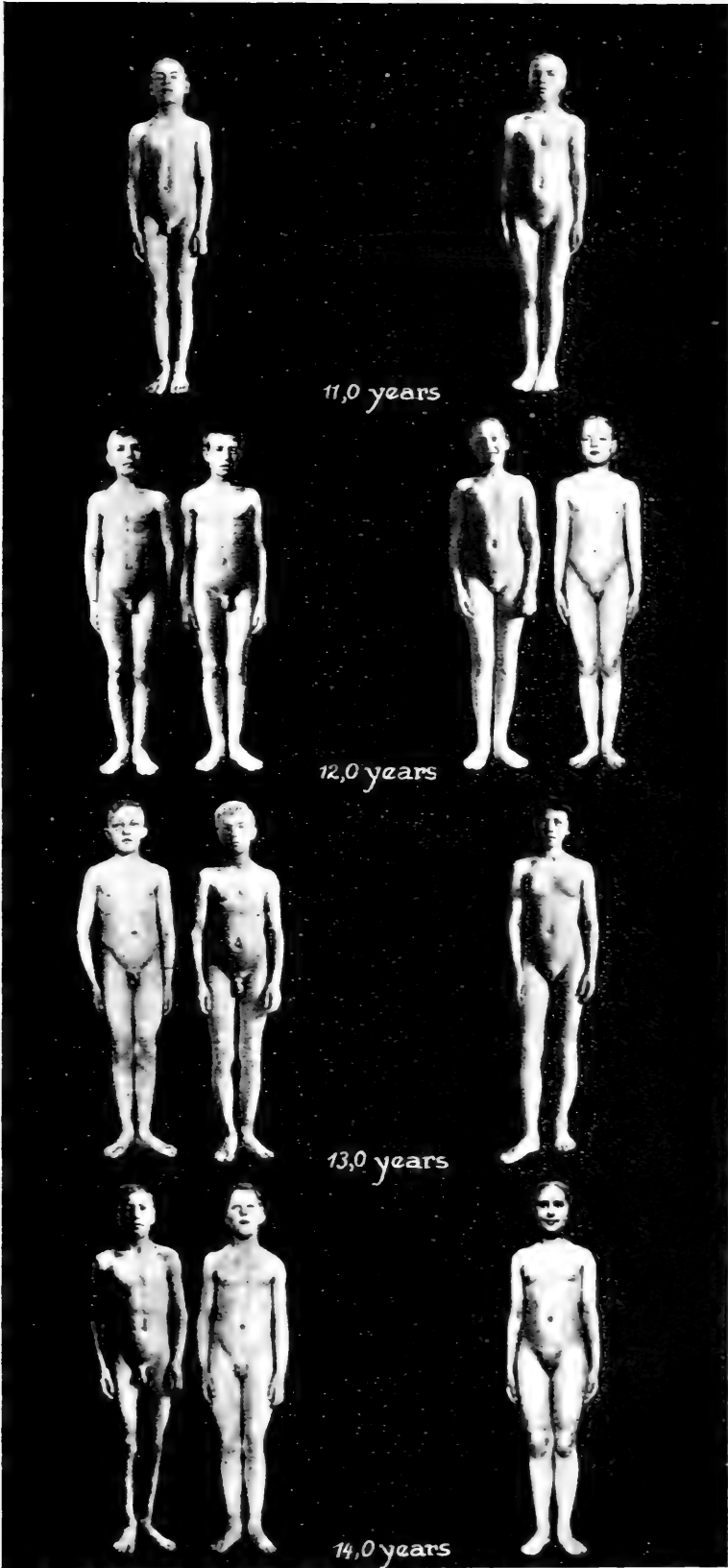


Fig. 18 a.



11,0 years

12,0 years

13,0 years

14,0 years

Fig. 10 b.

assistant physician, dr. H a n n a B e r g h o f f. It should be remembered that it had to be done in the schools, partly under unfavourable light conditions²⁹. Any entirely faultless, esthetic, respective artistic photographic achievement can therefore not be rendered. But on the other side, the objectivity is larger than any hitherto presented series of investigations of this kind; this can safely be stated. Only 24 of the photographs are here reproduced, partly on account of several poor results and partly on account of the superfluousness of presenting many types of similar development. Especially for the pre-puberty age of girls it will be noticed, that they are good types averagely in regard to secondary sex marks; even if the majority of the medium types are very close to each other in this respect, some are, of course, out of harmony either by an especially early or an especially slow development.

When we now look at these middle types (figs. 18 a and b), we would almost have to do violence to our own observation, if we should insist, that any oscillation of "Streckung" or "Fülle" was strikingly noticeable. Not even when we know the schedule and thereby could have all desirable auto-suggestion, can we see it. (With boys the "second Fülle" should begin at 8 years and come to an end at 12 years, after which the "second stretching"; with the girls the "second Fülle" should also begin at 8, but for this sex be concluded already at 10, after which "second stretching", which should last till 14, whereafter the "third plumpness" is due.) What is it, however, we can say with certainty that we see? Well, undoubtedly that there between the 7 years and the 14 years old boy is a difference in plumpness and proportions. The last one is more slender, has a relatively smaller head and longer under-extremities. The difference sets in gradually through the years. If one has not been influenced suggestively by the B a r t e l s - S t r a t z schedule³⁰ — it is presented with apparent trustworthiness and repeated with dogmatic authority in several textbooks, as M a r t i n's and B r o m a n n's — then we have verily not any "experience" either, that the general development runs in this wave motion. We should therefore take care to get this notion done away with as soon as possible, the whole is a construction without foundation. Several waves up and down in "Fülle" could impossibly give curves for weight-height index as corresponding to fig. 14 for our large material. Even if "Fülle" and weight-height proportions, specially for the single individual, are not conceptions which necessarily cover each other, the mentioned conceptions will in the mass material without doubt show a high degree of parallelism.

²⁹ The medical department of schools now take up so much of the time of the schools, that any extra charge on its time must be avoided.

³⁰ The author has not escaped this suggestion himself, before his own investigations had advanced very much.

As to the girls, the index curves show decline until 12, then incline. Now, one should naturally not permit oneself to be influenced suggestively by the index curves and insist upon seeing a precise division at 12. The numeric differences around these years are, in the first place, too small, and, in the second, there must with photographs be room for a small margin (cf. page 49). From the photographs we see more of a plumpness in the 14 years old girl than in boys of the same age. The sight-impression of the complete series 7—14 does not deny the numeric result of the mass-material. We can safely enough take it for granted, that the Bartels-Stratz schedules are subjective structures, not objective natural science.

Series-photographing is furthermore of importance for the question of the periods of the average puberty development. First the boys: *Averagely*³¹ *the year classes are entirely "infantile" to and including 13. At 14 we perceive with the great majority the first proper signs of puberty, a distinct enlargement of the testes.* Of 14 photographed middle types of this age (only 2 are reproduced here, cf. page 49) enlargement of testes was found distinctly in 9, while in 18 photographed 13 year olds the same phenomenon is found in 8 or 9 (2 are reproduced here). It is now of considerable interest, of course, that the strong development in height and absolute weight sets in just at this period, after year 13, or in the 14th year.

A parallel phenomenon for the *girls* — an enlargement of the ovaries — cannot be proved in vivo. But when we investigate the year class where the girls shoot out both in height and weight, after 11, or *in the 12th year*, we can also for this sex prove, that just this period exhibits *the first visible signs of puberty, or the beginning special development of the breast glands.* In the great majority³² of the 12 years old girls "areolamamma" could be proved — papilla and areola together forming a small eminence. *The great majority of the 11 years old girls (17) are absolutely "infantile".*

It is evident that the statistical value of a number as above mentioned would be very insignificant, if the children had been taken out indiscriminately. The value, however, increases very strongly by the exceedingly small numeric deviations from the middle norms.

From this simultaneousness between the first appearance of the visible signs of development into an individual able to propagate and the beginning vigorous growth in weight, it may be concluded, that it is right to reckon the "pre-puberty" period from and including the time, when this vigorous growth sets in.

³¹ *All the photographed children are here included.*

³² To mention the number concisely cannot be done, as not all the photographs permit a sufficiently definite determination of this commencing transition.

Literature.

Here is only mentioned some collective works and summaries with copious references to literature, together with those in this work directly quoted authors.

Collective works. Summaries.

1. Affleck, G. B.: A minimum set of tentative physical standards for children of school age. The Pedagogical Seminary. Vol. XXVII, No. 4, 1920.
2. Broman: Normale und abnorme Entwicklung des Menschen. Wiesbaden 1911.
3. Demoor: La taille et le poids des élèves des écoles communales de Bruxelles pendant la guerre. Bulletin de l'academie royale de medicine de Belgique 1919. IVe Serie, Tome XXIX, Nr. 1.
4. Martin: Lehrbuch der Anthropologie. Jena 1914.
5. Nobecourt & Schreiber: Hygiène sociale de l'enfance. Masson et cie. Paris 1921.
6. *Nutrition Bibliography*. New York Nutrition Council. 1921.

Quotations.

7. Hansen, H. J.: Skolebørns Vækstforhold i København og nogle danske Provinsbyer. Særtryk af Meddelelser fra Den Anthropologiske Komite. København 1920.
8. Jahn, G.: Statistikens teknik og metode. Kristiania 1920.
9. Johannsen, W.: Elemente der exakten Erblichkeitsforschung. 1913.
10. Pfandler: Körpermaßstudien an Kindern. Zeitschrift für Kinderheilkunde, XIV, Heft 1 und 2, 1916.
11. Schiøtz, C.: En undersøkelse av 10 000 norske skolebarn. Medicinsk Revue, novbr.-decbr. 1917.
12. Schiøtz, C.: Aldrene 12 til 17 aar. Medicinsk Revue, april 1919.
13. Schiøtz, C.: Utviklingsforhold hos barn i 2 til 6 aars alder. Norsk Mag. for Lægevidenskaben. Kristiania 1920.
14. *Statistisk maanedsskrift*. Stavanger kommunes statistiske kontor. December 1918.
15. Stratze, C. H.: Der Körper des Kindes und seine Pflege. Stuttgart 1921.
16. Zimmermann, H.: Rechentafel. Berlin 1913.

Received after the conclusion of the work.

17. Bryn, H.: En anthropologisk undersøkelse av mænd, kvinder og barn i to norske indlandsbygder. Kristiania. Dybwad, 1921.
18. Baldwin: The physical growth of children from birth to maturity. Iowa 1921.



Printed, October 31st, 1623

DE FORHISTORISKE BRONSERS
SAMMENSETNING OG OPRINDELSE
OG DERES RELATIVE ALDER SOM BRUKSMETAL
SAMMENLIGNET MED JERNET

AV
JOHN SEBELIEN

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 5)



KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD
1923

Fremlagt i fællesmødet den 16. februar 1923.

Kobberet er som bekjendt et metal som har været kjendt siden de ældste tider. Det er jo en bestanddel av bronzen, og bronse har jo været benyttet av menneskene paa en tid da de endnu ikke kjendte jernet. Saaledes uttalte jeg mig antagelig i overensstemmelse med de fleste andre lærere i kemi allerede for en noksaa lang aarrække siden i en almindelig kursusforelæsning over kobberets kemi. Men neppe hadde jeg sagt ordene, førend det slog mig at dette jo maatte være galt, og jeg trodde at jeg var utsat for en feilerindring. Jeg fandt imidlertid at jeg aldeles ikke husket feil, — det stod virkelig skrevet i bøgerne at bronsealderen fulgte like efter stenalderen og var ældre end jernalderen. Jeg begynde imidlertid at tænke over saken, og fandt forholdet meget uforstaaelig og uforklarlig. Utvindingen av jernet av sine almindelig forekommende malme er jo en prosess som med lethed foretages av de mest primitive folkeslag, mens utvindingen av kobber, som enhver kemistuderende vet, er et problem av en overordentlig komplisert natur, hvis løsning kræver en noksaa langt fremskredet kultur. Desuten kræver jo fremstillingen av bronse tilstedeværelse av tin, som ganske visst forefindes omtrent færdig og frit i naturen, eller ialfald meget let kan utvindes av sine malme, men dels forekommer tinnets kun høist undtagelsesvis paa de lokaliteter hvor man finder kobbermalme, dels er tinnets indflydelse paa bronsens egenskaper meget avhengig av det indbyrdes mængdeforhold mellem disse to bestanddele, og fremstillingen av en bronse med de til et bestemt formaal ønskværdige egenskaper er atter et noksaa indviklet problem, som kræver adskillig teknisk viden. Og det er ikke let at forstaa, hvorledes man kunde greie en slik opgave paa et tidspunkt da menneskeheten ikke hadde andre raastoffer til sine redskaper end sten og ben.

Endvidere erindre man at jernet utreduseres av sine oksydiske malme allerede ved en temperatur av ca. 600 gr. C, mens kobberet, som jo væsentlig forekommer i de vanskelig haandterbare svovlede malme, for at kunne omdannes til bronse kræver en ophetning til sit smeltepunkt, som ligger over 1100 gr. C, en temperatur som det ingenlunde er let at opnaa.

Ved at søke oplysning i den faglige literatur fandt jeg da ogsaa snart, at den tvil som var opstaat hos mig, ingenlunde var noget isolert fænomen, men at der blandt metallurgiens autoriteter med stor styrke blev hævdet jernets ældre prioritet. Jeg nævner saaledes bare den tyske specialist i jernets historie J. BECK¹, skotten JOHN VINCENT DAY² og de to engelske forskere JOHN PERCY³ og den nylig avdøde Sir WILLIAM GOWLAND⁴, begge professorer ved *The Royal School of Mines*. Den sidstnævnte uttaler i 1912 i et foredrag i *The Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, at »reduktionen av jernmalm foregaar saa let at det maa synes høist forunderlig, om ikke jernet var det første metal som det lykkedes stenalderens folk at fremstille«. Han nævner endvidere, at naar man fra arkæologisk side undertiden henviser til den større vanskelighet det vilde være at fremstille et saa tungtsmeltelig metal som jern, saa beror dette paa en misforstaaelse. Der er nemlig ved den gamle jernutvinding aldeles ikke tale om at »utsmelte« jernet i flytende tilstand som rujern eller støpejern. Dette er nemlig en kunst som var ukjent indtil det 15. aarhundred efter Kr. Det antike jern var derimot altid smijern, og dette lar sig utredusere av sine malme ved en svak glødning med kul allerede ved 6—700 gr. C, en temperatur som let tilveiebringes uten store tekniske hjælpemidler; der trænges hverken belg eller blæseluft.

Man har ganske visst ogsaa henvist til at der jo forekommer færdig metallisk jern i naturen som *meteorjern*, og man har ment at menneskene har kunnet dække sit behov herav uten nogensomhelst kemisk-metallurgisk proces. Paastanden om at meteorjernet er saa skjørt at det ikke lar sig bearbeide uten at springe, kan unegtelig i undtagelsestilfælde ha sin rigtighet, men som regel er den dog gjendrevet derved, at der gjentagne gange i flere land er foretat vellykkede sminingsforsøk med meteorjern. Saaledes nævner BECK⁵, at blandt 70 jernmeteoriter var det kun 7 som var absolut usmibare. En anden og meget viktigere indvending mot meteorjernets betydning for jernforsyningen er dets overordentlige sjeldenhet. Vel omtaler ROSS i sin beskrivelse av Nord-Vest-passagens opdagelse i 1819 at eskimoerne fremstilte sine jernknive av meteorjern, men det er paavist av J. K. V. STEENSTRUP⁶, at det metalliske jern hvorav Grønlands eskimoer

¹ Geschichte des Eisens in technischer und kulturgeschichtlicher Beziehung, I Th., Braunschweig 1884, og Mitteilungen zur Geschichte d. Medizin u. d. Naturwissenschaften, VI, 1907, p. 362—377.

² Proceedings of the Philosophic. Soc. of Glasgow, Vol. VII, 1871, p. 476, Vol. VIII, 1872, p. 235, og 1873, p. 464—80.

³ Metallurgy. — Iron and Steel. London 1864.

⁴ The metals in antiquity. Journ. of the Royal Anthropol. Inst., 42, 1912, p. 276.

⁵ Geschichte des Eisens, I, s. 26.

⁶ Meddelelser fra Grønland, Kjøbenhavn 1883, og Mineralogical Magazine 1884, Nr. 27.

fremstilte sine primitive jernredskaper, var ikke meteorjern, men av tellurisk opprindelse. Og eskimoerne har neppe hat andet metal til sin raadighet end dette naturlig forekommende jern. Slikt forekommer imidlertid kun ytterst sjelden paa jordens overflate. For det meste av den øvrige verden antages det almindelig efter den av den danske arkæolog C. J. THOMSEN opstilte tredeling av den forhistoriske tid i stenalder, bronsealder og jernalder, at bronzen er det i den menneskelige kultur først indførte metal. Men selv blandt arkæologer har der hersket tvil, og gjennemlæser man litteraturen herom, saa finder man at der ogsaa her har været ført en lang og bitter strid for at hævde jernets prioritet. Det lar sig ikke negte at denne strid, navnlig hvor den førtes mellem tyske og danske forskere, paa begge sider i en beklagelig grad blev præget av national animositet og chauvinisme, og for en ikke-arkæolog er det ikke altid saa let at veie og bedømme grundene for og imot. Det var navnlig tyskerne LINDENSCHMITT og CH. HOSTMANN¹ og østerrikeren HERM. WANKEL² som opponerte mot den nævnte tredeling, og de støttedes heri av franske forskere som A. BERTRAND og SALOMON REINACH.

Blandt de argumenter som fremføres imot bronsens formentlig større ælde, er foruten de allerede nævnte metallurgiske grunde, navnlig den, at man ikke kan tænke sig den fine ornamentik paa de gamle bronsesaker utført uten ved gravering med hærdede staalredskaper. Hertil blev der imidlertid svart fra dansk side, at bronsealderens ornamentering overhodet ikke er frembragt ved gravering, men ved punsling med bronsepunsler, av hvilke man hadde fundet flere, og det bevidnedes av en av teknikere og haandverkere sammensat komité at et slikt arbeide meget vel lot sig utføre. En paa lignende maate sammensat tysk komité, hvoriblandt den bekjendte teknolog KARMASCH, kom til det motsatte resultat, og uttalte at selv om en almindelig bronse ganske visst kunde motta et indtryk ved slag av en bronsepunsel, saa har dette dog ikke mere betydning for saken, end at man med en stift av haardt træ kan gjøre et indtryk paa en plate av lindetræ uten at dette kan anvendes til xylografi. Fornyeede forsøk som er anstillet i Kjøbenhavn, tildels under medvirkning av den tyske arkæolog TISCHLER³, har dog vist, at det utvilsomt lar sig gjøre ved punsling at frembringe den ornamentik som der her er tale om, og desuten sees det direkte paa de gamle bronsekars bakside at ornamentene er frembragt ved punsling og ikke ved gravstikke.

¹ Archiv für Anthropologie, B. VIII—X, 1876—78.

² Mitteilungen der anthropolog. Gesellsch. in Wien, VII, 1879.

³ SOPH. MÜLLER, Vor Oldtid, Kbh 1897, pg. 259.

Naar man paa den ene side paaberoper sig at man ikke har fundet jernsaker saa gamle som de ældste bronser, saa henvises der fra den anden side med en viss ret til det metalliske jerns langt ringere holdbarhet og dets overordentlig lette angripelighet likeoverfor atmosfæriellene. Og naar det herimot indvendes at man da i det mindste maatte kunne finde det dannede jernoksyd i form av smaa rusthauge, da kan man fra den anden side vel ogsaa henviser til sandsynligheten av at likesom i naturen jernoksydet kan reduseres og føres længere ned i jordlagene, saa maa en lignende prosess ogsaa kunne tænkes at ha foregaaet med den jernrust der er dannet av de i jorden nedgravede gamle jerngjenstande. Noget andet er, at naar man faktisk finder at jerngjenstande fra den ældre stenalder har kunnet holde sig i jorden, saa synes det unegtelig noget merkelig at det ikke har kunnet holde sig endnu ca. 500 aar længere, — ti efter nordiske arkæologers mening finder man ikke her i Norden noget jern som kan dateres saa langt tilbake som til ca. 1000 aar før Kr.

Og naar f. eks. HOSTMANN nævner, at der kan anføres mange eksempler paa jernsaker som er fundet sammen med de ældste bronsefund, og endogsaa INGV. UNDSSET¹ uttaler at »saavel i Tysklands stenaldergrave som i Norden finder man eksempler paa jern i stenaldergrave«, saa tilføier den sidstnævnte forsker selv at »som oftest kan det vises, at dette jern er kommet dit senere«. Men den usikkerhet som han synes at ha næret ved at tilføie, at »der dog ogsaa er eksempler, hvor dette ikke er tilfældet«, kan ikke med rette tages til indtægt av HOSTMANN, idet han (U.) fortsætter: »men i disse sidste tilfælde er gjenstanden enten ubestemmelige jernstykker eller fundene er gjort for saa længe siden, at de ikke mere er fuldstændig bevaret«. Det sees av litteraturen, at HOSTMANNs tvil² gjentagne gange er blit tat noksaa sterkt i skole av de toneangivende arkæologer ikke bare i Norden, men ogsaa blandt sine egne landsmænd, især av VIRCHOW³, O. OLSHAUSEN, HÖRNER⁴ og MUCH⁵. I 1893 paatar OLSHAUSEN⁶, som hører til den nordiske trilogis ivrigste forsvarere, sig en større revy av alle HOSTMANNs oppositionelle momenter »for endelig engang at faa tat grundig livet av disse efter hans formening høist fordærlige tvil«, og han paa-viser da ogsaa ikke uten overbevisende kraft punkt for punkt at alle HOSTMANNs argumenter er feilagtige, og at der i den nordiske bronsealders

¹ Das erste Auftreten des Eisens in Nord-Europa. Hamburg 1882, p. 352.

² Samlet i »Studien z. vorgeschichtlichen Archäologie«. Braunschweig 1890.

³ Verhandl. d. Berliner Gesellsch. f. Anthrop. 1876, 175, og Corresp.blatt für deutsch. anthropol. Gesellsch. 1884, 72.

⁴ Globus, 59. p. 19 og p. 320.

⁵ Die Kupferzeit in Europa. 2. Aufl. Jena 1893, p. 352.

⁶ Verhandl. d. Berliner Ges. f. Anthropologie etc. 1893, p. [87—121].

fund ikke kan paavises et eneste tilfælde, hvor en funden jerngjenstand med sikkerhet kan vises at være ældre end de bronsesaker som den findes sammen med, end si at der har været paavist jern i stenalderfund.

Siden den tid synes det som der i de nordiske arkæologers egen leir har hersket nogenlunde ro paa dette punkt; det betragtes nu av alle vore arkæologiske autoriteter som værende utenfor al debat at intet jern har været kjendt og benyttet førend bronsealderens indtræden. Absolut utryddet er disse tvil dog ikke, — dertil synes de at utgjøre et altfor mangehodet væsen, og navnlig synes der blandt os kemikere at være en gunstig jordbund for deres trivsel. Foruten til W. GOWLANDS citerte uttalelser i 1912 i det engelske antropologiske selskap, kan vi henvise til en noksaa omfattende debat som i 1907 fandt sted i *Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte* i Berlin, hvor ikke bare BECK og andre metallurger fremdeles med usvækket styrke hævdet jernets større ælde, men ogsaa FELIX v. LUSCHAU¹, som er direktør for *Museum für Völkerkunde* i Berlin, uttaler at »de gamle ægyptere utvilsomt kjendte jernet længe før midten av det 2. aartusen før Kristi fødsel«. Han mener at den omstændighet, at paa de ægyptiske mindesmerker jernet alltid optræder i hænderne paa negre, som bærer det med blaa farve betegnede jern frem som tribut til Farao, tyder paa at jernet er kommet til Ægypten fra det tropiske indre Afrika, hvor jernmalm findes overalt, og hvor denne teknik utvilsomt har været drevet i mange aartusener før vor tidsregnings begyndelse. Det ser overhodet ut som om der i Afrika utenfor Ægypten ikke kan spores nogen bronsealder², men at de sentralafrikanske folk har benyttet og fremstillet jern som det av dem først kjendte metal. Naar M. GSELL uttaler som sin formening³, at det er negrene som har lært jernindvindingen i Ægypten, saa tror jeg derimot nok at han staar temmelig ene med denne opfatning.

Det nævnte hindrer imidlertid ikke at jernet kan være fremstillet paa andre steder av jordkloden end i Afrika og uavhengig av denne verdensdel. For den gamle verdens vedkommende har man navnlig pekt paa *Kina*, hvis folk jo tidlig har udmerket sig ved en paafaldende opfinderevne paa det teknologiske omraade (kfr. porselæn, destillation av sink). Ifølge BROUGH⁴ skal jern ha været i almindeilig bruk i *Kina* allerede 2357 f. Kr. — Likeledes henvises til *Indien*, hvor f. eks. den gaadefulde *Kutubsoile* i *Delli* synes at tyde paa, at jernsmiekunsten fra gammel tid har spillet en lignende rolle som stenindustrien spillet hos de gamle ægyptere.

¹ Eisengewinnung in vorgeschichtlicher Zeit: Zeitschr. f. Ethnologie, 41. Bd., 1909. p. 104.

² Jfr. ogsaa DE MORGAN: Recherches sur les origines de l'Égypte. Paris 1896, chapt. VII.

³ Eisen, Kupfer und Bronze bei den alten Ägyptern. Diss. Karlsruhe 1910.

⁴ Sitert av W. GOWLAND, l. c. 1912.

Men navnlig er det dog egnene omkring *Sortehavet* som ansees for et av de viktigste sentrer for jernutvinningen av betydning for den gamle verdens kulturfolk. De her boende *kalyber* ansaaes i oldtiden for at være dem som først hadde opfunnet fremstillingen av jern. I hvert fald var deres produktion meget omfangsrik, og den omtales baade av XENOFON og av STRABO. Deres produkter gik over *Sinope* (i *Paflagonien*) og *Amisos* (i *Pontus*), som begge ligger ved Sortehavet, over hele datidens verden. Der fandtes dog ogsaa jern i *Kaukasus*, hvor det indvandt av *kotkerne*, og i *Kappadokien*, i *Andeira* i *Troas* og paa *Kypem* og *Rodos*. *Telkinerne*, som hadde hjemme det sidstnævnte sted, nævnes ogsaa som jernets opfindere.

Om man i anledning av det gamle testamentes omtale av *Tubal-Kain* vil la sig forlede til at anta nogen særlig gammel forbindelse mellem jødefolket og jernindustrien, da vil man imidlertid gjøre sig skyldig i en feiltagelse. Navnet *Kain* skal bety¹ likefrem »smed«, og »*Tubal*« henviser til jafetiterfolket *Tubal*, som i de assyriske indskrifter kaldes *Tabal*, grækernes *tibarener*, som bodde syd for Sortehavet i en jernrik egn østenfor Kalyberne. Det ansees ikke for umulig, at de sydfra kommende kalyber hos dem kan ha faat de metallurgiske kundskaper som i grækernes øine gjorde dem (kalyberne) til jernets opfindere.

EZEKIEL (27, 13) viser tubalfolket sammen med naboerne *Mesek* som handlende i metalvarer paa det føniskiske marked, og hos JEREMIAS (15, 12) sees det at jøderne fik ikke bare bronse, men ogsaa jern fra nord. Selv hadde jøderne derimot ingen jernindustri, uagtet der i *Libanonsfjeldene* og i *Galilæa* og i landet *Adsjlin* (øst for Jordan) fandtes jernholdig malm, og naar man i 5. Mosebok 8, 9 læser om det forjættede land som et land »hvis stene er jern, og i hvis bjerge man kan grave malm«, saa beror dette paa en forveksling av jern og jernmalm med den i Palæstina meget almindelige basalt, som ser ut som jern og ved slag gir en metallisk klang. Ogsaa den store »jernseng« til kong Og (5. Mos. 3, 11) er uten tvil en basaltsarkofag. Hermed menes dog selvfølgelig ikke at jøderne skulde ha været ukjendte med jernet og dets bruk (se nedenfor).

I den *homeriske* tid kjendes baade bronse og jern. Ved *Hissarlik* er der fundet jerngjenstande allerede i SCHLIEMANN'S by nr. 2, d. e. fra ca. 2000 f. Kr. Da *akæerne* vandret ind i *Grækenland* (ca. 14—1300 f. Kr.), har de

¹ BLANKENHORN: Mitt. z. Gesch. d. Medizin u. d. Naturwissensch. VI. 1907, p. 370—377. Prof. S MICHELET meddeler mig godhetsfuldt at denne tydning av »Tubal-Kain« er noget hypotetisk, selv om den sproglig set er nærliggende. Det hebraiske ord for »smed« er noget helt andet end Kain.

ifølge RIDGEWOOD¹ hat jernsverd, og ca. 1200 f. Kr. regnes den *kretensiske* bronsesalder at gaa over i en jernalder. Ikke desto mindre ansees det av de fleste at den av HOMER skildrede tid er en *ren bronsesalder*. Som støtte herfor fremfører man i regelen at jernet i de homeriske digte nævnes meget sjeldnere end kobber og bronse (malm). I *Iliaden*, som jo omhandler den ældre periode, har man talt op at bronzen nævnes 270 gange mot jernet bare 27 gange; — i *Odysséen* er forholdet 80 gange bronse mot 27 jern. Desuten gjælder det for hvert av digtene at jernet omtales sjeldnest i de ældste partier av digtet. Det er i virkeligheten ganske paafaldende saa alle rustninger og vaaben i *Iliaden* omtales som værende av kobber og malm; men det forekommer mig noget tvilsomt hvilken betydning man bor tillægge dette forhold. Man har jo her at gjøre med et digt, og det er tydelig at digteren i sin fantasi utstyrer sine helte med fantasiredskap. Allerede i en av *Iliadens* første sange nævnes jernet ikke egentlig som vaabenmetal, men som materiale for mere haandverksmæssig verktøi. I sang IV, 474—490 sammenlignes den av AIAS fældede SIMŌEISIOS med et træ »hvis stamme fældes av det blinkende jern« for »følger at danne derav til hjul for den prunkende vognkarm«. Og faa vers senere, IV, 511—512, hvor APOLLOX blir sint over troernes tilbakegang, søker han at opmuntre dem med tilrop:

flyr dog ei for Akaias kjæmper i strid,
deres hud er dog hverken av jern eller flintsten.

Dette synes altsaa at tyde paa at man har kjendt endog det hærdede jern, altsaa staal.

II. V, 719—725, hvor ATENE paa HERES opfordring iler akæerne til hjælp, beskrives hendes vogn som havende

rullende malmhjul,
otte var hjulenes eker, av jern var akslen de løp om.

II. VI, 48, hvor MENELAOS har tat ADRASTOS tilfange, og denne trygler for sit liv og tilbyder fuld løsnings, idet han siger:

Hos min bemidlede får mangfoldige skatte der gjemmes,
guld og kobber tillike og jern helt kunstigen smedet.

Akkurat de samme ord findes i sang X, 379, hvor den fangne DOLON søker at kjøpe sit liv for lignende pris.

VII, 141, hvor NESTOR beretter om den mand EREUTHALION, som

stred aldrig med sverd eller armbrøst,
men med en kølv av jern han fylkerne herget i kampen.

¹ Citert av W. GOWLAND, l. c.

Selv blev han dræpt av LYKURGUS ved list, men ikke ved manddom, dypt i en hulveis snevring, hvor kølven av jern imot ufærd ei kunde skjærme hans liv.

I slutningen av sang VII, vers 473, hvor man holder hvile i begge de stridende leire, efterat de har begravet sine faldne, og man har faat i land en mængde vin fra *Lemnos*, siges der:

Vin tiltusket sig nu de haarfagre mænd fra Akaia,
somme for blinkende jern, andre for straalende kobber.

Kfr. en lignende passus i *Odysseen* I, 184, hvor ogsaa jernet nævnes som betalingsmiddel for vin.

Il. VIII, 15 truer ZEUS med, at de av guderne eller gudinderne som vover at snike sig lønligen bort fra Olympen for at hjælpe de stridende parter, vil han

styrte ned i Tartaros mørke
fjernt herfra, hvor der gaper et svelgende dyp under jorden,
sikret tilgagns ved en port utav jern, og en træskel av kobber.

Endelig nævnes sang IX, 363, hvor det sies at AKILLES vil
kobber desuten og røden guld hjemføre herfra,
samt skjøntbeltede kvinder og graaladent jern, som av byttet
faldt i min lod.

Ved siden av disse eksempler paa omtalen av jern i *Iliadens* første halvdel findes der i det samme avsnit unegtelig langt flere gange omtalt kobber og bronze; men fæster vi os ikke ved de kvantitative forhold, men ved den maate hvorpaa disse metaller omtales, saa finder vi, at malm og kobber altid brukes som betegnelse for det materiale hvorav vaaben (sverd, lanser) og rustning, hjelm og skjolde er gjort, altsaa for de militære attributer, mens jernet hører hjemme i den sivile teknologi og som penge-materiale (byttmiddel). Og betænker man at *Iliaden* jo er et krigsdigt, saa er det jo ganske naturligt at kobber og bronze maa omtales langt hyppigere end jern. De optrædende helte betragter jo alle kampen som en fest, og med samme ret som man regner jern for det sjeldnere og mindre kjendte metal, maa det kunne gjøres gjældende, at det netop er kobber som er det finere og sjeldnere, som anvendes til noget saa høi-festlig som krigsredskaper, især naar som her kampen skildres av digtere i poetisk form.

Vi kan ogsaa nævne, at blandt de argumenter der anføres av de før-nævnte arkæologer som holder paa jernet som det prinsipale metal, findes den paastand, at de mange bronsesaker og bronsevaaben som man finder i bronsetidens grave, er væsentlig paradesaker, som kun tjente til begravelses-stas, mens de i det levende liv benyttede gjenstande var av jern.

Det er ingenlunde min mening at ville opta dette argument, men jeg vil dog anføre at det har været benyttet. Og jeg maa tilstaa at ved læsningen av de *homeriske* digte staar det for mig som ganske ufattelig, at menneskene paa det tidspunkt som her skildres, og som dog betegner et meget høit kulturtrin, ikke skulde ha naadd til en saa enkel kunst som til at fremstille jern og benytte det i det daglige liv, i langt hoiere grad end den sammensatte bronse, og jeg har meget vanskelig ved at tilegne mig den opfattelse, at det er bronsesalderens mennesker som her skildres av HOMER.

Vender vi os nu til de gamle folkeslag i *Mesopotamien*, saa bemerkes det at V. PLACE under *Sargons* palads i *Korsabad* fandt store mængder av jern i utreduserte »lupper« til en samlet vegt av 160 tons, hvilket tyder paa at der her maa ha hersket en ganske betydelig jernindustri av betydelig ælde. Sir WILLIAM GOWLAND takserer dette fund til at tilhøre en periode av i det mindste 1500 f. Kr. Endvidere findes i *British Museum* rester av en gammel assyrisk tripod, som bestaar av en indvendig jernkjerne som er utvendig omstøpt med kobber (eller bronse), hvilket tyder paa at man allerede den gang har anset jernet for at være billigere end bronzen.

Det ældste stykke jern som med sikkerhet kan dateres, er antagelig det firkantede stykke smijern som findes i *British Museums* ægyptologiske afdeling; det er av rektangulær form. 7 × 23 cm. stort, og blev i 1837 fundet sittende i murverket av *Kheopspyramiden*. Det sat her saa fast at oberst HORVART VYSE maatte la sprænge det ut. Der er ikke tvil om at dette jern er blit indmuret ved selve pyramidens bygning, og denne tilhører det 4de dynasti og maa sættes til ca. 4000 f. Kr.¹

Ogsaa i pyramiden til *Onnos (Unas)* ved *Sakkara*, tilhørende det 5te dynasti, har MASPERO fundet 5—6 meisler av jern, som rigtignok var sterkt oprustet, og i samme pyramide har den nævnte mangeaarige direktør for *Kairo-museet* fundet et jernstykke indmuret under ganske analoge forhold som det nysnævnte stykke ved *Kheopspyramiden*. Om flere andre jernfund i de gamle pyramider, som alle tilhører det saakaldte »gamle rikes tid«, som i regelen regnes til bronsesalderen, beretter dr. GSELL², som har faat disse meddelelser tildels mundtlig direkte fra MASPERO.

Endvidere har professor FLINDERS PETRIE under sine utgravninger i *Abydos* fundet et ganske visst fuldstændig gjennemrustet stykke jern fra

¹ De forskjellige ægyptologer er ikke enige i disse gamle tidsangivelser. Den hernevnte periode sættes av E. WALLIS BUDGE til ca. 4000, — FLINDERS PETRIE satte den i 1894 til ca. 2840 f. Kr., i 1906 til 4700 f. Kr. — LIEBLEIN satte det 4de dynasti til 3085—2830 for Kristus.

² Loc. cit. p. 13—15.

6te dynastis tid, hvilket likeledes bekræfter at jernet paa den tid ingenlunde har været ukjendt, og i sit museum i *University College* i London har FLINDERS PETRIE en hel række jernperler som formenes tilhørende den førdynastiske tid. Professor PETRIE meddeler mig at det overhodet ikke bør forstaaes som at ægypterne ikke har *kjendt* jernet i de tidligste tider, muligens har de kjendt det likesaa længe som kobberet, maaske helt tilbage i stenalderstadiet. Men de har ikke *benyttet* det undtagen i rene undtagelsestilfælde, troligvis fordi jernet ikke har foreligget i tilstrækkelig store mængder. FLINDERS PETRIE mener, som andre ægyptologer, at det ældste ægyptiske jern har været naturlig forekommende *meteorjern*. Allerede i de ældste ægyptiske religiøse tekster som haves fra ca. 3500 f. Kr., tales der om at himlen er dannet av en jernplate¹, og disse tekster stammer sikkert fra endnu langt ældre traditionelle forbilleder. Det ægyptiske ord for jern hetter »*Bâa*« eller »*bâa en pet*«, det vil si »himmeljern«, hvilket jo maa direkte henlede tanken paa meteorjern. Ogsaa det koptiske ord for jern »*Benipe*« siges av ægyptologerne at være en direkte desendent av »*bâa en pet*«, hvis betydning av jern og utelukkende av jern dermed er bevist. Som saa mange av de gammelægyptiske navne paa metallerne har nemlig ogsaa betydningen av »*bâa*« været omtvistet, — det har endog været oversat ved kobber, dog især som bergkrystal, idet man har ment, at selv for ægyptere maa det ha været lettere at tænke sig en himmel av krystal end en himmel av jern. Imidlertid finder man paa monumenter fra alle tidsaldre, at vaaben, kniver, verktøi og lign. er malt blaa, hvilket ikke kan betegne krystal, men maa betegne jern.

Til trods for at der findes rikelig med jernmalm paa samme lokaliteter hvorfra ægypterne synes at ha faat sit kobber, saa maa det bergverksmæssig vundne jern tilskrives en langt senere tid. En mere almindelig anvendelse av jernet i Ægypten, saa at der kan tales om en *jernalder*, indtræffer først langt senere.

Foruten den noget indskrænkede adgang til materiale, antages ogsaa andre grunde at ha været medvirkende til jernets relativt sjeldne anvendelse i de ældste tider hos ægypterne. Man antok nemlig at guden SETHS (TYFONS) skelet bestod av jern. Han var ganske visst tvillingbror til OSIRIS, men han var familiens »enfant terrible« og det ondes princip. Herved kom der til at være noget av en forbandelse ved jernet, og det maatte virke som en vederstyggelighet paa OSIRIS. Saaledes kan det forstaaes at der findes saa faa jernredskaper i de ægyptiske grave, — det vilde være en

¹ E. WALLIS BUDGE i »Guide to the first and second Egyptian Rooms in British Museum. 2^d ed., p. 20—21.

altfor risikabel fornærmelse mot den guddom som skulde sitte til doms over den døde. Hvorledes man kunde bringe dette i overensstemmelse med selve himmelens opbygning av et saa forbandet materiale, skal jeg ikke indlate mig paa at forklare.

Iøvrig gjenfindes denne opfattelse av jernet som et forbandelsens metal ogsaa hos andre folkeslag. Ifølge 5. Mos. 27, 5 og Josva 8, 31 skulde JEHOVAS alter reises av sten, som ikke maatte være hugget med jernredskap, »ti dersom du lar dit huggejern fare derover, da vanhelliges det«. Dette viser dels at jernet paa den tid var vel kjendt av jøderne, om det end ikke var av national tilvirkning, dels ogsaa den avsky der stod derav. Den sidste var dog ikke til hinder for at jerngjenstande var almindelig handelsvare blandt jøderne. I nødsfald bruktes de endog ved tempelbygningen, men rigtignok først efterat de i forveien var blit befriet for den paa den paa dem hvilende forbandelse ved en særlig prestelig indvielse (Josva 6, 19—24). — Ogsaa de i Josva og Dom. omtalte »jernovgne« er uten tvil jernbeslaatte stridsvogne. De flere steder (5. Mos. 4, 20; Josva 11, 4; 1. Kong. 8, 51) nævnte »jernovne« er sikkert erindringer fra jødernes ophold i Ægypten, — og da uten tvil jøderne har været benyttet av ægypterne til at arbeide i deres gruber og metalsmelterier, saa er det intet under om dette fortoner sig i deres erindring som noget »helvedes væsen«, selv om det kan ha været kobber og ikke jern som blev vundet i disse ovne. —

Selv i det gamle Rom hadde Jupiters prest kun lov til at rake sit skjeg med en bronsekniv, og det var en gammel skik at naar en ny bys grænser skulde utstikkes ved pløining, saa maatte skjæret i denne plog ikke være av jern, men av bronse¹.

Efter det anførte synes det altsaa som man i de sidst nævnte gamle kulturland *ikke sætter en saa skarp grænse mellem jernalder og bronsealder* som i vore nordlige land, og som man *ikke regner jernalderens indtræffen efter jernets oppfindelse eller opdagelse*, men efter dets *almindelige anvendelse* i det daglige liv. Dette tidspunkt indtraf i Ægypten først efter *Hyksostidens* ophør, hvad enten nu dette hænger sammen med at hatet mot og frykten for den onde SETH begynde at tape sig, eller at det hænger sammen med at en virkelig metallurgisk jernutvinding er kommet i almindelig gang. FLINDERS PETRIE satte tidligere² dette tidspunkt til ca. 800 f. Kr. d. v. s. i det 22de dynastis tid. Senere³ mener han dog at tidspunktet kan sættes

¹ HERCULES READ: A Guide to the antiquities of the bronze age in British Museum. 1920, p 7.

² Ten years digging in Egypt. London 1892, p. 151—152.

³ Ancient Egypt: — the metals in Egypt. 1915, p. 22.

til ca. 1200 før Kr. d. v. s. det 2ode dynastis tid (hvortil hele den lange række av kongerne RAMSES 3—12). Flere omstændigheter gjør det dog sandsynlig at allerede under RAMSES 2 (19de dyn.) og TOTMES 3 (18de dyn.) begynte jernet at komme ganske almindelig i bruk, idet det blev bragt til Ægypten som tribut av de overvundne folkeslag.

Vi har hittil kun ganske løselig berørt at bronzen er en legering av to metaller, og spørsmålet om, hvorfra disse gamle folkeslag har faat det nødvendige tin paa et tidspunkt som utelukker at det kan tænkes som en fonikisk handelsvare, hentet fra Britannien eller selv fra Spanien, er et saa stort spørsmål og en saa vanskelig nøtt at knække for videnskapen at jeg ikke skal komme ind paa det i denne forbindelse.

Imidlertid har de kemiske analyser som man har utført paa disse ældste metalgjenstande fra bronsesalderen, vist at der meget ofte slet ikke foreligger nogen virkelig bronse, men *bare kobber uten nogen indblanding av tin*. Man er derved efterhaanden kommet til den opfatning, at bronsesalderen i virkeligheten blev foregaat av en kobberalder, og at det var det ublandede metalliske kobber som var det av menneskene først anvendte metal.

Dette har man allerede længe været paa det rene med var tilfældet med de metalliske oldsaker i Nord-Amerika. Her er ikke bare det rene kobber uten konkurranse med tinholdig bronse, men ogsaa kobber uten nogen uforstaaelig konkurranse med jern. Men forholdene er ogsaa i Nord-Amerika helt anderledes end i de omtalte egne paa vor side av jordkloden. I Amerika findes nemlig i let tilgjengelig form de uhyre mængder av frit kobber som ikke bare er kjendt fra de berømte fund omkring de kanadiske sjøer, men som strækker sig langt vestover, og som betegnes som verdens rikeste kobberforekomst¹. Dette kobber er ganske rent metal, — den eneste forurensning er litt sølv, som dog ikke er legert med kobberet, men sitter utenpaa som smaa korn eller skjæl av en erts størrelse. I motsetning til alle den gamle verdens bronser og kobbersaker, som alle forutsetter en støpning eller smeltning av metallet, selv der hvor, som i Ægypten o. a. st., den færdige gjenstand foreligger i hamret form, er de amerikanske kobber-oldsaker alle fremstillet utelukkende ved hamring. Det naturlig forekommende metal spiller i den amerikanske oldtid samme rolle som stenen i den gamle verden, og det var direkte tilgjengelig for stenalderfolket, som ikke trængte nogen slags metallurgiske processer, ikke engang en smeltning til dets utvinding og bearbeidning.

¹ EMIL SCHMIDT: Die prähistorischen Kupfergeräte Nord-Amerikas. Arch. f. Anthropologie. 11. Bd. 1879, s. 65.

Anderledes i den saakaldte gamle verden. Frit metallisk kobber forekommer her kun meget sjelden, nærmest som musemskuriositeter, og det er høist usandsynlig at det i den forhistoriske tid skal ha optraadt i væsentlig større mængder. Det har overalt maattet indvindes av sine malme, hvori det findes som kemiske forbindelser. Disse er som bekjendt væsentlig *svovelforbindelser*, kobberkis, broket kobbermalm og lign., og det er netop denne omstændighet som gjør det saa vanskelig forstaaelig at et primitivt folk har kunnet utvinde metallet derav, — ti de dertil nødvendige prosesser er av en meget vanskelig og vidtløftig natur. Rigtignok meddeler Мучн¹ et eksempel fra praksis hvor det lykkedes under ganske primitive forhold, nærmest ved »vanvare«, ved direkte rostning av kobberkis at utsmelte et forholdsvis rent kobber med et indhold av 97,02 % kobber og 0,79 % svovel. Selv om der imidlertid herved kan være aapnet en mulighet til forklaring av en indvinding av det forhistoriske kobber, der menes at være foregaat oprindelig under et forsøk paa at utsmelte guld av den guld-lignende kobberkis, saa maa det dog vel indrømmes at det neppe er den indvindingsmaate som har størst sandsynlighet for sig.

Der findes nu dog ogsaa *oksydiske* kobbermalme, baade i form av oksyd, oksydul og som karbonat, og herav foregaar kobberets utvinding meget lettere, bare ved glødning med kul. Dog er det ogsaa her en anstøtssten for vor forstaaelse, at for at faa kobberet til at smelte sammen kræves der en temperatur paa over 1100 gr. C, og det er ingen let sak naar man staar paa et primitivt kulturtrin. Man har ment at skogbrand og lignende ulykkestilfælder kan ha vist veien til den høie temperatur, og det er jo inulig at man maa ta sin tilflugt til slike hjelpemidler for at kunne forstaa forholdet. Man maa endvidere anta, at de kobbermalme som har tiltrukket sig hine gamle menneskers opmerksomhet, maa ha ligget op i dagen, og der vil selv de svovlede malme være mer eller mindre forvitret, oksydert og gaat over til grønt karbonat. Dette vil ha vist sig mindst likesaa iøinefaldende som den guld-lignende kobberkis, og endda mere end den sorte eller brune jernmalm. Dette maa vi tilstaa er unegtelig et moment, som kan tale til gunst for at kobbermalmen ialfald delvis kan være tat under bearbeidelse tidligere end jernmalmen.

Ægypterne har utvilsomt faat sit ældste kobber fra *Sinaihalvoen*, og da der hverken der eller noget sted i nærheten forekommer tin, er det ganske forstaaelig at gjenstande av ublandet kobber der maa være ældre end de tinholdige bronsesaker.

¹ Die Kupferzeit in Europa. Jena 1893, s. 298.

Av særlig interesse er det at man fra kong PEPO I av 6te dynasti, ca. 3000 f. Kr., har opbevart baade hans egen store metalstatue i *Kairo-museet* og i *British Museum* hans segrulle. Den sidste er en kort metalcylinder av 12 cm. længde og gjennemboret i sin længderetning. Den er forsynt med eierens navn og datering i hieroglyfskrift. BERTHELOT, som analyserte den i 1889¹, siger at den sandsynligvis har tjent som haandtak for en kommandostav, hvorfor den i lange tider har gaat under navn av kong PEPO I's scepter. Dette er dog uriktig. Som andre gjenstande, baade ægyptiske og assyriske av lignende form, og baade av lignende og andet materiale, er den at betrakte som en segrulle, idet den ved at rulles bortover voks eller vaat lere avtrykker sin inskription paa samme maate som et mere moderne signet. Denne gjenstand var i 1875 av LONGPERIER² beskrevet som en bronsegjenstand, men BERTHELOT fandt ved sin analyse at den bestod av bare kobber, uten spor av hverken tin eller sink, men med kun et meget svakt spor av bly. Til materiale for sin analyse hadde BERTHELOT dog kun kunnet opnaa at faa i alt 24 mgr., som var løsnet fra cylinderens indre hulhet, og som desuten var sterkt oksydert og opblandet med støv. Man forstaar derfor at man bør være litt forsiktig med at utdra altfor sikre slutninger av denne analyse, og det forekommer mig, at denne analyse, dels paa grund av prøvens litenhet, dels ogsaa av andre grunde vel kan trænge til en fornyelse. Et forsøk i denne retning som jeg gjorde med elskværdig bistand av den norske sendemand i London, blev dog avvist, hvilket jeg fuldt ut forstaar efterat jeg har set den interessante gjenstand, av hvilken jeg for at kunne gjøre en undersøkelse som kunde ha nogen betydning, maatte forlange ca. 1—2 gr.

Hvad nu angaar kong PEPO I's statue, saa ligger det nær at anta at ogsaa den, likesom hans signet, maa ha været av kobber, hvilket ogsaa har været antat av *Kairo-museets* to direktører, de kjendte ægyptologer MASPERO og QUIBBEL. I 1907 utførte imidlertid ANGELO MOSSI i *Rom* en analyse paa en prøve av statuens materiale og fandt heri et indhold av 6,6 % tin, hvorefter den altsaa skulde bestaa av virkelig bronse. Imidlertid er det blit mig meddelt, at QUIBBEL under et besøk i *British Museum* skal ha uttalt, at det ingenlunde er bevist, at den prøve som MOSSI har analysert, virkelig stammer fra *Pepo-statuen*, selv om den var et fragment som var tat i nærheten av den³. Vi ser altsaa at begge disse to gjenstandes virkelige metalnatur trods de utførte analyser trænger til at verifiseres ved fornyede undersøkelser, noget som det av hensyn til gjenstandenes arkæologiske værdi vel sagtens ikke er saa let at faa gjort.

¹ Comptes rendus 1889, t. 108.

² Comptes rendus, 1875.

³ Denne tvil bekræfter Mr. QUIBBEL i et privat brev til mig.

Imidlertid taler sandsynligheden for at i det mindste den ovennævnte analyse av BERTHELOT virkelig har sin rigtighed. Ganske vist foreligger der fra BERTHELOTS haand en analyse av en anden ægyptisk bronsegjenstand fra 6te dynastis tid med et indhold av ca. 6% tin, og dr. J. H. GLADSTONE fandt i en metalstang fra en mastaba ved *Meydun* fra 3dje dynasti at den var en normal bronse med 9,1% tin¹, men der foreligger et langt større antal av analyser av ægyptiske saker fra den ældste tid som viser at de bestaar av bare kobber uten tin. Jeg selv har netop i arbeide analyserne av en hel mængde prøver stammende fra det 1ste dynasti og den prædynastiske tid som skyldes FLINDERS PETRIES utgravninger sidste vinter av de gamle grave ved *Abydos*, og i disse prøver har der hittil ikke vist sig noget tin.

I ikke mindre grad viser de tinfri kobbergjenstande sig blandt oldsaker fra de gamle mesopotamiske folk, naar man kommer tilstrækkelig tilbake i tiden. Fra tiden tilbake til ca. 1000 f. Kr. eller mere finder man regulære tinholdige bronser. Saaledes bronsebeslaget paa de store porte til kong SALMANASSAR II's palads, som findes opbevart i den assyriske afdeling i *British Museum*. og hvorav Sir ERNEST WALLIS BUDGE elskværdigen har overlatt mig et rikelig stort fragment, rigtignok i sterk irret og forvitret tilstand, til kemisk undersøkelse, av virkelig bronse med rikelige mængder av tin. De gjenstande som stammer fra ca. 2000 eller endnu længere tilbake fra den sumeriske tid, fandt imidlertid BERTHELOT at være tinfrit kobber². Likeledes har jeg selv fundet, at en metalnagle som har sittet i stenhodet av den saakaldte »lille Sumerier« i *Ny Carlsberg Glyptotek* i Kjøbenhavn, og som jeg ved dr. FR. POULSENS godhet har faat mig overlatt til analyse, bestaar av saagodtsom rent kobber, med et spor av jern og nikkel, men uten noget indhold av tin.

Hvad nu dette gamle kobbers oprindelse angaar, saa stammer det ialfald for de i Ægypten fundne sakers vedkommende fra *Sinai*, hvor man i *Wadi Maghara* og i *Wadi Nasb* sandsynligvis har verdens ældste kobberminer. Allerede av kong SNEFERU og før ham av kong TCHESER, begge av 3dje dynasti, findes der indskrifter i *Wadi Maghara* som viser at de har drevet disse bergverker »likesom sine forgjængerer«. Ogsaa av kong NEKHT av 1ste dynasti findes der sammesteds indhugget en sene som viser hvorledes kongen dræper en overvunden fiende. DIODOR skildrer med de mørkeste farver hvorledes ægypterne tvang sine krigsfanger til at gjøre den forfærdeligste slavetjeneste i disse bergverker. Sandsynligvis

¹ Begge disse to tilfælde citert av FLINDERS PETRIE: *The ancient Egypt* 1915, p. 17—18.

² *Comptes rendus* 1893, p. 161; 1897, p. 328; 1902, p. 142 og 1906, p. 473.

har disse bergverker været drevet endnu tidligere av de derboende ind fødte semitiske folkeslag, som da har forsynt endog de prædynastiske ægyptere med kobber¹. WILLIAM GOWLAND anser det ikke for usandsynlig at der her har været drevet kobberdrift allerede saa tidlig som aar 5000 f. Kr.

For ca 100 aar siden var det paa tale at gjenopta driften her, og EDV. RÜPPELL² undersøkte ifølge opdrag av MEHEMET ALI PASCHA lokaliteterne, og han fandt ogsaa at der var en del malm igjen. Han fortæller ogsaa at han ved et ganske enkelt reduktionsforsøk uten noget tilslag fik utredusert »ganske rent kobber«, som utgjorde 18^{0/10} av malmen. Herved utviklet der sig en sterk hvitløkslugt, som tydet paa tilstedeværelse av arsen, og samtidig dannet der sig en jernholdig slagge, som utgjorde omtrent likesaa meget som kobberet. RÜPPEL fraraadet dog at opta driften paa grund av mangel paa brændsel.

Uagtet der ogsaa i *Nubien* findes rike kobberleier, er det dog utenfor al tvil, at det er *Wadi Maghara*-gruppens malm som først blev utnyttet av ægypterne.

Sinaihalvoen skylder sin eksistens³ en granitisk eruption, som trængte igjennem de sedimentære lag, og dannet hele det fjeldmassiv hvorfra toppene *Serbal* og *Ste. Cathérine* hæver sig op som de høieste punkter. Hævningen er sket efter eosæntiden, ti lagene fra denne er bragt ut av stilling, likesom de underliggende senoniske sandstene. Graniten gjennomtrænges atter av dioritaarer, og dioritmassen har ofte bredt sig som et dække ikke bare over de sedimentære lag, men ogsaa over graniten. Det metalførende minedistrikt ligger paa grænsen av det granitiske distrikt mot nordvest paa halvøen. Det strækker sig fra *Serabit al Khadem* mot syd i en længde av ca. 40 km. og i et baand av ca. 6 km. bredde. Længere mot syd nærmere *Serbalfjeldet* findes endnu nogen lag, men deres betydning synes altid at ha været ringe i sammenligning med de nordlige. De metalførende lag findes i de forskjellige sinaitiske sandstene, hvis geologiske alder det av mangel paa forsteninger ikke er mulig at bestemme nøiagtig, men som antages at henhøre til den permiske tid. Ovenover det kobberførende lag findes der et lag som inneholder baade kompakt *brunsten* og en *hæmatit* av udmerket kvalitet. Disse malme synes ikke at være sterkt utnyttet i *Magharadalen*, hvorimot der ikke langt fra *Serabitemplet*

¹ WALLIS BUDGE: A short history of the Egyptian people. London 1914, p. 33.

² Reise in Nubien, Kordofan und d. peträisch. Arabien. Frankfurt 1829.

³ DE MORGAN: I c chaotr. VII. — De herværende geologiske forhold er tidligere undersøkt av JOH. RUSEGGER: Reisen in Unterägypten, auf der Halbinsel Sinai u. im gelobten Lande. Stuttgart 1847.

findes aapne indskjæringer i massivet og tegn paa at der endog har været underjordisk drift. Hæmatiten fra *Sinai* har i Faraontiden været benyttet som skulpturmateriale til statuetter og lign.

RÜPPEL fandt allerede under sit nævnte besøk, at der i den ene av de to gruber i *Wadi Nasb* var ganske mægtige lag som endnu indeholdt kobber i form av mineralet »*kobbersværte*«, et sort hydratisk oksyd av kobber, mangan og jern, og som optrær i pseudomorfoser efter kobberglans og rød kobbermalm. Ogsaa ægyptologen LEPSIUS fandt under sit besøk i 1845, i de utmineringer som var foretat i dalens nordside, det nævnte sorte mineral, hvis kobberindhold gav sig tilkjende ved smaa grønne, utvitrende fragmenter.

En av de mægtige sandstensbænke under de nævnte metalførende lag er rik paa *tyrkis*, som sikkert ikke har været det stof som har været drevet her i mindst mængde.

Sinai kaldes paa ægyptisk for »*Mafeklandet*«, og navnet *mafek* eller *mafkat*, som findes indhugget i fjeldsiderne med noget vekslende skrive-maate i hieroglyfskrift, har været gjenstand for en meget vekslende tydning. CHAMPOLLION oversatte det ved kobber, idet han væsentlig støttet sig paa den rækkefølge hvori de forskjellige metaller nævnes i Faraoner-nes tributlister: guld, asem (elektrum), kobber, jern, bly. Navnet for guld (nub) er uomtvistet, likesaa for asem, derimot har der været megen tvil om gloserne for kobber og jern.

Efter at skotten MACDONALD hadde fundet Sinaigrubernes store tyrkis-rikdom, trodde han med særlig henblik paa ægypternes store værdsættelse av denne sten at *mafek* var betegnelsen for *tyrkis*. BRUGSCH optok denne tydning, især da han fandt den stemmende med at mens alle de virkelige metallers navn paa ægyptisk var maskuline ord, saa var *mafek*, især i skrivemaaten *mafkat*, femininum. — GENZLER¹ betegner imidlertid Mac Donalds fund av tyrkis som en mystifikation. Det som tyrkis betegnede mineral, hvorav ogsaa han har faat prøver, kan ikke være dette, da de taper sin blaa farve naar de utsættes for lyset, — og han tilføier: »hvor er der da blit av alle de gamle ægypteres tyrkiser? — i Ægypten findes de ikke, og i museerne findes de ikke«. Han opretholder derfor tydningen *mafek* = *kobber*.

Det er imidlertid GENZLER som har været ute for en mystifikation. Ganske visst meddeleer ogsaa FLINDERS PETRIE² at de tyrkiser han hadde fundet i de gamle hauge slagger og sten i *Wadi Maghara*, mistet farven

¹ Das Kupferland Sinai. Zeitschrift für Ägyptologie, VII, 1870, s. 121.

² Researches in Sinai. London.

i lyset, men baade i professor PETRIES samling i *University College* og i *British Museum* og i *South-Kensington*-museet findes der rikelige mængder av blaa tyrkis fra Sinai gruber. — Genszler mente derimot at kunne paa-vise, at ordet *mafek* baade i indskrifterne og i den ægyptiske dødsbok brukes om noget som er blankt og glinsende som metal og desuten haardt og blankt som glas og andre »ædle stene«, hvorfor han tyder det som *kobber* i likhet med CHAMPOLLION. Paa den anden side gjør dog GENSZLER selv opmerksom paa ægypternes tilbøielighet til at benytte den farve et metal under visse omstændigheter kan anta, til at betegne selve metallet, noget som ogsaa er bevart i koptisk. *Mafek* skulde da baade kunne betegne selve det *metalliske kobber*, som kan bli grønt ved anløpning, og ogsaa de *kobbermalme* som er baade grønne og blaa, og som især i den blaa form (lasur) har samme farve som himmelhvælvingen, der efter hans mening ikke bare betegnes med »*bâa*«, d. v. s. metal i almindelighet, men ogsaa med *mafek*.

LEPSIUS har i sin store avhandling »Die Metalle in den ägyptischen Inschriften«¹ for saa vidt sluttet sig til Genszler, som ogsaa han mener at *mafek* ikke kan bety tyrkis, men han kan heller ikke la det betegne noget metal, da ordet er et femininum. Han finder at det er betegnelsen for noget *grønt*. Der findes i *British Museum* et stenhode av gudinden *Hathor* med en vakker grøn glasur, og LEPSIUS finder, at det stemmer med at hun kaldes den »*mafekfarvede*«. Efter Lepsius betegner *mafek* derfor *malakit* (*berggrønt*), men ogsaa *grøn emalje* og al *grøn farve*. Senere skal dog Lepsius ha opgit dette standpunkt², og de nyere ægyptologer anser det for ganske utvilsomt at *mafek* betyder *tyrkis*. *Kobber* heter derimot paa ægyptisk »*khomt*«, en lyd som ogsaa brukes til betegning av tallet 3. Dog skrives ordet for kobber sjelden fonetisk, hvorfor uttalen har været noget usikker; derimot skrives det i regelen ved sit ideogram, som er billedet av en smeltedigel netop av samme form som den der blev fundet av FLINDERS PETRIE³ ved *Serabit al Khadem*. Til yderligere begrepsbestemmelse efterfølges saa digelbilledet av tre smaa sirkler, som er det almindelige determinativ for metaller. Til belysning av de vanskeligheter hvormed slike tydninger har at kjæmpe, kan det anføres at ogsaa det nævnte ideogram har været tillagt andre metaller end kobber. Saaledes læste CHAMPOLLION det som »*jern*« uten at si noget om ordets uttale. E. DE ROUGÉ læste det likeledes som jern eller staal, og mente endog at det burde uttales »*bâa*«. Ogsaa BIRCH læste det som *bâa* og oversatte det ved »*wood*«,

¹ Abhandl. d. kgl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, hist.-phil. Abteil. Berlin 1872.

² Ifølge mundtlig meddelelse av Sir EDWARD WALLIS BUDGE.

³ Researches in Sinai, p. 34—53.

»iron« eller »brass«. CHABAS mener det kan bety baade *bronse* og *jern*, uten at han angir noget om uttalen. DÜMICHEN oversætter det ved »metal« i almindelighet, likeledes uten at indlate sig paa uttalespørmaalet, og BRUGSCH svinger mellem flere tydninger med tilsvarende uttale, baade »apot« = jern, »tehsset« = malm, men vender tilsidst tilbake til »bâa« = jern. Det er LEPSIUS som har git tydningen *khomt* = kobber, og denne tydning er nu den av ægyptologerne almindelig antagne, og den støttes bl. a. derved at ogsaa paa koptisk betegnes kobber ved *khomt*.

Det er ikke godt at si, om det var kobberet eller tyrkiserne som var hovedproduktet ved den gamle drift, antagelig var det begge dele. Alle-rede i graven fra kong ZER av 1ste dynasti finder man 4 armbaand, alle med tyrkis. Og i et gammelt eventyr om kong SNEFERU og troldmanden ZAZAMANKH var der en juvel av tyrkis (mafek) som gik tapt.

Dog har brytningen av tyrkis altid foregaat adskilt fra kobberbrytningen. FLINDERS PETRIE beskriver den antagelig ældste grube som et stort uregelmæssig kammer av ca. 5 fots høide og ca. 20 fot i kvadrat. Avfaldet herfra fandtes i en haug nedover skraaningens utenfor. Heri fandt man hundreder av tyrkiser, hvis farve dog svandt ved at komme i lyset. Derimot fandt man ikke spor av kobbermalm, og heller ingen flint- eller stenredskap. Grubens vægger bar overalt tydelig spor av at være bearbejdet med meisler, og dette har da aabenbart været metalmeisler, for kostbare til at kastes bort, saaledes som man i regelen gjorde med stenmeisler. Paa andre steder finder man derimot sterke antydninger av den gamle kobberdrift. I *Wadi Nasb* fandt han saaledes en enorm haug paa 6—8 fots høide og dækkende et areal av dalen paa 500 × 300 fot, som blev anslaaet av Flinders Petrie til at veie ca. 100 000 ton. Der var paa dette sted i tidligere tid ogsaa blit utgravet 4 kobberbarrer av størrelse som en arm.

Saa vel i *Maghara* som ved *Serabit* er der i avfaldshaugene fra mine-erne fundet store hammere og hakker av sten. Men merkerne i minevæggene efter sprængningsverktøiet passer ikke med disse tunge stenredskaper, som formentlig bare har været brukt til knusning av de uthugne blokke, mens væggene har været hugget med meisler av kobber, som i saa fald maa ha været hærdet. Ved *Serabit* fandtes der foruten en mængde flintredskaper ogsaa 2 kobbermeisler av henholdsvis 6,5 og 7,5 engelske tommers længde. Her fandtes ogsaa den smeltedigel som danner modellen for kobberets hieroglyfiske ideogram.

Foruten de gamle ægyptere har muligens ogsaa de gamle folkeslag i *Mesopotamien* faat sit kobber helt eller delvis fra *Sinai*. Ifølge HILPRECHT¹

¹ O. HELM: Chemische Untersuchung von altbabylonischen Kupfer- und Bronzegegenständen. Verh. der Berl. Gesellsch. für Anthropologie etc. 1901, p. 157—164.

stammer nemlig endel metalsaker som er fundet i ruinerne ved *Nippur* og omliggende steder fra landet *Kimash* (d. e. Central-Arabien, nu *Djebel-Shammer*) eller fra *Melukh* (NV-Arabien indtil Sinaihalvøen). Den levende handelsforbindelse mellem disse dele av Arabien og det gamle Babylonien bekræftes av den ca. 2800 f. Kr. levende prestefyrste av *Lagash* (nu *Tello*), som beretter at han »fra *Kimash* henter kobber og fra fjeldene i *Melukh* henter jern og guld«.

Av andre gamle kobberforekomster som kan ha hat sin betydning for disse folk, er det øvre distrikt omkring *Tigris* og *Tiyari*-egnene. De ældste sumeriske kobberlevninger fra *Mellemsflodlandet* synes ikke at staa tilbake i alder for de ægyptiske. De gaar tilbake til 4—5000 f. Kr., og de bestaar som allerede nævnt av ublandet tinfrit kobber.

Det *kypriske* kobber finder vi i Ægypten ifølge en indskrift i kong THOTMES III's grav, hvor det nævnes som en tribut i form av vaser o. l. ca. aar 1500. Den elegante form som disse gjenstande har, og deres indhold av tin, som gjør dem til sande bronser, forutsætter imidlertid mange seklers foregaaende utvikling, saa at man vistnok maa sætte den kypriske kobberindustri til ca. 2500 f. Kr.

En del spydspidser fra *Kypern*, som er analysert av FLIGHT¹, bestaar av bare kobber med et indhold av 97,2—99,5 0/0 av dette metal. De smaa indblandinger av andre bestanddele maa betragtes som tilfældige urenheter.

Av de europæiske land er det navnlig *Østerrike*, *Etrurien*, *Spanien* og *Britannien* der merkes som gamle sentrer for kobberproduksjon. For Britanniens vedkommende mener MONTELIUS at bronsealderen kan føres tilbake til 2500 f. Kr. Likesom Ægypten og de gamle asiatiske kulturland synes det, som om ogsaa de fleste europæiske land kan opvise en kobberalder som gaar forut for den egentlige bronsealder. Man har længe været opmerksom paa den sterkt vekslende sammensætning som de almindelige bronseoldsaker viser. Selv om tinindholdet som regel vil variere mellem ca. 6 og 12 0/0, saa kan det dog ogsaa paa den ene side nærme sig til ca. 20 0/0, paa den anden side synke ned til ganske faa 0/0, eller til slet intet. Dette er jo i og for sig ganske naturlig, da man vel i hvert fald ikke hos hine forhistoriske folk kan forutsætte noget bevisst arbeide efter blot nogenlunde kvantitative vegtsforhold. Man har forsøkt at sætte de vekslende forhold i forbindelse med forskjellige tidsaldre og forskjellige tilvirkningssteder, og dette kan maaske ogsaa indenfor visse grænser ha sin rigtighet for bronser fra den historiske tid, men for de heromhandlede forhistoriske saker bør man antagelig betragte disse vekslinger som tilfældigheter. En

¹ Berichte d. d. chem. Gesellsch. zu Berlin, 7. Jahrg., 1874, p. 1460.

anden sak er det, at man av de smaa mængder av urenheter og bibestandsdele som næsten altid forekommer i bronserne, vil kunne ha et materiale til at slutte sig til metallens oprindelse. Saaledes vil *Sinai*-malmens arsenindhold antagelig gjøre sig gjældende i de derav fremstillede gjenstande, et indhold av *antimon* vil som oftest tyde paa en oprindelse fra *Ungarn*, en større tilsætning av *bly* finder vi som oftest i romerske bronser, likeledes i *kinesiske* og *japanske* saker. Slike avgjørelser fordrer imidlertid for at kunne gi paalidelige opplysninger om metallens geografiske herkomst en sammenligning med selve den oprindelige malm, hvilket det av letforstaaelige grunde kun meget sjelden vil være mulig at anstille.

Aarsaken til at de gamle bronsers tinindhold undertiden gaar ned til ganske smaa mængder, kan dels være at redskaper av normalt tinindhold er blit omsmeltet flere gange, hvorved der ved hver omsmelting er sket et tap i tinmængde; men det kan ogsaa ligge i at der overhodet ikke foreligger nogen legeret bronse, men bare kobber, som er vundet av en malm der kan ha indeholdt en ringe mængde tin som en tilfældig urenhet.

Det er væsentlig MÜCH¹ som har gjort oppmerksom paa, at de ældste europæiske bronser enten er fuldstændig tinfri eller dog saa tinfattige at de ikke fortjener navn av bronser, men som kobbergjenstande. Av i alt ca. 500 slike kobberfund fra forskjellige land er 110 fundet sammen med stenaldersaker, men kun 47 er fundet sammen med virkelige bronsesaker, og de sidstnævnte har da altid været slik beliggende i fundet at de kunde paavises at være yngre end kobbersakerne. Og jeg maa tilstaa, at det var med en viss glæde at jeg blev bekjendt med dette forhold, da det jo i høi grad borttar en av anstøtsstenene for forstaaelsen av at bronzen skulde være menneskenes ældste bruksmetal.

Ogsaa her i Norden, er der baade i *Danmark* og i *Sverige*² paavist en kobberalder, som gik forut for bronsealderen².

Av norske forhistoriske bronser foreligger der maaske ikke saa mange analyser som fra mange andre land; dog har vi efterhaanden et saa stort materiale at vi kan oppgjøre os en forestilling om sakens forholdende.

Der blev allerede i Videnskapselskapets forhandlinger 1873 av prof. O. RYGH offentliggjort en del av cand. pharm. PEDERSEN i WAAGES laboratorium utførte bronseanalyser; men disse tilhørte alle jernalderen, og kun et faatal av dem var rene tinbronser, mens de fleste indeholdt som væsentlige bestanddele baade sink (helt op til 23,7 %) og bly (især gjenstandene fra den saak. yngre jernalder med indtil 15,7 % bly).

¹ Die Kupferzeit in Europa. 2. Aufl. Jena 1893.

² MONTELIUS: Svenska fornminnesföreningens tidskrift. 18. Stockh. 1891—93, p. 203—238.

Senere har jeg forskjellige gange ved elskværdig imøtekommenhet av bestyrerne for vore oldsaksamlinger, professorerne A. W. BRØGGER i Kristiania og H. SHETELIG i Bergen, faat overlatt prøver til kemisk undersøkelse. Om enkelte av disse skal jeg faa lov til her at gi en foreløbig redegjørelse.

To stykker metal der hitrørte fra et beslag paa et træspond i *Osebergskibet*, altsaa tilhørende en forholdsvis sen periode, viste følgende sammensætning:

<i>A. Sterkt irret, perforert plate.</i>	<i>B. Vinkelboiet, blankt, gult blik.</i>
tin 0,78 ‰	2,58 ‰
kobber 74,60 »	88,45 »
bly 0,53 »	1,33 »
sink 16,95 »	5,85 »
jern 0,69 »	0,20 »
nikkel 0,07 »	0,29 »
kobolt 0,02 »	0,13 »

Antimon og arsen mangler i begge prøverne.

Stykket *A* viser sig at indeholde saa litet tin og samtidig saa meget sink at det neppe fortjener navn av bronse, men maa betegnes som *messing*. Ogsaa stykket *B* er tinfattigere og navnlig rikere paa sink end de virkelige bronser.

Uagtet det metalliske sink ikke var kjendt førend det blev fremstilt i det 16de aarhundrede av PARACELsus¹, finder man dog meget ofte ved analyse av antike bronser, at de er saa sinkrike at de fuldt ut fortjener navn av *messing*. Dette var tilfældet med næsten alle de bronseinstrumenter av den *Ustinowske* samling som blev beskrevet av dr. S. HOLTTH her i vort selskap i 1919², og ved endnu flere saker fra samme kilde som jeg senere ved dr. HOLTTHS velvilje har faat lov til at analysere. Disse og andre gamle »messingsaker« er imidlertid ikke vundet ved sammensmelting av de færdige metaller kobber og sink, men det maa antages at kobbermalmen enten oprindeligt har været opblandet med saa meget sinkmalm (galmei), eller man har bevisst tilblandet galmei, saa at man i stedet for det røde kobber primært fik det mere guldlignende *messing*.

Der findes hos STRABO et sted, l. XIII, cap. 56, som undertiden er blit tat til indtægt for at sinken allerede skulde ha været kjendt i oldtiden.

¹ HORTDAHL: Fremstilling av Kemiens Historie. I Bind. Kristiania 1906, s. 57.

² Greco-roman and arabic bronze instruments and their medico-surgical use. Vid.-selsk. Skr. I. No. 4. Kristiania 1919.

Det lyder i oversættelse, som godhetsfuldt er blit mig meddelt av prof. J. L. HEIBERG i Kjøbenhavn: »Der findes en sten ved *Andeira*, som naar den brændes, blir til jern. Naar den derpaa smeltes med en jordart, drypper den *Pseudo-Solv*, som forbundet med kobber blir til den saakaldte blanding som nogen kalder *orcikalkon* (messing eller bronse). Pseudo-Solv findes ogsaa ved *Tmolos*.« Det kunde ligge nær at opfatte »pseudargyros« som sink¹, men det bestrides sikkert med rette av andre forfattere². Det lyder høist utrolig at man ved rostning av en malm som foruten jern i svovlet — og oksydisk forbindelse ogsaa indeholder galmei, skulde kunne faa baade jern og sink.

I en række andre bronsesaker (i alt 12) fra Universitetets Oldsaksamling, og som angives at tilhøre den egentlige bronsealder, var de næsten alle egte tinbronser. Som oftest bevæget tinindholdet sig mellem 9 og 13 %, dog steg det i et par tilfælde til ca. 17 %. Kun i to tilfælde sank det saa lavt at det muligens kunde gi anledning til nogen tvil. Det ene var en *celt* (mus.-nr. C 5169), som foruten 86,38 % kobber indeholdt 3,47 % tin og 2,25 % bly. Den omstændighet, at *blyindholdet er næsten likesaa stort som tinindholdet*, gjør at man kommer til at tænke paa de senere redskaper fra jernalderen. Nogen sinkbestemmelse blev i dette tilfælde desværre ikke gjort, men skulde en fornyet analyse vise at der ogsaa er en merkbar mængde sink, saa vil den antydede mistanke bli yderligere bestyrket. — Det andet tilfælde var en *paalstav* (mus.-nr. 5759), hvori analysen viste 93,00 % kobber, 2,97 % tin, 1,39 % sink, 0,22 % bly, 0,15 % jern, 0,10 % arsen samt et spor av svovel. Ogsaa her var tinmængden meget liten, dog ikke mindre end at den kan betegnes som en *virkelig bronse*, og samtidig er sinken og blyet ikke mere end at det kan betragtes som tilfældige urenheter.

Et ganske interessant tilfælde forelaa i det metalstykket som fandtes paa den gamle jagtplads fra stenalderen ved *Ruskeneset*³ ved *Soreide i Fana, Hordaland*. Dette viste sig ved analysen at være en egte tinbronse, nemlig med 11,80 % tin paa 63,36 % kobber. Regner man analysen, som blev foretat paa stykket som det forelaa i sterkt irret stand, om paa uoksydert metal, vil man faa 15 % tin. Selv om man med prof. SHETELIG vil anta at forholdet mellem kobber og tin kan være noget forrykket under forvitringen, hvilket ifølge KRÖHNKE nok kan finde sted, saa foreligger her

¹ ROSSIGNOL: *Les métaux dans l'antiquité*, p. 251. — FRANK: *Berg- u. Hüttenmännische Zeitung* f. 1881. p. 231.

² HOFFMANN: *Berg- u. Hüttenmännische Zeitung* f. 1882. p. 479. og BLÜMNER: *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern*. 1886. IV Bd., p. 96.

³ SHETELIG: *Norske Oldfund III*. Kristiania 1920.

dog et ganske interessant eksempel paa at en utvilsom egte tinbronse med et i hvert fald høit tininhold er fundet i et utvilsomt egte stenalderfund.

Det hadde efter det ovenstaaende været at vente at der her hadde foreligget et stykke rent kobber.

For imidlertid at faa konstateret om ikke andre av vore ældste »bronsesaker« som kunde formodes at ligge stenalderen nærmest, var rent kobber, henvendte jeg mig til de to nævnte museumsbestyrere med bøn om at faa overlatt til analyse nogen prøver av slike saker, som kunde formodes at være saa gamle at de kunde forventes at bestaa av bare kobber. Professor SHETELIG, som i sit museum i *Bergen* visst har de ældste bronsesaker, var da saa elskværdig at sende mig prøver, utboret av 4 økser fra tidlig bronsalder, deriblandt en fra det saakaldte *Aurlandsfund i Sogn*, som av GUSTAFSON i »Norges Oldtid« omtales som et av vore ældste fund. Desværre indtraf der netop under analysen av denne prøve et uheld, hvorved de fleste bestemmelser mislykkedes. Dog var det et held i uheldet at jeg fik bestemt *tinindholdet*, som jo i denne forbindelse var det som hadde mest interesse. Det viste sig i den omhandlede prøve (Bergens mus. nr. 3295) at være 9,34 %, altsaa saa rikelig at der maa siges at foreligge en virkelig tinbronse. Desuten indeholdt denne prøve spor av sølv, av arsen og av antimon. De andre prøver viste følgende sammensætning:

Mus.-nr.	kobber	tin	sink	bly	jern	nikkel	arsen	antimon	sølv
4191	84,48 %	6,66	3,64	1,03	1,80	0,28	0,37	0,55 %	spor
3389	87,15 %	5,86	1,66	0,80	2,17	0,31	0,28	0,08 %	—
5921	89,18 %	7,39	—	—	1,24	0,37	0,37	0,55 %	—

Alle disse prøver viser altsaa en saa tydelig og væsentlig tinmængde at der ikke kan være tale om at betegne dem som bare kobber. De er absolut *utvilsomme tinbronser*. Samtidig er ikke de forskjellige bibestanddele i større mængde end at de kan tilskrives tilfældige urenheter fra den oprindelige malm.

Det har saaledes ikke lykket os at paavise tilstedeværelsen av tinfrie kobbersaker blandt nogen av vore ældste bronsfund, og det synes som om *bronsalderen i vort land i motsætning til Sverige og Danmark, og mange andre land, ikke er blit indledet ved nogen kobberalder*, men er optraadt som stenalderens direkte avløser. Det er muligvis for tidlig at uttale nogen absolut avgjørende dom herover, da man jo kan tænke sig at fortsatte undersøkelser kan paavise virkelig tinfrie kobbersaker; men da vi har bestræbt os for at faa tak i de ældst kjendte prøver, og den ene av dem endogsaa tilhører et utvilsomt egte stenalderfund, er der dog en viss

sandsynlighed for at vort resultat er nogenlunde rigtig, selv om det ved den første betragtning desværre atter øker den vanskelighet i vor forstaaelse som netop var blit mildnet ved erkjendelsen av den tidligere kobberalder.

Maaske lar dog ogsaa disse vanskeligheter sig bortforklare. Professor SHETELIG har i en samtale godhetsfuldt meddelt mig, at bronsefundene her i landet kun er faa i sammenligning med hvad der findes i andre land, og han mener at man maa anta at bronzen først er kommet her til landet i en forholdsvis sen tid, efter at kobberalderen i de andre land hvorfra vi fik vore forsyninger, var et tilbakelagt stadium.

Jeg tror dog at man ogsaa kan finde en anden forklaring, som maaske kan ha likesaa stor sandsynlighed for sig.

Selvfølgelig er enhver tanke paa en direkte utvinding av vedkommende metaller av malmen i inlandet utelukket overalt i de skandinaviske land. Metallerne maa i færdig tilstand ha været indført utenlands fra, selv om den videre haandverksmessige bearbeidelse er foregaat indenlands.

Nu er det trolig at Danmark og Sverige i sine tidligste kulturperioder har hat sine væsentligste kommunikationsveie og utenlandske bytteforbindelser dels ret sydover gjennem Tyskland og Østerrike, dels mot øst og sydost gjennem Rusland frem til Sortehavet og Middelhavslandene. Og vore naboland har da ved stenalderens slutning faat sine første metalvarer fra produktionsstederne i Mellem- og Sydeuropa, hvor man vel hadde kobber, men ikke tin, og hvor man altsaa heller ikke hadde naadd til at legere disse to metaller til bronse. Her i vort land har vi derimot paa grund av vor beliggenhet allerede i de tider hat vor væsentligste utenlandsforbindelse vestover til *Britannien*, som er et av de faa land hvor kobber og tinnmalm findes saa godt som side om side. I *Cornwall* findes som bekjendt baade tinnmalm og kobberkis. Selv om vi nu antar at det meste av det i hine tider i *Cornwall* vundne tin er utvundet av det saakaldte »vasketin« (tinsten) paa sekundært leie, og at kilden til det ældste britiske kobber, likesom i den øvrige gamle verdens land har været ikke selve kobberkisen, men derimot dennes til oksyd og karbonat omdannede ytre dele, som var tilgjængelige for datidens folk, saa lar det sig dog ogsaa med en høi grad av sandsynlighed anta at materialet for en stor del av denne gamle kobberutsmeltning netop paa dette sted har været tinholdig kobbermalm, saa at produktet altsaa er blit ikke rent kobber, men en tinholdig bronse. Dette vilde kunne ske aldeles uavhengig av nogen forsættelig legering, ganske paa samme maate som det, som allerede nævnt, lykkedes at faa fremstillet messing længe før og ganske uavhengig av om man hadde metallisk sink til raadighet.

Den omstændighet, at vore ældste bronsesaker netop er fundet paa *Vestlandet*, mens vore østlandske bronsfund tilhører en senere tid¹, støtter netop den antagelse, at vi har faat vore ældste bronser den vei som vi her har omtalt. Det kan kanske synes noget ovovet at anta at der paa et saa tidlig tidspunkt som i stenalderens slutning, som av MONTELIUS² sættes til senest det 17de aarhundrede f. Kr., men som dog maaske for Norge kan antages at falde noget senere, skal ha været et samkvem som dette. Erindrer man imidlertid at PYTHEAS allerede paa ALEKSANDER DEN STORES og ARISTOTELES' tid har besøkt *Norge*³, og at det utvilsomt var i *Britannien*, at han fik de merkelige oplysninger om vort land som ansportet ham til at reise hit, saa tyder dette paa, at der allerede den gang bestod en kommunikation mellem de to land paa begge sider av Nordsjøen som sikkert har været benyttet i lange tider forut.

Endelig bør det nævnes, at ifølge HERCULES READ⁴, direktør for den engelske oldsaksavdeling i *British Museum*, hører netop *England* til de land, for hvilke man ikke med sikkerhet kan paavise en tid da *kobberet* har været det eneste benyttede metal, men det er trolig at i det nævnte land (i motsætning til Irland og andre land som vel har kobber, men ikke tin) bronzen blev fremstillet direkte og primært. Det er da let forklarlig at den ogsaa kom som det primære metal til Norge. Og vi deler da skjæbne med England i at høre til de land hvor bronzen virkelig maa antages at ha optraadt som det første almindelig benyttede metal; men vanskelighetene derved mildnes jo betydelig derved, at det ikke behøver at opfattes som vundet ved legering av to metaller, men som et direkte vundet metal.

¹ GUSTAFSON: Norges Oldtid. Kristiania 1906.

² Svenska fornminneförningens tidskrift, 18. bd. Stockh. 1891.93, p. 127—163.

³ FR. NANSEN: Nord i Taakeheimen. Kr.ania 1911, s. 46. 56.

⁴ A Guide to the antiquities of the bronze age in British Museum. 2^d ed. London 1920, p. 5.

BEGRÜNDUNG
DER ELEMENTAREN ARITHMETIK
DURCH DIE REKURRIERENDE DENKWEISE OHNE ANWENDUNG
SCHEINBARER VERÄNDERLICHEN MIT UNENDLICHEM
AUSDEHNUNGSBEREICH

VON
TH. SKOLEM

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 6)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 2. mars 1923.

Die logischen Grundbegriffe, die gewöhnlich als nötig für die Begründung der Mathematik angesehen werden (siehe z. B. Principia Mathematica von B. RUSSELL & A. N. WHITEHEAD), sind erstens die folgenden: Die Begriffe „Aussage“ und „Aussagenfunktion“ von 1, 2 usw. Veränderlichen, die drei Operationen 1) *Konjunktion* (sprachlich gewöhnlich durch das Wort „und“ oder durch die Worte „sowohl — als“ ausgedrückt), 2) *Disjunktion* (gewöhnlich durch die Worte „entweder — oder“ ausgedrückt) und 3) *Negation* (durch das Wort „nicht“ bezeichnet) und endlich die RUSSELL-WHITEHEAD'schen Begriffe „always“ und „sometimes“. Die zwei letzten Begriffe geben uns die Idee der Gültigkeit einer Aussage in *allen Fällen*, bezw. in *mindestens einem Falle*. Die Gültigkeit einer Aussage in mindestens einem Falle wird als einen Existenzsatz bezeichnet und wird gewöhnlich durch die Worte „es gibt“ ausgedrückt. — Ich will in dieser Abhandlung überall große Buchstaben als Symbole für Aussagenfunktionen benutzen, so daß also $A(x), B(x) \dots$ Aussagenfunktionen einer Veränderlichen, $A(x, y), B(x, y) \dots$ solche von zwei Veränderlichen usw. bedeuten. Weiter benutze ich die SCHRÖDER'schen¹ Zeichen für Konjunktion, Disjunktion und Negation, so daß, wenn A und B Aussagen sind, AB die Aussage „sowohl A als B “, $A + B$ die Aussage „entweder A oder B “ und endlich \bar{A} die Verneinung von A bedeuten. — Weiter führen aber RUSSELL & WHITEHEAD auch den Begriff der „deskriptiven Funktion“ ein. Eine deskriptive Funktion ist ein Ausdruck, der eine eindeutig bestimmte Bedeutung hat; es ist eine Art funktionaler Eigennamen. Endlich soll es nach RUSSELL & WHITEHEAD nötig sein, allgemein gültige Aussagen als eine Art *Funktionalbehauptungen* (functional assertions) einzuführen. Eine Funktionalbehauptung soll darin bestehen, daß eine Aussage als gültig in einem unbestimmt gelassenen Falle behauptet wird.

Was ich nun in dieser Abhandlung zu zeigen wünsche ist folgendes: *Faßt man die allgemeinen Sätze der Arithmetik als Funktionalbehauptungen auf, und basiert man sich auf der rekurrierenden Denkweise, so läßt sich diese Wissenschaft in folgerichtiger Weise ohne Anwendung der Russell-Whitehead'schen Begriffe „always“ und „sometimes“ begründen.* Dies kann auch so ausgedrückt werden, daß die logische Begründung der Arithmetik ohne Anwendung scheinbarer logischer Veränderlichen geschehen kann.

¹ E. SCHRÖDER: Algebra der Logik.

Vorteilhaft wird es allerdings oft sein, scheinbare Veränderliche einzuführen; man wird aber bloß endliche Ausdehnungsbereiche für die Variation dieser Veränderlichen nötig haben, und mit Hilfe rekurrirender Definitionen wird man die Anwendung solcher Variablen dann immer vermeiden können. Dies alles wird im folgenden klar werden.

Ich will übrigens bemerken, daß ich alle Funktionen eigentlich als deskriptive auffasse; die Aussagenfunktionen sind nur dadurch charakterisiert, daß sie bloß die zwei Werte „wahr“ und „falsch“ haben können, die natürlich auch mit zu den logischen Grundbegriffen gehören.

Die deskriptiven Funktionen fasse ich als funktionale Eigennamen auf, d. h. Eigennamen, deren Bedeutung von der Wahl einer oder mehrerer Veränderlichen abhängig ist. Z. B. betrachte ich $n + 1$, die auf n folgende Zahl, als den Namen einer Zahl, aber so, daß je nach der Wahl von n verschiedene Zahlen dadurch bezeichnet werden.

Nach RUSSELL und WHITEHEAD sollen die deskriptiven Funktionen wie z. B. „Author of Waverly“ eigentlich nichts bedeuten, nämlich bloß unvollständige Symbole sein. Mir scheint diese Auffassung nicht unzweifelhaft zu sein; aber selbst wenn diese Auffassung der deskriptiven Funktionen der gewöhnlichen Sprache richtig sein sollte, so braucht man nicht die deskriptive Funktionen der Arithmetik so aufzufassen.

RUSSELL und WHITEHEAD rasonieren in folgender Weise: „Der Verfasser von Waverly“ kann nicht Scott bedeuten; denn dann würde die Aussage „Scott ist der Verfasser von Waverly“ bedeuten „Scott ist Scott“, und das ist eine ganz nichtssagende Aussage. Andererseits kann „der Verfasser von Waverly“ nicht eine andere Person bedeuten; denn dann würde die Aussage „Scott ist der Verfasser von Waverly“ falsch sein, was bekanntlich nicht der Fall ist. Folglich bedeutet „der Verfasser von Waverly“ nichts; es ist ein unvollständiges Symbol.

Dieser Beweis, der einen sehr philosophischen Charakter hat, scheint mir aber nicht ganz zwingend zu sein. Was soll uns verhindern „der Verfasser von X “ — schreiben wir kürzer $V(X)$ — als eine Art variabler Eigennamen aufzufassen? Dann ist gewiß „der Verfasser von Waverly“ ein Name derselben Person wie Scott. Die beiden Namen sind aber verschieden, und deshalb kann die Aussage „Scott ist der Verfasser von Waverly“ nicht durch die Aussage „Scott ist Scott“ ersetzt werden. Die letztere Aussage ist nichtssagend, aber nicht die erstere, und das rührt daher, daß man im voraus schon etwas von der Person, der $V(X)$ genannt wird, weiß, indem ja allgemein festgesetzt ist, daß eine Person dann und nur dann $V(X)$ genannt werden soll, wenn sie und nur sie X geschrieben hat. Die Information ist meines Erachtens von derselben Art wie im folgende Falle: Ein Mann hat zwei Eigennamen, A und B . Einmal hat man etwas von A gehört, z. B. daß er fünf Kinder hat. Ein anderes Mal wird man für Herrn B präsentiert, und es wird erzählt, daß B der Herr A ist. Diese Aussage enthält dann eine Information über B , nämlich daß B fünf Kinder hat, dadurch daß man früher etwas von A wußte. Die Aussage „ B ist A “ ist also gänzlich verschieden von den Aussagen „ A ist A “ und „ B ist B “; die letzteren sind völlig nichtssagend, aber nicht die erstere, falls schon im voraus etwas von A , aber nicht von B , oder von B , aber nicht von A , bekannt ist.

Die Anwendung des Gleichheitszeichens im folgenden ist immer so aufzufassen, daß zwei Namen oder Ausdrücke dasselbe bedeuten oder bezeichnen. Deshalb sehe ich es auch als selbstverständlich an, daß ich

überall gleiches für gleiches setzen kann und mache davon unaufhörlich Gebrauch.

Die Begriffe „natürliche Zahl“ und „die auf die Zahl n folgende Zahl $n + 1$ “ (also die deskriptive Funktion $n + 1$) und die rekurrierende Denkweise werden zu Grunde gelegt.¹

§ 1.

Die Addition.

Ich will eine deskriptive Funktion zweier Veränderlichen a und b einführen, die ich durch $a + b$ bezeichne und die Summe von a und b nennen will, indem sie für $b = 1$ eben die auf a folgende Zahl $a + 1$ bedeuten soll. Diese Funktion ist also schon für $b = 1$ für beliebige a als definiert anzusehen. Um sie allgemein zu definieren brauche ich sie dann nur für $b + 1$ für beliebige a zu definieren, wenn sie schon für b für beliebige a als definiert angenommen wird. Das geschieht durch folgende Definition:

Df. 1. $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Hierdurch wird also die Summe von a und $b + 1$ gleich der auf $a + b$ folgenden Zahl gesetzt. Ist also die Addition schon definiert für beliebige Werte von a für eine gewisse Zahl b , so ist durch Df. 1 die Addition für beliebige a für $b + 1$ erklärt und ist somit allgemein definiert. Es ist dies ein typisches Beispiel einer rekurrierenden Definition.

Satz 1. Das assoziative Gesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Beweis: Der Satz gilt für $c = 1$ kraft Df. 1. Ich nehme an, daß er für ein gewisses c für beliebige Werte von a und b gültig ist. Dann muß für beliebige Werte von a und b

$$(a) \quad a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1),$$

da nämlich nach Df. 1 $b + (c + 1) = (b + c) + 1$. Nach Df. 1 muß aber auch

$$(\beta) \quad a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1$$

sein. Der Annahme nach soll nun $a + (b + c) = (a + b) + c$ sein, woraus

$$(\gamma) \quad (a + (b + c)) + 1 = ((a + b) + c) + 1.$$

Nach Df. 1 haben wir endlich auch

$$(\delta) \quad ((a + b) + c) + 1 = (a + b) + (c + 1).$$

Aus (a), (β), (γ) und (δ) folgt

$$a + (b + (c + 1)) = (a + b) + (c + 1),$$

wodurch der Satz für $c + 1$ für unbestimmt gelassene a und b bewiesen ist. Der Satz gilt also allgemein. Dies ist ein typisches Beispiel eines rekurrierenden Beweises (Beweis durch vollständige Induktion).

¹ Der oft umständliche Formalismus der Aussagenfunktionen im folgenden rührt daher, daß diese Abhandlung in Anschluß an die RUSSELL-WHITEHEAD'schen Arbeiten geschrieben ist.

Hilfssatz: $a + 1 = 1 + a$.

Beweis: Der Satz gilt für $a = 1$. Ich beweise die Gültigkeit für $a + 1$, indem die Gültigkeit für a angenommen wird. Wir erhalten in der Tat

$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 = 1 + (a + 1)$$

kraft der gemachten Annahme und der Definition 1. Der Satz gilt also allgemein.

Satz 2. Das kommutative Gesetz: $a + b = b + a$.

Beweis: Dem Hilfssatze zufolge gilt dieser Satz für $b = 1$. Ich nehme an, daß er für beliebiges a für ein gewisses b richtig ist, und beweise dann die Richtigkeit für $b + 1$ für beliebiges a . Dies geschieht so:

$$\begin{aligned} a + (b + 1) &= (a + b) + 1 = (b + a) + 1 = b + (a + 1) = \\ &= b + (1 + a) = (b + 1) + a, \end{aligned}$$

wobei sowohl Satz 1 wie der Hilfssatz angewandt worden sind. Die funktionale Behauptung $a + b = b + a$ ist also richtig.

§ 2.

Die Relationen $<$ (kleiner als) und $>$ (größer als).

Mit der Addition eng verknüpft sind die Kleiner- und die Größerrelation, durch $<$ bzw. $>$ bezeichnet. Da die letztere Relation bloß die Umkehrung der ersteren ist, kommt es nur darauf an, die Relation $<$ zu definieren. Gewöhnlich geschieht diese Definition mit Hilfe einer scheinbaren logischen Veränderlichen, indem man von dem logischen Existenzbegriffe (oder dem RUSSELL-WHITEHEAD'schen „sometimes“) Anwendung macht. Die gewöhnliche Definition hat in der Tat das Aussehen:

$$(a < b) = \sum_x (a + x = b),$$

wenn man das SCHRÖDER'sche Zeichen der Gültigkeit in mindestens einem Falle (bei SCHRÖDER Aussagensummutation genannt und durch Σ bezeichnet) anwendet. In Worten lautet diese Definition so: „ a soll dann und nur dann kleiner als b heißen, wenn es eine Zahl x gibt so beschaffen, daß $a + x = b$ ist“. Diese Definition setzt also die Anwendung des logischen Existenzbegriffes oder m. a. W. der scheinbaren Veränderlichen voraus. Man kann doch das sehr leicht vermeiden, wenn man nämlich die Kleinerrelation rekurrierend definiert. Dies kann in der Tat so geschehen:

Df. 2. $a < 1$ ist falsch. $(a < b + 1) = (a < b) + (a = b)$.

Es ist leicht zu sehen, daß dies eine völlig legitime rekurrierende Definition ist; denn zuerst wird ja festgesetzt, wann $a < b$ gilt, wenn $b = 1$ ist, nämlich nie; und zweitens wird festgesetzt, wann die Relation $<$

zwischen einem beliebigen a und einem gewissen $b + 1$ stattfinden soll, wenn diese Relation schon für b für beliebige a definiert ist. Wie man sieht, *kommt in dieser Definition kein logisches Σ -Zeichen vor.*

Df. 2¹. $(a > b) = (b < a)$.

Satz 3. $\overline{(a < b)(b < c)} + (a < c)$, oder wenn man will: $\overline{(a < b)} + \overline{(b < c)} + (a < c)$. In Worten lautet der Satz: Aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Beweis: Der Satz ist für beliebige a und b gültig, wenn $c = 1$; denn nach Df. 2 ist $b < 1$ falsch, d. h. $\overline{(b < 1)}$ ist wahr. Ich will deshalb die Richtigkeit des Satzes für $c + 1$ beweisen, wenn er richtig für c (bei unbestimmten Werten von a und b) ist. Aus $(a < b)(b < c + 1)$ folgt nach Df. 2 entweder $(a < b)(b < c)$ oder $(a < b)(b = c)$. Aus $(a < b)(b < c)$ folgt aber der Annahme nach $a < c$, woraus nach Df. 2 $a < c + 1$. Aus $(a < b)(b = c)$ folgt natürlich auch $a < c$, woraus wieder $a < c + 1$. In jedem Falle folgt also $a < c + 1$ aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a < b$ und $b < c + 1$, so daß also der Satz auch für beliebige a und b für $c + 1$ wahr sein muß. Hierdurch ist Satz 3 bewiesen.

Df. 3. $(a \overline{\overline{<}} b) = (a < b) + (a = b)$. Df. 3¹. $(a \overline{\overline{>}} b) = (a > b) + (a = b)$.

Diese Definitionen ebenso wie Df. 2¹ bestehen bloß in der Einführung anderer Bezeichnungen; sie sind deshalb theoretisch überflüssig, was nicht mit den rekurrierenden Definitionen der Fall ist.

Hilfssatz 1 (zu Satz 4): $\overline{(a < b)} + (a + 1 \overline{\overline{>}} b)$.

In Worten: Entweder ist a nicht kleiner als b oder $a + 1$ ist kleiner oder gleich b . Es ist aber besser, es so zu sagen: Aus $a < b$ folgt $a + 1 \overline{\overline{>}} b$.

Beweis: Der Satz ist bei unbestimmtem a gültig für $b = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für beliebiges a für ein gewisses b voraus und beweise dann seine Richtigkeit für beliebiges a für $b + 1$. Aus $a < b + 1$ folgt (Df. 2) entweder $a < b$, woraus der Annahme zufolge $a + 1 \overline{\overline{>}} b$, was wieder (Df. 2) $a + 1 \overline{\overline{>}} b + 1$ gibt, oder $a = b$, woraus selbstverständlich $a + 1 = b + 1$, was (Df. 3) $a + 1 \overline{\overline{>}} b + 1$ gibt. Der Satz gilt also für beliebige Werte von a auch für $b + 1$ und ist somit allgemein gültig.

Hilfssatz 2 (zu Satz 4). $1 \overline{\overline{>}} a$.

Beweis: Der Satz gilt für $a = 1$. Aus der angenommenen Gültigkeit für a , also $1 \overline{\overline{>}} a$, folgt (Df. 2 und 3) $1 < a + 1$, was (Df. 3) $1 \overline{\overline{>}} a + 1$ gibt, d. h. der Satz gilt auch für $a + 1$.

Satz 4. $(a < b) + (a = b) + (a > b)$.

Beweis: Der Satz gilt für $b = 1$, weil nach Hilfssatz 2 entweder $a = 1$ oder $a > 1$ sein muß. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für b bei unbestimmtem a voraus und beweise seine Richtigkeit für $b + 1$ für beliebiges a . Findet nämlich dann $a < b + 1$ nicht statt, so kann (Df. 2) weder $a < b$ noch $a = b$ sein; dann soll aber der Annahme zufolge $a > b$ sein, woraus (Hilfssatz 1) $a \overline{\overline{>}} b + 1$.

Hilfssatz. $(a < b)(a + 1 < b + 1) + \overline{(a < b)(a + 1 < b + 1)}$.

Dieser Satz kann in Worten so ausgedrückt werden: Aus $a < b$ folgt $a + 1 < b + 1$ und umgekehrt.

Beweis: Aus $a < b$ folgt (Hilfssatz 1 des Satzes 4) $a + 1 \overline{\overline{<}} b$, woraus (Df. 2) $a + 1 < b + 1$. Aus $a + 1 < b + 1$ folgt (Df. 2) entweder $a + 1 < b$ oder $a + 1 = b$. Hieraus in beiden Fällen $a < b$.

Satz 5. $a < a$. D. h. eine beliebige Zahl ist nicht kleiner als sich selbst.

Beweis: Dies ist richtig für $a = 1$ (Df. 2). Ich setze die Richtigkeit für ein gewisses a voraus. Aus $a + 1 < a + 1$ würde nach dem letzten Hilfssatze $a < a$ folgen, was der gemachten Annahme widerstreitet.

Korollar zu den Sätzen 3 und 5: $(a < b) \overline{(a > b)} + \overline{(a < b)} (a > b)$.

In Worten: Ist $a < b$, so ist nicht $a > b$, und umgekehrt.

Denn wäre $a < b$ und zugleich $a > b$, so würde (Satz 3) $a < a$ folgen.

Korollar: $(a < b) + (a \neq b)^1$, d. h. wenn $a < b$ ist, so ist a verschieden von b . Denn aus $(a < b) (a = b)$ würde ja $a < a$ folgen.

Die 3 Relationen $a < b$, $a = b$, $a > b$ schließen einander also aus, während andererseits nach Satz 4 eine von ihnen in jedem Falle erfüllt sein muß.

Satz 6. $(a < b) (a + c < b + c) + \overline{(a < b)} \overline{(a + c < b + c)}$.

Beweis: Nach dem Hilfssatze zu Satz 5 ist dies jedenfalls richtig, wenn $c = 1$. Wir machen die Annahme, daß die Richtigkeit für beliebige a und b für ein gewisses c schon bewiesen ist. Aus $a < b$ folgt alsdann $a + c < b + c$, woraus kraft Satz 1 und desselben Hilfssatzes $a + (c + 1) < b + (c + 1)$. Umgekehrt folgt aus $a + (c + 1) < b + (c + 1)$ kraft Satz 1 und dieses Hilfssatzes $a + c < b + c$, woraus der Annahme nach $a < b$.

Satz 7. $\overline{(a < b)} (c < d) + (a + c < b + d)$.

D. h.: Aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis: Aus $a < b$ folgt (Satz 6) $a + c < b + c$. Aus $c < d$ folgt (Satz 2 und Satz 6) $b + c < b + d$. Aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a + c < b + c$ und $b + c < b + d$ folgt (Satz 3) $a + c < b + d$.

Dies ist ein typisches Beispiel eines nicht rekurrenten Beweises, der also bloß in einer endlichen Kombination früherer Sätze besteht, während ein Beweis durch vollständige Induktion einen unendlichen Prozeß darstellt. Wir haben übrigens schon einige andere Beispiele nicht rekurrenter Beweise gehabt. (Der Hilfssatz des Satzes 5 und die Korollaren der Sätze 3 und 5).

Satz 8. $(a + c \neq b + c) + (a = b)$.

D. h.: Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$. Daß auch die Umkehrung wahr ist, ist selbstverständlich.

Beweis: Ist $a \neq b$, so muß (Satz 4) entweder $a < b$ oder $a > b$ sein. Aus $a < b$ folgt aber (Satz 6) $a + c < b + c$ und aus $a > b$ in derselben

¹ Ich schreibe, wie man gewöhnlich tut, $a \neq b$ um auszudrücken, daß a nicht gleich b ist, also statt $(a = b)$.

Weise $a + c > b + c$, und beides läuft der Gleichung $a + c = b + c$ zuwider (Korollar des Satzes 5).

Der Spezialfall $c = 1$ dieses Satzes sagt aus, daß es nur eine Zahl geben kann, die eine bestimmte nachfolgende hat, oder m. a. W. jede Zahl kann nur *eine* vorhergehende haben.

Satz 9. $a < a + b$.

Beweis: Richtig für $b = 1$ für unbestimmtes a (Df. 2). Die Richtigkeit für beliebige a für ein gewisses b können wir dann voraussetzen. Aus $a < a + b$ erhalten wir aber weiter (Df. 2) $a < (a + b) \div 1$, d. h. $a < a + (b + 1)$ (Df. 1).

§ 3.

Die Multiplikation.

Df. 4. $a \cdot 1 = a$. $a(b + 1) = ab + a$.

Dies ist eine rekurrierende Definition einer deskriptiven Funktion ab zweier Variablen a und b , die das *Produkt* von a und b genannt wird.

Satz 10. Erstes distributives Gesetz: $a(b + c) = ab + ac$.

Beweis: Der Satz gilt für $c = 1$ (Df. 4). Wir nehmen also an, daß er für beliebiges a und b für ein gewisses c gültig ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} a(b + (c + 1)) &= a((b + c) + 1) = a(b + c) + a = (ab + ac) + a = \\ &= ab + (ac + a) = ab + a(c + 1), \end{aligned}$$

wobei von Satz 1, Df. 4 und der gemachten Annahme Gebrauch gemacht ist.

Satz 11. Das assoziative Gesetz: $a(bc) = (ab)c$.

Beweis: Der Satz gilt, wenn $c = 1$ (Df. 4). Wir setzen deshalb voraus, daß er für beliebige a und b für ein gewisses c richtig ist. Dann bekommen wir

$$a(b(c + 1)) = a(bc + b) = a(bc) + ab = (ab)c + ab = (ab)(c + 1)$$

unter Anwendung von Df. 4, Satz 10 und der gemachten Annahme.

Satz 12. Zweites distributives Gesetz: $(a + b)c = ac + bc$.

Beweis: Wenn $c = 1$, ist der Satz richtig (Df. 4). Wir nehmen an, daß er richtig ist für beliebige a und b für ein gewisses c . Dann erhalten wir unter Anwendung von Df. 4 und den Sätzen 1, 2:

$$\begin{aligned} (a + b)(c + 1) &= (a + b)c + (a + b) = (ac + bc) + (a + b) = ((ac + bc) + a) + b = \\ &= (ac + (bc + a)) + b = (ac + (a + bc)) + b = ((ac + a) + bc) + b = \\ &= (a(c + 1) + bc) + b = a(c + 1) + (bc + b) = a(c + 1) + b(c + 1). \end{aligned}$$

Hilfssatz. $1 \cdot a = a$.

Beweis: Richtig für $a = 1$ (Df. 4). Ist er für a richtig, so folgt $1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a + 1 = a + 1$, d. h. er ist auch für $a + 1$ richtig.

Satz 13. Das kommutative Gesetz: $ab = ba$.

Beweis: Dieser Satz gilt für beliebige a , wenn b gleich 1 ist. (Der Hilfssatz). Aus der angenommenen Richtigkeit für b für beliebiges a folgt (Satz 12 und der Hilfssatz)

$$a(b + 1) = ab + a = ba + a = (b + 1)a.$$

Satz 14. $(a < b)(ac < bc) + \overline{(a < b)} \overline{(ac < bc)}$.

In Worten: Aus $a < b$ folgt $ac < bc$ und umgekehrt.

Beweis: Der Satz ist selbstverständlich richtig für beliebige a und b , wenn $c = 1$ ist. Wir können deshalb annehmen, daß er für beliebige a und b für ein gewisses c gültig ist. Aus $a < b$ folgt dann $ac < bc$, woraus (Satz 7) $ac + a < bc + b$, d. h. (Df. 4) $a(c + 1) < b(c + 1)$. Die Umkehrung muß auch richtig sein; denn aus $a = b$ würde ja $ac = bc$ und aus $a > b$ nach dem bewiesenen $ac > bc$ folgen.

Korollar: $(ac \neq bc) + (a = b)$, d. h. aus $ac = bc$ folgt $a = b$.

Satz 15. $a \leq ab$.

Beweis: Richtig für $b = 1$. (Df. 4). Aus der Richtigkeit für b folgt, da (Satz 9) $ab < ab + a$ ist, nach dem Satze 3 $a < a(b + 1)$, d. h. der Satz ist auch für $b + 1$ richtig.

Korollar: Aus $ab \leq c$ folgt $a \leq c$ oder m. a. W.: $(ab > c) + (a \leq c)$.

§ 4.

Die Teilbarkeitsrelation.

Mit der Multiplikation eng verknüpft ist der Begriff der Teilbarkeit. Dieser wird immer mit Hilfe einer scheinbaren Veränderlichen definiert. Man sagt ja, daß a durch b teilbar ist, wenn es eine Zahl x gibt, so daß $a = bx$ ist. Mit Hilfe SCHRÖDER'scher Symbole nimmt diese Definition das folgende Aussehen an, wenn $D(a, b)$ die Aussagenfunktion „ a ist teilbar durch b “ bedeutet:

$$D(a, b) = \sum_x (a = bx).$$

Eine solche Definition bezieht sich auf eine unendliche — und das heißt ja undurchführbare — Arbeit, weil das Kriterium der Teilbarkeit darin besteht, ob man durch *Probieren die ganze Zahlenreihe hindurch* eine Zahl x finden kann, so beschaffen, daß $a = bx$ wird.

Es ist jedoch hier leicht, sich von der Unendlichkeit frei zu machen, die bei dieser Definition klebt. Es ist nämlich klar, daß eine Zahl x der verlangten Beschaffenheit, falls eine solche überhaupt vorkommt, unter den Zahlen 1, 2, . . . , a auftreten muß; denn aus $bx = a$ folgt nach Satz 15

$x \leq a$. Deshalb kann die Teilbarkeitsrelation genau ebenso gut wie folgt definiert werden:

$$D(a, b) = \sum_1^a (a = bx) = ((a = b) + (a = 2b) + (a = 3b) + \dots + (a = ba)).$$

Hier kommt allerdings noch eine scheinbare Veränderliche x vor; *ih*r Variationsbereich ist aber hier nur ein endlicher, nämlich bloß die Werte von 1 bis a . Deshalb gibt uns diese Definition ein endliches Kriterium der Teilbarkeit; man kann in jedem Falle die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Aussage $D(a, b)$ mit Hilfe einer endlichen Arbeit — endlich vieler Operationen — konstatieren. Da nun die SCHRÖDER'sche Aussagensumme in dieser Definition eine endliche ist, kann sie selbst wieder durch Rekursion definiert werden, und dadurch läßt sich zuletzt die Anwendung einer scheinbaren Veränderlichen ganz vermeiden. Um dies zu erreichen, brauchen wir nur zuerst eine ternäre Relation $\lrcorner(a, b, c)$ zu definieren, die bedeuten soll, daß a gleich b multipliziert mit einer Zahl zwischen 1 und c (beide inklusive) ist. Die genaue Definition von $\lrcorner(a, b, c)$ geschieht so:

Df. 5. $\lrcorner(a, b, 1) = (a = b)$. $\lrcorner(a, b, c + 1) = \lrcorner(a, b, c) + (a = b(c + 1))$.

Mit Hilfe dieser Aussagenfunktion \lrcorner wird die Teilbarkeit D so definiert:

Df. 6. $D(a, b) = \lrcorner(a, b, a)$.

Es ist sehr leicht zu sehen, daß die Aussagenäquivalenz

$$\lrcorner(a, b, c) = \sum_1^c (a = bx)$$

besteht, so daß Df. 6 mit der oben erwähnten endlichen Definition der Teilbarkeit völlig übereinstimmt. In der Tat gilt ja diese Äquivalenz für $c = 1$, weil die Aussagensumme rechts sich dann auf das eine Glied $a = b$ reduziert, und aus der Richtigkeit für c folgt die Richtigkeit für $c + 1$; denn $\sum_1^{c-1} (a = bx)$ bedeutet ja dasselbe wie $\sum_1^c (a = bx) + (a = b(c + 1))$.

Satz 16. $(a \neq bc) + \lrcorner(a, b, c)$; d. h. aus $a = bc$ folgt $\lrcorner(a, b, c)$.

Folgt unmittelbar aus Df. 5.

Satz 17. $\lrcorner(a, b, c) + (c > c') + \lrcorner(a, b, c')$.

Dies kann auch so ausgedrückt werden: Aus $\lrcorner(a, b, c) (c \leq c')$ folgt $\lrcorner(a, b, c')$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $c' = 1$. Wir nehmen an, daß der Satz richtig ist für ein gewisses c' für beliebige Werte von a, b und c . Aus $c \leq c' + 1$ folgt entweder $c \leq c'$, das mit $\lrcorner(a, b, c)$ der Annahme nach $\lrcorner(a, b, c')$ und dadurch auch (Df. 5) $\lrcorner(a, b, c' + 1)$ gibt, oder $c = c' + 1$, das mit $\lrcorner(a, b, c)$ natürlich $\lrcorner(a, b, c' + 1)$ gibt. Der Satz ist also auch richtig für $c' + 1$ für beliebige Werte von a, b und c und gilt also völlig allgemein.

Satz 18. $\overline{A(a, b, c)} + D(a, b)$. D. h. aus $A(a, b, c)$ folgt $D(a, b)$.

Beweis: Aus $A(a, b, 1)$, d. h. $a = b$, folgt, da $1 \leq a$ (Hilfssatz 2 des Satzes 4), nach Satz 17 $A(a, b, a)$, d. h. $D(a, b)$. Nehmen wir jetzt an, daß der Satz für c gültig ist. Aus $A(a, b, c + 1)$ folgt (Df. 5) entweder $A(a, b, c)$, woraus der Annahme zufolge $D(a, b)$, oder $a = b(c + 1)$, woraus (Satz 15) $c + 1 \leq a$; aber aus $A(a, b, c + 1)(c + 1 \leq a)$ folgt (Satz 17) $A(a, b, a)$, d. h. $D(a, b)$.

Korollar zu den Sätzen 16 und 18: $(a \neq bc) + D(a, b)$; d. h. aus $a = bc$ folgt $D(a, b)$.

Satz 19. $(a \neq bd) + \overline{A(b, c, e)} + A(a, c, de)$; d. h. aus $(a = bd)A(b, c, e)$ folgt $A(a, c, de)$.

Beweis: Ist $e = 1$, so ist $A(b, c, e) = (b = c)$; aus $(a = bd)A(b, c, 1)$ folgt also $a = cd$, woraus (Satz 16) $A(a, c, d)$. Wir setzen deshalb die Richtigkeit des Satzes für e (bei beliebigen a, b, c, d) voraus. Aus $(a = bd)A(b, c, e + 1)$ erhalten wir (Df. 5) entweder $(a = bd)A(b, c, e)$, woraus also $A(a, c, de)$, woraus wieder, da $de < d(e + 1)$ ist ($de < de + d$ nach Satz 9), nach dem Satze 17 $A(a, c, d(e + 1))$, oder $(a = bd)(b = c(e + 1))$, woraus $a = cd(e + 1)$, was wieder (Satz 16) $A(a, c, d(e + 1))$ gibt.

Korollar zu den Sätzen 18 und 19: $(a \neq bd) + \overline{D(b, c)} + D(a, c)$; d. h. aus $(a = bd)D(b, c)$ folgt $D(a, c)$. Denn aus $(a = bd)A(b, c, b)$ folgt (Satz 19) $A(a, c, bd)$, woraus (Satz 18) $D(a, c)$.

Satz 20. $\overline{A(a, b, d)} + \overline{D(b, c)} + D(a, c)$.

Beweis: Aus $A(a, b, 1)D(b, c)$ folgt natürlich $D(a, c)$, da $A(a, b, 1) = (a = b)$ ist. Wir setzen die Richtigkeit des Satzes für beliebige a, b und c für ein gewisses d voraus. Aus $A(a, b, d + 1)D(b, c)$ erhalten wir (Df. 5) entweder $A(a, b, d)D(b, c)$, woraus der Annahme zufolge $D(a, c)$, oder $(a = b(d + 1))D(b, c)$, woraus nach dem Korollar zu den Sätzen 18 und 19 $D(a, c)$ folgt. Hierdurch ist die Richtigkeit für $c + 1$ bewiesen.

Korollar: $\overline{D(a, b)}\overline{D(b, c)} + D(a, c)$; d. h. aus $D(a, b)D(b, c)$ folgt $D(a, c)$.

Dies ist in der Tat bloß der Spezialfall des Satzes 20, der entsteht, wenn man $d = a$ setzt.

Dieser letzte Satz, daß $D(a, c)$ aus $D(a, b)D(b, c)$ folgt, ist mit dem Satze nahe verwandt, der sagt, daß $(a = cde)$ aus $(a = bd)(b = ce)$ folgt, hat aber einen ganz anderen Sinn. Auch nach der gewöhnlichen Auffassungsweise mit Anwendung scheinbarer Variablen mit unendlichem Variationsbereich sind die beiden Sätze ihrem Inhalte nach ganz verschieden, was sofort offenbar wird, wenn beide genau formuliert werden. Der eine Satz ist in SCHRÖDER'schen Symbolen:

$$(a) \quad \prod_a \prod_b \prod_c (\overline{\sum_x (a = bx)} + \overline{\sum_y (b = cy)} + \sum_z (a = cz)).$$

Der andere Satz ist:

$$(b) \quad \prod_a \prod_b \prod_c \prod_d \prod_e ((a \neq bd) + (b \neq ce) + (a = cde)).$$

Wenn man indessen gewöhnlich die Richtigkeit des Satzes $\overline{D(a, b) + D(b, c) + D(a, c)}$ oder (a) dadurch beweist, daß man den Satz (β) beweist, so beruht das auf gewisse logische Schemata, die den Gebrauch der Π - und Σ -Zeichen betreffen; diese werden aber im gewöhnlichen mathematischen Denken stillschweigend vorbeigegangen.

Satz 21. $\overline{\Delta(a, c, d) + (b \mp ce) + \Delta(a + b, c, d + e)}$.

Beweis: Aus $\Delta(a, c, 1) (b = ce)$ oder m. a. W. $(a = c)(b = ce)$ folgt $a + b = c(1 + e)$, und daraus (Satz 16) $\Delta(a + b, c, 1 + e)$. Der Satz ist also richtig, wenn $d = 1$. Wir setzen die Richtigkeit für ein gewisses d voraus und beweisen wie folgt die Richtigkeit für $d + 1$. Aus $\Delta(a, c, d + 1) (b = ce)$ folgt entweder $\Delta(a, c, d) (b = ce)$, woraus der Annahme zufolge $\Delta(a + b, c, d + e)$, was wieder $\Delta(a + b, c, (d + 1) + e)$ zur Folge hat (Sätze 1, 2 und Df. 5), oder $(a = c(d + 1))(b = ce)$, woraus $a + b = c((d + 1) + e)$, was wieder (Satz 16) $\Delta(a + b, c, (d + 1) + e)$ zur Folge hat.

Korollar: $\overline{\Delta(a, c, d) + \Delta(b, c, 1) + \Delta(a + b, c, d + 1)}$.

Satz 22. $\overline{\Delta(a, c, d) + \Delta(b, c, e) + \Delta(a + b, c, d + e)}$.

Beweis: Nach dem Korollar des Satzes 21 gilt dies für $e = 1$. Wir setzen deshalb die Richtigkeit des Satzes für ein gewisses e voraus und beweisen die Richtigkeit für $e + 1$ wie folgt. Aus $\Delta(a, c, d) \Delta(b, c, e + 1)$ erhalten wir entweder $\Delta(a, c, d) \Delta(b, c, e)$ und daraus der Annahme zufolge $\Delta(a + b, c, d + e)$, was wieder $\Delta(a + b, c, d + (e + 1))$ zur Folge hat, oder $\Delta(a, c, d) (b = c(e + 1))$, woraus (Satz 21) $\Delta(a + b, c, d + (e + 1))$.

Korollar: $\overline{D(a, c) D(b, c) + D(a + b, c)}$.

In Worten: Wenn sowohl a wie b durch c teilbar sind, so ist auch $a + b$ durch c teilbar.

Denn aus $\Delta(a, c, a) \Delta(b, c, b)$ erhalten wir nach Satz 22 $\Delta(a + b, c, a + b)$.

Hilfssatz. $\overline{\Delta(a + b, b, c + 1) + \Delta(a, b, c)}$.

Beweis: Aus $\Delta(a + b, b, 2)$ folgt (Df. 5) entweder $a + b = b$, was aber unmöglich ist, da (Satz 9) $a + b > b$ sein muß, und die Relationen $>$ und $=$ einander ausschließen (Satz 5), oder $a + b = b \cdot 2$, woraus $b = a$ (da nämlich aus $a + b = b + b$ nach Satz 8 $a = b$ folgen muß). Unser Hilfssatz ist also richtig für $c = 1$. Wir setzen seine Gültigkeit für c voraus und beweisen sie dann für $c + 1$. Aus $\Delta(a + b, b, c + 2)$ folgt in der Tat entweder $\Delta(a + b, b, c + 1)$, woraus der Annahme zufolge $\Delta(a, b, c)$ und also auch $\Delta(a, b, c + 1)$ folgt, oder $a + b = b(c + 2)$, woraus (Satz 8) $a = b(c + 1)$, was wieder $\Delta(a, b, c + 1)$ zur Folge hat.

Indem wir von der Subtraktion vorgreifend Gebrauch machen (siehe § 5), kann man diesem Satze auch folgende Form geben: Aus $\Delta(a + b, b, c) (c > 1)$ folgt $\Delta(a, b, c - 1)$. Dies ist ja richtig, wenn $c = 1$ ist, weil die Hypothese dann falsch ist. Gilt der Satz für c , so gilt er auch für $c + 1$; denn aus $\Delta(a + b, b, c + 1)$ erhalten wir ja nach dem eben bewiesenen $\Delta(a, b, c)$, und es ist $c = (c + 1) - 1$. (Siehe Df. 7).

Satz 23. $\overline{\Delta(a + bd, b, c + d) + \Delta(a, b, c)}$.

Beweis: Im Falle $d = 1$ kommen wir zum Hilfssatze zurück. Wir setzen deshalb die Richtigkeit des Satzes für d voraus und beweisen sie für $d + 1$. Aus $\Delta(a + bd + b, b, c + d + 1)$ folgt (Df. 5) entweder $a + bd + b = b(c + d + 1)$ oder $\Delta(a + bd + b, b, c + d)$. Im ersten Falle erhalten wir, da (Satz 10) $b(c + d + 1) = bc + b(d + 1)$ ist, $a = bc$ (Satz 8), woraus $\Delta(a, b, c)$ (Satz 16). Im zweiten Falle erhalten wir, da $c + d > 1$ sein muß (Hilfssatz 2 zu Satz 4 und Satz 9), nach dem Hilfssatze $\Delta(a + bd, b, c + d - 1)$, woraus $\Delta(a + bd, b, c + d)$, was der Annahme nach $\Delta(a, b, c)$ zur Folge hat.

Satz 24. $\overline{\Delta(a + b, c, d + e)} + \overline{\Delta(b, c, e)} + \Delta(a, c, d + e)$.

Beweis: Dies ist wahr für $e = 1$; denn aus $\Delta(a + b, c, d + 1)$ ($b = c$) erhalten wir nach dem Hilfssatze des Satzes 23 $\Delta(a, c, d)$ und also auch $\Delta(a, c, d + 1)$. Wir können deshalb die Wahrheit des Satzes für e (bei beliebigen a, b, c, d) annehmen und beweisen sie dann für $e + 1$ (für beliebige Werte von a, b, c und d). Aus $\Delta(a + b, c, d + (e + 1))$ $\Delta(b, c, e + 1)$ erhalten wir entweder $\Delta(a + b, c, (d + 1) + e)$ $\Delta(b, c, e)$, was nach der Voraussetzung $\Delta(a, c, (d + 1) + e)$ oder m. a. W. $\Delta(a, c, d + (e + 1))$ zur Folge hat, oder $\Delta(a + b, c, d + (e + 1))$ ($b = c(e + 1)$), woraus (Satz 23) $\Delta(a, c, d)$, was wieder (Satz 17) $\Delta(a, c, d + e + 1)$ zur Folge hat.

Korollar. $\overline{D(a + b, c)} \overline{D(a, c)} + \overline{D(b, c)}$.

Denn erstens muß (Satz 24) $\Delta(b, c, a + b)$ aus $\Delta(a + b, c, a + b)$ $\Delta(a, c, a)$ folgen, und zweitens ist (Satz 18) $\overline{D(b, c)}$ eine Folge von $\Delta(b, c, a + b)$.

Nach der Einführung der Subtraktion wird man diesen Satz auch so schreiben können: $\overline{(a > b)} + \overline{D(a, c)} + \overline{D(b, c)} + \overline{D(a - b, c)}$.

D. h. wenn a und b beide durch c teilbar sind, und a größer als b ist (damit eine Differenz $a - b$ existieren soll), so ist $a - b$ durch c teilbar.

Satz 25. $\overline{\Delta(a, b, c)} + (a \geq b)$.

Beweis: Der Satz gilt selbstverständlich für $c = 1$. Wird seine Gültigkeit für c vorausgesetzt, so erhalten wir aus $\Delta(a, b, c + 1)$ entweder $\Delta(a, b, c)$, was also $a \geq b$ gibt, oder $a = b(c + 1)$, woraus auch $a \geq b$ folgt (Satz 15).

Korollar 1. $\overline{D(a, b)} + (a \geq b)$.

Korollar 2. $\overline{D(a, b)} + \overline{D(b, a)} + (a = b)$.

Denn aus $(a \geq b)$ ($b \geq a$) muß (Satz 5) ja $a = b$ folgen.

Satz 26. $\Delta(a, b, d)$ $\Delta(ac, bc, d) + \overline{\Delta(a, b, d)}$ $\overline{\Delta(ac, bc, d)}$.

In Worten: Aus $\Delta(a, b, d)$ folgt $\Delta(ac, bc, d)$ und umgekehrt.

Beweis: Der Satz ist wahr, wenn $d = 1$ ist; denn aus $ac = bc$ folgt ja nach dem Korollar des Satzes 14 $a = b$, und umgekehrt folgt aus $a = b$ natürlich $ac = bc$. Wir setzen die Richtigkeit für d voraus und beweisen die Richtigkeit für $d + 1$. Aus $\Delta(a, b, d + 1)$ erhalten wir entweder $\Delta(a, b, d)$, was der Annahme nach $\Delta(ac, bc, d)$ und also auch $\Delta(ac, bc, d + 1)$ zur Folge hat, oder $a = b(d + 1)$, woraus $ac = (b(d + 1))c = b((d + 1)c) = b(c(d + 1)) = (bc)(d + 1)$ (Sätze 11, 13), und aus $ac = bc(d + 1)$ folgt wieder (Satz 16) $\Delta(ac, bc, d + 1)$. Ebenso erhalten wir aus $\Delta(ac, bc, d + 1)$ entweder $\Delta(ac, bc, d)$, woraus also $\Delta(a, b, d)$ und also auch $\Delta(a, b, d + 1)$,

oder $ac = bc(d + 1) = b(d + 1)c$, woraus zufolge dem Korollar des Satzes 14 $a = b(d + 1)$, woraus (Satz 16) $\Delta(a, b, d + 1)$.

Korollar: $D(a, b) D(ac, bc) + \overline{D(a, b)} \overline{D(ac, bc)}$.

Satz 27. $(a \mp bd) + \overline{\Delta(d, c, e)} + \Delta(a, bc, e)$.

Beweis: Richtig für $e = 1$. Wir setzen deshalb die Richtigkeit für e voraus und beweisen sie für $e + 1$. Aus $\Delta(d, c, e + 1)$ erhalten wir entweder $\Delta(d, c, e)$, das mit $a = bd$ der Annahme nach $\Delta(a, bc, e)$ und also auch $\Delta(a, bc, e + 1)$ gibt, oder $d = c(e + 1)$, das mit $a = bd$ uns $a = (bc)(e + 1)$ (Satz 11) gibt, woraus $\Delta(a, bc, e + 1)$ (Satz 16).

§ 5.

Subtraktion und Division. Deskriptive Funktionen mit eingeschränktem Existenzbereich.

Die Subtraktion kann bekanntlich in folgender Weise definiert werden:
Df. 7. $(c - b = a) = (c = a + b)$.

Daß hierdurch eine deskriptive Funktion $c - b$, die Differenz genannt, definiert wird, ist klar; denn durch die Gleichung $a + b = c$ ist a eindeutig bestimmt durch b und c . Es wird aber dies eine deskriptive Funktion mit eingeschränktem Existenzbereich; denn wenn $c \leq b$ ist, kann eine Gleichung der Form $c = a + b$ nicht bestehen, und nach Df. 7 besteht dann für jede Zahl a die Ungleichheit $c - b \mp a$, d. h. $c - b$ ist nicht gleich einer Zahl. Andererseits läßt sich beweisen, daß $c - b$ sicher einen Wert hat, wenn $c > b$ ist. Diesen Satz wird man geneigt sein, so zu formulieren:

$$\overline{(c > b)} + \sum_x (x + b = c),$$

wo die Aussagensummation in bezug auf x über „alle“ Zahlen von 1 bis ∞ zu erstrecken wäre. Allein es ist auch hier nicht nötig, eine solche aktuelle Unendlichkeit heranzuziehen; wir können in der Tat den folgenden Satz beweisen:

$$\overline{(c > b)} + \sum_1^c (x + b = c),$$

der ja noch eher hinreicht, um die Existenz eines Wertes von $c - b$ zu sichern. Die Aussagenfunktion der drei Variablen x, y, z

$$\sum_1^z (u + y = x) = L(x, y, z)$$

läßt sich aber wieder rekurrierend definieren, so daß wir die scheinbare Variable u ganz vermeiden können. Der Satz, der bewiesen werden soll, ist dann augenscheinlich:

Satz 28: $c > b + L(c, b, c)$.

In Worten lautet dieser Satz in der Tat so: Ist $c > b$, so gibt es unter den Zahlen von 1 bis c eine Zahl x so beschaffen, daß $x + b = c$ oder m. a. W. $x = c - b$ ist.

Wir brauchen die rekurrierende Definition der Funktion L und ein Paar einfache Sätze über sie.

Df. 8. $L(x, y, 1) = (x = 1 + y)$, $L(x, y, z + 1) = L(x, y, z) + (x = (z + 1) + y)$.

Satz 29. $\overline{L(x, y, z) (z \leq z')} + L(x, y, z')$.

Beweis: Richtig, wenn $z' = 1$. Ich setze die Richtigkeit für z' voraus und beweise dadurch die Richtigkeit für $z' + 1$. Aus $z \leq z' + 1$ folgt in der Tat entweder $z \leq z'$, das mit $L(x, y, z)$ der Annahme nach $L(x, y, z')$ und also (Df. 8) auch $L(x, y, z' + 1)$ gibt, oder $z = z' + 1$, das mit $L(x, y, z)$ selbstverständlich $L(x, y, z' + 1)$ gibt.

Satz 30. $\overline{L(x, y, z) + L(x + 1, y, z + 1)}$.

Beweis: Richtig, wenn $z = 1$; denn aus $x = 1 + y$ folgt ja $x + 1 = (1 + y) + 1 = 1 + (y + 1) = 1 + (1 + y) = (1 + 1) + y$ (Sätze 1 und 2). Ich setze die Richtigkeit für z voraus und beweise sie für $z + 1$. Aus $L(x, y, z + 1)$ folgt (Df. 8) entweder $L(x, y, z)$, woraus nach der gemachten Voraussetzung $L(x + 1, y, z + 1)$ und also weiter auch $L(x + 1, y, z + 2)$ folgt, oder $x = (z + 1) + y$, woraus $x + 1 = ((z + 1) + y) + 1 = (z + 1) + (y + 1) = (z + 1) + (1 + y) = (z + 2) + y$ (Satz 1 und 2), woraus (Df. 8) $L(x + 1, y, z + 2)$.

Jetzt kann der Beweis des Satzes 28 geführt werden:

Satz 28 ist jedenfalls richtig, wenn $c = 1$; denn $1 > b$ ist ja schon wahr. Ich setze deshalb die Richtigkeit für c voraus und beweise die Richtigkeit für $c + 1$. Aus $c + 1 > b$ erhalten wir (siehe Hilfssatz 1 des Satzes 4, Hilfssatz des Satzes 5 und Satz 8) entweder $c > b$, was nach der gemachten Voraussetzung uns $L(c, b, c)$ gibt, woraus wieder (Satz 30) $L(c + 1, b, c + 1)$ folgt, oder $c = b$, woraus $c + 1 = b + 1 = 1 + b$ (Satz 2) und daraus (Df. 8) $L(c + 1, b, 1)$ und daraus wieder (Satz 29) $L(c + 1, b, c + 1)$.

In analoger Weise wie die Subtraktion wird die Division eingeführt.

Df. 9. $\left(\frac{c}{b} = a\right) = (c = ab)$.

Dieser sogenannte Quotient $\frac{c}{b}$ ist augenscheinlich wieder eine Funktion mit begrenzter Existenz; denn aus $c = ab$ folgt ja (Korollar der Sätze 16 und 18) $D(c, b)$, so daß $\frac{c}{b}$ nur dann einen Wert hat, wenn $D(c, b)$ wahr ist. Umgekehrt ist dies auch hinreichend; denn die Aussage $D(c, b)$ oder m. a. W. $A(c, b, c)$ (siehe Df. 6) ist ja mit der Aussagensumme

$$\sum_1^c (c = bx)$$

gleichbedeutend (siehe S. 11), und $(c = bx) = (c = xb)$, so daß diese Aussagensumme in Worten so lauten kann:

Es gibt unter den Zahlen von 1 bis c eine Zahl x , so daß $c = xb$ oder m. a. W. $\frac{c}{b} = x$ ist.

Die Aussagenfunktion $D(c, b)$ ist deshalb mit der Behauptung der Existenz eines Wertes von $\frac{c}{b}$ (zwischen 1 und c) völlig gleichbedeutend.

Ich stelle hier einige einfache Sätze über die Differenzen und Quotienten auf. Die trivialen Beweise brauche ich wohl nicht aufzustellen; diese Sätze sind ja bloße Umformungen der einfachsten Sätze über Summen und Produkte.

Satz 31₊. $(a - b) + b = c.$

Satz 31_×. $\frac{a}{b} \cdot b = a.$

„ 32₊. $(a - b) + c = (a + c) - b.$

„ 32_×. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$

„ 33₊. $(a - b) - c = a - (b + c).$

„ 33_×. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}.$

„ 34₊. $a - (b - c) = (a - b) + c.$

„ 34_×. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{b} \cdot c.$

„ 35. $(a - b)c = ac - bc.$

„ 36a. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$

„ 36b. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$

§ 6.

Grösster gemeinschaftlicher Divisor und kleinstes gemeinschaftliches Multiplum.

Bei der gewöhnlichen Definition des größten gemeinschaftlichen Teilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Zahlen werden scheinbare Veränderlichen mit unendlichem Variationsbereich angewandt. In SCHRÖDER'schen Symbolen haben diese Definitionen in der Tat folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} (c \text{ grösster gem. Teiler von } a \text{ und } b) &= \\ &= D(a, c) D(b, c) \Pi \left(\overline{D(a, x)} + \overline{D(b, x)} + D(c, x) \right). \end{aligned}$$

$$(c \text{ kleinstes gem. Vielfaches von } a \text{ und } b) = \\ = D(c, a) D(c, b) \Pi_x (\overline{D(x, a)} + \overline{D(x, b)} + D(x, c)).$$

Da indessen $x \leq a$ aus $D(a, x)$ folgt (Korollar 1 des Satzes 25), so läßt sich der unendliche Variationsbereich in der Definition des größten gemeinschaftlichen Teilers sofort auf einen endlichen einschränken, indem wir ebenso gut schreiben können:

$$(c \text{ größter gemeinschaftlicher Teiler von } a \text{ und } b) = \\ = D(a, c) D(b, c) \Pi_x^a (\overline{D(a, x)} + \overline{D(b, x)} + D(c, x)).$$

Es ist allerdings hier ein Nachteil, daß die Definition unsymmetrisch in bezug auf a und b wird. Dies läßt sich aber auch leicht vermeiden, indem man statt der oberen Grenze a beim Π -Zeichen natürlich auch $a + b$ schreiben kann oder noch besser $\text{Min}(a, b)$, wenn $\text{Min}(a, b)$ die kleinere der Zahlen a und b bedeutet. Für die Definition des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ist eine solche Reduktion zu einem endlichen Variationsbereich nicht ganz so einfach durchführbar. — Ich werde im folgenden diese Begriffe in einer anderen Weise einführen, wobei scheinbare Veränderliche ganz vermieden werden. Ich muß dabei allerdings das rekurrierende Definitionsverfahren in einer (wie ich bald zeigen soll, aber bloß scheinbar) anderen Weise als früher anwenden. Bisher ist immer die rekurrente Definition streng in der Weise geschehen, daß wir einen Begriff für die Zahl 1 definierten und dann für $n + 1$, indem die Definition für eine beliebig gegebene Zahl n schon als fertig angenommen wurde. Weiter kommt auch ein formal logisches Prinzip hier zur Anwendung, nämlich, daß wir für Fälle, die einander gegenseitig ausschließen, besondere Definitionen aufstellen können. Ich führe zwei deskriptive Funktionen, $a \wedge b$ und $a \vee b$, zweier Veränderlichen a und b ein, deren Identität mit dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen nachher gezeigt wird.

$$\text{Df. 10. } ((a \neq b) + (a \wedge b = a)) (\overline{(a > b)} + (a \wedge b = (a - b) \wedge b)) \\ (\overline{(a < b)} + (a \wedge b = a \wedge (b - a))).$$

Dies ist eine vollkommen legitime rekurrierende Definition der deskriptiven Funktion $a \wedge b$; denn setzt man voraus, daß sie schon für solche Werte von a und b , für welche $a + b < n$ ist, definiert ist, so wird sie durch Df. 10 für $a + b = n$ definiert. Denn sind a und b zwei solche Zahlen, daß $a + b = n$ ist, so ist entweder $a = b$ oder $a > b$ oder $a < b$, und diese drei Fälle schließen einander aus, während Df. 10 in jedem Falle bestimmt, was $a \wedge b$ bedeuten soll. Außerdem gibt uns Df. 10 den Wert von $a \wedge b$ in dem Falle $a + b = 2$, wobei $a = b = 1$ sein muß.

In den Beweisen einiger der folgenden Sätze werde ich auch die vollständige Induktion in einer (allerdings wie ich bald zeigen will bloß scheinbar) anderen Weise als früher anwenden. Bisher ist immer dieser Induktionsschluß so geschehen: Wir beweisen einen Satz für die Zahl 1 und

dann für $n + 1$, indem die Gültigkeit für n vorausgesetzt war. Jetzt werde ich auch so induktiv beweisen: Ich beweise für 1 und dann für n , indem die Gültigkeit für eine beliebige Zahl $< n$ vorausgesetzt wird.

Hilfssatz: $a \wedge 1 = 1$.

Beweis: Richtig für $a = 1$ zufolge Df. 10. Wird die Richtigkeit für a vorausgesetzt, erhalten wir nach Df. 10, da $a + 1 > 1$ ist (Satz 9), daß $(a + 1) \wedge 1 = a \wedge 1$ ist, und also ist auch $(a + 1) \wedge 1 = 1$.

Ebenso läßt sich beweisen, daß $1 \wedge a = 1$ ist. Überhaupt ist natürlich $a \wedge b = b \wedge a$.

Satz 37. $D(a, a \wedge b) D(b, a \wedge b)$.

Beweis. Dieser Satz ist richtig für beliebige b für $a = 1$ und für beliebige a für $b = 1$; denn nach dem Hilfssatz ist $a \wedge 1 = 1 \wedge b = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für $a + b < n$ voraus und beweise dann die Richtigkeit für $a + b = n$. Ist nämlich erstens $a = b$, so ist nach Df. 10 $a \wedge b = a$, und folglich gilt der Satz. Ist zweitens $a > b$, so ist $(a - b) + b < n$, und der Annahme zufolge gilt dann $D(a - b, (a - b) \wedge b) D(b, (a - b) \wedge b)$. Nach Df. 10 ist aber $(a - b) \wedge b = a \wedge b$, und wir erhalten also $D(a - b, a \wedge b) D(b, a \wedge b)$, woraus nach dem Korollar des Satzes 22 und dem Satze 31₊ auch $D(a, a \wedge b)$ folgt. Der Satz ist also auch in diesem Falle richtig. Ist drittens $a < b$, kann man genau analog verfahren.

Satz 38. $\overline{D(a, c) D(b, c)} + D(a \wedge b, c)$.

Beweis: Der Satz gilt, wenn $a = 1$, für beliebige b und für beliebige a für $1 = b$; denn dann folgt aus $D(a, c)$ bzw. $D(b, c)$, daß $c = 1$ ist. Ich setze die Gültigkeit des Satzes für solche a und b , daß $a + b < n$ ist, voraus und beweise daraus die Gültigkeit für solche a und b , daß $a + b = n$ ist. Es seien also a und b solche Zahlen, daß $a + b = n$ ist. Erstens kann dann $a = b$ sein; nach Df. 10 ist in diesem Falle $a \wedge b = a$, und der Satz ist also richtig. Zweitens kann $a > b$ sein. Da $(a - b) + b < n$ wird, soll der Annahme nach $D((a - b) \wedge b, c)$ aus $D(a - b, c) D(b, c)$ folgen; es ist aber wieder $D(a - b, c)$ eine Folge von $D(a, c) D(b, c)$ (Korollar des Satzes 24) und endlich ist (Df. 10) in diesem Falle $(a - b) \wedge b = a \wedge b$. Also folgt $D(a \wedge b, c)$ aus $D(a, c) D(b, c)$. Im dritten Falle, $a < b$, geht es genau ebenso.

Die Sätze 37 und 38 drücken zusammen die charakteristischen Eigenschaften des größten gemeinschaftlichen Teilers aus.

Satz 39. $\overline{D(a, b)} + (a \wedge b = b)$.

Beweis: Dem Satze 37 zufolge haben wir $D(b, a \wedge b)$. Andererseits folgt $D(a \wedge b, b)$ aus $D(a, b) D(b, b)$ (Satz 38). Aus $D(b, a \wedge b) D(a \wedge b, b)$ folgt aber $a \wedge b = b$ (Korollar 2, Satz 25).

Korollar: $ab \wedge a = a$.

Satz 40. $ac \wedge bc = (a \wedge b)c$.

Beweis: Der Satz ist richtig für beliebige a für $b = 1$ und für beliebige b für $a = 1$, wie aus dem Hilfssatze des Satzes 37 und dem Korollar

des Satzes 39 sofort folgt. Wir nehmen deshalb die Gültigkeit des Satzes für $a + b < n$ schon als bewiesen an und beweisen auf dieser Grundlage die Gültigkeit für solche a und b , daß $a + b = n$ ist. Erstens kann $a = b$ sein. Dann ist auch $ac = bc$, und nach Df. 10 haben wir $ac \wedge bc = ac$ und $a \wedge b = a$, wodurch $ac \wedge bc = (a \wedge b)c$ wird. Der zweite Fall ist $a > b$. Da $(a - b) + b < n$ wird, so ist nach der gemachten Voraussetzung $(a - b)c \wedge bc = ((a - b) \wedge b)c$. Außerdem ist aber $a \wedge b = (a - b) \wedge b$, und da auch $ac > bc$ wird (Satz 14), muß nach Df. 10 $(ac - bc) \wedge bc = ac \wedge bc$ sein. Endlich ist $(a - b)c = ac - bc$ (Satz 35). Also gilt die Gleichung $ac \wedge bc = (a \wedge b)c$. Im dritten Falle, $a < b$, geht es natürlich ebenso.

Definition: Wir sagen, daß zwei Zahlen a und b *relativ prim* sind, wenn $a \wedge b = 1$ ist. Ich führe kein besonderes Symbol dafür ein, da wir ja immer die kurze Gleichung $a \wedge b = 1$ als Ausdruck dafür anwenden können.

Satz 41. $\overline{D(ac, b)(a \wedge b = 1)} + D(c, b)$.

Dies ist der bekannte Satz, daß eine Zahl b , die in einem Produkt ac aufgeht, während sie zum Faktor a relativ prim ist, in dem anderen Faktor c aufgehen muß.

Beweis: Aus $D(ac, b)D(bc, b)$ folgt (Satz 38) $D(ac \wedge bc, b)$. Aus $a \wedge b = 1$ folgt aber (Satz 40) $ac \wedge bc = c$, so daß also $D(c, b)$ wahr werden muß.

Satz 42. $\overline{(a \wedge b = 1)D(a, a') + (a' \wedge b = 1)}$.

Beweis: Dem Satze 37 zufolge gilt $D(a', a' \wedge b)D(b, a' \wedge b)$; aus $D(a, a')D(a', a' \wedge b)$ folgt aber (Korollar des Satzes 20) $D(a, a' \wedge b)$, das mit $D(b, a' \wedge b)$ (Satz 38) $D(a \wedge b, a' \wedge b)$ gibt. Dann muß also aus $(a \wedge b = 1)D(a, a')$ sicher $a' \wedge b = 1$ folgen; denn aus $D(1, a)$ folgt $a = 1$ (Korollar 1, Satz 25).

Satz 43. $(a \wedge b \neq 1) + (a \wedge c \neq 1) + (a \wedge bc = 1)$.

Beweis: Geht eine Zahl d sowohl in a als in bc auf, muß (Satz 42) sowohl $d \wedge b = 1$ wie $d \wedge c = 1$ sein, falls $(a \wedge b = 1)(a \wedge c = 1)$ besteht. Weiter muß aus $D(bc, d)(c \wedge d = 1)$ nach Satz 41 $D(b, d)$ folgen. Aus $D(b, d)$ folgt aber $b \wedge d = d$ (Satz 39); andererseits war $b \wedge d = 1$; also $d = 1$. Nun geht aber (Satz 37) $a \wedge bc$ sowohl in a als in bc auf; also ist $a \wedge bc = 1$.

Satz 44 (Verallgemeinerung des Satzes 41). $\overline{D(ac, b)} + D\left(c, \frac{b}{a \wedge b}\right)$.

Beweis: Erstens ist klar, daß $\frac{a}{a \wedge b} \wedge \frac{b}{a \wedge b} = 1$ sein muß; denn nach dem Satze 40 haben wir $\left(\frac{a}{a \wedge b} \wedge \frac{b}{a \wedge b}\right)(a \wedge b) = (a \wedge b)$. Aus $D(ac, b)$ folgt (Satz 26, Korollar) $D\left(\frac{ac}{a \wedge b}, \frac{b}{a \wedge b}\right)$, woraus nach Satz 41, da $\frac{a}{a \wedge b}$ und $\frac{b}{a \wedge b}$ relativ prim sind, $D\left(c, \frac{b}{a \wedge b}\right)$.

$$\text{Df. 11. } a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b}.$$

$$\text{Satz 45. } \overline{A(a, b, d) D(a, c)} + A(a, b \vee c, d).$$

Beweis: Richtig, wenn $d = 1$; denn aus $(a = b) D(a, c)$ folgt $D(b, c)$, woraus (Satz 39) $b \wedge c = c$ und folglich nach Df. 11 $b \vee c = b$. Ich setze die Richtigkeit für d voraus und beweise sie für $d + 1$. Aus $A(a, b, d + 1)$ folgt entweder $A(a, b, d)$, das mit $D(a, c)$ der Annahme nach $A(a, b \vee c, d)$ und also auch $A(a, b \vee c, d + 1)$ gibt, oder $a = b(d + 1)$, das mit $D(a, c)$

(Satz 44) $D\left(d + 1, \frac{c}{b \wedge c}\right)$ gibt. Mit Hilfe des Satzes 27 erhalten wir

aber aus $(a = b(d + 1)) D\left(d + 1, \frac{c}{b \wedge c}\right)$ wieder $A(a, b \vee c, d + 1)$.

$$\text{Satz 46. } D(a \vee b, a) D(a \vee b, b).$$

Nach dem Satze 37 gilt $D(a, a \wedge b)$, woraus (Satz 26, Korollar) $D\left(\frac{ab}{a \wedge b}, b\right)$, d. h. $D(a \vee b, b)$. Ebenso erhält man aus $D(b, a \wedge b)$ die Wahrheit von $D(a \vee b, a)$.

$$\text{Satz 47. } \overline{D(c, a) D(c, b)} + D(c, a \vee b).$$

Dies ist bloß ein Spezialfall des Satzes 45, der durch Gleichsetzen von d und a entsteht.

Die Sätze 46 und 47 drücken zusammen die charakteristischen Eigenschaften des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Zahlen a und b aus. Es bedeutet also $a \vee b$ das kleinste gemeinsame Multiplum von a und b .

Ein wichtiger Spezialfall von Satz 47 ist der, da $a \wedge b = 1$ ist. Aus $D(c, a) D(c, b) (a \wedge b = 1)$ folgt $D(c, ab)$.

Dem Satze 39 entsprechend haben wir:

$$\text{Satz 48. } \overline{D(a, b)} + (a \vee b = a).$$

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus dem Satze 39 und der Definition 11.

Dem Satze 40 entsprechend haben wir:

$$\text{Satz 49. } ac \vee bc = (a \vee b) c.$$

$$\text{Beweis: } ac \vee bc = \frac{ac \cdot bc}{ac \wedge bc} = \frac{ac \cdot bc}{(a \wedge b) c} = \frac{ab \cdot c}{a \wedge b} = (a \vee b) c,$$

wobei von den Sätzen 11, 13, 32 und 40 Anwendung gemacht ist.

Ich will diesen Paragraphen damit schließen einen Beweis dafür zu geben, daß die oben angewandten weitläufigeren Arten der rekurrierenden Definition und des rekurrierenden Beweises sich bloß formal, nicht real, von dem gewöhnlichen einfachen Rekursionsverfahren von n auf $n + 1$ unterscheiden. Die normale Form der rekurrenten Definition besteht ja darin, daß eine Aussagenfunktion $U(x)$ zuerst für $x = 1$ definiert wird und dann für $x = n + 1$, wenn $U(n)$ schon definiert ist. Oben haben wir aber auch so rekurrierend definiert: Zuerst $U(1)$ und dann $U(n)$, wenn $U(m)$

für beliebige $m < n$ als definiert angenommen war. Es ist klar, daß der Wert der Aussagenfunktion $U(y) (y \leq x)$ für beliebige gewählte x und y bekannt sein wird, falls $U(y)$ für die betreffenden y definiert ist; aber umgekehrt wird auch bekannt sein, ob $U(y)$ wahr oder falsch ist für ein $y \leq x$, wenn $U(y) (y \leq x)$ für die betreffenden x und y definiert ist. Um $U(x)$ zu definieren, wird es also hinreichen $U(y) (y \leq x)$ für beliebige x und y zu definieren, wobei aber bemerkt werden kann, daß für jedes Wertepaar (x, y) , für welches $y > x$ ist, $U(y) (y \leq x)$ notwendig falsch sein muß. Um den Wert von $U(y) (y \leq x)$ allgemein zu bestimmen, können wir nun das normale rekurrierende Verfahren anwenden. Für $x = 1$ ist $U(y) (y \leq x)$ notwendig falsch nach der Definition der Kleinerrelation, wenn $y > 1$ ist; wir haben also bloß $U(1)$ zu bestimmen, um den Wert von $U(y) (y \leq 1)$ für beliebige y zu haben. Weiter bestimmen wir den Wert von $U(y) (y \leq x)$ für $x + 1$ für beliebige y , falls er für x für beliebige y schon bestimmt ist. Ist $y > x + 1$, ist $U(y) (y \leq x + 1)$ falsch. Ist $y \leq x$, kennen wir schon den Wert der Aussagenfunktion, d. h. wir haben bloß $U(x + 1)$ zu bestimmen. Also: *Die Bestimmung des Wertes von $U(x + 1)$, wenn diese Funktion für beliebige $y < x + 1$ als bekannt angesehen wird, ist nichts anderes als die Bestimmung des Wertes der Aussagenfunktion $U(x) (y \leq x)$ für $x = n + 1$ für beliebige y , wenn sie für $x = n$ für beliebige y schon bekannt ist.* Hierdurch ist also die scheinbar abweichende Art der rekurrierenden Definition auf die normale Form derselben zurückgeführt.

Ebenso ist es leicht zu sehen, daß die weitläufigere Form des Induktionsschlusses, darin bestehend, daß man für n beweist, wenn die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes für beliebige $m < n$ angenommen wird, sich bloß formal und nicht real von der Normalform des Induktionsschlusses, dem Schlusse von n auf $n + 1$, unterscheidet. Daß $U(y)$ bewiesen ist für beliebige $y < x$ ist ja damit gleichbedeutend, daß $(y \geq x) + U(y)$ für dieses x für beliebige y bewiesen ist, und es ist dann nicht schwer zu sehen, daß der Beweis von $U(x)$, wenn $U(y)$ für beliebige $y < x$ als richtig angenommen wird, damit gleichbedeutend ist $(y \geq x + 1) + U(y)$ für beliebige y zu beweisen, wenn $(y \geq x) + U(y)$ für beliebiges y schon bewiesen ist.

§ 7.

Der Begriff der Primzahl.

Df. 12. $P(x, 1)$ wahr. $P(x, y + 1) = P(x, y) ((x = y + 1) + \overline{D(x, y + 1)})$.

Df. 13. $P(x) = P(x, x) (x \neq 1)$.

Die Aussagenfunktion $P(x)$ bedeutet: „ x ist eine Primzahl“.

Df. 14. $De(x, 1)$ falsch. $De(x, y + 1) = De(x, y) + D(x, y + 1) (y + 1 < x)$.

Df. 15. $Dp(x, 1)$ falsch. $Dp(x, y + 1) = Dp(x, y) +$
 $+ D(x, y + 1)P(y + 1).$

Df. 16. $T(1)$ wahr. $T(x + 1) = T(x)Dp(x + 1, x + 1).$

Bei der gewöhnlichen Definition des Primzahlbegriffes wird eine scheinbare Veränderliche benutzt. Wird die Teilbarkeitsrelation schon als definiert angesehen, so geschieht die Primzahldefinition wie folgt:

$$P(x) = (x \nmid 1) \prod_y (\overline{D(x, y)} + (y = 1) + (y = x))$$

Es kommt hier ein unendliches Aussagenprodukt (oder m. a. W. das RUSSELL-WHITEHEAD'sche „always“) vor. In den obigen Definitionen 12 und 13 kommt aber keine scheinbare Veränderliche vor. Die Möglichkeit dafür, das unendliche Aussagenprodukt zu vermeiden, steckt darin, daß dies sofort durch ein endliches ersetzt werden kann. Nach dem Korollar des Satzes 25 muß ja $y \leq x$ sein, falls $D(x, y)$ wahr ist, und daraus folgt, daß in dem unendlichen Produkte alle Faktoren, wo $y > x$ ist, wirkungslos werden. Deshalb können wir $P(x)$ ebenso gut so definieren:

$$P(x) = (x \nmid 1) \prod_1^x (\overline{D(x, y)} + (y = 1) + (y = x)).$$

Das hier vorkommende endliche Aussagenprodukt ist gar nicht anderes als der Faktor $P(x, x)$ rechts in Df. 13, wobei $P(x, y)$ durch Df. 12 rekurrent definiert ist und mit dem Produkte

$$\prod_1^y (\overline{D(x, z)} + (z = x))$$

gleichbedeutend ist. Eben weil diese Aussagenprodukte endlich sind, können sie rekurrend definiert werden, wodurch die scheinbaren Veränderlichen völlig vermieden werden.

Die übrigen oben eingeführten Aussagenfunktionen De , Dp und T haben, wie leicht einzusehen ist, in Worten folgende Bedeutungen:

$De(x, y)$ bedeutet: ‚ x ist durch eine Zahl teilbar, die > 1 , $\leq y$ und $< x$ ist‘.

$Dp(x, y)$ bedeutet: ‚ x ist durch eine Primzahl, die $\leq y$ ist, teilbar‘.

$T(x)$ bedeutet, daß alle Zahlen von 2 bis x durch mindestens eine Primzahl $\leq x$ teilbar sind.

Satz 50. $P(x, y)D(x, z)(z \leq y) + (z = 1) + (z = x).$

Beweis: Wenn $y = 1$ ist, so ist der Satz selbstverständlich richtig. Ich beweise den Satz für $y + 1$ unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für y . Aus $z \leq y + 1$ folgt entweder $z \leq y$ oder $z = y + 1$. Aus $z \leq y$ in Verbindung mit $P(x, y)$, das ja aus $P(x, y + 1)$ folgt, und $D(x, z)$ erhalten wir der Annahme nach entweder $z = 1$ oder $z = x$. Aus $z = y + 1$ in Verbindung mit $(x = y + 1) + \overline{D(x, y + 1)}$, das ja auch aus $P(x, y + 1)$ folgt, und $D(x, z)$ erhalten wir $z = x$.

Korollar: $\overline{P(x) D(x, y)} + (y = 1) + (y = x)$.

Denn aus $P(x, x) (x \neq 1) D(x, y)$ folgt ja (Satz 25) $P(x, x) D(x, y)$ ($y \leq x$), woraus nach dem eben bewiesenen Satze $(y = 1) + (y = x)$.

Satz 51. $\overline{P(y)} + D(x, y) + (x \wedge y = 1)$.

Beweis: Da $D(y, x \wedge y)$ wahr ist (Satz 37), muß, wenn $P(y)$ gilt, nach dem Korollar des Satzes 50 entweder $x \wedge y = 1$ oder $x \wedge y = y$ sein; aber aus $x \wedge y = y$ folgt $D(x, y)$ (Satz 37).

Satz 52. $\overline{D(xy, z) P(z)} + D(x, z) + D(y, z)$.

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satze gilt, wenn $P(z)$ wahr ist, entweder $D(x, z)$ oder $x \wedge z = 1$. Aus $D(xy, z) P(z)$ muß also entweder $D(x, z)$ oder $D(xy, z) (x \wedge z = 1)$ folgen; aber aus $D(xy, z) (x \wedge z = 1)$ folgt wieder (Satz 41) $D(y, z)$.

Satz 53. $P(x, y) + De(x, y)$.

Beweis: Richtig für $y = 1$, weil schon $P(x, 1)$ wahr ist (Df. 12). Ich setze die Richtigkeit dieses Satzes für y voraus und beweise auf dieser Grundlage die Richtigkeit für $y + 1$. Aus $\overline{P(x, y + 1)}$ folgt (Df. 12) entweder $\overline{P(x, y)}$, woraus also $De(x, y)$ und folglich auch $De(x, y + 1)$ (Df. 14), oder $x \neq y + 1) D(x, y + 1)$, woraus (Korollar 1, Satz 25) $D(x, y + 1) (y + 1 < x)$, was kraft Df. 14 $De(x, y + 1)$ gibt.

Satz 54. $(y \leq y') \overline{Dp(x, y)} + Dp(x, y')$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $y' = 1$. Ich setze die Richtigkeit für y' voraus und beweise den Satz dann für $y' + 1$. Aus $y \leq y' + 1$ folgt entweder $y \leq y'$, was mit $Dp(x, y)$ der Annahme nach $Dp(x, y')$ und also (Df. 15) auch $Dp(x, y' + 1)$ zur Folge hat, oder $y = y' + 1$, das mit $Dp(x, y)$ natürlich $Dp(x, y' + 1)$ nach sich zieht.

Satz 55. $\overline{D(x, y) Dp(y, z)} + Dp(x, z)$.

Beweis: Für $z = 1$ ist dieser Satz richtig, da $Dp(y, 1)$ falsch ist (Df. 15). Ich setze also die Gültigkeit des Satzes für z voraus und beweise sie dann für $z + 1$. Aus $Dp(y, z + 1)$ erhalten wir (Df. 15) entweder $Dp(y, z)$, das mit $D(x, y)$ also $Dp(x, z)$ und folglich auch $Dp(x, z + 1)$ zur Folge hat, oder $D(y, z + 1) P(z + 1)$, das mit $D(x, y)$ nach dem Korollar des Satzes 20 die Wahrheit von $D(x, z + 1)$ bewirkt, woraus nach Df. 15 $Dp(x, z + 1)$.

Satz 56. $\overline{Dp(x, y)} + Dp(x, x)$.

Beweis: Nach Definition 15 muß dies für $y = 1$ richtig sein. Ich setze die Richtigkeit für y voraus und beweise sie für $y + 1$. Aus $Dp(x, y + 1)$ folgt entweder $Dp(x, y)$, woraus also $Dp(x, x)$, oder $D(x, y + 1) P(y + 1)$, woraus nach dem Korollar 1 des Satzes 25 $y + 1 \leq x$; aber aus $Dp(x, y + 1) (y + 1 \leq x)$ folgt (Satz 54) $Dp(x, x)$.

Satz 57. $\overline{De(x, y) T(y)} + Dp(x, x)$.

Beweis: Der Satz gilt für $y = 1$; denn $De(x, 1)$ ist falsch. Ich setze die Gültigkeit des Satzes für y voraus und beweise den Satz für $y + 1$.

Aus $De(x, y + 1) T(y + 1)$ folgt entweder $De(x, y) T(y + 1)$, woraus (Df. 16) $De(x, y) T(y)$, woraus der Annahme zufolge $Dp(x, x)$, oder $D(x, y + 1)(y + 1 < x) T(y + 1)$, woraus (Df. 16) $D(x, y + 1)(y + 1 < x) Dp(y + 1, y + 1)$, woraus wieder nach dem Satze 55 $Dp(x, y + 1)(y + 1 < x)$, was (Satz 54) die Gültigkeit von $Dp(x, x)$ bewirkt.

Satz 58. $T(x)$.

Beweis: Richtig für $x = 1$ (Df. 16). Ich beweise die Gültigkeit von $T(x + 1)$ unter Voraussetzung der Gültigkeit von $T(x)$. Nach Df. 16 brauche ich zu dem Ende nur $Dp(x + 1, x + 1)$ zu beweisen. Nach Df. 13 haben wir entweder $P(x + 1)$ oder $\overline{P(x + 1, x + 1)}$. Aus $P(x + 1) D(x + 1, x + 1)$ folgt nach Df. 15 $Dp(x + 1, x + 1)$. Aus $\overline{P(x + 1, x + 1)}$ folgt nach dem Satze 53 $De(x + 1, x + 1)$, was $De(x + 1, x)$ (siehe Df. 14) zur Folge haben muß; aus $De(x + 1, x) T(x)$ folgt aber nach dem Satze 57 $Dp(x + 1, x + 1)$.

Korollar: $Dp(x + 1, x + 1)$.

Denn aus $T(x + 1)$ folgt ja (Df. 16) $Dp(x + 1, x + 1)$.

Dies ist der Satz, daß jede Zahl > 1 durch mindestens eine Primzahl teilbar ist. Eigentlich bedeutet ja $Dp(x + 1, x + 1)$, daß $x + 1$ durch mindestens eine Primzahl $\leq x + 1$ teilbar ist.

Um nun den Satz, daß jede Zahl > 1 ein Produkt von Primzahlen ist, formulieren und beweisen zu können, führe ich eine ternäre Relation $P(x, y, z)$ ein, die bedeuten soll: x ist das Produkt von y Primzahlen, die alle $\leq z$ sind⁴.

$$\text{Df. 17. } P(x, y, z) = P(x, y, z - 1) + P\left(\frac{x}{z}, y - 1, z\right) P(z) D(x, z).$$

$$P(x, 1, z) = (x \leq z) P(x). \quad P(x, y, 1) \text{ falsch.}$$

Es ist dies eine doppelt rekurrierende Definition, nämlich rekurrierend sowohl in bezug auf y wie auf z . Es wird $P(x, 1, z)$ für beliebige z (und x) definiert, und wird dann angenommen, daß $P(x, y - 1, z)$ für beliebige z (und x) schon definiert ist, so haben wir mit Hilfe der ersten Gleichung der Definition 17 und der Festsetzung, daß $P(x, y, 1)$ falsch sein soll, eine rekurrierende Definition der Aussagenfunktion $P(x, y, z)$, nämlich rekurrierend in bezug auf z . Durch die letzte Festsetzung der Df. 17 wird ja $P(x, y, 1)$ bestimmt und durch die erste Gleichung wird $P(x, y, z)$ auf Grund der Voraussetzung, daß $P(x, y - 1, z)$ schon bekannt ist, bestimmt.

Ich will noch drei andere Aussagenfunktionen einführen:

$$\text{Df. 18. } P'(x, 1, z) = P(x, 1, z) \quad P'(x, y + 1, z) = P'(x, y, z) + P(x, y + 1, z).$$

$$\text{Df. 19. } II(x) = P'(x, x, x).$$

$$\text{Df. 20. } II'(1) \text{ wahr. } II'(x + 1) = II'(x) II(x + 1).$$

Die Aussage $P'(x, y, z)$ bedeutet augenscheinlich, daß x ein Produkt von höchstens y Primzahlen, jede $\leq z$, ist. Die Aussage $II(x)$ bedeutet, daß x ein Produkt von höchstens x Primzahlen, jede $\leq x$, ist. $II'(x)$ bedeutet, daß alle Zahlen y von 1 bis x entweder gleich 1 oder ein Produkt von

höchstens y Primzahlen $\leq y$ sind, oder m. a. W., daß alle Zahlen y von 2 bis x ein Produkt von höchstens y Primzahlen $\leq y$ sind. Das eigentliche Ziel der folgenden Entwicklungen ist die Allgemeingültigkeit von $II(x+1)$ zu beweisen.

Satz 59. $\overline{P(x, y, z) (z \leq z')} + P(x, y, z')$.

Beweis: Dieser Satz ist selbstverständlich richtig, wenn $z' = 1$ ist. Ich beweise den Satz für $z' + 1$ unter Voraussetzung der Gültigkeit für z' . Aus $z \leq z' + 1$ folgt entweder $z \leq z'$, das mit $P(x, y, z)$ also $P(x, y, z')$ und folglich auch (Df. 17) $P(x, y, z' + 1)$ zur Folge hat, oder $z = z' + 1$, und aus $(z = z' + 1) P(x, y, z)$ folgt selbstverständlich wieder $P(x, y, z' + 1)$.

Hilfssatz 1 des Satzes 60: $\overline{P(x_1, 1, z) P(x_2, 1, z) + P(x_1 x_2, 2, z)}$.

Beweis: Richtig für $z = 1$; denn schon $P(x_1, 1, 1)$ ist falsch (Df. 17 und 13). Ich beweise den Satz für $z + 1$ unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für z . Aus $P(x_1, 1, z + 1) P(x_2, 1, z + 1)$ folgt nach Df. 17 entweder $P(x_1, 1, z) P(x_2, 1, z)$, woraus also $P(x_1 x_2, 2, z)$, das wieder $P(x_1 x_2, 2, z + 1)$ zur Folge hat, oder $(x_1 = z + 1) P(x_1) P(x_2, 1, z + 1)$ oder $(x_2 = z + 1) P(x_2) P(x_1, 1, z + 1)$. Aus $P(z + 1) P\left(\frac{x_1 x_2}{z + 1}, 1, z + 1\right)$ folgt aber (Df. 17) $P(x_1 x_2, 2, z + 1)$, und analog geht es im dritten Falle.

Hilfssatz 2 des Satzes 60. $\overline{P(x_1, y, z) P(x_2, 1, z) + P(x_1 x_2, y + 1, z)}$.

Beweis: Nach dem ersten Hilfssatze ist dies richtig für $y = 1$. Ich beweise die Richtigkeit des Satzes für $y + 1$ unter Voraussetzung der Gültigkeit für y . Aus $P(x_1, y + 1, z) P(x_2, 1, z)$ erhalten wir nun sicher $P(x_1 x_2, y + 2, z)$ falls $z = 1$ ist; denn $P(x_2, 1, 1)$ ist falsch. Ich setze deshalb die Gültigkeit dieses Schlusses für $y + 1$ für z voraus und beweise dann die Gültigkeit für $z + 1$. Aus $P(x_1, y + 1, z + 1) P(x_2, 1, z + 1)$ erhalten wir (Df. 17) drei Alternative: 1) Schon $P(x_1, y + 1, z) P(x_2, 1, z)$ ist gültig; dann haben wir der Annahme nach $P(x_1 x_2, y + 2, z)$, woraus (Df. 17) $P(x_1 x_2, y + 2, z + 1)$. 2) Wir haben $P\left(\frac{x_1}{z + 1}, y, z + 1\right) P(z + 1) P(x_2, 1, z + 1)$. Aus $P\left(\frac{x_1}{z + 1}, y, z + 1\right) P(x_2, 1, z + 1)$ folgt aber, da unser Satz für y für beliebige z als richtig vorausgesetzt war, $P\left(\frac{x_1 x_2}{z + 1}, y + 1, z + 1\right)$, das mit $P(z + 1)$ kraft Df. 17 $P(x_1 x_2, y + 2, z + 1)$ zur Folge hat. 3) Wir haben $P(x_1, y + 1, z + 1) (x_2 = z + 1) P(x_2)$; daraus erhalten wir aber (Df. 17) $P(x_1 x_2, y + 2, z + 1)$.

Satz 60. $\overline{P(x_1, y_1, z) P(x_2, y_2, u) (u \leq z) + P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)}$.

Beweis: Dieser Satz ist jedenfalls richtig, wenn $y_1 = 1$ oder $y_2 = 1$ für beliebige Werte der übrigen Variablen kraft Hilfssatz 2. Er gilt also sicher für den kleinsten möglichen Wert der Summe $y_1 + y_2 + z + u$, nämlich 4, wobei $y_1 = y_2 = z = u = 1$ sein muß. Ich beweise wie folgt die Richtigkeit des Satzes für solche Werte von y_1, y_2, z und u , daß

$y_1 + y_2 + z + u = n$ ist, wenn die Richtigkeit für die Fälle, da $y_1 + y_2 + z + u = n - 1$ ist, vorausgesetzt wird. $P(x_1, y_1, z)$ ist damit gleichbedeutend, daß entweder $P(x_1, y_1, z - 1)$ oder $P\left(\frac{x_1}{z}, y_1 - 1, z\right) P(z) D(x, z)$

stattfindet. Außerdem haben wir entweder $u \leq z - 1$ oder $u = z$. Die erste Alternative ist deshalb $P(x_1, y_1, z - 1) P(x_2, y_2, u) (u \leq z - 1)$. Da aber $y_1 + y_2 + (z - 1) + u = n - 1$ wird, so folgt nach der gemachten Voraussetzung $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z - 1)$, und daraus wieder (Df. 17) $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$. Die zweite Alternative wird $P(x_1, y_1, z - 1) P(x_2, y_2, z)$. Da aber auch hier $y_1 + y_2 + z - 1 + z = n - 1$ sein muß, so folgt $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$. Die dritte Alternative ist $P\left(\frac{x_1}{z}, y_1 - 1, z\right) P(z) P(x_2, y_2, u) (u \leq z)$. Daraus folgt

aber, da $y_1 - 1 + y_2 + z + u = n - 1$ wird, $P\left(\frac{x_1 x_2}{z}, y_1 + y_2 - 1, z\right) P(z)$, und daraus wieder (Df. 17) $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Korollar: $\overline{P(x_1, y_1, z) P(x_2, y_2, z)} + P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Hilfssatz: $P'(x_1, y_1, z) P(x_2, y_2, z) + P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Beweis: Richtig für $y_1 = 1$ (Df. 18 und Hilfssatz 2, Satz 60). Ich beweise die Richtigkeit für $y_1 + 1$ unter Voraussetzung der Gültigkeit für y_1 . Aus $P'(x_1, y_1 + 1, z)$ folgt entweder $P'(x_1, y_1, z)$, das mit $P(x_2, y_2, z)$ nach der Voraussetzung $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$ und also auch $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2 + 1, z)$ zur Folge hat, oder $P(x_1, y_1 + 1, z)$, woraus in Verbindung mit $P(x_2, y_2, z)$ nach dem Korollar des Satzes 60 $P(x_1 x_2, y_1 + 1 + y_2, z)$ folgt, woraus wieder (Df. 18) $P'(x_1 x_2, y_1 + 1 + y_2, z)$.

Satz 61. $\overline{P'(x_1, y_1, z) P'(x_2, y_2, z)} + P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Beweis: Nach dem Hilfssatze ist dies richtig für $y_2 = 1$. Ich beweise die Richtigkeit des Satzes für $y_2 + 1$ unter Voraussetzung seiner Richtigkeit für y_2 . Aus $P'(x_2, y_2 + 1, z)$ folgt (Df. 18) entweder $P'(x_2, y_2, z)$, und daraus dann mit $P'(x_1, y_1, z)$ der gemachten Voraussetzung zufolge $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$ und also auch $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2 + 1, z)$, oder $P(x_2, y_2 + 1, z)$, das mit $P'(x_1, y_1, z)$ nach dem Hilfssatze $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2 + 1, z)$ zur Folge hat.

Hilfssatz: $\overline{P'(x, y, z)} + P'(x, y, z + 1)$.

Beweis: Richtig für $y = 1$ kraft der Definitionen 17 und 18. Ich beweise diesen Satz für $y + 1$ unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für y . Aus $P'(x, y + 1, z)$ folgt entweder $P'(x, y, z)$, woraus also $P'(x, y, z + 1)$ und daraus wieder (Df. 18) $P'(x, y + 1, z + 1)$, oder $P(x, y + 1, z)$, woraus (Df. 17) $\overline{P(x, y + 1, z + 1)}$ und daraus (Df. 18) $P'(x, y + 1, z + 1)$.

Satz 62. $\overline{P'(x, y, z) (z \leq z')} + P'(x, y, z')$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $z' = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für z' voraus und beweise dann den Satz für $z' + 1$. Aus $z \leq z' + 1$ folgt entweder $z \leq z'$, und aus $P'(x, y, z) (z \leq z')$ folgt nach der gemachten Annahme $P'(x, y, z')$ und daraus nach dem Hilfssatze $P'(x, y, z' + 1)$,

oder $z = z' + 1$, und daraus in Verbindung mit $P'(x, y, z)$ folgt selbstverständlich $P'(x, y, z' + 1)$.

Satz 63. $\overline{P'(x, y, z)(y \leq y')} + P'(x, y', z)$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $y' = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für y' voraus. Aus $y \leq y' + 1$ folgt entweder $y \leq y'$ oder $y = y' + 1$. Aus $P'(x, y, z)(y \leq y')$ folgt nun der Annahme nach $P'(x, y', z)$ und also (Df. 18) auch $P'(x, y' + 1, z)$. Aus $P'(x, y, z)(y = y' + 1)$ folgt natürlich $P'(x, y' + 1, z)$. Der Satz gilt also auch für $y' + 1$.

Satz 64. $(x = 1) + (y = 1) + \overline{II(x)} + \overline{II(y)} + II(xy)$.

Beweis: Da nach dem Satze 15 $x \leq xy$ und ebenso $y \leq xy$ sein muß, folgt aus $P'(x, x, x)P'(y, y, y)$, d. h. $II(x)II(y)$, nach dem Satze 62 $P'(x, x, xy)P'(y, y, xy)$. Nach dem Satze 61 folgt aber aus $P'(x, x, xy)P'(y, y, xy)$ wieder $P'(xy, x + y, xy)$. Ist nun außerdem $(x > 1)(y > 1)$, so ist $x + y \leq xy$, so daß wir durch Anwendung des Satzes 63 $P'(xy, xy, xy)$, d. h. $II(xy)$, erhalten. Aus $(x > 1)(y > 1)II(x)II(y)$ folgt also $II(xy)$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 1 (zum Satze 65). $\overline{II'(x)(y \leq x)} + II'(y)$.

Beweis: Selbstverständlich richtig für $x = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für x voraus. Aus $y \leq x + 1$ folgt entweder $y \leq x$ oder $y = x + 1$. Aus $II'(x + 1)$ folgt (Df. 20) $II'(x)$, und also folgt aus $II'(x + 1)(y \leq x)$ erstens $II'(x)(y \leq x)$ und daraus weiter $II'(y)$. Aus $II'(x + 1)(y = x + 1)$ folgt natürlich $II'(y)$.

Hilfssatz 2 (zu Satz 65). $\overline{A(x, y, z)II(y)II'(z)(y > 1)} + II(x)$.

Dies ist richtig, wenn $z = 1$. Ich setze die Wahrheit des Satzes für z voraus. Aus $A(x, y, z + 1)$ folgt (Df. 5) entweder $A(x, y, z)$ oder $x = y(z + 1)$. Aus $A(x, y, z)II(y)II'(z + 1)(y > 1)$ erhalten wir nach der Definition 20 $A(x, y, z)II(y)II'(z)(y > 1)$ und daraus nach der gemachten Annahme $II(x)$. Aus $(x = y(z + 1))II(y)II'(z + 1)(y > 1)$ folgt (Df. 20) $(x = y(z + 1))II(y)II(z + 1)(y > 1)$ und daraus nach dem Satze 64 $II(x)$. Der Satz gilt also auch für $z + 1$.

Hilfssatz 3 (zu Satz 65). $\overline{De(x, y)II'(x - 1)} + II(x)$.

Beweis: Dies gilt für $y = 1$, wie aus Df. 14 zu sehen ist. Ich setze die Gültigkeit des Satzes für y voraus. Aus $De(x, y + 1)$ folgt (Df. 14) entweder $De(x, y)$ oder $D(x, y + 1)(y + 1 < x)$. Aus $De(x, y)II'(x - 1)$ soll nach der Annahme $II(x)$ folgen. Nach der Definition-2 muß $D(x, y + 1)(y + 1 < x)$ mit $D(x, y + 1)(y + 1 \leq x - 1)$ gleichbedeutend sein; aus $II'(x - 1)(y + 1 \leq x - 1)$ folgt aber (Hilfssatz 1) $II'(y + 1)$, woraus $II(y + 1)$ (Df. 20), und da außerdem, wie leicht zu sehen, $D(x, y + 1) = A(x, y + 1, x - 1)$ sein muß (siehe die Definitionen 5 und 6), so folgt aus $D(x, y + 1)II(y + 1)II'(x - 1)$ nach dem Hilfssatz 2 $II(x)$.

Satz 65. $II'(x)$.

Beweis: Richtig für $x = 1$ (Definition 20). Ich setze die Wahrheit von $II'(x - 1)$ voraus und beweise dann $II(x)$, wodurch auch $II'(x)$ bewiesen

wird (Df. 20). Entweder gilt $P(x)$ oder $\overline{P(x)}$. Aus $P(x)$ folgt (Df. 17) $P(x, 1, x)$, d. h. (Df. 18) $P'(x, 1, x)$, woraus nach Satz 63 $P'(x, x, x)$, d. h. $II(x)$. Aus $\overline{P(x)}$ ($x > 1$) folgt $\overline{P(x, x)}$ (Df. 13), woraus (Satz 53) $De(x, x)$. $De(x, x) II'(x-1)$ hat aber nach dem dritten Hilfssatze $II(x)$ zur Folge.

Korollar: $II(x+1)$.

Denn nach Df. 20 folgt $II(x+1)$ aus $II'(x+1)$. Dies ist aber der wichtige Satz, daß jede Zahl > 1 ein Produkt von Primzahlen ist.

§ 8.

Einige explizite Anwendungen endlicher logischer Summen und Produkte.

Gilt es nur, die Anwendung unendlich ausgedehnter logischer Veränderlichen zu vermeiden, so kann man doch natürlich von *endlich* ausgedehnten Veränderlichen freien Gebrauch machen, und dies auch ohne sich darum zu kümmern, wie diese mit Hilfe rekurrierender Definitionen vermieden werden könnten, noch darum, wie die Schlüsse, welche mit deren Hilfe gemacht werden, mittels vollständiger Induktion auf Grund derjenigen Schlüsse bewiesen werden könnten, welche für solche Aussagen gelten, in denen keine scheinbaren Veränderlichen auftreten.

Geht man so vor, so läßt sich z. B. die Theorie der Zerlegung in Primzahlfaktoren einfacher darstellen, wie ich im folgenden zeige. — Ich benutze die Primzahldefinition Seite 23:

$$\text{Df. } P(x) = (x \neq 1) \prod_{y=1}^x (\overline{D(x, y)} + (y = 1) + (y = x)).$$

$$\text{Satz 66: } \sum_{p=1}^n D(n, p) P(p) + (n = 1).$$

Beweis: Gilt für $n = 1$. Der Satz sei gültig für alle $v < n$, wobei $n > 1$. Dann gilt entweder die Aussage $\sum_{r=1}^n D(n, r) (v < n) (v > 1)$ oder

ihre Verneinung $\prod_{r=1}^n \{\overline{D(n, r)} + (v = n) + (v = 1)\}$, (da ja $v \geq n$ hier mit $v = n$ und $v \leq 1$ mit $v = 1$ gleichbedeutend ist). In letzteren Falle hat

man $D(n, n) P(n)$. Im ersteren Falle gilt nach der Annahme $\sum_{p=1}^n D(v, p) P(p)$;

folglich $\sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^r D(n, r) D(r, p) P(p)$, woraus $\sum_{p=1}^n D(n, p) P(p)$.

Da $D(n, p)$ mit der Aussagensumme $\sum_{r=1}^n (n = rp)$ gleichbedeutend ist, hat man das Korollar:

$$\text{Korollar: } (n = 1) + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\rho=1}^n (n = \nu\rho) P(\rho).$$

Jetzt definiere ich rekurrierend eine Aussagenfunktion, welche in Worten lautet: „ n ist gleich einem Produkte von μ Primzahlfaktoren, welche alle $\leq n$ sind“.

$$\text{Df. 21: } P(n, 1) = P(n); P(n, \mu + 1) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\rho=1}^n (n = \nu\rho) P(\nu, \mu) P(\rho).$$

Der Satz von der Zerlegung jeder Zahl > 1 in ein Produkt von Primzahlen läßt sich dann so formulieren:

$$\text{Satz 67: } (n = 1) + \sum_{\mu=1}^n P(n, \mu).$$

Beweis: Gilt für $n = 1$. Die Gültigkeit für $\nu < n, n > 1$, sei vorausgesetzt. Dann gilt nach dem Korollar des Satzes 66: $\sum_{\nu=1}^n \sum_{\rho=1}^n (n = \nu\rho) P(\rho)$.

Aus $(n = \nu\rho) P(\rho)$ folgt indessen $\nu < n$ (Satz 15) und also der Annahme zufolge $\sum_{\mu=1}^{\nu} P(\nu, \mu)$. Hieraus $\sum_{\mu=1}^{n-1} P(\nu, \mu)$ und weiter $\sum_{\nu=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{\mu=1}^{n-1} (n = \nu\rho)$

$$P(\nu, \mu) P(\rho) = \sum_{\mu=1}^{n-1} P(n, \mu + 1), \text{ woraus } \sum_{\mu=1}^n P(n, \mu).$$

Weiter will ich den Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen beweisen. Zuerst definiere ich die Funktion $n!$:

$$\text{Df. 22. } 1! = 1; (n + 1)! = n!(n + 1).$$

$$\text{Hilfssatz: } (m > n) + D(n!, m).$$

Beweis: Selbstverständlich richtig für $n = 1$. Die Richtigkeit für ein gewisses n sei vorausgesetzt. Ist nicht $m > n + 1$, so ist entweder $m = n + 1$ oder $m < n + 1$, d. h. $m \leq n$. Nach Df. 22 und Satz 18 hat man $D((n + 1)!, n + 1)$. Ist $m \leq n$, hat man nach der Annahme $D(n!, m)$ und da auch $D((n + 1)!, n!)$ gilt (Sätze 16, 18), bekommt man $D((n + 1)!, m)$ (Korollar des Satzes 20).

Satz 68. $\sum_{\rho=1}^{n!+1} P(\rho) (\rho > n)$. (In Worten: Für beliebiges n gibt es eine Primzahl $\rho > n$ und $\leq n! + 1$).

Beweis: Nach Satz 66 gilt die Aussage $\sum_{\rho=1}^{n!+1} D(n! + 1, \rho) P(\rho)$. Aus $D(n! + 1, \rho) P(\rho)$ folgt aber $\rho > n$. Denn wäre $\rho \leq n$, so folgte nach dem Hilfssatz $D(n!, \rho)$, und dies in Verbindung mit $D(n! + 1, \rho)$ würde $D(1, \rho)$ (Satz 24, Korollar) und also $\rho = 1$ zur Folge haben, was wegen $P(\rho)$ ausgeschlossen ist.

Um die Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl in Produkte von Primzahlfaktoren zu beweisen, muß ich zuerst einige Betrachtungen über Summen und Produkte beliebig vieler Glieder sowie eine Funktion $I(a, b; m, n)$ definieren.

Es sei $f(r)$ eine beliebige deskriptive Funktion. Ich definiere die Ausdrücke $\sum_{r=1}^n f(r)$ und $\prod_{r=1}^n f(r)$ rekurrierend wie folgt:

$$\text{Df. 23: } \sum_{r=1}^1 f(r) = f(1); \quad \sum_{r=1}^{n-1} f(r) = \sum_{r=1}^n f(r) - f(n-1).$$

$$\prod_{r=1}^1 f(r) = f(1); \quad \prod_{r=1}^{n-1} f(r) = \prod_{r=1}^n f(r) \cdot f(n-1).$$

Statt $f(r)$ schreibt man oft a_r, b_r usw. Ich definiere für eine beliebige deskriptive Funktion a_r :

Df. 24: $a_r^{(v)} = a_r$, wenn $r < v$, und $a_r^{(v)} = a_{r-1}$, wenn $r \geq v$ ist.

Satz 69: $(n = 1) \div (v > n) \div$

$$\div \left\{ \sum_{r=1}^n a_r = a_v \div \sum_{r=1}^{n-1} a_r^{(v)} \right\} \left\{ \prod_{r=1}^n a_r = a_v \cdot \prod_{r=1}^{n-1} a_r^{(v)} \right\}.$$

Beweis: Ich brauche nur die Summe zu betrachten. Der Satz gilt, wenn $n = 1$ ist. Er sei gültig für n .

Um zu zeigen, daß er dann auch für $n \div 1$ gilt, sei zuerst $v \leq n$. Dann ist

$$\sum_{r=1}^{n-1} a_r = \sum_{r=1}^n a_r \div a_{n+1} = a_v \div \sum_{r=1}^{n-1} a_r^{(v)} + a_{n-1} \text{ und außerdem } a_n^{(v)} = a_{n-1}.$$

$$\text{Folglich } \sum_{r=1}^{n-1} a_r^{(v)} \div a_{n-1} = \sum_{r=1}^{n-1} a_r^{(v)} \div a_n^{(v)} = \sum_{r=1}^n a_r^{(v)} \text{ (nach Df. 24),}$$

und daraus

$$\sum_{r=1}^{n-1} a_r = a_v - \sum_{r=1}^n a_r^{(v)}.$$

Sei dagegen $v = n \div 1$. Dann ist $a_r^{(v)} = a_r$ für $r \leq n$. Folglich

$$\sum_{r=1}^{n-1} a_r = \sum_{r=1}^n a_r \div a_{n+1} = a_{n-1} \div \sum_{r=1}^n a_r^{(v)}.$$

Man benutzt oft die Schlußweise, daß eine solche Summe (oder Produkt) ungeändert bleiben muß, wenn die Glieder a durch Zahlen b ersetzt werden, wenn diese in irgendeiner Reihenfolge mit den a identisch sind. Um dies bequem formulieren zu können, führe ich eine Aussagenfunktion $I(a, b; m, n)$ ein, worin a und b Zeichen zweier beliebigen deskriptiven Funktionen sind.

$$\text{Df. 25. } \left\{ \begin{array}{l} I(a, b; 1, 1) = (a_1 = b_1). \quad I(a, b; 1, n) (n > 1) \text{ falsch.} \\ I(a, b; m, 1) (m > 1) \text{ falsch.} \\ I(a, b; m \div 1, n) = \sum_{r=1}^n (a_{r-1} = b_r) I(a, b^{(v)}; m, n-1). \\ (b^{(v)} \text{ definiert in Df. 24).} \end{array} \right.$$

$I(a, b; m, n)$ bedeutet dann in Worten: „Die Zahlen $a_1 \dots a_m$ sind in irgendeiner Ordnung mit den Zahlen $b_1 \dots b_n$ identisch“.

Satz 70: $\overline{I(a, b; m, n)} + (m = n)$.

Beweis: Richtig wenn $m = 1$ ist nach Df. 25. Die Richtigkeit für m sei vorausgesetzt. Aus $I(a, b; m + 1, n)$ folgt $\sum_{r=1}^n (a_{m+1} = b_r) I(a, b^{(r)}; m, n - 1)$.

$I(a, b^{(r)}; m, n - 1)$ hat aber $m = n - 1$ zur Folge. Also $m + 1 = n$.

Satz 71. $\overline{I(a, b; m, n)} + \left(\sum_{r=1}^m a_r = \sum_{r=1}^n b_r \right) \left(\prod_{r=1}^m a_r = \prod_{r=1}^n b_r \right)$.

Beweis: Ich betrachte bloß die Summe. Zuerst folgt $m = n$, und der Satz gilt offenbar, wenn $n = 1$ ist. Er gelte für $n - 1$. Aus $I(a, b; n, n)$

folgt $\sum_{\rho=1}^n (a_n = b_\rho) I(a, b^{(\rho)}; n - 1, n - 1)$. $I(a, b^{(\rho)}; n - 1, n - 1)$ bewirkt

aber nach der Annahme $\sum_{r=1}^{n-1} a_r = \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(\rho)}$, und außerdem ist $b_\rho + \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(\rho)} =$

$= \sum_{r=1}^n b_r$ (Satz 69). Aus $a_n = b_\rho$ und $\sum_{r=1}^{n-1} a_r = \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(\rho)}$ folgt also

$$\sum_{r=1}^n a_r = \sum_{r=1}^n b_r.$$

Satz 72. $\overline{D\left(\prod_{r=1}^n a_r, p\right) P(p)} + \sum_{r=1}^n D(a_r, p)$.

Beweis: Der Satz gilt für $n = 1$; er sei für ein gewisses n gültig.

Aus $D\left(a_{n+1} \cdot \prod_{r=1}^n a_r, p\right) P(p)$ folgt (Satz 52) $D(a_{n+1}, p) + D\left(\prod_{r=1}^n a_r, p\right) P(p)$.

Aus $D\left(\prod_{r=1}^n a_r, p\right) P(p)$ folgt nach der Annahme $\sum_{r=1}^n D(a_r, p)$. Also gilt in

jedem Falle $D(a_{n+1}, p) + \sum_{r=1}^n D(a_r, p) = \sum_{r=1}^{n+1} D(a_r, p)$.

Satz 73. $\overline{D\left(\prod_{r=1}^n p_r, q\right) \prod_{r=1}^n P(p_r) P(q)} + \sum_{r=1}^n (p_r = q)$.

Beweis: Nach Satz 72 bekommt man aus $D\left(\prod_{r=1}^n p_r, q\right)$ die Folgerung

$\sum_{r=1}^n D(p_r, q)$. Aus $D(p_r, q) P(p_r) P(q)$ folgt indessen $((p_r = q) + (q = 1)) P(q)$,

also $p_r = q$. Also $\sum_{r=1}^n (p_r = q)$.

Der Satz von der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren lautet jetzt:

$$\text{Satz 74. } \left(\prod_{r=1}^{\mu} p_r \div \prod_{s=1}^r q_s \right) = \sum_{r=1}^{\mu} \overline{P(p_r)} \div \sum_{s=1}^r \overline{P(q_s)} = I(p, q; \mu, r).$$

Beweis: Zuerst beweise ich den Satz für $\mu = 1$. Ist $(p_1 = \prod_{s=1}^r q_s) P(p_1)$

$\prod_{s=1}^r P(q_s)$, so folgt nach Satz 73 $\sum_{\sigma=1}^r (p_1 = q_\sigma)$. Weiter folgt aus $p_1 = q_\sigma$

und $p_1 = p_\sigma \prod_{s=1}^{r-1} q_s^{(\sigma)}$ die Gleichung $1 = \prod_{r=1}^{r-1} q_s^{(\sigma)}$, was unmöglich ist, wenn $r > 1$ ist.

Der Satz sei wahr für ein gewisses μ . Dann folgt aus der Aussage

$$\left(\prod_{r=1}^{\mu-1} p_r = \prod_{s=1}^r q_s \right)^{\mu-1} \prod_{r=1}^r P(p_r) \prod_{s=1}^r P(q_s), D \left(\prod_{s=1}^r q_s, p_{\mu+1} \right) \prod_{s=1}^r P(q_s) P(p_{\mu+1}),$$

woraus wieder nach Satz 73 $\sum_{\varrho=1}^r (p_{\mu+1} = q_\varrho)$. Weiter ist $\prod_{s=1}^r q_s = q_\varrho \prod_{s=1}^{r-1} q_s^{(\varrho)}$,

und man erhält deshalb $\sum_{\varrho=1}^r \left(\prod_{r=1}^{\mu} p_r = \prod_{s=1}^{r-1} p_s^{(\varrho)} \right)$, woraus nach der Annahme

$$\sum_{\varrho=1}^r I(p, q^{(\varrho)}; \mu, r-1) (p_{\mu+1} = q_\varrho) = I(p, q; \mu+1, r).$$

Ich will zuletzt einige Betrachtungen allgemeinerer Art anstellen. Man hat folgenden Satz, wobei U eine beliebige Aussagenfunktion bedeutet:

$$\text{Satz 75a: } \overline{U(n)} \div \sum_{r=1}^n \prod_{u=1}^r U(u) (\overline{U(u)} \div (u = r)).^1$$

In Worten: Kennt man eine Zahl n , für welche die Aussage U wahr ist, so gibt es eine kleinste Zahl, für welche U wahr ist. Dabei muß bemerkt werden, daß die Aussagen, mit denen wir hier zu tun haben, immer ohne unendlich ausgedehnte scheinbare Veränderlichen gegeben gedacht werden, so daß immer im Endlichen entscheidbar ist, ob $U(x)$ wahr ist oder nicht bei beliebigem x .

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz offenbar richtig. Die Richtigkeit für alle $x \leq n$ einem gewissen n sei vorausgesetzt. Ist dann $U(n+1)$ wahr,

so ist außerdem entweder $\prod_{x=1}^n \overline{U(x)}$ wahr oder $\sum_{x=1}^n U(x)$. Im ersteren Falle

gilt also $U(n+1) \prod_{r=1}^{n-1} (\overline{U(r)} - (r = n+1))$. Im letzteren Falle folgt aus

¹ Man kann natürlich auch z. B.

$$\overline{U(n)} = \sum_{r=1}^n \prod_{u=1}^r U(u) (\overline{U(u)} - (u = r))$$

schreiben.

$U(x) (x \leqq n)$ nach der Annahme $\sum_{y=1}^x \prod_{z=1}^y U(x) (\overline{U(y)} + (y = x))$ und also

à fortiori $\sum_{\nu=1}^{n+1} \prod_{\mu=1}^{\nu} U(\nu) (\overline{U(\mu)} + (\mu = \nu))$.

Satz 75b. Aus $U(a) \prod_{x=1}^a (\overline{U(x)} + (x = a)) U(b) \prod_{y=1}^b (\overline{U(y)} + (y = b))$

folgt $a = b$.

Dieser Satz drückt die Eindeutigkeit dieser kleinsten Zahl aus.

Beweis: Wäre $a \neq b$, so hätte man $(a < b) + (a > b)$. Aus $a < b$ folgt aber sofort $\overline{U(a)}$ und aus $b < a$ ebenso $\overline{U(b)}$.

Wegen dieser Eindeutigkeit kann man eine sehr wichtige deskriptive Funktion der allgemeinen Aussagenfunktion U einführen, welche die kleinste Zahl bedeutet, für die U wahr ist. Allerdings hat diese deskriptive Funktion insofern einen eingeschränkten Existenzbereich, als sie keinen Wert hat, wenn die Aussage U für keine Zahl wahr ist. Dabei muß aber hier betont werden, daß wir nur mit den natürlichen Zahlen bis zu einer gewissen oberen Grenze, die allerdings beliebig hoch gewählt werden kann, zu tun haben. Die deskriptive Funktion kann deshalb hier so bezeichnet werden:

$$\text{Min}(U, n).$$

Dies bedeutet die kleinste Zahl unter den Zahlen 1 bis n , für welche U wahr ist, und hat keinen Sinn, wenn U falsch ist für alle diesen Zahlen. Wir haben also nichts mit einer Funktion $\text{Min } U$ oder $\text{Min}(U, \infty)$ zu tun, welche die kleinste die Aussage U befriedigende Zahl bedeuten sollte und keinen Sinn haben, falls U für jede Zahl überhaupt falsch sein sollte; denn dies alles würde das „Aktual-unendliche“ fordern — also die Anwendung scheinbarer logischer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Die hier nötige Einschränkung der Bedeutung dieser Minimumsfunktion bewirkt aber keinen praktischen Schaden; denn bei jeder Anwendung des Satzes von der Existenz einer kleinsten Zahl einer Klasse ganzer positiver Zahlen muß jedenfalls zuerst eine Zahl n dieser Klasse bekannt geworden sein, und dann kann man sich eben mit der Funktion $\text{Min}(U, n)$ begnügen.

Endlich will ich einige Bemerkungen zum *Anzahlbegriffe* machen. Wenn gewisse Dinge (Zahlen, Zahlenpaare, Zahlentripel usw., deskr. Funktionen) eindeutig sämtlichen Zahlen \leqq einer gewissen Zahl n zugeordnet werden, sage ich, daß sie *in der Anzahl n vorhanden sind*.

Um zu zeigen, daß diese Zahl n eine Invariante relativ zu den verschiedenen Zuordnungen ist, muß man den folgenden Satz beweisen:

Satz 76: Aus $\prod_{x=1}^m \prod_{y=1}^m \left\{ (x=y) + (f(x) \neq f(y)) \right\} \prod_{x=1}^m (f(x) \leq n)$

$\prod_{y=1}^n \sum_{z=1}^m (y=f(z))$ folgt $m=n$. f beliebige deskr. Funktion.

In Worten: Es seien die Zahlen, die $\leq m$ sind, sämtlichen Zahlen $\leq n$ einindeutig zugeordnet. Dann ist $m=n$.

Beweis: Zuerst nehme ich den Fall $m=1$. Aus $\prod_{y=1}^n \sum_{z=1}^1 (y=f(z)) = \prod_{y=1}^n (y=f(1))$ folgt wegen der Eindeutigkeit von $f(1)$, daß $n=1$ sein muß.

Es sei der Satz für ein gewisses m gültig. Nehme ich dann den Wert $m+1$, so muß jedenfalls $n > 1$ sein. Sonst bekäme man aus $\prod_{x=1}^{m+1} (f(x) \leq 1)$ sowohl $f(1)=1$ wie $f(2)=1$, während $f(1) \neq f(2)$ sein sollte. Folglich können wir $n+1$ statt n schreiben, und es ist $m=n$ zu beweisen.

Erstens sei $f(m+1) = n+1$. Dann ist $\prod_{x=1}^m (f(x) \neq f(m+1))$ oder

$\prod_{x=1}^m (f(x) \neq n+1)$. Da außerdem $\prod_{x=1}^m (f(x) \leq n+1)$, folgt $\prod_{x=1}^m (f(x) \leq n)$.

— Aus $\prod_{y=1}^{n+1} \sum_{z=1}^{m+1} (y=f(z))$ folgt $\prod_{y=1}^n \sum_{z=1}^{m+1} (y=f(z)) (y \leq n)$, das heißt

$\prod_{y=1}^n \sum_{z=1}^m \left\{ (y=f(z)) + (y=f(m+1)) (y < f(m+1)) \right\} = \prod_{y=1}^n \sum_{z=1}^m (y=f(z))$.

— Kraft der gemachten Annahme muß also $m=n$ sein.

Zweitens sei $f(m+1) = r < n+1$. Nach der Voraussetzung $\prod_{y=1}^{n+1} \sum_{z=1}^{m+1} (y=f(z))$ hat man $\sum_{z=1}^{m+1} (n+1=f(z))$ oder $\sum_{\mu=1}^m (n+1=f(\mu)) +$

$+(n+1=f(m+1))$, d. h. $\sum_{\mu=1}^m (n+1=f(\mu))$. Die Zahl μ ist hier ein-

deutig bestimmt. Dann führe ich eine neue deskr. Funktion f' ein, die so definiert ist:

$f'(x) = f(x)$ wenn $x \neq \mu$ und $\leq m$ ist. Weiter $f'(\mu) = f(m+1) = r$; $f'(m+1) = f(\mu) = n+1$. Man braucht dann nur zu zeigen, daß f' denselben Bedingungen wie f genügt.

Aus $(f(x) \leq n+1) (x \neq \mu) (x \leq m)$ folgt $f'(x) \leq n+1$, da in diesem Falle $f'(x) = f(x)$. Außerdem sind offenbar $f'(\mu)$ und $f'(m)$ beide $\leq n+1$.

Also $\prod_{x=1}^{m+1} (f'(x) \leq n+1)$.

Aus $\sum_{y=1}^{m+1} (x = f(y))$ folgt $\sum_{y=1}^{m+1} (x = f(y))(y \neq \mu)(y \leq m) + \sum_{y=1}^{m+1} (x = f(y))$
 $((y = \mu) + (y = m + 1))$, woraus $\sum_{y=1}^{m+1} (x = f'(y)) + (x = f'(m + 1)) +$
 $+ (x = f'(\mu)) = \sum_{y=1}^{m+1} (x = f'(y))$. Also folgt aus $\prod_{x=1}^{n+1} \sum_{y=1}^{m+1} (x = f(y))$ auch
 $\prod_{x=1}^{n+1} \sum_{y=1}^{m+1} (x = f'(y))$.

Nach der Voraussetzung gilt $\prod_{x=1}^{m+1} \sum_{y=1}^{m+1} ((x = y) + (f(x) \neq f(y)))$. Hat
 man $(f(x) \neq f(y))(x \neq \mu)(x \leq m)(y \neq \mu)(y \leq m)$, so folgt sofort $f'(x) \neq f'(y)$.
 Hat man $(f(x) \neq f(y))((x = \mu) + (x = m + 1))(y \neq \mu)(y \leq m)$, so gilt
 $\{(f(x) = f(\mu)) + (f(x) = f(m + 1))\} \cdot (f(y) = f'(\mu))(f(y) \neq f(\mu))(f(y) \neq f(m + 1))$
 und folglich $f'(x) \neq f'(y)$. Ebenso wenn $(f(x) \neq f(y))(x = \mu) \cdot (x \leq m)$
 $((y = \mu) + (y = m))$. Zuletzt gibt $(f(x) \neq f(y))((x = \mu) + (x = m + 1))$
 $((y = \mu) + (y = m + 1))$ die Folgerung $(x = \mu)(y = m + 1) + (x = m + 1)$
 $(y = \mu)$ und also auch $(f'(x) = f(m + 1))(f'(y) = f(\mu)) + (f'(x) = f(\mu))$
 $(f'(y) = f(m + 1))$ und folglich $f'(x) \neq f'(y)$. Die Aussage $\prod_{x=1}^{n+1} \prod_{y=1}^{m+1} ((x = y) +$
 $+ (f'(x) \neq f'(y)))$ ist also richtig.

Anmerkung: Wenn eine Klasse gewisser Objekte gegeben ist, wird man versucht sein zu sagen: Daß diese Dinge in der endlichen Zahl n vorkommen, bedeutet, daß eineindeutige Zuordnung dieser Dinge und der n ersten Zahlen *existiert*. In dieser Definition kommt aber eine scheinbare logische Veränderliche vor (die Zuordnung), und es ist à priori keine Einschränkung des Variationsbereichs dieser Veränderlichen auf das Endliche gegeben, wenn man nicht schon im voraus einen Satz hat, der aussagt, daß die Anzahl der möglichen Zuordnungen eine endliche ist. Auf dem hier gegebenen streng finitistischen Standpunkte muß also ein solcher Satz zuerst bewiesen sein, damit man den Anzahlbegriff für die betreffenden Dinge definieren kann. Dies scheint ein *circulus vitiosus* zu sein; es ist aber nicht so. Man braucht nämlich nicht die obige allgemeine Definition des Anzahlbegriffs, um einen speziellen Satz aufzustellen, der aussagt, daß gewisse Objekte in der Anzahl n vorkommen; denn ein solcher Satz läßt sich eben dadurch aufstellen, daß man eine Zuordnung *wirklich angibt*; hierdurch wird die Zuordnung als logische Veränderliche vermieden. Man kann also auch in den erwähnten Fällen zuerst einen speziellen Satz über die Endlichkeit der Anzahl der überhaupt möglichen Zuordnungen und nachher die allgemeine Definition des Anzahlbegriffs für die Klassen der Dinge aufstellen.

Die Anzahl der ganzen positiven Zahlen, welche $\leq n$ und einer gegebenen Klasse angehören, läßt sich allgemein durch eine in folgender Weise definierbare Funktion angeben.

Es sei U eine beliebige Aussagenfunktion; ich setze:

$$\text{Df. 26. } (N U(1) = 1) U(1) \div (N U(1) = 0)^1 \overline{U(1)} \text{ und } (N U(n+1) = \\ = N U(n) \div 1) U(n+1) \div (N U(n+1) = N U(n)) \overline{U(n+1)}.$$

In Worten: Die deskriptive Funktion $N U(x)$ soll für $x = 1$ den Wert 1 oder 0 haben, je nachdem $U(1)$ wahr ist oder nicht. Weiter soll $N U(n+1) = N U(n) \div 1$ oder $= N U(n)$ sein, je nachdem $U(n+1)$ wahr ist oder nicht.

Es ist leicht zu zeigen, daß $N U(n)$ dann in der Tat die Anzahl der Zahlen $x \leq n$ angibt, für die $U(x)$ wahr ist. Ich gehe hier nicht näher darauf ein.

Es wird oft vorkommen, daß gewisse Dinge mit ganzen Zahlen numeriert sind, aber so, daß jedem Dinge mehrere Zahlen als Indizes zugeordnet sind. Die Anzahl der *verschiedenen* unter ihnen läßt sich dann mit Hilfe einer Funktion $T(x)$ angeben, die ich hier definiere.

Die Dinge seien $a_1 \dots a_n$; es werde gesetzt:

$$\text{Df. 27. } T(1) = 1; \left(T(r+1) = T(r) \right) \left(\sum_{s=1}^r (a_{r-1} = a_s) \right) - \\ \div \left(T(r+1) = T(r) \div 1 \right) \prod_{s=1}^r (a_{r-1} \neq a_s).$$

Weiter läßt sich mit Hilfe der Seite 34 definierten Funktion $\text{Min}(U, n)$ eine eindeutig bestimmte Auswahl eines vollständigen Repräsentantensystems verschiedener Dinge a angeben. Außerdem können die zugehörigen Häufigkeitszahlen, die angeben, wie oft jedes verschiedene Ding in der Reihe $a_1 \dots a_n$ auftritt, definiert werden usw. Ich will dies hier nicht näher ausführen.

Schlussbemerkung.

Diese Arbeit ist während des Herbstes 1919 geschrieben, nachdem ich die Arbeiten von RUSSELL & WHITEHEAD studiert hatte. Es fiel mir ein, daß schon die Anwendung der von ihnen genannten „wirklichen“ logischen Veränderlichen hinreichend sein müßte, um jedenfalls große Teile der Mathematik zu begründen. (Dabei muß also bemerkt werden, daß scheinbare Veränderliche mit endlicher Ausdehnung mittels rekurrierender Definitionen weggeschafft werden können). Die Berechtigung der Einführung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Variationsbereich erscheint des-

¹ Streng genommen ist die Zahl 0 hier nicht eingeführt worden; man kann aber vereinbaren, daß die Anzahl 0 bedeuten soll, daß keine „Dinge“ vorhanden sind.

halb sehr problematisch; d. h. man kann an der Berechtigung des Aktual-unendlichen oder Transfiniten zweifeln.

Andererseits bin ich selbst nicht mehr damit zufrieden, daß ich hier noch die logischen Entwicklungen nach dem Vorbilde RUSSELL & WHITE-HEAD's in rein formaler Hinsicht zu umständlich gemacht habe. Es kommt doch auch bei der Begründung der Mathematik auf die Sache und nicht auf die Bezeichnung an. Ich werde bald eine andere Arbeit über die logische Begründung der Mathematik publizieren, welche von dieser formalen Umständlichkeit frei ist. Auch diese Arbeit ist aber eine konsequent finitistische; sie ist auf dem Prinzip KRONECKERS gebaut, daß eine mathematische Bestimmung dann und nur dann eine wirkliche Bestimmung ist, wenn sie mit Hilfe *endlich* vieler Versuche zum Ziele führt.



A CASE OF "VIRILISME SURREÑAL"

FROM THE REPORTS OF THE ANATOMICAL INSTITUTE
OF THE UNIVERSITY, CHRISTIANIA

BY
O. BERNER

WITH 2 PLATES

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 7)



CHRISTIANIA
AT COMMISSION BY JACOB DYBWAD
1923

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 2den mars 1923 ved dr. med. S. Holth.

"Virilisme surrénal" is a modern term which was introduced in medicine by the French scientist, GALLAIS, in 1914.

It is a well-known fact that our knowledge of the functions of the suprarenal gland dates back only two or three generations. The circumstances connected with the suprarenal capsule were first observed in Addison's disease, and then in connection with adrenaline, and after 1905 it gradually became known that the suprarenal capsule, under certain circumstances, exerts an influence upon the organism, partly by affecting the growth of the body, partly by inducing a too early puberty, and partly by changing the secondary sexual characters to those of the opposite sex. It is to this last side of the organ's function that GALLAIS has given the name of "virilisme surrénal". The number of works on the subject is constantly increasing. When the phenomena are developed in boys, they appear as a precocious puberty, while in female subjects, in addition to a too early sexual maturity, characters appear which belong to the male. Thus an ordinary phenomenon of suprarenal virilism in the female is an abundant growth of hair, not only on the face, but, as in the male, all over the body. In addition there are frequently also changes in the genitalia, which give them a more or less masculine appearance.

We now know that the cause of this virilising of the subject is generally a tumour on the suprarenal capsule, for in a number of cases the tumour has been removed by an operation, after which the newly-acquired masculine properties have once more disappeared. In Norwegian medical literature a good example of this is found in a case observed by Dr. COLLETT. I have found no mention of the condition in veterinary literature, and the following account of my observations may therefore be of some interest.

My "patient" was an Italian hen, a white Leghorn, which, at its death, was rather more than 1½ years old. It was sent to me last September (1922) by a niece of mine in Sweden; but unfortunately, owing to various circumstances, I had no opportunity of observing the bird while alive, and can here only reproduce a photograph of it when stuffed. I have been told, however, that from the age of 6 months the bird exhibited, in a constantly increasing degree, peculiar habits, always keeping away from

the others. It laid no eggs, and none were ever felt in its rump when it was examined. It never crowed, but it had a large erect comb like that of an ordinary cock, and spurs. Its gait was also peculiarly elastic. The people at the farm where it was reared were in doubt as to its sex, and it went by the name of "the Neuter Gender" when I received it. I had thought of letting it live until next year, to see whether it would not have begun to lay by that time, but about the 1st October, 1922, I received word that it was evidently very ill, and that I ought to have it killed. This was done, and the post-mortem examination showed that there was a large tumour in the abdominal cavity. When the peritoneal cavity was opened, a great quantity of a clear fluid ran out, and, as the photograph reproduced in fig. 2 shows, the peritoneum was distinctly thickened.

In the abdominal cavity there was a large tuberous tumour, which was clearly circumscribed and not attached to any organ. It consisted of several tuberosities of various sizes, some of a yellowish white colour, others reddish. The latter were stratified, and somewhat resembled agate. The tumour was slightly movable, but could not be removed from the abdominal cavity until a large bloodvessel, which served as its stem, had been severed. When fixed it weighed 25 grammes.

When the tumour had been taken out, the small, flat ovary was visible where it had lain pressed between the tumour and the posterior abdominal wall. It was somewhat densely covered with small metastases, as was also the entire surface of the abdominal cavity (fig. 2). I found no metastases in the liver or other abdominal organs, and I cut through the liver in all directions without finding a single nodule in it. Its serous membrane, on the other hand, was thickly covered with small metastases. The oviduct, as the photograph shows, was misshapen and much crumpled, its mesentery being short. The mouth of the tube was also malformed, and consisted of a long fissure, also plainly seen in fig. 2. I tried to sound the oviduct by passing a probe from it down to the cloaca, but there was no opening to be found.

In the post-mortem examination I was puzzled to know whence the tumour had come. I was most inclined to consider it as a metastasis like the others, only much larger; and I cut out a piece for microscopical examination. It presented a very peculiar appearance (fig. 3), very much resembling reticular connective tissue. I saw immediately, however, that the tumour contained much fat; but the small islands of epithelial cells containing no fat gave me no certain clue as to the origin of the tumour. A microscopic section through a small nodule in the serous membrane over a portion of intestine proved, however, that the tumour was certainly of epithelial character, as there was much in its appearance that resembled a gland (fig. 4), but what gland I was unable to determine with any certainty.

As the ovary was small and infiltrated with tiny metastases, and as I had all the time taken for granted that the tumour had most probably originated in a more deeply situated organ, I chanced to think of the parovarium as a possible point of origin, the more so as among the works concerning the cause of the appearance of atypical birds, one investigator, ORJAN OLSEN, sees a connection between the parovarium and an arrhenoid aspect¹. As I wished to investigate these conditions more carefully without separating the ovary from the parovarium, I cut out all the organs after removing the uppermost part of the left kidney, imbedded the whole in paraffin, and cut a very long series from it.

This series showed me in the first place that the ovary, though certainly hypoplastic, yet contained not a few eggs, which were well developed with distinct nuclei, and surrounded by small groups of lutein-cells (see fig. 5).

It is the famous American biologist, MORGAN, who, by his experiments in the castration of fowls, has shown that it is most probably these cells that secrete the hormone which conditions the hen-like appearance in those birds which exhibit no sexual difformity.

From the information thus obtained through Professor MORGAN, I could obviously assume that the peculiar masculine appearance of this hen might arise from there being too few eggs in the hypoplastic ovary, and that in consequence the production of those hormones upon which the characteristic appearance of the hen depends was too small. I therefore procured an ovary from a normal hen. but there were no more lutein-cells round its eggs than there were round those of the atypical bird (fig. 6). Knowing, moreover, from GOODALES experiments, that only a very small portion of the organ is necessary to prevent the appearance of the cock-like character, and as the number of eggs in the ovary was not so very small, I could only suppose that the cause must be sought elsewhere.

A continued study of my long series soon showed me that the left suprarenal gland was in a proliferative condition (fig. 7). The appearance of these proliferating cells — which immediately fill with globules of fat and are pressed out by them into the strange forms which so greatly resemble the reticular connective tissue in ordinary sections from which the fat has been withdrawn — at once threw light upon the nature of the tumour. There can be no doubt about the connection between the section through the large tumour and that through the left suprarenal gland. The tumour-proliferation issuing from the periphery of the suprarenal gland infiltrated the adjacent organs just as that from a malignant tumour usually does. This was shown with especial clearness by the tumour-infiltrated ganglia round the ovary.

¹ Arrhenoidie is a term introduced into ornithology in 1889 by the Russian zoologist, Brandt, to express a cock-like appearance in the hen.

There was a peculiarity, however, about this series which at once made me uncertain. This was that the appearance of the proliferating zone of the suprarenal gland remained quite unchanged throughout the series, and this I thought it should not do if it were the point of issue of the tumour. The most natural thing would probably have been for the tumour-proliferation to have issued from one spot on the suprarenal gland, and not from its entire periphery; and this abnormality in the proliferation seemed all the more striking from the fact that the interior of the left suprarenal gland always proved to be quite normal.

It was therefore natural that I should also wish to examine the right suprarenal gland, but when I looked for it, it was not to be found. With the greatest care I laid bare the top of the right kidney, and also examined the back of the top, but found no suprarenal capsule. The entire surface of the right kidney was smooth and shining as it should be, and the colour all over was the fresh red that is seen in well-fixed specimens. My wonder then was as to what could have become of this suprarenal gland, and I turned my attention once more to the large tumour. It was only then that I really noticed the large blood-vessel which had served as its stem, and which I had to sever in order to remove the tumour from the abdominal cavity. This vessel was the vena cava, and I now saw how branches of it continued over the anterior surface of the right kidney (fig. 8). I once more examined with great care the entire region surrounding this stem to see whether I could find any suprarenal gland; but there was none, and I was thus convinced that the large tumour, which I had at first thought to be a large metastasis, was the right suprarenal gland whence the tumour-proliferations had originated. The reason of the similarity between the reticular appearance of the principal tumour and the reticular appearance of the proliferating left suprarenal gland at once, too, became clear: there was no longer any doubt in my mind that the primary tumour came from the right suprarenal gland, and that the tumour-proliferation in the left was secondary to the former.

In none of the numerous sections of the large tumour that I have examined have I found any trace of the medullary substance of the suprarenal gland, which, in birds, lies in cords imbedded in the cortical substance. In birds we find this structure of the suprarenal gland, which in still lower vertebrate animals causes the medullary substance to collect in the so-called "suprarenal organ", while the epithelial cortex becomes the "interrenal organ", which lies between the kidney and the suprarenal organ.

In sections of the red, blood-infiltrated nodule seen in the photograph straight above the vena cava, I found, in the periphery, some distinct eggs of various sizes. These were surrounded by some rather lighter cells resembling lutein-cells, but not nearly so typical as those I have shown from the left ovary.

The nodule from which these sections are taken is on the right in the abdominal cavity, and is marked by a cross in the general view. The finding of eggs in the large tumour shows that the right ovary has not deteriorated.

There can therefore be no doubt that the tumour originated only in the epithelial elements of the suprarenal gland, and that it is thus analogous to the epithelial suprarenal tumours with which we are acquainted in human pathology.

As regards the character of the tumour it will be seen from the sections (fig. 4) that the cells congregate in clusters of various sizes, separated by septa of connective tissue. As long as these clusters are small, the cells preserve the appearance of ordinary epithelial cells; but before long globules of fat collect in them, and force them to assume irregular forms. The sudan-stained frozen sections (fig. 9) were particularly instructive in showing how rapidly the gathering of fat-globules takes place. It is also characteristic of these frozen sections that the cell-nuclei show no signs of decay. The accumulation of fat in the cells of the principal tumour is exactly similar to that in the metastases. I have seldom found so typical a glandular appearance as in the section (fig. 4) of a metastasis in the serous membrane over a part of the intestine. As a rule, in the metastases too, there is an appearance resembling that of reticular connective tissue, because fat also accumulates so rapidly in the cells at their new points of growth. It was only necessary for me to move the section shown in fig. 4 very slightly in order to find places with the ordinary reticular appearance.

With regard to the other conditions that were found by dissection I will only mention that the heart was large and full of blood. The bird was killed by wringing its neck. The lungs were also overfilled with blood. After having made myself acquainted with the clinical discoveries regarding persons who had died of a tumour originating from the suprarenal gland and with indications of suprarenal virilism, and having found that death was frequently accompanied by signs of affection of the respiratory organs, I examined the hen's lungs, and found metastases in them such as were formerly so often found in man. The metastases in the lungs proved to be of the same structure as those in other parts.

The thyroid gland was excised with as little connective tissue as possible, and weighed. The two halves together weighed 210 mg. This weight is less than in the case of two other hens, where I weighed the organ in one when fixed with formol (240 mg.), and in the other when freshly excised (310 mg.). The microtomic sections of the organ showed an abnormal condition. Some follicles, it is true, contained a regular, homogeneous, colloid mass of normal appearance, but in others the contents were of a fluffy nature, while in yet others the epithelial cells had become detached from the wall, and the lumen was more or less filled with round, tumid cells (fig. 10).

I found nothing specially remarkable about the connective tissue and the blood-vessels.

Microtomic sections through the parathyroid also revealed abnormal conditions. In the central part of the organ there was a greater abundance of connective tissue than in the peripheral part, the greatest amount being grouped about the blood-vessels (fig. 11).

With regard to the bodily condition of the hen I should add that it might be characterised as fairly good. In any case I would draw attention to the fact that it was not particularly thin, although this might have been expected in a bird that was killed when dying of a malignant tumour and with its organism covered with metastases.

To recapitulate — the autopsy showed that the hen had suffered from anomalies of development which affected both the oviduct and the ovary. The ovary must be characterised as hypoplastic. It therefore did not contain so large a number of eggs as a normal ovary would have contained, but what there were were very well developed and surrounded by about as large a number of lutein-cells as in a normal hen. As we know, further, that the ovary resembles the other endocrine organs in that the presence of only a small remnant of it may prevent the symptoms of insufficiency from appearing, we are not justified in connecting the smallness of the ovary with the peculiar appearance of the bird. The cause must therefore be sought elsewhere, and although I think I have proved, in other papers published in the „Norsk Jæger- og Fiskerforenings Tidsskrift“, on a typical appearance occurring in our common wild gallinaceous birds, that the appearance in the hens is to be ascribed to disturbances in development that have affected the ovary, I consider the cause in the present case to be found in the suprarenal tumour. The changes found in the thyroid and parathyroid glands can hardly be connected with the animal's exterior, but they show that the interplay of these organs has been displayed. It is interesting, however, to notice that KRABBE, in his work on *pubertas præcox*, mentions the possibility of an antagonistic action between the suprarenal cortex and the parathyroid, but no such action, he says, has been proved.

In the study of the endocrine function of the suprarenal gland, two exceedingly important sources of information are Addison's disease and the production of adrenaline. As these are both, however, so well known, and as, in both cases, it is the medullary substance of the suprarenal gland that is of importance, I will not dwell upon them here, for in my subject it is the cortex of the suprarenal that is of importance.

The knowledge of the relationship in which the cortical substance of the suprarenal gland stands to a group of clinical phenomena, is of recent date, and it was not until after the publication, in 1905, of a work by two English physicians, BULLOCH and SEQUEIRA, that a number of morbid

affections have been defined, of which the cause must be assumed to be an increased activity of the suprarenal gland. Their observations were of a girl of 11, who had been healthy until the age of 10, when she began to develop physically in a very peculiar manner, both as regards stature and appearance. She grew exceedingly fat, her mammæ became large and pendulous, a thick growth of hair appeared, not only on the mons, but also in the axillæ and on the face, and menstruation commenced. When she died she had the appearance of a full-grown woman. At the post-mortem examination a large tumour was found upon the suprarenal gland; and as the writers considered that this must be connected with the clinical phenomena, they went through the previous literature on the subject, where they found several cases resembling theirs, and were enabled to establish the fact that in every instance there had been a suprarenal tumour issuing from the cortex, sarcomata in the suprarenal gland never having caused such phenomena. In English medical literature important contributions to our knowledge of these matters have since been made by GUTHRIE and EMERY¹ and GLYNN.

In France, in the "Soc. de Pédiatrie de Paris", Dr. APERT reviewed, in 1910, a number of cases, collected from the literature, in which the phenomena could similarly only be explained by an increased suprarenal function — hyperepinephry. His view was in agreement with a demonstration that GUINON and BIJON had given in that society in 1906. They had shown a girl of 11, who had been well up to the age of 9, when she also developed excessive obesity and growth of hair both on the genitalia and on the face, while, in addition, the clitoris increased in size until it so greatly resembled a penis that it seemed doubtful whether this were not an error of sex. There is no account of an autopsy in this instance², but Dr. APERT has collected a large number of cases from the literature, in which a post-mortem examination was made, and where either the suprarenal glands had been found to be enlarged, or there was a suprarenal tumour. Apert's work has been continued by his countryman, GALLAIS, whose great work, "Le Syndrome Génitosurrénal", appeared in 1914. The work contains three cases of personal observation (one with post-mortem examination, the other two without), with which is associated a complete collection of publications from the world-literature³. While collecting all the cases in which abnormalities of the suprarenal gland and

¹ Guthrie and Emery's work contains accounts of a number of observations of clinical phenomena classed under the heads of precocious obesity, gigantic stature, hirsutism, etc., and stating whether these phenomena were found in persons with a suprarenal tumour, or where there was no such tumour.

² On p. 238 Gallais states that the patient died, but no mention is made of autopsy.

³ Glynn has criticised Gallais' cases Nos. XXVII and XXVIII in his paper in the "Journal of Obstetrics and Gynæcology of the British Empire", 1921, declaring that they are one and the same case.

the sexual organs occurred, Gallais was struck, as Apert had been, with the frequent coincidence of large suprarenal glands with the malformation called "feminine pseudo-hermaphroditism". This is not intended to imply that APERT and GALLAIS were the first investigators to have observed this concurrence, for eminent pathological anatomists such as MARCHAND and FIBIGER had minutely described it before, but have either not co-related the facts with each other, or have been perplexed as to the manner in which they were to be explained. It is thus quite characteristic that in 1905 FIBIGER should say: "The cause of the enlargement of the suprarenal glands seems at present to be a complete mystery"; for he does not agree with the assumption to which Marchand, and subsequently Apert too, had recourse, namely, that the excessive size of the suprarenal glands in these pseudo-hermaphrodites is due to an addition received, through a disturbance in the development that has taken place, from the genital gland (or glands), which, at the time when these organs are in their embryonic condition, lie close to the suprarenal glands. MARCHAND considers that by the transference of some of the tissue to the suprarenal glands the latter become large, while simultaneously the genital gland (or glands) whence the tissue is taken must become smaller. Professor FIBIGER does not, however, accept this explanation, because in one of the 3 cases he describes, the generative organs were quite normal, or perhaps one might even be justified in saying that the ovaries in this little child were larger than they should have been.

Nor can GALLAIS accept Marchand's theory regarding the unequal division of material between the suprarenal gland and the genital gland in pseudo-hermaphroditism. He holds that if the cause is of a teratological nature, the ovary on the same side should be found to be aplastic while the other was normal, assuming that the case under consideration was one in which the suprarenal abnormality is on one side only; but such an assumption is impossible when, as often happens, it is a case of a small ovary on each side and only one suprarenal gland being hyperplastic. GALLAIS goes on to say that if the suprarenal disturbance were to be regarded as a compensation caused by the small genital glands, then suprarenal hypertrophy should also be found in persons with masculine pseudo-hermaphroditism and in persons with cryptorchism or sclerosis of the testes; but he adds: "Il n'en est rien cependant, et cette hypertrophie de compensation, si tant qu'elle existe, est au contraire, chez ces sujets, très rare".

It seems, therefore, reasonable to take Professor FIBIGER's view when he says: "At present it is impossible to explain how suprarenal hyperplasia and the pseudo-hermaphroditic malformation are connected"¹.

¹ Guthrie and Emery's paper gives a very curious account of H. B. Robinson's observation of feminine pseudohermaphroditism in 2 sisters, one aged 2 years, the other 14 days. They were brought to him to decide whether they were male or female. He

On the other hand, with regard to the malformation of the external organs of generation in feminine pseudo-hermaphroditism, it was formerly supposed that it arose from a hyperplastic development of originally normal genitalia; but on this point GALLAIS gives a new and plausible explanation, in that he assumes that the large suprarenal glands — or the accessory suprarenals or suprarenal tumours present — produce an increased amount of hormones, which stimulate the growth of the genitalia, while at the same time this development is also more or less in the direction of the opposite sex.

If this hormone-action begins during fœtal life, it "virilises" the fœtus, which is born into the world with malformed genitalia. GALLAIS therefore gathers these cases under one head — "le pseudo-hermaphroditisme surrenal". If, on the other hand, the hyperepinephry does not begin until *after* birth, not only are the genitalia in the females "virilised" in the same manner as in the fœtus, but, in addition, the secondary sexual characters are affected, there is an abundant growth of hair, the voice becomes deep, the muscular power increases, the temper changes, etc. This is the type which GALLAIS classes under the head of "virilisme surrenal". He gives a typical example of it in a patient of 25, concerning whom he states that at the age of 10 she looked 15, and when 12 had the appearance of a grown-up woman; and after menstruation had begun her voice changed and became gruff, a thick growth of downy hair appeared upon her upper lip, and her muscular power increased greatly. At the age of 18, notwithstanding her woman's clothes, she looked like a big, strong lad such as one could have fun with; but she nevertheless married, as she was the daughter of a wealthy farmer. The marriage was not a happy one. The virilism increased; the growth of hair and moustache was enormous, and a hypertrophy of the clitoris developed, giving it the appearance of a penis in a boy of 12. It was also subject to erections during coition. The husband complained, and the couple were divorced. She subsequently became seriously ill, and upon examination by a physician, a tumour was found in the abdominal cavity, and the patient died; but no post-mortem examination was made. The French writer TUFFIER has described a similar case in which the phenomena developed after the menopause, and in which the clitoris measured 4 cm. On account of great hæmorrhage, Tuffier extirpated the large uterus, which contained no myomata, but was only hypertrophic. Concerning his other discoveries he writes as follows:

said that the elder was a female, but was doubtful about the sex of the younger. Eighteen months later they were brought to him again, and then the elder girl had developed a good deal of pubic hair, and the younger child, who was then found to be a female, had also signs of hair on the pubes. In both cases the clitoris was much hypertrophied, but there was no menstruation. Strange to say, in a brother of theirs, aged 6, the generative organs resembled those of a grown man, and in his case too, there was growth of hair on the pubes.

"Mais en faisant la laparotomie, j'en profitai pour examiner la région surrénale, et je trouvais une masse bi-latérale du volume de la moitié d'un rein, surplombant ces organes, et de consistance fibro-lipomateuse."

"L'examen des pièces enlevées nous montra que l'ovaire gauche était atrophié, mais que l'ovaire droit présentait une tumeur du volume d'une grosse noix. La tumeur de l'ovaire était molle, hémorragique, sans végétations, sans kystes, et d'un aspect que je n'avais jamais rencontré. Après de nombreuses hésitations, et après avoir cru qu'il s'agissait d'une capsule surrénale aberrante, elle est considérée comme formée par un néoplasme né de l'ovaire lui-même, aux dépens des cellules à lutéine (Masson)."

TUFFIER has also described this case in the "Revue moderne de Méd. et de Chirurgie", Vol. XII, 1914, where he says: "La tumeur à cellules lutéiniques de l'ovaire formait, en quelque sorte, un corps jaune géant, véritable capsule surrénale accessoire et aberrante, si l'on en croit la théorie de Chauffard que Mulon a repris." BLANCHARD (in a foot-note on p. 53 of "Bull. de l'Acad. de Méd.", 1916) quotes this as being in accordance with his own view.

In GALLAIS' other patient the phenomena appeared at the age of 17, when there was a vigorous growth of hair and a striking increase in muscular power; and finally the phenomena of an abdominal tumour appeared, which, on post-mortem examination, proved to have originated in the left suprarenal gland. On the other hand there were no changes in the genitalia in this patient.

It will appear, from the cases I have here described, that the features of virilism vary in different cases, while certain characteristics always appear, especially growth of hair and adiposis. We are probably justified in concluding that these phenomena are actually due to the suprarenal gland, as there are several observations analogous to that of Dr. COLLETT, showing that the phenomena disappear when the tumour is removed. This was the case in the instance recorded by the Swedish physician, BOVIN, as also after the first operation in KNOWSLEY THORNTON'S case, where, however, there was a relapse 2 years later. In neither of these cases, which were both women of about 30 years of age, were there any changes in the external organs of generation. In an addendum to his paper, GLYNN states that Dr. Gordon M. Holmes, Birmingham, has performed an operation upon a young woman in whom phenomena of virilism appeared at the age of 20. Four years later a suprarenal tumour was removed, and she once more became normal.

If we now return to my virile hen, we see that it presents many points of resemblance to these cases of human virilism. In the first place it should be noted that the condition probably depends upon a congenital disposition. This is indicated by the malformation of the oviduct and the aplasia of the ovary, which cannot be explained in any other way than as an anomaly of development. That the tendency to virilism has mani-

fested itself early is proved by the statement that the first phenomena began to appear when the bird was six months old. These observations, moreover, agree very well with the discoveries made in the post-mortem examination, as it must be assumed that the tumour took rather a long time to grow. It was presumably only just before death that metastasis began to develop, as all the metastases are so small.

Another point of resemblance to many of the cases observed in man is the relation between the tumour and the aplastic ovary. Those investigators who have not been able to subscribe to Marchand's theory that the suprarenal hyperplasia is formed at the expense of the genital gland, will perhaps find a support for their view in my case; for if it is difficult to accept Marchand's hypothesis as regards man, it is even more difficult as regards the hen, for birds have only one ovary, and that, moreover, is situated on the left side, while the tumour in this case originated in the right suprarenal gland. It should here be remarked, however, that birds originally have 2 genital glands, the females also; but the right one begins to dwindle after a few days, and very soon disappears. The genital glands in birds, during the first few days, are exactly alike in the two sexes, and the differentiation of the sexes is seen first, and best, in the condition of the right genital gland, which, as early as the 5th day of incubation, is outdistanced by the left in the hens. If, therefore, a part of the right genital gland in this case has contributed to increase the volume of the suprarenal gland, it must, in all probability, have taken place very early in the period of incubation. On the other hand it seems to me quite impossible to suppose that the *left* genital gland has contributed to the development of the tumour in the *right* suprarenal capsule.

With regard to the theory that the Danish investigator, Dr. KRABBE has recently brought forward concerning cortical suprarenal tumours it should be observed that in the article in which he sets forth his theory he mentions that the testicular parts of the medullary substance of the genital gland which he supposes to be split off, are "absorbed" by the suprarenal capsule, "and developed into a part of this". I cannot see that either Krabbe or anyone else has brought forward any cytological support for his theory; and it appears to me *a priori* improbable that cells from the testicular medulla should be so completely "absorbed" and so closely incorporated that they did not also retain a cytologically divergent character answering to their site of origin. I am fully aware, however, and Dr. KRABBE has also referred to the fact in a letter to me, that the cortical cells of the suprarenal gland present a great similarity to other cells — e. g. the interstitial cells in the testicle — and it may be very difficult to distinguish one from another. The same opinion is strongly emphasised by the Danish physician, Dr. JOHANNES IPSEN, in his work "*Studier over ondartede Nyrësvesler hos Voksne*", to which the reader is referred. At the demonstration in the Norske Medicinske Selskab, where I published the

case here described, sections were also shown by Professor FRANCIS HARBITZ from the tumour from Dr. Collett's patient, and I was struck by the resemblance between the cell-forms in these two so widely-separated cases. But that which seems to me to tell still more against the correctness of Dr. Krabbe's theory is the similarity found between the tumour-proliferation in the right and that in the left suprarenal in my hen. There can hardly be any doubt that the tumour in the right suprarenal gland is primary, and that it has secondarily caused the left suprarenal gland to proliferate. This view of the circumstances accords with so many other observations, such as, for instance, that a tumour is first seen to come in the one ovary, and after a time an exactly corresponding one in the other, although the second cannot be considered as due to metastasis. That the tumour-proliferation is not of a metastatic nature as far as the left suprarenal is concerned, is apparent from the fact that it is seen regularly throughout a long series, and also because the interior of the suprarenal gland was that of a quite normal organ. This very fact favours, I think, the view that the left suprarenal gland had quite recently entered upon a state of proliferation, and the cause of this can hardly be sought elsewhere than in the much older tumour in the right suprarenal.

If this is the case, then the appearance of the proliferating epithelium-cells in the periphery is also of very great interest, for it will be seen from the photograph reproduced in fig. 7 how the form of the cell changes, and how, from the very first, the tumour acquires a most peculiar, reticulated appearance; and this appearance of the tumour-proliferation is the same in both suprarenal glands. Even if, therefore, the older suprarenal tumour had developed upon the basis of absorbed cells such as Dr. Krabbe indicates, the possibility of such cells forming the starting-point of the subsequent growth throughout the periphery of the left suprarenal is, I think, in any case excluded. It seems to me, therefore, that there is no necessity for having recourse to such an assumption as that of which Dr. KRABBE makes use.

In order to throw more light upon the question of the tumour's point of origin, I have cut sections through that part where the blood-vessel formed the stem which attached the tumour to the posterior abdominal wall, but I have not found the appearance of the tumour in this region to be different from that of the rest. It is therefore also out of the question that the tumour originates in a possible persistent right parovarium. I have also sought in vain for traces of medullary substance in the sections of the tumour, so I consider that I am justified in my opinion that it is cortical substance only — i. e. cells of the interrenal organ — that forms the tumour.

With regard to the peculiar reticular appearance of both the tumour and the metastases in the ordinary sections, I have already pointed out that it is due to the large amount of fat contained in the tumour. The

question at once arises as to whether this is a fatty degeneration of the cells or an infiltration of fat, or whether, finally, the fat is the expression of a secretion-phenomenon. As it is a malignant tumour with which we are concerned, it would not be strange if we also found parts of it affected by fatty degeneration, as so frequently is the case in this kind of tumour; but in the first place the contents of fat are uniform throughout the tumour, and in the second place I have not found any indication of degeneration in the cell-nuclei. I can therefore disregard the possibility of a fatty degeneration, and the question of an infiltration of fat is quite overshadowed by that of whether the fat-globules are the expression of glandular activity. The appearance of the periphery of the left suprarenal favours this view.

It is well known that the cortical cells of the suprarenal gland contain globules of fat — lipoids. With regard to the genesis of these lipoids, the Danish investigator, Dr. BORGBERG, writes, in his great work on the lipoids of the suprarenal gland, that it might well be thought that this was a "physiological fatty degeneration" in the suprarenal gland similar to that found, for instance, in the sebaceous glands; but, as against this view, he points out that as regards the suprarenal gland it must be assumed that it is not in the old, dying cells that fatty degeneration takes place, as is the case with the sebaceous glands, but that, on the contrary, it is in the most actively functioning cells that there is most "fatty degeneration". In other words, the fat found in the cortex of the suprarenal gland is the physiological secretive product of the cell.

It is not improbable, therefore, that these lipoids represent the virilising hormones. Whether the fat-globules in the tumour-cells are identical with the corresponding lipid in the normal suprarenal cells is another question. In his work on *pubertas præcox*, KRABBE writes that when, in this condition, a tumour is found in the suprarenal, it may well be imagined that it is the tumour which secretes substances which, by means of the Leydigian cells, influence the secondary sexual characters. KRABBE does not believe, however, that the normal suprarenal cortex has any such function.

It is easy to explain the origin of virilism by KRABBE's theory when it occurs in boys, but difficult to explain the hormones' virilising influence seen in girls with suprarenal tumours, or the virilising action occurring in old women, of which TUFFIER's case is a good instance. Does the virilising here, too, take place through the interstitial cells of the ovary, which in that case must be regarded as homologous with the Leydigian cells in the testicle? This is the difficult question. We do not know whence the Leydigian cells come, and our ignorance of the origin of the interstitial cells in the ovary is still greater, as we do not even know whether the so-called lutein-cells are a special group of interstitial cells in the ovary. If the virilising takes place by means of the interstitial cells, the explanation, as we have said, is very easy as regards boys; but in the case of female

subjects it must be assumed that the hormone from the suprarenal tumour so alters the interstitial cells that they begin to produce new hormones, and, with them, new, that is to say opposite, sexual characters, or that the suprarenal hormone does away with the function of the interstitial cells. The latter assumption would explain the cock-like appearance of my hen, as the experiments made by GODALE and PÉZARD have shown that castrated hens acquire a cock-like appearance.

It is moreover a peculiar fact that in some cases of suprarenal virilism, but not in all, there is hypertrophy of the clitoris. Can it be supposed that in certain cases the hormone acts directly upon that organ?

In order to elucidate these questions I have made an experimental investigation, in which I have injected suprarenal extract into young animals to see whether it affected the secondary sexual characters. As far as I am aware, no such investigations have been made with the exception of those of SHATTOCK and SELIGMAN, which were carried out on ducks. I shall hope, on some future occasion, to give an account of the results of these investigations.

Christiania; March, 1923.

Bibliography.

- APERT: Dystrophies en relation avec des lésions des capsules surrénales, hirsutisme et progeria. Bull. de la Société de Pédiatrie de Paris, 1910.
- BERNER, O.: Om atypisk utseende fugl. Norsk Jæger- og Fisker-Forenings Tidsskrift 1921.
— Mere om atypiske fugler. — " — " — 1922.
- BIEDEL: Innere Sekretion.
- BLANCHARD: Le virilisme et l'inversion des caractères sexuels sont sous la dépendance des glandes génitales interstitielles. Bull. de l'Académie de Médecine, 1916.
- BOVIN: Über im weiblichen Genitale primär entstandene hypernephroide Geschwülste. Nordisk Medicinsk Archiv Avd. I. No. 13 (1908).
- BORGBERG: Zur Biochemie der Lipoiden. Nebennierenuntersuchungen III. Skandinavisches Archiv für Physiologie 1915.
- BULLOCH and SEQUEIRA: On the relation of the suprarenal capsules to the sexual organs. Transactions of the pathological Society of London 1905.
- COLLETT: Med. selskaps forhandlingar, 1922.
— " — " — 1923.
- FIBIGER: Bidrag til læren om den kvindelige pseudohermafroditisme. Hospitalstidende, 1905.
- GALLAIS: Le syndrome génito-surrénal. Paris 1914.
- GLYNN: A comparison between ovarian "hypernephroma", and luteoma and suprarenal hyperaephroma, with comments on suprarenal virilism. The Journal of Obstetrics and Gynaecology of the British Empire, 1921.
- GOODALE: Gonadectomy, Washington 1916.
— Further developments in ovariectomized fowl. Biological Bulletin Vol XXX.
- GUTHRIE and EMERY: Precocious obesity, premature sexual and physical development and hirsuties in relation to hypernephroma and other morbid conditions. Transact. of the Clinical Society, 1907.
- IPSEN, JOHS: Ondartede nyresvulster. Diss. Kjøbenhavn 1917.
- KRABBE, KNUD H.: Pubertas præcox. Hospitalstidende, 1917.
— The relation between the adrenal cortex and sexual development. New York Medical Journal, 1921.
— La sclérose tubéreuse du cerveau et l'hydrocéphalie en relation de la puberté précoce. L'Encéphale, 1922.
— Om forholdet mellem tuberos hjernesklærose og pubertas præcox. Bibliotek for læger, 1922.
- LIP-CHÜTZ: Die Pubertätsdrüse, Bern. 1919.
- MORGAN: The genetic and the operative evidence relating to secondary sexual characters. Washington 1919.
- OLSEN, ØRJAN: Om arrhenoidie og thelyidie hos tetraonider. Videnskapselskabet skrifter 1912.
Vid.-Selsk. Skrifter. I. M.-N. Kl. 1923. No. 7.

- PÉZARD: Le conditionnement physiologique des caractères sexuels secondaires chez les oiseaux. Paris, 1918.
- SHATTOCK and SELIGMAN: Some experiments made to test the action of extract of Adrenal Cortex. Proceed. Royal Society 1908.
- TUFFIER: Le virilisme surrénal. Bull. de l'Académie de Médecine. 1914.
- TSCHERNOBROW: Über eine Geschwulst der Nebenniere bei einem 11 jährigen Knaben mit frühzeitiger Geschlechtsentwicklung. Diss. Zürich, 1919.

Addendum during proof-reading:

- COLLETT, ARTHUR: Det genito-suprarenale syndrom (suprarenal virilisme) hos en 1 $\frac{1}{2}$ pike. Hypernefromet fjernet med godt resultat. Norsk Magazin for Lægevidenskaben 1923, p. 609.



Fig. 1. The hen when stuffed. In front it looks like a cock, the tail is as in a hen. It has spurs.

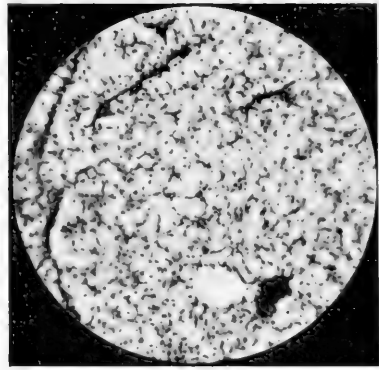


Fig. 3. Showing the peculiar reticular appearance seen in ordinary microscopic sections through the yellow tumour-nodule. \times about 150.

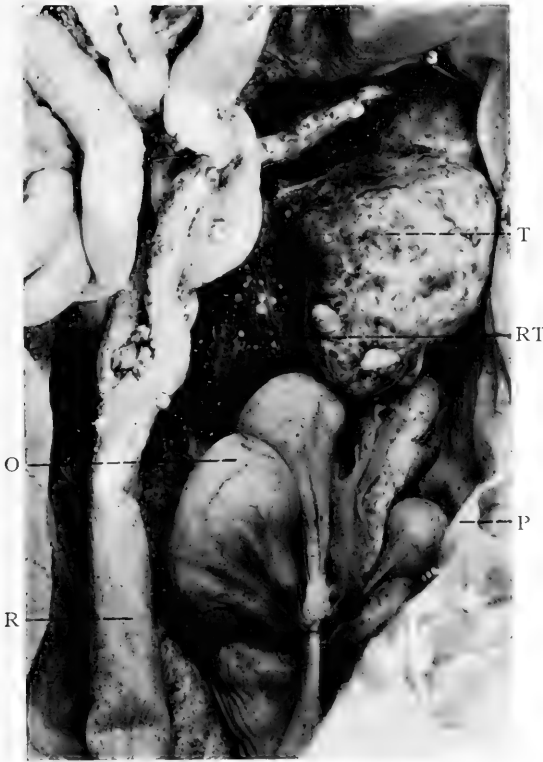


Fig. 2.

- P = the thickened peritoneum.
- T = tumour-nodule of a yellow colour.
- RT = tumour-nodule of a red colour.
- O = the oviduct.
- R = the rectum.

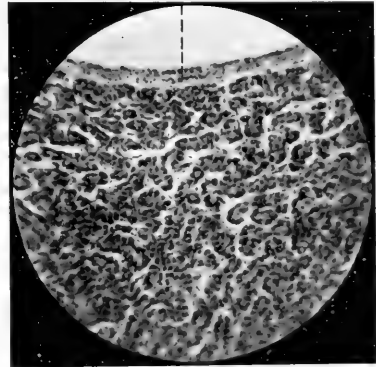


Fig. 4. Section through a small metastasis situated in the serous membrane over a part of the intestine. It contained a little cyst, of which the wall is shown, the line pointing to it. \times about 150.

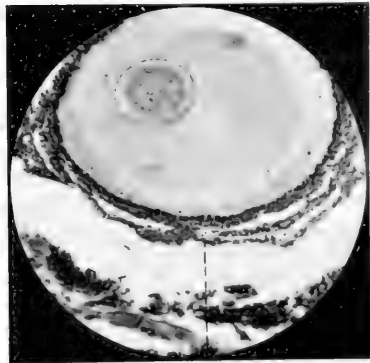


Fig 5. Section through an egg from the hypoplastic ovary. The line points to a small group of lutein-cells. \times about 200.



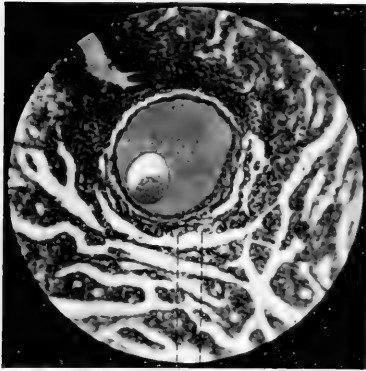


Fig. 6. Section through the ovary of a normal hen. The lines point to groups of lutein-cells. \times about 150.

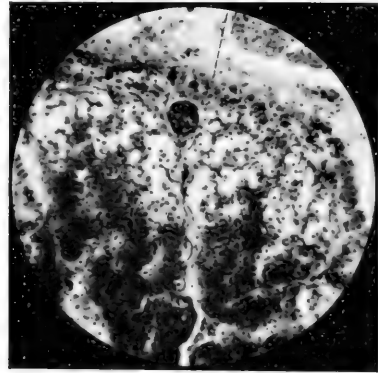
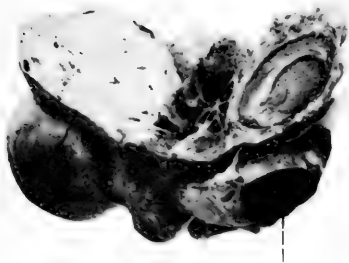


Fig. 7. Section through the proliferating marginal zone of the left suprarenal gland. The line points to the tumour-infiltrated capsule, in which are seen many small bloodvessels and one large one. \times about 150.



vena cava

Fig. 8. The tumour cut through to show the sectionsurface of a yellow and a red stratified nodule. The tumour is seen to contain numerous, rather large blood-vessels.

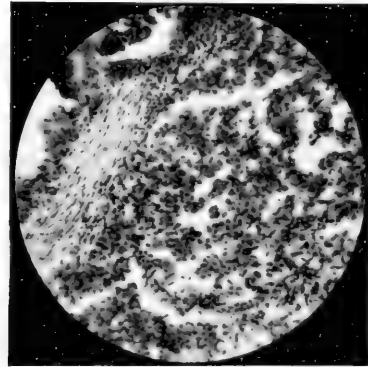


Fig. 9. A sudan-stained frozen section through the tumour, showing the large, round fat-globules in cells with sharply-defined nuclei. \times about 200.

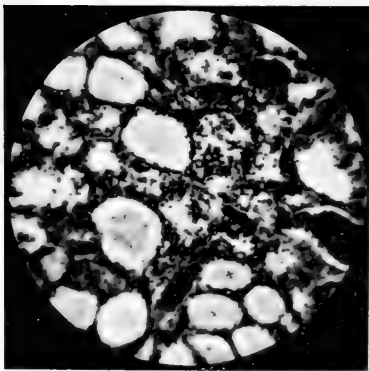


Fig. 10. Section through the thyroid gland. The two follicles marked with a \times contained normal homogeneous colloid, the others a fluffly mass. It will be seen how in the central follicles the epithelial cells have become detached, and lie like large rounded, slightly tumefied cells within the follicle. \times about 200.

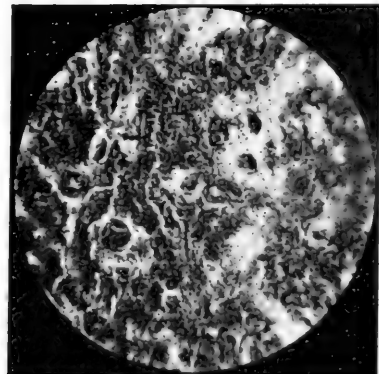


Fig. 11. Section through the parathyroid, showing the increased mass of connective tissue round the blood-vessels. \times about 200.

THE AURORAL SPECTRUM AND THE UPPER STRATA OF THE ATMOSPHERE

PRELIMINARY COMMUNICATION

BY
L. VEGARD

VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER, I. MAT.-NATURV. KLASSE, 1923, No. 89.

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BY JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 13. april 1923.

During recent years I have been investigating the auroral spectrum. In the winter 1912—13 I undertook an expedition to Bossekop in Finmarken,¹ the main object of which was to study the auroral spectrum. With a spectograph which combined a considerable dispersion with a great power of light, I succeeded in photographing a few of the strongest lines in the blue part of the auroral spectrum, and it was proved that these lines belong to the so-called negative band spectrum of Nitrogen.

During the winter 1921, I continued investigations in Christiania, and here I made determinations of the green auroral line.² As the result of a number of measurements, I found the auroral line to have the following wave length:

$$\lambda = 5578,0 \text{ (int. units).}$$

Although the auroral line was determined with such an accuracy that the error is only a fraction of an Å unit, the origin of the line remains as mysterious as ever.

It was to be hoped that a more complete investigation of the whole auroral spectrum might give us some valuable information also with regard to the origin of the green line. But apart from this question, the determination of the auroral spectrum is a problem of the very greatest importance, on account of its bearing on the question regarding the constitution of the upper strata of the atmosphere and the nature of the cosmic electric rays producing the aurora borealis.

In the year 1921 the "Government Fund for Scientific Research" furnished me with the necessary means for taking up this work in a more systematic way. A more complete description of experimental arrangements will be given in a later work. Presently I shall only mention that during the last winter (1922—23) three spectographs, which were put up last summer, have been at work at the Geophysical Institute of *Tromsø*, where the top roof of the building has kindly been put at my disposal by the Director O. KROGNES. — For the sake of convenience we shall give the spectographs the following notation, viz. I, II and III (Roman numeral), where:

¹ L. VEGARD: Phys. Z. S. 14, p. 677, 1913. Ann. d. Phys. 50, p. 853, 1916. Bericht über eine Expedition nach Finmarken, Christiania Vid.-Selsk. Skr., Mat.-naturv. kl. 1916, nr. 13.

² L. VEGARD: Geofysiske Publikationer, Vol. II, No. 5.

- I. is a quartz-spectrograph with a fairly large dispersion and of high light power, for studying the ultra violet part of the spectrum.
- II. is a fairly big glass-spectrograph with a considerable dispersion and a fairly high light power.
- III. is a small glass-spectrograph with the largest possible light power, but with a much smaller dispersion.

The spectrographs I and II were especially designed for an accurate determination of the wave length of the lines that might appear in the auroral spectrum during the time of exposure which had to be very long.

The small glass-spectrograph, III, was constructed for the study of possible variations of the auroral spectrum, and also to learn how many lines could be observed in the visible part of the spectrum.

The big spectrographs I and II were mounted in a wooden box where the temperature could be regulated automatically. The whole box could be turned about a horizontal and a vertical axis.

These spectrographs have been in operation during the last winter (1922—23), and in this work I have been very ably assisted by mr. EINAR TØNSBERG. — We have already obtained a number of plates showing a considerable number of lines. The plates have been measured at the Physical Institute of Christiania, and in this work I have been ably assisted by mr. JONATHAN AARS.

With the Quartz spectrograph we have obtained three spectrograms taken on "Imperial Eclipse" plates. The time of exposure and the lines obtained are given in table I.

It appears that with a time of exposure of 15—20 hours of north-light a considerable number of lines can be obtained on the plate by means of the Quartz spectrograph. It should be noticed that in the spectra 1 and 2 the strongest lines, such as 4278 and 3914, are over-exposed.

To give an idea of the relative strength of the lines I have given them intensities from 1—10. Later on I intend to give more accurate intensity-values based on quantitative measurements with a registering micro-photometer.

On the spectrograms from the Quartz spectrograph 21 lines have been measured.

With the big glass spectrograph we at first used an Imperial panoramic plate B. This plate was developed after an exposure of 20 hours of northlight, but the plate showed only the green auroral line. The He-spectrum was used for comparison. The measurements gave for the auroral line the following wave length:

$$\lambda = 5578,2^1 \text{ (int. units).}$$

¹ The accuracy may be somewhat reduced through over exposure of the comparison spectrum. Since this was written the auroral line was obtained on a plate with very sharp lines, and which gave $\lambda = 5577,2$ int. units.

Table I.
Spectrograph nr. I. (Quartz).
 Photographic Plates: "Imperial Eclipse".

Plate nr. 1	2	3	Mean	Intensity
Time of exposure in hours 15.4	18.7	4		
λ	λ	λ	λ	
3134.4	3135.6	-	3135.0	3
3160.4	3159.7	-	3160.0	5
3208.3	-	-	3208.3	-
3284.9	-	-	3284.9	-
3371.5	3371.1	9371.2	3371.3	6
3432.7	(3431.2)	-	3432.7	2
3467.8	(3466.7)	-	3467.8	2
3502.9	-	-	3502.9	1
3535.7	3537.2	3535.5	3530.1	5
3575.6	3577.2	3577.8	3576.9	6
3710.7	3711.6	-	3711.1	3
3756.3	3755.1	-	3755.7	5
3805.2	3805.5	-	3805.4	5
3911.6	3915.3	3914.5	3913.8	10
3997.5	3998.5	-	3998.0	4
4054.3	4058.1	-	4056.2	4
4239.1	4236.6	-	4237.8	4
4277.3	4278.2	4277.6	4277.7	8
4421.5	-	-	4421.5	2
4653.1	4652.3	-	4652.7	3
4708.6	4606.7	-	4707.7	4

The spark spectrum of Cd used for comparison.

Afterwards an Imperial Eclipse plate was put in and developed after 18 hours of exposure. Only the 6 strongest lines in blue and violet were visible. — The He-comparison spectrum was over exposed and in consequence the accuracy of the wave length determination may be somewhat reduced.

The measurements gave the following results:

λ
4708.7 Å
4651.1 ..
4277.9 ..
4266.8 ..
4236.3 ..
3913.3 ..

The last line was very faint so it could hardly be seen in the microscope. These are mainly the same lines as those which I observed in the year 1912—13. There is only the differences that now I get a faint diffuse

line at about 4266,8, while in 1912—13 this line was not distinctly seen on the plate. A faint line 4200, was just noticeable on one of my plates from the year 1912—13.

With the small glass spectrograph III the strongest lines (even with pancromatic plates) could be obtained with a time of exposure of 30—60 minutes.

A considerable number of exposures have been made with this spectrograph, but only a few have been found sufficiently good for measurements, many of them showing only the same strongest lines that were more accurately determined with the two big spectrographs. But in order to see how many lines could be expected in the blue and violet part of the spectrum a plate was taken (nr. 17) which was exposed for 6,8 hours.

Table II.
Spectrograph III. (Small glass spectrograph.)

Plate 3a	3c	3d	4	6	7	Mean	Inter- sity	17
Time of ex- posure in hours: 0,8	0,8	0,5	1,6	1,4	0,8			6,8
-	[3745,5]	[3752,3]	-	-	-	-	I	3758,5
-	3810,6	3804,9	-	3800,8	-	3805,4	I	3807,0
3914,6	3913,3	-	[3908,3]	-	-	3913,9	10	3913,7
-	-	-	-	-	-	-	2	3941,5
-	3997,4	3999,1	-	3998,1	[4005,2]	3998,2	2	4000,4
-	4057,8	4058,4	-	4054,3	4051,9	4055,6	I	4059,7
-	-	-	-	-	-	-	I	4182,5
-	-	-	-	-	-	-	I	4200,0
4231,4	4239,1	4236,8	-	4235,8	4241,5	4236,9	5	4238,4
4278,5	4276,4	-	[4269,8]	-	-	4277,4	9	4279,0
-	-	-	-	4331,3	-	-	2	4345,8
-	-	-	-	-	-	-	I	4378,9
-	-	-	-	4424,7	-	-	2	4426,5
-	-	-	-	-	-	-	I	4478,5
-	-	-	-	-	-	-	I	4552,1
-	-	-	-	-	-	-	I	4591,9
-	4655,4	4653,7	-	4651,6	4651,4	4653,0	3	4650,8
4707,0	4713,3	-	-	-	-	4710,1	5	4708,3
-	-	-	-	-	-	-	I	4779,2
-	-	-	5582	-	5574,0	5578,4	I	4857,4

The spark of Cd used for comparison.

In table II are given the lines measured on some of the plates with a fairly small time of exposure. The last column contains the lines measured on the plate nr. 17. As we see, 20 lines have been measured, and probably some more lines can be traced by means of the micro-photometer.

An estimate of the intensities as they appeared on the plate nr. 17 is also given in the table.

Identification of the lines.

The observations carried out in the year 1912—13 gave the result that the strongest lines in the blue part of the auroral spectrum were due to Nitrogen and belonged to the so-called Negative band spectrum.

Comparing the new lines found with those of the N-spectrum we at once see that nearly all of them must be ascribed to Nitrogen.

Table III.

<i>Auroral lines, observed with spectograph.</i>			<i>Lines of Nitrogen spectrum.</i>		
I.	II.	III.	λ	Type	Observer
3135.0 Å	-	-	3135.9 Å	P. B.	Hermesdorf
3160.0 -	-	-	3159.2 -	-	— —
3208.3 -	-	-	?	-	— —
3284.9 -	-	-	3285.3 -	-	— —
3374.3 -	-	-	3374.5 -	-	— —
3432.7 -	-	-	?	-	— —
3467.8 -	-	-	3468.1 -	-	Deslandres
3502.9 -	-	-	3500.5 -	-	Hermesdorf
3536.1 -	-	-	3536.8 -	-	— —
3576.9 -	-	-	3577.0 -	-	— —
3711.1 -	-	-	3710.7 -	-	— —
3755.7 -	-	3758.5 Å	3755.5 -	-	— —
3805.4 -	-	3807.0 -	3805.1 -	-	— —
3913.8 Å	3913.3 Å	3913.7 -	3914.4 -	N. B.	Deslandres
-	-	3941.5 -	3943.1 -	P. B.	Hermesdorf
3998.0 -	-	4000.4 -	3998.5 -	-	— —
4056.2 -	-	4059.7 -	4058.7 -	-	Hasselberg
-	-	4182.5 -	?	-	— —
-	-	4200.0 -	4201.0 -	-	— — or N. B. 4198.8
4237.8 -	4236.3 -	4238.4 -	4236.3 -	N. B.	— —
-	4266.8 -	-	4269.4 -	P. B.	— — } Diffuse line perhaps shade of a band
4277.7 -	4277.9 -	4279.0 -	4278.0 -	N. B.	— —
-	-	4345.8 -	4343.8 -	P. B.	— —
-	-	4278.0 -	4379.8 -	L. S.	Hemsalech
4421.5 - ?	-	4426.5 -	4426.2 -	-	— —
-	-	4478.5 -	4478.0 -	-	— —
-	-	4552.1 -	4552.3 -	-	— —
-	-	4591.9 -	4590.0 -	-	Neovius
4652.7 -	4651.1 -	4650.8 -	4651.2 -	N. B.	Hasselberg
4707.7 -	4708.7 -	4708.3 -	4708.6 -	-	— —
-	-	4779.2 -	3779.0 -	L. S.	Thalen
-	-	4857.4 -	4860.6 -	-	Hemsalech
-	5578.2 -	5578.4 -	?	-	— —
-	-	5925 } Bands	Probably positive	-	-
-	-	6465 } Bands	N-Bands	-	-

On the left side of table III has been put up the auroral lines observed, and on the right side the corresponding N-lines are given. In a column headed "Type" is given the type of spectrum which the lines belongs to. The numbers and the classification are taken from: H. KAYSER, Hand-

buch der Spectroscopie. N. B. and P. B. mean negative and positive bands. L. S. means line Spectrum.

All somewhat strong lines in the ultraviolet found by means of the quartz spectrograph are quite accurately determined, and the errors are less than 1 Å unit. The agreement between the auroral lines and the corresponding N-lines is a very close one throughout the ultraviolet part. Also the stronger lines of the visible part of the spectrum are quite accurately determined, and the identification quite certain.

The lines which are only determined by means of the small spectrograph may be somewhat less accurate, and there may be errors in the wave length of 2—3 Å, but still I think the identification also of these lines is pretty certain.

We see that the auroral spectrum is almost entirely due to Nitrogen.

The lines partly belong to the negative partly to the positive Band-spectrum, and in the visible part also some lines appear, which in the literature are arranged in the line spectrum.

The grouping of these lines may be a more or less artificial one. In the northlight spectrum, which corresponds to a fairly definite way of production, they appear mixed together and with a quite typical intensity distribution. In the northlight spectrum they may be said to form one family of lines.

In all 35 lines have been measured, out of these 29 lines have been identified as belonging to Nitrogen and the two lines or bands 5925 and 6465 are probably N-Bands. Still, however, the following four lines — the green line included — are not yet interpreted:

5578,2
4182,5
3432,7
3208,3

These lines are not found among the recorded lines of the N-spectrum. They cannot be ascribed to Hydrogen, nor to Helium or Oxygen. I think there is little doubt that also these lines are due to Nitrogen. This only means that the auroral spectrum is formed under conditions which are very difficult to reproduce in the laboratory. Several facts go to support this view, and I hope to gather some more knowledge through the continued work on the auroral spectrum.

A most important result of these observations of the auroral spectrum is that no indication of either Hydrogen or Helium lines have been observed. — This fact is the more remarkable because in some of the spectra the stronger lines were greatly overexposed.

During the last two years I have made experiments in my laboratory, the object of which was to study the light exited by the bombardment of

cathode rays in mixtures of Nitrogen and Hydrogen, and Nitrogen and Helium. — As a result of these investigations, which will be more fully treated later on, we can say that in mixtures of N—H the presence of a few per cent (3—7%) of H can be detected in the spectrum, when the N-spectrum appears on the plate with about the same strength as that of the auroral spectrum. In mixtures of N and He the presence of 30% He can easily be detected.

It might be suggested that perhaps the energy possessed by the electric rays were sufficient for exciting the N-spectrum, but too low to excite the H and He-spectra — if so these gases might be present in the higher strata of the atmosphere and still give no light.

But such an explanation is not possible. — The energy of the rays had to be less than that corresponding to a potential fall of 30 volts, but whatever may be the nature of the cosmic rays they must have a much greater energy if they shall get down to a height of 100 km. above the ground. Even if we only take into account the mass of Nitrogen to be traversed, a cathode particle should have an energy corresponding to a fall through several thousands of volts in order to get down to a height of 100 km., and any kind of positive rays would require a much higher voltage.

The absence of H and He lines in the auroral spectrum then shows that in that region where the auroral light is emitted, the pressure of H and He must be small compared with that of N in the same region.

Now we know from observations of the height of aurora and the light distribution along the auroral rays,¹ that the principal part of the auroral light is emitted in the height interval of 100—120 km. Taking the mean value as representing the region of emission we must have that at the height of 110 km. the Nitrogen pressure must be at least 15 times as large as that of Hydrogen and 3 times as large as that of Helium.

The possible quantities of H and He which may be present, will depend on the assumption we make with regard to the pressure distribution of Nitrogen. — Now the quantity of Nitrogen present at the various heights will depend on the way in which the temperature varies upwards.

In previous papers dealing with the absorption of electric rays in the atmosphere², I have, in accordance with WEGENER, assumed that the temperature up to a height of 10 km. on an average can be put equal to -23°C . and above this height put equal to -53°C .

In table IV is given the pressure at various heights (h) for the gases H, He, N and O, corresponding to the assumptions of WEGENER.

¹ L. VEGARD and O. KROGNESS: The Position in Space of the Aurora Polaris. Geophys. publ., Vol. 1, nr. 1, p. 149.

² Phil. Mag., Vol. XLII, 1921, p. 47.

Table IV.

h	h'	Pressure in dyn/cm ²			
		Hydrogen	Helium	Nitrogen	Oxygen
T = 220	T 300				
400.10 ⁵ cm.	542,0.10 ⁵ cm.	0,44	0,001	4,40.10 ⁻²¹	
300. " "	405,6 " "	1,30	0,008	1,69.10 ⁻¹⁴	
200. " "	269,2 " "	3,85	0,071	6,50.10 ⁻⁸	
160. " "	214,5 " "	5,95	0,169	2,80.10 ⁻⁵	
140. " "	187,3 " "	7,29	0,259	0,00058	
130. " "	173,7 " "	8,24	0,321	0,0026	
120. " "	160,0 " "	9,20	0,399	0,0121	0,0003
110. " "	146,4 " "	10,25	0,494	0,055	0,0013
100. " "	132,8 " "	11,4	0,611	0,251	0,0080
95. " "	125,9 " "	12,1	0,681	0,520	0,019
90. " "	119,1 " "	12,7	0,757	1,14	0,045
85. " "	112,3 " "	13,5	0,843	2,43	0,107
80. " "	105,5 " "	14,2	0,939	5,21	0,254
75. " "	98,7 " "	15,0	1,045	11,1	0,602
70. " "	91,8 " "	15,9	1,16	23,7	1,44
65. " "	85,0 " "	16,8	1,3	50,5	3,42
60. " "	78,2 " "	17,6	1,45	107,7	8,10
55. " "	71,4 " "	18,7	1,60	229,9	19,3
50. " "	64,6 " "	19,7	1,79	491,5	45,8

At the height of 110 km. the pressure of Nitrogen should be 0,055 dyn/cm², and for H and He 10,25 and 0,494 respectively. But if this value for the N-pressure was nearly right, the auroral spectral analysis would show that the pressure of H and He could not be greater than 0,0037 and 0,015 respectively, or the hydrogen pressure could only be about $\frac{4}{10000}$, and the He pressure only a $\frac{4}{1000}$ -part of that assumed by WEGENER.

When the values of the pressures of H and He are given at 110 km., we can find the pressure at other heights, provided that we know the temperature. In table V is given the variation of the H and He pressure above 100 km. provided that we put the pressure at 100 km. equal to 0,0037 and 0,018 for the two gases respectively. But we notice that going upwards the pressure of H and He will already, at a height of 120—130 km., overtake that of Nitrogen. We should get Nitrogen and Helium lines as soon as we got a bit further up. In consequence, we should expect to find a change in the appearance of the auroral rays when they are seen to pass from heights of, say, 3—400 km. down to about 110 km. But no such change is to be noticed. And it seems as if there should not be any possibility of the existence of a H- and He-layer in the upper strata of the atmosphere.

Now we may be aware of the possibility that our calculations of the Nitrogen pressures are based on false assumptions with regard to the temperature distribution.

Table V.

h (T = 220)	Pressure in dyn/cm ²		
	Nitrogen	Hydrogen	Helium
400.10 ⁵ cm.	4,40.10 ⁻²¹	0,00016	0,00004
300. " "	1,69.10 ⁻¹⁴	0,00047	0,0003
200. " "	6,50.10 ⁻⁸	0,0014	0,0026
160. " "	2,80.10 ⁻⁵	0,0021	0,0063
140. " "	0,00058	0,0026	0,0006
130. " "	0,0026	0,0030	0,012
120. " "	0,0121	0,0033	0,015
110. " "	0,055	0,0037	0,018
100. " "	0,251	0,0041	0,023

Recently a most interesting paper has been published by LINDEMANN and DOBSON,¹ dealing with the meteors. They have tried to calculate the amount of gas which a meteor must traverse in order to obtain the temperature necessary for explaining its behaviour at the various heights.

They come to the conclusion that the density at a height of, say, 100 km. must be considerably greater than that ordinarily found, and they conclude that the higher strata must have a temperature of about 300° absolute.

Now we can easily calculate the pressures at various heights when we know the composition of the atmosphere 10 km. above the ground, and suppose that above this height the temperature is 300° absolute.

The pressure is found from a formula of the form:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{z}{T}(h-h_0)} \quad (1)$$

Let h_0 be 10 km. then p_0 is the pressure at 10 km. If, now, we have calculated the pressure for one temperature, we can easily find the pressure distribution at another temperature in the following way:

At the temperature T and a height h the pressure p will be equal to that at a certain height h' at the pressure T_1 provided that:

$$\frac{h' - h_0}{T_1} = \frac{h - h_0}{T} \quad (2)$$

We have, in other words, by means of this formula to calculate the heights h' which, for a temperature T_1 , corresponds to a height h and a temperature T .

¹ F. A. LINDEMANN and G. M. B. DOBSON: A Theory of Meteors and the Density and Temperature of the outer Atmosphere to which it leads. Proc. of Royal Soc. A. 102, p. 411.

The heights h' corresponding to 300° are given in the second column of table VI.

Table VI.

h (T = 300)	Pressure in dyn/cm ²		
	Nitrogen	Hydrogen	Helium
542,0.10 ⁵ cm	4,40.10 ⁻²¹	0,0053	0,00096
405,6. " "	1,69.10 ⁻¹⁴	0,016	0,0677
269,2. " "	6,50.10 ⁻⁸	0,046	0,068
214,5. " "	2,80.10 ⁻⁵	0,072	0,162
187,3. " "	0,00058	0,089	0,248
173,7. " "	0,0026	0,090	0,308
160,0. " "	0,0121	0,111	0,383
146,4. " "	0,055	0,123	0,475
132,8. " "	0,251	0,138	0,587
125,9. " "	0,520	0,145	0,654
119,1. " "	1,14	0,153	0,727
112,3. " "	2,43	0,162	0,810
105,5. " "	5,21	0,170	0,902
98,7. " "	11,1	0,180	1,004

If, now, in the same way as before, we apply the results from our auroral spectral analysis on the distribution of Nitrogen, which corresponds to $T = 300^\circ$ we get the somewhat higher values for the possibly pressures of H and He given in table VI.

Also in this case, however, H and He would predominate above a height of 120—140 km.

As the ordinary Hydrogen and Helium lines are not to be found in the auroral spectrum, I think we can safely conclude that the green line (5578) cannot originate from any of these two gases, for this line remains the most prominent to the very bottom edge of all ordinary aurorae going down to a height of 95—100 km.

But at this height — as we saw — the pressure of H and He is very small as compared with that of Nitrogen; and remembering that the N-spectrum is very easily excited, it can hardly be assumed that a gas which is only present with a few per cent in the mixture shall give the strongest line.

On the other hand I have found by spectral observations that the green line is seen to the very top of the auroral ray streamers, and the gas which emits this line must be a prominent component of the atmosphere up to its extreme upper limits.

Hence we conclude that the Hydrogen and Helium layer, which has earlier been supposed to dominate at the top of our atmosphere, does not exist.

For the same reason we can hardly assume the existence of some light unknown gas (Geocoronium); for this gas had to be present at a height of 100 km., with a pressure of the same order of magnitude as that of

Nitrogen, in order to give the most prominent of all lines in the auroral spectrum. Being a light gas, however, Geocoronium should soon predominate, and we should expect that any trace of a N-Spectrum should disappear at a height of, say, 140 km.

This conclusion is independent of the assumption we make about the temperature of the upper strata of the atmosphere for if the temperature is high the pressure of N at a height of 100 km. will be greater and for Geocoronium we had to assume a correspondingly great pressure to make its green line predominant at this altitude. Somewhat higher up in the atmosphere the lighter gas (Geocoronium) would take the lead.

If, then, we were able to show that in the auroral spectrum the Nitrogen lines are maintained at a height greater than 150 km., I think we were justified in concluding that also the green line (5578) must be due to Nitrogen. Observations are now in progress for testing this point.

From a physical point of view, however, it is very unlikely that a new gas Geocoronium should exist, because there is no place for it in the periodic system.

I therefore think the best procedure would be to try to interpret the results of our spectral analysis without introducing the possibility of a new type of matter. The introduction of Geocoronium is merely an easy way of getting out of the difficulty.

But if we give up Geocoronium, it seems as if the green line should have to be ascribed to Nitrogen, and Nitrogen should be the predominant gas up to the very limit of the atmosphere.

Here, however, we meet a difficulty of another nature. From measurements of the height and position of the auroræ, we know that some times the upper end of an auroral ray can reach a height of 5—600 km., and at this height its light intensity is of the same order of magnitude as further down towards its bottom edge.

In previous publications¹ I have dealt with the variation of light intensity along the ray streamers. The increase of intensity upwards can be explained by assuming that a greater part of the cosmic rays when they enter the atmosphere form great angles with the magnetic lines of force. In this way we may explain that intensity variations along the streamers may occur, but in order to get a noticeable intensity it is of course necessary that the pressure of the atmosphere does not fall below a certain limit.

From the table IV we see, that the Nitrogen pressure decreases rapidly upwards. Assuming a temperature of 220° absolute above 10 km. the

¹ L. VEGARD and O. KROGNESS: The Position in Space of the Aurora Polaris, p. 140.
L. VEGARD: Phil. Mag. XLII, p. 59.

Nitrogen pressure at a height of 400 km. should have the extremely small value of $4,4 \cdot 10^{-21}$ dyn/cm².

In this respect it does not help much to assume a somewhat higher temperature. With a temperature of 300° obs. the same low pressure would exist at a height of 542 km., which is also inside the auroral region.

If we at all are allowed to speak of a pressure of this order of magnetude it would mean that at a height of 400—600 km., where the pressure is of the order 10^{-21} dyn/cm², there should only be one molecule in a volume of 10 cubic meters. This, again, would mean that the density of the electric radiation had to be enormously great to produce the light-intensity actually observed.

If e. g., we assume that the aurorae are produced by cathode rays of a certain velocity, $v = \beta c$, we can estimate the density of radiation by a comparison with the light produced when Nitrogen is bombarded by a stream of cathode rays in a vacuum tube.

We suppose the sources of light to be placed before the slit of a spectroscopie at distances R and r from the slit. The effective cone of the instrument with a solid angle ω cuts the sources in areas S and s . Let the intensity of light pr. unit area of the northlight and the vacuum tube be J_a and J_v . The quantity of light passing through the instrument in unit time will be proportional to

$$\frac{q S J_a}{R^2} \text{ and } \frac{q s J_v}{r^2}$$

for the aurorae and the vacuum tube respectively; q is the area of the slit and:

$$\frac{S}{R^2} = \frac{s}{r^2} = \omega$$

If the two sources shall produce the same effect in the instrument we get

$$J_a = J_v. \quad (3 a)$$

Now the intensity pr. unit area is equal to the intensity pr. unit volume multiplied by the thickness of the layer, because there is practically no absorption in the layer at any rate in the visible part of the spectrum. The condition of equal photographic effect then will be:

$$i_a l_a = i_v l_v. \quad (3 b)$$

i is the intensity per unit volume, l is the thickness of the layer. The quantity i is roughly proportional to the number of collisions made by the cathode particles per unit volume in unit time or proportional to $\nu \rho$, where ν is

the number of electrons crossing unit area in unit time. Let n be the number of cathode particles which at any moment is present in 1 cm^3 ; then

$$n = \frac{v}{c}.$$

Assuming the same ray-velocity, the intensity of light emission per unit volume will be proportional to $n\beta$, and our condition for equal spectroscopic action takes the form:

$$(4) \quad n_a \rho_a l_a = n_v \rho_v l_v.$$

For the vacuum tube we assume $l_v = 1 \text{ cm.}$, $\rho_v = 100 \text{ dyn cm}^2$. The corpuscular current which would produce the same spectroscopic action as that of the upper part of an auroral ray can be estimated to about 10^{-6} ampere when the velocity of the rays is about $1/2 c$, where c is the velocity of light.

This would give:

$$n_v c \beta = 10^{-7}.$$

Putting $\beta = 1/2$ and $c = 4,8 \cdot 10^{10}$,

$$n_v = 4 \cdot 10^2. \text{ Hence:}$$

$$n_a \rho_a l_a = 4 \cdot 10^2,$$

l_a is of the order of 10^6 cm. , and

$$n_a \rho_a = 4 \cdot 10^{-2}.$$

If, now, ρ_a should be equal to $4 \cdot 10^{-21}$, it would follow that

$$(5) \quad n_a = 10^{+19}.$$

At any moment there should be about as many electrons (ray-carriers) present in each cm^3 as there are molecules in 1 cm^3 of gas 0°C and atmospheric pressure. Such a density of electric radiation cannot be assumed. The electrostatic forces would prevent a ray bundle of such a density to be formed.

If Nitrogen is the predominant gas to the very limit of the atmosphere, it must at the height of 400—600 km. possess a density of a much higher order of magnitude than that previously calculated.

Quite formally we could get a sufficient pressure and density of Nitrogen at a height of 600 km. by a proper assumption with regard to the temperature of the upper strata of the atmosphere.

If, as before, for the sake of simplicity, we suppose the temperature to be constant above 10 km. from the ground, we can easily find the tempera-

ture which is necessary to make the Nitrogen pressure at 600 km. equal to a given pressure.

From table IV we see that for a temperature of 200° absolute, the pressure of Nitrogen already at a height of 130 km. is only 0,0026 dyn/cm². If a Nitrogen pressure of this magnitude should exist at a height of 600 km. the corresponding temperature T can be found from equation (2) by putting $h = 130$, $h_0 = 10$, $T = 220^\circ$, $h' = 600$ and we get:

$$T = 1078^\circ \text{ abs.}$$

That the atmosphere above 10 km. should have a temperature of this magnitude must, I think, be considered as excluded.

The simplest way in which to prevent the Nitrogen density from diminishing so rapidly as we pass upwards in the auroral region, would be to suppose that the upper strata were electrically charged, and consequently were acted on by electric forces. We might suppose the gas near the limit of the atmosphere partly to exist as positive ions. This is, in fact, what we should expect from a physical point of view. The upper layers of the atmosphere are exposed to the direct action of the sun's radiation. On account of the photoelectric effect, electrons will be driven out from the gas molecules with maximum velocities determined by the EINSTEIN equation:

$$(6) \quad \frac{1}{2} m v^2 = h \nu$$

where ν is the maximum frequency of the incident light, and h is Planck's constant.

Now it is pretty certain that the sun — besides the ordinary light spectrum — emits radiation of much shorter wavelength of the type we know from the X- and γ -rays. With energy-quanta of this magnitude, electrons may be driven out of the atmosphere from quite a considerable layer of gas round the earth, leaving the gas molecules behind in the form of positive ions.

In this way a positively charged shell will be kept round the earth. Above a certain height the electric force will be directed upwards, and below this height it must, on account of the negative charge of the earth, be directed downwards.

The variation of pressure will no longer be given by the equation:

$$(7) \quad dp = - \rho g dh$$

but instead of this we now get for higher strata:

$$(8) \quad dp = - (\rho g - \sigma F) dh.$$

Where σ is the electric charge per unit volume and F the electric force. The electric charge will diminish the weight of a given quantity of gas; it

will — as it were — make the molecules lighter. In this way we can understand that Nitrogen in the auroral region can be distributed as if it was one of the very lightest gases.

Light gases like Hydrogen and Helium when they get ionised may have their weight so much reduced that they would fly away from the earth; and thus we may explain the absence of Hydrogen and Helium layers which have earlier been assumed to exist on the top of our atmosphere.

If the upper strata of the atmosphere to a great extent consist of positively charged *N*-molecules, we can also understand that under this condition the bombardment with electric rays may produce other *N*-lines than we observe in our laboratory experiments, for it only means that we have not been able to produce artificial in the observation chamber a quantity of Nitrogen containing a sufficiently large percentage of positive ions.

I also think that this hypothesis of an electrically charged upper layer gives a very simple explanation to the results found by LINDEMANN and DOBSON from their investigations of the meteors; for the greater density which they want will be produced by the electric charge of the upper layers, and we need not take our refuge to the very improbable hypothesis of the high temperature which they suppose to exist above 10 km.

The highly ionised state of the atmosphere must be restricted to a certain layer, and as long as the cosmic rays are absorbed in this layer we get the ordinary auroral spectrum showing the typical green line. As the typical greenish-yellow aurorae may have their bottom edges so far down as 100 km. above the ground, this would mean that the positive layer should go down to a height which is not greater than 100 km.

If the penetrative power of the rays could be great enough to enable them to pass into the neutral atmosphere the Nitrogen spectrum would turn into the more ordinary type and the green auroral line should disappear.

As a change of spectrum must be accompanied with a change of colour, this hypothesis of an electrically charged upper layer gives us new possibilities for explaining the marvellous changes of colour which the aurorae may display.

Thus I think that the peculiar colour of a drapery-shaped arc, which I observed at Bossekop 1912, may be simply explained in this way. From the upper limit to a distance of a few km. from the bottom edge the arc had the ordinary greenish-yellow colour, but at a certain height the colour turned into dark red. This red bottom edge was found simultaneously all along the arc, which extended across the sky from ENE to WNW, and was observed at least 8 minutes.

It would be of great interest to measure the height of such forms to see if they come lower down than the ordinary green arcs; but these phenomena are very rare, and the height of such arcs has not yet been

measured. If our view is right, however, such aurorae would show us where the neutral atmosphere begins.

The aurorae, however, also show colour changes of another type. Separate auroral streamers or ray-bundles forming part of a drapery or drapery-shaped arc may turn into another colour usually red or bluish-red. The colouring is in this case not restricted to the bottom edge and is not kept for a considerable time, but it extends to almost any part of the streamer, and some times the whole ray bundle may turn red.

The red streamers appear in between the ordinary green-yellow ones; usually they only last for a fraction of a second. Other red coloured bundles shoot in, and the distribution of colours and thus the whole picture will undergo very rapid changes.

To explain this kind of colour variation, I have in previous papers introduced the hypothesis that usually only a fraction of the rays, that enter the atmosphere gets absorbed, so that most of the rays return into space. Remembering that the spectrum from a gas bombarded by cathode-rays depends on the velocity of these rays, we may expect to get a variation of colour according as a greater or smaller fraction of the rays are completely absorbed.

Some of the colour changes may no doubt be caused in this way; but if the upper layer of the atmosphere is positively charged, there will also be another possibility for colour changes to take into consideration.

If a very intense ray-bundle (consisting of negative electrons) pass through the positively charged layer, and if it keeps its position for some short time, the gas on its way may for a moment become partly neutralized and the *N*-spectrum may partly turn into the ordinary type corresponding to neutral Nitrogen and which gives the red colour.

It is of interest to notice that the latter explanation of colour changes would require negatively charged cosmic rays.

Physical Institute, University, Christiania March 1, 1923.

AURORAL SPECTRA
AT DIFFERENT ALTITUDES AND THE ORIGIN
OF THE GREEN AURORAL LINE

SECOND COMMUNICATION

BY
L. VEGARD

WITH 2 FIGURES IN THE TEXT

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 9)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA
AT COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 13. april 1923.

As mentioned in the first communication the pressure of any electrically neutral gas present in the atmosphere will vary according to the equation:

$$dp = - \rho g dh = - \frac{Mg}{RT} dh. \dots \quad (1)$$

The variation of pressure depends on the molecular weight (M), and if several gases were present the composition of the atmosphere should vary rapidly as we pass upwards.

Assuming the temperature above 10 km. to be 220° Abs., the pressures at different heights for the gases H, He, N, and O are given in table IV of the first communication, and from these numbers we find at different heights the following ratios between the pressures of H, He, O, and that of N:

Height Km.	H	He	O
	N	N	N
80	2.7	0.18	0.049
100	45.0	2.5	0.032
120	760.0	33.0	0.025

If the upper strata are electrically charged, the variation of pressure — as we saw in the first paper — will be different from that of a neutral gas; but for a given difference of molecular weight the charge should increase the rate at which the ratio between the densities of the two gases changes with variation of altitude.

If the auroral region of the atmosphere, above 100 km. say, were composed of gases with a different molecular weight, and if these gases were present in such quantities that, through bombardment with electric rays, they were able to give out light of sufficient intensity to be observed in the auroral spectrum, the intensities of the lines emitted from different gases would vary largely with variation of height.

Now we found that a great number of auroral lines are emitted from Nitrogen, but the strongest of all auroral lines (the green line) and three faint lines in blue and ultraviolet cannot be found among the lines of Nitrogen given in the tables of spectral lines.

Already in the first paper I came to the conclusion that also the green line belonged to Nitrogen; but at the same time it was mentioned that the correctness of it might be tested by observing auroral spectra corresponding to various altitudes. For if the green line is produced by some gas different from Nitrogen this gas must have a different molecular weight¹, and in that case we should observe, that the ratio between the intensity of the green line and that of the negative N-bands varied considerably with the altitude.

For the analysis of the light emitted at various heights I used a small spectrograph with a great light power.

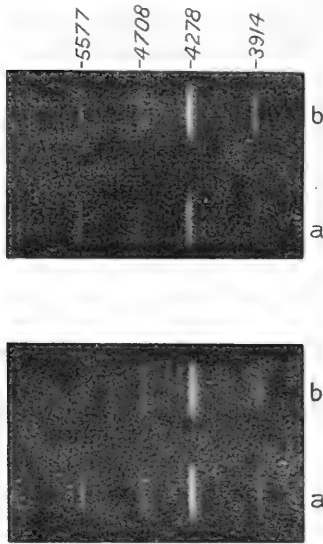


Fig. 1 and 2.

Before the slit of the instrument a lens was mounted in such way that the slit was situated in the focus plane of the lens. The lens forms a picture of an aurora that falls on the slit, and if the optical axis of the instrument hits the sky at a certain point only auroral light from the nearest surroundings of this point will enter the spectrograph and hit the plate.

With this instrument it is possible to analyse separately light emitted near the bottom edge and from parts near the upper limit.

For this analysis we select auroral forms having fairly long ray streamers, because in that case the two spectrograms will correspond to the greatest difference of height.

During the evenings and nights of March 11 and 12. I succeeded in taking two pairs of such photograms — one pair each day (Fig. 1 and 2).

The spectrograms corresponding to the bottom edge (*a* on the plate) was obtained with about half an hour's exposure. Near the upper limit the light was fainter and the spectrum was here exposed for about four hours (*b* on the plate). Still the intensities on the plate of the two spectra were nearly the same.

The aurorae used for these exposures were mostly drapery-shaped arcs, some draperies and some isolated rays.

The bottom edge is situated at a height of about 100 km. and the two spectra to be compared correspond to a difference of height of about 50—80 km.

The intensities of the spectral lines will be accurately measured later on by means of a microphotometer, but some results can be directly seen on the plate.

¹ The gas CO with a molecular weight equal to that of N cannot be supposed to be present with a sufficient density.

Thus the lines belonging to the line spectrum of Nitrogen compared with those of the negative bands are somewhat stronger near the upper limit.

The intensity of the green line as compared with that of the strong negative N-bands is quite as large near the bottom edge as it is 50—80 km. higher up in the atmosphere.

If there is a change of relative intensity it is quite small, and goes in such a direction as to make the negative N-bands stronger as we pass upwards.

From this result we can immediately draw the conclusion that the green line cannot be produced by a gas lighter than Nitrogen, such as Hydrogen, Helium, and Neon, and the assumption that it should be emitted from a light hypothetical gas "Geocoronium" must be given up as impossible, and hence forth I think Geocoronium ought to disappear from the geophysical literature.

On the other hand the green line cannot be emitted from a gas heavier than N for any gas that might come into consideration (e. g. Oxygen) would produce a greater diminution of the relative intensity of the green line than that actually observed.

The only possible way of interpreting the results seems to be that the green auroral line is emitted from Nitrogen¹.

The small intensity variations observed may be explained from change of density of the gas and of the velocity of the electric rays that produce the luminosity, because the rays will loose kinetic energy along their path through matter.

It seems also very likely that the three other unknown lines 4182, 3432, 3208, and thus all auroral lines as yet observed — are to be ascribed to Nitrogen.

¹ *Note added to the proof:*

It should be noticed that the interpretation of the results of our spectral analysis here given, is based on the assumption that, in the stratosphere, the pressure of any component of the mixture varies according to equation (1). This involves that the vertical air motion is small as compared with the velocity of diffusion. If this is not the case the components would get mixed through vertical currents, and we should expect the composition of the atmosphere to be nearly independent of altitude.

This consequence would so far be in accordance with our results; for there should be no layer of light gases on the top of our atmosphere, and Nitrogen should remain the most prominent also in the auroral region.

With regard to the green line it must in any case, on account of its great intensity, be emitted from some component present in relatively large quantities, and being the strongest of all lines it should most likely belong to Nitrogen; but in this case also Oxygen might be present in the auroral region with a fairly large concentration, and we should also have to consider, whether the green line possibly might originate from Oxygen in some state or modification.

The comparison between spectra from different altitudes thus confirms the view put forward in my first publication, that the green line is due to Nitrogen and that this gas is predominant to the very limit of the atmosphere.

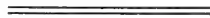
Excluding the assumption of a very high temperature above 80—100 km., our results, together with the fact that auroral rays can be observed reaching a height of 500—600 km., involve that in the auroral region the atmosphere is mainly formed by positive Nitrogen particles.

A consequence of our results would be that the green line should be emitted from positively charged N-ions. Such conditions, however, are difficult to reproduce in laboratory experiments, and as we can only expect to bring a small fraction of the molecules at a time into the ionised state and in this state hit them with electric rays, we can only expect in the laboratory to produce the green line with a very small intensity as compared with that of the other N-lines. At the present time I am making laboratory experiments in this direction.

Although quite formally we might get a sufficient density of the highest strata of the atmosphere by supposing a proper distribution of temperature, we should still — apart from the improbability of this hypothesis — meet with the difficulty of explaining, why Nitrogen in the auroral region, when bombard by electric rays, should give a spectrum which is so difficult to reproduce in laboratory experiments.

Indeed we may say that even if we did assume a high temperature we should still have to suppose the gas to be in some abnormal state in order to explain the appearance of new strong lines in the N-spectrum.

The hypothesis that Nitrogen exists in a highly ionised state, however, at the same time explains the high density and the appearance of lines in the auroral spectrum so difficult to reproduce in laboratory experiments.



Printed, October 31st 1923.

DISTRIBUTION OF MATTER IN THE HIGHEST STRATA OF ATMOSPHERE

THIRD COMMUNICATION

BY
L. VEGARD

WITH 6 FIGURES IN THE TEXT

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 10).

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
AT COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i fællesmotet den 3dje mai 1923

§ 1.

In two previous papers I gave results of the analysis of the auroral spectra, and came to the conclusion that Nitrogen had to be the predominant gas to the very limit of the atmosphere. To explain the great density of Nitrogen that had to be present at a height of 500—600 km. and at the same time give an explanation to the singular type of Nitrogen spectrum excited by electric rays in the auroral region, I was led to the hypothesis that the Nitrogen of the highest strata, at any rate to a considerable extent, existed as positive ions.

This hypothesis introduces the very interesting problem of finding how the density of an electrified atmosphere will vary with the height as we pass upwards from the neutral part of the atmosphere.

From the phenomenon of electric wind we are familiar with the idea that an electrically charged gas in an electric field is exposed to the action of a mechanical force, and already in the first paper I assumed that the variation of pressure was given by the equation:

$$dp = - (\rho g - \sigma F) dr \quad (1)$$

where p is the pressure, ρ the density, σ the electric charge per unit volume of the gas, F the electric force and r the distance from the centre of the earth to the point considered.

From this equation we see that the electric charge will have the effect of diminishing the rate of decrease of the density as we pass upwards. — If we try to calculate the distribution of matter more accurately, we shall soon find that the problem is a somewhat complicated one.

It is my intention in this paper to show that under certain assumptions we can find a differential equation for the variation of density with the height, and to draw some conclusions from our hypothesis of an electrically charged upper layer.

Let us suppose the earth to be a perfect sphere and that ρ and σ are functions of r only. We apply the Theorem of Gauss on a spherical surface through the point P at a distance r from the centre of the earth. Then:

$$4 \pi r^2 F = 4 \pi E r$$
$$F = \frac{E r}{r^2}$$

The total electric charge E_r inside the sphere is given by the equation:

$$E_r = E_o + 4 \pi \int_{r_o}^r \sigma r^2 dr$$

where E_o is the total charge inside some arbitrary sphere with radius r_o . Then:

$$F = \frac{E_o}{r^2} + \frac{4 \pi}{r^2} \int_{r_o}^r \sigma r^2 dr \quad (2)$$

We suppose that the usual relation between pressure and density of a gas also holds in an electrified atmosphere, or that:

$$p = \frac{RT}{M} \rho \quad (3)$$

M is the molecular weight and R the gas constant.

Combining equation (1), (2) and (3) we get:

$$\frac{RT}{M} d\rho = - \left[\rho g - \frac{\sigma E_o}{r^2} - \frac{4 \pi \sigma}{r^2} \int_{r_o}^r \sigma r^2 dr \right] dr$$

Putting:

$$\frac{RT}{M} = a$$

$$\frac{a r^2 d\rho}{\sigma dr} + \frac{\rho g r^2}{\sigma} - E_o = 4 \pi \int_{r_o}^r \sigma r^2 dr \quad (4)$$

Differentiating with respect to r and remembering that ρ and σ are functions of r , the equation takes the form:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \rho}{dr^2} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dr} \frac{d\rho}{dr} + \left(\frac{2}{r} + \frac{g}{a} \right) \frac{1}{\sigma} \frac{d\rho}{dr} - \frac{g\rho}{a\sigma^2} \frac{d\sigma}{dr} - \frac{2g\rho}{a\sigma r} - \frac{4\pi\sigma}{a} = 0 \quad (5a)$$

The equation contains two unknown quantities ρ and σ , and to solve the problem one equation more should be required.

This second relation depends on the way in which the atmosphere is brought into its charged state.

In the previous papers it was pointed out that the atmosphere might be positively charged through the photo-electric effect produced by X- or γ -rays from the sun, but even if this was the only cause of the charged state of the atmosphere we are not in possession of sufficient data to find the charge given to the atmosphere in this way.

Whatever may be the cause of the charged state, we must assume the charge attached to the gas: Thus σ may be regarded as a function of ϱ and the equation (5 a) takes the form:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \varrho}{dr^2} - \frac{d\sigma}{d\varrho} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\varrho}{dr} \right)^2 + \left(\frac{2}{r} + \frac{g}{a} - \frac{g\varrho}{a\sigma} \frac{d\sigma}{d\varrho} \right) \frac{1}{\sigma} \frac{d\varrho}{dr} - \frac{2g\varrho}{ar\sigma} - \frac{4\pi\sigma}{a} = 0 \quad (5b)$$

Now we might always put:

$$\sigma = a\varrho$$

where a is a function of ϱ .

We know that in a great many cases the aurorae have the same colour from the upper limit to the bottom edge. If the auroral region is electrically charged, this would indicate that in this region a should be nearly a constant quantity. We are thus led to consider the case that a is constant down to a certain distance r_0 from the centre.

Putting this distance equivalent to r_0 in equation (2), it follows that above this distance the density should be determined by the the differential equation:

$$\frac{d^2 \varrho}{dr^2} - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{d\varrho}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d\varrho}{dr} + \frac{2g\varrho}{ar} - \frac{4\pi a^2 \varrho^2}{a} = 0 \quad (6)$$

Even under these simplified conditions the differential equation is a rather complicated one, and up to the present I have not been able to find the integral function. But at any rate we may find the variation of ϱ by means of numerical integration.

§ 2.

Without entering further into the problem of solving the differential equation, we can make some estimates as to the degree of ionisation and the amount of electricity which may be present in the higher strata of the atmosphere, and draw some conclusions of importance with regard to the state of the higher strata of the atmosphere.

We know that the earth — in some way or other — maintains a negative charge, and this charge will be compensated by positive electricity in the atmosphere. This charging process must be continually going on, and we might suppose that the positive electricity is formed by photo-electric action in the upper layer of the atmosphere. — At a certain height the positive electric mass inside a sphere through the point just equals the negative — and on this sphere the electric force will be zero. Below this level the electric force is directed downwards, and only above it will there be an upward directed electric force.

It is only the positive electricity above this zero layer that will be responsible for the electric field of the earth outside the zero sphere.

If the sun emits X or γ -rays, these rays, when they strike the upper strata of the atmosphere, will cause the gas to emit electrons with a velocity given by the equation of EINSTEIN:

$$h\nu = \frac{1}{2} m v^2 = e V \quad (7)$$

Some of these electrons leave the earth, and this process will continue until the potential of the earth V is equal to the potential which is determined from the frequency. If the rays had a wave length of 1 \AA the potential should be 41 electrostatic units.

At the very limit of the atmosphere, e. g. 600 km. above the ground, there should be an electric force:

$$F = \frac{V}{R} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ el. st. units}$$

Probably there may be a radiation of much shorter wave length and the electric force would be correspondingly greater.

Now if we have a Nitrogen ion with a positive charge $+e$, at the same point, it will be driven upwards with a force $F e$ and downwards with the force $m g$. If the ion is not to leave the earth we must have:

$$m g > F e .$$

Putting

$$m = M \cdot m_H$$

where m_H is the mass of a hydrogen atom.

$$F < \frac{g M}{3 \cdot 10^{14}} .$$

If the ion is a charged molecule $M = 28$ and

$$F < 10^{-10} \text{ el. st. units.}$$

We see that only an extremely small electric force would be sufficient to counterbalance gravity, and the electric force, which might be produced through the electron-emission due to photo-electric effect, is several hundred times larger than that which is necessary to drive a charged molecule away from the earth.

It seems as if the emission of X - and γ -rays from the sun would gradually drain the atmosphere of its Nitrogen.

Probably this tapping must be prevented in some way and counteracted by some other solar process. The following possibilities naturally suggest themselves:

- 1) The ions at the very low temperature might form big clusters consisting of hundreds or thousands of molecules.
- 2) The earth might be supplied with a sufficient negative charge through direct radiation of negative electrons from the sun to balance the loss through photo-electric action. If there is a balancing process of this kind the electric force might be maintained at less than 10^{-10} el. st. units.
- 3) The Nitrogen which is lost through photo-electric effect is balanced through a supply of Nitrogen from the sun. In this case the upper strata would not be in a state of statistical equilibrium. We could not apply our differential equation for the distribution of matter. The higher strata would be in a stationary state determined by two processes that are kept in balance.

The assumption that the higher strata constantly receive gas from the sun is a rather suggestive idea, and if this matter was Nitrogen we should naturally have to assume that the corona of the sun contained Nitrogen, and this would suggest that the coronal line of the sun should be a Nitrogen line emitted under physical conditions present in the corona, where perhaps N is in a highly charged state.

Further the question arises, how the Nitrogen gets down into the atmosphere. Here again it might be naturally suggested that the Nitrogen formed the rays that produce the aurora borealis. In previous papers¹ I have shown that the rays producing the auroræ must have a magnetic deflectibility greater than a certain quantity, and this will also give a certain upper limit to the penetrating power of the rays, and this limit of penetrating power will decrease with the quantity $\frac{E}{m}$ where E is the charge, m the mass of a ray corpuscule.

With a distribution of matter calculated on the assumption that the temperature above 10 km. was 220° Abs. it was only electron rays that gave a sufficient penetrating power. Even if only Nitrogen was present in the auroral region, the amount of matter above 100 km. would be so large that even hydrogen rays were excluded. — Now the spectral analysis has shown that Nitrogen is a predominant component throughout the auroral region, and if only Nitrogen is present, and if we suppose the temperature to be lower than 220° , the amount of matter above 100 km. might be so small that rays with carriers of atomic order might combine a sufficient magnetic deflectibility with a sufficient penetrating power to reach within a distance of 100 km. from the ground.

¹ S. e. g. Phil. Mag. 42, p. 79.

§ 3.

If the gas in the auroral region should exist in a highly electrified state, it would indeed seem very likely that the density of matter above the sphere of zero potential is very small. We suppose a cylinder of unit cross section placed radially, and with one end at the surface of the zero-sphere and the other reaching outside the atmosphere. Let the mass contained in this cylinder be μ and the number of molecules n . Then:

$$\mu = n M.$$

Let us suppose that a fraction β of these molecules carry an elementary charge e . The total charge ε_r in the cylinder would then be:

$$\varepsilon_r = \beta n e$$

Hence:

$$\varepsilon_r = \frac{e}{\beta M} \mu \quad (8)$$

As the length of the cylinder is small as compared with the radius of the earth, the total electric charge carried by the earth above the zero-sphere should be:

$$E = 4 \pi r^2 \varepsilon_r$$

and just at the limit of the atmosphere the electric force should be:

$$F = \frac{E}{r^2} \text{ or approximately:}$$

$$F = 4 \pi \varepsilon_r = 4 \pi \beta \frac{e}{M} \mu. \quad (9)$$

If at the outer limit of the atmosphere the action of gravitation on unit volume shall be greater than the mechanical force due to the electric charge, we must have:

$$\rho g > \sigma F \quad (10)$$

Let the number of molecules in unit volume be n' then:

$$\begin{aligned} \rho &= M n' \quad \text{and} \\ \sigma &= \beta' n' e \quad \text{Hence} \\ \frac{\sigma}{\rho} &= \beta' \frac{e}{M} \end{aligned}$$

β' is the ratio between the number of charged molecules to the total number in unit volume. β' may vary with r — and thus be different from β , which is an average for the region above a certain level. To get an estimate we will put $\beta' = \beta$.

Inserting the expressions for $\frac{\sigma}{\rho}$ and F , the condition (9) takes the form:

$$g > 4 \pi \mu \beta^2 \left(\frac{e}{M} \right)^2$$

Now:

$$\frac{e}{M} = 1,07 \cdot 10^{13} \text{ and finally}$$

$$4 \pi \beta^2 \mu < 10^{-23} \text{ gram}$$

If each molecule carried a charge e , $\beta = 1$ and $4 \pi \mu = 10^{-23}$ gram. This would mean that practically no charged matter could exist above the zero-sphere. Underneath the zero-sphere, however, the electric force is directed downwards, and the electric charge could not explain that the density of Nitrogen diminished so slowly as would be wanted to explain the very long auroral ray-streamers.

If the upper strata of the atmosphere should be in an electrically charged state, we should have to assume that β is very small. But at the very low densities it is rather doubtful that an individual ion of molecular dimensions will impart to the other molecules a mechanical force as if the electric charge had been equally divided on all molecules.

If we are to adhere to the hypothesis that Nitrogen maintains a noticeable density to heights of 500—600 km. through the effect of electric forces, we should probably have to assume that the charged particles form clusters or drops of a very small size. If the temperature is extremely low, it seems possible that Nitrogen might condense round the ions. We know that the freezing point of Nitrogen is about 60° Abs. and, if the temperature was still lower, Nitrogen might be present in the form of minute crystals — or fine, solid dust.

If the diameters of the drops or dust particles were of the same order of magnitude as the wave-length of light, there might be 10^8 molecules in each drop containing one elementary charge. This would mean that β should be of the order 10^{-8} and the quantity μ should be less than 10^{-8} gram, which is of quite a reasonable order of magnitude.

Our calculations are based on the assumption that the matter is in a state of statistical equilibrium, but, as a matter of fact, there must be a continual motion up and down. — Some particles will become so highly charged that they are moving upwards through the electric force. Then they may lose some of their charge by collision with electrons, and fall down again and so on.

The Nitrogen spectrum, then, should be formed when such minute extremely cold (and electrically charged) dust particles of Nitrogen are bombarded by cathode rays — (or perhaps other sorts of electric rays).

If our view with regard to the state of the upper strata of the atmosphere is right, I think we can understand why there is no Helium and Hydrogen layer on the top of our atmosphere, for on account of the much lower freezing point of these gases they may be unable to form clusters — and as soon as a Hydrogen molecule or a Helium atom gets charged it will fly out of the atmosphere as a positive ray.

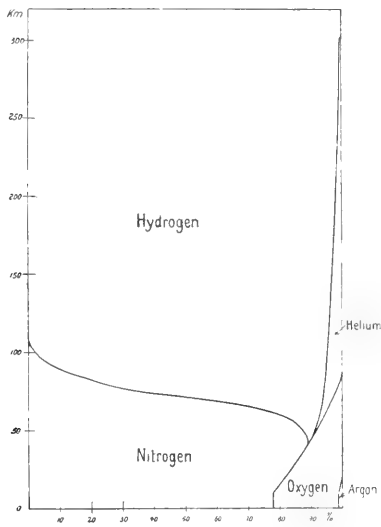


Fig. 1.

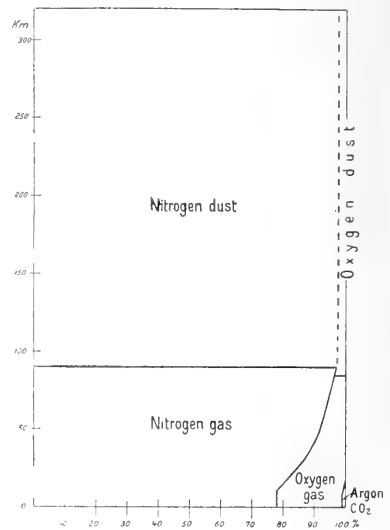


Fig. 2.

Fig. 1 illustrates the composition of the atmosphere in accordance with the old view. The composition and state of the atmosphere here suggested is illustrated in Fig. 2.

§ 4.

Our hypothesis with regard to the state of the atmosphere gives us also a new possibility for explaining the change of colour of the auroræ. In previous papers we have already mentioned the following possibilities:

- 1) A change of colour may be caused by the change of velocity of electric rays on their passage through the atmosphere.
- 2) A change of colour may be produced when the electric rays neutralise the charged particles in the atmosphere.

But now there is also the possibility that the electric rays may cause some of the Nitrogen dust particles to give off molecules, and these molecules will produce the ordinary gas spectrum, which gives the reddish colour

to the auroral streamers. The colouring should thus vary with the degree of dissociation or evaporation from the Nitrogen clusters.

From observations of the auroral spectrum at various height-intervals, we found that the relative intensity of the green line, as compared with that of the Nitrogen lines, did not increase as we passed upwards in the atmosphere, but showed a marked diminution.

On the hypothesis that the upper strata of the atmosphere were in a gaseous state, we concluded that the green line had to be ascribed to Nitrogen.

If, however, we assume the atmosphere to consist of fairly large electrically charged clusters, we have to consider the possibility that also dust particles of other kinds of matter might be mixed up with the Nitrogen particles. This cosmic dust might even be composed of atoms with a large molecular weight. We might also think of the possibility of Ozon particles being mixed up with Nitrogen.

The very same particle might also contain different kinds of atoms — and perhaps Nitrogen might enter into chemical combination with some substance. Such an interpretation, however, is very improbable, for, if the green line was due to some element different from Nitrogen, we should expect to find in the auroral spectrum a number of other lines belonging to the same element. But, apart from the green line, only three faint lines have been observed, which are not found among the N-lines, observed in laboratories.

Now the green line is not identical with any known lines. If the other 3 unknown lines in the auroral spectrum (4182, 3432, 3208) could be determined accurately enough to show that they are not identical with known lines of any of the elements, I think there can be little doubt that all four lines are emitted from Nitrogen, for it would be a most curious case that an element was brought to emit *only* lines which could not be reproduced in laboratory experiments.

As also mentioned in my first publications on auroral phenomena, there is nothing strange in the idea that Nitrogen under the conditions present in the upper strata of the atmosphere, when bombarded with cosmic rays, may be brought to emit lines not found under the conditions experimented upon in laboratories.

In fact, that part of the auroral spectrum which belongs to Nitrogen is of a very singular type. The number of lines is very much smaller than usually found in N-spectra observed in laboratory experiments. Although most of the lines belong to the negative and positive band spectrum of N-, there only appear fairly sharp distinct lines on the plate — and the striations peculiar to these bands are either not visible on the plate or very much reduced in intensity. — Under the conditions under which the auroral light is emitted the formation of the Band-series is suppressed, and only some principal lines appear.

If Nitrogen in the auroral region is present in the form of clusters or small particles, such conditions are indeed different from those as yet experimented upon in laboratories. It might, however, be possible to reproduce similar conditions by cooling Nitrogen in Liquid Hydrogen and bombarding it with electric rays.

The disappearance of lines in the band-series is a rather interesting

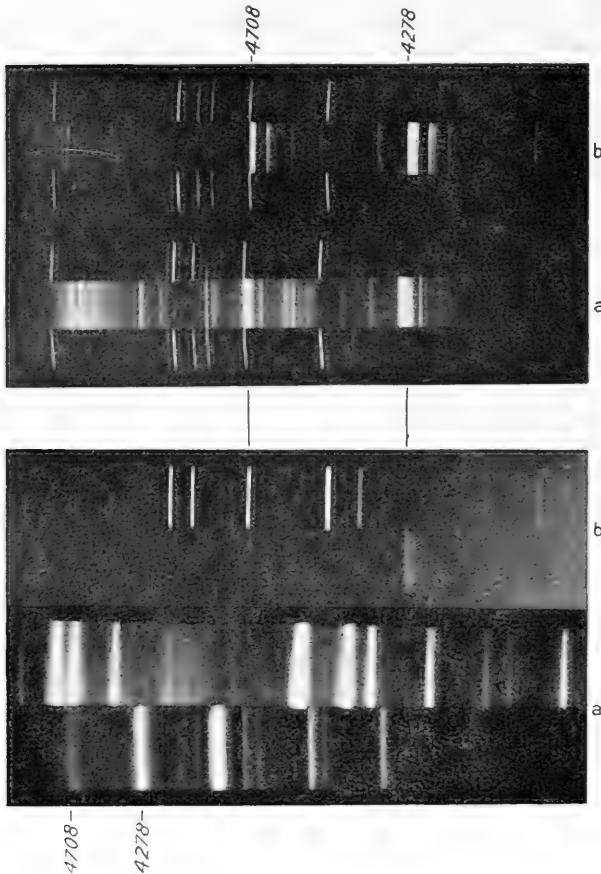


Fig. 3 and 4.

fact. According to the theory of light emission given by BOHR, the number of lines in an ordinary line-series should increase when the mutual distance between the molecules increases, and the same rule may probably hold also for band-series. If then the gas in the auroral region consisted of free molecules we should — considering the extremely small density — expect a great many lines in the series. If, however, the molecules are packed together into small particles, the molecules are not free, and thus the conditions will be unfavourable for the formation of a large number of lines of the band series.

That the number of lines emitted by Nitrogen, when bombarded with cathode rays, decreases at very low temperatures, is shown by some laboratory experiments recently carried out. The result will be seen from Fig. 3. The spectrum Fig. 3a corresponds to room temperature Fig. 3b to that of liquid air. We notice the great reduction of the number of lines at the low temperature. The Helium spectrum is used for comparison. Fig. 4a is a reproduction of an auroral spectrum taken with the quartz spectrograph. A Cd. sparc is used for comparison. Fig. 4b gives the strongest lines of the auroral spectrum, in the blue and violet part, taken with the big glass spectrograph.

§ 5.

The views here suggested with regard to the constitution of the higher strata of the atmosphere are in short the following:

Above 10 km. the temperature decreases, first slowly, then more rapidly, and at a height of say 99—100 km. it should have fallen below the freezing point of Nitrogen. The pressure would then be extremely small. But through the photo-electric action of the sun the Nitrogen becomes charged and takes the form of small particles or clusters. These clusters are driven upwards through the effect of the electric field. They may on their way catch an electron and so fall down again. We have an "atmosphere" of electrically charged Nitrogen dust.

As this dust atmosphere depends on the solar action, we might expect it to be most strongly developed towards the equator. This may, at any rate partly, account for a very marked difference with regard to the auroræ observed near the auroral zone and those appearing in lower latitudes. As we pass away from the poles the "ray forms" seem to be more frequent and very much higher. This is also confirmed by the most interesting height measurements carried out by STÖRMER¹ at Kristiania during later years.

He finds much greater upper limits for the auroral rays at Kristiania than at Bossekop and it would seem as if the "height of the atmosphere" increased towards the equator.

We should bear in mind, however, that there is another possibility to be taken into consideration. We know that the upper limit of an auroral streamer may vary greatly even at the same place. As shown in previous papers² these variations are explained through the effect of the magnetic field. When the rays form a finite angle with the lines of force they will turn about them in screw orbits. When the rays come down nearly parallel to the lines of force there will be an intense light near the bottom edge, but passing upwards the luminosity rapidly diminishes and the visible light may only have an extension upwards of 15—20 km.

If a considerable portion of the cosmic rays enter the atmosphere in directions nearly perpendicular to the lines of force, the number of collisions and the light intensity may be considerable very high up in the atmosphere and we get the long ray streamers.

Now it was pointed out in my previous papers³ that the magnetic disturbances would increase the probability for the formation of long ray-

¹ C. STÖRMER, C. R. t. 179 p. 109, 1923.

² Forhandlingar ved Geofysikermötet i Göteborg, aug. 1918, p. 12. The Position in Space etc. Geophys. Publ. Vol. 1, 1920, p. 159.

³ *loc. cit.*

streamers, which gave an explanation to the fact that the auroræ having long ray-streamers usually appear at the time when the magnetic storm is most intense.

I have also pointed out that the auroræ are carried down to lower latitudes through the effect of the perturbing magnetic fields, and thus we should expect that the chance for the formation of long streamers should be greater at lower latitudes.

In this way we should be able to explain that long rays in comparison to other forms were more frequent at lower latitudes. It is, however, not only true that an aurora at lower latitudes has a greater tendency to form long ray streamers, but the considerable material of height measurements obtained up to the present time seems to show that the *maximum height obtainable* is greater at lower latitudes than near the auroral zone.

In the material of 434 pairs of photographs from the Halde Observatory¹ no ray was found reaching a height greater than 303 km. and STØRMER'S² measurements from the same locality have given a similar result. At Kristiania, however, STØRMER³ finds much higher values for the upper limit. Rays reaching heights of 500 km. are not infrequent, and he has measured heights as great as 750 km.

If the distribution of matter in the auroral region was independent of the latitude, we should expect that also near the auroral zone the conditions might sometimes be favourable for the formation of the very long rays. If such very long rays *never* occur at these localities, it would indicate that the height at which the density of the atmosphere falls below a certain value necessary for giving noticeable light emission, should increase towards lower latitudes.

As already mentioned, such a variation of the height of the atmosphere might be due to the variation of the solar action, but I think that also the magnetic field of the earth may act in a similar way. The electrified particles will during their upwards motion have a tendency to follow the magnetic lines of force, and thus the electrified "dust" may be driven towards the plane of the magnetic equator of the earth.

BIRKELAND has made a most interesting experiment which forms an analogy to this process. When an electric discharge is passing through a discharge tube with a magnetised sphere as a cathode, the discharge is almost entirely restricted to the region near the magnetic equator. The motion of the electrified corpuscles are on both sides directed towards the magnetic equator through the effect of the magnetic lines of force. At the plane of the magnetic equator the particles will accumulate and work their way outwards perpendicular to the magnetic lines of force — driven by the electric field.

¹ Geophys. Publ. Vol. I, nr. 1.

² " " " I. " 5.

³ C. STØRMER, C. R. t. 176, p. 109, 1923.

From the point of view here taken with regard to the constitution of the upper strata of the atmosphere, we might expect that the clusters would accumulate near the plane of the magnetic equator, where this dust atmosphere would reach a maximum height, and thus there might be formed a kind of dust ring round the earth as indicated in Fig. 5. — This dust will scatter the sun light and such a disc of small particles is just wanted to explain the zodiacal light. — Long after sunset the sun will still illuminate this dust ring and at places near the equator we see a cone of light rising up from the horizon. If the disc reaches a height of the same order of

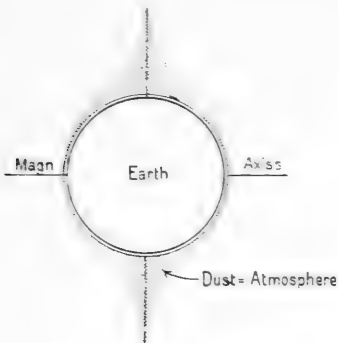


Fig. 5.

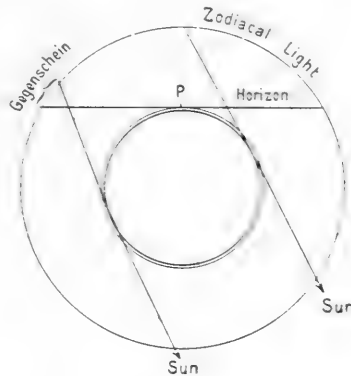


Fig. 6.

magnitude as the diameter of the earth, we may see the luminosity on the other side of the earth (opposite to the sun) in the form of what is called "Gegenschein". (Fig. 6.)

As this dust ring is composed of electrified particles in motion, it is maintained through a continual process, and it is to be expected that the dust ring may undergo certain variations, and the zodiacal light is not always equally strong even at the same place and under the same light conditions. It is even possible that fairly sudden changes may occur with regard to the intensity and outlines of the zodiacal light. Indeed some observers, e. g. VON HUMBOLDT and Rev. GEORGE JONES, state, that they have noticed very marked changes in the intensity of the zodiacal lights.

Although one of BIRKELAND'S experiments is of interest as an analogy to illustrate the way in which matter is distributed in the upper strata of the atmosphere, still the explanation here given for the zodiacal light is essentially different from that of BIRKELAND. According to his view the zodiacal light should be explained in a similar way as the northern lights, viz. as a direct effect of radiation from the sun, only that the two phenomena were produced by different groups of rays.

The question now might naturally arise whether the ring of Saturn might not be a system of electrical dust formed in a similar way as the assumed dust ring round the earth? If so, it would follow that Saturn

must have an atmosphere and a magnetic field, but the question then arises as to why the other planets have not such dust rings? Several circumstances might prevent their formation as e. g.

- 1) The temperature may be too high for the formation of clusters.
- 2) The atmosphere might consist of Hydrogen and Helium which might have too low a freezing point for the formation of clusters.
- 3) The planet might have no atmosphere.
- 4) The planet might have too weak a magnetic field.

I shall pass these suggestions on to the astronomers.

There are, however, some other points in connection with this view with regard to the constitution of the upper strata of the atmosphere, which call for considerable attention.

We have already mentioned that the dust atmosphere scatters the light. If the particles have a suitable average size the light might be selectively scattered, and the upper atmosphere, when illuminated by the sun, would seem to give out light of some colour. — In this way I think we may explain the blue sky.

The blue sky then should be formed through the scattering of sunlight in the Nitrogen clusters which form the upper strata of the atmosphere.

As already mentioned a most characteristic feature of the northern light spectrum is the great reduction in the number of lines. A few of the N-lines are very strong, and a few new ones set in — but most of the lines are suppressed.

Now we know that also spectra of Nebulæ have a similar character; they only consist of a few lines, many of which are not found among the lines observed in laboratories. This similarity would suggest a similar constitution of the Nebulæ and the upper strata of the atmosphere, and, if our view with regard to constitution of the auroral region is the right one, it would suggest that the Nebulæ consisted of fine dust particles made luminous through the bombardment of electric rays. — These electric rays might be due to disintegration of radio-active matter. — If the average density of the Nebulæ is very small, the temperature in spite of some radio-activity may be very low, just as we have supposed to be the case in the higher strata of the atmosphere.

§ 6.

In the first communication it was pointed out that we might also get a sufficient density at a height of 6—700 km. by assuming a sufficiently high temperature.

In this case we should be able to apply the gas laws also for the upper regions of the atmosphere, and, to calculate the density at various altitudes, we should have to suppose that the temperature above a certain

height increased upwards in such a way that there should be a fairly moderate fall of density between 120 and 600 km.

If this hypothesis were at all possible, we might expect the temperature to increase towards the equator and thus perhaps get some increase of the height of the atmosphere towards lower latitudes, which the auroral height measurements indicate.

Without entering further into details with regard to the calculation of the pressure at various height intervals, we can conclude that the amount of Nitrogen above 100 km. would be very much increased as compared with the density calculated on the assumption of a constant temperature of 220° above 10 km.¹ This "high temperature hypothesis" would *then imply that only electron rays could combine a sufficient penetrating power with a sufficient magnetic deflectibility to explain the auroral forms.* — *It would further lead to the green line having to be ascribed to Nitrogen because its intensity as compared with that of the Nitrogen lines changes so little with the height.*

On the hypothesis of an electric atmosphere we are left very much more uncertain regarding these points. — In the auroral region the matter does not follow the gas laws and if the Nitrogen is forming clusters neither the differential equation (5) nor the equations (1) and (3) can be applied for this part of the atmosphere. There is no equilibrium at all, but the distribution of matter is determined by a continual process. — *In this case, however, it seems just possible that the amount of matter to be traversed by the cosmic electric rays might be so small that also rays with carriers of atomic order might be possible.*

It seems that we should have to choose between these two possibilities, either that there must above a certain level be an increasing temperature upwards, or that the upper layer of the atmosphere must be electrically charged and most likely consist of electrically charged dust particles or clusters, which at any rate to a very large extent, consist of Nitrogen.

The latter assumption seems to me at the present time to be the most probable and the most fertile one, because it gives us a possibility of explaining a number of facts in connection with the light emitted from the auroræ (type of spectrum, change of colour), and to bring a number of cosmic phenomena under the same point of view (Northern lights, Zodiacal light, variation of the height of the atmosphere, the blue sky, and perhaps *stellar nebulae*).

If we assume a high temperature, the auroral light should be emitted when ordinary Nitrogen or air at a temperature of say 800 Centigrade is bombarded by cathode rays. — Now the spectrum of Nitrogen and air has not been examined under exactly these conditions, but similar conditions might well be reproduced in laboratory experiments, but if Nitrogen or air

¹ See the first communication.

heated to a temperature of some hundred degrees centigrades and exposed to cathode rays, does not emit the auroral spectrum, the assumption of a high temperature must be abandoned.

There should be no very great difficulty in producing the Nitrogen or air spectrum under such conditions, and I hope to be able to carry out such experiments at my laboratory.



ÜBER DIE EINHEITEN IN REINEN KUBISCHEN ZAHLKÖRPERN

VON
TRYGVE NAGELL

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 11)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i fællesmotet den 24. mars 1923 ved prof. Størmer.

Einleitung.

Es seien gegeben zwei ganze positive Zahlen f und g , die quadratfrei und teilerfremd sind, $fg > 1$. Es sei ferner $D = fg^2$, $\bar{D} = f^2g$, $\theta = \sqrt[3]{D}$ und $\bar{\theta} = \sqrt[3]{\bar{D}}$. Dann wird nach DEDEKIND¹ der reine kubische Zahlkörper $K(\theta)$ einen Körper erster oder zweiter Art genannt, je nachdem $f^2 - g^2$ unteilbar oder teilbar durch 9 ist. Diese Definition kann man offenbar auch so formulieren: $K(\theta)$ ist von erster Art, wenn $D \equiv 0, \equiv \pm 2, \equiv \pm 3$, oder $\equiv \pm 4 \pmod{9}$ ist; er ist von zweiter Art, wenn $D \equiv \pm 1 \pmod{9}$ ist.

In einem Körper erster Art bildet $1, \theta, \bar{\theta}$ eine Basis.

In einem Körper zweiter Art bildet $\frac{1}{3}(1 + f\theta + g\bar{\theta}), \theta, \bar{\theta}$ eine Basis.

Die Körper $K(\theta)$ und $K(\bar{\theta})$ sind natürlich identisch.

Die zu einer Zahl a von $K(\theta)$ konjugierten Zahlen bezeichnen wir wie üblich mit a' und a'' ; dann sind a' und a'' imaginär-konjugiert und folglich $a'a''$ positiv reel.

Es gibt bekanntlich eine Fundamenteinheit ξ von der Beschaffenheit, daß jede beliebige Einheit η sich in der Form

$$\eta = \pm \xi^n$$

darstellen läßt, wo n eine ganze (rationale) Zahl ist.

Mit Fundamenteinheit meinen wir überall im folgenden die zwischen 0 und 1 belegene Einheit von den vier Möglichkeiten. Eine ganze Zahl η in einem Körper erster Art,

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta}, \quad (1)$$

mit ganzen rationalen x, y, z , ist dann und nur dann eine rationale Einheit, wenn

$$x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = \pm 1 \quad (2)$$

ist. Eine ganze Zahl η in einem Körper zweiter Art,

¹ Siehe R. DEDEKIND: Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Körpern. Journal f. Mathematik, Bd. 121 (1900), S. 40.

$$\eta = u \cdot \frac{1}{3}(1 + f\theta + g\bar{\theta}) + v\theta + w\bar{\theta} \quad (3)$$

mit ganzen rationalen u, v, w ist dann und nur dann eine Einheit, wenn

$$x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = \pm 27 \quad (4)$$

ist, wo wir $u = x, fu + 3v = y$ und $gu + 3w = z$ gesetzt haben. Ist η positiv, so muß in (2) und (4) das obere Zeichen genommen werden, weil $\eta'\eta''$ positiv ist.

Wir wollen uns im folgenden besonders mit der Frage beschäftigen: Unter welchen Bedingungen gibt es in einem Körper $K(\theta)$ Einheiten von der Form $c + a\theta$ mit rationalen a und c ? Dann müssen a und c ganz sein; denn ist $K(\theta)$ von zweiter Art, und ist in (3) $\frac{1}{3}gu + w = 0$, so muß u durch 3 teilbar sein, weil g es nicht ist.

Eine positive Einheit von der Form $\eta = c + a\theta$ ist immer < 1 ; denn wegen $c^3 + Da^3 = 1$, ist

$$\frac{1}{\eta} = c^2 - ac\theta + a^2\theta^2 \geq 1 + \theta + \theta^2 > 3,$$

weil ac negativ ist.

Ist nun ξ die Fundamenteinheit, und also $0 < \xi < 1$, und ist

$$\eta = \xi^n = c + a\theta, \quad (5)$$

so muß folglich n positiv sein. Hat man jeden Wert von n gefunden, für welchen diese Gleichung gilt, so hat man natürlich die unbestimmte Gleichung

$$x^3 + Dy^3 = 1 \quad (6)$$

vollständig in ganzen (rationalen) Zahlen x, y gelöst.

Unser Hauptresultat (in § 3) ist das folgende:

Es gibt höchstens eine positive (von 1 verschiedene) Einheit von der Form $c + a\theta$.

Die Gleichung (6) hat also höchstens eine Lösung in ganzen Zahlen x, y mit $y \neq 0$.

§ 1.

Beweis eines Hilfssatzes.

In einer früheren Arbeit¹ habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Hilfssatz I. *Es sei D eine kubusfreie² ganze rationale Zahl > 1 . Es seien ferner a und c zwei ganze rationale Zahlen, so daß c und aD teilerfremd sind. Dann ist in*

$$(c + a\sqrt[3]{D})^n = C + B\sqrt[3]{D} + A(\sqrt[3]{D})^2$$

mit rationalen Koeffizienten A, B, C , und ganzzahligem $n > 1$, sowohl A wie B von Null verschieden, wenn wir von den folgenden 2 Fällen absehen:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{10} - 1)^5 &= 99 - 45\sqrt[3]{10}, \\ (\sqrt[3]{4} - 1)^4 &= -15 + 12\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Zu diesem Resultat fügen wir hier das folgende:

Hilfssatz II. *Es seien D_1 und D_2 zwei kubusfreie ganze rationale Zahlen, die beide > 1 sind. Es seien ferner a und c zwei ganze rationale Zahlen, so daß aD_1 und cD_2 teilerfremd sind. Dann ist in*

$$(a\sqrt[3]{D_1} + c\sqrt[3]{D_2})^{3n} = C + B\sqrt[3]{D_1 D_2^2} + A\sqrt[3]{D_1^2 D_2}$$

mit rationalen Koeffizienten A, B, C , und ganzzahligem $n > 0$, sowohl A wie B von Null verschieden, mit der einzigen Ausnahme

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})^6 = -171 + 63\sqrt{20}.$$

Beweis: a und c müssen offenbar entgegengesetztes Vorzeichen haben. Es genügt zu beweisen, daß A von Null verschieden ist. Wir nehmen also an, daß

$$\binom{3n}{1} a^{3n-1} c D_1^{n-1} + \binom{3n}{4} a^{3n-4} c^4 D_1^{n-2} D_2 + \dots + \binom{3n}{3n-2} a^2 c^{3n-2} D_2^{n-1} = 0. \quad (1)$$

¹ Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades. Videnskapselskapskets Skrifter, math.-naturv. klasse, Kristiania 1922, no. 14.

Ich benutze hier die Gelegenheit eine Ungenauigkeit in dieser Abhandlung zu berichtigen. In Formel (7), Seite 6, muß in den Nenner der Faktor $3k + 5$ hinzugefügt werden. Da aber $5^{k+1} > 5(3k + 5)$ ist, für alle $k \geq 2$, bleibt der folgende Beweis gültig.

² Wir nennen eine ganze Zahl kubusfrei, wenn sie durch keine dritte Potenz einer Primzahl teilbar ist.

Durch Division mit $3na^2c$ ergibt sich heraus

$$- a^{3n-1} D_1^{n-1} = \binom{3n-1}{3} \frac{a^{3n-6} c^3 D_1^{n-2} D_2}{4} + \sum_{k \geq 2} \binom{3n-1}{3k} \frac{a^{3n-3k-3} c^{3k} D_1^{n-k-1} D_2^k}{3k+1}. \quad (2)$$

Es sei nun c durch die Primzahl q teilbar. Wegen $q^{3k} \geq 2^{3k} > 3k+1$ für alle $k \geq 1$, ist dann der Zähler des Bruches

$$\frac{a^{3n-3k-3} c^{3k} D_1^{n-k-1} D_2^k}{3k+1} \quad (3)$$

für alle $k \geq 1$ durch eine höhere Potenz von q als der Nenner teilbar. Die rechte Seite von (2) ist mithin durch q teilbar und folglich auch $a^{3n-3} D_1^{n-1}$. Da aD_1 und c teilerfremd sind, ist aber dies unmöglich. Folglich muß $c = \pm 1$ sein. Es sei nun D_2 durch die Primzahl q teilbar. Wenn q ungerade ist, folgt dann wegen $q^k \geq 3^k > 3k+1$ für alle $k \geq 2$, daß der Zähler des Bruches (3) durch eine höhere Potenz von q als der Nenner teilbar ist. In diesem Falle wäre also die rechte Seite von (2) durch q teilbar, was unmöglich ist, da aD_1 und D_2 teilerfremd sind. Folglich bestehen für D_2 nur die Möglichkeiten $D_2 = 2$ oder $D_2 = 4$.

Wenn wir durch $\binom{3n}{2} a^2 c$ dividieren, kann die Gleichung (1) so geschrieben werden:

$$- c^{3n-3} D_2^{n-1} = \binom{3n-2}{3} \frac{2c^{3n-6} a^3 D_2^{n-2} D_1}{4 \cdot 5} + \sum_{k \geq 2} \binom{3n-2}{3k} \frac{2c^{3n-3k-3} a^{3k} D_2^{n-k-1} D_1^k}{(3k+1)(3k+2)}. \quad (4)$$

Es sei nun a durch die Primzahl q teilbar. Wegen $q^{3k} \geq 2^{3k} > 3k+2$ für alle $k \geq 1$, ist dann der Zähler des Bruches

$$\frac{2c^{3n-3k-3} a^{3k} D_2^{n-k-1} D_1^k}{(3k+1)(1k+2)} \quad (5)$$

für alle $k \geq 1$ durch eine höhere Potenz von q als der Nenner teilbar. Die rechte Seite für (4) ist mithin durch q teilbar und folglich auch $c^{3n-3} D_2^{n-2}$. Da cD_2 und a teilerfremd sind, ist aber dies unmöglich. Folglich muß $a = \mp 1$ sein. Es sei endlich D_1 durch die Primzahlpotenz q^α teilbar. (a kann hier nur einen der Werte 1 oder 2 haben.) Wenn $q^\alpha > 2$ ist, folgt dann wegen $q^{\alpha k} \geq 3^k > 3k+2$ für alle $k \geq 2$, daß der Zähler des Bruches (5) durch eine höhere Potenz von q als der Nenner teilbar ist. Dies gilt

auch für $k = 1$, falls q^a von 2 und 5 verschieden ist. In diesem Falle wäre also die rechte Seite von (4) durch q teilbar, was unmöglich ist, da cD_2 und D_1 teilerfremd sind. Folglich muß $q^a = 2$ oder $= 5$ sein, d. h. für D_1 bestehen nur die Möglichkeiten $D_1 = 2, = 5$ oder $= 10$.

Da D_1 und D_2 teilerfremd sind, bleiben nur die zwei Möglichkeiten zurück: $D_1 = 5$ und $D_2 = 2$ oder $D_2 = 4$. Wenn $D_2 = 4$ ist, folgt aus (2):

$$5^{n-1} - \binom{3n-1}{3} \frac{5^{n-2} \cdot 4}{4} + \binom{3n-1}{6} \frac{5^{n-3} \cdot 4^2}{7} - + \dots = 0,$$

oder modulo 3:

$$1 + \binom{3n-1}{3} + \binom{3n-1}{6} + \dots \equiv 0 \pmod{3}.$$

In meiner oben erwähnten Arbeit habe ich aber, S. 6, bewiesen, daß diese Kongruenz unmöglich ist.

Wenn $D_2 = 2$ ist, folgt aus (4):

$$2^{n-1} = \binom{3n-2}{3} \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{4 \cdot 5} - \sum_{k=2} (-1)^k \cdot \binom{3n-2}{3k} \frac{5^k \cdot 2^{n-k}}{(3k+1)(3k+2)}.$$

oder

$$(n-2)(9n^2 - 9n + 8) = \sum_{k \geq 2} (-1)^k \cdot \binom{3n-2}{3k} \frac{5^k \cdot 2^{4-k}}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $n = 2$. Wenn $n > 2$ ist, ergibt sich durch Division mit $n - 2$:

$$9n^2 - 9n + 8 = \sum_{k \geq 2} (-1)^k \cdot \frac{3(3n-5)(3n-4)(3n-3)(3n-2) \cdot 5^k \cdot 2^{4-k}}{(3k-4)(3k-3)(3k-2)(3k-1)3k(3k+1)(3k+2)} \cdot \binom{3n-7}{3k-5}.$$

Hier ist der Zähler des allgemeinen Gliedes der Summe wenigstens durch 5^k teilbar. Die höchste Potenz von 5, die im Nenner

$$(3k-4)(3k-3)(3k-2)(3k-1)3k(3k+1)(3k+2)$$

aufgeht, ist aber $\leq 5(3k+2)$. Nun ist, für $k \geq 3$, $5^k > 5(3k+2)$; und für $k = 2$ ist der Nenner nur durch 5 teilbar. Die Summe ist mithin durch 5 teilbar. Dies ist aber unmöglich, denn die linke Seite, die Zahl

$$9n^2 - 9n + 8 = \left(3n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$$

ist nicht durch 5 teilbar.

Der Hilfssatz II ist somit bewiesen.

§ 2.

Die Berechnung der Fundamenteinheit. Numerische Beispiele.

Hat man eine Einheit η in $K(\sqrt[3]{D})$ gefunden¹, so kann man die Fundamenteinheit in der folgenden Weise bestimmen. Wir können annehmen, daß $0 < \eta < 1$ ist. Ist nun η nicht gleich der Fundamenteinheit ξ , so ist

$$\left. \begin{aligned} 0 < \eta = \xi^m \leq \xi^2 < 1, \\ 1 < |\xi'|^2 = |\xi''|^2 \leq |\eta'| = |\eta''|. \end{aligned} \right\} (1)$$

Ferner ist $\frac{1}{\eta} = \eta' \eta'' = |\eta'|^2$. Es sei zuerst $K(\theta)$ von erster Art, und

$$\xi = x + y\theta + z\bar{\theta},$$

und folglich, wenn ϱ Wurzel der Gleichung $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \xi' &= x + y\theta\varrho + z\bar{\theta}\varrho^2, \\ \xi'' &= x + y\theta\varrho^2 + z\bar{\theta}\varrho. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} (\xi + \xi' + \xi''), \\ y &= \frac{1}{3\theta} (\xi + \xi'\varrho^2 + \xi''\varrho), \\ z &= \frac{1}{3\bar{\theta}} (\xi + \xi'\varrho + \xi''\varrho^2), \end{aligned}$$

woraus wegen (1)

$$\left. \begin{aligned} |x| &< \frac{1}{3} (1 + 2|\sqrt[3]{\eta}|), \\ |y| &< \frac{1}{3\theta} (1 + 2|\sqrt[3]{\eta}|), \\ |z| &< \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\sqrt[3]{\eta}|). \end{aligned} \right\} (2)$$

Wenn $K(\theta)$ von zweiter Art ist, und

$$\begin{aligned} \xi &= x \cdot \frac{1}{3} (1 + f\theta + g\bar{\theta}) + y\theta + z\bar{\theta}, \\ \xi' &= x \cdot \frac{1}{3} (1 + f\theta\varrho + g\bar{\theta}\varrho^2) + y\theta\varrho + z\bar{\theta}\varrho^2, \\ \xi'' &= x \cdot \frac{1}{3} (1 + f\theta\varrho^2 + g\bar{\theta}\varrho) + y\theta\varrho^2 + z\bar{\theta}\varrho, \end{aligned}$$

¹ Vgl. hierzu R. DEDEKIND, loc. cit., S. 118—120.

folgt

$$\begin{aligned}x &= \xi + \xi' + \xi'', \\fx - 3y &= \frac{1}{\theta} (\xi + \xi' \rho^2 + \xi'' \rho), \\gx - 3z &= \frac{1}{\theta} (\xi + \xi' \rho + \xi'' \rho^2).\end{aligned}$$

Wegen (1) folgt hieraus

$$\left. \begin{aligned}|x| &< 1 + 2 |\sqrt[3]{\eta}|, \\|fx + 3y| &< \frac{1}{\theta} (1 + 2 |\sqrt[3]{\eta}|), \\|gx + 3z| &< \frac{1}{\theta} (1 + 2 |\sqrt[3]{\eta}|).\end{aligned} \right\} (3)$$

In beiden Fällen ist die Fundamenteinheit durch diese Ungleichungen vollständig bestimmt.

Für das folgende ist es notwendig eine Reihe von Spezialfällen zu untersuchen; wir wollen für die folgenden Werte

$$D = 2, 3, 4, 7, 9, 10, 17, 19, 20, 26, 28, 35, 37$$

die Fundamenteinheit und die sämtlichen Einheiten von der Form $c + a\theta$ bestimmen.

1) Es sei $D = 2$. Dann ist $\eta = \theta - 1$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.259$. Also wird $|\sqrt[3]{\eta}| < 1,5$ und nach (2) $|x| < 2$ und $|z| < 1$, oder $z = 0$ und $x = \pm 1$, was $x = -1$ und $y = 1$ gibt. Folglich ist η die Fundamenteinheit; und nach dem Hilfssatze I gibt es dann keine andere Einheit von der Form $c + a\theta$ und keine Einheit von der Form $c + a\bar{\theta}$.

2) Es sei $D = 3$. Dann ist $\eta = \bar{\theta} - 2$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.08$. Also wird $|\sqrt[3]{\eta}| < 2$, und nach (2) $|x| < 2$ und $|z| < 1$, oder $x = \pm 1$ und $z = 0$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit; und nach dem Hilfssatze I gibt es dann keine andere Einheit von der Form $c + a\bar{\theta}$ und keine Einheit von der Form $c + a\theta$.

3) Es sei $D = 7$. Dann ist $\eta = 2 - \theta$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.088$. Also wird $|\sqrt[3]{\eta}| < 2$ und nach (2) $|x| < 2$ und $|z| < 1$, oder $x = \pm 1$ und $z = 0$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit; und nach dem Hilfssatze I gibt es dann keine andere Einheit von der Form $c + a\theta$.

4) Es sei $D = 17$. Dann ist $\eta = 18 - 7\theta$ eine Einheit und $1 > \eta > 0,001$. Also wird $|\sqrt[3]{\eta}| < 6$ und nach (3) $|x| < 13$ und $|x + 3z| < 2$. Wegen $x^3 \equiv 27$ oder $x \equiv 3 \pmod{17}$ folgt hieraus $x = 3$ und daher, weil $x + 3z$ durch 3 teilbar ist, $x + 3z = 0$; dies ist aber unmöglich. Folglich ist η die Fundamenteinheit; und nach dem Hilfssatze I gibt es keine andere Einheit von der Form $c + a\theta$.

5) Es sei $D = 26$. Dann ist $\eta = 3 - \theta$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.037$. Also wird $|\sqrt{\eta'}| < 2.5$ und nach (3) $|x| < 6$ und $|x + 3z| < 1$, oder $x + 3z = 0$ und mithin, da x durch 3 teilbar ist, $x = \pm 3$, was aber unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit; und nach dem Hilfssatze I gibt es keine andere Einheit von der Form $c + a\theta$.

6) Es sei $D = 37$. Dann ist $\eta = 10 - 3\theta$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.003$. Also wird $|\sqrt{\eta'}| < 4.3$ und nach (3) $|x| < 9.6$, $|37x + 3y| < 3$ und $|x + 3z| < 1$, oder $x + 3z = 0$ und somit, da x durch 3 teilbar ist, $37x + 3y = 0$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit und nach dem Hilfssatze I die einzige Einheit von der Form $c + a\theta$.

7) Es sei $D = 10$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(-7 - \theta + 2\bar{\theta})$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.04$. Also wird $|\sqrt{\eta'}| < 2.5$ und nach (3) $|x| < 6$ und $|x + 3z| < 2$. Wegen $x \equiv 3 \pmod{10}$ folgt hieraus $x = 3$ und mithin $x + 3z = 0$; dies ist aber unmöglich. Folglich ist η die Fundamenteinheit. Nun ist offenbar $\eta^2 = 1 + 6\theta - 3\bar{\theta} = (\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})^3$; nach dem Hilfssatze II in § 1 ist folglich η^n niemals von der Form $c + a\theta$ wenn n gerade ist. Es sei nun n ungerade. Ist dann η^n von der Form $c + a\theta$, so muß die folgende Gleichung bestehen

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\binom{n}{2} (-7)^{n-2} - \binom{n}{5} (-7)^{n-5} \cdot 10 + \dots \right] + \\ &+ \binom{n}{1} \cdot 2 \cdot \left[(-7)^{n-1} - \binom{n-1}{3} (-7)^{n-4} \cdot 10 + \dots \right] + \\ &+ \binom{n}{2} \cdot 2^2 \cdot 10 \cdot \left[\binom{n-2}{1} (-7)^{n-3} - \binom{n-2}{4} (-7)^{n-6} \cdot 10 + \dots \right] + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Hieraus folgt modulo 4:

$$\binom{n}{2} (-7)^{n-2} - \binom{n}{5} (-7)^{n-5} \cdot 10 + \binom{n}{1} \cdot 2 \cdot (-7)^{n-1} \equiv 0 \pmod{4},$$

oder

$$\frac{1}{2}(n-1) - \binom{n}{5} \frac{2}{n} + 2 \equiv 0 \pmod{4}, \quad (4)$$

folglich ist $n \equiv 1 \pmod{4}$ und

$$\binom{n}{5} \frac{2}{n} \equiv \frac{1}{60}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \equiv \frac{1}{2}(n-1) \pmod{4}.$$

Also ist $\frac{1}{2}(n-1) - \binom{n}{5} \frac{2}{n} + 2 \equiv 2$ und nicht wie in (4) $\equiv 0 \pmod{4}$.

Es gibt folglich keine Einheit von der Form $c + a\theta$.¹

8) Es sei $D = 19$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(2 + 2\theta - \bar{\theta})$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.072$. Also wird $|\sqrt[3]{\eta}| < 2$ und nach (3) $|19x + 3y| < 2$ und $|x + 3z| < 1$, oder $x + 3z = 0$ und $19x + 3y = 0$; dies ist aber unmöglich. Folglich ist η die Fundamenteinheit. Nun ist $\eta^2 = -8 + 3\theta$. Gibt es eine weitere Einheit η^m von der Form $c + a\theta$, so muß nach dem Hilfssatze I m ungerade sein. Es sei nun $m = 2n + 1$ und

$$\eta^m = (-8 + 3\theta)^n \cdot \frac{1}{3}(2 + 2\theta - \bar{\theta}) = c + a\theta.$$

Dann folgt notwendig die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \left[\binom{n}{2} (-8)^{n-2} \cdot 3^2 + \binom{n}{5} (-8)^{n-5} \cdot 3^5 \cdot 19 + \dots \right] + \\ & - 2 \left[\binom{n}{1} (-8)^{n-1} \cdot 3 - \binom{n}{4} (-8)^{n-4} \cdot 3^4 \cdot 19 - \dots \right] - \\ & - \left[(-8)^n - \binom{n}{3} (-8)^{n-3} \cdot 3^3 \cdot 19 - \dots \right] = 0, \end{aligned}$$

die offenbar unmöglich modulo 3 ist. Es gibt also keine weitere Einheit von der Form $c + a\theta$.

9) Es sei $D = 20$. Dann ist $\eta = 1 + \theta - \bar{\theta}$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.03$. Also wird $|\sqrt[3]{\eta}| < 2.5$ und nach (2) $|y| < 1$ und $|z| < 1$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit. Nun ist $\eta^2 = -19 + 7\theta$. Gibt es eine weitere Einheit η^m von der Form $c + a\theta$, so muß nach dem Hilfssatze I m ungerade sein. Es sei nun $m = 2n + 1$ und

$$\eta^m = (-19 + 7\theta)^n \cdot (1 + \theta - \bar{\theta}) = c + a\theta.$$

Dann folgt notwendig die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \left[\binom{n}{2} (-19)^{n-2} \cdot 7^2 + \binom{n}{5} (-19)^{n-5} \cdot 7^5 \cdot 20 + \dots \right] + \\ & + 2 \left[\binom{n}{1} (-19)^{n-1} \cdot 7 + \binom{n}{4} (-19)^{n-4} \cdot 7^4 \cdot 20 + \dots \right] + \\ & - \left[(-19)^n + \binom{n}{3} (-19)^{n-3} \cdot 7^3 \cdot 20 + \dots \right] = 0, \end{aligned}$$

die offenbar unmöglich modulo 7 ist. Es gibt also keine weitere Einheit von der Form $c + a\theta$.

¹ Dies folgt natürlich auch daraus, daß die Gleichung $x^3 - y^3 = 10z^3$ in ganzen (rationalen) Zahlen unmöglich ist; vgl. § 7.

10) Es sei $D = 28$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(-1 - \theta + \bar{\theta})$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.19$. Also wird $|\sqrt[7]{\eta}| < 2$ und nach (3) $|7x + 3y| < 2$ und $|2x + 3z| < 1$, oder $2x + 3z = 0$ und $7x + 3y = 0$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit. Nun ist $\eta^2 = -3 + \theta$. Gibt es eine weitere Einheit η^m von der Form $c + a\theta$, so muß nach dem Hilfssatze I m ungerade sein. Es sei nun $m = 2n + 1$ und

$$\eta^m = (-3 + \theta)^n \cdot \frac{1}{3}(-1 - \theta + \bar{\theta}) = c + a\theta.$$

Dann folgt notwendig die Gleichung

$$\begin{aligned} & 2 \left[\binom{n}{2} (-3)^{n-2} + \binom{n}{5} (-3)^{n-5} \cdot 28 + \dots \right] + \\ & + 2 \left[\binom{n}{1} (-3)^{n-1} + \binom{n}{4} (-3)^{n-4} \cdot 28 + \dots \right] + \\ & - \left[(-3)^n - \binom{n}{3} (-3)^{n-3} \cdot 28 + \dots \right] = 0, \end{aligned}$$

die offenbar unmöglich modulo 2 ist. Es gibt also keine weitere Einheit von der Form $c + a\theta$.

11) Es sei $D = 35$. Dann ist $\eta = \frac{1}{3}(-22 + 10\theta - \bar{\theta})$ eine Einheit und $1 > \eta > 0.003$. Also wird $|\sqrt[7]{\eta}| < 4.3$ und nach (3) $|x| < 9.6$, $|35x + 3y| < 3$ und $|x + 3z| < 1$, oder $x + 3z = 0$ und $35x + 3y = 0$, was unmöglich ist. Folglich ist η die Fundamenteinheit.

Es gibt hier keine Einheit von der Form $c + a\theta$. Denn wäre η^n von dieser Form, würde sich ergeben

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\binom{n}{2} (-22)^{n-2} \cdot 10^2 + \binom{n}{5} (-22)^{n-5} \cdot 10^5 \cdot 35 + \dots \right] - \\ & - \binom{n}{1} \cdot \left[(-22)^{n-1} + \binom{n-1}{3} (-22)^{n-4} \cdot 10^3 \cdot 35 + \dots \right] + \\ & - \binom{n}{2} \cdot 35 \cdot \left[\binom{n-2}{1} (-22)^{n-3} \cdot 10 + \dots \right] - \\ & - \binom{n}{3} \cdot 35^2 \cdot \left[\binom{n-3}{2} (-22)^{n-5} \cdot 10^2 + \dots \right] + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Hier muß offenbar n durch 5 teilbar sein. Es sei n durch 5^a teilbar, aber nicht durch 5^{a+1} . Dann ist die erste Reihe der Gleichung durch 5^{a+1} teilbar; denn das allgemeine Glied ist hier

$$\binom{n}{3k+2} (-22)^{n-3k-2} \cdot 10^{3k+2} \cdot 35^k = \binom{n-1}{3k+1} \frac{n \cdot (-22)^{n-3k-2} \cdot 10^{3k+2} \cdot 35^k}{3k+2};$$

und es ist für alle $k \geq 0$, $5^{4k+2} > 3k+2$. Dasselbe gilt offenbar auch für die dritte Reihe. Die k^{te} Reihe ist mit der folgenden Zahl multipliziert

$$\binom{n}{k-1} \cdot 35^m = \binom{n-1}{k-2} \frac{n \cdot 35^m}{k-1},$$

wo $m = \frac{2k}{3}, \frac{2k-2}{3}$ oder $\frac{2k-1}{3}$ ist, je nachdem $k \equiv 0, \equiv 1$ oder $\equiv 2 \pmod{3}$

ist. Für alle $k \geq 4$ ist nun $5^{\frac{2k-2}{3}} > k-1$. Die sämtlichen übrigen Reihen sind folglich auch durch 5^{a+1} teilbar. Soll die Gleichung bestehen, so muß dann auch die zweite Reihe durch 5^{a+1} teilbar sein. Dies ist aber unmöglich, da n nur durch 5^a teilbar ist. Es gibt folglich keine Einheit von der Form $c + a\theta$.

Für 60 Werte von D habe ich die Fundamenteinheit berechnet; die Resultate sind in einer Tabelle in dem letzten Paragraphen angegeben.

§ 3.

Über die Anzahl der Einheiten von der Form $c + a\theta$.

Satz I.

Es gibt in jedem reinen kubischen Körper $K(\theta)$ höchstens eine (positive, von 1 verschiedene) Einheit von der Form $c + a\theta$, mit rationalen a und c .

Beweis: In § 2 haben wir schon diesen Satz für $D = 2, 3, 7, 10, 17, 19, 20, 26, 28, 35, 37$ und auch für $D = 4$ und 9 bewiesen.

Es sei nun ξ die Fundamenteinheit in $K(\theta)$ und

$$\eta = c + a\theta = \xi^m$$

die erste von den Potenzen $\xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \dots$, die von dieser Form ist. Für $m = 1$ ist unser Satz schon bewiesen, dem Hilfssatze I zufolge. Es sei nun angenommen, daß

$$\xi^M = C + A\theta$$

eine andere Einheit ist von derselben Form; dann muß $M > m > 1$ sein. Es sei ferner $M = nm + r$, wo $1 \leq r \leq n-1$ ist; wegen des Hilfssatzes I ist nämlich $r = 0$ unmöglich. Es sei weiter

$$\varepsilon = \xi^r = \frac{1}{\delta} (x + y\theta + z\bar{\theta}),$$

wo $\delta = 1$ oder $= 3$ ist, je nachdem der Körper von erster oder zweiter Art ist, und wo z von Null verschieden ist. Dann folgt aus

$$\xi^M = C + A\theta = (c + a\theta)^n \cdot \frac{1}{\delta} (x + y\theta + z\bar{\theta})$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} & x^G \left[\binom{n}{2} c^{n-2} a^2 + \binom{n}{5} c^{n-5} a^5 D + \dots \right] + \\ & + y^G \left[\binom{n}{1} c^{n-1} a + \binom{n}{4} c^{n-4} a^4 D + \dots \right] + \\ & + z \left[c^n + \binom{n}{3} c^{n-3} a^3 D + \dots \right] = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $z^n \equiv 0 \pmod{ag}$, oder da c und ag teilerfremd sind

$$z \equiv 0 \pmod{ag}. \quad (1)$$

Wir haben nun offenbar

$$\left. \begin{aligned} \eta &< \varepsilon < 1, \\ 1 &< |\varepsilon'| = |\varepsilon''| < |\eta'| = |\eta''|, \\ |\eta'| &= \sqrt[3]{c^2 - ac\theta + a^2\theta^2} < \sqrt[3]{3}(1 + |a|\theta), \end{aligned} \right\} (2)$$

weil $|c| = |\eta - a\theta| < 1 + |a|\theta$ ist.

Es sei zuerst $K(\theta)$ von erster Art. Dann ist

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y\theta + z\bar{\theta}, \\ \varepsilon' &= x + y\theta\varrho + z\bar{\theta}\varrho^2, \\ \varepsilon'' &= x + y\theta\varrho^2 + z\bar{\theta}\varrho, \end{aligned}$$

indem ϱ eine Wurzel der Gleichung $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ bedeutet. Hieraus folgt

$$z = \frac{1}{3\bar{\theta}} (\varepsilon + \varepsilon'\varrho + \varepsilon''\varrho^2),$$

und wegen (1)

$$|ag| \leq |z| < \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\varepsilon'|),$$

oder wegen (2)

$$3|ag|\bar{\theta} = 3|a|\theta^2 < 1 + 2|\eta'| < 1 + 2\sqrt[3]{3}(1 + |a|\theta).$$

Nun ist aber für $|a| \geq 1$ und $D = \theta^3 \geq 26$

$$3\theta^2 > 1 + 2\sqrt[3]{3}(1 + \theta).$$

Die einzigen Fälle $D < 26$ mit $|a| = 1$ sind $D = 2^3 - 1 = 7$ und $D = 2^3 + 1 = 9$, die schon erledigt sind. Weiter ist für $|a| \geq 2$ und $D = \theta^3 \geq 5$

$$6\theta^2 > 2 + 2\sqrt{3}(1 + 2\theta).$$

Die Fälle $D = 2, 3$ und 4 sind aber schon erledigt. Unser Satz ist somit für die Körper erster Art bewiesen.

Es sei darauf der Körper von zweiter Art, und

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}),$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{3}(x + y\theta_Q + z\bar{\theta}_Q^2),$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{3}(x + y\theta_Q^2 + z\bar{\theta}_Q).$$

Folglich wird

$$z = \frac{1}{\theta}(\varepsilon - \varepsilon'_Q - \varepsilon''_Q^2),$$

und wegen (1)

$$a\theta \leq z < \frac{1}{\theta}(1 - 2\varepsilon),$$

oder wegen (2)

$$|a\theta| \bar{\theta} = |a| \theta^2 < 1 + 2\varepsilon' < 1 + 2\sqrt{3}(1 + a\theta).$$

Nun ist aber für $|a| \geq 1$ und $D = \theta^3 \geq 90$

$$\theta^2 > 1 + 2\sqrt{3}(1 + \theta).$$

Die einzigen Fälle $D < 90$ mit $|a| = 1$ sind $D = 3^3 - 1 = 26$ und $D = 3^3 + 1 = 28$, die schon erledigt sind. Weiter ist für $|a| \geq 2$ und $D = \theta^3 \geq 71$

$$2\theta^2 > 1 + 2\sqrt{3}(1 + 2\theta).$$

Es stehen somit nur die Fälle

$$D = 10, 19, 37, 46, 55, 17, 35, 44, 53, 62$$

zurück. Die Fälle $D = 10, 19, 37, 17$ und 35 sind aber schon in § 2 vollständig erledigt. Nun ist für $|a| \geq 20$ und $D = \theta^3 \geq 44$

$$20\theta^2 > 1 + 2\sqrt{3}(1 + 20\theta).$$

Eine leichte Rechnung zeigt endlich, daß die Gleichung

$$c^3 + Da^3 = 1$$

für $0 < |a| \leq 19$ und $D = 44, 46, 53, 55$ oder 62 unmöglich ist. Der Satz I ist damit auch für die Körper zweiter Art bewiesen.

In dem Körper $K(\bar{\theta})$ gibt es also höchstens eine Einheit von der Form $c + a\bar{\theta}$. Nun sind die Körper $K(\theta)$ und $K(\bar{\theta})$ identisch. Folglich gibt es auch in $K(\theta)$ höchstens eine Einheit von der Form $c + a\theta$.

Herr Boris DELAUNAY¹ hat behauptet, daß eine Einheit von der Form $c + a\theta$ immer die Fundamenteinheit ist. Wir haben aber im vorigen § gesehen, daß dies in den Fällen $D = 19, 20$ und 28 nicht zutrifft. In diesen drei Fällen ist nicht die Fundamenteinheit selbst, sondern das Quadrat derselben von der Form $c + a\theta$.

* * *

Ich habe auch den folgenden Satz bewiesen:

Wenn es eine Einheit von der Form $c + a\theta$ in dem Körper $K(\theta)$ gibt, dann gibt es keine Einheit von der Form $b + a\bar{\theta}$, und umgekehrt. Also ist höchstens eine von den unbestimmten Gleichungen

$$\begin{aligned}x^3 + Dy^3 &= 1, \\x^3 + \bar{D}y^3 &= 1\end{aligned}$$

möglich in ganzen Zahlen x, y , mit $y \neq 0$.

Den Beweis werde ich in einer späteren Arbeit geben.

§ 4.

Einige Bedingungen für Einheiten von der Form $c + a\theta$.

Wir wollen hier zunächst den folgenden Satz beweisen:

Satz II.

Das Quadrat einer Einheit von der Form

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta},$$

mit ganzen (rationalen) x, y, z , ist nur dann von der Form $c + a\theta$, mit ganzen (rationalen) c und a , wenn

$$\eta = 1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}$$

ist. Das Quadrat einer Einheit von der Form

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}),$$

¹ Siehe Comptes rendus, Paris, tome 162 (1916), p. 150—151.

mit ganzen (rationalen) x, y, z , ist nur in endlich vielen Fällen von der Form $c + a\theta$, mit ganzen (rationalen) c und a .

Beweis: Es sei η eine positive Einheit,

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta}$$

mit ganzen x, y, z , und folglich

$$x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = 1, \quad (1)$$

und

$$\eta^2 = (x^2 + 2fgyz) + (2xy + fz^2)\theta + (2xz + gy^2)\bar{\theta}.$$

Verschwindet hier der Koeffizient von $\bar{\theta}$, so muß also

$$z = -\frac{gy^2}{2x}$$

sein. Wird dieser Wert von z in (1) eingeführt, so ergibt sich

$$x^3 + fg^2y^3 - f^2g^4\frac{y^6}{8x^3} + 3fg^2\frac{y^3}{2} = 1,$$

oder

$$D^2y^6 - 20Dy^3x^3 = 8x^6 - 8x^3$$

und also

$$Dy^3 = 10x^3 \pm 2x \sqrt{27x^4 - 2x}. \quad (2)$$

Folglich muß $27x^4 - 2x$ gleich einer Quadratzahl sein, oder

$$27x^4 - 2x = a^2. \quad (3)$$

Ist x gerade, so folgt aus dieser Gleichung

$$27x^3 - 2 = \pm 2u^2, \quad x = \pm 2v^2.$$

Da $u^2 + 1$ durch 3 nicht teilbar ist, muß hier das untere Zeichen genommen werden. Es ergibt sich somit

$$108v^6 + 1 = u^2,$$

oder

$$u \pm 1 = 54a^6, \quad u \pm 1 = 2b^6,$$

also

$$27a^6 - b^6 = \pm 1.$$

Diese Gleichung ist bekanntlich¹ nur für $a = 0$ möglich. $a = 0$ gibt $v = 0$ und $x = 0$, was unmöglich ist.

¹ Für $3a^2 = a$, $b^2 = \beta$ und $\pm 1 = \gamma$ wird ja $a^3 - \beta^3 = \gamma^3$.

Wenn x ungerade ist, folgt aus (3)

$$27x^3 - 2 = \pm u^2, \quad x = \pm v^2.$$

Wir müssen hier also das obere Zeichen nehmen. Also wird

$$2 + u^2 = 27x^3 = (3x)^3.$$

Diese Gleichung ist bekanntlich¹ nur für $u = 5$, $x = 1$ möglich. Dann folgt aus (2), $Dy^3 = 10 \pm 10$, oder $D = 20$ und $y = 1$. Die einzige Lösung unserer Aufgabe ist somit gegeben durch

$$\left(1 + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50}\right)^2 = -19 + 7\sqrt[3]{20}.$$

Es sei nun η eine positive Einheit

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\theta^2)$$

mit ganzen x, y, z , und folglich

$$x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = 27, \quad (4)$$

und

$$\eta^2 = \frac{1}{9}(x^2 + 2fgyz) + \frac{1}{9}(2xy + fz^2)\theta + \frac{1}{9}(2xz + gy^2)\theta^2. \quad (5)$$

Ist x durch 3 teilbar, so müssen auch y und z durch 3 teilbar sein; denn es ist (vgl. Einleitung)

$$y = fx + 3v \equiv fx \quad \text{und} \quad z = gx + 3w \equiv gx \pmod{3}.$$

Diesen Fall haben wir aber schon behandelt. Wir nehmen also an, daß x durch 3 nicht teilbar ist. Wegen (4) muß x prim zu $D = fg^2$ sein. Verschwindet in (5) der Koeffizient von θ , so ist also

$$z = -\frac{gy^2}{2x}. \quad (6)$$

Wird dieser Wert von z in (4) eingeführt, so ergibt sich

$$x^3 + fg^2y^3 - f^2g^4\frac{y^6}{8x^3} + 3fg^2\frac{y^3}{2} = 27,$$

oder

$$D^2y^6 - 20Dy^3x^3 = 8x^6 - 108x^3$$

und also

$$Dy^3 = 10x^3 \pm 6x\sqrt{3x^4 - 6x}. \quad (7)$$

¹ Über die vollständige Lösung der Gleichung $2 + x^2 = y^3$ in ganzen Zahlen x, y , vgl. L. E. Dickson, History of the theory of numbers, vol. II, p. 533.

Folglich muß $3x^4 - 6x$ gleich einer Quadratzahl sein, oder

$$3x^4 - 6x = a^2. \quad (8)$$

Wenn x gerade ist, folgt hieraus, weil x durch 3 nicht teilbar ist

$$x^3 - 2 = \pm 6u^2, \quad x = \pm 2v^2,$$

oder

$$\pm 4v^6 - 1 = \pm 3u^2,$$

wo das obere Zeichen genommen werden muß, weil $4v^6 + 1$ durch 3 nicht teilbar ist. Die Gleichung kann dann so geschrieben werden

$$(u + 1)^3 - (u - 1)^3 = (2v^2)^3.$$

Diese Gleichung ist nur für $u = 1$, $v = 1$ möglich; folglich wird $x = 2$ und wegen (7) $Dy^3 = 80 \pm 72$ oder $Dy^3 = 152$, $D = 19$ und $y = 2$; aus (6) folgt endlich $z = -1$. Die einzige Lösung in diesem Falle ist somit

$$\left[\frac{2 + 2\sqrt[3]{19} - (\sqrt[3]{19})^2}{3} \right]^2 = -8 + 3\sqrt[3]{19}.$$

Wenn x ungerade ist, folgt aus (8)

$$x^3 - 2 = \pm 3u^2, \quad x = \pm v^2,$$

oder

$$\pm v^6 - 2 = \pm 3u^2,$$

wo das untere Zeichen genommen werden muß, weil $v^6 - 2$ durch 3 nicht teilbar ist, also

$$3u^2 = 2 + v^6, \quad (9)$$

mit $x = -v^2$. Nach einem Satze von A. THUE¹ hat diese Gleichung nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x und y . Eine Lösung ist $u = v = 1$; dann wird $x = -1$ und wegen (7) $Dy^3 = -10 \pm 18$, oder $D = 28$ und $y = -1$; aus (6) folgt endlich $z = 1$. Wir erhalten somit die Lösung

$$\left[\frac{-1 - \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{98}}{3} \right]^2 = -3 + \sqrt[3]{28}.$$

Diese Lösung ist sehr wahrscheinlich die einzige.

¹ Siehe A. THUE, Über die Unlösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by + c = dy^n$ in großen ganzen Zahlen x und y . Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, B. XXXIV, Nr. 16. Kristiania 1917.

Satz III.

Die dritte Potenz einer Einheit ist niemals von der Form $c + a\theta$, mit ganzen (rationalen) c und a .

Beweis: Es sei η eine positive Einheit

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}).$$

Der Koeffizient von $\bar{\theta}$ in η^3 ist gleich

$$\frac{1}{9}(gxy^2 + x^2z + fgyz^2).$$

Da x zu g teilerfremd ist, so muß, wenn

$$gxy^2 + x^2z + fgyz^2 = 0. \quad (10)$$

ist, z durch g teilbar sein. Wegen

$$x^3 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgxyz = 27 \quad (11)$$

ist der größte gemeinsame Teiler δ von x , y und z entweder $= 1$ oder $= 3$. Wir können folglich setzen¹

$$x = \delta d_1 d_2 x_1, \quad y = \delta d_2 d_3 y_1, \quad z = \delta g d_1 d_3 z_1, \quad (12)$$

wo $|d_1|$ der größte gemeinsame Teiler von $\frac{x}{\delta}$ und $\frac{z}{\delta g}$ ist, wo $|d_2|$ der größte gemeinsame Teiler von $\frac{x}{\delta}$ und $\frac{y}{\delta}$ ist, und wo $|d_3|$ der größte gemeinsame Teiler von $\frac{y}{\delta}$ und $\frac{z}{\delta g}$ ist. Die Zahlen $d_1 x_1$, $d_2 y_1$ und $d_3 z_1$ sind paarweise teilerfremd. Wenn die Werte (12) in (10) eingeführt werden, ergibt sich nach Division mit $\delta g d_1 d_2 d_3$:

$$d_2^2 d_3 x_1 y_1^2 + d_1^2 d_2 x_1^2 z_1 + D d_1 d_3^2 y_1 z_1^2 = 0.$$

Hieraus folgt, daß x_1 durch d_1 , daß y_1 durch d_2 und daß z_1 durch d_3 teilbar ist. Wenn

$$x_1 = d_1 x_2, \quad y_1 = d_2 y_2, \quad z_1 = d_3 z_2$$

gesetzt wird, wo wir x_2 , y_2 und z_2 positiv annehmen können, ergibt sich nach Division mit $d_1 d_2 d_3$:

$$d_2^3 x_2 y_2^2 + d_1^3 x_2^2 z_2 + D d_3^2 y_2 z_2^2 = 0.$$

¹ Vgl. etwa P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, Bd. I, S. 37.

Hieraus folgt aber, das $Dd_3^3y_2z_2^2$ durch x_2 teilbar ist, was nur für $x_2 = 1$ möglich ist. Ganz ähnlich ergibt sich $y_2 = 1$ und $z_2 = 1$. Folglich wird

$$d_1^3 + d_2^3 + Dd_3^3 = 0, \quad (13)$$

und

$$x = \delta d_1^2 d_2, \quad y = \delta d_2^2 d_3, \quad z = \delta g d_1 d_3^2. \quad (14)$$

Wenn diese Werte in (11) eingeführt werden, ergibt sich

$$d_1^6 d_2^3 + D d_2^6 d_3^3 + D^2 d_1^3 d_3^6 - 3 D d_1^3 d_2^3 d_3^3 = \frac{27}{\delta^3}.$$

Wird hieraus mittels (13) Dd_1^3 eliminiert, so erhalten wir

$$d_1^9 + 6d_1^6 d_2^3 + 3d_1^3 d_2^6 - d_2^9 = \left(\frac{3}{\delta}\right)^3. \quad (15)$$

Nun ist aber die Gleichung

$$u^3 + 3u^2v - 6uv^2 + v^3 = w^3$$

nur für $u = v = -w$ möglich in ganzen Zahlen u, v, w . Dies folgt sofort aus der Identität

$$(u^3 - 3uv^2 + v^3)^3 - (3u^2v - 3uv^2)^3 = (u^3 + 3u^2v - 6uv^2 + v^3)(u^2 - uv + v^2)^3.$$

Folglich besteht die Gleichung (15) nur für $d_1 = -1, d_2 = 1$, was zu den unmöglichen Werten $x = 3, y = -3, z = 0$ führt.

Der Satz III ist damit bewiesen.

Satz IV.

Es sei η eine Einheit,

$$\eta = x + y\theta + z\bar{\theta}$$

bzw.

$$\eta = \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}).$$

mit ganzen (rationalen) x, y, z . Ist dann n eine ganze positive Zahl und

$$\eta^n = c + a\theta,$$

mit ganzen (rationalen) c und a , so muß z durch g teilbar sein, oder, wenn n und g beide gerade sind, durch $\frac{1}{2}g$ teilbar sein.¹

Beweis: Es ist

$$(x + y\theta + z\bar{\theta})^n = (x + y\theta)^n + \binom{n}{1}(x + y\theta)^{n-1} \cdot z\bar{\theta} + \binom{n}{2}(x + y\theta)^{n-2} z^2 \bar{\theta}^2 + \dots$$

¹ Nach dem Satze II kann n nur in endlich vielen Fällen gerade sein.

Hier ist der Koeffizient von $\bar{\theta}$ gleich

$$\begin{aligned}
 &g \left[\binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{5} x^{n-5} y^5 D + \dots \right] + \\
 &+ \binom{n}{1} z \left[x^{n-1} + \binom{n-1}{3} x^{n-4} y^3 D + \dots \right] + \\
 &+ \binom{n}{2} z^2 f g \left[\binom{n-2}{1} x^{n-3} y + \binom{n-2}{4} x^{n-6} y^4 D + \dots \right] + \\
 &+ \binom{n}{3} z^3 f^2 g^2 \left[\binom{n-3}{2} x^{n-5} y^2 + \binom{n-3}{5} x^{n-8} y^5 D + \dots \right] + \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

Setzen wir diesen Koeffizienten gleich Null, und dividieren wir durch n , so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
 0 = &g \left[\frac{n-1}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n-1}{4} \frac{x^{n-5} y^5 D}{5} + \dots \right] + \\
 &+ z \left[x^{n-1} + \binom{n-1}{3} x^{n-4} y^3 D + \dots \right] + \\
 &+ \binom{n-1}{1} \frac{z^2 f g}{2} \left[\binom{n-2}{1} x^{n-3} y + \binom{n-2}{4} x^{n-6} y^4 D + \dots \right] + \\
 &+ \binom{n-1}{2} \frac{z^3 f^2 g^2}{3} \left[\binom{n-3}{2} x^{n-5} y^2 + \binom{n-3}{5} x^{n-8} y^5 D + \dots \right] + \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{17}$$

Es genügt zu zeigen, daß z durch jeden ungeraden Primteiler von g teilbar ist. Denn ist n ungerade und g gerade, so folgt durch nullsetzen von (16), daß $\binom{n}{1} z x^{n-1}$ gerade ist; da x teilerfremd zu $D = fg^2$ ist, muß z gerade sein. Es sei nun q ein ungerader Primteiler von g . Das allgemeine Glied der ersten Reihe in (17) ist

$$g \binom{n-1}{3k+1} \frac{x^{n-3k-2} \cdot y^{3k+2} D^k}{3k+2}.$$

Hier ist der Zähler wenigstens durch q^{2k+1} teilbar. Da nun $q^{2k+1} \geq 3^{2k+1} > 3k+2$ für alle $k \geq 0$ ist, so ist folglich die erste Reihe $\equiv 0 \pmod{q}$. Man sieht leicht ein, daß dasselbe für die dritte, vierte, fünfte und sechste Reihe gilt. Der Zähler der k^{ten} Reihe ist offenbar durch $q^{\frac{k+2}{3}}$, $q^{\frac{k-2}{3}}$ oder $q^{\frac{k}{3}}$ teilbar je nachdem $k \equiv 1, \equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod{3}$ ist; und der Nenner ist $k-1$. Nun ist für alle $k \geq 7$, $q^{\frac{k-2}{3}} \geq 3^{\frac{k-2}{3}} > k-1$.

Die sämtlichen übrigen Reihen sind folglich auch $\equiv 0 \pmod{q}$. Die zweite Reihe muß dann auch $\equiv 0 \pmod{q}$, also $zx^{n-1} \equiv 0 \pmod{q}$. Da nun x zu $D = fg^2$ teilerfremd ist, folgt $z \equiv 0 \pmod{q}$; und unser Satz ist somit bewiesen.

Für die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ kann ich beweisen, daß die Gleichung (17) unmöglich ist. In einer folgenden Arbeit werde ich die Untersuchung von der Gleichung (17) fortsetzen.

§ 5.

Einheiten von der Form $c + a\theta$ und die Fundamenteinheit.

Es sei $K(\theta)$ ein Körper erster Art, und $D \neq 20$. Es sei ferner $\eta = c + a\theta$ ein positive Einheit und ξ die Fundamenteinheit und $\eta = \xi^m$. Dann muß entweder $m = 1$ sein, oder es ist $m \geq 5$. Denn nach den Sätzen II und III in § 4 ist $m = 2, 3$ oder 4 unmöglich. Ist $m \geq 5$, so folgt

$$\left. \begin{aligned} 0 < \eta = \xi^m \leq \xi^5 < 1, \\ 1 < |\xi'|^5 \leq |\xi'|^m = |\xi''|^m = |\eta'| = |\eta''|, \\ |\eta'| = \sqrt[3]{c^2 - ac\theta + a^2\theta^2} < \sqrt{3}(1 + |a|\theta), \end{aligned} \right\} (1)$$

weil $|c| < 1 + |a|\theta$ ist. Es sei nun

$$\begin{aligned} \xi &= x + y\theta + z\bar{\theta}, \\ \xi' &= x + y\theta_Q + z\bar{\theta}_Q^2, \\ \xi'' &= x + y\theta_Q^2 + z\bar{\theta}_Q. \end{aligned}$$

Hier muß nach dem Hilfssatze I z von Null verschieden sein. Nach dem Satze IV in § 4 ist $z \equiv 0 \pmod{g}$; denn m muß ungerade sein, da D von 20 verschieden ist. Es ist folglich

$$z = \frac{1}{3\bar{\theta}} (\xi + \xi'_Q + \xi''_Q^2)$$

und

$$g \leq |z| < \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\xi'|).$$

Wegen (1) wird folglich

$$3g\bar{\theta} = 3\theta^2 < 1 + 2\sqrt[5]{\sqrt{3}(1 + |a|\theta)}.$$

Hieraus folgt sofort der

Satz V.

Es sei $K(\theta)$ ein Körper erster Art und $D \not\equiv 20$. Ist dann $\eta = c + a\theta$ eine Einheit, und besteht die Ungleichung

$$\sqrt[3]{3}(1 + |a|\theta) \leq \left(\frac{3\theta^2 - 1}{2}\right)^5, \quad (2)$$

so ist η die Fundamenteinheit.

Ist z. B. $|a| = 1$, so besteht die Ungleichung (2) für alle $D \geq 2$. Wir haben folglich das spezielle Resultat:

Alle kubusfreien Zahlen von der Form

$$D = c^3 \pm 1,$$

wo c eine ganze positive, durch 3 unteilbare Zahl ist, haben die Eigenschaft, daß die Fundamenteinheit im Körper $K(\sqrt[3]{D})$ gleich $\pm c \mp \sqrt[3]{D}$ ist.

Es sei darauf $K(\theta)$ ein Körper zweiter Art, und $\eta = c + a\theta$ eine positive Einheit. Es sei ferner $\eta = \xi^m$, wo ξ die Fundamenteinheit ist. Wir nehmen an, daß $m \geq 2$ ist. (Nach Satz II in § 4 kann m nur in endlich vielen Fällen gerade sein; ist m ungerade so muß $m \geq 5$ sein). Dann ist

$$\left. \begin{aligned} 0 < \eta = \xi^m &\leq \xi^2 < 1, \\ 1 < |\xi'|^2 &\leq |\xi'|^m = |\xi''|^m = |\eta'| = |\eta''|, \\ |\eta'| = \sqrt{c^2 - ac\theta + a^2\theta^2} &< \sqrt[3]{3}(1 + |a|\theta). \end{aligned} \right\} (3)$$

Es sei nun

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{3}(x + y\theta + z\bar{\theta}), \\ \xi' &= \frac{1}{3}(x + y\theta_0 + z\bar{\theta}_0^2), \\ \xi'' &= \frac{1}{3}(x + y\theta_0^2 + z\bar{\theta}_0). \end{aligned}$$

Nach dem Hilfssatze I muß hier z von Null verschieden sein. Nach dem Satze IV in § 4 ist $z \equiv 0 \pmod{g}$, wenn g ungerade ist, und $z \equiv 0 \pmod{\frac{1}{2}g}$, wenn g gerade ist. Es ist folglich

$$z = \frac{1}{\theta}(\xi + \xi'_0 + \xi''_0)$$

und

$$\delta g \leq |z| < \frac{1}{\theta}(1 + 2|\xi'|),$$

wo $\delta = 1$ oder $= \frac{1}{2}$ ist, je nachdem g ungerade oder gerade ist. Wegen (3) wird folglich

$$\delta g \bar{\theta} = \delta \theta^2 < 1 + 2 \sqrt[3]{\sqrt{3}(1 + |a|\theta)}.$$

Hieraus folgt sofort der

Satz VI.

Es sei $K(\theta)$ ein Körper zweiter Art. Ist dann $\eta = c + a\theta$ eine Einheit, und besteht die Ungleichung

$$\sqrt[3]{3}(1 + |a|\theta) \leq \left(\frac{\delta\theta^2 - 1}{2}\right)^2,$$

wo $\delta = 1$ oder $\frac{1}{2}$ ist, je nachdem g ungerade oder gerade ist, so ist η die Fundamenteinheit.

Ist z. B. $|a| = 1$, so besteht die Ungleichung

$$\frac{1}{16}(\theta^2 - 2)^2 \geq \sqrt[3]{3}(1 + \theta)$$

für alle $\theta \geq 4$. Für $\theta < 4$, $D < 64$ bleiben nur die Fälle $D = 3^3 - 1 = 26$ und $D = 3^3 + 1 = 28$ zurück. Diese Fälle haben wir aber in § 2 behandelt. Wir haben folglich das spezielle Resultat:

Alle kubusfreien Zahlen von der Form

$$D = (3c)^3 \pm 1,$$

wo c eine ganze positive Zahl ist, haben die Eigenschaft, daß die Fundamenteinheit im Körper $K(\sqrt[3]{D})$ gleich $\pm 3c \mp \sqrt[3]{D}$ ist. Hiervon ist $D = 28$ die einzige Ausnahme.

§ 6.

Über die Einheiten von der Form $1 + y\theta + z\bar{\theta}$.

Eine Einheit von der Form

$$\eta = 1 + y\theta + z\bar{\theta},$$

mit ganzen (rationalen) y und z ist offenbar positiv, wenn D von 2 und 4 verschieden ist.

Denn es ist

$$N(\eta) = \eta\eta'\eta'' = 1 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgyz \equiv 1 \pmod{fg}.$$

Es ist folglich für $D > 2$

$$1 + Dy^3 + \bar{D}z^3 - 3fgyz = 1,$$

oder

$$gy^3 + fz^3 = 3yz.$$

Es sei nun δ der größte gemeinsame Teiler von y und z ,

$$y = \delta y_1, \quad z = \delta z_1,$$

wo y_1 und z_1 teilerfremd sind, also

$$gy_1^3 + fz_1^3 = \frac{3y_1 z_1}{\delta}. \quad (1)$$

Wenn δ durch 3 teilbar ist, müssen wir

$$\delta = 3cd, \quad y_1 = du, \quad z_1 = cv$$

haben, wo c, d, u und v ganze Zahlen sind; u und v wollen wir positiv annehmen. Dann wird

$$gd^3u^3 + fc^3v^3 = uv. \quad (2)$$

Hieraus folgt, daß fc^3v^3 und folglich f durch u teilbar ist, und daß gd^3u^3 und folglich g durch v teilbar ist, also

$$f = au, \quad g = bv,$$

wo die ganzen Zahlen a und b positiv sind. Dann folgt aus (2) durch Division mit uv ,

$$bu^2d^3 + av^2c^3 = 1.$$

Folglich wird wegen

$$y = 3cd^2u, \quad z = 3c^2dv,$$

$$\begin{aligned} \eta = 1 + y\theta + z\bar{\theta} &= av^2c^3 + bu^2d^3 + 3cd^2u \sqrt[3]{ab^2uv^2} + 3c^2dv \sqrt[3]{a^2bu^2v} = \\ &= (c \sqrt[3]{av^2} + d \sqrt[3]{bu^2})^3. \end{aligned}$$

Wenn δ durch 3 nicht teilbar ist, folgt aus (1)

$$\delta = cd, \quad y_1 = du, \quad z_1 = cv,$$

wo c, d, u und v ganze Zahlen sind; u und v wollen wir positiv annehmen. Dann wird

$$gd^3u^3 + fc^3v^3 = 3uv. \quad (3)$$

Hieraus folgt, daß f durch u und g durch v teilbar ist, also

$$f = au, \quad g = bv,$$

wo a und b positiv sind. Durch Division mit uv folgt dann aus (3)

$$bu^2d^3 + av^2c^3 = 3.$$

Folglich wird wegen

$$y = cd^2u, \quad z = c^2dv,$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 + y\theta + z\bar{\theta} = \frac{1}{3}(bu^2d^3 + av^2c^3) + cd^2u \sqrt[3]{abu^2v^2} + c^2dv \sqrt[3]{a^2bu^2v} = \\ &= \frac{1}{3}(c \sqrt[3]{av^2} + d \sqrt[3]{bu^2})^3. \end{aligned}$$

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Satz VII.

Es sei η eine Einheit von der Form

$$\eta = 1 + y\theta + z\bar{\theta},$$

mit ganzen (rationalen) y und z , indem D von 2 und 4 verschieden ist. Dann ist entweder

$$\left. \begin{aligned} f &= au, \quad g = bv, \\ av^2c^3 + bu^2d^3 &= 1, \\ y &= 3cd^2u, \quad z = 3c^2dv, \\ \eta &= (c \sqrt[3]{av^2} + d \sqrt[3]{bu^2})^3, \end{aligned} \right\} (4)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} f &= au, \quad g = bv, \\ av^2c^3 + bu^2d^3 &= 3, \\ y &= cd^2u, \quad z = c^2dv, \\ \eta &= \frac{1}{3}(c \sqrt[3]{av^2} + d \sqrt[3]{bu^2})^3. \end{aligned} \right\} (5)$$

Hieraus folgt daß $\eta < 1$ ist. Denn wegen (4) und (5) haben c und d entgegengesetztes Vorzeichen¹; folglich ist

$$\frac{1}{\eta} = \eta' \eta'' = [c^2v \sqrt[3]{a^2v} - cd \sqrt[3]{abu^2v^2} + d^2u \sqrt[3]{b^2u}]^3 > 3^3$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{1}{\eta} = \eta' \eta'' = \frac{1}{9} [c^2v \sqrt[3]{a^2v} - cd \sqrt[3]{abu^2v^2} + d^2u \sqrt[3]{b^2u}]^3 > 3.$$

Da in (4) und (5) cav^2 und dbu^2 teilerfremd sind, folgt aus Satz VII wegen des Hilfssatzes II in § 1:

¹ Die Möglichkeit $c = d = u = v = 1$ und $ab = 2$ gibt $D = 2$ oder $D = 4$; diese Fälle haben wir aber ausgeschlossen.

Satz VIII.

Wenn die Fundamenteinheit von der Form

$$\xi = 1 + y\theta + z\bar{\theta}$$

ist, mit ganzen (rationalen) y und z , dann gibt es keine Einheit von der Form $c + a\theta$, mit ganzen (rationalen) c und a , von dem Falle $D = 20$ abgesehen, wo $\xi = 1 + \theta - \bar{\theta}$ und $\xi^2 = -19 + 7\theta$ ist.

Wir wollen zuletzt einen speziellen Fall untersuchen:

Es sei in (5) $c = v = 1$ und $d = -1$, also $z = -1$, $y = u$, $a = by^2 + 3$, $f = ay = y(by^2 + 3)$ und $g = b$. Dann ist der Körper $K(\theta)$ offenbar immer von erster Art; denn es ist

$$D = fg^2 = yb^2(by^2 + 3) = (yb)^3 + 3yb^2 \equiv \pm 1 + 3t \pmod{9},$$

wo t durch 3 nicht teilbar ist. Hier gilt der

Satz IX.

Eine Einheit von der Form

$$\eta = 1 + y\theta - \bar{\theta},$$

mit ganzzahligem y , ist immer die Fundamenteinheit.

Beweis: Es sei nämlich ξ die Fundamenteinheit, $\eta = \xi^m$, und

$$\xi = U + V\theta + W\bar{\theta},$$

mit ganzen (rationalen) U, V und W , und ferner

$$\xi' = U + V\theta_0 + W\bar{\theta}_0^2,$$

$$\xi'' = U + V\theta_0^2 + W\bar{\theta}_0.$$

Also wird

$$W = \frac{1}{3\bar{\theta}}(\xi + \xi'\varrho + \xi''\varrho^2),$$

$$V = \frac{1}{3\theta}(\xi + \xi'\varrho^2 + \xi''\varrho),$$

und wegen $\eta' = (\xi')^m$

$$|W| < \frac{1}{3\bar{\theta}}(1 + 2|\sqrt[m]{\eta'}|),$$

$$|V| < \frac{1}{3\theta}(1 + 2|\sqrt[m]{\eta'}|).$$

Nun ist

$$\frac{1}{\eta} = |\eta'|^{-2} = \frac{1}{4}(2 - y\theta + \bar{\theta})^2 + \frac{3}{4}(y\theta + \bar{\theta})^2,$$

und folglich wegen

$$0 < 1 + y\theta - \bar{\theta} < 1, \\ |\eta'|^2 < \frac{9}{4} + 3\bar{\theta}^2 < 4\bar{\theta}^2, |\eta'| < 2\bar{\theta},$$

wenn $\bar{\theta} > \frac{3}{2}$ ist. Wir erhalten folglich

$$|W| < \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\sqrt[m]{2\bar{\theta}}|), \\ |V| < \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\sqrt[m]{2\bar{\theta}}|).$$

Ist $m = 2$ und $\bar{\theta} > 2$, so wird

$$|W| < \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\sqrt{2\bar{\theta}}|) < 1$$

oder $W = 0$, also

$$1 + y\theta - \bar{\theta} = (U + V\theta)^2 = U^2 + 2UV\theta + gV^2\bar{\theta},$$

was unmöglich ist. Ist $m \geq 3$, so wird $W = 0$ und

$$|V| < \frac{1}{3\bar{\theta}} (1 + 2|\sqrt[3]{2\bar{\theta}}|) < 1,$$

weil $(3\bar{\theta} - 1)^3 > 8\bar{\theta}^3 = 8f\bar{\theta}\theta > 8\bar{\theta}$ ist. Folglich ist $U = 0$, was $\xi = 1$ gibt. Die Annahme $m > 1$ ist somit unmöglich, und der Satz IX ist bewiesen.

Die kleinsten Werte von D , für welche dieser Satz die Fundamenteinheit bestimmt, sind $D = 14, 20, 490, 1030, 1150$. Es wäre natürlich leicht eine Reihe von ähnlichen Resultaten zu erhalten.

Wir wollen endlich den folgenden Satz beweisen:

Satz X.

Wenn die Fundamenteinheit von der Form

$$\xi = C + A\theta$$

ist, mit ganzen (rationalen) C und A , dann gibt es eine einzige Einheit von der Form $1 + y\theta + z\bar{\theta}$, mit ganzen (rationalen) y und z , nämlich $\xi^3 = 1 + 3AC^2\theta + 3A^2Cg\bar{\theta}$. (Es wird angenommen, daß D von 2 und 4 verschieden ist).

Beweis: Aus $(C + A\theta)^n = 1 + y\theta + z\bar{\theta}$ folgt

$$1 = C^n + \binom{n}{3} C^{n-3} A^3 D + \binom{n}{6} C^{n-6} A^6 D^2 + \dots \dots \dots \quad (6)$$

Hieraus ergibt sich, daß n durch 3 teilbar ist; denn sonst würde daß letzte Glied in (6) durch C teilbar, und C wäre ein Teiler von 1, was nur für $D = 2$ eintritt. Also ist $n = 3m$, und wegen dem Satze VII muß

$$(C + A\theta)^{3m} = (c\sqrt[3]{av^2} + d\sqrt[3]{bu^2})^3$$

sein, mit $f = au$ und $g = bv$; denn die Möglichkeit (5) ist offenbar ausgeschlossen. Folglich wird

$$(C + A\theta)^m = c\sqrt[3]{av^2} + d\sqrt[3]{bu^2},$$

woraus entweder $a = v = 1$ und

$$(C + A\theta)^m = c + d\bar{\theta},$$

oder $b = u = 1$ und

$$(C + A\theta)^m = c\theta + d.$$

Nach dem Hilfssatze I in § 1 ist aber von diesen Gleichungen nur die letzte möglich und zwar nur für $m = 1$. Unser Satz ist somit bewiesen. Wir haben sogar etwas mehr bewiesen:

Eine Einheit von der Form $1 + y\theta + z\bar{\theta}$ (mit $D \neq 2$ und $\neq 4$) ist nur dann gleich $(c + a\theta)^n$, wenn $n = 3$, $y = 3ac^2$ und $z = 3ga^2c$ ist.

* * *

Anmerkung: Durch den Satz IX ist die Fundamenteinheit für unendlich viele Körper bestimmt. Denn wir können unendlich oft die ganzen positiven quadratfreien, durch 3 unteilbaren Zahlen y und b so wählen, daß

$$fg = by(by^2 + 3)$$

quadratfrei wird, sogar wenn eine der Zahlen im voraus gegeben ist. Siehe meine Arbeit: Zur Arithmetik der Polynome, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. I, 1922, S. 186.

§ 7.

Einige Bemerkungen über die Gleichung $x^3 + Dy^3 = 1$.

Mittels der Fermatschen Methode der „descente infinie“ hat man die Unmöglichkeit der Gleichung

$$x^3 + Dy^3 = z^3 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen x, y, z, D , für eine große Anzahl Werte von D bewiesen.¹ Diese Gleichung ist z. B. unmöglich für $D = 1, 3, 18, 36, p, q, p^2, q^2, 9p, 9q, 9p^2, 9q^2, pq, p^2q^2, pp_1^2, qq_1^2$, wo p und $p_1 \equiv 5 \pmod{9}$ und wo q und $q_1 \equiv 2 \pmod{9}$ ist. (Die p und q sind Primzahlen). Entsprechende Resultate folgen natürlich für die Gleichung

$$x^3 + Dy^3 = 1. \quad (2)$$

Wir wollen nun annehmen, daß in dieser Gleichung D keinen Primteiler von der Form $6t + 1$ hat. Dann folgt aus der Gleichung (2), wenn Dy durch 3 nicht teilbar ist,

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= 3u^3, \\ x - 1 &= \frac{1}{3}Dv^3, \end{aligned}$$

wo die erste Gleichung so geschrieben werden kann

$$(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = (3u)^3,$$

also muß $x = -2$ oder $D = 9$ sein.

Ist Dy durch 3 nicht teilbar, so folgt aus (2)

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= u^3, \\ x - 1 &= Dv^3. \end{aligned}$$

Die erste von diesen Gleichungen hat aber nach einem Satze von A. THUE (vgl. § 4, S. 19, Fußnote) nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, u . Die Lösung $x = -1$ gibt $D = 2$, $x = 18$ gibt $D = 17$ und $x = -19$ gibt $D = 20$; diese Lösungen sind vielleicht die sämtlichen. Es gilt folglich:

Wenn eine Einheit von der Form $c + a\theta$ im Körper $K(\theta)$ existiert, dann muß D , von endlich vielen Ausnahmen abgesehen, mindestens einen Primteiler von der Form $6t + 1$ haben.

Wenn D keinen Primteiler von der Form $6t + 1$ hat, gilt also:

Die Gleichung (2) ist nur für $D = 9$ möglich, wenn Dy durch 3 teilbar ist.

Ist $D \equiv \pm 4 \pmod{9}$, so muß in (2) y durch 3 teilbar sein. Denn sonst wird $x^3 = 1 - Dy^3 \equiv 1 \mp 4 \pmod{9}$, was unmöglich ist. Die Gleichung (2) ist folglich unmöglich, wenn $D \equiv \pm 4 \pmod{9}$ ist und keinen Primteiler von der Form $6t + 1$ hat.

¹ Siehe L. E. DICKSON, History of the theory of numbers, vol. II, pp. 572–8.

² Für $D = q = 2$ gibt es die einzige Lösung $x = -y = -z$.

<i>D</i>	<i>Einheit</i>	<i>D</i>	<i>Einheit</i>
2	$-1 + \theta$	43	$-7 + 2\theta$
3	$-2 + \bar{\theta}$	44	$\frac{1}{3}(113 - 2\theta - 17\bar{\theta})$
5	$1 - 4\theta + 2\bar{\theta}$	45	$1081 + 66\theta - 312\bar{\theta}$
6	$1 - 6\theta + 3\bar{\theta}$	52	$1 - 4\theta + 2\bar{\theta}$
7	$2 - \theta$	55	$\frac{1}{5}(1420 - 381\theta + 2\bar{\theta})^3$
10	$\frac{1}{3}(-7 - \theta + 2\bar{\theta})$	58	$1 - 8\theta + 2\bar{\theta}$
11	$1 + 4\theta - 2\bar{\theta}$	60	$1 - 12\theta + 6\bar{\theta}$
12	$1 + 3\theta - 3\bar{\theta}$	61	$1 - 16\theta + 4\bar{\theta}$
13	$-4 - 3\theta + 2\bar{\theta}$	62	$1 - 24\theta + 6\bar{\theta}$
14	$1 + 2\theta - \bar{\theta}$	63	$4 - \theta$
15	$1 - 30\theta + 12\bar{\theta}$	65	$-4 + \theta$
17	$18 - 7\theta$	66	$+24\theta - 6\bar{\theta}$
19	$\frac{1}{3}(2 + 2\theta - \bar{\theta})$	67	$1 + 16\bar{\theta} - 4\bar{\theta}$
20	$1 + \theta - \bar{\theta}$	68	$1 + 12\theta - 6\bar{\theta}$
21	$-47 + 6\theta + 4\bar{\theta}$	70	$1 + 8\theta - 2\bar{\theta}$
22	$23 + 3\theta - 4\bar{\theta}$	74	$-961 - 23\theta + 60\bar{\theta}$
23	$-41399 - 3160\theta + 6230\bar{\theta}$	76	$1 + 4\theta - 2\bar{\theta}$
26	$3 - \theta$	90	$1 - 54\theta + 36\bar{\theta}$
28	$-\frac{1}{3}(-1 - \theta + \bar{\theta})$	91	$9 - 2\theta$
29	$\frac{1}{9}(730 + 128\theta - 119\bar{\theta})^3$	110	$1 - 5\theta + \bar{\theta}$
30	$1 + 9\theta - 3\bar{\theta}$	122	$1 - 25\theta + 5\bar{\theta}$
31	$-367 + 54\theta + 20\bar{\theta}$	124	$5 - \theta$
33	$\frac{1}{9}(-84 - 54\theta + 25\bar{\theta})^3$	126	$-5 + \theta$
34	$613 - 24\theta - 51\bar{\theta}$	128	$1 + 25\theta - 5\bar{\theta}$
35	$\frac{1}{3}(-22 + 10\theta - \bar{\theta})$	130	$1 + 15\theta - 5\bar{\theta}$
37	$10 - 3\theta$	140	$1 + 5\theta - 2\bar{\theta}$
38	$-151 + 55\theta - 3\bar{\theta}$	165	$1 - 66\theta + 12\bar{\theta}$
39	$-23 + 2\bar{\theta}$	182	$17 - 3\theta$
41	$\frac{1}{3}(10523 + 236\theta - 835\bar{\theta})^3$	198	$1 - 6\theta + 3\bar{\theta}$
42	$1 - 42\theta + 12\bar{\theta}$	207	$1 - 12\theta + 6\bar{\theta}$
		2 5	$6 - \theta$
		217	$-6 + \theta$
		234	$1 + 6\theta - 3\bar{\theta}$
		350	$1 + 21\theta - 15\bar{\theta}$

Ich bringe zuletzt eine Tabelle von 64 Einheiten, die sämtlich positiv und < 1 sind. Von den Fällen $D = 29, 33, 41$ und 55 vielleicht abgesehen sind sie sämtlich *Fundamenteinheiten*.

Es gibt sonst nur die folgenden Arbeiten, die Tabellen von Einheiten in reinen kubischen Körpern enthalten:

1. A. MARKOFF, Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Petersburg, VII^e serie, tome 38.

2. E. MEISSEL, Beitrag zur PELL'schen Gleichung höherer Grade, Programmschrift, Kiel, 1891.

Diese zwei Arbeiten waren mir leider nicht zugänglich.

3. L. W. REID, Tafel der Klassenanzahlen für kubische Zahlkörper, Dissertation, Göttingen 1899.

Diese Arbeit enthält nur Einheiten für $D \leq 10$.

Kristiania, Februar 1923.

Nachtrag I.

Herr L. J. MORDELL hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß Herr DANS im Juliheft 1922 von The Bulletin of the American Mathematical Society ohne Beweis den Satz mitgeteilt hat, daß die Gleichung

$$x^3 + Dy^3 = 1$$

höchstens eine Lösung in ganzen Zahlen x, y besitzt.

In einer folgenden Arbeit werde ich die hier angefangenen Untersuchungen fortsetzen, und z. B. den folgenden Satz beweisen: Die unbestimmten Gleichungen

$$Ax^3 + Dy^3 = 1,$$

$$Ax^3 + Dy^3 = 3,$$

wo A und B ganze Zahlen sind, $AB > 4$, haben höchstens eine Lösung in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen x und y .

Kristiania, März 1923.

Nachtrag II.

Herr BORIS DELAUNAY hat mir heute brieflich mitgeteilt, daß sein Satz über die unbestimmte Gleichung

$$x^3 + Dy^3 = 1$$

richtig folgendermaßen ausgesprochen werden muß: *Diese Gleichung hat nur dann eine Lösung in ganzen Zahlen x, y (mit $y \neq 0$), wenn die fundamentale Einheit ε_0 des Ringes $[1, \sqrt[3]{D}, (\sqrt[3]{D})^2]$, mit $0 < \varepsilon_0 < 1$, von der Form $c + b\sqrt[3]{D}$ ist, und dann hat sie die einzige Lösung $x = c, y = b$. Der Beweis dieses Satzes hat er in einer (auf russisch geschriebenen) Arbeit in der Mathematischen Vereinigung von Charkov im Jahre 1915 veröffentlicht.*

Es handelt sich also nicht von der Fundamenteinheit des Körpers $K(\sqrt[3]{D})$, sondern von der fundamentalen Einheit eines Ringes. Daraus folgt nun, daß die von mir angegebenen Fälle $D = 19, 20$ und 28 keine Ausnahmen bilden. (Siehe diese Arbeit S. 16). Das Misverständnis ist dadurch entstanden, daß Herr DELAUNAY in seiner Note in den Comptes Rendus 1916 den folgenden Ausdruck benutzt hat: „l'unité fondamentale du corps $\Omega(\sqrt[3]{Q})$ de la forme $a(\sqrt[3]{Q})^2 + b(\sqrt[3]{Q}) + c$, où les nombres a, b, c sont des entiers“.

Damit hat er also die fundamentale Einheit des Ringes $[1, \sqrt[3]{Q}, (\sqrt[3]{Q})^2]$ gemeint; die französische Bezeichnung für „Ring“ (Anneau) war ihm nämlich damals unbekannt.

Paris, 16. November 1923.

VERZEICHNIS DER NACHGELASSENEN SCHRIFTEN AXEL THUES

VON
VIGGO BRUN UND TRYGVE NAGELL

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 12)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i fællesmøtet den 23de mars 1923.

Die nachgelassenen Schriften des am 7. März 1922 verstorbenen Professors der angewandten Mathematik an der Universität in Kristiania, Axel Thue, sind von seiner Witwe der hiesigen Universitätsbibliothek geschenkt worden.

Diese Schriften bestehen erstens von ca. 800 Schreibheften, zum größten Teil im Format 17×20 cm., die sehr zierlich, mit gut leserlicher Handschrift geschrieben sind; jedes Heft enthält durchschnittlich 40 beschriebene Seiten; gewöhnlich ist nur jede zweite Seite beschrieben. Dazu kommen weiter 12 Pakete, die Manuskripte und andere Papiere in Folio von zusammen ungefähr 1200 Seiten enthalten.

Die ganze Sammlung ist katalogisiert worden, auch solche Papiere, die ohne mathematisch-wissenschaftlichen Wert sind, wie z. B. Schulhefte und Vorlesungsreferate. Viele Papiere sind von historischem und biographischem Interesse. Der größte Teil der Papiere, die von mathematisch-wissenschaftlichem Interesse sind, ist als Vorarbeiten seiner im Druck veröffentlichten Arbeiten anzusehen.

Vollständig druckfertige Manuskripte enthält die Sammlung nicht. Doch muß bemerkt werden ein Entwurf eines Lehrbuches der Mechanik (228 Seiten in Folio), der aber nicht abgeschlossen ist. Ein Manuskript (von ca. 400 Seiten in Folio) mit dem Titel: »Omkring Fermats Problem« (»Studien zum Fermatschen Problem«), das während des letzten halben Jahres seines Lebens (Oktober 1921—Februar 1922) ausgearbeitet ist, ist auch nicht in völlig druckfertigem Stande.

Viele von den Papieren, besonders aus seinen letzten Jahren, enthalten Resultate von großem Interesse, die in seinen gedruckten Arbeiten nicht publiziert und wahrscheinlich neu sind. Es wäre gewiß wünschenswert, daß einige von diesen Arbeiten gedruckt würden; in welchem Umfang wird eine eventuelle spätere Durcharbeitung feststellen.

Die Hauptmenge der Schriften ist von zahlentheoretischem Inhalt; aber auch diejenigen, die sich mit Mechanik beschäftigen, bilden eine Gruppe von sehr großem Umfang.

Nach dem Charakter des Inhaltes haben wir die Schriften in die folgenden 6 Gruppen eingeteilt:

- I. *Referate von Vorlesungen*, die Thue als Student an der Universität in Kristiania gehört hat, und von Vorlesungen, die er später als Oberlehrer an der technischen Schule in Drontheim gehört hat; ferner Abschriften von verschiedenen Lehrbüchern. (Die Vorlesungsreferate aus seiner Studentenzeit sind jedoch sehr unvollständig und nicht abgeschlossen.) Diese Gruppe enthält 80 Hefte.
- II. *Originalarbeiten*, die nicht gedruckt sind, und Vorarbeiten zu publizierten Arbeiten. (Einige Abschriften von Abhandlungen und Lehrbüchern sind jedoch in dieser Gruppe mitgenommen; denn sie sind in vielen Fällen so eng mit den originalen Thueschen Studien verknüpft, daß sie hier ihren natürlichen Platz finden.) Diese Gruppe enthält 523 Hefte und 11 Pakete.
- Sie zerfällt in die folgenden Untergruppen:
- a) Zahlentheorie; 162 Hefte und 6 Pakete.
 - b) Mechanik; 156 Hefte und 5 Pakete.
 - c) Geometrie; 36 Hefte.
 - d) Logische Probleme (Zeichenreihen, »Bäume«, Verzweigungsprobleme); 51 Hefte.
 - e) Tait's Problem (Vierfarbenproblem); 12 Hefte.
 - f) Versicherungsmathematik; 31 Hefte.
 - g) Algebra, Infinitesimalrechnung und Hefte mit gemischtem Inhalt von Zahlentheorie, Mechanik, Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Variationsrechnung, Berührungstransformationen etc.; 75 Hefte.
- In jeder von diesen Untergruppen sind die Papiere wo möglich chronologisch geordnet. Eine chronologische Ordnung ganz durchzuführen hat sich aber als unmöglich erwiesen; denn ein großer Teil der Papiere ist ohne Datierung.
- III. *Manuskripte und Korrekturen zu gedruckten Arbeiten*. Diese Gruppe enthält 40 Hefte mit beigelegten Korrekturen.
- IV. *Konzepte, Schulhefte etc.* Diese Gruppe enthält 145 Hefte und 2 Pakete. Der Inhalt der Hefte ist von zahlentheoretischer, mechanischer und geometrischer Natur. Weiter enthält die Gruppe norwegische, englische und deutsche Aufsätze aus der Schulzeit, nebst Hefte mit mathematischem und philosophischem Inhalt aus derselben Zeit. Die Pakete enthalten Konzeptpapiere in Folio von unzusammenhängendem Inhalt.
- V. *Referate von Vorlesungen Thues*. Diese Gruppe enthält 18 Hefte, die aus Referaten von Vorlesungen über Mechanik bestehen, die Thue an der Universität in Kristiania gehalten hat.
- VI. *Korrespondenz*. Einige Dokumente, Gesuche betreffend, und einige Briefe.

Im folgenden wird ein Verzeichnis der in den Gruppen I und II enthaltenen Papiere gegeben. Wo ausdrücklich nichts anderes gesagt wird, sind die Papiere auf norwegisch geschrieben. Einige Abschriften (von deutschen Lehrbüchern und Abhandlungen) sind auf deutsch geschrieben; dasselbe gilt von einigen, aber nicht vielen, ungedruckten Manuskripten aus seinen letzten Jahren. (Von den gedruckten Manuskripten in der Gruppe III sind die meisten auf deutsch geschrieben.)

Die Nummern, die die Papiere in dem Kataloge der Universitätsbibliothek tragen, sind überall hinzugefügt und müssen bei eventueller Requisition benutzt werden.

Dieses Verzeichnis ist auf Initiative von Professor C. Störmer ausgearbeitet, mit Unterstützung von der Stiftung »Universitetets jubilæumsfond av 1911«.

I. VORLESUNGSREFERATE ETC.

- a) Vorlesungen gehalten an der Universität in Kristiania von Professor Sophus Lie:
1. Vorlesungen über projektive Plangeometrie, 16 Hefte. Ms. in 8°, 351 a—p.
 2. Vorlesungen über projektive Raumgeometrie, 4 Hefte. Ms. in 8°, 352 a—d.
 3. Vorlesungen über Differentialgleichungen, 2 Hefte. Ms. in 8°, 353 a, b.
- b) Vorlesungen gehalten an der Universität in Kristiania von Professor C. A. Bjerknes:
1. Vorlesungen über Differentialrechnung, 14 Hefte. Ms. in 8°, 354 a—n.
 2. Vorlesungen über Differentialgleichungen, 6 Hefte. Ms. in 8°, 355 a—f.
 3. Vorlesungen über Hydrodynamik, 11 Hefte. Ms. in 8°, 356 a—k.
- c) Vorlesungen gehalten an der Universität in Kristiania von Professor C. M. Guldberg:
1. Vorlesungen über Maschinenlehre, 1 Heft. Ms. in 8°, 357.
 2. Vorlesungen über Mechanik, 2 Hefte. Ms. in 8°, 358 a, b.
- d) Vorlesungen gehalten an der Universität in Kristiania von Professor C. F. Fearnley über Astrophysik, 3 Hefte. Ms. in 8°, 359 a—c.
- e) Vorlesungen gehalten an der Universität in Kristiania von Professor Elling Holst:
1. Vorlesungen über projektive Geometrie, 1 Heft. Ms. in 8°, 360.
 2. Vorlesungen über Flächen dritter Ordnung, 1 Heft. Ms. in 8°, 361.
- f) Vorlesungen gehalten an der technischen Schule in Drontheim von Professor Gunstensen über Baustatik, 8 Hefte. Ms. in 8°, 362 a—h.

- g) Vorlesungen gehalten an der technischen Schule in Drontheim von Direktor Jens Jensen über die mechanische Wärmetheorie, 4 Hefte. Ms. in 8°, 363 a—d.
- h) Hebmachines für Flüssigkeiten, nach Weisbach und Hermann, 1 Heft. Ms. in 8°, 364.
- i) Die Bewegung von Flüssigkeiten, nach Lobben, 1 Heft. Ms. in 8°, 365.
- j) Gasmotore, nach einem Vortrage von Direktor Jens Jensen, 1 Heft. Ms. in 8°, 366.
- k) Abschriften von verschiedenen Lehrbüchern der Physik, 4 Hefte. Ms. in 8°, 367 a—d.

II. ORIGINALARBEITEN, DIE NICHT GEDRUCKT SIND, UND VORARBEITEN ZU PUBLIZIERTEN ARBEITEN.

a) Zahlentheorie.

- 1. 1 Heft mit der Aufschrift: »Lehrbuch der Arithmetik (1886)«. Ein Versuch die Elementararithmetik exakt zu begründen; nicht abgeschlossen. Ms. in 8°, 368.
- 2. 1 Heft mit einem zahlentheoretischen Vortrage gehalten im mathematischen Seminar in Kristiania am 27. Oktober 1888; auf deutsch und norwegisch geschrieben. Ms. in 8°, 369.
- 3. 5 Hefte mit Studien über unbestimmte Gleichungen, z. B. über die Gleichungen $a^3 + b^3 = c^3$, $a^3 + b^3 = c^2$, $x^{10} + y^{10} = z^{10}$, $P^4 + P^2Q^2 + Q^4 = R^2$ und $P_1P_2P_3 \dots = Q_1Q_2Q_3 \dots$ (Bygdö, 1888—1890.) Das letzte Heft enthält eine Studie über die Primzahlpaare mit Differenz 2. Ms. in 8°, 370 a—e.
- 4. 1 Heft mit der Aufschrift: »Netzfunktionen«. Ms. in 8°, 371.
- 5. 1 Heft mit dem Entwurf eines Vortrages gehalten auf dem 14. skandinavischen Naturforscherkongress in Kopenhagen 1891. Ms. in 8°, 372.
- 6. Über die Funktion $2^k + 1$. Berlin 1891. 2 Hefte. Ms. in 8°, 373 a, b.
- 7. 6 Hefte mit zahlentheoretischen Studien, die zum größten Teil unbestimmte Gleichungen betreffen. Das letzte Heft behandelt die Bestimmung von rationalen Punkten auf kubischen Kurven mittels der Tangenten- und Sekantenmethode. (Deutschland 1891.) Ms. in 8°, 374 a—f.
- 8. Das Theorem von Wilson. 1 Heft. Ms. in 8°, 375.
- 9. Die Kummersche Zahlentheorie. 1 Heft. Ms. in 8°, 376.
- 10. Abschriften von zahlentheoretischen Arbeiten von Julius Petersen, Eisenstein und Zeller (in das Norwegische übersetzt). 3 Hefte. Ms. in 8°, 377 a—c.

11. 8 Hefte mit der Aufschrift: »Zahlentheorie 1897«. Behandeln die unbestimmten Gleichungen $x^5 - y^5 = z^2$, $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = z^2$, $x'' + y'' = z''$ etc. Ms. in 8°, 378 a—h.
12. 1 Heft mit Studien über gewisse unbestimmte Gleichungen. Januar 1899. Ms. in 8°, 379.
13. 1 Heft mit verschiedenen zahlentheoretischen Studien und mit einem Beweis für die Existenz von transzendenten Zahlen (1899). Ms. in 8°, 380.
14. 4 Hefte mit verschiedenen zahlentheoretischen Studien. Februar—September 1899. Ms. in 8°, 381 a—d.
15. 6 Hefte mit der Aufschrift: »Über eine Klasse Restfunktionen«. Ca. 1900. Ms. in 8°, 382 a—f.
16. Über verschiedene Annäherungswerte des Ausdruckes $\sqrt[p''+q'']{p''+q''}$. (Januar 1900). 1 Heft. Ms. in 8°, 383.
17. 1 Heft mit der Aufschrift: »Gemischte Notizen«; enthält u. a. eine Bemerkung über die Reihenfolge der Primzahlen. Ms. in 8°, 384.
18. 1 Heft mit der Aufschrift: »Über gewisse komplexe Wurzelgrößen«. Ms. in 8°, 385.
19. 13 Hefte mit verschiedenen zahlentheoretischen Studien. 1901—1904. Ms. in 8°, 386 a—m.
- Nr. 386 a enthält einen Beweis für die Unmöglichkeit der Gleichung $(bc + 1)^3 + (abc + a + 1)^3 = (abc + a + c)^3$.
- Nr. 386 b und c enthalten Studien über ganze rationale Funktionen.
- Nr. 386 d und i enthalten Studien über eine Rekursion.
- Nr. 386 e—h enthalten Vorstudien zu seiner Abhandlung: »Et par antydninger til en taltheoretisk metode«, Kristiania Videnskaps-selskap 1902, und ferner einen Beweis für die Existenz von transzendenten Zahlen.
- Nr. 386 j hat die Aufschrift: »Annäherungswerte. 1903«.
- Nr. 386 k behandelt die Unmöglichkeit von einigen Relationen zwischen gewissen irrationalen Zahlen.
- Nr. 386 l enthält eine Studie über die Wurzeln von $x'' = 1$.
- Nr. 386 m enthält Studien über die Wurzeln von $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$.
20. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Kettenbrüche«; behandeln die Kettenbruchentwicklung der Wurzeln von $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ und $x^3 - x - 1 = 0$ etc. 1904—1905. Ms. in 8°, 387 a—c.
21. Über die Gleichung $a^p - b^q = c$. 2 Hefte. 1906. Ms. in 8°, 388 a, b.
22. Über die Kettenbruchentwicklung der Wurzeln von $x^3 - 3x + 1 = 0$. 1 Heft. 1907. Ms. in 8°, 389.
23. 6 Hefte mit der Aufschrift: »Über $\sqrt[3]{n}$ «. 1906—1907. Ms. in 8°, 390 a—f.
24. 1 Heft mit Bemerkungen zu dem Kriterium von Minkowski für irrationale Zahlen n^{ten} Grades. Ms. in 8°, 391.

25. Über den Fermatschen und Eulerschen Satz. 1 Heft. 1907. Ms. in 8°, 392.
26. Über gewisse lineare Gleichungen. 1 Heft. 1907. Ms. in 8°, 393.
27. Über die unbestimmte Gleichung $F(x, y) = k$. 1 Heft. November 1907. Ms. in 8°, 394.
28. Über die unbestimmte Gleichung $F(x, y) = k$. 3 Hefte. Dezember 1907. Ms. in 8°, 395 a—c.
29. Rationale Annäherungswerte für die reellen Wurzeln von $q^3 - aq - b = 0$ und $F(x) = 0$. 3 Hefte. Januar 1908. Ms. in 8°, 396 a—c.
30. Studien zu seiner Abhandlung: »Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen«, Journal f. Mathematik, Bd. 135. 5 Hefte 1908—1909. Ms. in 8°, 397 a—e.
31. Über die Entwicklung in einen Kettenbruch von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$ und von ähnlichen Ausdrücken. 3 Hefte. 1911. Ms. in 8°, 398 a—c.
32. 1 Heft mit der Aufschrift: »Momente zu einer Verallgemeinerung von meinem Haupttheorem in Crelles Journal, Bd. 135«. 1910. Ms. in 8°, 399.
33. 2 Hefte mit der Aufschrift: Bemerkungen zu meiner Abhandlung: »Über einen Zusammenhang zwischen den Gleichungen $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$ und $Px + Qy + Rz = 0$ «. 1913. Ms. in 8°, 400 a, b.
34. 1 Heft mit der Aufschrift: »Über eine zahlentheoretische Idee«. Auf deutsch geschrieben. 1914. Ms. in 8°, 401.
35. 1 Heft mit der Aufschrift: »Das Fermatsche Problem und Annäherungswerte«. 1917. Ms. in 8°, 402.
36. 1 Heft mit der Aufschrift: »Berechnung aller Lösungen gewisser Gleichungen von der Form $(k + 1)p^r - kq^r = f$ «. Auf deutsch geschrieben. 1917. Ms. in 8°, 403.
37. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Formen der Zahlen gewisser Gleichungen«. Auf deutsch geschrieben. Ms. in 8°, 404 a—c.
38. 1 Heft mit der Aufschrift: »Kleine Zahlen, die durch die Zahlen der Fermatschen Gleichung definiert sind«. Auf deutsch geschrieben. 1919. Ms. in 8°, 405.
39. 17 Hefte mit der Aufschrift: »Über das Fermatsche Problem«. 1014 zusammenhängende Seiten. 1892—1893. Ms. in 8°, 406 a—q.
40. 28 Hefte mit verschiedenen Studien über das Fermatsche Problem. 1889—1916. Ms. in 8°, 407 a—ö.
41. 5 Hefte, die das Fermatsche Problem und die Irrationalität von e^n und π^n behandeln. 1900. Ms. in 8°, 408 a—e.
42. 4 Hefte mit Abschriften von Abhandlungen über die Transzendenz von e und π . Ms. in 8°, 409 a—d.
43. 1 Heft mit Beweis für die Transzendenz von e . 1900. Ms. in 8°, 410.
44. 1 Heft mit Beweis für die Irrationalität von π^n . 1903. Ms. in 8°, 411.

45. 7 Hefte mit der Aufschrift: »Über die Entwicklung von Funktionen in Kettenbrüchen«. Beweise für die Irrationalität von e^x und π^2 . 1894—1900. Ms. in 8°, 412 a—g.
46. 1 Protokoll mit verschiedenen Studien zu seinem Haupttheorem in Journ. f. Math., Bd. 135. 1909. Ms. in 4°, 1211.
47. 1 Paket mit einem Manuskript mit Studien über die Kettenbruchentwicklung von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$. Ca. 1902. Ms. in Folio, 818.
48. 1 Paket mit einem Manuskript in Folio. Studien über das Fermatsche Problem. 1914—1915. Ms. in Folio, 819 a, b.
49. 1 Paket mit einem Manuskript in Folio. Studien über das Fermatsche Problem. 1918. Ms. in Folio, 820.
50. 1 Paket mit einem Manuskript in Folio. Studien über das Fermatsche Problem. 1919. Ms. in Folio, 821.
51. 1 Paket mit einem Manuskript in Folio mit der Aufschrift: »Studien zum Fermatschen Problem«. Ca. 400 Seiten. 1921—1922. Ms. in Folio, 822.
52. 1 Paket mit einer französischen Übersetzung von Professor Carl Störmer der Thueschen Abhandlung in Journ. f. Math., Bd. 135. 1908. Ms. in Folio, 823.

b) Mechanik.

1. 27 Hefte mit der Aufschrift: »Baustatik« (ca. 1900?). Eine genau geführte Darstellung der Statik (495 Seiten). Ms. in 8°, 413 a—x.
2. 6 Hefte mit der Aufschrift: »Mechanische Wärmetheorie« (ca. 1897?). Eine genau geführte Darstellung (136 Seiten). Ms. in 8°, 414 a—f.
3. 25 Hefte mit der Aufschrift: »Aufgaben der Mechanik«, 1895—1898. Eine Darstellung von verschiedenen Problemen der Mechanik von ziemlich genereller Art. Ms. in 8°, 415 a—y.
4. 10 Hefte mit der Aufschrift: »Allgemeine Theorie der Fachwerke« (ca. 1900?). Eine genau geführte Darstellung der Theorie. Ms. in 8°, 416 a—j.
5. 15 Hefte mit der Aufschrift: »Über Stangensysteme«. 1896—1905. Die letzten 9 dieser Hefte (1901—1905) geben eine zusammenhängende Darstellung in 442 Seiten. Ms. in 8°, 417 a—o.
6. 8 Hefte mit der Aufschrift: »Mechanik«. Vorlesungen an der Universität gehalten. (Ca. 1905.) Ms. in 8°, 418 a—h.
7. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Mechanik«, I und II, 1895, enthalten eine mathematische Einleitung nebst einem Anfange der »Pfeil-Theorie«. Ms. in 8°, 419 a, b.
8. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Über Pfeil-Geraden«, wahrscheinlich sein erster Versuch einer zusammenhängenden Darstellung der »Pfeil-Theorie«. Ms. in 8°, 420 a—c.

9. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Mechanik«, abgeschlossen 1895 (241 Seiten). Fängt mit einer philosophischen Einleitung an, später rationale Mechanik. Ms. in 8^o, 421 a, b.
10. 1 Heft mit der Aufschrift: »Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten«. Manuskript der bekannten Abhandlung mit demselben Titel. Ms. in 8^o, 422.
11. 9 Hefte mit der Aufschrift: »Elementar-Mechanik« (194 Seiten) geben eine Darstellung der »Pfeil-Theorie«. Die Darstellung wird in § 12 (Arbeit) abgebrochen, wo der Anfang des Prinzipes der virtuellen Verschiebungen behandelt ist. Ms. in 8^o, 423 a—i.
12. 5 Hefte mit der Aufschrift: »Aufgaben zum Examen bei der technischen Hochschule«. 1914—1920. Ms. in 8^o, 424 a—e.
13. 33 Hefte von verschiedenem Inhalt (aus der Mechanik) mit nachfolgenden Aufschriften. Ms. in 8^o, 425—457.
 - Nr. 425. Elektrizitätsinstrumente (aus der Schulzeit).
 - Nr. 426. Praktische Erfindungen (1893), als 28 Aufgaben geformt.
 - Nr. 427. Rechenmaschinen.
 - Nr. 428. Mechanik. 1894.
 - Nr. 429. Entwurf einer Entwicklung von verschiedenen mechanischen Begriffen und Theorien.
 - Nr. 430. Mechanische Studien.
 - Nr. 431. Mechanik. 1895.
 - Nr. 432. Mechanische Theoreme.
 - Nr. 433. Geschwindigkeit und Acceleration.
 - Nr. 434. — — — (Über Bewegung der Flüssigkeiten in Röhren).
 - Nr. 435. Aufgaben in Maschinenlehre.
 - Nr. 436. Mechanik. Zylindergewölbe.
 - Nr. 437. Trägheitsmoment und Zentrifugalmoment (7 Seiten).
 - Nr. 438. — — — (»Pfeil-Theorie« bei geodätischen Kurven).
 - Nr. 439. — — — (Elastizitätstheorie).
 - Nr. 440. — — — (Zahlentheorie und »Pfeil-Theorie«).
 - Nr. 441. Ein Apparat (statisch selbstwirkend) zur Bewahrung der Temperatur eines Körpers. 1912.
 - Nr. 442. Vermischte Untersuchungen. (Aus der Wärmetheorie.)
 - Nr. 443. Dämpfe (8 Seiten).
 - Nr. 444. Mechanik (33 Seiten).
 - Nr. 445. Über einige mathematische Instrumente.
 - Nr. 446. — — — (Symmetriebetrachtungen etc.).
 - Nr. 447. — — — (Elastizitätstheorie).
 - Nr. 448. — — — (Elastizitätstheorie).
 - Nr. 449. — — — (Wärmetheorie).
 - Nr. 450. — — — (Bewegung, 4 Seiten).
 - Nr. 451. Verschiedene mechanische Bemerkungen.
 - Nr. 452. Fortsetzung der Festigkeitslehre.

- Nr. 453. Über eine pseudomechanische Methode in der Geometrie.
 Nr. 454. Bemerkungen über die Bewegungsgleichungen von Lagrange.
 Nr. 455. — — — (Pewungslehre).
 Nr. 456. Kinematographische und stereoskopische Apparate. 1912.
 Nr. 457. Apparate für Automobile und ähnliche Maschinen zur Aufhebung von Schwierigkeiten bei wechselnden Belastungen.

14. 1 Manuskriptpaket (in Folio) enthaltend:

- Ein Manuskript mit der Aufschrift: »Elemente der rationalen Mechanik zum Gebrauch an der Universität und der Kriegsschule«. Die Darstellung wird bei dem Theorem von Coriolis abgeschlossen. Die Paginierung ist nicht fortlaufend und die Darstellung nicht ohne Abbrechungen. (113 Seiten.) Ms. in Folio, 824.
 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (7 + 4 Seiten). Unvollständig. Ms. in Folio, 825.
 Dynamik (115 Seiten). Vorlesungen über Mechanik (erster Abteilung) gehalten in der Zeit um 1916. Ms. in Folio, 826.
 Spezielle Bemerkungen zur Elastizitätstheorie (80 Seiten). Ms. in Folio, 827.
 Verschiedene Entwürfe und Examensaufgaben in Mechanik. (Nicht fortlaufende Paginierung.) Ms. in Folio, 828.

c) Geometrie.

1. 1 Heft mit der Aufschrift »Mathematik und Physik 1880—1882«, geometrische Notate enthaltend, u. a. über Netzfiguren. Ms. in 8°, 458.
2. 1 Heft mit der Aufschrift: »Mathematische Untersuchungen« (wahrscheinlich aus Tönsberg 1882), geometrische Notate enthaltend, u. a. über die Summe der Winkel eines Dreieckes. Ms. in 8°, 459.
3. 1 Heft mit der Aufschrift: »Naturwissenschaft und Mathematik«, verschiedene Notate enthaltend, zum größten Teile von geometrischem Charakter; mit einem beigelegten Manuskripte: Beweis dafür, daß die Summe der Winkel eines Dreieckes $\leq 2R$ ist. (Wahrscheinlich aus Tönsberg 1883.) Ms. in 8°, 460.
4. 1 Heft mit der Aufschrift: »Geometrische Notate und Aufgaben«. Ms. in 8°, 461.
5. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Über einige Theoreme aus der Situationsgeometrie«. (Wahrscheinlich aus Tönsberg 1883.) Ms. in 8°, 462 a—c.
6. 1 Heft mit der Aufschrift: »Eine analytische Zylindergeometrie« (1883). Ms. in 8°, 463.
7. 5 Hefte, die »absolute Geometrie« behandeln (1883—1885). Ms. in 8°, 464 a—e.

8. 1 Heft mit der Aufschrift: »Ein Fundamentalsatz der Elementargeometrie«. Ms. in 8°, 465.
9. 1 Heft mit der Aufschrift: »Über die negativen Größen der Geometrie«. Ms. in 8°, 466.
10. 1 Heft mit der Aufschrift: »Symbolische Geometrie«. 1886. Ms. in 8°, 467.
11. 7 Hefte mit der Aufschrift: »Über ein eigentümliches Feld auf dem Gebiete der Geometrie«. 1886. (Der Anfang fehlt.) Ms. in 8°, 468 a—g.
12. 1 Heft mit der Aufschrift: »Über die Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal«. (Entwurf eines Vortrages?) Ms. in 8°, 469.
13. 7 Hefte mit der Aufschrift: »Einige geometrische Phänomene im Gebiete der Zahlen«. 1890—1892. Ms. in 8°, 470 a—g.
14. 3 Hefte mit geometrischen Notaten (wahrscheinlich 1891 in Berlin geschrieben). Das erste Heft behandelt auch Differentialgleichungen. Ms. in 8°, 471 a—c.
15. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Elementargeometrische Studien«. 1898. Ms. in 8°, 472 a, b.

d) Logische Probleme.

1. 12 Hefte, die »das allgemeinste Problem« behandeln. 1894—1896. Das letzte Heft enthält einige Bemerkungen aus den Jahren 1901 und 1904. Ms. in 8°, 473 a—l.
2. 26 Hefte, die »Verzweigungsprobleme und Zeichenreihen« behandeln. 1904—1907. Ms. in 8°, 474 a—z.
3. 13 Hefte, die »Verzweigungsprobleme und Zeichenreihen« behandeln. 1910—1915. Ms. in 8°, 475 a—m.

e) Taits Problem.

1. 12 Hefte aus den Jahren 1916—1918. Ms. in 8°, 476 a—l.

f) Versicherungsmathematik.

1. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Lebensversicherung«. Nach Vorlesungen von Professor Alf Guldberg. Ms. in 8°, 477 a, b.
2. 29 Hefte mit Lebensversicherungstabellen. Ms. in 8°, 478 a—ö.

g) Algebra, Infinitesimalrechnung etc.

1. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Mathematische Theoreme«. Abschriften von Lehrbüchern und Abhandlungen. Ms. in 8°, 479 a—c
2. 1 Heft mit Studien über Iteration, über gewisse Maximums- und Minimums-Probleme und über ein astronomisches Problem. Ms. in 8°, 480.

3. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Funktionenlehre«. Wahrscheinlich Referat von Vorlesungen. Ms. in 8°, 481 a—c.
4. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Die Algebra als die Lehre von den Kombinationen der Grundbegriffe zu neuen Begriffen«. 1886. Ms. in 8°, 482 a, b.
5. 1 Heft mit der Aufschrift: »Mathematische Spekulationen«. 1888. Ms. in 8°, 483.
6. 1 Heft mit Studien über Variationsrechnung. 1888. Ms. in 8°, 484.
7. 1 Heft mit Studien über Stangensysteme, über die Umkehrung einer Reihe und über das Fermatsche Problem. 1891 und 1896. Ms. in 8°, 485.
8. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Über die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung«. 1891. Ms. in 8°, 486 a, b.
9. 5 Hefte mit der Aufschrift: »Über die Lösung von Gleichungen, die einen Zusammenhang zwischen Funktionsfunktionen ausdrücken«. In dem letzten Hefte ist angefangen: »Eine zahlentheoretische Untersuchung«. Ms. in 8°, 487 a—e.
10. 5 Hefte mit Bemerkungen zur Variationsrechnung; die zwei letzten enthalten Entwürfe zu zwei Vorträgen. Ms. in 8°, 488 a—e.
11. 1 Heft mit der Aufschrift: »Berührungstransformationen«. Ms. in 8°, 489.
12. 1 Heft mit Notizen über Berührungstransformationen. Ms. in 8°, 490.
13. 1 Heft mit der Aufschrift: »Über die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2ke^u$ «. Ms. in 8°, 491.
14. 1 Heft mit Abschriften von Sätzen aus der Infinitesimalrechnung. Ms. in 8°, 492.
15. 1 Heft mit Studien über Maximums- und Minimums-Aufgaben. Ms. in 8°, 493.
16. 1 Heft mit Studien über gewisse Differentialgleichungen. Ms. in 8°, 494.
17. 1 Heft mit Abschriften von einem geometrischen und drei zahlentheoretischen Theoremen. Ms. in 8°, 495.
18. 1 Heft mit Abschrift von einer Arbeit von H. Poincaré über Fuchs'sche Gruppen. Ms. in 8°, 496.
19. 1 Heft mit Abschriften von Sätzen aus Journal f. Mathematik, Bd. 24; ferner mit zahlentheoretischen Notizen über die Irrationalität von $\sin 1$, e , e^2 etc. Ms. in 8°, 497.
20. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Die Algebra der geometrischen Längen«. 1893. Ms. in 8°, 498 a, b.
21. 2 Hefte mit Studien über einige Aufgaben auf dem Schachbrett. Ms. in 8°, 499 a, b.
22. 1 Heft mit Studien über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verzweigungsprobleme (»Bäume«) und Mechanik. 1904. Ms. in 8°, 500.

23. 1 Heft mit Studien über algebraische Funktionen. 1911. Ms. in 8°, 501.
24. 1 Heft mit Beweis für das Fundamentaltheorem der Algebra, 1915, und mit Studien über das Fermatsche Problem, 1917. Ms. in 8°, 502.
25. 1 Heft mit der Aufschrift: »Zoologie«. Ms. in 8°, 503.
26. 2 Hefte mit astronomischem Inhalt. Ms. in 8°, 504 a, b.
27. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Geologie«. Ms. in 8°, 505 a, b.
28. 1 Heft mit Studien über ein Zusammenlegungsspiel. Ms. in 8°, 506.
29. 1 Heft mit Verzeichnis seiner Büchersammlung. Ms. in 8°, 507.
30. 1 Heft mit Examensaufgaben, die an der technischen Schule in Drontheim gegeben sind. Ms. in 8°, 508.
31. 1 Heft mit Korrespondenz, die ein Professorat an der technischen Hochschule in Drontheim betrifft. Ms. in 8°, 509.
32. 2 Hefte mit Notaten, die Vorlesungen über Mechanik und Maschinenlehre betreffen, welche Thue 1903—1904 an der Universität in Kristiania gehalten hat; enthalten auch Notate über Examensaufgaben in Mechanik. Ms. in 8°, 510 a, b.
33. 13 Hefte mit der Aufschrift: »Mathematisches Tagebuch«. Januar 1892—März 1902. Enthalten Studien von geometrischer, mechanischer, zahlentheoretischer und algebraischer Natur. Ms. in 8°, 511 a—m.
34. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Kleinere Mitteilungen II«; Entwurf eines Manuskriptes zu einer gedruckten Arbeit mit demselben Titel. Ms. in 8°, 512 a, b.
35. 3 Hefte mit der Aufschrift: »Einige Theoreme über die Aufteilung von Körpern in gleiche Teile«. Entwurf eines Manuskriptes zu einer gedruckten Arbeit mit demselben Titel. Ein Heft enthält ferner: »Ein Beweis für die Existenz einer gewissen Klasse transzendenter Zahlen«. Ms. in 8°, 513 a—c.
36. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Kleinere Mitteilungen III«. Entwurf eines Manuskriptes zu einer gedruckten Arbeit mit demselben Titel; enthalten aber auch Resultate, die nicht publiziert sind. Die Mitteilungen sind von zahlentheoretischer Natur. Ms. in 8°, 514 a, b.
37. 2 Hefte mit der Aufschrift: »Kleinere Mitteilungen 1901«. Entwurf zu einem Manuskript; nicht alles ist publiziert. Die Mitteilungen sind von zahlentheoretischer Natur. Ms. in 8°, 515 a, b.
38. 1 Heft mit der Aufschrift: »Kleinere mathematische Mitteilungen, Reihe IV, 1907«. Enthält zwei zahlentheoretische und zwei algebraische Mitteilungen, die nicht publiziert sind. Ms. in 8°, 516.
39. 1 Protokoll mit Arbeitszeichnungen; Drontheim 1895. Ms. in 8°, 517.

III. MANUSKRIPTE UND KORREKTUREN ZU GEDRUCKTEN ARBEITEN.

- a) 40 Hefte, Manuskripte und Korrekturen gedruckter Arbeiten. Ms in 8^o, 518—544.
- b) 3 Pakete, Manuskripte und Korrekturen. Ms. in Folio, 830—832.

IV. KONZEPTE, SCHULHEFTE ETC.

- a) 25 Hefte, hauptsächlich Zahlentheorie. Ms. in 8^o, 545 a—y.
- b) 6 Hefte, hauptsächlich Mechanik. Ms. in 8^o, 546 a—f.
- c) 9 Hefte, hauptsächlich Geometrie. Ms. in 8^o, 547 a—i.
- d) 7 Hefte, verschiedenes (darunter 3 Hefte in 1921 auf Ullevaal geschrieben). Ms. in 8^o, 548 a—g.
- e) 45 Hefte, unzusammenhängende Konzepte. Ms. in 8^o, 549 a—o. A—Q.
- f) 5 Hefte, deutsche und englische Aufsätze. Ms. in 8^o, 550 g—k.
- g) 6 Hefte, norwegische Aufsätze. Ms. in 8^o, 550 a—f.
- h) 24 Hefte von mathematischem und philosophischem Inhalt, aus der Schulzeit. Ms. in 8^o, 551 a—x.
- i) 6 Hefte in kleinerem Format, mathematische Probleme etc. aus der Schulzeit enthaltend. Ms. in 8^o, 552 a—f.
- j) 12 Hefte in kleinerem Format, unzusammenhängende Konzepte. Ms. in 8^o, 553 a—l.
- k) 2 Pakete, unzusammenhängende Konzepte in Folio. Ms. in Folio, 833 a, b.

V. REFERATE VON VORLESUNGEN THUES.

- 18 Hefte. Referate von Vorlesungen über Mechanik, die Thue an der Universität in Kristiania gehalten hat, bei verschiedenen Studenten. Ms. in 8^o, 554—558.

VI. KORRESPONDENZ.

Einige Briefe und Dokumente, Gesuche betreffend. Brevsaml. nr. 13.



Gedruckt 29. November 1923.

ZAHLENTHEORETISCHE NOTIZEN. I—VI

VON
TRYGVE NAGELL

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 13)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 13. april 1923 ved prof. Heegaard.

I.

Ein Beitrag zur Theorie der höheren Kongruenzen.

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganzzahlige Polynome in x sind, kann man nach solchen Primzahlen p fragen, für welche die beiden Kongruenzen

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1)$$

$$g(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

Lösungen haben. Wir werden sehen, daß solche Primzahlen immer existieren und zwar in unendlicher Anzahl. Dies ist trivial, wenn $g(x)$ linear ist; denn dann ist die Kongruenz (2) nur für endlich viele Primzahlen p unmöglich; und die Kongruenz (1) hat bekanntlich Lösungen für unendlich viele Primzahlen p .¹ Ich will nun weiter zeigen, daß dies auch für den Fall richtig ist, in welchem $g(x)$ vom zweiten Grade ist. Es genügt die Behauptung für die Polynome

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \\ g(x) &= x^2 + b_1 x + b_2 \end{aligned}$$

zu beweisen, wo $f(x)$ und $g(x)$ irreduzibel sind, $n \geq 2$. Indem ich den Parameter y einführe, wende ich nun ein Euklidisches Divisionsverfahren auf $f(x+y)$ und $g(x)$ an und erhalte zunächst die Gleichung

$$f(x+y) = g(x) \cdot \psi_0 + f_1(x), \quad (3)$$

wo ψ_0 ein Polynom in x vom Grade $n-2$ ist mit Koeffizienten, die ganzzahlige Polynome in y sind; weiter ist

$$f_1(x) = A_1 x + B_1, \quad (4)$$

wo A_1 und B_1 ganzzahlige Polynome in y sind. Wenn ρ eine Wurzel von $g(x) = 0$ ist, dann ist

¹ Siehe z. B. J. SCHUR, Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 11. Jahrg. (1912), S. 40.

$$f(\varrho + y) = f(y) + \varrho \frac{f'(y)}{1!} + \varrho^2 \frac{f''(y)}{2!} + \dots = A_1 \varrho + B_1,$$

woraus sich A_1 und B_1 bestimmen lassen.

Wird nun weiter $g(x)$ durch $A_1 x + B_1$ geteilt, so ergibt sich:

$$A_1^2 g(x) = (A_1 x + B_1) \psi_1 + A_2. \quad (5)$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \psi_1 &= A_1 x + A_1 b_1 - B_1 \\ A_2 &= A_1^2 b_2 - B_1 (A_1 b_1 - B_1) \end{aligned} \quad (6)$$

oder, wenn ϱ' die zu ϱ konjugierte Zahl bezeichnet,

$$A_2 = (A_1 \varrho + B_1) (A_1 \varrho' + B_1) = f(y + \varrho) \cdot f(y + \varrho'). \quad (7)$$

Wenn A_1 und A_2 eine gemeinsame Nullstelle y_0 haben, dann folgt aus (6), daß auch B_1 diese Nullstelle hat. Hieraus folgt weiter, daß y_0 eine mehrfache Nullstelle von A_2 ist. $f(y + \varrho) = 0$ hat nur verschiedene Wurzeln, da $f(x)$ irreduzibel ist, ebenfalls $f(y + \varrho') = 0$. Wegen (7) muß folglich y_0 eine gemeinsame Wurzel von $f(y + \varrho) = 0$ und $f(y + \varrho') = 0$ sein. Diese Gleichungen können aber, da ϱ von ϱ' verschieden ist, nicht sämtliche Wurzeln gemeinsam haben. Folglich hat A_2 wenigstens eine einfache Nullstelle; d. h. A_2 hat eine Nullstelle, die nicht zugleich eine Nullstelle von A_1 ist. Dann ist A_2 durch ein ganzzahliges Polynom $h(y)$ teilbar, das prim zu A_1 ist. Das Polynom $h(y)$ hat unendlich viele Primteiler¹; nur für die endlich vielen Primzahlen p , die in der von Null verschiedenen Resultante $R(h(y), A_1)$ aufgehen, können $h(y)$ und A_1 für denselben Wert von y durch p teilbar werden. Ist nun p eine Primzahl, die für $y = y_0$ in $h(y)$ aber nicht in A_1 aufgeht, so können wir x aus der Kongruenz

$$A_1 x \equiv -B_1 \pmod{p}$$

bestimmen. Dann folgt aus (5), daß $g(x)$ durch p teilbar ist, und endlich aus (3), daß $f(x + y)$ durch p teilbar ist.

Die Behauptung ist damit bewiesen.

Diese Methode führt wohl für ein beliebiges $g(x)$ zum Ziel. Sie wird aber, schon wenn $g(x)$ vom dritten Grade ist, so kompliziert, daß ich den allgemeinen Fall nicht weiter untersucht habe.

Durch Anwendung von Idealtheorie gelingt es aber, wie ich im folgenden zeigen werde, sehr leicht die Aufgabe vollständig zu lösen.

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper N^{ten} Grades und k ein Unterkörper n^{ten} Grades von K . Es sei ferner \mathfrak{p} ein Primideal ersten Grades

¹ SCHUR, loc. cit.

in K . Dann ist die Relativnorm von \mathfrak{p} bezüglich des Körpers k ein Ideal \mathfrak{j} in k , also

$$N_k(\mathfrak{p}) = \mathfrak{j}.$$

Ist p die rationale Primzahl, die durch \mathfrak{p} teilbar ist, so ist die Norm in k von $N_k(\mathfrak{p})$, bezüglich des rationalen Körpers, gleich p , weil \mathfrak{p} vom ersten Grade ist, also

$$N(\mathfrak{j}) = p.$$

Hieraus folgt, daß \mathfrak{j} ein Primideal ersten Grades in k ist. Wenn die rationale Primzahl p durch ein Primideal ersten Grades in K teilbar ist, so ist sie also auch durch ein Primideal ersten Grades in k teilbar. Es gilt ferner auch: *Ist die rationale Primzahl p gleich dem Produkt von N Primidealen ersten Grades in K , so ist sie gleich dem Produkt von n Primidealen ersten Grades in k .*

Es sei nämlich

$$p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_N,$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_N$ Primideale ersten Grades in K sind, und

$$N_k(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{j}_i,$$

wo also \mathfrak{j}_i , wie soeben bemerkt, ein Primideal ersten Grades in k ist. Dann wird

$$N_k(p) = \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \cdots \mathfrak{j}_N = p^{\frac{N}{n}}.$$

Hieraus folgt aber, daß p nur durch Primideale ersten Grades in k teilbar ist, und folglich gleich einem Produkt von n solchen Primidealen ist.

Wenn K ein Galois'scher Körper ist, dann ist bekanntlich jede (rationale) Primzahl, die durch ein Primideal ersten Grades in K teilbar ist, gleich dem Produkt von Primidealen ersten Grades. Es sei nun $F(x) = 0$ eine irreduzible algebraische Gleichung N^{ten} Grades, die K bestimmt; es sei ferner $f(x) = 0$ eine irreduzible algebraische Gleichung n^{ten} Grades, die k bestimmt. Dann gilt nach dem vorhergehenden:

Hat die Kongruenz

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{8}$$

Lösungen für die Primzahl p , so hat auch die Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{9}$$

Lösungen. Ferner, hat (8) N inkongruente Lösungen, so hat (9) n inkongruente Lösungen.

Es seien nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei irreduzible Polynome in x mit ganzzahligen Koeffizienten; es seien ferner k_1 und k_2 die beiden algebraischen Zahlkörper, die durch $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ bestimmt sind. Es sei endlich K ein Galois'scher Zahlkörper, der sowohl k_1 wie k_2 enthält¹, und $F(x) = 0$ eine irreduzible algebraische Gleichung (mit ganzzahligen Koeffizienten), die K bestimmt. Hat dann die Kongruenz

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (10)$$

Lösungen für die Primzahl p , so haben auch die Kongruenzen

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}, \quad (11)$$

$$g(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (12)$$

Lösungen. Ferner, hat (10) ebenso viele inkongruente Lösungen, wie ihr Grad beträgt, so haben auch (11) und (12) ebenso viele Lösungen, wie ihre respektiven Grade betragen.

Nun hat die Kongruenz (10) Lösungen für unendlich viele Primzahlen p . Folglich gilt

Satz I.

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganzzahlige Polynome in x . Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p , für welche die Kongruenzen

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$g(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

ebenso viele inkongruente Lösungen haben, wie ihre respektiven Grade betragen.

Wählen wir speziell

$$g(x) = \prod_{\varepsilon} (x - \varepsilon),$$

wo ε die $\varphi(n)$ primitiven n^{ten} Einheitswurzeln durchläuft, so gilt bekanntlich für jeden Primteiler p von $g(x)$, entweder $p \equiv 1 \pmod{n}$ oder $n \equiv 0 \pmod{p}$. Folglich gilt

Satz II.

Es sei $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom in x , und n eine positive ganze Zahl. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p von der Form $nt + 1$, für welche die Kongruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

ebenso viele inkongruente Lösungen hat, wie ihr Grad beträgt.

Der Satz I gilt natürlich auch dann, wenn wir statt zwei eine beliebige Anzahl von ganzzahligen Polynomen haben.

¹ Für K bestehen offenbar unendlich viele Möglichkeiten.

II.

Zur Theorie der quadratischen Reste.

GAUSS hat den folgenden Satz bewiesen:¹

Ist p eine Primzahl von der Form $8T + 1$, so gibt es immer unterhalb $2\sqrt{p} + 1$ eine ungerade Primzahl q , von welcher p quadratischer Nichtrest ist.

Nun ist nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right).$$

Es gibt folglich immer eine ungerade Primzahl $q < 2\sqrt{p} + 1$, die quadratischer Nichtrest von p ist, wenn $p \equiv 1 \pmod{8}$ ist. Ich werde hier zeigen, daß dies für jede ungerade Primzahl $p > 3$ gilt.

Es sei zuerst p von der Form $8T + 5$. Dann ist p gleich der Summe von zwei Quadratzahlen, also $p = a^2 + b^2$. Folglich wird

$$a^2 - b^2 \equiv -2b^2 \pmod{p},$$

und also ist

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right) = -1.$$

Folglich hat $a^2 - b^2$ mindestens einen (ungeraden) Primteiler q , der quadratischer Nichtrest von p ist; dann ist aber

$$q \leq a + b < 2\sqrt{p} - 1.$$

Der Satz ist folglich für $p \equiv 5 \pmod{8}$ bewiesen.

Es sei darauf $p = 8T - 1$, und a die ganze Zahl, für welche

$$a^2 < p < (a + 1)^2$$

ist. Ist hier a gerade, so ist die positive Zahl $p - a^2$ von der Form $4t - 1$; sie hat also mindestens einen Primteiler $q \equiv -1 \pmod{4}$. Dann gilt aber

$$q \leq p - a^2 < p - (\sqrt{p} - 1)^2 = 2\sqrt{p} - 1$$

und

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{a^2}{q}\right) = -1.$$

¹ Disquisitiones arithmeticae, art. 129.

Ist a ungerade, so ist die positive Zahl $\frac{1}{2}(p - a^2)$ von der Form $4t - 1$; sie hat also mindestens einen Primteiler $q \equiv -1 \pmod{4}$. Dann gilt aber

$$q \leq \frac{1}{2}(p - a^2) < \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}(\sqrt{p} - 1)^2 = \sqrt{p} + \frac{1}{2}$$

und
$$\left(\frac{q}{p}\right) = - \left(\frac{p}{q}\right) = - \left(\frac{a^2}{q}\right) = -1.$$

Der Satz ist folglich für $p \equiv -1 \pmod{8}$ bewiesen.

Es sei endlich $p = 8T + 3$, und a die ganze Zahl für welche

$$a^2 < p < (a + 1)^2.$$

Ist a gerade, so ist die positive Zahl $\frac{1}{2}[(a + 1)^2 - p]$ von der Form $4t - 1$; sie hat also mindestens einen Primteiler $q \equiv -1 \pmod{4}$. Dann gilt aber

$$q \leq \frac{1}{2}[(a + 1)^2 - p] < \frac{1}{2}[(\sqrt{p} + 1)^2 - p] = \sqrt{p} + \frac{1}{2}$$

und

$$\left(\frac{q}{p}\right) = - \left(\frac{p}{q}\right) = - \left(\frac{a + 1}{q}\right)^2 = -1.$$

Ist a ungerade, so ist die positive Zahl $\frac{1}{2}[(a + 2)^2 - p]$ von der Form $4t - 1$; sie hat also mindestens einen Primteiler $q \equiv -1 \pmod{4}$. Nun folgt aus $p > a^2$ sogar $p \geq a^2 + 2$; folglich gilt

$$q \leq \frac{1}{2}[(a + 2)^2 - p] < \frac{1}{2}[(\sqrt{p - 2} + 2)^2 - p] = 2\sqrt{p - 2} + 1$$

und, wenn $q < p$ ist, was für $p > 3$ immer zutrifft,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = - \left(\frac{p}{q}\right) = - \left(\frac{a + 2}{q}\right)^2 = -1.$$

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz I.

Ist p eine Primzahl > 3 , so gibt es immer unterhalb $2\sqrt{p} + 1$ eine ungerade Primzahl q , die quadratischer Nichtrest von p ist.

* * *

Wir wollen darauf die entsprechende Aufgabe untersuchen, eine möglichst kleine ungerade Primzahl zu bestimmen, die quadratischer Rest von einer gegebenen Primzahl p ist.

Es sei zunächst $p \equiv 1 \pmod{4}$. Wenn c eine beliebige ganze Zahl ist, dann ist offenbar jeder ungerade Primteiler q von $p - c^2$ quadratischer Rest von p ($q \neq p$). Denn es ist

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{c^2}{q}\right) = +1.$$

Nun ist p gleich der Summe von zwei Quadratzahlen:

$$p = a^2 + b^2,$$

wo wir b gerade annehmen können. Für jeden Primteiler q von a gilt dann

$$\left(\frac{q}{p}\right) = +1$$

und

$$q \leq \sqrt{p - b^2} \leq \sqrt{p - 4}.$$

Wenn $a = 1$ ist, dann ist jeder ungerade Primteiler von

$$\frac{1}{2}\sqrt{p-1}$$

quadratischer Rest von p . Ist endlich $p = 1 + 2^m$, so muß m eine Potenz von 2 sein, also $m = 2^n$. Dann ist für $n > 2$ jeder Primteiler der Zahlen

$$\sqrt[p-1]{2^{n-i}} + 1 = 2 + 1, \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

quadratischer Rest von p . Folglich ist bewiesen:

Satz II.

Ist p eine Primzahl von der Form $4T + 1 > 17$, so gibt es immer unterhalb \sqrt{p} eine ungerade Primzahl q , die quadratischer Rest von p ist.

Wenn $p \equiv -1 \pmod{4}$ ist, dann ist jeder ungerade Primteiler q von $\frac{1}{4}(p+1)$ quadratischer Rest von p ; denn es ist

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{-1}{q}\right) = -1.$$

Nun habe ich in einer früheren Arbeit bewiesen:¹ Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Klassenzahl des imaginär-quadratischen Körpers $K(\sqrt{-p})$, wo p eine Primzahl von der Form $8T + 3 \geq 11$ ist, gleich 1 ist, ist, daß es keine (ungerade) Primzahl $q \leq \sqrt{\frac{1}{3}(p + 16)} - 2$ gibt, von welcher $-p$ quadratischer Rest ist, d. h. die quadratischer Rest von p ist. Folglich gilt

Satz III.

Ist p eine Primzahl von der Form $8T + 3$, und ist die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{-p})$ größer als 1, so gibt es immer eine ungerade Primzahl

$$q \leq \sqrt{\frac{1}{3}(p + 16)} - 2,$$

die quadratischer Rest von p ist.

(In den Fällen $p = 11, 19, 43, 67, 163$ ist aber die kleinste Primzahl, die quadratischer Rest von p ist, gleich $\frac{1}{4}(p + 1)$). Wenn p von der Form $2^n - 1$ ist, hat $\frac{1}{4}(p + 1)$ keinen ungeraden Primteiler. Dann ist aber, für $n > 3$, die Zahl $\frac{1}{8}(p + 9) = 2^{n-3} + 1$ ungerade, und jeder Primteiler von dieser Zahl ist quadratischer Rest von p . Wenn p eine Primzahl von der Form $8T - 1 > 7$ ist, so gibt es also immer eine ungerade Primzahl $q \leq \frac{1}{8}(p + 9)$, die quadratischer Rest von p ist.

III.

Eine Eigenschaft gewisser Summen.

Wir wollen zuerst den folgenden Satz beweisen:

Satz I.

Es seien n und m ganze positive Zahlen. Dann ist, von dem Falle, $m = 1, x = 0$ abgesehen, die Summe

$$S = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} + \dots + \frac{1}{m+xn} \quad (1)$$

niemals eine ganze Zahl.

¹ Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. I (1922), S. 140—150.

Beweis: Es genügt offenbar anzunehmen, daß n und m relative Primzahlen sind. Ferner können wir $m > 1$ annehmen, x muß $\geq m$ sein; denn für $x \leq m - 1$ wird

$$S < (x + 1) \frac{1}{m} \leq 1.$$

Es sei zunächst n ungerade. Dann gibt es mindestens eine gerade Zahl unter den Zahlen

$$m, m + n, m + 2n, \dots, m + xn. \quad (2)$$

(Der Fall $x = 0$ ist ausgeschlossen, da $x \geq m \geq 2$ ist.) Es sei nun 2^u die höchste Potenz von 2, die in irgendeiner der Zahlen (2) aufgeht; es sei ferner $m + kn$ die erste Zahl in der Reihe (2), die durch 2^u teilbar ist:

$$m + kn = 2^u(2h + 1).$$

Die nächste Zahl von der Form $m + tn$, die durch 2^u teilbar ist, ist

$$m + (k + 2^u)n = 2^u(2h + n + 1).$$

Da n ungerade ist, so ist die Zahl durch 2^{u+1} teilbar; sie gehört daher nicht zu den Zahlen (2). Es gibt folglich in (1) nur ein einziges Glied, dessen Nenner durch 2^u teilbar ist, nämlich $\frac{1}{m + kn}$. Wird (1) mit

$\frac{1}{2}(m + kn)$ multipliziert, so ergibt sich daher

$$\frac{1}{2}(m + kn) S = \frac{a}{b} + \frac{1}{2},$$

wo b ungerade ist. Hieraus ergibt sich, daß S keine ganze Zahl ist; und der Satz ist für ungerades n bewiesen.

Es sei darauf n gerade; dann ist m ungerade ≥ 3 .

Es ist nun leicht die folgende Ungleichung zu beweisen

$$S < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{xn}{m} \right). \quad (3)$$

Wir haben nämlich

$$\int_y^{y+1} \frac{dy}{m + yn} > \frac{1}{m + (y + 1)n}.$$

Setzen wir hier $y = 0, 1, 2, \dots, x - 1$, so ergibt sich durch Summation

$$\int_0^x \frac{dy}{m + yn} > \frac{1}{m + n} + \frac{1}{m + 2n} + \dots + \frac{1}{m + xn},$$

woraus (3) sofort folgt.

Es sei q ein Primteiler von $m + kn$, wo $0 \leq k \leq x$ ist. Ist keine andere der Zahlen (2) durch q teilbar, so ergibt sich aus (1) durch Multiplikation mit $\frac{1}{q}(m + kn)$

$$\frac{1}{q}(m + kn) S = \frac{a}{b} + \frac{1}{q},$$

wo b durch q nicht teilbar ist. S ist folglich keine ganze Zahl. Wenigstens zwei von den Zahlen (2) müssen also durch q teilbar sein, falls S eine ganze Zahl ist. Wenn $q > x$ ist, ist höchstens eine der Zahlen (2) durch q teilbar; folglich muß $q \leq x$ sein. Wenn q eine beliebige Primzahl $\leq x + 1$ ist, die in n nicht aufgeht, dann gibt es immer eine Zahl unter den Zahlen (2), die durch q teilbar ist; denn, da n prim zu q ist, bilden die Zahlen

$$m, m + n, m + 2n, \dots, m + (q - 1)n.$$

ein vollständiges Restsystem modulo q .

Wir wollen nun annehmen, daß

$$x \geq 3n - 1 \geq 5. \quad (4)$$

Nach dem Satze von TCHEBYCHEFF gibt es dann immer eine Primzahl q , so daß

$$\frac{1}{2}(x + 3) < q \leq x + 1. \quad (5)$$

Dann gibt es eine Zahl in der Reihe (2), die durch q teilbar ist; denn wir haben

$$q > \frac{1}{2}(x + 3) \geq 3\frac{n}{2} + 1 > n. \quad (6)$$

Es sei $m + kn$ die kleinste Zahl in (2), die durch q teilbar ist, also

$$m + kn = qT, \quad (7)$$

wo $k < q$ ist.

Nach dem, was soeben bemerkt wurde, muß, wenn S eine ganze Zahl ist, auch die Zahl $m + (k + q)n$ in der Reihe (2) vorkommen, also

$$m + (k + q)n = q(T + n). \quad (8)$$

Die Zahl $m + (k + 2q)n$ kommt aber in (2) nicht vor, weil wegen (5) $k + 2q \geq 2q > x$ ist. Die Zahlen (7) und (8) sind daher die einzigen Zahlen in der Reihe (2), die durch q teilbar sind. Es ist

$$\frac{1}{m + kn} + \frac{1}{m + (k + q)n} = \frac{2T + n}{qT(T + n)}.$$

Wird (1) mit $T(T + n)$ multipliziert, so ergibt sich also

$$T(T + n)S = \frac{2T + n}{q} + \frac{a}{b},$$

wo b durch q nicht teilbar ist. Wenn S ganz ist, muß also q in $2T + n$ aufgehen, und folglich in $T + \frac{n}{2}$, da n gerade ist. Nun ist aber wegen $x \geq m$, $q > k$ und $q > \frac{1}{2}(x + 3)$:

$$T = \frac{m + kn}{q} < \frac{2x}{x + 3} + n < 2 + n,$$

oder

$$T \leq n + 1,$$

und

$$T + \frac{n}{2} \leq 3\frac{n}{2} + 1.$$

Nach (6) ist aber $q > 3\frac{n}{2} + 1$; q kann folglich in $T + \frac{n}{2}$ nicht aufgehen. Unter der Voraussetzung (4) ist also S keine ganze Zahl.

Es sei nun $x \leq 3n - 2$. Dann ist wegen (3)

$$S < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{3n^2 - 2n}{m} \right). \quad (9)$$

Ist hier $m \geq 5$, so wird

$$S < \frac{1}{5} + \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{3n^2 - 2n}{5} \right) < 1,$$

wenn $n \geq 4$ ist. Denn man sieht leicht, daß die Funktion

$$f(n) = e^{\frac{4n}{5}} - \frac{1}{5}(3n^2 - 2n) - 1$$

für $n \geq 4$ monoton zunimmt; und $f(4)$ ist positiv. Für $m = 5$, $n = 2$ und $x \leq 3n - 2 = 4$ ist S nicht ganz.

Ist in (9) $m = 3$, so wird

$$S < \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \log \left(1 + n^2 - \frac{2}{3}n \right) < 1,$$

wenn $n \geq 6$ ist. Denn man sieht sofort, daß die Funktion

$$f(n) = e^{\frac{2n}{3}} - n^2 + \frac{2}{3}n - 1$$

für $n \geq 6$ monoton zunimmt; und $f(6)$ ist positiv.

Für $m = 3$, $n = 2$ und $x \leq 3n - 2 = 4$ ist S nicht ganz; und auch nicht für $m = 3$, $n = 4$ und $x \leq 3n - 2 = 10$.

Der Satz I ist damit vollständig bewiesen.

Aus der Beweismethode folgt aber ferner sofort:

Satz II.

Es seien a , b und c ganze Zahlen. Dann ist die Summe

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{b+a} + \frac{c}{b+2a} + \dots + \frac{c}{b+xa}$$

nur für endlich viele Werte von x eine ganze Zahl.

Denn wir haben nur $\frac{1}{2}(x+3)$ größer als $|c|$ zu wählen; dann wird nach (5) $q > |c|$.

Es liegt nun nahe die folgende allgemeinere Aufgabe zu stellen: Es seien $f(x)$ und $g(x)$ ganzzahlige Polynome in x . Kann dann die Summe¹

$$\sum_{k=1}^{k=x} \frac{g(k)}{f(k)}$$

für unendlich viele Werte von x eine ganze Zahl sein, wenn $f(x)$ in $g(x)$ nicht aufgeht?

¹ Es wird natürlich angenommen, daß $f(x)$ für keinen positiven ganzzahligen Wert von x verschwindet.

Wenn n der Grad von $f(x)$ und m der Grad von $g(x)$ ist, genügt es natürlich den Fall zu untersuchen, in welchem $m = n - 1$ ist. (Wenn $n \geq m + 2$ ist, konvergiert ja die Summe für $x \rightarrow \infty$.)

Ich werde hier nur den folgenden speziellen Satz beweisen:

Satz III.

Es seien a, b, c und d ganze Zahlen, $a > 0$, $c^2 + d^2 > 0$ und $-ab$ keine Quadratzahl. Dann ist die Summe

$$S = \sum_{k=-x}^{k=x} \frac{ck + d}{ak^2 + b} \quad (10)$$

nur für endlich viele Werte von x eine ganze Zahl.

Beweis: Es sei x_0 die kleinste positive Lösung der Kongruenz

$$ax^2 + b \equiv 0 \pmod{p},$$

wo p eine ungerade Primzahl ist, die in b nicht aufgeht, also $0 < x_0 < \frac{1}{2}p$.

Dann ist die nächste positive Lösung gleich $p - x_0$ und folglich $> \frac{1}{2}p$. Nun folgt aus einem Satze, den ich früher bewiesen habe:¹

Für alle hinreichend große x ist der größte Primteiler P_x des Produktes

$$\prod_{k=1}^{k=x} (ak^2 + b)$$

größer als $2x$.

Wenn x groß genug ist, ist folglich nur eine der Zahlen $ak^2 + b$, $1 \leq k \leq x$, durch P_x teilbar. Es sei diese Zahl $ax_0^2 + b$. Dann ist $cx_0 + d$ nur dann durch P_x teilbar, wenn $ad^2 + bc^2$ es ist; dies ist aber nicht der Fall, wenn wir $2x$ größer als $|ad^2 + bc^2|$ wählen. Wird dann (10) mit $\frac{1}{P_x}(ax_0^2 + b)$ multipliziert, so ergibt sich

$$\frac{1}{P_x}(ax_0^2 + b)S = \frac{cx_0 + d}{P_x} + \frac{T}{N},$$

wo N durch P_x unteilbar ist. S kann folglich keine ganze Zahl sein; und der Satz III ist bewiesen.

¹ Siehe meine Arbeit: Zur Arithmetik der Polynome, § 1, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. I (1922), S. 179.

IV.

Einige Sätze über kubische und biquadratische Reste.

P. BACHMANN beweist in seinem Lehrbuche: „Die Lehre von der Kreistheilung“, (Leipzig 1872), Seite 143, den folgenden Satz; In der eindeutigen Darstellung von jeder Primzahl $p = 6T + 1$ in der Form $4p = a^2 + 27b^2$ ist die Zahl a kubischer Rest von p .

Ich werde hier den folgenden allgemeineren Satz beweisen:

Satz I.

In der eindeutigen Darstellung von jeder Primzahl $p = 6T + 1$ in der Form $4p = a^2 + 27b^2$ ist jeder Primteiler der Zahlen a und b kubischer Rest von p .

Beweis: Wir benutzen die elementare Theorie des Körpers $K\sqrt{-3}$; vgl. das oben zitierte Lehrbuch von BACHMANN.

Es sei $\pi = \frac{1}{2}(a + 3b\sqrt{-3})$ ein primärer Primteiler von p .

Es sei ferner q ein Primteiler von a oder b . Um den Satz zu beweisen haben wir zu zeigen, daß

$$q^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, oder, was offenbar dasselbe ist, daß

$$q^{\frac{1}{3}(p-1)} \equiv 1 \pmod{\pi}$$

ist. Indem wir das Symbol von EISENSTEIN für den kubischen Charakter einführen, muß also

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = 1$$

sein. Wir müssen vier Fälle unterscheiden.

1) Es ist $q \equiv -1 \pmod{6}$. Dann ist nach dem kubischen Reziprozitätsgesetz¹

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{q} \right] + \left[\frac{\frac{1}{2}(a + 3b\sqrt{-3})}{q} \right].$$

¹ Siehe BACHMANN loc. cit., S. 193–199.

Ist a durch q teilbar, so wird folglich

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = \left[\frac{12b\sqrt{-3}}{q} \right] = \left[\frac{-4b(\sqrt{-3})^3}{q} \right] = \left[\frac{-4b}{q} \right] = 1.$$

Ist b durch q teilbar, so wird

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = \left[\frac{4a}{q} \right] = 1.$$

Denn für rationales m und $q \equiv - \pmod{3}$ ist

$$\left[\frac{m}{q} \right] = m^{\frac{1}{3}(q^2-1)} \equiv \left(m^{\frac{q+1}{3}} \right)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

2) Es ist $q = 2$. Dann ist nach dem kubischen Reziprozitätsgesetz

$$\left[\frac{2}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{2} \right] = \left[\frac{\frac{1}{2}(a + 3b\sqrt{-3})}{2} \right] = \left[\frac{\frac{1}{2}(a + 3b)}{2} \right] = 1.$$

a und b sind beide gerade; $\frac{1}{2}(a + 3b)$ ist aber ungerade, da p es ist.

3) Es ist $q \equiv 1 \pmod{6}$, und $q = \omega \cdot \omega'$ die Zerlegung von q in primäre Primzahlen. Dann ist nach dem kubischen Reziprozitätsgesetz

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = \left[\frac{\omega}{\pi} \right] \cdot \left[\frac{\omega'}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\omega} \right] \cdot \left[\frac{\pi}{\omega'} \right].$$

Ist a durch q teilbar, so wird folglich

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = \left[\frac{12b\sqrt{-3}}{\omega} \right] \left[\frac{12b\sqrt{-3}}{\omega'} \right] = \left[\frac{12b\sqrt{-3}}{\omega} \right] \left[\frac{12b\sqrt{-3}}{\omega} \right]^2 = 1.$$

Ist b durch q teilbar, so wird folglich

$$\left[\frac{q}{\pi} \right] = \left[\frac{4a}{\omega} \right] \left[\frac{4a}{\omega'} \right] = \left[\frac{4a}{\omega} \right] \left[\frac{4a}{\omega} \right]^2 = 1.$$

Denn für rationales m ist natürlich $\left[\frac{m}{\omega'} \right] = \left[\frac{m}{\omega} \right]^2$.

4) Es ist $q = 3$. Dann ist b durch 3 teilbar und also¹

$$\left[\frac{3}{\pi} \right] = q^{2b} = 1.$$

Der Satz I ist folglich bewiesen.

¹ Siehe BACHMANN, loc. cit. 223.

Für biquadratische Reste haben wir das ähnliche Resultat:

Satz II.

In der eindeutigen Darstellung von jeder Primzahl $p = 4T + 1$ in der Form $p = a^2 + 4b^2$ ist jeder Primteiler $q = 8t + 1$ von a und jeder Primteiler $q = 4t + 1$ von b biquadratischer Rest von p . Ferner, wenn $q = 8t - 1$ ein Primteiler von a ist, oder wenn $q = 4t - 1$ ein Primteiler von b ist, dann ist $-q$ biquadratischer Rest von p .

Beweis: Um den Satz zu beweisen benutzen wir die elementare Theorie des Körpers $K(\sqrt{-1})$ und das biquadratische Reziprozitätsgesetz¹. Es sei nun $\pi = a + 2bi$ ein primärer Primteiler von p . Es sei ferner q ein Primteiler von a oder b . Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen haben wir zu zeigen, daß

$$q^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv 1 \pmod{\pi}$$

ist. Indem wir das Symbol von JACOBI für den biquadratischen Charakter einführen, muß also

$$\left(\left(\frac{q}{\pi}\right)\right) = +1.$$

1) Es sei q ein Primteiler von a und $q \equiv 1 \pmod{8}$; es sei ferner $q = \omega \cdot \omega'$ die Zerlegung von q in primäre Primzahlen. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right) \left(\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)\right) = (-1)^{\frac{1}{16}(p-1)(q-1)} \left(\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right) \cdot (-1)^{\frac{1}{16}(p-1)(q-1)} \left(\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)\right),$$

und folglich, da q in a aufgeht

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{q}{\pi}\right)\right) &= \left(\left(\frac{2bi}{\omega}\right)\right) \left(\left(\frac{2bi}{\omega'}\right)\right) = \left(\left(\frac{2bi}{\omega}\right)\right) \left(\left(\frac{2bi}{\omega}\right)\right)^3 \cdot \left(\left(\frac{-1}{\omega'}\right)\right) = \\ &= \left(\left(\frac{-1}{\omega'}\right)\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} = +1. \end{aligned}$$

2) Es sei q ein Primteiler von b und $q \equiv 1 \pmod{4}$; es sei ferner $q = \omega \cdot \omega'$ die Zerlegung von q in primäre Primzahlen. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right) \left(\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right) \left(\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)\right),$$

¹ Siehe BACHMANN, loc. cit. S. 150–185.

und folglich, da q in b aufgeht

$$\left(\left(\frac{q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a}{\omega}\right)\right) \left(\left(\frac{a}{\omega}\right)\right) = \left(\left(\frac{a}{\omega}\right)\right) \left(\left(\frac{a}{\omega}\right)\right)^3 = -1.$$

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen haben wir zu zeigen, daß

$$\left(\left(\frac{-q}{\pi}\right)\right) = +1.$$

3) Es sei q ein Primteiler von a und $q \equiv -1 \pmod{8}$. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{-q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) = \left(\left(\frac{2bi}{q}\right)\right) = \left(\left(\frac{i}{q}\right)\right) = (i-1)^{\frac{q^2-1}{8}} = -1.$$

Denn für rationales m und $q \equiv -1 \pmod{4}$ ist

$$\left(\left(\frac{m}{q}\right)\right) \equiv m^{\frac{1}{4}(q^2-1)} \equiv \left(m^{\frac{q+1}{4}}\right)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

4) Es sei q ein Primteiler von b und $q \equiv -1 \pmod{4}$. Dann ist nach dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\left(\frac{-q}{\pi}\right)\right) = \left(\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) = \left(\left(\frac{a}{q}\right)\right) = +1.$$

Der Satz II ist damit bewiesen.

V.

Über einige unmöglichen Gleichungen von der Form

$$x^4 - y^4 = Az^2.$$

In einer früheren Arbeit habe ich den folgenden Satz bewiesen:¹

Die unbestimmte Gleichung

$$x^4 - y^4 = pz^2,$$

wo p eine Primzahl von der Form $8t + 3$ ist, ist nur möglich in ganzen Zahlen x, y, z , wenn $z = 0$ ist.

¹ Résultats nouveaux de l'analyse indéterminée, § 1, Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I, Nr. 8, Kristiania 1922.

Zu diesem Resultat füge ich hier das folgende:

Satz I.

Die unbestimmte Gleichung

$$x^4 - y^4 = 2pz^2, \quad (1)$$

wo p eine Primzahl von der Form $8t + 5$ ist, ist nur möglich in ganzen Zahlen x, y, z , wenn $z = 0$ ist.

Beweis: Wir können die Zahlen x, y, z positiv und paarweise teilerfremd annehmen: z muß offenbar gerade sein. Wenn $x^2 + y^2$ durch p teilbar ist, folgt aus (1) das System

$$x \pm y = 2a^2, \quad x \mp y = 2b^2, \quad x^2 + y^2 = 2pc^2,$$

wo a, b, c paarweise teilerfremde Zahlen sind. Folglich wird durch Elimination von x und y :

$$a^4 + b^4 = pc^2.$$

Da c ungerade ist, und a oder b gerade ist, so folgt hieraus

$$pc^2 \equiv p \equiv 1 \pmod{8},$$

während $p \equiv 5 \pmod{8}$ ist.

Wenn $x^2 + y^2$ durch p nicht teilbar ist, folgt aus (1) das System

$$x \pm y = 2pa^2, \quad x \mp y = 2b^2, \quad x^2 + y^2 = 2c^2, \quad (2)$$

wo a, b, c paarweise teilerfremde Zahlen sind, $z = 2abc$. c ist ungerade; entweder a oder b ist gerade. Durch Elimination von x und y ergibt sich aus (2)

$$p^2a^4 + b^4 = c^2. \quad (3)$$

Wenn b gerade ist, folgt aus dieser Gleichung

$$c \pm pa^2 = 8e^4, \quad c \mp pa^2 = 2f^4,$$

oder
$$\pm pa^2 = 4e^4 - f^4 = (2e^2 + f^2)(2e^2 - f^2).$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich; denn weder $2e^2 + f^2$ noch $2e^2 - f^2$ ist durch p teilbar, weil $p \equiv 5 \pmod{8}$ ist.

Wenn a gerade ist, folgt aus (3)

$$c \pm pa^2 = e^4, \quad c \mp pa^2 = f^4,$$

oder
$$\pm 2pa^2 = e^4 - f^4. \quad (4)$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie Gleichung (1). Es ist aber $z = 2abc$, also $z \geq 2a$. Dies ist aber unmöglich; denn wäre die Gleichung (1) möglich, so würde es eine kleinste (positive) Lösung z geben. Unser Satz ist somit bewiesen.

Wir wollen noch den folgenden Satz beweisen:

Satz II.

Es seien p und q zwei ungerade Primzahlen, sodaf p quadratischer Nichtrest von q ist. Dann ist in den folgenden zwei Fällen die unbestimmte Gleichung

$$x^4 - y^4 = pqz^2 \quad (5)$$

nur für $z = 0$ möglich in ganzen Zahlen x, y, z : 1) wenn $q \equiv 1$ und $p \equiv 3 \pmod{8}$ ist; 2) wenn $q \equiv 5$ und $p \equiv 7 \pmod{8}$ ist.

Beweis: Wir können x, y, z positiv und paarweise teilerfremd annehmen. Wäre z ungerade, so würde sich aus der Gleichung (5) ergeben

$$pqz^2 \equiv pq \equiv \pm 1 \pmod{8},$$

während $pq \equiv 3 \pmod{8}$ ist. Folglich ist z gerade.

Aus der Gleichung (5) ergibt sich dann das System

$$x \pm y = 2sa^2, \quad x \mp y = 4tb^2, \quad x^2 + y^2 = 2rc^2, \quad (6)$$

wo a, b, c paarweise teilerfremde Zahlen sind; a und c sind ungerade; ferner ist $rst = pq$ und $z = 4abc$. Durch Elimination von x und y ergibt sich aus (6)

$$s^2a^4 + 4t^2b^4 = rc^2. \quad (7)$$

Wir haben nun eine Reihe von Fällen zu unterscheiden.

1) Es sei $s = p, t = q$ und $r = 1$. Dann läßt sich die Gleichung (7) so schreiben

$$4q^2b^4 = c^2 - p^2a^4 = (c + pa^2)(c - pa^2).$$

Hieraus folgt

$$c \pm pa^2 = 2q^2e^4, \quad c \mp pa^2 = 2d^4,$$

oder

$$\pm pa^2 = q^2e^4 - d^4,$$

was unmöglich ist, da $\left(\frac{\pm p}{q}\right) = -1$ ist.

2) Es sei $s = pq, t = r = 1$. Dann läßt sich die Gleichung (7) so schreiben

$$4b^4 = c^2 - p^2q^2a^4 = (c + pqa^2)(c - pqa^2).$$

Hieraus folgt

$$c \pm pqa^2 = 2e^4, \quad c \mp pqa^2 = 2d^4,$$

oder

$$\pm pqa^2 = e^4 - d^4.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie (5); da aber a ungerade ist, so ist sie unmöglich.

3) Es sei $s = q$, $t = p$ und $r = 1$. Dann läßt sich die Gleichung (7) so schreiben

$$q^2a^4 - c^2 - 4p^2b^4 = (c + 2pb^2)(c - 2pb^2).$$

Hieraus folgt

$$c \pm 2pb^2 = q^2e^4, \quad c \mp 2pb^2 = d^4,$$

oder

$$\pm 4pb^2 = q^2e^4 - d^4,$$

was unmöglich ist, da $\left(\frac{\pm p}{q}\right) = -1$ ist.

4) Es sei $s = 1$, $t = p$ und $r = q$. Die Gleichung (7) wird dann

$$a^4 + 4p^2b^4 = qc^2,$$

was unmöglich ist, da $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = -1$ ist.

5) Es sei $s = p$, $t = 1$ und $r = q$. Die Gleichung (7) wird dann

$$p^2a^4 + 4b^4 = qc^2,$$

was unmöglich ist, da $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = -1$ ist.

Die Möglichkeiten $r = p$ oder $r = pq$ sind natürlich ausgeschlossen, da $p \equiv -1 \pmod{4}$ ist und daher in $x^2 + y^2$ nicht aufgeht.

6) Es sei $s = 1$, $t = pq$ und $r = 1$. Dann läßt sich die Gleichung (7) so schreiben

$$a^4 = c^2 - 4p^2q^2b^4 = (c + 2pqb^2)(c - 2pqb^2).$$

Hieraus folgt

$$c \pm 2pqb^2 = e^4, \quad c \mp 2pqb^2 = d^4,$$

oder

$$\pm pq(2b)^2 = e^4 - d^4. \quad (8)$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie (5). Es ist aber $z = 4abc$, also $z \geq 4b$. Dies ist aber unmöglich; denn wäre die Gleichung (5) möglich, so würde es eine kleinste positive Lösung z geben. Der Satz II ist damit bewiesen.

Beispiele:

Es sei $p = 3$. Dann ist die unbestimmte Gleichung

$$x^4 - y^4 = 3qz^2$$

unmöglich, wenn die Primzahl $q \equiv 17 \pmod{24}$ ist.

Es sei $q = 5$. Dann ist die unbestimmte Gleichung

$$x^4 - y^4 = 5pz^2$$

unmöglich, wenn die Primzahl $p \equiv 7$ oder $\equiv 23 \pmod{40}$ ist.

Numerische Beispiele sind also die Gleichungen

$$x^4 - y^4 = 51z^2,$$

$$x^4 - y^4 = 35z^2.$$

Numerische Beispiele zu Satz I sind die Gleichungen

$$x^4 - y^4 = 10z^2,$$

und

$$x^4 - y^4 = 26z^2.$$

VI.

Verallgemeinerung eines Satzes von Schemmel.

E. SCHEMSEL hat den folgenden Satz bewiesen:¹

Es sei $a_1, a_2, a_3, \dots, a_q(n)$ ein reduziertes Restsystem modulo

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_x^{a_x}.$$

Dann besitzen genau

$$p_1^{a_1 - 1} (p_1 - 2) \cdot p_2^{a_2 - 1} (p_2 - 2) \cdot \dots \cdot p_x^{a_x - 1} (p_x - 2)$$

von den Zahlen a die Eigenschaft, daß die Zahl $a + 1$ wieder prim zu n ist.

Wir wollen hier die allgemeinere Aufgabe lösen, die Anzahl der Zahlen a mit der Eigenschaft zu bestimmen, daß die Zahl $a + c$ wieder prim zu n ist. Die Zahl c können wir offenbar positiv annehmen; denn sie kann um ein beliebiges Multiplum von n vermehrt werden.

Zuerst muß der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

¹ Siehe Journal f. Mathematik, Bd. 70 (1869), S. 191; vgl. auch L. GOLDSCHMIDT in Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 39 (1894), S. 203.

Es sei $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$ ein reduziertes Restsystem modulo n und $b_1, b_2, \dots, b_{\varphi(d)}$ ein reduziertes Restsystem modulo d , wenn d ein Teiler von n ist. Dann gibt es genau $\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$ von den Zahlen a , die denselben Rest b_k modulo d lassen.

Denn es gibt für jedes b_k wenigstens eine der Zahlen a , die der Kongruenz $x \equiv b_k \pmod{d}$ genügt. Ist nämlich b_k nicht prim zu n , so hat b_k die Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_y gemeinsam mit $\frac{n}{d} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_z^{a_z}$, dann ist doch die Zahl

$$b_k + \frac{n}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_y^{a_y}}$$

prim zu n und zugleich $\equiv b_k \pmod{d}$.

Es seien nun

$$a_{x_1}, a_{x_2}, \dots, a_{x_r} \tag{1}$$

die sämtlichen derjenigen Zahlen a , die $\equiv b_k \pmod{d}$ sind. Wenn b_i eine andere der Zahlen b ist, so ist für ein gewisses m

$$b_k b_m \equiv b_i \pmod{d}.$$

Nun gibt es, wie soeben gezeigt wurde, wenigstens eine Zahl a_μ unter den Zahlen a , die $\equiv b_m \pmod{d}$ ist. Dann ist also

$$b_k a_\mu \equiv b_i \pmod{d}. \tag{2}$$

Die Zahlen

$$a_\mu a_{x_1}, a_\mu a_{x_2}, \dots, a_\mu a_{x_r} \tag{3}$$

sind folglich $\equiv b_i \pmod{d}$; sie sind ferner unter einander inkongruent modulo n , und sind also modulo n kongruent r verschiedenen der Zahlen a . Es gibt weiter keine andere Zahl a , die $\equiv b_i \pmod{d}$ ist. Denn ist $a_\nu \equiv b_i \pmod{d}$, so ist für ein gewisses λ

$$a_\nu \equiv a_\mu a_\lambda \pmod{n},$$

oder wegen (2) $b_i \equiv a_\mu a_\lambda \equiv a_\mu b_k \pmod{d}$,

und also

$$a_\lambda \equiv b_k \pmod{d},$$

d. h. a_λ muß gleich einer der Zahlen (1) sein, und a_ν ist folglich kongruent einer der Zahlen (3) modulo n . Die Anzahl derjenigen der Zahlen a , die $\equiv b_i \pmod{d}$ sind, ist folglich auch gleich r . Der Hilfsatz ist damit bewiesen.

Wir nehmen zuerst an, daß n und c relative Primzahlen sind. Wie viele von den Zahlen a modulo n besitzen dann die Eigenschaft, daß auch $a + c$ prim zu n ist? Da c prim zu n ist, können wir a durch ac ersetzen. Die Frage wird dann: Wie viele von den Zahlen $a + 1$ sind prim zu n ? Die Antwort hierauf ist aber durch das SCHEMMELSche Resultat gegeben.

Es sei nun

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_x^{a_x} \cdot T,$$

und

$$c = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_x^{\beta_x} \cdot t,$$

wo T prim zu c und t prim zu n ist. Die Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_x sind sämtlich verschieden, und $a_i > 0, \beta_i > 0$. Wie viele von den Zahlen $a + c$ sind hier prim zu n ? Da t prim zu n ist, können wir a durch at ersetzen. Es kommt also darauf an zu bestimmen, wie viele von den Zahlen

$$a - p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_x^{i_x}$$

prim zu n sind, oder, was offenbar dasselbe ist, wie viele von diesen Zahlen prim zu T sind. Dem Hilfssatze zufolge gibt es genau $\frac{q(n)}{q(T)}$ Zahlen a , die die denselben Rest b modulo T geben. Da aber T durch keine der Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_x teilbar ist, können wir modulo T die Zahl b durch $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_x^{i_x} b$ ersetzen. Die Frage wird also: Wie viele von den Zahlen $b + 1$ sind prim zu T , wenn b ein reduziertes Restsystem modulo T durchläuft. Setzen wir

$$T = q_1^{\delta_1} q_2^{\delta_2} \cdots q_z^{\delta_z},$$

wo q_1, q_2, \dots, q_z verschiedene Primzahlen sind, und wenden wir den SCHEMMELSchen Satz an, so finden wir somit für die gesuchte Anzahl den Wert

$$\frac{q(n)}{q(T)} \cdot q_1^{\delta_1 - 1} (q_1 - 2) q_2^{\delta_2 - 1} (q_2 - 2) \cdots q_z^{\delta_z - 1} (q_z - 2)$$

oder

$$q(n) \cdot \frac{(q_1 - 2)(q_2 - 2) \cdots (q_z - 2)}{(q_1 - 1)(q_2 - 1) \cdots (q_z - 1)}. \quad (4)$$

Die Zahlen q_1, q_2, \dots, q_z bezeichnen hier diejenigen Primteiler von n , die in c nicht aufgehen. Diese Formel gilt auch wenn $n = T$ ist, d. h. wenn n und c relative Primzahlen sind. Ist $T = 1$, so ist die gesuchte Anzahl offenbar gleich $q(n)$.

Gedruckt 26. Mai 1924.

ET PAR KALENDARISKE NOMOGRAMMER

AV

D. ISAACHSEN

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 14)



KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 13. april 1923.

De i det følgende meddelte nomogrammer er alle konstrueret som flugtpunkt-nomogrammer (MAURICE D'OCAGNE'S nomogrammes à points alignés), der som navnet antyder er karakteriseret ved, at sammenhørende værdier af tre variable altid ligger paa en ret linie. Kjender man værdien af to af de variable, saa er den tredie bestemt ved skjæringen mellem den rette linie, som forbinder disse to variable med den akse, hvorpaa den tredie variable er afsat. En saadan forbindelse af to variable ved en ret linie vil i det følgende bli betegnet som en kobling. Bekvemmost og nøiagtigst udføres den ved hjælp af en lineal af gjennemsigtig celluloid med en fin indridset og sværtet ret linie paa den ene bredside, men man kan ogsaa anvende enhver god lineal eller en strammet (helst sort) traad.

De tre opgaver som er behandlet i det følgende er:

1. Bestemmelse af ugedagen for en opgit datum.
2. Bestemmelse af paaskedagens datum i et opgit aar.
3. Bestemmelse af datum for nymaane i opgit aar og maaned.

1. Ugedag for opgit datum.

Til løsning af denne opgave tjener de 4 første nomogrammer, det første for juliansk kalender, de 3 følgende for gregoriansk. For den her foreliggende opgave er det imidlertid ligegyldig, hvilket af de tre gregorianske nomogrammer der benyttes, da de i saa henseende er identiske. Disse nomogrammer er konstrueret over formlen:

$$D + M + S + a + \frac{a}{4} = 7k + d$$

Bogstavernes betydning er følgende: D (atum), M (aaned), S (ekulum), a aar indenfor aarhundredet, k et eller andet helt tal, d ugedagens numer tallet fra søndag som numer én. D , M og S betegner ogsaa karakteristiske tal, men disse behøver man, som det straks vil sees, ikke at kjende for at kunne benytte nomogrammerne. Dertil udkræves kun at man merker sig følgende: aarstallet tænkes skrevet $100S + a$, d. e. man skiller ved en vertikal streg de to yderste cifre til høire fra de andre, til venstre for stregen staar da S , til høire a . Fremdeles skal $\frac{a}{4}$ kun bety det hele tal man faar ved denne division. For at man skal kunne arbeide hurtigere

og sikrere er imidlertid den effektive værdi af $a + \frac{a}{4}$ sat op i tabel i hjørnet øverst til højre paa hvert nomogram. I denne tabel opsøger man a og benytter det med kursiv trykte tal, som staar øverst og nederst i samme kolonne. Der findes paa disse nomogrammer 5 akser, som vil bli betegnet med romertallene $I-V$, fra venstre mod højre. I den her foreliggende opgave indgaar dog ikke akse II . Akse I er bærer for to variable, D paa venstre side, S paa højre side. D er, for at faa et haandterlig nomogram, begrænset til de 7 første tal, idet jo f. eks. 25de og 4de, 17de og 3die o. s. v. i samme maaned altid falder paa samme ugedag. Akse III er bærer for ugedagene, akse IV for maanederne og akse V for det ovenfor nævnte tal, som svarer til $a + \frac{a}{4}$, og som tas ud af tabellen. Der udkræves til opgavens løsning 3 koblinger, efter følgende recept: datum kobles med maaned, og man merker sig skjæringen med akse III . Denne skjæring kobles med det af tabellen bestemte tal paa akse V , og man merker sig skjæringen med akse IV . Endelig kobles denne skjæring med aarhundredtallet paa akse I , og skjæringen paa akse III gir den søgte ugedag. Som man ser, indgaar ved de to første koblinger akserne III og IV kun som støttepunkter for den følgende operation, idet skjæringspunktet tjener som „tapp“ for denne, eller som man sier, disse akser tjener ved de to første koblinger som tapp-linier. For at lette fikseringen av tappen er dagnavnene paa akse III forsynet med indekser og akse IV udstyret med delstreger mellem maanedsnavnene. Paa denne akse optræer januar og februar to gange. De med kursiv og paa højre side af akse trykte navne paa disse maaneder blir at benytte i skudaar, hvorved er at erindre, at i den gregorianske kalender de rene sekularaar (a lig nul) kun da er skudaar, naar S er delelig med 4 (1600 er skudaar), ikke de øvrige (1700 er ikke skudaar), medens i den julianske kalender alle rene sekularaar er skudaar.

Et par eksempler vil klargjøre fremgangsmaaden, og man vil efter kort tids øvelse kunne løse denne opgave overordentlig hurtig og ganske sikkert.

17de mai 1914, gregoriansk. For 17 læses $17 \div 14$, d. e. 3, og 3 læst til venstre paa akse I kobles med mai paa akse IV . Skjæring med akse III er i_3 , som kobles med 3 paa akse V (3 svarer ifølge tabellen til a lig 14). Skjæring med akse IV et skridt under mai, kobles med 19, læst til højre paa akse I , og skjæringen med akse III gir s , d. e. søndag (indeksen ved s er her ligegyldig).

29de februar 1864, gregoriansk. For 29 læses $29 \div 28$, d. e. 1 til venstre paa akse I og kobles med februar, læst til højre paa akse IV (skudaar). Skjæring med akse III er f_2 , som kobles med 3 paa akse V (3 svarer ifølge tabellen til a lig 64). Skjæring med akse IV to skridt under mai, kobles med 18, læst til højre paa akse I , og gir m , d. e. mandag som skjæring med akse III .

24de august 1572, juliansk. For 24 læses $24 \div 21$, d. e. 3 til venstre paa akse *I* i det julianske nomogram og kobles med august paa akse *II*. Skjæring med akse *III* l_3 , som kobles med 6 paa akse *I* (6 svarer ifølge tabellen til a lig 72). Skjæring med akse *II* et skridt under august, kobles med 15, læst til hoire paa akse *I*, og gir som skjæring med akse *III* s , d. e. søndag.

Da der i den formel som ligger til grund for disse nomogrammer, indgaar 5 variable, kan der stilles, og ved hjælp af nomogrammerne løses, 5 forskellige slags opgaver angaaende de variable. Blandt disse opgaver er der dog kun én, som man kan vente nogenlunde hyppig at støde paa i praksis, f. eks. ved fiksering af et aarstal for et brev, som kun er dateret med datum, maaned og ugedag. Man har f. eks. fundet, at 4de juli 1776 gregoriansk faldt paa en torsdag. I hvilke andre aar falder 4de juli igjen paa en torsdag? En betragtning af den formel som ligger til grund for nomogrammerne eller af nomogrammerne selv, forer til følgende resultat: saalænge man holder sig indenfor samme aarhundrede (*S* uforandret), maa udtrykket $a + \frac{a}{4}$, altsaa tabeltallet paa nomogrammet og dermed indstillingen paa akse *I* forbli uforandret. Man maa altsaa holde sig til de tal som i tabellen staar i samme kolonne som det givne a . I vort eksempel faar man saaledes tallene i kolonnen med overskrift 4, ialt 14 aarstal, fra 1709 til 1799. Vil man gaa videre til næste aarhundrede, maa man skille mellem følgende to tilfælde: det sekularaar man gaar til er skudaar, eller det er almenaar. I første tilfælde, det nye *S* er skudaar, maa man i tabellen gaa 1 skridt til hoire i kolonnerækken. I andet tilfælde, det nye *S* er almenaar, maa man i tabellen gaa 2 skridt til hoire i kolonnerækken. Da nu i den julianske kalender alle rene sekularaar er skudaar, maa man i denne kalender altid gaa et skridt til hoire med kolonnen ved overgang til ny *S*, i den gregorianske kalender derimod kun, hvis det nye *S* er delelig med 4. Andet tilfælde, det nye *S* almenaar, kan kun indtræffe i den gregorianske kalender. Vil vi i vort eksempel gaa videre fra 1799, maa vi altsaa gaa over til kolonnen med overskrift 6 og finder 14 nye aarstal fra 1805 til 1895.

Som man ser af tabellen, er skridtet 5, 6, eller 11 aar, og man vil derfor i et tilfælde som ovenfor nævnt, ufuldstændig dateret dokument, faa spillerummet for gjætning af aarstal betydelig indskrænket.

2. Paaskedatum.

Paaskedag er første søndag efter den fuldmaane som indtræffer efter 21de mars eller paa 21de mars. Regelen er almengyldig. Falder saaledes ovennævnte fuldmaane (paaskefuldmaanen) paa en søndag, feires paaske først næst følgende søndag. Maanens bevægelse er imidlertid meget ujevn. Ligesom vore ure reguleres ikke efter solen, men efter en fiktiv sol (middelsolen),

bestemmes paaskefuldmaanens, og dermed paasken efter en fiktiv maane, den cykliske maane. Denne cykliske maanes bevægelse er jevn, og den er naturligvis defineret saa, at dens faser stemmer med maanens faser saa nøiagtig som mulig. Absolut overensstemmelse kan dog ikke opnaaes, og derpaa har vi iaar et eksempel. Den cykliske paaskefuldmaane falder iaar (1923) paa lørdag 31te mars og paaskedag paa 1ste april. Men faktisk har vi iaar fuldmaane første paaskedag.

Den cykliske maanes faser kommer igjen paa samme dage i aaret med mellemrum af 19 aar, METON'S cykel. Har man altsaa en kalender over den cykliske maanes faser over et tidsrum af 19 aar, saa kan denne kalender bruges om igjen stadig væk. Det gjælder kun at finde angjældende aars ordenstal, numer, i METON'S cykel, eller som det kaldes aarets gyldental. Dette gyldental er resten av divisionen: (aarstal + 1) divideret med 19. Denne regning er noget ubehagelig at udføre i hodet og erstattes hensigtsmæssig med følgende enklere. Man skal efter ovenstaaende regel ta resten av divisionen:

$$\frac{100 \cdot S + a + 1}{19}$$

Men man faar samme rest ved at udføre den enklere division:

$$\frac{5 \cdot S + a + 1}{19}$$

Fremdeles kan den ubehagelige division med 19 erstattes med en division med 20 efter følgende formel:

$$N \div 19 \cdot n = (N \div 20 \cdot n) + n$$

d. e. man dividerer med 20 og tar summen af den rest man derved faar og den hele del af kvotienten.

Finder man gyldentallet (som i det følgende skal betegnes med g) lig 0, blir dette tal at erstatte med 19. Finder man gyldentallet større end 19, subtraheres 19 fra det fundne tal.

Eksempler: g for 1918. Her regnes bekvemt efter den første regel. Rest af 1919 divideret 19 er 0, som erstattes med 19.

g for 1802. Her regnes bekvemtest efter anden regel.

$5 \cdot 18 + 2 + 1$ gir 93, og $93 = 4 \cdot 20 + 13$, altsaa er g lig $4 + 13$, d. e. 17.

g for 1844.

$5 \cdot 18 + 44 + 1$ gir 135, og $135 = 6 \cdot 20 + 15$, altsaa er g lig $6 + 15$, d. e. 21, hvorfra subtraheres 19, g lig 2. At et aar er numer 21 i en cykel paa 19, er jo nemlig ensbetydende med, at det er numer 2 i den følgende cykel.

Er saaledes gyldentallet bestemt, findes deraf datum for paaskefuldmaane. Der findes en enkel formel for at udføre denne regning, men man arbejder naturligvis hurtigere og bekvemmere, naar man anfører resultatet af regningen paa nomogrammet. Dette er gjort paa akse *II*, som saaledes ikke er nogen regneakse, men kun en tabel. I den julianske kalender er sammenhængen mellem gyldental og paaskefuldmaane fast og uforanderlig. Derfor slipper man her fra det med ét nomogram. I den gregorianske kalender derimod forskyves denne sammenhæng i aarhundredernes løb, og der er derfor for denne kalender konstrueret tre nomogrammer, for perioderne 1582—1690 inklusive, 1700—1899 og 1900—2199.

Naar man først kjender datum for paaskefuldmaane, er det en let sag ved hjælp af nomogrammerne at bestemme paaskedag. Man bestemmer kun som for forklaret ugedag for paaskefuldmaane og regner frem til førstkommende søndag. Man skal da først koble datum og maaned. Men denne operation er allerede udført paa nomogrammerne, og g med tilhørende datum for paaskefuldmaane (P) er paa akse *II* afsat lige ud for den tapp, som første kobling gir paa akse *III*. Herfra arbejdes saa videre som før angit.

Eksempler: Paaske 1572, juliansk. g er 15, P 1ste april, tapp paa akse *II* s_1 , ugedag tirsdag, altsaa paaskedag $1 \div 5$, d. e. 6te april.

Paaske 1842, gregoriansk. g er 19, P 26de mars, tapp paa akse *II* $t_{0,5}$, ugedag lørdag, altsaa paaskedag $26 \div 1$, d. e. 27de mars.

Paaske 1820, gregoriansk. g er 16, P 29de mars, tapp paa akse *II* $t_{i,3}$, ugedag onsdag, altsaa paaskedag $29 \div 4$, d. e. 33te mars, 2den april.

Paaske 1831, gregoriansk. g er 8, P 27de mars, tapp paa akse *II* $m_{6,}$, ugedag søndag, altsaa paaskedag $27 \div 7$, d. e. 34te mars, 3die april.

3. Nymaane.

Den cykliske maanes faser kan beregnes meget tilnærmet efter en ganske enkel formel. I denne regnes maanens synodiske omløbstid (tiden fra nymaane til næste nymaane) til 30 dage, medens den i virkeligheden er 29.53 dage. I SCHUBERT'S „Mathematische Mussestunden“ findes en tabel til beregning af datum for nymaane, baseret paa en synodisk omløbstid af 29.5 dage. Denne tabel gir da naturligvis noiagtigere resultater end ovennævnte formel og er derfor lagt til grund for de her meddelte nomogrammer. Afbigelsen fra virkelig nymaane-datum vil ved anvendelsen af disse kun sjelden gaa op til en dag, hvilket er fuldt noiagtig nok for de fleste formaal.

Disse nomogrammer indeholder tre akser, *I*, *II* og *III*, af hvilke dog den midterste (*III*) er en ren „tapp-linie“. Paa akse *I* har man til venstre S , til høire M med samme betydning som før. Januar og februar optræder atter to gange, og de med kursiv trykte navne blir at benytte i skudaar.

Paa akse *III* har man til høire *D(atum)*, som naturligvis her maa anføres helt ud, fra 1ste til 31te. Tallene til venstre paa akse *III* betyr den rest man faar ved at dividere *a* med 19. Da *a* er et i det høieste tosfret tal, er beregningen af denne rest efter den tidligere meddelte regel saa let, at det ikke lønner sig at belemre nomogrammet med en stor tabel til direkte aflæsning af denne størrelse.

Fremgangsmaaden ved benyttelsen af disse nomogrammer er følgende. *S* kobles med resten af $a/19$. Den derved bestemte tapp paa akse *II* kobles med *M*, og *D* aflæses paa akse *III*.

Gaar man fra en saaledes bestemt datum 29.5 dage frem eller tilbage, kommer man atter til datum for en nymaane, gaar man 15 dage frem eller tilbage, kommer man til datum for en fuldmaane.

Et par smaa vanskeligheder som kan opstaa ved anvendelsen af disse nomogrammer, skal her nævnes.

Det vil ikke saa sjelden indtræffe, at man finder en datum midt imellem to tal paa akse *III*. Det betyr kun, at nymaanen falder saa nær ved overgangen fra den ene datum til den anden, at man ikke ved denne beregning kan afgjøre, hvad der er det rette, man er ved grænsen af metodens ydeevne.

Det vil kunne indtræffe, at anden kobling fører ud over nomogrammets omfang, men denne vanskelighed kan let omgaaes. Man har to udveie. Man ser straks ved en saadan umulig kobling, om et 2—3 gange saa langt nomogram brugtes vilde git en datum i maaneden før eller efter den man har regnet med, og bestemmer saa nymaane for den saaledes gjættede maaned. Tilslut regner man 29.5 dage frem eller tilbage for at komme ind i den ønskede maaned. Man kan imidlertid ogsaa i et saadant tilfælde skifte tapp paa akse *II*, gaa 29.5 enheder op eller ned paa denne akse og fortsætte som før.

Et par eksempler vil gjøre dette klart. Find datum for nymaane i juni 1802 gregoriansk (og dermed ogsaa i 1821, 1840 o. s. v.). Kobles *S* lig 18 paa akse *I* med 2 til venstre paa akse *III*, finder man 7.5 som tapp paa akse *II*. Kobles nu denne tapp med juni paa akse *I*, finder man paa akse *III* dagen før 1ste juni, d. e. 31te mai. Tælles derfra 29.5 dage frem, finder man 29.5 juni, altsaa 29de—30te juni. Beholder man tappen 7.5, men gaar ned til mai, finder man for nymaanen 1.5 mai, dertil adderet 29.5 gir 31te mai som før. Flytter man tappen op til 7.5 + 29.5, d. e. 37, finder man direkte for juni 29.5 og for mai 31 som før. Vil man for disse samme aar bestemme nymaane for f. eks. september, har man praktisk talt intet valg, tappen maa flyttes op til 37, og man finder 26de sept.

Nymaane i august 1572, juliansk. Man finder 9de august. Altsaa var der fuldmaane Bartholomæusnatten (24de august).

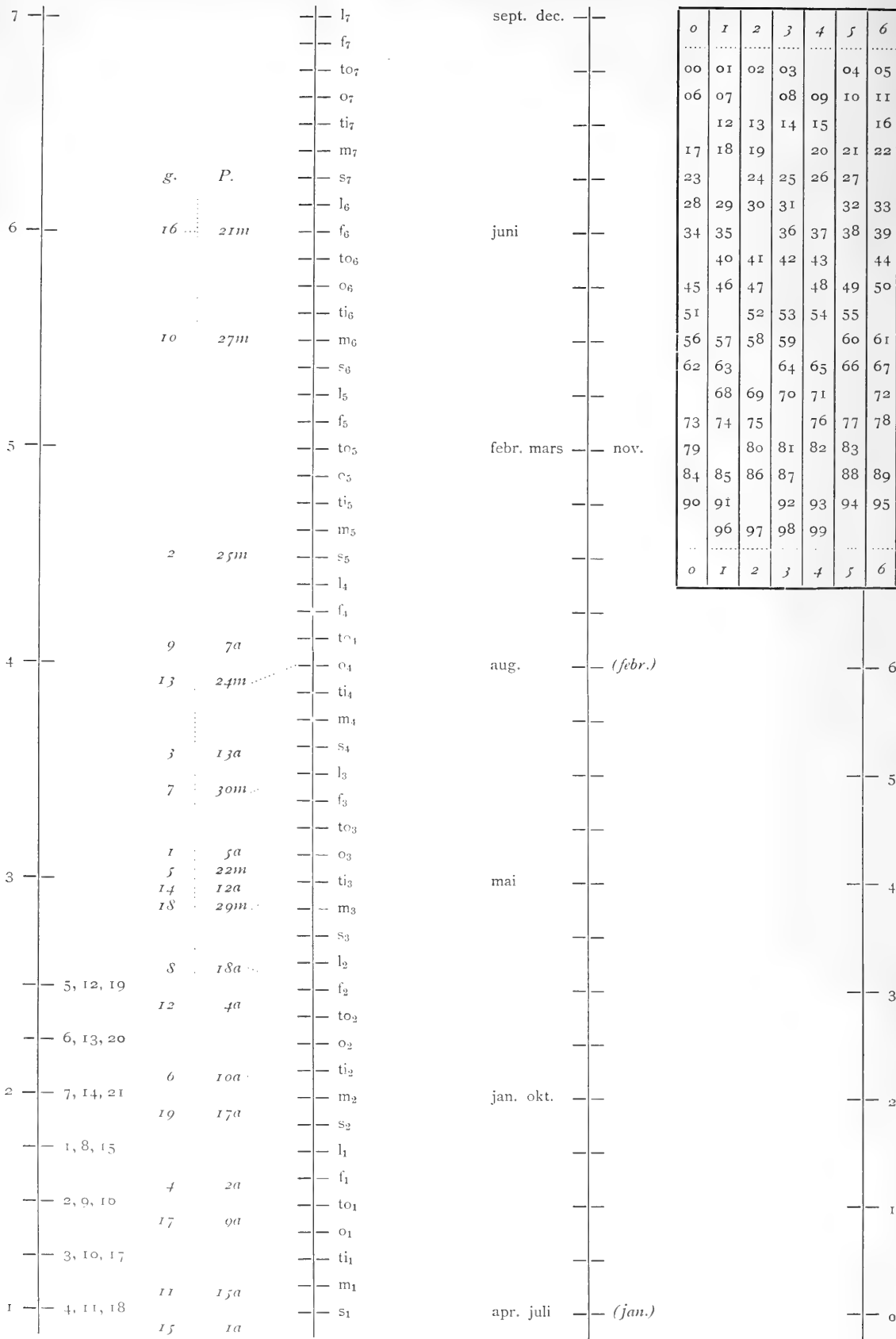
Nymaane i oktober 1805, gregoriansk. Man finder 22.5. Altsaa var der meget nær nymaane under slaget ved Trafalgar (21de oktober).

Det har hændt, at et vidnesbyrd i en kriminalsag har tabt meget i troværdighed derved, at vidnet har paastaaet at ha set dit og dat i klart maaneskin, medens det ved noiere undersogelse har vist sig, at man paa den tid havde nymaane.

I alle tilfælde som i de sidste eksempler er nomogrammerne mere end noiagtige nok, og de gir i en fart oplysninger, som man vilde ha ganske meget bryderi med at skaffe sig paa andet vis.

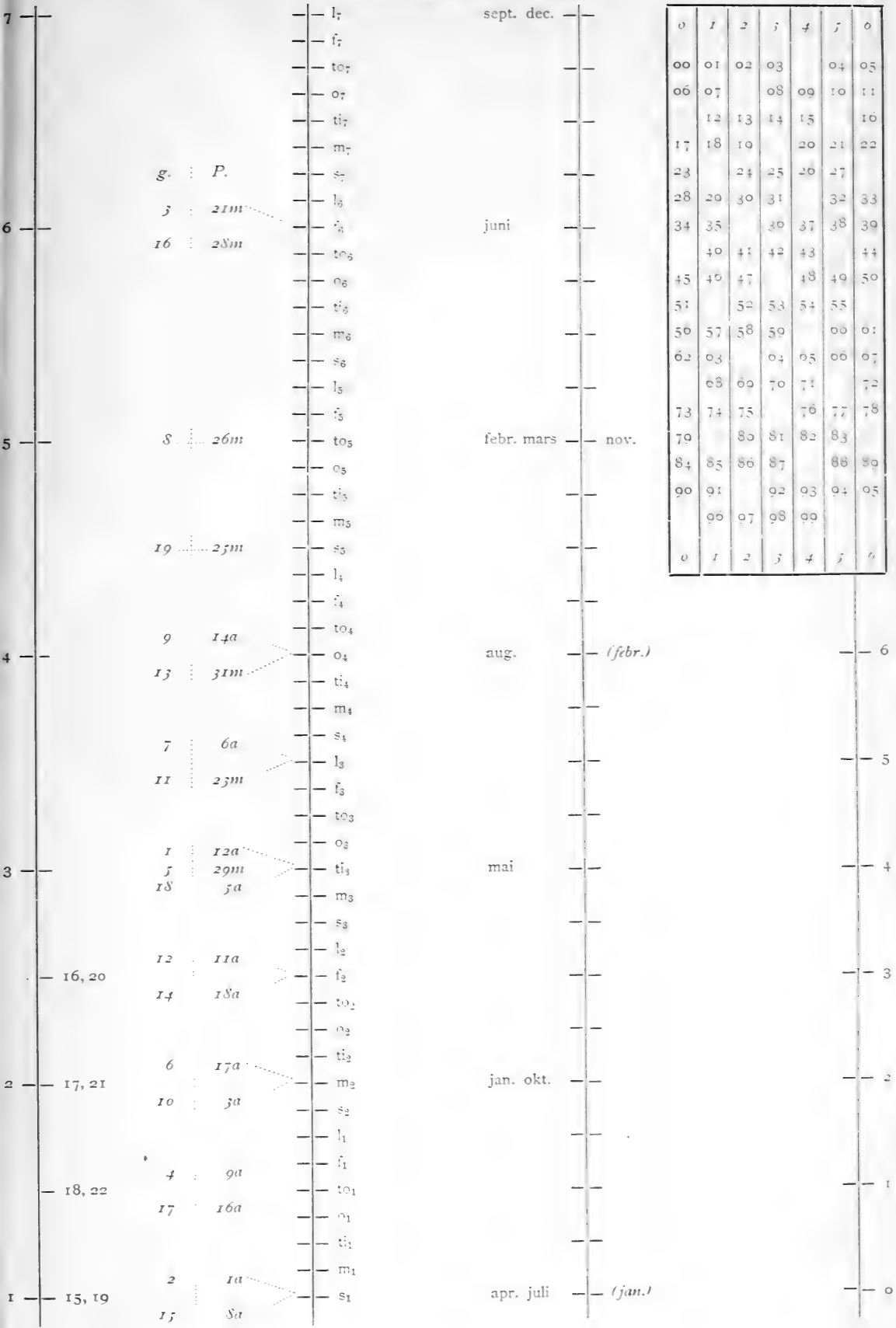
I originalen er de fire første nomogrammer (ugedag og paaske) i saa stor maalestok, at man uden fare kan foreta koblingerne ganske „flot“, i de to sidste (nymaane) maa man være lidt omhyggeligere. Ved reproduktionen vil maalestokken bli en del formindsket, og man vil vistnok derved bli nodt til at arbeide lidt forsigtigere. Imidlertid er, som man ser, nomogrammernes struktur saa overordentlig enkel, at enhver som maatte ønske det, med lethed kan kopiere dem i større maalestok (paa rudepapir eller millimeterpapir) og derved opnaa den fordel at kunne arbeide meget raskere.

Juliansk.



0	1	2	3	4	5	6
00	01	02	03		04	05
06	07		08	09	10	11
	12	13	14	15		16
17	18	19		20	21	22
23		24	25	26	27	
28	29	30	31		32	33
34	35		36	37	38	39
	40	41	42	43		44
45	46	47		48	49	50
51		52	53	54	55	
56	57	58	59		60	61
62	63		64	65	66	67
	68	69	70	71		72
73	74	75		76	77	78
79		80	81	82	83	
84	85	86	87		88	89
90	91		92	93	94	95
	96	97	98	99		
0	1	2	3	4	5	6

Gregoriansk (1582—1699).



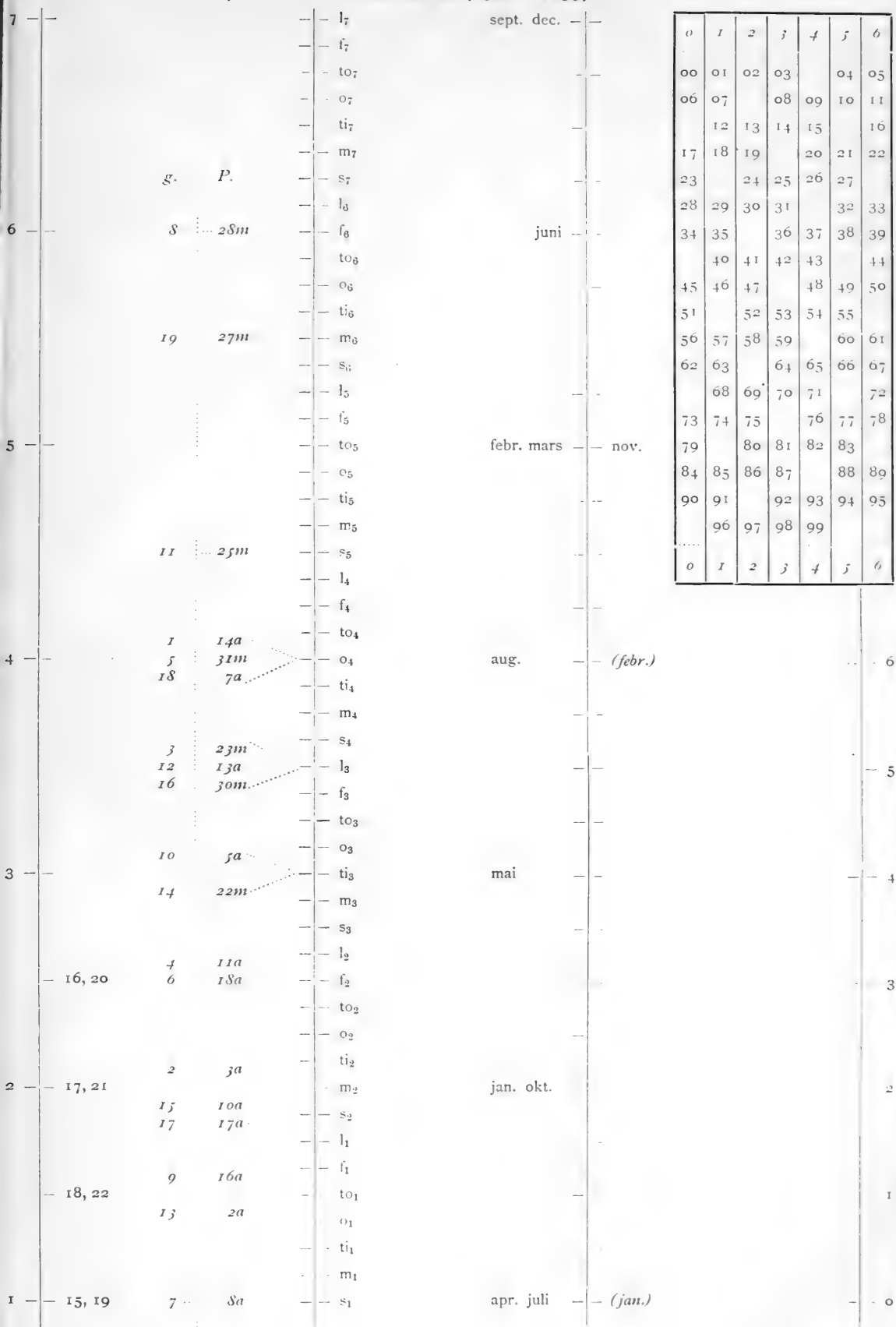
0	1	2	3	4	5	6
00	01	02	03		04	05
06	07		08	09	10	11
	12	13	14	15		16
17	18	19		20	21	22
23		24	25	26	27	
28	29	30	31		32	33
34	35		36	37	38	39
	40	41	42	43		44
45	46	47		48	49	50
51		52	53	54	55	
56	57	58	59		00	01
02	03		04	05	06	07
	08	09	10	11		12
13	14	15		16	17	18
19		20	21	22	23	
24	25	26	27	28	29	
30	31		32	33	34	35
36	37	38	39	40		41
42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83
84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97
98	99					
0	1	2	3	4	5	6

Gregoriansk. (1700—1899).

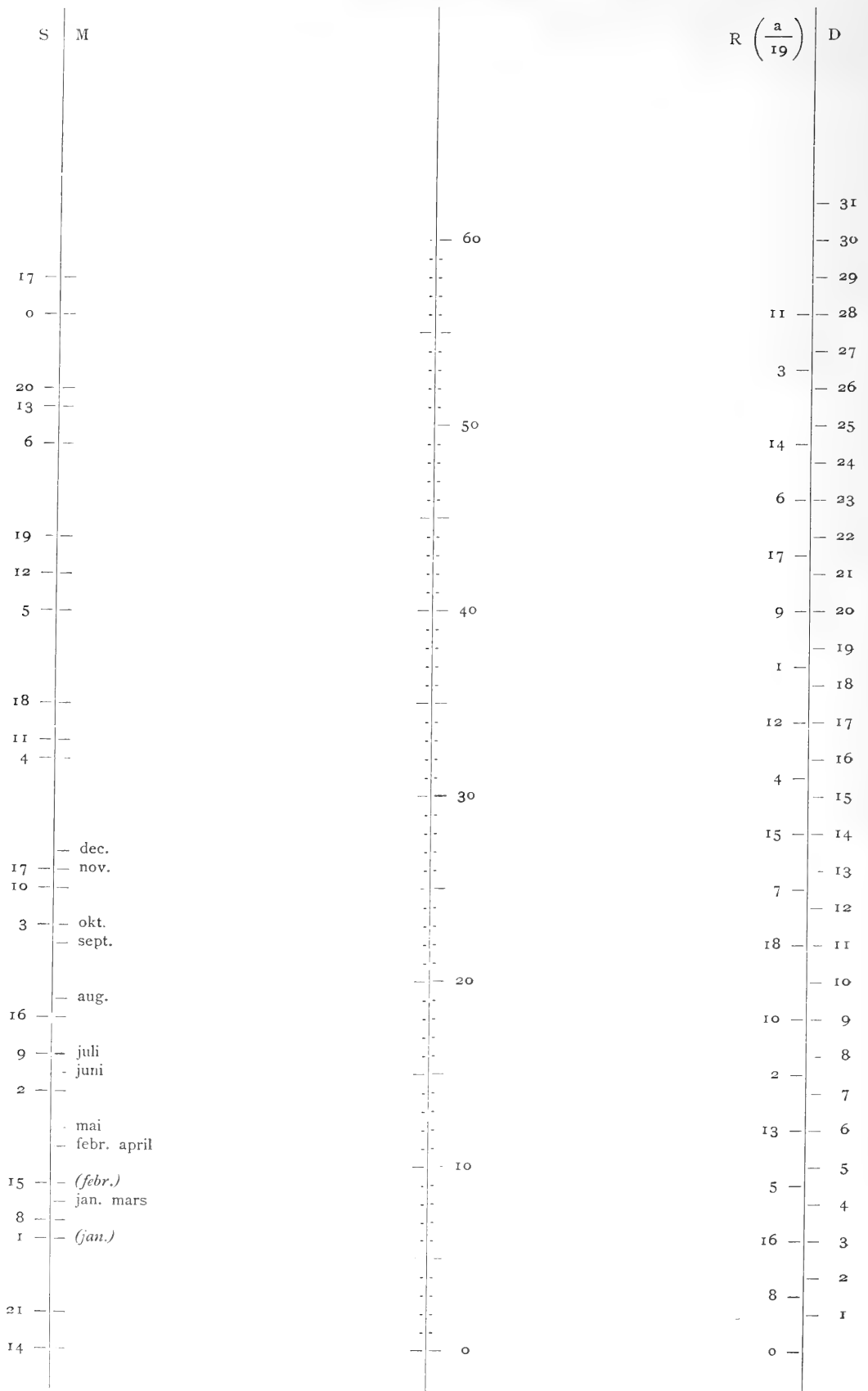
7			l ₇	sept. dec.	
			f ₇		
			to ₇		
			o ₇		
			ti ₇		
			m ₇		
	<i>g.</i>	<i>P.</i>	s ₇		
			l ₆		
6	14	21m	f ₆	juni	
			to ₆		
			o ₆		
			ti ₆		
	8	27m	m ₆		
			s ₆		
			l ₅		
			f ₅		
5	19	26m	to ₅	febr. mars	nov.
			o ₅		
			ti ₅		
			m ₅		
			s ₅		
			l ₄		
			f ₄		
			to ₄		
4	7	7a	o ₄	aug.	(febr.)
	11	24m	ti ₄		
			m ₄		
	1	13a	s ₄		
	5	30m	l ₃		
	18	6a	f ₃		
			to ₃		
			o ₃		
3	3	22m	ti ₃	mai	
	12	12a	m ₃		
	16	29m	s ₃		
			l ₂		
	6	18a	f ₂		
	16, 20		to ₂		
			o ₂		
			ti ₂		
2	17, 21		m ₂	jan. okt.	
			s ₂		
			l ₁		
			f ₁		
	2	2a	to ₁		
	18, 22		o ₁		
			ti ₁		
			m ₁		
1	15, 19		s ₁	apr. juli	(jan.)

0	1	2	3	4	5	6
00	01	02	03		04	05
06	07		08	09	10	11
	12	13	14	15		16
17	18	19		20	21	22
23		24	25	26	27	
28	29	30	31		32	33
34	35		36	37	38	39
	40	41	42	43		44
45	46	47		48	49	50
51		52	53	54	55	
56	57	58	59		60	61
62	63		64	65	66	67
	68	69	70	71		72
73	74	75		76	77	78
79		80	81	82	83	
84	85	86	87		88	89
90	91		92	93	94	95
	96	97	98	99		
0	1	2	3	4	5	6

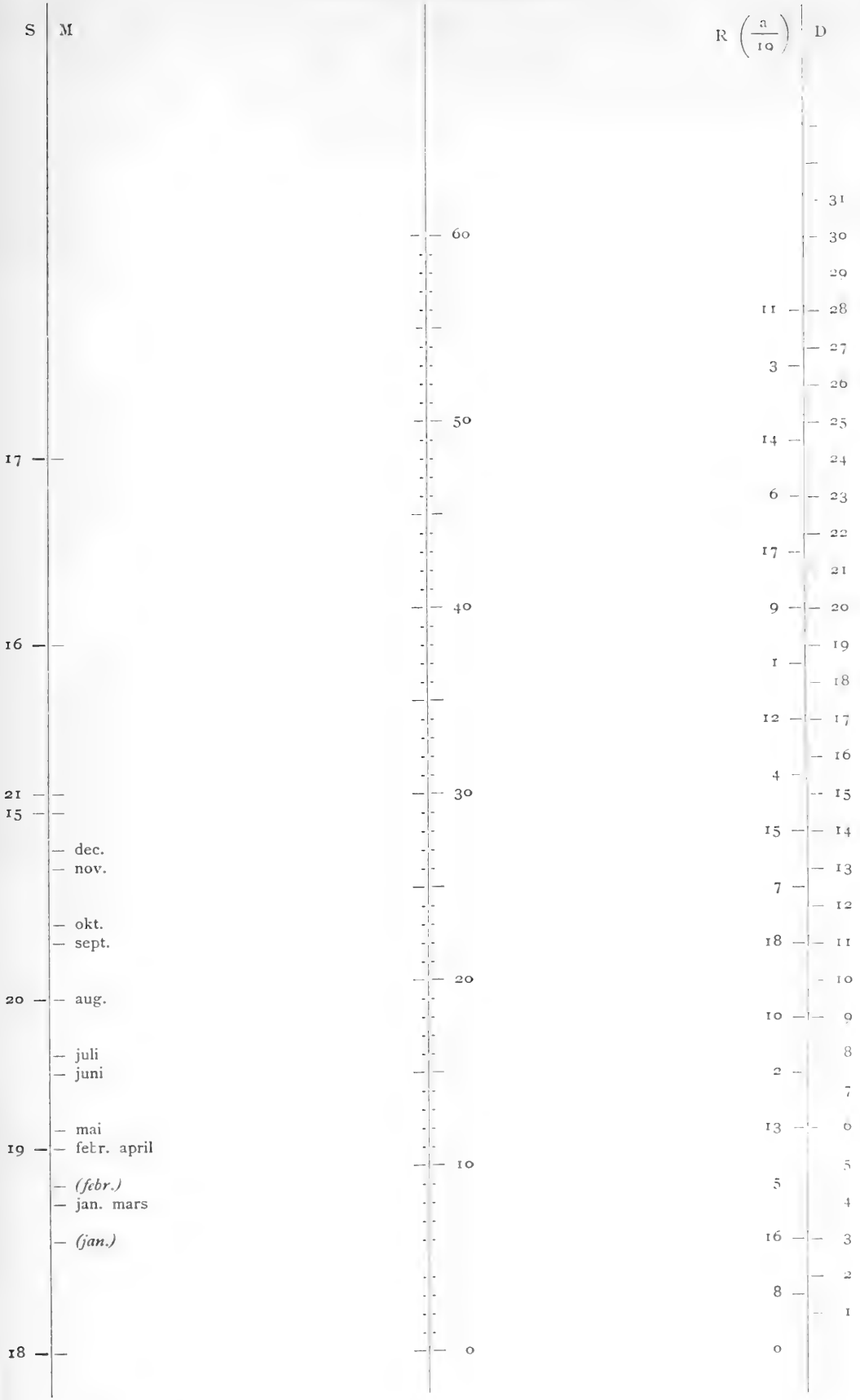
Gregoriansk (1900—2199).



Nymaane. Juliansk.



Nymaane. Gregoriansk.



Trykt 6. december 1923.

DIE BESTIMMUNG DER JODZAHL

I. VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE
JODZAHL DER FETTE

VON

S. SCHMIDT-NIELSEN UND AAGE W. OWE

(MIT 31 FIG. IM TEXT)

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 15)



KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i fællesmotet den 3dje mai 1923.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	5
Versuchsmethodik	9
Zusammenfassende Übersicht der Versuchsprotokolle	21
Besprechung der für die einzelnen Jodzahlmethodeu gewonnenen Resultate	50
Die v. Hübl'sche Methode	50
Deduktion einer neuen Korrekutionsformel für die Methode von v. Hübl.	52
Die Waller'sche Methode	60
Die Wijs'sche Methode	61
Die Methode von Hanus	65
Die Winkler'sche Methode	68
Zusammenfassung	73
Literatur	77

Die Untersuchungen sind mit Unterstützung des dem Institute gehörigen
„Ferafondet“ ausgeführt worden.

Einleitung.

Unter Jodzahl versteht man bekanntlich, wie viele Gramm Halogen (als Gramm Jod berechnet) 100 Gramm Fett zu binden vermögen. Die Zahl gibt, unter der Voraussetzung, daß nur eine Addition — keine Substitution — stattfindet, die Ungesättigkeit der Fette an. Somit ist die Jodzahl eine der allerwichtigsten Konstanten zur Charakterisierung der Fette und Öle.

Damit die Jodzahl einen ihrer Wichtigkeit entsprechenden Platz in der Fettanalyse erhalten kann, muß man theoretisch die Forderung aufstellen, daß nur solche Methoden zur Bestimmung der Jodzahl verwendet werden dürfen, welche entweder die korrekten Werte geben, das heißt Methoden die vollständige Addition, aber keine Substitution herbeiführen, oder, wenn dies nicht zu erreichen ist, doch jedenfalls reproduzierbare Werte geben. Inwieweit diese Forderung sich in der Praxis aufrecht erhalten läßt, ist eine andere Frage.

Alle, welche sich mit der praktischen Ausführung der Bestimmung von Jodzahlen beschäftigt haben, wissen, daß die Reproduzierbarkeit recht oft ganz zweifelhaft ist, nicht nur was die verschiedenen Methoden unter sich, sondern auch was Parallelbestimmungen nach einer und derselben Methode betrifft. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen, wo die Ursache zu suchen ist. Klar ist es aber, wenn man weiß, daß die Fette mit Jod nicht glatt reagieren, sondern die Anwesenheit von Schwermetallen, Säuren oder anderen Halogenen erfordern, d. h. daß die Reaktion stets in recht komplizierten Systemen stattfindet, daß kleine Variationen in den Versuchsbedingungen leicht einen großen Einfluß auf die Aufnahme von Jod (oder Jod und anderen Halogenen) bewirken können. Ist dies aber der Fall, wird es selbstverständlich auf der anderen Seite eine Frage sein, inwieweit die Jodzahl sich als ein sicheres Maß für die Ungesättigkeit verwenden läßt.

Wenn noch hierzu kommt, daß mehrere von den Methoden zur Bestimmung der Jodzahl recht umständlich und zeitraubend sind, ist es nicht erstaunlich, daß im Laufe der Zeit eine Reihe von Vorschlägen gemacht worden sind, um eine sichere Arbeitsmethodik zu schaffen. Wir erinnern, hier nur daran, daß die HÜBL'sche Jodlösung, welche aus Jod und Queck-

silberchlorid in Spiritus besteht, von WALLER durch Hinzufügung von Salzsäure mehr haltbar gemacht wurde, daß EPHRAIM, unter der Annahme, daß Jodmonochlorid in der Hübl'schen Jodlösung das wirksame war, Jodmonochlorid in alkoholischer Lösung einführte, welche von WIJS mit Jodmonochlorid in Eisessig umgetauscht wurde. Der Vollständigkeit halber erinnern wir auch daran, daß ASCHMAN die Verwendung von Jodmonochlorid in wässriger Lösung vorgeschlagen hat, ein Verfahren das indessen bisher kaum Verwendung gefunden hat. Das Jodmonochlorid wurde von HANUŠ durch Jodmonobromid ersetzt.

Endlich sei erwähnt, daß man nach einer Reihe von Methoden die Aufnahme von Brom bestimmt, und hieraus die Jodzahl berechnet. Von diesen Methoden dürfte diejenige von WINKLER am meisten verwendet sein. Das Fett wird bei dieser Methode in Tetrachlorkohlenstoff gelöst, mit einer genau abgemessenen Menge einer titrierten Kaliumbromatlösung gemischt. Beim Zusatz von Kaliumbromid und einer Mineralsäure zu diesem Systeme wird dann das dem Kaliumbromat entsprechende Brom frei. Dies löst sich, was die Hauptmenge betrifft, in dem Tetrachlorkohlenstoff und reagiert dort mit dem Fette. Nach beendeter Reaktion wird nach der ursprünglichen Vorschrift Jodkalium im Überschuß hinzugefügt, und das hierdurch freigemachte, dem zurückgebliebenen Brom entsprechende Jod mit Thiosulfatlösung zurücktitriert. Neuerdings wird das zurückgebliebene Brom in anderer Weise bestimmt. (Vgl. S. 20). — Die Jodzahl nach WINKLER wird von einigen Autoren, unter denen WINKLER selbst, mit dem wenig glücklich gewählten Namen „Jodbromzahl“ bezeichnet.

Von den verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Jodzahl finden fast ausschließlich diejenigen von v. HÜBL, WALLER, WIJS, HANUŠ und WINKLER Verwendung.

Kommen wir dann zu der Frage, welche von diesen 5 Methoden vorzuziehen ist, so sei zuerst erwähnt, daß die Hübl'sche Methode in mehreren Ländern offiziell angenommen ist, so zum Beispiel für das deutsche Reich, Frankreich und Österreich, obwohl was die Details betrifft in verschiedener Ausführung. Die Methode von HANUŠ ist nach dem schweizerischen Lebensmittelbuche (Auflage III) für die Schweiz als offiziell anzusehen. Ungarn hat nach Pharmacopoea Hungarica (Ed. III) die Winkler'sche Methode autorisiert. Hier in Norwegen hat im Jahre 1908 die Landesversammlung der Techniker die Wijs'sche Methode angenommen, und sie dürfte auch in den Laboratorien am meisten verwendet werden, obwohl nach Pharmacopoea Norvegica (Ed. IV, 1913) die Hübl'sche Methode autorisiert ist.

Es liegt in der Literatur eine ganze Reihe von vergleichenden Untersuchungen über die verschiedenen Jodzahlmethoden vor, aber man kann ruhig sagen, daß die Frage, welche Methode die geeignetste ist, ebenso wenig entschieden ist, wie die Frage, welche von den Methoden den theoretisch richtigen Wert gibt.

Die meisten Untersucher bestimmten nämlich die Jodzahl in einer Reihe von Fetten und machten dann einfach einen Vergleich zwischen den nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Werten unter der Voraussetzung, daß die Hübl'schen Werte die richtigen waren. Für diese Untersucher war nämlich der Hauptzweck, eine Methode zu finden, welche die Nachteile der Hübl'schen Methode nicht besäße, besonders nicht die geringe Beständigkeit der Jodlösung und auch nicht die lange Einwirkungsdauer. Aber in dieser Weise kann man nicht zu einer Entscheidung in der Frage kommen, welche Methode die richtigen Werte gibt. Für alle Methoden gilt nämlich, daß die Werte je nach den Versuchsbedingungen innerhalb recht weiter Grenzen wechseln. Es handelt sich, selbst wenn man den amtlichen Vorschriften genau folgt, in keiner Weise um bestimmte und unveränderliche Zahlen. Eine rein statistische Untersuchung kann deswegen keinen Aufschluß über den Wert der einzelnen Methoden geben.

Eine Beurteilung würde man allerdings mit rein dargestellten Fettsäuren oder reinen Glyceriden erhalten können, aber dies Verfahren scheidet auf der einen Seite an den großen Schwierigkeiten, die damit verbunden sind, die betreffenden Körper rein darzustellen, auf der anderen Seite daran, daß die Entscheidung, ob wirklich reine Körper der genannten Art vorliegen, sich auf eine Untersuchung der Ungesättigtkeit selbst stützen muß. Man kann ja nicht zuerst die Körper mit der Jodzahl kontrollieren und nachher die Jodzahl mit den Körpern. Die besten Resultate darf man bei Verwendung solcher ungesättigten Körper erwarten können, welche durch Kristallform, Schmelzpunkt oder in anderer Weise wohl charakterisiert sind.

Solche Versuche sind u. a. von WEISER und DONATH [1] und von I. S. MAC LEAN und E. M. THOMAS [2] ausgeführt worden, aber sie führten zu völlig unbrauchbaren Resultaten. Die meisten von den verwendeten Körpern nehmen nämlich nur einen geringen Bruchteil der theoretisch erwarteten Jodmenge auf. So z. B. nahm die Zimtsäure statt der erwarteten 2 nur 0,3—0,8 Atome Jod, die Crotonsäure nur 0,9 statt 2 Atome Jod auf. Höhere Werte wurden allerdings mit der Winkler'schen Methode erreicht, aber das angeführte dürfte hinreichend sein, um zu zeigen, daß vergleichende Untersuchungen über den Wert der verschiedenen Jodzahlbestimmungsmethoden für die Fettanalyse nur mit Fettsäuren oder Fetten angestellt werden dürfen.

In den letzten 10 Jahren sind hier im Institute eine Menge von Jodzahlbestimmungen nach WIJS ausgeführt worden. Wir waren aber mit dieser Methode nicht besonders zufrieden. Teils bekamen wir in Übereinstimmung mit der Erfahrung anderer Forscher die Auffassung, daß die Werte zu hoch ausfielen, teils zeigte es sich, daß die Übereinstimmung bei den verschiedenen Arbeitern nicht gut war. Da wir uns aber in den letzten Jahren recht viel mit theoretischen Arbeiten auf dem Gebiete der Fettchemie beschäftigt haben, sahen wir uns gezwungen, der Frage über

die geeignetste Jodzahlbestimmungsmethode näher zu treten. Nach einer Durchmusterung der in der einschlägigen Literatur vorliegenden Daten kamen wir, wie oben erwähnt, zu der Schlußfolgerung, daß eine entscheidende Wahl hiernach nicht gemacht werden kann, und wir entschlossen uns deswegen zu einer selbstständigen Nachprüfung der gewöhnlichen Methoden.

Dies war um so mehr wünschenswert als der eine von uns (Schmidt-Nielsen) als Mitglied der skandinavischen Nahrungsmittelgesetzgebungskommission sowie der norwegischen departementalen Analysenkommission mit der Ausarbeitung einheitlicher Methoden für die Fettuntersuchung beauftragt worden war.

Man kann im voraus wissen, daß eine Methode um so mehr reproduzierbare Werte geben muß, je weniger die Resultate von Halogenüberschuß oder Einwirkungsdauer abhängig sind, d. h. je horizontaler die Kurven in einem Diagramme Jodzahl-Einwirkungsdauer bei konstantem Halogenüberschuß und in einem Diagramme Jodzahl-Halogenüberschuß bei konstanter Einwirkungsdauer verlaufen. Wenn die Kurven keine Neigung zeigen, horizontal zu werden, darf man — von den Fällen abgesehen, wo die Reaktion abnorm langsam verläuft und erst nach Tagen die normal anzusehenden Werte erreicht — behaupten, daß nicht nur die gewünschte Addition, sondern gleichzeitig auch eine Substitution stattfindet. Aus dem Kurvenverlaufe wird man überhaupt Aufschluß über den ganzen Prozeß erhalten.

Wir haben uns deswegen in dieser Arbeit bemüht, den Reaktionsverlauf bei den Jodzahlbestimmungsmethoden von v. HÜBL, WALLER, HANUŠ, WIJS und WINKLER festzustellen, und wir glauben, hierbei eine Versuchsanordnung getroffen zu haben, die es ermöglicht, Wägefehler, Oxydationen und andere ähnliche Versuchsfehler so weit zu eliminieren und den Titrierungsfehler so gering zu machen, daß der Einfluß bestimmter Versuchsbedingungen, wie Halogenüberschuß und Einwirkungsdauer, klar hervortreten dürfte.

Unsere Untersuchungen beschränken sich auf 6 Fettarten. Aber mit diesen sind, einschließlich der Kontrollversuche, nicht weniger als etwa 3000 Jodzahlbestimmungen vorgenommen worden.

Die Untersuchungen, welche hauptsächlich im Jahre 1921 stattfanden, sind mit Unterstützung des dem Institute gehörigem „*Verafondet*“ ausgeführt worden.

Wir möchten auch an dieser Stelle denjenigen Herren des Instituts danken, welche sich bei der großen Zahl von Analysen beteiligt haben und erwähnen speziell die Chemie-Ingenieure: ARNE FLOOD, F. FROG, L. GRØGAARD, K. HAUG, THV. JANSEN, H. JACOBSEN, ARNOLD JOHANSEN, LEIF LARSEN, H. ROCHSETH.

Versuchsmethodik.

Vorliegende Arbeit hat, wie oben erwähnt, hauptsächlich den Zweck verfolgt, den Einfluß der Einwirkungsdauer und des Halogenüberschusses auf den Reaktionsverlauf bei Jodzahlbestimmungen zu studieren.

Was die Einwirkungsdauer betrifft, ist es aus praktischen Gründen im voraus klar, daß sie nicht mehr als 24 Stunden betragen darf, und wir haben daneben 2 und 6 Stunden als Versuchszeiten gewählt.

Was wiederum den Halogenüberschuß betrifft, müssen wir gleich daran erinnern, daß dieser Begriff nicht immer in der Literatur klar definiert worden ist. Vorausgesetzt, daß die zu völliger Sättigung der doppelten Bindungen der eingewogenen Fettmenge A Gramm Halogen erforderlich sind und, daß die zu einer Bestimmung zu verwendende Menge der Jodlösung B Gramm Halogen enthält, kann man den Halogenüberschuß entweder durch den Ausdruck $\frac{B-A}{B} \cdot 100$ oder durch den Ausdruck $\frac{B-A}{A} \cdot 100$ bezeichnen. Im ersten Falle erhält man den Halogenüberschuß als Prozent der im Versuche zugesetzten Halogenmenge, im zweitem Falle als Prozent der verbrauchten Halogenmenge. Indessen ist zu beachten, daß in der Praxis die Größe A , welche der wahren Jodzahl entspricht, nicht bekannt ist, sondern einer Größe, A_1 , welche angibt, wie viel Gramm Halogen unter den gegebenen Versuchsbedingungen vom Fette aufgenommen werden, eine Größe, die sowohl kleiner als größer als A sein kann, je nachdem ob die Addition unvollständig verläuft oder neben Addition auch Substitution stattfindet. Deswegen kann man auch nicht den wahren Halogenüberschuß ohne weiteres angeben; man muß sich mit einem angenäherten Werte: $\frac{B-A_1}{B} \cdot 100$ oder $\frac{B-A_1}{A_1} \cdot 100$ begnügen. Die meisten Forscher haben sich des einen oder des anderen dieser Ausdrücke bedient, jedoch ohne auf ihre eingeschränkte Gültigkeit aufmerksam zu machen und oft auch ohne Angabe, welchen Ausdruckes sie sich bei der Berechnung des Halogenüberschusses bedient haben.

Wie wir weiter unten zeigen werden, kommen wir schließlich dahin, daß wir auf Grundlage unserer Versuche die voraussichtlich wahren Jodzahlen der von uns verwendeten Fette haben berechnen können, und

hieraus haben wir dann auch den wahren Halogenüberschuß finden können, welcher in jedem einzelnen Versuche vorhanden gewesen ist.

Für die Berechnung der in den einzelnen Versuchen zu verwendenden Fettmengen haben wir, da die wahre Jodzahl im voraus unbekannt war, die Jodzahl der Fette nach Wijs, in vorschriftsgemäßer Weise bestimmt, zu Grunde gelegt. Es zeigte sich bei der Berechnung unserer Versuche, daß wir deswegen nicht genau die beabsichtigten Werte für den Halogenüberschuß erzielen, nämlich für den Ausdruck $\frac{B-A}{B} \cdot 100$ die Werte 10, 55 und 80, und für den Ausdruck $\frac{B-A}{A} \cdot 100$ die Werte 11, 120 und 400, sondern Werte, die in den verschiedenen Versuchsreihen hiervon mehr oder wenig verschieden waren.

Durch graphische Interpolation kann aber hieraus die Jodzahl für bestimmte Halogenüberschüsse gefunden werden, und die Methoden können dann auf derselben Grundlage verglichen werden.

Zur Untersuchung kamen Kokosfett, Butterfett, Olivenöl, Heringsöl, Leinöl und Tran von dem kleinen Haifisch *Spinax niger*. Die trocknenden, nicht trocknenden und halbtrocknenden Öle oder Fette sind also je mit 2 Proben repräsentiert. Der Tran von *Spinax niger* nimmt eine Sonderstelle ein, indem er außer den nämlichen stark ungesättigten Fettsäuren, die in den marinen Fetten vorhanden sind, auch reichliche Mengen stark ungesättigter hochmolekularer Alkohole und Kohlenwasserstoffe enthält.

In jedem von den erwähnten 6 Fetten wurde die Jodzahl nach v. Hübl, Waller, Wijs, Hanuš und Winkler bei den erwähnten 3 Halogenüberschüssen und einer Einwirkungsdauer von 2, 6 und 24 Stunden bestimmt. Um Zufälligkeiten und besonders den Titrierungsfehler, welcher jedenfalls nicht nur erheblich, sondern gewöhnlich die größte Fehlerquelle ist, so weit wie möglich zu eliminieren, wurden in jedem Versuche nicht weniger als 6 Parallelbestimmungen gemacht.

Eine Voraussetzung, um in jedem Versuche einen bestimmten Halogenüberschuß zu erhalten, ist es, daß die vorhandene Fettmenge nicht nur genau eingewogen wird, sondern auch, daß sie in den Parallelversuchen genau die gleiche ist. Es läßt sich gewiß durchführen, konstante Einwägungen auch von diesen kleinen Fettmengen zu machen, aber nicht ohne besondere Schwierigkeiten. Die Arbeit wird sehr zeitraubend sein und bei den leicht oxydablen trocknenden Ölen wird man auch sicher falsche Jodzahlen erhalten, da die Fette sich während der langdauernden Manipulationen oxydieren. — Der Gedanke lag deswegen nahe, statt einer Einwägung der Fette als solche, eine Abmessung von Fettlösungen gekannter Konzentration vorzunehmen. Dies Verfahren wäre auch wünschenswert, um in kurzer Zeit größere Versuchsreihen anstellen zu können. Da nur solche Lösungsmittel verwendet werden dürfen, die für die einzelnen Methoden vorgeschrieben sind d. h. Chloroform für die Methoden von v. Hübl, Waller und Hanuš,

Tetrachlorkohlenstoff für die Methoden von Wijs und Winkler, müßten also Stammlösungen mit diesen beiden Lösungsmittel bereitet werden. Von den Stammlösungen müßten dann weitere Verdünnungen gemacht werden. Die Konzentrationen der Lösungen waren so gewählt, daß die für jede Analyse gewünschte Fettmenge in 10 cm³ Lösung enthalten war.

Für das Kokosfett wurde die Jodzahl nach Wijs vorläufig zu 9,1 bestimmt, für das Butterfett zu 32, für das Olivenöl zu 84, für das Heringsöl zu 124, für das Leinöl zu 193 und für den Spinax niger Tran zu 212. Hieraus berechneten wir, daß für den geringsten Halogenüberschuß ein Liter von den zu verwendenden Fettlösungen respektive 490 — 140 — 53 — 35 — 23 und 21 Gramm von dem betreffenden Fette enthalten sollte.

Die einzuwägenden Fettmengen wurden bei der Bereitung der verschiedenen Lösungen mit einer Genauigkeit von $\pm 0,0001$ eingewogen, in einen auf Einguß kalibrierten Mefskolben von 1 Liter übergeführt und dann entweder in Chloroform oder Tetra gelöst. Die Auffüllung zur Marke geschah erst nach sorgfältiger Mischung und Temperierung der Flüssigkeit im Wasserbade von 15° C. Durch Wägung des Literkolbens wurde dann das spezifische Gewicht der Fettlösung bestimmt. Aus der so erhaltenen Stammlösung (Lösung I) wurden Verdünnungen mit der halben Konzentration (Lösung II) und mit einer Konzentration von einem Viertel (Lösung III) in der Weise bereitet¹, daß von der Lösung mit höherer Konzentration 500 cm³ in einem auf Einguß genau kalibrierten Mefskolben abgemessen, in einen genau kalibrierten Kolben auf 1000 cm³ unter Nachspülen quantitativ übergeführt wurden, und erst nach sorgfältiger Durchmischung und Temperierung zur Marke aufgefüllt. Das Gewicht des Kolbeninhalts wurde ebenfalls für die Verdünnungen festgestellt und hieraus das spezifische Gewicht berechnet.

Eine Abmessung der Fettlösungen mit einer gewöhnlichen Vollpipette läßt sich kaum wegen der Flüchtigkeit des Lösungsmittels und der sonstigen physikalischen Eigenschaften der Fettlösungen mit der erwünschten Genauigkeit durchführen. Sie ist übrigens wegen der Giftigkeit des Lösungsmittels beim Einatmen auch nicht für den Arbeitenden ganz gefahrlos. Man ist deswegen auf die Verwendung mechanischer Pipetten hingewiesen. Die gewöhnlichen automatischen Pipetten lassen sich indessen nicht anwenden, da sie unten mit einem Hahn versehen sind, welcher in Berührung mit der Flüssigkeit kommt, und da diese fettlösend ist, wird er nicht oder nur schwer dicht halten können.

Wir kamen nach mehreren Versuchen schließlich zu der folgenden Konstruktion der Pipette, oder richtiger gesagt, unserer Abmeßvorrichtung. Wie aus Fig. 1 ersichtlich sein wird, besteht sie aus einer Pipette, welche oben mit einer verschließbaren Saugeinrichtung versehen ist. Die Pipette,

¹ Die Lösungen des Leinöls wurden jedoch in anderer Weise bereitet, nämlich durch direkte Einwägung der für jede von den 3 Fettlösungen notwendigen Menge Leinöl.

eine gewöhnliche Vollpipette, welche bei der Marke eng ausgezogen, dann schwach nach der Seite gebogen und abgeschnitten wird. Als Saugvorrichtung dient ein Gummiball, der am Stiele eines umgekehrten Scheidetrichters angebracht ist. Wenn die Spitze der Pipette in der abzumessenden Flüssigkeit angebracht ist, wird der flachgedrückte Gummiball über die

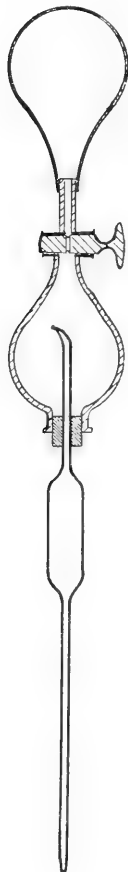


Fig. 1.
Die Pipette für
Fett- und Jod-
lösungen.

Spitze des Stieles des Scheidetrichters gezogen und der Hahn desselben geöffnet. Indem der Ball sich ausdehnt wird wegen der Druckverminderung im Trichter die Flüssigkeit in die Pipette hinaufgezogen. Sobald diese vollgesaugt ist, d. h. einige Tropfen aus der oberen Spitze im Scheidetrichter ausspritzen, wird der Hahn des Scheidetrichters geschlossen und der Gummiball entfernt. Nach wenigen Sekunden (5—10) stellt sich Gleichgewicht ein. Die Flasche mit der Jodlösung wird entfernt. Der Hahn wird jetzt geöffnet und der Inhalt der Pipette läuft hinaus und wird aufgesammelt. Wenn die eng ausgezogene Pipettenspitze stets genau gleich tief in die abzumessende Flüssigkeit gesenkt (gewöhnlich 0,5 cm.) und die Nachlaufzeit konstant gehalten wird (20 Sekunden), gelingt es in dieser Weise, sehr genaue Abmessungen einer und derselben Flüssigkeit zu erhalten.

Als Beispiel hierfür geben wir die folgenden, in Reihe nach einander gemachten Abmessungen derselben Lösung an. Es wurde gefunden: 16,9529 — 16,9535 — 16,9520 — 16,9526 — 16,9514 g oder im Mittel 16,9525 g. Die Differenz zwischen Minimum und Maximum beträgt 2,1 mg. Der wahrscheinliche Fehler des Mittelwertes wird $\pm 0,33$ mg sein, und der wahrscheinliche Fehler einer Einzelbestimmung $\pm 0,75$ mg. Letzterer entspricht für 10 cm³ einem Fehler von $\pm 0,0005$ cm³, was für einen Fettinhalt von 0,5 g einem Fehler von $\pm 0,000025$ g entsprechen würde, mit anderen Worten, eine Genauigkeit bei der Abmessung der Fettlösung, welche erheblich größer ist, als diejenige, welche bei Einwägung vom Fette selbst möglich ist. Der Fehler bei der Abmessung nach der verwendeten Methode ist tatsächlich so gering, daß er selbst für Fette mit Jodzahlen auf 200 (g/100 g) nur 1 in der zweiten Dezimale entspricht.

Da die verschiedenen Fettlösungen, hauptsächlich je nach ihrer Konzentration eine verschiedene Viskosität und Oberflächenspannung haben, wird der abgemessene Inhalt derselben Pipette nicht stets gleich sein, sondern mit den genannten Eigenschaften der Flüssigkeit wechseln. Deswegen müßte die Pipette für jede einzelne Fettlösung geeicht werden. Dies geschah durch Wägung der entnommenen Fettlösung. Aus dem Mittelgewichte von 6 Abmessungen wurde durch Division mit dem spezifischen Gewichte der Lösung das abgegebene Volumen und da die Konzentration bekannt war, die abgemessene Fettmenge in Gramm bestimmt.

Tabelle I.
Eichungstabelle für eine „Fettpipette“.

Konzentration der Fettlösungen (Chloroform resp. Tetrachlor- kohlenstoff)	Von der Chloroformlösung gibt die Pipette		Von der Tetralösung gibt die Pipette	
	cm ³	= g Fett	cm ³	= g Fett
A I: 490,00 g/l Kokosfett	10,8975	5,3398	10,921	5,3547
A II: $\frac{490,00}{2}$ - —	11,012	2,6979	11,049	2,7070
A III: $\frac{490,00}{4}$ - —	11,018	1,3497	11,088	1,3583
B I: 140 - Butterfett	11,020	1,5428	11,080	1,5512
B II: $\frac{140}{2}$ - —	11,006	0,7704	11,098	0,7769
B III: $\frac{140}{4}$ - —	10,991	0,3847	11,090	0,3325
C I: 53,053 - Olivenöl	11,000	0,5836	11,097	0,5887
C II: $\frac{53,053}{2}$ - —	10,984	0,2914	11,087	0,2941
C III: $\frac{53,053}{4}$ - —	10,967	0,1455	11,072	0,14685
D I: 35,666 - Heringsöl	10,991	0,3920	11,094	0,3957
D II: $\frac{35,666}{2}$ - —	10,974	0,1957	11,078	0,19755
D III: $\frac{35,666}{4}$ - —	10,957	0,0977	11,062	0,09863
E I: 23,6068 - Leinöl	10,982	0,25925	11,086	0,26034
E II: 11,9436 - —	10,965	0,13096	11,070	0,13275
E III: 6,0760 - —	10,946	0,06650	11,084	0,06981
F I: 21,047 - Spinax Tran	10,978	0,23105	11,083	0,2333
F II: $\frac{21,047}{2}$ - —	10,962	0,11536	11,065	0,11644
F III: $\frac{21,047}{4}$ - —	10,945	0,05759	11,048	0,05813

In der Tabelle I sind diese Werte für die hauptsächlich verwendete Pipette (unsere „Normalpipette“ für Fettlösungen) und sämtliche Fettlösungen wiedergegeben.

Für andere Pipetten wurden die abgemessenen Fettmengen durch Multiplikation der Werte in Tabelle I mit einem Faktor festgelegt. Dieser Faktor wurde erhalten durch Division des Wassergewichtes der zu eichen- den Pipette mit dem Wassergewichte unserer „Normalpipette“. Er betrug für die von uns gewöhnlich als Reserve benutzte Fettpipette 0,95978.

Über die Abmessung der Fettlösungen ist noch anzuführen, daß vor der Abmessung eine genaue Temperierung auf 15° C. stattfand, daß die Vorratsflaschen während der Abmessung gut isoliert waren, wie es eben- falls mit dem mittleren Teil der Pipette der Fall war. Das Arbeitszimmer

Tabelle II.

Arbeitsschema für die Abmessung und Titrierung von 6 Parallelbestimmungen in
3 Fettlösungen bei einer Einwirkungsdauer von 2, 6 und 24 Stunden.

Die Abmessung beendet					Die Retitrierung des Halogenüberschusses wurde angefangen					
um	I		II		I		II		III	
	für	in Flasche	für	in Flasche	um	für Flasche	um	für Flasche	um	für Flasche
Uhr					Uhr		Uhr		Uhr	
0,00	Blinde Probe	Bl. 1			2,00	Bl. 1				
0,02	—	—	Blinde Probe	Bl. a		—	6,02	Bl. a		
0,04	—	- 2	—	- b	2,04	- b			24,04	Bl. 2
0,06	—	- 3					6,06	- 3		
0,08	Fettlösung I	Nr. 1		- c	2,08	Nr. 1			24,08	Bl. c
0,10	—	- 2					6,10	Nr. 2		
0,12	—	- 3	Fettlösung III	Nr. 37	2,12	Nr. 37			24,12	Nr. 3
0,14	—	- 4					6,14	Nr. 4		
0,16	—	- 5	—	- 38	2,16	Nr. 5			24,16	Nr. 38
0,18	—	- 6					6,18	Nr. 6		
0,20	—	- 7	—	- 39	2,20	Nr. 39			24,20	Nr. 7
0,22	—	- 8					6,22	Nr. 8		
0,24	—	- 9	—	- 40	2,24	Nr. 9			24,24	Nr. 40
0,26	—	- 10					6,26	Nr. 10		
0,28	—	- 11	—	- 41	2,28	Nr. 41			24,28	Nr. 11
0,30	—	- 12					6,30	Nr. 12		
0,32	—	- 13	—	- 42	2,32	Nr. 13			24,32	Nr. 42
0,34	—	—								
0,36	—	- 14	—	- 43			6,36	Nr. 43	24,36	Nr. 14
0,38	—	- 15			2,38	Nr. 15				
0,40	—	- 16	—	- 44			6,40	Nr. 44	24,40	Nr. 16
0,42	—	- 17			2,42	Nr. 17				
0,44	—	- 18	—	- 45			6,44	Nr. 45	24,44	Nr. 18
1,00	Fettlösung II	- 19	—	- 46			7,00	Nr. 46	25,00	Nr. 19
1,02	—	- 20			3,02	Nr. 20				
1,04	—	- 21	—	- 47			7,04	Nr. 47	25,04	Nr. 21
1,06	—	- 22			3,06	Nr. 22				
1,08	—	- 23	—	- 48			7,08	Nr. 48	25,08	Nr. 23
1,10	—	—								
1,12	—	- 24	—	- 49	3,12	Nr. 24			25,12	Nr. 49
1,14	—	- 25					7,14	Nr. 25		
1,16	—	- 26	—	- 50	3,16	Nr. 50			25,16	Nr. 26
1,18	—	- 27					7,18	Nr. 27		
1,20	—	- 28	—	- 51	3,20	Nr. 28			25,20	Nr. 51
1,22	—	- 29					7,22	Nr. 29		
1,24	—	- 30	—	- 52	3,24	Nr. 52			25,24	Nr. 30
1,26	—	- 31					7,26	Nr. 31		
1,28	—	- 32	—	- 53	3,28	Nr. 32			25,28	Nr. 53
1,30	—	- 33					7,30	Nr. 33		
1,32	—	- 34	—	- 54	3,32	Nr. 54			25,32	Nr. 34
1,34	—	- 35					7,34	Nr. 35		
1,36	—	- 36	Blinde Probe	Bl. d	3,36	Nr. 36			25,36	Bl. d
1,38	Blinde Probe	Bl. 4					7,38	Bl. 4		
1,40	—	- 5	—	- e	3,40	Bl. e			25,40	Bl. 5
1,42	—	—	—	- f			7,42	Bl. f		
1,44	—	- 6			3,44	- 6				

wurde ferner auch so weit wie möglich auf einer Temperatur von 15° C. gehalten. Wegen der großen Flüchtigkeit des Lösungsmittels konnte man sich denken, daß das Verdampfen desselben während der Abmessung von langen Serien eine Konzentrationsänderung hätte veranlassen können. Wie wir uns überzeugt haben, war dies jedoch nicht der Fall.

Von der Jodlösung sollen nach den verschiedenen Methoden, je nachdem ihre Normalität etwa $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{10}$ normal ist, 25 oder 50 cm³ verwendet werden. Für die Abmessung derselben haben wir automatische Pipetten von der nämlichen Konstruktion wie für die Fettlösungen benutzt, und deswegen auch für die Abmessung der Jodlösungen eine entsprechend große Genauigkeit erreicht.

Wir können deswegen behaupten, daß wir, sowohl was die angewandte Fettmenge wie die hinzugefügte Jodlösung betrifft, eine sehr hohe Genauigkeit erreicht haben. Auch was die Titrierung der Kontrollproben, wie der Hauptproben betrifft, haben wir die Genauigkeit so weit wie möglich geschärft. Die Thiosulfatlösung ($\frac{1}{10}$ n.) wurde im Versuchszimmer in einer 10-Liter Flasche vorrätig gehalten und durch eine Schellbachbürette mit automatischer Nullpunkteinstellung abgemessen. Ihr Titer wurde häufig in der gewöhnlichen Weise mit Hilfe von Kaliumbichromat genau festgelegt. Bei einigen der Methoden war es möglich, die Endreaktion mit einer Genauigkeit von einem Tropfen zu beobachten d. h. auf 0,025 cm³.

Der Titrierungsfehler wird sich bekanntlich je nach der Größe der eingewogenen Fettmenge und der Höhe der Jodzahl verschieden geltend machen. Für Einzelbestimmungen dürfte der maximale Fehler bei den guten Methoden, d. h. Methoden, wo die Endreaktion scharf beobachtet werden kann, für Fette mit einer Jodzahl auf 100 und einem Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ von 80, im Werte der Jodzahl etwa 0,5 Einheiten ausmachen.

Wenn indessen, wie schon früher erwähnt, gewöhnlich 6 Parallelbestimmungen gemacht werden und die Zahl der blinden Proben ebenfalls gewöhnlich, 6 ist, wird der Titrierungsfehler sich selbstverständlich bedeutend weniger geltend machen. Bei geringeren Halogenüberschüssen (resp. größeren Einwägungen) ist der durchschnittliche Titrierungsfehler auch prozentisch geringer.

Wir schätzen unter den oben gemachten Voraussetzungen den durchschnittlichen Gesamtfehler in unseren Versuchen auf kaum $\pm 0,05$ 0/0. Im Gegensatze hierzu möchten wir erwähnen, daß bei dem gewöhnlich verwendeten Arbeitsverfahren mit Einwägung von dem Fette und 2 Parallelproben, sowie 2 blinden Proben der Gesamtfehler selbst bei vorsichtig durchgeführter Titrierung auf $\pm 0,5$ 0/0 geschätzt werden darf und oft ± 1 0/0 ausmacht.

Deswegen glauben wir sagen zu dürfen, daß wir ein Verfahren verwendet haben, wo die zufälligen Fehler so weit wie möglich reduziert worden sind, und jedenfalls im Vergleiche mit dem, was sonst bei Jodzahl-

bestimmungen gewöhnlich der Fall ist, so gering sind, daß sie praktisch genommen als völlig eliminiert anzusehen sein dürften. Somit dürfen wir auch behaupten, daß die Variationen in unseren Versuchen tatsächlich auf den untersuchten Versuchsbedingungen z. B. Einwirkungsdauer oder Halogenüberschuß zurückzuführen sind und nicht auf Nebenumstände.

Nach dem in Tabelle II wiedergegebenen Arbeitsschema können in anderthalb Stunden 54 Jodzählbestimmungen in Arbeit genommen werden.

Es müssen sich dann bei der Arbeit drei Herren beteiligen. Zwei Herren arbeiten in der Weise zusammen, daß der eine die Fettlösungen abmißt, der zweite setzt dann unmittelbar die Jodlösung hinzu. Die Arbeit nimmt für jeden Herren kaum 2 Minuten in Anspruch. Die Versuchszeit wird von dem Zusatz der Jodlösung ab gerechnet. Der dritte Herr mißt sowohl die Fettlösung wie die Jodlösung ab, und hat deswegen 4 Minuten zur Verfügung.

Bei der Abmessung der ersten blinden Probe wird eine Rennuhr in Gang gesetzt, und es gelingt dann glatt, die im Schema angegebenen Zeiten genau innezuhalten. Jede einzelne blinde Probe wird ebenso wie die Hauptprobe sofort nach der beendeten Abmessung in einem Schrank hingestellt und da im Dunklen in Ruhe bis zur Titrierung gelassen. Eine Ausnahme wird für die Winkler'sche Methode gemacht, indem die Proben hier nach der Vorschrift ein paarmal während der Versuchszeit vorsichtig bewegt werden.

Alle im Versuchsschema verzeichneten 54 Proben mit den zugehörigen blinden Proben werden fertig abgemessen, ehe die erste Probe titriert werden soll. Wenn an demselben Tage nicht mehr als die 54 Bestimmungen angefangen werden sollen, übernimmt einer von den 3 Herren die Titrierung der Proben und macht nach dem Schema eine solche binnen 4 Minuten fertig.

Gewöhnlich verfahren wir indessen bei unseren Hauptversuchen in der Weise, daß an einem Vormittage 108 Proben in drei und einer halben Stunde angefangen wurden. Die ersten 18 Titrierungen (mit einer Einwirkungsdauer von 2 Stunden) müßten dann von einem vierten Herren übernommen werden. Die nach 6 und 24 Stunden auszuführenden Titrierungen wurden aber gewöhnlich von einem der 3 bei der Abmessung beschäftigten Herren gemacht. In dieser Weise gelang es also an 2 Tagen, 6 Parallelbestimmungen an 6 Fettlösungen bei 3 Werten der Einwirkungsdauer durchzuführen.

Ehe wir auf unsere Versuchsergebnisse eingehen möchten wir zuerst die zugrunde gelegten Vorschriften für die Ausführung der einzelnen Methoden kurz besprechen:

1) *Die v. Hübl'sche Methode.* Es werden [3] als Stammlösungen verwendet: „a) 25 g Jod in 500 cm³, b) 300 g Quecksilberchlorid (Sublimat) in der gleichen Menge 95 volumprocentigen fuselfreiem Alkohol gelöst“.

Die beiden Lösungen werden nach der ursprünglichen v. Hübl'schen Vorschrift vereinigt und nach 6- bis 12-stündigem Stehen in Gebrauch genommen. Nach anderen Vorschriften [4] werden gleiche Teile beider Lösungen wenigstens 48 Stunden vor dem Gebrauche vereinigt.

Von dem Fette werden je nach der Größe der Jodzahl 0,1—1,0 g Fett eingewogen und in einer Flasche von 500 cm³ Inhalt mit 15 cm³ Chloroform in Lösung gebracht. Es werden 25 cm³ von der Jodlösung hinzugefügt. Nach der ursprünglichen Vorschrift von v. Hübl wurden 10 cm³ Chloroform und 20 cm³ Jodlösung auf 0,2—1 g Fett verwendet. Die Reaktion soll nach v. Hübl binnen 2 Stunden vollendet sein, und die meisten neueren Analysevorschriften geben diese Einwirkungsdauer an. In anderen Vorschriften wird jedoch eine längere Einwirkungsdauer vorgeschrieben, so z. B. für trocknende Öle wenigstens 16—18 Stunden.

Nach beendeter Einwirkung werden 15 cm³ einer Kaliumjodidlösung (100 g/l) hinzugefügt und dann einpaar Hundert cm³ Wasser, wonach das übrig gebliebene freie Jod mit $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung zurücktitriert wird, zuletzt mit Stärkelösung als Indikator.

Für die Titerstellung der Jodlösung, und um die Reinheit der Reagentien (namentlich des Chloroforms) zu kontrollieren, wird gleichzeitig ein blinder Versuch d. h. ein solcher ohne Anwendung von Fett angestellt. Bei längerer Einwirkungsdauer sind wenigstens 2 blinde Proben anzustellen, die eine ist zu Beginn, die zweite am Ende der Versuchszeit zu titrieren und das Mittel dieser beiden Werte wird dann als der Titer der Jodlösung genommen. Es wird in vielen Vorschriften darauf aufmerksam gemacht, daß das Chloroform innerhalb der Versuchszeit keine Jodlösung verbrauchen darf. Wir haben stets Chloroform pro narcosi verwendet.

Es wird von sämtlichen Autoren auf diesem Gebiete gefordert, daß der zu verwendende Alkohol frei von Aldehyden sein soll. Wir haben solchen in der gewöhnlichen Weise durch Ausfällen von Silberoxyd im Alkohol und nachfolgender Destillation gewonnen. Wenn das erste Sechstel des Destillats nicht mitgenommen wird, erhält man einen Alkohol, der mit dem Schiff'schen Reagens keine Reaktion auf Aldehyd gibt. Indessen machen wir darauf aufmerksam, daß der gewöhnliche Feinsprit sich auch direkt verwenden läßt. Wenn der Sprit dagegen durch Aldehyd wirklich verunreinigt ist, geht der Titer rasch zurück, vermutlich durch die Oxydation des Aldehyds zu Essigsäure.

Die beiden Stammlösungen wurden in unseren Versuchen stets 24 Stunden vorher zusammengemischt. Für sämtliche Versuche sind die Stammlösungen demselben Vorrat entnommen. — Nach den Erfahrungen von FAHRION [5] findet eine Änderung des Titors bei getrennter Verwahrung der Stammlösungen nicht statt. Der Anfangstiter der Hübl'schen Jodlösung war deswegen auch in sämtlichen unserer Versuche fast der gleiche. Da indessen sowohl das Abmessen wie das Titrieren mehrere Stunden in

Anspruch nahm, mußten in unseren Serien blinde Versuche in bestimmten Zeitintervallen angestellt werden. Für die dazwischen liegenden Zeitpunkte wurden die Werte graphisch bestimmt. Wir haben deswegen bei sämtlichen Bestimmungen in einer Serie den Wert eines blinden Versuches sowohl beim Anfang wie Schluß der Einwirkungszeit mit großer Genauigkeit festlegen können.

Die oben angegebene Vorschrift für die Hübl'sche Methode haben wir mit Ausnahme der Menge des Chloroforms genau befolgt. Wir haben nämlich statt 15 cm^3 nur etwas mehr als 10 cm^3 desselben verwendet. Diese letztere Menge war indessen stets hinreichend, um klare Lösungen zu geben, auch nach Zusatz der Jodlösung.

Es sei schon an dieser Stelle erwähnt, daß wir bei der Berechnung nicht wie v. Hübl von der blinden Probe beim Abschluß des Versuches ausgegangen sind, sondern von dem Werte der blinden Probe sowohl beim Anfange wie am Schluß des Versuches. Wir haben indessen nicht das Mittel dieser beiden Werte zu Grunde gelegt, wie es gewöhnlich bei der Verwendung zweier blinden Proben der Fall ist, sondern dieselben in einer von uns für die Korrektur der Hübl'schen Methode abgeleiteten Formel eingeführt (vergl. hierüber S. 53).

2) *Die Waller'sche Methode* ist in der Anwendung einer salzsäurehaltigen Jodlösung von der Hübl'schen Methode verschieden.

Nach der ursprünglichen Vorschrift WALLERS [6] werden 25 g Jod in 250 cm^3 Spiritus gelöst und mit einer Lösung von 25 g Sublimat in 200 cm^3 Spiritus und 25 cm^3 Salzsäure vom Spez. Gewicht 1,19 versetzt und dann mit Spiritus auf 500 cm^3 aufgefüllt.

Gewöhnlich werden jedoch Stammlösungen mit der von v. Hübl angegebenen Konzentration verwendet und die Salzsäure erst nach dem Mischen der beiden Lösungen hinzugefügt. Diese Jodlösung ist recht haltbar.

Wir haben in unseren Versuchen die Salzsäure der Sublimatlösung hinzugefügt, und die beiden Stammlösungen erst 24 Stunden vor dem Gebrauche gemischt. Unsere Absicht war nämlich nicht die Haltbarkeit der Waller'schen Jodlösung zu studieren, sondern den Einfluß der Salzsäure auf die Reaktion zwischen Jodlösung und Fetten. Deswegen galt es, die Verhältnisse so weit wie möglich gleich denjenigen der Hübl'schen Methode zu machen, und hier wurden ja die Stammlösungen stets 24 Stunden vor dem Gebrauche gemischt.

3) *Die Wijs'sche Methode*. Hier kommt als Jodlösung Jodmonochlorid in Eisessig zu Verwendung [7].

Wir bereiteten dieselbe durch Lösen von 7,8 g kristallisierten Jodtrichlorids in 250 cm^3 Eisessig und fügten 8,5 g Jod hinzu¹. Nach Er-

¹ In mehreren Handbüchern (z. B. „Leukowitsch“ 1905, „Holde“ 1913) wird fälschlich 9,4 g Jodtrichlorid und 7,2 g Jod auf 1 Liter Lösung angegeben. Dies gibt eine chlorreichere Lösung als dem Jodmonochlorid entsprechend außerdem eine erhöhte Normalität (0,26 gegen richtig 0,20) und deswegen falsche Resultate (vergl. S. 63).

hitzen auf dem Wasserbade in einem Kolben mit Rückflußkühler, bis alles Jod gelöst ist, wird die Flüssigkeit mit Eisessig auf 1 Liter verdünnt. Wenn nicht ein sicheres Jodtrichlorid vorrätig ist, empfiehlt es sich, 13 g Jod in 1 Liter Eisessig zu lösen und trockenes Chlorgas einzuleiten bis der Titer der Flüssigkeit verdoppelt ist. Man erkennt übrigens den Punkt, wo nur Jodmonochlorid vorhanden ist, an einem Farbenumschlag. Wie wir später zeigen werden, ist die Wijs'sche Jodlösung in ihrer Wirkung stark von dem Verhalten Jod:Chlor beeinflusst und es gilt darauf aufmerksam zu sein, daß man wirklich eine Jodmonochloridlösung erhält, und vor allem keinen Überschuß an Chlor.

Sehr wichtig, besonders bei der Bereitung der Jodlösung aus Jodtrichlorid, ist es, daß der Eisessig nicht zu wasserhaltig ist, sonst wird nämlich ein Teil des Chlors im Jodtrichlorid Salzsäure bilden und die Jodlösung hierdurch im Verhalten zu ihrem Jodgehalte chlorärmer und deshalb nicht hinreichend wirksam werden.

Die zu verwendende Essigsäure muß außerdem keine Verunreinigungen enthalten, die von Kaliumbichromat oxydiert werden. Wir haben die für diese Methode wie die für diejenige von Hanuš verwendete Essigsäure durch Digerieren in 24 Stunden mit 10 g Kaliumbichromat und 10 g wasserfreien Natriumazetats pro Liter und darauf folgender Destillation gereinigt.

Nach den Vorschriften kommen je nach der Ungesättigtheit des Fettes 0,1—0,5 g desselben zur Verwendung. Das eingewogene Fett wird in trockenen Flaschen mit 10 cm³ Tetrachlorkohlenstoff gelöst und mit 25 cm³ der Jodlösung 3 Stunden lang dunkel verwahrt, wonach einige Hundert cm³ Wasser und 10 cm³ Jodkaliumlösung (100 g/l) hinzugefügt werden, und das Jod dann mit $\frac{1}{10}$ normaler Thiosulfatlösung titriert.

Da die Wijs'sche Jodlösung haltbar ist, braucht nur eine blinde Probe gemacht zu werden, welche gleich lange Zeit wie die Analyse hingestellt wird. —

4) *Die Methode von Hanuš.* Hier wird eine Lösung von 20 g Jodmonobromid in 1 Liter Eisessig verwendet [8]. Je nach der Ungesättigtheit der Fette kommen 0,1—0,7 g Fett zur Verwendung, welche in einer Flasche von 200 cm³ Inhalt in 10 cm³ Chloroform gelöst und mit 25 cm³ der Jodlösung gemischt werden. Nach nur 15 Minuten werden 15 cm³ Kaliumjodidlösung (100 g/l) hinzugefügt und dann direkt mit $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung ohne Stärke als Indikator zurücktitriert. Unseren Erfahrungen nach geschieht die Titrierung am besten nach Verdünnung mit Wasser und mit Stärke als Indikator, und wir wandten stets dies Verfahren an. Da auch die Hanuš'sche Jodlösung haltbar ist, wird ebenfalls hier nur eine blinde Probe angestellt, die während der Versuchszeit aufbewahrt wird.

Der Eisessig muß rein sein. Wir haben denselben wie oben für die Wijs'sche Methode angegeben, gereinigt.

Jodmonobromid ist nicht Handelsware. Dasselbe wird in der folgenden Weise glatt im Laboratorium aus den Elementen dargestellt: Die

gewünschte Menge Jod wird in einer tubulierten Retorte eingewogen und dann ein wenig mehr als die äquivalente Brommenge tropfenweise durch einen Scheidetrichter hinzugefügt. Die Retorte wird in einem Wasserbade auf 50°C gehalten. Das überschüssige Brom wird durch Durchleiten von Kohlendioxyd entfernt. Nach Abkühlen erstarrt die Masse zu einem festen kristallinen Produkte, das direkt eingewogen werden kann. In der eben angegebenen Weise läßt sich die Darstellung sicher und ohne irgendwelche Unannehmlichkeiten durchführen, im Gegensatz zu dem zuweilen in der Literatur vorgeschriebenen Zusammenreiben der Elemente in einer Reibschale.

5) *Die Winkler'sche Methode* [9]. Von dem Fette werden 0,1—0,25 g eingewogen und in einer Flasche von 250 cm^3 Inhalt mit 10 cm^3 Tetrachlorkohlenstoff in Lösung gebracht. Es werden zuerst 50 cm^3 $1/10$ n. Kaliumbromatlösung, dann 10 cm^3 Salzsäure (Sp. Gew. 1,050) und schließlich 1—1,5 g festen Kaliumbromids hinzugefügt. Wir verwendeten statt Salzsäure Schwefelsäure (500 g/l). Nach halb-bis vierstündiger Aufbewahrung im Dunklen wird 1 g Kaliumjodid oder $10\text{—}15\text{ cm}^3$ einer Kaliumjodidlösung (100 g/l) hinzugefügt und dann sofort mit $1/10$ n. Thiosulfatlösung titriert¹. Eine blinde Probe wird selbstverständlich auch hier angestellt.

Wir möchten hinzufügen, daß die Beschreibung der Methoden bei den verschiedenen Autoren zuweilen ein wenig verschieden ist. Dies ist z. B. für die Einwirkungsdauer der Fall, was für mehrere der Methoden völlig entscheidend ist.

Die Größe der zu verwendenden Flaschen wechselt für die verschiedenen Methoden bei den einzelnen Autoren zwischen 200 und 800 cm^3 Inhalt. Wir haben stets solche von 500 cm^3 Inhalt verwendet, da wir diese, besonders bei der Titrierung, sehr bequem fanden. Es wurde speziell untersucht, daß der Stöpsel gut eingeschliffen war.

¹ Nachdem wir längst unsere Versuche abgeschlossen hatten, schlug WINKLER vor, das Titrieren des zurückgebliebenen Broms bromometrisch vorzunehmen, und zwar in der Weise, daß das Brom zuerst durch Behandlung mit einem Überschusse einer titrierten Arseniklösung gebunden und das überschüssige Arsen schließlich mit Kaliumbromatlösung in bekannter Weise bestimmt wird [17]. In dieser Weise spart man das kostspielige Jodkalium. Für den Wert der Winkler'schen Methode als Jodzählmethode ist dies Verfahren beim Titrieren ohne Bedeutung.

Zusammenfassende Übersicht der Versuchsprotokolle.

Als Beispiel für die Durchführung des auf Seite 14 angegebenen Arbeitsschemas haben wir in der Tabelle III die Titrierungsprotokolle für eine am 4. und 5. Dezember 1920 ausgeführte Untersuchung eines Olivenöls (C) nach der Wijs'schen Methode wiedergegeben.

Tabelle III.

Titrierungsprotokolle der Untersuchung eines Olivenöls 4.—5. Dezbr. 1920.

I			II			III		
Flasche	titriert um	mit 1/10 n. Thiosulfat-lösung	Flasche	titriert um	mit 1/10 n. Thiosulfat-lösung.	Flasche	titriert um	mit 1/10 n. Thiosulfat-lösung.
	Uhr	cm ³		Uhr	cm ³		Uhr	cm ³
Bl. 1	2,00	43,60	Bl. a	6,02	44,23	Bl. 2	24,04	43,65
- b	2,04	44,19	- 3	6,06	43,67	- c	24,08	44,14
Nr. 1	2,08	5,55	Nr. 2	6,10	5,28	Nr. 3	24,12	4,98
- 37	2,12	33,95	- 4	6,14	5,40	- 38	24,16	33,70
- 5	2,16	5,50	- 6	6,18	5,22	- 7	24,20	4,98
- 39	2,20	33,90	- 8	6,22	5,48	- 40	24,24	33,60
- 9	2,24	5,55	- 10	6,26	5,25	- 11	24,28	5,09
- 41	2,28	33,85	- 12	6,30	5,40	- 42	24,32	33,60
- 13	2,32	5,50				- 14	24,36	5,00
			Nr. 43	6,36	33,80	- 16	24,40	5,04
Nr. 15	2,38	5,50	- 44	6,40	33,80	- 18	24,44	5,08
- 17	2,42	5,60	- 45	6,44	33,78			
			Nr. 46	7,00	33,75	Nr. 19	25,00	24,25
Nr. 20	3,02	24,65	- 47	7,04	33,80	- 21	25,04	24,25
- 22	3,06	24,73	- 48	7,08	33,75	- 23	25,08	24,23
						- 49	25,12	33,50
Nr. 24	3,12	24,75	Nr. 25	7,14	24,54	- 26	25,16	24,25
- 50	3,16	33,95	- 27	7,18	24,60	- 51	25,20	33,55
- 28	3,20	24,80	- 29	7,22	24,55	- 30	25,24	24,27
- 52	3,24	33,85	- 31	7,26	24,55	- 53	25,28	33,52
- 32	3,28	24,87	- 33	7,30	24,57	- 34	25,32	24,26
- 54	3,32	33,86	- 35	7,34	24,59	Bl. d	25,36	44,09
- 36	3,36	24,78	Bl. 4	7,38	43,42	- 5	25,40	43,50
Bl. e	3,40	44,09	- 1	7,42	44,14			
- 6	3,44	43,60						

Hieraus können nun mit Hilfe von Tabelle II die zusammengehörigen Werte für die Berechnung der Jodzahlen zusammengeführt werden, wie wir es im folgenden als Beispiel einer Berechnung gemacht haben.

Berechnung der Jodzahl nach Wijs in einem Olivenöl nach den Versuchsprotokollen vom 4. und 5. Dezember 1920.

Berechnung der Jodzahl nach Wijs in einem Olivenöl etc.

C I. Erste Reihe. Geringster Halogenüberschuß.

Die Fettlösung enthielt 53,053 g Olivenöl. Die verwendete Pipette gab nach Tabelle I $11,000 \text{ cm}^3 = 0,5836 \text{ g}$ Fett ab.

$$\text{Der Ausdruck } \frac{127 i}{100 f} = 2,16532.$$

Die Titrierungen zeigten:

Für die blinden Proben:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Bl. a	44,23 cm^3	} 44,15 cm^3 .
- b	44,19 -	
- c	44,14 -	
- d	44,09 -	
- e	44,09 -	
- f	44,14 -	

Für 2 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 1	5,55 cm^3	} 5,53 cm^3
- 5	5,50 -	
- 9	5,55 -	
- 13	5,50 -	
- 15	5,50 -	
- 17	5,60 -	

∴ Halogenverbrauch:
44,1 — 55,53 = 38,62.

$$\text{Jodzahl} = 83,62.$$

Für 6 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 2	5,28 cm^3	} 5,34 cm^3
- 4	5,40 -	
- 6	5,22 -	
- 8	5,48 -	
- 10	5,25 -	
- 12	5,40 -	

∴ Halogenverbrauch:
44,15 — 5,34 = 38,81 cm^3 .

$$\text{Jodzahl} = 84,04.$$

Für 24 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch ¹ / ₁₀ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 3	4,98 cm ³	} 5,03 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 44,15 — 5,03 = 39,12.
- 7	4,98 -	
- 11	5,09 -	
- 14	5,00 -	
- 16	5,04 -	
- 18	5,08 -	

Jodzahl = 84,71.

C II. Zweite Reihe. Mittlerer Halogenüberschuß.

Die Fettlösung enthielt $\frac{53,053}{2} = 26,5265$ g Olivenöl. Die verwendete Pipette gibt nach Tabelle I $10,984$ cm³ = $0,2914$ g Olivenöl ab.

Der Ausdruck $\frac{127f}{100i}$ somit = $4,33659$.

Die Titrierungen zeigten:

Für die blinden Proben:

Mittelwert $44,15$ cm³ ¹/₁₀ n. Thiosulfatlösung (vergl. die Detaillien in Versuch C I).

Für 2 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch ¹ / ₁₀ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 20	24,65 cm ³	} 24,76 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 44,15 — 24,76 = 19,39 cm ³ .
- 22	24,73 -	
- 24	24,75 -	
- 28	24,80 -	
- 32	24,87 -	
- 36	24,78 -	

Jodzahl = 84,08.

Für 6 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch ¹ / ₁₀ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 25	24,54 cm ³	} 24,57 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 44,15 — 14,57 = 29,58 cm ³ .
- 27	24,60 -	
- 29	24,55 -	
- 31	24,55 -	
- 33	24,57 -	
- 35	24,59 -	

Jodzahl = 84,89.

Für 24 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 19.....	24,25 cm ³	} 24,25 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 44,15 - 24,25 = 19,90 cm ³ .
- 21.....	24,25 -	
- 23.....	24,23 -	
- 26.....	24,25 -	
- 30.....	24,27 -	
- 34.....	24,26 -	
		<i>Jodzahl = 86,28.</i>

C III. Dritte Reihe. Größter Halogenüberschuß.

Die Fettlösung enthielt $\frac{53,053}{2} = 13,2633$ g Olivenöl. Die verwendete Pipette gibt nach der Tabelle I 10,967 cm³ = 0,1455 g Olivenöl ab, und der Ausdruck $\frac{127f}{100i}$, somit = 8,68510.

Die Titrierungen ergaben:

Für die blinden Proben:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Bl. 1.....	43,60 cm ³	} 43,58 cm ³ .
- 2.....	43,65 -	
- 3.....	43,67 -	
- 4.....	43,42 -	
- 5.....	43,50 -	
- 6.....	43,60 -	

Für 2 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 37.....	33,95 cm ³	} 33,89 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 43,58 - 33,89 = 9,69 cm ³ .
- 39.....	33,90 -	
- 41.....	33,85 -	
- 50.....	33,95 -	
- 52.....	33,85 -	
- 54.....	33,86 -	
		<i>Jodzahl = 84,16.</i>

Für 6 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 43.....	33,80 cm ³	} 33,78 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 43,58 — 33,78 = 9,80 cm ³ .
- 44.....	33,80 -	
- 45.....	33,78 -	
- 46.....	33,75 -	
- 47.....	33,80 -	
- 48.....	33,75 -	

Jodzahl = 85,11.

Für 24 Stunden Einwirkungsdauer:

Flasche.	Verbrauch $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung.	
Nr. 38.....	33,70 cm ³	} 33,58 cm ³ ∴ Halogenverbrauch: 43,58 — 33,58 = 10,00 cm ³ .
- 40.....	33,60 -	
- 42.....	33,60 -	
- 49.....	33,50 -	
- 51.....	33,55 -	
- 53.....	33,52 -	

Jodzahl = 86,85.

Aus dieser Berechnung geht hervor, daß die mittlere Jodzahl des vorliegenden Olivenöls bei den 3 Halogenüberschüssen die folgenden Werte hat:

Nach 2 Stunden Einwirkungszeit:	83,62 — 84,08 — 84,16
— 6 — — „ —	84,04 — 84,89 — 85,11
— 24 — — „ —	84,71 — 86,28 — 86,87

In der beschriebenen Weise wurde nun das vorliegende Olivenöl auch nach den Methoden von v. Hübl, Waller, Hanuš und Winkler untersucht. Es hat kein Interesse, die Details der Versuchsprotokolle und Berechnungen wiederzugeben.

Ebensowenig kann es von Interesse sein, die Versuchsprotokolle etc. über die Untersuchung der 5 anderen Fette nach den 5 Methoden wiederzugeben.

Wir geben statt dessen in den 6 Tabellen IV—IX die für sämtliche Fette nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Mittelwerte an.

Tabelle IV.

Beobachtete Jodzahlen für Kokosfett.

Methode	Einwirkungsdauer								
	2 Stunden			6 Stunden			24 Stunden		
	Fett- lösung I	Fett- lösung II	Fett- lösung III	Fett- lösung I	Fett- lösung II	Fett- lösung III	Fett- lösung I	Fett- lösung II	Fett- lösung III
	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g
v. Hübl.	8,13	8,77	8,85	8,50	8,87	8,91	8,87	8,93	9,02
Waller	-	5,71	6,81	-	6,19	6,99	-	6,92	7,23
Hanus ^v	8,77	-	9,09	8,81	-	9,17	8,92	-	9,40
Wijs	9,01	-	9,29	9,17	-	9,48	9,34	-	9,78
Winkler	6,40	9,05	8,98	8,82	9,26	9,13	9,10	9,55	9,71

Tabelle V.

Beobachtete Jodzahlen für Butterfett.

v. Hübl.	27,63	28,21	28,73	28,12	28,58	28,86	28,69	28,94	28,97
Waller	22,67	-	26,48	24,10	-	26,83	25,68	-	22,36
Hanus ^v	27,88	-	28,90	28,21	-	29,01	28,61	-	29,71
Wijs	27,60	27,85	27,99	27,90	28,07	28,14	28,40	28,59	29,06
Winkler	26,10	26,88	28,00	27,16	27,20	28,45	27,52	28,44	28,51

Tabelle VI.

Beobachtete Jodzahlen für Olivenöl.

(Die Werte nach Winkler stimmten schlecht überein und sind deswegen unsicher).

v. Hübl.	82,46	82,94	83,57	82,73	83,31	83,93	83,56	83,73	83,93
Waller	73,56	80,58	81,77	74,33	81,16	82,18	78,55	81,69	82,60
Hanus ^v	82,90	83,91	83,73	82,86	84,27	84,46	82,86	84,44	84,74
Wijs	83,62	84,08	84,16	84,04	84,89	85,11	84,71	86,28	86,87
Winkler	(80,67)	(85,41)	(83,23)	(82,66)	(84,76)	(83,23)	(85,11)	(85,89)	(84,68)

Tabelle VII.

Beobachtete Jodzahlen für Heringsöl.

v. Hübl.	109,66	118,25	120,83	114,43	122,25	123,72	119,51	124,40	124,55
Waller	-	-	-	96,54	104,62	114,36	102,84	111,51	120,98
Hanus ^v	113,58	117,11	116,28	115,30	117,93	118,19	115,85	119,68	119,46
Wijs	115,69	-	127,01	118,62	-	129,08	121,70	-	132,32
Winkler	107,80	117,75	-	118,00	122,26	-	123,33	124,62	-

Tabelle VIII.

Beobachtete Jodzahlen für Leinöl.

Methode	Einwirkungsdauer								
	2 Stunden			6 Stunden			24 Stunden		
	Fett- lösung I	Fett- lösung II	Fett- lösung III	Fett- lösung I	Fett- lösung II	Fett- lösung III	Fett- lösung I	Fett- lösung II	Fett- lösung III
	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g
v. Hübl.	166,98	181,07	185,99	175,80	187,27	190,10	186,33	189,61	192,06
Waller	141,02	154,90	164,45	146,12	161,65	173,37	152,52	171,83	181,93
Hanus ^v	178,96	187,69	189,23	181,75	189,09	191,22	183,91	191,60	195,20
Wijs.	180,59	191,92	192,80	184,95	192,49	194,85	188,37	193,72	197,47
Winkler	169,66	175,65	180,62	182,85	184,88	187,37	(188,75)	186,30	187,19

Tabelle IX.

Beobachtete Jodzahlen für Spinax niger Tran.

v. Hübl.	193,65	199,26	201,94	199,41	205,16	207,31	210,92	218,03	220,85
Waller	180,17	188,20	190,86	187,12	191,36	196,31	193,02	199,68	206,12
Hanus ^v	163,92	211,05	229,73	165,71	215,92	233,70	-	223,31	246,50
Wijs.	200,47	-	217,67	204,46	-	234,57	207,14	-	269,46
Winkler	170,66	198,35	216,59	201,88	221,22	231,18	214,86	241,92	246,85

Um diese Werte besser beurteilen zu können, haben wir sie in den Fig. 2—7 graphisch aufgezeichnet.

Man ersieht hieraus sofort, daß der Verlauf der Reaktion bei den verschiedenen Methoden recht verschieden ist. Vorausgesetzt, daß nicht Gleichgewicht zwischen Addition und Substitution eintritt, was wohl kaum der Fall sein kann, wird man im voraus annehmen können, daß diejenige Methode am geeignetsten sein muß, welche ein Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer aufweist, wo der Kurvenverlauf bald asymptotisch wird. In diesem Falle darf man nämlich annehmen, daß keine Substitution stattfindet. Die Methoden dagegen, wo die Jodzahl mit der Einwirkungsdauer stets steigt und keine Neigung zeigt, einen Grenzwert zu erreichen, müssen jedenfalls als nicht geeignet angesehen werden, die wahre Jodzahl zu geben, indem man annehmen muß, daß hier eine Substitution neben der Addition stattfindet. Wenn die Kurven langsam steigen, kann man nie sicher sein, daß die Addition vollständig wird, selbst wenn die Kurven zuletzt einen asymptotischen Verlauf erhalten.

Aus den Diagrammen Fig. 2—7 läßt sich glatt ersehen, daß eigentlich nur die Hübl'sche Methode einen Kurvenverlauf hat, den man für diejenige Methode erwarten darf, welche die wahren Jodzahlen gibt.

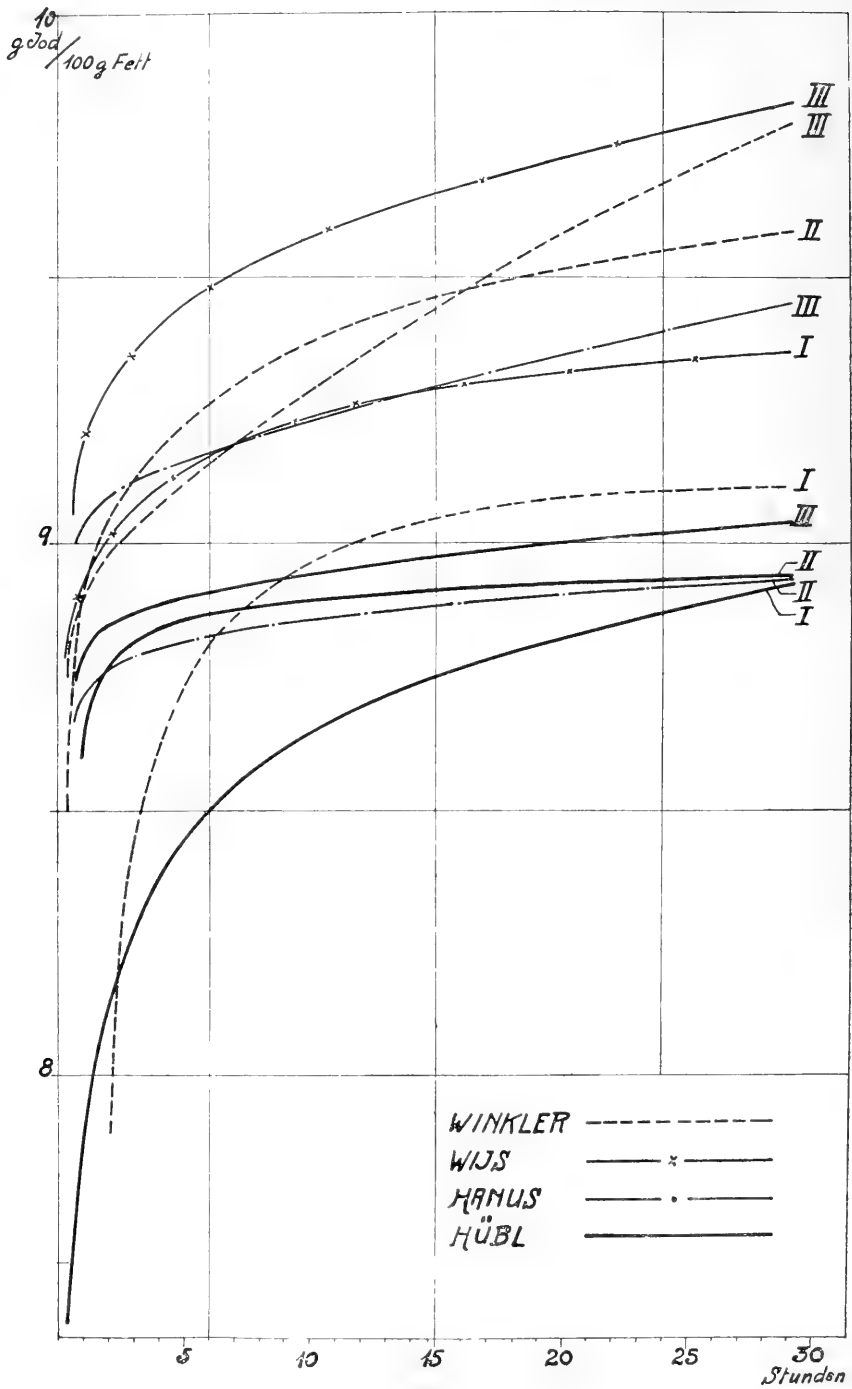


Fig. 2. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Kokosfett. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

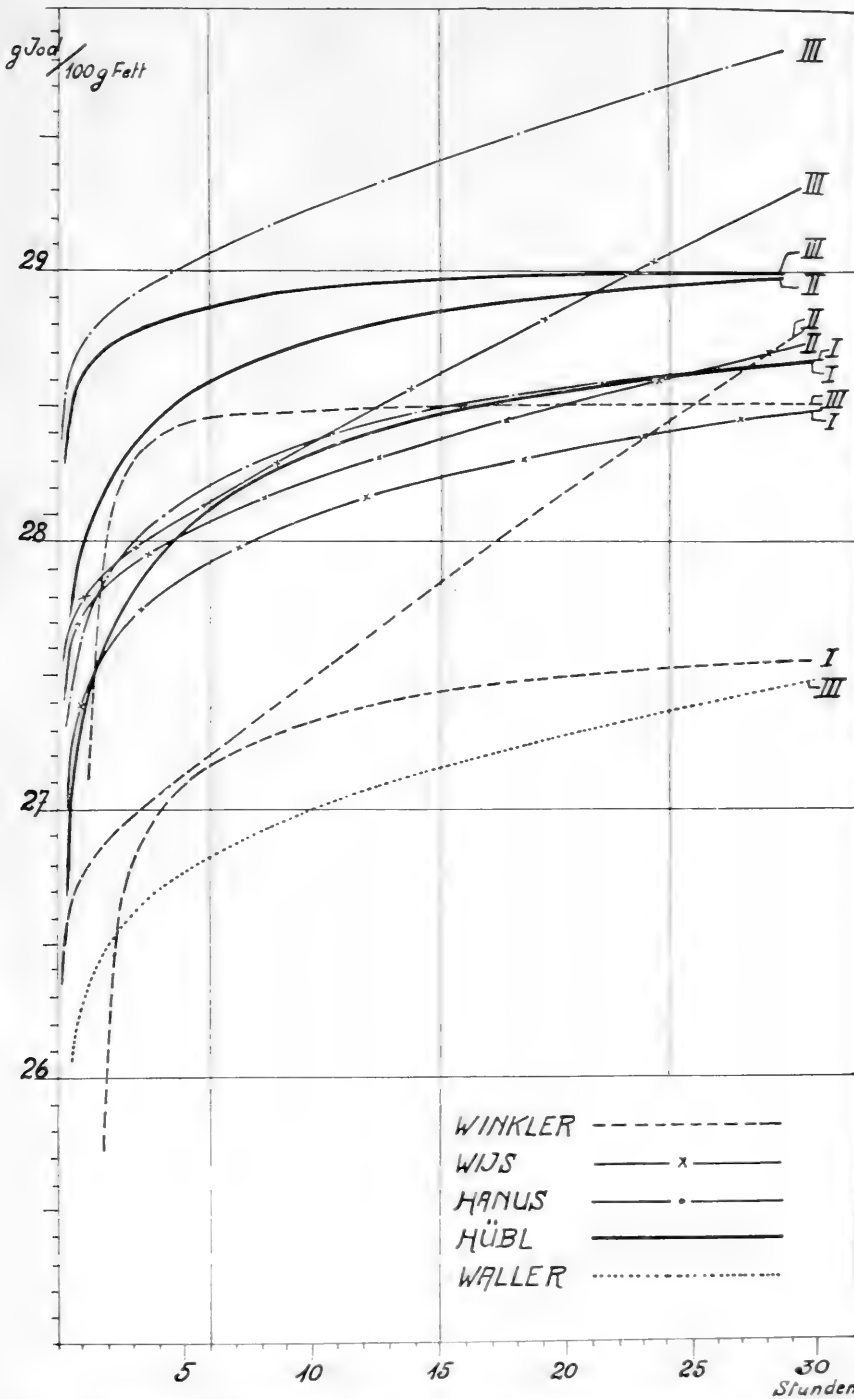


Fig. 3. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Butterfett. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

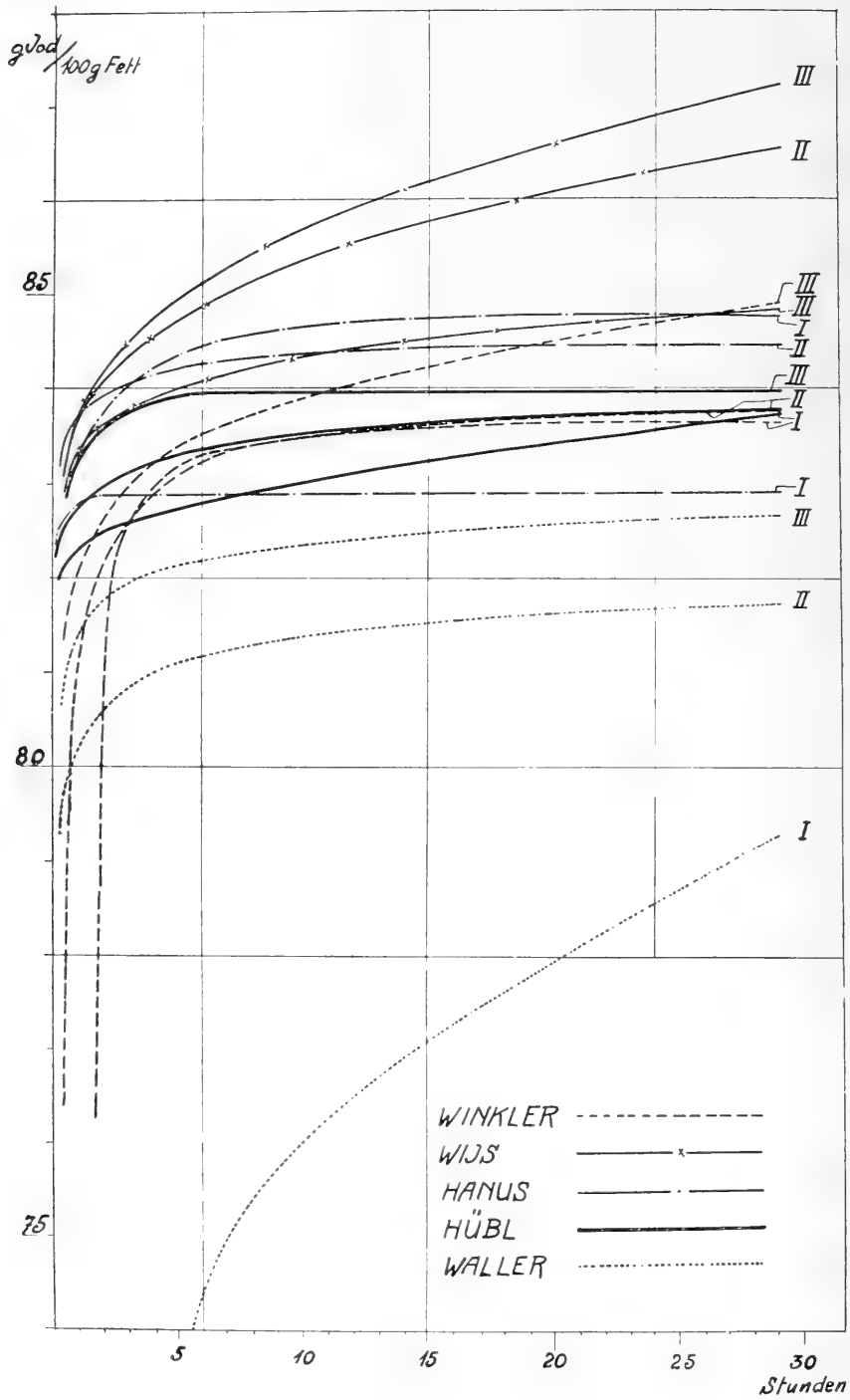


Fig. 4. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Olivenöl. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

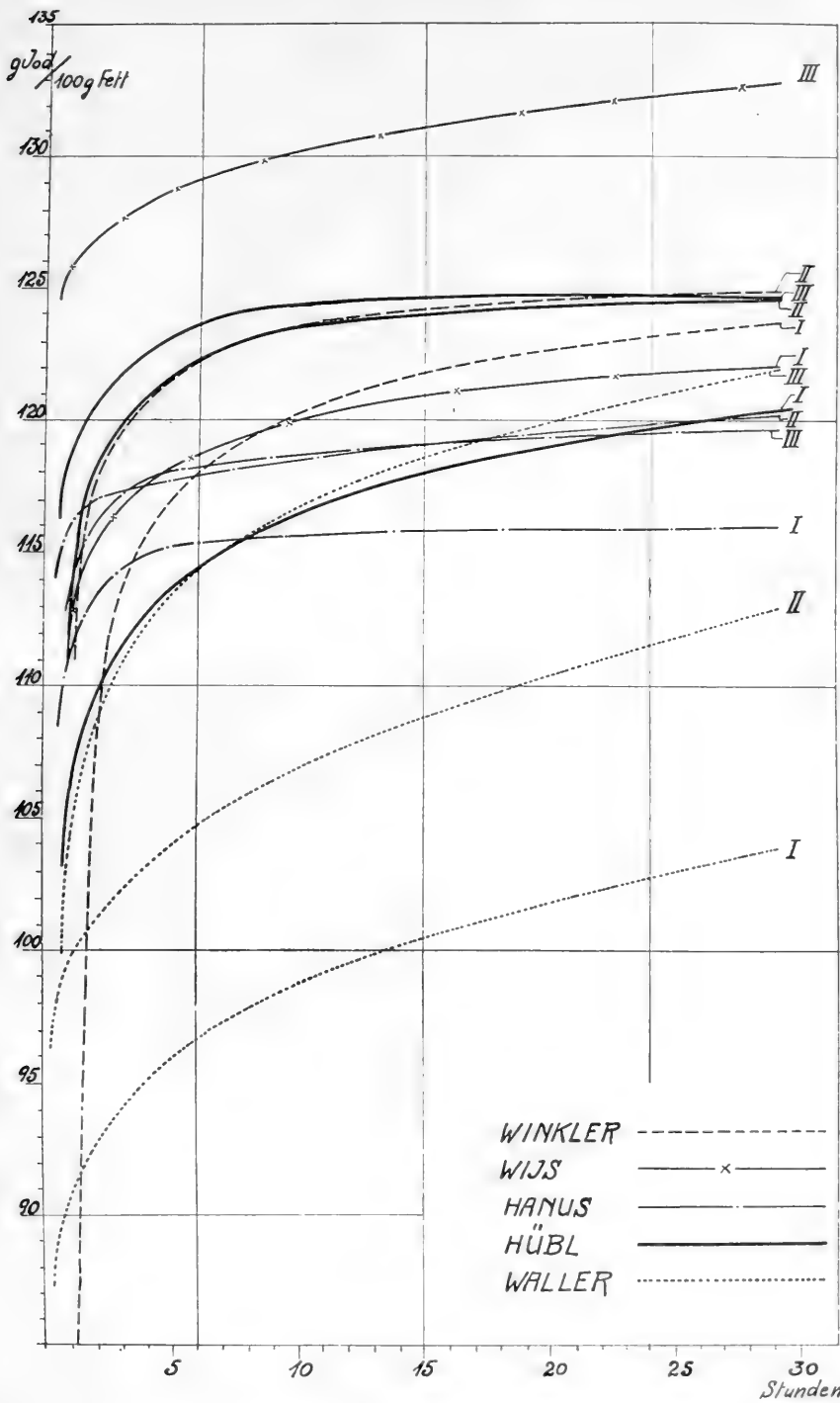


Fig. 5. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Heringsöl. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

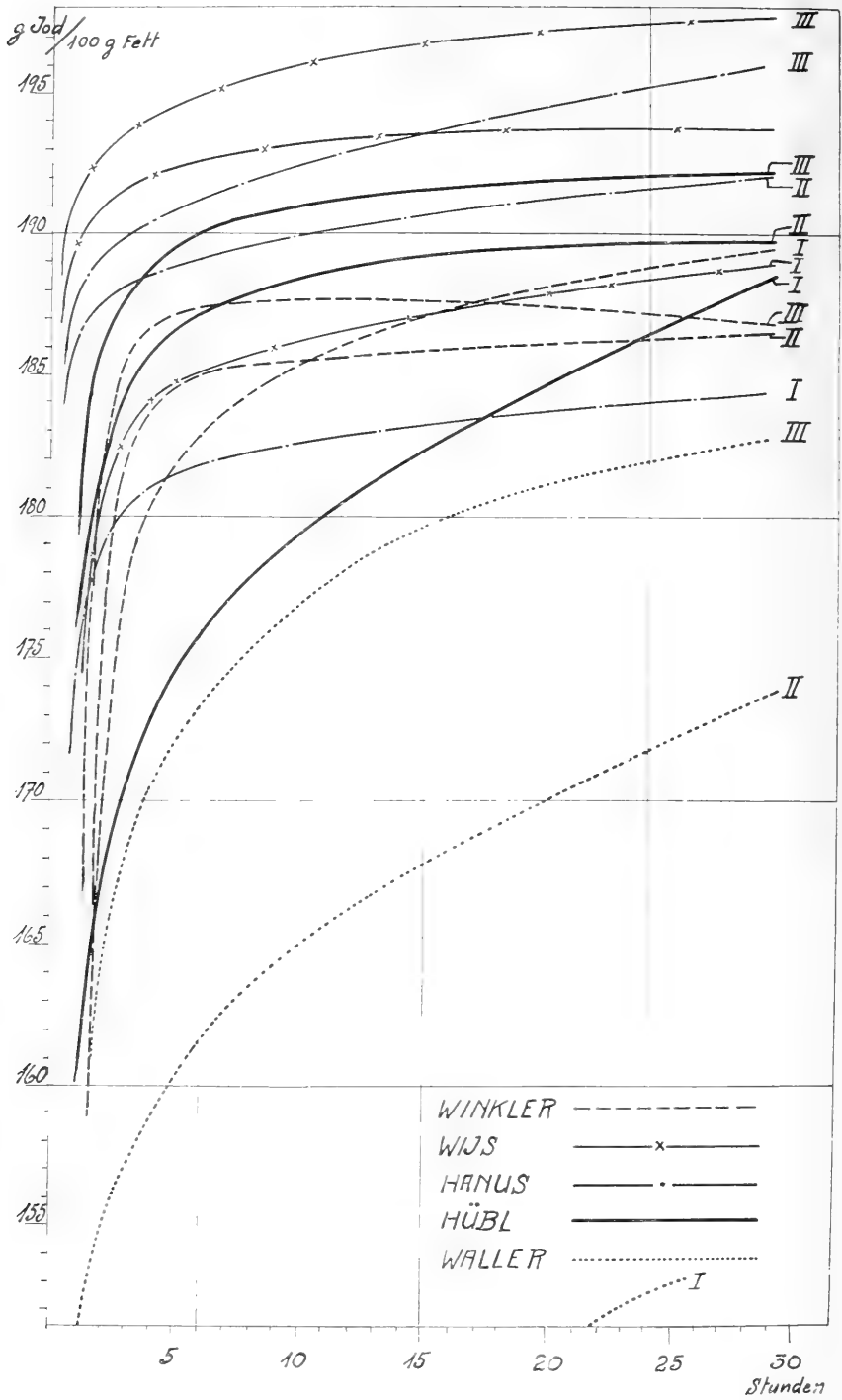


Fig. 6. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Leinöl. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

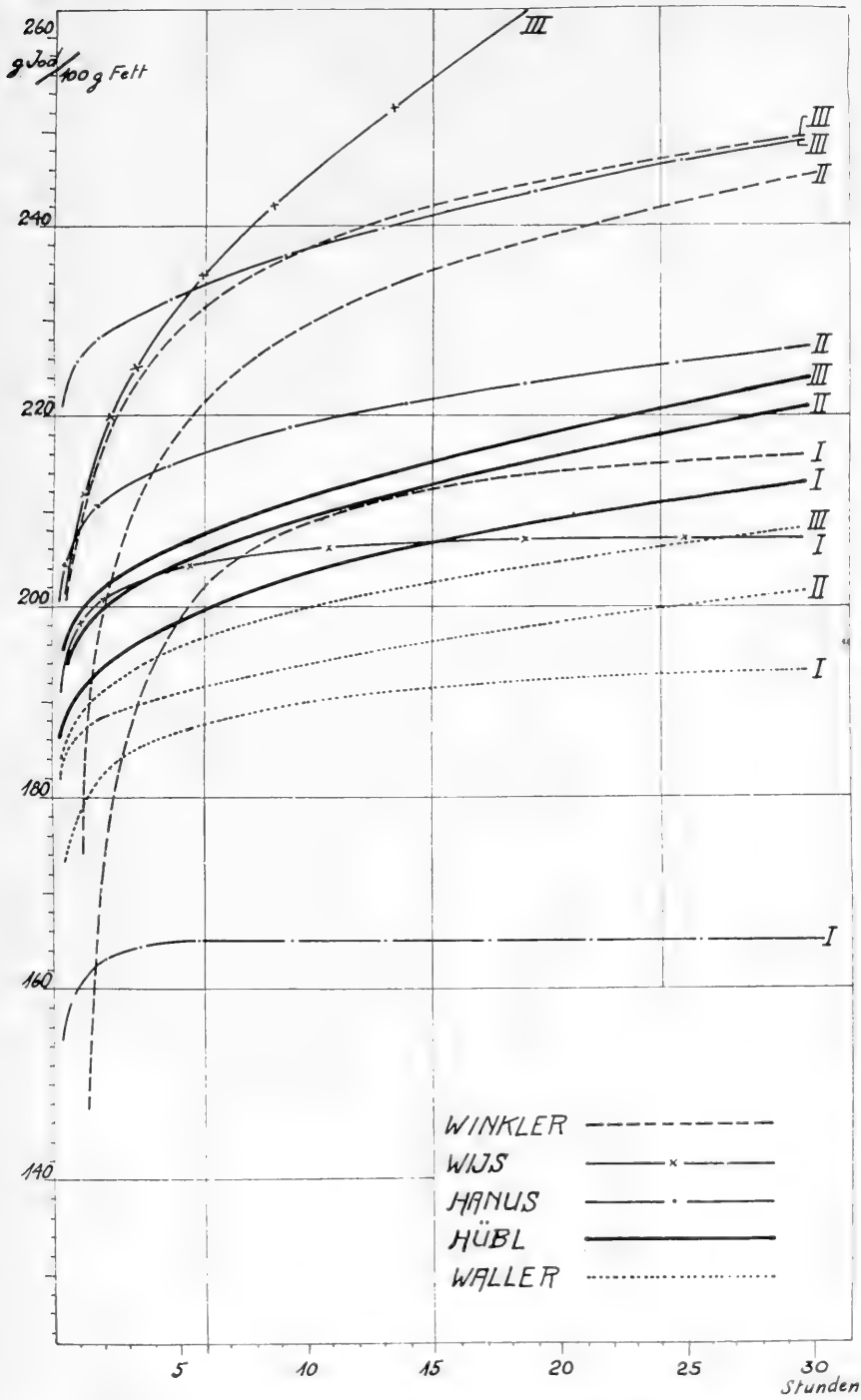


Fig. 7. Diagramm Jodzahl-Einwirkungs-dauer für *Spinnax niger* Tran. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

Wir entnehmen den Fig. 2—7 daß die wahre Jodzahl für die 6 Fette voraussichtlich die folgenden Werte hat:

Kokosfett	ca. 9
Butterfett	- 29
Olivenöl	- 84
Heringsöl	- 125
Leinöl	- 192
Spinax niger Tran	- 225

Der Einfluß des Halogenüberschusses kann aus den Diagrammen in Fig. 2—7 nicht erkannt werden, da der wirklich vorhandene Halogenüberschuß erstens nicht bekannt ist und außerdem auch für die einzelnen Methoden verschieden gewesen sein muß (vgl. vorn S. 27).

Wenn man aber davon ausgeht, daß die oben wiedergegebenen Werte für die vermutlich wahre Jodzahl für jedes Fett tatsächlich der Wirklichkeit entspricht, so läßt sich aus den Originalobservationen (Tabelle IV—IX) der wahre Halogenüberschuß nach der Formel $\frac{B-A}{B}$ berechnen, wenn A die der wahren Jodzahl entsprechende Halogenmenge bedeutet.

In der Tabelle X geben wir dann eine Übersicht der Halogenüberschüsse, welche in den verschiedenen Versuchsreihen vorhanden waren.

Tabelle X.

Übersicht des in den Versuchsserien erzielten Halogenüberschusses $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$

Fettlösung	Untersucht nach der Methode von:				
	v. Hübl	Waller	Hanus	Wijs	Winkler
Kokosfett, Verd. I	18,72	-	19,55	13,86	16,55
— Verd. II	43,32	59,95	-	-	57,2
— Verd. III	79,66	79,03	79,59	77,95	78,6
Butterfett, Verd. I	26,11	25,24	25,44	24,04	36,27
— Verd. II	62,92	-	-	62,07	68,17
— Verd. III	82,06	81,33	84,00	81,06	84,11
Olivenöl, Verd. I	17,95	17,78	23,82	12,23	23,8
— Verd. II	58,99	58,46	56,55	56,13	62,7
— Verd. III	79,49	79,32	81,00	77,83	80,1
Heringsöl, Verd. I	18,98	17,11	23,96	8,88	29,96
— Verd. II	59,59	52,18	58,91	-	65,06
— Verd. III	79,84	78,80	81,04	77,88	-
Leinöl, Verd. I	16,90	16,47	15,76	9,99	30,08
— Verd. II	57,61	57,02	56,41	53,46	80,45
— Verd. III	77,69	78,75	77,57	76,28	79,91
Spinax niger Tran, Verd. I	13,10	15,51	18,37	9,62	11,70
— - - Verd. II	56,63	56,94	60,58	-	56,13
— - - Verd. III	78,35	79,58	79,55	76,48	77,08

Nun ist das notwendige Material vorhanden, um die Diagramme Jodzahl-Halogenüberschuß für die 6 Fette aufzuzeichnen. Solche sind in den Fig. 8—13 wiedergegeben.

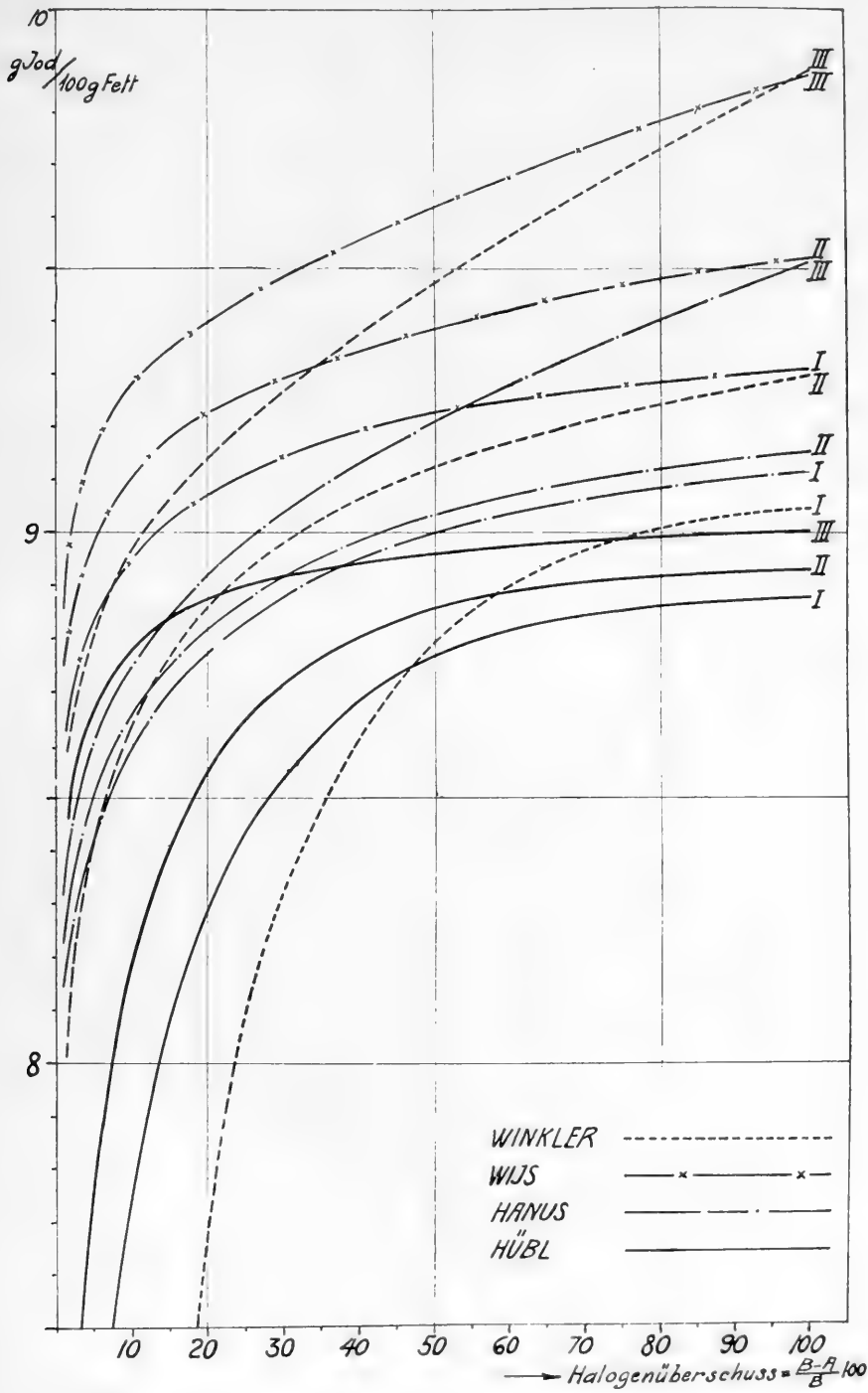


Fig. 8. Diagramm Jodzahl-Halogenüberschufi $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ für Kokosfett mit Jodzahl angenommen = 9. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

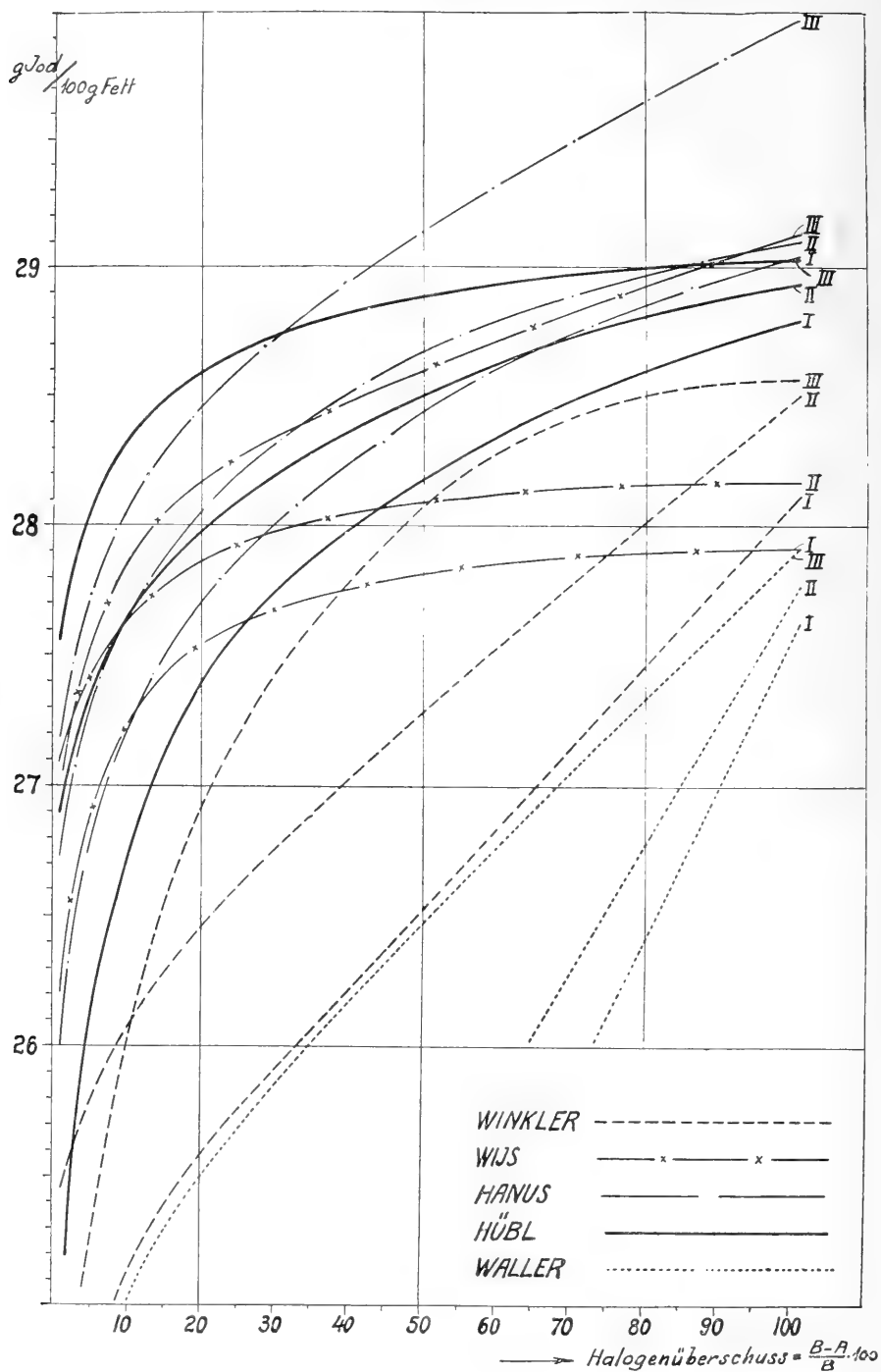


Fig. 9. Diagramm Jodzahl-Halogenüberschuss $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ für Butterfett mit Jodzahl angenommen = 29. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

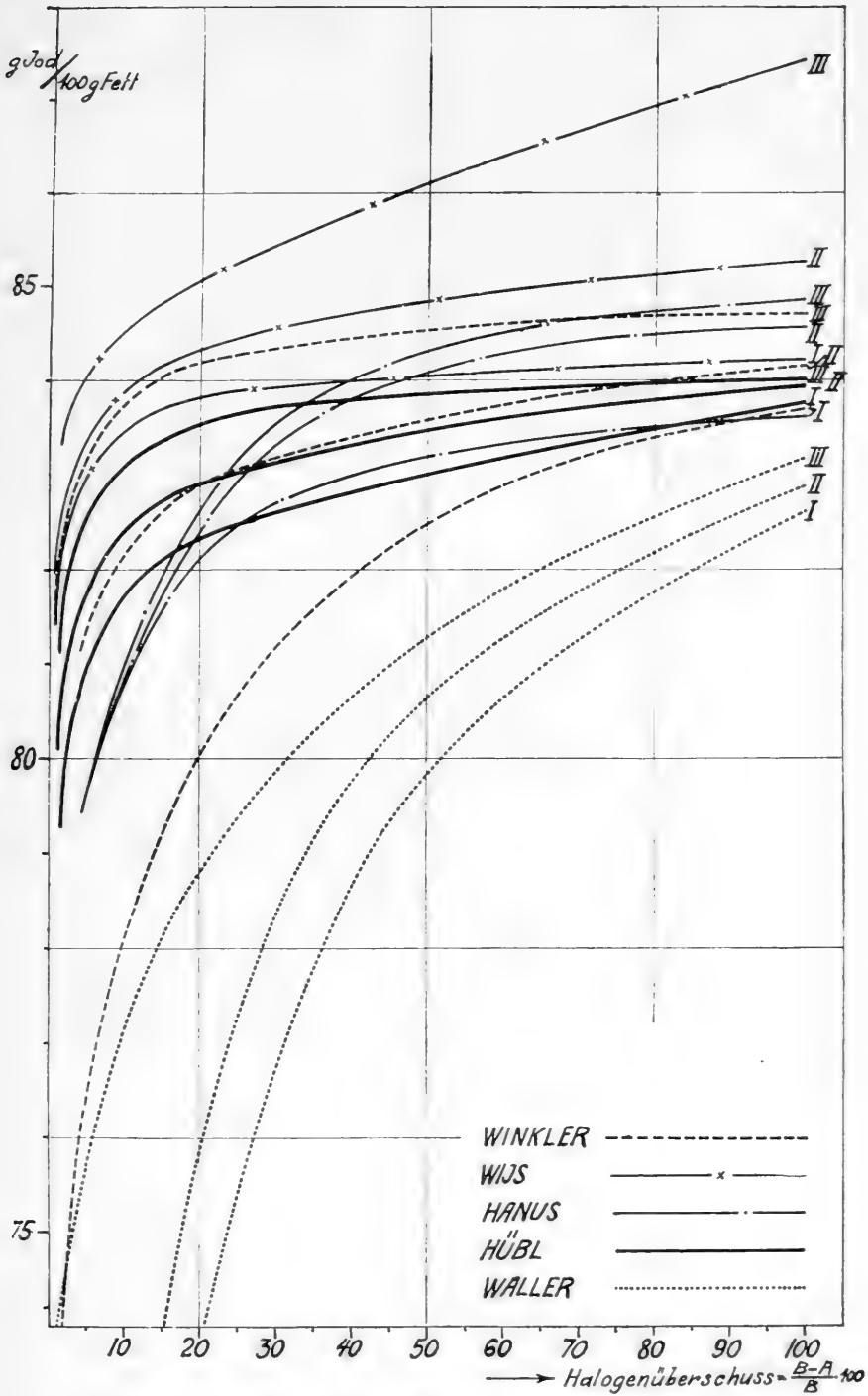


Fig. 10. Diagramm Jodzahl-Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ für Olivenöl mit Jodzahl angenommen = 84. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

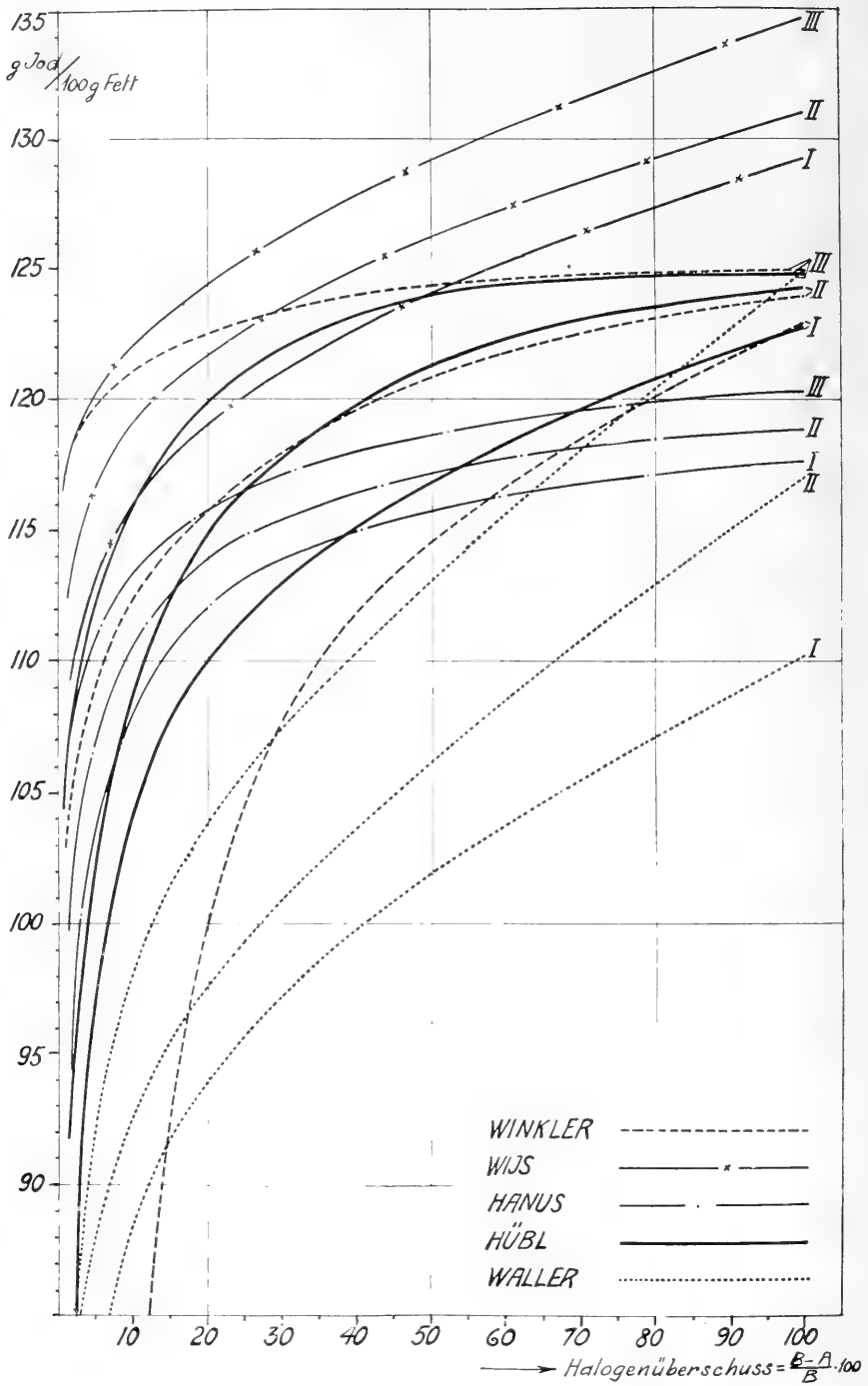


Fig. 11. Diagramm Jodzahl-Halogenüberschuss $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ für Heringsöl mit Jodzahl angenommen = 125. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

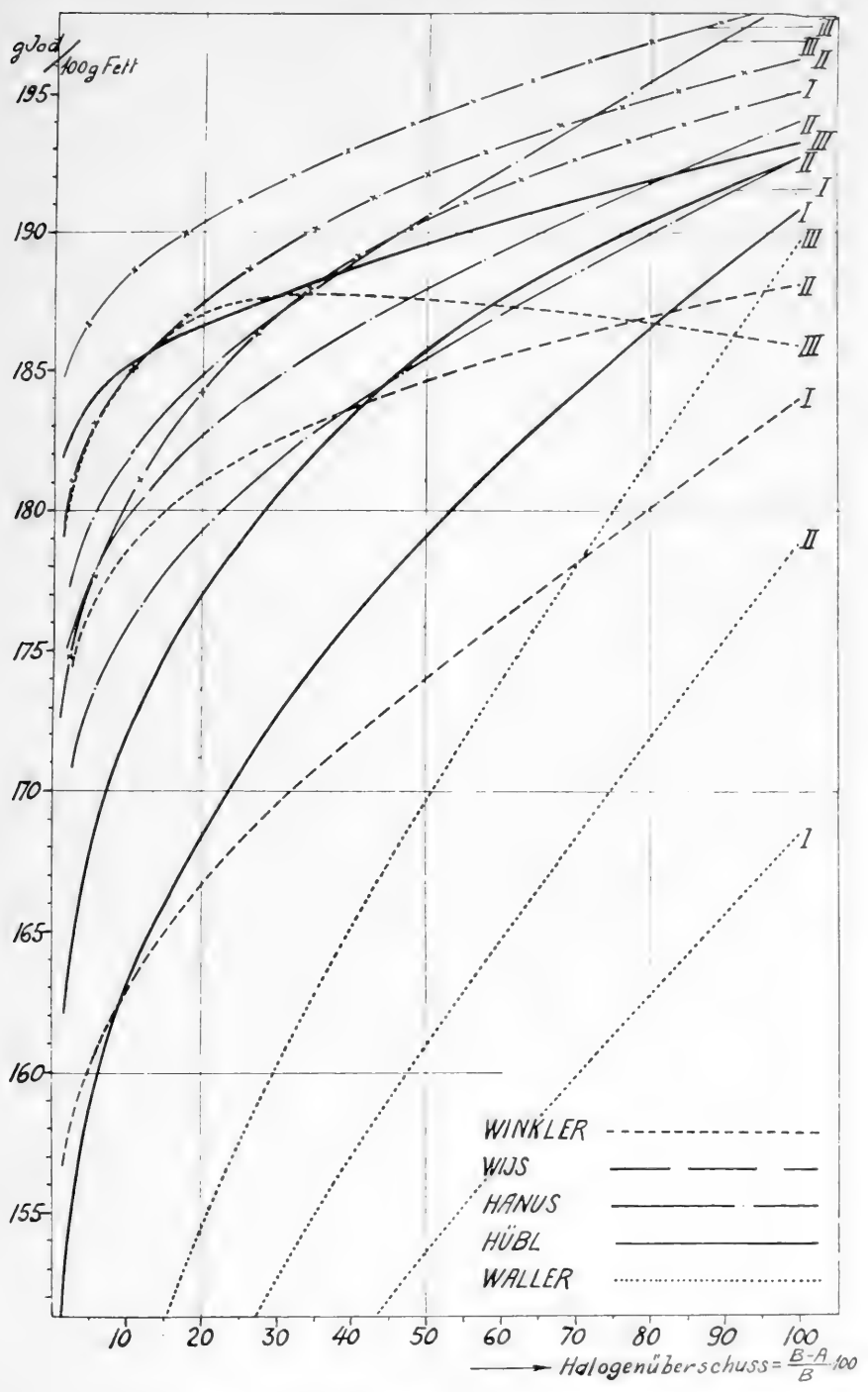


Fig. 12. Diagramm Jodzahl-Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ für Leinöl mit Jodzahl angenommen = 192. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

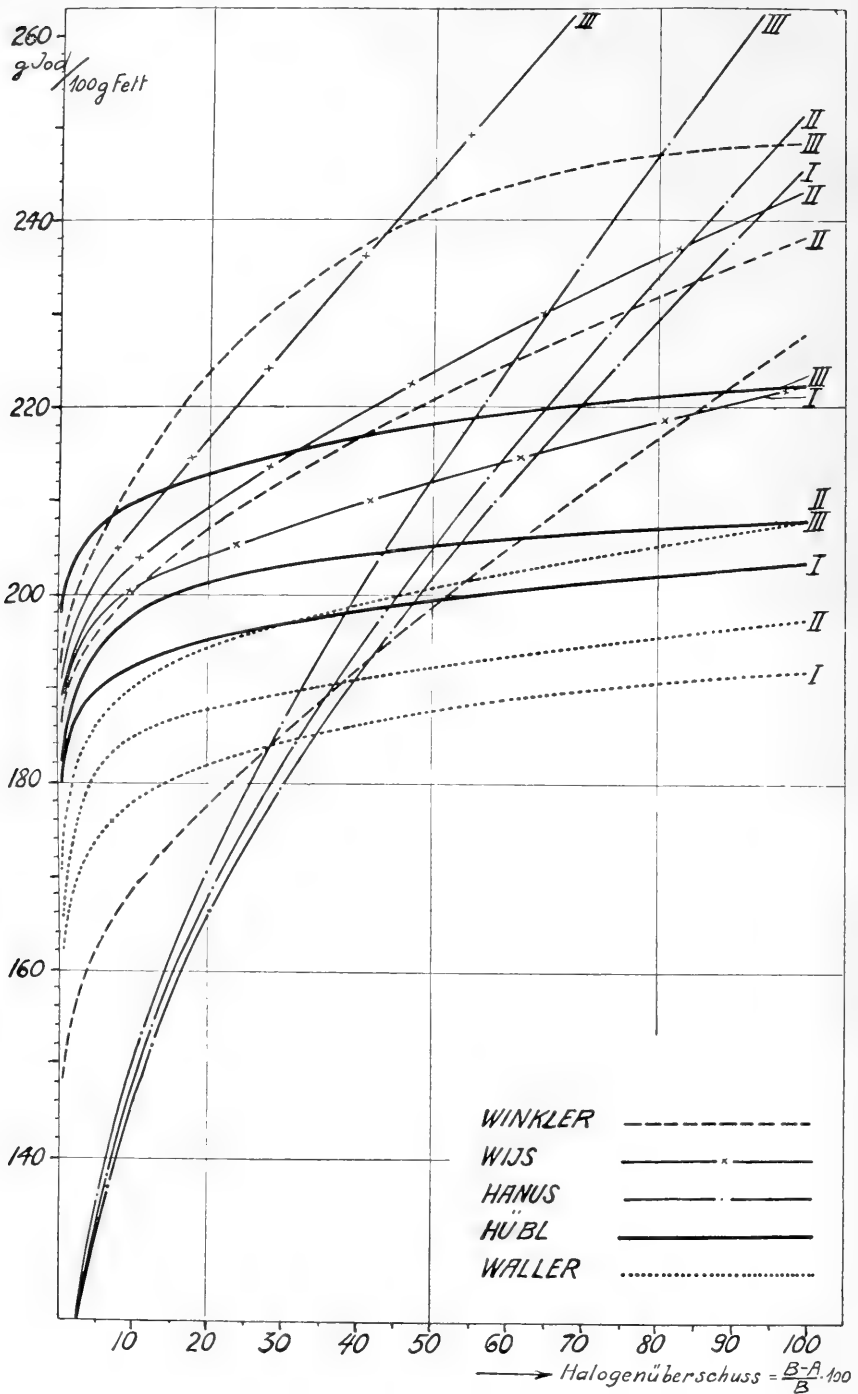


Fig. 13. Diagramm Jodzahl-Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$ für *Spinax niger* Tran mit Jodzahl angenommen = 225. (I bedeutet die Stammlösung des Fettes, II ihre Verdünnung auf die Hälfte, III ihre Verdünnung auf ein Viertel).

Aus den Diagrammen in Fig. 8—13 lassen sich nun die Werte der Jodzahlen für die drei Halogenüberschüsse 20, 50 und 80 0/0, und bei einer Einwirkungsdauer von 2, 6 und 24 Stunden für die 6 untersuchten Fette direkt ablesen.

Diese Jodzahlen sind in den 6 Tabellen XI—XVI zusammengestellt.

Tabelle XI. *Graphisch berechnete Jodzahlen für Kokosfett.*

Methode	Einwirkungs- dauer	Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$		
		20	50	80
		g/100 g	g/100 g	g/100 g
v. Hübl	2 Stunden	8,29	8,77	8,86
	6 —	8,55	8,86	8,92
	24 —	8,87	8,96	9,00
Hanus	2 —	8,77	9,00	9,09
	6 —	8,82	9,12	9,17
	24 —	8,92	9,21	9,40
Wijs	2 —	9,07	9,23	9,29
	6 —	9,22	9,39	9,48
	24 —	9,40	9,62	9,78
Winkler	2 —	7,70	8,80	9,01
	6 —	8,86	9,12	9,24
	24 —	9,14	9,48	9,73

Tabelle XII. *Graphisch berechnete Jodzahlen für Butterfett.*

v. Hübl	2 Stunden	27,44	28,19	28,60
	6 —	27,98	28,50	28,80
	24 —	28,59	28,89	29,00
Waller	2 —	22,22	24,46	26,41
	6 —	23,84	25,33	26,76
	24 —	25,50	26,48	27,33
Hanus	2 —	27,70	28,44	28,86
	6 —	28,06	28,67	28,97
	24 —	28,45	29,14	29,65
Wijs	2 —	27,55	27,81	27,90
	6 —	27,86	28,09	28,16
	24 —	28,16	28,60	28,92
Winkler	2 —	25,6	26,52	27,46
	6 —	26,45	27,28	28,00
	24 —	26,6	28,09	28,5

Tabelle XIII. *Graphisch berechnete Jodzahlen für Olivenöl.*

v. Hübl	2 Stunden	82,3	83,0	83,5
	6 —	82,9	83,48	83,78
	24 —	83,52	83,86	83,96
Waller	2 —	73,8	79,82	81,76
	6 —	75,8	80,65	82,2
	24 —	78,8	81,28	82,56
Hanus	2 —	82,1	83,2	83,55
	6 —	82,44	84,1	84,5
	24 —	82,6	84,3	84,7
Wijs	2 —	83,80	84,04	84,16
	6 —	84,32	84,84	85,12
	24 —	85,08	86,1	86,93
Winkler	2 —	80,6	82,5	83,4
	6 —	82,9	83,6	84,0
	24 —	84,2	84,5	84,7

Tabelle XIV.
Graphisch berechnete Jodzahlen für Heringsöl.

Methode	Einwirkungs- dauer	Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$		
		20	50	80
		g/100 g	g/100 g	g/100 g
v. Hübl.	2 Stunden	110,0	116,83	120,75
	6 —	114,93	121,21	123,58
	24 —	119,92	123,95	124,64
Waller	2 —	93,86	102,0	107,29
	6 —	97,57	101,2	113,0
	24 —	103,86	113,14	120,43
Hanus ^v	2 —	112,0	115,71	117,14
	6 —	113,86	117,17	118,43
	24 —	115,71	118,64	119,86
Wijs.....	2 —	119,0	124,0	126,31
	6 —	121,72	126,14	129,21
	24 —	124,43	129,14	132,57
Winkler	2 —	100,0	114,5	122,14
	6 —	115,7	120,85	123,07
	24 —	122,4	124,5	124,87

Tabelle XV.
Graphisch berechnete Jodzahlen für Leinöl.

v. Hübl.	2 Stunden	168,43	179,07	186,55
	6 —	176,93	185,66	190,37
	24 —	186,6	189,53	191,8
Waller	2 —	142,33	148,67	162,83
	6 —	148,0	160,9	172,0
	24 —	149,53	169,66	182,6
Hanus ^v	2 —	179,33	185,47	190,0
	6 —	182,67	188,0	191,86
	24 —	184,93	189,9	193,73
Wijs.....	2 —	184,33	190,47	193,6
	6 —	187,47	192,13	194,87
	24 —	190,4	194,16	196,93
Winkler	2 —	166,67	174,0	180,07
	6 —	181,0	184,66	186,93
	24 —	187,0	187,66	186,8

Tabelle XVI.
Graphisch berechnete Jodzahlen für Spinax niger Tran.

v. Hübl.	2 Stunden	195,0	198,8	201,6
	6 —	201,2	205,8	206,9
	24 —	212,9	218,8	221,0
Waller	2 —	182,0	187,7	190,8
	6 —	187,8	192,5	195,6
	24 —	194,4	200,8	205,5
Hanus ^v	2 —	166,0	201,6	229,4
	6 —	167,4	204,8	233,8
	24 —	171,3	212,2	248,0
Wijs.....	2 —	204,2	212,1	218,4
	6 —	209,0	224,0	236,0
	24 —	217,5	244,6	272,6
Winkler	2 —	177,6	198,6	216,8
	6 —	207,	220,8	231,8
	24 —	223,8	241,3	247,0

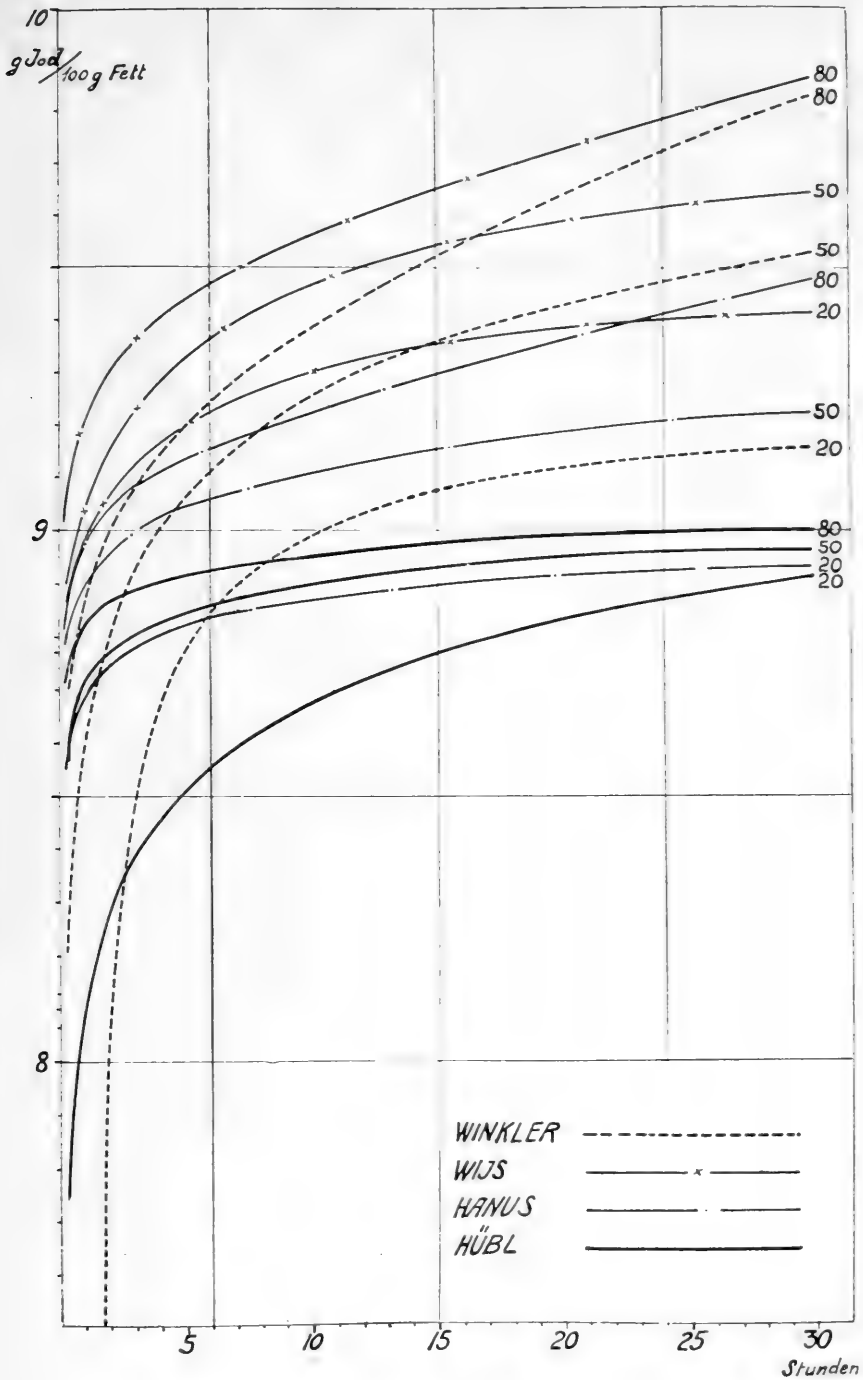


Fig. 14. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Kokosfett.

(20 bedeutet Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right) = 20$
 50 -- -- -- = 50
 80 -- -- -- = 80).

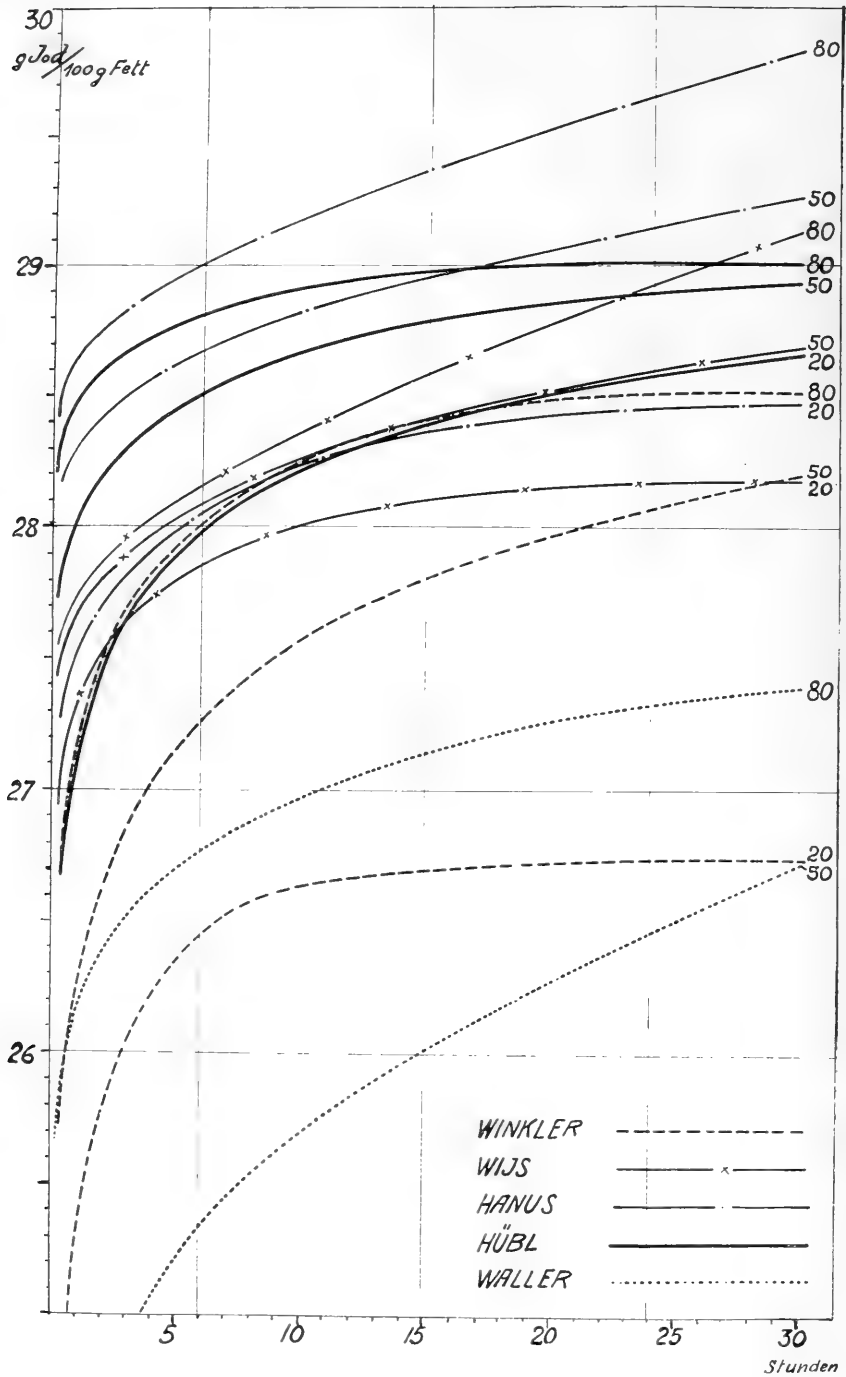


Fig. 15. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Butterfett.

(20 bedeutet Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right) = 20$

50 — — — — = 50
 80 - - - - = 80.

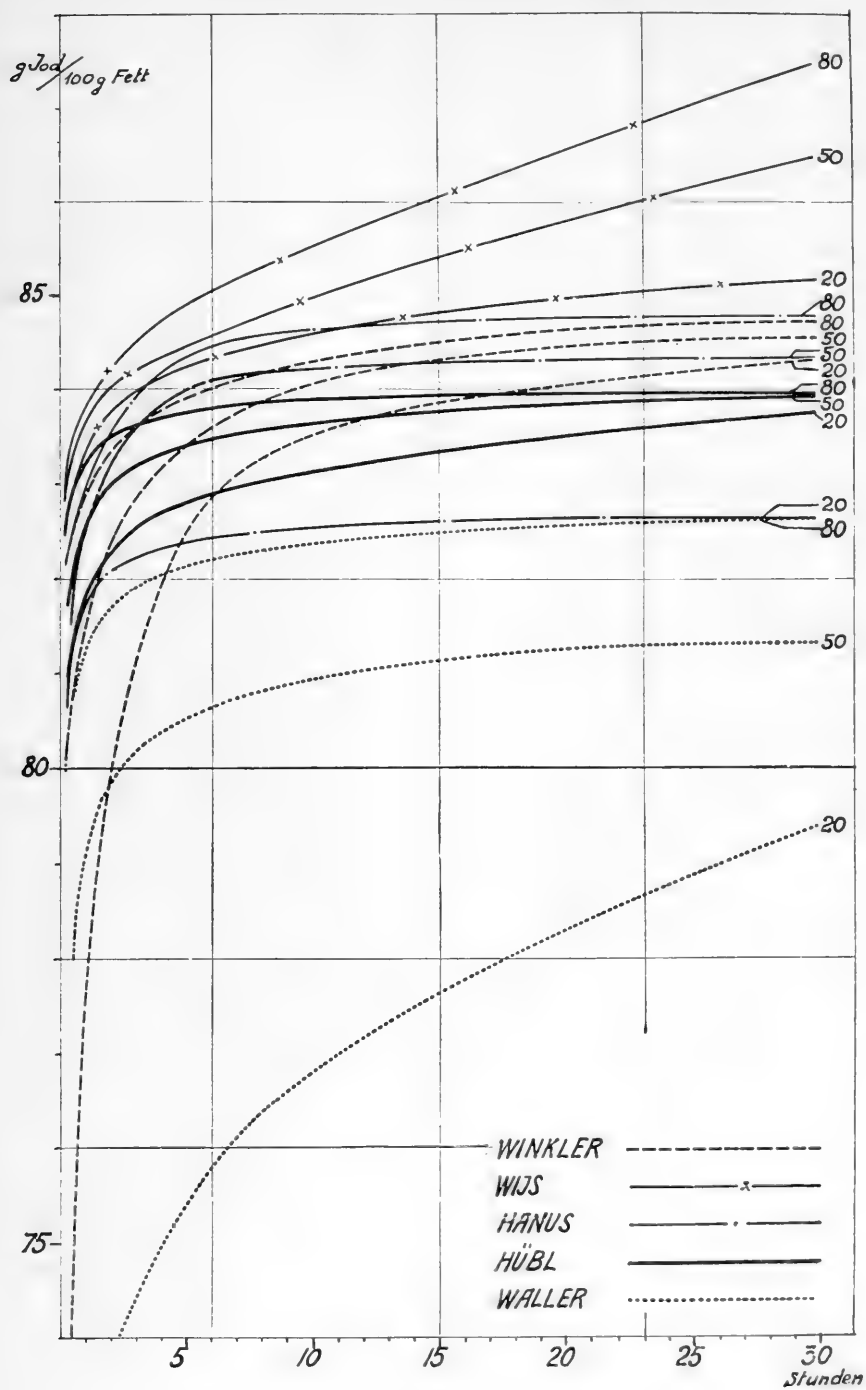


Fig. 16. Diagramm Jodzahl-Einwirkungs-dauer für Olivenöl.

(20 bedeutet Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right) = 20$

50 — — — — = 50

80 — — — — = 80).

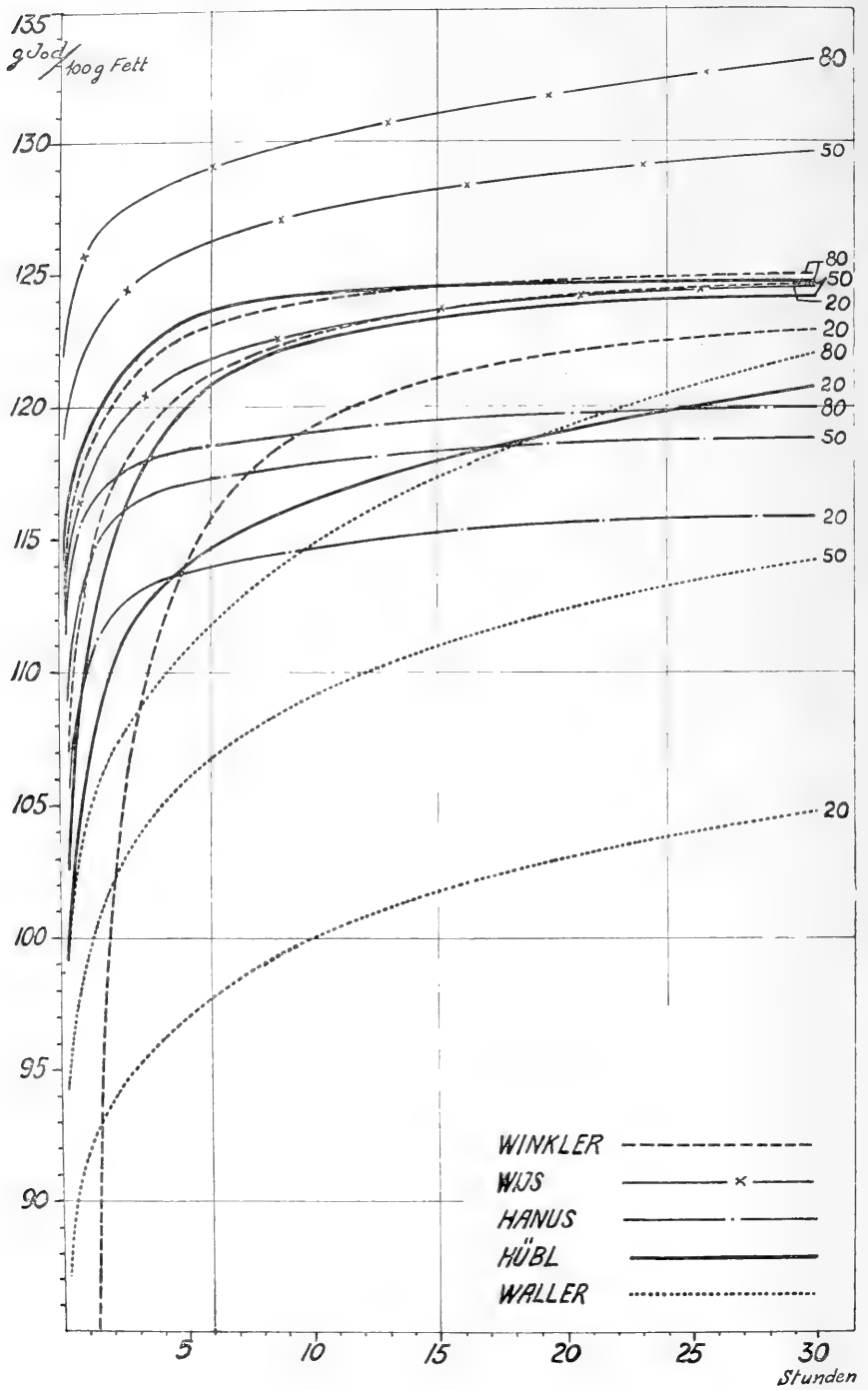


Fig. 17. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Heringsöl.

(20 bedeutet Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right) = 20$

50 — — — = 50.
 80 — — — = 80).

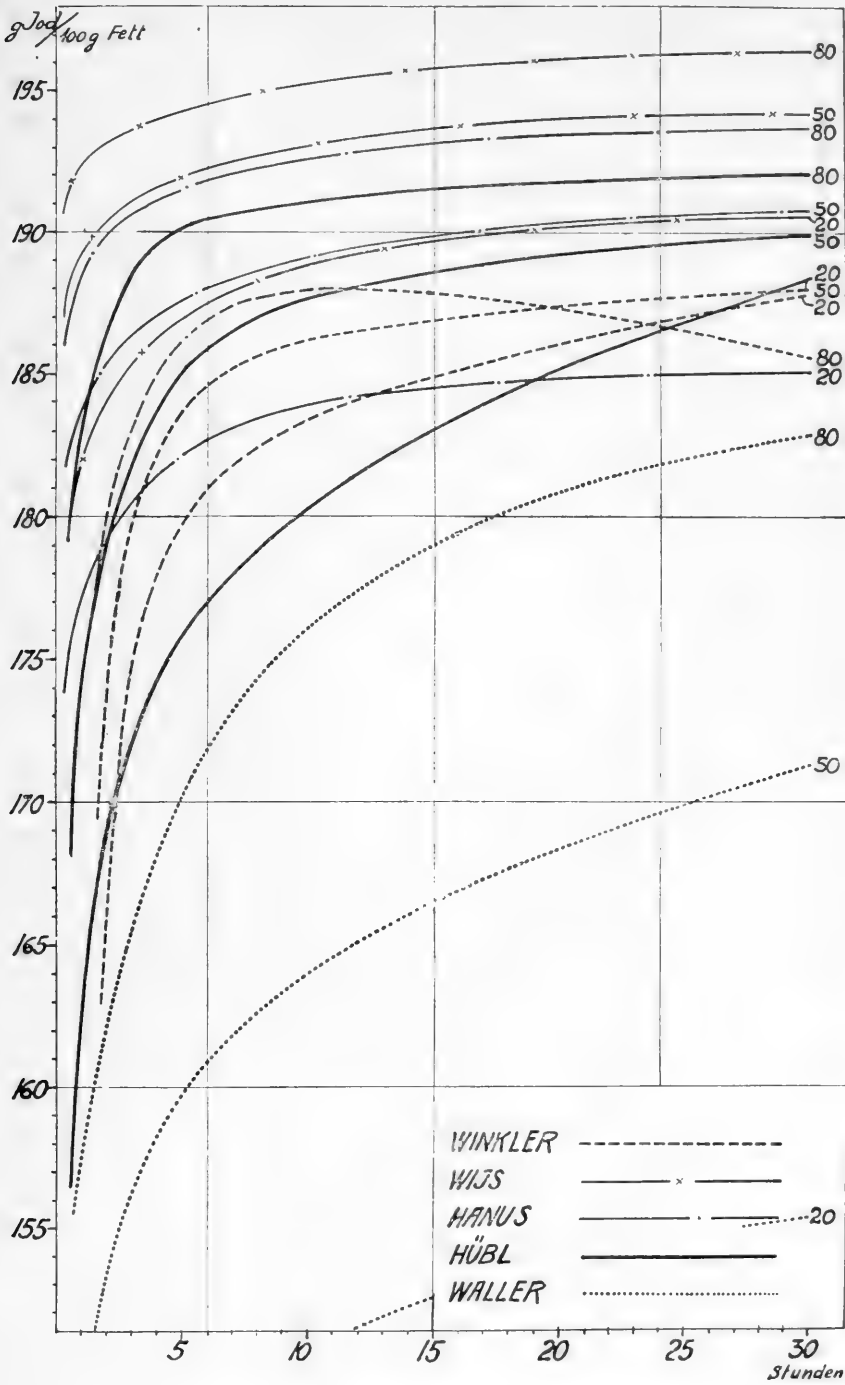


Fig. 18. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Leinöl.

(20 bedeutet Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right) = 20$

50 — — — = 50
 80 — — — = 80.

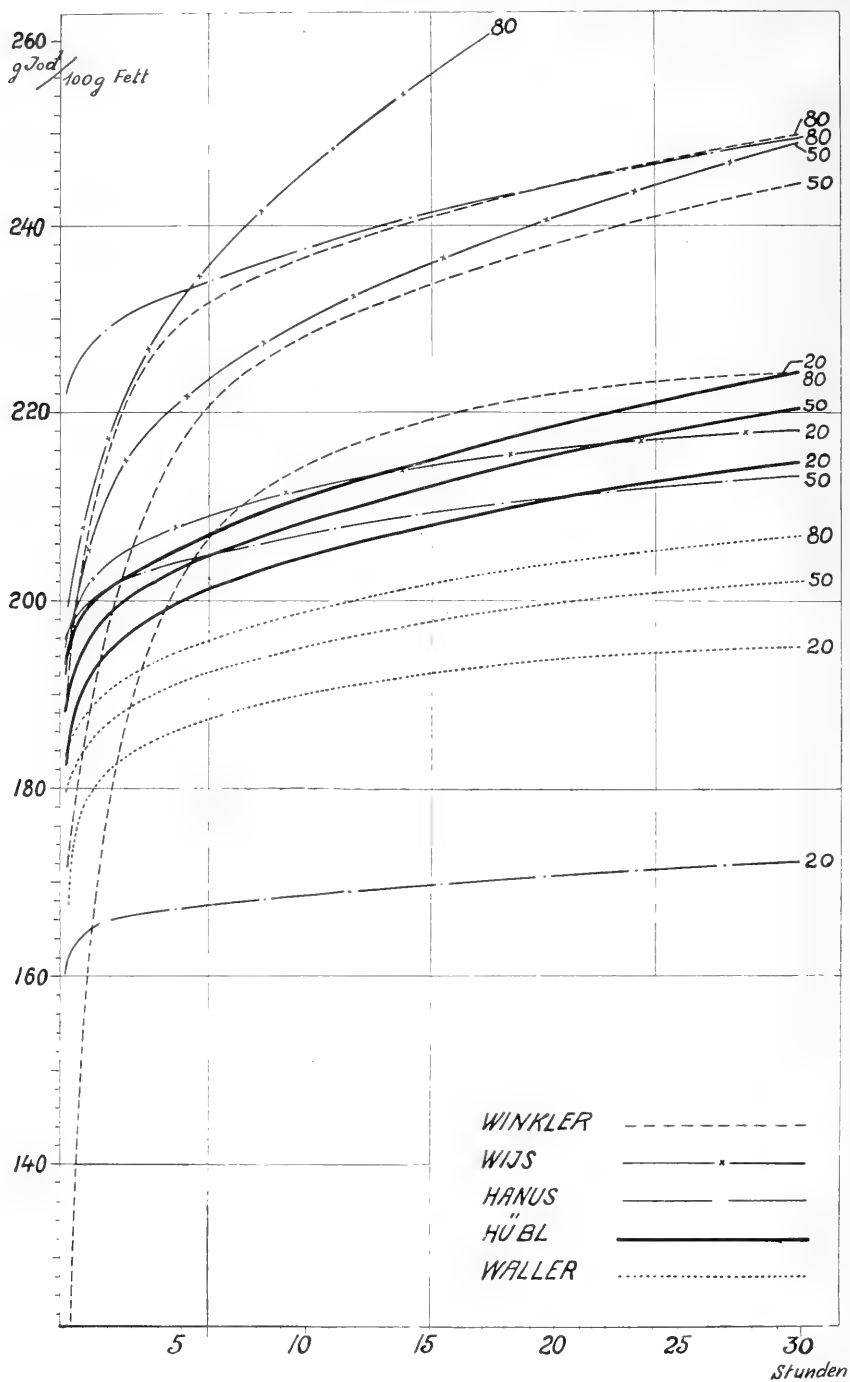


Fig. 19. Diagramm Jodzähl-Einwirkungsdauer für *Spinax niger* Tran.

(20 bedeutet Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right) = 20$
 50 — — = 50
 80 — — = 80).

Damit diese auf graphischem Wege gefundenen Werte besser hervortreten können, haben wir sie in den Fig. 14—19 als Diagramme Jodzahl-Einwirkungsdauer aufgezeichnet.

Jetzt liegt mit anderen Worten das gesamte Versuchsmaterial in einer solchen Form vor, daß wir zu einer näheren Besprechung der einzelnen Methoden übergehen können.

Besprechung der für die einzelnen Jodzähl-Methoden gewonnenen Resultate.

v. Hübl's Methode.

Wir fangen mit dieser als der ältesten Methode an. Ein wesentlicher Fehler bei derselben ist bekanntlich die geringe Haltbarkeit der Jodlösung. Der Titer derselben geht selbst in wenigen Stunden meßbar zurück, selbst wenn die Lösung, wie es oft für ihre Verwendung vorgeschrieben ist, mehr als 24 Stunden alt ist. Dieser Fehler macht sich um so mehr geltend, als die Reaktion zwischen Fett und Jodlösung recht träge vor sich geht d. h., daß eine entsprechend längere Einwirkungsdauer notwendig ist.

Von der frisch zubereiteten Hübl'schen Jodlösung entsprechen 25 cm^3 gewöhnlich etwa 50 cm^3 $1/10$ n. Thiosulfatlösung. Nach den ersten 24 Stunden ist der Verbrauch um etwa $1,2 \text{ cm}^3$ gefallen. Nach neuen 24 Stunden ist der Verbrauch noch um $0,7 \text{ cm}^3$ geringer, und selbst eine Hübl'sche Jodlösung, die einige Wochen alt ist, geht in 24 Stunden um etwa $0,4 \text{ cm}^3$ zurück, d. h. für eine Einwirkungsdauer von 6 Stunden um $0,1 \text{ cm}^3$.

Die meisten Vorschriften nehmen gar keine Rücksicht auf die während der Einwirkungsdauer stattfindende Konzentrationsänderung der Jodlösung. Es wird nämlich gewöhnlich nur ein blinder Versuch verlangt, und diese Probe soll nach derselben Einwirkungsdauer wie die der Hauptprobe titriert werden (vgl. z. B. [11] und [12]). Eine Korrektur wird unseres Wissens nur in „Entwürfe zu Festsetzungen über Lebensmittel“ [4] versucht, indem für längere Einwirkungsdauer vorgeschrieben ist, mit dem Mittel aus 2 blinden Proben zu rechnen, die eine am Anfang des Versuches titriert, die zweite am Schluß.

Nach den offiziellen französischen Vorschriften werden die Jodlösung und die Quecksilberlösung dem Fette getrennt zugesetzt, und der Titer eines blinden Versuches nach 2 Stunden zu Grunde gelegt [13]. Da die Einwirkungsdauer stets nur 2 Stunden betragen soll, findet man eine Korrektur unnötig. Bei diesem Verfahren können ganz bestimmt keine korrekten Werte erhalten werden. Die Reaktion ist bei vielen Fetten nicht binnen 2 Stunden beendet.

An einem Beispiele ist leicht zu ersehen, daß es für die Resultate völlig maßgebend ist, ob die Änderung des Titers in der einen oder der anderen Weise berücksichtigt wird.

Jodzahlbestimmung nach v. Hübl in Spinax niger Tran. Abgemessen 10 cm³ Chloroformlösung = 0,05813 g Tran. Blinde Probe beim Anfang des Versuches (= b₀): 48,35 cm³ 1/10 n. Thiosulfatlösung. Thiosulfatverbrauch der Hauptprobe nach 24 Stunden (= a): 37,62 — 37,63 — 37,63 im Mittel 37,63 cm³. Die blinde Probe nach 24 Stunden (b_t) zeigte einen Verbrauch von 47,62 cm³.

Der Halogenverbrauch der Fettproben beträgt demnach

- 1) b₀ — a = 10,72 cm³ Thiosulfatlösung, entsprechend einer Jodzahl von 230,29
- 2) $\frac{b_0 + b_t}{2} - a = 10,40$ — — — — — 223,42
- 3) b_t — a = 9,99 . — — — — — 214,67

Die Jodzahl wird somit in diesem Falle nicht weniger als 8,81 Einheiten geringer, wenn man mit einer blinden Probe am Schluß des Versuches rechnet, anstatt mit dem Mittel am Anfang und am Schluß.

Der Unterschied ist in dem angeführten Beispiele etwa 4 relative 0/0. Bei weniger ungesättigten Fetten ist allerdings der Unterschied, absolut wie relativ, nicht so groß, aber selbst bei so geringen Jodzahlen wie 60—70 sind jedoch gewöhnlich Differenzen von 1—2 Einheiten vorhanden.

Wie diese Unterschiede mit Einwirkungsdauer und Halogenüberschuß wechseln, geht am besten aus den in Tabelle XVII wiedergegebenen Daten über die Jodzahl eines Olivenöls hervor, je nachdem das eine oder andere Verfahren für die Ausrechnung zu Grunde gelegt wird.

Tabelle XVII.

Einfluß der Berechnungsweise auf den Wert der Hübl'schen Jodzahl eines Olivenöls. b₀ = die blinde Probe am Anfang, b_t am Schluß der Einwirkungsdauer.

Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$	Einwirkungs- dauer	Die Jodzahl berechnet nach:		
		b ₀ — a	$\frac{b_0 - b_t}{2} - a$	b _t — a
17,95	2 Stunden	82,47 g 100 g	82,36 g 100 g	82,26 g 100 g
	6 —	82,75 —	82,45 —	82,17 —
	24 —	83,60 —	83,03 —	82,48 —
58,99	2 —	83,38 —	82,88 —	82,67 —
	6 —	83,98 —	83,13 —	82,58 —
	24 —	84,79 —	83,39 —	82,29 —
79,49	2 —	84,02 —	83,03 —	83,25 —
	6 —	85,12 —	84,10 —	83,16 —
	24 —	86,40 —	84,36 —	82,40 —

Bei graphischer Aufzeichnung dieser Werte in Diagrammen Jodzahl-Einwirkungsdauer wie es in Fig. 20 auf Seite 55 gemacht worden ist, wird man sofort ersehen, daß die Berechnungsweise mit einer blinden Probe falsch sein muß, es sei nun, daß diese im Anfange oder am Schluß des

Versuches gemacht wird. Wird b_o zu Grunde gelegt, sind die Kurven stark divergierend und die Jodzahl nimmt rasch zu, sowohl mit der Einwirkungsdauer, wie mit dem Halogenüberschuß. Wird wiederum b_t zu Grunde gelegt, zeigt es sich, daß die Kurven nach einpaar Stunden anscheinend ein Maximum erreichen, aber sie fallen dann mit der fortgesetzten Einwirkungsdauer und dies um so mehr, je größer der Halogenüberschuß ist. Der Kurvenverlauf zeigt uns direkt, daß diese beiden Berechnungsverfahren nicht verwendbar sein können. Man kann jedenfalls nicht die wahren Jodzahlen finden, und man kann auch nicht sicher sein, reproduzierbare Werte zu finden. Wenn man den mittleren Wert der beiden blinden Proben zu Grunde legt, zeigt es sich, daß die Kurven einen recht normalen Verlauf haben, aber der große vertikale Abstand zwischen den Kurven zeigt, daß nicht alles in Ordnung ist, was übrigens noch deutlicher hervortreten würde in einem Diagramm Jodzahl-Halogenüberschuß.

Das Angeführte dürfte genügend sein, um zu zeigen, daß die v. Hüblsche Methode nur dann richtige Werte geben kann, wenn es gelingt, für die durch den Rückgang des Titers während der Versuchszeit bewirkte verminderte Reaktionsfähigkeit eine geeignete Korrektur zu schaffen. Wir machen im folgenden hierauf einen Versuch.

Deduktion einer neuen Korrektionsformel für die Methode von v. Hübl.

Gehen wir zuerst von der allerdings nur angenähert richtigen Voraussetzung aus, daß die Jodaddition fast momentan beendet ist, so ist die wahre Jodzahl ($= J$) durch den folgenden Ausdruck genau bestimmt:

$$J = \frac{127f}{100i} [b_o - a_o] \dots \dots \dots I$$

- wo f = der Faktor der Thiosulfatlösung,
 i = die verwendete Fettmenge in Gramm.
 b_o = der Thiosulfatverbrauch der blinden Probe beim Anfang des Versuchs,
 a_o = der gedachte Thiosulfatverbrauch der Probe nach momentan beendeter vollständiger Addition.

Indessen wird a_o nicht bestimmbar sein, sondern eine andere Größe a , welche kleiner als a_o sein muß, weil der Titer der Lösung zurückgeht.

Während der Einwirkungszeit geht auch der Titer der blinden Probe zurück und zwar von b_o auf b_t .

Nehmen wir jetzt der Einfachheit halber an, daß die Abnahme im Titer für die blinde Probe, wie für die Hauptprobe, denselben Wert hat d. h. $(a_o - a) = (b_o - b_t)$ oder $[b_o - a_o] = [b_t - a]$.

Formel I gibt dann

$$J = \frac{127f}{100i} [b_t - a] \dots \dots \dots II$$

In dieser Weise kommen wir zu einem Ausdrucke, wonach nur eine blinde Probe notwendig ist. Aber die eben der Einfachheit halber gemachte Annahme, daß der Rückgang des Titors in der Hauptprobe und der blinden Probe der nämliche ist, ist unrichtig, denn erstens ist in der Hauptprobe weniger Halogen vorhanden und zweitens wird in dieser bei der Addition Salzsäure gebildet, was auch dem Rückgang des Titors entgegenwirkt.

Was zuerst den Einfluß der verminderten Halogenmenge betrifft, ist es wohl erlaubt, die Annahme zu machen, daß die Verminderung mit der verminderten Halogenmenge proportional ist. Wir erhalten dann:

$$[a_o - a] = \frac{a_o}{b_o} [b_o - b_t]$$

Was wiederum die gebildete Salzsäure betrifft, so wirkt sie dem Rückgang des Titors entgegen (vgl. auch über die Waller'sche Methode S. 60). Die Menge der gebildeten Salzsäure ist um so geringer, je größer der Halogenüberschuß $\left(\frac{a_o}{b_o}\right)$ der Lösung ist, oder mit anderen Worten, je größer der Rückgang des Titors. Nehmen wir auch hier an, daß einfache Proportionalität herrscht, so wird der Ausdruck für den Rückgang des Titors mit $\frac{a_o}{b_o}$ zu multiplizieren sein und wir erhalten schließlich für den Rückgang des Titors den Ausdruck:

$$[a_o - a] = \left(\frac{a_o}{b_o}\right)^2 [b_o - b_t]$$

Der Einfluß der Salzsäure ist hier sicher zu hoch geschätzt, aber es ist praktisch nicht zweckmäßig, mit einem Bruche zu rechnen.

Um die Rechnung zu vereinfachen, machen wir die Annahme¹, daß

$$\frac{a_o}{b_o} = \frac{a}{b_t} \text{ und bekommen dann}$$

$$a_o = a + \left(\frac{a}{b_t}\right)^2 [b_o - b_t]$$

Aus Formel I erhalten wir dann

$$J = \frac{127f}{100i} \left[b_o - \left(a + \left(\frac{a}{b_t}\right)^2 [b_o - b_t] \right) \right] \text{ oder in einer für}$$

die praktische Arbeit bequemen Form:

$$J = \frac{127f}{100i} \left[(b_o - a) - \left[\frac{a}{b_t} \right]^2 (b_o - b_t) \right] \dots \dots \dots \text{ III}$$

¹ Der hierdurch gemachte Fehler ist jedenfalls geringer als der Titrierungsfehler.

Die Handhabung dieser Formel¹ braucht keine besonderen Schwierigkeiten zu bieten. Die Ausrechnung kann folgendermaßen aufgestellt werden:

$$\begin{array}{rcl} b_o & = & 48,70 \\ a & = & 10,62 \\ \hline b_o - a & = & 38,08 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} b_o & = & 48,70 \\ b_t & = & 48,06 \\ \hline b_o - b_t & = & 0,63 \end{array}$$

$$\left[\frac{a}{b_t} \right]^2 (b_o - b_t) = 0,31$$

$$(b_o - b_a) - \left[\frac{a}{b_t} \right]^2 (b_o - b_t) = 37,7$$

Der Ausdruck $\left[\frac{a}{b_t} \right]^2 (b_o - b_t)$ kann recht einfach und mit hinreichender Genauigkeit auf dem Rechenstabe in der Weise gefunden werden, daß der Wert von a mit demselben von b_t auf der unteren Skala dividiert und das Quadrat des Quotienten an der oberen Skala mit dem Werte von $(b_o - b_t)$ multipliziert wird.

Wenn wir die Jodzahlen für das Seite 22 u. f. besprochene Olivenöl nach Formel III ausrechnen, bekommen wir die in Tabelle XVIII wiedergegebenen Werte.

Tabelle XVIII.

Einfluß von Halogenüberschuß und Einwirkungsdauer auf den Wert der Hübl'schen Jodzahl eines Olivenöls, berechnet nach Formel III.

Halogenüberschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100 \right)$	Einwirkungsdauer	Jodzahl berechnet nach Formel III
17,95	2 Stunden	82,46 g/100 g
	6 —	82,73 —
	24 —	83,56 —
58,99	2 —	82,94 —
	6 —	83,31 —
	24 —	83,73 —
79,49	2 —	83,57 —
	6 —	83,93 —
	24 —	83,93 —

¹ Zum Vergleiche erinnern wir daran, daß die Formeln für die Ausrechnung der Jodzahl mit einer blinden Probe am Schluß des Versuches (Formel II von Seite 52) und mit einer blinden Probe am Anfang des Versuches (Formel IV) und schließlich mit dem Mittel aus einer blinden Probe am Anfang und Schluß des Versuches (Formel V) das folgende Aussehen haben:

$$J = \frac{127 f}{100 i} [b_t - a] \dots \dots \dots \text{II}$$

$$J = \frac{127 f}{100 i} [b_o - a] \dots \dots \dots \text{IV}$$

$$J = \frac{127 f}{100 i} \left[\frac{b_o + b_t}{2} - a \right] \dots \dots \dots \text{V}$$

In Fig. 20 haben wir zuerst diese Werte in einem Diagramme Jodzahl-Einwirkungsdauer aufgezeichnet und zwar mit vollgezogener Linie. Es zeigt sich, daß die Jodzahl mit der anwachsenden Einwirkungsdauer einen asymptotischen Wert erreicht, und dies um so schneller, je größer der Halogen-

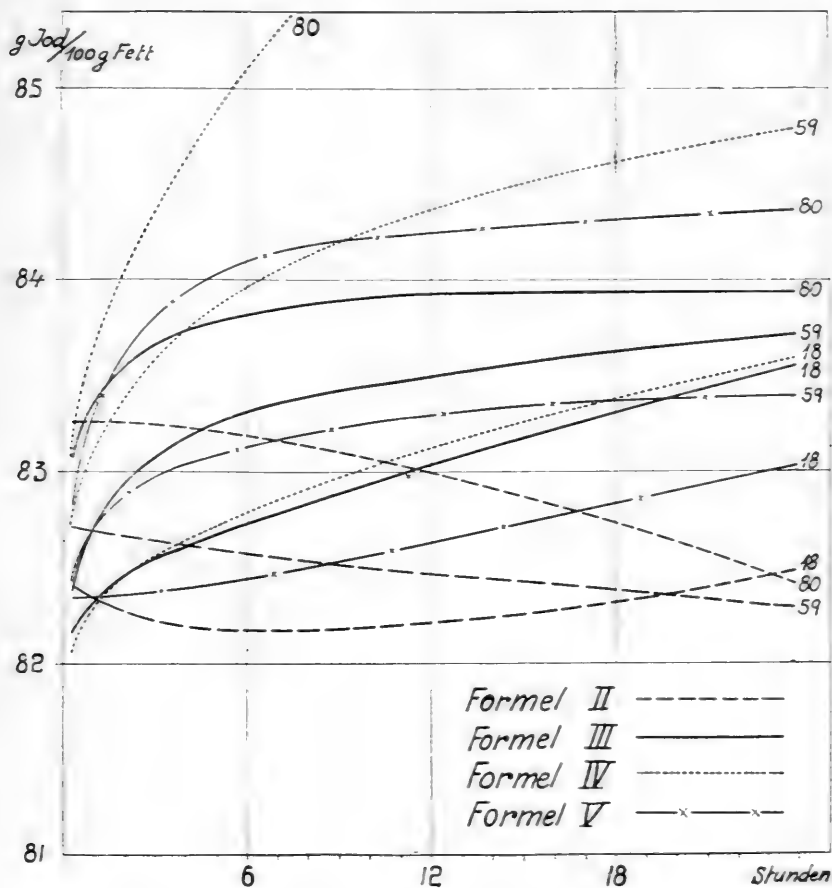


Fig. 20. Diagramm Hübl'sche Jodzahl-Einwirkungsdauer für ein Olivenöl, den Einfluß der Berechnungsweise zeigend. (18, 59 und 80 bezeichnen die verwendeten Halogenüberschüsse).

überschuß ist. Dies ist ja der ideelle Kurvenverlauf, den man hätte erwarten sollen, wenn nur Addition und keine Substitution stattfände. Fig. 20 enthält auch Kurven für die Jodzahl, berechnet nach Formel II, IV und V, wie sie oben S. 51 in der Tabelle XVII wiedergegeben sind.

Wir haben auch die Jodzahlen für Kokosfett und Leinöl nach den vier Formeln berechnet und in den Tabellen XIX und XX zusammengestellt.

Tabelle XIX.

Einfluß der Berechnungsweise auf den Wert der Hübl'schen Jodzahl eines Kokosfettes.

Halogen- überschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$	Einwirkungs- dauer	Die Jodzahl berechnet nach:			
		Formel IV (mit b_o)	Formel V (mit $\frac{b_o + b_t}{2}$)	Formel II (mit b_t)	Formel III (mit $\left[\frac{a}{b_t}\right]^2 (b_o - b_t)$)
		g/100 g	g/100 g	g/100 g	g/100 g
18,72	2 Stunden	8,13	8,11	8,10	8,13
	6 —	8,50	8,47	8,43	8,50
	24 —	8,88	8,81	8,73	8,81
43,32	2 —	8,79	8,77	8,75	8,77
	6 —	8,91	8,85	8,79	8,87
	24 —	9,01	8,90	8,78	8,93
79,66	2 —	8,90	8,86	8,83	8,85
	6 —	9,05	8,94	8,84	8,91
	24 —	9,29	9,07	8,85	9,02

Tabelle XX.

Einfluß der Berechnungsweise auf den Wert der Hübl'schen Jodzahl eines Leinöls.

16,90	2 Stunden	167,04	166,80	166,56	166,98
	6 —	175,90	175,28	174,61	175,80
	24 —	186,48	184,70	182,93	186,33
57,61	2 —	181,35	180,98	180,51	181,07
	6 —	188,11	186,89	185,67	187,27
	24 —	191,87	188,58	185,20	189,61
77,69	2 —	187,06	186,35	185,46	185,99
	6 —	192,95	190,63	188,31	190,10
	24 —	199,56	193,31	187,06	192,06

Diese Werte haben wir dann der Übersichtlichkeit halber in Fig. 21 und Fig. 22 als Diagramme Jodzahl—Einwirkungsdauer aufgezeichnet (S. 57—58).

Man ersieht hieraus das nämliche wie für das Olivenöl, d. h.: Die Formeln II, IV und V müssen zu unrichtigen Resultaten führen, während dagegen Formel III Werte gibt, die einen ideellen Kurvenverlauf aufweisen.

Wenn dies bei Fetten mit ganz verschiedenen Jodzahlen der Fall ist, dürfen wir wohl behaupten, daß dies nicht ein Zufall sein kann, sondern daß es uns wirklich gelungen ist, eine richtige Berechnungsgrundlage zu finden.

Dies geht übrigens auch sehr klar aus einem Versuche hervor, wo wir für die Bestimmung der Jodzahl eines Olivenöls recht wechselnde Ölmengen direkt eingewogen hatten. Es wurden für sämtliche Proben 25 cm³ der Hübl'schen Jodlösung verwendet und die Titrierung erst nach 24 Stunden Einwirkungsdauer vorgenommen. Wie aus Tabelle XXI S. 58 ersichtlich ist, differieren die Jodzahlen des Öls nach der neuen Formel (Formel III) nur um 0,58 Einheiten, während die Differenz zwischen der höchsten und niedrigsten Jodzahl nach Formel II 3,19 Einheiten und nach Formel V sogar 5,39 Einheiten ausmacht.

Aus dem Angeführten ist es klar, daß wir uns in dieser Arbeit für die Berechnung der in den Hauptversuchen gemachten Jodzahlbestimmungen nach v. Hübl uns der neuen Berechnungsweise bedient haben, wie wir es übrigens schon S. 18 betont haben.

Wir glauben sagen zu können, daß die unbedingten Vorteile, welche die Hübl'sche Methode nach den auf S. 43—48 wiedergegebenen Haupt-

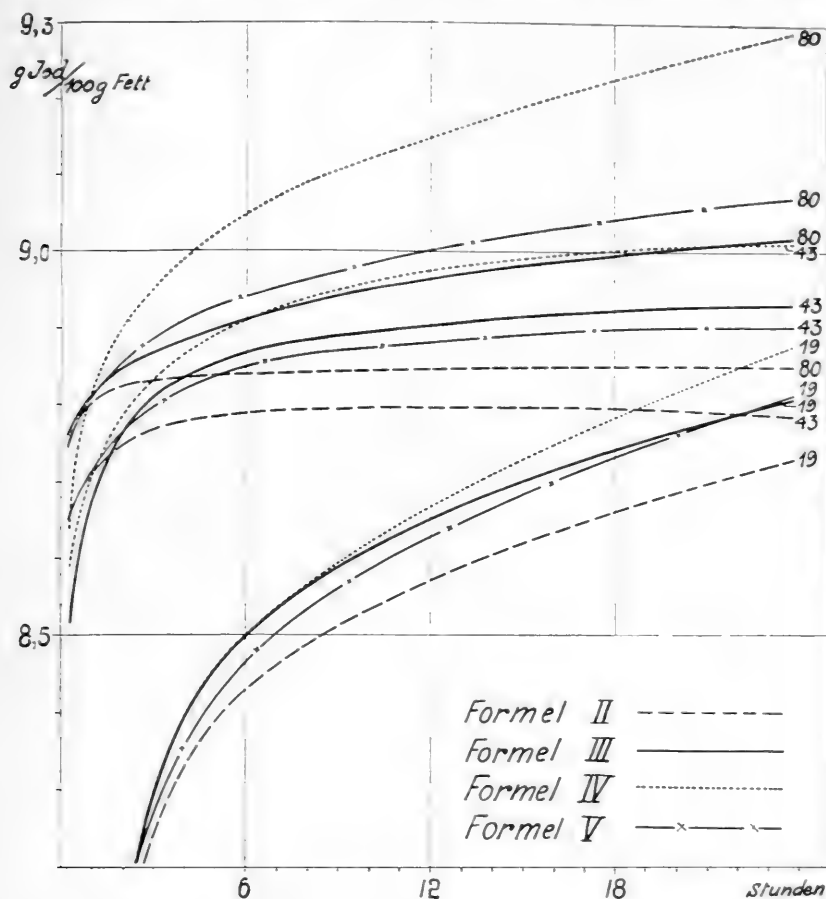


Fig. 21. Diagramm Hübl'sche Jodzahl-Einwirkungsdauer für ein Kokosfett, den Einfluß der Berechnungsweise zeigend. (19, 43 und 80 bezeichnen die verwendeten Halogenüberschüsse).

diagrammen besitzt, erst durch dieses Berechnungsverfahren sicher zum Vorschein kommen.

Es dürfte nach unseren Hauptdiagrammen kein Zweifel bestehen, daß die Hübl'sche Methode in Bezug auf den Reaktionsverlauf den anderen Methoden völlig überlegen ist. Als ein weiterer Beleg für unsere Behauptung, daß bei der richtig durchgeführten Hübl'schen Methode keine Substitution eintritt, führen wir in Tabelle XXII S. 59 die Resultate eines auf 72 Stunden Einwirkungsdauer ausgedehnten Versuches an Butterfett, Olivenöl und Heringsöl an.

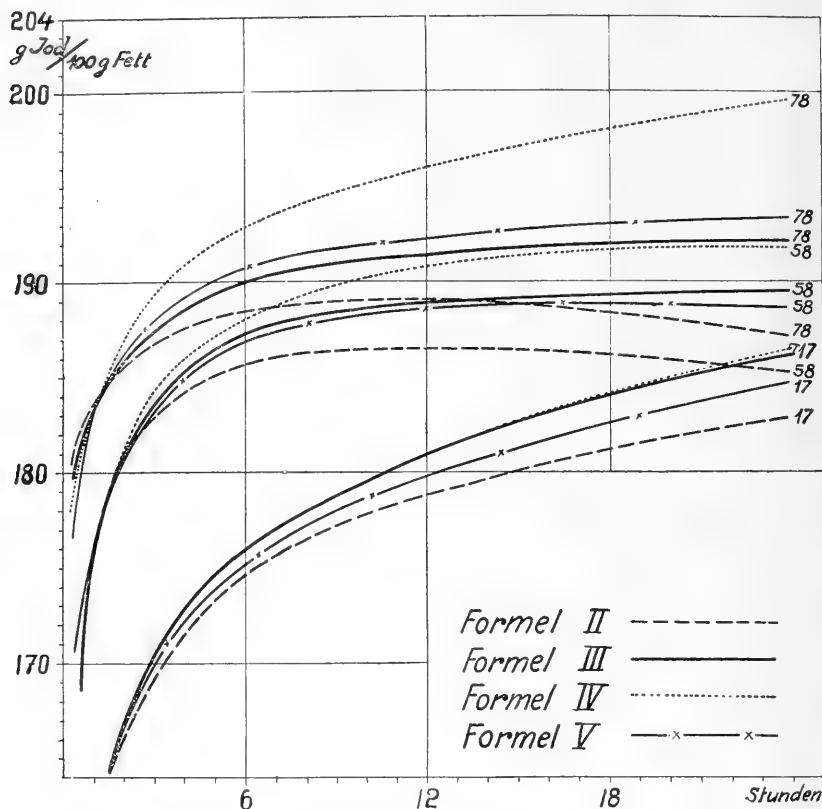


Fig. 22. Diagramm Hüb'l'sche Jodzahl-Einwirkungsdauer für ein Leinöl, den Einfluß der Berechnungsweise zeigend. (17, 58 und 78 bezeichnen die verwendeten Halogenüberschüsse).

Tabelle XXI.

Einfluß der Berechnungsweise auf den Wert der Hüb'l'schen Jodzahl eines Olivenöls bei 24 Stunden Einwirkungsdauer und wechselnden Halogenüberschüssen.

Fettmenge	Halogen- überschuß $\left(\frac{B-A}{B} \cdot 100\right)$	Die Jodzahl berechnet nach:		
		Formel II (mit b_t)	Formel III (mit $\left[\frac{a}{b_t}\right]^2 (b_o - b_t)$)	Formel V (mit $\frac{b_o + b_t}{2}$)
0,6663 g	8,05	82,41 g/100 g	83,96 g/100 g	83,21 g/100 g
0,5267	27,3	82,21 —	84,05 —	83,56 —
0,3258	54,9	81,83 —	84,25 —	84,02 —
0,2817	61,2	81,48 —	84,05 —	84,01 —
0,1614	78,0	80,62 —	83,87 —	85,02 —
0,1279	82,3	80,07 —	83,67 —	85,63 —
0,0755	89,7	79,23 —	83,83 —	88,60 —

Tabelle XXII.

Einfluß der Einwirkungsdauer auf den Wert der Jodzahl nach Hübl.

Fett	Die Jodzahl nach einer Einwirkungsdauer von:			
	6 Stunden	24 Stunden	48 Stunden	72 Stunden
Butterfett	28,64 g/100 g	28,75 g/100 g	28,59 g/100 g	28,60 g/100 g
Olivenöl	83,25 —	83,09 —	83,42 —	83,08 —
Heringsöl	121,55 —	123,39 —	123,63 —	123,19 —

Trotzdem nicht weniger als 80 % Halogenüberschuß vorhanden war, haben wir selbst nach 72 Stunden Einwirkungsdauer keine sichere Erhöhung des nach 24 Stunden erhaltenen Wertes finden können. Sämtliche Variationen liegen, trotzdem hier nur Einzelbestimmungen ausgeführt sind, innerhalb der Fehlergrenzen. Und wir halten uns somit für berechtigt den Versuch als eine Stütze für unsere Annahme anzusehen, daß bei der Hübl'schen Methode tatsächlich keine Substitution stattfindet.

Es wird bekanntlich für die verschiedenen Jodzahlmethoden vorgeschrieben, daß die Einwirkung der Jodlösung auf die Fette im Dunkeln stattfinden soll. Der Einfluß des Lichtes ist indessen recht verschieden. Für die Winkler'sche Methode ist z. B. die Einwirkung des Lichtes völlig entscheidend. Für die Hübl'sche Methode ist der Einfluß des Lichtes nicht besonders stark, kann sich aber bei extremen Verhalten doch geltend machen.

In einem Versuche vom April 1921 fanden wir, daß der Thiosulfatverbrauch der blinden Probe während 16 Stunden im Tageslicht 1,51 cm³ geringer war, als die im Dunkeln verwahrte Probe. Bei der Hauptprobe mit Olivenöl war der Thiosulfatverbrauch 1,23 cm³ geringer für die 16 Stunden im Tageslicht verwahrte Probe als für diejenige im Dunkeln. Binnen einer halben Stunde im Tageslicht ist der Titerrückgang nicht sicher bemerkbar.

Wir gehen hier nicht näher auf unsere Versuche über die Bedeutung des Lichtes ein, betonen aber, daß es notwendig ist, daß die Proben bei der Hübl'schen Methode während der Einwirkungszeit dunkel gehalten werden.

Ein Vorteil der Hübl'schen Methode ist die angenehme Titrierung. Die Endreaktion ist schärfer und leichter zu beobachten, als es bei den anderen untersuchten Methoden der Fall ist. Der Titrierungsfehler dürfte selten größer als 0,04—0,05 cm³ 1/10 n. Thiosulfatlösung sein. Zu beachten ist jedoch, daß bei der Titrierung vorangehenden Verdünnung nicht zu viel Wasser verwendet werden darf. Sonst kommt nämlich eine Fällung (vom roten Hg J₂?) zum Vorschein, welche die Erkennung des Farbumschlages erschwert. Dies Übel läßt sich aber durch Hinzufügung von mehr Kaliumjodidlösung beseitigen. Besser ist es jedoch nicht mehr als 200 cm³ Wasser zu verwenden.

Da das Verhältnis zwischen den einzelnen Bestandteilen der Jodlösung bei den anderen Methoden völlig entscheidend für die Wirkung sein kann,

haben wir auch bei der Hübl'schen Methode Versuche mit einer Jodlösung mit wechselndem Gehalt an Sublimat angestellt. Wir verwendeten Lösungen mit 20, 30 und 40 g Sublimat pro Liter. Es zeigte sich, daß innerhalb dieser Grenzen kein sicherer Einfluß nachzuweisen war, voraussichtlich deswegen, weil selbst bei der geringsten Sublimatmenge hinreichend Sublimat vorhanden war, um die Umsetzung von Jod zu Jodtrichlorid zu erlauben, was eine notwendige Voraussetzung für die Reaktion mit dem Fette sein dürfte.

Die Waller'sche Methode.

Es ist nach den in der Literatur vorliegenden Daten über die Haltbarkeit der Waller'schen Jodlösung außer Zweifel, daß die Hinzufügung von Salzsäure tatsächlich ihre Haltbarkeit befördert. Insofern war es unnötig, Versuche hierüber anzustellen. Wir führen jedoch an, daß in einem Versuche der mittlere Titrierungswert für 25 cm³ Jodzähl-Flüssigkeit sofort nach der Zusammenmischung 49,04 cm³, nach 2 Stunden 49,14 cm³, nach 18 Stunden 49,17 cm³, nach 22 Stunden 49,16 cm³ und nach 40 Stunden 49,15 cm³ $\frac{1}{10}$ n. Thiosulfatlösung war. Gleichgewicht in der Flüssigkeit war also jedenfalls nach 2 Stunden vorhanden, und der Titer änderte sich nicht in den nächsten 38 Stunden.

Die bis jetzt wichtigste Fehlerquelle der Hübl'schen Methode fällt also bei der Waller'schen Methode weg, aber gleichzeitig hat die Jodzähl-Flüssigkeit an Reaktionsfähigkeit verloren. Selbst mit einem Halogenüberschuß von 80 % und einer Einwirkungsdauer von 24 Stunden sind die Werte nicht nur niedriger als die Hübl'schen, sondern auch niedriger als die Werte, die wir für sämtliche anderen Methoden erhalten haben, wie aus dem Tabellen- und Kurvenmaterial hervorgeht. Die Werte sind teilweise so niedrig, daß sie in mehreren von den Diagrammen nicht haben mitkommen können. Es geht aus dem Kurvenverlaufe hervor, daß man bei dieser Methode bedeutend mehr von dem Halogenüberschuß abhängig ist.

Die Ursache der niedrigen Werte dürfte aller Wahrscheinlichkeit nach darin zu suchen sein, daß beim Zusatz von Salzsäure ein künstliches Gleichgewicht geschaffen wird, wobei die Bildung von Unterjodsäure aufgehoben wird, was nach Wijs [14] gewiß den Rückgang des Titers verhindert, indem die Oxydation des Alkohols gehemmt wird. Gleichzeitig wird aber die Reaktionsfähigkeit dem Fette gegenüber vermindert.

Unserer Meinung nach ist dieser Übelstand gewichtiger als der Rückgang des Titers, besonders weil man, wie oben gezeigt worden ist, für letzteren eine sichere Korrektur hat.

Wir kommen somit zu der Schlußfolgerung, daß die Waller'sche Methode nicht zu empfehlen ist, erstens, da sie viel zu niedrige Werte gibt und zweitens, weil es schwer ist, reproduzierbare Werte zu erhalten, indem die Kurven selbst bei großen Halogenüberschüssen und lange dauernder Einwirkung sehr steil verlaufen.

Die Wijs'sche Methode.

Wegen der großen Haltbarkeit der Jodlösung, sowie der kurzen Einwirkungsdauer hat die Wijs'sche Methode in den letzten Jahren große Verwendung gefunden. Es ist ja sehr bequem mit einer Jodlösung arbeiten zu können, welche sich Wochen und Monate lang unverändert erhält, so daß jede Schwierigkeit wegen Titerrückgang bei der Berechnung der Analyse wegfällt. Viele Forscher haben konstatieren können, daß man bei dieser Methode schon nach einer Einwirkungsdauer von einer halben bis 2 oder 3 Stunden ebenso hohe, wenn nicht höhere Werte findet, als nach 24 stündiger Einwirkungsdauer bei der Hübl'schen Methode.

Wie aus dem Kurvenlaufe unserer Hauptdiagramme S. 43—48 ersichtlich ist, geht die Halogenaufnahme bei der Wijs'schen Methode schneller als bei den andern untersuchten Methoden von statten. Dies bedeutet insofern gewiß einen Vorteil, als man mit kürzerer Einwirkungsdauer arbeiten kann, aber auf der anderen Seite kann die Einwirkung auch zu schnell oder richtiger ausgedrückt, zu energisch stattfinden, wobei gleichzeitig mit der beabsichtigten Halogenaddition eine nicht beabsichtigte Halogensubstitution ermöglicht wird.

Bei einer näheren Durchmusterung unseres Kurvenmaterials wird man, vorausgesetzt daß bei dem betreffenden Versuche überhaupt hinreichend Halogen vorhanden ist, finden, daß die Kurven fast momentan den Grenzwert der Hübl'schen Jodzahl erreichen, aber die Einwirkung geht weiter. Die fortgesetzte Einwirkung ist zum Teil von der Eigenart des Fettes bedingt, wesentlich aber von dem Halogenüberschusse. Deswegen ist es mit dieser Methode im Gegensatze zu der Hübl'schen unmöglich, zu irgendwelchen Grenzwerten zu kommen, die von der weiteren Einwirkungsdauer und dem vermehrten Halogenüberschusse unabhängig sind. Dies Resultat kann nicht anders gedeutet werden, als daß bei der Wijs'schen Methode außer Halogenaddition auch Substitution von Halogen stattfindet. Die Wijs'sche Methode kann deswegen keinesfalls korrekte Jodzahlen geben. Sie ist deswegen für alle wissenschaftliche Untersuchungen völlig ungeeignet.

Eine andere Frage ist es indessen, ob die Wijs'sche Methode sich für gewisse praktische Zwecke verwerten läßt. Wegen des schnellen Reaktionsverlaufes besteht so z. B. die Möglichkeit, sie zur Betriebskontrolle bei der Fetthärtung zu verwenden. Hier kommt es nämlich weniger darauf an, absolute Werte zu erhalten, als darauf, sich die Möglichkeit zu verschaffen, den Reaktionsverlauf schnell verfolgen zu können d. h., es genügt relative Werte zu finden.

Nach einer Bearbeitung unserer Versuchsergebnisse, auf deren Details wir hier nicht des näheren eingehen wollen, sind wir zu der Schlußfolgerung gekommen, daß, wenn für jede Analyse genau 0,2 g Fett eingewogen werden, man für Fette mit Jodzahlen kleiner als 160, bei einer Einwirkungsdauer von 2 Stunden, und für Fette mit Jodzahl über 160, bei einer Ein-

wirkungsdauer von 6 Stunden, Resultate erhalten kann, die voraussichtlich höchstens $\pm 1,5$ rel. $^0/0$ von der wahren Jodzahl abweichen, vorausgesetzt, daß die Einwirkungsdauer genau inne gehalten wird.

Da wir also zu dem Resultate gekommen sind, daß die Wijs'sche Methode unter gewissen Bedingungen recht anwendbar sein kann, haben wir die Bedeutung der richtigen Zusammensetzung der Jodlösung untersucht. Nach der Vorschrift soll Jodmonochlorid (JCl) in Eisessig verwendet werden. Es sei gleich gesagt, daß die große Schwierigkeit eben darin liegt, eine Lösung zu erhalten, die gerade diese Verbindung enthält, ohne irgend einen Überschuß des einen oder des anderen der beiden Halogene. Nach dem gewöhnlich verwendeten Verfahren geht man von Jodtrichlorid aus und fügt die berechnete Menge Jod zu der Lösung derselben in Eisessig hinzu. Wegen der geringen Haltbarkeit des Trichlorids und der unsicheren Zusammensetzung desselben kann man in dieser Weise sowohl Überschuß an Chlor wie an Jod erhalten und voraussichtlich gewöhnlich an Jod.

Wie wird sich nun eine Verschiedenheit in der Zusammensetzung der Jodlösung in der einen oder anderen dieser Richtungen geltend machen? Um diese Frage zu erforschen, bereiteten wir die Jodlösung nach einem anderen Verfahren als wir oben S. 19 beschrieben haben, indem wir, nach einer Angabe die auch in der Literatur zu finden ist, zuerst Jod in Eisessig lösten und dann gasförmiges Chlor in die Lösung einleiteten, bis ihr Titer mit 50 $^0/0$ gestiegen war. Die Lösung enthielt dann Jod:Chlor = 2:1. Von dieser wurde dann ein Teil abgemessen und mit Eisessig auf die Konzentration der gewöhnlichen Jodlösung d. h. $1/5$ normal verdünnt (Jodlösung A).

In der übrigen Lösung wurde dann die Chloreinleitung fortgesetzt, bis der ursprüngliche Titer auf das doppelte (100 $^0/0$) erhöht worden war. Dies läßt sich übrigens mit ein wenig Übung am einfachsten durch den Farbumschlag der Lösung von dunkelbraun zu hellbraun erkennen. Diese neue Lösung soll jetzt Jod und Chlor in dem äquimolekularen Verhältnis enthalten d. h. JCl . Eine Portion wurde nun mit Eisessig auf einer Konzentration von $1/5$ normal verdünnt (Jodlösung B).

Die Chloreinleitung wurde nun in der Restlösung fortgesetzt bis ihr ursprüngliches Titer auf das dreifache vermehrt worden war (um 200 $^0/0$). In dieser Weise erhielten wir eine Lösung, wo Jod und Chlor im Verhältnis 1:2 vorhanden waren. Nach Verdünnung mit Eisessig auf einer Normalität von $1/5$ war die Jodlösung C fertig.

Mit den in dieser Weise bereiteten 3 Jodlösungen wurden nun die Jodzahlen für Olivenöl und Leinöl bei einer Einwirkungsdauer von 2, 6 und 24 Stunden und einem Halogenüberschusse von etwa 80 $^0/0$ bestimmt.

Die gefundenen Werte sind in den Tabellen XXIII—XXIV zusammengestellt.

Tabelle XXIII.

Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf den Wert der Jodzahl nach Wijs für Olivenöl.

Jodlösung	Die Jodzahl nach einer Einwirkungsdauer von:		
	2 Stunden	6 Stunden	24 Stunden
A ∅: J:Cl = 2:1	82,65 g'100 g	83,08 g'100 g	84,19 g'100 g
B ∅: J:Cl = 1:1	84,54 —	85,14 —	86,68 —
C ∅: J:Cl = 1:2	106,70 —	108,76 —	109,97 —

Tabelle XXIV.

Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf den Wert der Jodzahl nach Wijs für Leinöl.

A ∅: J:Cl = 2:1	193,36 g'100 g	194,67 g'100 g	197,65 g'100 g
B ∅: J:Cl = 1:1	192,80 —	194,85 —	197,47 —
C ∅: J:Cl = 1:2	207,54 —	213,70 —	218,56 —

Damit die Resultate besser hervortreten können, haben wir die mittleren Jodzahlen in den Diagrammen Fig. 23 u. 24 für Olivenöl und in Fig. 25 u. 26 für Leinöl aufgezeichnet.

Man ersieht hieraus, daß so lange nicht mehr Chlor vorhanden ist, als dem Jodmonochlorid entsprechend, der Chlorinhalt geringere Bedeutung

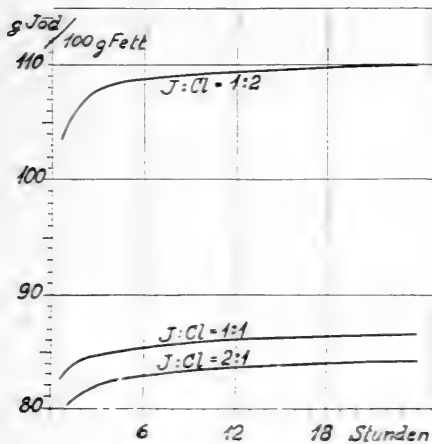


Fig. 23. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Olivenöl nach Wijs bei wechselnder Zusammensetzung der Jodlösung.

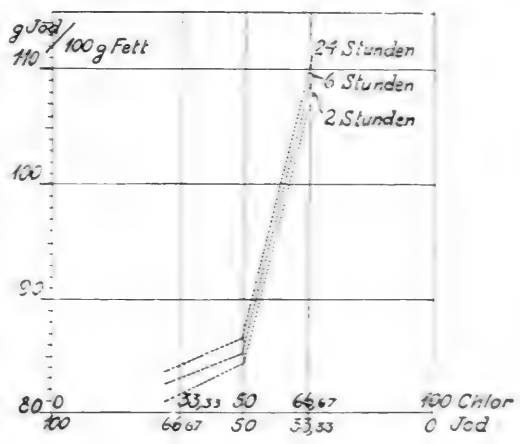


Fig. 24. Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf die Jodzahl nach Wijs für Olivenöl bei wechselnder Einwirkungsdauer.

hat. Sobald aber Chlor im Überschuß vorhanden ist, d. h. höhere Chlorverbindungen als JCl gebildet werden, so steigt die Jodzahl und zwar mit der vermehrten Chlormenge sehr rasch. Es braucht nicht viel überschüssiges Chlor anwesend zu sein um bereits einen recht erheblichen Fehler zu bewirken. Gleichzeitig zeigt es sich, daß die Übereinstimmung zwischen

den Parallelbestimmungen weniger gut wird, vermutlich wegen mechanischer Chlorverluste.

Es ist somit, wenn man die Wijs'sche Methode verwenden will, dringend notwendig, darauf aufmerksam zu sein, daß die Jodlösung nicht mehr Chlor enthält, als dem Jodmonochlorid entspricht, und da dies nicht immer glatt zu erreichen ist, dann lieber ein Überschuß an Jod, als an Chlor. Die Bereitung einer solchen Jodlösung findet am einfachsten statt durch Einleiten von Chlor in eine Lösung von Jod in Eisessig, bis die dunkelbraune Farbe eben in hellbraun übergeht, wonach die dunkelbraune Farbe wieder durch Hinzufügen von einigen Jodkristallen retabliert wird. Bei dem üblichen Verfahren durch Auflösen von Jod in Jodtrichlorid in Eisessig dürfte man

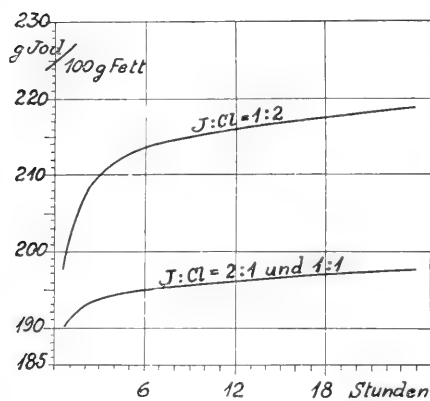


Fig. 25. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für *Leinöl* nach Wijs bei wechselnder Zusammensetzung der Jodlösung.

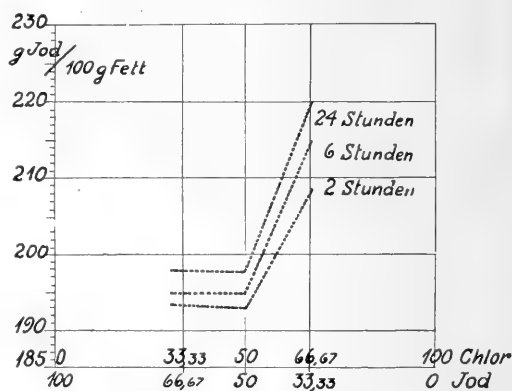


Fig. 26. Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf die Jodzahl nach Wijs für *Leinöl* bei wechselnder Einwirkungsdauer.

auch auf der sicheren Seite sein können, wenn man nur die Farbenunterschiede im Auge behält. Wir empfehlen jedoch die Chloreinleitungsmethode als die sicherste.

Was schließlich den Einfluß des Lichtes bei der Wijs'schen Methode betrifft, sei angeführt, daß die Jodlösung im Lichte wenig haltbar ist. Der Titer von 25 cm³ ging an einem hellen Apriltage binnen einer halben Stunde von dem Mittelwerte 50,09 auf 49,90 cm³ d. h. mit 0,19 cm³ ¹/₁₀ n. Thio-sulfatlösung zurück. In 16 Stunden war der mittlere Rückgang 2,14 cm³. Es ist übrigens überall streng vorgeschrieben, daß die Jodlösung nach Wijs nicht nur in dunklen sondern in schwarzgestrichenen Flaschen aufzubewahren ist.

Bei dem gewöhnlichen Arbeitsverfahren, wo die Einwirkung im Dunkeln stattfindet und die Proben nur während der Abmessung der Jodlösung und der Rücktitrierung im Lichte sind, ist der Einfluß des Lichtes sicher ohne Bedeutung, besonders da die Hauptprobe und die blinde Probe sich gleich zu verhalten scheinen.

Die Endreaktion ist auch bei der Wijs'schen Methode leicht zu beobachten und die Übereinstimmung zwischen den Parallelen gut, obwohl die Hübl'sche Methode auch in dieser Hinsicht vorzuziehen ist.

Bei der Bereitung der Jodlösung nach Wijs muß man darauf aufmerksam sein, daß der Eisessig hinreichend konzentriert ist. Sonst wird der Titer der Jodlösung wegen der durch den Wassergehalt veranlaßten Bildung von Salzsäure zu niedrig, und die Jodzahlen fallen dann zu klein aus.

Die Methode von Hanuš.

Diese Methode dürfte nach der allgemeinen Auffassung durch die große Titerbeständigkeit der Jodlösung, sowie durch rasche Einwirkung auf die Fette gekennzeichnet sein. Man behauptet ferner, daß ihre Werte mit denen der Hübl'schen Methode übereinstimmen (vergl. so z. B. SUNDBERG und LUNDBORG [15]).

Wir möchten im Gegensatz hierzu gleich betonen, daß wir die Hanuš'sche Methode für genaue Jodzahlbestimmungen nicht empfehlen können. Unsere Diagramme Jodzahl-Einwirkungsdauer zeigen allerdings, daß man nach kurzer Zeit, höchstens einer Stunde, Werte findet, die bei der fortgesetzten Einwirkung nur langsam weiter zunehmen. Die Werte sind mit anderen Worten von der Einwirkungsdauer sehr wenig beeinflusst, und dies wäre ja ausgezeichnet, wenn die Wirkung nicht um so mehr von dem Halogenüberschusse abhängig wäre. Dies geht erstens aus dem Kurvenverlaufe in den Diagrammen Jodzahl-Halogenüberschuß Fig. 8—13 hervor, und zweitens aus dem großen Vertikalabstand zwischen den Kurven in den Diagrammen Jodzahl-Einwirkungsdauer Fig. 14—19.

Die Methode von Hanuš ist mit anderen Worten dadurch gekennzeichnet, daß bei der Reaktion zwischen Jodlösung und Fett sich bald Gleichgewicht einstellt, aber die Lage desselben ist durchaus von der Größe des Halogenüberschusses abhängig. Bei erhöhtem Halogenüberschusse kann man ebensowenig bei dieser Methode, wie bei der von Wijs zu einem definitiven Grenzwerte der Jodzahl kommen. Man findet nicht die richtigen Jodzahlen und auch nicht ohne konstante Einwägungen reproduzierbare Werte. So hohe Werte findet man jedoch nicht bei dieser Methode wie bei der Wijs'schen.

Wir können gewiß nicht bestreiten, daß man dieselben Werte bei der Methode von Hanuš finden kann, wie bei der Hübl'schen, aber diese Möglichkeit wird vor allem von der Größe der verwendeten Fettmenge bestimmt.

Eine andere Frage ist es, ob die Methode von Hanuš in der Industrie für die Betriebskontrolle Verwendung finden kann.

Wir haben deswegen auch für diese Methode den Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung untersucht.

Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung. Die Jodlösung nach Hanuš wird gewöhnlich durch Einwägung von Jodmonobromid und Lösen desselben in Eisessig dargestellt. Da indessen Jodmonobromid nicht Handels-

ware ist, wird dasselbe im Laboratorium aus den Elementen dargestellt, gewöhnlich durch Zusammenreiben in einer Reibschale, eine Methode, die sicher nicht zuverlässig sein kann, da bald das eine, bald das andere von den Elementen in Überschuf vorhanden sein wird.

Für unsere Versuche über die Bedeutung der Zusammensetzung der Jodlösung stellten wir zuerst getrennte Lösungen von Brom und Jod in Eisessig von genau $\frac{1}{5}$ Normalität dar. Diese Lösungen wurden dann in den Verhältnissen 2:1, 1:1 und 1:2 mit einander gemischt, und wir erhielten in dieser Weise genau $\frac{1}{5}$ normale Jodzählflüssigkeiten nach Hanuš,

wovon Lösung A enthielt J:Br = 2:1
 " " B " J:Br = 1:1
 " " C " J:Br = 1:2

Mit diesen drei Jodlösungen wurden nun an Olivenöl und Leinöl die in den Tabellen XXV u. XXVI aufgeführten mittleren Jodzahlen gefunden.

Tabelle XXV.

Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf den Wert der Jodzahl nach Hanuš für Olivenöl.

Jodlösung	Die Jodzahl nach einer Einwirkungsdauer von:		
	2 Stunden	6 Stunden	24 Stunden
A ∴ J:Br = 2:1	83,67 g/100 g	83,76 g/100 g	84,57 g/100 g
B ∴ J:Br = 1:1	83,43 —	84,82 —	85,80 —
C ∴ J:Br = 1:2	81,55 —	82,28 —	83,59 —

Tabelle XXVI.

Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf den Wert der Jodzahl nach Hanuš für Leinöl.

A ∴ J:Br = 2:1	189,77 g/100 g	191,43 g/100 g	193,10 g/100 g
B ∴ J:Br = 1:1	188,66 —	191,99 —	195,88 —
C ∴ J:Br = 1:2	176,07 —	179,96 —	184,40 —

Fig. 27, 28, 29, und 30 geben die Jodzahlen in graphischer Darstellung an.

Man wird ersehen, daß die Einwirkung ihr Maximum erreicht, wenn Jod und Brom in äquimolekularem Verhältnis vorhanden sind. Die Verbindung JBr sollte danach den Fetten gegenüber wirksamer sein, als Jod oder Brom jedes für sich. Von den beiden Elementen scheint auffallender Weise Jod stärker als Brom zu wirken.

Übrigens sind die Fehler, welche durch eine unrichtige Zusammensetzung des Jodmonobromids veranlaßt werden können, sicher in der Praxis ohne Bedeutung.

Die Lichtempfindlichkeit der Jodlösung nach Hanuš scheint bei weitem nicht so groß zu sein wie bei den Jodlösungen nach Winkler und Wijs.

Nach einer halben Stunde in vollem Tageslichte war kein sicherer Rückgang zu konstatieren, und selbst nach 16 Stunden in starkem Tageslichte betrug der mittlere Rückgang $0,46 \text{ cm}^3 \text{ }^{1/10}$ normaler Thiosulfatlösung d. h. 1 rel. 0/0. Sehr eigentümlich ist es, daß wir in einer Versuchsreihe mit Olivenöl gar

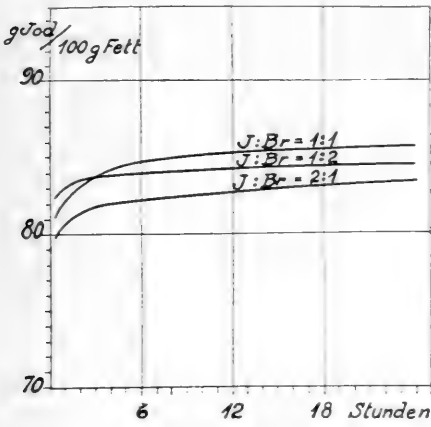


Fig. 27. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Olivenöl nach Hanus bei wechselnder Zusammensetzung der Jodlösung.

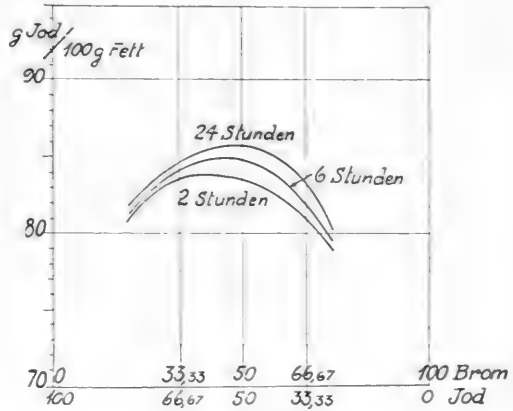


Fig. 28. Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf die Jodzahl nach Hanus für Olivenöl bei wechselnder Einwirkungsdauer.

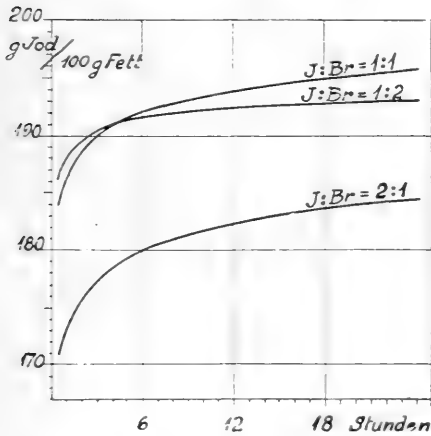


Fig. 29. Diagramm Jodzahl-Einwirkungsdauer für Leinöl nach Hanus bei wechselnder Zusammensetzung der Jodlösung.

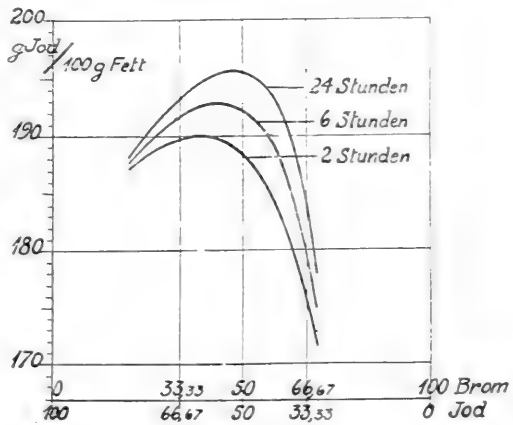


Fig. 30. Einfluß der Zusammensetzung der Jodlösung auf die Jodzahl nach Hanus für Leinöl bei wechselnder Einwirkungsdauer.

keinen Unterschied zwischen den im Dunkeln und den in vollem Tageslichte 16 Stunden lang verwahrten Proben fanden. Das Olivenöl schützte also in diesem Falle gegen Rückgang, eine Erscheinung, die wir bei den anderen Methoden allerdings nicht beobachtet haben, aber was an und für sich nicht erstaunlich ist.

Auch bei der Bereitung der Jodlösung nach Hanus ist es von Wichtigkeit, daß die Essigsäure rein und nicht wasserhaltig ist. Trotzdem unsere

Essigsäure mit Kaliumbichromat und Redestillation gereinigt worden war, zeigten unsere Jodlösungen nach Hanuš regelmäßig einen Titerrückgang in 24 Stunden von $0,1-0,2 \text{ cm}^3 \frac{1}{10} \text{ n.}$ Thiosulfatlösung pro 50 cm^3 . In einem Falle, wo die Essigsäure wasserhaltig war (150 g/l ?), ging der Titer binnen 24 Stunden mit rund $20 \frac{0}{0}$ zurück, voraussichtlich wegen Bromwasserstoffbildung.

Die Endreaktion ist bei der Methode von Hanuš gewöhnlich leicht zu beobachten, etwa wie bei der Methode von Wijs. Eine Ausnahme fanden wir für die Proben mit Spinax-niger Tran insofern, als bei der größten Einwägung ($0,2333 \text{ g}$) nach 6 Stunden Einwirkungsdauer die Endreaktion sich nur schwer beobachten ließ, und daß sie nach 24 Stunden Einwirkungsdauer überhaupt nicht festgestellt werden konnte, da die Flüssigkeit selbst (ohne Stärkezusatz) eine blauschwarze schmutzige Farbe erhalten hätte, welche selbst bei Zusatz von sehr großen Überschüssen an Thiosulfatlösung (etwa das 6 fache der berechneten Menge) beständig war. Die entsprechenden Werte in den Diagrammen mußten deshalb graphisch gefunden werden.

Die Winkler'sche Methode.

Ein unbedingter Vorteil bei der Winkler'schen Methode ist die völlige Haltbarkeit der in Frage kommenden Lösungen; ihre geringen Kosten sind übrigens ein Moment, das nicht außer Betracht gelassen werden darf.

Wir folgten, wie oben erwähnt, genau den von Winkler selbst gegebenen Vorschriften, aber trotzdem gelang es uns nur, eine schlechte Übereinstimmung zwischen den Parallelen zu erhalten. In einer Versuchsserie zeigten die Parallelbestimmungen einen Thifisulfatverbrauch von $33,60-32,95-34,15-33,30-34,10$ —und $34,60 \text{ cm}^3$, d. h. eine Differenz zwischen Minimum und Maximum von $2,65 \text{ cm}^3$. Zuweilen war gewiß die Übereinstimmung besser, aber zu anderen Zeiten noch schlechter.

Die Ursache der schlechten Übereinstimmung ist hauptsächlich auf mechanische Bromverluste und auf die große Lichtempfindlichkeit des Systems zurückzuführen. Hierzu kommt noch, daß, wenn man nicht gleich im Anfange die Flüssigkeit bewegt, um die Auflösung des zugesetzten Bromkaliums zu sichern, es leicht eintreten kann, daß einige Kristalle unten am Boden liegen bleiben. Die Flüssigkeit enthält dann während der Einwirkungsdauer nur einen unbestimmten Teil der vorausgesetzten Brommenge, weshalb die Einwirkung unvollständig sein muß.

Die mechanischen Bromverluste. Trotzdem wir schon von Anfang an die Glasstöpsel der Jodzählflaschen nach dem Vorschlage von Winkler mit syrapiöser Phosphorsäure gedichtet hatten, war es nicht schwer zu konstatieren daß Brom entwich. Wir konnten so z. B. stets Brom in den für die Aufbewahrung der Proben während der Einwirkungsdauer verwendeten Schränken riechen. Und das nämliche war beim Öffnen

der Flasche vor dem Zusatz des Kaliumjodids der Fall. Gewöhnlich konnte man auch eine durch verlorene Bromdämpfe bewirkte Jodausscheidung an der Spitze der verwendeten Pipette beobachten. — Es dürfte somit außer Zweifel sein, daß bei der gewöhnlich vorgeschriebenen Versuchsanordnung mit Flaschen Bromverluste auftreten. Um diese zahlenmäßig feststellen zu können, haben wir Versuche in Kolben von der in Fig. 31 wiedergegebenen Konstruktion angestellt. Dabei glauben wir jede Möglichkeit mechanischer Bromverluste vermieden zu haben. Dies war übrigens auch notwendig, um den Einfluß des Lichtes studieren zu können.

Wie aus Fig. 31 ersichtlich ist, ist der Versuchskolben oben mit einem kleinen Tropftrichter und einer Flüssigkeitssperre versehen. Beide sind dem gut eingeschliffenen Stöpsel angeschmolzen. Die Fettlösung, die Kaliumbromatlösung, sowie die Schwefelsäure werden in der gewöhnlichen Weise direkt im Kolben abgemessen, und dieser dann mit dem mit syrapiöser Phosphorsäure befeuchteten Stöpsel sorgfältig geschlossen. Nachdem in die Flüssigkeitssperre des Stöpsels ein paar cm^3 Jodkaliumlösung (100 g/l) eingebracht sind, werden die vorgeschriebenen 10 cm^3 Kaliumbromidlösung durch den Tropftrichter eingefüllt, die Flüssigkeit am Boden ein paar Sekunden schwach bewegt, und der Kolben wird weggestellt. Nach beendeter Einwirkungsdauer wird durch den Tropftrichter 10 cm^3 Jodkaliumlösung hinzugefügt, der Kolben mit seinem Inhalte schwach bewegt, bis alle Bromdämpfe oberhalb der Flüssigkeit verschwunden sind d. h. sich mit dem Jodkalium umgesetzt haben. Danach wird der Kolbeninhalt sorgfältig in einer mit Glasstöpsel versehenen Flasche auf 500 cm^3 Inhalt übergespült und das überschüssige Jod in gewöhnlicher Weise titriert. Der Tropftrichter, die Flüssigkeitssperre, der Schliff des Stöpsels, sowie dessen Unterseite werden selbstverständlich vor der Titrierung genau abgespült.

Man kann aus der Farbe der Flüssigkeitssperre erschen, daß die Brommenge, die hier aufgefangen wird, nicht in allen Versuchen die gleiche ist. Dies kommt wohl hauptsächlich daher, daß es nicht gelingt, die Temperatur eines gewöhnlichen Laboratoriums überall gleich zu halten, aber die Flüssigkeitssperre sorgt jedenfalls dafür, daß kein Brom entweichen kann. Ein nicht unwesentlicher Bromverlust tritt gewöhnlich ein, wenn in Versuchen mit den gewöhnlichen Jodzahlflaschen der Stöpsel herausgenommen wird, um die Hinzufügung des Jodkaliums zu ermöglichen. Bei der Verwendung des eben beschriebenen Versuchskolbens hat man die ganze Zeit vor der

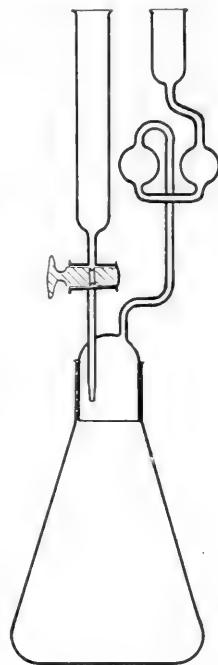


Fig. 31. Versuchskolben für die Winkler'sche Methode.

Titrierung ein geschlossenes System, und wir glauben, daß bei Verwendung desselben alle mechanischen Bromverluste vermieden werden.

Trotzdem zeigte es sich, daß die Parallelen fortwährend nicht stimmen wollten. Die Ursache hierzu liegt in der großen Lichtempfindlichkeit der Bromlösung, worauf wir gleich zurückkommen werden.

Um die Werte der mechanischen Bromverluste bei verschiedenen Versuchsanordnungen bestimmen zu können, wurden in jeder von den unten verzeichneten 24 Flaschen oder Versuchskolben 50 cm³ der Kaliumbromatlösung und 10 cm³ Schwefelsäure (180 g/l) abgemessen, wonach die Flaschen ins Dunkelzimmer übergeführt wurden. Erst hier wurde die Kaliumbromidlösung bei rotem Lichte hinzugefügt. Nach 24 Stunden im Dunkeln wurde bei rotem Lichte die Jodkaliumlösung hinzugefügt. Erst jetzt wurden die Flaschen zur Titrierung ins Tageslicht gebracht.

Die Titrierresultate waren wie folgt:

	Verbrauch an Thiosulfatlösung	Differenz	
Für die Versuchskolben mit Dichtung des Stöpsels mit Phosphorsäure:	49,80 cm ³	49,82 cm ³	
	49,80 "		
	49,90 "		
	49,80 "		
	49,79 "		
	49,82 "		
Für gewöhnliche Jodzahl-Flaschen ohne Dichtung des Stöpsels mit Phosphorsäure:	49,60 cm ³	49,46 cm ³	0,36 cm ³
	49,40 "		
	49,39 "		
	49,25 "		
	49,50 "		
	49,60 "		
Für gewöhnliche Jodzahl-Flaschen mit Dichtung des Glasstöpsels mit Phosphorsäure:	49,60 cm ³	49,52 cm ³	0,30 cm ³
	49,50 "		
	49,45 "		
	49,48 "		
	49,62 "		
	49,47 "		
Für gewöhnliche Jodzahl-Flaschen mit Dichtung mit Phosphorsäure und spezieller Vorsicht ¹ beim Zusatz der Jodkaliumlösung:	49,67 cm ³	49,68 cm ³	0,14 cm ³
	[49,40] "		
	49,73 "		
	49,70 "		
	49,69 "		
	49,63 "		

¹ Statt den Stöpsel vor dem Zusatz der Jodkaliumlösung herauszunehmen, wurde derselbe nur so weit lose gemacht, daß die Jodkaliumlösung durch den kleinen Zwischenraum zwischen Stöpsel und Flaschenhals hineinfließen konnte. Es wurde m. a. Worten eine improvisierte Flüssigkeitssperre gebildet.

Es dürfte aus diesen Versuchen hervorgehen, daß die Bromverluste wegen Undichtigkeit des Stöpsels geringer sind als diejenigen, welche dadurch veranlaßt werden, daß der Stöpsel vor der Hinzufügung des Jodkaliums herausgenommen wird. Selbst wenn dies noch so schnell stattfindet, entweicht bromhaltige Luft. WINKLER selbst [16] behauptet, daß die Verluste, welche beim Öffnen der Flasche stattfinden ohne Bedeutung seien. Unsere Versuche sind anders zu deuten. Temperaturdifferenzen spielen selbstverständlich bei dieser Manipulation eine Rolle, nicht nur das Volumen der Jodkaliumlösung. Diese Bromverluste können verhindert werden, wenn man den Stöpsel nicht entfernt, sondern nur soweit losmacht, daß die Jodkaliumlösung in den kleinen Zwischenraum mittelst einer schmalen Pipette eingegossen werden kann, wodurch eine Art Flüssigkeitssperre gebildet wird.

Die Lichtempfindlichkeit. Schon in der ursprünglichen Vorschrift [9] wird hervorgehoben, daß die Proben während der Einwirkung im Dunkeln zu verwahren sind. W. ARNOLD [10] gab zahlenmäßige Belege für die große Bedeutung des Lichtes, und WINKLER selbst macht neuerdings [16] nochmals hierauf aufmerksam. Es war deswegen klar, daß unsere Proben nicht längere Zeit dem Tageslichte ausgesetzt wurden, als für die verschiedenen Manipulationen streng notwendig war. Das System ist indessen so lichtempfindlich, daß die wechselnde Lichtintensität an verschiedenen Tagen während der kurzmöglichsten notwendigen Zeit doch merkbare Unterschiede bewirken kann. Der Titer ändert sich selbst an wenig hellen Tagen binnen wenigen Minuten mehrere Zehntel cm^3 . Als Beispiel führen wir an, daß die blinde Probe nach 5 Minuten im Lichte, im Vergleich zu der dunkel gehaltenen Probe als Mittel einen $0,21 \text{ cm}^3$ geringeren Thiosulfatverbrauch aufwies ($47,10$ gegen $47,31 \text{ cm}^3$ $1/10$ n. Thiosulfatlösung). Nach 10 Minuten war der Unterschied $0,32 \text{ cm}^3$ und nach einer Stunde $1,66 \text{ cm}^3$. Es scheint, als ob sich ein Gleichgewicht einstellt, worauf wir jetzt doch nicht näher eingehen wollen. Klar ist es jedoch, daß man in der Praxis bei Tagelicht arbeiten muß, und daß deswegen darin eine wesentliche Fehlerquelle vorhanden ist.

Wenn in dem Systeme Fett vorhanden ist, kommt, jedenfalls nicht in kurzer Zeit, Gleichgewicht nicht zu Stande. Wir werden hier auch nicht auf diese Frage näher eingehen, führen jedoch an, daß in einem Versuche mit Olivenöl bei der Titrierung der im Dunkeln und im Lichte verwahrten sonst völlig gleichen Proben der Unterschied nicht weniger als etwa 30 cm^3 $1/10$ n. Thiosulfatlösung ausmachte. Im Lichte findet selbst bei der Untersuchung von gesättigten Fetten nach der Winkler'schen Methode eine Aufnahme von Brom statt. Es tritt in diesem Falle Substitution ein, es bilden sich unlösliche Bromide, und der Prozeß geht weiter, so lange freies Brom vorhanden ist.

Trotzdem unsere Hauptversuche nach der Winkler'schen Methode mit der größten Sorgfalt ausgeführt wurden, ist die erreichte Genauigkeit der erhaltenen Werte bei weitem nicht so groß wie bei anderen Methoden.

Wir haben den Eindruck bekommen, daß man bei der Winkler'schen Methode eine substitutionsfreie Addition erreichen würde, wenn man die Lichtwirkung eliminieren könnte. Man müßte dann im Dunkelzimmer bei rotem Lichte bis zur Titrierung arbeiten.

Es ist recht bemerkenswert, daß unsere Werte für Olivenöl, Heringsöl und Leinöl nach der Winkler'schen Methode deutlich auf einen Grenzwert hinweisen, welcher mit der Hübl'schen Methode übereinstimmt.

Bei der Unsicherheit des Kurvenverlaufes können wir nicht entscheiden, ob bei der Winkler'schen Methode der Einwirkungsdauer oder dem Halogenüberschuß der entscheidende Einfluß zukommt.

Die Endreaktion fanden wir bei der Winkler'schen Methode weniger befriedigend. Der Farbumschlag kann nicht mit der Genauigkeit eines Tropfens Thiosulfatlösung beobachtet werden. Die Farbe des Tetrachlorkohlenstoffes geht nämlich recht langsam und unscharf von blauschwarz durch grau und braun in milchweiß über.

Wir kommen somit zu der Schlußfolgerung, daß die Winkler'sche Methode wegen ihrer großen Lichtempfindlichkeit und der schwer zu verhindernden mechanischen Bromverluste nicht zu empfehlen ist, trotzdem sie in anderen Richtungen recht große Vorteile besitzt.

Zusammenfassung.

Von einer sowohl für wissenschaftliche als praktische Zwecke geeigneten Jodzahlmethode muß man erstens unbedingt fordern, daß die gefundenen Werte reproduzierbar sind und zweitens, daß sie auch soweit möglich den wahren Jodzahlen entsprechen. Für rein praktische Zwecke kommt hierzu noch die Forderung, daß die Untersuchung rasch ausführbar sein muß.

In wieweit eine Methode tatsächlich diesen Anforderungen entspricht, wird man hauptsächlich aus dem Einfluß der Einwirkungsdauer und des Halogenüberschusses auf dem Reaktionsverlaufe ersehen können. Bei graphischer Aufzeichnung von einem Diagramme Jodzahl-Einwirkungsdauer bei konstantem Halogenüberschuß und einem Diagramme Jodzahl-Halogenüberschuß bei konstanter Einwirkungsdauer, wird es glatt hervorgehen, ob eine Methode die Forderung zu Reproduzierbarkeit erfüllt. Je horizontaler die Kurven verlaufen, desto weniger Einfluß hat Halogenüberschuß und Einwirkungsdauer, und desto größer ist die Reproduzierbarkeit. Außerdem werden die Kurven auch darüber Aufschluß geben, ob die Werte den wahren Jodzahlen entsprechen. Wenn nämlich für die verschiedensten Fette die beiden Diagramme konstante Grenzwerte der Jodzahl zeigen, ist es überwiegend wahrscheinlich, daß diese Grenzwerte den wahren Jodzahlen entsprechen.

Untersuchungen über den Wert der verschiedenen Jodzahlbestimmungsmethoden für die Untersuchung der Ungesättigtkeit verschiedener Körper dürfen nur mit den in Frage kommenden Körpern angestellt werden. So kann z. B. der Wert der gewöhnlich verwendeten Methoden von v. HÜBL, WALLER, HANUŠ, WIJS und WINKLER für die theoretische wie praktische Fettanalyse nur durch vergleichende Untersuchungen an Fetten und Fettsäuren festgelegt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird der Reaktionsverlauf auf 6 Fetten, welche nichttrocknende, halbtrocknende und trocknende Fette oder Öle repräsentieren, nach den Methoden von v. Hübl, Hanuš, Wijs und Winkler eingehend untersucht.

Bei der getroffenen Versuchsanordnung mit genauer Abmessung von wohldefinierten, verdünnten Fettlösungen und einer Reihe von Parallelbestimmungen usw. war es ermöglicht Wägefehler, Oxydationen und andere zufällige Versuchsfehler soweit zu eliminieren und den Titrierungsfehler so

gering zu machen, daß der Einfluß bestimmter Faktoren wie speziell Halogenüberschuß und Einwirkungsdauer aus den gefundenen Resultaten sicher hervorgehen dürfte. Der durchschnittliche Fehler in den Versuchen dürfte kaum $\pm 0,05$ 0/0 sein.

Die auf Grund etwa 3000 Einzelbestimmungen gewonnenen Resultate können, was die Hauptresultate betreffen, folgenderweise zusammengefaßt werden:

1) *Die Hübl'sche Methode.* Der größte Fehler bei dieser Methode ist die schnelle Abnahme der Titer der Jodlösung. Es wird gezeigt, daß die Korrektur hierfür mit einer blinden Probe, es sei nun daß diese am Anfang oder Schluß des Versuches gemacht wird, ebenso wie die Verwendung von dem Mittel zweier blinden Proben, zu ganz fehlerhaften Resultaten führt.

Unter Berücksichtigung der Resultate früherer Forscher wie derjenigen der vorliegenden Arbeit wird die v. Hübl'sche Jodzahl, (J), folgendermaßen berechnet:

$$J = \frac{127f}{100i} \left[(b_o - a) - \left[\frac{a}{b_t} \right]^2 (b_o - b_t) \right]$$

wo f = der Faktor der Thiosulfatlösung,

i = die verwendete Fettmenge,

a = der Thiosulfatverbrauch der Probe,

b_o = der Thiosulfatverbrauch der blinden Probe am Anfang,

b_t = der Thiosulfatverbrauch der blinden Probe am Schluß des Versuches.

Wenn sämtliche Versuchsergebnisse nach dieser Formel berechnet werden, zeigt es sich für die 6 untersuchten Fette, daß die Diagramme Jodzahl-Einwirkungsdauer und Jodzahl-Halogenüberschuß einen Kurvenverlauf aufweisen den man für eine Methode erwarten darf, welche die wahren Jodzahlen gibt. Der Kurvenverlauf nähert sich nämlich in beiden Fällen asymptotisch einer geraden Linie, welche die wahre Jodzahl angibt. Von den 5 untersuchten Methoden ist die v. Hübl'sche die einzige, welche diesen ideellen Kurvenverlauf aufweist.

Wir sind deswegen auch nicht in Zweifel, daß die v. Hübl'sche Methode, vorschriftgemäß ausgeführt und nach unserer Formel berechnet, überall da vorzuziehen sein muß, wo Genauigkeit, Reproduzierbarkeit und Übereinstimmung mit der wahren Jodzahl gefordert wird. Wir möchten in diesem Zusammenhange erwähnen, daß Versuche, die neulich hier im Institute gemacht sind über das Brombindungsvermögen der Fette im Dunkeln (nach einer verbesserten Methode nach MAC ILHINEY), Grenzwerte für die Bromaddition gegeben haben, welche mit den nach der Hübl'schen Methode bestimmten Jodzahlen übereinstimmen.

Einen Nachteil der v. Hübl'schen Methode ist gewiß die lange Einwirkungsdauer. Bei Verwendung von einem Halogenüberschusse von 80 0/0 wird man indessen gewöhnlich bei der v. Hübl'schen Methode binnen 12

Stunden den Grenzwerten hinreichend nahe kommen. Es empfiehlt sich jedoch die Einwirkungsdauer auf 24 Stunden auszustrecken. Selbst bei 72 Stunden Einwirkungsdauer tritt bei der richtig durchgeführten Hübl'schen Methode keine Substitution ein.

2) *Die Waller'sche Methode* ist nicht zu empfehlen, erstens da sie viel zu niedrige Werte gibt und zweitens, weil es schwer ist, reproduzierbare Werte zu erhalten, indem die Kurven selbst bei großen Halogenüberschüssen und lange dauernder Einwirkung sehr steil verlaufen.

3) *Die Wijs'sche Methode*. Die Halogenaufnahme geht hier schneller als bei den anderen Methoden von statten. Es zeigt sich, daß man fast momentan den Grenzwert der Hübl'schen Jodzahl erreicht, aber bei fortgesetzter Einwirkung ist es unmöglich zu irgendwelchen Grenzwerten zu kommen, die von der weiteren Einwirkungsdauer und dem vermehrten Halogenüberschusse unabhängig sind. Es findet neben Addition auch Substitution von Halogen statt. Man kann deswegen keinesfalls korrekte Jodzahlen finden und die Methode ist für alle wissenschaftliche Untersuchungen völlig ungeeignet.

Wenn es dagegen darauf ankommt, schnell relative Werte zu erhalten, ist diese Methode verwendbar. Wird genau 0,2 g Fett eingewogen und für Fette mit Jodzahlen kleiner als 160 die Einwirkungsdauer zu 2 Stunden, und für Fette mit Jodzahl über 160 die Einwirkungsdauer zu 6 Stunden gesetzt, wird man, wenn die Einwirkungsdauer genau inne gehalten wird, Resultate erhalten, die voraussichtlich höchstens $\pm 1,5$ rel. % von der wahren Jodzahl abweichen.

Es ist bei dieser Methode dringend notwendig, daß die Jodlösung nicht mehr Chlor enthält als dem Jodmonochlorid entspricht, und da dies nicht glatt zu erreichen ist, lieber ein Überschuß an Jod, als an Chlor. Ferner muß der Eisessig hinreichend konzentriert sein. Die Lösung wird am einfachsten bereitet durch Einleiten von Chlor in eine Lösung von Jod in Eisessig, bis die dunkelbraune Farbe eben in hellbraun übergeht, wonach einige Jodkristalle in Überschuß hinzugefügt werden.

4) *Die Methode von Hanuš* ist dadurch gekennzeichnet, daß sich bald Gleichgewicht zwischen Jodlösung und Fett einstellt, aber die Lage desselben ist durchaus von der Größe des Halogenüberschusses abhängig. Bei erhöhtem Halogenüberschusse kann man ebensowenig bei dieser Methode wie bei der von Wijs zu einem definitiven Grenzwerte der Jodzahl kommen. Man findet nicht die richtigen Jodzahlen und auch nicht ohne konstante Einwägungen reproduzierbare Werte.

Eine andere Frage ist es, ob diese Methode für eine industrielle Betriebskontrolle verwendbar sein kann. Die Lösung ist ja unbedingt haltbar, und von dem richtigen Verhältnis zwischen den beiden Elementen wenig beeinflusst. Jodmonobromid wird übrigens glatt aus den Elementen dargestellt (vergl. S. 19—20).

5) *Die Winkler'sche Methode* bietet in der unbedingten Haltbarkeit und den geringen Kosten der in Frage kommenden Lösungen große Vorteile, aber die Methode läßt sich wegen der großen Flüchtigkeit des Broms nur in besonderen Versuchskolben durchführen, wo man alle mechanische Bromverluste vermeiden kann. Hierzu kommt noch, daß diese Methode besonders lichtempfindlich ist.

Wir kommen zu der Schlußfolgerung, daß die Winkler'sche Methode wegen ihrer großen Lichtempfindlichkeit und der schwer zu verhindernden mechanischen Bromverluste nicht zu empfehlen ist, trotzdem sie in anderen Richtungen große Vorteile besitzt.

Wenn man im Dunkelzimmer bei rotem Lichte bis zur Titrierung arbeitet, wird man auch bei der Winkler'schen Methode eine substitutionsfreie Addition erreichen. Die erhaltenen Werte weisen deutlich auf einen Grenzwert hin, welcher mit dem nach der Hübl'schen Methode erhaltenen übereinstimmt, aber die Methode ist wie schon gesagt nicht zu empfehlen.

Institut für technisch-organische Chemie

a. d. technischen Hochschule, Trondhjem November 1922.

Literatur.

- [1] WEISER, St., und DONATH, H.G.: Kritisch-experimentelle Untersuchungen über die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der Jodzahl der Fette. — Königs Zeitschr. Bd. 28. 1914. S. 65.
- [2] MAC LEAN, Ida Smedley and THOMAS, Ethel Mary: Observations on abnormal iodine values, with special reference to the sterols and recins. — Biochemical Journal. Vol. XV. 1921. S. 319.
- [3] BARON HÜBL, K. K. Österr. Hauptmann: Eine allgemein verwendbare Methode zur Untersuchung der Fette. — Dinglers Polyt. Journal. Bd. 253. 1884. S. 281 u. f.
- [4] Entwürfe zu Festsetzungen über Lebensmittel. Herausgegeben vom Kaiserlichen Gesundheitsamte. Heft 2. Berlin 1912.
- [5] FAHRION, W.: Zur Hübl'schen Jodadditionsmethode. Chemikerzeitung 1891. S. 1791.
- [6] Apotheker WALLER, Stockholm: Über die Hübl'sche Chlorjod-Additionsmethode und Vorschläge zu deren Verbesserung. Chemikerzeitung Bd. 19, II. 1895. S. 1831.
- [7] WIJS, J. J. A.: Zur Jod-Additionsmethode. Berliner-Berichte Bd. 31. 1898. S. 750.
- [8] HANUS, Jos.: Die Anwendung von Jodmonobromid bei der Analyse von Fetten und Ölen. Königs Zeitschr. Bd. IV, 1901. S. 913.
- [9] Pharmacopoea Hungarica. Ed. III, 1909. S. XI*. Obs. Winkler hat selbst nicht die Methode in der ausländischen Literatur beschrieben. (Vergl. für Details der Methode [1] und [10]).
- [10] ARNOLD, W.: Nachprüfung des L. W. Winkler'schen Bromaddierungsverfahrens. Königs Zeitschr. Bd. 31. 1916. S. 382.
- [11] Schweizerisches Lebensmittelbuch. II Auflage. Bern 1909.
- [12] Codex Alimentarius Austriacus. B. III. K. K. Hof- und Staatsdruckerei. Wien 1917. S. 153.
- [13] HALPHEN, G.: Huiles et Graisses végétales comestibles. Collection des manuels pratiques d'analyses chimiques à l'usage des Laboratoires officiels etc. Paris et Liège (Ch. Béranger) 1912. S. 163.
- [14] WIJS, J. J. A.: Zur Hübl'schen Jod-Additionsmethode. Zeitschrift für angew. Chemie. 1898. S. 291.
- [15] SUNDBERG, Thure, och LUNDBORG, Martin: Granskning av olika metoder för bestämning av jodtal hos fett. Teknisk Tidskrift. Avdelning för Kemi och Bergsvetenskap. 1919, h. 4.
- [16] WINKLER, L. W.: Über die Bestimmung der Jodbromzahl. Königs Zeitschr. B. 32. 1916. S. 358.
- [17] WINKLER, L. W.: Jodbromzahlbestimmung ohne Kaliumjodid. Königs Zeitschr. Bd. 43. 1922. S. 201.
-
-

Gedruckt 23. November 1923.

THE NEUROLOGICAL ASPECT OF LEPROSY ("SPEDALSKHED")

BY

G. H. MONRAD-KROHN

WITH 39 FIGURES IN THE TEXT

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 16).

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA
ON COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 5. oktober 1923 ved dr. med. S. Holth.

I humbly dedicate this little book to the Leprosy Institutions — St. Jørgen Hospital and Pleiestiftelsen for Spedalske — of Bergen, the cradle of scientific leprosy research, — and to the memory of the eminent men, who made these institutions the centre of leprosy research in this country viz:
Dr. Danielsen and Dr. Armauer Hansen.

Contents.

	Page
1. Introduction	8
2. Pathological anatomy of the nervous lesions in leprosy	9
3. Clinical findings	12
Cranial nerves	13
Motor system	26
Sensory system.....	28
Reflexes.....	62
Trophic disturbances	65
Mental disturbances	68
Summary	68
4. Diagnosis.....	70
Literature	77

Preface.

My interest in the neurological aspect of leprosy was first aroused some years ago on a series of cases being referred to me for neurological examination.

In this little book I have tried as briefly as possible to give a complete picture of the neurological side of leprosy from the clinical point of view. Besides what little purely *scientific* value my book may have, I venture to hope that it may also have some *practical* value in helping colleagues in some cases to make an earlier diagnosis of the disease. Neurologists may perhaps find a few explanations superfluous to them. But the book is not written for neurologists only. I have also had in view a wider and more practical aim, which I did not want to sacrifice by omitting these, perhaps a little elementary, neurological explanations.

I have to thank Professor BRUSGAARD and Dr. H. P. LIE for their kind help and for permission to examine and re-examine their patients.

My examinations have not all been quite so complete as I should wish. Some of the older patients have been such bad witnesses that reliable results of the sensory examination could not be obtained. At the leprosy hospitals in Bergen the necessary appliances for electrical examination do not yet exist. Therefore in the majority of these cases I have not been able to carry out the electrical examination. Yet I hope that in all other respects my observations have been both sufficiently complete and numerous to warrant the correctness of my conclusions.

I. Introduction.

Although leprosy has now become a rare disease in Europe¹, it is still attacking great numbers of people in other parts of the world. In India alone the number of lepers may according to MUIR be estimated at between a half and one million.² And according to Sir LEONARD ROGERS, the leprosy incidence in extensive areas of the world is above 5 per mille of the population. Thus in Belgian Congo there are 200 cases of leprosy per 1000 inhabitants, in the Marquesas Islands 66,7, on the French Ivory Coast 60,7, in the Loyalty Islands 36, in Dutch Guinea 25, while in India the average incidence is given at 0,32 per mille of the population. The fight against leprosy is therefore still a problem of the greatest importance, and all information that can further the prevention, the treatment, and last but not least, the early diagnosis (a *conditio sine qua non* for the two former) of the disease, is not only of academic interest but has also a great deal of practical value.

The importance of the neurological aspect of leprosy — both in semiological and diagnostic respect — is evident enough, although in practical work it has been (and still is) all too frequently overlooked and forgotten in the search for the cutaneous manifestations, which are after all of no greater importance than the neurological ones.

As is generally known, the chief clinical manifestations of leprosy are due to

- a. skin lesions, and
- b. nerve lesions.

As a third (and probably secondary) class of characteristic manifestations the trophic lesions must also be registered.

In a great number of cases the skin lesions alone may perhaps allow of an easy and certain diagnosis of leprosy.

There are, however, numerous cases where the skin lesions are either so atypical or so little pronounced that diagnosis becomes very difficult;

¹ In Iceland, however, the incidence is still above 1 per mille of the population (Sir LEONARD ROGERS).

² Cpr. ERNEST MUIR: Handbook on Leprosy, 1921, page 84. The official census of 1911 only gives 109 094 cases in all India. According to Sir LEONARD ROGERS the relative incidence of leprosy in India corresponds to 0,32 per mille.

and there are a great many cases where it is impossible to make the diagnosis from the cutaneous lesions alone, The cutaneous manifestations may thus be quite like vitiligo (cpr. JEANSELME, BLUM's and TERRI's „Dyschromies lépreuses“). In some few cases marked skin disturbances seem never to have developed; at any rate there is a number of cases where cutaneous manifestations have never been observed by the patients — nor by the doctor at the first consultations.

From what is mentioned above it will be seen that a thorough examination for nerve lesions is of the utmost importance for the diagnosis of leprosy, — in a great many cases the neurological examination is the decisive factor — in some cases it furnishes the only findings upon which the diagnosis can be based. In every case, therefore, where the suspicion of leprosy arises, a systematic neurological examination ought to be carried out.

In this book it has been my aim to put together my clinical findings, thus attempting to give a complete clinical picture of the neurological aspect of leprosy.¹ For the sake of orientation I have included a short chapter on the pathological anatomy of the nervous lesions in leprosy; but this is only meant as a short survey.

2. Pathological Anatomy of the Nervous Lesions in Leprosy.

Already in the descriptions of the first Norwegian authors, DANIELSEN and BOEK, the leprosy neuritis is mentioned, and the anatomy of the leprosy affections of the nervous system has since then been studied and described by a great number of authors (VIRCHOW, ARMAUER HANSEN, LOFT, LIE, DÉJÉRINE, LOIR, PIERRE MARIE, JEANSELME, GERLACH, DEHIO, and many others). The nature of the neuritis has been the subject of considerable discussion. It has partly been regarded as an *ascending neuritis* — and based on this view DEHIO constructed his diagram, which in a particularly lucid way illustrates the supposed connection between the cutaneous patches, the neuritis, and the motor and sensory disturbances (cpr. Fig. 1).

The neuritis has also been regarded as descending and partly also as metastatic. Probably all three forms of neuritis may exist, the ascending form however being the commonest. The descending form seems to be exceptional (LIE). As regards the distribution, it must further be remembered that in the course of each nerve one generally finds a *locus minoris resistentiae*, where the anatomical changes are often excessive. Such a *locus minoris resistentiae* is found in the course of the ulnar nerve behind the elbow

¹ As regards the technique of the clinical examination the reader is referred to my book: The Clinical Examination of the Nervous System (2d. edition, Lewis & Co., London 1923).

joint — at the peroneal nerve where it curves round the fibula — at the great auricular nerve where it rides over the sternocleidomastoid muscle. It seems as if the factors that decide the diminished resistance at these places are chiefly of a mechanical nature. Particularly at these places the nerves are generally felt to be greatly thickened.

As regards the histological nature of the neuritis, it can already be inferred from the great thickening of the nerve trunks just mentioned

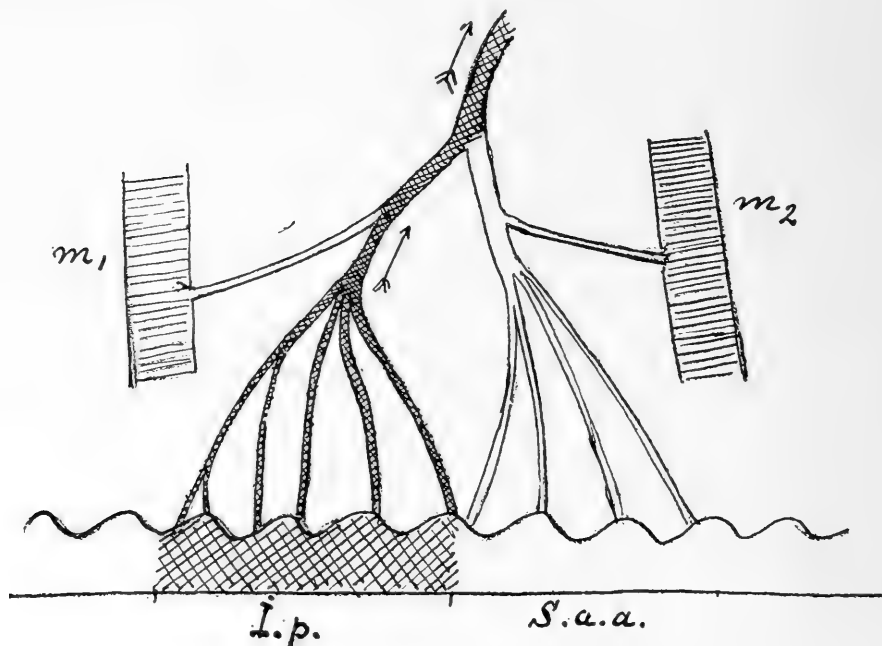


Fig. 1. DEHIO's diagram of ascending neuritis (slightly modified).

As the neuritis ascends from the primary cutaneous patch (I. p.) in the direction of the arrow along a mixed nerve, the nerve supply of the muscles (m_1 & m_2) and of other areas of the skin (S. a. a.) will be cut off, thus causing localised paralysis and anæsthesia also outside the primarily affected patch (secondary anæsthetic area — s. a. a.).

that interstitial alterations play a great rôle. Parenchymatous changes are however also constantly found, and there is no fixed relation between the intensity of the parenchymatous and the interstitial changes — nor is there a fixed relation between the number of bacilli found and the reaction of the tissue. Lengthy discussions have therefore taken place about the direct bacillary or secondary toxic origin of the neuritis, and about the primary interstitial (with secondary degeneration of nerve fibres) or the primary parenchymatous nature of the neuritis (with secondary interstitial reaction).

In considering these questions (which cannot yet be answered with certainty) we have to keep in mind the following facts:

The lepra bacilli are chiefly found in the most peripheral parts of the nerves; in the proximal parts of the nerves bacilli are practically never found (LIE). The bacilli are chiefly to be found in the inmost lamellae of the perineurium and in the endoneural septa. The parenchymatous lesion consists in degenerative changes of no specific character. The interstitial changes are very slight to start with — but may gradually lead to considerable new formation of connective tissue. As regards the form of these interstitial changes, one can distinguish three different forms according to whether the new formation of connective tissue takes place from the perineurium, from the endoneurium, or from the sheaths of SCHWANN (LIE).

The formation of fibrous connective tissue will in the course of time press on the nerve fibres and finally destroy them. The interstitial changes may vary to a certain extent in the course of the disease. Often in comparatively early stages of the maculo-anæsthetic form, attacks of neuralgic pains occur, and these attacks are generally accompanied by considerable acute swelling of the corresponding nerves. Histologically this swelling is seen to consist of a very considerable cellular infiltration of the interstitial tissue. This acute interstitial reaction in the nerves is chiefly seen in the early maculo-anæsthetic cases; but may also now and again be observed in old nodular cases. In the maculo-anæsthetic cases the nerves show a much stronger and quicker reaction to the invasion of bacilli than they do in the nodular cases. — Apart from that, there does not seem to be any fundamental difference between the nerve lesions in the maculo-anæsthetic and the nodular forms.

Already DANIELSEN and BOECK thought they had found changes in the *spinal cord*. Even though there may be some doubt about these findings, subsequent research has shown that the spinal cord in all advanced cases is constantly the seat of degenerative changes (LOOFT, LIE, JEANSELME, MARIE). These changes are chiefly found in the posterior columns — and are found in nodular as well as maculo-anæsthetic cases (LIE). While MARIE & JEANSELME have found the degenerative changes confined to endogenous medullary fibres, LOOFT and LIE have chiefly found the degenerative changes in the exogenous fibres in the posterior columns, which would correspond to the centripetal fibres from the limbs. The bacilli themselves are chiefly found in the nerve cells in the grey substance, a few in the pericellular lymphatic spaces, but nowhere else in the spinal cord (LIE). Thus there does not seem to be a definite relation between the number of bacilli present and the degenerative changes in the cord.

Also the spinal ganglia have been shown to be the seat of degeneration and sclerotic changes (LOOFT). LIE has found lepra bacilli in the spinal ganglia in all cases where bacilli were present in the peripheral nerves.

The spinal roots, too, have been found the seat of degenerative changes (LIE). SUDAKEWITSCH has found bacilli and degenerative changes also in the Gasserian ganglion and in sympathetic nerves. This author (SUDAKEWITSCH) has also found lepra bacilli and inflammatory changes in the corpuscles of Pacini. Inflammatory changes in the Pacinian bodies had already been found by G. and F. E. HOGGAN in 1882, but while these authors believed the Pacinian bodies to be affected by a descending secondary degeneration, SUDAKEWITSCH regarded them as the place of entry, whence the bacilli start their invasion along the nerves.

The now obsolete views of ZAMBACO PASHA must finally be mentioned. This author claimed that a series of other diseases (amongst other syringomyelia, RAYNAUD's disease, and progressive spinal muscular atrophy) were nothing but attenuated forms of leprosy. Although ZAMBACO PASHA's views are now generally rejected, they may be quoted as a memento to remind one how close the resemblance can be between syringomyelia and leprosy — and how difficult sometimes the differential diagnosis.

Finally, it must be mentioned that COLELLA, STANZIALE and BABES claim to have found leprosy bacilli in the cerebrum. This is, however, not at all a frequent finding, whereas according to STAHLBERG non-specific degenerative changes in the brain are fairly frequent both in nodular and maculo-anæsthetic cases of leprosy. The degeneration affects both cells and nerve fibres.

3. Clinical Findings.

In the preceding chapter the cases have already been divided into three groups: nodular, maculo-anæsthetic and mixed. It has to be pointed out that this classification, though justified, at least in advanced cases, is to some extent arbitrary. Particularly in early cases it may, as MUIR and others have pointed out, be difficult to decide to which group the case belongs. Transitions from one form to another are not rare. A systematic neurological examination will disclose nerve lesions in a surprisingly big number of the nodular cases also.

With this reservation the old classification can still be maintained and will be found useful for practical clinical purposes.

Clinical evidence seems to point to the possibility of a spontaneous cure of leprosy — or at least a spontaneous arrest in the development of the leprosy lesions. When this occurs at an advanced stage, when the nerve changes are firmly established, all or some of the nervous disturbances are left as permanent remainders. These cases are spoken of as "secondary anæsthetic forms", when they are the outcome of originally nodular cases.

My personal observations comprise 63 cases. A few were referred to the outpatient department of my section at Rikshospitalet by my colleague Professor BRUSGAARD. Most of the cases I have examined at the leprosy hospitals in Bergen, and have to thank Dr. H. P. LIE for his valuable help and assistance.

Cranial Nerves.

As regards the cranial nerves the fifth and the seventh are the ones most frequently affected.

The *fifth cranial nerve* (the trigeminal nerve) consists, as is well known, of a sensory division, supplying the face and anterior part of the scalp — and a motor division, supplying the muscles of mastication. In leprosy the disturbance is as a rule confined to the sensory division. Only in two cases have I found a unilateral motor trigeminal paralysis.¹

The sensation of the different parts of the face are often affected to a very different degree. In initial cases the whole trigeminal area is rarely anæsthetic. Fig. 2 is a typical illustration of the distribution of the anæsthesia or hypoæsthesia.

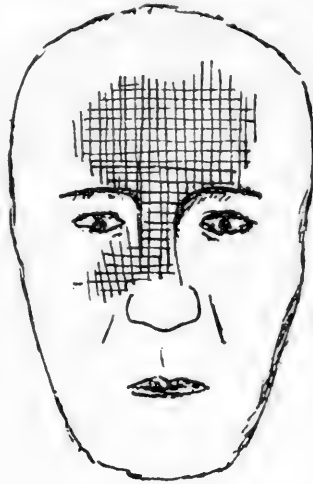


Fig. 2. Hypoæsthesia of part of the trigeminal area.

As a rule the different qualities of sensation are equally diminished; but one also meets with cases, where a more or less marked dissociation between the different qualities of sensation occurs. Thus there may be a marked hypoalgesia, perhaps complete analgesia, to pinprick, whilst there is only a slight hypoæsthesia to touch or to temperature stimuli. All kinds of imaginable dissociations between the different qualities may be met with. One even sometimes meets with cases where there is a marked difference between the sensation of cold and of warm stimuli. But these dissociations do not by any means occur in the majority of cases, and I have never found them complete, viz. one quality *quite intact* with another strongly diminished. To sum up: All the different qualities of sensations are affected in limited fields of the trigeminal area — as a rule to the same extent; but in some cases with some difference as to the intensity of the loss.

¹ ARMAUER HANSEN has described a case of double trigeminal paralysis with dropping of the lower jaw.

Sometimes one finds the branches of the trigeminal area distinctly thickened. This is most easily noticed in the frontal and supraorbital nerves. Fig. 3 shows a visible thickening of the left supraorbital nerve.

As has already been pointed out in the previous chapter, in the maculo-anæsthetic form attacks of neuralgic pains often occur, accompanied by an acute swelling up of the corresponding nerves. (Cpr. Fig. 3).¹

The seventh cranial nerve (the facial nerve) is also affected in a great number of cases, and this affection is very characteristic of leprosy.



Fig. 3. Photograph of case Nr. 2 (I. H.) Swelling of left supraorbital nerve. Case of Dr. H. P. LIÉ. Cpr. Proceedings of II International Leprosy Conference in Bergen 1909. (The swelling has disappeared since.)

The following table gives the result as regards the function of the facial nerve in a series of 59 cases.

It will be seen from this table that facial paralysis occurs in the nodular as well as in the maculo-anæsthetic form.

It will further be seen that the facial paralysis has a number of characteristic features, which distinguish it from other kinds of facial paralysis — central or peripheral.

The following points which may be gathered from my observations are perhaps the most important

1. The upper part of the face — particularly the orbicularis oculi² and the corrugator — is more often and more intensely affected than the lower part of the face,
2. this paralysis of the upper part of the face is as a rule bilateral,
3. in the inferior part of the face the supraoral muscles are more commonly affected than the infraoral muscles,
4. this paralysis in the inferior part of the face is not so constantly bilateral as the paralysis in the upper part of the face,
5. the paralysis is accompanied by extreme hypotonia or atonia, which causes ectropion of the eyes in a great number of cases — and in some cases where the orbicularis oris is equally affected, “ectropion of the mouth”. This is generally accompanied by dribbling of saliva from the mouth.

¹ This might also be seen in the course of treatment with nastin, and fig. 3 is in fact a photograph of a patient of Dr. H. P. LIÉ, where the swelling of the left supraorbital nerve occurred during such treatment.

² It should in this connection be mentioned that Kondriavsky (Thèse de Saint-Petersbourg 1896) regards weakness of the lower eyelids as an initial and characteristic sign of leprosy.

	Form	VII	Pars superior						pars inferior	
			orbicularis oculi		frontalis		corrugator		r	l
			r	l	r	l	r	l		
Case No. 1 P. S. 67 years old, duration of illness 17 years	m. a.	+	p.	p.	p.	p.	p.	p.	supra-oral	p.
			ectropion lagophthalmus						d?	p, Cannot pronounce b, p or m properly
Case No. 2 I. H. 61 years old, duration 33 years; first maculae in the forehead	m. a.	+	p.	p.	p.	d.	p.	p.	supra-oral	d.
			ectropion, lagophthalmus						d.	p.
Case No. 3 J. B. 65 years old, duration more than 35 years	m. a.	+	p.	p.	d.	d.	d.	d.	d.	d.
				lagophthalmus						
Case No. 4 K. P. 61 years old, duration 53 years	(m) a.	+	d.	d.	n.	n.	n.	n.	c.	c.
			No maculae ever observed.							
Case No. 5 N. D. recent hemiparesis dexter (apoplexy)	m. a.	+	p.	d.	n.	n.	n.	n.	d.	n.
Case No. 6 G. O. 57 years old, duration "more than 30 years"	nod.	+	p.	p.	d.	d.	p.	p.	d?	n.
			lagophthalmus		c.					
			Cured nod. form — : secondary anæsthetic form.							
Case No. 7 K. V. 62 years old, duration 18 years	m. a.	+	p.	d.	n.	n.	n.	n.	n.	n.
			ectropion lagophthalmus							
Case No. 8 D. A. 76 years old, duration 58 years	m. a.	?	d?	d?	d?	d?	d?	d?	n.	n.
Case No. 9 M. Aa. 71 years old, duration 40 years	m. a.	+	p.	d.	n.	n.	n.	n.	supra-oral	n.
									n?	n Right nasolabial fold absent

m. a. = maculo-anæsthetic, nod. = nodular, p. = paralysis, d. = paresis, c. = involuntary contractions, n. = normal. In the column under heading VII, + means presence and ÷ absence of facial disturbances.

	Form	VII	Pars superior						pars inferior	
			orbicularis oculi		frontalis		corrugator		r	l
			r	l	r	l	r	l		
Case No. 10 M. J. 37 years old, duration 8 years	nod.	÷								
Case No. 11 H. T. 66 years old, duration 40 years	nod.	÷?	d?	n.	n.	n.	n.	n.	n.	d?
Case No. 12 M. B. 37 years old, duration 12 years	m. a.	÷								
Case No. 13 R. D. 80 years old, duration 60 years	(m) a.	÷	No maculae observed.							
Case No. 14 J. R. 42 years old, duration 14 years	nod.	÷	Originally maculoanæsthetic — transitional form.							
Case No. 15 M. B. 62 years old, duration 40 years	m. a.	÷								
Case No. 16 A. S. 72 years old, dura- tion abt. 50 years	m. a.	+	d. ectropion	d.	n.	d.	d.	d.	d?	d?
Case No. 17 I. V. 51 years old, duration 15 years	m. a.	÷	She has also a left hypoglossal paralysis.							
Case No. 18 K. B. 69 years old, duration 15 years	m. a.	÷?	Demented — cannot be examined properly.							
Case No. 19 Ch. H. 72 years old, duration 22 years	m. a.	+	p. ectropion lagoph- thalmus	d.	n.	n.	n.	n.	n.	n.

m. a. = maculo-anæsthetic, nod. = nodular, p. = paralysis, d. = paresis, c. = involuntary contractions, n. = normal. In the column under heading VII, + means presence and ÷ absence of facial disturbances.

	Form	VII	Pars superior						pars inferior	
			orbicularis oculi		frontalis		corrugator		r	l
			r	l	r	l	r	l		
Case No. 20 E. U. 42 years old, duration 36 years	nod.	-	p. lagophtalmus	p.	n.	n.	p.	p.	c.	c. d.
Secondary anæsthetic form.										
Case No. 21 K. P. 73 years old, duration 36 years	m. a.	+	p. lagophtalmus ectropion	p. c.	p.	p.	p.	p.	supra- d. infra-oral d?	n? n? Complete loss of tonus in orbi- cularis oris.
Case No. 22 J. P. L. 72 years old, duration 40 years	m. a.	+	p.	p.	p.	d.	p.	p.	n.	d.
Case No. 23 O. R. 76 years old, duration 40 years	m. a.	+	p. lagophtalmus ectropion	p.	p.	d.	p.	p.	c.	c. distinct paresis of orbicularis oris. Cannot whistle.
Case No. 24 J. O. H. 50 years old, duration 26 years	nod.	+?	d? c.	d. c.	?	?	?	?	?	?
Secondary anæsthetic form. The first nodules in the forehead.										
Case No. 25 W. I. 28 years old, duration 7 years	nod.	÷								
Case No. 26 E. B. 40 years old, duration 22 years	m. a.	+	p. lagophtalmus	p.	p.	p.	p.	p.	p.	p.
Case No. 27 O. S. 88 years old, duration ?	m. a.	+	d.	d.	n.	n.	d.	d.	d?	d? cannot whistle.
Case No. 28 M. J. 29 years old, duration 11 years	nod.	+	n.	n.	n.	n.	d.	d.	n?	d.
Case No. 29 H. F. 30 years old, duration 23 years	tub. (m)	?	n.	d?	n.	n.	n.	n.	n.	d?
Originally maculoanæsthetic — transition to nod. form.										

m. a. = maculo-anæsthetic, nod. = nodular, p. = paralysis, d. = paresis, c. = involuntary contractions, n. = normal. In the column under heading VII, + means presence and ÷ absence of facial disturbances.

	Form	VII	Pars superior						pars inferior	
			orbicularis oculi		frontalis		corrugator		r	l
			r	l	r	l	r	l		
Case No. 30 O. A. 63 years old, duration 55 years	nod.	—	p.	p.	d.	d.	p.	p.	d.	p.
Originally nodular — transition to maculoanæsthetic.										
Case No. 31 I. L. 66 years old, duration 30 years	m. a.	+	p. lagophthalmus ectropion	p.	d. movements only seen laterally	d.	p.	p.	d.	n. Right nasolabial fold absent
Case No. 32 H. J. 43 years old, duration 12 years	nod.	+	d?	d?	p.	d.	n.	n.	n.	n.
Case No. 33 K. B. 43 years old, duration 12 years	nod.	?	n.	n.	n.	n.	n.	n.	?	?
Case No. 34 O. O. 35 years old, duration 5 years	nod.	+	n.	n.	n.	n.	n.	n.	d.	n.
Case No. 35 M. M. 24 years old, duration 1 year	mixed	+	n. c.	d. c.	n.	d. c.	p.	p.	n.	c.
Case No. 36 N. Aa. 57 years old, duration 40 years	m. a.	?	n.	n.	n.	d?	?	?	?	?
Case No. 37 M. R. 60 years old, duration 30 years	m. a.	+	p. lagophthalmus ectropion	p.	d.	d.	p.	p.	d.	n. Right nasolabial fold absent
Case No. 38 H. J. 33 years old, duration 5 years	nod.	÷								
Case No. 39 P. S. 70 years old, duration 40 years	m. a.	—	p.	p.	p.	p.	p.	p.	d.	p.

m. a. = maculo-anæsthetic, nod. = nodular, p. = paralysis, d. = paresis, c. = involuntary contractions, n. = normal. In the column under heading VII, + means presence and ÷ absence of facial disturbances.

	Form	VII	Pars superior						pars inferior		
			orbicularis oculi		frontalis		corrugator		r	l	
			r	l	r	l	r	l			
Case No. 40 K. H. 56 years old, duration 45 years	nod. cured	÷									
Case No. 41 B. K. 62 years old, duration 10 years	nod. transi- tion to m. a.	—	p. lagopthalmus ectropion	p.	d.	d.	d.	p.	supra- infra- oral	p. n.	n. n.
Case No. 42 J. J. 72 years old, duration ?	m. a.	?	n.	n.	n.	n.	n.	n.	n.	?	
Case No. 43 B. H. 56 years old, duration 27 years	nod.	+	d.	n.	?	?	?	?	n.	n.	
Transition to maculo-anæsthetic.											
Case No. 44 A. A. 50 years old, duration 34 years	m. a.	+	p. lagopthalmus ectropion	p.	d.	d.	p.	p.	supra- infra- oral	p. n.	c. n.
Case No. 45 P. S. 70 years old, duration 5 years	nod.	÷									
Case No. 46 J. M. 38 years old, duration 17 years	m. a.	÷									
Case No. 47 L. E. 74 years old, duration 50 years	nod.	+	p.	dc.	d.	d.	p.	p.	?	?	
Transition to anæsthetic.											
Case No. 48 A. M. 35 years old, duration 10 years	nod.	÷									
Case No. 49 L. N. 55 years old, duration 30 years	m. a.	+	p. lagopthalmus	p.	d.	d.	p.	p.	supra- infra- oral	d. n.	n. n.

m. a. = maculo-anæsthetic, nod. = nodular, p. = paralysis, d. = paresis, c. = involuntary contractions, n. = normal. In the column under heading VII, + means presence and ÷ absence of facial disturbances.

	Form	VII	Pars superior						pars inferior	
			orbicularis oculi		frontalis		corrugator		r	l
			r	i	r	l	r	l		
Case No. 50 L. J. 29 years old, duration 11 years	nod.	÷?								
Case No. 51 E. K. T. 77 years old, duration 65 years	m. a.	+	p.	p.	d.	d.	p.	p.	supra- infra- oral	n. n. n.
Case No. 52 M. M. 55 years old, duration 39 years	nod.	÷								
	Secondary anæsthetic form.									
Case No. 53 M. K. 58 years old, duration 34 years	nod.	÷							supra- infra- oral	n? n. n.
	Secondary anæsthetic form.									
Case No. 54 A. M. W. 58 years old, duration 23 years	nod.	+	d?	n.	n.	n.	n.	n.	n.	n.
	Secondary anæsthetic form.									
Case No. 55 O. Aa. 68 years old, duration 12 years	nod.	+	p. lagophthalmus ectropion	p.	p.	p.	p.	p.	supra- infra- oral	p. d. d.
	Secondary anæsthetic form.									
Case No. 56 E. B. 84 years old, duration 51 years	m. a.	+	d.	d.	n.	n.	p.	p.	n.	n.
Case No. 57 M. B. 64 years old, duration 54 years	nod.	+	d.	d.	n.	n.	p.	d.	n.	n.
	Cured after variola (post aut propter?)									
Case No. 58 J. A. 68 years old, duration 40 years	nod.	+	p. lagophthalmus ectropion	p.	p.	d.	p.	p.	supra- infra- oral	d. n. n.
	Secondary anæsthetic form.									
Case No. 59 K. B.	m. a.	÷								

m. a. = maculo-anæsthetic, nod. = nodular, p. = paralysis, d. = paresis, c. = involuntary contractions, n. = normal. In the column under heading VII, + means presence and ÷ absence of facial disturbances.

It is a striking feature of the facial paralysis in leprosy that the individual muscle is often affected in a variable degree in its different parts. Thus it is not rare to see the frontalis muscle strongly paretic or even paralytic in its medial part, whilst the more lateral parts of the muscle have retained a comparatively good function. When in such a case the patient is made to raise his eyebrows, this often results in a characteristic reaction consisting of an elevation of the lateral parts of the eyebrows only.

When the orbicularis oris is affected, a peculiar configuration of the mouth, highly characteristic of leprosy, often occurs. Corresponding to some of the radial muscles of the mouth (e. g. zygomaticus) which have not yet succumbed to the paralysis and which have retained their normal tonus, a retraction is seen in the lips, which are otherwise flabby, swollen, and "ectropic".

(Cpr. the following rough sketches fig. 4-8).

As will be seen from the above table, fibrillary contractions are often to be seen in the paretic muscles. In some cases these "fibrillary contractions" only occurred on exertion, and then rather made the impression of being temporary fibrillary relaxations of the contracted muscle¹. —

It will easily be seen that only lesions of the most peripheral (terminal) branches of the facial nerve can explain the clinical picture outlined above. I am therefore strongly opposed to Nonne's views of the central origin of the facial paralysis in leprosy. Not only must the paralysis be due to a peripheral lesion of the nerve; but to the most peripheral nerve lesion viz. a lesion of the facial branches. Only thus can one explain the



Fig. 4. (Case No. 21 K. P.) Typical defiguration of the mouth due to leprosy facial paralysis in a woman, suffering from the maculo-anaesthetic form. There is double lagophthalmus and ectropion; also "ectropion of the mouth". In the left supraoral region however the radial muscles (zygomaticus) have retained their tonus. Corresponding to this a retraction of the upper lip may be seen. In this region frequent fibrillary twitchings occur. When she speaks the other side of the supraoral region flaps like a loose sail.

¹ In case No. 58 (J. A.) one could produce these "fibrillary contractions" in the left supraoral region by continuous irritation of the left facial trunk with a weak faradic current.

extreme unevenness in the affection of the different facial muscles and the complete atonia, so often found.

Dr. BORTHEN has calculated the frequency of lagophtalmus in 94 maculo-anaesthetic cases to about 60 0/0 in females and 70 0/0 in males. He further remarks that the lagophtalmus may occur at any time in the course of the disease, having seen it develop in the first year as well as 42 years after the onset.

In a later publication (1905) BORTHEN gives the following figures:

Frequency of lagophtalmus
in the maculo-anaesthetic form:

Females 54,64 0/0

Males 58,33 0/0

Frequency of lagophtalmus
in the nodular form:

Females 16,75 0/0

Males 19,64 0/0

It has to be remarked that Borthen's findings are not directly comparable with mine. Facial paresis always exists a considerable time before the condition of lagophtalmus is established.

The incidence of facial paresis should therefore a priori be expected to be considerably more frequent. And so it actually seems to be according to my observations.

Of the series of 59 cases in the above table I have found facial paresis or paralysis in 41 i. e. in 69,5 0/0. Of the 49 cases

31 were maculo-anaesthetic

22 — nodular (resp. sec.
anaesthetic)

6 — mixed or transitional



Fig. 5. (Case No. 30. O. A.) The mouth shows a typical defiguration. Only on the right side is the naso-labial fold still present. On this side also a retraction of the upper lip is seen. Between this retraction and the zygoma frequent fibrillary contractions are seen. Also in the left side of the frontal muscles fibrillary contractions are observed. In the frontal muscle only the most lateral parts have retained their mobility. — Ectropion medially on both sides.

Of the 31 maculo-anaesthetic cases 24 had more or less pronounced facial paresis: 77,4 0/0.

Of the 22 nodular cases 14 had more or less pronounced facial paresis: 60,4 0/0.

Of the 6 mixed and transitional cases 5 had more or less pronounced facial paresis: 83 0/0.

In view of the small numbers, the percentage here given has no great value; for the last group the percentage is probably much too high. But the above shows at least that the facial paresis is a fairly common occurrence in *all* forms of leprosy.

The *electrical examination* of the facial nerve, as a rule, will not so readily show characteristic changes as in the ordinary peripheral facial palsy (Bell's palsy), where the seat of the lesion is in the facial nerve trunk.



Fig. 6. (Case No. 9. M. O. Aa.) The patient is smiling. On the right side the nasolabial fold is absent; on this side a peculiar set of wrinkles are found, probably due to contraction of the buccinator.



Fig. 7. (Case No. 44. A. A.) The patient is trying to show her teeth. In this case both cilia and supercilia were extremely well preserved.

A typical reaction of degeneration as seen in Bell's palsy is, in fact, a rare thing. And yet the result of a painstaking electrical examination may in a great many cases present characteristic features. The individual muscles react as a rule very differently to the stimuli; some may react fairly normally both to the farradic and galvanic current, others may show the reaction of degeneration (complete or incomplete), others again do not react at all. Thus in case No. 30 (O. A.) (cpr. also fig. 5), while the right zygomatic muscle showed apparently normal reaction, the left zygomatic muscle did

not respond at all, The orbicularis oculi showed no reaction whatever — nor did the corrugatores. All the other facial muscles gave a slow contraction; but the relation between K. C. C. and A. C. C. remained normal. In the frontal muscle the motor points had been transformed into “a motor line” running parallel to the eyebrows; but the galvanic irritability was not uniformly extended to the whole muscle.



Fig. 8. (Case No. 41. B. K.) The case is a typical illustration of a downward dislocation of the whole mouth due to the facial paralysis. The teeth of the lower jaw are seen immediately underneath the upper lip. The lower lip is seen to hang by the frenulum. Destruction of nasal bones. Lagophthalmus and ectropion of medial halves of lower eye-lids on both sides. The patient has some difficulty in pronouncing b, p. and m. Constant dribbling of saliva.

This difference in the reaction between the different facial muscles is in itself pretty characteristic. In early cases changes in the reaction to electric irritation may — like the paralysis itself — be confined to individual muscles or even parts of muscles.

The *farradic* irritation of the facial trunk sometimes causes contractions of only a few of the muscles (or parts of the muscles) innervated from the 7th nerve. Thus in case No. 58 (J. A.) farradic irritation of the left facial trunk only produced contractions of the supraoral muscles.

To sum up, one will, as a rule, find that the muscles do not all respond so uniformly as they do normally to the farradic irritation of the facial trunk — nor do they fail to respond so uniformly as in ordinary peripheral facial paralysis.

As regards galvanic irritation great accuracy and attention to details are required. As an example I shall only briefly mention the result of the electrical examination of the frontalis muscle in case No. 35 (M. M.). As will be seen from the preceding tabulated list of findings, the right half of the frontal muscle contracts apparently normally, while the left half is distinctly paretic. Irritation of the motor points with a galvanic current of 1 milliampère gave the following results:

<i>right side</i>	<i>left side</i>
K. C. C. +	K. C. C. +
A. C. C. ÷	A. C. C. +

(K. C. C. = Kathodic closure contraction,
A. C. C. = anodic closure contraction).

The same current applied to symmetrical points, each 2,6 centimetres removed from the corresponding motor points in the downward and medial direction, gave the following results:

<i>right side</i>	<i>left side</i>
K. C. C. +	K. C. C. +
A. C. C. ÷	A. C. C. +

The contraction was in both cases a trifle slower on the left than on the right side; but the difference was not great, — and the anodic contraction was in no case stronger than the cathodic contraction. Thus only by carefully comparing the two sides and carefully measuring the current employed was it possible to ascertain that the response to electrical stimulation was not normal on the left side.

The other cranial nerves do not play any great rôle in the semeiology of leprosy.

As regards the *1st cranial nerve* (the olfactory nerve) HANSEN & LOOFT state that in advanced cases of the maculo-anaesthetic form the sense of smell is as a rule diminished or entirely lost.

The second cranial nerve (nervus opticus) is very often impossible to examine on account of the frequent lesions in the cornea (sometimes of a primary, sometimes of a secondary nature). This latter affection of the cornea has been described as keratitis ex lagophthalamo (L. BORTHEX) and probably the lagophthalmus plays the most important rôle in the pathogenesis; but the trigeminal affection has no doubt also a great share in its causation — as the trigeminal affection abolishes the conjunctival and corneal sensation, and thus does away with the protective reflex mechanism which depends on corneal and conjunctival stimuli. When blindness occurs in leprosy it is, as a rule, due to alteration of the cornea or of the iris.

On account of this loss of eyesight it is also very difficult to examine the function of the *third, fourth and sixth nerves*. (Nervus oculomotorius, trochlearis and abducens). As a great rule they are not affected. A real ptosis is practically never met with. What sometimes gives the impression of ptosis, is a partially and continuously executed Bell's phenomenon in cases of lagophthalmus with hypersensitiveness to light. I have never found a real nystagmus, but I have met with several cases of irregular nystagmoid jerks.

That some of the cases have been rather deaf, and that this deafness has had the character of a nerve deafness, is true; but I have no reason to declare this deafness to be the result of any leprosy affection of the *eighth nerve*. Particularly do I wish to point out that in many of the cases, where the facial affection was most pronounced, the hearing had remained quite good.

I have not seen any clinical signs of *9th (glossopharyngeal)*, *10th (pneumogastric)*, or *11th (accessorius) cranial nerve lesion*. But, as regards the *12th cranial nerve* (the hypoglossal nerve), I have found a slight deviation (i. e. a unilateral paresis) of the tongue in three cases.

As regards *taste*, ARMAUER HANSEN & LOOFT have already in 1895 pointed out that the sense of taste (as well as the sense of smell, as previously pointed out) is frequently diminished or entirely lost in advanced cases. I should like to add that as a rule the sense of taste is not totally lost even in advanced cases with complete facial paralysis.

Articulation as a rule remains quite good. Only when the muscles round the mouth are becoming paralytic is any marked *dysarthria* noticeable — and even then it is practically only the labial sounds that become faulty. If one wants to unmask this slight dysarthria one should let the patients pronounce test words containing the letters b, p, or m. Patients with perioral paralysis will have difficulty in pronouncing these letters particularly if there be “ectropion oris”. Sometimes they try to close their lips with their hands, and when the difficult letter is at the beginning of the word I have observed this manual help to be very successful. The patient then first closes his mouth entirely with the aid of his hand and can thus pronounce b, p, or m as the *first* letter of a word, but not where it occurs in the middle of one. As test words I have therefore used the following: “bibi”, “papa”, “mama” for Norwegian patients. For English-speaking patients “baby”, “papa”, “mamma” might be used as standard test words.

On the whole, however, dysarthria plays an unimportant part in the clinical make up of leprosy — and the other bulbar disturbances play an even less significant part. They practically never exist. This is, as will later be shown, a point of considerable diagnostic interest.

That leprosy lesions of the nasal and oral cavities, of the pharynx and larynx may cause dysarthria, dysphagia and aphonia, is another matter. In these cases a local lesion can always be discovered to account for the disturbance, which must not be mistaken for one of bulbar origin.

The Motor System.

(One of the most characteristic motor disturbances in leprosy — the facial paralysis — has already been dealt with in the preceding chapter).

The motor disturbances of leprosy begin at the distal parts of all four limbs, and then gradually and slowly spread to the more proximal parts.

The character of the motor disturbance is that of a typical peripheral neuron lesion, i. e. the paresis is accompanied by pronounced atrophy and hypotonia. As the onset is so gradual and the progression so slow, the atrophy and paresis seem to develop *pari passu*¹, and one sometimes has

¹ In contradistinction to more acute peripheral neuron lesions such as acute poliomyelitis, where the atrophy first appears when the paresis or paralysis has existed for some time.

the impression that the paresis is solely due to the atrophy. There is, however, no valid reason to believe that this should be the case; one sees just the same thing in all chronic peripheral neuron lesions, e. g. progressive spinal muscular atrophy — and on the whole, there is nothing in the clinical reaction of the peripheral motor neuron and its muscle to the noxe, specific of leprosy. Any noxe would produce the same result, provided its development and progression were equally slow.

To begin with the upper limbs, we find in leprosy the same condition as in progressive spinal muscular atrophy, in amyotrophic lateral sclerosis, in syringomyelia, (in short in any chronic lesion of the anterior horns in the cervico-dorsal region of the cord), in lower plexus paralysis, and in some cases of polyneuritis of other origin of long standing — as, in fact, in all chronic lesions of the peripheral motor neuron.

One is struck by the atrophy of the intrinsic muscles of the hand, first seen as a rule in the first interosseal space. One finds paresis or paralysis of all these intrinsic muscles — and this paresis or paralysis is accompanied by loss of tónus. This atonia and paralysis of certain muscles causes certain peculiarities. Thus the paralysis and atonia of the *opponens pollicis* causes what has been called the simian hand, generally described as a characteristic of a paralysis of the median nerve; the thumb is kept in more or less the same plane as the other fingers, and is not, as normally, rotated inwards towards the palm of the hand. The similar disturbance of the *lumbricales* and *interossei* causes a hyperextension at the metacarpo-phalangeal joints and a flexion at the interphalangeal joints, — the “claw hand”, generally described as characteristic of ulnar paralysis.

This combination of “claw hand” and “simian hand” is as characteristic of leprosy as of progressive spinal muscular atrophy.

As the disease progresses, the muscles of the forearm involved are affected in just the same way (paresis, atrophy, hypotonia) and finally also the arms and shoulders. But even in the oldest and most advanced cases the muscles of the arms and shoulders are practically never affected to any great extent.

It is, in short, the usual distribution and the usual development of motor loss in *any polyneuritis* that we find here. Sometimes the motor loss in the area of a certain nerve predominates. We have already seen that in most of the early cases it will be the motor loss in the distal parts of the ulnar and median areas that predominates. In some cases an early and typical radial paralysis has been described. Thus DE BEURMANN and GUGEROT described two cases of radial paralysis at the International Leprosy Conference in Bergen 1909. It is, however, well to keep in mind that lepers may as well as others develop a pressure paralysis of the radial nerve. One must therefore be extremely careful in putting down a radial paralysis to the specific action of the leprosy bacillus.

In the lower limbs we meet with exactly the same picture as in the upper limbs viz: an atrophic and flaccid paresis of the feet, slowly extending to the crura and the more proximal parts; but always much more pronounced at the distal parts.

It is surprising how long these motor disturbances (particularly those of the lower limbs) may exist unnoticed by the patient.

This flaccid and atrophic paresis of the feet is of considerable diagnostic importance as will be pointed out in a later chapter.

All lesions of the cervico-dorsal region of the cord may, by affecting the pyramidal tracts at this level, give rise to motor disturbances of the lower limbs; but these motor disturbances are of the so called "spastic" or central type, i. e. they are accompanied by an increase of tonus (hypertonia, rigidity) and of typical reflex changes, the most important of which consists in an inversion of the plantar reflex. This is seen in myelitis and meningo-myelitis in the cervico-dorsal region of the cord, in tumours in this region, in amyotrophic lateral sclerosis, and in many cases, syringomyelia. Only where the lesion extends to the lumbo-sacral region and affects the anterior grey horns at this level, will the lower limbs show the same flaccid and atrophic paresis as the upper limbs.

The coordination is seldom affected and never to any great degree. The usual tests for coordination are as a rule carried out with great ease and precision. It is surprising to see how deftly the patients use their paretic, atrophic and mutilated limbs at fine needlework.

The gait is quite steady in most cases, even in those of very old standing, and even in those where blindness has set in and where extensive mutilations have caused profound deformities of the lower limbs.

ROMBERG's sign is, as might be expected from what has already been said, practically always negative.

This surprisingly good state of all coordination is dependent on the integrity of the deep sensation. This will be dealt with in the next chapter.

When the flaccid paralysis has reached the crus and the foot cannot be moved, the gait becomes very difficult. On account of the atonia there may be some superficial likeness to tabes, which has struck some observers (Jeanselme & Sée). But this resemblance is only a superficial one. It will be found that the hypotonia or atonia in leprosy is chiefly due to the flaccid, peripheral paralysis, whilst in tabes it is due solely to a lesion of centripetal fibres (posterior roots). The different state of the deep sensation constitutes a fundamental clinical difference between these two conditions.

The Sensory System.

As regards the sensory disturbances, we meet in leprosy both *subjective* and *objective* sensory phenomena.

The former vary greatly from one case to another. They may consist in all kinds of irritative phenomena from the lightest paraesthesiae (pins & needles etc.) to the severest neuralgic pains. They may occur as initial

phenomena only; but may also exist continuously for many years. Allusion has already been made to the neuralgic attacks which accompany the acute swelling of certain nerves, sometimes occurring in the course of the disease. It happens that it is this neuralgia of leprosy origin which brings the patient to the doctor. (This should always be kept in mind by general practitioners in districts where leprosy exists).

The *objective* sensory phenomena consist in

- I. hyperaesthesia,
- II. hypoaesthesia.

In a general way one may say that the former precedes the latter. As a rule, the hyperaesthetic stage is accompanied by irritative phenomena (paraesthesiae, neuralgiae), and often by a tender swelling of the nerves, corresponding to the hyperaesthetic areas.

As the lesion of the nerves progresses, the hyperaesthesia gives way to sensory loss, hypoaesthesia, — and the case enters the *hypoaesthetic stage*. These stages, however, may occur at different times in the different areas.

The study of the sensory loss in leprosy has occupied a great number of clinicians — and the anaesthesia of leprosy has in the eyes of the majority of these clinicians been *the* neurological manifestation of the disease. To obtain a complete idea of the sensory loss in leprosy, it is necessary to treat the different qualities of sensation separately.

Here the different qualities will be dealt with in the following order:

- I. *Superficial sensation*,
touch — tactile sensation,
superficial pain (pinprick),
temperature.
- II. *Deep sensation*,
joint sense,
deep pressure pain,

which latter naturally leads on to the *palpation of the nerve trunks* and thereby elicited findings.

As regards the *tactile sensation* one finds as a rule anaesthesia or hypoaesthesia in the distal parts of all four limbs shading off in degree towards the more proximal parts of the limbs.

The *superficial pain* and the *temperature sensation* will as a rule be found to be affected in the same areas, and, as far as they can be compared, approximatively to the same degree as the tactile sensation.

Yet in some cases various kinds of *dissociations* are found. In one case the sensation to pain and temperature may be considerably reduced or lost in a certain area, whilst the tactile sensation is only very slightly affected in the same area. This so called "classical dissociation" I have never found complete in leprosy.

In another case one may find a dissociation between the sensation of temperature and touch on one side and pain on the other — and in yet another case one may find a dissociation between the sensation of heat and the sensation of cold. (This will be exemplified in the sensory charts illustrating this chapter.)

In short, all kinds of dissociations between the different qualities of superficial sensation may be encountered in leprosy; but never have I found such dissociations complete — nor are they to be regarded as the rule. The great rule is that the different qualities of superficial sensation are all affected to approximatively the same extent.

(The dissociation between superficial anaesthesia and intact deep sensation is, however, the great rule, as will be dealt with below.)

As regards the *distribution*, this is as a rule the usual one for any polyneuritis viz: the distal parts of the limbs show the greatest sensory loss. This extends proximally to a greater or lesser extent. Rarely does the sensory loss extend to the trunk.

As already mentioned under the chapter on motor disturbances, it may happen that one nerve is affected earlier and more profoundly than the other nerves. In these cases the distribution of the sensory loss coincides with the distribution of this nerve. It is particularly the ulnar nerve in the upper limbs and the peroneal nerve in the lower limbs that seem to be predisposed for early, isolated affection.

When in the upper limb the ulnar and the internal cutaneous nerves of the forearm and arm are chiefly affected, the sensory loss has a segmental appearance. This segmental distribution (“*anesthésie rubanée*”¹) is by Jeanselme & Sée claimed to be the initial and the most constant distribution of the superficial sensory loss. Judging from my own cases, I cannot help thinking that they have overestimated the frequency of this kind of distribution. It is in my experience, if not rare, yet by no means the most common form of distribution.

The distribution just described was found in case No. 60 (L. S.), cpr. fig. 29—30 (this case has been described by Prof. BRUUSGAARD as one of tuberculoid leprosy — cpr. Norsk Magazin for lægevidenskab, 1921, No. 5, page 359).

Apart from the polyneuritic superficial sensory loss just dealt with, we encounter in the maculo-anaesthetic leprosy an anaesthesia more or less *corresponding to the maculae*. Here great variations occur from one case to another — and also from one macula to another. Sometimes partial dissociations are found; sometimes the border of the distribution of the sensory loss is not identical with that of the macula — the latter sometimes being smaller, sometimes larger, than the hypoaesthetic area. The only generali-

¹ The term “segmental” of French authors refers to the segments of *the limbs*, not to the segments of the spinal cord.

zation, that my observations allow is this: the sensory loss in the maculae of the *trunk* is always much less pronounced than the sensory loss in the maculae of the *limbs*.

The existence of maculae without any sensory loss has to be recognised, although this has not been a frequent finding in my cases (cpr. case 7 & 59)¹.

It has to be mentioned that besides the simple loss of sensation, one sometimes meets with delayed sensation (although not so frequently as in tabes) and disturbances in localisation (cpr. fig. 11, case No. 1).

As an illustration of the superficial sensory loss encountered, I append a few sensory charts giving the findings in some of my cases.

Explanations concerning the following charts.

Case No. 1. P. S. (Fig. 9—10.)

Chart of cutaneous manifestations (maculae and a perforating ulcer); the macula marked "a" has developed during the last few years.

For age of this and the other patients, and duration and type of the disease, see the table of facial paralysis on pages 15—20.

Case No. 1. P. S. (Fig. 11—12.)

Chart of sensory loss. (The findings as regards tactile, algetic and thermoaesthetic sensation were identical in distribution.)

In the limbs there is complete tactile anaesthesia, — except in the areas *a* and *b* where stimuli are as a rule felt. The stimuli applied to *b*, however, are constantly localised by the patient to *a*.

On the trunk the hypoaesthesia is very slight.

Case No. 2. J. H. (Fig. 13—14.)

Chart of sensory loss and maculae. All qualities of superficial sensation are affected to the same extent.

It is noticed how the sensory loss is much less profound on the trunk than in the limbs.

Case No. 3. J. O. B. (Fig. 15—16.)

Chart of sensory loss.

At the bend of both elbows — in the middle of the anaesthetic area — there is an "island", where the sensory loss is only very slight.

Such "islands" are not infrequent (cpr. also Case 1).

At the back in the middorsal segments on the left side there is a limited area of dissociated sensory loss of the "classical" type. There is just a faint suggestion of tactile hypoaesthesia, and the dissociation is here so nearly complete as I have never seen it in any other case of leprosy. This

¹ According to BEURMANN this should be a relatively frequent occurrence.

sensory loss might well be due to a lesion in the left posterior grey horn in the mid-dorsal region (D 6—8). It is curious, however, that this area of sensory loss could not be found to continue in the lateral and anterior aspects of the trunk.

Case No. 4. K. P. (Fig. 17—18.)

Chart of sensory loss.

In this case the loss of tactile sensation in the lower limbs is much more extensive than that of pain and temperature.

Over the tip of the right thumb the patient can distinguish between the sharp and the blunt end of a needle, when some pressure is brought to bear. She personally considers the tactile sensation to be perfect in this finger; but it is found that only such tactile stimuli are felt as are combined with a pressure, sufficient to cause an indentation of the surface.

Case No. 6. G. O. (Fig. 19—20.)

Chart of sensory loss.

In the upper limbs there is a pronounced dissociation between the sensation of pain, which is nearly intact, and tactile and thermic sensation, which are both profoundly affected. On the other hand, the sensation of temperature has remained intact at the back of both thighs, while the tactile sensation here is profoundly, and the sensation of pain slightly, affected.

In both plantae there is a considerable over-reaction to painful stimuli — and only slight tactile hypoaesthesia.

In both lower limbs a marked hyperaesthesia to deep pressure is found.

Case No. 7. K. V. (Fig. 21—22.)

Chart of maculae & sensory loss.

It will be seen that in one of the maculae at the back no sensory loss could be found — in the centre of the other: pronounced thermoanaesthesia and slight tactile hypoaesthesia, but no hypoalgesia obtained.

At the back of the right thigh marked tactile anaesthesia, slight hypoalgesia, but no loss of temperature sensation.

In both plantae there is a distinct overaction to painful stimuli.

Marked hyperaesthesia to deep pressure in the upper limbs.

Case No. 35. M. M. (Fig. 23—24.)

(Early case).

Chart of sensory loss. Same significance of shading as in previous figures.

[Left orbicularis oculi and left half of frontal muscle distinctly paretic. — Pronounced atrophy of intrinsic muscles of both hands.]

The doubtful hypoalgesia in the right cheek, as indicated in Fig. 23, developed in the course of 4 months into a marked hypoalgetic and hypo-aesthetic area (cf. Fig. 23 a).

Corresponding to this one can feel the nervus auricularis magnus greatly thickened [cpr. fig. 23, a.]

At the lower end of this nerve a nodule is felt. This feels like a slightly enlarged lymphatic gland, and would no doubt have been taken for such, had it not been in continuation with the rest of the palpable, thickened, great auricular nerve. Both ulnar and peroneal nerves are considerably thickened.

Case No. 58. J. A. (Fig. 25—26.)

Sensory chart. Same significance of shading as in previous figures. Pronounced hyperaesthesia for deep pressure in all four limbs.

Farradic current applied to left infraoral region elicits great pain localised to the corresponding teeth, but no sensation in the skin.

Case No. 59. K. B. (Fig. 27—28.)

Sensory chart (also maculae indicated).

This case presents a distinct dissociation between the sensation of heat and cold over the upper part of the trunk (both anterior and posterior aspect). Deep sensation exceedingly good.

Case No. 60. L. S. Woman aged 65 years. (Fig. 29—30.)

Early case. First signs of illness in December 1917. First examination 25 September 1918.

Sensory chart on first examination.

All superficial qualities of sensation are equally affected.

Case No. 61. O. R. Man aged 70 years. (Fig. 31—32.)

Probably quite an old case, but not diagnosed as leprosy till the time of examination at which this sensory chart was made out.

Severe wasting of intrinsic muscles of both hands. All qualities of superficial sensation affected to approximatively the same extent.

Case No. 62. T. E. Man aged 66 years. (Fig. 33—34.)

Mixed form; typical nodules in the forehead — nodules and maculae on trunk and limbs.

He maintains that he did not fall ill until a year ago, when he himself noticed sensory loss in left knee and foot.

The maculae and nodules are indicated on this, as on the previous charts. Both in the maculae and in the shaded areas the loss of sensation in this case had the following character: Profound loss of tactile sensation and temperature sensation; but very little superficial hypoalgesia.

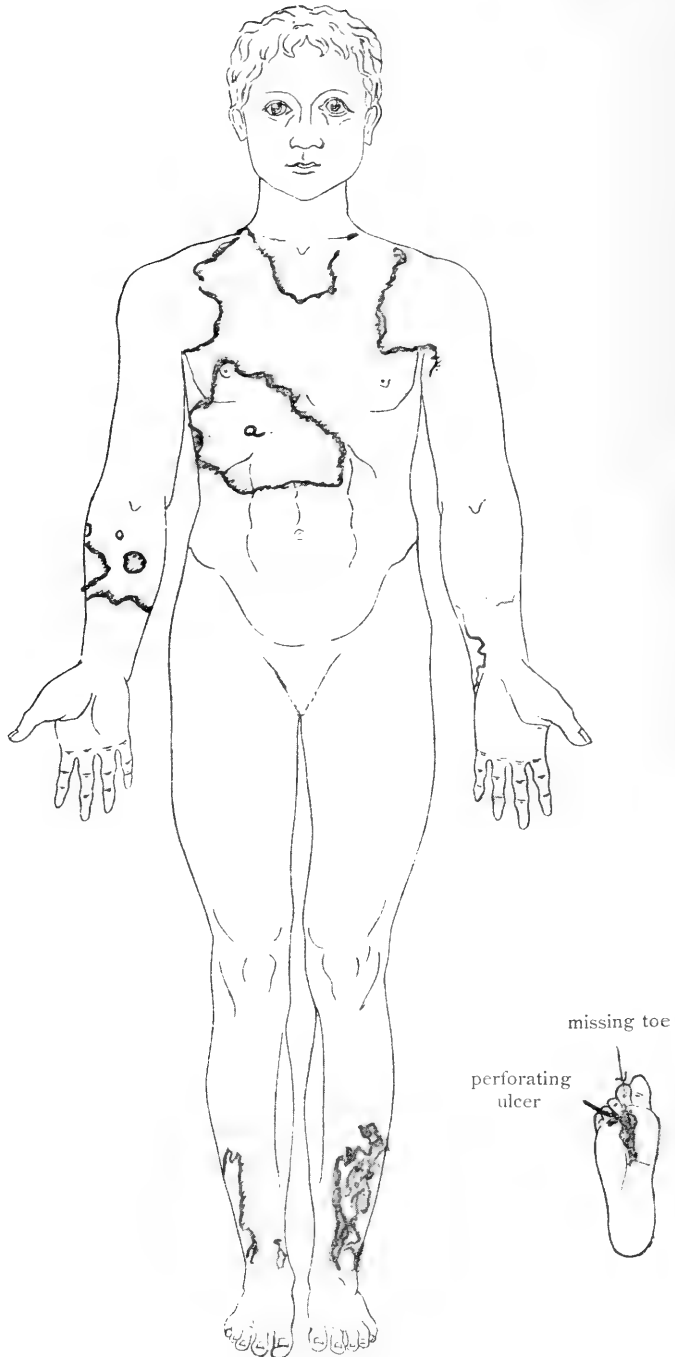


Fig. 9. (Case No. 1. P. S.)

(For further explanation see page 31.)

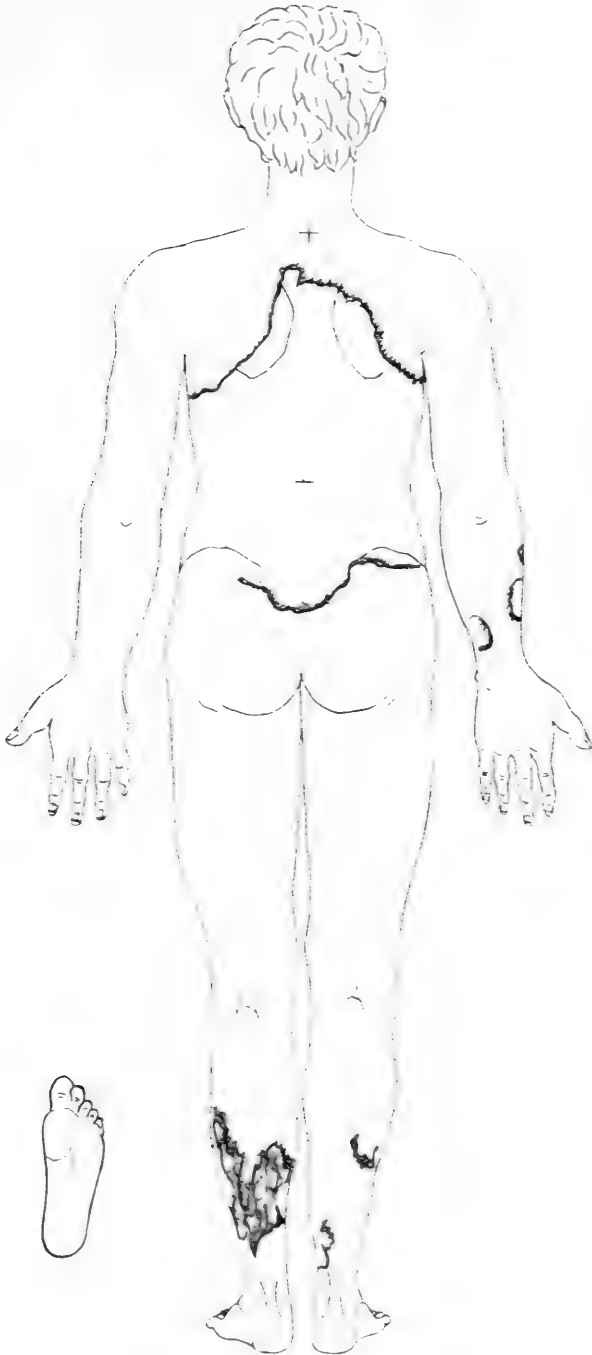


Fig. 10. (Case No. 1. P. S.)
(For further explanation see page 31.)

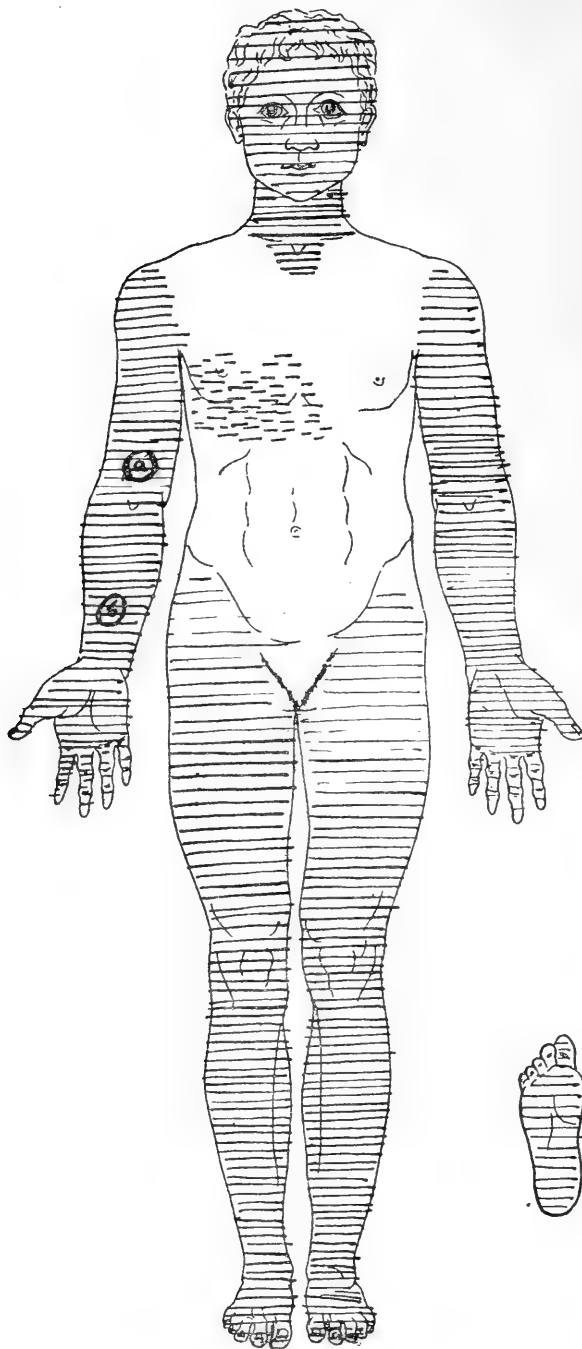


Fig. 11. (Case No. 1. P. S.)

(For further explanation see page 31.)

hypoaesthesia $\overline{\text{---}}\overline{\text{---}}\overline{\text{---}}\overline{\text{---}}$ } to light touch with a
 anaesthesia $\overline{\text{====}}$ } wisp of cotton wool.
 All qualities of superficial sensation equally affected.

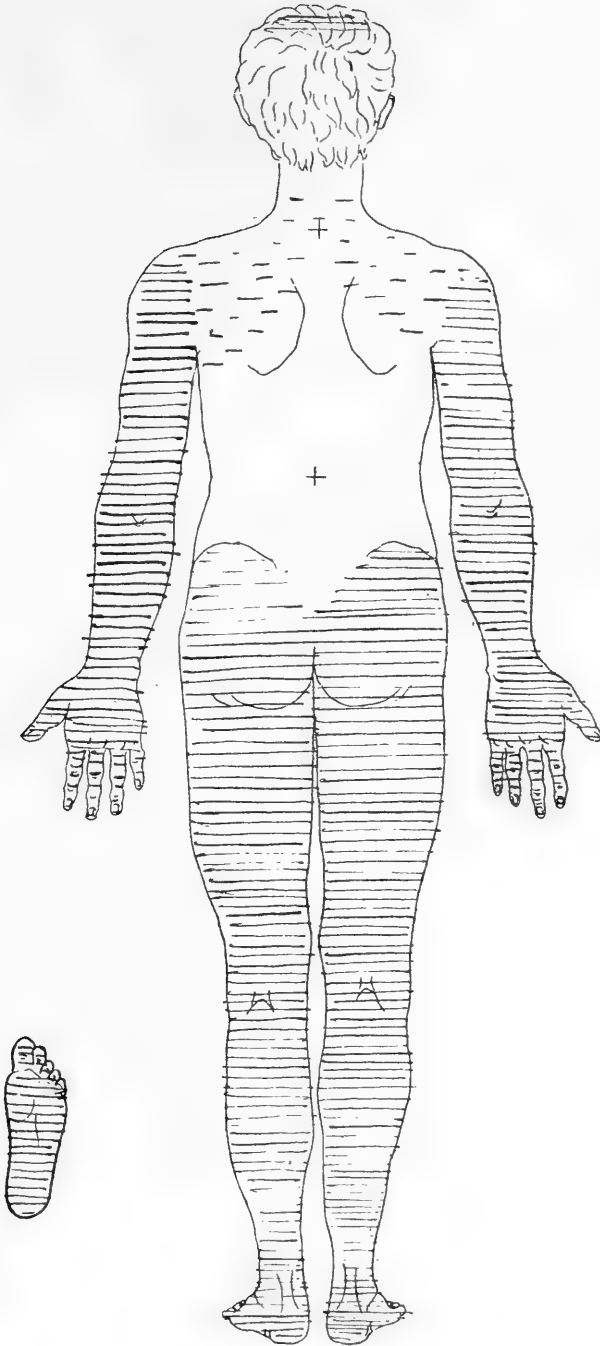


Fig. 12. (Case No. 1. P.S.)
(For further explanation see page 32.)

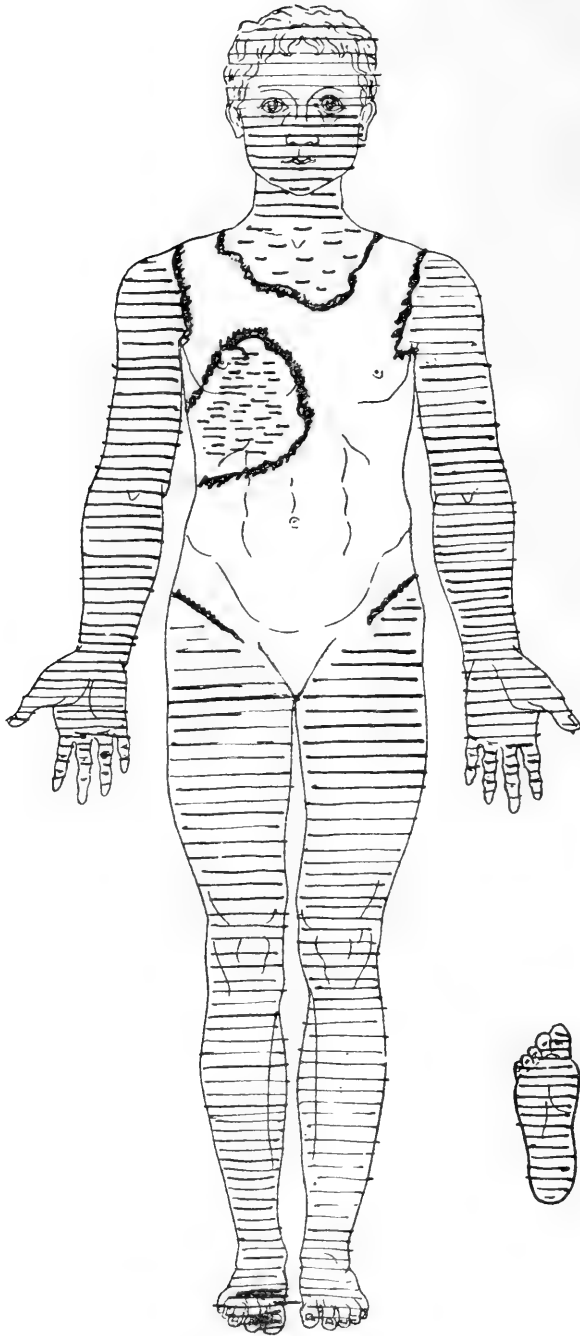




Fig. 13. (Case No. 2. I. H.)

(For further explanation see page 32.)

hypoaesthesia  anaesthesia 

All qualities of superficial sensation equally affected.

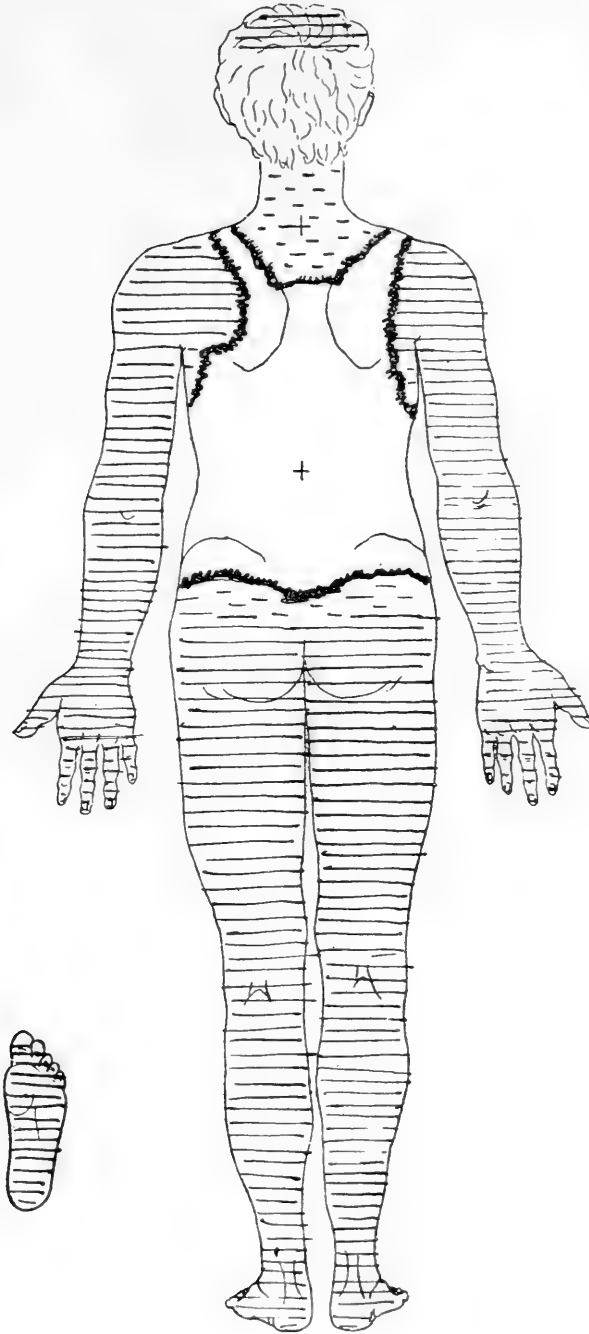
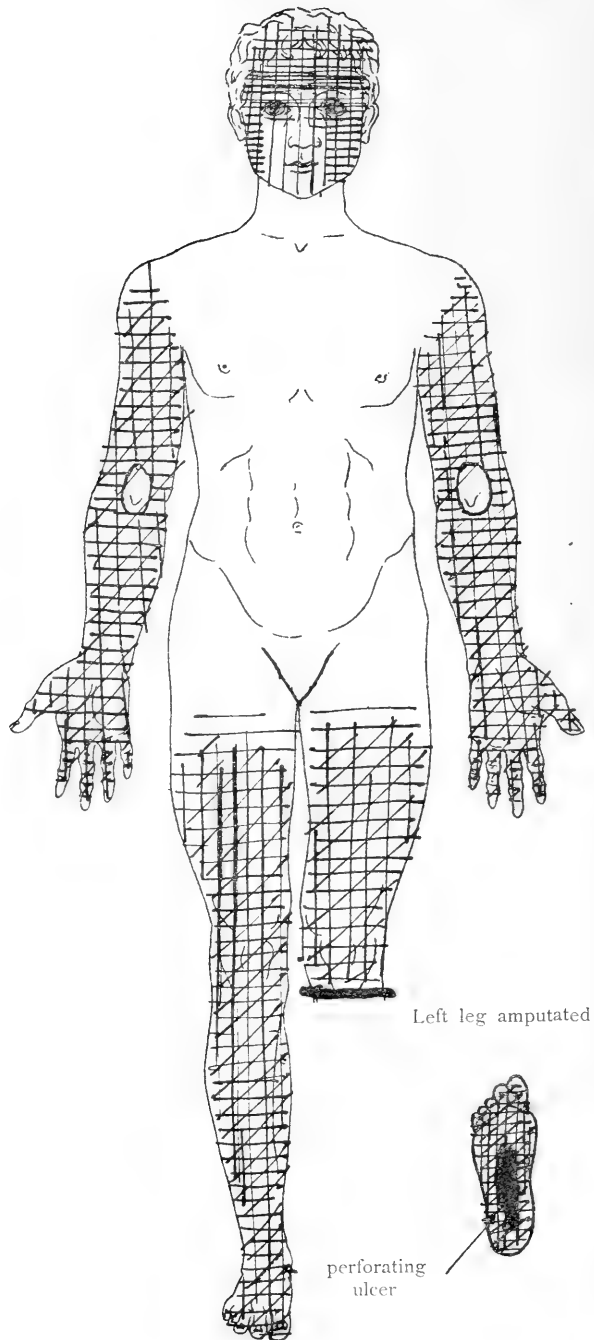


Fig. 14. (Case No. 2. I. H.)
(For further explanation see page 32.)



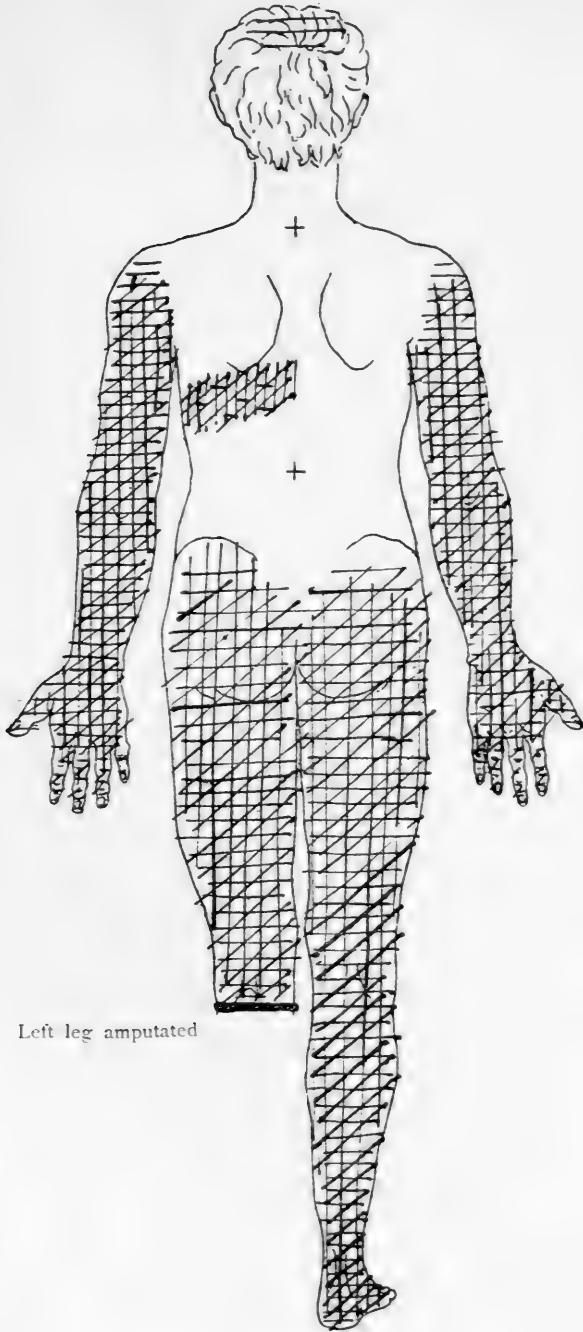
Left leg amputated

perforating
ulcer

Fig. 15. (Case no. 3. J. C. B.)

(For further explanation see page 32.)

Tactile anaesthesia ≡≡≡≡ Analgesia ||||| Therm-anaesthesia //



Left leg amputated

Fig. 16. (Case No. 3. J. C. B.)
(For further explanation see page 32.)

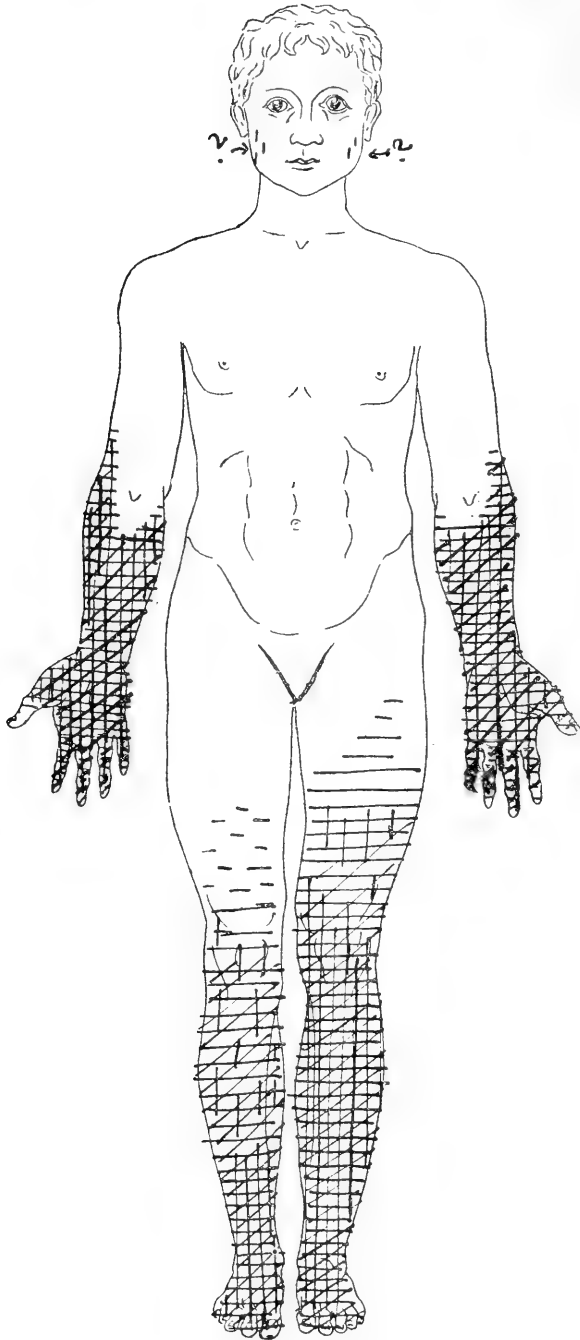


Fig. 17. (Case No. 4. K. P.)

(For further explanation see page 32.)

Tactile anaesthesia ≡≡≡ Analgesia ||||| Thermo-anaesthesia //

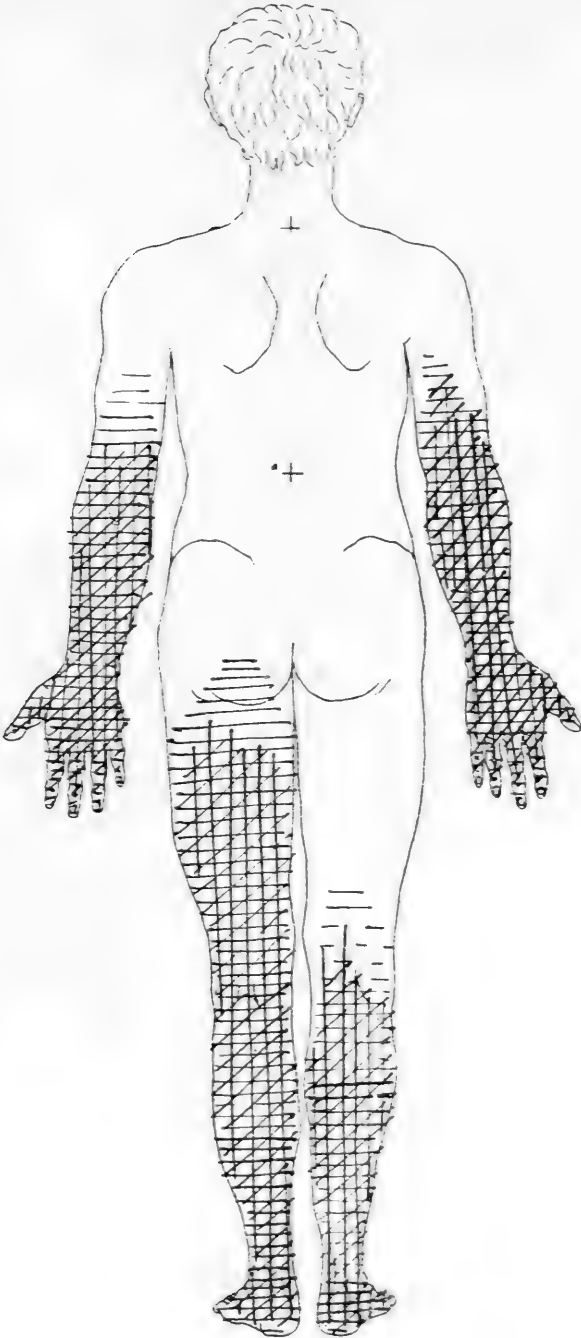


Fig. 18. (Case No. 4. K. P.)

(For further explanation see page 32.)

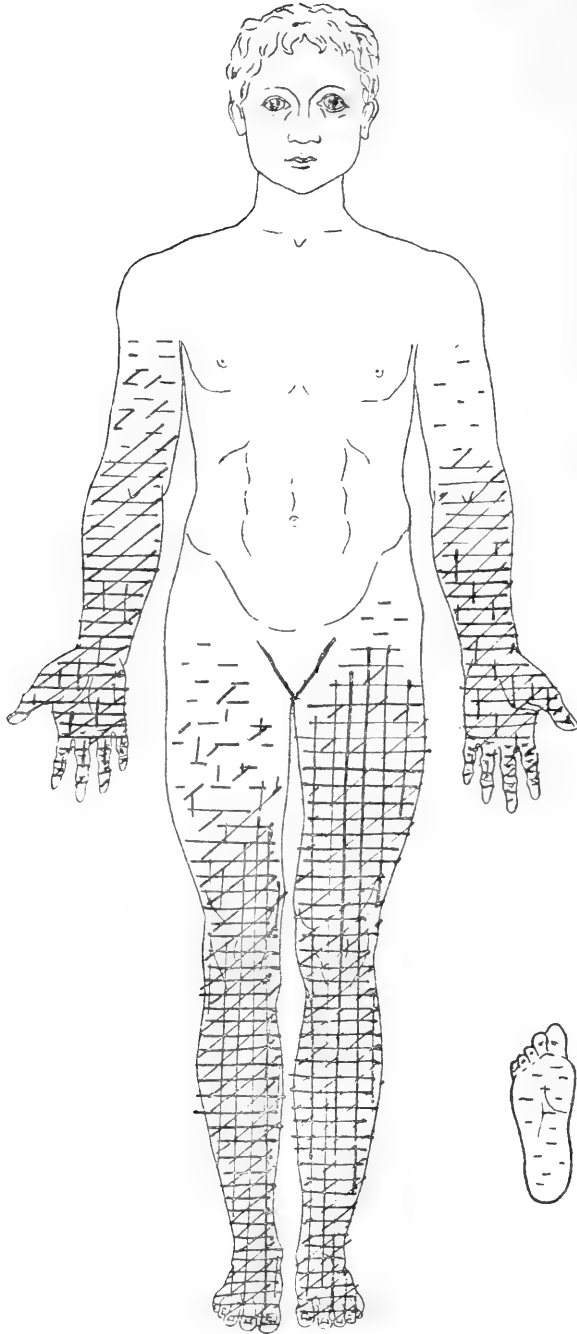


Fig. 19. (Case No. 6. G. O.)

(For further explanation see page 32.)

Tactile anaesthesia  Analgesia  Thermo-anaesthesia

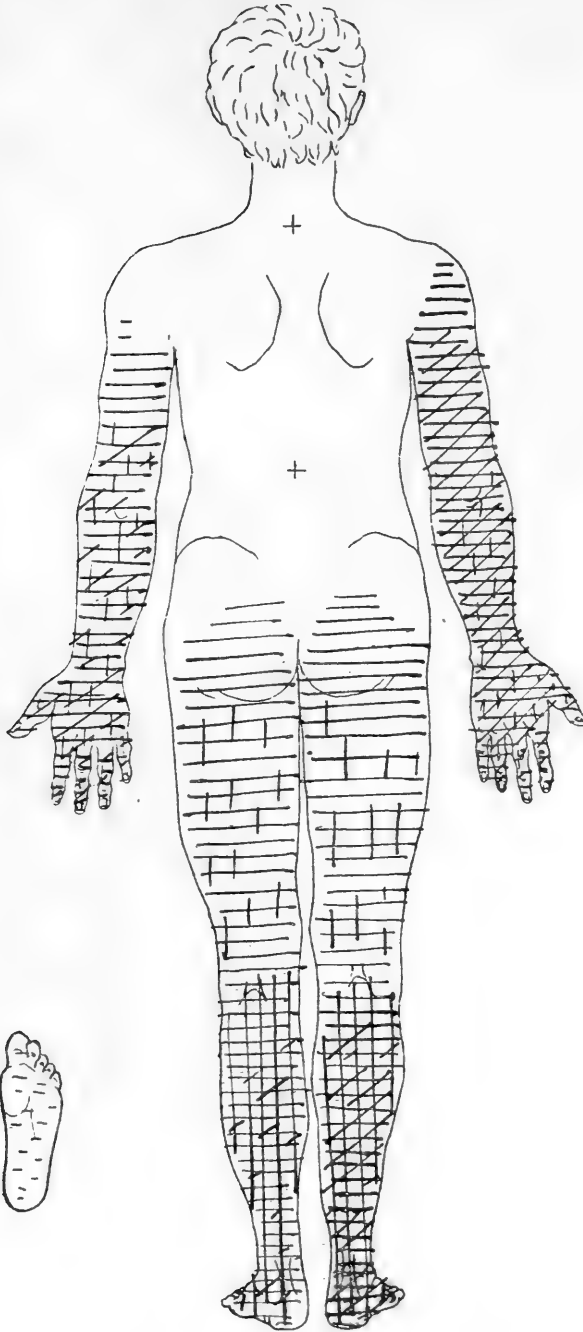


Fig. 20. (Case No. 6. G. O.)
(For further explanation see page 32.)

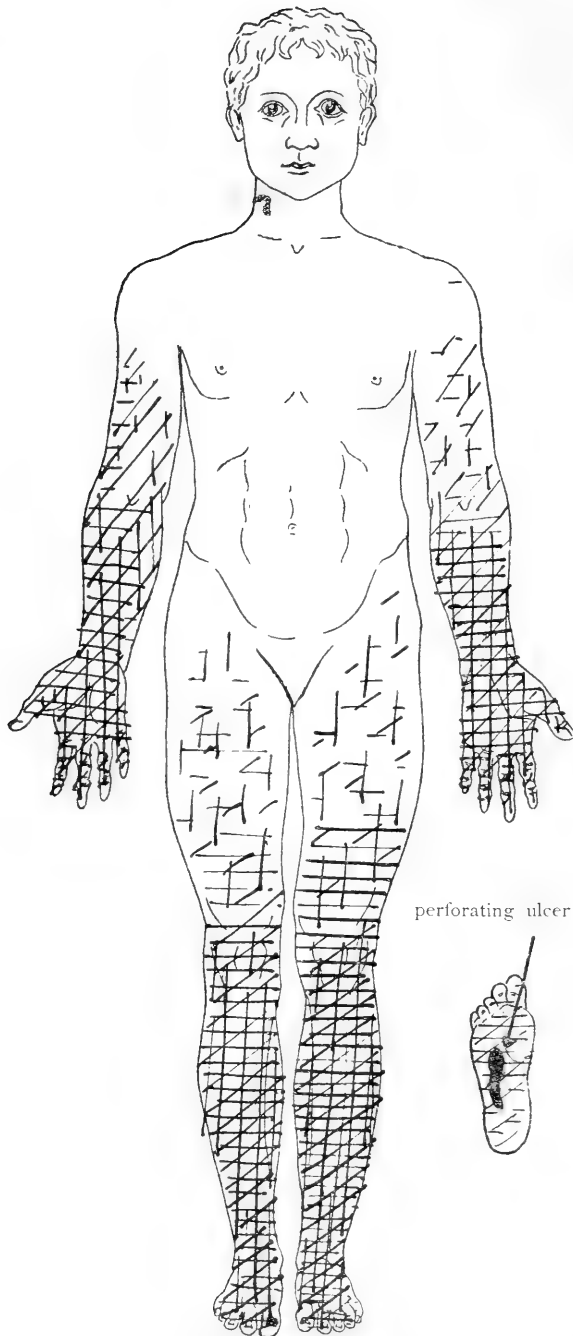


Fig. 21. (Case no. 7. K. V.)

(For further explanation see page 32.)

Tactile anaesthesia ≡≡≡ Analgesia ||||| Thermo-anaesthesia

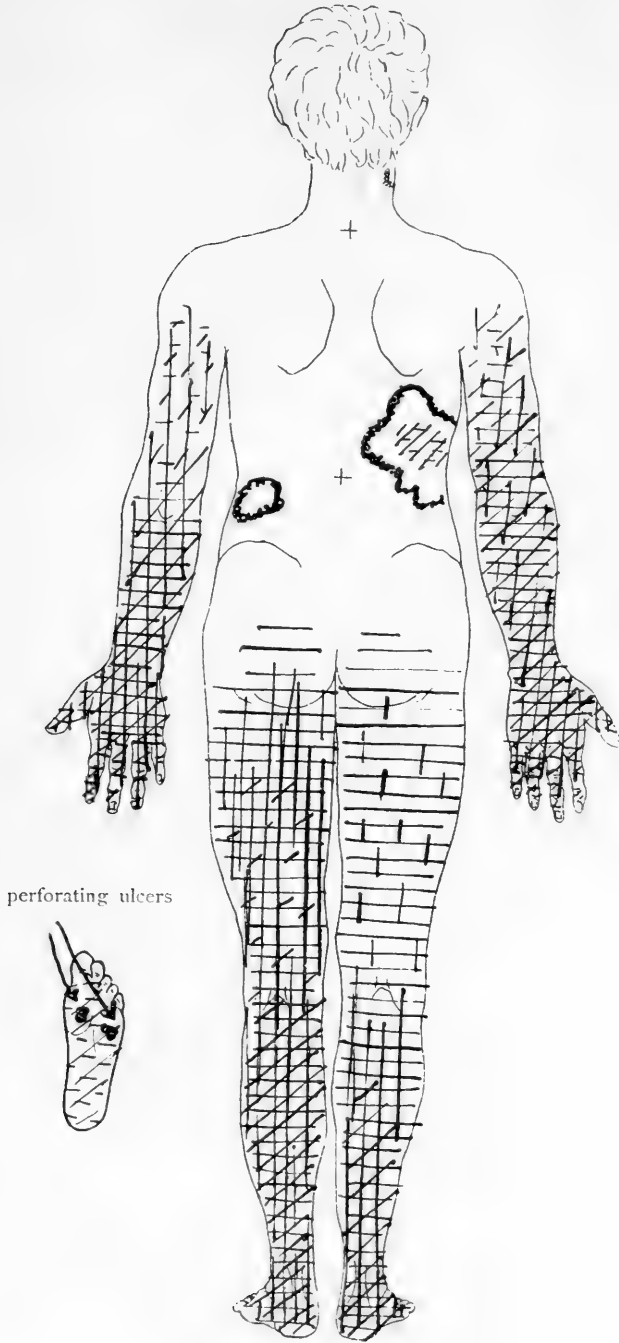


Fig. 23. (Case No. 7. K. V.)
(For further explanation see page 32.)

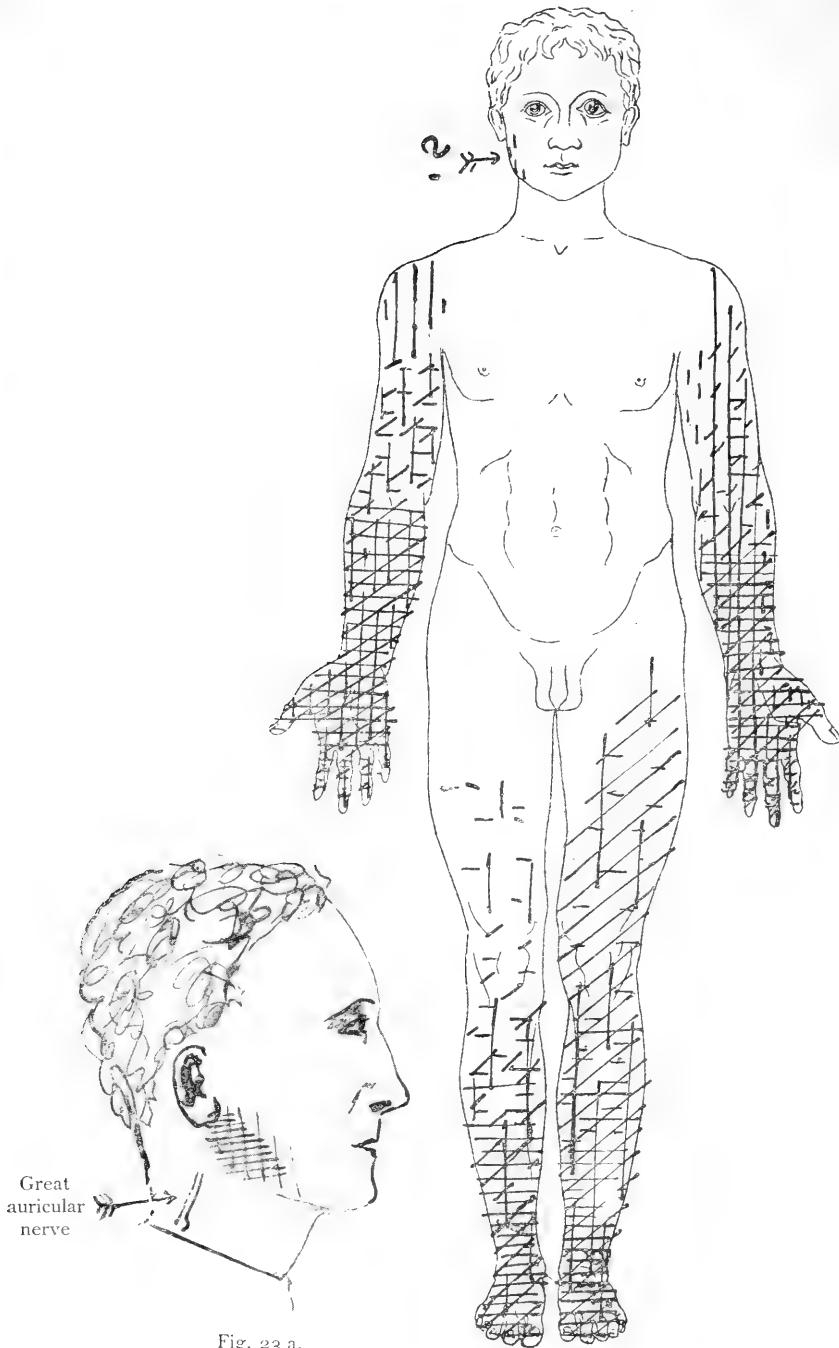


Fig. 23 a.

Fig. 23. (Case No. 35. M. M.)

(For further explanation see page 32--33.)

Tactile anaesthesia  Analgesia  Thermo-anaesthesia 

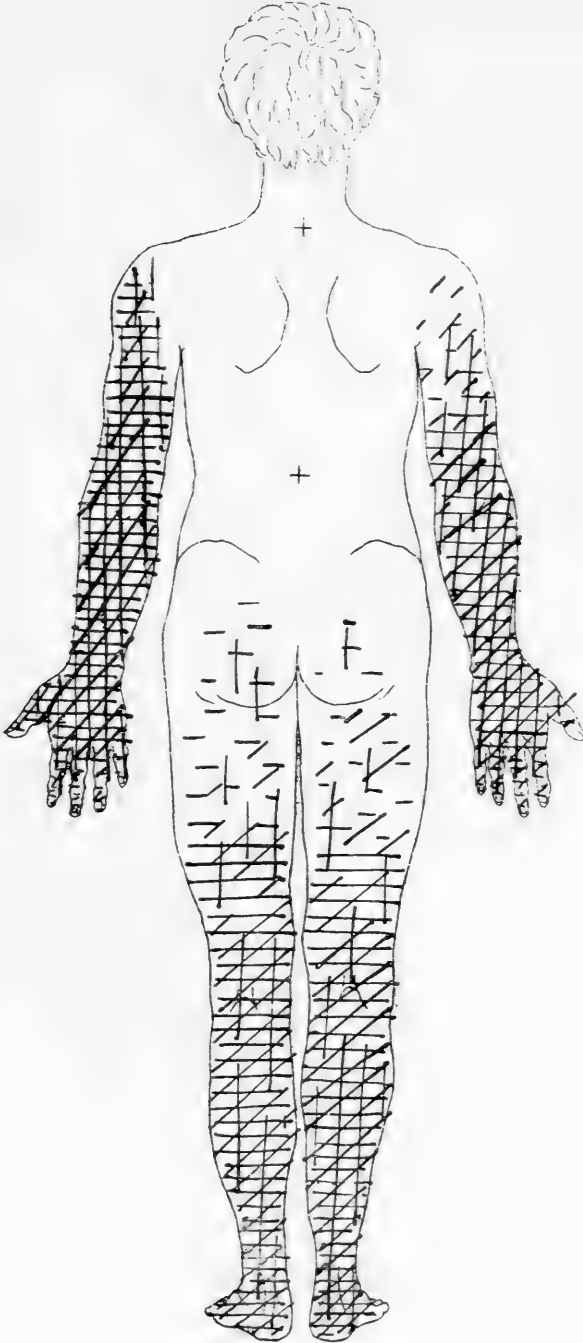


Fig. 24. (Case No. 35. M. M.)

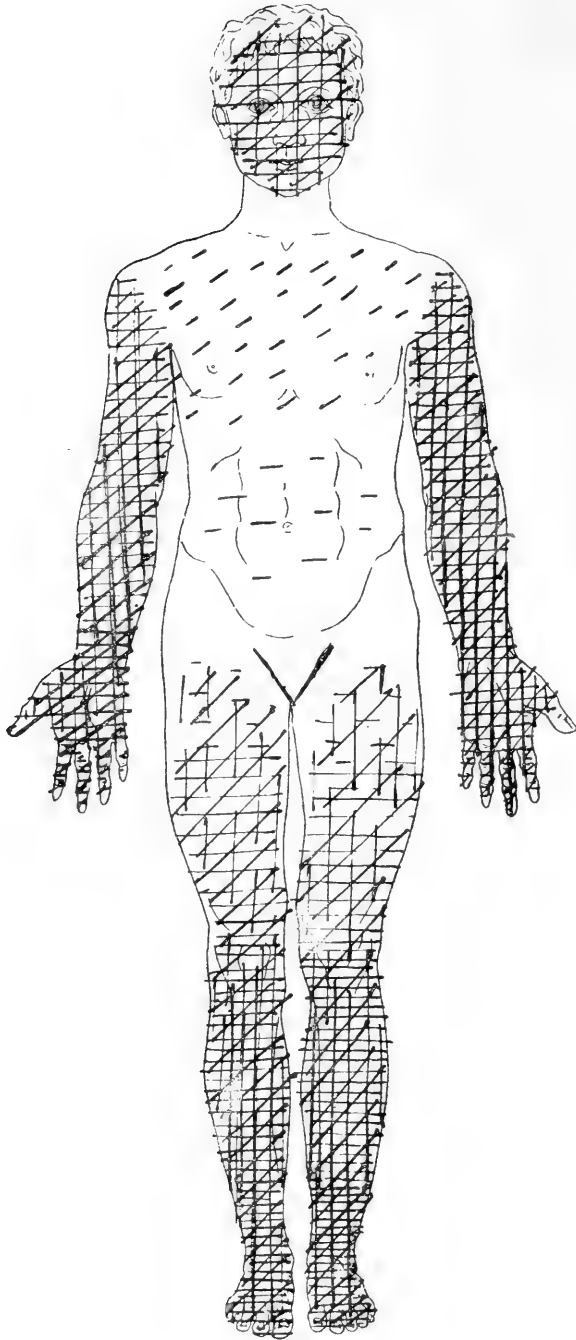


Fig. 25. (Case No. 58. J. A.)

(For further explanation see page 33.)

Tactile anaesthesia  Analgesia  Thermo-anaesthesia 

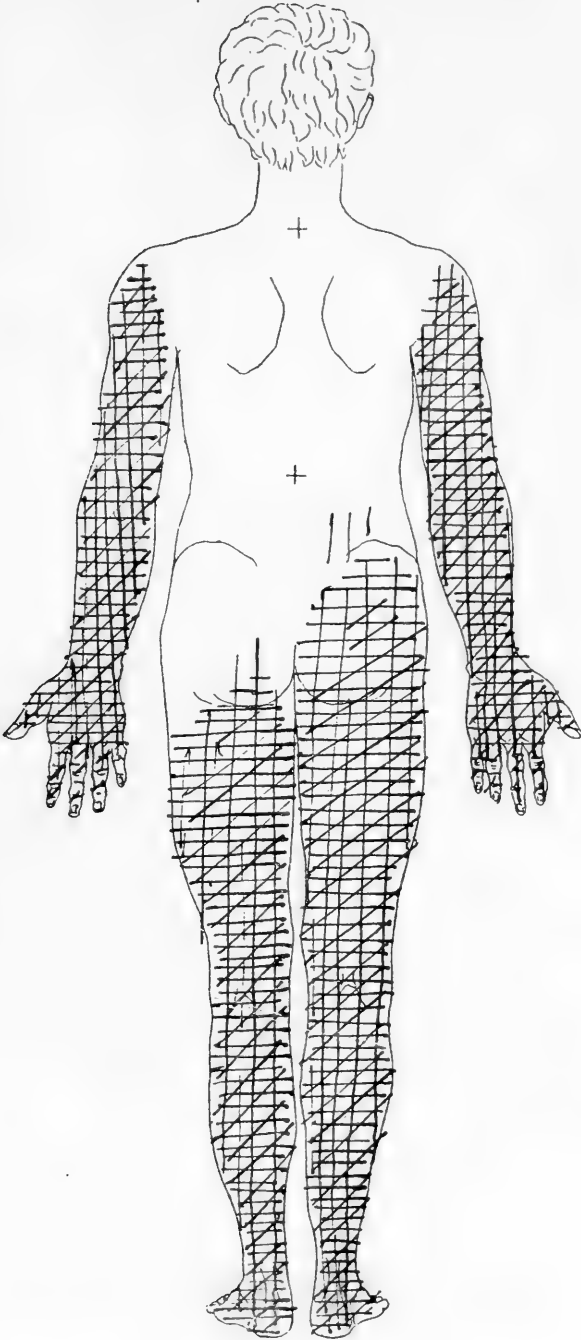


Fig. 26. (Case No. 58. J. A.)

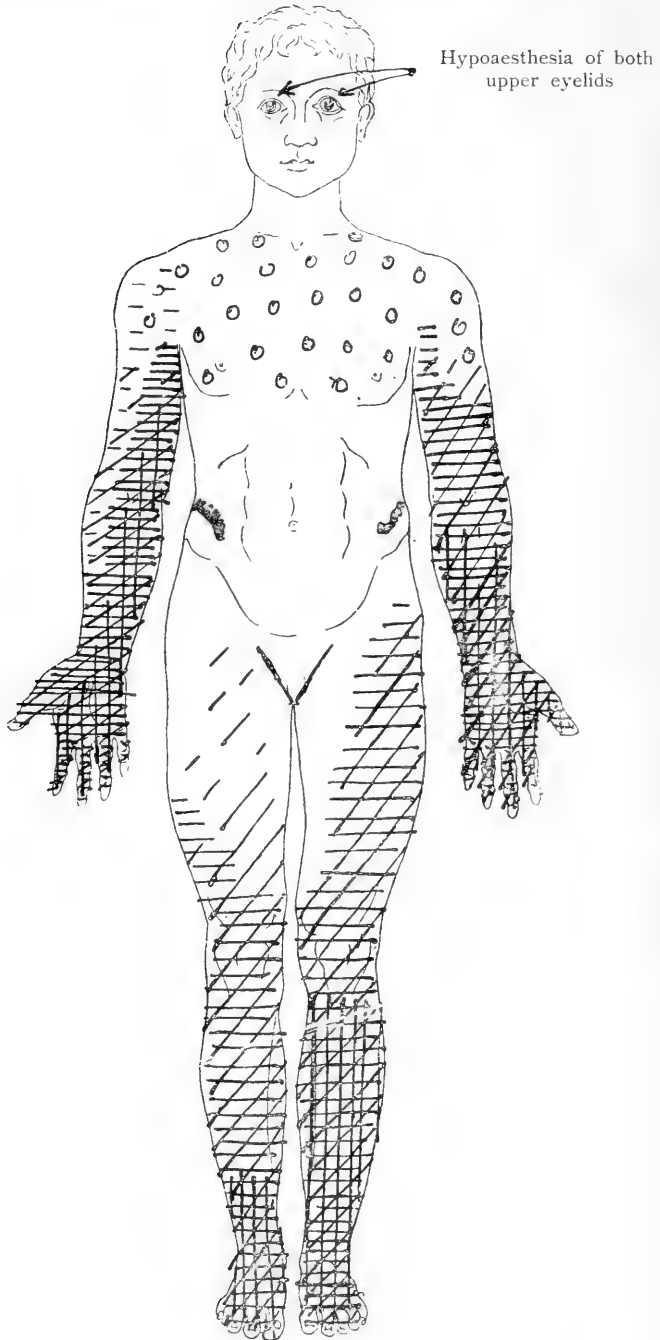











Fig. 27. (Case No. 59. K. B.)

Tactile anaesthesia  Analgesia  General thermo-anaesthesia 
 Special thermo-anaesthesia to warm stimuli only   
  

(For further explanation see page 33.)

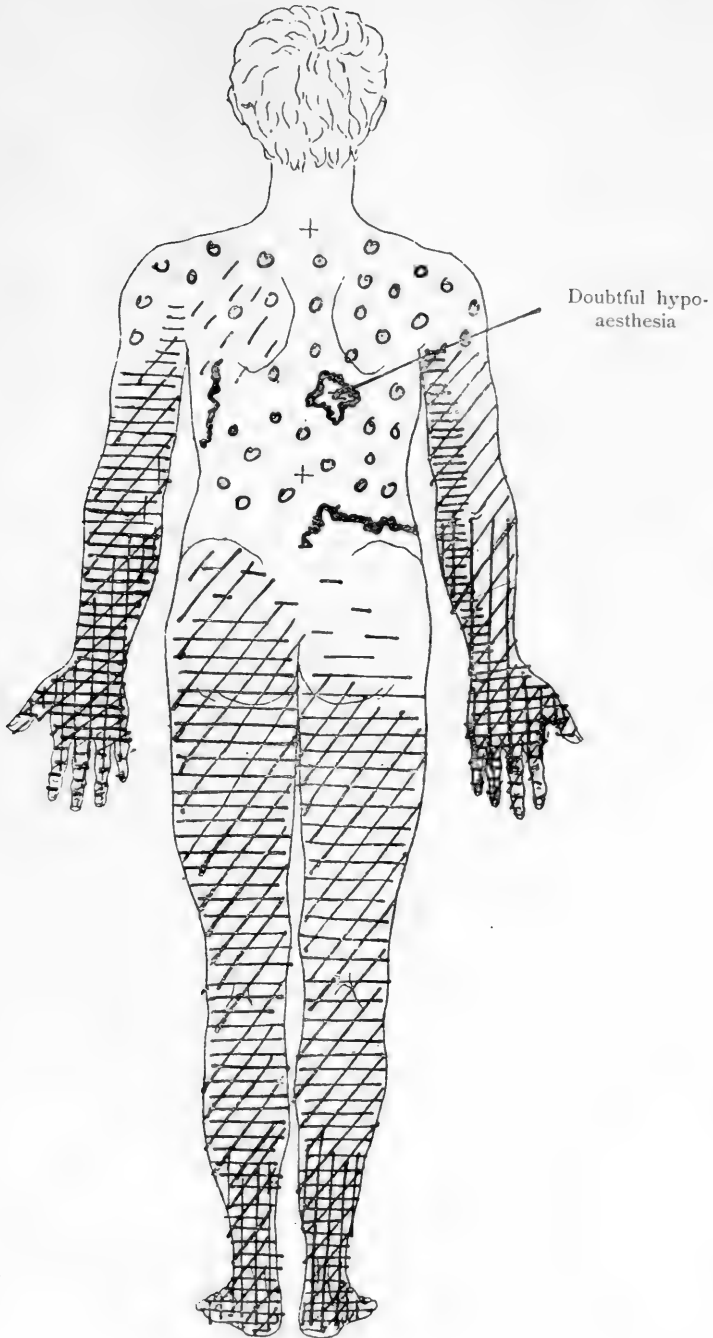


Fig. 28. (Case No. 59. K. B.)

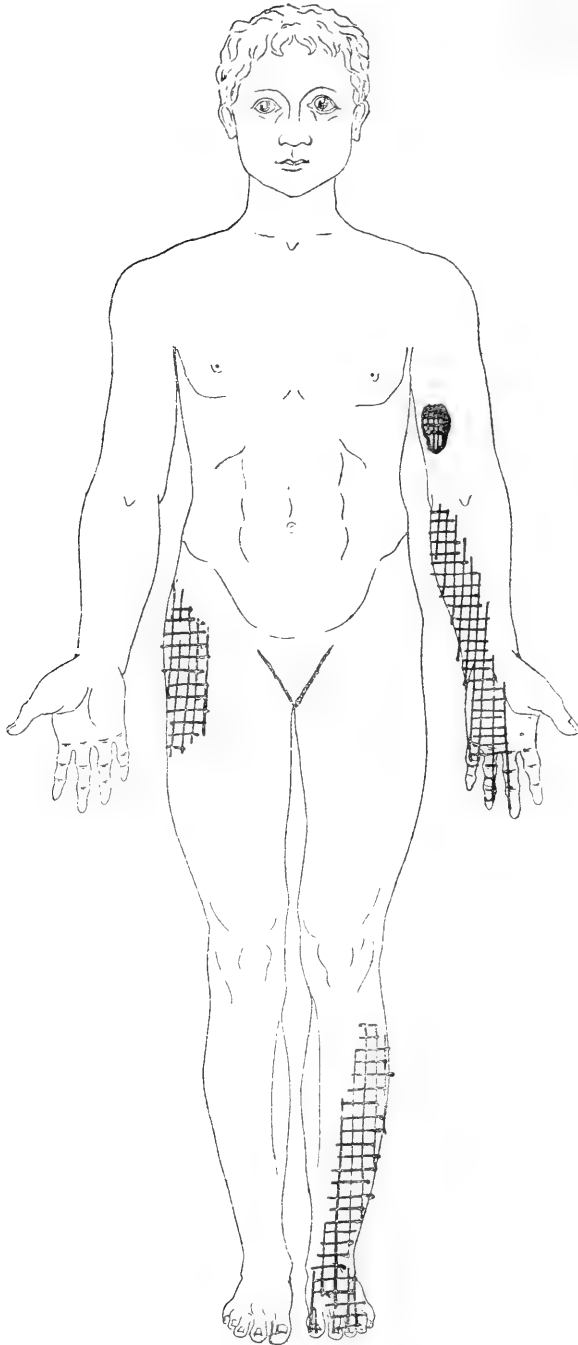


Fig. 29. (Case No. 60. L. S.)

All qualities of superficial sensation are equally affected.

(For further explanation see page 33.)

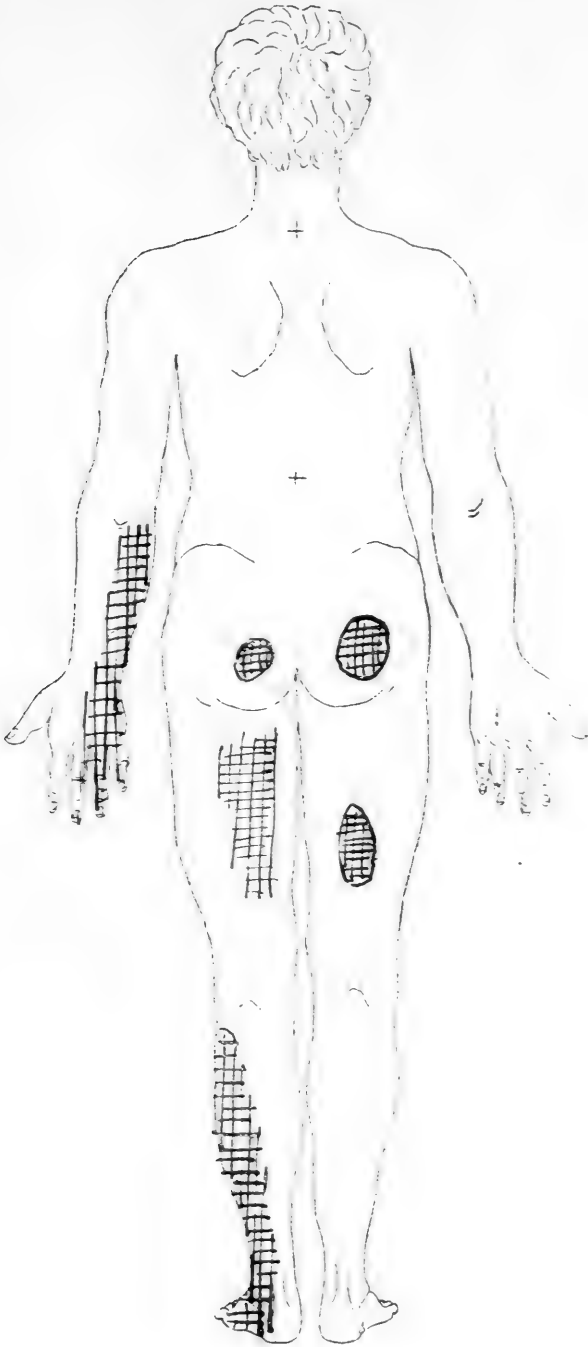


Fig. 30. (Case No. 60. L. S.)

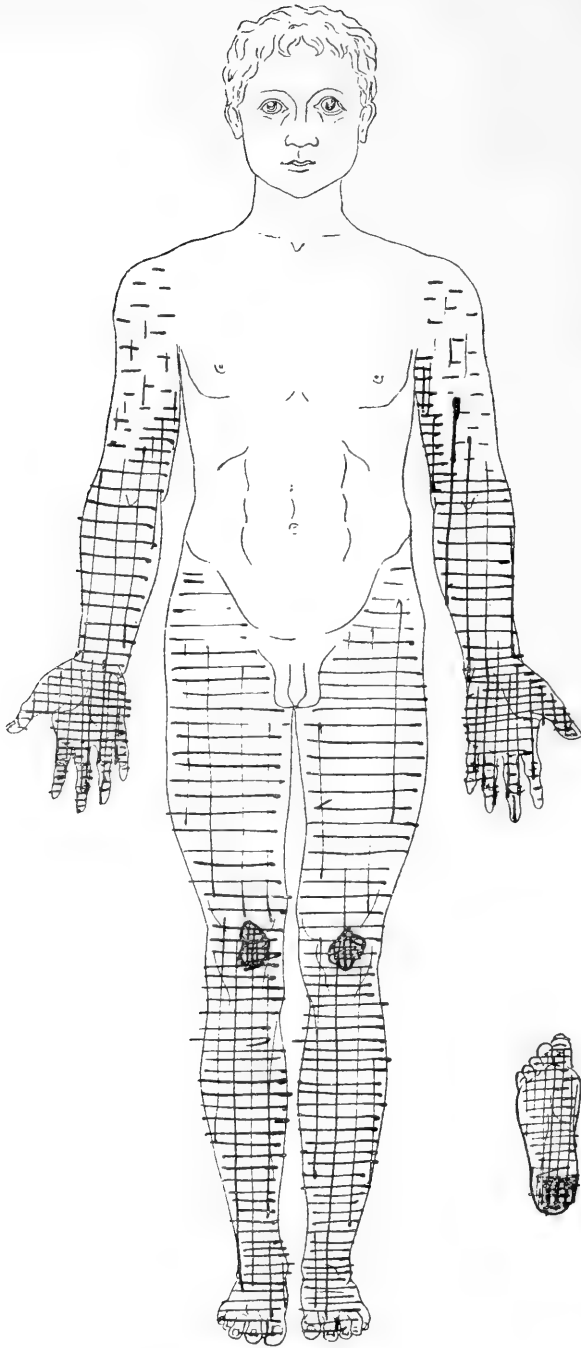


Fig. 31. (Case No. 61. O. R.)

All qualities of superficial sensation are affected to approximately the same extent.

(For further explanation see page 33.)

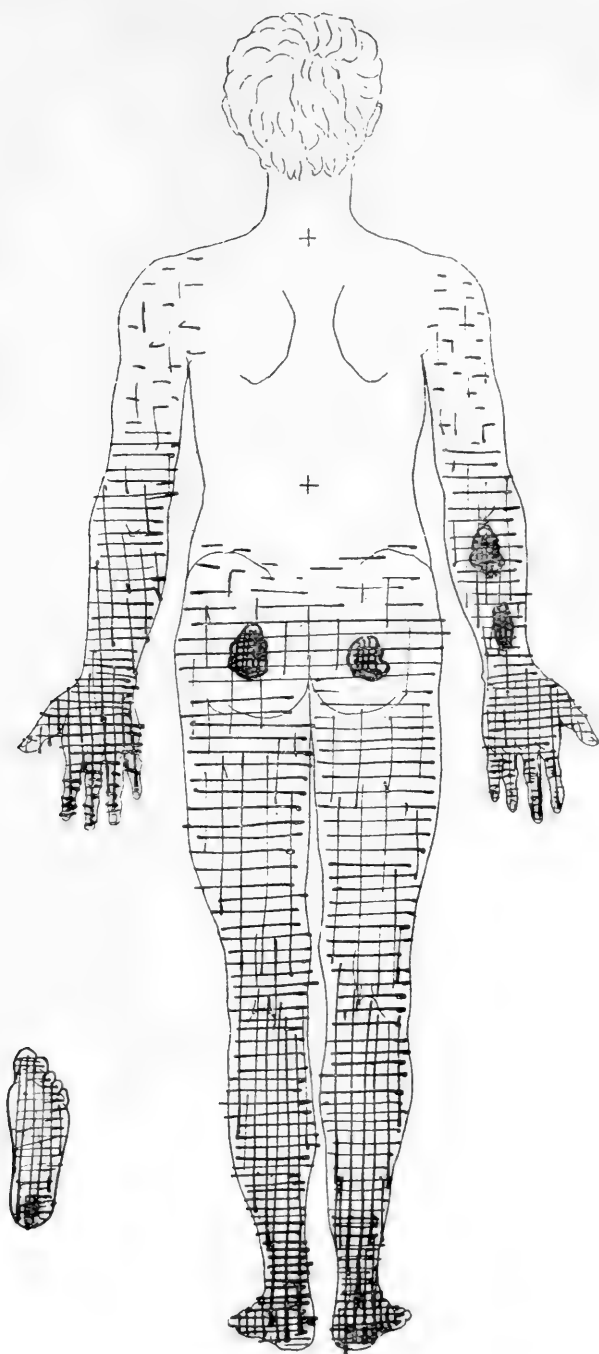


Fig. 32. (Case No. 61. O. R.)

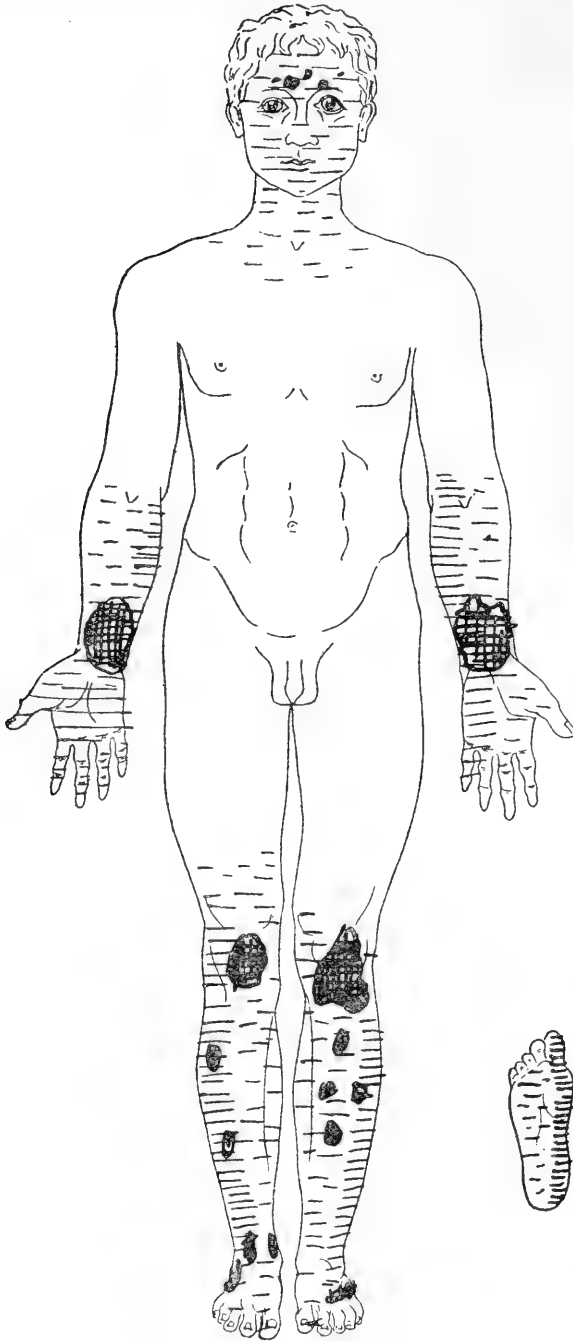


Fig. 33. (Case No. 62. T. E.)

The shaded area indicates a partially dissociated sensory loss, consisting of marked tactile anaesthesia and thermo-anaesthesia, accompanied by very slight superficial hypo-algesia.

(For further explanation see page 33.)

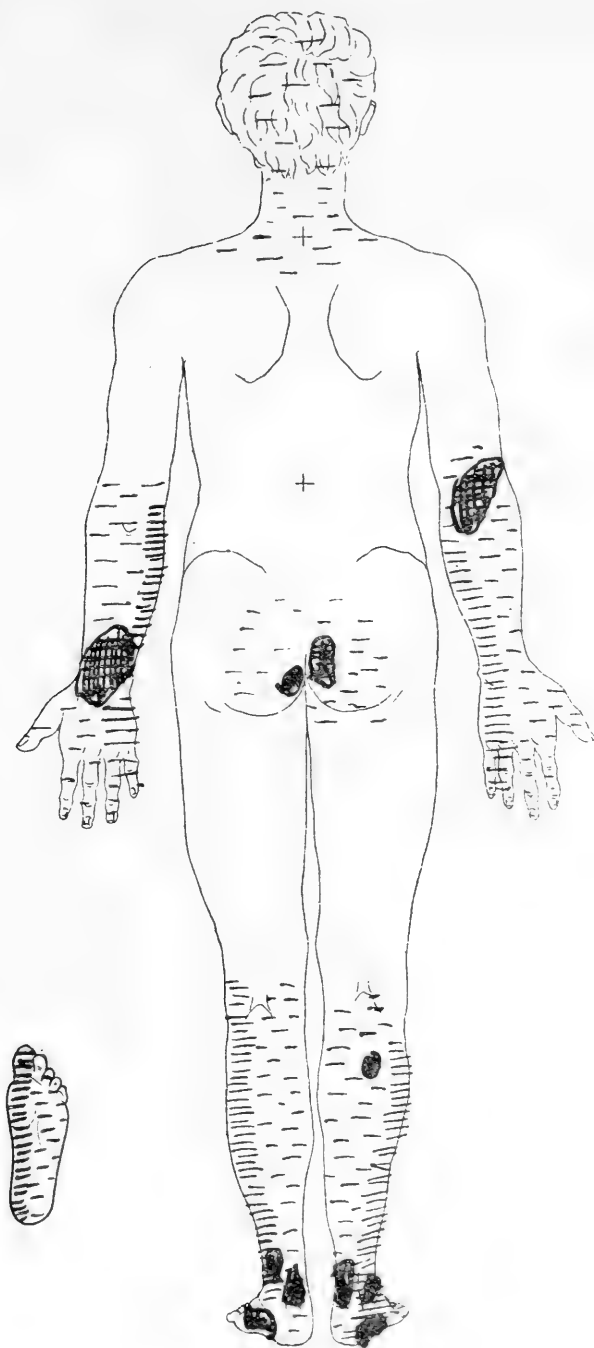


Fig. 34. (Case No. 62. T. E.)

The *deep sensation*, on the other hand, is surprisingly well preserved. In all kinds of polyneuritis we meet this dissociation between well marked superficial sensory loss and comparatively well preserved deep sensation; but I know of no other kind of polyneuritis where this is so constant, nor so pronounced. Not only is the sensation of *deep pressure* intact, but also the *joint sense* is extremely well preserved — even where there are severe mutilations. This explains the absence of ataxic phenomena, which has already been mentioned in the previous chapter. As regards the deep pressure pain we find also in leprosy sometimes the *hyperaesthesia to deep pressure* so often encountered in polyneuritis from other causes; but this is perhaps not so pronounced nor so common as in the alcoholic, and in the more acute infectious forms of polyneuritis.

As repeatedly mentioned, the nerves themselves will often be found thickened. This thickening may either be diffuse and even, or nodular. The thickened nerves are sometimes tender, and the palpation then gives rise to pain that will irradiate to the peripheral distribution of the nerve. This is chiefly found in the earlier stages. Later on the nerve trunks become hypoaesthetic or even completely analgetic.

The nerves that I have found most frequently thickened are the ulnar nerve, the great auricular nerve, the superficial peroneal nerve, and the supraorbital nerve.

In 40 cases LAEHR has found thickening of the

n. ulnaris	29	times
n. auricularis magnus	26	—
n. tibialis (behind the internal malleolus).	17	—
n. supraorbitalis	13	—
n. peroneus (behind the capitul. fibulae)	11	—
n. subcutaneus colli	10	—
n. tibialis (in the popliteal space)	4	—
n. medianus	4	—
n. radialis	2	—
n. cutaneus brachii internus.	2	—
n. saphenus major	1	—

(It is possibly due to my not having explored systematically the tibial nerve behind the international malleolus, but chiefly in the popliteal space, that I have not found it thickened so frequently as the peroneal and supra-orbital nerves.)

The ulnar nerve is — besides being the most frequently affected — the one that is most accessible to palpation. The observer should sit in front of the patient, and palpate with the hand which is diagonally opposite the arm whose ulnar nerve is to be examined. With the tips of the 2nd and 3rd fingers the nerve is pressed towards the epicondylus of the humerus. As the nerve finally slips lateralwards under the finger a fair impression of its thickness is obtained. The inexperienced must be warned that not every ulnar nerve easily felt is pathologically thickened. It requires

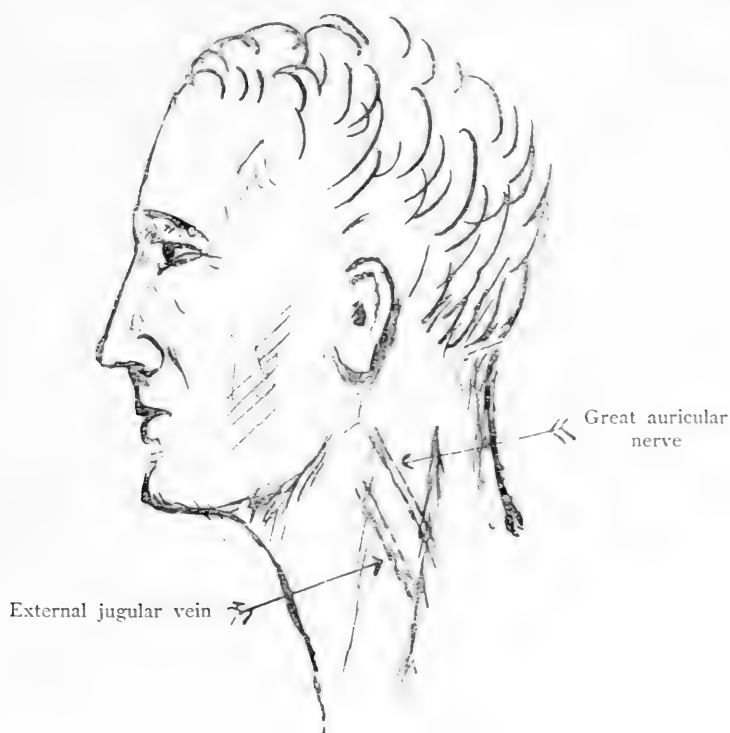


Fig. 35.

great experience in palpating the normal nerve to decide whether it is pathologically thickened or not. For purposes of comparison one cannot be too careful in always palpating in accurately the same way and in the same position.

The great auricular nerve may be easily felt where it passes across the sternomastoid muscle. One finds the nerve crossing this muscle at a distance of one to three centimeters behind the external jugular vein, and running roughly parallel to this vein. (Cpr. diagram fig. 35).

Where the external jugular vein is not visible, it can as a rule be made visible by slight pressure with the hand at the side of the neck. This will make the vein bulge and betray itself.

The supraorbital nerves (and the frontal nerves) are best palpated when the examiner stands behind the patient, who is sitting. Both hands can then be simultaneously employed in palpating the supraorbital edge and adjacent parts of orbita and the forehead — on both sides.

I have mentioned these technical points at the risk of appearing pedantic. Experience shows that proper attention to these elementary technicalities greatly influences the results of the examination.

While the motor disturbances are either stationary or slowly progressive, the sensory disturbances may vary in the same patient from time to time. Cases have been met with, where an extensive sensory loss has gradually diminished in the course of the disease. In one case the sensory loss nearly disappeared completely in the upper limbs, while the motor disturbances persisted unaltered. One must therefore be extremely careful in utilizing variations in the sensory findings as an indicator of the effect of treatment.

Reflexes.

There is not much to be said on this score. The plantar reflex is commonly abolished, due to the peripheral nerve lesion, which cuts off both afferent and efferent paths. Where it does exist, it is often difficult to judge whether it is normal or not, owing to the frequent deformities. Only in two cases have I found an inverted planter response.

The *deep reflexes* may be unequal on the two sides. Some of them may also be missing; but (when the Achilles tendon reflex is excepted) this is not common. As a rule they are surprisingly well preserved, even in cases where the superficial anaesthesia has reached the proximal parts of the limbs.

The comparative integrity of the deep reflexes will be easier to understand when one keeps in mind what has been said in the previous chapter about the integrity of the deep sensation.

The abdominal and cremasteric reflexes are as a rule not altered either.

Reflexes of spinal automatism I have never found, nor have I ever been able to elicit the so-called "supino-reflexes".

As an illustration I append the reflex findings in some of my cases. (The corresponding sensory charts are reproduced as illustrations to the previous chapter.

In the following, ++ signifies a reflex of average briskness, + a feeble reflex and +++ a very brisk reflex, o or ÷ absence of reflex, ↑ an extensor response and ↓ a flexor response.)

Case No. 1. P. S.

	right	=	left
Radial periost	+?		+?
Biceps	++		++
Triceps	++		++
Patellar	++		++
Achilles	÷		÷
Plantar	o		o
Abdominal	+?		+?

Case No. 2. I. H.

	right	=	left
Radial periost.....	÷		÷
Biceps	+		+
Triceps	?		?
Patellar	++		++
Achilles	÷		÷
Plantar	o		o
Abdominal	+		+

Case No. 3. J. O. B.

	right	>	left
Radial periost.....	++		+
Biceps	+		?
Triceps	?		?
Patellar	++		?
Achilles	— (Left limb amp. just		
Plantar	o below the knee)		
Abdominal	+	=	+

Case No. 4. K. P.

	right	=	left
Radial periost.....	÷		÷
Biceps	÷		+
Triceps	÷		÷
Patellar	?		?
Achilles	÷		÷
Plantar	?		?
Abdominal	++	=	++

Case No. 6. G. O.

	right	<	left
Radial periost.....	+?		+?
Biceps	++		++
Triceps	+		++
Patellar	++		++
Achilles	++	>	+
Plantar	↑?		↑?

Case No. 7. K. V.

	right	left
Radial periost.....	+++ =	+++
Radial pronator.....	++ =	++
Ulnar pronator.....	++ =	++
Biceps.....	+++ >	+
Triceps.....	++ =	++
Patellar.....	+++ =	+++
Achilles.....	÷	÷
Plantar.....	o	o
Abdominal.....	++ =	++

Case No. 35. M. M.

	right	left
Radial pronator.....	++ =	++
Ulnaris pronator.....	÷	÷
Radial periost.....	÷	÷
Biceps.....	+	= +
Triceps.....	+	= +
Patellar.....	++ =	+++
Achilles.....	+	= +
Plantar.....	↑ ?	= ↑ ?
Abdominal.....	+	≧ +

Case No. 58. J. A.

	right	left
Radial periost.....	÷	÷
Biceps.....	++	++
Triceps.....	?	÷
Patellar.....	+++ <	+++
Achilles.....	÷	÷
Plantar.....	o	o
Abdominal.....	+	+

Case No. 59. K. B.

	right	left
Radial pronator.....	+	÷
Biceps.....	++	+
Triceps.....	+ ?	?
Patellar.....	+	?
Achilles.....	÷	÷
Plantar.....	↑	Big toe amputated.
Abdominal.....	÷	÷

(pronounced obesitas with fat flabby abdominal wall)

Vasomotor, Secretary, and Trophic Disturbances.

These have been described so often and so well that I can be very brief in this chapter.

In hardly any other disease do we find trophic disturbances so frequently. They appear in a great many different forms. They are all considered to be of nervous origin — neurotrophic disturbances — although a more intimate knowledge of the pathogenesis is still lacking.

1. We find *vasomotor disturbances*, as in any other lesion of the peripheral motor neuron, e. g. poliomyelitis, — clinically betraying themselves by coldness and cyanosis of the affected parts — chiefly hands and feet.

2. *Anidrosis* is frequently seen in the anæsthetic areas; — this is perhaps not so noticeable in colder climates. The distribution of the anidrosis can always be determined by pilocarpine injections.

3. *Glossy skin* is frequently met with in the anæsthetic areas.

4. *Pigmentations and depigmentations* likewise.

5. Pemphigus eruptions are also met with.

6. Loss of hair — particularly of the supercilia and the cilia — is of frequent occurrence in leprosy. On the head, however, there is rarely any loss of hair.

7. *Ulcerations* — Perforating ulcers, absolutely identical with those observed in *tabes dorsalis*, are frequently seen in leprosy. They occur chiefly in the feet. They usually lead to necrosis of the underlying bone and do not heal till the necrotic bone has been extruded.

8. *Panaritias* of a peculiar kind are frequently seen in leprosy; they are as a rule accompanied by fever and may follow one after another. They also have a tendency to lead to necrosis of the underlying bone.

9. *Dry necrosis* of the distal parts of fingers and toes, leading, as do also the two previous disturbances, to *mutilations*.

10. The most characteristic trophic disturbance is however the *concentric atrophy* of the small bones of the fingers and toes without any lesion of the skin. This concentric atrophy consists in a gradual absorption of the bone, so that this steadily grows smaller (shorter as well as thinner), yet all the time keeping more or less its original shape. When this has affected all the phalanges of one finger; this latter still more or less retains its shape, but becomes undersized, so much so, in fact, that at first sight it looks like the finger of a small child, grafted on to the hand of an adult.

11. In a few cases the bones become decalcified and flexible — “osteomalazie lepreuse” (LELOIR). Personally I have never seen this.

12. Finally, neuro-pathic joint lesions are also found.

Characteristic of all these disturbances (with the exception of 4 and 5) is their being localised in the distal parts of the extremities — just as we have seen the more direct neurological manifestations of the leprosy neuritis to be.

This conformity as to localisation is one of the chief arguments in favour of their neuro-pathic origin. It has to be added that also the nasal bones are not infrequently the seat of trophic disturbances.

Muir mentions a case where the whole of the astragalus had disappeared. Otherwise it is chiefly the small bones that are affected by the trophic disturbances.

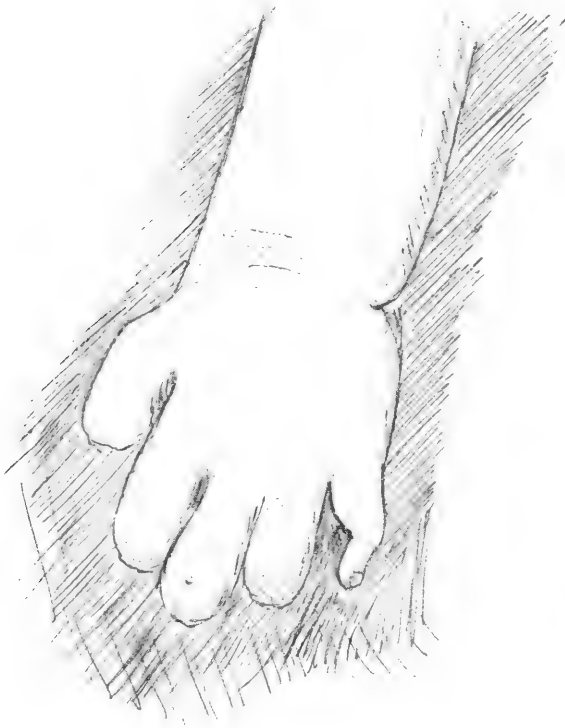


Fig. 36. (Case No. 4. K. P.) Dorsal aspect of left hand. Whilst the proximal parts of the other fingers as seen in the sketch are of normal size, the little finger has been enormously reduced in size as a result of concentric atrophy. It is surprising how well the skin adapts itself to the reduced size of the phalanges.



Fig. 37. (Case No. 41. B. K.) Volar aspect of left hand. Complete atrophy of thenar and hypotenar. 2nd—5th finger mutilated — 2nd finger still carries a rudiment of a nail.

The more profound of these trophic disturbances lead to extensive deformities and mutilations of hands and feet and — in connection with the muscular atrophy and paralysis — give rise to a very characteristic appearance of the patients' hands and feet. (Cpr. Figs. 36—39.)

Besides the *localisation of the most distal parts of the limbs* already mentioned, the most characteristic feature of the leprous mutilations is perhaps the fact, already pointed out by Poxcer, that the *nails* in leprosy have a great tendency to remain. Thus are frequently seen the most deformed little rudiments of fingers adorned with nails or remnants of such.

13. Also the nails, however, frequently show trophic disturbances of various kinds; in some cases they may show considerable thickening; in others they are diminished in size; in others again they are continually cracking up and breaking off.

As regards the pathogenesis of these trophic disturbances opinion is divided. Some hold them to be the outcome of central lesions — others regard them as the result of the polyneuritic changes.

Personally I am most inclined to adopt the latter view, although I



Fig. 38. (Case No. 44. A. A.) Left foot. The metatarsal bones have practically disappeared. The big toe is inserted more proximally than the others. — A perforating ulcer is found in the planta pedis.



Fig. 39. (Case No. 44. A. A.) Volar aspect of right hand. Excessive atrophy of thenar and anti-thenar. The index finger mutilated.

cannot agree with HARBITZ, when he, also defending this view, says that loss of joint sense is of prime pathogenic importance for these lesions. Clinical examinations show that this loss of joint sense does not exist in the majority of cases, and it has been pointed out in a previous chapter that even profoundly mutilated stumps of fingers are as a rule moved with a surprisingly good coordination, which would be impossible if the joint sense was not intact or nearly so.

What, in my opinion, is the chief point in favour of the assumption of a neuritic origin of these trophic disturbances is their localisation. They are, as we have seen, practically confined to the most distal parts of the limbs.

Mental Changes.

It goes without saying that in the course of a disease of such a chronic character as leprosy mental disturbances will be seen now and again. But the majority of these have probably no direct causal connection with leprosy — and in practically all those cases, where a connection must be admitted, the mental condition is only indirectly the result of the disease.

It stands to reason, that the knowledge of the nature of the disease and the hopeless prognosis are both apt to produce a state of *depression* in the patients. This may, when it is not excessive, be said to constitute a normal mental reaction. But it may become so excessive that it must be described as morbid. According to DE BEURMANN there is a marked difference in this respect between European and Asiatic patients. While the former are very apt to show the secondary depression just described, the Asiatic patients as a rule show a remarkable indifference and remain quite gay (cpr. DE BEURMANN & GOUGEROT, "Les troubles mentaux dans la Lèpre, — des troubles psychiques des Lépreux", II. Leprakonferenz in Bergen 1909, III. Band, pag. 181).

It is equally obvious that the precautions that the community is forced to take in the fight against the disease, are apt to influence the mentality of the patients. The transport of the patients to a leprosy hospital far away from their homes, is not only apt to add to the depression just mentioned (one often hears the most touching expressions of a nostalgia which may last for years) — but in predisposed patients this transport may be the starting point of *persecutory delusions*.

It is therefore not surprising that cases of paranoia and paranoid states are occasionally met with in a leprosy hospital.

The only mental disturbance that can possibly have a direct connection with leprosy is the KORSAKOFF-syndrom, which has been described by DE BEURMANN, ROUBINOWITCH and GOUGEROT (Les troubles mentaux de la Lèpre, Lepra Bibl. intern. 1906, vol. 6, fasc. 2, p. 107). It seems, however, to be of extremely rare occurrence. If one compares this, however, with W. HARRIS' description of KORSAKOFF-syndrom in polyneuritis of non-alcoholic origin (cpr. Proceedings of Royal Society of Medicine, neurological section 1922) one is forced to admit that the KORSAKOFF-syndrom may be found in any condition of polyneuritis, frequent in the alcoholic cases — extremely rare in the cases of leprosy. Any diagnostic help cannot be derived from the mental examination in leprosy.

Summary of Clinical Findings.

What I have described in the previous chapters are those neurological disturbances which I regard as really due to leprosy.

It goes without saying that in the course of an illness which may last for 60 years or more, all kinds of complications may occur, also nervous

disturbances. Thus one has repeatedly seen common pathological conditions such as paralysis agitans and hemiplegia of vascular origin in leprosy patients. I mention this chiefly in order to point out that one must not regard every neurological manifestation observed in a leprosy patient as due to leprosy. The distinction may be very difficult, as already pointed out in a previous chapter, when speaking of radial paralysis.

Everything considered, I think we may be justified in saying that the clinical picture of leprosy in neurological respect is entirely due to *polyneuritis*. The central lesions, of which the ones of the posterior columns of the cord are the most constant, give such surprisingly little, if any, clinical evidence, that the clinical findings might be said to be in favour of MARIE and JEANSELME's view, viz. that the cord degeneration only comprises endogenous (myelo-myelitic) fibres.

If signs of central lesions are thus usually wanting, there are, on the other hand, a number of facts that point not only to a peripheral but to a *very* peripheral localisation. It may in fact be said that it is the most peripheral of the leprosy lesions that stamp the clinical picture.

First and foremost the peculiar facial paralysis. The complete atonia in combination with the irregular affection of individual muscles can, in my opinion, only be explained by the assumption that the lesions are situated in the peripheral branches of the facial nerve.

The almost entire absence of a motor trigeminal paralysis is also a point in favour of a very peripheral localisation of the lesion.

On the whole, my observations have led me to conclusions which are very different from NONNE's. This author regards the clinical picture of leprosy as a mixture of symptoms and signs of peripheral and central origin — and regards the facial paralysis as entirely due to central lesions.

As regards the "anæsthésie rubanée" described by French authors, I do not believe this to be a true segmental distribution. It never extends to the corresponding parts of the trunk — and is easily explained as due to a predominant affection of the ulnar and the internal cutaneous nerves of the arm and forearm.

True, I have found the plantar reflex inverted in two cases; but I have no definite indication that the supposed pyramidal lesion is due to leprosy (cpr. above). Besides, in a disease where the small muscles of the feet are affected to such an extent as they are in leprosy, the inversion of the plantar reflex is not a reliable sign of pyramidal involvement, as I have shown with my assistant Dr. LOSSIUS (cpr. MONRAD-KROHN and LOSSIUS: "Inversion of the plantar reflex due to lesions of peripheral neurons" — Norsk magazin for lægevidenskab 1921, p. 11).

As regards the trophic disturbances, I have already advanced my opinion in the previous chapter.

On the whole, I think we can safely abide by the classical opinion that the nervous manifestations of leprosy are due to a polyneuritis — and, we may add, a polyneuritis of the most peripheral kind.

As regards the progression of this neuritis, the clinical facts are all in favour of the ascending nature of this polyneuritis; but, if the distribution of the cutaneous lesions be compared with the extension of the polyneuritic manifestation, it will be seen that the peripheral nerves cannot always have been attacked by a process ascending from a cutaneous lesion (as supposed in DEHIO's diagram). The cutaneous lesions would have to be much more numerous and extensive to allow of such an explanation.

The nerves are therefore no doubt often infected from the bloodstream (metastatic or haematogenous infection). But once the nerve has been attacked, the bacilli and their products are probably carried in a central direction, causing an ascending neuritis of metastatic origin.

Thus one might suppose two kinds of ascending neuritis;

- ascending neuritis of metastatic origin, and
- ascending neuritis of cutaneous origin (as in DEHIO's diagram).

These reflexions based on clinical facts seem to harmonise with the anatomical findings, which cannot, however, be discussed here.

4. Diagnosis.

It has to be admitted, perhaps, that in most cases the cutaneous manifestations are of the greater importance for the diagnosis. Yet the neurological findings very often furnish a necessary support for the diagnosis. One might very aptly say that the diagnosis of leprosy rests with one leg on the dermatological findings and the other on the neurological findings. It not infrequently happens that one has to rely on the neurological findings alone. It is still very doubtful whether cases of leprosy exist where nerve lesions develop without there ever having been any cutaneous manifestations. Men with such great experience as DANIELSEN, ARMAUER HANSEN and LOOFT deny the existence of such cases. Yet the cutaneous manifestations may be very slight. And typical cutaneous manifestations may be altogether absent at the time of examination.

Even an attempt at finding the bacilli may fail; particularly when no typical skin lesion can guide one in the excision of a suitable piece of skin. And it is a well-known fact that in the maculo-anaesthetic variety of the disease the bacilli are often so scanty that it is a matter of the greatest difficulty — and of the greatest patience — to find them.

Thus in a number of cases the diagnosis rests entirely on the neurological findings. The neurological differential diagnosis then becomes extremely important. It is this purely *neurological* differential diagnosis which is dealt with in the following lines.

The most difficult point in the differential diagnosis is commonly supposed to be the distinction between leprosy and *syringomyelia*. It may at once be admitted that cases may be found where the neurological findings are such that the differential diagnosis cannot be made, but has to be left in suspenso. But such cases are not frequent. Quite apart from the fact that cutaneous manifestations will in the majority of cases settle the diagnosis, it will be found that a *thorough* neurological examination elicits one or more signs that decide the diagnosis conclusively.

First and foremost it has to be kept in mind that whilst syringomyelia is due to gliosis of the grey matter of the spinal cord (with secondary cavity formation — “syrinx”), the neurological manifestations of leprosy are, as we have seen, practically entirely due to a peripheral polyneuritis — and that a very peripheral one. This gives the key to the understanding of the whole distinction, the more important points of which will now be mentioned.

As regards the *cranial nerves*, it has to be remembered that pronounced bulbar phenomena, i. e. disturbances in the functions of the last 4 cranial nerves, evidenced chiefly by dysarthria and dysphagia (particularly the former), are comparatively common in syringomyelia (due to the fact that the original gliosis is often continued upwards into the medulla oblongata — “syringobulbia”). I have seen a unilateral lingual paralysis with pronounced hemiatrophy in a number of cases of syringomyelia, but only in three cases of leprosy, and in these the paresis as well as the atrophy was very slight. A cervical sympathetic syndrome (miosis, pseudoptosis, enophthalmus) is often seen in syringomyelia (due to a lesion of the anterior grey horn in the cervico-dorsal region of the spinal cord). In leprosy the above is practically never found. When dysarthria occurs, it is as a rule but little pronounced, and is confined to difficulty in pronouncing the labial sounds, due to facial paralysis (cf. page 26). — On the other hand, facial paralysis of the peculiar character which has been described in a previous chapter, is never seen in syringomyelia. When facial paralysis occurs in this disease it is, as a rule, one-sided and chiefly confined to the lower part of the face. It will be remembered that the facial paralysis in leprosy is chiefly pronounced in the upper part of the face, and that it is here bilateral and fairly symmetrical, whilst the accompanying affection of individual muscles of the lower part of the face is as a rule less symmetrical.

As regards the *motor disturbances*, these may be absolutely identical in the upper limbs, consisting of paresis and atrophy of the intrinsic muscles of the hands, accompanied by a more or less pronounced hypotonic paresis and atrophy of the antibrachia and arms. As regards the lower limbs, however, there is a considerable difference. In the syringomyelia the feet are rarely (if ever) the seat of the same atrophy as the hands. In this disease the lower limbs, when affected, as a rule show characteristic signs of a central lesion (“spastic paresis”) with typical reflex changes, chief

amongst which is the inversion of the plantar reflex à la BABINSKI. In leprosy the feet are as a rule affected in exactly the same way as the hands, while the plantar reflexes are most frequently lost.

The *coordination* is in leprosy always surprisingly good, and ataxic manifestations are as a rule missing, while in syringomyelia ataxia is not at all rare and may even be very pronounced. —

As far as the *sensory disturbances* are concerned, one has to consider

1. differences as regards the *distribution*, and
2. — — — — — the *character* of the sensory loss.

1. As regards the former, the distribution in syringomyelia is a segmentary one, i. e. the distribution is limited to the cutaneous fields which correspond to the spinal segments affected.

In leprosy, as in any other form of polyneuritis, the sensory loss is found most pronounced in the distal parts of all four extremities, grading off successively towards the proximal parts of the limbs. In some cases the sensory loss may be more strongly pronounced in the area of certain nerves. When this is the case in the area of the ulnar and the medial cutaneous nerves of the arm and forearm, it may give a false impression of segmentary distribution; but this is rare and, as a rule, the differential diagnosis can then be made from other evidence.

2. The character of the sensory loss does not furnish any such reliable point of distinction. In syringomyelia one frequently meets with the so-called classical form of sensory dissociation, which consists in sensory loss to stimuli of pain (pin prick), heat and cold, while the tactile sensation remains intact. This is due to the fact that in some individuals the majority of the fibres conducting tactile sensation, on entering the spinal cord from the posterior roots, go straight into the posterior columns, thus escaping the syringomyelitic lesion of the grey substance, which, situated in the posterior grey horn, will cause a unilateral loss of sensation to pain and temperature in the corresponding cutaneous fields — when situated in the commissura will cause a bilateral loss of sensation to pain and temperature of similar segmental distribution, due to a lesion of the crossing fibres, which conduct impressions of temperature and pain. There are, however, as far as we can judge from the facts before us, considerable individual differences in the arrangement of the conduction of the tactile sensation. In some individuals the fibres for tactile sensation partly go with the fibres conducting temperature and pain sensation. In these cases the above dissociation will obviously not be complete.

Therefore, whilst a complete dissociation in the classical sense of the word (cpr. above) practically furnishes conclusive evidence of a lesion in the grey substance of the cord — an incomplete dissociation may be found in syringomyelia as well as in leprosy. All one can say is that the more marked the dissociation, the less likelihood of leprosy, and vice versa.

The preceding only refers to the "classical" dissociation. As already mentioned there are many other forms — and particularly one of them, viz. a marked dissociation between the sensation to heat and to cold, is in my opinion more an indication of a very peripheral, than of a spinal lesion¹. It is quite peripheral in the skin that we have the apparatus for the sensation of heat, and that for the sensation of cold, distinctly separated in form of "heat spots" and "cold spots" with distinctly different localisation. Obviously then we have here favourable conditions for the production of a dissociation between sensation to heat and cold.

The palpable thickening of several nerves is an important point in favour of the diagnosis of leprosy (in early stages accompanied by considerable tenderness — in advanced cases by analgesia to pressure).

The function of the *bladder* and *rectum* is more frequently disturbed in syringomyelia than in leprosy; — though disturbances of this kind are not frequent in either.

Finally, it has to be remembered that a leprosy patient may develop syringomyelia, while, on the other hand, syringomyelia naturally does not render the patient immune to leprosy.

A circumscribed *medullary or an extramedullary lesion* (e. g. *pachymeningitis*) in the cervico-dorsal region of the cord may cause the same disturbance of the upper limbs as leprosy, but the lower limbs will also here exhibit spastic phenomena.

From *myopathy* and from *progressive spinal muscular atrophy* the distinction is a rule easy, because in neither of these conditions does any sensory loss ever obtain, while sensory loss in one form or other is, as we have seen, a fairly constant accompaniment of leprosy. In myopathy also the distribution of the muscular atrophy is different from that of leprosy, affecting the proximal parts of the limbs first. Only as regards the face, the distribution may be said to coincide to a certain extent; but never in myopathy have I seen that peculiar facial disturbance which in a previous chapter I have described as typical of leprosy.

In spinal muscular atrophy the lower limbs are, as a rule, not so profoundly affected as the upper limbs. When the lower limbs are found affected in that disease, they may be affected in the same way as the upper limbs, but more commonly there are distinct signs of a pyramidal lesion (viz. inversion of the plantar reflexes and exaggeration of the deep reflexes), in other words elements of an *amyotrophic lateral sclerosis* more or less pronounced. The examination of the lower limbs will therefore offer a great help in the differential diagnosis. In leprosy they are affected in the same way as the upper limbs — there is a marked atrophy of the

¹ This was suggested by LEEGAARD in 1892 for all dissociations.

small muscles of the feet and, as a rule, a complete absence of spastic phenomena. When the degenerative process of the spinal muscular atrophy extends to the motor cranial nuclei, in other words, when there is a *progressive bulbar paralysis*, the disturbance generally affects the tongue before the face. The dysarthria is generally very pronounced, and the early deficiency of the lingual sounds is generally a marked feature, whilst in leprosy dysarthria is, as a rule, never very marked, and practically always confined to the labial sounds, as we have already seen. When in bulbar paralysis the face is affected, the upper portion of the face commonly remains intact, whilst in leprosy it is the chief seat of motor deficiency. The chief point of distinction from all these conditions of progressive degeneration of the motor system (progressive spinal muscular atrophy, amyotrophic lateral sclerosis, progressive bulbar paralysis, progressive ophthalmoplegia), is however furnished by the sensory examination. In all these conditions there is never any sensory loss, and, as we have seen, this is a common and characteristic feature of leprosy.

The distinction between leprosy and the *peroneal or progressive neuritic muscular atrophy* (CHARCOT, MARIE, TOOTH) may perhaps be more difficult. Here all four limbs are affected in the same way by atrophy and paresis of the distal parts. There may even be slight sensory disturbances corresponding to the atrophic parts (below the knees and elbows); but these sensory disturbances are never so pronounced as in leprosy. The facial muscles escape in this disease.

Myasthenia gravis, which may occasionally simulate the most varied conditions, will easily be distinguished by its great diurnal variations.

A *cervical rib*, by causing a *lower brachial plexus lesion*, may sometimes give rise to disturbances in the upper limb which may resemble those found in leprosy. One generally finds atrophy of the intrinsic muscles of the hand and sensory loss along the ulnar border of hand and forearm. It has to be kept in mind that the symptoms of cervical rib may arise at any age. As a rule they begin when the patient has taken up some new occupation necessitating the carrying of heavy weights (e. g. buckets of water), this function pressing the lower fibres of the brachial plexus against the cervical rib. Sometimes also a cervical sympathetic syndrome (miosis, enophthalmus, pseudoptosis) occurs, and this forms then an important point of distinction from leprosy. Another point of distinction is that the condition is confined to one upper limb, while leprosy generally attacks the distal parts of all 4 limbs. An X-ray picture will decide the question of cervical rib.

The thickening of the nerves is a finding which also helps in distinguishing leprosy from all the above-mentioned conditions.

The most difficult distinction is probably that of leprosy from *polyneuritis* due to other causes. What makes this very difficult is that thick-

ening of the nerves has been observed also in other forms of polyneuritis. Thus it has been found by BRUUSGAARD and others in syphilitic neuritis. Yet it is not at all a frequent occurrence in other forms of neuritis, and we may regard thickening of the nerves as an important, if not infallible, indication of leprosy. The peculiar facial affection is another characteristic of leprosy. True, the face may be affected in other kinds of polyneuritis, as, e. g. in *beri-beri*; but in the latter disease the frequent affection of the pneumogastric, the cardiac phenomena, above all the oedemata and the whole course of the disease, make the distinction easy, quite apart from the fact that the facial paresis never quite adopts the peculiar appearance of that in leprosy. The most difficult form of neuritis to distinguish from leprosy is probably the syphilitic. The likeness which may sometimes exist between the cutaneous manifestation of syphilis and leprosy enhances the difficulty. (Even DANIELSEN confesses to having been unable to make the differential diagnosis between syphilis and leprosy.) The chief points of distinction are the following. The syphilitic polyneuritis generally shows a much quicker development, it has perhaps a greater tendency to affect the deep sensation thus causing ataxia, it is more often accompanied by oculomotor and abducens paralysis (due in some cases to a meningitis at the base of the brain), but is never accompanied by the facial paralysis which is so characteristic of leprosy. The *hypertrophic interstitial* neuritis (DÉJÉRINE) may present points of likeness to the neuritis of leprosy, in as much as the nerves may show considerable thickening and may be distinctly palpable as in leprosy. There are however several points of distinction: loss of joint sense and ataxic phenomena, and also loss of deep reflexes are frequent in this disease, but, as we have seen, comparatively rare in leprosy. To sum up, one may say that in no other form of neuritis are the deep reflexes and the deep sensation so well preserved as in leprosy — and, on the other hand, no other form of neuritis has the same tendency to involve the face as leprosy. On the whole I feel inclined to regard the peculiar facial paralysis in leprosy as one of the most characteristic manifestations of the disease. It cannot therefore be emphasized sufficiently how important the careful examination of all the facial muscles is.

Finally must be mentioned the diagnostic importance of the trophic disturbances. In other forms of polineuritis pronounced trophic disturbances like those found in leprosy are never seen.

In syringomyelia and tabes one meets with neurotrophic osteopathic and arthropathic disturbances which often affect bones and joints (e. g. elbow-joint and knee-joint) which are practically never affected in leprosy. The characteristic confinement to the most distal parts of the limbs, the peculiar concentric atrophy, and the curious tenacity of the nails even in the most extensively mutilated fingers and toes, are the most valuable points for the diagnosis.

Yet it cannot be emphasized enough that one must not put too much confidence in one single symptom or sign — modern medicine does not believe in the old pathognomonic signs, and rightly so. It is only the *combination* of the different symptoms and signs to a certain clinical picture that can be called pathognomonic. All the same, when one speaks of characteristic features of an illness, I think that the most characteristic findings in leprosy are the peculiar facial paralysis and the concentric atrophy of the small bones of hands and feet. They are the nearest approach to what we to-day are allowed to call pathognomonic signs.

Literature.

- BEURMANN, DE: Etudes sur la lèpre. II. Lepra conference, Bergen 1909.
- BEURMANN, ROUBINOWITCH ET GOUGEROT: Les troubles mentaux dans la Lèpre. Lepra, Bibl. intern. 1906. Vol. 6, fasc. 2, p. 107.
- BORTHEN, L.: Die Blindenverhältnisse bei der Lepra. Christiania 1902.
- BRUUSGAARD, E.: To tilfælde av ulnarneurit ved sekundær syfilis. Norsk magazin for lægevidenskaben 1896, XI, p. 370.
- Fire lepratilfælde. Forhandlinger i Det medicinske selskab 1919, 17de december, pag. 140.
- Bidrag til kjendskabet av den saakaldte tuberkuloide lepra. Norsk mag. for lægevidenskaben 1921. 5, 359.
- DANIELSEN: Lèpre anesthesique. Christiania 1862.
- DANIELSEN & BOECK: Traité de la Spedalskhed ou Elephantiasis des Grecs. Paris 1848. J. — B. Baillière.
- DEHIO: Lepraconferenz zu Berlin. 1897. Bd. II.
- DÉJÉRINE ET LELOIR: Recherches sur les altérations nerveuses (lèpre). Arch. de physiologie 1881.
- GERLACH, WALD.: Die Beziehungen zwischen Hautflecken und den Nervenerkrankungen bei der Lepra anaesthetica. Virch. Archiv 1891.
- HANSEN, ARMAUER UND LOOFT: Die Lepra vom klinischen und pathologisch-anatomischen Standpunkte. Bibl. med. V., II., H. 2, 1894.
- HANSEN & LOOFT: Leprosy in its Clinical and Pathological Aspects (translated by Dr. NORMANN WALKER). 1895.
- HANSEN, G. ARMAUER & CARL LOOFT: Lepra 1897.
- HARBITZ: De patologisk-anatomiske forandringer av neurotrofisk oprindelse. Christiania 1900.
- Über tropho-neurotische Veränderungen in Knochen und Gelenken bei der Lepra. II. Lepra conference. Bergen. 1909.
- HARRIS, W.: Multiple Peripheral Neuritis, Proceedings of the Royal Society of Medicine. London 1923.
- HEIBERG, HJ.: Om lepra mutilans og trofoneurotiske forandringer ved Spedalskhed. Klinisk aarbog. 1886. Bd. 3. — Cammermeyer, Christiania.
- HOGGAN, F. E. RND G.: Über Veränderungen bei Lepra anaesthetica. Monatsch. f. prakt. Derm. 1882.
- JEANSELME: Die pathologische Anatomie und Histologi der Lepra. Leprakonferenz zu Berlin. 1897.
- JEANSELME, BLUM ET TERRIS: Les dyschromices lépreuses. III. conférence de la lèpre. Strasbourg 1923.
- JEANSELME ET MARCEL SÉE: Lèpre. La pratique dermatologique. Tome III.
- JEANSELME ET MARIE: Sur les lesion des cordons posterieurs dans la moelle de lépreux. Revue neurologique. 1898.
- LAEHR, DR. MAX.: Die nervösen Krankheitserscheinungen der Lepra. Berlin 1889.

- LEEGAARD, CHR.: Undersøgelser over den kutane anæsthesi ved multipel neurit og tabes dorsalis. Christiania 1897.
- LELOIR, HENRI: Traité pratique et theorique de la lèpre. 1886.
- LIE, H. P.: Über die Behandlung der Lepra. Verhandlungen der II. internationalen Leprakonferenz in Bergen 1909. Bd. III, p. 291.
- Beiträge zur pathologischen Anatomie der Lepra. Archiv f. Derm. und Syph. 1894.
- Lepra im Rückenmark und der peripheren Nerven. 1904.
- LOOFT: Bidrag til kundskaben om lepra anaesthetica aetiologie og anatomie. Danielsens Festskrift 1891.
- Beitrag zur pathologischen Anatomie der Lepra anaesthetica, insbesondere des Rückenmarks. Virchows Archiv Bd. CXXVIII.
- MOREIRA, JULIANO: Psychoses em leprosos. Arch. brasileiros de psych. e neurol., janv. 1906, p. 41.
- Geisteskrankheiten bei Leprakranken. II. Leprakonferenz. Bergen 1909. Rückenmarks. Virchows Archiv. Bd. CXXVIII.
- MARIE: Leçons sur les maladies de la moelle. 1892.
- MONRAD-KROHN: The Clinical Examination of the Nervous System. Lewis & Co. London. 2nd edition. 1923.
- MONRAD-KROHN: Observations cliniques sur l'aspect neurologique de la lèpre. III. Conférence de la lèpre. Strasbourg 1923.
- MONRAD-KROHN & LOSSIUS: Periferet betinget inversion av plantarreflexen. Norsk mag. f. lægev. 1921, nr. 11, p. 805.
- MUIR, C.: Handbook on Leprosy. Cuttack. 1921.
- Classification des cas de lèpre. III. Conférence de la lèpre. Strasbourg. 1923.
- NONNE: Dermatologischer Kongress. Berlin 1896.
- ROGERS, SIR LEONARD: The Successful Treatment of Leprosy. The Practitioner. August 1921.
- L'incidence de la lèpre dans le monde. III. Conférence de la lèpre. Strasbourg 1923.
- The World Incidence of Leprosy in Relation to Meteorological Conditions and its bearing on probable mode of transmission. Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene. 1923, February. Vol. XVI, nr. 8, pag. 440--460.
- STAHLBERG, HUGO: Pathologisch-anatomische Veränderungen des Gehirns bei Lepra. Archiv für Psychiatrie. Berlin 1906.
- SUDAKEWITSCH: Beiträge zur pathologischen Anatomie der Lepra. ZIEGLER und NAUWERK. Beiträge zur pathologischen Anatomie und Physiologie. Bd. II, p. 188.
- THIEBERGE: Un cas de lèpre systematisée nerveuse avec troubles sensitifs se rapprochant de ceux de la syringomyelie. Annales de dermat. et de syph. 1891.
- ZAMBACO: Voyages chez les lépreux. Paris 1890.
- La lèpre dans le midi de la France. Journal des maladies cut. et syph. 1893.
- L'ainhum des auteurs constitue-t-il une entité morbide ou bien n'est-t-il qu'une modalité de la lèpre. Semaine med. 1896.

Printed, Dec. 6th, 1923.

DIE PHYSIKALISCH-CHEMISCHEN GESETZE DER MAGMATISCHEN DIFFERENTIATION

VON
J. H. L. VOGT

MIT 6 TEXTFIGUREN

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 17)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 26. oktober 1923.

Diese Abhandlung ist ein in etwas erweiterter Form wiedergegebener Vortrag, gehalten in der Sitzung der skandinavischen Naturforscher zu Göteborg am 13ten Juli 1923 als Resumé einer zukünftigen Publikation in Journal of Geology.

Die „trockenen“ Silikatschmelzlösungen wie auch die eruptiven Silikatmagmen sind elektrolytisch dissoziierte Lösungen, deren einzelne Komponenten *unbegrenzt* in einander gegenseitig löslich sind.

Die Löslichkeitsgrenze liegt höher als der Schmelzpunkt des betreffenden Minerals; es findet folglich eine *Krystallisation* der Silikate, weiter auch der Aluminate, Ferrate, Apatit usw. statt. Dasselbe gilt auch dem Schwefelkies, wenn derselbe nur in geringer Menge vorhanden ist. Alle bisher von verschiedenen Forschern aufgestellten Hypothesen zur Deutung der Krystallisation, bezw. der Differentiation der Silikatmagmen durch Annahme von zwei flüssigen Silikatphasen haben sich als unhaltbar erwiesen.

Anders verhält es sich mit der Beziehung zwischen Silikat und *Sulfid* (oder jedenfalls vielen der Sulfide) der Schwermetalle. Nehmen wir Eisenmonosulfid, *FeS*, als Beispiel, so ist dasselbe in geschmolzenem Silikat bei hoher Temperatur in einer ziemlich großen Menge löslich, und bei besonders hoher Temperatur dürfte eine unbegrenzte Mischbarkeit eintreten. Wenn die Löslichkeitsgrenze bei sinkender Temperatur erreicht wird, scheidet sich *FeS* aus. Dies geschieht aber bei einer Temperatur höher als der Schmelzpunkt von *FeS* (oder Magnetkies). *FeS* wird folglich in der flüssigen Phase *ausgeschieden*; wir bekommen somit *zwei* flüssige Phasen. Hier haben wir den Kernpunkt zur Deutung der Genesis der sulfidischen Erzaussonderungen, nämlich der praktisch gerechnet „trockenen“ Magmen der Nickel-Magnetkieslagerstätten und der (nach TH. VOGT) etwas „wasserhaltigen“ Magmen der Schwefelkieslagerstätten, vom Typus Sulitjelma.

Die Löslichkeitsbeziehung (unter hohem Druck) zwischen Karbonaten, wie $CaCO_3$, $CaMg(CO_3)_2$ und $MgCO_3$, und Silikaten ist noch nicht *entgültig* entschieden worden. Die Löslichkeitsgrenze gewisser Karbonate in gewissen Silikaten liegt ziemlich sicher unterhalb des Schmelzpunktes des Karbonats, das somit auskrystallisieren wird. Bei anderen Karbonaten oder in anderen Silikaten mag es sich aber vielleicht anders verhalten; und zwar mit der Folge, daß das Karbonat in der flüssigen Phase, die mehr oder weniger vom Silikat in Lösung halten möchte, *ausgeschieden* würde.

Die Krystallisation der Magmen erklärt sich durch die für die Phasen flüssig : fest geltenden Gesetze, in Betreff der Eutektika (einbegriffen den eutektischen Grenzlinien, bzw. -flächen), der Mischkrystalle usw. Im Prinzip ist die Anwendung dieser Gesetze festgestellt worden, und auch sind viele Einzelheiten teils durch synthetische und teils durch analytische Studien erforscht worden. Die für die Petrographie wichtigsten *binären*, ferner auch mehrere der wichtigsten *ternären* Kombinationen sind schon erledigt worden. Noch fehlen aber eine Reihe Untersuchungen, unter anderem betreffend der Stabilitätsgrenze mehrerer Mineralien und dem Gleichgewicht bei hohem Druck, oder bei hohem Druck in Verbindung mit den leichtflüchtigen Bestandteilen der Magmen.

In einer Arbeit über „*anchi-monomineralische und anchi-eutektische Eruptivgesteine*“ seit rund fünfzehn Jahren (1905, 1908) wies ich nach, daß man aus der chemischen Zusammensetzung der Eruptivgesteine den Schluß ziehen muß, daß *dieselben physikalisch-chemischen Gesetze, die für die Krystallisation gelten, auch auf die Deutung der magmatischen Differentiation übertragen werden mögen*. In welcher Weise dies zu erklären wäre, ließ ich zu der Zeit als eine offene Frage stehen. Die Deutung ist jetzt durch die namentlich von amerikanischen Forschern, darunter besonders BOWEN, näher ausgearbeitete *Krystallisations-Differentiation* (oder gravitative Differentiation) geliefert worden.

Über die magmatische Differentiation einerseits in *proto-angereicherter*, resp. *anchi-monomineralischer* und andererseits in *eutekt-angereicherter*, resp. *anchi-eutektischer* Richtung.

Wenn in einer von unabhängigen Komponenten $ma + nb + oc$ bestehenden Lösung bei abnehmender Temperatur a , in einer Quantität $m'a$, zu krystallisieren beginnt, und $m'a$ entfernt wird, und zwar durch Hinuntersinkung zu einer tiefer belegenen Zone, wo $m'a$ resorbiert wird, erhalten wir zwei verschiedene Magmen,

einerseits $(m + m')a + nb + oc$ mit einer Anreicherung von dem zuerst oder *proto* krystallisierenden Mineral, also ein an dem „*proto-Mineral*“ angereichertes Magma, das ich kurz als ein *proto-angereichertes Magma* bezeichnet habe. Bei weitgehender Anreicherung von a , besonders nach wiederholten Krystallisationen, Platzverschiebungen (Niedersinkungen) und Resorptionen resultiert ein beinahe (anchi) aus a bestehendes Magma, also ein *anchi-monomineralisches* Magma,

andererseits resultiert ein Magma $(m - m')a + nb + oc$, somit ein *Restmagma*, mit einer Anreicherung der Komponenten an der nächstliegenden eutektischen Grenze und auch an dem ternären Eutektikum, somit ein „*eutekt-angereichertes*“ Magma. Bei festgesetzter Krystallisation von a und

späterhin auch von b nebst Entfernung der ausgeschiedenen Mineralien nähert sich das Magma immer mehr dem ternären Eutektikum (*anchi-eutektisches* oder gar eutektisches Magma).

Dieser einfacher Fall, wo nur von einander „unabhängige“ Komponenten vorausgesetzt sind, wird praktisch gerechnet nie eintreten, weil die meisten Mineralien der Eruptivgesteine Mischkrystalle sind. Wir nehmen als Beispiel ein Magma $m An + n Ab + oa + pb$ usw. und setzen voraus, daß an einer frühen Stufe $m' An + n' Ab + o'a$ ausgeschieden, entfernt und späterhin an einer anderen Stelle resorbiert wird. Es entsteht dadurch auch in diesem Falle einerseits ein proto-angereichertes Magma $(m + m') An + (n + n') Ab + (o + o') a + pb$ usw., mit relativ stärkerer Anreicherung von An wie von Ab ; bei Wiederholung des Vorganges resultiert ein anchi-monomineralisches Magma, ganz überwiegend aus An und Ab , mit relativ viel An und wenig Ab bestehend.

Andrerseits erhalten wir ein Restmagma $(m - m') Ab + (n - n') Ab + (o - o') a + pb$ usw., mit Annäherung zu oder Zusammenfallen mit einer eutektischen Grenzlinie, somit auch hier mit einer Anreicherung eines Eutektikums, wenn dieses Wort in ausgedehnter Bedeutung benutzt wird, und dabei mit einer relativ stärkeren Abnahme von An wie von Ab .

Setzen wir a (Beispiel Magnetit) außer Betracht und nehmen wir als b eine unabhängige Komponente, wie z. B. Diopsid an, so erhalten wir, wie es von BOWEN erörtert ist, eine Krystallisation längs der „eutektischen Grenzlinie“ zwischen $An + Ab$ und Diopsid. Das Restmagma wird hier nicht an einem Punkt, sondern an einer gewissen, relativ kurzen Strecke an dieser Grenzlinie, mit gleichzeitiger Krystallisation der beiden Mineralien, erstarren.

Besonders erleuchtend für die Erforschung der magmatischen Differentiation sind

Die proto-angereicherten, resp. eutekt-angereicherten (oder Restmagma-) Gänge.

I. In dem *Romsaas Kugelquarznorit* besteht die rund 30⁰0 betragende, auf einer späten Stufe erstarrte Zwischenmasse zwischen den zuerst verfestigten Kugeln von Hypersthen (nebst Biotit) (zufolge BUGGE) rund aus

10	00	Biotit,
73.5	-	Plagioklas,
15	-	Quarz,

dabei ein wenig Apatit usw. Der Plagioklas schwankt zwischen $Ab_{42} An_{58}$ im Kern und $Ab_{55} An_{45}$, gelegentlich gar $Ab_{82} An_{38}$ (nebst ein wenig *Or*) in der äußeren Schale und hat durchschnittlich die Zusammensetzung $Ab_{47} Or_3 An_{50}$, somit ziemlich genau $Ab_1 An_1$.

Innerhalb des Quarznorits erscheinen eine Reihe von kleinen, meist nur 2, 5 oder 10 cm. dicken und einigen m. langen, unregelmäßig verlaufenden Gesteinsgängen, rund bestehend aus

6—	8 ⁰ / ₀	Biotit,
ca.	70	„ Plagioklas,
	20—25	„ Quarz,

mit etwas *Ab*-reicherem Plagioklas ($Ab_{68} An_{32}$) wie in dem Muttergestein ($Ab_1 An_1$). Außerdem begegnen wir in der eben erwähnten Zwischenmasse wie auch in den kleinen Gesteinsgängen bisweilen ein ganz wenig von demselben Granat, — auf den Gängen in Krystallen (211)(110). Weil entsprechende, meist pegmatitisch, bisweilen eugranitisch oder aplitisch struierte Gänge, mit einigen Prozent Biotit, etwa 70⁰/₀ Plagioklas (an verschiedenen Lokalitäten infolge optischer Bestimmung mit 68, 68, 70, 75, 75 *Ab*) und bis etwa 28—30⁰/₀ Quarz, auch an einer ganzen Reihe von anderen quarzhaltigen Noriten und Gabbros, die häufig nur 0.5, 1 oder 2⁰/₀ Quarz führen, ganz gewöhnlich sind, müssen wir den Schluß ziehen, daß diese Gänge aus dem Norit- oder Gabbromagma abgespaltet sind. Aus der nahen mineralogisch-chemischen Übereinstimmung zwischen den Gängen zu Romsaas und der das Restmagma repräsentierenden Zwischenmasse müssen wir ferner den Schluß ziehen, daß unsere Gänge ein ausgepreftes Restmagma darstellen. Die Gänge führen etwas weniger Biotit, einen etwas saureren Plagioklas und etwas mehr Quarz wie die Zwischenmasse. Sie repräsentieren folglich das Restmagma auf einer etwas weiter vorgeschrittenen Stufe der Verfestigung als die Zwischenmasse zwischen den Kugeln, somit eine Stufe, als etwa 80 oder vielleicht gar 85⁰/₀ des ganzen Gesteins schon erstarrt war. Ferner betonen wir, daß die Menge des Quarzes bis etwa 28—30⁰/₀, nie aber noch höher steigt; die eutektische Grenze zwischen Andesin-Oligoklas und Quarz wurde somit mehrmals erreicht, aber nicht überschritten. — Wir lernen hierdurch, daß aus einem Norit- oder Gabbromagma mit nur ganz wenig *Qu* und mit einem intermediär-basischen Plagioklas anchi-eutektische Biotit-Oligoklas- (oder Andesin)-Quarz-Gänge entstehen mögen.

II. In den Steinbrüchen z. B. zu Aarvoldsaa bei Kristiania beobachten wir in dem *Nordmarkit*, dessen ca. 2.5—3⁰/₀ betragender Gehalt von Quarz zuerst an einer sehr späten Stufe zu krystallisieren anfang, eine Reihe von kleinen, meist nur 1—5 cm. dicken und 5—20 m. langen, gern schwebend verlaufenden, feinkörnigen, aplitisch-granophyrischen Gesteinsgänge, die in chemischer Beziehung dem Nordmarkit sehr nahe stehen, jedoch mit dem Unterschiede, daß die Quarzmenge durchgängig sehr bedeutend zugenommen hat. Eine Analyse des an Quarz zufolge mikroskopischer Untersuchung reichsten Ganges ergab 75.3⁰/₀ *SiO*₂, 0.43 *Or* : 0.57 *Ab* nebst ein ganz wenig *An*, 1.2⁰/₀ Magnetit, ca. 1⁰/₀ Biotit (dabei ein wenig Titanit), was

mit dem granitischen Eutektikum übereinstimmt. Diese Gänge repräsentieren das Restmagma, nachdem mindestens 90, vielleicht gar 93^{0/0} des ganzen Gesteins schon erstarrt war.

III. In dem in Övre wie auch in Ytre Aardal (Sogn) auftretenden *Trondhjemit*, der ca. 73—75^{0/0} SiO_2 und überwiegend Oligoklas neben nur ganz wenig Mikroklin enthält, erscheinen eine bedeutende Anzahl von meist ziemlich kleinen Pegmatitgängen, schätzungsweise mit 25—30^{0/0} Quarz und bald mit ungefähr 2- oder 3-, bald mit nur 1.5-mal so viel Oligoklas (à 20 *An*) wie Mikroklin. Die relative Menge des letzteren Minerals hat somit hier zugenommen. In dem Muttergestein, mit nur ungefähr 0.2 *Or* : 0.8 *Ab* + *An* (oder höchstens ca. 0.25 *Or* : 0.75 *Ab* + *An*), begann der Mikroklin, wie es von V. M. GOLDSCHMIDT hervorgehoben ist, in Übereinstimmung mit der eutektischen Grenzlinie zwischen *Or* und *Ab* + *An* beim Vorhandensein von etwas *Qu* usw., zuerst zu krystallisieren, nachdem mehr oder weniger von dem Oligoklas schon ausgeschieden war. Das Restmagma wurde somit an *Or* etwas angereichert. In Übereinstimmung hiermit führen die pegmatitischen Gänge, welche das Restmagma repräsentieren, verhältnismäßig mehr Mikroklin als das Muttergestein.

IV. Eine vorzügliche Erleuchtung erhalten wir durch die vielen Angaben in BRÖGGERS Arbeit über das *Gangfolge des Lardalits* (1898). Die Krystallisationsfolge des Gesteins ist:

Zuerst begann Apatit zu krystallisieren, — darnach auch Magnetit (und Ilmenit), — darnach auch Pyroxen und Lepidomelan, — späterhin auch Nephelin — und auf der letzteren Stufe auch Feldspat, indem jedoch die Krystallisation von Nephelin auf der letzten Stufe nach und nach aufhörte.

BRÖGGERS *melanokrate* Glieder charakterisieren sich durch eine *Zunahme von TiO_2 , MgO , CaO , FeO_3 + FeO , in vielen Fällen auch von P_2O_5* , die leukokraten Glieder dagegen durch eine *Abnahme von P_2O_5 , TiO_2 , MgO , CaO und FeO* . Die melanokrate Serie charakterisiert sich somit durch eine Addition, die leukokrate Serie dagegen durch eine Subtraktion von denjenigen Bestandteilen, welche in denjenigen Mineralien hineintreten, die in sehr großer Ausdehnung in den ersteren Stufen der Verfestigung des Lardalits ausgeschieden wurden. Ferner begegnen wir bei den leukokraten Gängen einer Verschiebung der Zusammensetzung des Pyroxens, mit Abnahme von der schwer schmelzbaren Komponente $CaMgSi_2O_6$ und mit Zunahme der leicht schmelzbaren Komponente $NaFeSi_3O_6$. In den Endgliedern dieser Reihe tritt Ägirin auf.

Diese Reihe von systematisch zusammengehörigen Tatsachen lassen sich nur dadurch erklären, daß die leukokraten Glieder das Restmagma auf den verschiedenen Stufen der Verfestigung darstellen, während die melanokraten Glieder andererseits durch eine Anreicherung der zuerst krystallisierenden Mineralien entstanden sind.

Um dies näher zu beleuchten werden wir einige Berechnungen ausführen, indem wir, gestützt auf BRØGGERS Darstellung, die unten angegebene durchschnittliche Zusammensetzung des Lardalits voraussetzen. Diese Angabe mag übrigens, wegen der etwas schwankenden Zusammensetzung des Gesteins an den verschiedenen Stellen, nicht absolut genau sein.

Nehmen wir als Beispiel die Stufe, wo in dem ursprünglichen Magma 6 0/0 Mineral ausgeschieden war, so möge dies sich auf Apatit, Magnetit und *Fe, Mg*-Silikat verteilen, ungefähr wie es in Kolonne 1 angegeben ist. Diese Mineralien dem ursprünglichen Gesamtmagma abgezogen liefern ein Restmagma (94 0/0), welches zu 100 0/0 umgerechnet das Gestein I gibt. In entsprechender Weise mit 2 und 3. — Auf den folgenden Stufen, 4 und 5, begann auch Nephelin zu krystallisieren, was nach Umrechnung zu 100 0/0 die Gesteine IV und V gibt.

	Apatit	Eisen- erz	Py- roxen	Lepi- domelan	Sodalit	Nephe- lin	Feldspat 66 <i>Ab</i> 4 <i>Al</i> 30 <i>Or</i>	
Lardalit	1.7	2.8	8.7	9.8	2.0	13.0	62.0	
Abgezogen zuerst auskrystallisiert.								
								Restmagma:
1	0.7	1.0	3.0	1.3				94.0 0/0
2	1.0	1.2	4.0	2.8				91.0 "
3	1.3	1.2	6.4	5.0				86.0 "
4	1.4	1.4	6.5	5.7		4.0		81.0 "
5	1.5	1.5	7.0	7.0		10.0		73.0 "

Rest auf 100 0/0 umgerechnet:

	I	II	III	IV	V
<i>Si O</i> ₂	56.8	57.4	58.6	60.0	61.3
<i>Ti O</i> ₂	1.0	0.9	0.8	0.7	0.7
<i>Al</i> ₂ <i>O</i> ₃	20.1	20.5	21.2	20.6	19.9
<i>Fe</i> ₂ <i>O</i> ₃	2.0	1.8	1.5	1.4	1.5
<i>Fe O</i>	2.5	2.2	1.5	1.4	1.2
<i>Mg O</i>	1.5	1.2	0.9	0.7	0.5
<i>Ca O</i>	2.3	2.0	1.4	1.4	1.5
<i>Na</i> ₂ <i>O</i>	8.2	8.4	8.8	8.4	7.9
<i>K</i> ₂ <i>O</i>	5.0	5.0	5.0	5.1	5.0
<i>P</i> ₂ <i>O</i> ₅	0.5	0.35	0.2	0.15	0.1
	Nephelinreicher Lardalit- Facies und Neph.-Rhomben- porphyr		Foyait und Tinguait	Hedrumit und Solvsbergit.	

Die berechneten Zusammensetzungen (I—V) stimmen einigermaßen mit BRØGGERS Analysen von seinen, dem Lardalit in chemischer Beziehung am nächsten stehenden leukokraten Gliedern überein, so Nr. I—II mit dem

am Nephelin reichen Lardalitfacies und mit dem Nephelinrhombenporphyr, Nr. III mit Foyait und Tinguait, und Nr. IV—V mit Hedrumit und Solvsbergit.

In der Tat hätte bei der Berechnung von No. I—V ein Pyroxen relativ reich an MgO — oder $CaMgSi_2O_6$ — abgezogen werden müssen. Dies würde für Nr. I—V eine noch stärkere Verminderung von MgO ergeben, und hiermit stimmt die sehr bedeutende Abnahme von MgO in den leukokraten Gängen. — Diese zeigen am Beginn, bis zu Tinguait—Foyait, eine steigende Menge von Na_2O oder von Nephelin, was sich dadurch erklärt, daß auf denjenigen Magmarest-Stufen, welche durch die gerade erwähnten Gänge repräsentiert werden, Nephelin noch nicht in dem Lardalit zu krystallisieren begonnen hatte. Die nachfolgenden Gänge, Hedrumit, Solvsbergit, Bostonit und Lestiwarit, zeigen andererseits eine Verminderung des Na_2O -Gehaltes, was darauf beruhen darf, daß jetzt auch Nephelin krystallisierte; es wurde somit nicht nur Apatit, Magnetit und Fe, Mg -Silikat, sondern auch etwas Nephelin dem Hauptmagma entzogen.

Als Endglied der leukokraten Serie stehen die kleinen Gänge von Lestiwarit, der aus einem Eutektikum zwischen Natronkalifeldspat und Ägerin, der letztere in einer Menge von ca. 2.5% besteht. Dieses Gestein enthält zufolge einer Präzisionsanalyse 0.015% P_2O_5 , und der Lardalit 0.74% P_2O_5 . Es blieb somit nur ein wenig, freilich nur äußerst wenig P_2O_5 in dem sehr geringen eutektischen Restmagma zurück; und dies gilt auch im allgemeinen. Viele Petrographen nehmen an, daß die ganze Menge von Apatit am Anfange der Verfestigung ausgeschieden wird; dies ist jedoch nicht der Fall.

In Betreff der in Proto-Richtung verlaufenden Differentiation merken wir uns das Verhältnis zwischen den auf den nach einander folgenden Stufen der Verfestigung ausgeschiedenen Mineralien:

Im allerersten Anfange; nur Apatit;

dann, wenn in allem etwa 1% Mineral ausgeschieden ist; Apatit und Eisenerz;

späterhin beginnt auch Fe, Mg -Silikat zu krystallisieren; im ersten Moment erhalten wir überwiegend Apatit plus Eisenerz und nur ganz wenig Fe, Mg -Silikat;

auf den folgenden Stufen nimmt die Menge von Fe, Mg -Silikat zu, diejenige von Apatit und Eisenerz, im Verhältnis zu der Quantität der ausgeschiedenen Mineralien, dagegen ab, und nach einer Weile bestehen die ausgeschiedenen Mineralien aus überwiegend Fe, Mg -Silikat nebst etwas Eisenerz und verhältnismäßig wenig Apatit;

noch später mag auch Nephelin zu krystallisieren beginnen.

Wir werden somit, je nachdem die Totalmenge der ausgeschiedenen Mineralien von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3 usw. bis 15, 20% des anfänglichen Magmas steigt, Mischungen von höchst wechselnder mineralogischer Beschaffenheit erhalten. Und diese Mineral-Mischung mag durch Hinuntersinken in wechselnden Quantitäten von Hauptmagma und ferner in verschiedenen Etappen — wie wir in einem folgenden Abschnitt erörtern werden, — resorbiert werden

können. Es mögen somit eine ganze Reihe Proto-Magmen von weit abwechselnden Zusammensetzungen resultieren können.

Für das Lardalitgebiet geben wir einige Beispiele:

A. Viel Ilmenit-Magnetit und Apatit nebst ein ganz wenig *Fe, Mg*-Silikat — einer Stufe bei der Ausscheidung des Magmas von etwa anderthalb oder zwei Prozent Mineralien entsprechend — zum Schluß in einer verhältnismäßig geringen Menge von Lardalitmagma aufgelöst, gibt Jacupirangit, sehr reich in Apatit und Ilmenit-Magnetit, ferner mit etwas Pyroxen etc.

B. Die Mischung der ausgeschiedenen Mineralien, wenn etwa drei Prozent im Hauptmagma ausgeschieden ist, besteht aus viel Ilmenit-Magnetit, etwas Apatit und ziemlich wenig *Fe, Mg*-Silikat. Eine Resorption von 1 Teil dieser Mischung (b, nach noch frühzeitiger Resorption von etwas Apatit) in vier Teilen noch tiefer belegenem Lardalitmagma, gibt die berechnete Zusammensetzung B, was mit BRÖGGERS Analyse von dem Olivin-Lardalit gut übereinstimmt.

A.		Apatit	Ilmenit	Magnetit	Pyroxen	Biotit
100 Teilen Lardalit zugeführt	b	2.5	15.0	4.5	3.0	
	c	1.7	2.3		18.0	10.0

B.	<i>SiO</i> ₂	<i>TiO</i> ₂	<i>Al</i> ₂ <i>O</i> ₃	<i>Fe</i> ₂ <i>O</i> ₃	<i>FeO</i>	<i>MgO</i>	<i>CaO</i>	<i>Na</i> ₂ <i>O</i>	<i>K</i> ₂ <i>O</i>	<i>P</i> ₂ <i>O</i> ₅
Berechnet Olivin-Lardalit	45.0	6.95	15.5	13.3		3.25	3.6	6.2	3.9	1.95
	45.2	6.98	19.26	13.6		3.18	2.87	6.57	3.87	1.54
C. Berechnet Mittel 2 Na- tronminetten	51.0.	1.9	16.5	3.8	5.3	3.8	5.7	6.0	4.5	1.1
	51.6	1.8	16.3	3.8	5.0	3.4	5.3	5.6	4.4	1.1

C. Auf einer etwas späteren Stufe, wenn etwa 10⁰/₁₀₀ Mineral ausgeschieden ist, besteht die Mischung derselben aus überwiegend Pyroxen plus Lepidomelan und verhältnismäßig wenig Eisenerz nebst Apatit. Wenn ein Teil dieser Mischung (c) — vielleicht nach einer noch frühzeitigeren Auflösung von etwas Eisenerz und Apatit — in drei Teilen Lardalitmagma resorbiert wird, resultiert eine Zusammensetzung C, was beinahe identisch mit dem Mittel von BRÖGGERS zwei Analysen von Natronminette ist.

D. Die in *TiO*₂, *MgO* und *CaO*, z. T. auch in *Fe*₂*O*₃ + *FeO* (und *P*₂*O*₅) noch reicheren melanokraten Gänge mögen durch eine Zufuhr namentlich von *Fe, Mg*-Silikaten nebst etwas Ilmenit-Magnetit, öfter auch etwas Apatit gedeutet werden. Einige von diesen Gängen zeigen keine Steigerung des Apatitgehaltes, worüber mehr sub. V.

V. Die in Gabbros und Noriten ziemlich häufigen, bisweilen sehr bedeutenden „Ausscheidungen“ von *Ilmenit- oder „Titanomagnetit“-Gabbros oder -Norit*, (viel Eisenerz und *Fc, Mg-Silikat*, aber noch einigermaßen viel Plagioklas enthaltend) und weiter von *Ilmenit- oder „Titanomagnetit“- Olivinit, -Diallagit und -Hypersthenit* erklären sich, wie ich schon seit Jahren nachgewiesen habe, durch eine Zufuhr von Titaneisenerz und dem betreffenden *Fc, Mg-Silikat*, somit von den auf den ersteren Stufen der Krystallisation sich ausscheidenden Mineralien. Auf diesen Stufen wird die bei weitem größte Menge des Apatits ausgeschieden. In Übereinstimmung hiermit finden wir in den hier besprochenen eisenreichen „Erz-Ausscheidungen“ bisweilen gar einen sehr bedeutenden, selbst bis 10, 20⁰0 und noch höher steigenden Gehalt von Apatit. Viele, gar sehr viele unserer „Erz-Ausscheidungen“ innerhalb Gabbro und Norit mit etwa 0.15—0.20⁰0 P_2O_5 , ergeben andererseits nur einen ganz geringen Gehalt, wie 0.04, 0.03 und selbst so wenig wie 0.025⁰0 Phosphorsäure, die von der „Mutterlauge“ herkommen mag. Dies mag darauf beruhen, daß unter den hinuntersinkenden Mineralien, Apatit, Eisenerz und *Fc, Mg-Silikat*, wurde der, durch kleine Individgröße und relativ niedriges spezifisches Gewicht gekennzeichnete Apatit getrennt von den anderen Mineralien resorbiert.

VI. In dem *Labradorfels zu Ekersund*, der aus meist 90—96, durchschnittlich ungefähr 93.5⁰0 Labradorit (schwankend zwischen 45 und 60 *An*, mit Durchschnitt ziemlich genau *Ab₁An₁* nebst ein wenig *Or*), 4.5⁰0 Hypersthen, 0.8⁰0 Diallag, 0.2⁰0 Biotit, äußerst selten etwas Olivin, 1⁰0 Ilmenit (mit ein wenig Magnetit) und 0.03⁰0 Apatit besteht, begann die Krystallisation von Hypersthen (nebst den anderen *Fc, Mg-Silikaten*) und von dem Titan-Eisenerz zuerst, nachdem ziemlich viel Labradorit schon ausgeschieden war.

Der Eruption des Labradorfelses gehören:

A. Feinkörnige, nur 2, 5, 10 bis 20 cm. dicke und 5, 10 bis 20 m. lange, unregelmäßige, gern schwebend verlaufende, aplitisch struierte Noritgänge, aus ca. 8⁰0 Ilmenit, 16⁰0 Hypersthen, 72—74⁰0 Plagioklas (*Ab₃An₂—Ab₂An₁*) und 2, gelegentlich bis 5⁰0 Quarz bestehend;

B. Etwas grobkörnige, meist 0.1—0.5 oder 1 m. dicke und einige m. lange Schlieren oder schlierenförmige Gänge von ziemlich genau derselben Zusammensetzung, einige jedoch mit noch mehr Quarz, einem noch saureren Plagioklas und etwas weniger Hypersthen (oder gelegentlich Diallag, Biotit statt Hypersthen).

C. Bis 20 m. oder noch mächtigere, unregelmäßige Noritpegmatitgänge, enthaltend ungefähr 5⁰0 Ilmenit, 20—25⁰0 Hypersthen, ein wenig Biotit und Rest Labradorit (mit 42⁰0 *An*, somit ein klein wenig minder *An* wie in dem umgebenden Muttergestein).

Morphologisch entsprechen die schmalen, feinkörnigen Aplitnoritgänge den aplitisch-granophyrischen Gängen in dem Nordmarkit, welche das Rest-

magma darstellen, und daß dies auch mit den grobkörnigen Schlieren und den pegmatitischen Gängen von Norit der Fall sein muß, mag als sicher betrachtet werden. Als petrographische Stütze heben wir hervor, daß der Plagioklas der Gänge *Ab*-reicher, bisweilen gar nicht unwesentlich *Ab*-reicher als derjenige des Labradoritfelses ist, und daß Quarz, der in dem Labradorfelse fehlt, auf mehreren unserer Gänge vertreten ist.

Aus der Krystallisationsfolge des Labradorfelses ergibt sich, daß das Restmagma durch eine Anreicherung von Eisenerz und *Fe, Mg*-Silikat und durch einen etwas *An*-ärmeren Plagioklas gekennzeichnet werden muß. Und ein minimaler, in dem Hauptgestein nicht nachweisbarer Gehalt von *Qu* müßte in das Restmagma konzentriert werden, oder in demselben möchte durch Nebenvorgänge ein klein wenig *Qu* gebildet werden. Die Zusammensetzung unserer Restmagma-Gänge steht somit im besten Einklange mit der Physicochemie der Verfestigung des Labradorfelses.

— BRÖGGERS morphologische Bezeichnungen melanokrat, resp. leukokrat decken sich in Betreff der meisten Eruptivgesteine, wie der meist verbreiteten gabbroidalen, syenitischen und granitischen Gesteine, mit den von mir vorgeschlagenen *genetischen* Bezeichnungen proto-angereichert, resp. eutekt-angereichert (oder Restmagma)-Gänge usw. In Betreff der Anorthosite und einiger anderen Eruptivgesteine, wo die Krystallisation von Eisenerz und *Fe, Mg*-Silikat zuerst auf einer relativ späten Stufe der Verfestigung begann, verhält es sich dagegen umgekehrt, indem die Restmagma-Gesteine hier von melanokratem Charakter sind.

Die derselben Ausscheidungsstufe im Muttergestein angehörigen proto-angereicherten und eutekt-angereicherten Gänge (oder Gesteine im allgemeinen) sind, wenn keine getrennte Resorption der hinuntersinkenden Mineralien stattgefunden hat, von *komplementärer* Natur (BRÖGGERS Nomenklatur). Die beiden Arten von Differentiationsprodukten sind aber nicht im allgemeinen komplementär.

Restmagma-Gänge usw. mögen auf allen Stufen der Verfestigung entstehen können, gar bis das Muttergestein beinahe gänzlich erstarrt ist. Die Bildung der durch die in Proto-Richtung gehende Differentiation entstandenen Gesteine hört aber auf, wenn ein gewisser Teil des Muttergesteins verfestigt ist.

Alle mir bekannte *pegmatitisch* struierte Gänge, von granitischer, noritischer und nephelin- oder augit-syenitischer Zusammensetzung sind — in Übereinstimmung mit der schon längst von BRÖGGER gelieferten Erörterung — als Restmagmaprodukte aufzufassen. Dies mag bekanntlich darauf beruhen, daß in das Restmagma wurden — unter Voraussetzung von einem genügend hohen Druck (TH. VOGT) — die leichtflüchtigen Bestandteile H_2O , CO_2 usw., welche die Dünflüssigkeit erhöhen, angereichert. Das Restmagma ist dabei häufig von pneumatolytischen Vorgängen begleitet, was u. a. für die Bildung vieler Erzlagerstätten von fundamentaler Bedeutung ist.

Über die anchi-monomineralischen Eruptivgesteine.

Peridotite. — Der stöchiometrische Gehalt von Fe_2SiO_4 in dem Olivin der Gabbros, Norite, Anorthosite usw. schwankt zwischen ca. 20 und ca. 40⁰/₀ und beträgt durchschnittlich ungefähr 30⁰/₀.

Für die Peridotite¹ geben wir die folgende Übersicht:

0,0 Olivin in dem Gestein	0,0 Fe_2SiO_4 in dem Olivin	
	Übliche Grenzen	Durchschnitt
ca. 40—50 ⁰ / ₀	18—34 ⁰ / ₀	ca. 25 ⁰ / ₀
„ 50—60 „	19—26 „	20—25 „
„ 60—70 „	11—22 „	ca. 16—20 „
„ 70—80 „	9—14 „	ca. 12 „
85 — beinahe 100 ⁰ / ₀ Olivin (eventuell plus Bronzit).	Min. 7 (oder 7,5), Max. 12 (13—14?) ⁰ / ₀	8—9,5 „

Mit dem steigenden Inhalt von Mg_2SiO_4 im Olivin steigt im großen ganzen gerechnet auch dessen Inhalt von Ni_2SiO_4 (J. H. L. VOGT, 1923).

Bronzite. Der stöchiometrische Gehalt von $FeSiO_3$, in Prozent von der Summe $FeSiO_3 + MgSiO_3$, in dem Orthopyroxen beträgt:

in Noriten und Gabbros mit mindestens ca. 45⁰/₀ Plagioklas, zwischen ca. 20 und ca. 40, in den meisten Fällen 30—36⁰/₀;

in Hypersthenit-Noriten (mit ca. 20—40⁰/₀ Plagioklas), 18—28, meist ungefähr 25⁰/₀.

in Hornblende-Hyperstheniten, 13—24⁰/₀;

in Bronzitgesteinen, innerhalb Norite, mit einer niedrigen Menge von Plagioklas, 12 (8) — 18⁰/₀;

in Websteriten, 10—14⁰/₀;

in Bronzitgesteinen (ohne oder nur mit Spuren von Plagioklas) zwischen 7 (8) und 13 (14)⁰/₀;

in Olivin-reichen Saxoniten und in Bronzit- oder Enstatit-führenden Duniten, ausnahmsweise bis 12 oder 13⁰/₀, meist 9—10 und als Minimum 7 oder vielleicht 6,5⁰/₀ $FeSiO_3$.

Der *Plagioklas der Anorthosite* ist nur ganz ausnahmsweise so basisch wie $An_{85}Ab_{15}$ (oder vielleicht $An_{87}Ab_{13}$), und selbst ein so weit basischer Plagioklas als $An_{80}Ab_{20}$ ist sehr selten. Als Durchschnitt für die größeren Gebiete handelt es sich um $An_{65}Ab_{35}$ bis $An_{50}Ab_{50}$. Lokale Facies ergeben öfter $An_{45}Ab_{55}$, selten $An_{40}Ab_{60}$ und nur unter besonderen Bedingungen einen noch *Ab*-reicheren Plagioklas. Dazu kommt in allen Fällen eine kleine, im großen ganzen mit der Basisität des Plagioklases abnehmende Menge von *Or*.

¹ Die durch die Konzentration von Olivin plus einem sehr An-reichen Plagioklas gekennzeichneten Troktole und ferner die durch die Konzentration von Olivin plus Titan-eisenerz (eventuell auch plus Apatit) gekennzeichneten Glimmerperidotitgänge und „Titanomagnetit“-Olivinite werden hier nicht berücksichtigt.

Wir geben eine graphische Darstellung (Fig. 1) über das stöchiometrische Verhältnis $Mg_2SiO_4:Fe_2SiO_4$, $MgSiO_3:FeSiO_3$ und $An:Ab$ in dem betreffenden Mineral einerseits in den Duniten, Bronziten und Anor-

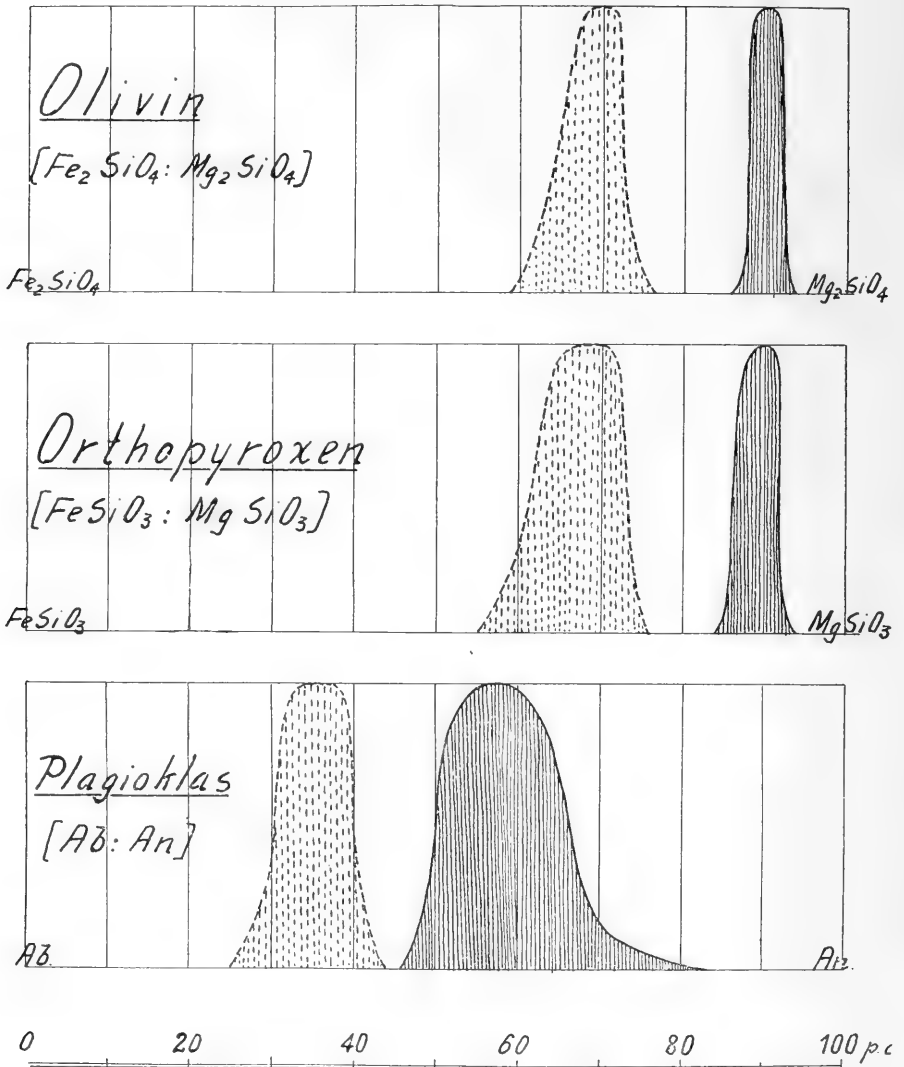


Fig. 1. Beispiel zur Erleichterung: Der Olivin (oben rechts) der Dunite enthält als Minimum 7 oder 7.5, meist 8–9.5, seltener 10–11 und als Maximum 12 (13–14) 0/0 Fe_2SiO_4 , Rest Mg_2SiO_4 , und der Olivin (oben links) der Gabbros usw. enthält selten so wenig wie 22–23, meist ungefähr 30 und ausnahmsweise so viel wie 40–41 0/0 Fe_2SiO_4 .

thositen (rechts) und andererseits (links) in dem Olivin, bezw. Orthopyroxen der Gabbros, Norite usw.; im Betreff des Plagioklases nehmen wir das $An:Ab$ -Verhältnis derjenigen comagmatischen Provinzen, in denen die Anorthosite auftreten.

Unter Berücksichtigung des viel niedrigen Gehaltes von *An* in dem Plagioklas der comagmatischen Anorthosit-Charnockit-Provinzen wie von Mg_2SiO_4 , resp. $MgSiO_3$ in dem Olivin, resp. Orthopyroxen der Norite, Gabbros usw. ergibt sich, daß die *relative* Verschiebung der Zusammensetzung des Minerals in den drei monomineralischen Gesteinen mit ungefähr demselben Maß gemessen werden mag.

Gemeinschaftlich für die Anorthosite, die Dunite und die übrigens sehr spärlich vertretenen Bronzitfelse sind:

eine starke Anreicherung der *schwerschmelzbaren* Komponente, resp. *An*, Mg_2SiO_4 und $MgSiO_3$; wir erhalten jedoch nie das theoretisch reine Endglied, sondern als Maximum, resp. 85 (oder 87) *An*, 92.5 (oder 93) Mg_2SiO_4 und 93 (oder 92.5)⁰ $MgSiO_3$;

ein äußerst geringer Gehalt von P_2O_5 , ZrO_2 und Sulfid, in den Duniten (und Bronzitgesteinen) auch von TiO_2 , während der Gehalt des letzteren in den Anorthositen freilich abgenommen hat, jedoch nicht ganz klein ist¹.

Wie ich in meiner oben zitierten Abhandlung über die anchi-monomineralischen Gesteine (1908) pointierte, muß die Genesis derselben auf irgend einer Weise mit der Tatsache in Verbindung stehen, daß die schwer-schmelzbare Komponente (*An*, Mg_2SiO_4 , $MgSiO_3$) in dem *zuerst* ausgeschiedenen Mischkristall angereichert wurde. Dies ist mit Recht durch die gravitative Differentiation erklärt worden.

BOWEN hat bekanntlich die Anorthosite (und Dunite) durch eine *mechanische Anhäufung* der niedergesunkenen Plagioklase (und Olivine) zu deuten versucht. Im Gegensatz hierzu bin ich schon längst zu dem Schluß gelangt, daß die Anorthosite, Dunite und andere ähnliche anchi-monomineralischen Gesteine (z. B. die Diopsidfelse und die Titanomagnetit-„Ausscheidungen“) wie auch die proto-angereicherten Gänge aus üblichen Magmen erstarrt sind, und daß somit die hinuntergesunkenen Mineralien resorbiert sind, und zwar in tiefer belegenen, etwas heißeren Magmazonen.²

Der Labradorfels zu Ekersund, der nicht durch Dynamometamorphose umgewandelt ist, ergibt keine protoklastische Struktur, und eine solche fehlt auch bei den Duniten usw., wie auch bei den üblichen proto-angereicherten Gängen (Diabas, Camptonit, Kersantit usw.) und Tiefengesteinen.

In vielen dieser Gesteine begegnen wir Mineralien, welche in dem Muttergestein fehlen, so Chromit und Pleonast in dem Dunit; Spinell, Korund und noch andere in den beinahe reinen Titaneisenerz-Aussonderungen; Bronzit, Hornblende und ein Melilithmineral in BRÖGGERS melanokraten

¹ Diese generellen Züge gelten auch den Diopsidfelsen, mit sehr starker Anreicherung von $CaMgSi_2O_6$.

² Ich bestreite hierdurch nicht die in mehreren Fällen konstatierte mechanische Anhäufung (ohne Resorption) der zuerst ausgeschiedenen schweren Mineralien in den unteren Teilen von eruptiven Decken, flachliegenden Sills usw.

Gängen des Lardalitgebiets. Dies setzt eine Krystallisation aus einem normalen Magma voraus.

Der Chromit der Dunite erscheint bisweilen in zusammengeschwommenen Anhäufungen („Synneusis-Struktur“) von Oktaedern mitten innerhalb der Olivine, die somit zuerst auf einer späteren Stufe verfestigt wurden.

Sowohl innerhalb der Dunite wie der Anorthosite begegnen wir öfter weitgehenden Differentiationen, die sich nur durch einen normalen Magma-Charakter erklären lassen.

In Betreff des Labradorfelsens zu Ekersund bemerken wir unter anderem, daß derselbe in einer Breite von etwa 25 m. entlang der Grenze gegen das ältere Nebengestein sehr feinkörnig ist, was eine relative schnelle Erstarrung aus einem üblichen Magma kund gibt.

Der in Magmen von Gabbro, Norit usw., ausgeschiedene Olivin, mit einer gewissen Anreicherung von Mg_2SiO_4 , ist unzweifelhaft schwerer als das Magma selber, und muß somit hinuntersinken. Bei Resorption und nachherfolgender Krystallisation entsteht ein noch mehr an Mg_2SiO_4 angereicherter Olivin, und bei Wiederholung dieser Vorgänge mag zum Schluß ein Dunitmagma mit bis 92.5 (oder 93^{0/0}) Mg_2SiO_4 resultieren.

Innerhalb der großen comagmatischen Anorthosit-Provinzen begegnen wir der Eruptionsfolge:

1. Labradorfels und Norit-Gabbro¹;
2. Quarz- und Orthoklas-führender Gabbro, Monzonit oder Quarzmonzonit, Mangerit und Syenit.
3. Diverse Granite.

Dies gibt im Durchschnitt für die ganze Provinz ungefähr 60^{0/0} SiO_2 und auch sonst eine nahe Übereinstimmung mit der von CLAEKE berechneten durchschnittlichen Zusammensetzung der Eruptivgesteine. V. M. GOLDSCHMIDT (1922) hat nach meiner Meinung Recht in der Hauptsache seiner Theorie, daß die verschiedenen „Stämme“ aus ursprünglichen Magmen von annähernd derselben chemischen Zusammensetzung herkommen, jedoch mit wechselnden Gehalten von H_2O usw. und auch unter wechselnden Bedingungen differenziert. Den Einzelheiten seiner Deutung der Entstehung der Anorthosite, nämlich nicht durch Hinuntersinken, sondern durch Hinaufsteigen der — in einem relativ wasserarmen Magma — frühzeitig ausgeschiedenen Plagioklaskrystalle kann ich jedoch nicht zustimmen.

Das ursprünglich tief belegene Magma enthielt im allgemeinen einen übrigens nicht sehr bedeutenden Überschuß von Fe, Mg -Silikat und Titan-eisenerz über die eutektische Grenze zwischen denselben und Plagioklas. In den oberen, gegen das Nebengestein etwas abgekühlten Teil des Magmas müßte somit zuerst etwas Fe, Mg -Silikat und Eisenerz (nebst Apatit usw.) krystallisieren. Nach einer Weile gelangen wir zu der eben genannten eutektischen Grenze, mit gleichzeitiger Krystallisation von Eisenerz, Fe, Mg -

¹ In Ekersund ist der Labradorfels älter als der Norit.

Silikat und Plagioklas. — Dies beginnt an einer Magma-Stufe entsprechend einem Par Prozent Eisenerz, ca. 17^{0/0} *Fc*, *Mg*-Silikat, 35^{0/0} *Ab*, 15--18 *An*, 15--20^{0/0} *Or* und 12--14^{0/0} *Qu*, also mit ziemlich viel *Or* und *Qu*. — Die Berechnung eines Gesteins von dieser Zusammensetzung¹ gibt sp. Gew. = 2.78. Ein entsprechendes Glas hat erfahrungsmäßig mindestens 6^{0/0} niedrigeres sp. Gew.; gibt 2.62. — Der in einer Schmelze von der obigen Zusammensetzung zuerst ausgeschiedene embryoale Plagioklas hat sp. Gew. = 2.71. In der Tat müssen wir jedoch mit einem etwas größeren Plagioklas-Mischkristall rechnen, und derselbe wird, des Gleichgewichts zwischen der flüssigen und der festen Phase wegen, einen etwas niedrigeren Gehalt von *An* erhalten; gibt für den Plagioklas sp. Gew. = ca. 2.68. Diese für 15[°] geltenden Werte sind alle bei der Krystallisationstemperatur mit $(1-a)t$ zu multiplizieren, wo *a* in allen drei Fällen annähernd derselbe ist. Der ausgeschiedene Plagioklas muß somit ein wenig schwerer als das „trocken berechnete“ Magma sein. In der Tat wird das ursprüngliche Magma jedoch immer etwas *H₂O*, *CO₂* usw. enthalten, was das sp. Gew. desselben etwas vermindert. Der am Beginn der Ausscheidung auskrystallisierte Plagioklas muß somit sicher etwas schwerer als das Magma sein (ca. 2.68 gegen nicht ganz unwesentlich unterhalb 2.62) und kann somit nicht hinauffließen, sondern muß hinuntersinken. Bei fortgesetzter Ausscheidung steigt der Inhalt von *Or* und *Qu* in dem Restmagma, das somit immer etwas spezifisch leichter wird; der Unterschied in Bezug auf dem sp. Gew. zwischen dem Plagioklaskristall und dem Magma wird somit immer etwas zunehmen.

Die hinuntersinkenden Mineralien, Apatit (nebst Zirkon), Eisenerz, *Fc*, *Mg*-Silikat und Plagioklas zeigen große Unterschiede in Bezug auf dem spezifischem Gewicht wie auch auf der Individgröße. Sie dürfen somit — in Übereinstimmung mit der schon oben erwähnten petrographischen Erfahrung — in verschiedenen Etappen oder in verschiedenen der tiefer belegenen Magma-zonen resorbiert werden. So mag in einer Zone das Eisenerz und das *Fc*, *Mg*-Silikat, aber nur ein Teil des Plagioklases eingeschmolzen werden, was — wahrscheinlicher Weise nach wiederholten gravitativen Differentiationen, zu einem Gabbro-Norit führen mag, — und in einer anderen, wahrscheinlich noch tieferen Zone der Rest der relativ großen Plagioklaskristalle.

Bei einer mehrmaligen Wiederholung von Ausscheidung und Resorption des Plagioklases in den an *An* + *Ab* (mit relativ viel *An*) immer mehr angereicherten Zonen wird zum Schluß ein Anorthositmagma entstehen können.

Die Resorption verlangt eine bedeutende Wärmemenge, nämlich durchschnittlich nicht ganz 100 cal. pr. gr. Mineral. Eine Berechnung ergibt, daß eine ursprüngliche Temperatur von rund 2000[°] in den unteren Teilen eines sehr tiefen Magmas genügt um ein Anorthositmagma mit gar bis 95⁰ Bytownit zu liefern.

¹ 0.3⁰⁰ Apatit, 1.6 Magnetit-Illmenit, 4.3 Biotit, 13.0 Pyroxen und Hornblende, 15.2 *An*, 33.9 *Ab*, 18.7 *Or*, 13.0⁰⁰ Quarz.

Die Bildung eines gigantischen Anorthosit-Magmas setzt ein Gigant-Stammagma von einer außerordentlichen Tiefe, vielleicht gar „ohne Boden“ voraus. Solche Bedingungen mögen in den älteren, archaischen und altpaläozoischen Perioden existiert haben, was erklärt, daß alle bisher bekannten großen Anorthositgebiete von hohem geologischem Alter sind. Was hier für die Anorthosite erörtert ist, mag in der Hauptsache auch auf die Dunite übertragen werden.

Die an Olivin relativ armen Peridotite führen häufig eine nicht unwesentliche Menge von Biotit, und in diesen Gesteinen ist das Metasilikat oftmals gar hauptsächlich nicht als Pyroxen, sondern als Hornblende entwickelt. In den Peridotiten mit mehr als etwa 75 % Olivin treten aber Biotit und (primäre) Hornblende stark zurück, und in den Duniten fehlen sie den bisherigen Beobachtungen vollständig. — Und in den Anorthositen, mit sehr als etwa 90 % Plagioklas, fehlt (primäre) Hornblende praktisch gerechnet vollständig, und der Biotit ist in der Regel nur in winziger Menge vorhanden. Dies besagt, daß der Gehalt von H_2O usw. in den Anorthosit- und Dunit-Magmen nur äußerst gering sein mag. Dies mag auf der bedeutenden Zufuhr von Plagioklas, resp. Olivin beruhen, indem dadurch der ursprüngliche magmatische Inhalt von H_2O usw. sehr stark verdünnt wird. — Aus den Gehalten von P_2O_5 und MgO , ferner auch von $Fe_2O_3 + FeO$, TiO_2 und K_2O in den Anorthositen folgt, daß dieselben aus $4/5$ — $9/10$ zugeführtem Plagioklas und nur $1/5$ — $1/10$ „ursprünglichem Magma“ bestehen.

Daß die Olivingesteine viel reichlicher als die Bronzitgesteine vortreten sind, mag vielleicht (?) mit dem von BOWEN festgestellten inkongruenten Schmelzpunkt von $MgSiO_3$ in Verbindung stehen. Unter gewissen Bedingungen möchte sich bei hoher Temperatur $(Mg, Fe)_2SiO_4$ statt $(Mg, Fe)SiO_3$ bilden.

Die Anorthosite beginnen bei rund 1450° und die Dunite bei noch etwas höherer Temperatur zu krystallisieren, somit bei einer nicht unwesentlich höheren Temperatur als die üblichen Eruptivgesteine. Ein Magma von Anorthosit oder Dunit wird somit bei einer Einpressung in Spalten von älteren, nicht hoch erhitzten Gesteinen ziemlich schnell so stark abgekühlt werden, daß die Verfestigung beginnt, und zwar mit der Folge, daß das Magma nicht zu der Oberfläche gelangen kann. Hierdurch mag erklärt werden, daß Effusivgesteine von anorthositischer oder dunitischer Zusammensetzung den bisherigen Beobachtungen zufolge gänzlich fehlen, und daß Gänge freilich vorkommen, jedoch sehr selten sind.

Die oben besprochene gleichzeitige Krystallisation von Plagioklas und Fe, Mg -Silikat nebst etwas Eisenerz wird so lange fortgesetzt werden, bis die eutektische Grenze gegen Or erreicht wird. Dann beginnt auch Kalifeldspat zu krystallisieren, was zu Magmen von monzonitischem, mangeritischem und syenitischem Charakter Veranlassung gibt. Zum Schluß erreichen wir auch die eutektische Grenze gegen Qu , und wir bekommen granitische

Magmen. Ich verweise diesbezüglich auf das durch Fig. 11 in meiner mehrmals zitierten Abhandlung (1908) über anchi-monomineralische und -eutektische Eruptivgesteine gelieferte Schema. — Auf diesen nach einander folgenden Differentiationen mag die Eruptionsfolge beruhen, — und BROGGERS Satz über den Parallelismus zwischen der Krystallisationsfolge und der Differentiationsfolge findet seine sehr einfache physikalisch-chemische Deutung.

Über die Anreicherung der leicht-schmelzbaren Komponente der Mischkrystalle in die Restmagma-Gesteine.

Im Gegensatz zu der Anreicherung der *schwer*-schmelzbaren Komponente, wie An, Mg_2SiO_4 und $MgSiO_3$, in die eben besprochenen *anchi-monomineralischen* Gesteine steht die Anreicherung der *leicht*-schmelzbaren Komponente in die Mischkrystall-Mineralien der *Restmagma*-Gesteine.

Als erleuchtendes Beispiel nehmen wir das von BROGGER beschriebene und oben besprochene Lardalit-Gebiet: statt einer an MgO ziemlich reichen, aber an Na_2O armen Pyroxen in dem Muttergestein führen die extrem leukokraten — und beinahe eutektischen — Endglieder einen an $NaFeSi_2O_6$ reichen (leichtschmelzbaren) Ägirin, und auf den ebenfalls von BROGGER beschriebenen nephelinsyenitischen, das Restmagma darstellenden Pegmatitgängen an dem Langesundsford begegnen wir eisenreichem Ägirin, Barkevikit (beide mit viel Natron) und Lepidomelan, nur mit bezw. 0,5—1,8, 1,1—3,6 (5,9) und 3,2—4,1 % MgO .

Ferner als Beispiel instar omnium: das charakteristische Auftreten von Ägirin in vielen typischen Alkalisyeniten, — der hohe Gehalt von $FeSiO_3$ in dem Hypersthen der Syenite und Trachyte, — und als überaus wichtig, der äußerst niedrige Gehalt von An in den Feldspaten der typischen Alkalisyenite (siehe hierüber unten) und im allgemeinen der ziemlich niedrige, in den meisten Fällen gar äußerst niedrige Gehalt von An in dem Plagioklas der sauren Granite (mit 73—75 % SiO_2).

Über die sauren Granite (mit ca. 73—75 % SiO_2) als beinahe eutektische Gesteine.

Das *granitische* Eutektikum (Feldspat: Quarz: ein wenig Fe, Mg -Silikat: ein wenig Eisenerz) ist durch mehrere von einander unabhängigen Methoden bestimmt worden:

1. Untersuchung des Schriftgranits, aus gleichzeitig auskrystallisiertem Feldspat und Quarz bestehend, — der Mikroklin-Schriftgranit mit 74—74,5 und der Oligoklas-Schriftgranit mit 76,5 % SiO_2 ; dies gibt für einen Schriftgranit mit einem mittleren Verhältnis zwischen Or und Ab (plus ganz wenig An) ca. 75 % SiO_2 .

2. Die Zusammensetzung der Grundmasse der sauren Porphyre usw., mit ungefähr 75 % SiO_2 .

Die eutektische Grenze wird ferner bestätigt durch

3. die Krystallisationsfolge zwischen Feldspat und Quarz; in mehr basischen granitischen Gesteinen beginnt Feldspat früher als Quarz zu krystallisieren, in stark sauren Gesteinen dagegen umgekehrt. Es gibt hier eine gewisse Grenze, die jedoch — vielleicht wegen des magmatischen Gehalts von H_2O , CO_2 usw. — etwas schwebend sein darf.

4. Bei „gemischten Gängen“ mit 60 bis ca. 75^{0/0} SiO_2 sind *basische* Randzonen ziemlich gewöhnlich; einige (übrigens nur drei) von verschiedenen Forschern beschriebenen gemischten Gänge mit mindestens ungefähr 77^{0/0} SiO_2 ergeben andererseits saure, an Quarz besonders reiche Randzonen, was eine frühzeitige Krystallisation von Quarz angibt.

Auf Grundlage der zahlreichen Analysen in WASHINGTONS Werk (1884—1913) habe ich den durchschnittlichen Gehalt einiger Bestandteile¹ in Graniten² mit demselben Inhalt von Kieselsäure³ berechnet.

Durchschnittlicher Gehalt der Gesteine

bei 0/0 SiO_2	Fe_2O_3	MgO	CaO	TiO_2	P_2O_5
65	} 4.40	1.50	3.20	} 0.55	} 0.20
66		1.40	3.10		
67	} 4.05	1.25	2.65	} 0.47	} 0.15
68		0.95	2.40		
69	3.05	0.80	2.25	} 0.39	} 0.14
70	2.85	0.65	2.00		
71	2.70	0.60	1.75	} 0.34	} 0.12
72	2.50	0.55	1.50		
73	2.40	0.45	1.25	} 0.19	} 0.09
74	2.00	0.30	1.15		
75	1.85	0.25	0.90	} 0.18	} ca. 0.02 (0.03?)
76	1.60	0.20	0.80		
77—78	1.55	0.18	0.80	0.13	

Die Summe der Alkalien bleibt einigermaßen konstant, jedoch derart, daß der durchschnittliche Gehalt von Na_2O etwas abnimmt (von 4.1 zu 3.3^{0/0}), derjenige von K_2O dagegen etwas zunimmt (von 3.5 zu 5.1^{0/0}).

Ferner geben wir die üblichen, den überaus meisten Graniten repräsentierenden Grenzen, indem einige — bisweilen fragliche(?) — Analysen mit besonders hohen, bzw. niedrigen Werten nicht berücksichtigt werden.

¹ Fe_2O_3 bedeutet Summe $Fe_2O_3 + FeO$.

² Einige Riebeckit-, Arfvedsonit- und Ägirin-Granite (mit sehr viel Fe_2O_3 und wenig MgO) sind nicht berücksichtigt.

³ 65^{0/0} SiO_2 bedeutet 65.0—65.99^{0/0} SiO_2 .

Übliche Grenzen bei Graniten mit

	05.0—05.9 ^{0/0} SiO ₂	75.0—75.9 ^{0/0} SiO ₂
P ₂ O ₅	0.12—0.3 ^{0/0}	Spur —0.03 ^{0/0}
TiO ₂	0.35—0.9 "	0.10—0.25 "
MgO	0.9 —2.2 "	0.10—0.55 "
Fe ₂ O ₃	3.5 —5.5 "	1.0 —2.8 "
CaO	2.3 —4.0 "	0.4 —1.2 "
CaO nach Abzug von CaO in Apatit.....	2.2 —3.7 "	0.4 —1.15 "
Al ₂ O ₃	14.5 —17.5 ^{0/0}	11.5—14.5 ^{0/0}

Die durchschnittlichen Gehalte von P₂O₅, TiO₂, Fe₂O₃ (= FeO + Fe₂O₃), MgO und CaO nehmen bei steigendem SiO₂-Prozent der Granite (wie auch der Quarzporphyre, Rhyolite usw.) *kontinuierlich* ab, und zwar in einem auffallend bedeutenden Grade. Vergleichen wir mit einander Granite einerseits mit 65—65.9 und andererseits mit 75.0—75.9^{0/0} SiO₂, so ist der durchschnittliche Gehalt von P₂O₅, TiO₂, FeO + Fe₂O₃, MgO und CaO verkleinert im Verhältnis 1 : resp ¹ 10 oder ¹ 7, ca. ¹ 3, ¹ 3, ¹ 5 und ¹ 4—¹ 3.

Diese gesetzmäßige Erscheinung kann *nicht* durch eine Zufuhr von Kieselsäure unter irgend welcher Form, z. B. von flüchtigen Silicium-Verbindungen oder durch Einschmelzen (!) von Quarzit, Sandstein usw. erklärt werden, indem dadurch die Verminderung der Gehalte an P₂O₅, TiO₂, MgO usw. nur im Verhältnis 1 : ² 3 oder ³ 4 stattgefunden haben müßte.

Die Entstehung der sauren Granite, mit etwa 73—75^{0/0} SiO₂, aus dem mehr basischen Stammagma beruht somit nicht auf irgend welcher Addition von Kieselsäure, sondern auf einer Subtraktion oder *Abzug von einem beträchtlichen Teil von P₂O₅, TiO₂, FeO + Fe₂O₃, CaO und MgO*. Diese Bestandteile sind gerade charakteristisch für *Apatit-, Magnetit-Ilmenit-, Fe-, Mg- oder Fe, Mg-Ca-Silikat*, somit für diejenige Mineralien, welche in den basischen und intermediär-sauren Graniten hauptsächlich in den *ersten* Stufen der Krystallisation ausgeschieden werden, in Betreff CaO dabei auch für die sich in dem frühzeitig ausscheidenden Plagioklas anreichernden *An-*Komponente. *Die sauren Gesteine sind folglich als Restmagma-Gesteine aufzufassen.*

Das bestehende Schema (Fig. 2), wo auf der Ordinate die in WASHINGTONS (und OSANNS) Analysentabellen innerhalb der Intervalle wie 70.0—70.99^{0/0} SiO₂ fallende Anzahl von Analysen der Tiefengesteine abgesetzt ist, gibt ein Bild über die relative Verbreitung der Granite mit wechselndem Gehalt von Kieselsäure.¹ Eine Zusammenstellung der Analysen von den Erguß- und Ganggesteinen liefert dasselbe Bild. Es gibt ein ausgeprägtes

¹ Ich verweise auf das analoge Schema Fig. 7 in meiner Abb. (1908) über anchi-eutektische Eruptivgesteine.

Maximum zwischen ungefähr 69 und 73 oder 74^{0/0} SiO_2 , ferner *eine rapide Abnahme* von 75.5 bis 78^{0/0} SiO_2 ; Granite, wie auch Quarzporphyre, Rhyolithe usw. mit noch höherem Gehalt von Kieselsäure kommen freilich vor, sind aber sehr selten. In der Tat mag in Bezug auf der relativen Verbreitung der Eruptivgesteine die Grenze bei ungefähr 75^{0/0} SiO_2 noch mehr markiert sein als das auf der Anzahl von Analysen konstruierte Schema angibt, weil viele Analysen einer beginnenden Zersetzung des Gesteins wegen einen ein klein wenig, wie 0.5 oder 1^{0/0} zu hohen Prozent von Kieselsäure ergeben.

Die Grenze bei ungefähr 75^{0/0} SiO_2 muß auf einer für die Entstehung der Granite, nebst den entsprechenden Gang- und Ergußgesteinen tief ein-

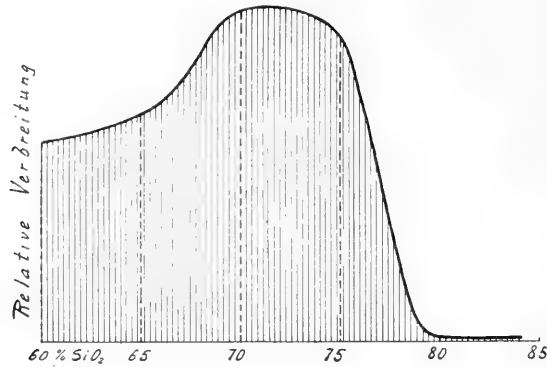


Fig. 2.

greifenden Ursache beruhen, — und es mag, wie ich schon in meiner oftmals zitierten Abhandlung vom Jahre 1908 betonte, — nicht eine Zufälligkeit sein, daß *die markierte Grenze in Bezug auf der Verbreitung der granitischen Gesteine ziemlich genau mit dem granitischen Eutektikum zusammenfällt.*

1. Die physikalisch-chemischen Gesetze betreffend der Krystallisation der Eruptivgesteine ergeben, daß bei der Krystallisation der basischen und intermediär-sauren, mehr oder weniger, gar nur eine Winzigkeit von der Komponente *Qu* enthaltenden Magmen zum Schluß ein granitisches Eutektikum mit ungefähr 75^{0/0} SiO_2 entstehen muß, und zwar gleichgültig dem anfänglichen Verhältnis zwischen *Ab + An*, *Or* und *Fe, Mg-Silikat*.

2. Die geologischen Beobachtungen en miniature geben kund, daß bei der Erstarrung von Quarz-haltigen Gabbros und Syeniten selbst nur mit ganz wenig Quarz, Restmagma-Gänge von granitischer Zusammensetzung, mit bis etwa 75^{0/0} SiO_2 , entstehen. Und was im kleinen Maßstabe vor sich geht, mag auch in großem Maßstabe, bei der gravitativen Differentiation der anfänglichen Stammagmen stattfinden.

3. Aus dem Studium der Chemie und Mineralogie der Granite folgt, daß die sauren Granite aus den mehr basischen Stammagmen durch Entfernung

der zuerst krystallisierenden Mineralien entstanden sind; sie stellen somit ein Restmagma dar.

4. Das mikroskopische Studium der relativ basischen Granite, mit etwa 66—70% SiO_2 , zeigt, daß hier zuerst ein relativ großer Teil von Apatit, Eisenerz und *Mg, Fe*-Silikat ausgeschieden wurde; auf einer frühen Stufe begann auch die Verfestigung des Feldspats, während die Krystallisation des Quarzes zuerst auf einer etwas mehr vorgeschrittenen Stufe anfang. In den sauren Graniten, mit etwa 73—75% SiO_2 , fand andererseits eine viel mehr gleichzeitige Krystallisation der verschiedenen Mineralien statt, freilich mit der Begrenzung, daß an Gesteinen mit viel Plagioklas (besonders Oligoklas und Oligoklas-Albit) und wenig Mikroklin die Krystallisation des letzteren später als diejenige des Plagioklases begann, und umgekehrt in Gesteinen mit viel Mikroklin und wenig Plagioklas. — Die eugranitisch-körnigen wie auch die porphyrischen, das Restmagma darstellenden Gänge mit ungefähr 75% SiO_2 enthalten noch eine Winzigkeit von Apatit, dabei ein wenig *MgO* und *FeO*, entsprechend meist 1 oder 1,5% Glimmer usw. und 1 oder 1,5% Magnetit (mit ein wenig Ilmenit). Diese Mineralien gehören somit auch dem zum Schluß resultierenden granitischen Eutektikum.

5. Die geologischen Beobachtungen geben kund, daß die Granite der comagmatischen Provinzen der letzten Eruptionsepoche angehören. Und aus der obigen Erörterung folgt, daß die granitischen Magmen zuerst auf der letzten Stufe der gravitativen Differentiation entstanden sein können. An den anfänglichen Stufen der Differentiation existierte überhaupt nie ein Magma von granitischer Zusammensetzung.

6. Aus physikalisch-chemischen Gründen folgt, daß das zum Schluß resultierende granitische Restmagma einen niedrigeren Krystallisationspunkt (für den Beginn der Erstarrung) als die auf den früheren Stufen der Differentiation entstandenen Restmagmen, aus denen die Gabbros-Norite, Syenite, Monzonite, Quarzmonzonite usw. herkommen, haben muß. Dies ist in der Tat auch der Fall. Ich verweise auf meine diesbezügliche Erörterung in Journ. of Geol., 1923, S. 415—419. — Ferner folgt, daß ein granitisches Magma überhaupt nie bei dem vorliegenden Druck „überhitzt“ gewesen sein mag. Und die „Überhitzung“ wegen Druckentlastung, z. B. wenn ein in einer Tiefe von 10 km. entstandenes Magma bei der Eruption zu einer Tiefe von nur 1 km. gelangt, mag nur mit Maß wie etwa 25° oder höchstens etwa 50° gemessen werden.

Diese Erörterung der Genesis der granitischen Gesteine mag nicht als ein Arbeitshypothese, sondern als eine in der Hauptsache sicher begründete Theorie betrachtet werden. Noch stehen wir aber mehreren offenen Fragen gegenüber.

In das granitische Restmagma konzentrieren sich die leichtflüchtigen Bestandteile H_2O , CO_2 usw., welche vielleicht z. T. besondere Verbindungen bilden mögen, die bei der Verfestigung zerstört werden, und die sich somit der Beobachtung entziehen. Man könnte H_2O-SiO_2 -Verbindungen oder gegen-

seitige Lösungen von SiO_2 und H_2O vermuten, welche am Schluß der Verfestigung des Granits zu den an relativ niedriger Temperatur entstandenen Quarzgängen Veranlassung geben könnten; ferner könnte man an Alkali- H_2O - oder Alkali- H_2O - SiO_2 -Verbindungen oder Lösungen denken, auf denen die eigentümliche Bildung von Myrmekit beruhen möchte. Hier bewegen wir uns jedoch auf hypothetischem Boden.

Überaus die meisten Granite, Quarzporphyre, Rhyolithe usw. enthalten weniger als die maßgebende eutektische Grenze bei 75 oder 75.5 % SiO_2 (siehe Fig. 2); einige — zufolge der Analysenstatistik etwa 7 % der gesamten Granite — sind aber noch reicher an SiO_2 . Die eutektische Quarz:Feldspat-Grenze ist somit bisweilen „überschritten“ worden. Dies scheint als generelle Ursache nicht durch eine Einschmelzung von Quarzit oder Sandstein erklärt werden zu können. Lieber möchte man eine magmatische H_2O - SiO_2 -Verbindung, wie H_2SiO_3 oder dergleichen, annehmen, die bei den magmatischen Differentiationen als selbständige Komponente existieren möchte. Dies würde, wenn die SiO_2 -Menge in dieser Komponente mit der SiO_2 -Menge in der *Qu*-Komponente zusammengefaßt wird, das Eutektikum sagen wir von 75 zu 76 oder 77 % Kieselsäure verschieben. Bei der Spaltung von der vermuteten H_2O - SiO_2 -Verbindung möchten ferner erneute Differentiationen eintreten können.

Unter den relativ basischen Graniten mit 66–68 % SiO_2 sind diejenigen, welche an Plagioklas ziemlich reich sind oder mehr *Ab* + *An* im Verhältnis zu *Or* wie die eutektische Grenzlinie ca. 0.4 *Ab* + *An* : 0.6 *Or* führen, ganz überwiegend. An Mikroklin (oder Orthoklas) sehr reiche Syenite, bezw. relativ basische Granite sind bekanntlich äußerst selten. In überaus den meisten basischen Graniten, ferner auch in den Quarzmonzoniten usw. beginnt Plagioklas früher als Mikroklin zu krystallisieren. In Übereinstimmung mit der granitiven Differentiation werden die saureren Granite im großen ganzen gerechnet ärmer an Plagioklas (mit einer immer niedrigeren *An*-Menge) und reicher an Mikroklin. Eine prozentisch gerechnet große Anzahl von den sauren Graniten fallen in Betreff der Feldspate ziemlich genau mit der eutektischen *Ab* + *An* : *Or*-Grenze zusammen. Dabei gibt es aber unter den sauren Graniten (nebst Quarzporphyren usw.) sehr viele mit noch mehr, bisweilen gar mit viel mehr *Or* als die eben genannte eutektische Grenzlinie. Dieselbe wird somit bei den sauren Graniten oftmals „überschritten“.

In einer und derselben comagmatischen Provinz, wie z. B. in dem Kristiania-Gebiet und dem Sogn-Jotunheim-Gebiet finden wir dabei *mehrere Reihen von sauren Graniten*, mit stark wechselndem Verhältnis zwischen *Or* und *Ab* + *An*, darunter auch eine Reihe mit ziemlich viel *Or*. Dies mag auf eine fortgesetzte magmatische Differentiation innerhalb der Restmagmen beruhen. Ich verzichte aber auf Arbeitshypothesen zur Deutung dieser schwierigen Frage einzugehen.

Über die Alkalisyenite (Pulaskit usw.) als beinahe eutektische
Or: Ab (oder *Ab + An*)-Gesteine.

Wir beginnen mit einer Übersicht über das *Feldspat-System Or: Ab: An*.

Wie es kürzlich (1922) von BOWER und MAREY nachgewiesen ist, hat reiner Kalifeldspat ($KAlSi_3O_8$) einen inkongruenten Schmelzpunkt (bei 1170°), wo er zu Leucit plus Glas zerfällt; zuerst bei 1530° erhält man eine vollständige Schmelze. Bei mehr Kieselsäure als etwa $10^{0,0} SiO_2:90^{0,0} KAlSi_3O_8$ hört der Zerfall zu Leucit auf, und wir bekommen eine direkte Krystallisation von Kalifeldspat, bis zu dem Eutektikum zwischen demselben und SiO_2 . Auch natürlicher Orthoklas (Mikroclin, Adular etc.) ergibt oberhalb ungefähr 1170° denselben Zerfall zu Leucit und Glas, indem jedoch die Temperatur, wo der Leucit in Lösung geht, mit steigender *Ab*-Menge abnimmt. Bei welchem Gehalt von *Ab* in dem Orthoklas der Zerfall zu Leucit aufhört, ist noch nicht entschieden worden.

Eine *primäre* Krystallisation von reinem Kalifeldspat kann somit (dem Druck von einer Atmosphäre vorausgesetzt) nur aus Lösungen unterhalb 1170° stattfinden. Bei mindestens etwa $10^{0,0}$ freier Kieselsäure hört in einer *Ab*-freien Lösung die primäre Ausscheidung von Leucit auf, und dasselbe wird auch bei einer größeren Beimengung oder *Ab*- oder *Ab + An*-Substanz der Fall sein.

Unter Hinweis auf meiner Darstellung in TSCHERMAKS Mitt. vom Jahre 1905, auf einem Vortrag von TH. VOGT (1920), auf den Abhandlungen von HERZENBERG (1911), DITTLER (1912), WARREN (1915), MÄKINEN (1917) und ALLING (1922, 23) und auf festgesetzten (analytischen) Studien von mir selber ziehe ich die folgenden Schlüsse:

Der sich nur bei relativ hoher Temperatur bildende Natronorthoklas (Natronmikroclin, BROGGERS Kryptoperthit) mag sicher so viel als $58^{0,0} Ab$ (oder *Ab + An*), vielleicht gar so viel als etwa $60^{0,0} Ab$ (oder *Ab + An*) und der Anorthoklas, mit schrittweisem Übergang zu Albit oder Oligoklas, bei wenig *Ab* sicher so viel als 32 oder $33^{0,0} Or$ und bei mehr *An* so viel als etwa $28^{0,0} Or$ ($28 Or\ 52 Ab\ 20 An$) enthalten.

Der in den sauren Graniten (Erstarrungstemp. etwa 950°) gebildete Orthoklas (Mikroclin) enthält bis etwa $35 Ab + An$ und der Oligoklas bis etwa $14 Or$, — und in den üblichen, Glimmer-führenden Granitpegmatitgängen (Temp. etwa $750-800^\circ$), der Mikroclin bis etwa $32 Ab + An$ und der Oligoklas-Albit bis etwa $12 Or$.

Der auf „alpinen Gängen“ auftretende und durch Krystallisation aus wässerigen Lösungen bei etwa $350-400^\circ$ gebildete Adular enthält bis etwa $15 Ab$ (oder *Ab + An*) und der Albit bis etwa $5 Or$.

Der nach Abzug von den Perthitlamellen restierende Mikroclin enthält bei üblicher Temperatur noch ungefähr $10^{0,0} Ab + An$ als Misch-

krystall-Beimengung, und der Oligoklas nach Abzug von den antiperthitischen Lamellen schätzungsweise 4⁰/₀ *Or*.

Auf Grundlage dieser Daten ziehen wir die Sättigungsgrenze von *Ab* in Orthoklas (Mikroklin) nebst Kryptoperthit, und von *Or* in Anorthoklas und Albit (oder Albit-Oligoklas). Diese Grenze gibt auch die Perthit-, resp. die Antiperthit-Grenze an.

Einige der bisherigen Analysen von Kalinatronfeldspaten fallen innerhalb des Intervalles zwischen 40 *Or* 60 *Ab* (oder *Ab* + *An*) und 33 *Or* 67 *Ab* (oder *Ab* + *An*); keine von diesen Analysen ist jedoch absolut

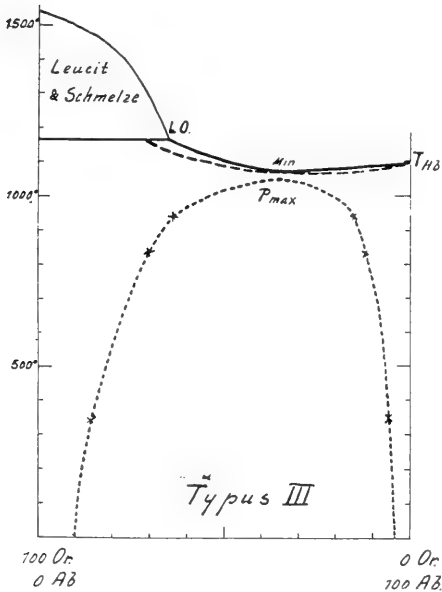


Fig. 3 a.

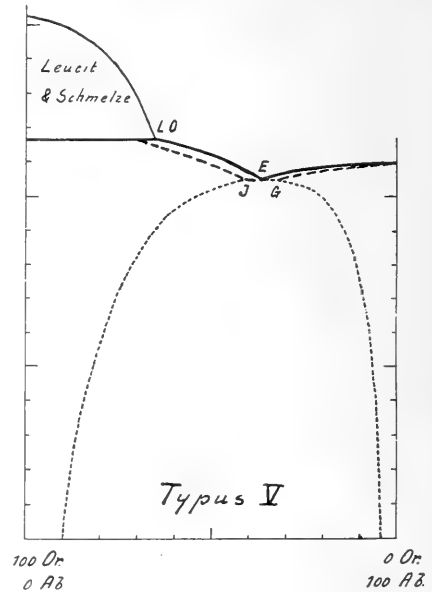


Fig. 3 b.

trauenswert. Aus dem bisherigen Analysenmaterial läßt sich somit nicht entscheiden, ob es eine ganz kleine oder überhaupt gar keine Mischungslücke gibt, — oder mit anderen Worten, ob *Or*:*Ab* zum Typus III (mit minimalem Unterschied zwischen Min. und $P_{max.}$, siehe Fig. 3 a¹) oder zum Typus V (Fig. 3 b) gehört.

Bei steigendem Inhalt von *Or* in Anorthoklas nähert sich der Winkel α (oder der Winkel $010:001$) zu 90° , und der Unterschied in Bezug auf der Auslöschungsschiefe auf 001 zwischen an *Ab* sehr reichem Kryptoperthit und an *Or* sehr reichem Anorthoklas ist nur äußerst gering. Dies macht es wahrscheinlich, daß das reine *Or*:*Ab*-System dem Typus III (Fig. 3 a) angehört. Dies ist jedoch für die Petrographie von untergeordneter Bedeutung, indem selbst die an Kalinatronfeldspat reichsten Gesteine praktisch gerechnet nie weniger als etwa 5⁰/₀ fremde Mineralien (*Fe*, *Mg*-Silikat, Eisenerz, Quarz usw.) ent-

¹ Punkt LO ist willkürlich gewählt.

halten. Dadurch wird die Krystallisationstemperatur ein wenig erniedrigt, und wir werden eine Krystallisation nicht an Punkt P_{\max} , sondern in der Nähe von P_{\max} an Fig. 3 a erhalten. Das heißt, bei einer Beimengung von fremden Komponenten verhält sich $Or : Ab$ (oder $Ab + An$, indem selbst in den reinsten Kalialronfeldspaten immer ein wenig An vorkommt), wie an Fig. 3 b angegeben. Einen Beweis hierfür finde ich u. a. darin, daß in mehreren aus ganz überwiegend Feldspat bestehenden Gesteinen mit ungefähr 0.35 à 0.4 $Or : 0.65 : 0.6 Ab + An$, beide Arten von Feldspaten festgestellt worden sind. Dies ist bei Typus III (Fig. 3 a) eine theoretische Unmöglichkeit.

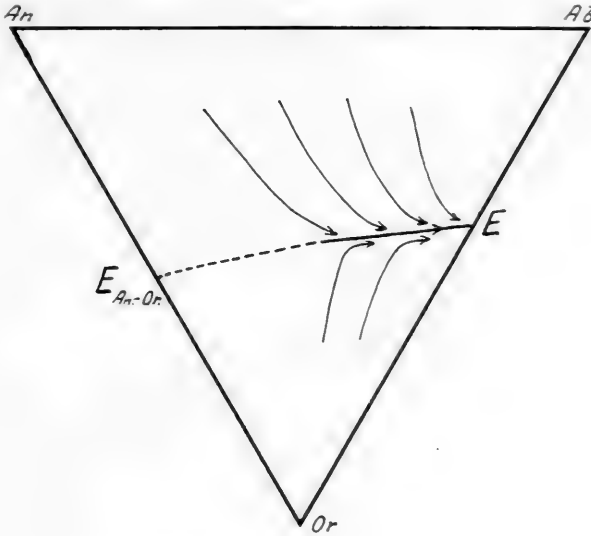


Fig. 4.

Der Punkt E muß annähernd in der Mitte zwischen J und G , somit bei ungefähr 37 oder 38 Or liegen.

Das System $Or : An$ muß dem Typus V, mit Eutektikum, gehören.

In den Eruptivgesteinen gibt es, wie ich früher erörtert habe, eine bei ungefähr 40 $Or : 60 Ab + An$ liegende Individualisationsgrenze zwischen Kalifeldspat einerseits und Oligoklas-Andersin-Labradorit andererseits. Der „figurative Punkt“, im System $Or : Ab : An$ (nebst ein wenig Qu, Mg, Fe -Silikat, Eisenerz usw.) bewegt sich, den petrographischen Beobachtungen zufolge, in die durch die Pfeile an Fig. 4 angegebenen Richtungen. Folglich muß die eutektische Grenzlinie einen Fall gegen E haben. Dies ist freilich nur für die Strecke zwischen gleich viel Ab und An , und nur Ab (nebst ein ganz wenig An , wie Ab_{95}, An_5) festgestellt worden. Der Verlauf der Grenzlinie zwischen gleich viel $Ab + An$ und E_{An-Or} ist noch nicht bestimmt worden, was übrigens für die hier vorliegende Frage von untergeordneter Bedeutung ist. — Das $Or : Ab + An$ -Verhältnis des Restmagma der üblichen Orthoklas-Plagioklas-Gesteine muß sich somit bei der vorwärts schreitenden Krystallisation immer

mehr dem Verhältnis ca. 40 *Or*:60 *Ab* (oder *Ab* + *An*) nähern, und dieser Wert stimmt mit dem obigen, auf ganz anderer Weise erhaltenen Wert von *E*, annähernd in der Mitte zwischen *J* (etwa 42 *Or*) und *G* (etwa 33 *Or*) gut überein.

Die eigentlichen Alkalisyenite, nämlich Nephelin-freier Pulaskit und der nahestehende, ein wenig Quarz enthaltende Nordmarkit unterscheiden sich

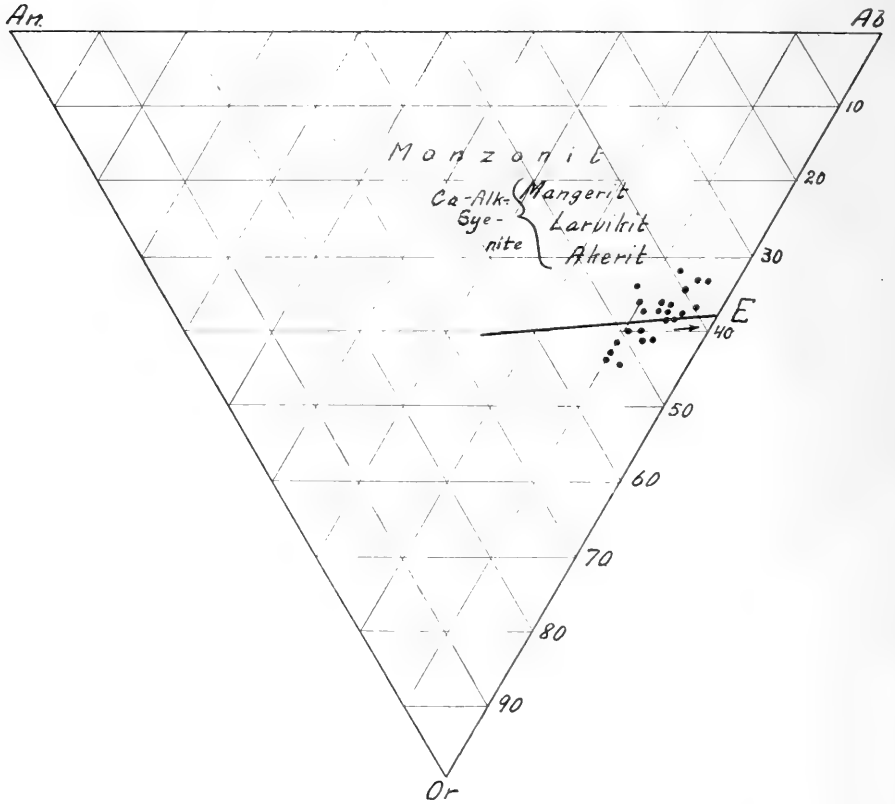


Fig. 5.

durch mehrere von einander unabhängige Kriterien von den Alkalikalksyeniten (*Akerit*, *Larvikit*, *Mangerit* usw.) nebst *Monzonit*.

1. Die Alkalisyenite erhalten ganz wenig, meist nur 4–8% *Fe*, *Mg*- oder *Na*, *Fe*-Silikat und dabei ein wenig Eisenerz, und zwar entschieden weniger wie die Alkalikalksyenite nebst den *Monzoniten*. Besonders ist der *MgO*-Gehalt der Alkalisyenite ziemlich niedrig, und in vielen derselben erscheint ein an der relativ leicht-schmelzbaren *Natron-Eisen-Komponente* sehr reicher *Pyroxen* oder *Hornblende*. Ferner führen sie im großen ganzen nennenswert weniger P_2O_5 und TiO_2 als die Alkalikalksyenite und *Monzonite*.

2. Der *An*-Prozent in der *Feldspatmischung* der Alkalisyenite ist viel geringer als derjenige der Alkalikalksyenite und *Monzonite*; der

Or-Prozent ist andererseits etwas höher¹. An Fig. 5 ist das *Or:Ab:An*-Verhältnis in 23 präsumptiv brauchbaren Analysen von Alkalisyeniten eingezeichnet, ergebend meist nur 3—9, seltener so viel wie 10—12 *An* und dabei zwischen 45 und 32, meist zwischen 42 und 36 *Or* zu Rest *Ab + An*; sie gruppieren sich somit um die eutektische Grenzlinie zwischen *Or* und *Ab + An*, bei Gegenwart von nur ganz wenig *An*.

Die Alkalisyenite sind somit — wie ich schon im Jahre 1908 betonte — *beinahe eutektische Or:Ab-Gesteine*, mit einem *niedrigen Gehalt von An in den Feldspäten und ferner mit einer niedrigen Beimengung von Fe, Mg- oder Na, Fe-Silikat nebst Eisenerz und Apatit*.

In den Alkalikalksyeniten und den Monzoniten krystallisieren auf den ersteren Stufen: Apatit, Titaneisenerz, *Fe, Mg-Silikat* (die ersteren Glieder mit relativ viel *Mg*) und ferner ein an *An* relativ reicher Plagioklas. Diese Mineralien abgezogen resultiert ein beinahe eutektisches Restmagma von pulaskitischer Zusammensetzung.

Über die meisten Gabbros, Norite und Diorite als beinahe eutektische Plagioklas: Pyroxen (oder *Fe, Mg-Silikat*)-Gesteine.

In Fig. 6 habe ich die von BOWEN bestimmte eutektische Grenzlinie zwischen *An + Ab* und Diopsid eingezeichnet, und ferner habe ich — gestützt auf einem sehr umfangreichen Material von Gesteinsanalysen nebst litterarischen Angaben wie auch auf meiner jahrelangen Erfahrung als kartierender Geolog — die relative Verbreitung der verschiedenen Plagioklas: Pyroxen-Gesteine durch Punktierung von wechselnder Intensität anzugeben versucht.

In der Serie Gabbro-Norit zu Diorit nimmt im großen ganzen die Quantität von monoklinem, bezw. rhombischem Pyroxen wie auch der anderen *Fe, Mg-Silikate* mit steigender *Ab*-Menge in dem Plagioklas ganz erheblich ab. Wenn Eisenerz (und Apatit), in einigen Fällen auch der in geringer Menge vertretene Quarz nicht berücksichtigt werden, beträgt der *durchschnittliche* Gehalt der Gabbros-Norite und Diorite

bei <i>Ab₃An₇</i>	40—45 0 0	} Pyroxen, in einigen Fällen nebst primärer Hornblende und Biotit.
„ <i>Ab₅An₅</i>	ca. 35 „	
„ <i>Ab₇An₃</i>	20—25 „	

Der Durchschnitt sehr zahlreicher Analysen von Gabbros, Noriten und Dioriten, in Gruppen nach dem *An:Ab*-Verhältnis des Plagioklases eingeteilt, zeigt ferner eine gute Übereinstimmung mit dem berechneten Eutektikum zwischen Plagioklas und Diallag, resp. Hypersthen.

Unter den zahlreichen von mir mikroskopisch erforschten Gabbros und Noriten — hier die unten erwähnten, ziemlich seltenen Anorthosit-Gabbros

¹ Wir berücksichtigen hier nicht die äußerst spärlichen Kalisyenite.

und -Norite nicht mitgerechnet — ergeben nur eine ziemlich geringe Anzahl eine Krystallisation von etwas Plagioklas vor dem Beginn der Krystallisation des Pyroxens. Für eine große Anzahl läßt sich nicht entscheiden, welches von den beiden Mineralien zuerst zu krystallisieren anfangt; diese Gesteine liegen somit ziemlich genau der eutektischen Grenze entlang. Wiederum für eine sehr große Anzahl, nach meiner Erfahrung gar für eine noch größere Anzahl wie für den gerade erwähnten Fall, ergibt sich,

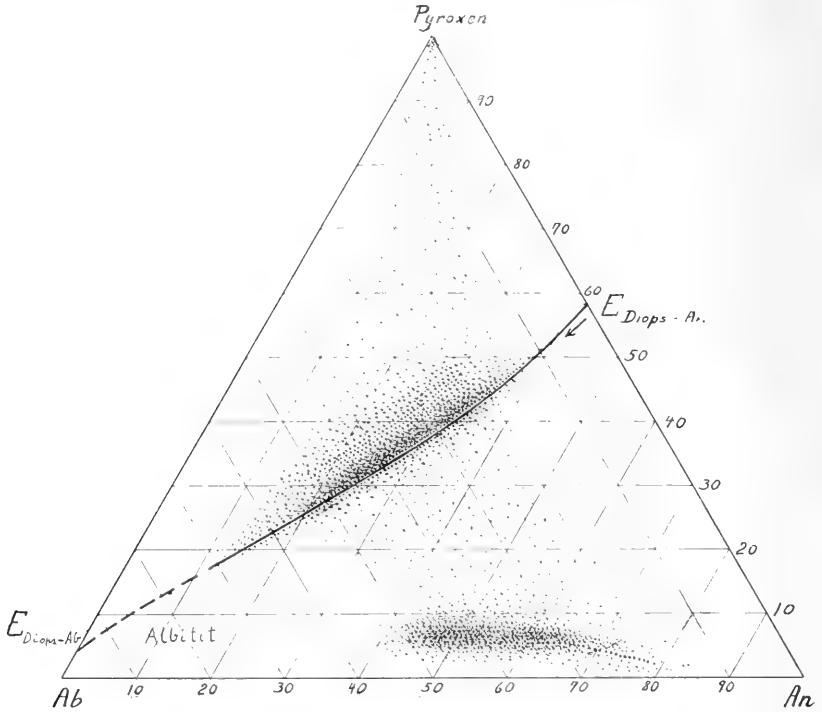


Fig. 6.

daß etwas von dem Pyroxen vor dem Beginn der gleichzeitigen Krystallisation der beiden Mineralien ausgeschieden wurde.

Die obigen Tatsachen geben kund, daß die chemische Zusammensetzung der Gabbros, Norite und Diorite in irgend einer Weise von dem Eutektikum Plagioklas : Pyroxen (eventuell anderen *Fe, Mg*-Silikaten) geregelt wird, jedoch mit der Reservation, daß mehrere Gesteine einen Überschuß von *Fe, Mg*-Silikat als einen Überschuß von Plagioklas enthalten.

Es gibt Eruptivgesteine mit allen möglichen quantitativen Proportionen zwischen Plagioklas und Pyroxen, von etwa 2 bis 100% Pyroxen und von etwa 98% bis Null Plagioklas. — Zwei markierte Reihen zeichnen sich jedoch durch eine gigantische Verbreitung aus, nämlich einerseits die Anorthosite, mit im Durchschnitt für die größeren Gebiete meist zwischen etwa 4 und etwa 10—12% Pyroxen und andererseits die noch mehr

verbreiteten Gabbros, Norite und Diorite. Die zwischen denselben in Bezug auf Pyroxen-Quantität stehenden Anorthosit-Gabbros und -Norite, die sich geologisch hauptsächlich den Anorthositen anschließen, haben eine viel geringere topographische Verbreitung; von diesen Gesteinen liegen auch nur eine geringe Anzahl Analysen vor.

Die normalen Gabbros und Norite gehen bei steigender Pyroxenmenge nach und nach in Diallagit-Gabbros und Hypersthenit-Norite, mit zwischen etwa 40 und 10% Plagioklas über. Aber auch diese Gesteine sind zufolge meiner Erfahrung relativ spärlich vertreten. Zum Schluß kommen die ebenfalls spärlichen Diallagite und Diopsidfelse, ohne oder nur mit ganz wenig Plagioklas, und die äußerst seltenen Bronzitgesteine.

Früher wurden die Anorthosite häufig als eine Art Unterabteilung unter Gabbros-Norit aufgefaßt. Dies gibt aber ein in petrographischer und geologischer Beziehung nicht zutreffendes Bild.

Die Anorthosite sind durch eine sehr weitgehende Differentiation in proto-angereicherter Richtung entstanden. Für die Gabbros, Norite und Diorite mögen freilich mehrere Stufen von Differentiationen vorausgesetzt werden. Das entscheidende war jedoch die zum Schluß stattfindende, in eutektischer Richtung gehende Differentiation.

Über den durchschnittlichen Phosphorsäure- und Titansäure-Gehalt der Eruptivgesteine.

Ausgehend von den zu einem wesentlichen Teil von mir selber berechneten durchschnittlichen Gehalten der Granite (mit wechselndem Kieselsäuregehalt, siehe die Tabelle S. 20), Granodiorite, Monzonite, Diorite, Gabbro-Norite, Anorthosite und der übrigen mehr verbreiteten Tiefengesteine und ferner unter einer schätzungsmäßig ausgeführten Berücksichtigung der relativen Verbreitung der Tiefengesteine berechne ich die Durchschnittswerte:

$$\begin{array}{l} 0.16-0.18\% P_2O_5, \\ \text{ca. } 0.60\% \text{ „ } TiO_2. \end{array}$$

Der durchschnittliche Gehalt der sedimentären Gesteine beträgt (zufolge CLARKE) ungefähr 0.15% P_2O_5 , somit ziemlich genau wie der Tiefengesteine.

CLARKE und WASHINGTON (1922) berechnen für die Eruptivgesteine im Durchschnitt 0.299% P_2O_5 und 1.05% TiO_2 , somit bedeutend mehr als die meinige Berechnung angibt. Dies beruht darauf, daß jeder einzelnen Gesteinsanalyse derselbe Wert zugeteilt worden ist. Dadurch bekommen die überaus zahlreichen Analysen von basischen, an P_2O_5 und TiO_2 besonders reichen Ganggesteinen, die verglichen mit den Tiefengesteinen in quantitativer Beziehung außer Betracht werden können, wie auch die vielen Analysen von besonders P_2O_5 - und TiO_2 -reichen, aber nur äußerst wenig ver-

breiteten Tiefengesteinen (siehe den nächstfolgenden Abschnitt) einen ganz unberechtigten Einfluß auf die Durchschnittsberechnung.

Alle diese letzteren Analysen sollten bei der Durchschnittsberechnung beinahe gänzlich außer Betracht gesetzt werden. Daß CLARKE und WASHINGTONS Ziffer, 0.299^{0/0} P_2O_5 , viel zu hoch sein muß, folgt schon daher, daß Tiefengesteine mit mehr als 0.25—0.30^{0/0} P_2O_5 , nur selten große Dimensionen erreichen.

Weil Apatit und Ilmenit-Magnetit, gelegentlich auch Titanit (und titanhaltiger Pyroxen usw.) in den allermeisten Magmen zu den ersten Ausscheidungsprodukten gehören, werden P_2O_5 und TiO_2 bei der gravitativen Differentiation, und somit auch in den resultierenden Gesteinen einander Folge leisten. Eine Trennung der beiden Bestandteile wird jedoch bisweilen, u. a. durch die verschiedenartige Resorptionsfähigkeit der hinuntersinkenden Mineralien, eintreten.

Die beinahe eutektischen Restmagma-(Silikat-)Gesteine charakterisieren sich durchgängig durch einen äußerst niedrigen Gehalt von P_2O_5 , in den allermeisten Fällen auch von TiO_2 , in Betreff TiO_2 jedoch mit Ausnahme für die Restmagmen besonders des Anorthosits.

Über Daly's Hypothese zur Deutung der Alkaligesteine.

Dieselbe geht bekanntlich darauf hin, daß Kalkstein (oder Dolomit) in einem tief belegenen Magma („Basaltmagma“) eingeschmolzen sein sollte. Hierdurch müßten *Ca, Fe, Mg*-Silikate (Pyroxen usw.) wie auch ein sehr basischer Plagioklas in bedeutender Menge gebildet werden und nach Entfernung derselben entstände ein leichtes und ziemlich basisches Alkalimagma. — Dasselbe müßte somit gar in ausgeprägtem Grade ein Restmagma darstellen.

In der Tat werden die (Silikat-)Restmagmen, wie gerade erwähnt, immer durch einen äußerst niedrigen Gehalt von P_2O_5 , mit ganz unwesentlichen Ausnahmen auch durch einen sehr niedrigen Gehalt von TiO_2 gekennzeichnet.

Wir geben eine Übersicht über den durchschnittlichen Gehalt von P_2O_5 , TiO_2 (und *MgO*) der hier besprochenen Alkaligesteine.

Essexit, Essexitgabbro, Shonkinit, Theralith, Missouriit, Jolith, Bekinkinit, Meltegit — Tephrit, Basanit, Nephelinit, Nephelinbasalt, Nephelin-Melilithbasalt, Melilithbasalt — Leucitophyr, Leucitit, Leucitbasalt:

Pct. P_2O_5 : 0.66, 0.47, 1.08, 0.76, 0.86, 1.43 und 0.98, 0.87, 1.80 — 0.86, 0.67, 1.07 und 1.29, 0.96 und 0.82, 0.60, 0.65 — 0.72, 0.53, 1.36^{0/0} P_2O_5 .

Pct. TiO_2 : 1.88, 2.57, 0.98, 1.98, 1.41, 1.56 und 1.48, 2.75, 2.26 — 1.02, 1.60, 1.38 und 2.23, 1.53 und 1.79, 2.73, 4.91 — 0.79, 0.48, 0.75^{0/0} TiO_2 .

Pct. *MgO*: 4.05, 6.13, 8.21, 6.22, 13.49, 3.19 und 2.44, 9.42, 5.15 — 4.06, 8.41, 3.81 und 4.70, 10.73 und 12.13, 15.70, 15.89 — 1.83, 3.50, 6.01^{0/0} *MgO*.

Ein gar sehr bedeutender P_2O_5 -Gehalt ist ein durchgreifendes Kriterium aller dieser Gesteine; dasselbe gilt, nur mit einigen untergeordneten Ausnahmen, auch dem TiO_2 -Gehalt. Ferner ist der MgO -Gehalt der hier besprochenen Gesteine nur in einigen Fällen sehr niedrig und meist mittel hoch oder sehr hoch.

Ich betrachte es hierdurch als dargetan, daß DALY's Hypothese nicht zutreffend sein kann, und daß die Alkaligesteine im wesentlichen durch eine Differentiation in proto-angereicherter Richtung entstanden sind. Sie mögen wohl übrigens mehrere Stufen von Differentiationen durchgelaufen haben. — Ich lenke die Aufmerksamkeit auf die von BOWEN (1922) gelieferte Deutung, durch gravitative Differentiation der wegen des inkongruenten Schmelzpunktes von Orthoklas frühzeitig entstandenen Leucits.

Schlussbemerkungen.

An der Grenze zwischen der Lithosphäre und der Barysphäre und auch sonst bei der anfänglichen Bildung der Stammagmen mögen unzweifelhaft gar sehr bedeutende Einschmelzungen vom festen Gestein (abyssische Assimilation) stattgefunden haben. Nach dem Beginn der Differentiation mag aber die Einschmelzung nach meiner Meinung als ein ganz unwesentlicher Faktor betrachtet werden.

In mehreren geologischen Beschreibungen, wo eine marginale Assimilation oder eine Kombination zwischen derselben und der gravitativen Differentiation verteidigt wird, lassen sich die Vorgänge nach meiner Meinung ausschließlich durch die gravitative Differentiation erklären. Nehmen wir das Beispiel DALY's Beschreibung¹ von der granitischen „red rock“ (mit 73,4—74,0 0/0 SiO_2 und mit ungefähr 0,45 Or : 0,55 $Ab + An$, somit von Zusammensetzung annähernd wie das ternäre granitische Eutektikum), welcher als Dach eines Gabbro-Sills erscheint, so mag ich nicht der Deutung zutreten, daß derselbe auf eine Assimilation von dem angrenzenden sauren, ziemlich eisenreichen (!), aber alkaliarmen (!) Nebengestein beruhen sollte. Ein granitisches Restmagma, von der Zusammensetzung ungefähr wie der „red rock“, ist bei den Gabbros eine nicht seltene Erscheinung, und bei dem Pigeon Point mag das Restmagma sich, des¹ leichteren spezifischen Gewichts wegen, nach oben wie auch an den losgerissenen Bruchstücken des Nebengesteins, angesammelt haben.

Die gravitative Differentiation setzt voraus, daß der gegen das Nebengestein angrenzende Teil des Magmas soweit stark abgekühlt ist, daß eine Krystallisation anfangen mag. Zuerst beginnt Mineral Nr. 1 zu krystallisieren, späterhin auch Mineral Nr. 2, noch später auch Mineral Nr. 3 usw.

¹ Amer. Journ. of Sc. XLIII, 1917.

Dabei mag jedoch berücksichtigt werden, daß selbst in den ternären Mischkrystallsystemen mag in gewissen Fällen die Krystallisation von einem Mineral frühzeitig *aufhören* — dasselbe findet auch bei Typus IV im binären System statt — und auch mag eine *abgebrochene* (oder *rekurrente*) Krystallisation von einem Mineral eintreten können¹. Derartige teils aufgehenden und teils abgebrochenen Krystallisationen sind in den aus zahlreichen Komponenten, darunter auch vielen Mischkrystallkomponenten bestehenden Magmen gelegentlich zu erwarten. Ferner mögen u. a. durch den Einfluß der leichtflüchtigen Bestandteile und durch Variationen des Druckes im Laufe der Krystallisation ganz neue Gleichgewichtsbedingungen eintreten können.

Die Krystallisation und folglich auch die Krystallisations-Differentiation mag somit unter gewissen Bedingungen sehr kompliziert ausfallen.

Wenn wir das geometrische Bild von dem ternären System auf die mehr komplexen Systeme der Magmen übertragen, so beginnt die Krystallisation von Mineral Nr. 1 auf einer Krystallisations-Fläche; dann folgt in der Regel eine gleichzeitige Krystallisation von Nr. 1 und Nr. 2 auf einer eutektischen Grenzlinie, die wir kurz als eine eutektische Linie bezeichnen; späterhin gelangen wir zu neuen eutektischen „Linien“, was wir alles kurz mit dem Schlagwort „Eutektika“ in ausgedehnter Bedeutung des Begriffes zusammenfassen können, indem die vorwärts schreitende Krystallisation immer mit einer Abnahme der Temperatur verknüpft ist.

In Übereinstimmung mit dieser Erörterung muß die gravitative Differentiation, die in der Hauptsache als festgestellt betrachtet werden mag, durchgängig an der *oberen* Grenze des Krystallisations-Intervalles stattgefunden haben.

Die Verteidiger der (marginalen) Assimilationen überschätzen häufig die bei der *mise en place* der Magmen herrschende Temperatur. Gegen eine weitgehende (marginale) Assimilation — von dem in chemischer Beziehung wechselnden Nebengestein — nach dem Beginn der Differentiation mag namentlich einwendet werden, daß die durch die physikalisch-chemischen Gesetze geregelte chemische Zusammensetzung der Eruptivgesteine hierdurch nicht erklärt werden mag.

In meiner Arbeit über anchi-monomineralische und -eutektische Eruptivgesteine (1908) hob ich als generellen Schluß hervor: „*Die eutektischen Linien zwischen den prädominierenden Mineralien sind für die Zusammensetzung der verbreitetsten Eruptivgesteine von fundamentaler Bedeutung; und diese eutektische Linien liefern uns die chemischen Einteilungslinien, die als Grundlage für eine genetische Klassifikation benutzt werden mögen*“.

Die Richtigkeit dieses Satzes betrachte ich als sicher festgestellt, und die Ursache ist in der gravitativen Differentiation zu suchen.

¹ Ich verweise auf den auf Grundlage von SCHREINEMAKERS Darstellung ausgearbeiteten Abschnitt in meiner Abh. in Tschermaks Mitt., XXVII, 1908, S. 143—155.

Die in den Magmen herrschenden Gleichgewichte mögen durch wechselnden Druck und durch das Vorhandensein von mehr oder weniger H_2O , CO_2 usw., welche besondere in dem physikalisch-chemischen System hineingehende Komponente bilden, verschoben werden. Dies beeinflusst aber nicht unseren generellen Satz, mag aber die Lösung der Fragen bezüglich der Differentiation oftmals erschweren.

Die Eutektika — die eutektischen Grenzlinien usw. einbegriffen — liefern den Schlüssel zur Deutung der magmatischen Differentiation und damit auch der gesetzmäßigen chemischen Zusammensetzung der Eruptivgesteine.

Gedruckt 7. Februar 1924.

MONOCORYNE GIGANTEA (BONNEVIE) BROCH

AV
GERDA JOHANNESSEN

(MED 2 PLANCHER OG 7 TEKSTFIGURER)

VIDENSKABSSELSKABETS SKRIFTER. I. MAT-NATURV. KLASSE. 1923. N. 18.



KRISTIANIA
I KOMMISSION HOS JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i den mat.-naturv. classes møte den 13. april 1923 ved professor Bonnevie.

Under en zoologisk ekskursion til Trondhjemsfjorden i 1921 blev i dennes ytre del fundet et eksemplar av *Monocoryne gigantea*, en sjelden forekommende solitær hydroide.

Da denne hittil kun er fundet i faa eksemplarer, og da der ikke foreligger nogen fuldstændig beskrivelse av dyret, har jeg, efter professor BONNEVIE opfordring, foretat en indgaaende undersøkelse av det paa ekskursionen fundne eksemplar. — Jeg vil her faa benytte anledningen til at takke professor BONNEVIE baade for overlatelsen av dette materiale og for den levende interesse, hvormed hun har fulgt mit arbeide.

Monocoryne gigantea blev første gang beskrevet av BONNEVIE (1898), som blandt Tromsø-museets materiale fandt 2 individer indsamlet ved Hammerfæst paa 50—100 favnes dyp. Hun gav den navnet *Coryne gigantea*.

SWENANDER (1903) er den næste som nævner den. Han fandt en del eksemplarer i Trondhjems museum. De var indsamlet av konservator STORM, som hadde bestemt nogen av dem som *Myriothela Cocksii*, andre som *Myriothela phrygia*. I 1902 fandt SWENANDER selv et eneste eksemplar ved Roberg i Trondhjemsfjorden i 460 m.s dybde. Han angir maalene for dens størrelse, men gir ellers ingen beskrivelse av den.

BROCH (1909) utskiller den som egen slekt under navnet *Monocoryne gigantea*, og i et senere arbeide (1916) oplyser han, at gonoforene paa samme individ er baade hanlige, hunlige og hermafroditiske. Naar undtas en totaltegning i BONNEVIE'S avhandling (1898) og en tegning av en av dens neslekapsler (BROCH 1916), er der hittil ikke levert nogen avbildninger av arten.

Det eksemplar som her skal beskrives (Pl. I, fig. 1), blev fundet i juni 1921 ved Hambaara i Trondhjemsfjordens ytre del i 100—150 m.s dybde, fæstet til et brudstykke av et muslingskal. Det har en anselig størrelse, idet dets totallængde i fikseret tilstand er litt over 11 mm. Hydranten er 7 mm. lang, hydrocaulus 4 mm. Hydranten er noget flattrykt, dens største bredde er 5 mm., mens hydrocaulus's bredde er 1.5 mm. De maal som SWENANDER opgir paa det eksemplar han fandt i Trondhjemsfjorden, stemmer bra overens med disse; hans eksemplar hadde ogsaa den flattrykte hydrant.

De to av BONNEVIE beskrevne eksemplarer avviker ikke synderlig hvad maalene angaar; de har dog en næsten cylindrisk hydrant med 2 mm.s tversnit, og de er begge to S-formig krummet. Muligens dreier det sig om to forskjellige arter.

Som man vil se av totaltegningen, frembyr *Monocoryne gigantea* et vakkert syn med sin store rikdom paa tentakler og gonoforer. Øverst sees mundspalten, nederst den plateformig utbredte hydrorrhiza. Gjennem gonoforvæggen skimtes eggene hos de modne hunlige gonoforer; nogen gonoforer er ved apex uttrukket i en spids; de har aapnet sig. — Dyret blev fiksert paa RABLS væske (50 dele conc. picrinsyre, 50 dele conc. sublimat, 2 dele iseddik), en fiksertionsmetode som desværre viste sig uheldig for dets løse ektoderm. Den øverste del av dyret blev snittet paa tvers, den nederste paa langs.

Trophosome.

Dyrets *ektoderm*, som overalt er rikt forsynt med nesleceller, bestaar i hydrantens øverste del av et kubisk epitel med tydelige cellegrænser (Fig. 1).



Fig. 1. Et stykke av ektodermen i den øverste del av polypen.

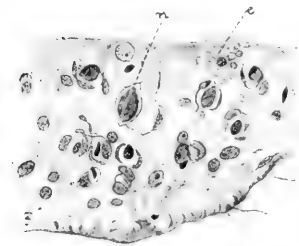


Fig. 2. Et stykke av ektodermen længer nede. c = eosinofile granula, n = neslecelle.

Længer nede fortykkes ektodermen til et løst cellenvæv bestaaende av store, svakt farvbare celler (Fig. 2); denne del av ektodermen var, som allerede nævnt, sterkt medtat under fangst og fiksertion.

Entodermen, som bestaar av høie cylinderepitelceller (Fig. 3), udmerker sig i hydrantens øverste del ved sin rikdom paa kjertelceller.

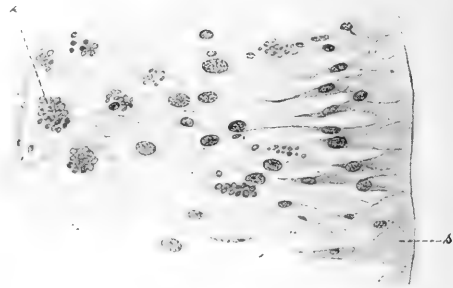


Fig. 3. Et stykke av entodermen i den øverste del av polypen. s = slimkjertelcelle, c = celle med eosinofile granula.

I begge cellelag ser man inde ved deres basis et vekslende antal celler med et sterkt granulert indhold, farvbart med eosin. I nærheten av mundaapningen findes disse celler i store mængder, særlig i entodermen; længer nede ser man dem spredt saavel i ento- som ektoderm. Sterkt paafaldende er de ogsaa i ektodermen paa tentaklenes kuleformig fortykkede endeparti (Fig. 7).

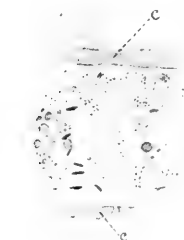


Fig. 4. Snit gjennem et stykke av hydrorrhiza. c = chitinplate indenfor peridermen.

Stottelamellen er paa den mot ektodermen vendende side dækket av en kraftig, foldet længdemuskulatur (Pl. I, fig. 2). *Hydrocaulus* er omgitt av en tynd perisark, som paa hydrorrhiza er understøttet av et tykt chitinlag (Fig. 4).

Tentaklene er kølleformede. De fleste tentakler er anordnet i grupper med en fælles ektoderm ved basis; ogsaa gonoforene sees i sin nedre del at være omgitt av den samme fællesektoderm (Fig. 5—6 og Pl. I, fig. 12). Tentaklene kan dog ogsaa forekomme enkeltvis.

Dyrets *nesleceller*, som er meget store, gjør sig selvfølgelig sterkt gjældende i tentakelhodenes ektoderm. Men som før nævnt ser man ogsaa mange av dem i hydrantektodermen; særlig i den nederste del av hydrocaulus og i hydrorrhiza finder man dem i store mængder. Dette støtter en uttalelse av HADZI (1907) om at hydroidenes nesleceller rekrutteres fra hydrocaulus og hydrorrhiza.

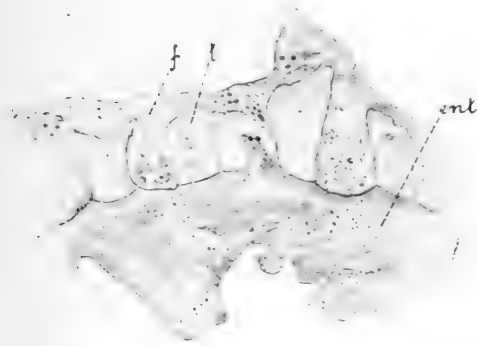


Fig. 5. Snit gjennom tentakler med deres fælles ektoderm. f = fællesektoderm, t = tentakel, ent = entoderm.

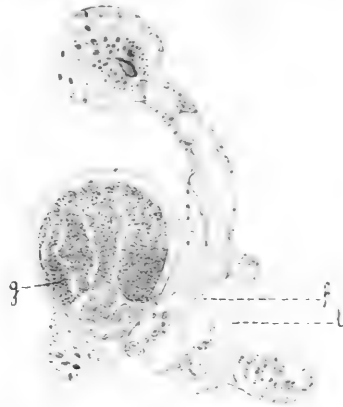


Fig. 6. Utvokset tentakel med fællesektodermen ved basis. f = fællesektoderm, t = tentakel, g = gonopor.

KÜHN (1915) deler hydroidenes nesleceller i 3 grupper efter kapslens funktion, og nævner at Hydra fremviser eksempler paa alle tre. Han benævner dem med de av SCHULZE (1917) foreslaatte navne: 1) *Penetranter* eller stilettkapsler. 2) *Volventer* eller viklekapsler. 3) *Glutinanter* eller heftekapsler.

Hos *Monocoryne gigantea* synes mindst 3 sorter neslekapsler at forekomme, og det er ikke usandsynlig at alle de tre netop omtalte grupper er repræsenteret. *Penetrantene* (Pl. I, fig. 3, 4, 8) ligner meget de tilsvarende hos Hydra; de er store eggformede med akselegeme og nesletraad med stiletter. Man ser dem i hydrorrhiza og i stort antal i hydrantektodermen, derimot i paafaldende litet antal i tentakelhodene. Dette kan muligens forklares ved, at de fleste av dem som fandtes der, under fikseringen har utladet sig og er blit odelagt.

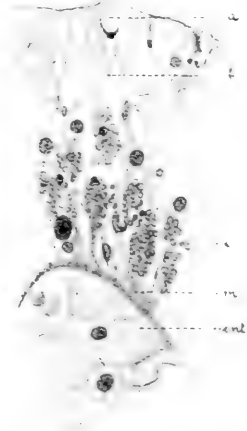


Fig. 7. Længdesnit gjennom et stykke av et tentakelhode. a = utslyngt neslekapsel, b = neslecellens stilk, e = eosinofile granula, m = muskulatur, ent = entoderm.

Volventene (Pl. I, fig. 5—7) er de kapsler som forekommer i størst antal, de har en kort traad eiendommelig oprullet i to spiralvindinger; ialfald finder man paa de kapsler hvis spiralvinding er overskaaret (fig. 7), stadig to liggende ved siden av hinanden. Der fandtes ogsaa mange utladede kapsler; deres nesletraad er da altid korketrækkerformig (fig. 5—6). Saavidt mig bekjendt har denne kapselsort ikke tidligere været paavist med utslynget traad hos saltvandshydroider. — ALLMAN (1875) har avbildninger av lignende kapsler hos *Myriothela* baade med og uten utpresset traad; han oppfatter dem imidlertid som etslags sanseorganer.

Foruten penetrantene og volventene findes ogsaa en tredje sort kapsler hos *Monocoryne gigantea*. De er ganske mørke og smale, og svarer i sin form til *glutinantene* hos *Hydra* (Pl. I, fig. 11). Hos mange av dem sees ikke noget akselegeme, og man faar indtryk av at de kun indeholder en lang opviklet traad. Mange er dog saa mørke at man i det hele tat har vanskelig for at kunne skjelne indholdet, og eksistensen av et akselegeme kan derfor ikke ansees for helt utelukket.

Gonosome.

Gonoforene, som sitter spredt over hele hydranten, er av særlig interesse fordi der, som allerede omtalt av BROCH, paa samme individ forekommer baade rent hanlige, rent hunlige og hermafrodite gonoforer.

Efter KÜHNS inndeling (1910) maa *Monocorynes* gonoforer benævnes „cryptomedusoider med utviklet klokkehule“. Disse har omkring klokkehulen en „indre ektoderm“, men de har ingen radialkanaler; derimot findes en entoderm-lamelle dannet av ett cellelag.

Gonoforenes første anlæg viser sig som en skarpt lokalisert utbugtning av hydrantens entoderm (Pl. I, fig. 9). I likhet med forholdet hos *Myriothela* (KÜHN 1913) sees gonoforanlægget fra først av kun inde ved basis av ektodermen uten at ove nogen indflydelse paa dennes overflate. Under gonoforens videre utvikling „verdünnt sich das Ectoderm über der Medusoid-anlage zu einem einschichtigen Epithel“ (KÜHN s. 189).

Et stadium i denne utvikling sees paa Pl. I, fig. 10, hvor ektodermens cellekjerner er samlet i et enkelt lag omkring gonoforanlæggets overflate. Det synes derefter at ske en fortætning av protoplasmaet omkring disse kjerner, mens de utenfor liggende dele av ektodermcellene avkastes. — Klokkekjernens første anlæg findes desværre ikke representert i det foreliggende materiale. En eiendommelig klokkekjernelignende anordning av ektodermceller sees dog utenfor den allerede dannede klokkehule i den unge gonofor som er avbildet i fig. 14, (Pl. II).

Pl. II, fig. 15 viser et mediansnit gjennom samme gonofor. Den spalteformige klokkehule er utad begrenset av et enkelt ektoderm-lag, gonoforvæggens „indre ektoderm“; klokkehulens indre begrensnings dannes av kimlaget, resten av den oprindelige klokkekjerne. Dette hviler atter direkte paa den

unge gonofors *spadix*, entodermutbugtningens distale ende. *Entoderm-lamellen* viser sig paa dette stadium som et enkelt tydelig cellelag som ved sin basis staar i forbindelse med *spadix*.

Selv hos de udviklede gonoforer er denne lamelle let paaviselig paa grund av støttelamellen som omgir den; derimot forsvinder efterhvert, særlig langs sidene, de fleste av dens kjerner, saa den til slut nærmest betegnes ved to skarpe linjer. Vanskeligere er det hos de helt udviklede gonoforer at paavise gonoforvæggens „indre ektoderm“. Kun ved apex træer alle cellelag tydelig for dagen. Pl. II, fig. 23 viser dette paa et mediansnit gjennem en allerede aapnet gonofor.

Som tidligere nævnt forekommer hos *Monocoryne gigantea* baade hanlige, hunlige og hermafrodite gonoforer.

De yngste gonoforer (Pl. I, fig. 9—10, Pl. II, fig. 14—15, 21) bærer intet synlig tegn på kjønsdifferentiering. Kimlaget bestaar i disse av et stort antal indbyrdes like celler.

I de hunlige gonoforer (Pl. II, fig. 16, Pl. I, fig. 13) hvor kun et begrænset antal (ca. 8) celler udvikler sig til modne egg, utnyttes en stor del av de øvrige som næringsmateriale for disse. Dette fremgaar tydelig av en række billeder hvorav et er repræsenteret i fig. 20 (Pl. II). En del av disse unge oocyter findes dog endnu i de fuldt udviklede gonoforer, hvor de mellem de store eggceller danner et eiendommelig diffust væv uten tydelige cellegrænser. (Pl. I—II, fig. 13, 19, 21—22). Ogsaa i de hanlige gonoforer findes et lignende cellevæv mellem de hanlige kimceller. Skjønt det ikke direkte har kunnet paavises, er det dog sandsynlig at dets oprindelse her er den samme som i de hunlige gonoforer. Av de hermafrodite gonoforer er de fleste nærmest hanlige med bare ett eller to egg, som kommer til utvikling, mens en eneste av dem indeholder, foruten sperma, syv udviklede egg.

Som det vil fremgaa av ovenstaaende beskrivelse, er det adskillig som kunde tyde paa et slegtenskap mellem *Monocoryne* og *Myriothela*. BONNEVIE (1898) nævner at *Monocorynes* uforholdsmæssig store hydrant, dens hindeagtig tynde perisark, dens plateformige hydrorhiza, og dens enkeltvise optræden tyder paa en utvikling i retning mot *Myriothela*. BROCH (1916) fremhæver at beltet av slimkjertelceller i den øvre del av polypen findes endnu sterkere markert hos *Myriothelidene* end hos *Monocoryne gigantea*, og hertil kommer det her omtalte forhold, at gonoforenes væsentlige dele hos begge former anlægges, for man utvendig ser gonoforene som knopper.

En mere indgaaende undersøkelse paa et rikere materiale av begge disse eiendommelige repræsentanter for hydroidene vil være av stor interesse.

Fortegnelse over citert litteratur.

- Allman 1875. On the structure and development of Myriothela. Phil. Trans. Roy. Soc. London. Vol. 165.
- Bonnevie 1898. Neue norwegische Hydroiden. Bergens Museums Aarbog 1898. No. V.
- Broch 1909. Die Hydroiden der arktischen Meere. Fauna Arctica. Bd. V.
- Broch 1916. Hydroida I. The Danish Ingolfekspedition.
- Hadzi 1907. Über die Nesselzellwanderung bei den Hydroidpolypen. Arb. zool. Inst. Wien. Vol. 17.
- Kühn 1910. Die Entwicklung der Geschlechtsindividuen der Hydromedusen. Studien zur Ontogenese und Phylogonese der Hydroiden. II. Zool. Jahrb. Anat. Bd. 30. Jena.
- Kühn 1913. Entwicklungsgeschichte und Verwandtschaftsbeziehungen der Hydrozoen. I Die Hydroiden. Ergebnisse und Fortschritte der Zoologie. Bd. 4. Jena.
- Kühn 1915 -- 16. Coelenterata. I Bronn: Klassen und Ordnungen des Tierreichs. Band II, 2. Abteilung. Coelenterata.
- Swenander 1904. Über die athecaten Hydroiden des Drontheimsfjordes. Det kgl. norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1903. No. 6.
-

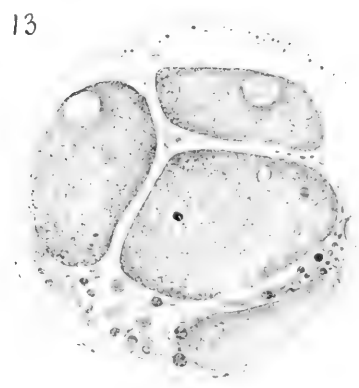
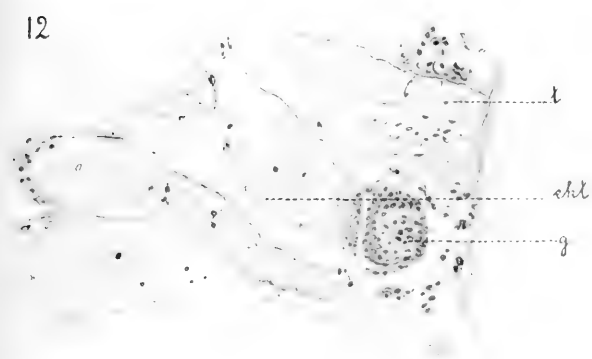
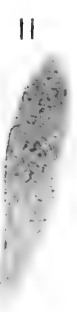
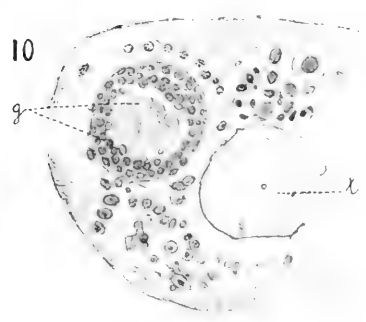
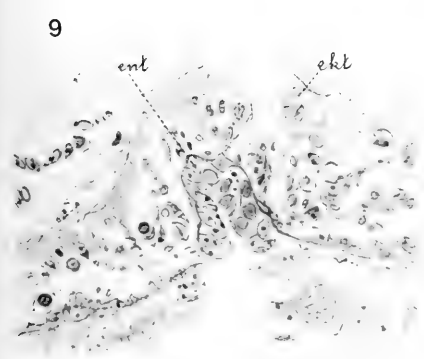
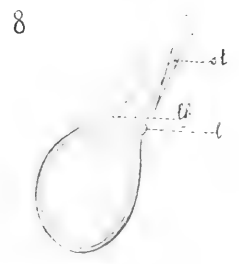
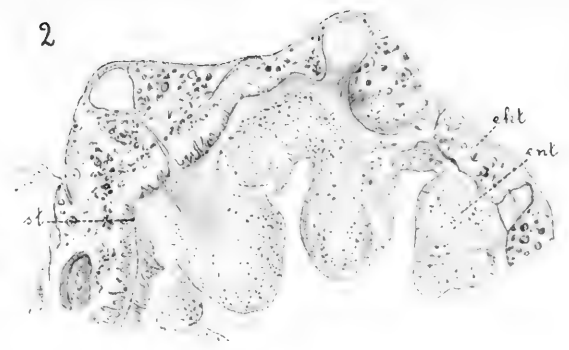
Figurforklaring. Pl. I og II.

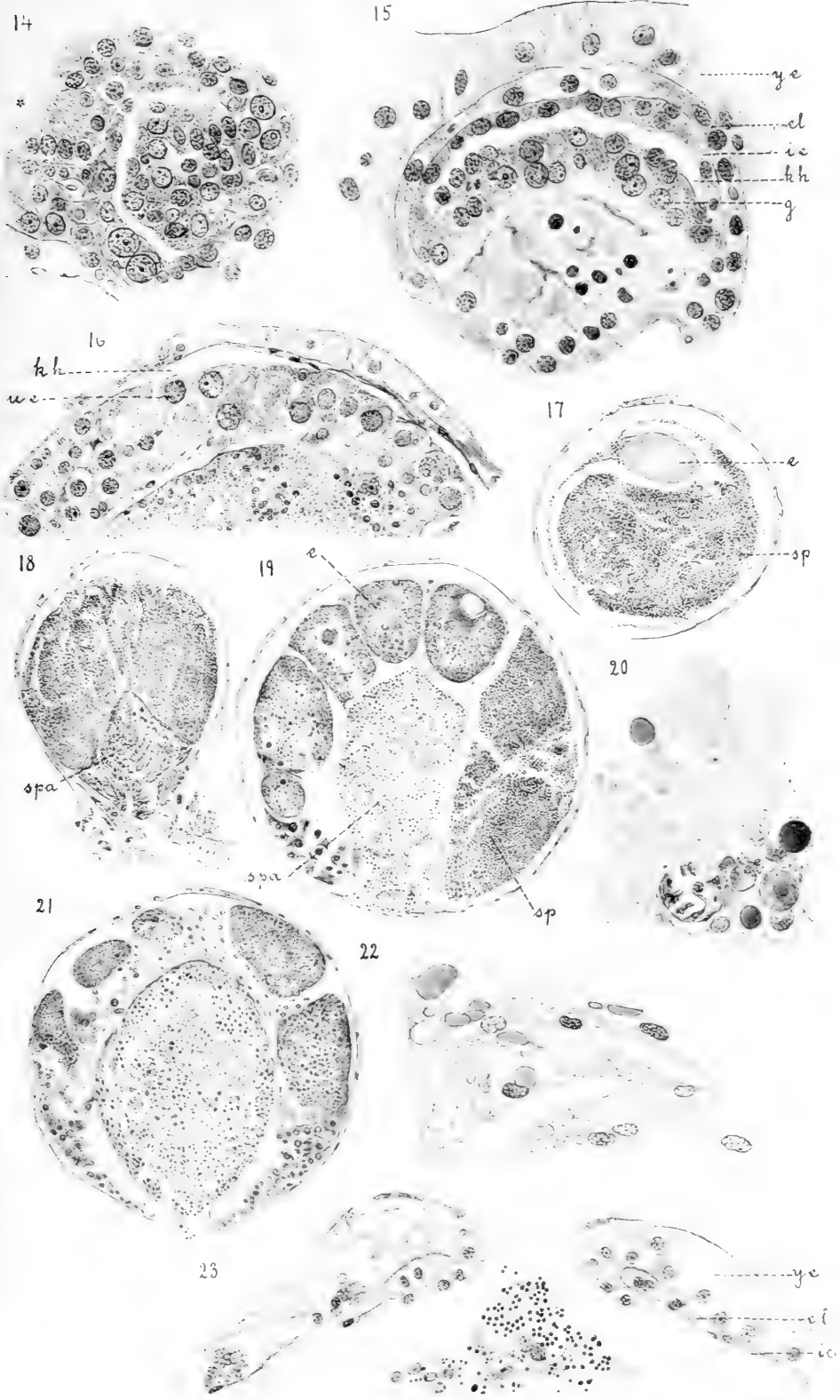
Tegningene er utført ved hjælp av tegneapparat, og for hver tegning er angit den oprindelige forstørrelse.

Alle tegninger paa Pl. I er bibeholdt i denne størrelse, mens alle tegninger paa Pl. II ved reproduktionen er formindsket til $\frac{2}{3}$ av sin oprindelige størrelse.

- Pl. I. Fig. 1. Totaltegning av *Monocoryne gigantea*. 8 ganger forstørret.
- " 2. Et stykke av et tversnit gjennom polypen et stykke nedenfor mundspalten, 57 ganger forstørret.
ekt. = ektoderm, ent. = entoderm, st. = støttelamelle.
- " 3 og 4. Stor eggformet neslekapsel, *penetrant*, fra hydrorhiza ved to forskjellige indstillinger. 1130 ganger forstørret.
- " 5. Utladet *volvent* tegnet efter totalpræparat uten tegnespeil.
- " 6. Snit gjennom utkragenget traad fra et *volvent*. 1130 ganger forstørret.
- " 7. Snit gjennom to *volventer* ved siden av hinanden i et tentakelhode. 1130 ganger forstørret.
- " 8. Utladet stor *penetrant*. 900 ganger forstørret.
s = stille, l = laag, lf = laasfure.
- " 9. Længdesnit gjennom gonoforanlæg. 86 ganger forstørret.
ekt = ektoderm, ent = entoderm.
- " 10. Tversnit av liten gonofor med ektoderm omkring. 150 ganger forstørret.
- " 11. Smal neslecelle fra hydrorhiza. 1130 ganger forstørret.
- " 12. Snit av liten gonofor indenfor den odelayte ektoderm. 86 ganger forstørret.
g = gonofor, t = tentakel, ekt = ektoderm.
- " 13. Snit gjennom hunlig gonofor. 86 ganger forstørret.
- Pl. II. Fig. 14 og 15. Tangential- og mediansnit gjennom ung gonofor. 900 ganger forstørret.
y.e = ytre ektoderm, e.l = entodermlamelle, i.e = indre ektoderm, k.h = klokkehule, g = generationsceller. * eiendommelig klokkekjerne-lign. anordning av ekt. celler.
- " 16. En del av et snit gjennom umoden, hunlig, gonofor paa et ældre stadium end det som er avbildet paa foregaaende figur. 334 ganger forstørret.
k.h = klokkehule, u.e = umodent egg.
- " 17. Snit gjennom hermafrodit gonofor. 85 ganger forstørret.
e = egg, sp = spermiemasse.
- " 18. Længdesnit gjennom hanlig gonofor. 85 ganger forstørret.
spa = spadix.
- " 19. Snit gjennom hermafrodit gonofor. 86 ganger forstørret.
e = egg, sp = spermiemasse, spa = spadix.
- " 20. Snit gjennom en del av et egg som optar umodne egg i sig. 500 ganger forstørret.
- " 21. Længdesnit gjennom hunlig gonofor. 86 ganger forstørret.
- " 22. Detaljtegning fra den ogsaa i fig. 21 avbildede gonofor visende den mellem eggene liggende cellemasse. 500 ganger forstørret.
- " 23. Længdesnit gjennom apex av moden hanlig gonofor. 334 ganger forstørret.
y.e = ytre ektoderm, e.l = entodermlamelle, i.e = indre ektoderm.

Trykt 30. juli 1924.





GENITALORGANE UND „GANGLIO-GENITALSTRANG“

BEI *CORELLA PARALLELOGRAMMA* O. F. M.

EIN BEITRAG ZUR KENNTNIS DER POSTLARVALEN
ENTWICKLUNG DER ASCIDIEN

VON

JOHAN HUUS

(MIT 6 FIGUREN IM TEXT, 2 TABELLEN UND 4 TAFELN)

VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 19)



KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1924

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 13de april 1923 ved prof. Bonnevie.

Inhalt.

	Seite
Einleitung.....	5
Historische Übersicht.	
1. Anlage und Entwicklung der Genitaldrüsen.....	7
2. Der „Genitalstrang“.....	9
3. Der „Visceralganglienstrang“.....	12
Eigene Beobachtungen.	
1. Anlage und erste Entwicklungsstadien der Genitalorgane.....	16
2. Das Verhältnis des „Gangliogenitalstranges“ zu den Ausführungsgängen der Genitaldrüsen während deren Entwicklung.....	33
3. Die Verbindung des „Gangliogenitalstranges“ mit dem Gehirnganglion und der Neuraldrüse.....	38
Schlußbemerkungen.....	44
Verzeichnis der im Text erwähnten Ascidienarten.....	46
Litteratur.....	47
Tafelerklärung.....	49

Einleitung.

Mit der Absicht die Entwicklung der Genitaldrüsen bei *Corella parallelogramma* zu verfolgen begann ich im Sommer 1919 während eines Aufenthaltes an der Biologischen Station zu Dröbak junge Stadien dieser Art zu sammeln.

Beim Studium des Genitalapparates an lebendem Material wurde ich auf einem Zellenstrang aufmerksam, der zweifellos mit dem bei vielen anderen Ascidienarten schon früher bekannten „Genitalstrang“ homolog ist.

Meine Beobachtungen an lebendem Material führten indessen auf einem wesentlichen Punkt über das hinaus, was früher über diesen Zellenstrang bekannt war; es schien in der Tat nicht ausgeschlossen, daß nicht nur der „Genitalstrang“, sondern auch der sogenannte „Visceralganglienstrang“ dadurch in ein neues Licht gestellt werden möchten. Der anfängliche Plan meiner Untersuchungen wurde deshalb in gewissem Grade verändert. Das Verhältnis des genannten Zellenstranges während der postlarvalen Entwicklung klarzulegen wurde nun die wesentlichste Aufgabe meiner Untersuchung; die Genitaldrüsen wurden daher nur über die ersten Entwicklungsstadien hinaus verfolgt.

Mein Lehrer Professor Dr. KR. BONNEVIE hat an meiner Arbeit ein lebhaftes Interesse genommen und stand mir jederzeit mit wertvollen Ratschlägen bei. Ich benutze die Gelegenheit ihr meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Das Material ist während meines Aufenthaltes an der Biologischen Station zu Dröbak 1919—21 gesammelt worden. Dieses Einsammeln wurde in hohem Grade dadurch erleichtert, daß das Boot der Station, ihre Laboratorien und Instrumente jederzeit zu meiner Disposition standen. Dafür bringe ich dem Direktor der Station, Dr. HJ. BROCH, meinen besten Dank.

Die mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät der Universität zu Kristiania hat mir eine willkommene materielle Unterstützung zukommen lassen durch Stipendien aus „Professor R. COLLETS legat til undersøkelse og bearbeidelse av Norges fauna.“

Corella parallelogramma ist die einzige Art der Gattung *Corella* ALD. und HANC., die im Kristianiafjord bis jetzt nachgewiesen wurde; es war daher mit keinen besonderen Schwierigkeiten verbunden auch junge Stadien

dieser Art von anderen an denselben Lokalitäten vorkommenden Ascidiensarten zu unterscheiden. Die Lage des Magensackes auf der rechten Seite des Kiemendarmes, der charakteristische Verlauf der Darmschlinge, die sichelförmigen Stigmen, sowie das Fehlen von Nierenblasen sind die Hauptmerkmale gewesen, die mir für Identifizierung aller Entwicklungsstadien dieser Art als Mittel gedient haben.

Die Individuen wurden in toto in Pikrin-Essigsäure nach BOUIN fixiert.

Für das Schneiden wurde ausschließlich Parafineinbettung angewandt, und alle Färbungen wurden als Schnittfärbung ausgeführt. Benutzt wurde teils Eisen-Hämatoxylin nach M. HEIDENHAIN, teils Alaun-Hämatoxylin nach DELAFIELD, in beiden Fällen in der Regel mit Nachfärbung in Eosin.

Eisen-Hämatoxylin gab die besten Zellenbilder. Alle Zeichnungen sind daher nach Schnittserien ausgeführt, die nach dieser Methode behandelt worden waren.

Historische Übersicht.

1. Anlage und Entwicklung der Genitaldrüsen.

GIARD (1872) beschreibt die Anlage der Genitaldrüsen bei den Knospen von *Perophora listeri* in folgender Weise (p. 545): „L'ovaire et le testicule au moment où ils se constituent présentent le même aspect; ce sont de grands culs-de-sac pyriformes.“ Diese „großen birnförmigen Blindsäcke“ repräsentieren jedoch sicherlich nicht den Entstehungs Augenblick von Ovarium und Testis, sondern ein schon weit vorgeschrittenes Stadium ihrer Entwicklung.

KOWALEVSKY (1874 a) führt die Testisanlage bei den Knospen von *Perophora listeri* auf eine kleine Zellenansammlung zurück („très petit amas de cellules“), eine kompakte Zellenkugel („spherule cellulaire pleine“), die sich erst später in eine hohle Blase umbildet. Die Ovarialanlage zeigt sich nach KOWALEVSKY zuerst auch als eine kleine Zellenansammlung, die in unmittelbarer Nähe der Testisanlage, jedoch etwas später als letztere, auftritt. KOWALEVSKY hat hier, zum ersten Mal, die Anlage der Genitaldrüsen auf einen kleinen Zellenhaufen zurückgeführt.

VAN BENEDEX (1881) beschreibt zum ersten Mal die Entwicklung von Eierstock und Hoden aus einer gemeinsamen Anlage (p. 376): „Les organes sexuels testicules et ovaires de même que leurs canaux excréteurs se développent aux dépens d'un petit amas plein de cellules mésodermiques (globules sanguins) d'abord mal défini, plus tard nettement circonscrit.“ In dieser „kleinen Zellenansammlung“ entsteht später ein zentraler Hohlraum, der sich sehr rasch ausbreitet. Die Blase („vesicule sexuelle“) teilt sich dann in zwei Lappen („lobes“). Aus dem lateralen Lappen entwickelt sich der Eierstock, aus dem medialen der Hoden. Diese Teilung ist aber nicht vollständig. Es bleibt eine ungeteilte Partie der Blase zurück, die mit dem Hohlraum beider Lappen in Verbindung bleibt. Von dieser ungeteilten Partie aus bilden sich die Ausführungsgänge, ursprünglich ein gemeinsamer Gang, der dem Darne entlang gegen den After (Kloakenöffnung) hin verläuft, wobei er sich gleichzeitig nach und nach in einen lateralen Teil, Ovidukt, und einen medialen Teil, Ductus deferens, teilt.

Zu gleicher Zeit teilen sich, nach VAN BENEDEX, auch wiederholt die anfänglich einfachen Ovarium- und Testis-lappen und bilden so die definitiven Drüsen.

Die hier referierten Resultate sind an Knospen von *Perophora listeri* und *Clavelina lepadiformes*, sowie an „Larven“ von *Ciona intestinalis* gewonnen.

VAN BENEDEN und JULIN (1884 b) zeigen, daß die Genitalanlage bei *Ascidicella aspersa* (*Phallusia scrobroides*)¹ dasselbe Aussehen hat: „L'organe sexuelle — — — se constitue d'un amas plein de cellules conjonctives.“ (p. 630).

In einer späteren Arbeit (1887) geben dieselben Verfasser eine mehr ausführliche Beschreibung von der Anlage und Entwicklung der Genitalorgane bei den Arten: *Perophora listeri*, *Ascidicella aspersa* (*Phallusia scrobroides*) und *Clavelina lepadiformis* (*C. rissoana*), welche im wesentlichen mit ihren eigenen früheren Beobachtungen übereinstimmen.

Diese grundlegenden Beobachtungen VAN BENEDEN'S und JULIN'S sind später von einer Reihe Verfasser auch bei anderen Arten bestätigt worden.

JULIN (1893) sagt betreffend *Dendrodia* (*Stylopsis*) *grossularia* (p. 5): „Au stade le plus reculé, que j'ai pu observer, de son développement, la masse génitale consiste en un petit amas de cellules, plein et de forme irrégulière.“

FLODERUS (1896) sagt betreffend der Genitalorgane bei *Ciona intestinalis* (p. 174): „Das embryonale Organ besteht aus einem kompakten Haufen einer Anzahl Zellen, zwischen denen sich jedoch keine Grenzen entdecken lassen.“

LEFEVRE (1898) beschreibt die Anlage der Genitalorgane bei *Perophora viridis*: „A small collection of cells appears between the two arms of the U-shaped digestive tract. The sexual organs arise from this little spherical mass of cells, which are at first but loosely held together.“

SELYS-LONGCHAMPS und DAMAS (1900) schreiben über *Caesira* (*Molgula*) *ampulloides* (p. 456): „La première ébauche de l'organe sexuel apparaît, tant à gauche qu'à droite, sous la forme d'un très petit amas de cellules arrondies.“

In Betreff der Entstehung dieses bei allen erwähnten Arten beobachteten Zellenhaufens gehen die Meinungen etwas auseinander. Meistens wird jedoch die Anlage als ein Zusammentreten ursprünglich freier Mesenchymzellen aufgefaßt. So schreibt SEELIGER (1882) über *Clavelina lepadiformis*: „Dann treten die zahlreichen freien Mesodermzellen dorsal zwischen Magen und Enddarm zur Bildung des Ovariums² zusammen.“

SABATIER (1883) sagt, daß „Chez les Ascidies l'ovaire² se compose à l'origine d'une agglomération de noyaux dépendant du mesoderm et réunis par une faible quantité de substance intermédiaire claire.“

VAN BENEDEN (1881) bezeichnet diese Zellen als „cellules mesodermiques (globules sanguins).“

VAN BENEDEN und JULIN (1884 b) benützen die Bezeichnung „cellules conjonctives“. Späterhin (1887) sagen sie betreffs der Genitalanlage, daß sie aus „cellules identiques aux globules sanguins, cellules mesoblastiques“ besteht. „L'origine mesoblastique de l'ébauche génitale est ici évidente.“

¹ Die von den citierten Verfassern verwendeten Synonyme, sind in Parenthes beigefügt worden.

² Sowohl SEELIGER als SABATIER, die wahrscheinlich die Arbeit VAN BENEDEN'S vom Jahre 1881 nicht kannten, betrachteten damals diese früheste Genitalanlage als Ovarialanlage.

JULIN (1893) sagt betreffs der Anlage: „Elle est très vraisemblablement d'origine mésoblastique.“

LEFEVRE (1898) betrachtet die Zellen der Genitalanlage als „identical in appearance with the amoeboid cells of the blood“.

Diese Auffassung, daß die Genitalanlage durch ein Zusammentreten von freien Mesenchymzellen (Blutkörperchen) gebildet wird, widerspricht, insoweit sie sich auf die Anlage bei Knospen bezieht, den Beobachtungen, welche CAULLERY (1894) und PIZON (1894) innerhalb der Familien *Polyclinidae*, *Didemnidae* und *Diplosomidae* gemacht haben. Beide Verfasser behaupten, daß bei Knospen die Genitalanlage durch Abschnürung von einem Zellenband gebildet werde, dessen Entstehung man bis zu der Genitalanlage des Elternindividiums zurückführen könne und auf diese Weise kontinuierlich weiter bis zurück auf die Genitalanlage des Oozoids.

CAULLERY und PIZON traten hier in Opposition zur älteren Auffassung, daß dem Oozoid die Genitalien vollständig fehlen. (Vergl. GANIN, 1870). Ihre Auffassung, daß ein kontinuierlicher Zusammenhang der Genitalanlagen durch die Knospengenerationen hindurch besteht, stimmt übrigens mit den Beobachtungen von BANCROFT (1899) an den Knospen von *Holozoa (Distaplia) occidentalis* überein. Dieser Verfasser sagt nämlich, daß bei älteren Kolonien, welche die einzigen waren die er Gelegenheit hatte zu untersuchen, „all of the buds even the smallest and least differentiated possess the fundamentals of the ovotestis“ (p. 62).

2. Der „Genitalstrang“.

In Verbindung mit der frühesten Anlage der Genitalorgane beschreibt eine ganze Reihe von Verfassern auch einen Zellenstrang, welcher von der Genitalanlage aus dem Darmkanal entlang bis zum After oder gegen den After hin verläuft.

Die erste Beschreibung dieses Zellenstranges finden wir bei KOWALEVSKY (1874 a). Bei der Beschreibung der Testisanlage bei *Perophora listeri* sagt er (p. 229): „De cette vesicule (♁: die Testisblase) part, en se dirigeant parallelement à la portion superieure du tube digestif, une serie de noyaux entourés de protoplasma qui se termine dans la paroi de la vesicule cloacale un peu au-dessous de l'ouverture de l'anus.“ Ein ähnlicher Zellenstrang, führt er an, verbindet auch die Ovarialanlage mit dem After. Beide Zellenstränge verlaufen parallel.

VAN BENEDEN (1881) beschreibt bei derselben Art, *Perophora listeri*, einen ebensolchen Zellenstrang (p. 376): „L'organe (♁: die Genitalanlage) est relié dès le début à la paroi du cloaque par un cordon mesodermique formé d'une seule rangée de cellules.“

VAN BENEDEN und JULIN (1884 b) beschreiben weiter den Zellenstrang bei *Ascidella aspersa (Phallusia scrabroides)* (p. 630): „Le cordon cellulaire

qui part de l'ébauche génital est formé par une rangée unique de cellules fusiformes placée bout à bout. Ces cellules ne sont autre chose que des éléments du tissu conjonctif qui se sont disposés à la file les uns des autres en une trainée régulière“. „Nous avons pu constater qu'ici, comme chez la *Perophora*, le cordon accompagne l'intestin jusqu'au voisinage de l'anus.“

In einer späteren Arbeit (1887) geben VAN BENEDEN und JULIN eine mehr detaillierte Beschreibung des Zellenstranges bei den zwei Arten *Perophora listeri* und *Ascidiella aspersa* (*Phallusia scabroides*), doch ohne etwas wesentlich Neues zu bringen.

Diese Beobachtungen von KOWALEVSKY, VAN BENEDEN und JULIN sind an Totalobjekten angestellt.

FLODERUS (1896) hat den Zellenstrang auf Schnittserien von *Ciona intestinalis* beobachtet. Ebenso wie die genannten Verfasser giebt FLODERUS an, daß der Zellenstrang „aus einer einfachen Reihe sehr abgeplatteter Zellen mit sehr dünnen Kernen“ besteht, ebenso, daß er von der Spitze der birnenförmigen Genitalanlage ausgeht und dem Darne „gegen den After hin“ folgt.

LEFEVRE (1898) beschreibt den Zellenstrang bei *Perophora viridis* mit folgenden Worten (p. 403): „Some of the free cells laying above the rudiment (o: die früheste Genitalanlage) are seen to be spindle shaped. These soon become joined, end to end, to form a solid cord, united at one end to the spherical mass of cells (o: die Genitalanlage) and taking a course parallel to that of the intestine.“

BANCROFT (1899) endlich beschreibt für *Holozoa (Distaplia) occidentalis* einen ganz eigentümlichen Modus der Entstehung eines solchen Zellenstranges. Bei dieser Art entwickelt sich die Genitalanlage zuerst zu einem kompakten, langgestreckten Zellenband („Strand“). Die Differenzierung in Ovarium, Testis und ihren Ausführungsgängen beginnt an dem einen Ende des Zellenbandes, während dasselbe sonst undifferenziert verbleibt. An diese Beschreibung anknüpfend sagt der Verfasser (p. 65): „With the growth of the bud, the undifferentiated portion of the strand is stretched more and more, until it becomes a single row of cells attached end to end, which connects the last differentiated portions of the two ducts with the peribranchial epithelium.“

Ein Genitalstrang scheint also bei folgenden 5 Arten¹ mit Sicherheit nachgewiesen zu sein: *Perophora listeri*, *Perophora viridis*, *Holozoa occidentalis*, *Ascidiella aspersa* und *Ciona intestinalis*.

¹ SELYS-LONGCHAMPS und DAMAS (1900) führen an, daß der Zellenstrang bei *Clavelina lepadiformis* (*C. rissoana*) und *Ciona intestinalis* von VAN BENEDEN (1881) und bei *Clavelina lepadiformis* (*B. rissoana*) von VAN BENEDEN und JULIN (1887) beobachtet worden ist. Es scheint mir aber nicht ganz klar, daß die zwei erwähnten Arbeiten zu einer solchen Anführung berechtigten. *Clavelina lepadiformis* ist daher hier nicht in die Liste der Arten aufgenommen, bei welchen der Genitalstrang bis jetzt mit Sicherheit nachgewiesen worden ist.

Nur zwei Arten, die mit Bezug auf die früheste Anlage der Genitalorgane untersucht worden sind, scheinen den Genitalstrang gänzlich zu mangeln, nämlich *Dendrodoa (Stycolopsis) grossularia* (JULIN 1893, WERNICK 1920) und *Cacsira (Molgula) ampulloides* (SELYS-LONGCHAMPS und DAMAS 1900).

Eine Verbindung des Genitalstranges mit dem After ist, was *Perophora listeri* betrifft, von KOWALEVSKY (1874 a) beschrieben worden. Auch VAN BENEDEN (1881) sagt, daß der Genitalstrang bei *Perophora listeri* „dès le début“ die Genitalanlage mit „la paroi du cloaque“ verbindet. In einer späteren Arbeit sagen jedoch VAN BENEDEN und JULIN (1887) betreffs der selben Art (p. 331): „Il nous a semblé que le cordon génital n'atteint pas encore, à ce stade, l'épithélium cloacal.“ Von einem etwas vorgeschrittenen Stadium sagen sie dagegen (p. 333): „Le cordon génital présente la même constitution qu'aux stades précédentes. Il est maintenant possible de le poursuivre jusqu'au cloaque. Il aboutit à l'épithélium cloacal et se continue avec lui.“

Bei *Asciidiella aspersa (Phallusia scrabroides)* folgt der Strang, nach VAN BENEDEN und JULIN (1884), dem Darne „jusqu'au voisinage de l'anus“. Später (1887) wird aber erwähnt, obwohl nicht illustriert, daß der Strang „aboutit à l'épithélium du cloaque“.

BANCROFT (1899) sagt auch, daß der Strang die Genitalanlage mit „the peribranchial epithelium“ bei *Holozoa (Distaplia) occidentalis* verbindet.

FLODERUS (1896) erwähnt nur, daß der Strang dem Darne „gegen den After hin“ folgt, und LEFEVRE (1898) daß er „takes a course parallel to that of the intestin“.

In Betreff der 3 Arten *Perophora listeri*, *Asciidiella aspersa* und *Holozoa occidentalis* liegen folglich Aussagen vor, daß der Genitalstrang in dem Kloak- oder Peribranchial-wand endet.

Die Anlage des Genitalstranges wird in vier von den citierten Arbeiten besprochen, nämlich von VAN BENEDEN und JULIN (1884 b und 1887), LEFEVRE (1898) und BANCROFT (1899). Die drei ersteren behaupten, daß der Strang in derselben Weise wie die eigentliche Genitaldrüsen-Anlage gebildet wird, nämlich durch ein Zusammentreten von Bindegewebszellen oder freien Mesenchymzellen. BANCROFT dagegen meint beobachtet zu haben, daß bei *Holozoa occidentalis* der Genitalstrang sich von der eigentlichen Genitaldrüsen-Anlage bildet.

Die Bedeutung des Genitalstranges bei der Entwicklung der Genitalorgane wird in drei von den genannten Arbeiten besprochen, aber nur mit Bezug auf die beiden Arten: *Perophora listeri* und *Asciidiella aspersa*.

Für *Perophora listeri* heißt es bei KOWALEVSKY (1874 a, p. 230): „La série de noyaux reliant la vesicule (♂: die Testisblase) à la cavité cloacale ne tarde pas à former un canal abducteur par le dédoublement des noyaux primitifs en formation d'une lumière faisant communiquer la glande avec la cloaque.“

In derselben Weise soll der Ovidukt aus dem anderen von KOWALEVSKY beschriebenen Zellenstrang hervorgehen.

VAN BENEDEN und JULIN (1887) sagen dagegen (p. 337): „Chez la Perophore il est fort difficile de tracher la question de savoir si le cordon génital intervient ou non dans l'accroissement de l'ébauche sexuelle commune.“

In Bezug auf *Ascidrella aspersa* (*Phallusia scrobroides*) heißt es bei VAN BENEDEN und JULIN (1884 b): „Au fur et à mesure que la cavité sexuelle gagne en longueur, le cordon génital devient plus court; à la fin il disparaît complètement; à ce moment la cavité sexuelle a gagné la cloaque. Il n'est pas facile de décider si la vesicule génitale saccroit aux dépens des éléments cellulaires constitutifs du cordon génital ou si celle-ci marque simplement la direction suivant laquelle cette vesicule devra s'étendre.“ (p. 632). Diese Schwierigkeit scheint indessen in ihrer späteren Arbeit (1887), wie aus dem folgenden Satz hervorgeht, im wesentlichen gelöst zu sein (p. 337): „Il nous paraît probable que cet entonnoir (∅: der angelegte Ausführungsgang) se développe aux dépens de la partie du cordon génital primitif que avoisine immédiatement l'ovotestis; des stades comme ceux que nous avons représentés pl. XIII, figures 6, 10 et 11, ne laissent guère de doute à cet égard, et la première ébauche, telle qu'elle a été représenté figure 9, montre bien que cordon et délatation terminale ne constituent qu'une seule et même formation originelle.“

3. Der „Visceralganglienstrang“.

Verlauf des Stranges. KOWALEVSKY (1874 b) erwähnt in seiner Beschreibung von *Holozoa pileata* (*Didemnum styliferum*), daß das Nervensystem, neben Gehirnganglion mit Nerven, auch aus „einem langen feinen Strange“, besteht, „welcher sich nach unten zieht, Nerven an den Kiemensack absendet (kn) und abwärts schließlich mit einem Eingeweideganglion endet. Von dem letzteren gehen Nerven zu dem Magen, Herz und Eierstock.“ (p. 446). Der Verfasser sagt weiter, daß er dasselbe auch bei jungen Exemplaren von *Phallusiopsis* (*Phallusia*) *mammilata* und *Ciona intestinalis* (*Ascidia canina*) beobachtet hat. KOWALEVSKY hat hier zum ersten Mal die Existenz eines Zellenstranges konstatiert, der vom Gehirnganglion rückwärts bis zur Magensackregion geht.

VAN BENEDEN und JULIN (1884 a) haben dann auch diesen Zellenstrang eingehend untersucht, und für ihn die Bezeichnung „cordon ganglionnaire visceral“ oder nur „cordon visceral“ erwählt. Nicht nur der Verlauf des Stranges und sein Bau bei erwachsenen Individuen werden in dieser Arbeit erörtert, sondern die Verfasser suchen auch seine genetische Verbindung mit dem larvalen Nervensystem klarzulegen.

Die Untersuchungen beziehen sich wesentlich auf die Arten *Caesira* (*Molgula*) *ampulloides* und *Clavelina lepadiformis* (*C. rissoana*). Die Ver-

fasser haben aber auch bei *Perophora listeri* (Vergl. LORLEBERG, 1907, p. 217), *Pandusia (Polycarpa) cornata*, *Dendrodoa (Styelopsis) grossularia*, *Microcosmus claudicans* und *Pyura (Cynthia) polycarpoides* denselben Strang beobachtet, ohne jedoch auf dessen Bau und Verlauf bei diesen Arten näher einzugehen.

Bei *Caesira ampulloides* nimmt der Visceralganglienstrang, nach VAN BENEDEN und JULIN, seinen Ursprung aus „l'amas ganglionnaire considérable, qui termine en arrière et en bas l'écorce du cerveau“ (p. 335). Der Verlauf des Stranges nach rückwärts wird hier folgendermaßen beschrieben: „À la limite antérieure du cloaque il s'engage dans la paroi du sac branchial, longe le raphé dorsal, entre l'épithélium branchial et l'épithélium peribranchial (fig. 4); il passe sous le plancher du cloaque et, au niveau de l'anus, on le voit s'engager entre le rectum et la bouche. Le cordon gagne le côté gauche de l'oesophage et ensuite le lobe gauche du foie (fig. 6). Arrivé à cet organe, il s'engage dans la lame conjonctive interposée entre les deux diverticules du foie. Le point où se termine le cordon répond donc à la limite entre les deux lobes du foie.“

Einen ähnlichen Verlauf des Stranges haben die Verfasser auch bei *Clavelina lepadiformis* gefunden, wo er „longe le raphé dorsal jusqu'à l'entrée de l'oesophage“. Sie fügen noch hinzu: „Il n'est guère possible de le poursuivre au delà“, und weiter: „nous n'avons pas réussi davantage à voir où et comment le cordon se termine à son extrémité postérieure.“

In einer späteren Arbeit (1887) sagen jedoch dieselben Verfasser bei einer Beschreibung der Entwicklung der Genitalorgane bei dieser Art: „Nous ferons encore observer que le système nerveux centrale (cordon ganglionnaire visceral) s'étend en arrière plus loin que l'ébauche sexuelle, comme le montre bien la figure 12.“

Auch bei *Asciidiella aspersa (Phallusia scrobroides)* haben VAN BENEDEN und JULIN (1884 b) den Visceralganglienstrang beobachtet, und zwar auf allen Entwicklungsstadien dieser Ascidie. Der Verlauf des Stranges rückwärts „entre la bouche et l'anus“ und weiter „entre l'oesophage et le rectum“ stimmt mit seinem Verhalten bei den früher genannten Arten gut überein. In Bezug auf das hintere Ende des Stranges haben die Verfasser jedoch auch hier keinen sicheren Aufschluß geben können: „nous n'avons pas pu découvrir comment le cordon se termine.“ (p. 633).

MAURICE (1886) beschreibt bei *Parascidia areolata (Amaroeccium torquatum)* den Verlauf des Visceralganglienstranges in folgender Weise: „Il part de la région postérieure du ganglion et se prolonge entre l'épithélium branchial et l'épithélium cloacal pour se diriger vers la masse viscérale.“

In einer späteren Arbeit sagt MAURICE (1888), daß der Visceralganglienstrang bei *Parascidia areolata (Fragaroides aurantiacum)* „se continue le long de la ligne mediodorsal et s'engage entre le rectum et l'oesophage, où je l'ai perdu de vue.“ (p. 376).

JULIN (1892) beschreibt den Visceralganglienstrang bei *Dendrodoa (Stylopsis) grossularia*,¹ wo er „un prolongement de l'extrémité postérieure du canal excréteur de la glande hypophysaire“ zu sein scheint. Man kann den Strang rückwärts im medio-dorsalen Septum „sur un certain trajet“ verfolgen. DAMAS (1902) bemerkt, daß der Visceralganglienstrang bei *Caesira (Anurella) bleizi* „se poursuit jusqu'à l'oesophage.“ (p. 637).

In den Fällen, wo der Strang dem After vorbei verfolgt werden konnte, stimmen also alle Angaben darin überein, daß der Visceralganglienstrang längs dem Darmkanal und dem Oesophagus verläuft.

In Bezug darauf, wo und wie der Strang endigt, sind die Beobachtungsergebnisse meistens negativ. In vielen Fällen wird er in der Nähe des Oesophagus aus den Augen verloren. KOWALEVSKY (1874 a) und VAN BENEDEN und JULIN (1887) meinen jedoch mit Sicherheit den Strang bis in die Darmschlinge hinter dem Magensack verfolgt zu haben.

Bau des Stranges. VAN BENEDEN und JULIN (1884 a) sagen in Betreff des Visceralganglienstranges bei *Caesira (Molgula) ampulloides* (p. 336): „Il est presque exclusivement formé dans toute sa longueur par de cellules nerveuses très semblables aux grandes cellules ganglionnaires du cerveau.“ Währenddessen zeigen die Zeichnungen der Verfasser (Pl. XVI, Fig. 2—6), daß große Zellen sich eigentlich nur im vorderen Teil des Stranges finden, während sein hinterer Teil solche Zellen vollständig entbehrt und ausschließlich aus ganz kleinen Zellen besteht.

Dieses stimmt auch insoweit besser mit dem Verhältnis bei *Perophora* und *Clavelina* überein, wo der Strang nach denselben Verfassern im Querschnitt nur „deux ou trois petites cellules“ aufweist „dont les dimensions et la forme rappellent singulièrement les globules sanguins ou les éléments fixes du tissu conjonctif.“ (p. 320).

Einen ebensolchen Bau hat der Strang wahrscheinlich auch bei *Ascidia aspersa (Phallusia scrobroides)*. Die Verfasser beschreiben ihn nämlich nur als einen „cordon grêle, formé de cellules à noyau.“ (VAN BENEDEN und JULIN, 1884 b., p. 633).

MAURICE (1888) sagt in Betreff des Visceralganglienstranges bei *Parascidia areolata (Fragaroides aurantiacum)*, daß er im Querschnitt höchstens aus 3—4 Zellen besteht; diese „présentent les mêmes caractères que les cellules ganglionnaires du cerveau.“ (p. 378). Etwas früher sagt indessen derselbe Verfasser, daß „par ses caractères histologiques le canal excréteur de la glande hypoganglionnaire présente absolument les mêmes caractères que le cordon visceral.“ (p. 377). Es scheint daraus hervorzugehen, daß der Visceralganglienstrang bei *Parascidia areolata* keine Zellen enthält, welche jedoch den großen Ganglienzellen des Gehirnganglion gleichen.

¹ Der Zellenstrang, den RIEDLINGER (1903) und LORLEBERG (1907) bei dieser Art erwähnt haben, kann wohl kaum mit dem von JULIN beschriebenen identisch sein.

JULIN (1892) erwähnt auch, daß die Zellelemente im Visceralganglienstrang bei *Dendrodoa (Styelopsis) grossularia* „réssemblement étonnement à des cellules ganglionnaires“. Diese „erstaunliche Ähnlichkeit“ mit den Ganglienzellen kann jedoch auch hier nicht ohne weiteres auf die gewöhnlichen großen Ganglienzellen bezogen werden, da der Verfasser gleich darauf die Schwierigkeiten erwähnt, die das Studium des Stranges bei dieser Art (im Gegensatz zu *Caesira ampulloides*) mit sich bringt „en raison de la gracilité de ce cordon“.

Von mehreren Verfassern werden in Verbindung mit dem Visceralganglienstrang auch Nervenfasern beschrieben.

MAURICE (1886) sagt so mit Bezug auf *Parascidia areolata (Amarocidium torquatum)*: „Le cordon ganglionnaire visceral est constitué par des fibres et des cellules ganglionnaires.“ Wie diese Fasern im Verhältnis zu den Ganglienzellen gelagert sind, wird vom Verfasser nicht erörtert. Er beschreibt jedoch auch, wie der Visceralganglienstrang eine direkte Fortsetzung des Ausführungskanals der Neuraldrüse bildet. Da dieser Kanal ja selbstverständlich keine Nervenfasern enthält, muß wohl angenommen werden, daß die erwähnten Fasern des Visceralganglienstranges, jedenfalls in seinem vorderen Teil, eine seitliche Lage einnehmen.

Dieses würde mit dem übereinstimmen, was VAN BENEDEEN und JULIN (1884 a) von dem Visceralganglienstrang bei *Caesira (Molgula) ampulloides* sagen (p. 335): „Un faible cordon fibrillaire occupe l'un des côtés de la masse.“

MAURICE (1888) dagegen erwähnt ausdrücklich, daß er „quelques traces de fibrilles nerveuses entre les cellules du cordon visceral“ konstatiert hat. Keine Spur von Nervenfasern läßt sich aber auf seinen Zeichnungen nachweisen.

JULIN (1892) unterscheidet bei *Dendrodoa (Styelopsis) grossularia* scharf zwischen dem eigentlichen Ganglienstrang und einem Nervenfaserbündel zur Seite desselben („nerv visceral“). Den Nerven kann er weit länger rückwärts verfolgen als den Zellenstrang, welcher „est accolé à droite contre le nerv visceral.“

LORLEBERG (1907) macht bei *Perophora listeri* dieselbe Unterscheidung und wendet die Bezeichnung „Dorsalnerv“ für das Nervenfaserbündel an. Der Zellenstrang, sagt er, bildet „eine ventrale Ganglienzellbekleidung für den Dorsalnerv“.

METCALF (1900) hat schließlich gefunden, daß bei allen von ihm untersuchten Arten (im ganzen 35) „a more or less gangliated nerve cord is present in the raphe“. Bei einigen Arten soll dieser Nerv („rapheal nerve“) in dem medianen hinteren Teil des Ganglion, bei anderen im rechten hinteren Siphonalnerven seinen Ursprung nehmen. Die gegenseitige Lage von Ganglienzellen und Nervenfasern wird leider nicht erörtert. Der Verfasser erwähnt auch nicht wie weit rückwärts die Nervenfasern verfolgt werden können. Seine Abbildungen, Figg. 46 und 47 (Pl. 37) scheinen jedoch zu

zeigen, daß bei den Arten *Holozoa pileata* (*Distaplia magnilarva*) und *Amaroucium constellatum* Zellenstrang und Nervenfasern neben einander gelagert sind.

METCALF beschreibt außerdem was er „the rapheal duct“ nennt, einen hohlen Strang, der eine direkte Verlängerung rückwärts des Ausführungskanals der Neuraldrüse bildet. Dieser Strang, den METCALF bei mehreren Arten gefunden hat, verläuft dicht neben dem Nerven („the rapheal nerve“) und scheint vom Verfasser bei einigen von diesen Arten (*Amaroucium*, *Ascidia atra*, *Phallusia mammilata*) von der Stelle ab, wo er kein Lumen mehr besitzt, als Ganglienzellen des genannten Nerven aufgefaßt worden zu sein. (l. c., pp. 531 flg. und Taf. 34, Figg. 3—5).

Ursprung des Stranges. VAN BENEDEN und JULIN (1884 a) haben beim Studium der Embryonalentwicklung bei *Clavelina lepadiformis* (*C. rissoana*) zum ersten Mal festgestellt, daß der Visceralganglienstrang seinen Ursprung im larvalen Nervensystem nimmt, und zwar aus dem Teil desselben, der zwischen der Hirnblase und dem Caudalen Nervenrohr liegt. „Le cordon viscerale procède de cette partie du myelencéphale du têtard, qui se trouve interposée entre le vesicule cérébrale et la moëlle épinière.“ (Vergl. VAN BENEDEN und JULIN (1884 b, p. 633): „Nous avons établi par l'étude du développement embryonnaire de la Claveline que ce cordon provient tout entier du ganglion viscerale de la larve urodele (Rumpfganglion de KOWALEVSKY)“)

WILLEY (1894) bestätigt diesen Punkt in VAN BENEDEN und JULIN'S Beschreibung der Metamorphose des larvalen Nervensystems bei *Clavelina lepadiformis* und deutet ebenso an, daß der Visceralganglienstrang bei *Ciona intestinalis* durch die Metamorphose desjenigen Teiles des Nervenrohres der Larve entsteht, der hinter der Hirnblase liegt. (p. 304).

Ebenso zeigt auch DAMAS (1902), daß der Visceralganglienstrang bei *Caesira* (*Anurella*) *bleizi* durch eine Metamorphose des Nervensystems der Larve entsteht, sagt jedoch, daß „vu le peu de differentiation de l'ébauche nerveuse, il est impossible de préciser quelles portions dégénèrent et quelles portions persistent“ (p. 337).

Eigene Beobachtungen.

1. Anlage und erste Entwicklungsstadien der Genitalorgane.

Die Anlage der Genitaldrüsen bei *Corella parallelogramma* wurde bei den allerjüngsten festsetzenden Stadien, die von mir beobachtet worden sind, schon vorgefunden.

Diese Anlage befindet sich in unmittelbarer Nähe des Überganges zwischen Magen und Darm, und zwar an der ventralen Wand des Pylorusblind-

sackes, eines kurzen Blindsackes, welcher vom Pylorusteil des Magens hervorragt. (Taf. I, fig. 1.)

Die Genitaldrüsen-anlage ist jedoch bei verschiedenen Individuen nicht absolut gleich gelagert. Am häufigsten liegt sie so weit nach vorne, daß sie vom Magensack und Darne, bei Betrachtung von der Seite, verdeckt wird. Dieser Umstand erschwert das Studium der ersten Anlage an lebenden Objekten oder an Totalpräparaten. Bei einzelnen Individuen kann jedoch die Anlage so weit nach hinten liegen, daß man sie hinter Magensack und Darm frei hervortreten sehen kann. Nach solchen Exemplaren sind die Textfiguren ausgeführt worden.

Beim Studium der Genitaldrüsen-Anlage auf lebendem Material junger festsitzender Individuen von *Corella parallelogramma*, ist mir sogleich ein Zellenstrang aufgefallen, der von dieser Anlage bis zum Nervenganglion kontinuierlich verfolgt werden konnte.

Textfig. 1 zeigt diesen Zellenstrang (*g. s.*) in ganzer Länge, und auch seine Lage im Verhältnis zu den übrigen Organen, bei einem Individuum von ca. 1 $\frac{1}{2}$ mm. Länge. Das Individuum wird von der Dorsalseite aus gesehen, mit der Ingestionsöffnung nach oben gerichtet. Die Details im Respirationsdarm sind in der Abbildung nicht angegeben; nur die dorsale Begrenzung der linken Peribranchialkammer ist durch eine Linie angedeutet, wie auch die beiden Peribranchialsiphonen¹ eingezeichnet sind.

Ein kleines Stück hinter der Basis des Mundsipto sieht man das median-dorsal liegende Ganglion (*g*). Dem vordersten Teil des Ganglion entspringen ein paar deutliche Nerven

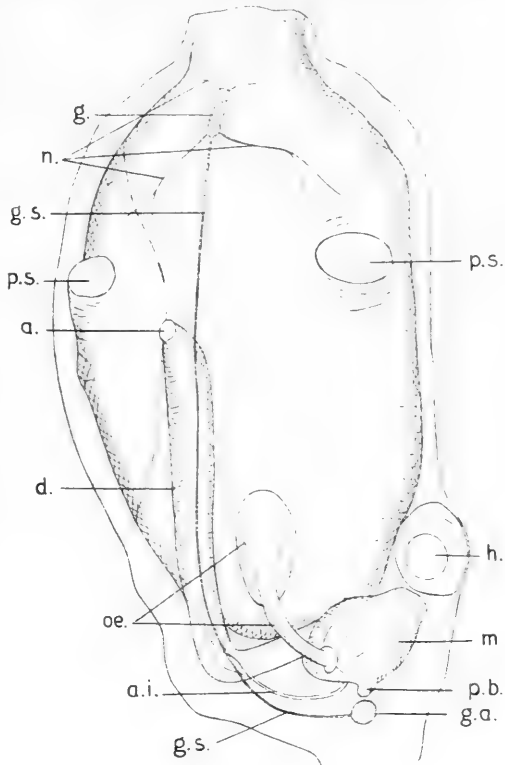


Fig. 1. Junger *Corella parallelogramma* in dorsaler Ansicht. $\times 60$. *a.* After; *a. i.* Ausführungsgang der Intestinaldrüse; *d.* Darm; *g.* Gehirnganglion; *g. a.* Genitalanlage; *g. s.* Gangliogenitalstrang; *h.* Herz; *m.* Magen; *n.* Nerven; *oe.* Oesophagus; *p. b.* Pylorusblindsack; *p. s.* Peribranchialsiphonen.

¹ Auf diesem Stadium sind die beiden Peribranchialkammern noch ganz getrennt, jede hat ihre eigene äußere Öffnung und Siphon. Erst später rücken die beiden Peribranchialsiphonen einander entgegen und bilden den bleibenden Kloakensiphon durch Verwachsung.

(die Buccalnerven). Ebenso entspringen zwei Nerven dem hintersten Teil des Ganglion. Dieselben laufen symmetrisch den beiden rechten und linken Peribranchialsiphonen zu. Vom hinteren Teil des Ganglion, Median zwischen diesen Nerven, sieht man den oben erwähnten Zellenstrang rückwärts verlaufen, und zwar in gerader Linie zwischen der rechten und linken Peribranchialkammer unmittelbar unter der äußeren Körperwandung. Er verläuft weiter dem Anus vorbei, der rechten Seite des Enddarmes entlang und setzt sich auch zwischen diesem und dem Oesophagus fort. An die mittlere Höhe des Oesophagus angelangt biegt der Strang ventralwärts um, kreuzt den Ausführungsgang der Intestinaldrüse (*a. i.*) unter rechtem Winkel, wobei der Strang hinter diesem passiert, und endet zuletzt mit einer kleinen Verdickung in der Genitaldrüsenanlage (*g. s.*)

Bei ersten Blick kann dieser Strang sehr leicht für einen Nerv angenommen werden, auf Grund seines Zusammenhanges mit dem Ganglion, und besonders weil er den Nerven auch recht ähnlich sieht. Bei genauerer Untersuchung wird man jedoch, schon am lebenden Material, erkennen können, daß sich der Strang in wichtigen Beziehungen von den Nerven unterscheidet. Während sich die Nerven nicht weit vom Ganglion in immer feinere Fasern verästeln, die am lebenden Material zuletzt nicht mehr verfolgt werden können, so sendet dieser Strang augenscheinlich keine Zweige ab und behält in ganzer Länge ungefähr denselben Umfang.

Die Nerven machen außerdem den Eindruck, als seien sie vollständig glatt, während der Strang mehr oder weniger uneben erscheint. Dieses kommt daher, daß der Strang aus Zellen besteht, deren Kerne man durchschimmern sieht.

Wir haben also einen Zellenstrang vor uns, der ohne Unterbrechung die Genitalanlage mit der Region des Ganglion verbindet.

Um mit Bezug auf eine Deutung dieses Stranges nichts vorzugreifen, habe ich für denselben den Namen Ganglio-genitalstrang gewählt, eine Benennung, die sich nur auf seinen Verlauf beziehen soll.

Der Bau des Gangliogenitalstranges, und besonders seine Verbindung mit der Genitaldrüsenanlage, soll im folgenden, in Verbindung mit den ersten Entwicklungsstadien der Genitaldrüsen, eingehend erörtert werden.

Stadium I. Die Genitalanlage als kompakte Zellenansammlung.

Textfig. 2 zeigt dieses Stadium, wie es bei einem lebenden Individuum beobachtet werden kann. Die Anlage der Genitaldrüsen (*g. a.*) wird aus einer deutlich abgegrenzten Ansammlung von Zellen gebildet. Bei einzelnen Individuen kann dieselbe mehr unregelmässige Konturen aufweisen. Ich habe aber nicht gewagt daraus zu folgern, daß dieses ein früheres Stadium in der Entwicklung der Anlage bedeute.

Die Figur zeigt, daß die Anlage mit dem Gangliogenitalstrang (*g. s.*), den man schon auf diesem Stadium nach vorne bis zur Ganglionregion verfolgen kann, in direkter Verbindung steht.

Taf. I, Fig. 1 zeigt einen Querschnitt durch die Genitalanlage von vorne aus gesehen und mit nach links auf der Tafel orientierter Dorsalseite. Man sieht aus dieser Figur, wo der distale Teil des Pylorusblindsackes (*p.b.*) eingezeichnet ist, daß die Anlage dicht an dessen Wand liegt.

In der Genitalanlage sind die Zellenkerne verhältnismäßig sehr groß, so daß nur ein unbedeutendes Quantum von Cytoplasma zwischen den einzelnen Kernen Platz findet. Zellengrenzen habe ich hier nicht entdecken können. Die Größe der einzelnen Kerne ist merkbar verschieden. Da aber größere und kleinere Kerne unter einander unregelmäßig zerstreut liegen, und da außerdem alle Übergänge von den kleinsten zu den größten zu finden sind, so ist es hier kaum wahrscheinlich, daß der Größen-Unterschied der Kerne für eine Differenzierung Ausdruck giebt.

Alle Kerne, auch die an der Periferie befindlichen, weisen mit wenigen Ausnahmen eine sphäroide Form auf. Eine Differenzierung in eine äußere Lage und eine zentrale Masse, wie JULIN¹ (1893) sie für *Dendrodoa (Styelopsis) grossularia* angiebt, läßt sich bei *Corella parallelogramma* an diesem Stadium nicht nachweisen. Die Anlage muß hier als vollständig homogen bezeichnet werden. Dies stimmt vollständig mit den Beobachtungen von SELYS-LONGCHAMPS und DAMAS (1900, p. 458) an *Caesira (Molgula) ampulloides* überein. (Vergl. auch FLODERUS, 1896, p. 174 u. folg.).

Von der dorsalen Seite der Anlage geht ein Zellenstrang (*g. s.*) in dorsaler Richtung. Dieser ist ohne Zweifel der Gangliogenitalstrang. Am Totalobjekt, von dem die Schnitte dargestellt sind, konnte der Strang von Genitalanlage aus bis zum Ganglion verfolgt werden. Da hier aber Querschnitte² benutzt worden sind, so war es nicht möglich den Strang in seiner Länge auf dieser Schnittserie zu verfolgen. Auf einem Querschnitt des Stranges wird man denselben nämlich nicht unterscheiden können von den freien Zellelementen, die sich in seiner Nähe befinden. Nur in dem hinteren Teil, wo der Strang ventralwärts nach der Genitalanlage läuft und

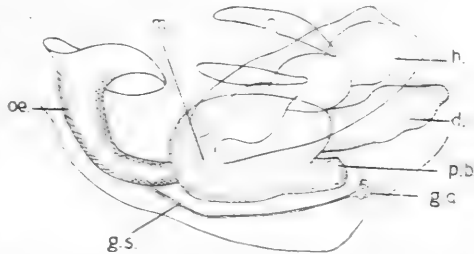


Fig. 2. Hinterer Teil einer jungen *Corella parallelogramma*. × 80. d. Darm; g. a. Genitalanlage; g. s. Gangliogenitalstrang; h. Herz; m. Magen; oc. Oesophagus; p. b. Pylorusblindsack.

¹ JULIN (1893, p. 5): „Dès ce premier Stade, les éléments de cet amas sont différenciés :

1° en un assis périphérique, continu, de cellules surbaissées et

2° en une masse centrale formant un cyncytium, dont les noyaux diffèrent de ceux des cellules de l'assis périphérique par leur aspect spécial et par leur volume un peu plus considérable.“

² Die Ausdrücke Querschnitt, Sagittalschnitt, Frontalschnitt beziehen sich immer, wo nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, auf die Orientierungspläne des Individuums.

dadurch annähernd im Schnittplan zu liegen kommt, läßt er sich sicher verfolgen.

Beim Übergang zur Genitalanlage zeigt der Strang eine kleine Verdickung, die aus 4—5 Zellen mit abgerundeten Kernen besteht. Sonst besteht er dagegen aus einer einfachen Zellenreihe mit spindelförmigen Kernen.

Es mag hervorgehoben werden, daß in dieser Schnittserie keine freien Mesodermzellen in der unmittelbaren Nähe der Genitalanlage und des daranstossenden Teiles des Gangliogenitalstranges vorgefunden werden, wie dies in anderen Teilen desselben Individuums der Fall ist. Die Anschauung, die SEELIGER (1882, p. 364) vertritt, daß die Genitalanlage hier zwischen Magensack und Darm aus dem Grunde entsteht, weil hier spezielle Bedingungen zur Ansammlung von freien Mesodermzellen vorhanden sind — „durch die geringe Geschwindigkeit der Circulation der Leibeshöhlichkeit an dieser Stelle“ — findet also bei *Corella parallelogramma* keine Bestätigung.

Stadium II. Die primäre Genitalblase.

1ste Stufe. Textfig. 1 zeigt diese frühe Entwicklungsstufe von Stadium II, so wie man sie bei einem lebenden Individuum unter ca. 80-facher Vergrößerung beobachten kann. Die Anlage (*g. a.*) ist eine beinahe kugelförmige, scharf begrenzte Zellenblase (die primäre Genitalblase), unbedeutend größer als die kompakte Anlage vom vorigen Stadium. Eine hellere zentrale Partie der Anlage deutet einen inneren zellenfreien Hohlraum an.

Taf. I, Fig. 2 a zeigt einen Schnitt durch die Mitte der Anlage auf dieser Entwicklungsstufe, einer Sagittalschnittserie entnommen. Die Anlage ist von der rechten Seite gesehen, und die dorsale Seite der Blase ist auf der Tafel nach links orientiert.

Aus dieser Figur geht hervor, daß der zellenfreie Hohlraum deutlich excentrisch liegt. Daher ist ein Teil der hinteren lateralen Wandung der Blase sehr dünn geworden, aus einer einzelnen Lage von Zellen mit mehr oder minder abgeplatteten Kernen bestehend. Die ganze Vorderwand dagegen besteht aus mehreren Zellenlagen mit sphäroiden Kernen. Diese beiden Teile der Wandung gehen gleichmäßig in einander über, sowohl was die Dicke der Wandung als auch die Form der Zellenkerne anbetrifft.

Die Größe der Zellenkerne variiert ebenso unregelmäßig wie auf dem vorigen Stadium, und abgeplattete Kerne sind nur im mittleren Teil der dünnwandigen Partie zu finden.

Der Gangliogenitalstrang ist schon oben (S. 18) beschrieben worden, so wie er im lebenden Tier auf diesem Stadium beobachtet werden konnte (Textfig. 1, *g. s.*).

Taf. I, Fig. 2 b zeigt, auf einem mit Fig. 2 a benachbarten Schnitt, die Verbindung zwischen Gangliogenitalstrang und Genitalblase. Diese Verbindungsstelle zwischen dem Strange und der Genitalanlage wird im folgenden, der Kürze wegen, die Basis des Stranges genannt werden.

Auf dem Schnitt, den Fig. 2 b wiedergibt, hat nur der Teil des Gangliogenitalstranges Platz gefunden, der der Basis am nächsten liegt. Dieser Teil zeigt sich als ein deutlicher Vorsprung auf der dorsalen Seite der Genitalblase, am Übergange von deren dünnwandigen Teil in den dickwandigen. Ebenso wie auf dem vorigen Stadium bildet der Strang auch hier bei seiner Basis eine kleine erweiterte Partie mit runden Zellkernen.

In dieser Sagittalschnittserie, wo die Schnittrichtung die Hauptrichtung des Gangliogenitalstranges annähernd parallel läuft (ventro-dorsal, von hinten nach vorne) kann man den Strang in seiner ganzen Länge verfolgen, von der Basis an bis zu seiner Verbindung mit dem Ganglion.

Fig. 2 c zeigt, aus derselben Serie, ein längeres Stück des Stranges in der Oesophagealregion. Der Strang liegt hier dicht unter dem stark abgeplatteten Epithel, welches die äußere Körperwandung bildet, und besteht aus einer einfachen Reihe von Zellen mit spindelförmigen Kernen.

2te Stufe. Fig. 3 a und Fig. 3 b sind nach zwei aufeinanderfolgenden Schnitten einer Querschnittserie ausgeführt. Beide Schnitte sind, wie auch Fig. 1, von vorne gesehen und mit nach links auf der Tafel orientierter Dorsalseite. Die Genitalanlage besteht auch hier noch aus einer einfachen beinahe kugelförmigen Blase, die unterdessen bedeutend größer als auf der vorigen Stufe geworden ist; ihr Hohlraum hat sich in der Tat bis auf das vielfache Volumen erweitert.

Die Wandung der Blase besteht noch immer aus zwei deutlich unterscheidbare Partien, einer dünnwandigen Partie aus einer einzelnen flachen Zellenlage bestehend, und einer dickwandigen Partie, welche ein homogenes, undifferenziertes Keimepithel bildet (*k. r.*).

Während des Wachstums der Blase hat sich das einschichtige Epithel mehr als das Keimepithel ausgebreitet, so daß es nun im Verhältnis zur früheren Stufe einen größeren Teil der Blase begrenzt. Fig. 3 a gibt jedoch eine etwas ungenaue Vorstellung von dem Größenverhältnis zwischen den beiden Epithelpartien, und zwar zu Gunsten des einschichtigen Epithels. Der Schnitt hat nämlich die Blase nicht ganz median getroffen, sondern ist der dünnwandigen Seite derselben etwas genähert.

Die Lage der beiden Epithelien im Verhältnis zu den Hauptrichtungen des Individuums ist dieselbe wie auf der vorigen Stufe: das einschichtige Epithel begrenzt die laterale Seite der Blase, während das Keimepithel die mediale Wandung derselben bildet.

Das Keimepithel erweist noch wie in der ersten kompakten Anlage keine Differenzierung in getrennte Zellenlagen. Abgeplattete Zellkerne findet man immer noch nur in dem einschichtigen Epithel.

Der Ganglio-genitalstrang. Fig. 3 a zeigt ein Stück vom Gangliogenitalstrang im Längsschnitt (*g. s.*). Die Basis des Stranges steht immer noch mit der dorsalen Seite der Genitaldrüsenanlage, an der Grenze

zwischen dem einschichtigen Epithel und dem Keimepithel in breiter Verbindung.

Der verdickte Teil des Stranges, der auf der vorigen Entwicklungsstufe ganz kurz war, aus nur wenigen Zellkernen bestehend, nimmt jetzt an der Basis des Stranges ein längeres Stück auf. Der Strang zeigt hier im Querschnitt 2—4 Zellkerne neben einander. Sie haben Kugelform und liegen hier bedeutend dichter zusammen als in dem übrigen Teil des Stranges. An seiner Basis findet sich eine Andeutung zu einer peripheren Anordnung der Zellkerne, wodurch eine centrale kernfreie Partie gebildet wird. (Fig. 3 b).

In dieser Querschnittserie läßt sich der Strang nur bis zu seiner Umbiegungsstelle an der Dorsalseite des Tieres verfolgen. Der weitere Verlauf des Stranges muß daher auf Sagittalschnitten desselben Stadiums studiert werden, wie sie in Fig. 4 a und Fig. 4 b dargestellt sind. Der Gangliogenitalstrang läßt sich in der betreffenden Schnittserie in seiner ganzen Länge verfolgen, von der Genitalblase an nach vorne bis zu seiner Verbindung mit dem Ganglionregion.

Die beiden aufeinander folgenden Schnitte der Figg. 4 a—b zeigen den hinteren Teil des Ganglion (*g.*) dicht neben einer hinteren Verlängerung der Neuraldrüse (*v. f.*) und den vorderen Teil des Gangliogenitalstranges (*g. s.*) von rechts aus gesehen und mit nach oben auf der Tafel gerichteter Dorsalseite.

Der Strang enthält hier, wie auch in seiner ganzen Länge, 1—2 Zellkernen neben einander im Querschnitt. Die Kerne sind mehr oder weniger deutlich spindelförmig.

Es fällt schwer auf Grund dieser Schnittserie mit absoluter Sicherheit zu entscheiden, inwieweit der Gangliogenitalstrang direkt in den eigentlichen Ganglion übergeht, oder in den daranstoßenden Teil der Neuraldrüse. Diese Frage wird jedoch in einem späteren Abschnitt (S. 38) einer speziellen Untersuchung unterworfen werden.

Stadium III. Die primäre Genitalblase differenziert sich in einen Testisteil und einen Ovarialteil. — Der primäre Ausführungsgang.

Textfig. 3 zeigt den hinteren Teil eines Individuums auf einer früher Stufe dieses Stadiums, von rechts gesehen und mit nach links orientierter Dorsalseite.

Die primäre Genitalblase hat nun eine deutliche Birnform angenommen, mit gegen die Dorsalseite gerichteter Spitze. Im breiteren, ventralen Ende der Blase sieht man in der Wandung eine deutliche Einsenkung. Diese Einsenkung ist das Zeichen einer beginnenden Differenzierung der einfachen primären Genitalblase in zwei sekundäre Blasen, welche sich von nun an selbständig weiter entwickeln und Ovarium und Testis bilden sollen.

Die Spitze der birnförmigen Anlage geht direkt in den Gangliogenitalstrang (*g. s.*) über, welchen man auf der Figur bis an die Dorsalseite und weiter vorwärts am Oesophagus vorbei verfolgen kann.

Textfig. 4 zeigt den hinteren Teil eines Individuums auf einer bedeutend späteren Entwicklungsstufe, von hinten-rechts gesehen. Die ursprünglich einfache Genitalblase ist nun in zwei vollständig getrennte Blasen geteilt, eine größere laterale, und eine kleinere medial gelegene. Auf der Figur schimmern die Konturen der tieferliegenden, kleineren Blase durch die größere hindurch, welche sie übrigens vollständig deckt.

Durch Vergleich mit den späteren Entwicklungsstadien läßt sich leicht erkennen, daß der Testis aus der medialen, kleineren Blase und das Ovarium aus der lateralen, größeren Blase sich entwickeln.

Dieselbe Orientierung der frühen Ovarial- und Testisanlage und ein ähnliches Größenverhältnis zwischen beiden sind bei einer ganzen Reihe von Arten nachgewiesen worden, und zwar bei: *Perophora listeri* und *Clavelina lepadiformis* von VAN BENEDE (1881) und VAN BENEDE und JULIN (1887), *Ciona intestinalis* von VAN BENEDE (1881) und FLODERUS (1896), *Ascidella aspersa* von VAN BENEDE und JULIN (1887), *Dendrodoa grossularia* von JULIN (1893), *Holozoa occidentalis* von BANCROFT (1898), und *Cacsira ampulloides* von SELYS-LONGCHAMPS und DAMAS (1900).

Da diese 8 Arten (*Corella parallelogramma* mitgerechnet) 8 verschiedenen Familien, auf 3 Ordnungen verteilt, angehören (siehe das Verzeichnis Seite 46), haben wir jeden Grund diesen Modus der Differenzierung der primären Genitalblase als einen den Ascidiern in allgemeinen charakteristischen anzusehen.

Textfig. 4 zeigt, daß die Ovarialblase dorsal mit einem langgestreckten Blindsack (*p. a.*) in Verbindung steht, welcher hier dieselbe Richtung folgt, wie auf den früheren Stadien der Gangliogenitalstrang. Das blinde Ende dieses Sackes ist konisch zugespitzt und reicht auf der hier besprochenen Entwicklungsstufe bis auf die Höhe des Ausführungsganges der Intestinaldrüse (*a. i.*), wo er in den Gangliogenitalstrang (*g. s.*) direkt übergeht.

Während der weiteren Entwicklung sieht man diesen Blindsack sich rohrförmig dem Darmkanal entlang gegen die Kloake hin verlängern, indem er auch zur selben Zeit, von der Drüsenanlage an beginnend, in Ovidukt und Ductus deferens differenziert wird. Der Blindsack ist also eine gemeinsame Anlage der Ausführungsgänge der Genitaldrüsen und soll daher als ihr primärer Ausführungsgang bezeichnet werden.

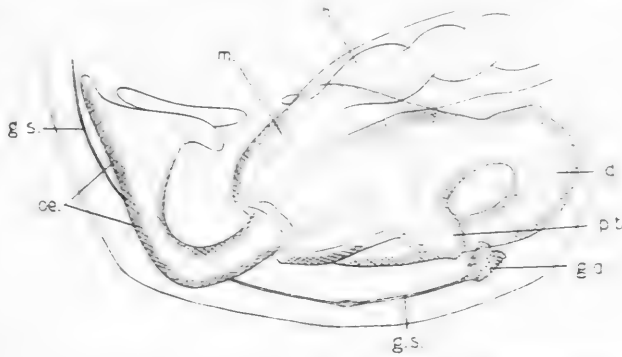


Fig. 3. Hinterer Teil einer jungen *Corella parallelogramma*. $\times 80$. d. Darm; g. a. Genitalanlage; g. s. Gangliogenitalstrang; h. Herz; m. Magen; oe. Oesophagus; p. b. Pylorusblindsack.

Figg. 5 a—c, Taf. I, sind einer Frontalschnittserie entnommen, die ein Stadium wenig später als das der Textfig. 3 representiert. Da die Längsachse der Genitalanlage in ventro-dorsaler Richtung liegt, giebt die Frontalschnittserie Querschnitte dieser Anlage. Die Schnitte sind hier von der Ventralseite aus gesehen mit nach oben auf der Tafel orientierter mediale Seite der Genitalanlage.

Die Genitalanlage wird auf 23 Schnitten dieser Serie vorgefunden, die in Tab. I in der Reihenfolge von der ventralen zur dorsalen Seite nummeriert sind. Für jeden Schnitt ist in der Tabelle durch Kreuze angegeben welche Teile der Genitalanlage hier vorhanden sind. Figg. 5 a—c sind nach den Schnitten Nr. 6, 15 und 17 dieser Tabelle ausgeführt worden.

Fig. 5 a zeigt, daß die Anlage von der Seite stark abgeplattet worden

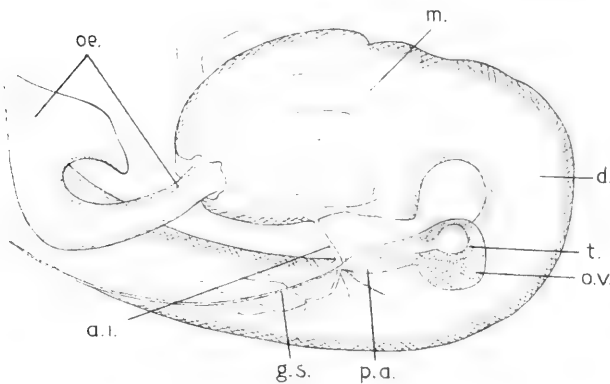


Fig. 4. Hinterer Teil einer jungen *Corella parallelogramma*. · 60. a. i. Ausführungsgang der Intestinaldrüse; d. Darm; g. s. Gangliogenitalstrang; m. Magen; oe. Oesophagus; ov. Ovarialblase; p. a. Primärer Ausführungsgang der Genitalorgane; p. b. Pylorusblindsack; t. Testis.

ist, besonders in Betreff der lateralen Wand, so daß die Anlage jetzt annähernd halbmondförmig ist. Die laterale Wand wird, wie auf dem vorigen Stadium, von einem einschichtigen Epithel gebildet, welches jedoch jetzt zu einem sehr niedrigen Plattenepithel mit großem Abstand zwischen den Zellkernen umgebildet worden ist. Die mediale Seite der Anlage wird dagegen

von einer mehrschichtigen Zellenmasse mit sphäroiden, chromatinreichen Zellkernen gebildet. Diese Zellenmasse hat sich zweifellos im ganzen aus dem Keimepithel des vorigen Stadiums (Fig. 3 a, k. c.) entwickelt.

In dem medialen Teil dieser Zellenmasse sieht man einen kleinen Hohlraum (t.). Weiterhin zeigt die Figur, daß dieser Teil der Zellenmasse von dem übrigen Teil durch eine äußerst dünne, strukturlose Membran geschieden ist, welche der äußeren Körperwand der Ascidie annähernd parallel gestellt ist. Die ganze Genitalanlage besteht also aus zwei Blasen, einer medialen und einer lateralen. (Vergl. VAN BENEDEN und JULIN 1887, Pl. XV, Fig. 13).

Die mediale Blase ist bedeutend kleiner als die laterale, und ihre Wandung wird von einer mehrschichtigen Lage unter sich annähernd gleicher Zellen mit sphäroiden Kernen gebildet (Keimepithel). Diese Blase ist die Testisanlage,¹ die laterale größere Blase ist die Ovarialanlage.

¹ Die Frage, ob der Hohlraum der Testisanlage ursprünglich von demjenigen der Primärblase abgezweigt ist, oder ob er unabhängig von diesem entstanden ist, muß ich unbeantwortet lassen.

Tab. I.

Fig.	5 a.				5 b.				5 c.														
Schnitt Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Testis																						
Ovarium	x x x x x x x																						
Prim. Ausf.g.																						

Da die Testisanlage sich von dem mittleren Teil des mehrschichtigen Keimepithels der primären Genitalblase abspaltet, wird die mediale Wand der Ovarialblase an dieser Stelle auf eine einzelne Zellenlage reduziert. Zu beiden Seiten der Testisanlage behält jedoch das Keimepithel der Ovarialblase seine volle Breite. Auf diese Weise werden in der medialen Ovarialwand zwei symmetrisch liegende Verdickungen gebildet, die auf beiden Seiten der Testisblase der ventro-dorsalen Längsrichtung der Anlage folgen.

Diese zwei Keimepithel-Zonen sind jedoch unter sich nicht ganz getrennt. Die Testisanlage reicht nämlich, wie aus Tab. I hervorgeht, weder in ventraler noch in dorsaler Richtung bis zum äußeren Rand des Ovariums hervor. Hier sieht man daher auf Schnitten die beiden erwähnten Keimepithel-zonen zusammenlaufen (Fig. 5 b), so daß sie in der Tat, um die Berührungsfläche der Testisanlage herum, einen ringförmigen Wulst bilden.

Der Hohlraum der Testisanlage ist auf diesem Stadium ganz geschlossen ohne Verbindung weder mit dem Lumen der Ovarialblase noch mit demjenigen des Ausführungsganges. Auch die Wand der Testisanlage ist an der ventralen Seite durch die früher genannten Membran von der Ovarialwand deutlich getrennt. Die Wände der beiden Anlagen scheinen dagegen am dorsalen Ende der Testisanlage ineinander überzugehen, indem die trennende Membran hier nach und nach unsichtbar wird.¹

Eine aus dem Keimepithel heraus differenzierte Oberflächenlage ist auch auf diesem Stadium, weder in der Ovarial- noch in der Testis-blase vorhanden. Die Kernbilder des mittleren Teiles der Keimepithelzonen lassen vermuten, daß die Zell-proliferation hier am lebhaftesten vor sich geht, ohne daß mir jedoch deutliche Teilungsbilder zu Gesicht gekommen sind.

Fig. 5 b zeigt, daß der Hohlraum der Ovarialblase dorsal mit dem primären Ausführungsgang (*p. a.*) in offener Verbindung steht. Ein Querschnitt durch den letzteren ist auch in Fig. 5 c dargestellt. Seine Wandung besteht aus einer einzelnen Zellenlage, die aber nicht rund herum eine gleichmäßige Dicke hat. Während nämlich die laterale Wand aus einem Plattenepithel mit abgeplatteten, zerstreuten Kernen besteht, wird die mediale Wand des Ausführungsganges von einem hohen kubischen Epithel mit dichtliegen-

¹ Dieses Stadium entspricht zweifellos dem von FLODERUS bei *Ciona intestinalis* beschriebenen, dem er auch sehr ähnlich ist (FLODERUS 1896, p. 177 Ilg., Taf. X, Figg. 3—6).

den, sphäroiden Kernen gebildet, eine Fortsetzung, der schon für die primäre Genitalblase beschriebenen Verhältnisse.

Trotzdem sich der Hohlraum der Ovarialblase direkt in den primären Ausführungsgang hinein fortsetzt, ist doch die Grenze zwischen beiden Abschnitten scharf markiert. Der Ausführungsgang hat nämlich einen Querschnitt, welcher nur einen Bruchteil desjenigen der Ovarialblase ausmacht. Wie plötzlich dieser Übergang geschieht, wird aus einem Vergleich der beiden Schnitte 5 b und 5 c, zwischen denen nur ein einziger Schnitt liegt, klar hervorgehen.

Die Grenze wird weiterhin dadurch hervorgehoben, daß das mehrschichtige Keimepithel ebenso plötzlich in das einschichtige Epithel des Ausführungsganges übergeht. Diese scharf markierte Grenzstelle entspricht ohne Zweifel die frühere Basis des Gangliogenitalstranges (Vergl. Fig. 3 a).

Stadium IV. Die Testisanlage mit zwei Lappen, T-förmig. — Die Ovarialblase immer noch ein einfacher, langgestreckter Sack. — Die Differenzierung des primären Ausführungsganges in Ovidukt und Ductus deferens hat begonnen.

Fig. 6 a—h, Taf. II, sind nach einer Frontalschnittserie ausgeführt und zeigen eine Reihe Querschnitte durch die Genitalanlage auf diesem Stadium, von der Dorsalseite gesehen, die mediale Seite nach oben auf der Tafel orientiert.

Tab. II giebt eine Übersicht über die 45 Schnitte der Serie, welche die Genitalanlage anbetreffen. Die Schnitte sind, wie auf Tab. I, in der Reihenfolge von der ventralen zur dorsalen Seite nummeriert. Ein Kreuz bezeichnet jedesmal, daß Testis, Ovarium oder Ausführungsgänge in einem bestimmten Schnitt nachweisbar ist.

Die Testisanlage. Aus einem Vergleich zwischen Tab. I und II geht sogleich hervor, daß die Testisanlage nebst Duct. deferens erheblich mehr an Länge zugenommen hat, als dies mit dem Ovarialteil der Genitalanlage der Fall ist.

Diese Längenzunahme der Testisanlage ist jedoch kaum als eigentliches Wachstum zu betrachten. Die Zunahme gegen die Dorsalseite hin bedeutet wahrscheinlich wesentlich eine Differenzierung von bereits früher vorhandenem Zellenmaterial, nämlich von Zellenelementen der medialen Wand der Ovarialblase und des primären Ausführungsganges. Die Ausbreitung gegen die Ventralseite hin bedeutet wahrscheinlich wesentlich eine Dehnung und eine Umplacierung der Zellenelemente, welche bereits in diesem Teil der Testisanlage auf dem vorigen Stadium schon vorhanden waren.

Fig. 5 a, Taf. I, und Fig. 6 b, Taf. II, repräsentieren Schnitte in gleichem Abstand von der Mündung der Ovarialblase in den Ausführungsgang. Es kann also angenommen werden, daß sie einander einigermaßen entsprechen. Ein Vergleich der Querschnitte durch die Testisanlage auf diesen zwei Figuren zeigt, daß die Anlage eine Veränderung erfahren hat, die schwerlich

von einander getrennt. Die Schnittserie ergibt, daß sie längs der ventralen Wand der Testisblase zusammenhängen.

Die Zellkerne des mehrschichtigen Keimepithels sind von sphäroider Form und einander sehr ähnlich. Irgend welche spezifisch differenzierte, periphere Zellenlage kann noch nicht nachgewiesen werden. Typische Teilungsbilder konnten nicht ebenso wenig wie an früheren Stadien, nachgewiesen werden.

Wie aus Fig. 6 a hervorgeht, sind Testis und Ovarialblase in diesem ventralen Teil der Anlage deutlich auseinander gerückt, während der Zwischenraum von Bindegewebe eingenommen wird. Die Testisblase liegt hier der rechten Wand des Peribranchialraumes dicht an. Dorsalwärts nähern sich Testis und Ovarium immer mehr an einander. Fig. 6 b zeigt beide Blasen ohne Zwischenraum dicht aneinander liegend. Ein kleines Stück weiter dorsalwärts (Fig. 6 c) findet man die Testisanlage als enger Kanal in der Wand der Ovarialblase eingeschlossen.

Die Ovarialanlage. Dieselbe hat seit dem vorigen Stadium nur kleine Formveränderungen erfahren. Die Ovarialanlage hat an Breite ungefähr ebensoviel wie an Länge zugenommen; sie bildet daher immer noch eine langgestreckte, ovale, in medio-lateraler Richtung stark zusammengedrückte Blase.

Die laterale Wand der Ovarialblase wird, wie auf dem vorigen Stadium, von einschichtigem, jetzt auch sehr niedrigem Plattenepithel mit großem Abstand zwischen den Zellkernen gebildet (Fig. 6 b und Fig. 6 c).

Die mediale Wand hat wie vorher zwei Keimepithel-Zonen, aus mehrschichtigen Zellenmassen gebildet, welche in den Hohlraum der Ovarialblase als längsgehenden, abgerundeten Wülste hineinragen. Diese werden durch eine dünne Wandpartie geschieden, welche größtenteils aus einer einzelnen Zellenlage mit schwach abgeplatteten Kernen besteht.

Die beiden Keimepithel-Zonen liegen einigermaßen symmetrisch um den Medianplan der Anlage, auf beiden Seiten der Testisanlage. Ventral gehen die beiden Zonen in einander über, so daß das Keimepithel die ventrale Wand der Ovarialblase bildet (Fig. 6 a). In dieser Hinsicht besteht eine vollständige Übereinstimmung zwischen diesem und dem vorhergehenden Stadium. Dagegen unterscheiden sich beide Stadien darin, daß die Keimepithel-Zonen dorsal nun ganz getrennt sind. Diese Tatsache stützt die bei der Beschreibung des vorigen Stadiums erwähnte Auffassung (S. 25), daß die bilaterale Entwicklung des Keimepithels der Ovarialblase mit der Differenzierung der Testisanlage aus dem medianen Teil des Keimepithels der Primärblase zusammenhängt.

VAN BENEDEN und JULIN (1887) erwähnen, daß das Keimepithel des Ovariums bei *Perophora listeri* und *Clavelina lepadiformis* (*C. rissoana*) bilateral angeordnet ist und suchen darin ein Parallel zu den zwei Ovarien der Vertebrata. Auf einen ähnlichen bilateralen Bau macht MAURICE (1888)

bei *Parascidia arcolata* (*Fragaroides aurantiacum*) aufmerksam, ebenso FLODERUS (1896) bei *Ciona intestinalis*. In den beiden letzten Fällen geht es auch hervor, daß hier die zwei Keimepithelzonen wie auch bei *Corella parallelogramma* auf dem beschriebenen Stadium ventral zusammenhängen.¹

Die Zellenkerne im Keimepithel sind immer noch von sphäroider Form und gleichen übrigens den Kernen im Keimepithel der Testisanlage in Betreff ihrer Größe sowohl als ihres Chromatininhalts. Auf diesem Stadium haben noch alle Kerne des Keimepithels ein gleichartiges Gepräge. Aber schon auf einer unbedeutend späteren Entwicklungsstufe treten einzelne Oocyten in ihre Wachstumsperiode hinein und beginnen sich von den übrigen Kernen des Keimepithels deutlich zu unterscheiden.

Der primäre Ausführungsgang. Ein Vergleich zwischen Tab. I und Tab. II (S. 25 und S. 27) ergibt, daß der primäre Ausführungsgang der Genitalorgane jetzt bedeutend länger als auf dem vorigen Stadium gegen die Dorsalseite hin vorgedrungen ist. Das blinde Ende des Ausführungsganges läßt sich nun, wie aus der Schnittserie hervorgeht, in dorsaler Richtung vor dem Ausführungsgang der Intestinaldrüse vorbei verfolgen. (Vergl. Textfig. 4, S. 24, welche eine etwas frühere Entwicklungsstufe zeigt).

Fig. 6 h, Taf. II, zeigt einen Querschnitt durch den primären Ausführungsgang. Die Wandung besteht immer noch aus einschichtigem Epithel, die laterale Wand aus dünnem Plattenepithel, die mediale Wand dagegen aus kubischem Epithel.

Differenzierung des primären Ausführungsganges in Ovidukt und Ductus deferens. Figg. 6 e—g, Taf. II, zeigen in ventrodorsaler Reihenfolge drei auf einander folgende Schnitte durch die Stelle des primären Ausführungsganges, bis zu welcher die Differenzierung in Ovidukt und Ductus deferens schon hervorgeschritten ist. (Vergl. Tab. II.)

Die erste Spur einer Differenzierung des weiter dorsalwärts einheitlichen Ganges (siehe Fig. 6 h) ist in Fig. 6 g zu sehen in Form einer schwachen Ausbuchtung seiner medialen, von kubischem Epithel gebildeten Wand. An der inneren Fläche des Wandepithels sieht man an der entsprechenden Stelle eine recht scharfe Vertiefung.

Auf dem nächsten Schnitt (Fig. 6 f) ist die Ausbuchtung des Wandepithels mehr hervortretend geworden, und die entsprechende Einsenkung der inneren Fläche bedeutend tiefer. Dieses kommt teilweise daher, daß sich auf beiden Seiten am Rande der Einsenkung kleine, lippenförmige Vorsprünge gebildet haben, die in den Hohlraum des Ausführungsganges hineinragen, wodurch die Einsenkung selbst tiefer erscheint. Besonders die vorderste Lippe bildet einen stark hervortretenden, nach hinten gerichteten Rand, so daß die furchenförmige Einsenkung eine schräge Stellung bekommt.

¹ Vergl. SEELIGER, Tunicata, in BRONN: Klassen und Ordnungen des Tier-Reichs, Bd. III, Supl., 1893—1908, pp. 942 und flg.

Auf dem dritten Schnitt (Fig. 6 e) beteiligen sich eine größere Anzahl Epithelzellen an der Ausbuchtung, die nun von beiden Seiten schärfer von dem übrigen Teil der Wand abgegrenzt erscheint. Bei hoher Einstellung des Mikroskops (\odot : an der dorsalen Fläche des Schnittes) sieht man die eben besprochene Furche noch immer offen. Bei tiefer Einstellung dagegen (\odot : ventral) sieht man die beiden Lippenränder unter sich verwachsen. Die frühere Furche ist also gerade in diesem Schnitt zu einem Rohr geschlossen worden.

Die Schnittserie zeigt weiter, daß dieses aus dem kubischen Epithel der medialen Wand des primären Ausführungsganges heraus differenzierte Rohr eine direkte Fortsetzung der Testisanlage bildet. Es repräsentiert die frühe Anlage des Ductus deferens. Der Rest des primären Ausführungsganges mit seinem erheblich größeren Hohlraum bildet nach dieser Differenzierung die Anlage zum Ovidukt.

Fig. 6 d zeigt einen Querschnitt etwas weiter ventralwärts, wo der Differenzierungsprozeß mehr vorgeschritten ist. Ductus deferens bildet hier einen sehr engen, aber doch deutlichen Kanal. Derselbe liegt an der medialen Seite des Ovidukts und steht noch mit der Wand desselben in so intimer Verbindung, daß es schwer fällt zu entscheiden, welche Zellen dem einen und welche dem anderen der beiden Kanäle angehören. Der Schnitt scheint sogar zu zeigen, daß einzelne Zellen in der Tat an der Begrenzung beider Hohlräume teilnehmen. Die Hohlräume selbst sind jedoch in diesem Teil der Anlage deutlich geschieden, was schon auf dieser Entwicklungsstufe die Bezeichnungen Ovidukt und Ductus deferens für dieselben berechtigen muß.

Das Ovidukt. Wir haben schon oben gesehen, daß das Lumen des Ovidukts dorsalwärts in demjenigen des noch ungespaltenen primären Ausführungsganges übergeht. Ventralwärts setzt er sich direkt in den großen Hohlraum der Ovarialblase fort. Die Grenze zwischen Ovarialblase und Ovidukt ist jedoch sehr scharf markiert. Der Querschnitt des Oviduktus macht nämlich von seinem Ursprung an nur einen Bruchteil des Querschnittes der Ovarialblase aus (Vgl. Fig. 6 c und Fig. 6 d). Die lateralen Wände beider Abschnitte bilden zwar eine kontinuierliche Ebene, während die mediale Wand der Ovarialblase bedeutend tiefer in das Tier hineinragt, als die entsprechende Seite des Ovidukts. Hier bildet sich daher ein scharfer Winkel zwischen Ovidukt und Ovarialblase.

Die Grenze wird weiterhin dadurch hervorgehoben, daß die zwei Keim-epithel-Zonen der Ovarialblase an dieser Stelle plötzlich aufhören.

Ductus deferens besteht, wie aus der obigen Beschreibung hervorgeht, aus zwei genetisch verschiedenen Abschnitten. Der erste, der Testisanlage am nächsten liegende, Teil desselben wird, wie wir gesehen haben (S. 27, Figg. 6 b—c), durch Abspaltung der medialen Wand der primären

Genitalblase gebildet.¹ Der zweite Abschnitt, der eine direkte Fortsetzung des ersten bildet, entsteht in ähnlicher Weise durch Differenzierung des primären Ausführungsganges. (Figg. 6 d—g.)

Beide Abschnitte weisen jedoch in ihrem Bau große Ähnlichkeit auf: ein enger Kanal von einschichtigem, kubischem Epithel begrenzt.

Da Ductus deferens auf diesem Stadium dicht an der medialen Wand sowohl des Oviduktus wie der Ovarialblase liegt, muß er, wegen des Winkels, den diese beiden mit einander bilden, eine plötzliche Biegung an der Stelle machen, wo Ovidukt und Ovarialblase zusammenstoßen. Diese Stelle bezeichnet zweifellos die Grenze zwischen den zwei Abschnitten des Ductus deferens.

Stadium V. Weitere Entwicklung der Genitaldrüsen gegen ihren definitiven Zustand hin.

In Betreff der weiteren Entwicklung der Genitaldrüsen sollen nur einige Hauptlinien kurz skizziert werden. Meine Beobachtungen sind hier wesentlich auf Totalpräparaten gemacht worden²; aber auch Schnittserien der verschiedenen Stadien sind in Bezug auf die weitere Ausbildung der Genitaldrüsen studiert worden.

Testis. Die terminalen Drüsenlappen der T-förmigen Testisanlage teilen sich schnell zu wiederholten Malen dichotomisch, so daß die Anlage im Laufe kurzer Zeit in eine stark verzweigte Drüse umgebildet wird. Auf einem Stadium, wenn der Ductus deferens soeben die Kloakenwand erreicht hat (bei Individuen von ca. 6 mm. Länge), hat sich die reich verzweigte Testisdrüse bereits über die ganze linke Seite des mittleren Teiles der Darmschlinge verbreitet, und einzelne Drüsenlappen sind im Begriff sich um den Rand des Darmes gegen die rechte Seite desselben hin vorzudringen.

Gleichzeitig mit der Verzweigung der Drüse differenziert sich das Epithel derselben Schritt für Schritt. Die Endpartien aller Zweige halten sich nämlich ampullenartig erweitert, und hier sieht man das Keimepithel lokalisiert (Vergl. Fig. 6 a), während die Zweige im übrigen, in Form von engen, aus niedrigem Plattenepithel begrenzten Kanälen, eine reich verzweigte Verlängerung des Ductus deferens zu bilden kommen. Das Keimepithel wird auf diese Weise in so viele verschiedene Partien geteilt, wie Verzweigungen (3: Zweigenden) in der Drüse vorgekommen. (Vergl. *Ascidrella aspersa*; VAN BENEDEN und JULIN 1887 a, Pl. XIV, Fig. 5—7.)

Ovarium. Dieses bildet sich späterhin auch zu einer stark verzweigten Drüse aus, aber die Entwicklung verläuft hier bedeutend langsamer, als mit der Testisanlage der Fall war. Ein charakteristischer Unter-

¹ Auf der Tabelle II, S. 27, ist dieser Teil des männlichen Ausführungsganges zum Testis hingeführt worden.

² In Boraxkarmin gefärbt und in Nelkenöl aufgehellt.

schied zwischen Testis und Ovarium besteht darin, daß das letztere auf allen Stadien einen größeren centralen Hohlraum (die Ovarialhöhle) beibehält. Es ist dies derselbe Hohlraum, der seit der ersten Anlage der Ovarialblase immer vorgefunden wurde.

Die Verzweigung des Ovariums geht auf die Weise vor sich, daß sich von dem Keimepithel der Ovarialblase Ausstülpungen bilden. Diese verzweigen sich terminal zu wiederholten Malen, wodurch sie den Drüsenlappen der Testis äußerlich recht ähnlich wird. Im Ovarium wird aber das Keimepithel nicht wie im Testis nur in den Endpartien der Verzweigungen lokalisiert, sondern auch längs den Kanälen, die in die Ovarialhöhle hineinführen. Das Keimepithel bewahrt hier mit anderen Worten den Charakter einer zusammenhängenden Zone, ähnlich wie es in der einfachen Ovarialblase der Fall war.

Ob ein solches Verhalten des Keimepithels als ein mehr allgemeines Charakteristikum des Ascidien-Ovariums angesehen werden darf, läßt sich wohl noch nicht entscheiden. So sind VAN BENEDEN und JULIN (1887 a) in Betreff eines verhältnismäßig frühen Stadium der Verzweigung der Ovarialblase bei *Ascidella aspersa* (*Phallusia scrobroides*) zum Resultat gekommen, daß „l'épithelium germinatif siège exclusivement dans le fond des lobules“ (p. 343).

Die ersten Oocyton scheiden sich von den übrigen Zellen im Keimepithel schon bei beginnender Verzweigung aus, auf einem Stadium, da der Oviduct nur an die Region des Oesophagus angelangt ist.

Die Grundzüge der Entwicklung der Genitalorgane bei *Corella parallelogramma*, so wie sie aus dem vorliegenden Versuch sie klarzulegen hervorgehen, können in folgenden Punkten zusammengefaßt werden:

1. Testis und Ovarium nehmen ihren Ursprung aus einer gemeinsamen einfachen Anlage: einer kleinen, abgegrenzten Zellen-Ansammlung, welche kompakt ist und keinerlei Differenzierung ihrer Zellen zeigt.
2. Die dorsale Seite dieser Anlage steht mit einem Zellenstrang (der Ganglio-genitalstrang) in Verbindung, den man dem Darmkanal entlang, am Oesophagus und Anus vorbei, bis zum Ganglion verfolgen kann.
3. Bevor die Differenzierung in Testis und Ovarium beginnt, bildet sich die kompakte Anlage zu einer Blase (die primäre Genitalblase oder nur Primärblase) um, deren mediale Wand aus einem mehrschichtigen Epithel mit sphäroiden Kernen (Keimepithel) gebildet wird, während die laterale Wand aus einem einschichtigen Epithel besteht, welches immer mehr abgeplattet wird.
4. Längs derselben Linie, welche von dem Gangliogenitalstrang beschrieben wird, bildet sich von der dorsalen Seite der Primärblase aus, ein einfacher Blindsack (der primäre Ausführungsgang), der mit der Primärblase in offener Verbindung steht. Seine mediale Wand wird von einschichtigem kubischem Epithel gebildet, seine laterale Wand von einschichtigem Plattenepithel.

5. Die primäre Genitalblase teilt sich inäqual in eine Testisanlage und eine Ovarialanlage. Die Testisanlage mit einem verhältnismäßig kleinen Hohlraum spaltet sich von dem medialen Teil des Keimepithels der Primärblase ab, während der ganze übrige Teil der Primärblase die Ovarialanlage (Ovarialblase) bildet.

6. Der primäre Ausführungsgang teilt sich in ähnlicher Weise inäqual in Ductus deferens und Ovidukt. Ductus deferens mit einem verhältnismäßig sehr geringen Querschnitt bildet sich aus der medialen Wand des primären Ausführungsganges, während der ganze übrige Teil des Ausführungsganges zum Ovidukt wird.

7. Bei der Entwicklung der Testisanlage zu einer verzweigten Drüse wird das Keimepithel immer in den erweiterten Endpartien der Zweige lokalisiert, während die mittleren Teile der Zweige sich zu engen Ausführungskanälen differenzieren, aus niedrigem Plattenepithel gebildet. Das Keimepithel teilt sich auf diese Weise in ebenso viele getrennte Parteien, wie Drüsenlappen in dem Testis vorkommen.

8. Die Abspaltung der Testisanlage von dem medialen Teil des Keimepithels der Primärblase bewirkt, daß das Keimepithel der Ovarialblase, zwei dorso-ventral laufende Zonen bildet, welche nur im ventralen Teil der Blase zusammenhängen, wodurch eine U-förmige Keimepithelzone entsteht.

9. Bei der Entwicklung der Ovarialblase zu einer verzweigten Drüse bleibt ein größerer centraler Hohlraum (die Ovarialhöhle) bewahrt. Ebenso bleibt das Keimepithel als zusammenhängende Epithelzone beibehalten, indem es nicht nur in den Endpartien der Drüsenlappen lokalisiert wird, sondern auch längs den Kanälen, die in die Ovarialhöhle hineinführen.

2. Das Verhältnis des „Ganglio-genitalstranges“ zu den Ausführungsgängen der Genitaldrüsen während deren Entwicklung.

Im vorigen Abschnitt wurde erwähnt, daß der primäre Ausführungsgang der Genitaldrüsen längs derselben Linie angelegt wird, welcher auch der Gangliogenitalstrang von der dorsalen Seite der Primärblase dem Darmkanal entlang folgt. (Textfig. 4). Dasselbe Verhältnis bleibt auch während der weiteren Entwicklung bestehen, indem der Ausführungsgang dieser Linie gegen die Dorsalseite hin und weiter nach vorne zwischen dem Oesophagus und dem hier links gelegenen Darm, stets genau folgt. (Vgl. Textfig. 1, S. 17).

Um Klarheit darüber zu gewinnen, welche Rolle der Gangliogenitalstrang bei dieser Entwicklung spielt, wollen wir den Bau des Stranges, speziell den seines basalen Teiles, und seine Verbindung mit dem Ausführungsgang an drei Stadien seiner Entwicklung untersuchen.

Stadium I.

Als erstes Stadium wählen wir dasjenige, welches Textfig. 4, S. 24 abbildet. Das blinde Ende des primären Ausführungsganges hat auf diesem Stadium dorsal einen Punkt erreicht, der neben dem Ausführungsgange der Intestinaldrüse liegt. Bereits an lebendem Material oder an Totalpräparaten läßt es sich erkennen, daß dieses etwas zugespitzte Ende des Ausführungsganges die Basis (den hinteren Endpunkt) des Gangliogenitalstranges bildet.

Für einen genaueren Studium der Verbindung zwischen dem Ausführungsgang und dem Strange müssen jedoch Schnittserien benutzt werden. Die Schnittrichtung muß so orientiert sein, daß man einen Längsschnitt sowohl von einem längeren Stück des basalen Teiles des Stranges, als auch von dem daranstoßenden Teil des Ausführungsganges gewinnt. An dem gegebenen Stadium wird dies am besten durch Querschnittserien erreicht.

Figg. 7 a—b, Taf. II, sind nach zwei aufeinander folgenden Schnitten einer solchen Querschnittserie ausgeführt. Die Schnitte sind von vorne aus gesehen, und die dorsale Seite ist auf der Tafel nach links orientiert.

Die Figuren zeigen das dorsale, blinde Ende des primären Ausführungsganges (*p. a.*) und ein Stück des basalen Teiles des Gangliogenitalstranges (*g. s.*). Dieser bildet hier einen kompakten Zellenstrang, welcher von dem konisch zugespitzten Ende des Ausführungsganges in dorsaler Richtung hinzieht. Die Basis des Stranges fällt also nun mit der Spitze des Ausführungsganges zusammen. Auch ein Stück weiter dorsalwärts ist der Strang immer noch so dick, daß er zwei Schnitte ($\approx 5 \mu$) ausfüllt und wahrscheinlich 5—6 Zellen auf einem Querschnitt enthält.

Die Zellkerne sind in diesem Teil des Stranges reich an Chromatin und nehmen, gegen die Spitze des Ausführungsganges hin, allmählich dieselbe sphäroide Form an, die auch für das Epithel des Ausführungsganges hier charakteristisch ist. Auf diese Weise wird die Grenze zwischen den Strangzellen und den Wandzellen des Ausführungsganges vollständig verwischt. Die Continuität wird weiterhin dadurch hervorgehoben, daß der Strang und der Ausführungsgang von einer zusammenhängenden Basalmembran umgeben sind.

In diesem basalen Teil des Stranges läßt sich, wie aus Fig. 7 b hervorgeht, eine periphere Lagerung der Kerne spüren, wodurch eine centrale Partie mit kernfreiem Cytoplasma übrigbleibt.

Die Schnittserie zeigt weiter, daß der Strang diese bedeutende Dicke nur ein kürzeres Stück beibehält. In einem Abstände von der Spitze des Ausführungsganges welcher das Doppelte des auf Fig. 7 b abgebildeten Stückes vom Strange beträgt, wird derselbe nur aus 1—2 Zellen im Querschnitt gebildet. Diese Dicke behält der Strang auch fernerhin bis in die Ganglionregion hinauf.

An diesem Stadium ist bei *Corella* die Bildung der Kloakenhöhle und des Kloakensiphos durch Zusammenwachsen der zwei Peribranchialsiphone soeben vollendet. Diese Umwandlungen gehen in der äußeren Körperwandung

vor sich. Die inneren Organe werden daher in der betreffenden Region entsprechend zurückgedrängt. Der Gangliogenitalstrang kommt auf diese Weise zwischen dem Epithel des Kiemendarmes und dem Epithel der Kloakenhöhle zu liegen, dem letzteren bedeutend näher. Diese Lageverhältnisse werden in Textfig. 5 illustriert.

Stadium II.

Figg. 10 a—c, Taf. III, sind nach drei aufeinander folgenden Schnitten einer Sagittalschnittserie ausgeführt, welche ein Stadium darstellt, wo der primäre Ausführungsgang auf die Dorsal-seite hin bis zur Umbiegungsstelle des Stranges neben dem mittleren Teil des Oesophagus gelangt ist. Die Schnitte sind von links gesehen, und die dorsale Seite ist auf der Tafel nach oben orientiert.

Die Figuren zeigen wieder das blinde Ende des Ausführungsganges (*p. a.*) und ein Stück des daranstoßenden Teiles des Gangliogenitalstranges (*g. s.*). Die Basis des Stranges fällt auch an diesem Stadium mit dem blinden zugespitzten Ende des Ausführungsganges vollständig zusammen.

Der basale Teil des Stranges weist hier dieselbe Eigentümlichkeit im Bau auf wie an dem vorigen Stadium. Er ist stark verdickt und die sphäroiden Zellkerne haben eine auffallende Ähnlichkeit mit den Kernen des daranstoßenden Teiles der Wandung des Ausführungsganges. Die Zellelemente der zwei Organe gehen gleichmäßig ineinander über ohne irgendwelche nachweisbare Grenze. Es ist auch keine Andeutung vorhanden, daß der Strang sich noch neben dem Ausführungsgange rückwärts fortsetzen sollte. Wie an dem vorigen Stadium geht die Basalmembran des Ausführungsganges in diejenige des Stranges direkt über.

Von diesem basalen Teil abgesehen besteht der Strang bis in die Nähe des Ganglion wie früher aus Zellen mit spindelförmigen Kernen, 1—2 im Querschnitt.

Fig. 9 b, Taf. III, ist nach einem Schnitt aus derselben Serie ausgeführt und zeigt ein Stück des Stranges (*g. s.*) auf der Stelle, wo er unter die Kloake umbiegt. (Vergl. Fig. 9 a, eine Übersichtsfigur nach demselben Schnitt). Der Strang besteht hier hauptsächlich nur aus einer einfachen Zellenreihe.



Fig. 5. Die Kloakengegend einer jungen *Corella parallelogramma*. $\times 80$. a. After; d. Darm; g. s. Ganglio-genitalstrang; k. s. Kloakensiphon; s. Stigmen.

Stadium III.

Fig. 11 a, Taf. IV, ist nach einem Schnitte aus einer Sagittalschnittserie ausgeführt, welche ein Stadium darstellt, wo der primäre Ausführungsgang sich beinahe bis an die Kloake entwickelt hat, d. h. bis auf einen Punkt unmittelbar hinter der Stelle, wo der Durchbruch zwischen der Kloakenhöhle und den Ausführungsgängen später vor sich gehen wird. Die Figur giebt eine topographische Übersicht dieses Gebietes, von links gesehen und mit nach oben auf der Tafel orientierter Dorsalseite.

Figg. 11 b—d sind Detailfiguren von dem blinden Ende des Ausführungsganges und dem daranstoßenden Teil des Gangliogenitalstranges. Fig. 11 b ist nach demselben Schnitt ausgeführt wie Fig. 11 a, Figg. 11 c—d nach den zwei folgenden Schnitten derselben Serie.

Daß der hintere Endpunkt des Gangliogenitalstranges mit dem vorderen, etwas zugespitzten, blinden Ende des Ausführungsganges auf diesem Stadium, wie auf den beiden vorangehenden, zusammenfällt, geht aus Fig. 11 c mit großer Deutlichkeit hervor. Ebenso zeigt diese Figur, daß der Übergang vom Epithel des Ausführungsganges zum Strange vollständig gleichmäßig vor sich geht, ohne irgend welche wirkliche Grenze zwischen den Zellen-elementen der beiden Organe.

Der eben beschriebene Entwicklungsvorgang läßt sich durch ein Vergleich von Fig. 11 c mit entsprechenden Bildern früherer Stadien sehr schön illustrieren. Auf der einen Seite gehen durch einen Vergleich mit Fig. 9 b (Taf. III), die einen Schnitt aus der entsprechenden Körperregion eines früheren Stadiums wiedergiebt, die charakteristischen Veränderungen des Genitalstranges in dieser Region deutlich hervor (Dickenzunahme, sphäroide Form der Kerne). Auf der anderen Seite sieht man, durch Vergleich mit Figg. 7 a—b, und Figg. 10 a—c, bzw. aus der hinteren Magenregion und aus der Region des Oesophagus zweier früheren Stadien, daß die Veränderungen des Genitalstranges mit dem Hervorwachsen der Ausführungsgänge der Genitaldrüsen in Verbindung stehen, und daß die Übergangsstelle zwischen Gangliogenitalstrang und primären Ausführungsgang auf allen Stadien dasselbe charakteristische Bild giebt.

Schnittserien eines Stadiums etwas später als dasjenige der Fig. 11 zeigen den primären Ausführungsgang schon entgültig in Ovidukt und Ductus deferens differenziert, welche jedes für sich median in die Kloakenhöhle münden, der Ovidukt ein kleines Stück vor dem Anus, der Ductus deferens wieder unmittelbar vor diesem.

Den Gangliogenitalstrang kann man rückwärts der Mündung des Ductus deferens vorbei verfolgen und weiter ein kleines Stück längs seiner inneren Wand.

Für eine Entscheidung der Frage welche Rolle der Gangliogenitalstrang während der Entwicklung der Ausführungsgänge spielt, sind drei denkbare Möglichkeiten in Betracht zu ziehen:

1. Der Strang degeneriert Schritt für Schritt während des Hervorwachsens der Ausführungsgänge gegen die Kloakenhöhle hin.
2. Die Ausführungsgänge wachsen längs dem Strange, welcher als solcher neben denselben bestehen bleibt, in ihrer Bildung aber nicht teilnimmt.
3. Der Strang geht in die Bildung des Epithels der Ausführungsgänge über.

In Betreff der ersten Möglichkeit, so lassen die Zellenbilder des Stranges an keinem Stadium die Schlußfolgerung zu, daß seine Zellen in Degeneration begriffen sind. Der Strang hat auch auf allen Stadien gegen die Spitze des Ausführungsganges hin eine erhebliche Zunahme seiner Breite erwiesen, zur selben Zeit wie er hier von einer deutlichen Basalmembran umgeben, nach außen scharf begrenzt erscheint. Diese erste Möglichkeit läßt sich daher für eine Deutung absolut nicht aufrecht halten.

Die nächste Möglichkeit, daß der Strang neben den Ausführungsgängen bestehen bleibe, fordert selbstverständlich als Konsequenz, daß ein solcher Zellenstrang auch wirklich existiere. Ein zusammenhängender Zellenstrang neben den Ausführungsgängen hat sich indessen an keinem Stadium nachweisen lassen. In Betracht der bedeutenden Dicke, die der basale Teil des Gangliogenitalstranges an allen Stadien aufweist, sollte es nicht nur möglich erscheinen ihn auch neben den Ausführungsgängen nachzuweisen, sondern nahezu unmöglich sein ihn auf einer zweckmäßig orientierten Schnittserie zu übersehen, die speziell in dieser Hinsicht untersucht wird.

So bleibt nur die letzte Möglichkeit übrig, daß der Strang in die Bildung des Epithels der Ausführungsgänge übergeht.

Eine Reihe von Eigentümlichkeiten beim Bau des Stranges und seiner Verbindung mit dem primären Ausführungsgang während seines ganzen Wachstums von seiner Anlage an bis zu seinem Eintreten in die Kloakenregion, unterstützen diese Auffassung der Bedeutung des Stranges. Hier kommt erstens die zweifellose Continuität in Betracht, die zwischen dem Epithel des Ausführungsganges und den Zellen des Stranges auf allen Entwicklungsstadien existiert. In gleicher Richtung spricht, zweitens, auch die stetig vor sich gehende Zellproliferation im basalen Teile des Stranges, das heißt in dem Teil desselben, welcher zu jeder Zeit der Spitze des Ausführungsganges am nächsten liegt. Die periphere Anordnung der Zellkerne, die gewöhnlich im basalen Teil des Stranges nachgewiesen werden kann (Figg. 7 b, 10 a—b, 11 c) und in seiner Achse eine schwache Lichtung bewirkt, läßt sich endlich direkt als eine Vorbereitung auffassen zum weiteren Hervordringen des Hohlraumes des Ausführungsganges.

Es scheint mir daher die Annahme vollauf berechtigt zu sein, daß das Wachstum des primären Ausführungsganges nach vorne

gegen die Kloake hin wesentlich auf Grundlage des Zellenmaterials des Ganglio-genitalstranges vor sich geht.

Der Bau, den der basale Teil des Gangliogenitalstranges aufweist noch bevor die Entwicklung des primären Ausführungsganges beginnt (Taf. I, Figg. 3 a—b), spricht weiterhin stark dafür, daß auch die erste Anlage des primären Ausführungsganges auf Grundlage des Stranges geschieht. Dies wird von der Tatsache unterstützt, daß schon auf der frühesten Entwicklungsstufe des Ausführungsganges eine scharfe Grenze zwischen diesem und der Ovarial-(Primär-)blase existiert. (Sich oben S. 26 und S. 30). Es muß daher als sehr wahrscheinlich angesehen werden, daß bei *Corella parallelogramma* sowohl die erste Anlage als auch das weitere Wachstum des primären Ausführungsganges gegen die Kloake hin auf Grundlage des Ganglio-genitalstranges geschieht.

Zu Gunsten dieser Resultate dienen auch die Anschauungen, die von KOWALEVSKY (1874 a) und von VAN BENEDEN und JULIN (1887) in Bezug auf *Perophora listeri* und *Ascidella aspersa* (*Phallusia scabroides*) vertreten sind. (Sich die historische Übersicht oben Seite 11).

3. Die Verbindung des „Ganglio-genitalstranges“ mit dem Gehirnganglion und der Neuraldrüse.

Der Gangliogenitalstrang kann mit absoluter Sicherheit bis in die Ganglionregion hin verfolgt werden sowohl an lebendem Material, wie auch an Totalpräparaten und Schnittserien mit zweckmäßiger Schnittrichtung. Schwieriger ist es dagegen zu entscheiden, ob der Strang hier mit dem eigentlichen Ganglion in Verbindung steht oder mit der sogenannten Neuraldrüse.

Vor der Besprechung dieser Frage wird es zweckmäßig sein, eine orientierende Übersicht über das Gehirnganglion und die benachbarten Organe, Flimmergrube und Neuraldrüse zu geben. (Sich auch Textfig. 6).

Bei *Corella parallelogramma* bildet das Gehirnganglion einen langgestreckten Cylinder, welcher gegen die Enden hin etwas zugespitzt und zuweilen unweit der Mitte ein wenig eingeengt erscheint. Die ganze Länge beträgt ungefähr das 5- bis 6-fache des Querschnitt-Diameters. Aus dem vorderen Teil des Ganglion entspringt ein Paar großer Nerven, die Buccalnerven, und in gleicher Weise ein anderes Paar, die hinteren Siphonalnerven, aus seinem hinteren Ende.

Unmittelbar vor dem vorderen Rande des Ganglion, ventral im Verhältnis zu den Buccalnerven, liegt die Flimmergrube. Sie hat die Form eines Trichters, welcher sich schräg nach vorne-links vor der Peripharyngialfalte öffnet. Rückwärts führt die Flimmergrube in einen engen von einfachem kubischem Epithel gebildeten Kanal, den Flimmergrubenkanal,

welcher der Unterseite des Ganglion dicht anliegt. Hinter der Flimmergrube, ventral vor dem Ganglion, liegt außerdem ein Organ, dessen Drüsenatur zuerst von Ussow (1876) nachgewiesen worden ist, und welches später teils Hypophysendrüse („*glande hypophysaire*“, JULIN (1881)) benannt wurde, teils mit einem mehr neutralen Namen, als Neuraldrüse bezeichnet worden ist. Auf frühen Stadien wird die Neuraldrüse aus einer unregelmäßig geordneten Zellenmasse gebildet, welche dem mittleren Teil des Ganglion dicht anliegt.

Die Grenze zwischen dem Ganglion und der Drüse ist auf diesem frühen Stadium recht undeutlich. Die Zellenmasse der Neuraldrüse unterscheidet sich jedoch im Großen und Ganzen von der peripheren Zellenlage des Ganglion durch das Aussehen der Zellen, indem die Drüsenzellen kleiner sind, als die typischen Ganglienzellen; ihre Reaktion gegen Farbstoffe ist auch von derjenigen der Nervenzellen verschieden. Selbstverständlich fehlt der Drüse außerdem jede Andeutung zu einer Fiber- oder Punktsubstanz.

Während der späteren Entwicklung ordnet sich die Zellenmasse der Neuraldrüse zu einem Netzwerk von Balken (Kanälen?), wobei die Zwischenräume von Bindegewebelementen eingenommen werden. Zur selben Zeit wächst auch die Drüse der ventralen Seite des Ganglion entlang nach hinten hervor.

Die Flimmergrube liegt immer noch in der geraden Verlängerung der Neuraldrüse, und die Längsrichtung beider Organe bildet stets einen größeren oder kleineren Winkel mit der Längsachse des Ganglion — die Flimmergrube nach vorne links, die Neuraldrüse nach hinten rechts im Verhältnis zum Ganglion hervorragend. (Textfig. 6).

Neuraldrüse und Flimmergrube stehen durch den oben genannten Flimmergrubenkanal mit einander in Verbindung. Dieser entwickelt sich nämlich auf der Grenze zwischen Drüse und Ganglion, wahrscheinlich aus Zellenmaterial der Drüsenanlage. Bei ganz jungen Individuen sieht man das Lumen des Flimmergrubenkanals unter dem vorderen Teil des Ganglion blind endigen; das Epithel des Kanals verlängert sich aber in Form eines kompakten Zellenbalkens weiter nach hinten zwischen Ganglion und Neuraldrüse. Hinter der Neuraldrüse kommt diese Verlängerung des Flimmergrubenkanals als kompakter Epithelstrang neben der rechten Seite des Ganglion zu liegen.¹ Durch eine

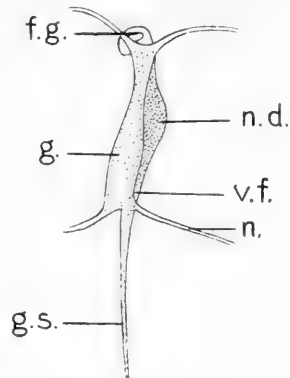


Fig. 6. Detailäugur von der Gangliengegend in dorsaler Ansicht von der als Textfigur 1 auf Seite 17 abgebildete Ascidie. $\times 120$. *f. g.* Flimmergrube; *g.* Gehirnganglion; *g. s.* Gangliogenitalstrang; *n.* Nerven; *n. d.* Neuraldrüse; *v. f.* Verlängerung des Flimmergrubenkanals nach hinten.

¹ Wenn JULIN (1881), welcher das Ganglion und die mit ihm verbundenen Organe bei *Corella parallelogramma* beschreibt, weder die asymmetrische Lage der Flimmergrube und der Neuraldrüse, noch die Verlängerung des Flimmergrubenkanals nach hinten be-

schwache Biegung des hinteren Teiles des Ganglion in ventraler Richtung kommt dieser Zellenstrang hier in Niveau mit dessen dorsaler Seite zu liegen, gleich über der Stelle, wo der rechte hintere Siphonalnerv entspringt.¹

In Betreff der vorderen Anknüpfung des Gangliogenitalstranges haben meine Untersuchungen als Resultat ergeben, daß der Ganglio-genitalstrang eine direkte Fortsetzung der soeben besprochenen Verlängerung des Flimmergrubenkanals bildet.

An lebendem Material ganz junger Tiere habe ich die Beobachtung gemacht, daß bei starken Muskelcontractionen der Tiere und nachfolgender Streckung das Ganglion mit den Nervenwurzeln nicht unbedeutend verschoben werden kann im Verhältnis zu der Flimmergrube, der Neuraldrüse und dem Gangliogenitalstrang, welche jedoch unter sich ihre gegenseitige Stellung unverändert beibehalten. Schon dieser Umstand zeigt, daß diese drei Organe enger mit einander verknüpft sind, als irgend eines von ihnen mit dem Ganglion.

Bei Individuen, bei denen die oben besprochene Asymetrie der Flimmergrube und Neuraldrüse besonders stark ausgeprägt war, konnte die hintere Verlängerung des Flimmergrubenkanals bei stärkeren Contractionen sich ganz von der rechten Seite des Ganglion los lösen, wodurch es auch möglich wurde seine Fortsetzung in den Gangliogenitalstrang unter Kreuzung des rechten hinteren Siphonalnerven direkt zu beobachten.

Die vielen Schnittserien von verschiedenen Entwicklungsstadien, die ich in Bezug auf diese Verhältnisse untersucht habe, bestätigen die am lebenden Material gemachten Beobachtungen.

Fig. 4 a, Taf. I, zeigt den hinteren Teil der Ganglionregion, von rechts gesehen und mit nach oben auf der Tafel orientierter Dorsalseite. Die Figur ist nach einem Sagittalschnitt von annähernd demselben Stadium wie Textfig. 6 ausgeführt (ø: das Stadium der primären Genitalblase).

Vom Ganglion selbst ist nur die rechte Kante dessen hinteren Teiles, das heißt die Stelle wo der rechte hintere Siphonalnerv entspringt, getroffen worden. Eine einzelne größere Ganglionzelle und deutliche Punktsubstanz markiert die Gangliennatur dieses Teiles des Schnittes. Über dem Ganglion sieht man auf der Figur eine etwas dickere Zellenlage, von dichtliegenden Zellen mit kleinen Kernen gebildet (*v. f.*). Sie wird von dem Ganglionteil durch eine deutliche Membran getrennt. Diese Zellenlage ist der hintere Teil des Zellenbalken, den wir als die Verlängerung des Flimmergrubenkanals beschrieben haben. Auf der Schnittserie kann man ihn vorwärts längs der rechten Seite des Ganglion verfolgen, bis er in den Flimmergrubenkanal übergeht, welcher sich seinerseits wieder in die eigentliche Flimmergrube öffnet.

spricht, hängt dies wahrscheinlich damit zusammen, daß diese beiden Zustände sich bei erwachsenen Individuen weniger geltend machen.

¹ METCALF (1900) beschreibt eine völlig entsprechende Anordnung der Neuraldrüse und der hinteren Verlängerung des Flimmergrubenkanals bei *Ciona intestinalis*, *Phallusia (Ascidia) mentula* und *Phallusiopsis (Phallusia) mammilata* (pp. 498 flg.; Taf. 34, Figg. 3, 4 und 5).

In dem hintersten Teile des Schnittes sieht man ein Stück des Gangliogenitalstranges (*g. s.*).

Fig. 4 b ist nach dem folgenden Schnitt rechts derselben Serie ausgeführt. Der Schnitt geht hier durch die Wurzel des rechten hinteren Nerven (*n.*). Dieser Nerv geht in der Richtung nach hinten-rechts (vergl. Textfig. 6), wobei er sich zugleich der äußeren Körperwand nähert. Seine Lage auf diesem Schnitt wird daher eine Verschiebung nach hinten-dorsal im Verhältnis zu dem Ganglionteil auf dem vorigen Schnitte erweisen. Die Nervenwurzel kommt daher in Fig. 4 b so zu liegen, daß die Verbindung des Gangliogenitalstranges mit der Verlängerung des Flimmergrubenkanals nicht klar hervortritt. Die Nervenwurzel ist jedoch durch eine deutliche Basalmembran umschrieben, während sowohl die Richtung als auch der Bau beider eben erwähnten Stränge eine Zusammengehörigkeit derselben deutlich kundgeben.

Figg. 8 a—d, Taf. III, zeigen an einem späteren Stadium¹ denselben hinteren Teil der Ganglionregion von links gesehen und mit nach oben auf der Tafel orientierter dorsaler Seite. Die Figuren sind nach vier in der Reihenfolge von rechts nach links aufeinander folgenden Schnitten einer Sagittalschnittserie ausgeführt.

Das Ganglion ist nun bedeutend mehr entwickelt, mit sehr großen Ganglienzellen und einer mächtigen centralen Fasermasse. Auch der Zellenbalken, der die Verlängerung des Flimmergrubenkanals nach hinten bildet, hat an Dicke zugenommen, hat aber im übrigen denselben Bau wie an dem früheren Stadium beibehalten und wird noch immer aus dichtliegenden kleineren Zellen gebildet (Fig. 8 d, *v. f.*). Er wird vom Ganglion durch deutliche Basalmembrane getrennt.

Fig. 8 a zeigt einen Querschnitt durch den rechten hinteren Siphonalnerven (*n.*) in der Nähe seines Ursprunges aus dem Ganglion. Im rechten Teil der Figur, weiter hinten am Tiere, sieht man ein Stück des Gangliogenitalstranges (*g. s.*).

Wie aus den folgenden Schnitten, 8 b und 8 c, hervorgeht, rückt der Gangliogenitalstrang immer mehr an das Ganglion hervor. Bei dessen hinterem Rand macht er eine Biegung gegen die Dorsalseite (Fig. 8 c) um hier mit dem Zellenbalken des Flimmergrubenkanals völlig zu verschmelzen (Fig. 8 d). Der Gangliogenitalstrang, resp. Zellenbalken, ist auf allen Schnitten von dem Ganglion mittelst der Basalmembrane beider Organe deutlich getrennt.

Die Flimmergrube, der Flimmergrubenkanal, seine Verlängerung als kompakter Zellenbalken und der Gangliogenitalstrang erweisen sich, nach dem obigen, als verschiedene Abschnitte einer und derselben Anlage mit zweifelloser Continuität auch in Betreff ihres histologischen Baues von einem Ende zum anderen. Der vordere Teil desselben (Flimmergrube und Flimmergrubenkanal) ist mit der Neural-

¹ Die Schnitte gehören derselben Serie an wie Figg. 9 a—b und Figg. 10 a—c. Der primäre Ausführungsgang der Genitaldrüsen hat die Oesophagealregion erreicht

drüse verbunden und wird gewöhnlich als ihr Ausführungsapparat angesehen. Der hintere Teil steht ursprünglich mit der Genitalanlage in Verbindung und bildet die Grundlage für die Entwicklung der Ausführungsgänge der Genitaldrüsen, endet aber, nachdem dieselben die Kloakenhöhle erreicht haben, wahrscheinlich in der Nähe des vorderen Teiles der Ausführungsgänge.

Auf den ersten Entwicklungsstadien lassen sich in Verbindung mit dem Gangliogenitalstrange keine Nervenfasern nachweisen (Vergl. Figg. 4 a—b, Taf. I). Später treten jedoch deutliche Nervenfasern in der unmittelbaren Nähe des Stranges auf, die vom Ganglion an rückwärts bis hinter der Kloake verfolgt werden können.

Fig. 9 b, Taf. III, zeigt, daß kleine Nervenfaserbündel neben dem Gangliogenitalstrange sich im hinteren Teile der Kloakenregion auflösen, indem Fasern (*n. f.*) teils an die Kloakenwand (*c. e.*) und möglicherweise an den Enddarm, teils an das Epithel des Kiemendarmes (*b. e.*) abgegeben werden. Es ist an dem in Fig. 9 abgebildeten Stadium nicht möglich die Nervenfasern weiter rückwärts zu verfolgen.

Die Nervenfasern liegen dem Gangliogenitalstrang oft so dicht an, daß sie sehr leicht auch als ein Teil desselben aufgefaßt werden könnten. Daß diese beiden in der Tat nichts anderes miteinander zu tun haben, als daß sie ein längeres Stück einander begleiten, geht aus Figg. 8 a—d, Taf. III, hervor. Diese Schnitte zeigen sehr deutlich, daß der Gangliogenitalstrang und das Faserbündel, trotzdem sie dicht neben einander verlaufen, jedoch ganz getrennt sind. Weiter zeigen sie, daß das Faserbündel in dem Ganglion selbst seinen Ursprung nimmt, oder möglicherweise aus der Wurzel des rechten hinteren Siphonalnerven, während ja der Gangliogenitalstrang, wie oben gezeigt, keine direkte Verbindung mit dem Ganglion hat.

Aus Figg. 11 b—d, Taf. IV, welche eine spätere Entwicklungsstufe zeigen, geht es gleichfalls deutlich hervor, daß das Faserbündel und der Gangliogenitalstrang auch im hinteren Teil der Kloakenregion von einander unabhängig sind.

Dieses kleine Nervenfaserbündel, welches also seinen Ursprung im hinteren Teil des Ganglion, oder vielleicht in der Wurzel des rechten hinteren Siphonalnerven, nimmt, und welches neben dem Gangliogenitalstrang der Kloakenregion vorbei verläuft, ist zweifellos homolog mit JULIN's „cordon nerveux visceral“, oder nur „nerve visceral“, bei *Dendrodoa grossularia* (1892, pp. 32—33), mit METCALF's „rapheal nerve“ (1900) und mit LORLEBERG's „Dorsalnerv“ bei *Perophora listeri* (1907, p. 217). Wie JULIN habe auch ich gefunden, daß sich der Nerv gegen den Anus hin in mehrere Zweige verästelt. (Vergl. Fig. 9 b).

In der Nähe des Ursprunges dieses Nerven finden sich oft vereinzelt Ganglienzellen vor (Fig. 8 c). Dies kann aber kaum die Bezeichnung „a gangliated nerve cord“ berechtigen, welche METCALF speziell für diesen Nerven anwendet.¹

¹ *Corella parallelogramma* findet sich allerdings nicht unter den 35 Arten, die METCALF untersucht hat, und für welche er diese Bezeichnung gelten läßt.

Ganglienzellen finden sich nämlich häufig in der Nähe des Ganglion auch an anderen Nerven vor, und zwar besonders dem rechten hinteren Siphonalnerven entlang. Diese Ganglienzellen stehen jedoch in keinem Zusammenhang mit dem Gangliogenitalstrange, und haben augenscheinlich nichts mit ihm zu tun.

Wenn man den histologischen Bau des Gangliogenitalstranges in Betracht nimmt — kleine dichtliegende Zellen mit mehr oder weniger deutlich spindelförmigen Kernen — sollte es überhaupt nicht nahe liegen diesen Strang eine Gangliennatur zuzuschreiben.

Wenn noch dazu kommt, daß der Strang, wie oben gezeigt wurde, eine direkte Fortsetzung des Flimmergrubenkanals bildet, während er vom Ganglion ganz getrennt ist, muß der Schluß wohl berechtigt sein: Als ein Ganglienzellenstrang *sensu stricto* darf der Gangliogenitalstrang nicht aufgefaßt werden, was seine wirkliche Natur auch immer sei.

VAN BENEDEN und JULIN (1884 a) beschreiben bei den Arten *Pecrophora listeri* und *Clavelina lepadiformis* den „Visceralganglienstrang“ als eine direkte Verlängerung des Ausführungskanals der Neuraldrüse (= Flimmergrubenkanal). Dasselbe behauptet MAURICE (1886 und 1888) in Betreff des „Visceralganglienstranges“ bei *Parascidia arcolata*, und JULIN (1892) bei *Dendrodoa grossularia*. Die erwähnten Verfasser heben alle die große Ähnlichkeit des Stranges mit dem Ausführungskanal der Neuraldrüse hervor, während sie zur selben Zeit eine Gangliennatur desselben für sehr wahrscheinlich halten. Dies hängt wohl erstens damit zusammen, daß die Verfasser den Strang ohne weiteres für homolog betrachten mit dem bei *Caesira (Molgula) ampulloides* von VAN BENEDEN und JULIN (1884 a) beschriebenen „cordon ganglionnaire visceral“, für den eine genetische Verbindung mit dem larvalen Nervensystem beschrieben wurde, zweitens aber auch damit, daß der oben angeführte Nervenbündel in der unmittelbaren Nähe des Stranges auftritt.

In derselben Weise läßt sich wohl auch erklären, daß METCALF (1900, p. 504) folgende Auffassung vertreten konnte: „The ganglion cells of the rapheal nerve in *Phallusia* are derived from a prolongation of the gland, not from the ganglion“.

Schlussbemerkungen.

Meine Resultate in Betreff des Gangliogenitalstranges sind durch Untersuchungen gewonnen, die sich auf eine einzige Art, *Corella parallelogramma*, und zwar auch nur auf die postlarvale Entwicklung derselben beziehen.

In direkter Verbindung mit den Resultaten dieser Arbeit erheben sich daher eine Reihe neuer Fragen, die durch weitere Untersuchungen ihre Lösung finden müssen, bevor ein volles Verständnis der hier erörterten Verhältnisse erreicht werden kann.

Die erste Frage gilt der Existenz eines Ganglio-genitalstranges auch bei anderen Ascidien. Daß sein Vorkommen nur auf *Corella parallelogramma* beschränkt sein sollte, scheint a priori nicht wahrscheinlich. Die Übereinstimmung sowohl im Bau als auch im Verlauf mit den bei anderen Arten früher beschriebenen Strängen, — teils (im hinteren Körperteil) dem „Genitalstrang“, teils auch (im vorderen Körperteil) dem „Visceralganglienstrang“, — läßt in der Tat vermuten, daß erneute Untersuchungen eine Identität des Gangliogenitalstranges mit den beiden erwähnten Strängen constatieren möchten.

Es fehlen nämlich, wie aus der historischen Übersicht dieser Abhandlung hervorgeht, für beide früher beschriebenen Stränge sichere Aufschlüsse darüber, wo und wie sie endigen. Der „Genitalstrang“ verläuft von der Genitalanlage, der Dorsalseite entlang, nach vorne, der „Visceralganglienstrang“ in derselben Weise vom Ganglion nach hinten. Beide sind bis ungefähr in die Kloakenregion wahrgenommen worden, wo sie sich aber beide nicht weiter verfolgen ließen. Dazu kommt noch daß die Beobachtungen über den „Visceralganglienstrang“ größtenteils an späteren Entwicklungsstadien, oder sogar an erwachsenen Individuen, gemacht worden sind. Sie können daher über das ursprüngliche Verhalten des Stranges keinen Aufschluß geben. Auch bei *Corella* würde ja, nach der vollen Entwicklung von Ovidukt und Ductus deferens, der Gangliogenitalstrang nur zwischen Ganglion und Kloakenregion noch erkennbar sein.

Die zweite wichtige Frage, die ihre Beantwortung noch erwartet, ist diejenige des genetischen Ursprungs des Ganglio-genitalstranges. Durch frühere Untersuchungen scheint es zwar bewiesen zu sein, daß nicht nur die Neuraldrüse sondern auch der Flimmergrubenkanal und seine hintere Verlängerung aus dem larvalen Nervensystem herkommen.

Es ist aber noch fraglich in wie weit auch für den Gangliogenitalstrang, im Ganzen oder vielleicht nur teilweise, eine ähnliche Genese vorausgesetzt werden darf.

Die genetischen Beziehungen dieses Stranges stehen natürlich mit der Frage nach dem ersten Ursprung der Genitalanlage in intimer Verbindung. Wenn der Gangliogenitalstrang vielleicht in voller Länge aus dem larvalen Nervensystem hervorstammen sollte, wie ist denn seine intime Verbindung mit der Genitalanlage zu Stande gekommen? Ist diese Verbindung sekundär entstanden? oder gehört der Strang vielleicht vom ersten Ursprung nur teilweise dem larvalen Nervensystem an, während sein hinterer Teil als der Genitalanlage angehörig angesehen werden sollte, die Verbindung zwischen beiden Teilen des Stranges also eine sekundäre sein? Woher stammen endlich auch die Zellen die zuerst zur Bildung der Genitalanlage zusammentreten?

Eine ganze Reihe interessanter Probleme sind so mit der Frage vom genetischen Ursprung des Gangliogenitalstranges intim verbunden. Das Verhalten des Stranges in den durch Knospung entstehenden Individuen der Synascidien sollte auch in der Zukunft klargestellt werden.

Als dritte Frage, deren Beantwortung jedoch auf diejenigen der beiden früheren basiert werden muß, steht dann endlich die der Bedeutung des Ganglio-genitalstranges. Soll er vielleicht nur als ein Überbleibsel des degenerierten larvalen Nervensystems betrachtet werden, das während der postlarvalen Entwicklung teilweise für das Auswachsen der Ausführungsgänge der Genitaldrüsen in Anspruch genommen wird? — Ein Variieren des Verhalten des Stranges bei verschiedenen Ascidienarten würde eine solche Auffassung stützen.

Oder hat der Strang auch während der postlarvalen Entwicklung eine tiefere Bedeutung, nicht nur von morphogenetischer sondern auch von funktioneller Art?

Wie aus dem obigen hervorgeht, stehen wir hier noch einer Reihe von Fragen gegenüber, deren Beantwortung weitere Untersuchungen erfordert. — Hoffentlich werde ich Gelegenheit haben die in dieser Arbeit niedergelegten Resultate durch Untersuchungen auch an anderen Arten und Stadien zu supplieren und so auch zur Lösung der hier gestellten Fragen weitere Beiträge zu geben.

Verzeichnis

der im Texte erwähnten Arten. Die systematische Einteilung und die Nomenklatur nach HARTMEYER, Tunicata. — BRONN: Kl. und Ordn. des Thierreichs; Bd. III, Supl. 1911.

Nur die in den citierten Arbeiten vorkommenden Synonyme sind angeführt.

Ptychobranchia.

- Caesiridae: *Caesira ampulloides* BENED. Syn.: *Molgula ampulloides*.
Caesira bleizi LAC.-DUTH. Syn.: *Anurella bleizi*.
 Pyuridae: *Pyura polycarpoides* BENED. et JUL. Syn.: *Cynthia polycarpoides*.
Microcosmus claudicans SAV.
 Tethyidae: *Dendrodoa grossularia* BENED. Syn.: *Stylopsis grossularia*.
Pandusia comata ADL. Syn.: *Polycarpa comata*.

Dictyobranchia.

- Rhodosomidae: *Corëlla parallelogramma* MÜLL.
 Phallusiidae: *Ascidiella aspersa* MÜLL. Syn.: *Phallusia scabroides*.
Phallusia mentula MÜLL. Syn.: *Ascidia mentula*.
Phallusiopsis mammilata CUV. Syn.: *Phallusia mammilata*.
 Perophoridae: *Perophora listeri* WIEGM.
Perophora viridis VERR.
 Cionidae: *Ciona intestinalis* L. Syn.: *Ascidia canina*.

Krikobranchia.

- Clavelinidae: *Clavelina lepadiformis* MÜLL. Syn.: *Clavelina rissoana*.
Holozoa pileata O. SCHM. Syn.: { *Didemnum styliiferum*,
Distaplia magnilarva.
Holozoa occidentalis RITT. Syn.: *Distaplia occidentalis*.
 Synoicidae: *Parascidia arcolata* CHIAJE. Syn.: { *Amaroccium torquatum*,
Fragaroides aurantiacum,
Amaroccium constellatum VERR.

Litteratur.

- BANCROFT, F. W., 1899. Ovogenesis in *Distaplia occidentalis*, RITTER (M. S.), with remarks on other species. — Bull. of the Mus. of Comp. Zool., vol. 35.
- BENEDEK, ED. VAN, 1881. Exist-t-il un Coelome chez les Ascidies? — Zool. Anz., IV. Jahrg., No. 88.
- et JULIN, CH., 1848 a. Le système nerveux central des Ascidies adultes et ses rapports avec celui des larves urodeles. — Arch. de Biol., T. V.
- — 1884 b. Recherches sur le développement postembryonnaire d'une Phallusie (*Phallusia scrabroides* nov. sp.). — Arch. de Biof. T. V.
- — 1887. Recherches sur la morphologie des Tuniciers. — Arch. de Biol., T. VI.
- CAULLEREY, 1894. Sur la dégénérescence des produits genitaux chez les Polyclinides. — C.-R. ac. sci. Paris, T. 118, p. 666.
- DAMAS, D., 1902. Recherches sur le développement des Molgules. — Arch. de Biol., T. XVIII.
- FLODERUS, M., 1896. Über die Bildung der Follikelhüllen bei den Ascidien. — Zeitschr. f. wiss. Zool., Bd. 61.
- GANIN, M., 1870. Neue Thatsachen aus der Entwicklungsgeschichte der Ascidien. — Zeitschr. f. wiss. Zool., Bd. 20.
- GIARD, A., 1872. Recherches sur les Ascidies composées ou synascidies. — Arch. de Zool. exp. et gén., T. 1^{er}.
- JULIN, CH., 1881. Recherches sur l'organisation des Ascidies simples. Sur l'hypophyse et quelques organes qui s'y rattachent, dans les genres „Corella“, „Phallusia“ et „Ascidia“. Arch. de Biol., T. II.
- 1892. Les Ascidiens des côtes du Boulonnais. Première partie. — Bull. sc. de la Fr. et de la Belg., Extrait du T. XXIV.
- 1893. Ascidiens du Boulonnais. Structure et développement des glandes sexuelles, ovogenèse, spermatogenèse et fécondation chez *Styelopsis grossularia*. — Bull. sc. de la Fr. et de la Belg., Extrait du T. XXV.
- KÓWALEVSKY, A., 1874 a. Sur le bourgeonnement du *Perophora listeri* WIEGM. — Rev. des sc. nat., T. III.
- 1874 b. Über die Knospung der Ascidien. — Arch. f. mikr. Anat., Bd. X.
- LEFEVRE, G., 1898. Budding in *Perophora*. — Journ. of Morph., vol. XIV.
- LORLEBERG, OTTO, 1907. Untersuchungen über den feineren Bau des Nervensystems der Ascidien. — Zeitschr. f. wiss. Zool., Bd. 88.
- MAURICE, Ch., 1886. Sur l'appareil branchial, les systèmes nerveux et musculaire de l'*Amauroecium torquatum*. C.-R. ac. sc. Paris, T. 103, p. 434.
- 1888. Etude monographique d'une espèce d'Ascidie composée (*Fragaroides aurantiacum* n. sp.). — Arch. de Biol., T. VIII.
- METCALF, M., 1900. Notes on the Morphology of the Tunicata. — Zool. Jahrb., Abt. f. Anat., Bd. XIII.
- PIZON, A., 1894. Évolution des éléments sexuelles chez les Ascidies composées. — C.-R. ac. sc. Paris, T. 119, p. 569.

- RIEDLINGER, R., 1903. Untersuchungen über den Bau von *Stylopsis grossularia* der Ostsee. Nova acta ac. caes. Leop.-Car. Germ. Nat. Cuv., T. LXXXI.
- SABATIER, A., 1883. De l'ovogenèse chez les Ascidiens. — C.—R. ac. sc. Paris, T. 96, p. 799.
- SEELIGER, O., 1882. Eibildung und Knospung von *Clavelina lepadiformis*. — Sitz. ber. der Kai. Acad. d. Wiss., Wien, Bd. 85, Hf. 5.
- SELYS-LONGCHAMPS, MARC DE et DAMAS, D., 1900. Recherches sur le développement post-embryonnaire et l'anatomie définitive de „*Molgula ampulliodes*“. — Arch. de Biol., T. XVII.
- WERNICK, W., 1920. Über die Eibildung der Ascidien. — Zool. Jahrb., Abt. f. Anat. Bd. 41.
- WILEY, A., 1894. Studies on Protochordata II. — Quart. Journ. of Micr. Sc., New. Ser., vol. 35.
-

Tafelerklärung.

Allgemeine Bezeichnungen.

<i>a.</i> After.	<i>u. f.</i> Nervenfasern.
<i>b. e.</i> Epithel des Kiemendarmes.	<i>o. d.</i> Ovidukt.
<i>c. e.</i> Epithel der Kloakenwand.	<i>oc.</i> Oesophagus.
<i>d. d.</i> Ductus deferens.	<i>ov.</i> Ovarium.
<i>g.</i> Ganglion.	<i>p. a.</i> Primärer Ausführungsgang der Genitaldrüsen.
<i>g. a.</i> Genitalanlage.	<i>p. b.</i> Pylorusblindsack.
<i>g. s.</i> Gangliogenitalstrang.	<i>t.</i> Testis.
<i>k. e.</i> Keimepithel.	<i>v. f.</i> Verlängerung des Flimmer- grubenkanals.
<i>kr.</i> Epithel der Körperwand.	
<i>n.</i> Nerv.	

Figuren, die mit derselben Nummer versehen sind, sind derselben Schnittserie entnommen.

Sämtliche Abbildungen sind mittelst einer Zeichenprisma ausgeführt worden.

Tafel I.

- Fig. 1. Schnitt durch die Genitalanlage, von vorne aus gesehen, die dorsale Seite nach links auf der Tafel orientiert. Entwicklungsstadium I. Vergr. 1750.
- Figg. 2 a—b. Zwei auf einander folgende Schnitte durch die primäre Genitalblase, von rechts aus gesehen, die dorsale Seite nach links auf der Tafel orientiert. Entwicklungsstadium II. Vergr. 1400.
- Fig. 2 c. Schnitt durch den Gangliogenitalstrang in der Oesophagusgegend. Orientierung wie Figg. 2 a—b. Vergr. 1400.
- Figg. 3 a—b. Zwei auf einander folgende Schnitte durch die primäre Genitalblase und den basalen Teil des Gangliogenitalstranges, von rechts aus gesehen, die dorsale Seite nach links auf der Tafel orientiert (Fig. 3 b gibt nur einen kleinen Teil der vom Schnitt getroffene Wand der Genitalblase wieder). Entwicklungsstadium II. Vergr. 1400.
- Figg. 4 a—b. Hinterer Teil des Ganglion und vorderer Teil des Gangliogenitalstranges nach zwei auf einander folgenden Schnitten, von rechts aus gesehen, die dorsale Seite nach oben auf der Tafel orientiert. Entwicklungsstadium II. Vergr. 1400.
- Figg. 5 a—c. Drei Querschnitte der Genitalanlage, von der ventralen Seite aus gesehen, die mediale Seite nach oben auf der Tafel orientiert. Entwicklungsstadium III. Vergr. 1400.
- 5 a. Schnitt durch den ventralen Teil des Testis und der Ovarialblase.
- 5 b. Schnitt durch den Übergang zwischen Ovarialblase (primärer Genitalblase) und primärem Ausführungsgang.
- 5 c. Schnitt durch den primären Ausführungsgang der Genitaldrüsen.

Tafel II.

- Figg. 6 a—h. Acht Querschnitte durch die Genitalanlage, von der rechten Seite aus gesehen, die mediale Seite nach oben auf der Tafel orientiert. Entwicklungsstadium IV. Vergr. 1400.

- 6 a. Schnitt durch den ventralen Teil des Testis und der Ovarialblase.
 6 b—c. Zwei Schnitte durch den Testis und den mittleren Teil der Ovarialblase.
 6 d. Schnitt durch Ovidukt und Ductus deferens.
 6 e—g. Drei auf einander folgende Schnitte durch die Stelle der Differentiation der primären Ausführungsganges zum Ovidukt und Ductus deferens.
 6 h. Schnitt durch den primären Ausführungsgang.
 Figg. 7 a—b. Zwei auf einander folgende Längsschnitte durch den primären Ausführungsgang der Genitaldrüsen und den hinteren (basalen) Teil des Gangliogenitalstranges, von vorne aus gesehen, die dorsale Seite nach links auf der Tafel orientiert. Entwicklungsstadium IV, Vergr. 1400.

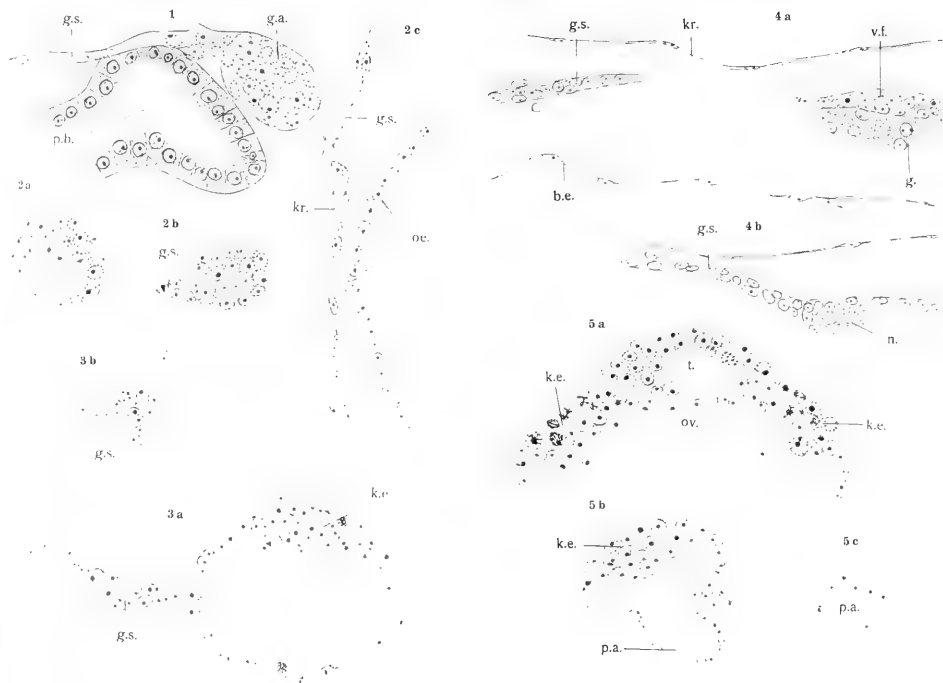
Tafel III.

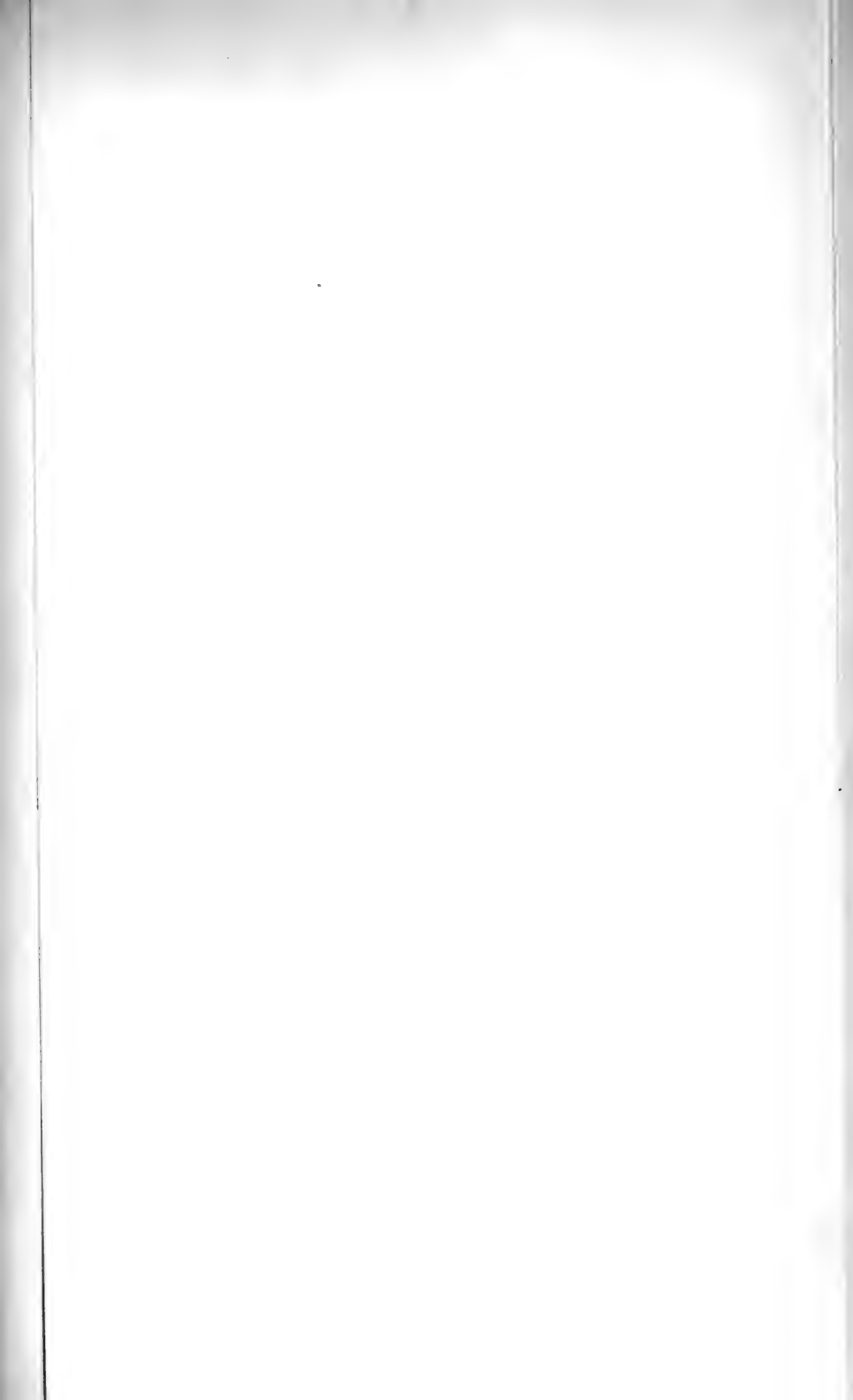
Sämtliche Figuren dieser Tafel sind derselben Sagittalschnittserie entnommen, von links aus gesehen.

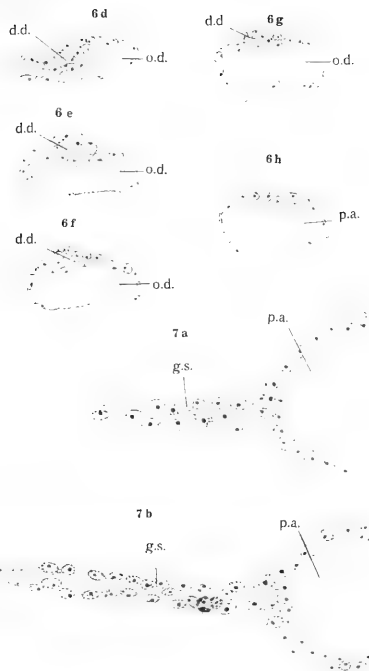
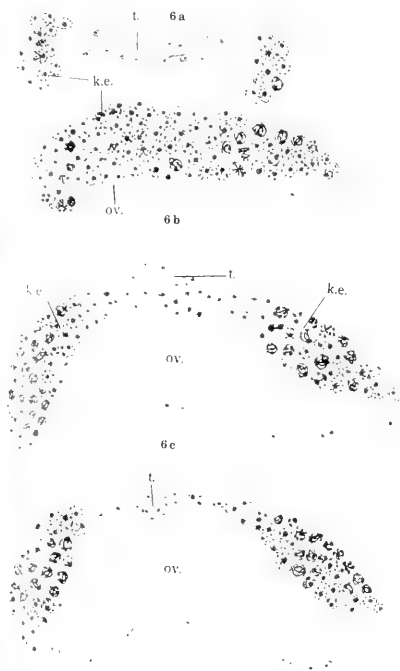
- Figg. 8 a—d. Vier auf einander folgende Schnitte durch den hinteren Teil des Ganglion und den vorderen Teil des Gangliogenitalstranges. Die Reihenfolge der Schnitte von rechts nach links. Die dorsale Seite nach oben auf der Tafel orientiert. Vergr. 1400.
 Figg. 9 a—b. Schnitt durch den Gangliogenitalstrang im hinteren Teil der Kloakengegend. Die dorsale Seite nach rechts auf der Tafel orientiert.
 9 a. Übersichtsfigur. Vergr. 120.
 9 b. Detailfigur. Vergr. 1400.
 Figg. 10 a—c. Drei auf einander folgende Schnitte durch den primären Ausführungsgang der Genitaldrüsen und den hinteren (basalen) Teil des Gangliogenitalstranges im Oesophagusgegend. Die dorsale Seite nach oben auf der Tafel orientiert. Vergr. 1400.

Tafel IV.

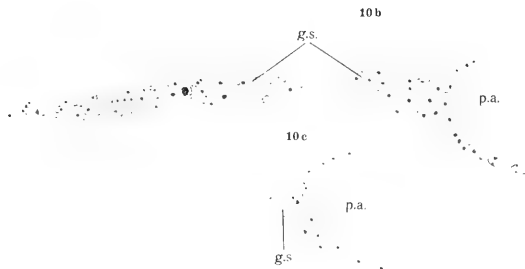
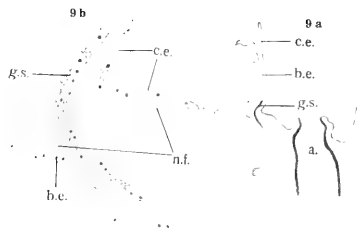
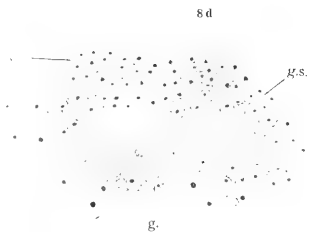
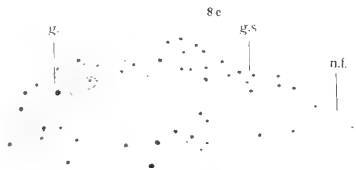
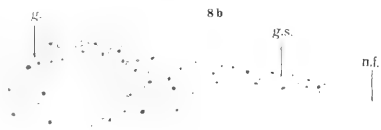
- Figg. 11 a—d. Drei auf einander folgende Schnitte durch den primären Ausführungsgang der Genitaldrüsen und den hinteren (basalen) Teil des Gangliogenitalstranges im hinteren Teil der Kloakengegend, von links aus gesehen, die dorsale Seite nach oben auf der Tafel orientiert.
 11 a. Übersichtsfigur. Vergr. 400.
 11 b—d. Detailfiguren. Vergr. 1400.

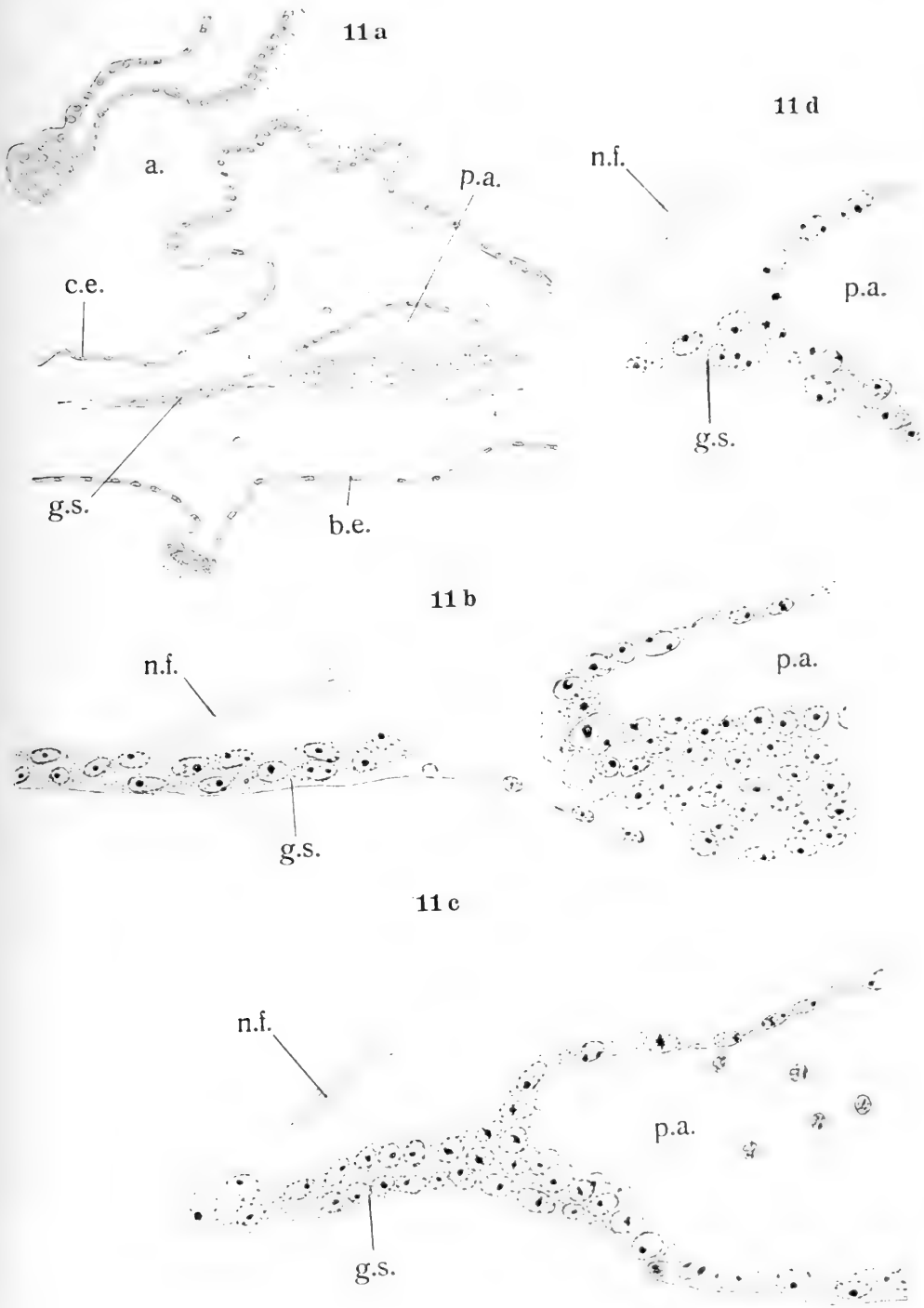














ZUR KENNTNIS DER EIHÜLLEN DER CHITONIDEN

VON
R. LYNGNES

MIT EINEM VORWORT VON PROFESSOR DR. K. BONNEVIE

MIT 4 TAFELN

VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 20



KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 13de april 1923 ved prof. Bonnevie.

Diese Untersuchung ist von Herrn LYNGBES schon im Frühling 1921 abgeschlossen worden; der Verfasser ist aber seither wegen Krankheit verhindert gewesen die Arbeit druckfertig zu machen. Die von ihm gewonnenen Resultate haben, im betreff sowohl der Form als der Entwicklung der Eihüllen, auf mehreren Punkten neues gebracht, das für unsere Auffassung der Eihüllen von allgemeinem Interesse ist. Die wesentlichen Ergebnisse der Untersuchung sollen daher hier, mit voller Billigung des Verfassers, kurz zusammengestellt werden.

Persönlich möchte ich hier auch erwähnen, daß ich während der ganzen Arbeit Gelegenheit gehabt habe die lebenden Eier sowohl wie die Präparate zu studieren und die vom Verfasser ausgeführten Zeichnungen zu kontrollieren.

Kristiania, in März 1923.

Kristine Bonnevie.

Die Eier vieler Chitoniden sind, wie bekannt mit eigentümlichen unter sich sehr verschiedenartigen Eihüllen versehen. PLATE (1901) hat auf dieser Grundlage folgende vier Gruppen aufgestellt:

- a. Die Eischale glatt.
- b. Die Eischale trägt rundliche Knöpfe.
- c. Die Eischale trägt lappenförmige Anhänge.
- d. Die Eischale ist besetzt mit hohlen, am Ende blind geschlossenen, fadenförmigen Anhängen.

Für alle Gruppen ist auch verschiedentlich die Existenz eines deutlichen Follikelepithels um die jungen Ovarialeier herum behauptet worden.

Im betreff der Bedeutung dieses Follikelepithels und seiner Rolle während der Entwicklung der Eihüllen sind von früheren Verfassern vielfach divergierende Auffassungen hervorgehalten. So ist z. B. VON IHERING (1878), nach Untersuchung der Eischale von *Chiton fascicularis* Lovén und *Ch. squamosus* Poli, zu dem Resultat gekommen (s. 136), „daß die Schale von der Follikelmembran gebildet werde“, und daher als ein *Chorion* zu betrachten sei.

GARNAULT (1888), auf der anderen Seite, glaubt für die erstgenannte Art sowie auch für *Ch. cinereus* Lovén (= *Craspedochilus marginatus* Sars),

schließen zu können, daß das Follikelepithel in die Eihülle direkt umgebildet wird. Er sagt (s. 101):

„Les deux parois de la cellule folliculaire s'appliquent intimement l'une l'autre, pour n'en former qu'une seule, qui deviendra après les modifications que nous allons décrire, la *coque* ou le *chorion* des auteurs“.

PELSENEER (1889), der bei verschiedenen Arten, unter welchen auch *Boreochiton* (= *Craspedochilus*) *marginatus*, kein Follikelepithel erkennen konnte, betrachtet die Eihülle als von der Eioberfläche ausgeschieden, — „que celle-ci (la coque) est une sécrétion de l'ovule et non d'un follicule cellulaire“ (s. 31).

PLATE (1901) erklärt nach Untersuchung von sechs verschiedenen Chitonarten, daß es ihm nicht gelungen sei zu einer einheitlichen Auffassung zu gelangen. Die verschiedenen Arten scheinen sich verschieden zu verhalten, „so daß alle drei Ansichten bis zu einem gewissen Grade zu Recht bestehen“. Er hat so „die Überzeugung gewonnen, daß dieses Capitel noch einer speziellen gründlichen Untersuchung auf feinen Querschnitten bedarf“ (s. 474—475).

SCHWEIKART (1905) glaubt endlich, ein einheimisches Resultat erreicht zu haben indem die Eihüllenanhänge bei den fünf von ihm untersuchten Chitonformen, seiner Meinung nach, Ausscheidungsprodukte der Follikelnzellen sind.

Im Sommer 1919 habe ich Gelegenheit gehabt, an der biologischen Station zu Dröbak, die Chitoniden des Kristianiafjords auch mit bezug auf ihre Eihüllen zu studieren. Eine vorläufige Betrachtung der letzteren auf lebendem Materiel hat schon den bestimmten Eindruck gegeben, daß hier nicht nur im betreff der theoretischen Auffassung sondern auch im betreff der rein tatsächlichen Befunde noch Vieles zu ermitteln sei. Es wurde daher für den folgenden Sommer 1920 eine nähere Untersuchung der reifen Eihüllen sowohl als ihrer verschiedenen Entwicklungsstadien geplant, indem für diese Untersuchung vier, an jeder der vier von PLATE aufgestellten Gruppen gehörigen, Arten erwählt wurden, nämlich: 1) *Lepidopleurus cinereus* mit glatter Eihülle (Gruppe a), 2) *Lophyrus albus* mit fadenförmigen Anhängen (Gruppe d), 3) *Craspedochilus marginatus*, die von PLATE als an Gruppe b angehörig (Eischale mit rundlichen Knöpfen) beschrieben wurde und 4) *Boreochiton marmoreus*, als Repräsentant der Gruppe c. (Eischale mit lappenförmigen Anhängen). — Die Eischalen der beiden letzteren Arten tragen jedoch, wie aus der Beschreibung hervorgehen wird, nach der Eiablage sehr charakteristische becherförmige Anhänge, die in der PLATEschen Gruppeneinteilung nicht hineinpassen.

Die Untersuchung wurde, soweit möglich auf lebendem Material ausgeführt. Die Ovarialeier wurden herauspräpariert und ihre Hüllen auf allen Stadien möglichst genau abgebildet. Viel Mühe wurde auch darauf angewendet nach der Eiablage die Eier zu studieren und weiter zu züchten. Dies ist auch in so weit gelungen als bei drei Arten die Eier

im Akvarium abgelegt wurden, während bei zwei derselben auch die Durchbrechung der Eischale von Seiten der Flimmerlarve beobachtet werden konnte.

Zur selben Zeit wurde auf allen Stadien auch Material fixiert, meistens in Bouin's Flüssigkeit; die Schnittserien wurden mit Hämatoxylin-Eosin gefärbt.

Die an den vier erwähnten Arten gewonnenen Resultate sollen im folgenden kurz dargestellt werden:

1. *Lepidopleurus cinereus* Sars. (Taf. II).

Die Eischale dieser Art ist, wie aus Fig. 13 ersichtlich, ganz glatt ohne irgend welche Struktur oder Anhänge. Die Entwicklung dieser Schale ist bis jetzt wohl nicht beschrieben worden.

Die Ovarialeier sind wie bei anderen Chitoniden von einem Follikel-epithel überzogen, das bei jungen Oocyten (Fig. 2—3) als eine Lage flacher Zellen der Eioberfläche dicht anliegt. Diese Follikelzellen werden von den um die noch jüngeren Eizellen ganz regellos herum liegenden Ovarialzellen gebildet (Fig. 1).

Fig. 4—5 zeigt Bilder eines Ovarialeies auf einem etwas späteren Stadium. Man sieht jetzt die Oberfläche wie von einer Lage linsenförmiger Blasen bedeckt, die außen von einer dünnen doppelkonturierten Membran überzogen sind. Auf Schnitten (Fig. 6) und in günstigen Fällen auch an Totalpräparaten (Fig. 7) läßt sich nachweisen, daß diese straff gespannte Membran von den Follikelzellen gebildet wird, und zwar so daß jede Blase meistens auch nur von einer Zelle überdeckt wird. Die Kerne dieser flach ausgespannten Zellen werden stets in einer Ecke, der Zellperiferie dicht angeschmiegt, vorgefunden.

Später findet man den Inhalt aller Blasen zu einer gleichmäßig dicken Sekretzone zusammengeflossen (Fig. 8), während auf Schnitten (Fig. 9) immer noch die Follikelmembran an der Oberfläche derselben erkannt wird.

Die so gebildete Eihülle der Ovarialeier geht aber nur zum kleinsten Teil in die definitive Schale über. Die Sekretzone schwillt bei der Eiblage, so bald die Eier ins Wasser gekommen sind, sehr stark auf (Fig. 10), so daß die Follikelmembran zuletzt zerrissen und abgeworfen wird. Man kann sie zuweilen noch eine Zeit lang, neben den reifen Eiern wahrnehmen (Fig. 11).

Die ganz glasklare Sekretzone schwindet nun auch langsam, scheint im Wasser aufgelöst zu werden. Nur eine innere, ganz dünne Schicht dieser Zone, die jetzt von der Eioberfläche deutlich abgehoben erscheint, bleibt als die definitive Schale bestehen (Fig. 11—13).

Dieser Prozeß der Schalenbildung ist an einer großen Anzahl lebender Eier wahrgenommen worden. Auch die weitere Entwicklung der Eier, sowie die Sprengung der Schale von Seiten den Flimmerlarven (Fig. 13 a—b) wurde zu wiederholten Malen beobachtet.

2. *Lophyrus albus* Sars. (Taf. II).

Ein noch nicht abgelegtes Ei dieser Art ist in Fig. 25 abgebildet. Die Eischale ist mit fadenförmigen Anhängen dicht besetzt. Abgelegte Eier kamen hier leider nicht zur Beobachtung. Es läßt sich jedoch kaum bezweifeln, daß hier wie bei den beiden unten zu beschreibenden Arten eine völlige Streckung der Schalenanhänge nach der Eiablage erfolgen würde.

Weder die Form noch die Entwicklung der Eischale von *Lophyrus albus* sind bis jetzt beschrieben worden. PLATE (1901) hat jedoch nicht weniger wie 15 andere Chitoniden erwähnt, deren Eischale fadenförmige Anhänge verschiedener Form tragen. Die Entwicklung solcher Schalen ist von SCHWEIKART (1905) für drei verschiedene Arten beschrieben worden.

Die Schalenanhänge von *Lophyrus albus* unterscheidet sich von allen oben erwähnten durch ihre unverzweigte einfach zugespitzte Form; nur das äußerste Ende aller Anhänge erscheint bei nicht abgelegten Eiern immer gekrümmt.

Die Bildung des Follikelepithels geschieht in derselben Weise wie bei *Lepidopleurus cinereus*. Die Follikelzellen die zuerst ganz flach sind (Fig. 14) nehmen bald an Dicke zu (Fig. 15—17) während sie in oberflächlicher Ansicht (Fig. 20) deutlich 5—6-eckig erscheinen.

Die erste Spur einer Schalenbildung zeigt sich in der Form von stark lichtbrechenden Stäbchen, die ungefähr in der Mitte jeder Follikelzelle emporwachsen (Fig. 16—17).

Eine genaue Beobachtung dieser und späterer Stadien sowohl auf lebendem wie auf fixiertem Material hat den bestimmten Eindruck gegeben, daß diese Neubildungen nicht innerhalb der Follikelzellen sondern unterhalb derselben, zwischen diesen und der Oberfläche, sich entwickeln. So erscheinen die zuerst hohl-kegelförmigen Stäbchen in Seitenansicht (Fig. 16—19) mit breiter Basis der Eioberfläche dicht anliegend während jedes derselben mit seiner Spitze den mittleren Teil einer Follikelzelle in die Höhe vor sich schiebt.

Der Widerstand der Follikelzellen bewirkt bald eine Biegung der noch weichen Stäbchen (Fig. 18—19), die während des weiteren Wachstums der letzteren immer mehr auffallend wird. Werden solche Ovarialeier in Meerwasser übergeführt sieht man die gebogenen Stäbchen sich langsam emporrichten, während die an ihrer Mitte bald durchbohrte Follikelzelle als ein Protoplasmaklumpchen um seine Basis herum liegen bleibt (Fig. 22, 24). Dasselbe geschieht auf späteren Stadien auch innerhalb des Ovariums. Es läßt sich in solchen Fällen zwischen dem Protoplasma der Follikelzelle und der Oberfläche des Stäbchens eine Trennungslinie deutlich nachweisen (Fig. 22—23).

Dieser ganze Entwicklungsvorgang der Schalenanhänge läßt sich auch auf fixiertem Material sehr schön verfolgen (Fig. 23, a—b). Die Stäbchenanlage tritt, mit Hämatoxylin schwarz gefärbt, innerhalb der Follikelzellen

sehr deutlich hervor. Hier sieht man auf älteren Stadien auch sehr oft, wahrscheinlich wegen Kontraktion bei der Fixierung, einen deutlichen Zwischenraum zwischen Schalenanhang und dem membranartig abgeschlossenen Protoplasma der Follikelzelle (Fig. 21, 23, i).

Die Follikelzellenresten, die an den völlig entwickelten Schalenanhängen der Ovarialeier immer noch nachweisbar sind, werden wahrscheinlich, in Analogie mit den Verhältnissen bei den übrigen hier beschriebenen Arten, nach der Eiablage bei der plötzlichen Streckung aller Anhänge abgeworfen werden.

3. *Craspedochilus marginatus* Sars. (Taf. III).

Abgelegte Eier dieser Art sind von Lovén (1856) beobachtet und skizzenmäßig abgebildet worden. Der komplizierte Bau und die relativ sehr großen Dimensionen der Eischale wurden auch von ihm im Vorübergehen erwähnt.

Später ist die Entwicklung dieser Schale von GARNALT (1888), von PLATE (1900) und von SCHWEIKART (1905) beschrieben worden.

Keiner von diesen Forschern hat jedoch Gelegenheit gehabt die Schalen abgelegter Eier zu studieren, was bei dem komplizierten Bau der Schalenanhänge für ein volles Verständnis auch der jüngeren Stadien absolut notwendig erscheint.

So kommt es, daß GARNALT in den Schalenanhängen die umgebildete Follikelmembran zu erkennen glaubt, während PLATE, der die Schalenanhänge als „rundliche Knöpfe“ charakterisiert, die Deutung GARNALT'S abweist ohne jedoch über den Bildungsmodus der Anhänge sichere Aufschlüsse geben zu können. SCHWEIKART endlich sieht hier, wie bei den übrigen von ihm beschriebenen Arten, die Schale als eine *chorionäre* aus der Follikelmembran ausgeschiedene Bildung an.

Die voll entwickelte Schale eines abgelegten Eies von *Craspedochilus marginatus* ist in Fig. 35, und einer ihrer Anhänge in Fig. 36 abgebildet. Diese Anhänge lassen sich als Doppelbecher charakterisieren, deren innere Becher, (v), 3—4 mal so hoch ist wie der äußere (v^1) während beide Becher durch 4—5 radiäre Septen (r) unter sich in Verbindung stehen.

Längs- und Querschnitte solcher Doppelbecher werden in Fig. 37 und 38 gezeigt. Das Lumen des inneren Bechers ist in beiden Abbildungen mit t , die taschenförmigen äußeren Lumina sind mit l bezeichnet. Im schräg getroffenen Querschnitt ist nur eine solche, von zwei Septen und den Wänden beider Becher begrenzte, Tasche zu erkennen (ll), wären zwei andere Septen von der inneren Becherwand frei hervorgegangen (rr).

Diese becherförmigen Anhänge, die sich an ihrer Basis gegenseitig berühren, werden um einen beliebigen Meridian des Eies herum in einer Anzahl von 7—8 vorgefunden.

Auf frühen Entwicklungsstadien ist das Ei oval-kugelig, von einem einsichtigen, flachen Follikelepithel umgeben (Fig. 26). Später bilden sich an der Eioberfläche halbkugelförmige Vorsprünge, die von je einer Follikelzelle überdeckt sind. Die Kerne der Follikelzellen werden immer auf den Gipfeln der Vorsprünge vorgefunden (Fig. 27—28).

Auf Totalpräparaten (lebend oder fixiert) sowie auf Schnitten läßt sich jetzt um jeden dieser Vorsprünge herum die Entwicklung eines Schalenanhangs deutlich verfolgen.

Es zeigen sich zuerst in gewisser Entfernung vom Gipfel 4—5 kleine Erhebungen der Follikelzelle (Fig. 29), und im Inneren derselben wird eine lichtbrechende Substanz bald sichtbar. Diese zapfenförmigen ersten Anlagen der Schalenanhänge, die an ihrer Basis der Eioberfläche direkt anliegen, breiten sich sowohl in der Höhe als auch seitlich aus bis sie zusammen einen geschlossenen Polygon bilden (Fig. 30—32, v); diest ist die Anlage des *Innenbeckers*, von dessen Ecken schon auch die radiären Septen ausstrahlen (r). Der Kern der Follikelzelle wird immer noch am Gipfel der Vorsprünge der Eioberfläche, d. h. ungefähr in der Mitte des eben beschriebenen Polygons vorgefunden.

Die Eioberfläche wird jetzt nach und nach wieder kugelig, indem die tiefen Einbuchtungen zwischen den Vorsprüngen sich ausgleichen. Die lichtbrechende Schalensubstanz wird immer mächtiger; die schon angelegten Teile der Schalenanhänge wachsen rasch und auch der *Außenbecher* (Fig. 33 a—b, v¹) wird in ähnlicher Weise angelegt, wie vorher der Innenbecher.

Die ganze Schalenanlage befindet sich jedoch noch zwischen Eioberfläche und Follikelzelle eingeschlossen, die weiche Substanz der Schalenanhänge wird daher immer mehr gefaltet, oft so stark und auch so unregelmäßig, daß es selbst mit Kenntnis der voll entwickelten Anhänge kaum möglich ist die einzelnen Teile zu identifizieren. In anderen Fällen (Fig. 33) ist die Faltung jedoch mehr regelmäßig.

Auf allen Stadien lassen sich immer noch die Follikelzellen deutlich erkennen, obwohl sie wegen der starken Streckung zuletzt nur als ganz dünne Hüllen die hügel förmigen Anlagen der Schalenanhänge bedecken (Fig. 34). Die großen Kerne der Follikelzellen behalten auch stets ihre ursprüngliche Stelle bei, am Gipfel jeder Anlage.

Bei der Ausfaltung der Schalenanhänge, sobald die Eier ins Wasser gelangt sind, wird die jetzt ganz lose anheftende Follikelmembran abgeworfen.

Die hier beschriebene Entwicklung der Schalenanhänge bei *Craspedochilus marginatus* stimmt in ihren Hauptzügen mit den von SCHWEIKART (1905) beschriebenen tatsächlichen Befunden wohl überein. Wie schon oben erwähnt, hat er jedoch keine Gelegenheit gehabt weder die Ausfaltung und Streckung der Schalenanhänge noch die Eiablage zu studieren.

Mit Bezug auf die Deutung der eben beschriebenen Entwicklungsvorgänge scheint SCHWEIKART keinen Zweifel zu hegen, daß die Schalen-

anhänge als Ausscheidungsprodukte der Follikelzellen aufzufassen seien. So sagt er (S. 394): „Es ergibt sich, daß die Eihüllenanhänge von den Follikelzellen ausgeschieden werden und zwar nur von ihnen. Das Ei selbst kann keinen Theil bei der Bildung nehmen, wie PLATE es vermuthete, denn die Chorionmembran ist schon zur Zeit der Anhangbildung vorhanden“.

Dem Verfasser dieser Abhandlung scheint der Ursprung der Schalen-substanz, — ob sie von der Eizelle oder von der Follikelzelle oder vielleicht auch von diesen beiden ausgeschieden sei — nicht so leicht entscheidbar zu sein. Ohne in dieser kurzen Mitteilung eine Diskussion hierüber eröffnen zu wollen, erscheint es doch, der eben citierten Aussprache SCHWEIKART's gegenüber, angezeigt darauf hinzuweisen, daß die in gefärbten Präparaten dunkel tingierte Oberflächenmembran des Eies, — die „Chorionmembran“ SCHWEIKART's — gerade unter den sich entwickelnden Schalenanhängen (Fig. 31—33) sehr oft ganz farblos oder zum Verschwinden verdünnt erscheint.

Die Existenz einer solchen Membran würde auch sonst kaum genügen die Auffassung der Schalenanhänge als Ausscheidungsprodukte *nur* der Follikelmembran zu begründen.

4. *Boreochiton marmoreus* Sars. (Taf. IV).

Die Eischale dieser Art ist von PLATE (1901) als mit lappenförmigen Anhängen versehen beschrieben worden, als einziger Vertreter seiner Gruppe *c.* Er teilt mit Bezug auf die Entwicklung dieser Anhänge die Auffassung GARNAUT's, daß sie durch direkte Umbildung der Follikelzelle entstanden seien.

SCHWEIKART (1905) beschreibt die Schale als „mit einer Anzahl platter, tafelförmiger Zotten besetzt“ (S. 394), indem er sie als ein Ausscheidungsprodukt der Follikelmembran betrachtet.

Abgelegte Eier sind von beiden Forschern nicht untersucht worden.

Die voll entwickelte Eischale von *Boreochiton marmoreus*, wie sie nur auf abgelegten Eiern gefunden wird, hat in Wirklichkeit große Ähnlichkeit mit der eben beschriebenen von *Craspedochilus marginatus*. Auch hier finden wir die Schalenmembran mit dichtgestellten becherförmigen Anhängen bedeckt. Nur ist die Zahl dieser Anhänge bei *Boreochiton* sehr erheblich größer, und die Anhänge selbst entsprechend schlanker als bei der anderen Art. (Vergl. Fig. 49 und Fig. 35). Ein Unterschied läßt sich auch im betreff des Baues der Anhänge nachweisen, indem dieselben hier nicht als Doppelbecher sondern vielmehr als seckseckige *Einzelbecher* zu charakterisieren sind, deren Ecken jedoch außen mit radiär gestellten lappigen Rippen besteht sind (Fig. 51).

Im betreff der Entwicklung der Schalenanhänge läßt sich auch Schritt für Schritt einen Vergleich mit den bei *Crasp. marginatus* angetroffenen Bildern anstellen. Es wird daher hier genügen auf die Abbildungen hinzu-

weisen (Fig. 39—48), indem nur ein charakteristischer Unterschied zwischen beiden Arten hervorgehoben werden soll.

Die Vorwölbungen der Eioberfläche sind bei *Boreochiton marginatus* niedriger als bei der vorigen Art. Auch hier wird der Kern der Follikelzelle immer am Gipfel jeder Vorwölbung gefunden. Ein Unterschied zwischen beiden Arten erweist sich doch später im betreff der Lage dieses Kernes, der bei *Bor. marmoratus* eine Zeit lang am Boden des sich entwickelnden Schalenbeckers liegen bleibt (Fig. 42—45), während er bei *Craspedochilus marginatus* stets dem von jeder Schalenanlage gebildeten Hügel oben auflagt.

Auch dieser Unterschied schwindet jedoch auf späteren Entwicklungsstadien, indem bei der starken Streckung der Follikelzelle zuletzt auch der Kern seine tiefe Lage verlassen muß. Gerade vor der Eiablage sieht man daher auch hier die Follikelzellen mit deutlich erkennbaren Kernen als dünne Hüllen den Schalenanhängen lose anliegen (Fig. 46—47).

Nach der Eiablage falten sich die Schalenanhänge unter starker Schwellung aus, während die Follikelmembran abgeworfen wird. Die Veränderung eines Anhanges während dieser Ausfaltung wird durch die beiden Abbildungen Fig. 50 und Fig. 51, die am Anfang und am Ende dieses Vorganges mit derselben Vergrößerung gezeichnet worden sind, am besten illustriert.

Die hier beschriebene Entwicklung der Schalenanhänge bei *Boreochiton marmoratus* stimmt im betreff der tatsächlichen Befunde mit den von SCHWEIKART erreichten Resultaten, die jedoch wie schon erwähnt die letzten Entwicklungsstadien nicht umfassen, wohl überein.

Seine Deutung der Schalenanhänge als Ausscheidungsprodukt der Follikelmembran, wird hier wie für *Craspedochilus marginatus* mit gewissem Vorbehalt betrachtet.

Schlussbemerkungen.

Die in ihrer Form stark variierenden Eischalen der vier in dieser Arbeit behandelten Chitoniden haben mit bezug auf ihre Entwicklung eine Reihe gemeinsame Züge erwiesen.

1. Bei allen ließ sich eine deutliche, von großen Zellen aufgebauten, Follikelmembran nachweisen die allem Anschein nach in der Schalenbildung eine wesentliche Rolle zu spielen hat.

2. Die Schalensubstanz wird bei allen Arten in einer Lage zwischen Eioberfläche und Follikelmembran ausgeschieden, und zwar so daß die ersten Spuren derselben in bestimmter, für jede Art charakteristischer Beziehung zu den einzelnen Follikelzellen zum Vorschein treten. — Ob die Follikelzellen bei der Schalenbildung allein tätig sind, oder ob auch die Eizelle an der Ausscheidung von Schalensubstanz Teil nimmt, ließ sich auf Grundlage der vorliegenden Präparaten nicht bestimmt entscheiden.

3. Nach beendeter Schalenbildung läßt sich die Follikelmembran bei allen Arten als dünne äußere Hülle noch deutlich erkennen. Nach der Eiablage wird diese Hülle, wie bei drei der vier untersuchten Arten direkt beobachtet wurde, einfach abgeworfen.

4. Die Eischale erreicht bei den drei darauf untersuchten Arten erst nach der Eiablage ihre definitive Gestalt.

Die membranartige glatte Schale von *Lepidopleurus cinereus* wird, unter Schwellung und Auflösung der äußeren Schicht der zwischen Ei und Follikelmembran gebildeten „Sekretzone“, durch Verdichtung ihrer inneren Schicht gebildet.

Einen ebensolche innere Schalenmembran dient bei den drei anderen Arten als Basis ihrer fadenförmigen (*Lophyrus albus*) oder becherförmigen (*Craspedochilus marginatus* und *Boreochiton marmoratus*) Anhänge, deren jeder während seiner ganzen Ausformung von einer einzelnen Follikelzelle umgeben, zuletzt nur lose überdeckt, wird. Die Follikelzelle scheint daher für die Formbildung dieser Schalenanhänge eine wesentliche Rolle zu spielen.

Die tatsächlichen Befunde dieser Untersuchung stimmen im betreff der auch von SCHWEIKART untersuchten Arten und Entwicklungsstadien mit seinen Resultaten wohl überein, obwohl seine Deutung der Schalenbildung nicht ohne gewissen Vorbehalt beigetreten werden kann.

Die übereinstimmenden Resultate beider Untersuchungen, die sich teilweise auch auf die von früheren Forschern untersuchten Arten beziehen, genügen jedenfalls, der früher herrschenden Unsicherheit gegenüber, die *Homologie* der Schalenbildung der Chitonideneier zu beweisen.

Citierte Literatur.

- GARNAULT, P. 1888: Recherches sur la structure et le developpement de l'oeuf et de son follicule chez les Chitonides. Arch. zool. exp. T. 6.
- IHERING, H. v. 1878: Beitr. zur Kenntnis der Anatomie von Chiton. Morph. Jahrb. Bd. 4.
- LOVÉN, S. 1856: Über die Entwicklung von Chiton. Arch. Naturgesch., Berlin.
- PELSENER, P. 1899: Recherches morphologique et phylogénétiques sur les molusques archaïques. Mém. couronnés Mém. Sav. étr., Acad. Roy. Belg. T. 57.
- PLATE, L. H. 1898—1901: Die Anatomie und Phylogenie der Chitonen. Zool. Jahrbuch, Supl. IV—V.
- SCHWEIKART, A. 1905: Beiträge zur Morphologie und Genese der Eihüllen der Cephalopoden und Chitonen. Zool. Jahrb. Supl. VI, Bd. 3.
-

Erklärung der Abbildungen.

Sämtliche Fig. sind unter Benutzung des Zeichen-Prismas hergestellt worden.

Tafel I. (*Lepidopleurus cinereus*).

- Fig. 1. Schnitt durch eine junge Eizelle von Zellen der Ovarialwand (f.) umgeben. Vergr. 270.
 Fig. 2. Schnitt durch ein älteres Ei, die Bildung der Follikel illustrierend. Vergr. 270.
 Fig. 3. Gestielte Oocyte von Follikel epithel umgeben. Vergr. 95.
 Fig. 4. Optischer Schnitt durch eine von der Ovarialwand losgelöste Oocyte. Zwischen Eioberfläche und Follikelmembran eine Lage blasenförmigen Sekretvakuolen, b. — Vergr. 86.
 Fig. 5. Teil der Oberfläche derselben Oocyte, stark vergrößert. Vergr. 500. In den Sekretblasen ist eine feine radiäre Streifung sichtbar. a äußere Wand einer Follikelzelle (f.); n Kern einer Follikelzelle; m Zellmembran der Oocyte.
 Fig. 6. Teil eines Schnittes durch eine Oocyte desselben Stadiums wie Fig. 4—6. Buchstaben wie Fig. 5. Vergr. 270.
 Fig. 7. Follikelmembran in Oberflächenansicht. Vergr. und Buchstaben wie Fig. 5.
 Fig. 8. Optischer Schnitt durch ein späteres Stadium der Schalenbildung. Die blasigen Vakuolen der Fig. 4 sind zu einer „Sekretzone“ (Z) zusammen geflossen, die die Follikelmembran (f.) von der Eioberfläche (m.) emporhebt.
 Fig. 9. Teil eines Schnittes durch zwei zur Eiablage reifen Oocytten, dasselbe Stadium wie Fig. 8. Vergr. 270.
 Fig. 10. Optischer Schnitt durch ein reifes, eben abgelegtes Ei, im Leben gezeichnet. Durch Schwellung der äußeren Schicht der Sekretzone wird die Follikelmembran stark gespannt, indem jede Zelle bogenförmig hervorgetrieben wird. Eine innere Schicht der Sekretzone wird zur definitiven Schale (s.) verdichtet. P. = Polzellen. Vergr. 86.
 Fig. 11. Optischer Schnitt durch eine in Bouin's Flüssigkeit fixierte, eben abgelegte Eizelle. Die abgesprengte Follikelmembran hängt noch an der Oberfläche der jungen Schale fest. Vergr. 95.
 Fig. 12. Teil eines Schnittes durch ein befruchtetes Ei, die durch Fixierung geschrumpfte Schale (s) im Verhältnis zur Eioberfläche zeigend. Vergr. 86.
 Fig. 13. a Furchungsstadium, und b Flimmerlarve von *Lepidopleurus cinereus*, skizzenmäßig dargestellt, um das Verhalten der Schale zu illustrieren. Vergr. 86.

Tafel II. (*Lophyrus albus*).

- Fig. 14. Teil eines Schnittes durch eine junge Oocyte deren Follikelmembran (f.) von flachen Zellen gebildet ist. Vergr. 270.
 Fig. 15. Wenig ältere Oocyte. Die Follikelzellen mehr kubisch wie in Fig. 14. Vergr. 270.
 Fig. 16. Weitere Verdickung der Follikelmembran. Stäbchenförmige Anlagen der Schalenanhänge (s.) heben sich von der Eioberfläche (m.) unter der Mitte jeder Follikelzelle empor. Vergr. 270.
 Fig. 17—19. Weitere Entwicklung der Schalenanhänge. Vergr. 500.

- Fig. 20. Tangentialschnitt durch die Follikelmembran. In jeder der 6-eckigen Zellen (f.) sieht man neben dem Kern (n.) auch einen Schnitt durch die Anlage des Schalenanhänges (s.) Vergr. 590.
- Fig. 21. Ähnliches Schnitt eines späteren Stadiums. Die Schalenanhänge zeigen sich hier von dem Protoplasma der Follikelzellen deutlich getrennt. *i* = innere Wand der Follikelzelle. Vergr. 590.
- Fig. 22. Optischer Längsschnitt durch einen voll entwickelten Schalenanhang, am Leben gezeichnet. Die Follikelzelle (f.) liegt noch an der Basis des Anhanges. Buchstaben wie oben. Vergr. 334.
- Fig. 23 a-b. Zwei Längsschnitte durch Schalenanhänge, von den Follikelzellen ganz (a) oder teilweise (b) überdeckt. Vergr. 590. *i* innere, *a* äußere Wand der Follikelzelle. *n* Kern derselben.
- Fig. 24. Optischer Schnitt durch 3 fadenförmige Schalenanhänge (s) von den Follikelzellen (f.) teilweise umgeben. *n* = Kern; *i* = innere Wand der Follikelzellen. Vergr. 590.
- Fig. 25. Zur Eiablage reife Oocyte mit voll entwickelter Schale, deren fadenförmigen Anhänge jedoch nicht gestreckt sind. Vergr. 95.

Tafel III. (*Craspedochilus marginatus*).

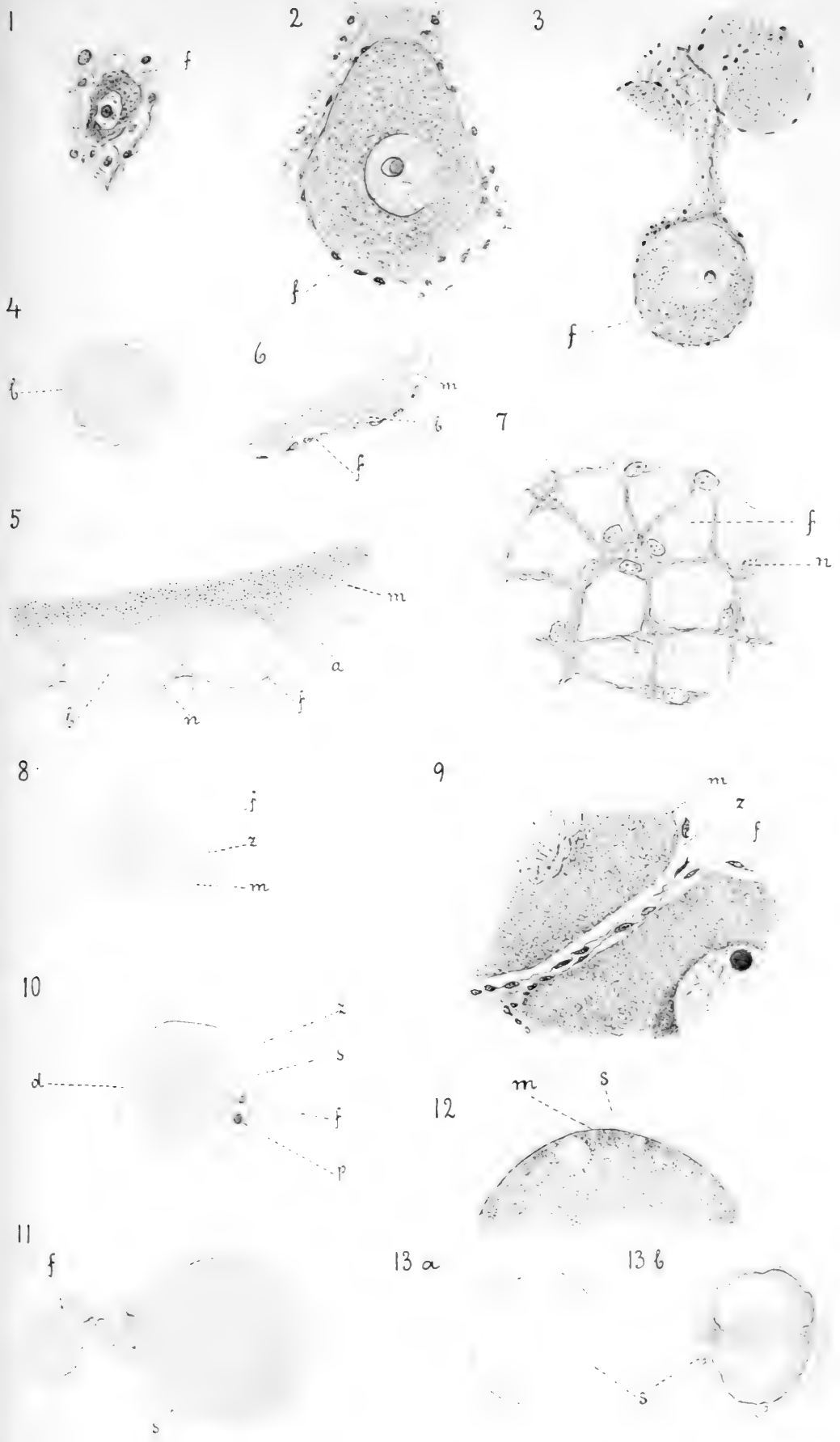
- Fig. 26. Schnitt durch junge Oocyte während der Bildung ihrer Follikelmembran (f.). Vergr. 590. *n* = Kern einer Follikelzelle.
- Fig. 27. Optischer Schnitt durch eine Oocyte mit halbkugeligen Hervorwölbungen ihrer Oberfläche, die von je einer Follikelzelle (f.) überdeckt sind. Vergr. 270.
- Fig. 28. Tangentialschnitt durch Oocyte etwas älter als in Fig. 27. Jede Hervorwölbung zeigt auf ihrem Gipfel den Kern (n) einer Follikelzelle. Vergr. 590.
- Fig. 29. Schnitt durch Hervorwölbungen zweier Oocyten, die ersten Anlagen der becherförmigen Schalenanhänge (v) zeigend. Vergr. 590.
- Fig. 30. Optischer Querschnitt durch eine Hervorwölbung der Eioberfläche, die Anlage des Innenbeckers (v) und der radiären Rippen (r) zeigend. Vergr. 590.
- Fig. 31. Optischer Längsschnitt durch dieselbe Hervorwölbung, von der Follikelzelle umzogen, die Anlage des Innenbeckers (v) zeigend. Vergr. 590.
- Fig. 32. Schnitt durch Hervorwölbung mit Schalenanlage; Stadium wie Fig. 30—31. Vergr. 590.
- Fig. 33 a-b. Teile von Schnitten durch ältere Oocyten, deren Hervorwölbungen beinahe oder ganz ausgeglichen sind. Außerhalb des Innenbeckers werden hier auch die Anlage des Außenbeckers (v¹, h) vorgefunden. Vergr. 590.
- Fig. 34. Optischer Schnitt durch zwei Schalenanhängen eines zum Ablegen reifen Eies. Die Follikelzellen, f, liegen den noch dicht zusammengefalteten Anhängen (v) lose an. Vergr. 590.
- Fig. 35. Abgelegtes Ei mit voll gestreckten Schalenanhängen. Vergr. 86.
- Fig. 36. Becherförmiger Schalenanhang von *Crasp. marginatus* perspektivisch gezeichnet. *v* Innenbecher, dessen trichterförmiges Lumen mit *t* bezeichnet ist. *v*¹ Außenbecher mit *h* hornartigen Vorsprüngen. Beide Becher sind durch 4—5 radiäre Rippen, *r*, mit einander verbunden, wodurch eine Reihe taschenförmiger Lumina, *l*, zwischen beiden Bechern offen bleiben. Vergr. 590.
- Fig. 37. Querschnitt eines Anhanges, etwas schräg getroffen. Vergr. 590.
- Fig. 38. Optischer Längsschnitt durch einen Schalenanhang vgl. Fig. 36. Vergr. 270.

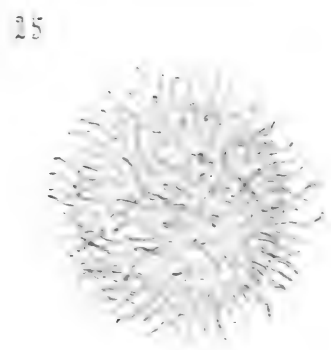
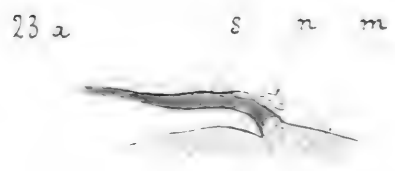
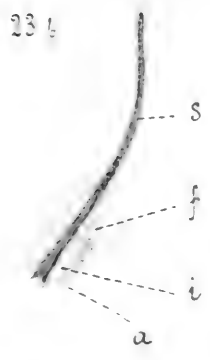
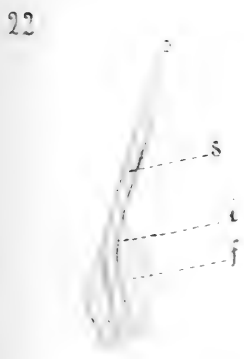
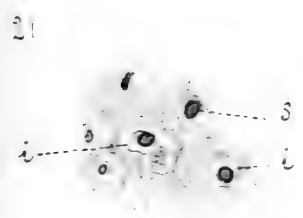
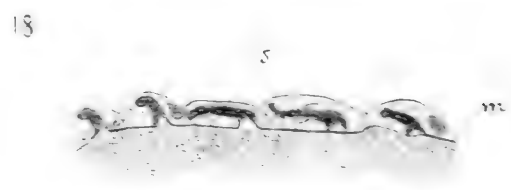
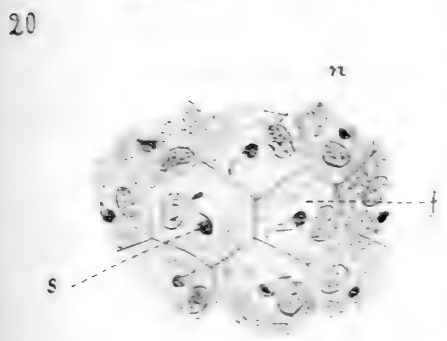
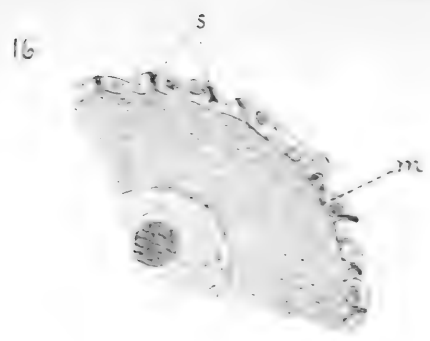
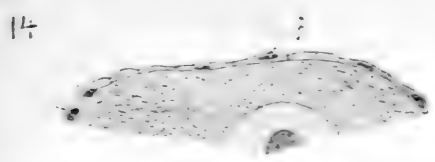
Tafel IV. (*Borcochiton marmoreus*).

- Fig. 39. Schnitt durch eine Oocyte mit Hervorwölbungen ihrer Oberfläche. Vergr. 270.
- Fig. 40. Schnitt durch Hervorwölbung, von Follikelzelle umgeben. *n* Kern, *v* ringförmige Verdickung der Follikelzelle. Vergr. 590.

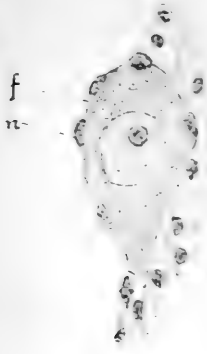
- Fig. 41. Wenig älteres Stadium als Fig. 40, die ersten Spuren einer Schalenanlage, v, zeigend. Vergr. 590.
- Fig. 42. Optischer Schnitt durch die Anlage eines becherförmigen Schalenanhanges, nach Ausgleichung der Hervorwölbungen der Eioberfläche. Buchstaben wie oben. — Vergr. 590.
- Fig. 43. Schnitt durch ein ebensolches Stadium. Vergr. 590.
- Fig. 44. Längsschnitt durch zwei Anhängen eines späteren Stadiums. Die Kerne der Follikeln liegen noch am Boden jedes Bechers. Vergr. 590.
- Fig. 45. Querschnitt durch einen Schalenanhang. v Becher, r Rippen. n Kern der Follikelnzelle. Vergr. 590.
- Fig. 46. Längsschnitt zweier voll entwickelten Schalenanhängen. Kern (n) der Follikelnzelle, (f.) am oberen Becherrand. Vergr. 590.
- Fig. 47. Optischer Schnitt durch ein ebensolches Stadium der Schalenentwicklung. Vergr. 590.
- Fig. 48. Zum Ablegen reife Oocyte. Optischer Schnitt. Vergr. 86.
- Fig. 49. Abgelegtes Ei mit gestreckten Schalenanhängen. Vergr. 86.
- Fig. 50. Becherförmigen Schalenanhang von einem soeben abgelegten Ei. Streckung der Schalenanhänge eben angefangen. Vergr. 590.
- Fig. 51. Derselbe Schalenanhang, der auch in Fig. 50 abgebildet wurde, nach vollendeter Streckung. Vergr. 590.
-
-

Gedruckt 4. August 1924.





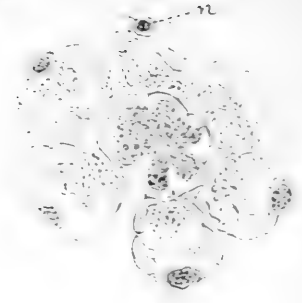
26



27



28



29



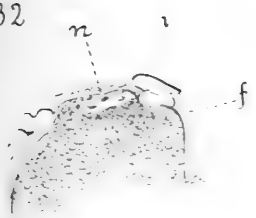
30



31



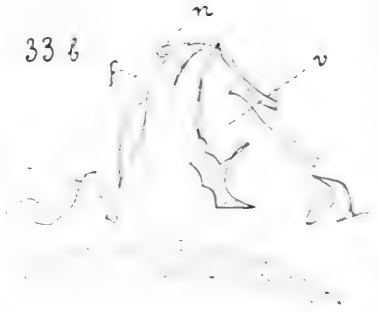
32



33 a



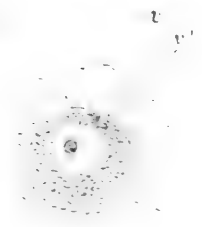
33 b



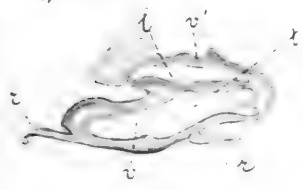
34



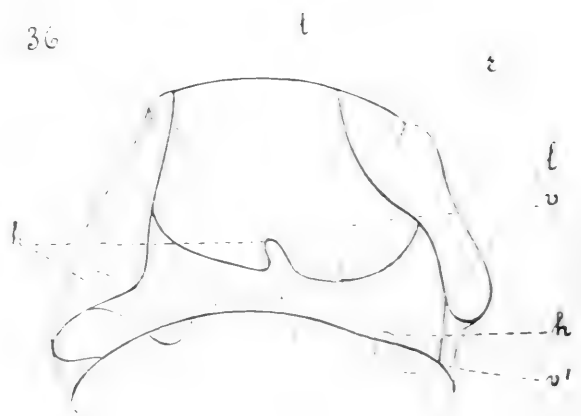
35



37



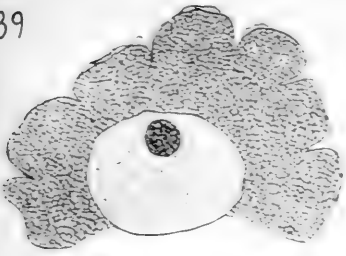
36



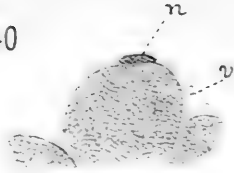
38



39



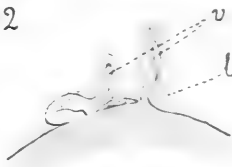
40



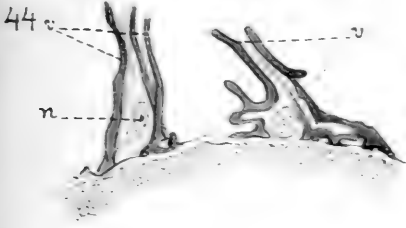
41



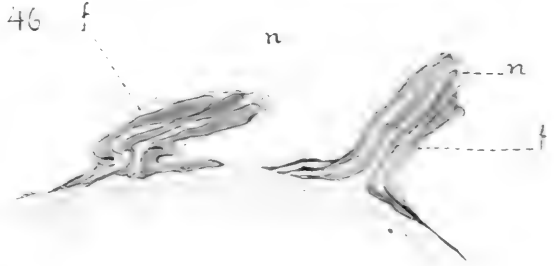
42



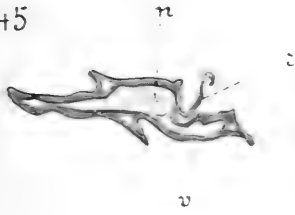
43



46



45



47



48



49

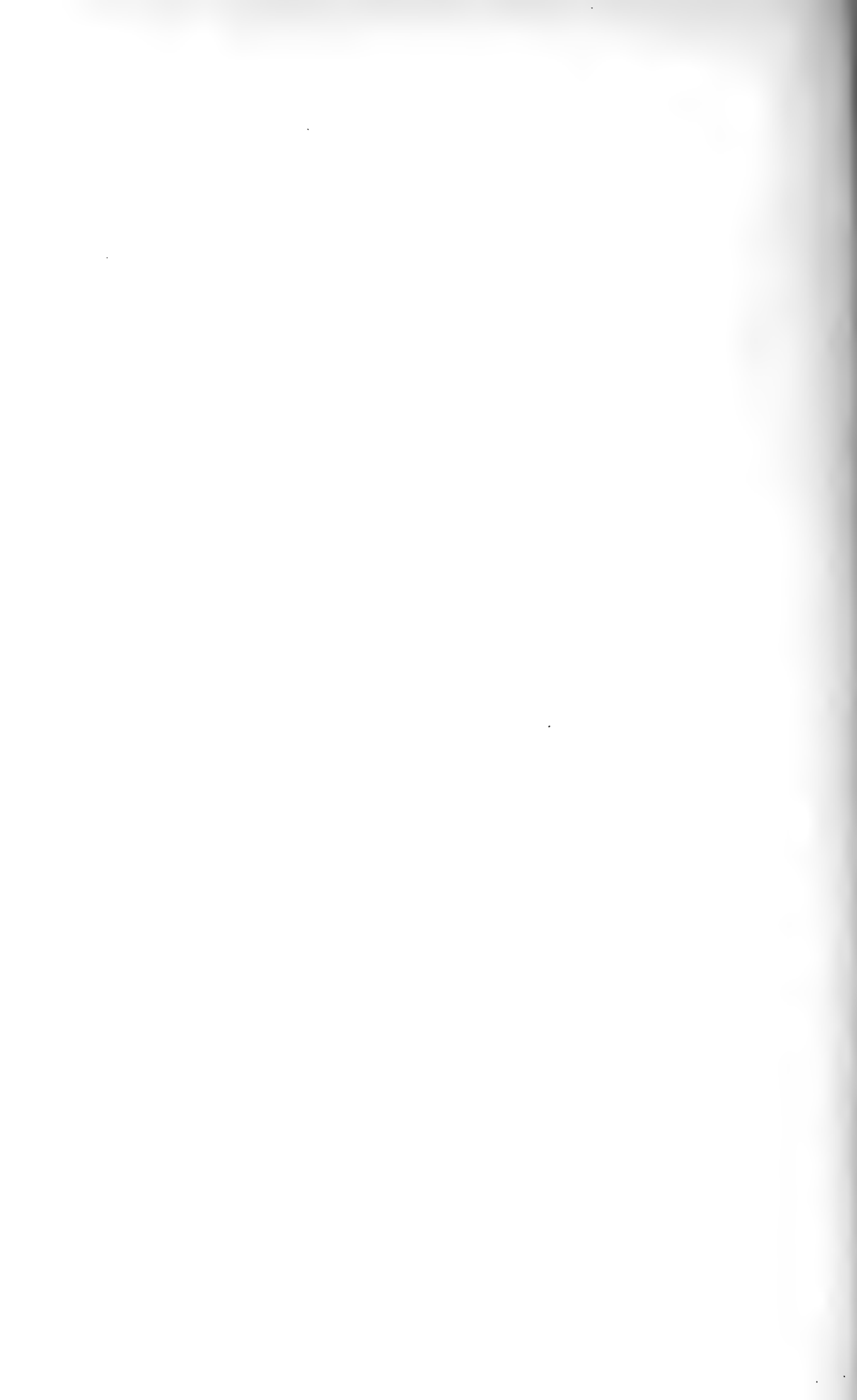


51



50





INTEGRITÄTSBEREICHE IN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

VON
TH. SKOLEM

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 21)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i fællesmøtet den 14. september 1923.

† .

§ 1.

Einleitende Bemerkungen über die in einem Körper vorkommenden Ringe.

Bekanntlich besitzt man eine ausführliche Theorie derjenigen Ringe in einem algebraischen Zahlkörper K , die im Ringe g der ganzen Zahlen des Körpers enthalten sind. Es gibt natürlich auch viele andere, u. a. auch umfassendere, Ringe; für die Eigenschaften dieser letzteren Ringe hat man sich aber — so viel ich weiß — nicht so sehr interessiert. Ich will sie deshalb im folgenden etwas näher betrachten.

Es scheint doch z. B. interessant zu sein zu bemerken, daß es leicht ist solche Ringe anzugeben, die vom Ringe g nicht sehr viel verschieden sind (nämlich durch Adjunktion einer Zahl θ daraus entsteht, wie später erläutert wird), und innerhalb welcher die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze gelten, ohne daß es nötig ist die Ideale einzuführen. Am einfachsten kann man dies erreichen mit Hilfe des folgenden Satzes, der bekanntlich gewöhnlich dazu dient, die Endlichkeit der Anzahl der Idealklassen in g zu beweisen¹.

„Ist ζ eine beliebige Zahl des Körpers K , so läßt sich eine ganze Zahl μ dieses Körpers und eine positive ganze Zahl h so bestimmen, daß die Norm der Zahl $h\zeta - \mu$ absolut kleiner als 1 ist; dabei ist h nicht größer als eine positive ganze Zahl m , welche, von ζ unabhängig, nur vom Körper selbst bestimmt ist“.

Wenn man will, kann offenbar die Zahl m auch unabhängig von ζ so gewählt werden, daß h immer im m aufgeht. Tut man dies, und betrachtet

man dann den Inbegriff aller Zahlen der Form $\frac{\theta}{m''}$, θ Zahl in g , μ be-

liebige ganze rationale Zahl, so sieht man, daß dieser ein Ring ist, und außerdem gilt nach dem eben angegebenen Satze in diesem Ringe der euklidische Algorithmus zum Aufsuchen des größten gemeinsamen Teilers. Dabei wird natürlich die Teilbarkeit in diesem Ringe wie sonst in Ringen so definiert: Eine Zahl a des Ringes heißt durch eine andere Zahl b des Ringes teilbar, wenn $\frac{a}{b}$ eine Zahl im Ringe ist. Für die Zahlen der Form

¹ P. BACHMANN, Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper, S. 191.

$\frac{\Theta}{m''}$ gelten also die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze. Führt man die Ideale und die Idealklassen ein, so kann dies auch so ausgedrückt werden, daß die Zahl der Idealklassen in diesem Ringe = 1 ist.

Nun enthält allerdings dieser Ring gebrochene rationale Zahlen, und deshalb können die Zahlen des Ringes nicht als eine mögliche Erweiterung des Begriffes der ganzen rationalen Zahl angesehen werden; dies ist wohl der Grund dazu, daß man sich nicht für solche Ringe interessiert hat. Dann kann es aber angebracht sein zu bemerken, daß man in jedem algebraischen Zahlkörper Ringe angeben kann, die alle ganzen rationalen, aber keine gebrochenen rationalen, Zahlen enthalten, während außerdem die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze darin gültig sind (Die Zahl der Idealklassen = 1).

Ich will im folgenden versuchen eine allgemeine Übersicht über die in einem Körper K überhaupt vorhandenen Ringe zu geben, welche die ganzen rationalen Zahlen enthalten.

Zuerst will ich aber noch einige vorbereitende Betrachtungen anstellen. — Es sei K ein Normalkörper. Dann kann man Ringe R in K von folgender Beschaffenheit betrachten:

- 1) Jede ganze rationale Zahl gehört zu R .
- 2) Keine gebrochene rationale Zahl gehört zu R .
- 3) Sämtliche Konjugierten einer Zahl in R sind auch Zahlen in R .

Wenn ein Ring die dritte Eigenschaft hat, kann man ihn passend *Normalring* nennen.

Es ist leicht zu sehen, daß unendlich viele solche Ringe vorhanden sind (von dem trivialen Fall abgesehen, da K der absolute Rationalitätsbereich ist). Man kann nämlich folgendes beweisen:

Satz 1. *Es sei g der Ring aller ganzen Zahlen eines Normalkörpers K . Es gibt unendlich viele in g enthaltene Normalringe und zwar solche, die n -gliedrige Moduln sind, wenn g selbst n -gliedrig ist.*

Beweis: Es sei o ein Normalring, der in g enthalten und n -gliedriger Modul ist. Es sei $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ eine Basis der Zahlen in o . Weiter seien $\omega'_1 \dots \omega'_n$ solche lineare homogene Funktionen mit ganzen rationalen Koeffizienten der Zahlen $\omega_1 \dots \omega_n$, daß die zugehörige Determinante absolut > 1 ist. Dann bilden die Zahlen $\omega'_1 \dots \omega'_n$ die Basis eines Ringes o_1 , der ein echter Teil von o ist. Es kann sein, daß o_1 kein Normalring ist; dann ist aber das kleinste gemeinsame Vielfache der zu o_1 konjugierten Moduln ein Normalring o' , der auch bekanntlich ein n -gliedriger Modul wird, und o' ist à fortiori ein echter Teil (ein Vielfaches) des Ringes o . Jeder in g enthaltene Normalring enthält also einen kleineren Normalring.

Bekanntlich ist g selbst ein Normalring.

Satz 2. *Der Ring g ist der umfassendste unter allen, welche die Eigenschaften 1), 2) und 3) haben.*

Beweis: Es sei R ein Ring mit den Eigenschaften 1), 2) und 3) und ϑ eine Zahl in R . Die zu ϑ konjugierten Zahlen $\vartheta', \vartheta'', \dots$ sind nach 3) auch

Zahlen in R . Folglich sind die elementarsymmetrischen Funktionen von $\vartheta, \vartheta', \dots$ Zahlen in R und sind also nach 1) und 2) ganze rationale Zahlen. Folglich ist ϑ eine ganze algebraische Zahl, sodaß R in g enthalten sein muß.

In einem quadratischen Körper ist jeder in g enthaltene Ring der Eigenschaften 1) und 2) auch ein Normalring, wie man sofort einsieht. *Andererseits gibt es, wenn der Körper K wenigstens vom dritten Grade ist, unendlich viele in g enthaltene Ringe der Eigenschaften 1) und 2), die nicht die Eigenschaft 3) haben.* Ich will dies für den Fall eines zyklisch kubischen Körpers zeigen.

Ich betrachte den kubischen Körper, der von einer Wurzel ϑ der Gleichung

$$\vartheta^3 + a\vartheta + b = 0$$

erzeugt wird, wobei $-4a^3 - 27b^2 = \Delta^2$, a, b und Δ ganz rational. Ist ϑ_0 eine der Wurzeln, ϑ_1 eine andere, so hat man

$$\vartheta_1 = \frac{-3a\vartheta_0^2 + (6b + c)\vartheta_0 - 2a^2}{\Delta}.$$

wenn $3b - \Delta = 2c$ gesetzt wird. Ist also z. B. $3a$ nicht durch Δ teilbar, so ist schon der Ring $I(\vartheta)$, bestehend aus allen ganzzahligen Polynomen von ϑ , ein Ring in g , der wohl alle ganzen rationalen Zahlen enthält, aber nicht die Eigenschaft 3) hat. Ist aber $I(\vartheta)$ ein Normalring, sodaß $\frac{3a}{\Delta}$ ganz ist, so kann man die Ringe $I(a\vartheta)$ betrachten, a ganze rationale Zahl. Setzt man $\tau = a\vartheta$, so ist

$$\tau^3 + a\tau^2 + b\tau = 0,$$

und zwischen zwei Wurzeln τ_0 und τ_1 besteht die Relation

$$\tau_1 = \frac{-3a\tau_0^2 + (6b + c)\tau_0 - 2a^2}{\Delta a^3}.$$

Also gehört τ_1 nur dann zu $I(\tau_0)$, wenn $\frac{3a}{\Delta a}$ ganz ist. Wenn also von einer endlichen Zahl von Ausnahmewerten von a abgesehen wird, hat $I(a\vartheta)$ nicht die Eigenschaft 3).

Wenn K Normalkörper war, konnte der Bereich g der ganzen Zahlen in K dadurch charakterisiert werden, daß er der größte Ring mit den Eigenschaften 1), 2) und 3) war. Ist aber K kein Normalkörper, so sei \bar{K} der kleinste ihn enthaltende Normalkörper. Dann kann der Bereich g der ganzen Zahlen in K , wenn man will, dadurch charakterisiert werden, daß er der größte gemeinsame Bestandteil von K und \bar{g} ist, wobei \bar{g} der Ring der in \bar{K} enthaltenen ganzen Zahlen ist, und \bar{g} ist also in der schon angegebenen Weise charakterisiert.

§ 2.

Die Ringe, die aus g durch Adjunktion einer oder mehrerer Zahlen entstehen.

Definition: Wenn o ein in g enthaltener Ring ist (eine „Ordnung“¹), so soll $o(\vartheta)$ derjenige Ring bezeichnen, der aus allen Polynomen von ϑ mit Koeffizienten in o besteht. Entsprechend sind die Bezeichnungen $o(\vartheta_1, \vartheta_2)$ usw. aufzufassen.

Satz 3. Es seien $\varkappa_1 \cdots \varkappa_m$ teilerfremde Ideale in g . Die im Körper K enthaltenen Zahlen τ der Form

$$(\tau) = \frac{a}{\varkappa_1^{a_1} \cdots \varkappa_m^{a_m}}$$

a beliebiges Ideal in g , $a_1 \cdots a_m$ ganze rationale Zahlen, bilden einen Ring.

Beweis: Daß diese Zahlen sich durch Multiplikation reproduzieren, ist offenbar. Wir müssen aber die Summe zweier Zahlen dieser Form betrachten. Es seien $\tau_1 = \frac{\Theta_1}{\omega_1}$, $\tau_2 = \frac{\Theta_2}{\omega_2}$ und

$$(\Theta_1) = a I_1, (\omega_1) = \varkappa_1^{a_1} \cdots \varkappa_m^{a_m} I_1, (\Theta_2) = b I_2, (\omega_2) = \varkappa_1^{\beta_1} \cdots \varkappa_m^{\beta_m} I_2.$$

Dann ist $\tau_1 + \tau_2 = \frac{\Theta_1 \omega_2 + \Theta_2 \omega_1}{\omega_1 \omega_2}$, während $(\omega_1 \omega_2) = \varkappa_1^{a_1 + \beta_1} \cdots \varkappa_m^{a_m + \beta_m} I_1 I_2$;

außerdem gibt es ein Ideal c , so daß

$$(\Theta_1 \omega_2 + \Theta_2 \omega_1) = c I_1 I_2;$$

denn die Zahlen $\Theta_1 \omega_2$ und $\Theta_2 \omega_1$ kommen beide im Ideale $I_1 I_2$ vor. Also ist

$$(\tau_1 + \tau_2) = \frac{c}{\varkappa_1^{a_1 + \beta_1} \cdots \varkappa_m^{a_m + \beta_m}}.$$

Satz 4. Der Ring der Zahlen τ der Form

$$(\tau) = \frac{a}{z^a}$$

(a beliebige ganze rationale Zahl, a und z Ideale in g , z fest gewählt), stimmt überein mit dem Ringe $g(\vartheta)$, $(\vartheta) = \frac{a}{z}$, z und z teilerfremde und äquivalente Ideale.

¹ DIRICHLET-DEDEKIND, Vorlesungen über Zahlentheorie, Vierte Auflage, S. 505.

Beweis: Es sei λ ein solches Ideal, daß $z^a \lambda$ ein Hauptideal $= (\omega)$ wird; dann ist auch $a \lambda$ ein Hauptideal $= (\tau')$. Weiter $z^a \lambda = (\tau)$. Die unbestimmte Gleichung

$$\tau' = \xi \tau + \eta \omega$$

ist dann in Zahlen ξ und η in g lösbar; der größte gemeinsame Teiler von τ und ω , nämlich λ , geht ja in τ' auf. Also wird

$$\frac{\tau'}{\omega} = \xi \cdot \frac{\tau}{\omega} + \eta,$$

so daß die Zahl $\frac{\tau'}{\omega}$ zum Ringe $g(\vartheta)$ gehört. Umgekehrt ist augenscheinlich

jede Zahl des Ringes $g(\vartheta)$ als ein Idealbruch der Form $\frac{a}{z^a}$ darstellbar.

Satz 5. *Es seien z_1 und z_2 teilerfremde Ideale, $z = z_1 z_2$. Der Ring $g(\vartheta)$, $(\vartheta) = \frac{q}{z}$, q und z teilerfremd, ist dann mit dem Ringe $g(\vartheta_1, \vartheta_2)$*

identisch, wenn $(\vartheta_1) = \frac{q_1}{z_1}$, $(\vartheta_2) = \frac{q_2}{z_2}$, q_1 prim zu z_1 , und q_2 zu q_1 und z_2 prim.

Beweis: Es seien die Ideale λ_1 und λ_2 so beschaffen, daß $z_1 \lambda_1 = (\omega_1)$, $z_2 \lambda_2 = (\omega_2)$, $q_1 \lambda_1 = (\tau_1)$, $q_2 \lambda_2 = (\tau_2)$. Weiter sei $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda$. Dann ist $z \lambda$ Hauptideal $= (\omega)$, $\omega = \omega_1 \omega_2$, $q \lambda = (\tau)$. Weiter sind die unbestimmten Gleichungen

$$\tau = \xi_1 \tau_1 \omega_2 + \xi_2 \tau_2 \omega_1, \quad \omega_2 \tau_1 = \xi \tau + \eta \omega, \quad \omega_1 \tau_2 = \xi' \tau + \eta' \omega$$

in dem Sinne lösbar, daß $\xi_1, \xi_2, \xi, \eta, \xi', \eta'$ Zahlen in g werden, denn der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $\tau_1 \omega_2$ und $\tau_2 \omega_1$, nämlich λ , geht in τ auf, und der gr. gem. Teiler von τ und ω , nämlich λ , geht sowohl in $\omega_2 \tau_1$ wie in $\omega_1 \tau_2$ auf. Man erhält also

$$\frac{\tau}{\omega} = \xi_1 \cdot \frac{\tau_1}{\omega_1} + \xi_2 \cdot \frac{\tau_2}{\omega_2}, \quad \frac{\tau_1}{\omega_1} = \xi \cdot \frac{\tau}{\omega} + \eta, \quad \frac{\tau_2}{\omega_2} = \xi' \cdot \frac{\tau}{\omega} + \eta,$$

d. h. ϑ ist in $g(\vartheta_1, \vartheta_2)$ enthalten, und umgekehrt enthält $g(\vartheta)$ sowohl ϑ_1 wie ϑ_2 . Folglich $g(\vartheta) = g(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Anmerkung: Die Voraussetzung, daß q_2 zu q_1 prim sein soll, kann aufgehoben werden. Denn ist nur q_1 zu z_1 , q_2 zu z_2 , q zu z prim, so kann man immer ein Ideal q_2' finden, das $\sim q_2$ ist, und außerdem prim zu $q_1 z_2$. Es sei $(\vartheta_2') = \frac{q_2'}{z_2}$. Dann ist nach Satz 5 $g(\vartheta) = g(\vartheta_1, \vartheta_2')$. Nach Satz 4 ist aber $g(\vartheta_2') = g(\vartheta_2)$. Folglich $g(\vartheta) = g(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Man hat selbstverständlich folgende Erweiterung des Satzes:

Satz 6. Der Ring $g(\vartheta)$, $\vartheta = \frac{q}{z}$, q und z teilerfremd, $z = z_1 z_2 \cdots z_m$, alle z_r teilerfremd, ist mit dem Ringe $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m)$ identisch, wenn $(\vartheta_r) = \frac{q_r}{z_r}$, q_r und z_r teilerfremd.

Satz 7. Der Ring $g(\vartheta)$, $\vartheta = \frac{q}{z_1^{a_1} \cdots z_m^{a_m}}$, q zu $z_1 \cdots z_m$ teilerfremd, alle z_r teilerfremd, ist gleich dem Ringe $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$, $(\vartheta_r) = \frac{q_r}{z_r}$ ($r = 1, 2, \dots, m$), q_r und z_r teilerfremd.

Beweis: Die Richtigkeit folgt sofort aus den Sätzen 4 und 6.

Satz 8. Der Ring der Zahlen τ von solcher Art, so daß (τ) ein Idealbruch der Form $\frac{a}{\pi_1^{a_1} \cdots \pi_m^{a_m}}$ ist, die π verschiedene Primideale, ist mit dem Ringe $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ identisch, wenn $(\vartheta_r) = \frac{q_r}{\pi_r}$, q_r durch π_r nicht teilbar.

Beweis: Erstens ist jede Zahl des Ringes $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ offenbar als Idealbruch der Form $\frac{a}{\pi_1^{a_1} \cdots \pi_m^{a_m}}$ darstellbar. Es sei zweitens eine beliebige Zahl τ gegeben, wobei $(\tau) = \frac{a}{\pi_1^{a_1} \cdots \pi_m^{a_m}}$. Wir können hier annehmen, daß dieser Idealbruch irreduzibel ist, d. h. a durch kein π teilbar. Nach Satz 7 ist dann τ im Ringe $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ enthalten.

Satz 9. Jeder Ring $g(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots, \vartheta^{(n)})$ ist mit einem Ringe $g(\vartheta)$ identisch.

Beweis: Es sei für jedes r

$$\vartheta^{(r)} = \frac{a_r}{\pi_{r,1}^{a_{r,1}} \cdots \pi_{r,m_r}^{a_{r,m_r}}}, \quad a_r \text{ durch kein } \pi_{r,s} \text{ teilbar.}$$

Dann ist nach Satz 8 $g(\vartheta^{(r)}) = g(\vartheta_{r,1}, \dots, \vartheta_{r,m_r})$, wenn

$$\vartheta_{r,s} = \frac{q_{r,s}}{\pi_{r,s}}, \quad (s = 1, 2, \dots, m_r), \quad q_{r,s} \text{ durch } \pi_{r,s} \text{ nicht teilbar.}$$

Folglich ist $g(\vartheta^{(1)}, \dots, \vartheta^{(n)}) = g(\vartheta_{1,1}, \dots, \vartheta_{n,m_n})$. Diejenigen $\vartheta_{r,s}$, welche denselben Primidealnenner haben, geben aber nach Satz 4 zu demselben Ringe Anlaß, d. h. wenn $(\vartheta_1) = \frac{q_1}{\pi}$, $(\vartheta_2) = \frac{q_2}{\pi}$, so ist $g(\vartheta_1) = g(\vartheta_2)$. In der Reihe der Zahlen $\vartheta_{1,1} \cdots \vartheta_{n,m_n}$ nach dem Zeichen g können deshalb so viele weggelassen werden, daß nur Zahlen ϑ mit verschiedenen

Nennern übrig bleiben, oder besser ausgedrückt: Sind $\pi_1 \cdots \pi_\mu$ alle in den Zahlen ϑ vorkommenden Primidealnenner, so braucht unter denjenigen ϑ , die den Nenner π_r ($r = 1, \dots, \mu$) haben, nur ein einziges, ϑ_r , ausgewählt zu werden. Hierdurch wird dann

$$g(\vartheta^{(1)}, \dots, \vartheta^{(n)}) = g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_\mu).$$

Nach Satz 6 ist aber wieder $g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_\mu) = g(\vartheta)$, wenn $(\vartheta) = \frac{\varrho}{\pi_1 \cdots \pi_\mu}$,

und ϱ so gewählt ist, daß kein π darin aufgeht.

Die Adjunktion endlich vieler Zahlen zu g kann also immer durch die Adjunktion einer einzigen Zahl ersetzt werden.

Betrachten wir aber den Fall, da unendlich viele Zahlen $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)} \dots$ adjungiert werden. Wenn diese (oder genauer die entsprechenden Hauptidealbrüche) als irreduzible Idealbrüche geschrieben werden, können zwei Fälle eintreten: Erstens kann sein, daß in den Nennern dieser Brüche nur endlich viele verschiedene Primideale $\pi_1 \cdots \pi_\mu$ vorkommen. Dann ist wie früher $g(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots) = g(\vartheta)$, wenn $(\vartheta) = \frac{\varrho}{\pi_1 \cdots \pi_\mu}$, ϱ durch kein π teil-

bar, oder auch, wenn man will $= g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_\mu)$, $\vartheta_r = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$ ($r = 1, 2, \dots, \mu$)

ϱ_r durch π_r nicht teilbar. Zweitens können in den Nennern unendlich viele verschiedene Primideale $\pi_1, \pi_2 \dots$ auftreten. Ist dann für jedes r , ϱ_r durch π_r nicht teilbar und $\varrho_r \sim \pi_r$, so sieht man ohne Schwierigkeit ein, daß $g(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots) = g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$, wenn $(\vartheta_r) = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$ ($r = 1, 2, \dots$). Dagegen

ist es hier nicht möglich eine Zahl ϑ zu finden, so daß $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots) = g(\vartheta)$ wäre; denn wird (ϑ) als irreduzibler Idealbruch geschrieben, so kommen im Nenner bloß endlich viele Primidealfaktoren vor, und nur diese können dann im Nenner einer beliebigen Zahl in $g(\vartheta)$ auftreten, wenn sie als Idealbruch geschrieben wird. — Wir können aber folgende Sätze aufstellen:

Satz 10. Für jeden Ring besteht die Identität

$$g(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots) = g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots),$$

wenn $(\vartheta_r) = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$ ($r = 1, 2, \dots$), ϱ_r durch π_r nicht teilbar, und die π_r die in den Nennern den Zahlen $\vartheta^{(r)}$ vorkommenden verschiedenen Primidealfaktoren sind, wenn diese Zahlen als Idealbrüche geschrieben werden.

Satz 11. Der Ring $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$, $\vartheta_r = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$ ($r = 1, 2, \dots$) besteht aus allen Zahlen der Form

$$\frac{a}{\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots},$$

Falls unendlich viele π vorhanden sind, sind natürlich alle α von einem gewissen Index an $= 0$.

Ringe $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ ohne gebrochene rationale Zahlen.

Satz 12. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einem Ringe $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$, $\vartheta_r = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$, keine rationale gebrochene Zahl vorkommt, ist, daß unter den Primidealen π_1, π_2, \dots nie alle Primidealfaktoren einer beliebig gegebenen rationalen Zahl vorkommen.*

Beweis: Kommen in der Reihe π_1, π_2, \dots alle Primidealfaktoren einer rationalen Primzahl p vor, so daß

$$(p) = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \cdots \pi_m^{\alpha_m},$$

so ist $\frac{1}{p}$ eine Zahl des Ringes $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$, d. h. der Ring enthält gebrochene rationale Zahlen.

Es werde jetzt im Gegenteil angenommen, daß nicht alle Primidealfaktoren einer beliebigen rationalen Primzahl p in der Reihe π_1, π_2, \dots vorkommen. Betrachten wir eine gebrochene rationale Zahl

$$\frac{A}{B},$$

so können wir A und B teilerfremd voraussetzen. Zerlegt man dann A und B in ihre Primidealfaktoren in g , so entsteht ein irreduzibler Idealbruch. Im Nenner kommt aber dann sicher mindestens ein Primidealfaktor π' vor, der von allen Primidealen π_1, π_2, \dots verschieden ist. Folglich kann $\frac{A}{B}$ keine Zahl des Ringes sein (Satz 11).

Satz 12'. *Es sei*

$$\vartheta = \frac{\eta}{h}$$

h eine natürliche quadratfreie und zur Körperdiskriminante teilerfremde Zahl, η eine Zahl in g , welche durch keine der in h aufgehenden rationalen Primzahlen in g teilbar ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in $g(\vartheta)$ keine gebrochenen rationalen Zahlen vorkommen, ist dann, daß die Norm von η , $N\eta$, durch h teilbar ist.

Beweis: Da die Zahl $\frac{N\eta}{h}$ zu $g(\vartheta)$ gehört, ist die Bedingung notwendig. — Ist umgekehrt $\frac{N\eta}{h}$ eine ganze Zahl, so muß bekanntlich jeder Primfaktor p von h innerhalb g in mehrere Primidealfaktoren zerfallen, welche außerdem alle von einander verschieden sind, da h zur Grundzahl des Körpers teiler-

fremd ist. Wird deshalb der Bruch $\frac{\eta}{h}$ als irreduzibler Idealbruch $\frac{Q}{z}$ dargestellt, so ist z das Produkt von lauter verschiedenen Primidealen, und außerdem können nie alle Primidealfaktoren eines Primfaktors p von h darunter vorkommen; denn wäre das der Fall, so wäre η zu p und folglich auch $N\eta$ zu p teilerfremd. Nach Satz 12 folgt also, daß keine gebrochene rationale Zahl in $g(\vartheta)$ vorkommen kann.

Übrigens muß auf der anderen Seite in z mindestens ein Primidealfaktor jedes Primfaktors p von h vorkommen; denn sonst müßte η durch p teilbar sein.

Anmerkung: Falls der Zahlkörper quadratisch ist, braucht h nicht quadratfrei vorausgesetzt zu werden. Denn jeder natürliche Primfaktor p von h zerfällt, wenn $\frac{N\eta}{h}$ ganz ist und h zur Grundzahl des Körpers teilerfremd, im Körper in das Produkt zweier verschiedener Primideale, $p = \pi\pi'$, und η kann nicht auf einmal durch π und π' teilbar sein, da sonst p in η aufgehen müßte. Ist p^a die höchste Potenz von p , die in h aufgeht, so muß η durch π^a teilbar sein; denn sonst wäre $N\eta$ nicht durch p^a teilbar. Folglich enthält der Idealbruch $\frac{Q}{z}$ im Nenner den Primidealpotezfaktor π'^a , aber π kommt in z nicht vor. Nach Satz 12 enthält also $g(\vartheta)$ keine gebrochenen rationalen Zahlen.

Für Körper höheren Grades ist es dagegen nötig h quadratfrei vorauszusetzen.

Mit Hilfe des Satzes 12 ist es auch möglich eine Übersicht darüber zu erhalten, welche *maximale* Ringe vorhanden sind, die keine gebrochenen rationalen, wohl aber alle ganzen rationalen, Zahlen enthalten.

Jeder Ring dieser Art entsteht durch Adjunktion unendlich vieler ϑ_r zu g , wobei einerseits unter den Primidealen π_r mindestens ein Primidealfaktor jeder natürlichen Primzahl p vorkommen muß, andererseits aber nie alle Primidealfaktoren von p . In der Reihe der π kommt daher kein solches Primideal π vor, daß $(p) = \pi^n$ ist. Da aber immer unendlich viele natürliche Primzahlen innerhalb g durch mehrere verschiedene Primideale teilbar werden, so gibt es im Körper in mengentheoretischer Ausdrucksweise *nicht abzählbar unendlich viele maximale Ringe der erwähnten Eigenschaft*.

Es seien jetzt zwei Körper k und K gegeben, K Oberkörper in bezug auf k ; G und g seien bezw. die Ringe der ganzen Zahlen in K bzw. k . Außerdem sei der Ring $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ in k gegeben, der die gebrochenen rationalen Zahlen ausschließt. Ich behaupte, daß dann auch $G(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ alle gebrochenen rationalen Zahlen ausschließt.

Beweis: Wir können nach früheren Sätzen annehmen, daß die Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ so gewählt sind, daß, wenn wie früher $(\vartheta_r) = \frac{Q_r}{z_r}$ gesetzt wird,

alle z_r paarweise teilerfremd sind und außerdem z_r gleich dem Produkt einiger der in einer natürlichen Primzahl p aufgehenden verschiedenen Primidealen, aber so, daß nie alle diese Primidealfaktoren in z_r auftreten. In G bleibt entweder ein Primideal in g noch ein Primideal oder zerfällt weiter.

Außerdem bleibt $\frac{\vartheta_r}{z_r}$ auch in G ein irreduzibler Idealbruch, und überhaupt bleiben relativ prime Ideale in g auch in G relativ prim. Folglich behält die Reihe der ϑ_r auch diejenige Eigenschaft, welche bewirkt, daß in $G(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ keine gebrochene rationale Zahl auftreten kann.

Mittels einer unendlichen Reihe solcher Übergänge zu immer größeren Oberkörpern kann man den Bereich aller algebraischen Zahlen erhalten. Folglich gibt es auch innerhalb dieses Bereichs gewisse Integritätsbereiche B folgender Beschaffenheit:

1) In B kommen alle ganze rationalen Zahlen vor und auch alle algebraisch-ganzen.

2) In B kommt keine gebrochene rationale Zahl vor.

3) In B kommen unendlich viele algebraisch-gebrochene Zahlen vor.

4) Jede algebraische Zahl läßt sich mit einer solchen natürlichen Zahl multiplizieren, daß das Produkt eine Zahl in B wird. (Folgt aus 1).

Bezeichnet wieder wie oben K ein Oberkörper des Körpers k , während G und g die Ringe der ganzen Zahlen in K bzw. k sind, so kann man die Bedingung dafür suchen, daß in einem Ringe $G(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ keine gebrochene Zahl des Körpers k auftritt. Schreibt man wieder $(\vartheta_r) = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$,

die π_r lauter verschiedene Primideale in G , so ist die notwendige und hinreichende Bedingung offenbar, daß in der Reihe der π nie alle Primidealfaktoren in G eines beliebig gegebenen Primideals in g auftreten.

Durch analoge Betrachtungen wie die soeben angestellten gelangt man deshalb auch zu dem Ergebnis, daß im Bereiche aller algebraischen Zahlen Integritätsbereiche B folgender Art vorhanden sein müssen: B enthält

1) jede ganze Zahl des Körpers k und überhaupt jede ganze algebraische Zahl,

2) keine gebrochene Zahl des Körpers k ,

3) unendlich viele gebrochene algebraische Zahlen.

Im 75ten Bande der Math. Ann. hat E. ZERMELO auf Grund des Auswahlprinzips einen Bereich von Zahlen konstruiert, der dazu dienen soll, „ganze“ Zahlen überhaupt zu charakterisieren¹; dieser Bereich G hat die Eigenschaften:

I. Summe, Differenz und Produkt zweier Zahlen aus G ist wieder eine Zahl aus G .

II. Jede reelle oder komplexe Zahl ist Quotient zweier Zahlen aus G .

¹ Siehe auch: E. NOETHER, Die allgemeinsten Bereiche aus ganzen transcendenten Zahlen, Math. Ann. B. 77, S. 103.

III. Jede ganze rationale (bzw. algebraische) Zahl ist Element von G .

IV. Keine nicht-ganze rationale (bzw. algebraische) Zahl gehört zu G .

Da aber, wie wir gesehen haben, genau analog gebildete Bereiche innerhalb der Menge der algebraischen Zahlen gar nicht nur algebraisch-ganze Zahlen enthalten, sondern in sehr ausgedehntem Maße auch algebraisch-gebrochene Zahlen enthalten können, *so scheint es mir berechtigt zu behaupten, daß man in dieser Weise zu einer passenden Einführung des Begriffes „ganze transcendente Zahl“ nicht gelangt.* Eine andere Sache ist es, daß man auch gegen das Auswahlprinzip sehr berechtigte Einwände machen kann, worauf ich aber hier nicht näher eingehen kann.

In § 1 ist gezeigt, wie man die ganzen algebraischen Zahlen mittels der Eigenschaften ihrer Ringbereiche charakterisieren kann; dabei wurde aber von dem Begriff der *konjugierten* Zahlen Gebrauch gemacht. Solange dieser Begriff nicht auf die transcendenten Zahlen übertragen ist, scheint es mir deshalb zweifelhaft zu sein, ob man imstande sein wird in passender Weise ganze transcendente Zahlen zu charakterisieren.

§ 3.

Einheiten, Ideale und Idealklassen im Ringe $g(\vartheta_1, \vartheta_2 \dots)$, $\vartheta_r = \frac{\varrho_r}{\pi_r}$.

Der Kürze halber bezeichne \bar{g} den Ring $g(\vartheta_1, \vartheta_2 \dots)$. Der Begriff der Teilbarkeit in einem beliebigen Ringe ist schon Seite 3 erwähnt worden. Da die Zahl 1 in \bar{g} vorkommt, kann der Begriff der Einheit in \bar{g} natürlich so definiert werden: Eine Zahl e in \bar{g} heißt eine Einheit, wenn sie in 1 aufgeht.

Die Einheiten.

Satz 13. *Die Einheiten in \bar{g} sind alle, und nur diejenigen, Zahlen des Körpers K , die in g als Idealbrüche der Form $\pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots$ mit ganzen rationalen Werten der Exponenten a geschrieben werden können.*

Beweis: Es sei τ eine solche Zahl des Körpers, daß

$$(\tau) = \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots,$$

wobei die a ganze rationalen Zahlen sind.

$$\text{Dann ist } \left(\frac{1}{\tau}\right) = \pi_1^{-a_1} \pi_2^{-a_2} \dots,$$

woraus man sieht, daß sowohl τ wie $\frac{1}{\tau}$ Zahlen in \bar{g} sind. Folglich ist τ eine Einheit in \bar{g} .

Es sei andererseits

$$(\tau) = \frac{a}{\pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \cdots},$$

wobei in a mindestens ein Primidealfaktor vorkommt, der von allen π verschieden ist. Dann ist $\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \cdots}{a}$, sodafß offenbar $\frac{1}{\tau}$ nicht zu \bar{g} gehört, weil hier im Nenner ein von allen π verschiedener Primidealfaktor auftritt. τ ist also in diesem Falle keine Einheit in \bar{g} .

Satz 14. *Es sei $\alpha_{1,1}$ der kleinste positive Exponent, für den $\pi_1^{\alpha_{1,1}}$ ein Hauptideal wird. Weiter sei für beliebige ν , $\alpha_{\nu,\nu}$ der kleinste positive Exponent, für den solche ganze rationale Zahlen $\alpha_{1,\nu}, \alpha_{2,\nu}, \cdots, \alpha_{\nu-1,\nu}$ vorhanden sind, daß $\pi_1^{\alpha_{1,\nu}} \pi_2^{\alpha_{2,\nu}} \cdots \pi_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1,\nu}} \pi_\nu^{\alpha_{\nu,\nu}}$ ein Hauptideal wird. Es sei $(e_\nu) = \pi_1^{\alpha_{1,\nu}} \cdots \pi_\nu^{\alpha_{\nu,\nu}}$ ($\nu = 1, 2, \cdots$). Dann bilden die Zahlen e_1, e_2, \cdots ein in bezug auf \bar{g} vollständiges System von Grundeinheiten in \bar{g} , d. h. jede Einheit e in \bar{g} ist von der Form*

$$e = \varepsilon e_1^{h_1} e_2^{h_2} \cdots,$$

wobei ε eine Einheit in \bar{g} ist, während h_1, h_2, \cdots beliebige ganze rationale Zahlen sind.

Beweis: Wenn $\pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \cdots \pi_m^{\alpha_m}$ ein Hauptideal ist, muß α_m durch $\alpha_{m,m}$ teilbar sein; denn dividiert man α_m durch $\alpha_{m,m}$ und schreibt $\alpha_m = \alpha_{m,m} h_m + r_m$, $0 \leq r_m < \alpha_{m,m}$, so folgt, daß $\pi_1^{\alpha_1 - \alpha_{1,m} h_m} \pi_2^{\alpha_2 - \alpha_{2,m} h_m} \cdots \pi_m^{r_m}$ ein Hauptideal sein muß, und folglich, der Definition von $\alpha_{m,m}$ zufolge, $r_m = 0$. Also bekommt man

$$\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_m^{\alpha_m} = (e_m)^{h_m} \pi_1^{\alpha'_1} \cdots \pi_{m-1}^{\alpha'_{m-1}}.$$

Ebenso erhält man

$$\pi_1^{\alpha'_1} \cdots \pi_{m-1}^{\alpha'_{m-1}} = (e_{m-1})^{h_{m-1}} \pi_1^{\alpha''_1} \cdots \pi_{m-2}^{\alpha''_{m-2}}$$

uzw. Durch Kombinieren aller dieser Gleichungen erhält man schließlich das Resultat

$$\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_m^{\alpha_m} = (e_1)^{h_1} \cdots (e_m)^{h_m}, \text{ alle } h \text{ ganz rational.}$$

Nach Satz 13 folgt hieraus sofort die Richtigkeit des Satzes 14.

Falls unendlich viele Ideale π vorhanden sind, kann bemerkt werden, daß die Zahlen $\alpha_{\nu,\nu}$ von einem gewissen ν an alle $= 1$ sein müssen. Denn

die Gruppe der Idealklassen, die aus $\pi_1 \cdots \pi_r$ erzeugt wird, kann nicht fortwährend wachsen, da die Gruppe der Idealklassen überhaupt eine endliche ist. Es muß also ν einmal so groß werden, daß die Klassen der Ideale $\pi_{\nu+1}, \pi_{\nu+2}, \dots$ schon in der aus $\pi_1 \cdots \pi_\nu$ erzeugten Gruppe enthalten sind.

Satz 15. Jede Zahl in \bar{g} kann durch Multiplikation mit einer Einheit in \bar{g} , die zugleich eine Zahl in g ist, in eine Zahl in g verwandelt werden.

Beweis: Eine beliebige Zahl τ in \bar{g} ist derart, daß

$$(\tau) = \frac{a}{\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_m^{\alpha_m}},$$

wobei die a positiv rational oder = Null vorausgesetzt werden können. Es gibt ein Ideal $\pi_1^{\beta_1} \cdots \pi_m^{\beta_m}$, so daß $\pi_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdots \pi_m^{\alpha_m + \beta_m}$ ein Hauptideal wird, also $\pi_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdots \pi_m^{\alpha_m + \beta_m} = (c)$, wobei c eine Zahl in g und nach Satz 13 eine Einheit in \bar{g} ist. Weiter wird

$$(\tau c) = a \pi_1^{\beta_1} \cdots \pi_m^{\beta_m},$$

woraus ersichtlich wird, daß τc eine Zahl in g ist.

Satz 16. Sind $\tau_1 \cdots \tau_m$ endlich viele beliebige Zahlen in \bar{g} , so gibt es eine Einheit e in \bar{g} , die auch eine Zahl in g ist, so beschaffen, daß die Produkte $\tau_r e$ ($r = 1, \dots, m$) alle zu g gehören.

Beweis: Nach Satz 15 gibt es Zahlen $e_1 \cdots e_m$ in g , die zugleich Einheiten in \bar{g} sind, so beschaffen, daß die Zahlen $\tau_r e_r$ alle zu g gehören. Es sei $e = \prod_{r=1}^m e_r$; dann ist auch e eine in g vorkommende Einheit in \bar{g} . Außerdem gehören die Produkte $\tau_r e$ alle zu g .

Die Ideale.

Da nach Satz 15 jede Zahl in \bar{g} assoziiert ist (rel. zu \bar{g}) einer Zahl in g , kann man die Basiszahlen jedes Ideals in \bar{g} als Zahlen in g wählen. Diese Zahlen bilden dann zugleich die Basis eines zugehörigen Ideals in g . In dieser Weise entspricht jedem Ideale A in g ein eindeutig bestimmtes Ideal \bar{A} in \bar{g} , während umgekehrt jedem Ideale in \bar{g} , wie ich näher zeigen werde, mehrere Ideale in g entsprechen. Ich benutze im folgenden immer die Bezeichnung \bar{A} für das Ideal in \bar{g} , das dem Ideal A in g entspricht.

Es ist auch klar, daß jedes Ideal \bar{I} in \bar{g} eine endliche Basis besitzt. Wählt man nämlich die Basiszahlen als Zahlen aus g und betrachtet das durch diese Basiszahlen gegebene Ideal I in g , so hat jedenfalls I eine endliche Basis, und diese ist dann auch eine Basis des Ideals \bar{I} in \bar{g} .

Satz 17. Aus der Gleichung $A = BC$ folgt $\overline{A} = \overline{B}\overline{C}$.

Beweis: Es sei $A = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $B = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, $C = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$; dann bedeutet die Gleichung $A = BC$, daß Gleichungen der Form

$$\xi_r = \sum_{r,s} \gamma_{r,s,t} \eta_s \zeta_t \quad , \quad \eta_s \zeta_t = \sum_r \delta_{r,s,t} \xi_r$$

bestehen, worin die γ und die δ Zahlen in g sind. Dann gehören diese aber auch zu \overline{g} , woraus $\overline{A} = \overline{B}\overline{C}$ sofort folgt.

Satz 18. Ist $A = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$, die α nicht-negative ganze rationale Zahlen, so ist $\overline{A} = \overline{(1)}$.

Beweis: Es werde $B = \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$ so gewählt bei nicht-negativen β , daß AB ein Hauptideal $= (e)$ wird. Dann ist e eine Einheit in \overline{g} (Satz 13). Folglich nach Satz 17

$$\overline{A}\overline{B} = \overline{(e)} = \overline{(1)},$$

woraus $\overline{A} = \overline{B} = \overline{(1)}$ folgt.

Satz 19. Ist $\overline{A} = \overline{(1)}$, so gibt es solche nicht-negative Zahlen α , daß $A = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$ ist.

Beweis: Es sei $A = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Die Gleichung $\overline{A} = \overline{(1)}$ ist dann mit einer Gleichung der Form

$$\xi_1 \eta_1' + \xi_2 \eta_2' + \dots = 1$$

gleichbedeutend, worin die Zahlen η_r' zu \overline{g} gehören. Da aber nur endlich viele Basiszahlen und also auch Zahlen η vorkommen, gibt es nach Satz 16 eine in g vorkommende Einheit e in \overline{g} , so daß die Produkte $\eta_r' e = \eta_r$ alle zu g gehören. Man bekommt deshalb die Gleichung

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots = e.$$

Also ist das Ideal (e) durch A teilbar, und außerdem ist nach Satz 13 $(e) = \pi_1^{\gamma_1} \pi_2^{\gamma_2} \dots$. Hieraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Satz 20. Ist $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$ teilbar durch $B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$, so ist \overline{A} durch \overline{B} teilbar, und ist umgekehrt \overline{A} durch \overline{B} teilbar, so gibt es solche nicht-negative Zahlen α , daß $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$ durch B teilbar ist.

Beweis: Ist $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots = B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots C$, so ist nach den Sätzen 17 und 18 $\overline{A} = \overline{B}\overline{C}$, d. h. \overline{A} durch \overline{B} teilbar. Ist umgekehrt $\overline{A} = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ durch $\overline{B} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ teilbar, so gelten Gleichungen der Form

$$\xi_r = \sum_s \zeta'_{r,s} \eta_s,$$

worin die ζ' Zahlen in \bar{g} sind. Nach Satz 16 gibt es eine in g vorkommende Einheit e in \bar{g} , so daß die Zahlen $\zeta_{r,s} = \zeta'_{r,s} e$ alle zu g gehören. Gleichzeitig wird

$$e \zeta_r = \sum \zeta_{r,s} \eta_s, \quad (e) = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots,$$

und also ist $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$ durch B teilbar.

Satz 21. Ist $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots = B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$, so ist $\bar{A} = \bar{B}$, und ist umgekehrt $\bar{A} = \bar{B}$, gibt es solche nicht-negative a und β , daß $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots = B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$ ist.

Beweis: Aus der Gleichung $A \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots = B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$ folgt, daß die Ideale links und rechts gegenseitig durch einander teilbar sind. Nach Satz 20 sind also \bar{A} und \bar{B} gegenseitig durch einander teilbar, woraus $\bar{A} = \bar{B}$. — Andererseits folgt aus der Gleichung $\bar{A} = \bar{B}$, daß \bar{A} und \bar{B} durch einander teilbar sind, und folglich erhält man nach Satz 20 Gleichungen der Form $A \pi_1^{\gamma_1} \pi_2^{\gamma_2} \dots = BC$ und $B \pi_1^{\delta_1} \pi_2^{\delta_2} \dots = AD$, woraus $\pi_1^{\gamma_1 + \delta_1} \pi_2^{\gamma_2 + \delta_2} \dots = CD$, so daß C und D Produkte von Potenzen der π sind. Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Satz 22. Ist ein Ideal A in g der Form $P \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$, wo P ein von allen π verschiedenes Primideal bedeutet, so ist \bar{A} ein Primideal in \bar{g} . Umgekehrt ist jedes Primideal in \bar{g} von dieser Form.

Beweis: Ist $\bar{A} = \bar{B}\bar{C}$, so ist nach Satz 21 $A \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots = BC \pi_1^{\gamma_1} \pi_2^{\gamma_2} \dots$, d. h.

$$P \pi_1^{\alpha_1 - \beta_1} \pi_2^{\alpha_2 - \beta_2} \dots = BC \pi_1^{\gamma_1} \pi_2^{\gamma_2} \dots,$$

woraus folgt, daß P entweder in B oder in C aufgehen muß, z. B. $B = PB_1$. Dann ist C nur ein Potenzprodukt der π und folglich nach Satz 18 $\bar{C} = (1)$. Also ist \bar{A} Primideal in \bar{g} .

Ist andererseits $A = PQ \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots$, P und Q zwei vom Einheitsideal verschiedene Ideale, die nicht Potenzprodukte der π sind, so folgt $\bar{A} = \bar{P}\bar{Q}$, wo nach Satz 19 weder \bar{P} noch \bar{Q} gleich dem Einheitsideal in \bar{g} sein können. Also ist in diesem Falle \bar{A} kein Primideal in \bar{g} .

Wir können augenscheinlich dies so ausdrücken, daß die von allen π verschiedenen Primideale in g den Primidealen in \bar{g} eindeutig entsprechen.

Satz 23. Jedes Ideal \bar{I} in \bar{g} läßt sich, und zwar nur auf eine Weise, als ein Produkt von Primidealen schreiben.

Beweis: Es sei in g

$$I = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots,$$

wobei P_1, P_2, \dots die verschiedenen von allen π verschiedenen in I aufgehenden Primideale sind. Nach den Sätzen 17 und 18 folgt

$$\bar{I} = \bar{P}_1^{a_1} \bar{P}_2^{a_2} \dots,$$

und hier sind $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ nach Satz 20 lauter verschiedene Primideale in \bar{g} . Hierdurch ist jedenfalls \bar{I} als ein Produkt von Primidealpotenzen dargestellt. Es sei andererseits

$$\bar{I} = \bar{Q}_1^{b_1} \bar{Q}_2^{b_2} \dots$$

eine beliebige solche Dekomposition. Nach Satz 21 hat man dann

$$I \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots = Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} \dots \pi_1^{\gamma_1} \pi_2^{\gamma_2} \dots,$$

und die Q können als verschiedene Primideale in g vorausgesetzt werden, die außerdem von allen π verschieden sind. Folglich müssen die Q von der Anordnung abgesehen mit den P übereinstimmen, und die Häufigkeitszahlen b müssen entsprechend mit den a übereinstimmen.

Die Idealklassen.

Satz 24. Ist $A \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots \sim B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$, so ist $\bar{A} \sim \bar{B}$. Umgekehrt, ist $\bar{A} \sim \bar{B}$, so gibt es solche nicht-negative ganze rat. Zahlen a und β , daß $A \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots \sim B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots$ ist.

Beweis: Ist $A \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots (\xi) = B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots (\eta)$, ξ und η Zahlen in g , so folgt nach den Sätzen 17 und 18 $\bar{A}(\xi) = \bar{B}(\eta)$, d. h. $\bar{A} \sim \bar{B}$. Umgekehrt folgt aus $\bar{A}(\xi) = \bar{B}(\xi)$ nach Satz 21 eine Gleichung der Form $A \pi_1^{a_1} \pi_2^{a_2} \dots (\xi) = B \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \dots (\eta)$.

Satz 25. Es sei H die Gruppe der Idealklassen in g , die aus den Klassen, wozu π_1, π_2, \dots gehören, erzeugt werden, während G die Gruppe der Idealklassen überhaupt ist. Dann ist die Gruppe \bar{G} der Idealklassen in \bar{g} der Quotientgruppe $\frac{G}{H}$ isomorph.

Beweis: Nach Satz 24 besteht ein Entsprechen der Idealklassen in g und \bar{g} derart, daß jeder Idealklasse in g eine eindeutig bestimmte Klasse in \bar{g} entspricht, während umgekehrt jeder Klasse in \bar{g} alle diejenigen Klassen in g entsprechen, welche aus einer unter ihnen durch Multiplikation mit allen zu H gehörigen Klassen entstehen. Der Hauptklasse in \bar{g} entsprechen in g die Klassen in H . Hieraus folgt offenbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Ist die Gruppe H die Einheitsgruppe, d. h. sind π_1, π_2, \dots alle Hauptideale, so werden \bar{G} und G isomorph; in diesem Falle tritt also beim Über-

gang von g zu \overline{g} keine Reduktion der Gruppe der Idealklassen ein. Sonst wird immer eine Reduktion eintreten. Der interessanteste Fall ist der, da $H = G$ ist, d. h. die ganze Gruppe G wird aus den Idealklassen erzeugt, wozu π_1, π_2, \dots gehören. In diesem Falle ist \overline{G} die Einheitsgruppe, d. h. in \overline{g} ist dann jedes Ideal ein Hauptideal.

Da die Gruppe G endlich ist, lassen sich immer endlich viele solche Ideale π_1, π_2, \dots finden, daß die dadurch gegebenen Idealklassen die ganze Gruppe G erzeugen. Folglich kann man immer eine solche algebraisch-gebrochene Zahl ϑ zu g adjungieren, daß der Ring $g(\vartheta)$ nur Hauptideale enthält. Für die Zahlen in $g(\vartheta)$ gelten also dann die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze. Außerdem ist nach Satz 15 jede Zahl in $g(\vartheta)$ (relativ zu $g(\vartheta)$) einer Zahl in g assoziiert.

Freilich wird man wohl in den meisten Fällen keinen eigentlichen Nutzen aus diesen Tatsachen haben; denn wenn man erreicht, daß die Zahl der Idealklassen verringert wird, erhält man zum Ersatz neue „Einheiten“, auch solche deren Norm von ± 1 verschieden ist. Immerhin scheint es mir doch von Interesse zu sein auch diese Ringe \overline{g} ebenso wie die Ringe \overline{o} im folgenden zu betrachten um eine vollständigere Theorie der Ringe in den algebraischen Zahlkörpern zu bekommen.

Beispiel:

Ich setze

$$3\vartheta^2 + 2\vartheta + 5 = 0, \quad \vartheta = \frac{-1 + \sqrt{-14}}{3},$$

und betrachte den Ring $g(\vartheta)$. Hier ist $g(\vartheta) = I(\vartheta)$ (Siehe § 5); denn da $\sqrt{-14} = 3\vartheta + 1$, ist $g(\vartheta)$ in $I(\vartheta)$ enthalten und umgekehrt natürlich auch $I(\vartheta)$ in $g(\vartheta)$. Die Zahlen in $g(\vartheta)$ sind folglich der Form

$$x_n \vartheta^n + x_{n-1} \vartheta^{n-1} + \dots + x_1 \vartheta + x_0,$$

wo die Koeffizienten x alle ganz rational sind. Nach einem späteren Satze können diese Zahlen auch in der Form

$$\left(\frac{a_n}{3^{n-1}} x_n + \frac{a_{n-1}}{3^{n-2}} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 \right) \vartheta - \frac{5}{3} \left(\frac{a_{n-1}}{3^{n-2}} x_n + \dots + a_1 x_2 \right) + x_0$$

geschrieben werden, wenn die Zahlen a mittels der rekurrenten Gleichung

$$a_n = -2a_{n-1} - 15a_{n-2}, \text{ nebst } a_0 = 0, a_1 = 1,$$

definiert sind.

Im Ringe \bar{g} der ganzen Zahlen des Körpers $k(\sqrt{-14})$ gelten die Zerlegungen

$$\begin{aligned}(-1 + \sqrt{-14}) &= (3, -1 + \sqrt{-14})(5, -1 + \sqrt{-14}) \\ (3) &= (3, -1 + \sqrt{-14})(3, -1 - \sqrt{-14}).\end{aligned}$$

Folglich wird durch die Gleichung

$$(\vartheta) = \frac{(5, -1 + \sqrt{-14})}{(3, 1 + \sqrt{-14})}$$

ϑ als irreduzibler Idealbruch dargestellt. Da hier im Nenner bloß der eine Primidealfaktor von 3 auftritt, nicht der andere davon verschiedene, so gibt es in $g(\vartheta)$ nach Satz 12 keine gebrochene rationale Zahl.

Da die vier in g vorhandenen Idealklassen als Potenzen der durch $(3, 1 + \sqrt{-14})$ gegebenen Klasse dargestellt werden können, muß nach Satz 25 die Zahl der Idealklassen in $g(\vartheta)$ gleich 1 sein. In $g(\vartheta)$ gelten also für die Zahlen selbst die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze.

Den Primidealen in g entsprechen in \bar{g} auch Primideale (Satz 22), wenn eben das Ideal $(3, 1 + \sqrt{-14})$ ausgenommen wird, denn diesem Ideal entspricht in \bar{g} das Einheitsideal (Satz 18).

Diejenigen natürlichen Primzahlen, für welche die Kongruenz

$$x^2 + 14 \equiv 0 \pmod{p}$$

nicht lösbar ist, bleiben auch Primzahlen in $g(\vartheta)$. Diejenigen, für welche diese Kongruenz lösbar ist, sind mit Ausnahme von 3 in $g(\vartheta)$ das Produkt zweier Primzahlen; diese beiden Primzahlen sind nur für 2 und 7 assoziiert. Die Zahl 3 bleibt dagegen Primzahl in $g(\vartheta)$.

Man hat z. B.

$$\begin{aligned}5 &= -\vartheta(3\vartheta + 2) & 2 &= -(1 - 3\vartheta)^2(\vartheta^4 - 2\vartheta - 2) \\ 13 &= (\vartheta + 2)(-3\vartheta + 4) & 7 &= (3\vartheta + 8)^2(\vartheta^4 - 2\vartheta - 2).\end{aligned}$$

$$\vartheta^4 - 2\vartheta - 2 = \frac{1 - 2\vartheta}{27} \text{ ist eine Einheit; denn}$$

$$\left(\frac{1 - 2\vartheta}{27}\right)(6\vartheta + 7) = 1.$$

Überhaupt sind die Einheiten in $g(\vartheta)$ sämtliche Zahlen der Form

$$\pm (6\vartheta + 7)^e,$$

e ganz rational (Satz 13).

§ 4.

Die Ringe, welche aus einem in g enthaltenen Ring o durch Adjunktion einer oder mehrerer Zahlen entstehen.

Ich benutze hier die Bezeichnungen des Modulkalküls (BACHMANN, Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper, zweites Kapitel).

Ich gehe von einem Ringe o aus, der nur einen Teil von g bildet, während doch die ganzen rat. Zahlen in o vorkommen¹. Außerdem soll o ein n -gliedriger Modul sein, wenn g n -gliedrig ist. Der Modul $f = \frac{o}{g}$, der sogenannte Führer des Ringes o , ist ein Ideal in g und enthält jedes Ideal in g , das auch in o enthalten ist. Bekanntlich gelten für diejenigen Ideale i in o , für welche $i + f = o$ ist, die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze. Diese Ideale i in o entsprechen ein-eindeutig denjenigen Idealen j in g , die zum Führer f prim sind, d. h. $j + f = g$. Das Entsprechen wird durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$j = g i, \quad i = j - o$$

ausgedrückt (BACHMANN, l. c., S. 368).

Es sei $f = \pi_1^{\beta_1} \pi_2^{\beta_2} \cdots \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} \cdots$, die π und die ρ lauter verschiedene Primideale in g . Es werde eine Zahl ϑ , $g \vartheta = \frac{o}{z}$, o und z teilerfremde Ideale in g , zu o adjungiert, $z = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \cdots \sigma_1^{\gamma_1} \sigma_2^{\gamma_2} \cdots$, die Primideale σ von allen π und allen ρ verschieden. Dann gibt es in g eine solche Zahl τ , daß

$$g \tau = f h, \quad h \text{ ein zu } f \text{ teilerfremdes Ideal in } g.$$

Da $f h > f^2$, folgt $g \tau > f > o$. Also muß jedes Produkt $\tau \varrho$, ϱ beliebige Zahl in g , in o vorkommen; speziell ist τ selbst eine Zahl in o . Weiter gibt es ein zu f primes Ideal λ in g , so daß

$$\lambda \sigma_1^{\gamma_1} \sigma_2^{\gamma_2} \cdots = g \omega, \quad \omega \text{ eine Zahl in } g.$$

Kraft der Beziehung $g \tau > o$, muß $\tau^m \omega \varrho$, ϱ beliebige Zahl in g , immer eine Zahl in o sein.

Es sei jetzt o' der gemeinsame Bestandteil der Ringe $o(\vartheta)$ und g ; dann ist augenscheinlich auch o' ein Ring. Nun ist

$$g \cdot \tau^m \omega \vartheta = h^m \lambda \rho \pi_1^{m \beta_1 - \alpha_1} \pi_2^{m \beta_2 - \alpha_2} \cdots \rho_1^{m \delta_1} \rho_2^{m \delta_2} \cdots.$$

¹ Wie früher bemerkt, betrachte ich hier nur solche Ringe, welche die ganzen rationalen Zahlen enthalten.

² Die Schreibweise $a > b$ bedeutet, daß der Modul a durch den Modul b teilbar ist.

Ich wähle m als eine solche ganze positive Zahl, daß alle Differenzen $m\beta_r - \alpha_r \geq 0$ sind. Dann ist $g\tau^m\omega\vartheta$ ein Hauptideal in g , dessen Zahlen nach dem soeben bemerkten alle in o' vorkommen müssen. Folglich ist $g\tau^m\omega\vartheta$ durch den Führer f' des Ringes o' teilbar. Dieser Führer muß von der Form

$$f' = \pi_1^{\beta_1'} \pi_2^{\beta_2'} \dots \varrho_1^{\delta_1'} \varrho_2^{\delta_2'} \dots$$

sein, wobei $\beta_r' \leq \beta_r$, $\delta_r' \leq \delta_r$, da o in o' enthalten ist.

Wird aber jetzt m so klein als möglich gewählt, wenn alle Differenzen $m\beta_r - \alpha_r \geq 0$ sein sollen, so muß für mindestens ein r die Differenz $m\beta_r - \alpha_r < \beta_r$ sein. Wäre nämlich für jedes r , $m\beta_r - \alpha_r \geq \beta_r$, so wäre auch für jedes r , $(m-1)\beta_r - \alpha_r \geq 0$, was der Voraussetzung über m zuwider ist. Da außerdem $g\tau^m\omega\vartheta$ durch f' teilbar ist, muß für mindestens ein r , $\beta_r' < \beta_r$ sein.

Nun kann man aber die Betrachtung wiederholen, indem man vom Ringe o' statt o ausgeht. Außerdem ist $o'(\vartheta) = o(\vartheta)$; denn man hat $o > o'$, woraus $o(\vartheta) > o'(\vartheta)$ und $o' > o(\vartheta)$, woraus $o'(\vartheta) > o(\vartheta)$. Setzt man also $o'(\vartheta) - g = o''$, während f'' der Führer von o'' ist, so ist $o'' = o'$ und $f'' = f'$. Dann bekommt man

$$f'' = f' = \pi_1^{\beta_1''} \pi_2^{\beta_2''} \dots \varrho_1^{\delta_1''} \dots,$$

wobei für jedes r , $\beta_r'' \leq \beta_r'$, und für mindestens ein r , $\beta_r'' < \beta_r'$. Dies führt zu einem Widerspruch, wenn nicht alle $\beta_r = 0$ sind. Man erhält also das Resultat, daß in f' die Primfaktoren π nicht vorkommen kann.

Hierdurch ist folgender Satz bewiesen:

Satz 26. *Durch Adjunktion einer Zahl ϑ , $\vartheta = \frac{\varrho}{\varkappa}$, zu einem in g enthaltenen Ringe o mit dem Führer f , erhält man immer denselben Ring, wie durch Adjunktion von ϑ zu einem eventuell umfassenderen auch in g enthaltenen Ringe o' , dessen Führer f' zu \varkappa prim ist.*

Kraft dieses Satzes braucht man also nur die Adjunktion solcher Zahlen ϑ , $g\vartheta = \frac{\varrho}{\varkappa}$, zu einem Ringe o mit dem Führer f zu betrachten, daß \varkappa zu f prim ist.

Es muß aber bemerkt werden, daß selbst bei solchen Adjunktionen oft der Ring $o(\vartheta) - g$ umfassender wird als o . Ich erwähne hier ein einfaches Beispiel: Es sei der quadratische Körper $K(\sqrt{-5})$ gegeben. Der Ring g der ganzen Zahlen dieses Körpers ist der Modul $(1, \sqrt{-5})$; der kleinere Ring o sei der Modul $(1, 3\sqrt{-5})$. Wird hier $\vartheta = \sqrt{-5}$ zu o adjungiert, entsteht g , d. h. $o(\vartheta) = g$, und also $o(\vartheta) - g = g$, umfassender als o . Trotzdem ist $g\vartheta$ als irreduzibler Idealbruch geschrieben $= \frac{g\sqrt{-5}}{g}$, wo sowohl Zähler wie Nenner zum Führer $f = 3$ des Ringes o prim sind.

— Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen beweise ich zuerst folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz: Ist $\sigma = \frac{\omega'}{\omega}$, ω und ω' Zahlen in o , $o\omega + f = o$, σ Zahl

in g , so ist σ Zahl in o .

Beweis: Es ist nämlich

$$o\sigma = (o\omega + f)\sigma = (o\omega + f)\frac{\omega'}{\omega} = o\omega' + f\sigma.$$

Außerdem

$$o\omega' > o, f\sigma > f > o.$$

Folglich

$$o\sigma > o,$$

woraus folgt, daß σ eine Zahl in o ist.

Es werde zu einem Ringe o eine Zahl ϑ adjungiert, $g\vartheta = \frac{g}{z}$, g und z teilerfremde Ideale in g , $z + f = g$. Dem Ideale z entspricht dann ein Ideal k in o . Weiter gibt es ein Ideal k' in o , so daß $kk' = o\omega$, ω eine Zahl in o , $o\omega + f = o$. Es sei z' das k' entsprechende Ideal in g . Dann ist $zz' = g\omega$, da nämlich $z = gk$, $z' = gk'$, $g = go$ ist. Weiter ist $g\vartheta = \frac{g}{zz'}$,

woraus $gz' = g(\vartheta\omega)$. Es werde $\vartheta\omega = \tau$ gesetzt; τ ist dann eine Zahl in g und $\vartheta = \frac{\tau}{\omega}$.

Erstens kann sein, daß τ nicht zu o gehört; dann ist also $g = o(\vartheta)$ umfassender als o . Zweitens kann sein, daß τ zu o gehört. Ist dann $o\tau + f = o$, so ist $\vartheta = \frac{\tau}{\omega}$ ein Idealbruch in o . (Also $o\vartheta = \frac{o\tau}{o\omega}$, wobei $o\tau$ und $o\omega$ beide Ideale in o sind.) Ist aber $o\tau + f \neq o$, so kann man die Adjunktion von ϑ durch die Adjunktion einer anderen Zahl ϑ' ersetzen, wobei ϑ' ein Idealbruch in o wird. Dies geschieht so: Man betrachtet die Kongruenz in g

$$\omega\xi \equiv 1 - \tau \pmod{f},$$

die in Bezug auf ξ in g sicher lösbar ist, da $g\omega + f = g$ sein muß. Da $1 - \tau$ eine Zahl in o ist und ebenso $\omega\xi - 1 + \tau$, weil die letztere ja in f vorkommt, das ganz in o enthalten ist, so ist $\omega\xi$ eine Zahl in o . Da ω auch zu o gehört und außerdem $o\omega + f = o$, so folgt aus dem Hilfssatz, daß ξ zu o gehört. Setzt man dann

$$\vartheta' = \xi + \vartheta,$$

so ist $o(\vartheta) = o(\vartheta')$, während $\vartheta' = \frac{\omega\xi + \tau}{\omega}$ ein Idealbruch in o ist; denn man hat $\omega\xi + \tau = 1 + \varphi$, φ eine Zahl in f , woraus

$$o(\omega \xi + \tau) + f = o \cdot (1 + q) + f = o,$$

da im Modul $o(1 + q) + f$ die Zahl 1 und also jede Zahl in o vorkommt.

Hierdurch ist folgender Satz bewiesen:

Satz 27. *Jeder Ring, der aus einem in g enthaltenen Ring durch Adjunktion einer Zahl entsteht, entsteht auch durch Adjunktion einer Zahl ϑ zu einem solchen Ring o , wobei ϑ als Idealbruch in o darstellbar ist.*

Kraft dieses Satzes kann man sich ohne Schaden darauf beschränken nur die Adjunktion solcher Zahlen zu einem Ringe $o (> g)$ zu betrachten, die als Idealbrüche in o darstellbar sind.

Satz 28. *Entsteht der Ring $o(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ aus einem in g enthaltenen Ring o durch Adjunktion der Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$, welche alle als Idealbrüche in o darstellbar sind, so ist $o(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots) - g = o$.*

Beweis: Jede Zahl τ des Ringes $o(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ läßt sich natürlich als ein irreduzibler Idealbruch $\frac{a}{b}$ schreiben. Es seien a' und b' die den Idealen a und b entsprechenden Ideale in g . Dann ist $a + b = o$ und folglich $a' + b' = g$. Außerdem ist $g\tau = \frac{a'}{b'}$. Ist $b = o$, so ist $b' = g$, und umgekehrt. Hieraus folgt, daß τ nur dann zu g gehört, wenn sie eine Zahl in o ist; d. h. es ist $o(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots) - g = o$.

Bekanntlich gelten nun für die Ideale eines Ringes o auch die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze. Infolgedessen ist ohne weiteres klar, daß die in § 2 und § 3 entwickelten Sätze auch dann gültig bleiben müssen, wenn das Zeichen g überall durch o ersetzt wird, d. h. wenn man statt g einen beliebigen in g enthaltenen Ring o zugrunde legt, wenn man bloß Zahlen ϑ adjungiert, die als Idealbrüche in o darstellbar sind.

Ich will ein paar Folgerungen hieraus besonders erwähnen:

Es muß immer möglich sein zu einem beliebigen Ring $o (> g)$ eine solche Zahl ϑ zu adjungieren, daß im Ringe $o(\vartheta)$ die Zahl der Idealklassen $\equiv 1$ wird, wobei zugleich $o(\vartheta) - g = o$ ist. Dann gelten also für die Zahlen in $o(\vartheta)$ die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze; außerdem ist jede Zahl in $o(\vartheta)$ (relativ zum Ringe $o(\vartheta)$) einer Zahl in o assoziiert.

Wenn der in g enthaltene Ring o beliebig gegeben ist, so gibt es nicht-abzählbar unendlich viele maximale \bar{o} unter denjenigen, welche keine gebrochene rationale Zahl enthalten und außerdem mit g eben nur die Zahlen in o gemein haben.

§ 5.

Einige Bemerkungen über die Ringe $I(\vartheta)$, $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ usw.

Bisher sind die betrachteten Ringe immer so gebildet gedacht worden, daß man alle Polynome gewisser Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ zusammengefaßt hat, dessen Koeffizienten zu einem Ring o , der ein n -gliedriger Modul war,

gehörten. Statt dessen kann man die Koeffizienten in einem Ringe wählen, der nicht n -gliedrig ist. Das einfachste ist dann die Koeffizienten ganz rational zu wählen. Unter einem Ringe $I(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ verstehe ich den Inbegriff aller Zahlen, die als Polynome von $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ mit ganzen rationalen Koeffizienten darstellbar sind. Ich betrachte dabei nur den Fall, da $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ primitive Zahlen des gegebenen Zahlkörpers sind. Ist ϑ eine primitive Zahl in einem Körper n^{ten} Grades, so ist schon der Ring $I(\vartheta)$ ein n -gliedriger Modul. Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ algebraisch ganze Zahlen, so ist der Ring $I(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ ein in g enthaltener Ring o .

Wir haben gesehen (Satz 9), daß $g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ immer in der Form $g(\vartheta)$ darstellbar ist, und, falls $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ Idealbrüche in einem in g enthaltenen Ring o sind, auch $o(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ immer in der Form $o(\vartheta)$ darstellbar (Seite 24); die Zahl der Größen ϑ endlich vorausgesetzt. Die Adjunktion endlich vieler Zahlen ϑ läßt sich also durch die Adjunktion einer einzigen Zahl ersetzen. Es kann dann in dieser Verbindung interessant sein zu bemerken, daß schon ein Ring $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ nicht allgemein in der Form $I(\vartheta)$ darstellbar ist.

Betrachtet man den einfachsten Fall, nämlich den absoluten Rationalitätsbereich, so ist freilich klar, daß $I(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ mit endlich vielen ϑ immer in der Form $I(\vartheta)$ darstellbar ist. Dies folgt in der Tat sofort aus Satz 9, weil hier $I(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots) = g(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ ist.

Betrachtet man einen quadratischen Körper, so ist leicht zu sehen, daß $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ immer in der Form $I(\vartheta)$ darstellbar ist, wenn ϑ_1 und ϑ_2 ganze Zahlen sind. Denn jeder Ring o , der in g enthalten ist, ist hier ein zweigliedriger Modul derart, daß eine Basis der Form $(1, \vartheta)$ existiert; also ist $o = I(\vartheta)$, ϑ auch eine ganze Zahl. Falls ϑ_1 und ϑ_2 aber nicht (beide) ganze Zahlen sind, ist der Ring $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ nicht mehr in g enthalten und ist überhaupt kein endlicher Modul mehr. Falls jedoch keine gebrochene rationale Zahl in $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ vorkommt, läßt sich noch in folgender Weise zeigen, daß ein solches ϑ gefunden werden kann, daß $I(\vartheta_1, \vartheta_2) = I(\vartheta)$ wird. Man setze

$$\vartheta_1 = \frac{a_1 + b_1 \sqrt{m}}{c_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{a_2 + b_2 \sqrt{m}}{c_2}, \quad \vartheta = \frac{u + v \sqrt{m}}{w}.$$

Hier sind dann $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ gegebene ganze rationale Zahlen, a_1, b_1, c_1 ohne gemeinsamen Teiler, ebenso a_2, b_2, c_2 , und $a_1^2 - m b_1^2$ durch c_1 und $a_2^2 - m b_2^2$ durch c_2 teilbar. Dann müssen b_1 und c_1 , ebenso b_2 und c_2 , teilerfremd sein; denn ein gemeinsamer Primfaktor von b_1 und c_1 müßte auch in a_1 aufgehen. Es seien f und f' die größten gemeinsamen Teiler der Zahlen b_1 und b_2 bzw. c_1 und c_2 , und ich setze

$$b_1 = b_1' f, \quad b_2 = b_2' f, \quad c_1 = c_1' f', \quad c_2 = c_2' f'.$$

Aus der Gleichung

$$b_2 c_1 \vartheta_1 - b_1 c_2 \vartheta_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

folgt, da keine gebrochene rationale Zahl im Ringe $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ vorhanden sein soll, daß der größte gemeinsame Teiler ff' der Zahlen $b_1 c_2$ und $b_2 c_1$ in $a_1 b_2 - a_2 b_1$ aufgehen muß. Infolgedessen sind die unbestimmten Gleichungen

$$a_1 = b_1' t + c_1 z_1, \quad a_2 = b_2' t + c_2 z_2$$

in ganzen rationalen Zahlen t , z_1 und z_2 lösbar. Setzt man

$$y_1 = b_1' c_2', \quad y_2 = b_2' c_1',$$

so werden y_1 und y_2 teilerfremd, und folglich ist die Gleichung

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 1$$

in ganzen rationalen x_1, x_2 lösbar. Endlich setze ich

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 = -x_0, \quad u = t f', \quad v = f f', \quad w = c_1 c_2.$$

Dann folgen zuerst die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \frac{u}{v} + c_1 z_1, & \frac{b_1}{c_1} &= y_1 \frac{v}{w}, \\ a_2 &= b_2 \frac{u}{v} + c_2 z_2, & \frac{b_2}{c_2} &= y_2 \frac{v}{w}, \end{aligned}$$

und also auch

$$\frac{a_1}{c_1} = y_1 \frac{u}{w} + z_1, \quad \frac{a_2}{c_2} = y_2 \frac{u}{w} + z_2.$$

Man sieht daraus, daß die Gleichungen

$$\vartheta_1 = y_1 \vartheta + z_1, \quad \vartheta_2 = y_2 \vartheta + z_2, \quad \vartheta = x_0 + x_1 \vartheta_1 + x_2 \vartheta_2$$

gleichzeitig bestehen; also ist $I(\vartheta_1, \vartheta_2) = I(\vartheta)$.

Aber auch in dem Falle, da gebrochene rationale Zahlen in $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ auftreten, wird man imstande sein ein ϑ der gewünschten Art zu finden. Macht man z. B. die Annahme, es seien in den Ausdrücken für ϑ_1 und ϑ_2 die Zählernormen $a_1^2 - m b_1^2$ und $a_2^2 - m b_2^2$ zu z_1 bzw. z_2 teilerfremd, so kann man in folgender Weise ein passendes ϑ finden:

In $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ kommen die Zahlen $\frac{a_1^2 - m b_1^2}{c_1}$ und $\frac{a_2^2 - m b_2^2}{c_2}$ vor.

Also gehört zum Ringe auch immer die Zahl $\frac{(a_1^2 - m b_1^2)x + c_1 y}{c_1}$ bei

beliebigen ganzen rationalen x und y . Wegen der gemachten Voraussetzung können x und y so gewählt werden, daß $(a_1^2 - m b_1^2)x + c_1 y = 1$

wird. Also kommen im Ringe die Zahlen $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}$ und also auch $\frac{1}{c_1 c_2} = \tau_1$,

vor. Weiter müssen folglich $\frac{b_1 \sqrt{m}}{c_1}$ und $\frac{b_2 \sqrt{m}}{c_2}$ Zahlen des Ringes sein. Es

sei f der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $b_1 c_2$ und $b_2 c_1$. Dann ent-

hält der Ring auch die Zahl $\frac{f \sqrt{m}}{c_1 c_2}$, und ich setze $f \sqrt{m} = \tau_2$. Man hat nun

$I(\vartheta_1, \vartheta_2) = I(\tau_1, \tau_2)$; denn es ist $\vartheta_1 = \tau_1 \cdot \left(a_1 c_2 + \tau_2 \cdot \frac{b_1 c_2}{f} \right)$, und ebenso

$\vartheta_2 = \tau_1 \cdot \left(a_2 c_1 + \tau_2 \cdot \frac{b_2 c_1}{f} \right)$. Ich setze jetzt

$$\vartheta = \frac{a + f \sqrt{m}}{c_1 c_2} = (a + \tau_2) \tau_1,$$

wobei a so bestimmt sein soll, daß $a^2 - m f^2$ zu $c_1 c_2$ teilerfremd ist.

Erstens ist dann $\tau_2 = c_1 c_2 \vartheta - a$; so daß τ_2 in $I(\vartheta)$ vorkommt. Weiter

folgt aus der Gleichung $c_1 c_2 \vartheta^2 - 2 a \vartheta = \frac{m f^2 - a^2}{c_1 c_2}$, daß in $I(\vartheta)$ jede

Zahl der Form $\frac{(m f^2 - a^2)x + c_1 c_2 y}{c_1 c_2}$, x und y ganz rational, vorkommen

muß, also speziell auch die Zahl $\frac{1}{c_1 c_2} = \tau_1$. Folglich ist $I(\vartheta_1, \vartheta_2) =$

$= I(\tau_1, \tau_2) = I(\vartheta)$.

Es ist aber sogar möglich zu beweisen, daß in einem beliebigen quadratischen Körper jeder Ring $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ in der Form $I(\vartheta)$ dargestellt werden kann.

Kommt im Ringe $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $\vartheta_1 = \frac{a_1 + b_1 \sqrt{m}}{c_1}$, $\vartheta_2 = \frac{a_2 + b_2 \sqrt{m}}{c_2}$, keine

gebrochene rationale Zahl vor, so ist dies schon bewiesen. Gibt es aber gebrochene rationale Zahlen darin, so kommen in deren Nennern gewisse

Primzahlen vor; diese seien p_1, \dots, p_n , indem sie in endlicher Anzahl vorhanden sind, da sie ja alle in $c_1 c_2$ aufgehen müssen. Ich setze $\pi = p_1 p_2 \dots p_n$,

Außerdem seien d_1 und d_2 die maximalen Teiler von c_1 bzw. c_2 , die zu π teilerfremd sind. Dann ist

$$I(\vartheta_1, \vartheta_2) = I\left(\frac{1}{\pi}, \tau_1, \tau_2\right),$$

wenn $\tau_1 = \frac{a_1 + b_1 \sqrt{m}}{d_1}$, $\tau_2 = \frac{a_2 + b_2 \sqrt{m}}{d_2}$; denn einerseits kommen $\frac{1}{\pi}$, τ_1 und τ_2 offenbar im Ringe $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ vor, und andererseits kommt im Ringe $I\left(\frac{1}{\pi}, \tau_1, \tau_2\right)$ jeder Bruch $\frac{A}{B}$ vor, worin B ein beliebiges Produkt von Potenzen der Primzahlen p ist, und deshalb auch ϑ_1 und ϑ_2 . Im Ringe $I(\tau_1, \tau_2)$ kann keine gebrochene rationale Zahl auftreten; denn sonst müßte mindestens ein Primfaktor von $d_1 d_2$ auch im Nenner einer gebrochenen Zahl in $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ vorkommen, während doch $d_1 d_2$ zu π teilerfremd ist. Nach dem oben bewiesenen läßt sich aber eine solche Zahl $\tau = \frac{a + b \sqrt{m}}{d}$ finden, daß

$$I(\tau_1, \tau_2) = I(\tau)$$

ist, und aus dem Beweise geht hervor, daß d zu π teilerfremd ist.

Wir können außerdem τ so gewählt denken, daß die ganze Zahl $h = \frac{a^2 - m b^2}{d}$ zu π teilerfremd wird. Denn ist $\pi = \pi_1 \pi_2$, π_1 Teiler von h , π_2 prim zu h , so setze man

$$a' = a + d \pi_2 a, \quad \tau' = \frac{a' + b \sqrt{m}}{d} = \tau + \pi_2 a,$$

so daß $h' = \frac{a'^2 - m b^2}{d} = h + 2a \pi_2 a + d \pi_2^2 a^2$, und bestimme die ganze Zahl a so, daß sowohl a wie $2a + d \pi_2 a$ zu π_1 teilerfremd werden; dies ist bekanntlich möglich, weil $d \pi_2$ zu π_1 prim ist. Dann wird h' prim zu π und $I(\tau) = I(\tau')$, so daß τ durch τ' ersetzt werden kann.

Ich setze deshalb voraus, daß schon h prim zu π ist. Dann setze ich

$$\vartheta = \frac{\tau}{\pi} = \frac{a + b \sqrt{m}}{\pi d},$$

woraus

$$\pi d \vartheta^2 - 2a \vartheta = -\frac{h}{\pi}.$$

Es gibt zwei ganze rationale Zahlen x und y , so daß $h x + \pi y = 1$ ist. Hieraus

$$x(2a \vartheta - \pi d \vartheta^2) + y = \frac{h x + \pi y}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Da außerdem $\tau = \pi \vartheta$ ist, folgt $I\left(\frac{1}{\pi}, \tau\right) = I(\vartheta)$ und also auch

$$I(\vartheta_1, \vartheta_2) = I(\vartheta).$$

Gehen wir aber zu den *kubischen* Körpern über, so läßt sich leicht nachweisen, daß nicht jeder Ring $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ in der Form $I(\vartheta)$ darstellbar ist, selbst dann nicht wenn ϑ_1 und ϑ_2 ganze Zahlen sind. Wir können

z. B. denjenigen kubischen Körper betrachten, der aus $\sqrt[3]{PQ^2}$ erzeugt wird, wobei P und Q natürliche, teilerfremde und quadratfreie Zahlen sind. Ist außerdem $PQ^2 \equiv \pm 2$ oder $\pm 4 \pmod{9}$, so bilden die 3 Zahlen $1, \sqrt[3]{PQ^2}, \sqrt[3]{P^2Q}$ eine Basis des Ringes \mathfrak{g} der ganzen Zahlen des Körpers¹.

Wir können die beiden Ringe $I(\sqrt[3]{PQ^2})$ und $I(\sqrt[3]{P^2Q})$ betrachten und untersuchen, ob eine Zahl ϑ derart existiert, daß $I(\sqrt[3]{PQ^2}, \sqrt[3]{P^2Q}) = \mathfrak{g} = I(\vartheta)$. Dann muß auch ϑ eine ganze Zahl sein. Da außerdem immer $I(\tau) = I(\tau + t)$ ist, wenn t ganz rational ist, genügt es

$$\vartheta = x \sqrt[3]{PQ^2} + y \sqrt[3]{P^2Q} \quad (x \text{ und } y \text{ ganz rational})$$

zu setzen. Nun müssen Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{PQ^2} &= a + \beta \vartheta + \gamma \vartheta^2, & \sqrt[3]{P^2Q} &= a' + \beta' \vartheta + \gamma' \vartheta^2 \\ &(a, \beta, \gamma, a', \beta', \gamma' \text{ ganz rational}). \end{aligned}$$

stattfinden. Durch Einsetzung des Ausdrucks für ϑ und $\vartheta^2 = Py^2 \sqrt[3]{PQ^2} - Qx^2 \sqrt[3]{P^2Q} + 2xyPQ$ bekommt man die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + 2PQxy\gamma &= 0, & a' + 2PQxy\gamma' &= 0, \\ \beta x + Py^2\gamma &= 1, & \beta' x + Py^2\gamma' &= 0, \\ \beta y + Qx^2\gamma &= 0, & \beta' y + Qx^2\gamma' &= 1. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung gibt

$$\begin{aligned} a &= \frac{2PQxy^2}{Qx^3 - Py^3}, & \beta &= \frac{Qx^2}{Qx^3 - Py^3}, & \gamma &= -\frac{y}{Qx^3 - Py^3}, \\ a' &= -\frac{2PQx^2y}{Qx^3 - Py^3}, & \beta' &= -\frac{Py^2}{Qx^3 - Py^3}, & \gamma' &= \frac{x}{Qx^3 - Py^3}. \end{aligned}$$

Es sei z der größte gemeinsame Teiler der Zahlen x und y , $x = x_1 z$, $y = y_1 z$. Dann muß z sowohl in x_1 wie y_1 aufgehen, d. h., da x_1 und y_1

¹ J. SOMMER, Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 261.

teilerfremd sind, $z = 1$. Also sind x und y teilerfremd. Da $Qx^3 - Py^3$ sowohl in x wie y aufgeht, so muß die Gleichung

$$Qx^3 - Py^3 = \pm 1$$

erfüllt sein. Man erkennt, daß die Lösbarkeit dieser Gleichung die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß eine solche Zahl ϑ gefunden werden kann, daß $g = I(\vartheta)$ ist.

Nun ist es aber leicht P und Q so zu wählen, daß diese Gleichung nicht lösbar wird; man braucht ja nur eine der Zahlen als kubischen Nichtrest nach der anderen Zahl als Modul zu wählen. Ein einfaches Beispiel ist $P = 11$, $Q = 13$. Denn es ist $11 \cdot 13^2 \equiv 2 \cdot 4^2 \equiv 5 \pmod{9}$ und $11^4 \equiv 2^4 \equiv 3 \pmod{13}$. Im Körper $K(\sqrt[3]{11 \cdot 13^2})$ gibt es also keine solche Zahl ϑ , daß der Ring der ganzen Zahlen überhaupt in der Form $I(\vartheta)$ darstellbar wäre.

Daß Ringe $I(\vartheta)$ vorhanden sind, welche sowohl $I(\vartheta_1)$ wie $I(\vartheta_2)$ enthalten, ist ganz trivial; im vorliegenden Falle $\vartheta_1 = \sqrt[3]{PQ^2}$, $\vartheta_2 = \sqrt[3]{P^2Q}$, braucht man nur $\vartheta = \sqrt[3]{\frac{P}{Q}}$ zu setzen.

Man kann aber fragen, ob vielleicht auch in jedem Falle Ringe $I(\vartheta)$ vorhanden sind, welche g enthalten, während sie keine gebrochenen rationalen Zahlen enthalten. Da die allgemeine Untersuchung weitläufig erscheint, begnüge ich mich hier damit zu zeigen, daß dies jedenfalls auch in dem Falle eintreten kann, da g selbst nicht in der Form $I(\vartheta)$ darstellbar ist.

Wenn P und Q die frühere Bedeutung haben, so kann es eintreten, daß die Gleichung

$$Qx^3 - Py^3 = 2$$

lösbar ist, während die Gleichung $Qx^3 - Py^3 = 1$ nicht lösbar ist. Z. B. verhält sich die Sache so, wenn $P = 11$, $Q = 13$. Ich setze P und Q ungerade voraus; dann müssen x und y auch ungerade sein. Setzt man dann, indem x und y der Gleichung $Qx^3 - Py^3 = 2$ genügen sollen,

$$\vartheta = \frac{x \sqrt[3]{PQ^2} + y \sqrt[3]{P^2Q}}{2},$$

so enthält der Ring $I(\vartheta)$ sowohl $\sqrt[3]{PQ^2}$ wie $\sqrt[3]{P^2Q}$. Denn es gelten die Gleichungen

$$2y\vartheta^2 - Qx^2\vartheta = \frac{(Py^3 - Qx^3)\sqrt[3]{PQ^2}}{2} = -\sqrt[3]{PQ^2}.$$

$$2x\vartheta^2 - Py^2\vartheta = \sqrt[3]{P^2Q}.$$

Außerdem kommt in $I(\vartheta)$ keine gebrochene rationale Zahl vor. Die Grundzahl des Körpers ist nämlich hier $-27 P^2 Q^2$, worin 2 nicht aufgeht.

Weiter ist die Norm der Zahl $x \sqrt[3]{P Q^2} + y \sqrt[3]{P^2 Q}$ gleich

$$P Q (x^3 Q + y^3 P);$$

also ist die Norm eine gerade Zahl. Kraft eines früheren Satzes (Satz 12') enthält also nicht $g(\vartheta)$, der hier $= I(\vartheta)$ ist, gebrochene rationale Zahlen.

Wenn man nun Körper höheren Grades in Betracht zieht, werden die Verhältnisse noch komplizierter und die Untersuchung weit schwieriger; *in jedem Falle stehen diese Fragen aber mit der Lösung gewisser unbestimmten Gleichungen in Zusammenhang.*

In einem Körper n^{ten} Grades läßt sich offenbar jeder in g enthaltene Ring in der Form $I(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$ schreiben. In welcher Ausdehnung die Zahl $n-1$ der erzeugenden ϑ durch eine kleinere ersetzt werden kann, ist wohl ziemlich schwer allgemein zu erledigen. Indessen gibt es gewiß umfassende Fälle, da eine kleinere Zahl erzeugender ϑ genügt. Ich erwähne hier ein Beispiel: Es sei G der Ring der ganzen Zahlen eines Körpers K , g der entsprechende Ring eines Körpers k , K Oberkörper relativ zu k , k vom Grade n_1 , K vom Grade $n_1 n_2$; weiter nehmen wir an, daß die ganzen Zahlen $1, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n_2-1}$ eine Relativbasis des Körpers K in bezug auf k bilden. Dann ist $G = g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n_2-1})$. Außerdem gibt es in k $n_1 - 1$ Zahlen $\vartheta'_1 \dots \vartheta'_{n_1-1}$, so daß $g = I(\vartheta_1, \dots, \vartheta'_{n_1-1})$. Folglich ist $G = I(\vartheta'_1, \dots, \vartheta'_{n_1-1}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n_2-1})$. Hier genügen, jedenfalls für G selbst, schon $n_1 + n_2 - 2$ erzeugende Zahlen ϑ . Dasselbe wird aber für jeden Ring O in K gelten, der eine Relativbasis vom Grade n_2 in bezug auf o hat, wobei o der gemeinsame Bestandteil des Ringes O und des Unterkörpers k ist.

Auch in anderen Beziehungen verhalten sich die Ringe $I(\vartheta)$ verwickelter als die Ringe $g(\vartheta)$ oder $o(\vartheta)$. Es seien z. B. in einem quadratischen Körper $\vartheta_1 = \frac{a_1 + b_1 \sqrt{m}}{c}$, $\vartheta_2 = \frac{a_2 + b_2 \sqrt{m}}{c}$, $a_1^2 - m b_1^2$ und $a_2^2 - m b_2^2$ zu c teilerfremd; ich setze dabei noch voraus, daß b_1 und b_2 zu c teilerfremd sind. Nach Satz 4 ist dann immer $g(\vartheta_1) = g(\vartheta_2)$. Damit aber $I(\vartheta_1) = I(\vartheta_2)$ sein soll, ist notwendig und hinreichend, daß $b_1 = \pm b_2$ ist. Erstens gehört nämlich $\frac{1}{c}$ sowohl zu $I(\vartheta_1)$ wie $I(\vartheta_2)$ (da $\frac{a_1^2 - m b_1^2}{c}$ und $\frac{a_2^2 - m b_2^2}{c}$ diesem Ringe bzw. gehören), und folglich ist $I(\vartheta_1) = I\left(\frac{b_1 \sqrt{m}}{c}\right)$, $I(\vartheta_2) = I\left(\frac{b_2 \sqrt{m}}{c}\right)$. Ist also $b_1 = \pm b_2$, so muß $I(\vartheta_1) = I(\vartheta_2)$ sein. Um-

gekehrt ist jede Zahl in $I(\vartheta_1)$ der Form $\frac{A + B\sqrt{m}}{c^n}$, wobei A und B Polynome in a_1, b_1, m und c sind; außerdem ist b_1 als Faktor in B enthalten, $B = B_1 b_1$. Soll nun $\vartheta_2 = \frac{A + B\sqrt{m}}{c^n}$ sein, so muß $b_2 = \frac{B_1 b_1}{c^{n-1}}$ sein, woraus, da b_1 und c teilerfremd sind, folgt, daß b_1 in b_2 aufgehen muß. Soll $\vartheta_1 =$ einer Zahl in $I(\vartheta_2)$ sein, folgt ebenso, daß b_2 in b_1 aufgehen muß. Also folgt $b_1 = \pm b_2$ aus der Annahme $I(\vartheta_1) = I(\vartheta_2)$.

Weiter will ich eine eindeutige Darstellungsweise der Zahlen eines Ringes $I(\vartheta)$ erwähnen. Wenn ϑ eine ganze algebraische Zahl ist, welche der irreduziblen Gleichung $f(\vartheta) = \vartheta^n + a_1 \vartheta^{n-1} + \dots + a_n = 0$ genügt, so kann bekanntlich jede Zahl des Ringes $I(\vartheta)$ in der Form $x_1 \vartheta^{n-1} + x_2 \vartheta^{n-2} + \dots + x_n$ mit ganzen rationalen x , und zwar nur auf eine Weise, geschrieben werden. Es liegt nahe eine entsprechende Darstellung der Zahlen des Ringes $I(\vartheta)$ auch in dem Falle zu suchen, da ϑ nicht ganz ist. Es ist sofort klar, daß auch dann jede Zahl des Ringes in der Form $r_1 \vartheta^{n-1} + \dots + r_n$ mit rationalen r eindeutig darstellbar ist; die Zahlen r sind aber dann gewöhnlich gebrochen, und außerdem gar nicht beliebige gebrochene rationale Zahlen. Ausdrücke dieser Art will ich im folgenden für den Spezialfall eines quadratischen Körpers näher betrachten. Es gibt aber, auch wenn ϑ gebrochen ist, eine eindeutige Darstellung der Zahlen in $I(\vartheta)$ als Polynome von ϑ mit ganzen rationalen Koeffizienten, die ich jetzt angeben will.

Hilfssatz: Befriedigt ϑ die irreduzible Gleichung

$$f(\vartheta) \equiv a_0 \vartheta^n + a_1 \vartheta^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

worin die a keinen gemeinsamen Teiler haben, und ist

$$F(\vartheta) \equiv c_0 \vartheta^m + c_1 \vartheta^{m-1} + \dots + c_m = 0,$$

so gelten, wenn man der formalen Einfachheit halber $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$ setzt, Gleichungen der Form

$$c_0 = a_0 u_1, c_1 = a_0 u_2 + a_1 u_1, c_2 = a_0 u_3 + a_1 u_2 + a_2 u_1, \dots, \dots,$$

worin alle u ganz und rational sind und alle $u_r = 0$, für welche $r > m - n + 1$ ist. Also gilt die Gleichung $F(\vartheta) = f(\vartheta) G(\vartheta)$,¹ wenn

$$G(\vartheta) = \sum_{r=1}^{m-n+1} u_r \vartheta^{m-n-r+1}.$$

¹ Die Hauptsache ist hier, daß $G(\vartheta)$ auch ganze Koeffizienten hat und nicht bloß rationale; denn das letztere ist ja sofort ersichtlich.

Beweis: Ist $m < n$, müssen alle $c = 0$ sein, und die Behauptung ist offenbar richtig. Es sei $m = n$ und $\frac{c_0'}{a_0'}$ der Bruch $\frac{c_0}{a_0}$ in irreduzibler Gestalt.

Dann bekommt man

$$\sum_{r=1}^n (a_r c_0' - c_r a_0') \vartheta^{n-r} = 0,$$

woraus für alle r von 0 bis n

$$a_r c_0' = c_r a_0',$$

so daß a_0' in a_r ($r = 0, 1, \dots, n$) aufgehen muß. Da aber die a keinen gemeinsamen Teiler haben, folgt $a_0' = 1$. Folglich $c_r = a_r c_0'$ ($r = 0, 1, \dots, n$). Die Behauptung ist also auch in diesem Falle richtig.

Es sei jetzt m beliebig und der Satz bewiesen für alle kleinere Werte von m . Hat $\frac{c_0'}{a_0'}$ die frühere Bedeutung, so folgt

$$\sum_{r=1}^m (c_r a_0' - a_r c_0') \vartheta^{m-r} = 0.$$

Nach der gemachten Annahme bestehen Gleichungen der Form

$$c_1 a_0' - a_1 c_0' = a_0 u_1, \quad c_2 a_0' - a_2 c_0' = a_0 u_2 + a_1 u_1, \quad \dots$$

Hieraus folgt, daß a_0' in allen a aufgehen muß, und also wie früher $a_0' = 1$. Hieraus wieder

$$c_0 = a_0 c_0', \quad c_1 = a_0 u_1 + a_1 c_0', \quad c_2 = a_0 u_2 + a_1 u_1 + a_2 c_0', \quad \dots$$

Der Satz ist hierdurch bewiesen.

Satz 29. *Es befriedige ϑ die irreduzible Gleichung*

$$f(\vartheta) \equiv a_0 \vartheta^n + a_1 \vartheta^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

worin die Koeffizienten a ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Es sei $a_0 > 0$. Dann ist, und zwar nur auf eine Weise, jede Zahl t des Ringes $I(\vartheta)$ in der Form

$$t = x_0 \vartheta^m + x_1 \vartheta^{m-1} + \dots + x_{m-n} \vartheta^n + x_{m-n+1} \vartheta^{n-1} + \dots + x_n$$

darstellbar, wobei die Koeffizienten x ganze rationale Zahlen sind und x_0, \dots, x_{m-n} alle ≥ 0 und $< a_0$.

Beweis: Erstens ist zu zeigen, daß jede Zahl t in $I(\vartheta)$ in der angegebenen Weise dargestellt werden kann. Eine solche Zahl t ist jedenfalls von der Form

$$y_0 \vartheta^m + y_1 \vartheta^{m-1} + \cdots + y_m,$$

die y alle ganz rational. Ist $m < n$ ist schon t der angegebenen Form. Ist dagegen $m \geq n$, kann man y_0 durch a_0 dividieren.

$$y_0 = a_0 z_0 + x_0, \quad 0 \leq x_0 < a_0,$$

und statt $a_0 z_0 \vartheta^m$ den Ausdruck $-z_0 (a_1 \vartheta^{m-1} + \cdots + a_n \vartheta^{m-n})$ einführen. Hierdurch erhält man

$$t = x_0 \vartheta^m + y_1' \vartheta^{m-1} + \cdots + y_m',$$

wo x_0 und alle y' ganz rational sind. Ist $m - 1 < n$, so ist dies eine Darstellung der verlangten Art. Ist aber noch $m - 1 \geq n$, so kann man y_1' durch a_0 dividieren usw. Nach einer endlichen Zahl solcher Schritte bekommt man zuletzt die verlangte Darstellung.

Zweitens ist zu zeigen, daß die Darstellung eindeutig ist. Angenommen, es sei eine Zahl t auf zwei Weisen ausgedrückt, so erhielt man eine Gleichung der Form

$$d_0 \vartheta^m + \cdots + d_m = b_0 \vartheta^m + \cdots + b_m, \quad d_0 > b_0,$$

und daraus

$$c_0 \vartheta^m + c_1 \vartheta^{m-1} + \cdots + c_m = 0,$$

wenn $d_r - b_r = c_r$ ($r = 0, 1, \dots, m$) gesetzt wird. Außerdem wäre $0 < c_0$ und, wenn $m \geq n$, auch $c_0 < a_0$. Nach dem Hilfssatze kann aber eine solche Gleichung nicht bestehen.

Man kann natürlich versuchen ähnliche Ausdrücke der Zahlen der mehrfach erzeugten Ringe $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$, $I(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ usw. zu finden, worauf ich aber hier nicht näher eingehen will.

Zuletzt betrachte ich eine andere Darstellungsweise der Zahlen eines Ringes $I(\vartheta)$ in einem quadratischen Körper. Es sei m eine quadratfreie ganze rationale Zahl, a, b, c ganze rationale Zahlen, a und b m zu c teilerfremd und

$$\vartheta = \frac{a + b \sqrt{m}}{c}; \quad c \vartheta^2 - 2a \vartheta + \frac{a^2 - m b^2}{c} = 0.$$

Ich setze $a^2 - m b^2$ durch c teilbar und c ungerade voraus; nach Satz 12' nebst Anmerkung enthält dann $I(\vartheta)$ keine gebrochene rationale Zahl, was

übrigens bald in anderer Art bewiesen werden soll. Ich setze $\frac{a^2 - mb^2}{c} = h$; h und c können teilerfremd vorausgesetzt werden, obwohl dies für das folgende nicht nötig ist.

Haben nämlich h und c einen gemeinsamen Teiler, so kann man statt ϑ eine andere Zahl $\vartheta' = \frac{a' + b' \sqrt{m}}{c}$ einführen, während $I(\vartheta) = I(\vartheta')$ ist, und h' zu c teilerfremd, $h' = \frac{a'^2 - mb'^2}{c}$. Dies kann z. B. so geschehen: Es sei c_1 das Produkt aller Primzahl-faktoren in c , die nicht in h vorkommen, so daß also c_1 und h teilerfremd sind, während jede Primzahl, welche in c aufgeht, entweder in c_1 oder h aufgehen muß. Dann setze man

$$a' = a + c c_1, \quad b' = b, \quad \vartheta' = \frac{a' + b' \sqrt{m}}{c} = \vartheta + c_1.$$

Folglich $I(\vartheta) = I(\vartheta')$. Weiter

$$h' = h + 2 a c_1 + c c_1^2,$$

woraus sofort ersichtlich ist, daß h' und c teilerfremd sein müssen.

Satz 30. Für jeden Wert von n und beliebige ganze rationale x gilt die Gleichung

$$x_n \vartheta^n + \dots + x_1 \vartheta = \left(\frac{a_n}{c^{n-1}} x_n + \dots + a_1 x_1 \right) \vartheta - \frac{h}{c} \left(\frac{a_{n-1}}{c^{n-2}} x_n + \dots + a_1 x_2 \right),$$

wenn die Zahlen a durch die rekurrente Gleichung

$$a_n = 2 a \cdot a_{n-1} - h c \cdot a_{n-2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

definiert sind.

Beweis: Für $n = 2$ erhält man

$$x_2 \vartheta^2 + x_1 \vartheta = x_2 \left(\frac{2a}{c} \vartheta - \frac{h}{c} \right) + x_1 \vartheta = \left(\frac{2a}{c} x_2 + x_1 \right) \vartheta - \frac{h}{c} x_2.$$

Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Formel für n bekommt man für $n + 1$

$$\begin{aligned} x_{n+1} \vartheta^{n+1} + \dots + x_1 \vartheta &= \left(\frac{a_n}{c^{n-1}} x_{n+1} + \dots + a_1 x_2 \right) \vartheta^2 - \frac{h}{c} \left(\frac{a_{n-1}}{c^{n-2}} x_{n+1} + \dots + a_1 x_3 \right) \vartheta + x_1 \vartheta = \\ &= \left(\frac{a_n}{c^{n-1}} x_{n+1} + \dots + a_1 x_2 \right) \left(\frac{2a}{c} \vartheta - \frac{h}{c} \right) - \frac{h}{c} \left(\frac{a_{n-1}}{c^{n-1}} x_{n+1} + \dots + a_1 x_3 \right) \vartheta + x_1 \vartheta = \\ &= \left(\frac{2a \cdot a_n - h c \cdot a_{n-1}}{c^n} \cdot x_{n+1} + \frac{2a \cdot a_{n-1} - h c \cdot a_{n-2}}{c^{n-1}} x_n + \dots + \frac{2a \cdot a_1}{c} x_2 + x_1 \right) \vartheta - \\ &\quad - \frac{h}{c} \left(\frac{a_n}{c^{n-1}} x_{n+1} + \dots + a_1 x_2 \right) = \\ &= \left(\frac{a_{n-1}}{c^n} x_{n-1} + \frac{a_n}{c^{n-1}} x_n + \dots + \frac{a_2}{c} x_2 + a_1 x_1 \right) \vartheta - \frac{h}{c} \left(\frac{a_n}{c^{n-1}} x_{n+1} + \dots + a_1 x_2 \right). \end{aligned}$$

Der Satz ist hierdurch bewiesen.

Hilfssatz: Werden die Zahlen h_1, h_2, h_3, \dots so bestimmt, daß $h_1 = 0$ und für jedes $n > 1$

$$c h_n h_{n-1} + 2a h_n + h \equiv 0 \pmod{c^{n-1}},$$

so gelten die Kongruenzen

$$c h_n^2 + 2a h_n + h \equiv 0 \pmod{c^{n-1}}, \quad h_n \equiv h_{n-1} \pmod{c^{n-2}}.$$

Beweis: Die Kongruenzen sind augenscheinlich richtig für $n = 1$ bzw. $n = 2$. Ich setze die Gültigkeit der Kongruenz $h_n \equiv h_{n-1} \pmod{c^{n-2}}$ für ein gewisses n voraus. Dann ist $c h_n \equiv c h_{n-1}$ (und c^{n-1}) und folglich

$$c h_n^2 + 2a h_n + h \equiv c h_n h_{n-1} + 2a h_n + h \equiv 0 \pmod{c^{n-1}}$$

Aus der Kongruenz $c h_n^2 + 2a h_n + h \equiv 0 \pmod{c^{n-1}}$ in Verbindung mit $c h_{n+1} h_n + 2a h_{n+1} + h \equiv 0 \pmod{c^n}$ folgt

$$(h_{n+1} - h_n)(c h_n + 2a) \equiv 0 \pmod{c^{n-1}},$$

woraus, da $c h_n + 2a$ zu c teilerfremd ist,

$$h_{n+1} \equiv h_n \pmod{c^{n-1}}.$$

Hierdurch ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 31. *Es gibt solche ganze rationale Zahlen $b_n^{(n)}, b_{n-1}^{(n)}, \dots$, welche von x_n, x_{n-1}, \dots unabhängig sind, daß*

$$\frac{h}{c} \left(\frac{a_{n-1}}{c^{n-2}} x_n + \dots + a_1 x_2 \right) = h_n \left(\frac{a_n}{c^{n-1}} x_n + \dots + a_1 x_2 \right) + b_n^{(n)} x_n + \dots + b_1^{(n)} x_1,$$

wenn die Zahlen h wie im Hilfssatze angegeben bestimmt werden.

Beweis: Die Richtigkeit für $n = 1$ ist ganz trivial. Für $n = 2$ ist $h_2 \equiv -\frac{h}{2a} \pmod{c}$ und folglich

$$h_2 \left(\frac{a_2}{c} x_2 + a_1 x_1 \right) + \frac{h}{c} a_1 x_2 = h_2 \left(\frac{2a}{c} x_2 + x_1 \right) + \frac{h}{c} x_2 = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Ich setze die Richtigkeit für n voraus. Da nach dem Hilfssatze $h_n \equiv h_{n-1} \pmod{c^{n-1}}$ ist, braucht offenbar nur gezeigt zu werden, daß $\frac{h}{c} \frac{a_n}{c^{n-1}} + h_{n+1} \frac{a_{n+2}}{c^n}$ eine ganze Zahl ist, d. h. daß

$$h_{n+1} a_{n+1} + h a_n \equiv 0 \pmod{c^n}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} h_{n+1} a_{n+1} + h a_n &= (2a a_n - h c a_{n-1}) h_{n+1} + h a_n = \\ &= (2a h_{n+1} + h) a_n - h c h_{n+1} \cdot a_{n-1}, \end{aligned}$$

und dies ist mod. c^n kongruent

$$- h c h_{n+1} a_{n-1} - c h_{n+1}^2 a_n.$$

Da der gemachten Annahme zufolge $h a_{n-1} + h_n a_n \equiv 0 \pmod{c^{n-1}}$ und außerdem $h_{n+1} \equiv h_n \pmod{c^{n-1}}$, folgt

$$c h a_{n-1} + c h_{n+1} a_n \equiv 0 \pmod{c^n},$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Schreibt man die Zahlen des Bereiches $I(\vartheta)$ in der Form

$$A + B \vartheta, \quad A \text{ und } B \text{ rationale Zahlen,}$$

so kann also nicht B ganz sein, ohne daß A auch ganz wird. Hieraus folgt speziell wieder, daß in $I(\vartheta)$ keine anderen rationalen Zahlen vorkommen als ganze rationale.



Gedruckt 4. Juli 1924.

DIE DEDEKINDSCHEN SÄTZE
ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN
IDEALEN UND DEN HÖHEREN KONGRUENZEN

VON
ØYSTEIN ORE

(VIDENSKAPSSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. No. 22)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 5. oktober 1923 ved prof. Stormer.

Es sei ϑ eine Wurzel der irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

wo alle Koeffizienten a_i ganze rationale Zahlen sind, und es sei weiter $P(\vartheta)$ der aus ϑ abgeleitete algebraische Körper n^{ten} Grades. Wenn nun p eine rationale Primzahl bedeutet, hat man nach DEDEKIND¹ die folgenden wichtigen Sätze:

Wenn p kein Teiler des Index von ϑ , und

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \varphi_2(x)^{e_2} \cdots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{p}$$

die Zerlegung von $f(x)$ in Primfunktionen \pmod{p} ist, so hat man

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s},$$

wo das Primideal \mathfrak{p}_i vom Grade m_i , wo m_i den Grad von $\varphi_i(x)$ bedeutet, und weiter \mathfrak{p}_i durch

$$\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta))$$

bestimmt ist.

Die Frage, wann p ein Indexteiler sein kann, wird dann durch den folgenden Satz² entschieden.

Es sei

$$f(x) = \varphi_1(x)^{e_1} \cdots \varphi_s(x)^{e_s} + p M(x)$$

und es seien $e_\alpha, e_\beta, \cdots$ diejenigen der Exponenten, welche größer als 1 sind. Die Primzahl p ist dann und nur dann ein Indexteiler, wenn $M(x) \pmod{p}$ durch eine oder mehrere der Primfunktionen $\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x) \cdots$ teilbar ist.

¹ DEDEKIND: „Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der höheren Kongruenzen“. Göttinger Abhandlungen 1878. S. 15.

² DEDEKIND: Loc. cit., § 3.

Wegen der Wichtigkeit dieser Sätze mag es von Interesse sein, hier eine neue Herleitung derselben zu geben, besonders weil diese mir einfacher als die Dedekind'sche scheint und weil aus der Beweismethode auch einige andere wichtige Sätze über algebraischen Zahlen abgeleitet werden können.

§ 1.

Erstens sollen keine Voraussetzungen über die Art der Primzahl p gemacht werden, und die folgenden Untersuchungen bleiben daher auch richtig, wenn p ein Indexteiler von ϑ ist.

Es sei allgemein

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \varphi_2(x)^{e_2} \cdots \varphi_s(x)^{e_s} \pmod{p}, \quad (1)$$

wo der Grad von $\varphi_i(x)$ gleich m_i ist, also

$$\sum_{i=1}^s e_i m_i = n. \quad (2)$$

Man kann nun in diesem allgemeinen Falle verschiedene Hilfsätze über die Primidealteiler von p aufstellen. Nach (1) ist

$$\varphi_1(\vartheta)^{e_1} \varphi_2(\vartheta)^{e_2} \cdots \varphi_s(\vartheta)^{e_s} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (3)$$

und hier können zwei Zahlen $\varphi_i(\vartheta)$ und $\varphi_j(\vartheta)$ keinen gemeinsamen Idealteiler haben, der auch in p aufgeht. Denn man kann immer solche Polynome¹ $A(x)$ und $B(x)$ bestimmen, daß

$$A(x) \cdot \varphi_i(x) + B(x) \cdot \varphi_j(x) \equiv 1 \pmod{p},$$

und für $x = \vartheta$ sieht man dann leicht die Richtigkeit der Behauptung ein. Es ist also bewiesen:

Hilfssatz 1. *Man hat für p die Zerlegung*

$$p = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_s,$$

wo

$$\mathfrak{a}_i = (p, \varphi_i(\vartheta)^{e_i}),$$

und diese Ideale \mathfrak{a}_i sind alle zu einander relativ prim.

Weiter soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

¹ Unter Polynom soll hier sowie im Folgenden immer eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalzahligen Koeffizienten verstanden werden.

Hilfssatz 2. Ist \mathfrak{p} ein Primideal, das in $\mathfrak{a} = (\rho, \varphi(\vartheta)^e)$ aufgeht, so ist der Grad f von \mathfrak{p} durch den Grad m von $\varphi(x)$ teilbar.

Alle ganze Zahlen θ des Körpers genügen nämlich der Kongruenz

$$\theta^{p^f} - \theta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad (4)$$

und weiter ist das Polynom

$$x^{p^f} - x \pmod{\rho}$$

kongruent dem Produkt aller Primfunktionen $F(x) \pmod{\rho}$, deren Grade Teiler von f sind. Da nun nach (4)

$$\vartheta^{p^f} - \vartheta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

gibt es also eine solche Primfunktion $F(x)$, daß

$$F(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (5)$$

Dann ist aber

$$F(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

denn wäre dies nicht der Fall, könnte man, da $F(x)$ und $\varphi(x)$ verschiedene Primfunktionen sind, die Polynome $A(x)$ und $B(x)$ so bestimmen, daß

$$A(x) \cdot F(x) + B(x) \cdot \varphi(x) \equiv 1 \pmod{\rho},$$

und folglich

$$A(\vartheta) F(\vartheta) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

wäre, was nach (5) unmöglich ist. Aus (6) folgt aber dann, daß auch der Grad m von $\varphi(x)$ ein Teiler von f ist, *w. z. b. w.*

Ich gehe jetzt zu einer wichtigen Aufgabe über, nämlich nachzuweisen, daß keines der Ideale \mathfrak{a}_i das Einheitsideal sein kann. Dabei brauche ich den leicht zu beweisenden Satz¹:

Hilfssatz 3. Es sei ω eine ganze Zahl des Körpers, welche der Gleichung

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

genügt. Dann wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ω durch alle verschiedenen Primidealteiler von p teilbar ist, durch

$$b_1 \equiv b_2 \equiv \dots \equiv b_n \equiv 0 \pmod{p}.$$

ausgedrückt.

¹ Den Beweis dieses Satzes habe ich ausführlich in meiner Arbeit: „Zur Theorie der algebraischen Zahlkörper“, Acta Mathematica 44, gegeben und halte es darum für überflüssig, den einfachen Beweis hier zu wiederholen.

Es sei nun $P(x)$ ein beliebiges Polynom, und es soll untersucht werden, unter welcher Bedingung $P(\vartheta)$ durch alle verschiedenen Primidealteiler von \mathfrak{p} teilbar ist. Dies folgt nun leicht aus dem Hilfssatze 3. Genügt nämlich $P(\vartheta)$ der Gleichung

$$P(\vartheta)^n + c_1 P(\vartheta)^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \quad (7)$$

so müssen nach dem Hilfssatze 3 alle Koeffizienten c_i durch \mathfrak{p} teilbar sein. Die Gleichung (7) besagt nun, daß eine Identität

$$P(x)^n + c_1 P(x)^{n-1} + \cdots + c_n = f(x) g(x)$$

besteht, wo $g(x)$ ein Polynom sein muß. Daraus folgt aber

$$P(x)^n \equiv g(x) \cdot h(x) \pmod{\mathfrak{p}},$$

und wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung $\pmod{\mathfrak{p}}$, daß $P(x)$ durch alle verschiedenen Primfunktionen $\pmod{\mathfrak{p}}$ von $f(x)$ teilbar sein muß, also

$$P(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}, \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cdots \varphi_s(x)}.$$

Daraus folgt z. B. der Satz:

Hilfssatz 4. Die ganze Zahl $P(\vartheta)$ kann nur dann durch die Primzahl \mathfrak{p} teilbar sein, ohne daß alle Koeffizienten in $P(x)$ durch \mathfrak{p} teilbar sind, wenn

$$P(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}, \varphi_1(x) \cdots \varphi_s(x)}.$$

Man zeigt nun leicht, daß keines der Ideale \mathfrak{a}_i das Einheitsideal sein kann. Wäre nämlich dies z. B. mit dem Ideale \mathfrak{a}_i der Fall, so würde schon die Zahl

$$\varphi_2(\vartheta) \varphi_3(\vartheta) \cdots \varphi_s(\vartheta)$$

durch alle Primideale von \mathfrak{p} teilbar sein, was doch nach dem eben Bewiesenen nicht möglich sein kann.

Es gibt also immer mindestens ein Primideal \mathfrak{p}_i , das in \mathfrak{a}_i aufgeht. Wenn eine Zahl $P(\vartheta)$ durch \mathfrak{p}_j teilbar sein soll, muß man

$$P(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}, \varphi_i(x)}$$

haben. Denn sonst könnte man die Polynome $A(x)$ und $B(x)$ derart bestimmen, daß

$$P(x) \cdot A(x) + \varphi_i(x) B(x) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

und folglich

$$P(\vartheta) A(\vartheta) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i},$$

was nicht möglich ist.

§ 2.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen gehe ich jetzt zu dem Dedekind'schen Falle über und setze

$$f(x) = \varphi_1(x)^{e_1} \cdots \varphi_s(x)^{e_s} + p \cdot M(x), \quad (8)$$

wo $M(x) \pmod{p}$ nicht durch $\varphi_i(x)$ teilbar ist, wenn $e_i > 1$.

Es gibt nun immer nach § 1 mindestens ein Primideal \mathfrak{p}_i , das in $(p, \varphi_i(\vartheta))$ aufgeht. Ich werde jetzt zeigen, daß es unter diesen Voraussetzungen über $f(x)$ nur ein Primideal \mathfrak{p}_i für jedes i gibt, bezeichne aber vorläufig mit \mathfrak{p}_i ein beliebig herausgewähltes aus den Primidealteilern von $(p, \varphi_i(\vartheta))$. Es wird weiter angenommen, daß p genau durch \mathfrak{p}_i in der Potenz α_i und $\varphi_i(\vartheta)$ genau durch \mathfrak{p}_i in der Potenz β_i teilbar ist.

Wenn nun erstens $e_i > 1$ ist, so wird die Zahl $p \cdot M(\vartheta)$ genau durch $\mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$ teilbar, und folglich muß man

$$\alpha_i = e_i \beta_i \quad e_i > 1 \quad (9)$$

haben. Wenn dagegen $e_i = 1$ ist, besteht diese Gleichung (9) nicht mehr, aber man kann doch für alle i

$$\alpha_i = e_i \cdot \gamma_i \quad (10)$$

setzen, wo $\gamma_i \geq 1$ eine ganze rationale Zahl bezeichnet.

Weiter kann man, wenn f_i den Grad von \mathfrak{p}_i bedeutet, nach dem Hilfssatze 2

$$f_i = m_i \cdot \delta_i$$

setzen, wo auch $\delta_i \geq 1$ eine ganze rationale Zahl bezeichnet.

Das Ideal $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ wird nun nach (10) sicher ein Teiler von p , und daher ist auch das Ideal

$$p' = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s}$$

ein Teiler von p . Hier ist aber

$$N p' = p \sum_{i=1}^s f_i e_i,$$

und da $f_i \geq m_i$ ist, wird nach (2)

$$\sum_{i=1}^s f_i e_i \geq \sum_{i=1}^s m_i e_i = n,$$

und daraus folgt natürlich, weil p' ein Teiler von p ist,

$$N p' = p^n.$$

Man hat also

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s}. \quad (11)$$

Weiter kann man nur

$$\sum_{i=1}^s f_i e_i = n$$

haben, wenn $m_i = f_i$ und also $N \mathfrak{p}_i = p^{m_i}$. Aus diesen Schlüssen folgt also auch, daß es nur ein Primideal \mathfrak{p}_i für jedes i gibt, das in $(p, \varphi_i(\vartheta))$ aufgeht. Wenn daher $e_i = 1$, kann man nach (11) $\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta))$ setzen. Wenn $e_i > 1$ ist, wird nach (9) $\beta_i = 1$, und man hat auch in diesem Falle $\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta))$, wodurch die Zerlegung von p vollständig bestimmt ist.

§ 3.

Es bleibt jetzt nur übrig, das Kriterium über Indexteiler herzuleiten. Die Primzahl p ist bekanntlich dann und nur dann ein Teiler des Index, wenn es eine ganze Zahl

$$P(\vartheta) = b_0 + b_1 \vartheta + \cdots + b_{n-1} \vartheta^{n-1}$$

gibt, welche durch p teilbar ist, ohne daß alle Koeffizienten b_i durch p teilbar sind. Wenn aber ein Polynom $P(\vartheta)$ durch p teilbar sein soll, braucht man nach § 1 nur zu untersuchen, wann ein Produkt

$$\varphi_1(\vartheta)^{\alpha_1} \varphi_2(\vartheta)^{\alpha_2} \cdots \varphi_s(\vartheta)^{\alpha_s} \quad (12)$$

durch p teilbar ist, indem ein jedes Polynom in ϑ , das durch p teilbar ist, einem solchen Produkt multipliziert mit einer zu p relativ primen Zahl $\Phi(\vartheta)$, kongruent sein muß.

Wenn aber $f(x)$ die Bedingungen des § 2 erfüllt, kann (12) nicht durch p teilbar sein, außer wenn

$$a_i \geq e_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s). \quad (13)$$

Für eine Primfunktion, wofür $e_i = 1$ ist, wird dies nach Hilfssatz 4 selbstverständlich. Wenn aber $e_i > 1$ ist, hat man nach (9) $\beta_i = 1$, $\varphi_i(\vartheta)$

daher genau durch \mathfrak{p}_i in der ersten Potenz teilbar. Wenn also (12) durch $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ teilbar sein soll, muß die Bedingung (13) erfüllt sein. Ein Polynom $P(\vartheta)$ kann daher nicht durch \mathfrak{p} teilbar sein, außer wenn

$$P(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}, f(x)},$$

und dies zeigt, daß \mathfrak{p} kein Indexteiler ist.

Wenn aber $M(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ durch die Primfunktion $q_i(x)$ teilbar ist und $e_i > 1$, so kann man einfach zeigen, daß die Zahl

$$q_1(\vartheta)^{e_1} \cdots q_{i-1}(\vartheta)^{e_{i-1}} q_i(\vartheta)^{e_i-1} q_{i+1}(\vartheta)^{e_{i+1}} \cdots q_s(\vartheta)^{e_s} \quad (14)$$

durch \mathfrak{p} teilbar ist, und \mathfrak{p} also in diesem Falle ein Indexteiler sein muß.

Dieser Beweis ist schon von DEDEKIND¹ geliefert worden, läßt sich aber nach den früheren Bemerkungen folgendermaßen einfach führen: Die Zahl (14) ist nach (3) durch alle Primidealpotenzteiler von \mathfrak{p} teilbar, welche zu $q_i(\vartheta)$ relativ prim sind. Man braucht daher nur zu zeigen, daß, wenn \mathfrak{p}_i ein Primideal ist, das in $(\mathfrak{p}, q_i(\vartheta))$ aufgeht, \mathfrak{p}_i in (14) mindestens in derselben Potenz wie in \mathfrak{p} aufgeht, also mit den früheren Bezeichnungen $(e_i - 1)\beta_i \geq \alpha_i$. Nimmt man an, daß $M(\vartheta)$ genau durch $\mathfrak{p}_i^{m_i}$ teilbar ist, so folgt aus

$$q_1(\vartheta)^{e_1} \cdots q_s(\vartheta)^{e_s} + \mathfrak{p} \cdot M(\vartheta) = 0,$$

daß $e_i\beta_i = \alpha_i + m_i$, und man hat also nur $m_i \geq \beta_i$ zu beweisen. Wenn hier erstens $\alpha_i \leq \beta_i$ ist, hat man

$$m_i - \beta_i = (e_i - 1)\beta_i - \alpha_i \geq \beta_i - \alpha_i \geq 0,$$

wodurch dieser Fall erledigt ist. Wenn dagegen $\alpha_i > \beta_i$, hat man der Annahme nach

$$M(x) \equiv q_i(x) \cdot M(x) \pmod{\mathfrak{p}},$$

und für $x = \vartheta$ folgt daraus $m_i \geq \beta_i$ wie gewünscht.

§ 4.

Die hier angegebene Beweismethode hat weiter den Vorteil, daß man auch unter allgemeineren Voraussetzungen, d. h. auch in gewissen Fällen, wo \mathfrak{p} ein Indexteiler ist, die Primidealzerlegung von \mathfrak{p} bestimmen kann.

Es sei nämlich jetzt $f(x)$ von der Form

$$f(x) = q_1(x)^{e_1} \cdots q_s(x)^{e_s} + \mathfrak{p}^a M(x), \quad a > 1, \quad (15)$$

¹ DEDEKIND: Loc. cit. p. 17-19.

und es wird also \mathfrak{p} in diesem Falle ein Indexteiler. Ich setze jetzt voraus, daß a zu allen Zahlen e_i relativ prim ist, und $M(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ nicht durch $\varphi_i(x)$ teilbar, wenn $e_i > 1$.

Es sei \mathfrak{p}_i ein Primideal, das in $(\mathfrak{p}, \varphi_i(\vartheta))$ aufgeht; aus § 1 folgt, daß es immer mindestens ein \mathfrak{p}_i gibt, und ich werde jetzt zeigen, daß es nur ein \mathfrak{p}_i für jedes i gibt. Man hat dann nach dem Hilfssatze 2 für den Grad f_i von \mathfrak{p}_i , $f_i = m_i \delta_i$.

Wenn weiter α_i und β_i dieselbe Bedeutung wie früher haben, so folgt aus (15)

$$\varphi_1(\vartheta)^{e_1} \cdots \varphi_s(\vartheta)^{e_s} + \mathfrak{p}^\alpha M(\vartheta) = 0,$$

und daher, wenn $e_i > 1$,

$$a \cdot \alpha_i = e_i \beta_i.$$

Da nun a zu e_i relativ prim ist, hat man

$$\beta_i = e_i \gamma_i,$$

wo γ_i eine ganze Zahl ist. Für $e_i = 1$ gilt natürlich auch eine solche Relation.

Daraus folgt wie früher, daß das Ideal

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s}$$

sicher ein Teiler von \mathfrak{p} ist. Da aber

$$N \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^{\sum_{i=1}^s e_i f_i},$$

und

$$\sum_{i=1}^s e_i f_i = \sum_{i=1}^s e_i m_i \delta_i \geq \sum_{i=1}^s e_i m_i = n,$$

muß $N \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^n = N \mathfrak{p}$ sein, und daher $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, also

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s},$$

wodurch die Primidealzerlegung von \mathfrak{p} bestimmt ist.

Da weiter die Gleichung

$$\sum e_i m_i \delta_i = n$$

nur dann bestehen kann, wenn alle δ_i gleich 1 sind, hat man $N \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}^{m_i}$.

Aus der Primidealzerlegung von \mathfrak{p} folgt, daß es für alle i nur ein \mathfrak{p}_i gibt, und folglich ist das Ideal $(\mathfrak{p}, \varphi_i(\vartheta))$ eine Potenz von \mathfrak{p}_i .

Es bleibt jetzt nur übrig, \mathfrak{p}_i selbst als größten gemeinsamen Faktor von Hauptidealen zu bestimmen. p ist genau durch $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ teilbar, also $a_i = e_i$, und wenn daher $e_i = 1$ ist, kann man einfach $\mathfrak{p}_i = (p, \varphi_i(\vartheta))$ setzen.

Wenn aber $e_i > 1$ ist, hat man $\beta_i = \alpha$, also $\varphi_i(\vartheta)$ genau durch \mathfrak{p}_i^{α} teilbar. Man kann nun zwei positive, ganze rationale Zahlen x_i und y_i so bestimmen, daß

$$x_i \alpha - y_i e_i = 1.$$

Setzt man nun

$$\pi_i(\vartheta) = \varphi_i(\vartheta)^{e_1} \cdots \varphi_{i-1}(\vartheta)^{e_{i-1}} \varphi_{i+1}(\vartheta)^{e_{i+1}} \cdots \varphi_s(\vartheta)^{e_s},$$

so ist die Zahl

$$\pi_i(\vartheta)^{y_i} \cdot \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}}$$

ganz und durch \mathfrak{p}_i genau in der ersten Potenz teilbar. Denn wenn \mathfrak{p}_j ein Primidealteiler von p ist, $j \neq i$, so geht dieser nach (3) sicher mindestens in derselben Potenz im Zähler wie im Nenner auf. Das Primideal \mathfrak{p}_i dagegen geht im Nenner in der Potenz $\mathfrak{p}_i^{y_i e_i}$, im Zähler in der Potenz $\mathfrak{p}_i^{\alpha y_i}$ auf, folglich im Zähler genau ein Mal mehr als im Nenner auf.

Man kann daher

$$\mathfrak{p}_i = \left(p, \varphi_i(\vartheta), \pi_i(\vartheta)^{y_i} \cdot \frac{\varphi_i(\vartheta)^{x_i}}{p^{y_i}} \right)$$

setzen, wodurch das Primideal vollständig bestimmt ist.



. Gedruckt 17. September 1924.

ANOTHER CASE OF CONGENITAL MIOSIS OR PINHOLE PUPILS OWING TO HYPO- PLASIA OF THE DILATATOR MUSCLE

BY
S. HOLTH AND O. BERNER

(WITH 8 PLATES, AND 3 FIGURES IN THE TEXT)

(VIDENSKAPSELSKAPETS SKRIFTER I. MAT.-NATURV. KLASSE 1923. No. 23)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN COMMISSION BY JACOB DYBWAD

1924

Fremlagt i fællesmøtet den 26. oktober 1923.

PART I. CLINICAL.

BY

S. HOLTH.

About the anatomical explanation of congenital miosis given by Berner and myself (Bibl. 6 and 7) is found the following remark in a report in "The Lancet" (Sept. 22nd, 1923, p. 614): "The anatomical explanation of the condition was pronounced to be the defective development of the dilatator muscle fibres of the iris. As to this it might be objected that the dilatator muscle of the iris is normally so slight in development that for many years its existence was doubted". To this remark I answered in the same journal (Bibl. 8) as follows: "This doubt might be justified before the good technical methods for depigmentation of the iridial pigmentum epithelium were introduced by Alfieri in 1898; later came the hydrogenium dioxyd method. To-day anatomists would not agree with the quoted passage, finding the dilatator muscle well developed from the pupillary margin to the ciliary border. This was the experience of my collaborator, O. BERNER, examining the iris in 12 normal persons of different ages between 17 and 65. Only in some small spots — few and far between — the front epithelium cells are not transformed into muscular cells (v. SZILY). In our two cases of congenital miosis, anatomically examined, the dilatator did not exist in the periphery of the iris and was nearly absent in the intermediary part in one of them; in other words, the dilatator had no peripheral anchorage. Thus the congenital miosis is well explained: the sphincter pupillae had no functional antagonist".

Since our demonstration in "Det norske medicinske selskap", 23rd February, 1921, published in "Videnskapselskapets Skrifter" 1922 (Bibl. 6), we have had the opportunity of an anatomical examination of both irides in another of the three patients mentioned there. The new microscopical preparations were demonstrated in "Det norske medicinske selskap" the 21st February, 1923 ("Forhandlinger", 1923, p. 21). In this new case also my explanation agrees with BERNER's microscopical find. It is true that the dilatator muscle here is more developed in the intermediary part of the iris than it was in the preceding case; but also in the new case there is

no muscle in the periphery of the iris, which is extremely thin here. The peripheral insertion of the *dilatator* is lacking, the muscle has *no functional origin* and thus *cannot act as the antagonist of the sphincter*.

However rare the congenital miosis may be, I still feel sure that it must be somewhat more frequent than might be expected, to judge from the scanty notes in the literature. The condition may easily be mistaken for annular posterior synechiae after iritis — in spite of this disease never having existed in the case. It is of still greater importance that a congenital pinhole pupil may be mistaken for ARGYLL ROBERTSON'S spinal miosis. In the latter condition the pupil is seldom less than 2 mm. in diameter; in the former, as a rule, between 0.5 and 1 mm. In this congenital miosis the pupil cannot contract either by light or convergence for the simple reason that the pupil cannot become more narrow than it is.

Axel B., *the twin* brother of Anna B., the irides of whom were anatomically examined in our previous work (Bibl. 6, case c), came to me the 29th October 1919. He was more than 52 years, born 28th July 1867. According to the parents his pupils were from birth extremely small like those of his two sisters. He had always enjoyed the best of health; he could not remember any symptom which could imply diseases in the nervous system. Like his twin sister Anna B. he never suffered from headaches or spasm of accommodation. As for his sight he had nothing to complain of but bad seeing in twilight. He said that in his youth, when he was driving on the highroad by twilight, he had difficulties in steering the horse and they both often ended in the ditch. Now that he lives in town he is mostly indoors, and does not like to go out except in full daylight. He is emmetropic in both eyes with $V = \frac{5}{5}$ and reads without glasses Jäger No. 1 at 25 cm. (pinhole pupils: minimal circles of diffusion). The iris in both eyes is an even cinnamon brown, with the radial fibres closely stretched and not undulating: no circular grooves in the periphery. The right pupil is nearly round, 0.75 mm. in diameter; the left pupil forms a horizontal oval 0.5×0.75 mm. in diameter. After two instillations of homatropin 1 per cent. in the course of three hours, the right pupil was dilated to 2×2.5 mm. and the left pupil to 1.75×2 mm.; he is still emmetropic with $V = \frac{5}{5}$, but to be able to read Jäger No. 1 at a distance of 30 cm. he must now use + 3.0 D.; he cannot read without glasses now on account of larger circles of diffusion. During this slight mydriasis the fundus was seen to be normal in the direct image and the refraction stated to be emmetropic. Muscle balance for 5 meters: orthophoria; for 30 cm.: 2° exophoria. The central colour sense good (Ole Bull's and Stilling's tests); the visual fields were normal for white and colours. Cocain did not dilate his pupils any more;

but the palpebral fissures were enlarged (some exophthalmus — this fact shows that the cervical sympathetic nerve functioned well). — I have no illustrations of the pupils before and after homatropin instillation but they corresponded nearly exactly to the pupils of the twin sister Anna B. at the age of 30, before and after instillation of atropin (Bibl. 6, figs. 4 and 5). — I did not advise for this patient the continuous instillation of mydriatics; though admitting the advantage of being able to see well also in twilight, he preferred to be without mydriatics in order to do his office work and his reading without spectacles as hitherto.

On March 6, 1922, Axel B. died of apoplexia cerebri after a few days illness. Post-mortem enucleation was allowed and made six hours after death; protheses, rabbit eyes. The enucleated globes were preserved in Bouin's fluid (a few drops of which were injected in the posterior part of the vitreous) and immediately sent to prosector O. BERNER.

PART II. ANATOMICAL.

BY

O. BERNER.

The examination of the material from Axel B.'s eyes was made, in all essentials, in the way I have described in my former paper (Bibl. 6) in the "Videnskapsselskapets Skrifter." I Mat.-Naturvid. Klasse, No. 4, Kristiania 1922, on those of his twin sister, Anna B. On this occasion, owing to specially favourable circumstances, Dr. HOLTH was able to make the post-mortem examination as early as 6 hours after death, whereas in the previous case a period of 61 hours elapsed before the material was fixed. I received the two eyes in Bouin's fluid, a few drops of which Dr. HOLTH had injected into the posterior part of the vitreous body immediately before the enucleation.

Before proceeding with the working-up of the material, I measured the diameter of the pupils, and found it to be 2.5 mm. in both eyes. In order to give the reader an idea of the miosis in the present case I will mention that in the numerous normal eyes that I have employed for purposes of control in these investigations, I have generally found that the pupil measured about 5 mm. in diameter. In other words the pupil in the present case was only half as large as that of ordinary cadaveric eyes. The exact agreement between the size of the pupil found clinically by Dr. HOLTH after the dropping in of homatropine, and my measurement of the size of the pupils is worthy of notice. I received my control-material from one of the pathological-anatomical institutes in the town; it was taken from normal persons that had been of about the same age as Axel B. The only difference between this material and that from Axel B.'s eyes is that the former had been fixed by the laboratory assistant in ordinary formalin, while I fixed mine in Bouin's fluid.

Before depigmenting the material from Axel B.'s eyes, I endeavoured this time too, to obtain a picture of the back of the iris, which I had found so peculiarly smooth in the twin sister's eye (see Pl. VI, fig. 14, of my previous paper). This time, however, I was not successful in removing the lens; it was firmly attached to the posterior surface of the iris, and I dared not use force for fear of injuring the epithelium of the iris. In order to see, however, whether I could obtain a general view of the posterior surface in this case also, I embedded one of the eyes in celloidin, and then, under

a binocular microscope, exsected the lens and its capsule to an extent that would enable me to form an opinion as to the condition of the posterior surface. I was, of course, unable to avoid now and then injuring the iris, and the light spots in fig. 1 are the marks of my instruments. It will be seen from the figure, however, that the posterior surface of the eye is much smoother than that in fig. 2, of a normal iris from a man of 65. Both these drawings were made by the draughtswoman of the Anatomical Institute, Fröken Mörch, and the preparations lay under the same binocular microscope.

With regard to the depigmentation of my material I may say that it has been carried out in every particular in the manner described in my previous paper. The experience that I have gradually gained in depigmenting the iris has taught me that it is unnecessary to embed it first in thin celloidin. The way in which I now proceed is to place the exsected iris, which was removed together with the ciliary body, in 80 per cent. alcohol, and allow it to remain there for two or three days in order to give it a certain stiffness. This is a great advantage, because the small sectors do not curl up so easily during the subsequent embedding. After the iris has been in the alcohol, I return it to water and divide it either into sectors, which are subjected to depigmentation, or I first depigment it in toto and then cut it into sectors. This has been done, in this case also, by Alfieri's method. As the work connected with this case was carried out during the autumn months, when there is not an abundance of sunshine in Christiania, it occurred to me that the sun's chemical rays might perhaps be replaced by electric light, and I accordingly placed the material that had been treated with potassium permanganate in a vessel containing an oxalic acid solution beneath an ordinary electric bulb¹, and saw, to my great joy, that the material bleached very rapidly. I found, indeed, that even a 1/2 per cent. solution of oxalic acid is sufficient to cause bleaching, whereas by Alfieri's method a 2 per cent. solution is employed. I think that the fact of being able to do with so weak a solution is not without importance to the result, nor can it be a matter of indifference that the bleaching could be attained in a far shorter time than I have frequently had to take when the sunshine was weak.

I think the material should lie in the potassium permanganate solution for a comparatively long time, so that there is a certainty of finishing the bleaching in one operation, for I have seen the material fall to pieces when the bleaching has not been completed the first time and I have attempted to repeat the experiment by placing it once more in the potassium permanganate solution. I therefore recommend a rather longer treatment at first with the oxidising fluid. Sometimes I have not been quite successful in depigmenting the material in this way, but for what reason I cannot say.

¹ Precaution must be taken that the water does not get hot.

I have also depigmented a part of my control material with hydrogen peroxide with particularly good results. For this purpose I have used concentrated hydrogen peroxide from E. Merck, Darmstadt. In order to start the development of gas in the fixed material, I have added, by the advice of Professor TORUP, a very few drops of a weak solution of ammonia. This makes good the loss of the enzymes that may have been destroyed in the tissue during the process of fixing. I can thoroughly recommend this manner of depigmentation for ordinary material, but would not advise its employment on valuable material, such as irides from miotic eyes; for gas-bubbles may sometimes develop in the substance of the iris, and thus cause its deformation.

With regard to the direction of sections and staining I refer the reader to my previous paper (Bibl. 6). The study of this new case is based exclusively upon serial sections, and they have been an inestimable advantage to me.

As the two sets of material that I have had for examination came from a twin brother and sister, it might have been reasonable to expect that the microscopical representation of the eye would be the same in both, more especially as the clinical phenomena were so similar. Anatomically, however, they vary considerably, although there are also great similarities; and it must be remembered that whenever twins are of two sexes, they have come from two different ova. Had these twins been of the same sex, they might possibly have come from one ovum, and in that case it would have been reasonable to expect that the anatomical features would have been the same in both. As they were of different sexes, however, it is not to be wondered at that there is a considerable difference between their eyes.

The great difference between these two cases of congenital miosis is that in the man's eyes there is a well-developed dilatator muscle, not only behind the sphincter, as was the case with his sister, but also in the intermediate part towards the ciliary processes. But before the ciliary processes are reached, the dilatator always ceases in the man's eye, so that with him too, there is no dilatator in the periphery of the iris. I have calculated the part of his irides that is without dilatator to be from about $\frac{1}{8}$ to $\frac{1}{10}$.¹ Fig. 3 gives a diagrammatic general view of his iris, and the difference between the eyes of the twins is immediately apparent on comparing this figure with fig. 6 on Pl. II of my previous paper. One peculiarity in the brother's irides is that the boundary between the parts of the iris that are respectively with and without dilatator, is formed by a curious "projection", which I have shown in the detail-figure, fig. 4. From the photograph reproduced in fig. 5 it is further seen that the outermost part of the iris is much thinner than the part with dilatator, and that the boundary between these zones is distinct, and also that the outermost part (without dilatator) gives

¹ See Plate I, Fig. 3; elsewhere it is $\frac{1}{5}$ (fig. 5) or even more where there is no "projection".

a decided impression of there having been a strong pull upon the periphery of the iris, causing it to stretch considerably.

The condition of the dilatator muscle behind the sphincter presents no features of special interest; it was as I have described it in my previous paper. In the intermediate zone also, the dilatator as a rule appears very distinctly, so distinctly that it is not at all necessary to depigment the sections in order to see it. In fig. 6 I have reproduced a microphotograph of it from this region, and here the membrane of Bruch is distinctly seen. For purposes of comparison I would ask the reader to look at fig. 7, which is taken from a place in which the dilatator is absent. Both photographs are taken with about the same magnification and from sections that have not been depigmented.

It must not be supposed, however, from the description that I have so far given of the dilatator muscle in Axel B.'s eyes, and especially from my reference to fig. 6, that the dilatator is *always* present in the intermediate zone. In the depigmented series, where the conditions can, of course, be most easily judged, small spots may generally be found in this region where the dilatator is altogether absent, and where there is thus complete agreement between the eyes of the brother and sister. The photograph reproduced in fig. 8 shows one of these spots, in which there is not the slightest trace of any contractile substance in front of the iridian epithelium, and where the front stratum of this epithelium consists of long fusiform cells with a rather long, rod-like nucleus. As the photograph distinctly shows, these long fusiform epithelial cells go right up to the stroma, which also exhibits a peculiarly loose structure, very much resembling mucous tissue. In fig. 9 I have reproduced a photograph taken from the same section as fig. 8, with only a very slight displacement of the preparation; and it will be seen that a slight development of the dilatator has taken place here, as in front of the epithelium, between it and the stroma, there are some contractile fibrils, which have given a dark tone of colour to the layer.

These patches where there was no dilatator muscle were, as I have said, never large. In my various series of transverse sections, therefore, I always found a continuous dark line produced by the severed contractile fibrils in front of the iridian epithelium, and between the latter and the stroma. Fig. 10, in my opinion, illustrates this very clearly, and notwithstanding that the photograph was taken from a series through a sector that was about $\frac{1}{4}$ of the iris, I never came across a patch in this series that was distinctly without dilatator; there were only some very narrow cracks in the fibrillar layer, as if it had cracked in the slicing or embedding process. Fig. 10 gives rather the impression that the eye has had quite a well-developed dilatator, and it shows also how 2 prominences push out into the stroma. In the middle of one of these a small light patch is also seen, and there can be little doubt as to their being strengthening fillets such as GRYNFELTT, HEERFORDT and FORSMARK have described. The upper one

in the figure, which has the small light patch on it, even seems to answer to the strengthening fillets which HEERFORDT has described as hollow tubes in the iris of the seal.

I have already drawn attention to the fact that near the place where the dilatator muscle ends in the direction of the ciliary processes, there is often a peculiar *thickening* of the dilatator muscle, which, for want of a better name, I have called the "projection". This is shown in fig. 4, where it will be seen that it is caused by thickening of the dilatator, which sends radiating filaments out into the stroma, while at the same time the epithelium of the iris is also thickened. In the non-depigmented sections it is also seen that in the stroma corresponding to such "projections", there are a good many pigmented cells. If a "projection" such as this be followed, however, through a depigmented series, it will be found that the iridian epithelium does not pass smoothly over the posterior surface of the projection, but that, on the contrary, it is always drawn into the stroma in a duplicature, the "projection" becoming sooner or later associated with an eversion of the epithelium.

In the greater number of my series there is a "projection" such as this near the peripheral part of the iris. Its topographical situation is marked in the diagram in fig. 3, where it is also seen how the iris contracts and becomes thin just beyond this place. In the photograph reproduced in fig. 5, the "projection" is not very clearly marked (owing to the feeble enlargement), although it is shown by the indistinct boundary of the pigmentary layer immediately before the iris contracts so rapidly; but on the other hand the sharp transition to the thin outermost zone where the dilatator is absent, is all the more prominent in that figure. In those parts of my various series *in which there was no "projection"*, it was noticeable that *the part of the iris where there was no dilatator was pushed much farther into the iris (towards the centre) than elsewhere.*

Beyond the "projection" we come, as I have said, to that part of the iris where there is no dilatator. The narrowness of this zone can hardly be explained except by assuming that the sphincter has mechanically pulled the periphery of the iris — with its *aplasia dilatatoris peripherica*¹ — and stretched it considerably. This is borne out by the fact that a protuberance (one of the ciliary processus) is very often found between the "projection" and the ciliary body, which is also seen in fig. 5. The comparatively large protuberance in this figure has a peculiar hyaline stroma, which is strongly stained by eosin, and has come out dark in the photograph. But the same dark shade is also seen in the next protuberance, and it is evident that this is one of the protuberances in the ciliary processes. I think, therefore,

¹ In a normally built iris any detachment of the dilatator from the ciliary border cannot occur. Millions of glaucomatous eyes in all ages between infancy and senium have been treated daily for years by eserine or pilocarpin and the pupils thereby contracted ad extremum without permanent effect; when the miotics are given up the pupils dilate well again.

that a possible explanation of the figure is that the pull has been so strong that the most central ciliary process has been drawn a little way into the iris. A dislocation of the ciliary processes has consequently taken place in a central direction.

In order to give the reader an idea of the completeness of the absence of the dilatator in the outermost part of the iris, I have added a photograph (fig. 11) of the iris immediately before the ciliary processes are reached, and for comparison have photographed the same spot in 2 normal eyes taken from persons of about the same age as Axel B. (figs. 12 & 13). The difference between the miotic eye and the normal eyes is striking. The photograph of one of the normal irides (from a woman rather older than A. B.) is interesting on account of the club-shaped swelling which the dilatator exhibits before it ends.

These reflections upon the peripheral part of the iris where the dilatator is absent might therefore naturally lead to the assumption that the "projection" has originated in a gradual dislocation, by the contraction of the sphincter, of the fixed attachment of the dilatator muscle, which has been drawn in towards the sphincter until at last it lies a little within the intermediate zone. It is a question, however, whether this explanation, plausible though it may seem, is correct, for the fact is that now and again other things have been found in connection with the "projections", which do not harmonise with this assumption. One of these is that not infrequently, just outside — i. e. peripherally with regard to — the "projection" in the stroma, an "epithelial process" is found in the shape of a long rod or a diverticulum, which is attached to the iridian epithelium. Fig. 14 shows one of these. The photograph was taken from a series in which the sections were only $5\ \mu$ in thickness, and the section photographed had curled up a little; hence the indistinctness in the upper part of the figure.

Fig. 15. shows another diverticulum, more highly magnified; and here the connection with the foremost cell-layer in the iridian epithelium is very distinct. These epithelial processes are sometimes surrounded with a layer of contractile fibrils, which again are sometimes absent. They consist of pigmented, fusiform epithelial cells. It is a very peculiar and striking phenomenon that these "epithelial processes" *always* turn out towards the ciliary body. Very occasionally I have been able to follow one in the series right up to a ciliary process, but in general they do not reach far enough to stand in any relation to these processes. While engaged in this work, I have often asked myself why these epithelial processes always turn outwards and never inwards, centripetally, but I am unable to give a satisfactory answer. I have thought that perhaps the reason was to be found in the mechanical conditions. As the dilatator practically speaking always ends in a "projection", and as the sphincter, when contracting, must necessarily draw the end of the dilatator in towards the pupil, because that muscle has no firm attachment to the periphery of the iris, it might be imagined

that the base of these epithelial processes had been shifted in a central direction in relation to their point, which is left lying in the stroma. But then one would have to imagine that these epithelial processes have originally grown straight out in the stroma, and this they cannot have done, for they are often so long that they would have gone right through the iris and farther still, if they had grown straight on. This would have been the case, for instance, with both those shown in figs. 14 and 15. On the other hand it must be remembered that if these epithelial processes owed their existence solely to a chance proliferation, it is curious that I should never have seen one that had taken it into its head to grow in a central direction, in towards the pupil; but processes taking that direction I have never seen. It has also been a puzzle to me why I have found these processes only in the outermost periphery of the iris and never within the "projections". It seems clear to me that they are the result of a disturbance in development, but why this disturbance should manifest itself just at this particular spot I cannot explain. The only possible explanation, I think, is that these *epithelial processes are to be regarded as rudiments of analogous attachments of the dilatator muscle* such as I have shown in fig. 12, which is taken from a normal eye.

That this working hypothesis, which I formed in the course of my study, is correct, is apparent, I think, from the following observation, which I have often made when looking at my various series. Closely associated with the "projections", I have often found a peculiar object, which resembles a sharply bent "hook". I have shown one of these in the microphotograph reproduced in fig. 16. These "hooks" almost always turn off in a peripheral direction, and soon end, as they run out in a point. In the depigmented sections it will be seen that they are surrounded by large quantities of muscle, but in the non-depigmented series it can also be seen that they are accompanied by numerous pigment-cells. The similarity to the conditions in the previously-described "epithelial processes" is clearly apparent on comparison of figs. 14 and 15 with fig. 17. With regard to the epithelial process in fig. 14, I also found round it small quantities of contractile fibrils, while no such fibrils had developed round the corresponding process in fig. 15. It is my opinion, therefore, that fig. 14 shows a transition-stage between the conditions in fig. 15 and those in fig. 17; and I have been confirmed in this view by finding — in a depigmented series in which there was one such sharp "hook", very similar to that shown in fig. 17, in the very middle of the musculature — some few sharply-defined oval cells with a long nucleus and smooth protoplasm. They thus resembled the elements in the front layer of epithelial cells as shown in fig. 8; and I conceive the explanation to be that the iridian epithelium at this place has proliferated and essayed to develop a strong attachment for the dilatator muscle. The greater number of the epithelial cells have been transformed into muscle-elements of the mesodermal type, and have there developed a powerful musculature around this

"hook"; but in the middle of it have been left some cells which have retained the properties of the epithelial cell, and moreover have not differentiated myoglia fibrils.

The musculature which may be developed in connection with a "hook" such as this, can be very large. Fig. 16 shows a section a little to one side of the "hook" itself, but it will be seen that a thick disc of muscle has constricted off a little island of stroma, and that this island is left lying behind the plate of muscle (which is connected above with the dilatator muscle) and in front of the epithelium of the iris. As the latter, here too, has developed some contractile substance, the separated lump of stroma is left in the middle of a space which is bounded in front and behind by the dilatator muscle.

These sharp "hooks", as I have said, almost always make their way at once out towards the ciliary processes; but occasionally it is seen that the epithelium of the iris pushes itself in in the form of a protuberance which turns inwards towards the pupil. These, too, turn off again, however, in an outward direction, although the course is long and devious. In the letter-press fig. 1¹, some sections are given of a very long protuberance of this kind. In section *a* is seen the place where the iridian epithelium turns forward into the stroma. Between this section and the next shown in the illustration, *b*, there are six sections. In this section there is still connection with the epithelium of the iris; but in the next section, *c*, which is four sections farther on in the series, there are some small lumps of pigment surrounded by contractile substance (dilatator muscle), lying isolated in the stroma in front of the iris pigment, and they retain this position through sections *d*, *e*, *f*, and *g*, the only difference being that they gradually move farther and farther down towards the ciliary body, and in section *g* have come right in under a ciliary process. It is evident, from the unaltered appearance of the posterior surface of the iris through all these sections, that this is a growth of epithelium into the stroma, and not a fold-formation.

I have also gone through my various series with regard to some other of these formations. Concerning fig. 16 it may be said that this sharp "hook" was soon dissolved into small patches of iridian epithelium, each fragment being surrounded by smooth muscle-substance, and that after 12 sections a "hook" once more developed, which was identical with the one photographed. In the interval between these two "hooks" the fragments lying in the stroma had drawn together and become one with the posterior iridian epithelium; and there can therefore be no doubt that what is shown by the illustrations can only be explained by a growth of the epithelium into the stroma.

I have found many such "epithelial processes" and "hooks" in my various series, and have followed them from beginning to end without

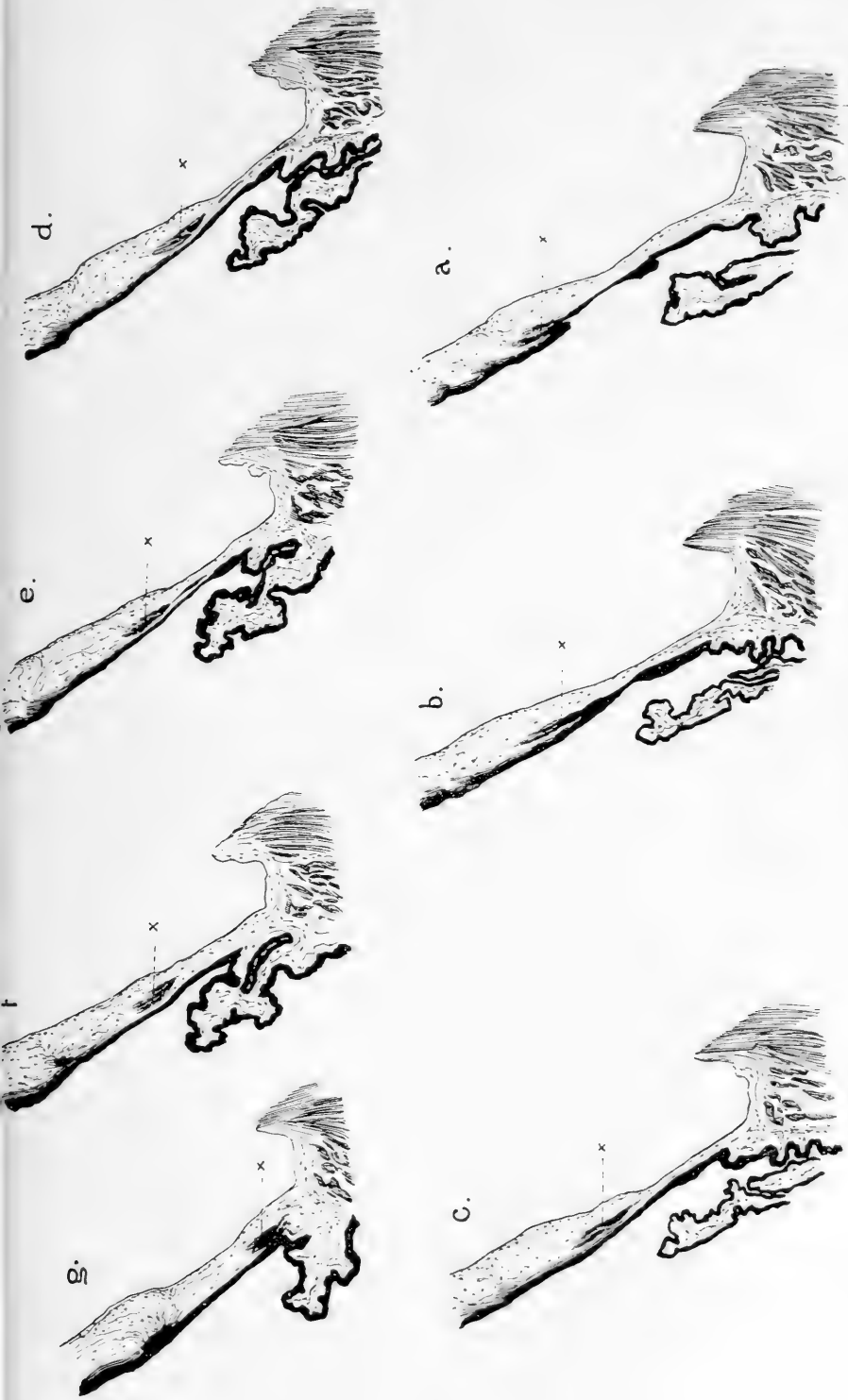
¹ There are 3 figures in the text. All the other references to illustrations concern the Plates I—IX, fig. 1—19.

seeing that they extend farther than into a ciliary process. The study of them has strengthened me in my view that they are probably the rudiments of "anchoring-points" for the dilatator muscle. I consider the club-shaped swollen end of the dilatator (fig. 12) as an "anchoring-point" such as this. The section is taken from a series through a normal iris from a person of the age of 66, and I was able to follow the club-shaped end through 12 sections. There was *no connection between it and the ciliary muscle*¹, nor have I found any *as regards the corresponding formations in Axel B.'s eyes*.

With regard to the "epithelial processes" I must point out that they are usually found together with the "projections", and consequently a little within the iris; but very occasionally I have also seen that the epithelium at the base of the iris, between it and the nearest ciliary process, has grown out in a process of that kind. In one of my series I found, too, under the base of the nearest ciliary process an especially distinct epithelial process consisting of large cells and with no development of muscular fibrils round it. In one section I counted no less than 5 nuclei in it. I was unable, however, to follow it up to the epithelium of the iris, notwithstanding that the series was free from all defects. There is probably, therefore, no other explanation of it than that the connection with the epithelium of the iris was broken, and that thus an epithelial process had been constricted off and left lying under the ciliary process. But in this connection it must be remembered that this epithelial process evidently had its origin close to the base of the iris, and that the latter, in the above-mentioned series, was very thin at the base, as though it had been subjected to considerable stretching inwards. What was found here, therefore, does not quite harmonise with the assumption that the "projections" were the normal attachment of the dilatator muscle, which the sphincter had drawn into the iris a little way. All discoveries are probably explained best by *assuming that developmental disturbances have taken place throughout the peripheral zone of the iris*.

As I am inclined to consider the "projections", the "hooks" and the "epithelial processes" as more or less imperfect attachments for the dilatator muscle, I am also obliged to make a close examination of the periphery of the normal iris, the ciliary border. Opinions regarding the conditions of the dilatator muscle in this part of the iris vary greatly, but there is one thing in which all authors with the exception of von SZILY agree, namely, that the dilatator ends at the periphery of the iris without being connected with the ciliary muscle. In the opinion of some writers the anatomical conditions in this region are simple, but according to the descrip-

¹ On the other hand there was a connection, in the series, with the iridian epithelium, which was drawn into the stroma in a blind duplicature. The starting-point of this duplicature was about at the line *P. a.* in the figure.



Letter-press Fig. 1.

Between figs. a and b there are 6 sections in the series.

b	c	4	"
c	d	5	"
d	e	3	"
e	f	4	"
f	g	6	"

tions of others they are fairly complicated. GRYNFELT, for instance, states that the dilatator ends at once at the base of the iris, as the contractile fibrils cease while the nuclear part passes into the front lamina of the epithelium on the ciliary processes. In this he is supported by KLINGE, who has recently made the dilatator muscle the subject of a comparative anatomical examination. FORSMARK also states that the dilatator in this region presents "relativ einfache Verhältnisse", while GRUNERT, FABER, MERKEL and VON SZILY describe a system of bundles of muscle, stating that in the ciliary border the dilatator splits up into bundles, which are sent out all round the dilatator in the form of off-shoots. VON SZILY and JULER describe bundles which run forward to the pectinate ligament of the iris (where they are even supposed to act as an escape for the vitreous humour; while GRUNERT describes bundles forming "arcades". An outer sphincter is thus produced, and MERKEL and JEROPHEEFF have also described such a muscle, having found that the dilatator-layer near the base of the iris divides into bundles, which bend back and intertwine, forming a thickened outer margin to the dilatator. HEERFORDT, however, has not seen any such thickened outer margin to the dilatator; on the contrary he describes the periphery of the dilatator as remarkably thin, as the development of the contractile substance becomes gradually weaker and weaker as the periphery is approached. Both KOGANEI and HEERFORDT, however, have described *a change in the direction of the dilatator-elements* from radial to circular with an approach to the periphery of the iris. FORSMARK, as already mentioned, has found the conditions comparatively simple. He, too, has found that the dilatator-elements as a rule changed their form, and took a circular direction on approaching the periphery of the iris. The simplest conditions have been found at the base of the ciliary processes, as the fibril-stratum "in geringer Entfernung von der Irisgrenze", begins to decrease and becomes steadily weaker until it "genau an der Basis der Ciliarfortsätze gänzlich aufhört".

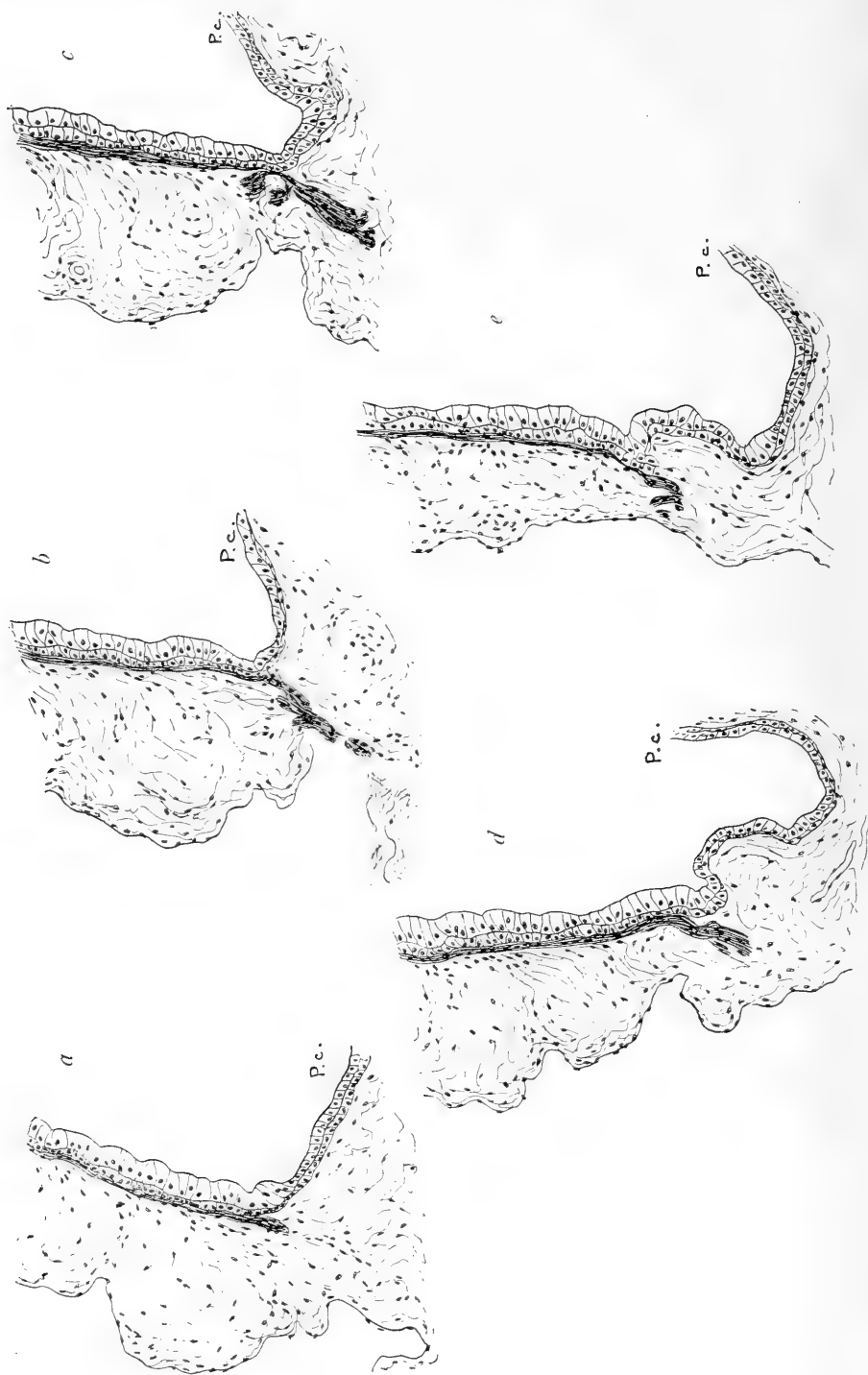
In the ciliary depressions the conditions may be more complicated. Here he has often found that the iris is folded and at the same time is frequently thickened. This thickening is not generally due, however, to any increase of the contractile substance, but to a change in the form of the elements, which are flattened by lateral pressure, so that they may become three times as high as they are broad; and in addition the folding of the iris may contribute to their deformation. FORSMARK has also found in this region, besides this diffuse and more apparent thickening of the dilatator, an actual thickening produced by proliferation of the epithelial cells, which are moved to the front of the stroma and are transformed into muscle-cells of the mesodermal type. They are found in the strengthening bands which he has found in varying numbers in all the irides he has examined. In describing them he says that they begin a little within the inner end of the ciliary processes, generally increase rapidly, and attain their greatest size when, or soon after, they have descended into a ciliary depression, "und werden

darauf gegen den Ciliarrand hin allmählich wieder schwächer". Inside, says FORSMARK, they consist entirely of radial muscle-cells; but after they have come out among the ciliary processes, first the hindmost cell-layers, and then the front ones, bend in a more or less circular direction. In this way they sooner or later escape from the the rest of the muscular layer, and become surrounded on all sides by the iridian stroma. "Unter beständiger Abnahme an Mächtigkeit durch den Abgang zirkulärer Zellen von der Rückseite erreichen sie die Irisgrenze und endigen hier unter Umbiegung nach der einen oder anderen Seite". FORSMARK has only in exceptional cases found bundles of radial muscle that have gone beyond the border of the iris and thus entered a little way into the corpus ciliare. On the other hand it was usual for circular cell-bundles to turn to the nearest ciliary process; and they could frequently be traced to a considerable depth in the basal part of the processes.

It will be seen that the descriptions of the periphery of the dilatator muscle differ considerably. I have gone through our Anatomical Institute's collection of microscopic sections (single sections) through the iris, and have found that most of them show the dilatator as GRYNFELT and HERFORDT state it to be. In some few sections, however, I have seen a short bundle passing outwards and often forwards in the stroma at the base of the iris; but to be able to judge of the exact conditions one should certainly have series at one's disposal. This is apparent from FORSMARK's description where there is a difference between the dilatator in the depressions between the ciliary processes and under the process itself. A real illustration of them can consequently only be given by a sufficiently long series which includes both regions. Fig. 12 is from such a series.

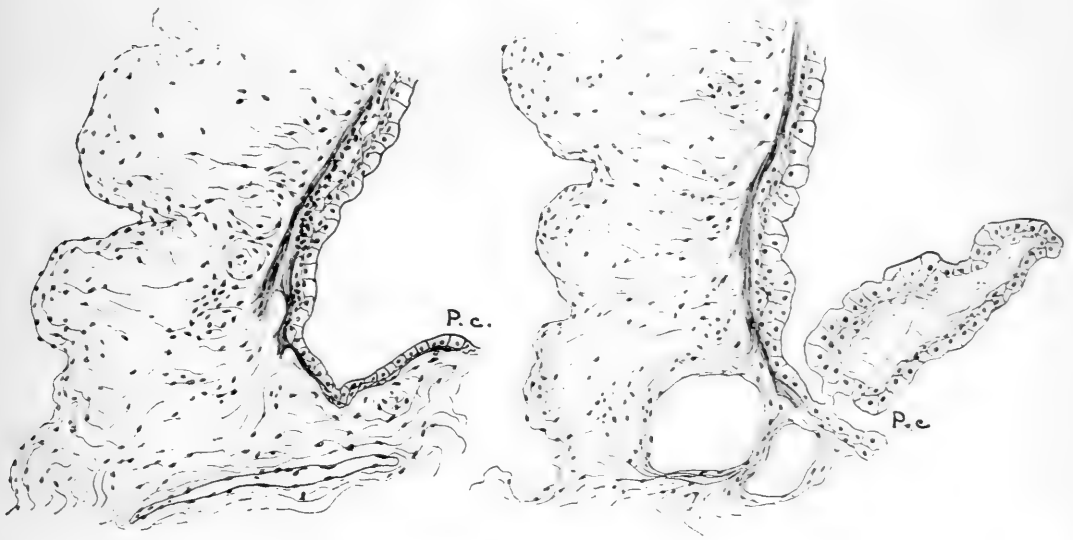
To be able to form a perfectly true judgment in this matter, however, the series should be not only sections cut in a radial direction, but also in "tangential" (transversal) and "frontal" planes. The club-shaped end of the dilatator muscle in fig. 12 could be traced through 12 sections of 10 μ without greatly changing either appearance or direction¹. As I have found no illustration of the periphery of the dilatator quite answering to this figure in any of the works of the authors that I have studied, I have, for purposes of control, cut some series through the peripheral part of some irides, to see whether similar cases were often to be found; for the illustration that most resembles my fig. 12 is GRUNERT's fig. 9, and it will at once be seen that after all there is a great difference between his figure and mine, as the thickening in his material lies a little within the iris, and diminishes before the periphery of the iris is reached, whereas in my case the thickening only begins, so to speak, after the periphery of the iris is reached. I think that GRUNERT's figure about answers to FORSMARK's description of the strengthening bands.

¹ Vide foot-note, page 14.



Letter-press Fig. 2.
Five consecutive serial sections of the periphery of the iris of a woman 40 years old.

In two series of sections through the iris, cut for the purpose of studying the periphery of the iris, one from a 40-year-old woman, and the other from a man of 22, I have found conditions in the periphery of the iris which are not at all unlike those in fig. 12. I have reproduced a drawing of them in letterpress-figure 2. It will be seen that in the woman's eye the dilatator ends in a club-shaped raised ridge, and this could be followed through sections. In the man's eye (Letter-press fig. 3) I found no "club", but the dilatator was pushed far out into the stroma in a somewhat outward direction. In a section near that which is reproduced I found, in the dilatator in the woman's eye, a condition that KLINGE has found in animals, namely, that the



Letter-press fig. 3.

Two consecutive sections of the periphery of the iris of a 22 years old man
(depigmentation: hydrogenium dioxyd).

dilatator bends round the iridian epithelium and follows it a little way inwards and backwards in a direction up towards a ciliary process.

From the few investigations of the periphery of the iris that I have made, it seems to me that such swellings of the dilatator (shown in fig. 12) are not of very rare occurrence, and they must be particularly well adapted for "anchoring points" for the dilatator. But on this point too, our knowledge is not very great¹.

With regard to the question of the attachment of the dilatator, FABER thinks (quoting GRUNERT and FORSMARK) that the dilatator begins at the ciliary border of the iris with a number of bundles which

¹ I have therefore begun to collect material, and intend to return to the question of the periphery of the normal dilatator pupillæ in a future paper.

answer to the immediately underlying veins, and that the bundles make use of these vessels as their attachments.

GRUNERT expresses himself very cautiously (p. 337) on the subject of the "arcades" of dilatator-bundles which he has described in the periphery of the iris, saying that "diesen cirkulären Fasern muß wohl eine besondere Bedeutung zugeschrieben werden, doch wage ich bestimmtes nicht zu behaupten". VON SZILY states that the dilatator gradually becomes smaller as it approaches the periphery, and that the muscle-cells gradually pass into the front layer of the epithelium. This transformation is not complete until the beginning of the first ciliary process. "Bis dahin erkennt man unter den an Höhe mehr und mehr zunehmenden Epithelzellen noch immer eine allmählich dünner werdende Faserlage als Fortsetzung der Bruch'schen Membran". From this membrane he has then seen single groups of smooth-muscle cells radiating freely into the connective tissue. "Diese terminalen Ausstrahlungen beginnen schon in peripheren Gebiet der Iris, die letzten sich ablösenden Bündelchen gehören den Bereich des Corpus ciliare an. So hat es den Anschein, als würde sich die Bruch'sche Membran unter allmählicher Verdünnung gewissermaßen auffassern". VON SZILY has also found these irradiations unevenly distributed. Most of them are found in the ciliary depressions. "Diese Ausstrahlungen stellen in ihre Gesamtheit die ciliare Insertion des Musculus dilatator pupillae dar".

While quoting former investigators who have carefully studied the peripheral thickenings and off-shoots, and regarded them as the ciliary insertion of the dilatator muscle, FORSMARK (p. 58) points out how remarkably different they are frequently found to be, how differently they are developed as regards strength, and how comparatively weak their contractile substance is, and thinks that from this the conclusion may be drawn that these formations are of a chance character, and that it is doubtful whether they are of much importance to the insertion of the muscle. "Die hauptsächlichliche Insertion der Dilatatorschicht am Ciliarrande wird ohne Zweifel dargestellt durch Bindegewebsfibrillen, die in der Irisbasis und dem Ciliarkörper in der Richtung nach innen und hinten gegen die Muskelschicht ziehen, um sich an der Vorderfläche derselben zu befestigen". As both the "epithelial processes" and the "hooks", and also the growing-in of the epithelium into the stroma, as I have shown them in the letterpress-figure 1, all go out towards the ciliary body, and as they undoubtedly originated in proliferation of the epithelium, some of which has been transformed into muscle-cells and some has not, it must be reasonable to consider them as different types of attachment for the periphery of the dilatator muscle. In this we are supported, in my opinion, by the investigations, few though they are, of the embryology of the dilatator. VON SZILY has found in the late foetus and the newborn child, a fillet-like proliferation of the foremost layer of epithelium answering to the ciliary depressions, and expressed as his opinion that they represented the rudiments of the peripheral off-shoots

from the muscle. FORSMARK is of the same opinion. He has seen in 4 fœtus of 5 and 6 months that there were foldings of the front epithelial layer between the ciliary processes, and that they could be followed a short distance in a radial direction. A few of them were constricted off outwards in the form of a tube, which did not, however, leave the epithelial layer. In the 8th foetal month, myoglia fibres began to develop round them.

In my various series from Axel B.'s eyes I have often found, in the peripheral part of the iris, small masses of epithelium just in front of the epithelium-layer. On one occasion I found in one of these lumps a fine fissure between the cells, as if the lump of epithelium had been formed by a duplicature from the front layer; but unfortunately the matter could not be decided, as the iridian epithelium was injured just at that particular place in the series. The series gave me most frequently the impression that the small lumps of epithelium that I found in the stroma immediately in front of the layer of epithelium were produced by the growing forwards and outwards from the front layer, but without its having bent in the form of a duplicature. I have reproduced one of these in fig. 18. The pigmented epithelium is seen like a long, fine thread, making its way out through the stroma and connected with the front layer of iridian epithelium, but there is no crack in it indicating a duplicature. On the other hand there is a distinct, fine crack between the two layers of the epithelium; but even when highly magnified there was no sign that the formation was due to a duplicature. I suppose that if my series had been depigmented, I should have brought out the picture of an ordinary epithelial process which had not developed myo-fibrils round it, and consequently the appearance is best explained by assuming a growth from the front layer of epithelium. A fact that seems to me to accord well with this is that the epithelial process in fig. 18 was found attached to the front folium of the iridian epithelium in only 2 sections. If it had been produced by a duplicature, I think one would reasonably have expected to be able to follow it over a larger field. I have reproduced the circumstances in fig. 18, because unfortunately neither VON SZILY nor FORSMARK, who, as far as I can see, are the only writers who have investigated these embryonal conditions, has given illustrations of the duplicatures they have seen¹. Considering that FORSMARK'S view of these things is that they are chance occurrences, there would seem to be a necessity for a systematic embryological investigation².

The correct view of the conditions may perhaps be that the "projections" and the "epithelial processes" are rudiments of the normally occurring anchoring and strengthening bands, but that the rudiments have come in the wrong place, and that some of them have also been left in an em-

¹ I have not found similar conditions illustrated in Speciale Circuione's paper (Bibl. 11).

² Vide foot-note, p. 19.

bryonal stage; or the rudiments may perhaps have been moved to a wrong place too near to the iris. I will not venture to give any opinion on this question; it requires still further material before it can be answered. It will be interesting to see whether corresponding conditions will be found in future cases of congenital miosis.

In this connection I may mention that on going through my numerous single sections from the irides of the twin sister, Anna B., I have found in a few places analogous "thickenings" near the periphery of the iris.

It will be remembered that single sections of material embedded in celloidin formed the basis of my investigation of the twin sister's eyes. It was not until towards the end of my work that I thought of bleaching the whole iris and embedding it in paraffin, and this, I should think, is the reason for my having overlooked the fact that in her eyes, too, there were these "projections", although not so numerous as in the brother's eyes. From the material I still had left from the sister's eyes, I made some series after previous bleaching, and found two or three such places there too. They were situated in about the same place as in the brother's eyes, perhaps a little more peripherally. In one of them I found that the epithelium had turned into the "projection" in such a degree that it made a large hollow, the wall of which was covered in front by a thick layer of muscle.

It will probably be apparent from the above description that I have always found that the "projections" are associated with other formations, which can only be explained as due to developmental anomalies. Among these anomalies I will direct attention to the thick mass of muscle that is shown in fig. 17, which above looks like a band of muscle pushing into the stroma, but which outwards towards the ciliary processes resembles not a little the club-shaped swelling in fig. 12. All the transitional stages in the development of these formations are also found. A few sections farther on in the series, the muscle in fig. 17 assumed the appearance of a typical "hook", such as is seen in fig. 16. We should therefore be justified in regarding them as various stages or forms of a single developmental anomaly. They are certainly most nearly allied to the strengthening apparatus that HEERFORDT and FORSMARK have described. KLINGE has also made them the subject of a comparative examination, but he has found that the fillets that Heerfordt and Grynfeltt have described as occurring in animals with a *powerful* dilatator pupillæ, are just what occur in those that have a *poorly* developed dilatator. Where they are found in my material, they seem undoubtedly to be the expression of Nature's desire to make up for her neglect in letting the peripheral zone of the iris be without dilatator.

As regards the relations between the dilatator and the sphincter I have little to add to what I found on examination of the sister's eyes, and therefore refer the reader to my previous paper. It is evident from the rather numerous in-drawings of the epithelium of the iris (one of which is shown in fig. 19) that in this case, too, the sphincter has exerted a strong pull

upon the dilatator. The resemblance between this fig. 19 and fig. 17 in my previous paper is clear. With regard to the "long connecting fibres" I can also refer the reader to my previous paper (Pl. VIII, fig. 18 and 19). In the brother's eyes, too, they are built up of cells with an extraordinarily well-marked rod-shaped nucleus, and I can therefore direct attention to fig. 19 in my previous paper as far as they are concerned. I have nothing special to remark about the "short connecting fibres", except that in the brother's eyes the elements in them have a shorter nucleus than those in the "long" connecting fibres, and that thus, with regard to both brother and sister, I have found on this point the reverse of what FORSMARK found.

As regards the nature of the stroma I think several of my photographs give good information. As a whole it appears to consist of a particularly loose connective tissue. In places it has in a marked degree an appearance resembling that of mucoid tissue. This is especially clear in figs. 8 and 9, and is further shown in some of the other microphotographs.

In certain places, however, the connective tissue changes its appearance. It is usually more rigid, for instance, and contains more cells behind the sphincter. But in the vicinity of the "projections" it has also a greater abundance of cells and is more deeply stained with eosin, in particular becoming a bright red colour and assuming a certain hyaline, sclerotic appearance behind the large muscle-plates that I have described as appearing in connection with the "hooks". In fig. 17 we see, for instance, that the connective tissue lying between the muscle-plate in front and the epithelium behind, has a certain hyaline character, which I can only explain as having originated through the constant pressure that the muscle-plate must be assumed to have exerted upon it. I am inclined to explain in the same way the similar appearance of the connective tissue behind the "long" connecting fibres; for here, too, with the dilatator not functioning, it must be assumed that the sphincter has exerted a constant pressure upon the connective tissue, through its long off-shoots. I have never observed inflammatory phenomena.

Although my investigations of the eyes of these twins had rather different results, they agree in so far as, in both, the whole of the periphery of the iris is without dilatator muscle. As therefore that part of it which exists has not had its normal attachment, it must be assumed that it has not been able to function normally. The somewhat better degree of development it had in the man's eyes has not therefore been able to make the clinical discoveries in them different from those in the case of his sister.

The drawings in figs. 1 and 2, and the letterpress-figures have been executed by Fröken S. MÖRCH, the draughtswoman of the University Anatomical Institute. The microphotographs I took myself.

Bibliography.

1. FORSMARK. — "Zur Kenntnis der Irismuskulatur des Menschen; ihr Bau und ihre Entwicklung". *Mitteilungen aus der Augenklinik d. Carol. medico-chirurg. Inst. in Stockholm*. Heft 7, Jena (1905).
2. GRUNERT. — "Der dilatator pupillae des Menschen, ein Beitrag zur Anatomie und Physiologie der Irismuskulatur". *Archiv f. Augenheilkunde*. Bd. 36 (1898).
3. GRYNFELT. — "Le muscle dilateur de la pupille". *Montpellier* (1899).
4. HEERFORDT. — "Studien über den Musculus dilatator pupillae". *Anatom. Hefte*, Bd. 14, (1900).
5. HERZOG. — "Über die Entwicklung der Binnenmuskulatur des Auges". *Archiv für mikroskopische Anatomie*, Bd. 60 (1902).
6. HOLTH AND BERNER. — "Miosis congenita seu microcoria familiaris — ex aplasia musculi dilatatoris pupillae". *Videnskapsselskapets Skrifter*. I. Math.-Naturvid. Klasse. 1922. No. 4.
7. HOLTH AND BERNER. — "Congenital Miosis or Pinhole Pupils owing to Developmental Faults of the Dilator muscle". *The British Journal of Ophthalmology*, September, 1923 (pp. 401 to 419).
8. HOLTH. — "Congenital Miosis". *The Lancet*, October 20th, 1923. p. 906.
9. KLINGE. — "Die inneren Irisschichten der Haussäugetiere". *Anatom. Hefte*, Bd. 36 (1908).
10. v. SZILY. — "Beiträge zur Kenntnis der Anatomie und Entwicklungsgeschichte der hinteren Irisschichten". *Archiv. f. Ophthalmologie*, Bd. 53 (1902).
Addendum during proof-reading:
11. SPECIALE CIRINCIONE. — "Sullo sviluppo dei muscoli e degli strati posteriori dell' iride". *Annali di ophthalmologia e clinica oculistica*. Anno L (Nuova serie VI) 1922.



PLATES

Explanation of the Figures.

Pl. I.

- Fig. 1. Back of Axel B.'s iris after exsection of the lens and its capsule. The light spots are places where the instruments have injured the pigmentary layer. $\times 13$.
- Fig. 2. Back of a normal iris from a man of 63. $\times 13$.
- Fig. 3. General view of Axel of B.'s iris. The arrow shows the place where one of the "long" connecting fibres between the sphincter and the dilatator has drawn the iridian epithelium a little forward in a duplicature.

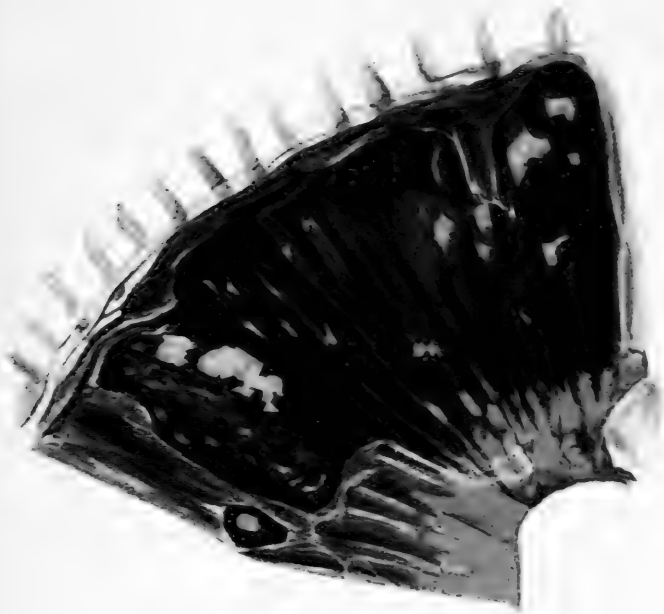


Fig. 1.



Fig. 3.

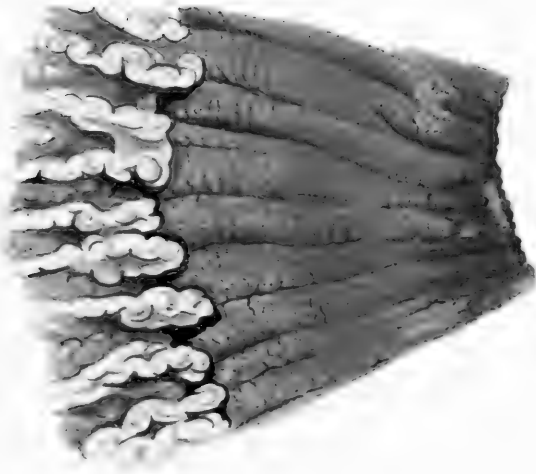


Fig. 2.

Pl. II.

- Fig. 4. A "projection" of the dilatator at its peripheral end. Depigmented section. $\times 350$.
- Fig. 5. A general view of the peripheral part of Axel B.'s iris. The iris is seen to be swollen a little where there is a "projection", and immediately after to become remarkably narrow and thin. At this thin part there is, as if dislocated, one of the ciliary processes. $\times 45$.



Fig. 4.



Fig. 5.

Pl. III.

- Fig. 6. A distinct appearance of the Bruch's membrane in the part of the iris where there is dilatator muscle. Non-depigmented section. $\times 75$.
- Fig. 7. Showing the total absence of dilatator in the peripheral part of A. B.'s iris. Non-depigmented section. $\times 80$.



Fig. 6.

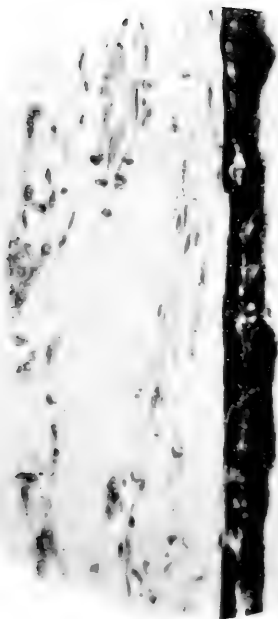


Fig. 7.

PL. IV.

- Fig. 8. A place in a depigmented section where no dilatator has developed, but where the cells in the hindmost layer of iridian epithelium have assumed a marked fusiform shape, with long rod-like nuclei. $\times 400$.
- Fig. 9. A view of the same section as fig. 8, slightly displaced. Some contractile fibres belonging to the dilatator muscle have been differentiated out of the iridian epithelium. Note the peculiar, almost gelatinous nature of the stroma, still more marked here than in fig. 8. A small piece of the lens-capsule has come into the picture behind the iridian epithelium. $\times 400$.

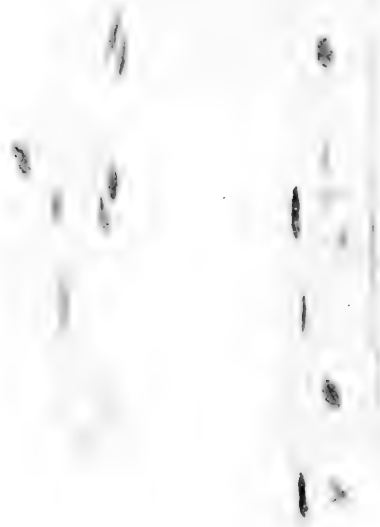


Fig. 8.



Fig. 9.

Pl. V.

Fig. 10. A part of Axel B.'s iris where the dilatator is well developed. Cut transversely ("tangential section"). Two strengthening-bands run out into the stroma. $\times 80$.

Fig. 11. The peripheral part of the iris without dilatator. P. c. = the beginning of a ciliary process. Not depigmented. $\times 50$.

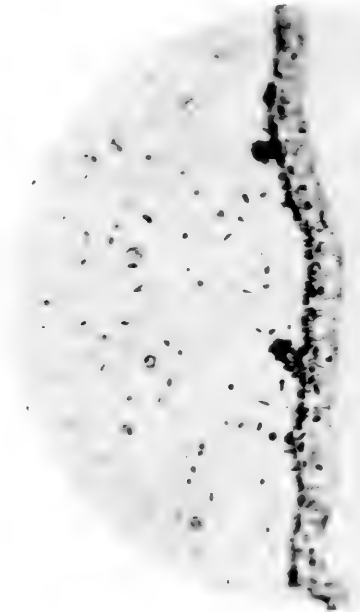


Fig. 10.



Fig. 11.

Pl. VI.

- Fig. 12. The peripheral part of an iris from a woman of 66. P. c. = the beginning of a ciliary process. The line runs to the peculiar, "club"-shaped swelling in which the dilatator ends in this case. Section not depigmented. $\times 50$.
- Fig. 13. The peripheral part, with dilatator, of an iris from a man of 52. P. c. = ciliary process. Section not depigmented. $\times 80$.

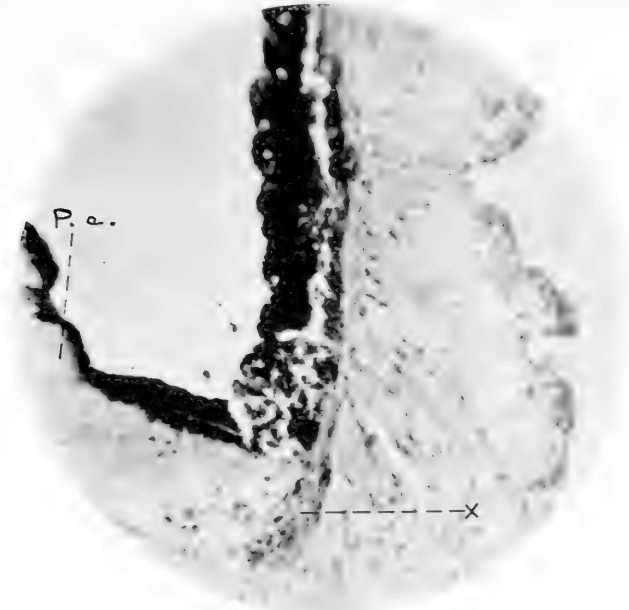


Fig. 12.

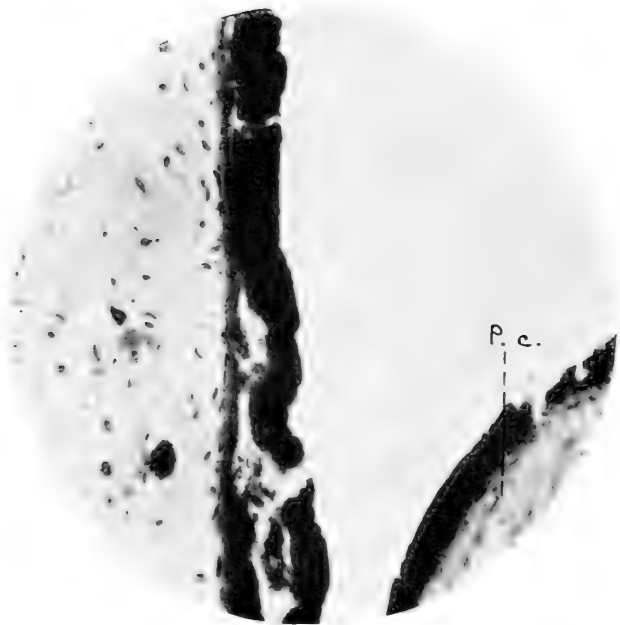


Fig. 13.

Pl. VII.

- Fig. 14. A "rod-shaped" epithelial process surrounded by a thin layer of muscle connected with the iridian epithelium. The section was very thin (5μ) and had curled up a little; hence the indistinctness above. P. c. = beginning of a ciliary process. Depigmented section. $\times 90$.
- Fig. 15. An epithelial process connected with the hindmost layer of iridian epithelium. Depigmented section. $\times 530$.

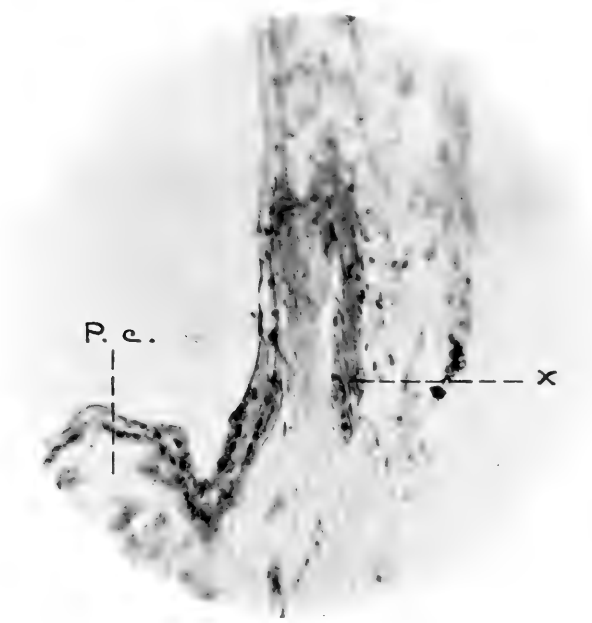


Fig. 14.

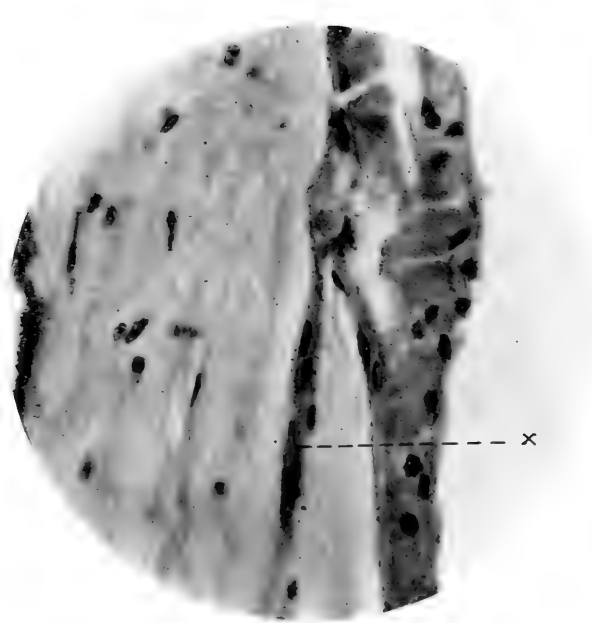


Fig. 15.

Pl. VIII.

- Fig. 16. Showing the large amount of smooth muscle belonging to the dilatator which may develop in connection with the "hooks", and juts out into the stroma like a plate. A poorly developed dilatator is seen immediately in front of the epithelium layer, the stroma between the latter and the muscle-plate having few nuclei. There is hyaline degeneration, but the difference in colour has not come out well. Part of the cornea has come into the picture, and is marked by a white \times cross. $\times 80$.
- Fig. 17. One of the strange "hook-like" sharp bendings of the iridian epithelium forwards and outwards into the stroma. The "hook" points out towards the ciliary body. Not depigmented. $\times 400$.

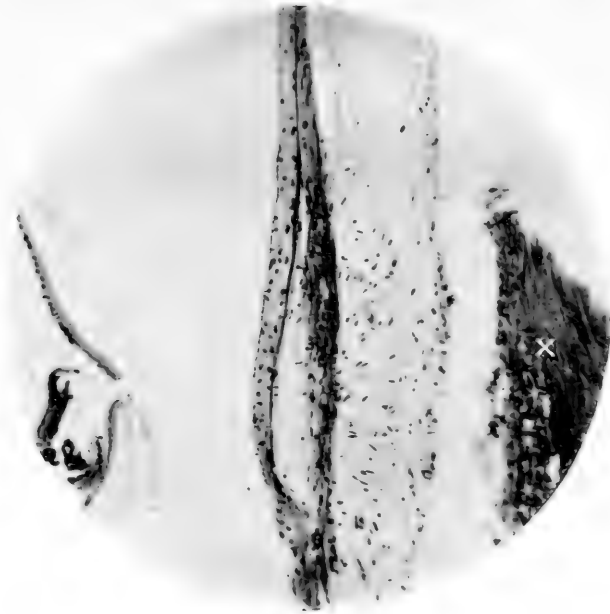


Fig. 16.

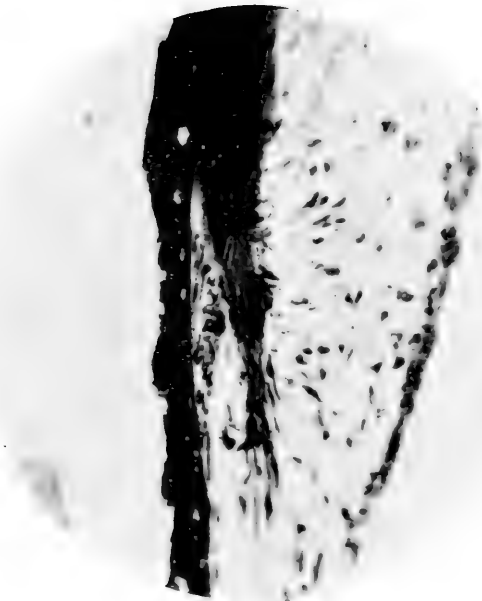


Fig. 17.

Pl. IX.

- Fig. 18. An epithelial process pushing forwards and outwards into the stroma from the iridian epithelium in the peripheral part of Axel B.'s iris. $\times 40$.
- Fig. 19. The drawing in, by the sphincter, of the iridian epithelium in the form of a long duplicature. Non-depigmented section. $\times 40$.

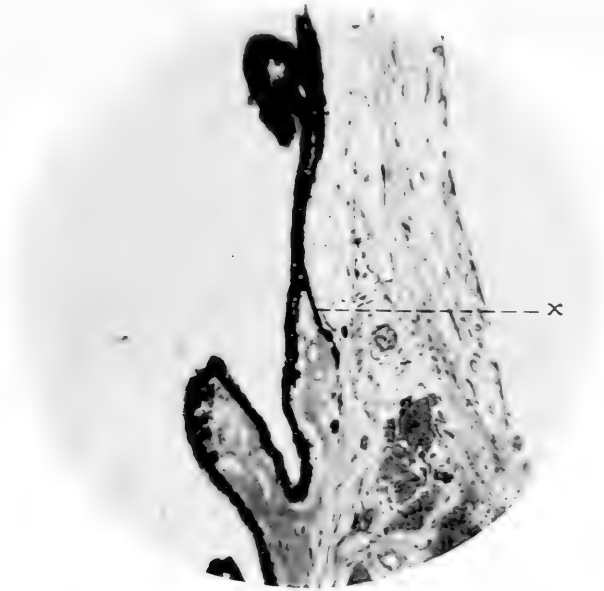


Fig. 18.

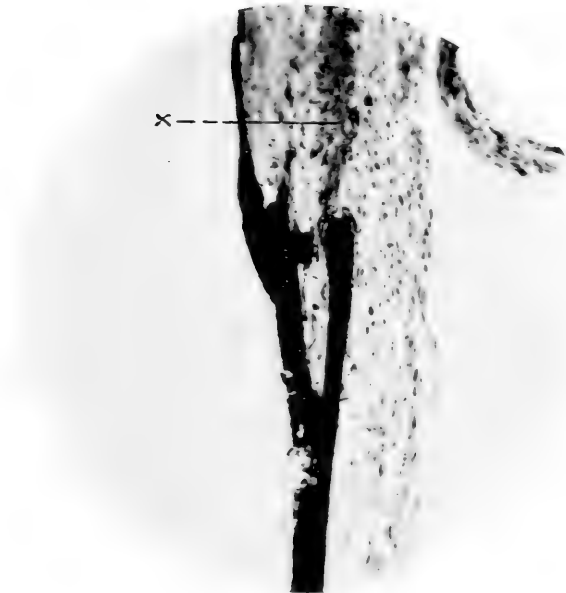
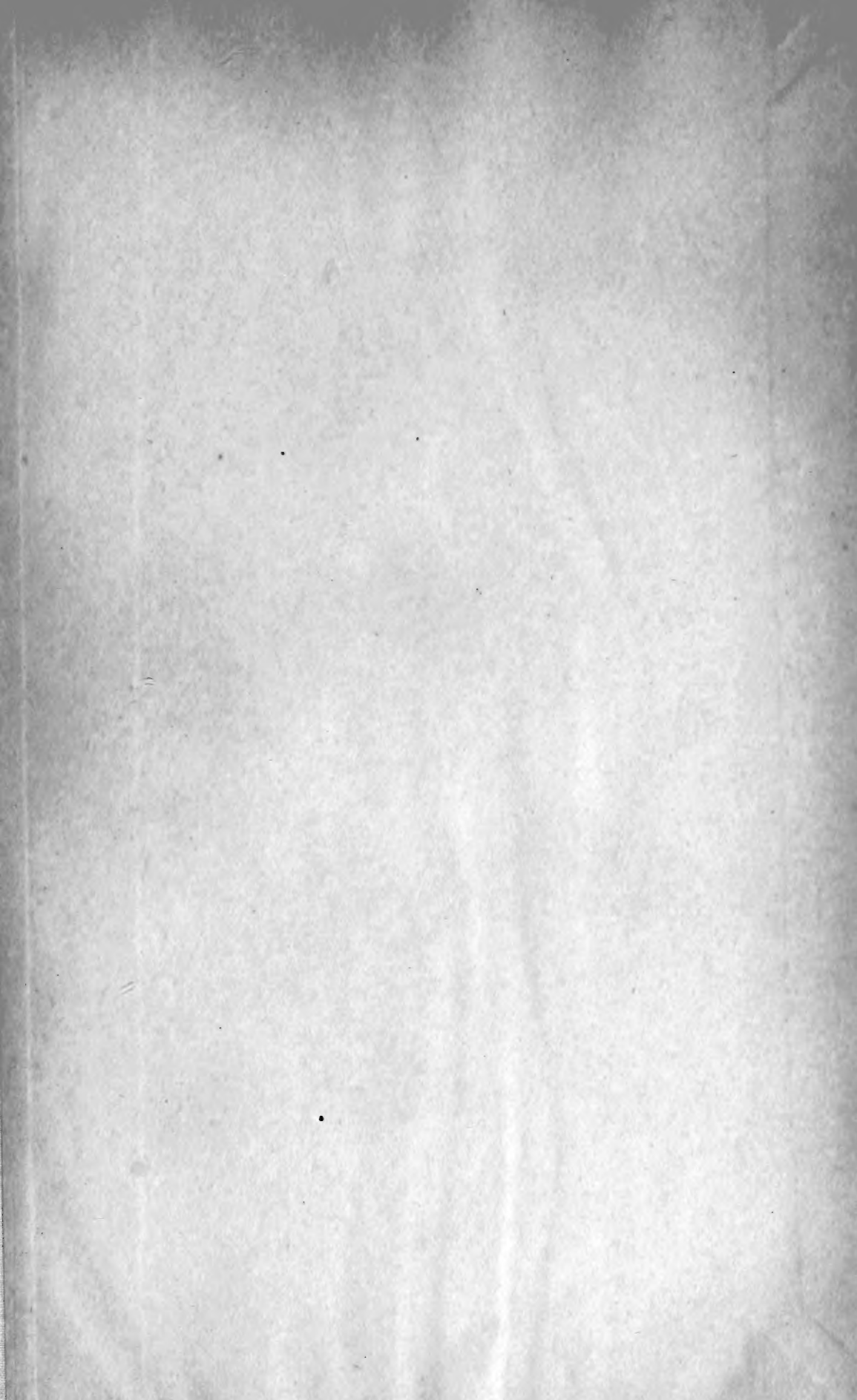


Fig. 19.



10.15
4.2





New York Botanical Garden Library



3 5185 00280 4720

